Leonhard Euler's

Vollständige Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung.

Aus dem Lateinischen übersetzt

und

mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet

von

Johann Andreas Christian Michelsen,

Professor der Mathematik ~~und Physik~~ am Berlinischen Gymnasium.

Zweyter Theil.

Berlin und Libau,

bey Lagarde und Friedrich 1790.

Vorrede.

Um die Erscheinung dieses zweyten Theils der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung, welcher die ersten neun Capitel des zweyten Theils des Originals enthält, nicht zu verspäten, habe ich mich genöthiget gesehen, den größten Theil der dazu bestimmten Zusätze dem folgenden Theile vorzubehalten. Bey der Deutlichkeit und Ausführlichkeit des Eulerischen Werks schadet indeß dieser Aufschub dem Gebrauche desselben auf keine Weise, und ich habe ihn mir um so lieber gefallen lassen, da es allerdings vortheilhafter und bequemer ist, die eigentlichen Zusätze zu dem zweyten Theile erst am Ende des Ganzen folgen zu lassen. Die hier mitgetheilten Anmerkungen, den ersten Theil betreffend, werden Anfängern in der Differenzial-Rechnung hoffentlich nicht unangenehm seyn, da es in der Mathematik allemal mit vielem Vortheile verknüpft ist, wenn man den Weg kennt, auf welchem man ihre Lehren selbst zu erfinden im Stande gewesen seyn würde. Die beyden darin erwähnten Zeichnungen befinden sich mit auf der ersten von den dem folgenden Theile bestimmten Kupfertafeln. Ich hoffe denselben entweder in oder doch bald nach der Ostermesse 1791 zu liefern. Berlin, den 8ten Sept. 1790.

Inhalt

des

zweyten Theils.

Sechs-

Inhalt.

Sechstes Capitel.

Siebentes Capitel.

Achtes Capitel.

Neuntes Capitel.

Voll-

Vollständige Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung.

Zweyter Theil,

welcher

den Gebrauch dieser Rechnung in der Analysis des Endlichen, so wie auch in der Lehre von den Reihen enthält.

Erste Abtheilung.

[illegible]

Erstes Capitel.

Von der Umformung der Reihen.

§. 1.

Da meine Absicht gegenwärtig ist, den Gebrauch der Differenzial-Rechnung sowohl in der gesammten Analysis als in der Lehre von den Reihen zu zeigen: so muß ich noch einiges aus der gemeinen Algebra, welches man in den gewöhnlichen Anleitungen dazu nicht antrifft, vorausschicken. Das meiste findet man zwar in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, einiges aber ist darin nicht berührt worden, theils mit Vorsatz, weil es besser schien, solches erst da zu untersuchen, wo es gebraucht wird, theils weil nicht alles in der Folge nöthige, zum voraus übersehen werden konnte. Hieher gehört die Umformung der Reihen, welche den Inhalt des gegenwärtigen Capitels ausmachen soll, oder die Verwandlung der Reihen in unzählige andere, die insgesammt dieselbe Summe haben, so daß sich, wenn man die Summe der gegebenen Reihe kennt, auch alle übrige summiren lassen. Nach der Vorausschickung dieses Capitels werden wir die Lehre von den Reihen desto besser durch die Differenzial- und Integral-Rechnung zu erweitern im Stande seyn.

 §. 2.

§. 2.

Wir wollen aber vorzüglich solche Reihen betrachten, deren Glieder durch die successiven Potestäten einer unbestimmten Größe multiplicirt sind, indem diese sich am weitesten erstrecken und einen größern Nutzen gewähren.

Es sey also die allgemeine Reihe

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$

gegeben, deren Summe wir, sie mag nun bekannt oder unbekannt seyn, durch S bezeichnen wollen, und es sey also

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun $x = \frac{y}{1 + y}$, wobey man durch den Gebrauch der unendlichen Reihen

$$\begin{array}{lllllllll}
x & = y & - y^2 & + y^3 & - y^4 & + y^5 & - y^6 & + \text{ꝛc.} \\
x^2 & = y^2 & - 2y^3 & + 3y^4 & - 4y^5 & + 5y^6 & - 6y^7 & + \text{ꝛc.} \\
x^3 & = y^3 & - 3y^4 & + 6y^5 & - 10y^6 & + 15y^7 & - 21y^8 & + \text{ꝛc.} \\
x^4 & = y^4 & - 4y^5 & + 10y^6 & - 20y^7 & + 35y^8 & - 56y^9 & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

erhält: so findet man, wenn man diese Werthe substituirt, und die Reihe nach den Potestäten von y ordnet,

$$\begin{array}{llllll}
S = ay & - ay^2 & + ay^3 & - ay^4 & + ay^5 & \text{ꝛc.} \\
 & + b & - 2b & + 3b & - 4b & \\
 & & + c & - 3c & + 6c & \\
 & & & + d & - 4d & \\
 & & & & + e & ^{*)}.
\end{array}$$

§. 3.

*) Man überlege hier nur, wie die Zahl-Coefficienten in den für die Potestäten von x gefundenen Reihen nach und nach aus einander entstehen, so wird man diese ganze Summe aufs gründlichste sich vorzustellen im Stande seyn.

§. 3.

Da wir $x = \frac{y}{1+y}$ gesetzt haben, so ist $y = \frac{x}{1-x}$; und braucht man diesen Werth, so wird die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$

in folgende verwandelt:

$$S = a \cdot \frac{x}{1-x} + (b-a)\frac{x^2}{(1-x)^2} + (c-2b+a)\frac{x^3}{(1-x)^3} + \text{ꝛc.}$$

In dieser Reihe ist der Coefficient des zweyten Gliedes, $b-a$, die erste Differenz von a aus der Reihe a, b, c, d, e, ꝛc. welche wir oben (Th. 1. §. 4.) durch Δa bezeichnet haben; ferner der Coefficient des dritten Gliedes, $c - 2b + a$ die zweyte Differenz $\Delta^2 a$, der Coefficient des vierten Gliedes, die dritte Differenz $\Delta^3 a$, u. s. f. *) Gebraucht man daher diese Differenzen von a, so wie man sie nach und nach aus der Reihe a, b, c, d, e, ꝛc. erhält, so wird die gegebene Reihe in folgende verwandelt:

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \frac{x^4}{(1-x)^4}\Delta^3 a + \text{ꝛc.}$$

deren Summe bekannt ist, sobald man die Summe der gegebenen Reihe kennt. **)

§. 4.

Ist also die Reihe a, b, c, d, ꝛc. so beschaffen, daß ihre Differenzen endlich beständig werden, und dies wird seyn, wenn das allgemeine Glied derselben eine ganze rationale Funktion ist (Th. 1. §. 48.): so hat die Reihe $\frac{x}{1-x}a +$

*) Man vergleiche Th. 1. §. 10.

**) In dem Folgenden wird diese letzte Reihe gebraucht, um die Summe der vorhergehenden zu finden.

$\frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a +$ ꝛc. endlich verschwindende Glieder, und dann ist man im Stande ihre Summe durch einen endlichen Ausdruck auszudrucken. Sind z. B. schon die ersten Differenzen der Reihe a, b, c, d, ꝛc. beständig, so ist die Summe der Reihe

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$
$$=$$
$$\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a.$$

Sind hingegen die zweyten Differenzen jener Coefficienten-Reihe beständig, so ist die Summe der gegebenen Reihe =

$$\frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a.$$

Es lassen sich daher die Summen solcher Reihen aus den Differenzen ihrer Coefficienten sehr leicht finden.

I. Die Summe der Reihe,

$$1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 + \text{ꝛc.}$$

zu finden.

Es ist

die Reihe $1x + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 9x^5 +$ ꝛc.
die 1sten Differ. 2, 2, 2, 2, ꝛc.

Da also die ersten Differenzen beständig sind, so ist die Summe der gegebenen Reihe, weil $a = 1$, $\Delta a = 2$ ist,

$$= \frac{x}{1-x} + \frac{2xx}{(1-x)^2} = \frac{x+xx}{(1-x)^2}.$$

II. Die Summe der Reihe

$$1x + 4xx + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \text{ꝛc.}$$

zu finden, deren

1ste Differ. 3, 5, 7, 9, ꝛc.
2te Differ. 2, 2, 2, ꝛc. sind.

Da

Da $a = 1$, $\Delta a = 3$, und $\Delta^2 a = 2$ ist, so ist die Summe der gegebenen Reihe =

$$\frac{x}{1-x} + \frac{3xx}{(1-x)^2} + \frac{2x^3}{(1-x)^3} = \frac{x + xx}{(1-x^3)}.$$

III. Die Summe der Reihe zu finden:

$S = 4x + 15x^2 + 40x^3 + 85x^4 + 156x^5 + 259x^6 +$ rc.

1ste Differ.	11,	25,	45,	71,	103,	rc.
2te Differ.		14,	20,	26,	32,	rc.
3te Differ.			6,	6,	6,	rc.

Da $a = 4$, $\Delta a = 11$, $\Delta^2 a = 14$ und $\Delta^3 a = 6$ ist, so ist

$$S = \frac{4x}{1-x} + \frac{11xx}{(1-x)^2} + \frac{14x^3}{(1-x)^3} + \frac{6x^4}{(1-x)^4},$$

oder

$$S = \frac{4x - xx + 4x^3 - x^4}{(1-x)^4} = \frac{x(1 + xx)(4 - x)}{(1-x)^4}.$$

§. 5.

Obgleich auf diese Art die Summen von jenen Reihen nur, in so fern dieselben aus einer unendlichen Menge von Gliedern bestehen, gefunden werden, so läßt sich doch auch die Summation eben dieser Reihen bis auf eine gewisse Anzahl von Gliedern aus eben derselben Quelle ableiten. Ist nemlich die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots + ox^n$$

gegeben, so suche man ihre Summe, als wenn sie ohne Ende fortliefe, und diese ist

$$S = \frac{x}{1-x}a + \frac{x^2}{(1-x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1-x)^3}\Delta^2 a + \text{rc.}$$

Nun betrachte man die Glieder, die auf das letzte ox^n folgen, nemlich

 px^{n+1}

$$px^{n+1} + qx^{n+2} + rx^{n+3} + sx^{n+4} + \text{etc.}$$

Wenn man diese Reihe durch x^n dividirt, so läßt sich ihre Summe nach den vorhergehenden Regeln finden, und dann giebt diese Summe, wieder mit x^n multiplicirt, die gesuchte Summe =

$$\frac{x^{n+1}}{1-x}p + \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2}\Delta p + \frac{x^{n+3}}{(1-x)^3}\Delta^2 p + \text{etc.}$$

Zieht man also diese Summe von der Summe der ersten ohne Ende fortlaufenden Reihe ab, so findet man in der Differenz die Summe des gegebenen Stücks, oder

$$S = \frac{x}{1-x}(a - x^n p) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(\Delta a - x^n \Delta p) +$$
$$\frac{x^3}{(1-x)^3}(\Delta^2 a - x^n \Delta^2 p) + \text{etc.}$$

I. Die Summe der Reihe zu finden:

$$S = 1x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots\ldots + nx^n.$$

Man suche die Differenzen der Coefficienten sowohl dieser als der auf nx^n folgenden Glieder

$$\begin{array}{ccccc|cccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \text{etc.} & n+1, & n+2, & n+3, & \text{etc.} \\ & 1, & 1, & 1, & \text{etc.} & & 1, & 1, & \text{etc.} \end{array}$$

Da man auf diese Art $a = 1$, $\Delta a = 1$, $p = n + 1$, $\Delta p = 1$ findet, so ist die gesuchte Summe

$$S = \frac{x}{1-x}(1 - (n+1)x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(1 - x^n), \text{ oder}$$

$$S = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

II. Die Summe folgender endlichen Reihe zu finden:

$$S = 1x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots + n^2x^n.$$

Man suche zuvörderst die Differenzen auf folgende Art:

1,

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
1, & 4, & 9, & 16, & \&c. & (n+1)^2, & (n+2)^2, & (n+3)^2 + \&c. \\
 & 3, & 7, & 9, & & & 2n+3, & 2n+5, \\
 & & 2, & 2, & & & & 2,
\end{array}$$

Hat man diese gefunden, so ist

$$S = \frac{x}{1-x}(1-(n+1)^2x^n) + \frac{x^2}{(1-x)^2}(3-(2n+3)x^n) + \frac{x^3}{(1-x)^3}(2-2x^n) \text{ oder}$$

$$S = \frac{x+xx-(n+1)^2x^{n+1}+(2nn+2n-1)x^{n+2}-nnx^{n+3}}{(1-x)^3}$$

§. 6.

Wenn aber die gegebene Reihe nicht solche Coefficienten hat, die endlich auf beständige Differenzen führen, so leistet diese Verwandlung bey der Bestimmung der Summe keinen Vortheil. Auch kann man dabey die Summe durch keine bequemere Näherung erhalten, als solches durch die Addition der gegebenen Reihe selbst geschiehet. Denn wenn in der Reihe $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 +$ &c. $x < 1$ ist, und in diesem Falle findet die Summation im eigentlichen Verstande allein statt, so ist $\frac{x}{1-x} > x$, und es convergirt daher die gefundene Reihe weniger als die gegebene. Ist aber x darin $= 1$, so werden alle Glieder der neuen Reihe unendlich groß, und in diesem Falle ist diese Verwandlung von gar keinem Nutzen.

§. 7.

Wir wenden uns zur Betrachtung solcher Reihen, in welchen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, dergleichen man aus den vorhergehenden erhält, wenn man x negativ nimmt. Es sey daher

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{etc.}$$

von welcher Reihe man die entgegengesetzte bekommt, wenn man in der vorhin betrachteten x negativ seyn läßt. Sucht man hier wieder, wie vorhin, die Differenzen $\Delta a, \Delta^2 a, \Delta^3 a$ aus der Reihe $a, b, c, d, e,$ etc., so daß man die Zeichen bloß auf die Potestäten von x bezieht: so wird die Reihe

$$S = \frac{x}{1+x}a - \frac{x^2}{(1+x)^2}\Delta a + \frac{x^3}{(1+x)^3}\Delta^2 a - \frac{x^4}{(1+x)^4}\Delta^3 a + \text{etc.}$$

Man sieht hieraus, daß sich diese Reihen in eben den Fällen summiren lassen, in welchen solches bey den vorhergehenden möglich war, wenn nemlich die Reihe $a, b, c, d,$ etc. endlich zu beständigen Differenzen führt.

§. 8.

In diesem Falle ist aber die gedachte Verwandlung sehr nützlich, um den Werth der gegebenen Reihe durch die Näherung zu finden. Denn wie groß auch x in der Reihe

$$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \text{etc.}$$

seyn mag, so ist doch der Bruch $\frac{x}{1+x}$, nach dessen Potestäten die daraus gemachte Reihe fortschreitet, kleiner als die Einheit. Ist z. B. $x = 1$, so ist $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$, und ist $x < 1$, z. B. $x = \frac{1}{n}$, so wird $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{n+1}$, und es convergirt daher die durch die Verwandlung gefundene Reihe immer stärker als die gegebene. Um insbesondere den Fall zu betrachten, wenn $x = 1$ ist, so sey

$$S = a - b + c - d + e - f + \text{etc.}$$

Bezeichnet man hier die ersten, zweyten und folgenden Differenzen, welche die Reihe $a, b, c, d, e,$ etc. giebt, durch Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, etc. so wird

$$S = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\triangle a + \frac{1}{8}\triangle^2 a - \frac{1}{16}\triangle^3 a + \text{2c.}$$

und dadurch erhält man die Summe, wenn sich dieselbe nicht genau darstellen läßt, durch eine hinlänglich bequeme Näherung.

§. 9.

Den Gebrauch dieser letzten Verwandlung, wobey wir $x = 1$ gesetzt haben, wollen wir an einigen Beyspielen zeigen, und zwar zuvörderst an solchen, wo die wahre Summe endlich ausgedruckt werden kann. Dergleichen geben die divergirenden Reihen, bey welchen die Zahlen a, b, c, d, e, 2c. endlich zu beständigen Differenzen führen; da aber die Summen derselben, in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes nicht dargestellt werden können, so nehmen wir diese Benennung hier in der ihr oben (Th. 1. Cap. 3. §. 111.) beygelegten Bedeutung, so daß darunter nichts anders verstanden wird, als der Werth des endlichen Ausdrucks, aus dessen Entwickelung die gegebene Reihe entspringt.

I. Es sey also die Leibnizische Reihe gegeben:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{2c.}$$

Da hier alle Glieder einander gleich sind, so werden alle Differenzen $= 0$; und da $a = 1$ ist, so ist $S = \frac{1}{2}$.

II. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{2c.}$$

1ste Differ. = 1, 1, 1, 1, 1, 2c.

Da $a = 1$, und $\triangle a = 1$ ist, so wird $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

III. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \text{2c.}$$

1ste Differ. = 2, 2, 2, 2, 2c.

Da $a = 1$ und $\triangle a = 2$ ist, so wird $S = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$.

IV. Es

IV. Es sey die Reihe der Trigonal-Zahlen gegeben:

$$S = 1 - 3 + 6 - 10 + 15 - 21 + \text{ꝛc.}$$

1ste Differ. = 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc.
2te Differ. = 1, 1, 1, 1, ꝛc.

Da $a = 1$, $\Delta a = 2$ und $\Delta^2 a = 1$ ist, so wird

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{8}.$$

V. Es sey die Reihe der Quadrat-Zahlen gegeben:

$$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{ꝛc.}$$

1ste Differ. = 3, 5, 7, 9, 11, ꝛc.
2te Differ. = 2, 2, 2, 2, ꝛc.

Da $a = 1$, $\Delta a = 3$ und $\Delta^2 a = 2$ ist, so wird

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{8} = 0.$$

VI. Es sey die Reihe der Biquadrat-Zahlen gegeben:

$$S = 1 - 16 + 81 - 256 + 625 - 1296 + \text{ꝛc.}$$

1ste Differ. = 15, 65, 175, 369, 671, ꝛc.
2te Differ. = 50, 110, 194, 302, ꝛc.
3te Differ. = 60, 84, 108, ꝛc.
4te Differ. = 24, 24, ꝛc.

Es ist also

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{15}{4} + \tfrac{50}{8} - \tfrac{60}{16} + \tfrac{24}{32} = 0.$$

§. 10.

Wenn die Reihen stärker divergiren, wie z. B. die geometrischen und andere ihnen ähnliche, so kann man dieselben auf diese Art sogleich in mehr convergirende Reihen verwandeln, und wenn diese neuen Reihen noch nicht stark genug convergiren, so kann man daraus durch Wiederholung der Verwandlung noch stärker convergirende Reihen finden.

I. Es sey die geometrische Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \text{ꝛc.}$$

1ste

1ste Differ. = 1, 2, 4, 8, 16, ꝛc.
2te Differ. = 1, 2, 4, 8, ꝛc.
3te Differ. = 1, 2, 4, ꝛc.

Da das erste Glied aller dieser Differenzen = 1 ist, so ist die Summe der gegebenen Reihe

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64} + \text{ꝛc.}$$

wovon die Summe $= \frac{1}{3}$ ist. Denn es entspringt diese letzte Reihe aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{2+1}$, da hingegen die gegebene aus dem Bruche $\frac{1}{1+2}$ entsteht.

II. Es sey die wiederkehrende Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 5 - 12 + 29 - 70 + 169 - \text{ꝛc.}$$

1ste Differ. = 1, 3, 7, 17, 41, 99, ꝛc.
2te Differ. = 2, 4, 10, 24, 58, ꝛc.
3te Differ. = 2, 6, 14, 34, ꝛc.
4te Differ. = 4, 8, 20, ꝛc.
5te Differ. = 4, 12, ꝛc.
6te Differ. = 8, ꝛc.

Es formiren also die hier nach und nach gefundenen Differenzen folgende geometrische Progression mit doppelten Gliedern:

1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, ꝛc.
und es ist daher

$$S = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{8} - \tfrac{2}{16} + \tfrac{4}{32} - \tfrac{4}{64} + \tfrac{8}{128} - \text{ꝛc.}$$

oder, weil sich außer dem ersten Gliede jede zwey folgende Glieder aufheben, $S = \frac{1}{2}$. Es entspringt aber die gegebene Reihe aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2}$, wie

wie

wir bey der Erklärung der Natur der wiederkehrenden Reihen gezeigt haben. *)

III. Es sey die hypergeometrische Reihe gegeben:

$$S = 1 - 2 + 6 - 24 + 120 - 720 + 5040 - \text{etc.}$$

deren Differenzen am leichtesten auf folgende Art aufgesucht werden können.

	1ste Diff.	2te Diff.	3te Diff.
1	1	3	11
2	4	14	64
6	18	78	426
24	96	504	3216 etc.
120	600	3720	27240
720	4320	30960	256320
5040	35280	287280	2656080
40320	322560	2943360	
362880	3265920		
3628800			

Setzt man diese Differenzen weiter fort, so findet man

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \frac{16687}{256}$$
$$+ \frac{148329}{572} - \frac{1468457}{1024} + \frac{16019531}{2048} - \frac{190809411}{4096} + \text{etc.}$$

Zieht man die beyden ersten Glieder zusammen, so wird $S = \frac{1}{4} + A$, wenn

A =

*) Von den wiederkehrenden Reihen handelt Euler in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen im 5ten und 13ten Capitel des 1sten Theils. Von der hier gegebenen wiederkehrenden Reihe findet man nach einer kurzen Ueberlegung, daß die Beziehungs-Scale $-2, +1$, ist, und hat man diese entdeckt, so ist auch der Bruch bekannt, aus dessen Entwickelung die Reihe entspringt.

$$A = \frac{3}{8} - \frac{11}{16} + \frac{53}{32} - \frac{309}{64} + \frac{2119}{128} - \text{ꝛc.}$$

ist. Sucht man nun von neuem auf eben die Art die Differenzen, so wird

$$A = \frac{3}{2^4} - \frac{5}{2^6} + \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \frac{615}{2^{12}} - \frac{4401}{2^{14}} + \frac{36585}{2^{16}} - \frac{342207}{2^{18}} + \frac{3565323}{2^{20}} - \frac{40866525}{2^{22}} + \text{ꝛc.}$$

Vereiniget man abermals die beyden ersten Glieder, weil sie convergiren, so wird

$$A = \frac{7}{2^6} + B, \text{ wenn } B = \frac{21}{2^8} - \frac{99}{2^{10}} + \text{ꝛc. ist.}$$

Nimmt man aber auch von dieser Reihe die Differenzen, so wird

$$B = \frac{21}{2^9} - \frac{15}{2^{12}} + \frac{159}{2^{15}} - \frac{429}{2^{18}} + \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \frac{338835}{2^{27}} - \frac{2771097}{2^{30}} + \text{ꝛc.}$$

Zieht man hier die vier ersten Glieder in eine Summe zusammen, und setzt man $B = \frac{153}{2^{12}} + \frac{843}{2^{18}} + C$, so daß $C = \frac{5241}{2^{21}} - \frac{26283}{2^{24}} + \text{ꝛc.}$ ist, so findet man bey wirklicher Vereinigung etlicher Glieder $C = \frac{15645}{2^{24}} - \frac{60417}{2^{30}}$, und hieraus schließt man endlich auf die Summe der gegebenen Reihe, welche auf diese Art $S = 0,40082038$ wird. Da indeß die Reihe so außerordentlich divergirt, so kann man davon kaum 3 oder 4 Zifern als genau ansehen; aber ausgemacht ist, daß diese Summe zu klein ist. Ich habe nemlich auf andern Wegen dieselbe $= 0,4036524077$ herausgebracht, und hier ist selbst die letzte Zifer noch richtig.

§. 11.

§. 11.

Vorzüglich groß ist aber der Nutzen dieser Verwandlung, wenn Reihen, die langsam convergiren, in schneller convergirende verwandelt werden sollen. Da indeß in diesem Falle die folgenden Glieder kleiner sind als die vorhergehenden, so werden die ersten Differenzen negativ, daher man denn bey den folgenden auf die Zeichen sorgfältig Rücksicht zu nehmen hat.

I. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{1ste Diff.} = -\tfrac{1}{2};\ -\frac{1}{2.3};\ -\frac{1}{3.4};\ -\frac{1}{4.5};\ -\frac{1}{5.6}$$

$$\text{2te Diff.} = +\tfrac{1}{3};\ \frac{2}{2.3.4};\ \frac{2}{3.4.5};\ \frac{2}{4.5.6};$$

$$\text{3te Diff.} = -\tfrac{1}{4};\ -\frac{2.3}{2.3.4.5};\ -\frac{2.3}{3.4.5.6}$$

$$\text{4te Diff.} = +\tfrac{1}{5};\ \text{ꝛc.}$$

Hiernach ist also

$$S = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \text{ꝛc.}$$

und von beyden Reihen ist bereits in der Einleitung gezeigt worden, daß sie den hyperbolischen Logarithmen von 2 geben. *)

II. Es

*) Daß $l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc.}$ ist, läßt sich aus $l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ꝛc.}$ (Einl. Th. 1. §. 123.) herleiten; daß aber $l2 = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16}$ + ꝛc. erinnere ich mich, wenigstens jetzt nicht, in der Einleitung gelesen zu haben.

II. Es sey die Reihe für den Zirkel (Einl. Th. 1. §. 140.) gegeben,

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{rc.}$$

$$\text{1ste Diff.} = -\frac{2}{1.3};\ -\frac{2}{3.5};\ -\frac{2}{5.7};\ -\frac{2}{7.9};\ -\frac{2}{9.11};\ \text{rc.}$$

$$\text{2te Diff.} = \quad +\frac{2.4}{1.3.5};\ \frac{2.4}{3.5.7};\ \frac{2.4}{5.7.9};\ \frac{2.4}{7.9.11};\ \text{rc.}$$

$$\text{3te Diff.} = \quad -\frac{2.4.6}{1.3.5.7};\ -\frac{2.4.6}{3.5.7.9};\ -\ \text{rc.}$$

Hieraus folgt also

$$S = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{3.2} + \frac{1.2}{3.5.2} + \frac{1.2.3}{3.5.7.2} + \text{rc.}$$

oder

$$2S = 1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \text{rc.}$$

III. Den Werth der unendlichen Reihe zu finden:

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + l6 - l7 + l8 - l9 + \text{rc.}$$

Da die Differenzen im Anfange gar zu ungleich sind, so vereinige man die ersten Glieder bis zu $l10$ aus den Tafeln, wodurch man $-0{,}3911005$ findet, und also

$$S = -0{,}3911005 + l10 - l11 + l12 - l13 + l14 - l15 + \text{rc.}$$

bekömmt. Nun nehme man diese Logarithmen aus den Tafeln, und suche ihre Differenzen auf folgende Art:

	1. Diff.	2. Diff.	3. Diff.	4. Diff.	5. Diff.
$l10 = 1{,}0000000$	+	−	+	−	+
$l11 = 1{,}0413927$	413927				
		36042			
$l12 = 1{,}0791812$	377885		5779		
		30263		1292	
$l13 = 1{,}1139434$	347622		4487		368
		25776		924	
$l14 = 1{,}1461280$	321846		3563		
		22213			
$l15 = 1{,}1760913$	299633				

Hieraus findet man

$$l10 - l11 + l12 - l13 + \text{ꝛc.} = \frac{1,0000000}{2} - \frac{413927}{4} -$$

$$\frac{36042}{8} - \frac{5779}{16} - \frac{1292}{32} - \frac{268}{64} = 0,4891606$$

und es ist daher die Summe der gegebenen Reihe

$$S = l2 - l3 + l4 - l5 + \text{ꝛc.} = 0,0980601 = l1,253315.$$

§. 12.

So wie wir diese Verwandlungen dadurch zu Stande gebracht haben, daß wir in der gegebenen Reihe für x den Bruch $\frac{y}{1 \pm y}$ setzten: so giebt es noch unzählige andere Verwandlungen, wenn anstatt x andere Funktionen von y gesetzt werden. Es sey abermals die Reihe:

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{ꝛc.}$$

gegeben. Setzt man darin $x = y(1 - y)$, so erhält man dafür

$$\begin{array}{llllllll}
S = ay & - ayy & & & & & & \\
 & + byy & - 2by^3 & + by^4 & & & & \\
 & & + cy^3 & - 3cy^4 & + 3cy^5 & - cy^6 & & \\
 & & & + dy^4 & - 4dy^5 & + 6dy^6 & & \\
 & & & & + ey^5 & - 5ey^6 & \text{ꝛc.} & \\
 & & & & & + fy^6 & &
\end{array}$$

Läßt sich nun eine von diesen Reihen summiren, so läßt sich auch die Summe der andern finden. Ist z. B.

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.} = \frac{x}{1 - x},$$

so wird

$$S = y - y^3 - y^4 + y^6 + y^7 - y^9 - y^{10} + \text{ꝛc.}$$

und die Summe dieser Reihe ist $= \frac{y - yy}{1 - y + yy}$.

§. 13.

§. 13.

Bricht die andere Reihe irgendwo ab, so läßt sich die Summe der ersten Reihe absolut ausdrucken. Angenommen daß $a = 1$ sey, und daß in der gefundenen Reihe alle Glieder nach dem ersten verschwinden, so daß $S = y$ werde; so wird, weil $x = y - yy$ ist, die Summe der ersten Reihe $= \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$.

Da aber $a = 1$ ist, so wird

$$b = 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2$$

$$c = 2 = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot 2^4$$

$$d = 5 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 2^6$$

$$e = 14 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot 2^8$$

$$f = 42 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot 2^{10}$$

$$g = 132 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} \cdot 2^{12} \text{ 2c.}$$

und hierdurch verwandelt sich die erste Reihe in folgende:

$$S = \frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - x)} = x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 14x^5 + 42x^6 + 132x^7 + \text{2c.}$$

Eben diese Reihe findet man auch, wenn man die Wurzel-Größe $\sqrt{(\frac{1}{4} - x)}$ in eine Reihe auflöset, und diese von $\frac{1}{2}$ abzieht.

§. 14.

Um dieser Verwandlung einen desto größern Umfang zu geben, so sey $x = y(1 + ny)^{\nu}$, wodurch die gegebene Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{2c.}$$

in folgende verwandelt wird: $S = ay + \frac{\nu}{1} nay^2$

$$\begin{array}{llll}
 & & & + by^2 \\
+ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} n^2 ay^3 & + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} n^3 ay^4 & + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4} n^4 ay^5 & \\
+ \frac{2\nu}{1} nby^3 & + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1.2} n^2 by^4 & + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)}{1.2.3} n^3 by^5 & \\
+ cy^3 & + \frac{3\nu}{1} ncy^4 & + \frac{3\nu(3\nu-1)}{1.2} n^2 cy^5 & \\
 & + dy^4 & + \frac{4\nu}{1} ndy^5 & \\
 & & + ey^5 & \\
 & \text{etc.} & &
\end{array}$$

Wenn also die Summe von jener Reihe bekannt ist, so kennt man auch die Summe von dieser, und umgekehrt. Da aber n und ν nach Belieben angenommen werden können, so lassen sich aus dieser einzigen Reihe unzählige andere summirbare Reihen finden.

§. 15.

Es können die Verwandlungen aber auch auf eine solche Art unternommen werden, daß die Summe der gefundenen Reihe irrational wird. Es sey die Reihe gegeben:

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + fx^{11} + \text{etc.}$$

wo folglich

$$Sx = ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10} + fx^{12} + \text{etc.}$$

wird. Setzt man daher

$$x = \frac{y}{\sqrt{(1-nyy)}}, \text{ so wird } xx = \frac{y^2}{1-nyy},$$

und die gegebene Reihe wird in folgende verwandelt:

$$\frac{Sy}{\sqrt{(1-nyy)}} =$$

$$\begin{array}{l} ay^2 + nay^4 + n^2ay^6 + n^3ay^8 + n^4ay^{10} + \text{etc.} \\ \quad + by^4 + 2nby^6 + 3n^2by^8 + 4n^3by^{10} + \text{etc.} \\ \qquad + cy^6 + 3ncy^8 + 6n^2cy^{10} + \text{etc.} \\ \qquad\quad + dy^8 + 4ndy^{10} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad + ey^{10} + \text{etc.} \end{array}$$

Wenn also die Summe S aus der ersten Reihe bekannt ist, so kennt man zugleich die Summe der folgenden Reihe:

$$\frac{S}{\sqrt{(1-nyy)}} = ay + (na+b)y^3 + (n^2a+2nb+c)y^5 + (n^3a+3n^2b+3nc+d)y^7 + \text{etc.}$$

§. 16.

Wenn man $n = -1$ nimmt, so werden die Coefficienten dieser Reihe die Differenzen von a, aus der Reihe a, b, c, d, etc.; wenn aber die Zeichen in der gegebenen Reihe abwechseln, so werden die Coefficienten diese Differenzen, wenn man $n = 1$ setzt. Bedeuten also Δa, $\Delta^2 a$, $\Delta^3 a$, $\Delta^4 a$, etc. die Differenzen von a aus der Zahlen-Reihe a, b, c, d, e, etc. und ist

$$S = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + ex^9 + \text{etc.}$$

so wird, wenn man $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$ nimmt,

$$\frac{S}{\sqrt{(1+yy)}} = ay + \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 + \Delta^3 a.y^7 + \text{etc.}$$

Ist hingegen

$$S = ax - bx^3 + cx^5 - dx^7 + ex^9 - \text{etc.}$$

so wird, wenn man $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$ setzt,

$$\frac{S}{\sqrt{(1-yy)}} = ay - \Delta a.y^3 + \Delta^2 a.y^5 - \Delta^3 a.y^7 + \text{etc.}$$

Wenn also die Reihe a, b, c, d, e, ꝛc. endlich auf beständige Differenzen führt, so kann jede dieser Reihen absolut summirt werden; indeß fließt diese Summation auch aus dem Obigen.

§. 17.

Wenn die Coefficienten a, b, c, d, e, ꝛc. diese Reihe: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, ꝛc. bilden, so ist, wie wir vorhin (§. 11.) gesehen haben, $a = 1$, $\Delta a = -\frac{2}{3}$; $\Delta^2 a = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$; $\Delta^3 a = -\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}$; ꝛc. Hieraus ergiebt sich die Summation folgender beyden Reihen

I. Es sey $S = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 +$ ꝛc., wo also $S = \frac{1}{2} l \frac{1+x}{1-x}$ ist. Setzt man $x = \frac{y}{\sqrt{(1+yy)}}$, so wird

$$S = \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(1+yy)} + y}{\sqrt{(1+yy)} - y} = l(\sqrt{(1+yy)} + y),$$

und es ist also

$$\frac{l(\sqrt{(1+yy)}+y)}{\sqrt{(1+yy)}} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^5 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^7 + \text{ꝛc.}$$

II. Es sey $S = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$ ꝛc., wo folglich $S = A.\text{tang}.x$ ist. Setzt man $x = \frac{y}{\sqrt{(1-yy)}}$ so wird

$$S = A.\text{tang}.\frac{y}{\sqrt{(1-yy)}} = A\sin.y = A\cos.\sqrt{(1-yy)}.$$

Folglich hat man hier folgende Summation:

$$\frac{A\sin.y}{\sqrt{(1-yy)}} = y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^5 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^7 + \text{ꝛc.}$$

§. 18.

Es können auch für x transcendente Funktionen von y gesetzt, und dadurch andere schwerer zu findende Summationen hergeleitet werden. Damit aber die neuen Reihen nicht gar zu zusammengesetzt werden, so muß man solche Funktionen wählen, deren Potestäten leicht dargestellt werden können, dergleichen die Exponential-Größen e^y sind. Ist also die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{etc.}$$

gegeben, und setzt man $x = e^{ny}y$, so daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist, so wird

$$x^2 = e^{2ny}y^2;\quad x^3 = e^{3ny}y^3;\ \text{u. s. w.}$$

Da nun, wie bekannt, (Einl. Th. 1. §. 123.) überhaupt

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

ist, so wird die gegebene Reihe in folgende verwandelt:

$$\begin{array}{rlllll}
S = ay & + 1nay^2 & + \tfrac{1}{2}n^2ay^3 & + \tfrac{1}{6}n^3ay^4 & + \tfrac{1}{24}n^4ay^5 & + \text{etc.} \\
& + by^2 & + \tfrac{2}{1}nby^3 & + \tfrac{4}{2}n^2by^4 & + \tfrac{8}{6}n^3by^5 & + \text{etc.} \\
& & + cy^3 & + \tfrac{3}{1}ncy^4 & + \tfrac{9}{2}n^2cy^5 & + \text{etc.} \\
& & & + dy^4 & + \tfrac{4}{1}ndy^5 & + \text{etc.} \\
& & & & + ey^5 & + \text{etc.}
\end{array}$$

I. Es sey die geometrische Reihe

$$S = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}$$

gegeben, wo $S = \dfrac{x}{1-x}$ ist. Setzt man $n = -1$, so daß $x = e^{-y}y$, und $S = \dfrac{e^{-y}y}{1 - e^{-y}y} = \dfrac{y}{e^y - y}$ wird: so findet man die Summe

$$\frac{y}{e^y - y} = y - \tfrac{1}{2}y^3 - \tfrac{1}{6}y^4 + \tfrac{5}{24}y^5 + \tfrac{19}{120}y^6 - \text{etc.}$$

allein das Gesetz derselben läßt sich nicht erkennen.

II. Wenn in der vorhin gefundenen zweyten Reihe alle Glieder außer dem ersten $= 0$ sind, so ist $b = -na$; $c = \frac{3}{2}n^2a$; $d = -\frac{8}{3}n^3a$; $e = \frac{125}{24}n^4a$; $f = -\frac{29}{30}n^5a$; ꝛc. Da also $S = ay$, und $x = e^{ny}$ ist, so wird

$$y = x - nx^2 + \tfrac{3}{2}n^2x^3 - \tfrac{8}{3}n^3x^4 + \tfrac{125}{24}n^4x^5 - \tfrac{29}{30}n^5x^6$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Da indeß bey diesen Reihen das Gesetz der Fortschreitung nicht in die Augen fällt, so haben die Summationen, die aus dieser Substitution abgeleitet werden, keinen sonderlichen Nutzen. Vorzüglich aber verdienen die Verwandlungen bemerkt zu werden, die auf der Substitution $x = \frac{y}{1 \pm y}$ beruhen, indem diese nicht bloß sehr merkwürdige Summationen, sondern auch sehr gute Wege an die Hand geben, die Summen der Reihen durch die Näherung zu finden. Nachdem wir dieses, ohne dabey die Differenzial-Rechnung zu gebrauchen, vorausgeschickt haben; so wollen wir uns nun zur Erklärung des Gebrauchs dieser Rechnung in der Lehre von den Reihen wenden.

Zwey-

Zweytes Capitel.

Von der Erfindung summirbarer Reihen.

§. 19.

Wenn man die Summe einer Reihe kennt, deren Glieder eine unbestimmte Größe x enthalten, in welchem Falle die gedachte Summe nothwendig eine Funktion von x ist: so kann man diese Summe auch für jeden Werth von x angeben. Wenn man daher $x + dx$ für x setzt, so ist die Summe der daraus entspringenden Reihe gleich der Summe der ersten Reihe nebst ihrem Differenziale, und folglich das Differenzial der Summe auch gleich dem Differenziale der Reihe. Da aber auf diese Art sowohl die Summe als die Glieder der Reihe insgesammt durch dx multiplicirt sind, so findet man, wenn man allenthalben durch dx dividirt, eine neue Reihe, deren Summe bekannt ist. Eben so entsteht, wenn man diese Reihe mit ihrer Summe von neuem differenziirt, und darauf abermals allenthalben durch dx dividirt, wieder eine neue Reihe mit ihrer Summe; und auf diese Weise kann man aus einer summirbaren Reihe, welche die unbestimmte Größe x enthält, durch eine fortgesetzte Differenziation unzählige neue summirbare Reihen erhalten.

§. 20.

Damit dies deutlicher werde, sey folgende unbestimmte geometrische Reihe gegeben, deren Summe bekannt ist:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

Differenziirt man hier, so findet man

$$\frac{dx}{(1-x)^2} = dx + 2x\,dx + 3x^2dx + 4x^3dx + 5x^4dx + \text{ꝛc.}$$

und dividirt man nunmehr durch dx, so wird

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \text{ꝛc.}$$

Differenziirt man nun abermals, und dividirt darauf wieder durch dx, so wird

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 2.3x + 3.4x^2 + 4.5x^3 + 5.6x^4 + \text{ꝛc.}$$

oder

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \text{ꝛc.}$$

wo die Coefficienten die Trigonal-Zahlen sind. Differenziirt man nochmals, und dividirt darauf durch $3dx$, so findet man

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \text{ꝛc.}$$

wo die Coefficienten die ersten Pyramidal-Zahlen sind. Fährt man auf diesem Wege weiter fort, so findet man überhaupt die Reihen, die aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{(1-x)^n}$ entspringen.

§. 21.

Es erhält aber diese Erfindung der Reihen einen viel größern Umfang, wenn man jedesmal vor der Differenziation sowohl die Reihe als die Summe durch irgend eine Potestät oder Funktion von x multiplicirt. So multiplicire man, da

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{ꝛc.}$$

ist, allenthalben durch x^m, wodurch

$$\frac{x^m}{1-x} = x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} + x^{m+4} + \text{ꝛc.}$$

wird. Differenziirt man nunmehr und dividirt darauf durch dx, so wird

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)x^m}{(1-x)^2} = mx^{m-1} + (m+1)x^m + (m+2)x^{m+1} + (m+3)x^{m+2} + \text{ꝛc.}$$

und dividirt man dieses durch x^{m-1}, so erhält man

$$\frac{m-(m-1)x}{(1-x)^2} = \frac{m}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} = m + (m+1)x + (m+2)x^2 + \text{ꝛc.}$$

Nun multiplicire man, ehe man wieder differenziirt, durch x^n, so daß

$$\frac{mx^n}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{(1-x)^2} = mx^n + (m+1)x^{n+1} + (m+2)x^{n+2} + \text{ꝛc.}$$

werde. Dann differenziire man und dividire durch dx, so kommt

$$\frac{mnx^{n-1}}{1-x} + \frac{(m+n+1)x^n}{(1-x)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(1-x)^3} = mnx^{n-1} + (m+1)(n+1)x^n + (m+2)(n+2)x^{n+1} + \text{ꝛc.}$$

Dividirt man nun durch x^{n-1} so wird

$$\frac{mn}{1-x} + \frac{(m+n+1)x}{(1-x)^2} + \frac{2xx}{(1-x)^3} = mn + (m+1)(n+1)x + (m+2)(n+2)x^2 + \text{ꝛc.}$$

Auf

Auf diese Art kann man nach Gefallen weiter fortgehen. Man findet aber allemal die Reihen, die aus der Entwickelung der Brüche, welche die Summe darstellen, entspringen.

§. 22.

Da von der zu Anfange angenommenen geometrischen Reihe jede bestimmte Anzahl von Gliedern summirt werden kann, so lassen sich auf diese Art auch aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehende Reihen summiren. So wird, da

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\ldots + x^n$$

ist, wenn man differenziirt und darauf durch dx dividirt,

$$\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Hieraus lassen sich die Summen der Potestäten der natürlichen Zahlen bis zu jedem Gliede finden. Man multiplicire nemlich diese Reihe durch x, so daß

$$\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots + nx^n$$

werde. Differenziirt man nun, und dividirt durch dx, so wird

$$\frac{1 + x - (n+1)^2x^n + (2nn + 2n - 1)x^{n+1} - nnx^{n+2}}{(1-x)^3} = 1$$

$$+ 4x + 9x^2 + 16x^3 + \ldots\ldots + n^2x^{n-1}$$

und dieses, mit x multiplicirt, giebt,

$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2x^{n+1} + (2nn + 2n - 1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1-x)^3} =$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots\ldots + n^2x^n.$$

Differenziirt man abermals und dividirt durch dx, so erhält man durch eine darauf angenommene Multiplication durch x die Reihe

$$x + 8x^2 + 27x^3 + \ldots\ldots n^3x^n$$

deren

deren Summe folglich gefunden werden kann. Aus dieser Reihe findet man aber auf eine ähnliche Art die Summe der Biquadrate und der höhern Potestäten.

§. 23.

Diese Methode läßt sich auf alle eine unbestimmte Größe enthaltenden Reihen anwenden, deren Summen bekannt sind. Da nun diese Eigenschaft außer den geometrischen Reihen auch allen wiederkehrenden Reihen zukommt, und dieselben nicht bloß, wenn sie ohne Ende fortlaufen, sondern auch bis zu jedem bestimmten Gliede summirt werden können: so lassen sich aus ihnen nach dieser Methode unzählige andere summirbare Reihen finden. Da es uns viel zu weit führen würde, wenn wir dieses ausführlich zeigen wollten, so wollen wir nur einen einzigen Fall erwägen. Ist nemlich die Reihe

$$\frac{x}{1-x-xx} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \text{etc.}$$

gegeben, so findet man durch die Differenziation und die Division durch dx

$$\frac{1+xx}{(1-x-xx)^2} = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 25x^4 + 48x^5 + 91x^6 + \text{etc.}$$

Es ist aber dabey leicht einzusehen, daß alle auf diese Art entstehende Reihen ebenfalls wiederkehrende Reihen seyn werden, so daß man die Summe derselben selbst durch die Betrachtung ihrer Natur zu finden im Stande ist.

§. 24.

Ueberhaupt also kann man, wenn die Summe irgend einer unter dieser Form

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

begrif-

begriffenen Reihe, welche wir $= S$ setzen wollen, bekannt ist, auch allemal die Summe eben dieser Reihe finden, nachdem die einzeln Glieder derselben durch die Glieder einer arithmetischen Progression multiplicirt worden sind. Denn es sey die Reihe

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.}$$

gegeben. Multiplicirt man dieselbe durch x^m, so findet man daraus

$$Sx^m = ax^{m+1} + bx^{m+2} + cx^{m+3} + dx^{m+4} + \text{ꝛc.}$$

und differenziirt man dieses und dividirt darauf durch dx, so wird

$$mSx^{m-1} + x^m \frac{dS}{dx} = (m+1)ax^m + (m+2)bx^{m+1} + (m+3)cx^{m+2} + \text{ꝛc.}$$

so wie hieraus durch die Division durch x^{m-1}

$$mS + \frac{xdS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \text{ꝛc.}$$

Wird also die Summe folgender Reihe verlangt:

$$\alpha ax + (\alpha+\beta)bx^2 + (\alpha+2\beta)cx^3 + (\alpha+3\beta)dx^4 + \text{ꝛc.}$$

so multiplicire man die vorhergehende Reihe durch β, und setze $m\beta + \beta = \alpha$, so daß $m = \frac{\alpha-\beta}{\beta}$ werde. Alsdann ist die Summe dieser Reihe

$$= (\alpha-\beta)S + \frac{\beta xdS}{dx}.$$

§. 25.

Es kann auch die Summe der gegebenen Reihe gefunden werden, wenn die einzelnen Glieder durch die Glieder einer Reihe der zweyten Ordnung, deren zweyte Differenzen also beständig sind, multiplicirt werden. Denn da wir bereits

m S

$$mS + \frac{x\,dS}{dx} = (m+1)ax + (m+2)bx^2 + (m+3)cx^3 + \text{ꝛc.}$$

gefunden haben, so erhält man hieraus, wenn man mit x^n multiplicirt,

$$mSx^n + \frac{x^{n+1}dS}{dx} = (m+1)ax^{n+1} + (m+2)bx^{n+2} + (m+3)cx^{n+3} + \text{ꝛc.}$$

so wie hieraus, wenn man differenziirt und durch dx dividirt,

$$mnSx^{n-1} + \frac{(m+n+1)x^n dS}{dx} + \frac{x^{n+1}ddS}{dx^2} = (m+1)(n+1)ax^n + (m+2)(n+2)bx^{n+1} + \text{ꝛc.}$$

Dividirt man diese Gleichung durch x^{n-1}, und multiplicirt darauf durch k, so wird

$$mnkS + \frac{(m+n+1)kxdS}{dx} + \frac{kx^2ddS}{dx^2} = (m+1)(n+1)kax + (m+2)(n+2)kbx^2 + (m+3)(n+3)cx^3 + \text{ꝛc.}$$

Nun vergleiche man diese Reihe mit der vorhergehenden, so wird:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & \text{1ste Differ.} & \text{2te Diff.} \\
kmn + km + kn + k = \alpha & & \\
kmn + 2km + 2kn + 4k = \alpha + \beta & km + kn + 3k = \beta & \\
kmn + 3km + 3kn + 9k = \alpha + 2\beta + \gamma & km + kn + 5k = \beta + \gamma & 2k = \gamma.
\end{array}$$

Hieraus fließt $k = \frac{1}{2}\gamma$; $m + n = \frac{2\beta}{\gamma} - 3$; und

$$mn = \frac{\alpha}{k} - m - n - 1 = \frac{2\alpha}{\gamma} - \frac{2\beta}{\gamma} + 2 = \frac{2(\alpha - \beta + \gamma)}{\gamma},$$

und es ist demnach die gesuchte Summe

$$(\alpha - \beta + \gamma)S + \frac{(\beta - \gamma)x\,dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2}.$$

§. 26.

Auf ähnliche Art läßt sich auch die Summe der Reihe

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{rc.}$$

finden, wenn die Summe S dieser Reihe

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{rc.}$$

bekannt ist, und A, B, C, D, rc. eine Reihe formiren, deren Differenzen endlich beständig werden. Denn da die Form der Summe aus dem Vorhergehenden geschlossen werden kann, so setze man sie

$$\alpha S + \frac{\beta x dS}{dx} + \frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} + \frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^3} + \frac{\varepsilon x^4 d^4S}{24dx^4} + \text{rc.}$$

Ferner entwickele man, um die Buchstaben α, β, γ, δ, rc. zu finden, jede dieser Reihen. Dadurch wird

$$\begin{aligned}
\alpha S &= \alpha a + \alpha bx + \alpha cx^2 + \alpha dx^3 + \alpha ex^4 + \text{rc.}\\
\frac{\beta x dS}{dx} &= \quad + \beta bx + 2\beta cx^2 + 3\beta dx^3 + 4\beta ex^4 + \text{rc.}\\
\frac{\gamma x^2 ddS}{2dx^2} &= \quad \gamma cx^2 + 3\gamma dx^3 + 6\gamma ex^4 + \text{rc.}\\
\frac{\delta x^3 d^3S}{6dx^3} &= \quad \delta dx^3 + 4\delta ex^4 + \text{rc.}\\
\frac{\varepsilon x^4 d^4S}{24dx^4} &= \quad \varepsilon ex^4 + \text{rc.}
\end{aligned}$$

Vergleicht man nun alles dieses mit der gegebenen Reihe:

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{rc.}$$

so findet man durch die Vergleichung der einzelnen Glieder

$$\begin{aligned}
\alpha &= A\\
\beta &= B - \alpha = B - A\\
\gamma &= C - 2\beta - \alpha = C - 2B + A\\
\delta &= D - 3\gamma - 3\beta - \alpha = D - 3C + 3B - A\\
&\text{rc.}
\end{aligned}$$

Nach-

Nachdem man diese Werthe gefunden, ist die gesuchte Summe

$$Z = AS + \frac{(B - A)x\,dS}{1\,.\,dx} + \frac{(C - 2B + A)x^2\,ddS}{1\,.\,2dx^2} + \frac{(D - 3C + 3B - A)x^3 d^3S}{1\,.\,2\,.\,3dx^3} + \text{etc.}$$

oder, wenn man die Differenzen der Reihe A, B, C, D, etc. auf die gewöhnliche Art ausdruckt,

$$Z = AS + \frac{\Delta A\,.\,xdS}{1\,dx} + \frac{\Delta^2 A\,.\,x^2 d^2S}{1\,.\,2dx^2} + \frac{\Delta^3 A\,.\,x^3 d^3S}{1\,.\,2\,.\,3dx^3} + \text{etc.}$$

wenn nemlich, wie wir angenommen haben,

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \text{etc.}$$

ist. Wenn also die Differenzen der Reihe A, B, C, D, E, etc. endlich beständig werden, so kann man die Summe der Reihe Z durch einen endlichen Ausdruck darstellen.

§. 27.

Da, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \text{etc.}$$

ist, so nehme man diese Reihe statt der vorigen. Da nun $S = e^x$ ist, so ist auch $\frac{dS}{dx} = e^x$, $\frac{ddS}{dx^2} = e^x$; u. s. f. (Th. 1. Cap. 7. §. 188.) Es läßt sich daher die Summe der Reihe

$$A + Bx + \frac{Cx^2}{1\,.\,2} + \frac{Dx^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{Ex^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \text{etc.}$$

welche aus jener Reihe und aus der Reihe A, B, C, D, etc. zusammengesetzt ist, auf diese Art ausdrucken:

$$e^x\left(A + \frac{x\Delta A}{1} + \frac{xx\Delta^2 A}{1\,.\,2} + \frac{x^3\Delta^3 A}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4\Delta^4 A}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \text{etc.}\right.$$

ausdrucken.

Ist z. B. die Reihe

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

gegeben, so ist aus

$$\begin{array}{lllllll} \text{der Reihe} & A, & B, & C, & D, & E, & \text{rc.} \\ A = & 2, & 5, & 10, & 17, & 26, & \text{rc.} \\ \triangle A = & & 3, & 5, & 7, & 9, & \text{rc.} \\ \triangle^2 A = & & & 2, & 2, & 2, & \text{rc.} \end{array}$$

und also die Summe der Reihe

$$2 + \frac{5x}{1} + \frac{10x^2}{1.2} + \frac{17x^3}{1.2.3} + \frac{26x^4}{1.2.3.4} + \frac{37x^5}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

$$=$$

$$e^x(2 + 3x + xx) = e^x(1 + x)(2 + x).$$

Dieses ist aber auch von selbst klar, denn es ist

$$2e^x = 2 + \frac{2x}{1} + \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{6} + \frac{2x^4}{24} + \text{rc.}$$

$$3xe^x = 3x + \frac{3x^2}{1} + \frac{3x^3}{2} + \frac{3x^4}{6} + \text{rc.}$$

$$xxe^x = x^2 + \frac{x^3}{1} + \frac{x^4}{2} + \text{rc., also}$$

$$e^x(2 + 3x + xx) = 2 + 5x + \frac{10x^2}{2} + \frac{17x^3}{6} + \frac{26x^4}{24} + \text{rc.}$$

§. 28.

Das bisher Vorgetragene erstreckt sich nicht bloß auf die Reihen, die ohne Ende fortlaufen, sondern auch auf die Summe jeder Anzahl von Gliedern; denn die Coefficienten a, b, c, d, rc. können ohne Ende fortgehen, oder nach Belieben abgebrochen werden. Da indeß dies keiner weitern Erläuterung bedarf, so wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Folgen richten, die aus dem Bisherigen fließen.

Wenn

Wenn also irgend eine Reihe gegeben ist, deren einzelne Glieder aus zwey Faktoren bestehen, davon die einen eine Reihe machen, deren Differenzen endlich beständig werden: so läßt sich die Summe dieser Reihe angeben, wenn dieselbe mit Beyseitsezung der gedachten Faktoren summirt werden kann. Ist nemlich die Reihe

$$Z = Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + \text{etc.}$$

gegeben, und machen darin A, B, C, D, E, ꝛc. eine Reihe, deren Differenzen endlich beständig werden: so läßt sich die Summe jener Reihe angeben, wofern die Summe von dieser

$$S = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$$

bekannt ist. Denn sucht man aus der Progression A, B, C, D, E, ꝛc. die daraus nach und nach sich ergebenden Differenzen, und zwar nach der dazu im ersten Theile befindlichen Anleitung

$$\begin{array}{cccccccccccc}
A, & & B, & & C, & & D, & & E, & & F, & \text{etc.} \\
& \Delta A, & & \Delta B, & & \Delta C, & & \Delta D, & & \Delta E, & \text{etc.} & \\
& & \Delta^2 A, & & \Delta^2 B, & & \Delta^2 C, & & \Delta^2 D, & \text{etc.} & & \\
& & & \Delta^3 A, & & \Delta^3 B, & & \Delta^3 C, & \text{etc.} & & & \\
& & & & \Delta^4 A, & & \Delta^4 B, & \text{etc.} & & & & \\
& & & & & \Delta^5 A, & \text{etc.} & & & & &
\end{array}$$

so ist die Summe der gegebenen Reihe:

$$Z = SA + \frac{x\,dS}{1\,dx}\Delta A + \frac{x^2\,ddS}{1.2\,dx^2}\Delta^2 A + \frac{x^3 d^3 S}{1.2.3.dx^3}\Delta^3 A + \text{etc.}$$

wenn in den höhern Differenzialien von S, dx als beständig betrachtet wird.

§. 29.

Wenn also die Differenzen der Reihe A, B, C, D, ꝛc. niemals beständig werden, so wird die Summe Z durch eine neue unendliche Reihe ausgedruckt, die öfters stärker convergirt als die gegebene, und es wird auf diese Art die gegebene Reihe in eine andere ihr gleiche verwandelt. Um dies zu erläutern wollen wir diese Reihe betrachten:

$$Y = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^6}{6} + \text{rc.}$$

wovon bekannt ist, daß sie den Logarithmen von $\frac{1}{1-y}$ ausdruckt, so daß $Y = -l(1-y)$ ist. Dividirt man diese Reihe durch y, und setzt dabey $y = x$, und $Y = yZ$, so daß $Z = -\frac{1}{y}l(1-y) = -\frac{1}{x}l(1-x)$ ist: so wird

$$Z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} + \text{rc.}$$

und vergleicht man diese Reihe mit folgender:

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \text{rc.} = \frac{1}{1-x}$$

so findet man für die Reihe A, B, C, D, E, rc. diese Werthe:

$$1, \quad \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{3}, \quad \tfrac{1}{4}, \quad \tfrac{1}{5},$$

$$-\frac{1}{1.2}, \quad -\frac{1}{2.3}, \quad -\frac{1}{3.4}, \quad -\frac{1}{4.5},$$

$$\frac{1.2}{1.2.3}, \quad \frac{1.2}{2.3.4}, \quad \frac{1.2}{3.4.5},$$

$$-\frac{1.2.3}{1.2.3.4}, \quad -\frac{1.2.3}{2.3.4.5},$$

rc.

Es wird also $A = 1$; $\Delta A = -\frac{1}{2}$; $\Delta^2 A = \frac{1}{3}$; $\Delta^3 A = -\frac{1}{4}$; rc.

Da ferner $S = \frac{1}{1-x}$ ist, so ist

$$\frac{dS}{1.dx} = \frac{1}{(1-x)^2};$$

d²S

$$\frac{d^2S}{1.2.dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3};$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3.dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}; \text{ ꝛc.}$$

Gebraucht man diese Werthe, so erhält man die Summe

$$Z = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{2(1-x)^2} + \frac{x^2}{3(1-x)^3} - \frac{x^3}{4(1-x)^4} + \frac{x^4}{5(1-x)^5}$$
$$+ \text{ ꝛc.}$$

Da nun $x = y$, und $Y = -l(1-y) = yZ$ ist, so hat man hieraus

$$-l(1-y) = \frac{y}{1-y} - \frac{y^2}{2(1-y)^2} + \frac{y^3}{3(1-y)^3} - \frac{y^4}{4(1-y)^4}$$
$$+ \text{ ꝛc.}$$

und diese Reihe druckt allerdings $l(1 + \frac{y}{1-y}) = l\frac{1}{1-y} =$ $-l(1-y)$ aus, wie auch selbst aus dem sonst schon (Einl. Th. 1. Cap. 7. § 123.) Bewiesenen, bekannt ist.

§. 30.

Damit aber auch der Gebrauch des Bisherigen bekannt werde, wenn bloß die ungeraden Potestäten vorkommen und die Zeichen abwechseln, so sey folgende Reihe gegeben:

$$Y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11} + \text{ ꝛc.}$$

woraus erhellet (Einl. Th. 1. Cap. 8. §. 140.) daß $Y = A\,\text{tang.}y$ ist. Dividirt man diese Reihe durch y, und setzt man $\frac{Y}{y} = Z$, und $yy = x$, so wird

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \text{ ꝛc.}$$

Vergleicht man diese Reihe mit folgender:

$$S = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \text{ ꝛc.}$$

so wird $S = \frac{1}{1+x}$, und die Reihe der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. wird

$$\begin{array}{lllll} A = 1, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{7}, & \frac{1}{9}, \text{ ꝛc.} \end{array}$$

$$\Delta A = \quad -\frac{2}{3}; \quad -\frac{2}{3\cdot5}; \quad -\frac{2}{5\cdot7}; \quad -\frac{2}{7\cdot9};$$

$$\Delta^2 A = \quad \frac{2\cdot4}{3\cdot5}; \quad \frac{2\cdot4}{3\cdot5\cdot7}; \quad \frac{2\cdot4}{5\cdot7\cdot9};$$

$$\Delta^3 A = \quad -\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}; \quad -\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot9};$$

$$\Delta^4 A = \quad \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}$$

ꝛc.

Da aber $S = \frac{1}{1+x}$ ist, so wird

$$\frac{dS}{1\,dx} = \frac{1}{(1+x)^2};$$

$$\frac{ddS}{1\cdot2\,dx^2} = \frac{1}{(1+x)^3};$$

$$\frac{d^3S}{1\cdot2\cdot3\,dx^3} = \frac{1}{(1+x)^4};$$

Substituirt man daher diese Werthe, so wird $Z =$

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{3(1+x)^2} + \frac{2\cdot4\cdot x^2}{3\cdot5(1+x)^3} + \frac{2\cdot4\cdot6x^3}{3\cdot5\cdot7(1+x)^4} + \text{ꝛc.}$$

Führt man also $yy = x$ wieder ein, und multiplicirt man durch y, so wird $Y = A\,\text{tang}.\,y =$

$$\frac{y}{1+yy} + \frac{2y^3}{3(1+yy)^2} + \frac{2\cdot4y^5}{3\cdot5(1+yy)^3} + \frac{2\cdot4\cdot6y^7}{3\cdot5\cdot7(1+yy)^4} + \text{ꝛc.}$$

§. 31.

Es kann aber auch diese letzte Reihe, welche einen Kreisbogen durch die Tangente ausdruckt, auf eine andere Art verwandelt werden, indem man sie mit der Logarithmischen Reihe vergleicht. Wir wollen nemlich die Reihe

$$Z = 1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} - \frac{x^5}{11} + \text{ꝛc.}$$

nehmen, und sie mit folgender:

$$S = \tfrac{1}{0} - \frac{x}{2} + \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \text{ꝛc.} = \tfrac{1}{0} - \tfrac{1}{2}l(1+x)$$

vergleichen. Hier sind die Werthe der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc.

$$A = \tfrac{0}{1};\quad \tfrac{2}{3};\quad \tfrac{4}{5};\quad \tfrac{6}{7};\quad \tfrac{8}{9};\quad \text{ꝛc.}$$

$$\Delta A = \frac{2}{3};\quad \frac{2}{3\cdot5};\quad \frac{2}{5\cdot7};\quad \frac{2}{7\cdot9};\quad \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 A = \frac{-2\cdot4}{3\cdot5};\quad \frac{-2\cdot4}{3\cdot5\cdot7};\quad \frac{-2\cdot4}{5\cdot7\cdot9};\quad \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 A = \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7};\quad \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot9};\quad \text{ꝛc.}$$

Da ferner $S = \tfrac{1}{0} - \tfrac{1}{2}l(1+x)$ ist, so wird

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2(1+x)};$$

$$\frac{ddS}{1.2dx^2} = +\frac{1}{4(1+x)^2};$$

$$\frac{d^3S}{1.2.3dx^3} = -\frac{1}{6(1+x)^3};$$

$$\frac{d^4S}{1.2.3.4dx^4} = +\frac{1}{8(1+x)^4};\ \text{ꝛc.}$$

Es ist demnach $SA = S.\tfrac{0}{1} = 1$; und aus dem Uebrigen ergiebt sich

$$Z = 1 - \frac{x}{3(1+x)} - \frac{2xx}{3\cdot5(1+x)^2} - \frac{2.4x^3}{3\cdot5\cdot7(1+x)^3} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun $x = yy$, und multiplicirt zugleich durch y, so wird

$$Y = A\,\text{tang}\,.\,y =$$
$$y - \frac{y^3}{3(1+yy)} - \frac{2y^5}{3\cdot5(1+yy)^2} - \frac{2\cdot4y^7}{3\cdot5\cdot7(1+yy)^3}$$
$$- \text{ꝛc.}$$

Diese Verwandlung wird also durch das unendliche Glied $\frac{1}{0}$ in der Reihe S nicht verhindert. Sollte aber iemanden noch ein Zweifel übrig seyn, der löse nur die einzeln Glieder der gegenwärtigen Reihe außer dem ersten in unendliche Reihen auf, wo er denn finden wird, daß die zuerst gegebene Reihe wirklich herauskomme.

§. 32.

Bisher haben wir nur solche Reihen betrachtet, in welchen alle Potestäten der veränderlichen Größe vorkommen. Jetzt wollen wir zur Betrachtung solcher Reihen fortgehen, die in allen Gliedern eben dieselbe Potestät der veränderlichen Größe enthalten, dergleichen folgende ist:

$$S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} + \text{ꝛc.}$$

Ist nemlich die Summe dieser Reihe S bekannt, und ist dieselbe eine Funktion von x, so findet man durchs Differenziiren und durchs Dividiren durch $-dx$:

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{1}{(b+x)^2} + \frac{1}{(c+x)^2} + \frac{1}{(d+x)^2} + \text{ꝛc.}$$

Differenziirt man nun abermals und dividirt darauf durch $-2dx$, so erhält man die Reihe der Würfel:

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(b+x)^3} + \frac{1}{(c+x)^3} + \frac{1}{(d+x)^3} + \text{ꝛc.}$$

und diese von neuem differenziirt und durch $-3dx$ dividirt, giebt

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{(a+x)^4} + \frac{1}{(b+x)^4} + \frac{1}{(c+x)^4} + \frac{1}{(d+x)^4} + \text{ꝛc.}$$

Auf

Auf eine ähnliche Art kann man die Summen aller folgenden Potestäten finden, wenn nur die Summe der ersten Reihe bekannt ist.

§. 33.

Dergleichen Bruch-Reihen, die eine unbestimmte Größe enthalten, haben wir aber in der Einleitung (Th. 1. Cap. 10.) gefunden, wo wir gezeigt haben, daß, wenn die halbe Peripherie eines Kreises, dessen Radius $= 1$ ist, $= \pi$ gesetzt wird,

$$\frac{\pi}{n \sin . \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m}$$

$$+ \frac{1}{3n-m} - \text{ꝛc. und}$$

$$\frac{\pi \cos . \frac{m}{n}\pi}{n \sin . \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m}$$

$$- \frac{1}{3n-m} + \text{ꝛc.}$$

sey, (§. 178.) Da wir nun für m und n jede Zahl setzen können, so wollen wir $n = 1$ und $m = x$ annehmen, damit wir Reihen erhalten, die denen im vorhergehenden §. ähnlich sind. Alsdann ist

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x}$$

$$- \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi \cos . \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x}$$

$$+ \text{ꝛc.}$$

Durch die Differenziation ist man also im Stande, die Summen aller Potestäten, die aus diesen Brüchen entstehen, zu finden.

§. 34.

Wir wollen zuvörderst die erste Reihe betrachten, und der Kürze wegen $\frac{\pi}{\sin.\pi x} = S$ setzen. Sucht man hiervon die höhern Differenzialien, so daß man dx als beständig behandelt, so ist

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \text{etc.}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{1}{(3-x)^2} - \text{etc.}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} + \frac{1}{(3-x)^3} - \text{etc.}$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} - \frac{1}{(3-x)^4} - \text{etc.}$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} + \frac{1}{(1-x)^5} - \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} + \frac{1}{(3-x)^5} - \text{etc.}$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{(1-x)^6} - \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} - \frac{1}{(3-x)^6} - \text{etc.}$$

etc.

wo

wo zu bemerk.n ist, daß die Zeichen vor den geraden Potestäten, so wie auch die vor den ungeraden einerley Gesetze folgen. Von allen diesen Reihen findet man daher die Summen aus den Differenzialien des Ausdrucks

$$S = \frac{\pi}{\sin.\pi x}.$$

§. 35.

Um diese Differenziation auf eine einfachere Art auszudrucken, wollen wir

$$\sin.\pi x = p; \text{ und } \cos.\pi x = q$$

setzen, wodurch denn

$$dp = \pi dx \cos.\pi x = \pi q dx, \text{ und } dq = \pi p dx$$

wird. Da nun $S = \frac{\pi}{p}$ ist, so wird

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2 q}{pp};$$

$$\frac{ddS}{dx^2} = \frac{\pi^3(pp + 2qq)}{p^3} = \frac{\pi^3(qq + 1)}{p^3}, \text{ weil } pp + qq = 1$$

$$\frac{-d^3S}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{5q}{pp} + \frac{6q^3}{p^4}\right) = \frac{\pi^4(q^3 + 5q)}{p^4}$$

$$\frac{d^4S}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right) = \frac{\pi^5(q^4 + 18q^2 + 5)}{p^5}$$

$$\frac{-d^5S}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{pp}\right) = \frac{\pi^6(q^5 + 58q^3 + 61q)}{p^6}$$

$$\frac{d^6S}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^2}{p^3} + \frac{61}{p}\right) =$$

$$\frac{\pi^7(q^6 + 179q^4 + 479q^2 + 61)}{p^7}$$

$$\frac{-d^7S}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right) =$$

$$\frac{\pi^8}{p^8}(q^7 + 543q^5 + 3111q^3 + 1385q)$$

d8S

$$\frac{d^8S}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right)$$

etc.

Diese Ausdrücke lassen sich leicht, so weit man will, fortsetzen. Denn wenn

$$\pm\frac{d^nS}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^n}{p^{n+1}} + \frac{\beta q^{n-2}}{p^{n-1}} + \frac{\gamma q^{n-4}}{p^{n-3}} + \frac{\delta q^{n-6}}{p^{n-5}} + \text{etc.}\right)$$

ist, so ist das Differenzial davon mit veränderten Zeichen

$$\mp\frac{d^{n+1}S}{dx^{n+1}} = \pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^{n+1}}{p^{n+2}} \begin{matrix} + n\alpha \\ + (n-1)\beta \end{matrix}\Bigg\}\frac{q^{n-1}}{p^n} \begin{matrix} + (n-2)\beta \\ + (n-3)\gamma \end{matrix}\Bigg\}\frac{q^{n-3}}{p^{n-2}} \begin{matrix} + (n-4)\gamma \\ + (n-5)\delta \end{matrix}\Bigg\}\frac{q^{n-5}}{p^{n-4}} \text{ etc.}\right)$$

§. 36.

Hieraus erhält man also die Summe der §. 34. befindlichen Reihen auf folgende Art bestimmt:

$$S = \pi \cdot \frac{1}{p}$$

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi^2}{1} \cdot \frac{q}{p^2}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = \frac{\pi^3}{2}\left(\frac{2q^2}{p^3} + \frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{-d^3S}{6dx^3} = \frac{\pi^4}{6}\left(\frac{6q^3}{p^4} + \frac{5q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = \frac{\pi^5}{24}\left(\frac{24q^4}{p^5} + \frac{28q^2}{p^3} + \frac{5}{p}\right)$$

$$\frac{-d^5S}{120dx^5} = \frac{\pi^6}{120}\left(\frac{120q^5}{p^6} + \frac{180q^3}{p^4} + \frac{61q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^6S}{720dx^6} = \frac{\pi^7}{720}\left(\frac{720q^6}{p^7} + \frac{1320q^4}{p^5} + \frac{662q^4}{p^3} + \frac{61}{p}\right)$$

$-d^7S$

$$\frac{-d^7S}{5040dx^7} = \frac{\pi^8}{5040}\left(\frac{5040q^7}{p^8} + \frac{10920q^5}{p^6} + \frac{7266q^3}{p^4} + \frac{1385q}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8S}{40320dx^8} = \frac{\pi^9}{40320}\left(\frac{40320q^8}{p^9} + \frac{100800q^6}{p^7} + \frac{83664q^4}{p^5} + \frac{24568q^2}{p^3} + \frac{1385}{p}\right)$$

rc.

§. 37.

Um nun auch die andere oben (§. 32.) gefundene Reihe

$$\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{rc.}$$

auf eine ähnliche Art zu behandeln, so sey, der Kürze wegen, $\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x} = T$, wodurch man folgende Summationen findet:

$$T = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \text{rc.}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \text{rc.}$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \text{rc.}$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(1-x)^4} + \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(2-x)^4} + \frac{1}{(2+x)^4} + \text{rc.}$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{1}{(1+x)^5} - \frac{1}{(2-x)^5} + \frac{1}{(2+x)^5} - \text{rc.}$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{(1-x)^6} + \frac{1}{(1+x)^6} + \frac{1}{(2-x)^6} + \frac{1}{(2+x)^6} + \text{rc.}$$

rc.

Hier sind in den geraden Potestäten alle Glieder positiv, dagegen in den ungeraden die Zeichen + und — mit einander abwechseln.

§. 38.

§. 38.

Um nun die Werthe dieser Differenzialien zu finden, so sey abermals $\sin.\pi x = p$, und $\cos.\pi x = q$, so daß $pp + qq = 1$ werde: alsdann ist $dp = \pi q dx$, und $dq = - \pi p dx$. Braucht man diese Werthe, so wird

$$T \quad = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2\left(\frac{qq}{pp} + 1\right) = \frac{\pi^2}{pp}$$

$$\frac{ddT}{dx^2} = \pi^3\left(\frac{2q^3}{p^3} + \frac{2q}{p}\right) = \frac{2\pi^3 q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3T}{dx^3} = \pi^4\left(\frac{6q^4}{p^4} + \frac{8qq}{pp} + 2\right) = \pi^4\left(\frac{6qq}{p^4} + \frac{2}{pp}\right)$$

$$\frac{d^4T}{dx^4} = \pi^5\left(\frac{24q^3}{p^5} + \frac{16q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5T}{dx^5} = \pi^6\left(\frac{120q^4}{p^6} + \frac{120qq}{p^4} + \frac{16}{pp}\right)$$

$$\frac{d^6T}{dx^6} = \pi^7\left(\frac{720q^5}{p^7} + \frac{960q^3}{p^5} + \frac{272q}{p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7T}{dx^7} = \pi^8\left(\frac{5040q^6}{p^8} + \frac{8400q^4}{p^6} + \frac{3696q^2}{p^4} + \frac{272}{p^2}\right)$$

$$\frac{d^8T}{dx^8} = \pi^9\left(\frac{40320q^7}{p^9} + \frac{80640q^5}{p^7} + \frac{48384q^3}{p^5} + \frac{7936q}{p^3}\right)$$

ꝛc.

Diese Formeln lassen sich leicht nach Gefallen weiter fortsetzen. Denn wenn

$$\pm \frac{d^nT}{dx^n} = \pi^{n+1}\left(\frac{\alpha q^{n-1}}{p^{n+1}} + \frac{\beta q^{n-3}}{p^{n-3}} + \frac{\gamma q^{n-5}}{p^{n-5}} + \frac{\delta q^{n-7}}{p^{n-7}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ist, so ist der folgende Ausdruck:

$$\mp \frac{d^{n+1}T}{dx^{n+1}} =$$

$$\pi^{n+2}\left(\frac{(n+1)\alpha q^n}{p^{n+2}} + \frac{(n-1)(\alpha+\beta)q^{n-2}}{p^n} + \frac{(n-3)(\beta+\gamma)q^{n-4}}{q^{n-2}} + \text{ꝛc.}\right)$$

§. 39.

§. 39.

Die Summen der Reihen, die §. 37. stehen, sind demnach, wenn man $\sin.\pi x = p$, und $\cos.\pi x = q$ setzt,

$$T = \pi . \frac{q}{p}$$

$$\frac{-dT}{dx} = \pi^2 \frac{1}{pp}$$

$$\frac{ddT}{2dx^2} = \pi^3 \frac{q}{p^3}$$

$$\frac{-d^3T}{6dx^3} = \pi^4 \left(\frac{qq}{p^4} + \frac{1}{3pp}\right)$$

$$\frac{d^4T}{24dx^4} = \pi^5 \left(\frac{q^3}{p^5} + \frac{2q}{3p^3}\right)$$

$$\frac{-d^5T}{120dx^5} = \pi^6 \left(\frac{q^4}{p^6} + \frac{3qq}{3p^4} + \frac{2}{15pp}\right)$$

$$\frac{d^6T}{720dx^6} = \pi^7 \left(\frac{q^5}{p^7} + \frac{4q^3}{3p^6} + \frac{17q}{45p^3}\right)$$

$$\frac{-d^7T}{5040dx^7} = \pi^8 \left(\frac{q^6}{p^8} + \frac{5q^4}{3p^6} + \frac{11q^2}{15p^4} + \frac{17}{315pp}\right)$$

$$\frac{d^8T}{40320dx^8} = \pi^9 \left(\frac{q^7}{p^9} + \frac{6q^5}{3p^7} + \frac{6q^3}{5p^5} + \frac{62q}{315p^3}\right)$$

&c.

§. 40.

Außer diesen Reihen haben wir in der Einleitung verschiedene andere gefunden, aus welchen man auf eine ähnliche Art durch die Differenziation neue Reihen ableiten kann. Wir haben nemlich (Einl. Th. 1. §. 182.) gezeigt, daß

$$\frac{1}{2x} - \frac{\pi\sqrt{x}}{2x\,\mathrm{tang}.\pi\sqrt{x}} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4-x} + \frac{1}{9-x} + \frac{1}{16-x} + \frac{1}{25-x} + \text{\&c.}$$

ist.

ist. Setzt man nun die Summe dieser Reihe $= S$, oder

$$S = \frac{1}{2x} - \frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos.\pi\sqrt{x}}{\sin.\pi\sqrt{x}}$$

so wird

$$\frac{dS}{dx} = -\frac{1}{2xx} + \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{\cos.\pi\sqrt{x}}{\sin.\pi\sqrt{x}} + \frac{\pi\pi}{4x(\sin.\pi\sqrt{x})^2},$$

und dieses ist daher die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(4-x)^2} + \frac{1}{(9-x)^2} + \frac{1}{(16-x)^2} + \frac{1}{(25-x)^2} + \text{etc.}$$

Dann haben wir auch gezeigt (§. 183.), daß

$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4+x} + \frac{1}{9+x} + \frac{1}{16+x} + \text{etc.}$$

ist. Setzt man also die Reihe $= S$, so wird

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(4+x)^2} + \frac{1}{(9+x)^2} + \frac{1}{(16+x)^2} + \text{etc.}$$

Nun ist aber

$$\frac{dS}{dx} = \frac{-\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} - \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} + \frac{1}{2xx}$$

Folglich ist

$$\frac{-dS}{dx} = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}+1}{e^{2\pi\sqrt{x}}-1} + \frac{\pi\pi}{x} \cdot \frac{e^{2\pi\sqrt{x}}}{(e^{2\pi\sqrt{x}}-1)^2} - \frac{1}{2xx}.$$

Auf eine ähnliche Art kann man durch fortgesetzte Differenziation die Summen der folgenden Potestäten finden.

§. 41.

Wenn der Werth eines Produkts bekannt ist, welches aus Faktoren, die eine unbestimmte Größe enthalten, besteht: so lassen sich durch eben diese Methode unzählige summirbare Reihen finden. Es sey nemlich der Werth dieses Produkts

$(1+\alpha x)$

$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)(1+\varepsilon x)$ ꝛc. $= S$ oder irgend einer Funktion von x: so ist, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$lS = l(1+\alpha x) + l(1+\beta x) + l(1+\gamma x) + l(1+\delta x) + \text{ꝛc.}$$

Differenziirt man diese Gleichung und dividirt darauf durch dx, so wird

$$\frac{dS}{Sdx} = \frac{\alpha}{1+\alpha x} + \frac{\beta}{1+\beta x} + \frac{\gamma}{1+\gamma x} + \frac{\delta}{1+\delta x} + \text{ꝛc.}$$

woraus man durch fortgesetzte Differenziation die Summen aller Potestäten dieser Brüche, auf die an den vorhergehenden Beyspielen ausführlich gezeigte Art, findet.

§. 42.

Wir haben aber in der Einleitung (Th. 1. Cap. 11. §. 184.) verschiedene Ausdrücke mitgetheilt, auf welche sich diese Methode anwenden läßt. Bedeutet nemlich π einen Kreisbogen von 180°, dessen Radius $= 1$ ist, so haben wir gezeigt, daß

$$\text{sin.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{4nn-mm}{4nn}\cdot\frac{16nn-mm}{16nn}\cdot\frac{36nn-mm}{36nn}\cdot\text{ꝛc.}$$

$$\text{cos.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{nn-mm}{nn}\cdot\frac{9nn-mm}{9nn}\cdot\frac{25nn-mm}{25nn}\cdot\frac{49nn-mm}{49nn}\cdot\text{ꝛc.}$$

ist. Setzt man nun $n = 1$ und $m = 2x$, so wird

$$\text{sin.}\,\pi x = \pi x\cdot\frac{1-xx}{1}\cdot\frac{4-xx}{4}\cdot\frac{9-xx}{9}\cdot\frac{16-xx}{16}\,\text{ꝛc.}$$

oder

$$\text{sin.}\,\pi x = \pi x\cdot\frac{1-x}{1}\cdot\frac{1+x}{1}\cdot\frac{2-x}{2}\cdot\frac{2+x}{2}\cdot\frac{3-x}{3}\cdot\frac{3+x}{3}\cdot\frac{4-x}{4}\,\text{ꝛc.}$$

und

$$\cos.\pi x = \frac{1-4xx}{1}\cdot\frac{9-4xx}{9}\cdot\frac{25-4xx}{25}\cdot\frac{49-4xx}{49}\text{ ꝛc. oder}$$

$$\cos.\pi x = \frac{1-2x}{1}\cdot\frac{1+2x}{1}\cdot\frac{3-2x}{3}\cdot\frac{3+2x}{3}\cdot\frac{5-2x}{5}\cdot\frac{5+2x}{5}\text{ ꝛc.}$$

Hieraus aber fließt, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$l\sin.\pi x = l\pi x + l\frac{1-x}{1} + l\frac{1+x}{1} + l\frac{2-x}{2} + l\frac{2+x}{2} + l\frac{3-x}{3} + \text{ꝛc.}$$

$$l\cos.\pi x = l\frac{1-2x}{1} + l\frac{1+2x}{1} + l\frac{3-2x}{3} + l\frac{3+2x}{3} + l\frac{5-2x}{5} + \text{ꝛc.}$$

§. 43.

Differenziirt man diese Logarithmische Reihen und dividirt allenthalben durch dx, so giebt die erste:

$$\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{ꝛc.}$$

und dies ist eben die Reihe, welche wir §. 37. betrachtet haben. Die andere aber giebt

$$\frac{-\pi\sin.\pi x}{\cos.\pi x} = -\frac{2}{1-2x} + \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{3-2x} + \frac{2}{3+2x} - \frac{2}{5-2x} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man daher $2x = z$, so daß $x = \frac{z}{2}$ wird, und dividirt man überdies durch -2, so wird:

$$\frac{\pi\sin.\frac{1}{2}\pi z}{2\cos.\frac{1}{2}\pi z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} + \frac{1}{5-z} - \text{ꝛc.}$$

Da aber $\sin.\frac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1-\cos.\pi z}{2}}$, und $\cos.\frac{1}{2}\pi z = \sqrt{\frac{1+\cos.\pi z}{2}}$ ist, so wird dadurch

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos.\pi z)}}{\sqrt{(1+\cos.\pi z)}} = \frac{2}{1-z} - \frac{2}{1+z} + \frac{2}{3-z} - \frac{2}{3+z} + \frac{2}{5-z} - \text{ꝛc.}$$

oder, wenn man x anstatt z setzt,

$\pi\sqrt{}$

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos.\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos.\pi x)}}=\frac{2}{1-x}-\frac{2}{1+x}+\frac{2}{3-x}-\frac{2}{3+x}+\frac{2}{5-x}-\text{ꝛc.}$$

Addirt man diese Reihe zu der vorhin gefundenen, nemlich zu

$$\frac{\pi\cos.\pi x}{\sin.\pi x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}-\frac{1}{3-x}+\text{ꝛc.}$$

so erhält man die Summe folgender Reihe

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3-x}-\frac{1}{3+x}-\text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$\frac{\pi\sqrt{(1-\cos.\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos.\pi x)}}+\frac{\pi\cos\pi x}{\sin.\pi x}.$$

Da aber der Bruch $\frac{\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos.\pi x)}}$, wenn man den Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1-\cos.\pi x)}$ multiplicirt, in $\frac{1-\cos.\pi x}{\sin.\pi x}$ übergeht, so wird dadurch die Summe jener Reihe $=\frac{\pi}{\sin.\pi x}$ welches eben dieselbe ist, die wir §. 34 gehabt haben. Wir wollen daher auch nicht länger dabey verweilen.

Drittes Capitel.

Von der Erfindung der Differenzen.

§. 44.

Wie man aus den Differenzen der Funktionen die Differenzialien derselben auf eine leichte Art zu finden im Stande ist, haben wir im Anfange ausführlich gezeigt, und selbst aus dieser Quelle den Grund der Differenzialien abgeleitet. Denn wenn die Differenzen, die man endlich annimmt, verschwinden und in Nichts übergehen, so entstehen daraus die Differenzialien; und da in diesem Falle viele ja oft unzählige Glieder von denen, welche die Differenz ausmachen, weggelassen werden, so lassen sich die Differenzialien viel leichter finden, und auf eine bequemere, genauere und deutlichere Art ausdrucken als die Differenzen. Aus diesem Grunde scheint aber auch der Rückweg von den Differenzialien zu den Differenzen verschlossen zu seyn; indeß lassen sich gleichwohl auf dem Wege, den wir hier betreten wollen, aus den Differenzialien aller Ordnungen irgend einer Funktion alle Differenzen derselben bestimmen.

§. 45.

Es sey y irgend eine Funktion von x, die bey der Substitution von $x + dx$ für x in $y + dy$ übergehe. Setzt man nun von neuem $x + dx$ für x, so wird der Werth $y + dy$ um sein Differenzial $dy + ddy$ vermehrt, und also $= y +$

2dy

$2dy + ddy$, und dieser Werth entspricht dem Werthe $x + 2dx$ von x. Fährt man daher continuirlich fort, die Größe x um ihr Differenzial dx zu vermehren, so daß daraus nach und nach

$$x + dx;\quad x + 2dx;\quad x + 3dx;\quad x + 4dx;\ \text{rc.}$$

wird: so sind die zugehörigen Werthe von y, um sie tabellarisch darzustellen, folgende:

Werthe von x	Dazu gehörende Werthe der Funktion
x	y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + d^3y$
$x + 4dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3y + 5d^4y + d^5y$
$x + 6dx$	$y + 6dy + 15ddy + 20d^3y + 15d^4y + 6d^5y + d^6y$
rc.	rc.

§. 46.

Ueberhaupt also bekommt y, wenn x in $x + ndx$ übergeht, diese Form:

$$y + \frac{n}{1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}ddy + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3y + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}d^4y + \text{rc.}$$

In diesem Ausdrucke ist nun zwar jedes folgende Glied unendlichmal kleiner als das vorhergehende, allein wir haben gleichwohl keines ausgelassen, um diesen Ausdruck zu unserer gegenwärtigen Absicht brauchbar zu machen. Denn läßt man n eine unendlich große Zahl bedeuten, so ist bereits angemerkt worden, daß das Produkt aus einer unendlich großen Zahl in eine unendlich kleine eine endliche Größe ist; und es kann daher allerdings das zweyte Glied dem ersten homogen werden, oder $n\,dy$ der Ausdruck einer endlichen Größe seyn. Aus eben dem Grunde kann das dritte Glied $\frac{n(n-1)}{1.2}ddy$, obgleich ddy unendlichmal kleiner ist als dy, weil nemlich $\frac{n(n-1)}{1.2}$ unendlichmal größer ist als n, eine endliche Größe vorstellen, und man darf daher, wenn n eine unendlich große Zahl bedeutet, keines von den Gliedern des obigen Ausdrucks weglassen.

§. 47.

Wenn man aber n eine unendlich große Zahl bedeuten läßt, so hat jede Zahl, die man aus n und jeder endlichen Zahl entweder durch die Addition oder durch die Subtraction zusammensetzt, zu n das Verhältniß der Gleichheit, und man kann daher für jeden der Faktoren $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$ rc. bloß n setzen. Denn da

$$\frac{n(n-1)}{1.2}ddy = \tfrac{1}{2}nnddy - \tfrac{1}{2}nddy$$

ist: so steht das Glied $\frac{1}{2}nnddy$ zu $\frac{1}{2}nddy$ in dem Verhältnisse von n zu 1, und es verschwindet folglich dieser letztere in Ansehung des erstern, so daß man $\frac{1}{2}nn$ für $\frac{n(n-1)}{1.2}$ setzen kann. Auf eine ähnliche Art kann man den Coefficienten des dritten Gliedes $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ in $\frac{n^3}{6}$ zusammenziehen, und eben so in dem folgenden Coefficienten die Zahlen, um welche n vermindert werden soll, aus der Acht lassen. Dadurch aber erhält die Funktion y, wenn man $x+ndx$ für x setzt, und n eine unendlich große Zahl bedeutet, folgende Form:

$$y + \frac{ndy}{1} + \frac{nnddy}{1.2} + \frac{n^3d^3y}{1.2.3} + \frac{n^4d^4y}{1.2.3.4} + \frac{n^5d^5y}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

§. 48.

Da nun das Produkt ndx, wenn n eine unendlich große Zahl ist, der unendlichen Kleinheit von dx ungeachtet, eine endliche Größe ausdrucken kann: so wollen wir $ndx = \omega$ setzen, so daß $n = \frac{\omega}{dx}$ sey. Hierbey ist allerdings n eine unendlich große Zahl, da es der Quotient aus einer endlichen durch ein unendlich Kleines dividirten Größe ist. Brauchen wir aber diesen Werth von n, so sehen wir, daß die Funktion y von x, wenn x um die endliche Größe ω vermehrt, oder $x + \omega$ für x gesetzt wird, folgende Form bekommt:

$$y + \frac{\omega dy}{1\,dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{rc.}$$

deren einzelne Glieder durch eine fortgesetzte Differenziation von y gefunden werden können. Denn da y eine Funktion von x ist, so haben wir oben im ersten Theile gezeigt, daß alle diese Funktionen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; rc. endliche Größen vorstellen.

§. 49.

Da also, wenn die veränderliche Größe x um die endliche Größe ω vermehrt wird, die Funktion y von x um ihre erste Differenz wächst, und wir oben diese Differenz durch Δy bezeichnet haben, wenn $\omega = \Delta x$ ist: so läßt sich die Differenz von y durch eine fortgesetzte Differenziation finden. Es ist nemlich

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc. oder}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art wird die endliche Differenz Δy durch eine Progression ausgedruckt, deren Glieder nach den Potestäten von Δx fortlaufen. Hieraus erhellet ebenfalls, daß in dem Falle, wenn x nur um eine unendlich kleine Grösse wächst, und also Δx in das Differenzial dx übergeht, alle Glieder gegen das erste verschwinden, und folglich $\Delta y = dy$ wird; denn wird $\Delta x = dx$, so geht nach der Erklärung die Differenz Δy in das Differenzial dy über.

§. 50.

Da, wenn man $x + \omega$ für x setzt, jede Funktion y von x folgende Form annimmt:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

so läßt sich die Wahrheit dieses Ausdrucks durch solche Beyspiele bestätigen, wo die höhern Differenzialien von y endlich Null werden, denn in diesem Falle wird die Anzahl der Glieder des vorhergehenden Ausdrucks endlich.

Erstes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $xx - x$ zu finden, wenn man $x + 1$ für x setzt.

Man setze $y = xx - x$. Da nun, wenn x in $x + 1$ übergehen soll, $\omega = 1$ wird, so findet man, wenn man die Differenzialien sucht,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1; \quad \frac{ddy}{dx^2} = 2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0; \text{ ꝛc.}$$

Es geht also die Funktion $y = xx - x$, wenn man $x + 1$ für x setzt, in folgende über: $xx - x + 1(2x - 1) + \frac{1}{2}.2 = xx + x$. Setzt man wirklich $x + 1$ für x in $xx - x$, so wird

$$\begin{array}{l} x \text{ in } x + 1 \\ xx \text{ in } xx + 2x + 1 \\ \hline \end{array}$$

und also $xx - x$ in $xx + x$ verwandelt.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $x^3 + xx + x$ zu finden, wenn $x + 2$ für x gesetzt wird.

Setzt man $y = x^3 + xx + x$, so wird $\omega = 2$, und

$$\frac{dy}{dx} = 3xx + 2x + 1$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 6x + 2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Werth der Funktion $y = x^3 + xx + x$, wenn man darin $x + 2$ für x setzt:

$$x^3 + xx + x + 2(3xx + 2x + 1) + \tfrac{4}{2}(6x + 2) + \tfrac{8}{6}.6 = x^3 + 7xx + 17x + 14;$$

und eben diesen Werth findet man, wenn man $x + 2$ selbst für x setzt.

Drittes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $xx + 3x + 1$ zu finden, wenn $x - 3$ für x gesetzt wird.

Hier ist also $\omega = -3$, und wenn man $y = xx + 3x + 1$ setzt,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2.$$

Es geht also die Funktion $xx + 3x + 1$, wenn man $x - 3$ für x setzt, in $x^2 + 3x + 1 - \frac{3}{1}(2x + 3) + \frac{9}{2} \cdot 2 = x^2 - 3x + 1$ über.

§. 51.

Wenn für ω eine negative Zahl gesetzt wird, so findet man den Werth, den die Funktion von x erhält, wenn die Größe x selbst um eine gegebene Größe ω vermindert wird. Setzt man nemlich $x - \omega$ für x, so bekommt die Funktion y von x folgenden Werth:

$$y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{rc.}$$

und man kann daher alle Veränderungen finden, welche die Funktion y leidet, indem die Größe x auf die eine oder auf die andere Art verändert wird. Ist aber y eine ganze rationale Funktion von x, so wird der veränderte Werth von y, weil man alsdann endlich zu verschwindenden Differenzialien kommt, durch einen endlichen Ausdruck ausgedruckt; ist hingegen y keine solche Funktion, so ist der Ausdruck des veränderten Werthes eine unendliche Reihe, deren Summe durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden kann, weil man den veränderten Werth durch eine wirkliche Substitution leicht findet.

§. 52.

So wie die erste Differenz gefunden worden ist, so lassen sich auch die folgenden Differenzen durch ähnliche Aus-

drücke

drücke angeben. Es erhalte nemlich x nach und nach die Werthe

$$x + \omega;\quad x + 2\omega;\quad x + 3\omega;\quad x + 4\omega;\ \text{ꝛc.}$$

und die diesen Werthen entsprechende Werthe von y seyen

$$y^{I};\qquad y^{II};\qquad y^{III};\qquad y^{IV};\ \text{ꝛc.}$$

wie wir im Anfange dieses Werks angenommen haben. Da also

$$y^{I};\qquad y^{II};\qquad y^{III};\qquad y^{IV};\ \text{ꝛc.}$$

die Werthe sind, welche y erhält, wenn man für x nach und nach

$$x + \omega;\quad x + 2\omega;\quad x + 3\omega;\quad x + 4\omega;\ \text{ꝛc.}$$

setzt: so lassen sich nach der ertheilten Anweisung die Werthe von y auf folgende Art ausdrucken:

$$y^{I} = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$y^{II} = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$y^{III} = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$y^{IV} = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3 y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4 y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

§. 53.

Da also, wenn Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, ꝛc. die erste, zweyte, dritte, vierte Differenz u. s. f. bedeuten,

$$\Delta y = y^{I} - y$$

$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^{I} + y$$

$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$

$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

ꝛc.

ist:

ist: so lassen sich jene Differenzen durch die Differenzialien auf folgende Art ausdrucken:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2.1)\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(2^3 - 2.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(2^4 - 2.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3 - 3.2^3 + 3.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(3^4 - 3.2^4 + 3.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{(4^5 - 4.3^5 + 6.2^5 - 4.1)\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 54.

Der große Nutzen, den diese Ausdrücke für die Differenzen in der Lehre von den Reihen und den Progressionen haben, fällt theils von selbst in die Augen, theils wird er in dem Folgenden ausführlicher beschrieben werden. Indeß wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel den Nuzen erwägen, der daher für die Kenntniß der Reihen unmittelbar fließt. Ob man nun gleich die Anzeiger der Glieder jeglicher Reihe gewöhnlicher Weise so annimmt, daß sie eine arithmetische Progression, deren Differenz 1 ist, ausmachen; so wollen wir doch, um dieser Untersuchung einen desto größern Umfang zu geben, und die Anwendung derselben zu erleichtern, die Differenz $= \omega$ setzen, so daß, wenn das allgemeine Glied, oder dasjenige, welches dem Anzeiger x entspricht, y ist, die folgenden zu den Anzeigern $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, ꝛc. gehören. Wenn also zu diesen Anzeigern

$$x,\ x + \omega,\ x + 2\omega,\ x + 3\omega,\ x + 4\omega,\ \text{ꝛc.}$$

folgende

folgende Glieder y, P, Q, R, S, ꝛc. gehören, so werden dieselben aus y und seinen Differenzialien auf folgende Art bestimmt:

$$P = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^4} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$Q = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$R = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\,\omega^4 d^4y}{24\,dx^2} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

§. 55.

Wenn diese Ausdrücke von einander abgezogen werden, so fällt y aus den Differenzen weg, und es ist

$$P - y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$Q - P = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{3\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{7\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{15\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$R - Q = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{5\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{19\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{65\omega^4 d^4y}{24\,dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S - R = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{7\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{37\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{175\,\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - S = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{61\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{369\,\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Wenn diese Ausdrücke abermals von einander subtrahirt werden, so fallen auch die ersten Differenzialien weg, und es ist

$$Q - 2P + y = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{14\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$R - 2Q + P = \frac{2x^2 ddy}{2dx^2} + \frac{12\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{50\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S - 2R + Q = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{18\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{110\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - 2S + R = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{24\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{194\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Bey nochmaliger Subtraction fallen ~~die zweyten~~ Differenzialien aus der Rechnung weg, und es wird

$$R - 3Q + 3P - y = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{36\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S - 3R + 3Q - P = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{60\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - 3S + 3R - Q = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{84\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Setzt man die Subtraction weiter fort, so wird

$$S - 4R + 6Q - 4P + y = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - 4S + 6R - 4Q + P = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc. und

$$T - 5S + 10R - 10Q + 5P - y = \frac{120\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 56.

Wenn also y eine ganze rationale Funktion von x ist, so kommt man, wenn man auf diese Art fortgeht, weil alsdann die höhern Differenzialien endlich verschwinden, zu verschwindenden Ausdrücken. Da also diese Ausdrücke die Diffe-

Differenzen von y sind, so wollen wir ihre Form und ihre Coefficienten genauer erwägen.

$$y = y$$

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{\omega^2 ddy}{dx^2} + \frac{3\omega^3 d^3y}{3dx^3} + \frac{7\omega^4 d^4y}{3.4dx^4} + \frac{15\omega^5 d^5y}{3.4.5.dx^5} + \frac{31\omega^6 d^6y}{3.4.5.6dx^6} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{\omega^3 d^3y}{dx^3} + \frac{6\omega^4 d^4y}{4dx^4} + \frac{25\omega^5 d^5y}{4.5dx^5} + \frac{90\omega^6 d^6y}{4.5.6dx^6} + \frac{301\omega^7 d^7y}{4.5.6.7dx^7} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4y}{dx^4} + \frac{10\omega^5 d^5y}{5dx^5} + \frac{65\omega^6 d^6y}{5.6dx^6} + \frac{350\omega^7 d^7y}{5.6.7dx^7} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5y}{dx^5} + \frac{15\omega^6 d^6y}{6dx^6} + \frac{140\omega^7 d^7y}{6.7dx^7} + \frac{1050\omega^8 d^8y}{6.7.8dx^8} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6y}{dx^6} + \frac{21\omega^7 d^7y}{7dx^7} + \frac{266\omega^8 d^8y}{7.8dx^8} + \frac{2646\omega^9 d^9y}{7.8.9dx^9} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Wie die Nenner in diesen Reihen fortschreiten, fällt leicht in die Augen; was aber die Zähler betrifft, so werden die Coefficienten derselben auf die Art formirt, daß ein jeder eine Summe aus dem über ihm stehenden und aus dem Produkte des vorhergehenden in den Exponenten der Differenz ist. So ist in der Reihe, welche die Differenz $\Delta^6 y$ ausdruckt, $2646 = 1050 + 6.266$.

§. 57.

Nun wollen wir diese Reihe betrachten, wenn sie zugleich rückwärts fortgesetzt wird, und sie also auch die Glieder enthält, die zu den Anzeigern $x - \omega$; $x - 2\omega$; $x - 3\omega$; ꝛc. gehören.

$$\begin{array}{cccc} x - 4\omega; & x - 3\omega; & x - 2\omega; & x - \omega; \\ s, & r, & q, & p; \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x; & x + \omega; & x + 2\omega; & x + 3\omega; & x + 4\omega; & \text{ꝛc.} \\ y, & P, & Q, & R, & S, & \text{ꝛc.} \end{array}$$

Da also

$$p = y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$q = y - \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^4} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$r = y - \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$s = y - \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

ist; so wird, wenn man diese Werthe von den obigen P, Q, R, S, ꝛc. abzieht,

$$\frac{P - p}{2} = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{Q - q}{2} = \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{R - r}{2} = \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{S - s}{2} = \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Wenn man hingegen diese Werthe zu den obigen addirt, so fallen, so wie hier die Differenzialien der geraden Ordnungen

gen, nunmehr die Differenzialien der ungeraden Ordnungen weg, und es wird:

$$\frac{P+p}{2} = y + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

$$\frac{Q+q}{2} = y + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{64\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

$$\frac{R+r}{2} = y + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{729\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

$$\frac{S+s}{2} = y + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{4096\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

etc.

§. 58.

Da sich alle vorhergehenden Glieder ausdrucken lassen, so erhält man, wenn man dieselben in eine Summe zusammenzieht, das summirende Glied der gegebenen Reihe. Es sey nemlich das erste Glied dasjenige, welches zu dem Anzeiger $x - n\omega$ gehört, so ist das erste Glied selbst =

$$y - \frac{n\omega dy}{dx} + \frac{n^2\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{n^3\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{n^4\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

Da nun das Glied, welches zu dem Anzeiger x gehört, $= y$, und die Anzahl aller Glieder $= n + 1$ ist: so ist die Summe aller Glieder vom ersten bis zum letzten y, dieses eingeschlossen, oder das summirende Glied =

$$\begin{aligned}(n+1)y &- \frac{\omega dy}{dx}(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n)\\ &+ \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2)\\ &- \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3)\\ &+ \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(1 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots + n^4)\end{aligned}$$

$$-\frac{\omega^5 d^5 y}{120 dx^5}(1 + 2^5 + 3^5 + \ldots\ldots\ldots + n^5)$$

2c.

§. 59.

Wir haben aber oben (Th. 1. Cap. 2. §. 61. 62.) die Summen dieser Reihen gegeben, und wenn man daher diese Summen hier gebraucht, so wird die Summe der gegenwärtigen Reihe =

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(\tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n)$$
$$+ \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n)$$
$$- \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(\tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2)$$
$$+ \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(\tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n)$$
$$- \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5}(\tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2)$$

2c.

wo sich n aus dem Anzeiger des Gliedes, von welchem an die Summe gerechnet wird, ergiebt. Ist also $\omega = 1$, ferner der Anzeiger des ersten Gliedes = 1, des zweyten = 2, und des letzten x, so daß die gegebene Reihe folgende ist:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ldots\ x \\ a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ldots\ y \end{array}$$

so ist die Summe dieser Reihe, (weil $x - n = 1$, und $n = x - 1$ ist)

$$= xy - \frac{dy}{dx}(\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x)$$

+ ddy

$$+ \frac{ddy}{2dx^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x\right)$$
$$- \frac{d^3y}{6dx^3}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2\right)$$
$$+ \frac{d^4y}{24dx^4}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x\right)$$
$$- \frac{d^5y}{120dx^5}\left(\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2\right)$$
$$+ \frac{d^6y}{720dx^6}\left(\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x\right)$$

ꝛc.

§. 60.

Aus diesem Ausdrucke für die Summe entspringt für die Lehre von den Reihen sehr wenig Vortheil, weil die Coefficienten sehr groß werden, wenn x eine große Zahl ist; indeß wird es gleichwohl nicht unnütz seyn, einiger daher fliessenden Eigenschaften zu erwähnen. Es sey also das allgemeine Glied $y = x^n$, und das Zeichen des summirenden Gliedes sey Sy oder $S.x^n$. Vorausgesetzt, daß diese Bezeichnung allenthalben statt finde; so ist

$$\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x = S.x - x$$
$$\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x = S.x^2 - x^2$$
$$\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx = S.x^3 - x^3$$

ꝛc.

Man erhält daher aus dem obigen Ausdrucke:

$$Sx^n = x^{n+1} - nx^{n-1}S.x + nx^n$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^n$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^n$$

ꝛc.

Da aber

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{rc. ist,}$$

so ist

$$n - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} - \text{rc.} = 1,$$

und es wird also, den Fall ausgenommen, wenn $n = 0$ ist, in welchem jener Ausdruck $= 0$ wird,

$$\begin{aligned} S.x^n = x^{n+1} + x^n - n\,x^{n-1}\,S.x & \\ + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^{n-2}\,S.x^2 & \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}\,S.x^3 & \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^{n-4}\,S.x^4 & \\ \text{rc.} & \end{aligned}$$

§. 61.

Damit sowohl die Wahrheit als die Kraft dieser Formel deutlicher werde, wollen wir einige einzelne Fälle erwägen. Es sey also zuvörderst

$$n = 1.$$

Alsdann ist

$$S.x = x^2 + x - Sx, \text{ oder } Sx = \frac{xx + x}{2}$$

wie solches bekannt genug ist. Ferner sey

$$n = 2.$$

Alsdann ist $S.x^2 = x^3 + xx - 2xS.x + S.x^2$. Da sich in dieser Gleichung die auf beyden Seiten befindlichen Glieder $S.x^2$ einander aufheben, so erhält man daraus wieder wie vorhin $S.x = \frac{xx + x}{2}$. Nun sey

$$n = 3.$$

Dann ist $S.x^3 = x^4 + x^3 - 3x^2Sx + 3xS.x^2 - S.x^3$, und also

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{3}{2}x^2Sx + \tfrac{1}{2}x^3(x+1).$$

Setzt man

$$n = 4;$$

so ist $S.x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3Sx + 6x^2S.x^2 - 4xS.x^3 + S.x^4$, woraus, weil $S.x^4$ wegfällt,

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - x^2Sx + \tfrac{1}{4}x^3(x+1)$$

so wie hieraus, wenn man von dem Dreyfachen desselben das Zweyfache der vorhergehenden Gleichung abzieht,

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{1}{4}x^3(x-1)$$

wird. Setzt man

$$n = 5;$$

so wird

$$S.x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4Sx + 10x^3S.x^2 - 10x^2S.x^3 + 5xS.x^4 - S.x^5,$$

oder

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - 5x^2S.x^3 + 5x^3S.x^2 - \tfrac{5}{2}x^4Sx + \tfrac{1}{2}x^5(x+1)$$

und aus $n = 6$ folgt,

$$S.x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5Sx + 15x^4S.x^2 - 20x^3S.x^3 + 15x^2S.x^4 - 6xS.x^5 + S.x^6$$

oder

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - \tfrac{10}{3}x^2S.x^3 + \tfrac{5}{2}x^3S.x^2 - x^4Sx + \tfrac{1}{6}x^5(x+1).$$

 §. 62.

§. 62.

Ueberhaupt ist also, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x S.x^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.1.2} x^2 S.x^{2m-1}$$
$$+ \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{2.1.2.3} x^3 S.x^{2m-2} - \ldots\ldots$$
$$- \frac{(2m+1)}{2} x^{2m} S x + \tfrac{1}{2} x^{2m+1}(x+1).$$

Wenn man aber $n = 2m + 2$ setzt, so findet man, weil die Glieder $S.x^{2m+2}$ einander aufheben:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x S.x^{2m} - \frac{2(m+1)2m}{2.3} x^2 S.x^{2m-1}$$
$$+ \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.3.4} x^3 S.x^{2m-2} - \ldots\ldots$$
$$- x^{2m} S.x + \frac{1}{2m+2} x^{2m+1}(x+1).$$

Es lassen sich also die Summen der ungeraden Potestäten aus den Summen der niedern Potestäten auf eine doppelte Art bestimmen, und aus der Combination dieser beyden Formeln kann man außerdem unzählige andere herleiten.

§. 63.

Man kann indeß die Summen der ungeraden Potestäten noch auf eine viel leichtere Art aus den vorhergehenden bestimmen, und es ist dazu genug, wenn man bloß die Summe der vorhergehenden geraden Potestät weiß. Denn aus den oben (Th. 1. Cap 2. § 61. 62.) gegebenen Summen der Potestäten erhellet, daß die Zahl der Glieder, welche die Summen ausmachen, bloß bey den ungeraden Potestäten vermehret wird, so daß die Summe der ungeraden Potestät aus eben so viel Gliedern besteht, als die Summe der vorhergehergehenden geraden Potestät. Ist nemlich die Summe der geraden Potestät $x^{2n} =$

$$S.x^{2n} = \alpha x^{2n+1} + \beta x^{2n} + \gamma x^{2n-1} - \delta x^{2n-3} + \varepsilon x^{2n-5} \\ - \text{ꝛc.}$$

denn wir haben gesehen, daß nach dem dritten Gliede ein Glied um das andere wegfällt, und daß die Zeichen abwechseln: so findet man daraus die Summe der folgenden Potestät x^{2n+1}, wenn man die Glieder von jener durch folgende Zahlen:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x;\quad \frac{2n+1}{2n+1}x;\quad \frac{2n+1}{2n}x;\quad \frac{2n+1}{2n-1}x;\quad \frac{2n+1}{2n-2}x;\ \text{ꝛc.}$$

multiplicirt, und es ist also:

$$S.x^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha x^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}\beta x^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}\gamma x^{2n} \\ - \frac{2n+1}{2n-1}\delta x^{2n-2} + \frac{2n+1}{2n-4}\varepsilon x^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}\zeta x^{2n-6} \\ + \text{ꝛc.}$$

Ist also die Summe der Potestät x^{2n} bekannt, so läßt sich daraus die Summe der folgenden Potestät x^{2n+1} leicht finden.

§. 64.

Diese Art, die folgenden Summen zu finden, läßt sich auch bey den geraden Potestäten gebrauchen. Zwar bekommen die Summen dieser Potestäten ein neues Glied, und dieses findet man durch diese Methode nicht; indeß läßt es sich aus der Reihe selbst leicht herleiten, da bekannt ist, daß die Summe derselben, wenn man $x = 1$ setzt, $= 1$ werden muß. Umgekehrt aber lassen sich allezeit aus der bekannten Summe einer jeden Potestät die Summen der vorhergehenden Potestäten finden. Denn wenn

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

ist, so ist für die vorhergehende Potestät:

$$S.x^{n-1} = \frac{n+1}{n}\alpha x^n + \frac{n}{n}\beta x^{n-1} + \frac{n-1}{n}\gamma x^{n-2} - \frac{n-3}{n}\delta x^{n-4}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

und von hier kann man soweit rückwärts fortgehen, als man will. Es muß aber bemerkt werden, daß α beständig $= \frac{1}{n+1}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ ist, wie solches aus den vorhin gefundenen Formeln erhellet.

§. 65.

Bey einiger Aufmerksamkeit sieht man bald, daß man die Summe der Potestäten x^{n-1} findet, wenn man die Summe der Potestäten x^n differenziirt, und das Differenzial derselben durch $n\,dx$ dividirt; und es ist daher

$$d.S.x^n = n\,dx.S.x^{n-1}, \text{ und da } d.x^n = n\,x^{n-1}dx \text{ ist,}$$
auch
$$d.S.x^n = S.n\,x^{n-1}dx = S.d.x^n.$$

Hieraus erhellet, daß das Differenzial der Summe der Summe des Differenzials gleich ist, so daß, wenn überhaupt das allgemeine Glied irgend einer Reihe $= y$, und Sy das summirende Glied derselben ist, $S\,dy = d.Sy$ wird; d. h. die Summe der Differenzialien aller Glieder ist gleich dem Differenziale der Summe dieser Glieder. Der Grund von dieser Gleichheit läßt sich aus dem, was wir oben über die Differenziation der Reihen gesagt haben, leicht abnehmen. Denn da

$$S.x^n = x^n + (x-1)^n + (x-2)^n + (x-3)^n + (x-4)^n + \text{ꝛc.}$$
ist, so ist

d. S. x^n

$$\frac{d \cdot S\,x^n}{n\,dx} = x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1}$$

$$+ \text{ꝛc.} = S \cdot x^{n-1}$$

und dieser Beweis erstreckt sich auch auf alle andere Reihen.

§. 66.

Doch wir wollen zu dem Gegenstande zurückkehren, von welchen wir ausgegangen sind, nemlich zu den Differenzen der Funktionen, indem dabey noch eins und das andere anzumerken ist. Da wir gesehen haben, daß y, wenn solches eine Funktion von x ist, und allenthalben $x \pm \omega$ anstatt x gesezt wird, folgenden Werth bekommt:

$$y \pm \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} \pm$$

$$\frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5dx^5} + \text{ꝛc.}$$

so muß dieser Ausdruck statt finden, man mag für ω eine beständige Größe, was für eine man will, oder auch eine veränderliche von x abhangende Größe setzen. Denn bey der Aufsuchung der Werthe der Brüche $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ꝛc. durch die Differenziation wird die Veränderlichkeit der Faktoren ω, ω^2, ω^3, ꝛc. nicht in Erwägung gezogen, und es ist daher gleich, ob ω eine beständige oder eine veränderliche von x abhangende Größe bedeute.

§. 67.

Wir wollen also annehmen, daß $\omega = x$ sey, und daß in der Funktion y allenthalben $x - x = 0$ für x gesetzt werde. Wenn also in irgend einer Funktion y von x anstatt x allenthalben 0 gesetzt wird, so wird der Werth dieser Funktion folgender:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{rc.}$$

Es zeigt also dieser Ausdruck allemal den Werth an, den jede Funktion y erhält, wenn man darin $x = 0$, setzt. Die Wahrheit dieser Behauptung werden folgende Exempel bestätigen.

Erstes Exempel.

Es soll $y = xx + ax + ab$ seyn, und der Werth davon, wenn $x = 0$, gefunden werden, welcher bekannter Maßen $= ab$ ist.

Da $y = xx + ax + ab$ ist, so wird

$$\frac{dy}{1dx} = 2x + a, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 1.$$

Folglich ist der gesuchte Werth =

$$x + ax + ab - x(2x + a) + xx.1 = ab.$$

Zweytes Exempel.

Es soll $y = x^3 - 2x + 3$ seyn, und der Werth davon für $x = 0$, der bekannter Maßen $= 3$ ist, gefunden werden.

Da $y = x^3 - 2x + 3$ ist, so wird

$$\frac{dy}{1dx} = 3xx - 2,$$

$$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 3x$$

$$\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} = 1.$$

Folglich ist der gesuchte Werth =

$$x^3 - 2x + 3 - x(3xx - 2) + xx.3x - x^3.1 = 3.$$

Drittes

Drittes Exempel.

Es soll $y = \frac{x}{1-x}$ seyn, und der Werth davon für $x = 0$, der, wie leicht in die Augen fällt, $= 0$ ist, gesucht werden.

Da $y = \frac{x}{1-x}$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\frac{ddy}{1.2\,dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}$; $\frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}$; ꝛc. und folglich der gesuchte Werth =

$$\frac{x}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} - \frac{x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^4}{(1-x)^5} - \text{ꝛc.}$$

Es ist also der Werth dieser Reihe $= 0$, welches auch daher erhellet, weil dieselbe, wenn man das erste Glied wegläßt, eine geometrische Reihe wird, deren Summe =

$$\frac{x}{(1-x)^2 + x(1-x)} = \frac{x}{1-x} \text{ ist.}$$

Hiernach ist der gefundene Werth $= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$.

Viertes Exempel.

Es sey $y = e^x$, so daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist. Man soll den Werth von y für $x = 0$ finden, welcher, wie bekannt, $= 1$ ist.

Da $y = e^x$; so ist $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^x$; ꝛc. und folglich der gesuchte Werth

$$= e^x - \frac{e^x x}{1} + \frac{e^x xx}{1.2} - \frac{e^x x^3}{1.2.3} + \frac{e^x x^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

$$= e^x\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}\right)$$

Nun haben wir aber oben in der Einl. in die Anal. d. Unendl. gesehen, daß die Reihe $1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ — 2c. den Werth von e^{-x} ausdruckt. Folglich ist der gesuchte Werth $= e^x . e^{-x} = \frac{e^x}{e^x} = 1$.

Fünftes Exempel.

Wenn $y = \sin. x$ ist, so ist offenbar, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ ist. Eben dieses giebt aber auch die allgemeine Formel.

Denn da $y = \sin. x$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \cos. x$; $\frac{ddy}{dx^2} = - \sin. x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos. x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin. x$; 2c. Setzt man also $x = 0$, so wird der Werth von y folgender:

$$\sin. x - \frac{x}{1}\cos. x - \frac{xx}{1.2}\sin. x + \frac{x^3}{1.2.3}\cos. x + \frac{x^4}{1.2.3.4}\sin. x$$

— 2c. oder

$$\sin. x\left(1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \text{2c.}\right)$$

$$- \cos. x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \text{2c.}\right)$$

Da aber die erste Reihe den $\cos. x$, und die andere den $\sin. x$ ausdruckt, so ist der gesuchte Werth

$$= \sin. x . \cos. x - \cos. x . \sin. x = 0.$$

§. 68.

Hieraus erhellet also auch umgekehrt, daß, wenn y eine Funktion von x ist, die verschwindet, wenn man $x = 0$ setzt, alsdann auch seyn wird

y —

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{xxddy}{2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.} = 0,$$

und es ist dieses daher eine allgemeine Gleichung aller derer Funktionen, die, wenn $x = 0$ gesetzt wird, selbst verschwinden. Es ist also diese Gleichung so beschaffen, daß ihr allemal ein Genüge geschieht, man mag für y eine Funktion von x setzen, was für eine man will, wenn dieselbe nur für $x = 0$ ebenfalls verschwindet. Ist aber y eine solche Funktion von x, die für $x = 0$ den Werth A erhält, so ist

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{etc.} = A$$

und in dieser Gleichung sind alle Funktionen von x enthalten, die, wenn man $x = 0$ setzt, in A übergehen.

§. 69.

Wenn man $2x$ oder $x + x$ für x setzt, so bekommt jede Funktion y von x folgenden Werth:

$$y + \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

und setzt man nx, oder $x + (n-1)x$ für x, so ist der Werth der Funktion y folgender:

$$y + \frac{(n-1)xdy}{1dx} + \frac{(n-1)^2xxddy}{1.2dx^2} + \frac{(n-1)^3x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

Wenn aber überhaupt t für x gesetzt wird, so verwandelt sich jede Funktion y von x, weil alsdann $t = x + t - x$ wird, in folgende Form:

$$y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{etc.}$$

Wenn also v eine solche Funktion von t ist, als y von x, so ist, weil alsdenn v aus y entspringt, wenn man t für x setzt,

$$v = y + \frac{(t-x)dy}{1\,dx} + \frac{(t-x)^2 ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{(t-x)^3 d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$

und von der Wahrheit dieser Behauptung kann man sich durch jedes Beyspiel überzeugen.

Exempel.

Wenn nemlich $y = xx - x$ ist, so ist offenbar, daß durch die Substitution von t für x, $v = tt - t$ wird. Eben das lehrt aber auch die gefundene Formel. Denn da

$$y = xx - x \text{ ist, so wird } \frac{dy}{dx} = 2x - 1, \text{ und } \frac{ddy}{2dx^2} = 1.$$

Folglich ist

$$v = xx - x + (t-x)(2x-t) + (t-x)^2 =$$
$$xx - x + 2tx - 2xx - t + x + tt - 2tx + xx = tt - t.$$

Wenn also y eine solche Funktion von x ist, die, wenn man $x = a$ setzt, in A übergeht, so ist, weil alsdann $t = a$, und $v = A$ wird,

$$A = y + \frac{(a-x)dy}{1\,dx} + \frac{(a-x)^2 ddy}{1.2\,dx^2} + \frac{(a-x)^3 d^3y}{1.2.3\,dx^3} + \text{etc.}$$

und dieser Gleichung thun daher alle Funktionen von x ein Genüge, die, wenn man $x = a$ setzt, in A übergehen.

Vier-

Viertes Capitel.

Von der Verwandlung der Funktionen in Reihen.

§. 70.

Es ist schon in dem vorhergehenden Capitel der Nutzen zum Theil gezeigt worden, den die daselbst für die Differenzen gefundenen allgemeinen Ausdrücke in der Erfindung der Reihen haben, die den Werth einer jeden Funktion von x ausdrucken. Ist nemlich y eine gegebene Funktion von x, so ist der Werth, den sie bey $x = o$ erhält, bekannt; und setzt man denselben $= A$, so ist, wie wir gesehen haben,

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2d^2y}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{rc.} = A.$$

Auf diese Art erhält man nicht bloß meistentheils eine unendliche Reihe, deren Summe einer beständigen Größe A gleich ist, wenn sich schon in den einzelen Gliedern derselben eine veränderliche Größe x befindet: sondern man kann auch die Funktion y selbst durch eine Reihe ausdrucken. Es ist nemlich

$$y = A + \frac{xdy}{dx} - \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} - \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{rc.}$$

wovon bereits einige Beyspiele angeführt worden sind.

§. 71.

Um aber dieser Untersuchung einen weitern Umfang zu geben, wollen wir annehmen, daß die Funktion y in z übergehe, wenn man allenthalben $x + \omega$ für x setzt, so daß also z

eben

eben eine solche Funktion von $x + \omega$ als y von x sey. Für diesen Fall haben wir gezeigt (Cap. 3. §. 48.) daß

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddx}{1.2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 y}{1.2.3 dx^3} + \frac{\omega^4 d^4 y}{1.2.3.4 dx^4} + \text{etc.}$$

ist. Da man also alle Glieder dieser Reihe durch eine fortgesetzte Differenziation von y, indem man dx als beständig betrachtet, finden, und zugleich den Werth von z durch die Substitution von $x + \omega$ für x wirklich darstellen kann: so erhält man auf diese Art jederzeit eine Reihe, die dem Werthe von z gleich ist, und welche, wenn ω eine sehr kleine Größe ist, sehr stark convergirt, und in einer eben nicht großen Anzahl von Gliedern den Werth von z näherungsweise giebt. Hieraus fällt der große Nutzen dieser Formel bey dem Approximationsgeschäfte in die Augen.

§. 72.

Um bey der Erklärung des außerordentlichen Nutzens dieser Formel nach der Ordnung zu verfahren, wollen wir zuvörderst in die Stelle von y algebraische Funktionen von x setzen. Zuerst sey also $y = x^n$, wo denn, wenn man $x + \omega$ für x setzt, $z = (x + \omega)^n$ wird. Da nun bey dieser Voraussetzung

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1};$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4};$$

etc.

wird: so erhält man, wenn man diese Werthe substituirt,

$(x + \omega)^n$,

$$(x + \omega)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1}\omega + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} x^{n-2}\omega^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3}\omega^3 + \text{ꝛc.}$$

welches die bekannte Newtonianische Formel ist, um das Binomium $(x + \omega)^n$ in eine Reihe zu verwandeln. Die Anzahl der Glieder dieser Reihe ist allemal eine endliche Zahl, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

§. 73.

Hieraus können wir auch eine Progression finden, die den Werth der Potestät eines Binomiums auf die Art ausdruckt, daß die Reihe abbricht, wenn der Exponent der Potestät eine ganze negative Zahl ist. Denn setzt man

$\omega = \frac{-ux}{x+u}$; so wird $z = (x + \omega)^n = \left(\frac{xx}{x+u}\right)^n$, und folglich

$$\frac{x^{2n}}{(x+u)^n} = x^n - \frac{n x^n u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1) x^n u^2}{1 \,.\, 2 (x+u)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 (x+u)^3} x^n u^3 + \text{ꝛc.}$$

Dividirt man nun allenthalben durch x^{2n}, so wird

$$(x+u)^{-n} = x^{-n} - \frac{n x^{-n} u}{1(x+u)} + \frac{n(n-1) x^{-n} u^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 (x+u)^3} - \frac{n(n-1)(n-2) x^{-n} u^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 (x+u)^3} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man hierauf $-n = m$, so wird

$$(x+u)^m = x^m + \frac{m x^m u}{1(x+u)} + \frac{m(m+1) x^m u^2}{1 \,.\, 2 (x+u)^2} + \frac{m(m+1)(m+2) x^m u^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 (x+u)^3} + \text{ꝛc.}$$

und diese Reihe besteht allemal, wenn m eine ganze negative Zahl ist, aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Es ist also diese Reihe der vorhin gefundenen gleich, wenn man u und m für ω und n setzt. Es folgt nemlich daraus

$$(x+u)^m = x^m + \frac{mx^{m-1}u}{1} + \frac{m(m-1)x^{m-2}u^2}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)x^{m-3}u^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{⁊c.}$$

§. 74.

Eben diese Reihe kann auch aus dem im Anfange des 70sten §. stehenden Ausdrucks hergeleitet werden. Denn da, wenn y für x = o in A übergeht,

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{xxddy}{1\,.\,2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1\,.\,2\,.\,3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{⁊c.} = A.$$

ist: so setze man $y = (x+a)^n$, wodurch $A = a^n$ wird. Da nun

$$\frac{dy}{dx} = n(x+a)^{n-1};\quad \frac{ddy}{dx^2} = n(n-1)(x+a)^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)(x+a)^{n-3};\ \text{⁊c. ist: so wird}$$

$$(x+a)^n - \frac{n}{1}x(x+a)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}x^2(x+a)^{n-2} - \text{⁊c.} = a^n.$$

Dividirt man nunmehr durch $a^n(x+a)^n$, so findet man

$$(x+a)^{-n} = a^{-n} - \frac{na^{-n}x}{1(x+a)} + \frac{n(n-1)a^{-n}x^2}{1\,.\,2(x+a)^2} - \text{⁊c.}$$

und setzt man hier u, x und — m für x, a und n, so entsteht daraus die vorhin gefundene Reihe.

§. 75.

Wenn man für m gebrochene Zahlen setzt, so laufen beyde Reihen ohne Ende fort. Wenn aber u in Vergleichung mit x eine sehr kleine Größe ist, so nähern sich dieselben dem wahren Werthe in einem hohen Grade. Es sey also

also $m = \frac{\mu}{\nu}$, und $x = a^\nu$, so ist aus der zuerst gefundenen Reihe

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu a^\nu} + \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu.2\nu}.\frac{uu}{a^{2\nu}} + \frac{\mu(\mu-\nu)(\mu-2\nu)}{\nu.2\nu.3\nu}.\frac{u^3}{a^{3\nu}} + \text{etc.}\right)$$

Dagegen giebt die zuletzt gefundene Reihe

$$(a^\nu + u)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu\left(1 + \frac{\mu u}{\nu(a^\nu + u)} + \frac{\mu(\mu+\nu)u^2}{\nu.2\nu(a^\nu+u)^2} + \frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)u^3}{\nu.2\nu.3\nu(a^\nu+u)^3} + \text{etc.}\right)$$

Aber diese letztere Reihe convergirt viel stärker als die vorhergehende, indem ihre Glieder selbst dann abnehmen, wenn $u > a^\nu$ ist, in welchem Falle die vorhergehende Reihe divergirt.

Ist also $\mu = 1$; und $\nu = 2$, so ist

$$\sqrt{(a^2 + u)} = a\left(1 + \frac{1u}{2(a^2+u)} + \frac{1.3u^2}{2.4(a^2+u)^2} + \frac{1.3.5u^3}{2.4.6(a^2+u)^3} + \text{etc.}\right)$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man für ν nach und nach die Zahlen 3, 4, 5, etc. setzt, und $\mu = 1$ bleiben läßt,

$$\sqrt[3]{(a^3+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{3(a^3+u)} + \frac{1.4u^2}{3.6(a^3+u)^2} + \frac{1.4.7u^3}{3.6.9(a^4+u)^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\sqrt[4]{(a^4+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{4(a^4+u)} + \frac{1.5u^2}{4.8(a^4+u)^2} + \frac{1.5.9u^3}{4.8.12(a^3+u)^3} + \text{etc.}\right)$$

$$\sqrt[5]{(a^5+u)} = a\left(1 + \frac{1u}{5(a^5+u)} + \frac{1.6u^2}{5.10(a^5+u)^2} + \frac{1.6.11u^3}{5.10.15(a^5+u)^3} + \text{etc.}\right)$$

§. 76.

Nach diesen Formeln läßt sich jegliche Wurzel aus jeder gegebenen Zahl auf eine leichte Art finden. Ist nemlich eine Zahl c gegeben, so suche man die ihr am nächsten kommende Potestät, es mag dieselbe kleiner oder größer seyn. Im letzten Falle nimmt man u negativ, im ersten hingegen positiv. Scheint dabey die sich ergebende Reihe nicht genug zu convergiren, so multiplicire man die Zahl c durch eine Potestät, f^{ν} nemlich, wenn die νte Wurzel gesucht werden soll, und suche die Wurzel der Zahl $f^{\nu}c$, welche, durch f dividirt, die gesuchte Wurzel geben wird. Je größer aber f genommen wird, desto stärker convergirt die Reihe, und das um so mehr, wenn sich eine ähnliche Potestät a^{ν} nicht sehr von $f^{\nu}c$ unterscheidet.

Erstes Exempel.

Die Quadrat-Wurzel aus der Zahl 2 zu finden.

Wenn man ohne weitere Vorbereitung $a = 1$, und $u = 1$ setzt, so wird

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe convergirt zwar sehr stark, indeß ist es doch besser die Zahl 2 zuvor durch ein anderes Quadrat z. B. 25 zu multipliciren, wobey das Produkt 50 einem andern Quadrate 49 sehr nahe komme. Man suche demnach die Quadrat-Wurzel aus 50, welche mit 5 dividirt, $\sqrt{2}$ giebt. Es ist aber alsdenn $a = 7$, $u = 1$, und also

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$\sqrt{2} = \tfrac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \text{ꝛc.}\right.$$

und

und hiernach ist in Decimal-Brüchen sehr leicht zu rechnen. Es ist nemlich

$$
\begin{array}{rcr}
\frac{7}{5} & = & 1{,}400000000000 \\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100} & = & 14000000000 \\
\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{200} & = & 210000000 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{5}{300} & = & 35000000 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{7}{400} & = & 612500 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{9}{500} & = & 11025 \\
\text{d. Vorherg. in } \frac{11}{600} & = & 202 \\
 & & 3 \\
\hline
\text{Folglich } \sqrt{2} & = & 1{,}4142135623730
\end{array}
$$

Zweytes Exempel.

Die Cubik-Wurzel aus der Zahl 3 zu finden.

Man multiplicire die Zahl 3 durch den Cubus 8, und suche die Cubik-Wurzel aus der Zahl 24, wo denn $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ ist. Man setze also $a = 3$ und $u = -3$. Alsdann ist

$$\sqrt[3]{24} = 3\left(1 - \frac{1.3}{3.24} + \frac{1.4.3^2}{3.6.24^2} - \frac{1.4.7.3^3}{3.6.9.24^3} + \text{rc.}\right)$$

und

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3.8} + \frac{1.4}{3.6.8^2} - \frac{1.4.7}{3.6.9.8^3} + \text{rc.}\right)$$

oder

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{3}{2}\left(1 - \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{24}\cdot\tfrac{4}{48} - \tfrac{1}{24}\cdot\tfrac{4}{48}\cdot\tfrac{7}{72} + \text{rc.}\right)$$

Diese Reihe convergirt schon stark, indem jedes folgende Glied mehr als achtmal kleiner als das vorhergehende ist. Wenn man aber die 3 durch den Cubus 729 multiplicirt, so erhält man 2187, und dann wird $\sqrt[3]{2187} = \sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\sqrt[3]{3}$. Da nun $a = 13$ und $u = -10$ ist, so wird

 $\sqrt[3]{3} =$

$$\sqrt[3]{3} = \tfrac{13}{9}\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \text{etc.}\right)$$

und in dieser Reihe ist jedes folgende Glied mehr als 20mal kleiner als das vorhergehende.

§. 77.

Die Entwickelung der Potestäten des Binomiums ist von einem so weiten Umfange, daß man darnach alle algebraische Funktionen behandeln kann. Soll z. B. der Werth folgender Funktion $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ durch eine Reihe ausgedruckt werden, so kann solches nach den vorhergehenden Formeln geschehen, wenn man zwey Glieder als eins betrachtet. Hiernächst kann aber auch diese Entwickelung vermittelst des zuerst gegebenen Ausdrucks vorgenommen werden. Denn setzt man $\sqrt{(a + 2bx + cxx)} = y$, so wird, wenn man $x = 0$ nimmt, $y = \sqrt{a}$, und also auch $A = \sqrt{a}$. Da nun die Differenzialien von y auf die Art sich verhalten, daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + cx}{\sqrt{(a + 2bx + cxx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ac - bb}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3(bb - ac)(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{3(bb - ac)(ac - 5bb - 8bcx - 4ccxx)}{(a + 2bx + cxx)^{\frac{7}{2}}}$$

ist: so wird

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} - \frac{(b+cx)x}{\sqrt{(a+2bx+cxx)}} - \frac{(bb-ac)xx}{2(a + 2bx + cxx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a + 2bx + cxx)^{\frac{5}{2}}} - \frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a + 2bx + cxx)^{\frac{7}{2}}} - \text{etc.} = \sqrt{a}.$$

Wenn

Wenn man also allenthalben durch $\sqrt{(a + 2bx + cxx)}$ multiplicirt, so wird diese Reihe rational, und

$$\sqrt{a}(a+2bx+cxx) = a+2bx+cx-(b+cx)x-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)}-\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2}-\frac{(bb-ac)(5bb-ac+8bcx+4ccxx)x^4}{8(a+2bx+cxx)^3}$$

— ꝛc. oder

$$\sqrt{(a+2bx+cxx)} = \sqrt{a}+\frac{bx}{\sqrt{a}}-\frac{(bb-ac)xx}{2(a+2bx+cxx)\sqrt{a}}-\frac{(bb-ac)(b+cx)x^3}{2(a+2bx+cxx)^2\sqrt{a}} - \text{ꝛc.}$$

§ 78.

Nun wollen wir zu den transcendenten Funktionen fortgehen, und sie für y setzen. Es sey also zuvörderst $y = lx$, wo denn, wenn man $x + \omega$ für x setzt, $z = l(x + \omega)$ wird. Zugleich zeige l jeden Logarithmen an, dessen Verhältniß zu den hyperbolischen $n : 1$ ist, so daß für die hyperbolischen Logarithmen $n = 1$, und für die gemeinen $n = 0{,}4342944819032$ sey. Alsdann sind die Differenzialien von $y = lx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x};\ \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{n}{x^2};\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2n}{x^3};\ \text{ꝛc.}$$

und daraus erhält man

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \text{ꝛc.}$$

Auf ähnliche Art wird, wenn man ω negativ setzt,

$$l(x-\omega) = lx - \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} - \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} - \text{ꝛc.}$$

Zieht man also diese Reihe von der vorhergehenden ab, so wird

$$l\frac{x+\omega}{x-\omega} = 2n\left(\frac{\omega}{x} + \frac{\omega^3}{3x^3} + \frac{\omega^5}{5x^5} + \frac{\omega^7}{7x^7} + \frac{\omega^9}{9x^9} + \text{ꝛc.}\right.$$

§. 79.

Wenn man in der zuerst gefundenen Reihe

$$l(x+\omega) = lx + \frac{n\omega}{x} - \frac{n\omega^2}{2x^2} + \frac{n\omega^3}{3x^3} - \frac{n\omega^4}{4x^4} + \text{ꝛc.}$$

$\omega = \frac{xx}{u-x}$ setzt, so wird $x+\omega = \frac{ux}{u-x}$, und

$$l(x+\omega) = lu + lx - l(u-x) = lx + \frac{nx}{u-x} - \frac{nxx}{2(u-x)^2} + \text{ꝛc.}$$

desgleichen

$$l(u-x) = lu - \frac{nx}{u-x} + \frac{nxx}{2(u-x)^2} - \frac{nx^3}{3(u-x)^3} + \text{ꝛc.}$$

und, wenn man x negativ nimmt,

$$l(u+x) = lu + \frac{nx}{u+x} + \frac{nxx}{2(u+x)^2} + \frac{nx^3}{3(u+x)^3} + \frac{nx^4}{4(u+x)^4} + \text{ꝛc.}$$

Vermittelst dieser Reihen lassen sich die Logarithmen sehr schnell finden, wenn die Reihen stark convergiren. Das thun aber folgende Reihen, die aus den vorhergehenden leicht abgeleitet werden.

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \text{ꝛc.}\right.$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \text{ꝛc.}\right.$$

Da diese beyden Reihen bloß in Ansehung der Zeichen von einander verschieden sind, so dient, wenn man darnach rechnet, einerley Arbeit dazu, daß man aus dem bekannten Logarithmen der Zahl x die Logarithmen der Zahlen $x+1$ und $x-1$ findet. Außerdem hat man aus den übrigen Reihen

$$l(x+1) = l(x-1) + 2n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$l(x-1) = lx - n\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{4(x-1)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

l(x + 1)

$$l(x+1) = lx + n\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{4(x+1)^4} + \text{etc.}\right)$$

§. 52.

Aus dem gegebenen Logarithmen einer Zahl x lassen sich also die Logarithmen der angrenzenden Zahlen $x + 1$ und $x - 1$ leicht finden; ja man kann auch aus dem Logarithmen der Zahl $x - 1$ den Logarithmen der Zahl, die um 2 größer ist, und umgekehrt ableiten. Ob dies gleich in der Einleitung weitläuftig genug gezeigt worden ist, so wollen wir doch hier einige Beyspiele hinzufügen.

Erstes Exempel.

Aus dem gegebenen hyperbolischen Logarithmen der Zahl 10, welcher = 2,3025850929940 ist, die hyperbolischen Logarithmen der Zahlen 11 und 9 zu finden.

Da diese Aufgabe hyperbolische Logarithmen betrifft, so ist $n = 1$, und wir haben daher folgende Reihen:

$$l11 = l10 + \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} + \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} + \frac{1}{5.10^5} - \text{etc.}$$

$$l9 = l10 - \frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^2} - \frac{1}{3.10^3} - \frac{1}{4.10^4} - \frac{1}{5.10^5} - \text{etc.}$$

Um die Summen dieser Reihen zu finden, addire man die geraden und ungeraden Glieder besonders. Dann findet man

$\frac{1}{10} = 0{,}0000000000000$	$\frac{1}{2 \cdot 10^2} = 0{,}0050000000000$
$\frac{1}{3 \cdot 10^3} = 0{,}0003333333333$	$\frac{1}{4 \cdot 10^4} = 0{,}0000250000000$
$\frac{1}{5 \cdot 10^5} = 0{,}0000020000000$	$\frac{1}{6 \cdot 10^6} = 0{,}0000001666666$
$\frac{1}{7 \cdot 10^7} = 0{,}0000000142857$	$\frac{1}{8 \cdot 10^8} = 0{,}0000000012500$
$\frac{1}{9 \cdot 10^9} = 0{,}0000000001111$	$\frac{1}{10 \cdot 10^{10}} = 0{,}0000000000100$
$\frac{1}{11 \cdot 10^{11}} = 0{,}0000000000009$	$\frac{1}{12 \cdot 10^{12}} = 0{,}0000000000001$
Sume $= 0{,}1003353477310$	Sume $= 0{,}0050251679267$

Die Summe von beyden ist 0,1053605156577

Die Differenz hingegen 0,0953101798043

Nun ist $l\,10 = 2{,}3025850929940$

Also wird $l\,11 = 2{,}3978952727983$

und $l\,9 = 2{,}1972245773363$

Hieraus fließt ferner $l\,3 = 1{,}0986122886681$

und $l\,99 = 4{,}5951198501346$

Zweytes Exempel.

Aus dem hyperbolischen Logarithmen der Zahl 99, der so eben gefunden worden ist, den Logarithmen der Zahl 101 zu finden.

Man gebrauche dazu die vorhin gefundene Reihe:

$$l(x+1) = l(x-1) + \frac{2}{x} + \frac{2}{3 \cdot x^3} + \frac{2}{5 \cdot x^5} + \frac{2}{7 \cdot x^7} + \text{rc.}$$

Da nun in dem gegenwärtigen Falle $x = 100$ ist, so wird

$$l\,101 = l\,99 + \frac{2}{100} + \frac{2}{3 \cdot 100^3} + \frac{2}{5 \cdot 100^5} + \frac{2}{7 \cdot 100^7} + \text{rc.}$$

Die Summe dieser vier Glieder ist $= 0{,}0200006667066$, und diese Zahl zu dem Logarithmen von 99 gesetzt, giebt $l\,101 = 4{,}6151205168412$.

Drit-

Drittes Exempel.

Aus dem tabellarischen Logarithmen der Zahl 10, welcher = 1 ist, die Logarithmen der Zahlen 11 und 9 zu finden.

Da wir hier gemeine tabellarische Logarithmen suchen, so ist $n = 0,434294481903 2$. Setzt man also $x = 10$, so ist

$$l\,11 = l\,10 + \frac{n}{10} + \frac{n}{2.10^2} - \frac{n}{3.10^3} + \frac{n}{4.10^4} - \text{ꝛc.}$$

$$l\,9 = l\,10 - \frac{n}{10} - \frac{n}{2.10^2} - \frac{n}{3.10^3} - \frac{n}{4.10^4} - \text{ꝛc.}$$

Nun addire man die geraden und ungeraden Glieder besonders. Dann wird

$\frac{n}{10} = 0,0434294481903$	$\frac{n}{2.10^2} = 0,0021714724095$
$\frac{n}{3.10^3} = 0,0001447648273$	$\frac{n}{4.10^4} = 0,0000108573620$
$\frac{n}{5.10^5} = 0,0000008685889$	$\frac{n}{6.10^6} = 0,0000000723824$
$\frac{n}{7.10^7} = 0,0000000062042$	$\frac{n}{8.10^8} = 0,0000000005428$
$\frac{n}{9.10^9} = 0,0000000000482$	$\frac{n}{10.10^{10}} = 0,0000000000043$
$\frac{n}{11.10^{11}} = 0,0000000000005$	$\frac{n}{12.10^{12}} = 0,0000000000000$
Sume $= 0,0435750878593$	Sume $= 0,0021824027010$.

Das Aggregat von beyden ist 0,0457574905603

Die Differenz hingegen 0,0413926851583

Nun ist $l\,10 = 1,0000000000000$

Folglich $l\,11 = 1,0413926851583$

und $l\,9 = 0,9542425094396$

Hieraus aber fließt ferner $l\,3 = 0,4771212547198$

und . $l\,99 = 1,9956351945979$

Vier-

Viertes Exempel.

Aus dem jetzt gefundenen tabellarischen Logarithmen der Zahl 99 den tabellarischen Logarithmen von 101 zu finden.

Gebraucht man hier eben die Reihe, deren wir uns bey dem vorhergehenden Exempel bedienten, so erhält man

$$l\,101 = l\,99 + 2n\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{3 \cdot 100^3} + \frac{1}{5 \cdot 100^5} + \text{rc.}\right)$$

Setzt man nun für n den erforderlichen Werth, so findet man sehr bald die Summe dieser Reihe $= 0{,}0086861791849$
und addirt man dieselbe zu $l\,99 = 1{,}9956351945979$
so findet man $l\,101 = 2{,}0043213637829$

§. 81.

Nun wollen wir y in unserm allgemeinen Ausdrucke einen Exponential-Werth beylegen, und $y = a^x$ setzen, wodurch denn, bey der Substitution von $x + \omega$ für x, $z = a^{x+\omega}$ wird. Da nun in diesem Falle

$$\frac{dy}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddy}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = a^x (la)^3; \text{ rc.}$$

ist, so wird

$$a^{x+\omega} = a^x\left(1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{rc.}\right.$$

und dividirt man diese Gleichung durch a^x, so findet man die Reihe für die Exponential-Größe, die wir schon in der Einleitung Th. 1. Cap. 7. §. 125 kennen gelernt haben, nemlich

$$a^\omega = 1 + \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{rc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man, wenn man ω negativ nimmt,

$$a^{-\omega} = 1 - \frac{\omega la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1 \cdot 2} - \frac{\omega^3 (la)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{rc.}$$

Verbindet man nun beyde Reihen mit einander, so erhält man

$$\frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2} = 1 + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6 (la)^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{rc.}$$

$$\frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2} = \frac{\omega\, la}{1} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2} + \frac{\omega^5 (la)^5}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

Hierbey ist zu merken, daß la den hyperbolischen Logarithmen der Zahl a bedeute.

§. 82.

Vermittelst dieser Formel kann man zu jedem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl finden. Es sey nemlich irgend ein Logarithme aus einem Systeme gegeben, worin $la = 1$ ist. Man suche in eben diesem Systeme den Logarithmen x, der u am nächsten kommt, und nehme $u = x + \omega$. Da nun die Zahl, welche zu dem Logarithmen x gehört, $= y = a^x$ ist, so wird die Zahl, die zu dem Logarithmen $u = x + \omega$ gehört, $= a^{x+\omega} = z$, und folglich

$$z = y\left(1 + \frac{\omega\, la}{1} + \frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} + \text{rc.}\right.$$

Diese Reihe wird, da ω eine sehr kleine Zahl ist, sehr stark convergiren, und wir wollen den Gebrauch derselben an einem Beyspiele zeigen.

Exempel.

Man soll die Zahl finden, welche folgender Potestät der $2, 2^{2^{24}}$ gleich ist.

Da $2^{24} = 16777216$ ist, so ist $2^{2^{24}} = 2^{16777216}$ und folglich $l2^{2^{24}} = 16777216\; l2$. Nimmt man nun die gemeinen Logarithmen, so ist

$$l2 = 0{,}301029995663981195213738\,89$$

und

und der Logarithme der gesuchten Zahl

$$5050445,25973367593 2039063$$

Die Characteristik dieses Logarithmen zeigt an, daß die gesuchte Zahl aus 5050446 Zifern bestehe, und da diese nicht insgesammt gefunden werden können, so ist es genug die Anfangs-Zifern, die aus der Mantisse, 25973367593 2039063 = u gefunden werden müssen, anzugeben. Nun findet man aus den Tafeln für die Zahl, deren Logarithme diesem Logarithmen am nächsten kommt, 18 . 101 = 1,818. Setzt man also diese Zahl = y, so hat man

$$x = 0,25959387888 5948644, \text{ und also}$$
$$\omega = 0,00013979704 6090410. \text{ Da nun}$$
$$a = 10 \text{ ist, so ist}$$
$$la = 2,302585092994045 68401799 14, \text{ und}$$
$$\omega la = 0,00032189459437298. \text{ Ferner ist}$$
$$y = 1,818000000000000000$$

$$\frac{\omega la}{1} y = \quad 585204372569020$$
$$\frac{\omega^2 (la)^2}{1.2} y = \quad 94187062064$$
$$\frac{\omega^3 (la)^3}{1.2.3} y = \quad 10106100$$
$$\frac{\omega^4 (la)^4}{1.2.3.4} y = \quad 810$$

$$18185852985697379 97$$

Dieses sind die Anfangs-Zifern der gesuchten Zahl, und unter ihnen ist höchstens die letzte der Wahrheit nicht ganz angemessen.

§. 83.

Wir wenden uns zu den transcendenten Größen, die vom Kreise abhangen, und hier sey, so wie immer der Halbmesser

messer des Kreises $= 1$, und y bedeute einen Bogen, dessen Sinus $= x$ ist, oder es sey $y = A\sin. x$. Setzt man nun $x + \omega$ für x, so wird $z = A\sin(x + \omega)$. Um den Werth davon auszudrucken, suche man die Differenzialien von y:

$$\frac{dy}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{x}{(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2xx}{(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x + 6x^3}{(1 - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{9 + 72x^2 + 24x^4}{(1 - xx)^{\frac{9}{2}}}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{225x + 600x^3 + 120x^5}{(1 - xx)^{\frac{11}{2}}}$$

u.

Hieraus ergiebt sich

$$A\sin.(x+\omega) = A\sin. x + \frac{\omega}{\sqrt{(1 - xx)}} + \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \frac{\omega^4(9x + 6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} + \frac{\omega^5(9 + 72x^2 + 24x^4)}{120(1 - xx)^{\frac{9}{2}}} + \text{u.}$$

§. 84.

Wenn also der Bogen bekannt ist, dessen Sinus $= x$ ist, so kann man vermittelst dieser Formel den Bogen finden, zu dem der Sinus $x + \omega$ gehört, wenn ω eine sehr kleine Größe ist. Die Summe der Reihe, welche man hinzu addiren muß, wird zwar in Theilen des Halbmessers ausgedruckt, indeß läßt sie sich leicht auf einen Bogen reduciren, wie folgendes Exempel zeigen wird.

Exempel.

Man soll den Kreisbogen finden, dessen Sinus $= \frac{1}{3} = 0{,}3333333333$ ist.

Man suche aus den Sinus-Tafeln den Bogen, dessen Sinus zunächst kleiner als $\frac{1}{3}$ ist, und dies ist der Bogen von $19^\circ, 28'$, dessen Sinus $= 0{,}3332584$ ist. Man setze also $19^\circ, 28', = A\,\text{sin.}\,x = y$, so wird $x = 0{,}3332584$, $\omega = 0{,}0000749$, und $\sqrt{(1 - xx)} = \text{cos.}\,y = 0{,}9428356$. Es ist also der gesuchte Bogen z, dessen Sinus $= \frac{1}{3}$ gegeben ist,

$$= 19^\circ, 28' + \frac{\omega}{\text{cos.}\,y} + \frac{\omega^2\,\text{sin.}\,y}{2.\,\text{cos.}\,y^3}.$$

Denn dieser Ausdruck ist schon hinlänglich. Es ist aber, um mit den Logarithmen zu rechnen,

$$l\omega = 5{,}8744818$$
$$l\,\text{cos.}\,y = 9{,}9744359$$
$$l\frac{\omega}{\text{cos.}\,y} = 5{,}9000459; \quad \frac{\omega}{\text{cos.}\,y} = 0{,}0000794412$$
$$l\frac{\omega^2}{\text{cos.}\,y} = 1{,}8000918$$
$$l\frac{\text{sin.}\,y}{\text{cos.}\,y} = 9{,}5483452$$
$$1{,}3484370$$
$$l2 = 0{,}3010300$$
$$l\frac{\omega^2\,\text{sin.}\,y}{2\,\text{cos.}\,y^3} = 1{,}0474070; \quad \frac{\omega^2\,\text{sin.}\,y}{2\,\text{cos.}\,y^3} = 0{,}0000000011$$
$$\text{Summe} = 0{,}0000794423$$

und dieses ist der Werth des Bogens, der zu $19^\circ, 28'$ addirt werden muß. Um denselben in Secunden auszudrucken, nehme man seinen Logarithmen, nemlich

5,9000518

$$\begin{array}{lr} & 5{,}9000518 \\ \text{und ziehe davon ab} & 4{,}6855749 \\ \hline \text{so bleibt} & 1{,}2144769 = 116{,}38615 \end{array}$$

Diese Zahl zeigt die Secunden an; druckt man aber den Bruch in Tertien und Quarten u. s. f. aus, so wird der gesuchte Bogen

$$= 19^{\circ},\ 28^{I},\ 16^{II},\ 23^{III},\ 10^{IV},\ 8^{V},\ 24^{VI}.$$

§. 85.

Auf ähnliche Art läßt sich ein Ausdruck für die Cosinus finden. Setzt man nemlich $y = A\,\mathrm{cos}.\,x$, so bleibt, da $dy = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ist, die vorhergehende Reihe bis auf die Zeichen unverändert, und es ist daher

$$A\,\mathrm{cos}.(x+\omega) = A\,\mathrm{cos}.\,x - \frac{\omega}{\sqrt{(1-x)}} - \frac{\omega^2 x}{2(1-xx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\omega^3(1+2xx)}{6(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$
$$- \frac{\omega^4(9x+6x^3)}{24(1-xx)^{\frac{7}{2}}} - \frac{\omega^5\,9+72x^2+24x^4)}{120(1-xx)^{\frac{9}{2}}} - \text{rc.}$$

Diese Reihe convergirt eben so wie die vorhergehende allezeit sehr stark, wenn man aus den Sinus-Tafeln den nächsten Winkel nimmt, so daß meistentheils das erste Glied $\frac{\omega}{\sqrt{(1-xx)}}$ hinreicht. Wenn indeß x der Einheit oder dem Sinus Totus sich sehr nähert, so hört die Reihe, wegen der Kleinheit ihrer Nenner, auf, zu convergiren, und in diesem Falle bedient man sich, da die Differenzen sehr klein werden, besser der gewöhnlichen Interpolation.

§. 86.

Nun bedeute y einen Bogen, dessen Tangente gegeben ist, oder es sey $y = A\,\mathrm{tang}.\,x$, und $z = A\,\mathrm{tang}.(x+\omega)$; folglich

$$z = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, ddy}{2\,dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3y}{6\,dx^3} + \text{ꝛc.}$$

Um diese Glieder zu finden, suche man die Differenzialien von y, nemlich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{(1+xx)^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-2+6xx}{(1+xx)^3}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x - 24x^3}{(1+xx)^4}$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24 - 240x^2 + 120x^4}{(1+xx)^5}$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = \frac{-720x + 2400x^3 - 720x^5}{(1+xx)^6}.$$

Nachdem man diese Differenzialien gefunden, so ist

$$A\tang(x+\omega) = A\tang x +$$

$$\frac{\omega}{1(1+xx)} - \frac{\omega^2 x}{(1+xx)^2} + \frac{\omega^3}{(1+xx)^3}(xx-\tfrac{1}{3}) - \frac{\omega^4}{(1+xx)^4}(x^3-x) +$$

$$\frac{\omega^5}{(1+xx)^5}(x^4-2x^2+\tfrac{1}{5}) - \frac{\omega^6}{(1+xx)^6}(x^5-\tfrac{10}{3}x^3+x) + \text{ꝛc.}$$

§. 87.

Es kann aber diese Reihe, deren Fortschreitungs-Gesetz nicht leicht zu erkennen ist, in eine andere verwandelt werden, wobey dieses Gesetz sogleich in die Augen fällt. Man setze zu dem Ende $A\tang x = 90^\circ - u$, so daß $x = \cot u = \frac{\cos.u}{\sin.u}$ sey: so wird $1 + xx = \frac{1}{\sin.u^2}$ und folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xx} = \sin.u^2$. Da ferner $dx = \frac{-du}{\sin.u^2}$, oder du

= −

$= -\,dx\,\sin.u^2$ ist, so bekommt man bey fortgesetzter Differenziation

$$\frac{ddy}{dx} = 2du\sin.u\cos.u = du\sin.2u = -dx\sin.u^2\sin.2u$$

$$\text{folglich}\ \frac{ddy}{1dx^2} = +\sin.u^2.\sin.2u.$$

$$\frac{d^3y}{2dx^2} = -du\sin.u.\cos.u.\sin.2u - du.\sin.u^2.\cos.2u =$$

$$-du\sin u.\sin 3u = dx\sin u^3\sin.3u,$$

$$\text{folglich}\ \frac{d^3y}{1.2.dx^3} = +\sin u^3.\sin.3u.$$

$$\frac{d^4y}{1.2.3dx^3} = du\sin u^2(\cos.u.\sin.3u + \sin.u.\cos.3u) =$$

$$du\sin u^2.\sin.4u = -dx\sin u^4.\sin 4u,$$

$$\text{folglich}\ \frac{d^4y}{1.2.3dx^4} = -\sin.u^4.\sin.4u.$$

$$\frac{d^5y}{1.2.3.4dx^4} = -du\sin u^3(\cos u.\sin.4u + \sin.u.\cos.4u) =$$

$$-du\sin u^3.\sin 5u = +dx\sin u^5.\sin.5u$$

$$\text{folglich}\ \frac{d^5y}{1.2.3.4dx^5} = +\sin u^5.\sin.5u.$$

ꝛc.

Hieraus aber kann man folgern

$$A.tg.(x+\omega) = A tg\,x + \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u - \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u$$

$$+\frac{\omega^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u - \frac{\omega^4}{4}\sin.u^4.\sin.4u + \frac{\omega^5}{5}\sin.u^5.\sin.5u$$

$$-\frac{\omega^6}{6}\sin.u^6.\sin.6u + \text{ꝛc.}$$

wo, da $A tg\,x = y$ und $A tg\,x = 90^\circ - u$ ist, $y = 90^\circ - u$ seyn wird.

§. 88.

Wenn $A\cot x = y$ und $A\cot(x + \omega) = z$ gesetzt wird, so ist

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{rc.}$$

Da aber $dy = \frac{-dx}{1 + xx}$ ist, so stimmen die Glieder dieser Reihe mit den vorhin gefundenen bis auf die Zeichen zusammen. Setzt man daher wie vorhin $A\tang x = 90^\circ - u$, oder $A\cot x = u$, so daß $u = y$ ist, so wird

$$A\cot(x+\omega) = A\cot x - \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u + \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u$$
$$- \frac{\omega^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u + \frac{\omega^4}{4}\sin.u^4.\sin.4u - \frac{\omega^5}{5}\sin.u^5.\sin.5u$$
$$+ \text{rc.}$$

Dieser Ausdruck folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden. Denn da $A\cot(x + \omega) = 90^\circ - A\tang(x + \omega)$ und $A\cot.x = 90^\circ - A\tang.x$ ist, so ist $A\cot.(x + \omega) - A\cot.x = - A\tang(x + \omega) + A\tang.x$.

§. 89.

Aus diesen Ausdrücken lassen sich viele sehr schöne Folgerungen herleiten, wenn man für x und ω gegebene Werthe setzt. Es sey zuvörderst $x = 0$. Da $u = 90^\circ - A\tang x$ ist, so wird alsdann $u = 90^\circ$; $\sin.u = 1$; $\sin.2u = 0$; $\sin.3u = -1$; $\sin.4u = 0$; $\sin.5u = 1$; $\sin.6u = 0$; $\sin.7u = -1$; rc., und folglich

$$A\tang.\omega = \frac{\omega}{1} - \frac{\omega^3}{3} + \frac{\omega^5}{5} - \frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^9}{9} - \frac{\omega^{11}}{11} + \text{rc.}$$

welches die bekannte Reihe für den Bogen ist, dessen Tangente $= \omega$ ist. Ferner sey $x = 1$, wo denn $A\tang.x = 45^\circ$, und also $u = 45^\circ$, und $\sin.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.2u = 1$; $\sin.3u$

=

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.4u = 0$; $\sin.5u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.6u = -1$; $\sin.7u = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin.8u = 0$; $\sin.9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ꝛc. wird. Hieraus erhält man

$$A\,\mathrm{tang}(1+\omega) = 45^\circ + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \frac{\omega^7}{7.16} + \frac{\omega^9}{9.32} - \frac{\omega^{10}}{10.32} + \frac{\omega^{11}}{11.64} - \frac{\omega^{13}}{13.128} + \frac{\omega^{14}}{14.128} - \text{ꝛc.}$$

Nun sey $\omega = -1$, so wird $A\,\mathrm{tang}(1+\omega) = 0$, und $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, und folglich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1.1} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{10.2^5} + \frac{1}{11.2^6} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man diesen Werth anstatt des Bogens von 45° in jenen Ausdruck, so bekommt man $A\,\mathrm{tang}(1+\omega) =$

$$\frac{\omega+1}{1.2} - \frac{\omega^2+1}{2.2} + \frac{\omega^3+1}{3.2^2} - \frac{\omega^5-1}{5.2^3} + \frac{\omega^6-1}{6.2^3} - \frac{\omega^7-1}{7.2^4} + \text{ꝛc.}$$

Es ist aber jene Reihe sehr bequem, um den Werth von $\frac{\pi}{4}$ näherungsweise zu finden.

§. 90. a.

Da

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{6}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{ꝛc.}$$

ist, die Glieder aber, in deren Nennern die Zahlen 2, 6, 10, ꝛc. vorkommen, nemlich $\frac{1}{2.2} - \frac{1}{6.2^3} + \frac{1}{10.2^5} - \frac{1}{14.2^7} + \text{ꝛc.}$

+ 2c., den Bogen $\frac{1}{2}$ A tg $\frac{1}{2}$ ausdrucken: so ist

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \text{A tg} \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \frac{1}{11.2^6} + \text{2c.}$$

Nun erhält man aus der zweyten Formel, wenn man darin ω negativ nimmt,

$$\text{A tg.}(1-\omega) = \begin{cases} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{2c.} \\ - \frac{\omega}{1.2} - \frac{\omega^2}{2.2} - \frac{\omega^3}{3.2^2} + \frac{\omega^5}{5.2^3} + \frac{\omega^6}{6.2^3} + \frac{\omega^7}{7.2^4} - \text{2c.} \end{cases}$$

und setzt man also $\omega = \frac{1}{2}$, so wird

$$\text{A tg.}\tfrac{1}{2} = \begin{cases} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{6.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{2c.} \\ - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{6.2^9} + \frac{1}{7.2^{11}} - \text{2c.} \end{cases}$$

Nimmt man hier die durch 2, 6, 10, 2c. getheilten Glieder besonders, so wird

$$\text{A tg.}\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\text{A tg.}\tfrac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \frac{1}{9.2^5} + \text{2c.}$$

$$- \tfrac{1}{2}\text{A tg.}\tfrac{1}{2} - \frac{1}{1\,2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \text{2c.}$$

und folglich

$$\text{A tg.}\tfrac{1}{2} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^2} - \frac{1}{5.2^3} - \frac{1}{7.2^4} + \text{2c.}$$

$$- \tfrac{1}{2}\text{A tg.}\tfrac{1}{8} - \frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \text{2c.}$$

Setzt

Setzt man aber diesen Werth in die obige Reihe, und druckt man dabey auch Atg. $\frac{1}{8}$ durch eine Reihe aus, so erhält man

$$\frac{\pi}{4} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3.2^1} - \frac{1}{5.2^2} - \frac{1}{7.2^3} + \frac{1}{9.2^4} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{1.2^2} - \frac{1}{3.2^5} + \frac{1}{5.2^8} + \frac{1}{7.2^{11}} - \frac{1}{9.2^{14}} - \text{etc.} \\ -\frac{1}{1.2^4} + \frac{1}{3.2^{10}} - \frac{1}{5.2^{16}} + \frac{1}{7.2^{22}} - \frac{1}{9.2^{28}} + \text{etc.} \end{cases}$$

§. 90. b.

Diese und viele andere Reihen erhält man, wenn man $x = 1$ setzt. Nimmt man aber $x = \sqrt{3}$, so daß Atang. $x = 60^\circ$ wird: so ist $u = 30^\circ$, $\sin. u = \frac{1}{2}$; $\sin. 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 3u = 1$; $\sin. 4u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 5u = \frac{1}{2}$; $\sin. 6u = 0$; $\sin. 7u = -\frac{1}{2}$; etc. und folglich

$$\text{Atang.}(\sqrt{3} + \omega) = 60^\circ + \frac{\omega}{1.2^2} - \frac{\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3} + \frac{\omega^3}{3.2^3} - \frac{\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5} + \frac{\omega^5}{5.2^6} - \frac{\omega^7}{7.2^8} + \frac{\omega^8\sqrt{3}}{8.2^9} - \frac{\omega^9}{9.2^9} + \frac{\omega^{10}\sqrt{3}}{10.2^{11}} - \frac{\omega^{11}}{11.2^{12}} + \text{etc.}$$

Und setzt man $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so daß Atg. $x = 30^\circ$ ist, so wird $u = 60^\circ$; $\sin. u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 3u = 0$; $\sin. 4u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 5u = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin. 6u = 0$; $\sin. 7u = \frac{\sqrt{3}}{2}$; etc., und folglich

$$\text{Atg.}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \omega\right) = 30^\circ + \frac{3\omega}{1.2^2} - \frac{3\omega^2\sqrt{3}}{2.2^3} + \frac{3^2\omega^4\sqrt{3}}{4.2^5} - \frac{3^3\omega^5}{5.2^6} + \text{etc.}$$

Ist also $\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, so wird, weil $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ist,

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.2^3} - \frac{1}{4.2^5} - \frac{1}{5.2^6} + \frac{1}{7.2^8} + \frac{1}{8.2^9} - \text{etc.}$$

§. 91.

Nun wollen wir den §. 87. gefundenen allgemeinen Ausdruck

$$A\,\text{tang.}(x+\omega) = A\,\text{tang.}\,x$$
$$+ \frac{\omega}{1}\sin.u.\sin.u - \frac{\omega^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{\omega^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u$$
$$- \text{etc.}$$

wieder zur Hand nehmen, und $\omega = -x$ setzen, so daß $A\,\text{tang.}(x+\omega) = 0$ wird. Dadurch erhält man

$$A\,\text{tang.}\,x =$$
$$\frac{x}{1}\sin.u.\sin.u + \frac{x^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{x^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u + \text{etc.}$$

Da aber $A\,\text{tang.}\,x = 90^\circ - u = \frac{\pi}{2} - u$, so ist $x = \cot.u$ $= \frac{\cos.u}{\sin.u}$ und folglich

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos.u.\sin.u + \tfrac{1}{2}\cos.u^2.\sin.2u + \tfrac{1}{3}\cos.u^3.\sin.3u +$$
$$\tfrac{1}{4}\cos.u^4.\sin.4u + \text{etc.}$$

Diese Reihe ist um so merkwürdiger, da der Werth derselben, man mag für u einen Bogen annehmen, was für einen man will, immer unverändert $\frac{\pi}{2}$ bleibt. Setzt man hingegen $\omega = -2x$, so wird, weil $A\,\text{tang.}(-x) = -A\,\text{tang.}\,x$ ist

$$2\,A\,\text{tang.}\,x =$$
$$\frac{2x}{1}\sin.u.\sin.u + \frac{4x^2}{2}\sin.u^2.\sin.2u + \frac{8x^3}{3}\sin.u^3.\sin.3u + \text{etc.}$$

Da

Da nun $A\,\text{tang}.\,x = \frac{\pi}{2} - u$, und $x = \frac{\text{cos}.u}{\text{sin}.u}$ ist, so wird

$$\pi = 2u + \frac{2}{1}\text{cos}.u\,.\,\text{sin}\,u + \frac{2^2}{2}\text{cos}.u^2.\,\text{sin}.2u + \frac{2^3}{3}\text{cos}.u^3.\,\text{sin}.3u + \text{etc.}$$

Es sey $u = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$, so ist $\text{cos}.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{sin}.u = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\text{sin}.2u = 1$; $\text{sin}.3u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{sin}.4u = 0$; $\text{sin}.5u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$;

$\text{sin}.6u = -1$; $\text{sin}.7u = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\text{sin}.8u = 0$; $\text{sin}.9u = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

und folglich

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2^2}{5} - \frac{2^3}{6} - \frac{2^3}{7} + \frac{2^4}{9} + \frac{2^5}{10} + \frac{2^5}{11} - \text{etc.}$$

Ob nun dieses gleich eine divergirende Reihe ist, so verdient sie doch wegen ihrer Einfachheit bemerkt zu werden.

§. 92.

Setzt man in dem gefundenen allgemeinen Ausdrucke

$\omega = -x - \frac{1}{x} = \frac{-1}{\text{sin}.u\,.\,\text{cos}.u}$, weil $x = \frac{\text{cos}.u}{\text{sin}.u}$ ist: so wird

$$A\,\text{tang}.(x+\omega) = A\,\text{tang}. - \frac{1}{x} = -A\,\text{tang}.\,\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + A\,\text{tang}.\,x.$$

Hierdurch erhält man also folgenden Ausdruck:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\text{sin}.u}{1\,\text{cos}.u} + \frac{\text{sin}.2u}{2\,\text{cos}.u^2} + \frac{\text{sin}.3u}{3\,.\,\text{cos}.u^3} + \frac{\text{sin}.4u}{4\,\text{cos}.u^4} + \frac{\text{sin}.5u}{5\,.\,\text{cos}.u^5} + \text{etc.}$$

und diese Reihe giebt, wenn man darin $u = 45^\circ$ setzt, eben die Reihe, die wir zuletzt gefunden haben. Setzt man aber $\omega = -\sqrt{(1+xx)}$, so wird, weil $x = \frac{\text{cos}.u}{\text{sin}.u}$ ist, $\omega = -\frac{1}{\text{sin}.u}$, und

$$A\,\text{tang.}(x - \sqrt{(1 + xx)}) = - A\,\text{tang.}(\sqrt{(1 + xx)} - x) =$$

$$- \tfrac{1}{2} A\,\text{tang.}\frac{1}{x} = - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - A\,\text{tang.}x\right) = - \tfrac{1}{2}u, \text{ und}$$

$$A\,\text{tang.}\,x = \frac{\pi}{2} - u.$$

Hierdurch findet man

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{1}\sin.u + \tfrac{1}{2}\sin.2u + \tfrac{1}{3}\sin.3u + \tfrac{1}{4}\sin.4u + \text{ꝛc.}$$

und differenzirt man diese Gleichung, so bekommt man

$$0 = \tfrac{1}{2} + \cos.u + \cos.2u + \cos.3u + \cos.4u + \cos.5u + \text{ꝛc.}$$

eine Reihe, deren Beschaffenheit aus der Natur der wiederkehrenden Reihen erkannt wird.

§. 93.

Auf eine ähnliche Art lassen sich auch durch die Differenziation der übrigen vorhin gefundenen Reihen neue summirbare Reihen erhalten. Zuvörderst folgt aus der Reihe

$$A\,\text{tang.}(1 + \omega) = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} - \frac{\omega^2}{2.2} + \frac{\omega^3}{3.4} - \frac{\omega^5}{5.8} + \frac{\omega^6}{6.8} - \text{ꝛc.}$$

diese:

$$\frac{1}{2 + 2\omega + \omega^2} = \frac{1}{2} - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^5}{8} - \frac{\omega^6}{16} + \frac{\omega^8}{32} - \text{ꝛc.}$$

welche sich aus der Entwickelung des Bruchs $\frac{2 - 2\omega + \omega^2}{4 + \omega^4} = \frac{1}{2 + 2\omega + \omega^2}$ ergiebt. Hiernächst folgt aus der Reihe

$$\frac{\pi}{2} = u + \cos.u\,.\,\sin.u + \tfrac{1}{2}\cos.u^2\,.\,\sin.2u + \tfrac{1}{3}\cos.u^3\,.\,\sin.3u +$$
$$\cos.u^4\,.\,\sin.4u + \text{ꝛc.}$$

durch die Differenziation

$$0 = 1 + \cos.2u + \cos.u.\cos.3u + \cos.u^2.\cos.4u + \cos.u^3.\cos.5u$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Endlich

Endlich giebt die Reihe

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\text{ſin.}\,u}{\text{coſ.}\,u} + \frac{\text{ſin.}\,2u}{2\,\text{coſ.}\,u^2} + \frac{\text{ſin.}\,3u}{3\,\text{coſ.}\,u^3} + \frac{\text{ſin.}\,4u}{4\,\text{coſ.}\,u^4} + \text{ꝛc.}$$

auf eben dem Wege

$$0 = \frac{1}{\text{coſ.}\,u^2} + \frac{\text{coſ.}\,u}{\text{coſ.}\,u^3} + \frac{\text{coſ.}\,2u}{\text{coſ.}\,u^4} + \frac{\text{coſ.}\,3u}{\text{coſ.}\,u^5} + \frac{\text{coſ.}\,4u}{\text{coſ.}\,u^6} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$0 = 1 + \frac{\text{coſ.}\,u}{\text{coſ.}\,u} + \frac{\text{coſ.}\,2u}{\text{coſ.}\,u^2} + \frac{\text{coſ.}\,3u}{\text{coſ.}\,u^3} + \frac{\text{coſ.}\,4u}{\text{coſ.}\,u^4} + \text{ꝛc.}$$

§. 94.

Es ist aber der §. 87. gefundene Ausdruck:

$$A\,\text{tang.}\,(x + \omega) =$$

$$A\,\text{tg.}\,x + \frac{\omega}{1}\,\text{ſin}\,u.\,\text{ſin.}\,u - \frac{\omega^2}{2}\,\text{ſin.}\,u^2.\,\text{ſin.}\,2u + \frac{\omega^3}{3}\,\text{ſin.}\,u^3.\,\text{ſin.}\,3u$$

$$- \text{ꝛc.}$$

wenn $x = \text{cot.}\,u$, oder $u = A\,\text{cot.}\,x = 90^\circ - A\,\text{tang.}\,x$ ist, sehr nützlich, um zu einer jeden gegebenen Tangente den zugehörigen Bogen oder Winkel zu finden. Denn ist die Tangente $= t$ gegeben, und hat man aus den Tafeln, die ihr am nächsten kommende Tangente $= x$ gefunden, die zu dem Bogen $= y$ gehört, so ist $u = 90^\circ - y$. Setzt man also $x + \omega = t$, oder $\omega = t - x$, so ist der gesuchte Bogen

$$= y + \frac{\omega}{1}\,\text{ſin.}\,u.\,\text{ſin.}\,u - \frac{\omega^2}{2}\,\text{ſin.}\,u^2.\,\text{ſin.}\,2u + \text{ꝛc.}$$

Diese Regel ist dann vorzüglich nützlich, wenn die Tangente sehr groß ist, und folglich der gesuchte Bogen nicht viel von 90° unterschieden ist, weil in diesen Fällen die gewöhnliche Interpolations-Methode wegen des großen Zuwachses, den die Tangenten bekommen, zu sehr von der Wahrheit abführt. Wir wollen daher diese Regel durch ein Exempel erläutern.

Exem-

Exempel.

Den Bogen zu finden, dessen Tangente $= 100$ ist, wenn der Radius $= 1$ gesezt wird.

Der Bogen, der dem gesuchten am nächsten kommt, ist $89^\circ, 25'$, und seine Tangente ist $x = 98,217943$
Zieht man sie ab von $t = 100$,

so bleibt $\omega = 1,782057$

Da ferner $y = 89^\circ, 25'$ ist, so ist $u = 0^\circ, 35'$; $2u = 1^\circ, 10'$; $3u = 1^\circ, 45'$; ꝛc. Um nun die einzelnen Glieder vermittelst der Logarithmen zu finden, so addire man

zu $l\,\omega = 0,2509215$
$l\,\text{sin.}\,u = 8,0077867$
$l\,\text{sin.}\,u = 8,0077867$; dadurch wird

$l\,\omega\,.\,\text{sin.}\,u\,.\,\text{sin.}\,u = 6,2664949$.
Zieht man hievon ab $4,6855749$, so findet man

$1,5809200$, und es ist folglich
$\omega\,.\,\text{sin.}\,u\,.\,\text{sin.}\,u = 38,09956$ Secunden.

Ferner addire man

zu $l\,\omega\,\text{sin.}\,u^2 = 6,2664949$
$l\,\omega = 0,2509215$
$l\,\text{sin.}\,2u = 8,3087941$

$4,8262105$, ziehe
hievon ab $l\,2 = 0,3010300$, so wird

$l\,\tfrac{1}{2}\,\omega^2\,\text{sin.}\,u^2\,.\,\text{sin.}\,2u = 4,5251805$.
Zieht man hievon ab $4,6855749$, so bleibt

$9,8396056$, und es ist folglich
$\tfrac{1}{2}\,\omega^2\,\text{sin.}\,u^2\,.\,\text{sin.}\,2u = 0,69120$ Secunden.

Nun

Nun addire man

zu $l\,\omega^3 = 0{,}7527645$
$l\,\sin.u^3 = 4{,}0233601$
$l\,\sin.3u = 8{,}4848479$

3,2609725, ziehe
hievon ab $l\,3 = 0{,}4771213$, so wird

$l\,\tfrac{1}{3}\omega^3\sin.u^3.\sin.3u = 2{,}7838512.$
Zieht man hievon ab 4,6855749, so bleibt

8,0982763, und es ist folglich
$\tfrac{1}{3}\omega^3\sin.u^3.\sin.3u = 0{,}01254$ Secunden.

Endlich addire man

zu $l\,\omega^4 = 1{,}0036860$
$l\,\sin.u^4 = 2{,}0311468$
$l\,\sin.4u = 8{,}6097341$

1,6445669, ziehe
hievon ab $l\,4 = 0{,}6020600$, so wird

$l\,\tfrac{1}{4}\omega^4\sin.u^4.\sin.4u = 1{,}0425069.$
Zieht man hievon ab 4,6855749, so bleibt

6,3569320, und es ist folglich
$\tfrac{1}{4}\omega^4\sin.u^4.\sin.4u = 0{,}00023$ Secunden.

Es sind also

die positiven Glieder	die negativen Glieder
38,09956	0,69120
0,01254	0,00023
38,11210	0,69143

subtr. 0,69143

$37{,}42067 = 37^{\mathrm{II}},\ 25^{\mathrm{III}},\ 14^{\mathrm{IV}},\ 24^{\mathrm{V}},\ 36^{\mathrm{VI}}.$

Es

Es enthält also der Bogen, dessen Tangente hundertmal so groß ist als der Radius, =

$$89^{\circ},\ 25^{I},\ 37^{II},\ 25^{III},\ 14^{IV},\ 24^{V},\ 36^{IV}$$

und dabey kann der Fehler sich nicht bis auf die Quarten, sondern bloß auf die Quinten erstrecken, so daß derselbe gewiß $89^{\circ}, 25^{I}, 37^{II}, 25^{III}, 14^{IV}$ enthält. Wird eine größere Tangente gegeben, so läßt sich der Bogen, wenn gleich ω größer wird, dennoch leicht finden, weil der Winkel u dabey kleiner wird.

§. 95.

So wie wir bisher für y einen Kreisbogen gesetzt haben, so wollen wir nun dafür die reciproken Funktionen annehmen, dergleichen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, ꝛc. sind. Es sey also $y = \sin x$. Setzt man dabey $x + \omega$ für x, so wird $z = \sin.(x + \omega)$, und die Gleichung

$$z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

giebt, da $\frac{dy}{dx} = \cos x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin.x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$; ꝛc. ist,

$$\sin.(x + \omega) = \sin x + \omega\cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin.x - \tfrac{1}{6}\omega^3\cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin.x + \text{ꝛc.}$$

und wenn man ω negativ nimmt,

$$\sin.(x - \omega) = \sin x - \omega\cos x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin x + \tfrac{1}{6}\omega^3\cos x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin.x - \text{ꝛc.}$$

Setzt man hingegen $y = \cos x$, so wird, weil $\frac{dy}{dx} = -\sin x$; $\frac{ddy}{dx^2} = -\cos x$; $\frac{d^4y}{dx^3} = \sin.x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \cos x$; ꝛc. ist,

$$\cos(x + \omega) = \cos x - \omega\sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\cos.x + \tfrac{1}{6}\omega^3\sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4\cos.x - \text{ꝛc.}$$

und

und wenn man ω negativ nimmt,

$$\cos.(x-\omega) = \cos.x + \omega\sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\cos.x - \tfrac{1}{6}\omega^3\sin.x + \tfrac{1}{24}\omega^4\cos.x + \text{etc.}$$

§. 96.

Der Nutzen, den diese Formeln bey Verfertigung und Interpolirung der Tafeln der Sinus und der Cosinus leisten, ist außerordentlich groß. Denn kennt man den Sinus und Cosinus irgend eines Bogens x, so kann man daraus mit leichter Mühe die Sinus und Cosinus der Winkel $x+\omega$ und $x-\omega$ finden, wenn ω klein genug ist, denn in diesem Falle convergiren die gefundenen Reihen stark. Man muß aber dabey ω in Theilen des Halbmessers ausdrucken, wozu man die nöthigen Einheiten aus der Division der Zahl

3,14159265358979323846

welche den Bogen von 180° ausdruckt, durch 180, und des hierdurch gefundenen Quotienten durch 60 u. s. f. findet. Hierdurch erhält man

$$1^\circ = 0{,}01745329251994329576$$
$$1' = 0{,}00029088820866572159$$
$$1'' = 0{,}00000484813681109535$$
etc.

Erstes Exempel.

Die Sinus und Cosinus der Winkel von 45°, 1', und 44°, 59' aus dem Sinus und Cosinus des Winkels von 45° zu finden, die beyde

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071067811865 \text{ sind.}$$

Da

Da also

$$\sin.x = \cos.x = 0{,}707106781865, \text{ und}$$
$$\omega = 0{,}0002908882086, \text{ ist,}$$

so suche man, um sich die Multiplicationen zu erleichtern,

$$\begin{aligned}
2\omega &= 0{,}0005817764173\\
3\omega &= 0{,}0008726646259\\
4\omega &= 0{,}0011635528346\\
5\omega &= 0{,}0014544410432\\
6\omega &= 0{,}0017453292519\\
7\omega &= 0{,}0020362174605\\
8\omega &= 0{,}0023271056692\\
9\omega &= 0{,}0026179938779
\end{aligned}$$

Hiernach findet man $\omega \sin.x$ und $\omega \cos.x$ auf folgende Art:

7	.	0,00020362174605		
0	.	.	.	.
7	.	0,00000203621746		
1	.	.		2908882
0	.	.	.	.
6	.	.		174532
7	.	.		20362
8	.	.		2372
1	.	.	.	29
1	.	.	.	2
8	.	.	.	2
6	.	.	.	0

$$\omega \sin.x = \omega \cos.x = 0{,}00020568902490,$$

$$\text{folglich, } \tfrac{1}{2}\omega \cos.x = 0{,}00010284451245.$$

Nun multiplicire man

durch ω. 1 . 0,00000002908882
0 . . . .
2 . . 58178
8 . . 23271
4 . . 1164
4 . . . 116
5 . . . 14

so wird $\frac{1}{2}\omega^2 \cos. x = 0,00000002991625$,

und $\frac{1}{6}\omega^2 \cos. x = 0,00000000997208$; ferner

durch ω 9 . 0,00000000000262
9 . . . 26
7 . . . 2

so wird $\frac{1}{6}\omega^3 \cos. x = 0,00000000000290$

Um also den Sinus von 45°, 1' zu finden, addire man zu

$$\begin{array}{rl}
\sin. x = & 0,7071067811865 \\
\omega \cos. x = & 2056890249 \\
\hline
 & 0,7073124702114 \\
\text{subtrah. } \frac{1}{2}\omega^2 . \sin x = & 299162 \\
\hline
 & 0,7073124402952 \\
\text{und } \frac{1}{6}\omega^3 . \cos. x = & 29 \\
\hline
\end{array}$$

so wird $\sin. 45°, 1' = 0, 703124402923 = \cos. 44°, 59'$.

Um hingegen den cos. 45', 1' zu bekommen, subtrahire man

$$\begin{array}{rl}
\text{von } \cos. x = & 0,7071067811865 \\
\omega \sin. x = & 2056890249 \\
\hline
 & 0,7069010921616 \\
\text{und } \frac{1}{2}\omega^2 \cos. x = & 299162 \\
\hline
 & 0,7069010622454, \text{ und} \\
\text{addire } \frac{1}{6}\omega^3 \sin. x = & 29 \\
\hline
\end{array}$$

so findet man $\cos. 45°, 1' = 0,7069010622483 = \sin. 44°, 59'$.

Zweytes Exempel.

Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus des Bogens von 67°, 30' den Sinus und Cosinus der Bogen von 67°, 31' und 67°, 29' zu finden.

Wir wollen hier die Rechnung nur bis auf sieben Decimal-Theiler-Stellen fortführen, als womit man sich in den gemeinen Tafeln zu begnügen pflegt; und so können wir uns dieselbe durch die Logarithmen erleichtern. Da also

$$x = 67°,\ 30' \text{ und}$$

$$\omega = 0{,}000290888;\ \text{so ist } l\,\omega = 6{,}4637259 \text{ und}$$

$$\begin{array}{rlrl}
l\,\sin.x = & 9{,}9656153; & l\,\cos.x = & 9{,}5828397 \\
l\,\omega = & 6{,}4637259; & l\,\omega = & 6{,}4637259 \\
\hline
l\,\omega \sin.x = & 6{,}4293412; & l\,\omega \cos.x = & 6{,}0465656 \\
l\,\tfrac{1}{2}\omega = & 6{,}1626959; & l\,\tfrac{1}{2}\omega = & 6{,}1626959 \\
\hline
l\,\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin.x = & 2{,}5920371; & l\,\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos.x = & 2{,}2092615
\end{array}$$

folglich

$$\begin{array}{rlrl}
\omega \sin.x = & 0{,}00026874; & \omega \cos.x = & 0{,}00011232 \\
\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin.x = & 0{,}00000004; & \tfrac{1}{2}\omega^2 \cos.x = & 0{,}00000001
\end{array}$$

und hieraus wird

$$\begin{array}{rlrl}
\sin.67°,31' = & 0{,}9239908; & \cos 67°,31' = & 0{,}3824147 \\
\sin.67°,29' = & 0{,}9237681; & \cos.67°,29' = & 0{,}3829522
\end{array}$$

und die Glieder $\frac{1}{2}\omega^2 \sin.x$ und $\frac{1}{2}\omega^2 \cos.x$ hätte man nicht einmal nöthig gehabt.

§. 95. §. 97.

Aus den gefundenen Reihen:

$$\sin.(x+\omega) = \sin.x + \omega\cos.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin.x - \tfrac{1}{6}\omega^3\cos.x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin.x + \text{ꝛc.}$$

$$\cos.(x+\omega) = \cos.x - \omega\sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\cos.x + \tfrac{1}{6}\omega^3\sin.x + \tfrac{1}{24}\omega^4\cos.x - \text{ꝛc.}$$

$$\sin.(x-\omega) = \sin.x - \omega\cos.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin.x + \tfrac{1}{6}\omega^3\cos.x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin.x - \text{ꝛc.}$$

$$\cos.(x-\omega) = \cos.x + \omega\sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\cos.x - \tfrac{1}{6}\omega^3\sin.x + \tfrac{1}{24}\omega^4\cos.x + \text{ꝛc.}$$

folgt

folgt durch die Verbindung

$$\frac{\sin.(x+\omega)+\sin.(x-\omega)}{2} =$$

$$\sin.x - \tfrac{1}{2}\omega^2\sin x + \tfrac{1}{24}\omega^4\sin.x - \tfrac{1}{720}\omega^6\sin x + \text{ꝛc.} = \sin x . \cos.\omega$$

und

$$\frac{\sin.(x+\omega)-\sin.(x-\omega)}{2} =$$

$$\omega\cos.x - \tfrac{1}{6}\omega^3\cos x + \tfrac{1}{120}\omega^5\cos.x - \text{ꝛc.} = \cos x . \sin.\omega.$$

Hieraus fließen die bereits (im ersten Theile im vierten Capitel §. 201.) gefundenen Reihen.

$$\cos\omega = 1 - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{24}\omega^4 - \tfrac{1}{720}\omega^6 + \text{ꝛc.}$$

$$\sin.\omega = \omega - \tfrac{1}{6}\omega^3 + \tfrac{1}{120}\omega^5 - \tfrac{1}{5040}\omega^7 + \text{ꝛc.}$$

und eben diese Reihen erhält man, wenn man $x = 0$ setzt. Denn da $\cos.x = 1$ und $\sin.x = 0$ wird, so giebt die erste Reihe den $\sin.\omega$ und die zweyte den $\cos.\omega$.

§. 98.

Nun sey $y = \text{tang } x$, und also $z = \text{tang}.(x+\omega)$. Da

$$y = \frac{\sin.x}{\cos x};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos.x^2};\quad \frac{ddy}{2\,dx^2} = \frac{\sin.x}{\cos.x^3};$$

$$\frac{d^3y}{2\,dx^3} = \frac{1}{\cos.x^2} + \frac{3\sin.x^2}{\cos.x^4} = \frac{3}{\cos.x^4} - \frac{2}{\cos.x^2};$$

$$\frac{d^4y}{2.4\,dx^4} = \frac{3\sin.x}{\cos x^5} - \frac{\sin.x}{\cos.x^3};$$

$$\frac{d^5y}{2.4\,dx^5} = \frac{15}{\cos.x^6} - \frac{15}{\cos.x^4} + \frac{2}{\cos.x^2} \text{ ist:}$$

so wird

$$\text{tang}.(x+\omega) =$$

$$\text{tang}.x + \frac{\omega}{\cos.x^2} + \frac{\omega^2\sin.x}{\cos.x^3} + \frac{\omega^3}{\cos.x^4} + \frac{\omega^4\sin.x}{\cos.x^5}$$

$$- \frac{2\omega^3}{3\cos.x^2} - \frac{\omega^4\sin.x}{3\cos.x^3};$$

und vermittelst dieser Formel lassen sich aus jeder gegebenen Tangente die Tangenten der nächst größern und kleinern Winkel finden. Vermittelst der Anwendung des Lehrsatzes von der Erfindung der Summe einer geometrischen Progression aber bekommt man hieraus, da die erste Reihe eine geometrische enthält,

$$\text{tang.}(x+\omega)=\text{tang.}x+\frac{\omega+\omega^2\,\text{tang.}x}{\text{cos.}x^2-\omega^2}-\frac{2\omega^3}{3\,\text{cos.}x^2}-\frac{\omega^4\,\text{sin.}x}{3\,\text{cos.}x^3}\text{ etc.}$$

oder

$$\text{tang.}(x+\omega)=\frac{\text{sin.}x\,.\,\text{cos.}x+\omega}{\text{cos.}x^2-\omega^2}-\frac{2\omega^3}{3\,\text{cos.}x^2}-\frac{\omega^4\,\text{sin.}x}{3\,\text{cos.}x^3}\text{ etc.}$$

und diese Formel ist zum Gebrauche bequemer.

§. 99.

Aehnliche Ausdrücke lassen sich für die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten finden. Denn ist $y =$ dem Logarithmen des Sinus eines Winkels x, welches man auf diese Art ausdruckt,

$$y = l\,\text{sin.}x$$

und $z = l\,\text{sin.}(x+\omega)$: so ist, weil $\frac{dy}{dx} = \frac{n\,\text{cos.}x}{\text{sin.}x}$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-n}{\text{sin.}x^2};\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{n\,\text{cos.}x}{\text{sin.}x^3}\text{ etc.}$$

und folglich

$$z=l\,\text{sin.}(x+\omega)=l\,\text{sin.}x+\frac{n\omega\,\text{cos.}x}{\text{sin.}x}-\frac{n\omega^2}{2\,\text{sin.}x^2}+\frac{n\omega^3\,\text{cos.}x}{3\,\text{sin.}x^3}\text{ etc.}$$

wo n die Zahl bedeutet, mit welcher die hyperbolischen Logarithmen multiplicirt werden müssen, wenn man daraus die gegebenen Logarithmen bekommen will. Ist hingegen

$$y = l\,\text{tang.}x,\ \text{und}\ z = l\,\text{tang.}(x+\omega)$$

so

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\sin.x.\cos.x} = \frac{2n}{\sin.2x}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2n\cos.2x}{(\sin.2x)^2};$$

und folglich

$$l\,\mathrm{tang}.(x+\omega) = l\,\mathrm{tang}.x + \frac{2n\omega}{\sin.2x} - \frac{2n\omega^2\cos.2x}{(\sin.2x)^2} \text{ ꝛc.}$$

und vermittelst dieser Formeln lassen sich die Logarithmen der Sinus und Tangenten interpoliren.

§. 100.

Jetzt wollen wir setzen, y bedeute den Bogen, dessen Sinus den Logarithmen x habe, also $y = A.\,l\sin.x$, und $z = A.\,l\sin.(x+\omega)$ annehmen: so ist $x = l\sin.y$, und

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n\cos.y}{\sin.y}, \text{ oder } \frac{dy}{dx} = \frac{\sin.y}{n\cos.y}; \text{ ferner}$$

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{dy}{n\cos.y^2} = \frac{dx\sin.y}{n^2\cos.y^3}; \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin.y}{n^2\cos.y^3};$$

folglich

$$z = y + \frac{\omega\sin.y}{n\cos.y} + \frac{\omega^2\sin.y}{2n^2\cos.y^3} + \text{ꝛc.}$$

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn der Logarithme des Cosinus gegeben ist. Ist hingegen

$$y = A.\,l\,\mathrm{tang}.x, \text{ und } z = A.\,l\,\mathrm{tang}.(x+\omega)$$

so wird, weil $x = l\,\mathrm{tang}.y$ ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n}{\sin.y.\cos.y}, \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{\sin.y.\cos.y}{n} = \frac{\sin.2y}{2n}$$

daher denn

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{2dy\cos.2y}{2n} = \frac{dx\sin.2y\cos.2y}{2nn}$$

und

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{\sin.2y\cos.2y}{2nn} = \frac{\sin.4y}{4nn}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\sin 2y.\cos.4y}{2n^3} \text{ ꝛc.}$$

 folglich

folglich

$$z = y + \frac{\omega\,\text{fin.}\,2y}{2n} + \frac{\omega^2\,\text{fin.}\,2y\,.\,\text{cof.}\,2y}{4nn} + \frac{\omega^3\,\text{fin}\,2y\,.\,\text{cof}\,4y}{12n^3}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

§. 101.

Da der Gebrauch dieser Formeln bey Verfertigung der Tafeln der Logarithmen der Sinus und der Tangenten aus dem Vorhergehenden abgenommen werden kann, so verweile ich dabey nicht, sondern gehe zur Betrachtung des Falls fort, wo

$$y = e^x\,\text{fin.}\,n\,x, \text{ und } z = e^{x+\omega}\,\text{fin.}\,n\,(x+\omega)$$

ist. In diesem Falle hat man

$$\frac{dy}{dy} = e^x(\text{fin.}\,n\,x + n\,\text{cof.}\,n\,x)$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = e^x((1 - nn)\,\text{fin.}\,n\,x + 2n\,\text{cof.}\,n\,x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^x((1 - 3nn)\,\text{fin.}\,nx + n(3 - nn)\,\text{cof.}\,nx)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^x((1 - 6nn + n^4)\,\text{fin.}\,nx + n(4 - 4nn)\,\text{cof.}\,nx)$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = e^x((1 - 10nn + 5n^4)\,\text{fin.}\,nx + n(5 - 10nn + n^4)\,\text{cof.}\,nx).$$

Substituirt man diese Werthe und dividirt darauf durch e^x, so wird

$$e^\omega\,\text{fin.}\,n(x+\omega) = \text{fin.}\,nx + \omega\,\text{fin.}\,n\,x + \frac{(1 - nn)}{2}\,\omega^2\,\text{fin.}\,n\,x$$
$$+ n\omega\,\text{cof.}\,nx + \frac{2n\,\omega^2}{2}\,\text{cof.}\,n\,x$$
$$+ \frac{(1 - 3nn)}{6}\,\omega^3\,\text{fin.}\,nx + \frac{(1 - 6nn + n^4)}{24}\,\omega^4\,\text{fin.}\,n\,x + \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{n(3 - nn)}{6}\,\omega^3\,\text{cof.}\,nx + \frac{n(4 - 4nn)}{24}\,\omega^4\,\text{cof.}\,n\,x + \text{ꝛc.}$$

§. 102.

Aus der großen Menge der wichtigen Folgen, welche sich hieraus herleiten lassen, will ich bloß folgende hersetzen.

Wenn $x = 0$ ist, so ist

$$e^{\omega}\sin.n\omega = n\omega + \frac{2n\omega^2}{2} + \frac{n(3-nn)}{6}\omega^3 + \frac{n(4-4nn)}{24}\omega^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}\omega^5 + \mathrm{rc.}$$

Wenn $\omega = -x$ ist, so wird, weil $\sin.n(x+\omega) = \omega$ ist,

$$\mathrm{tang}\,nx = \frac{nx - \frac{2n}{2}x^2 + \frac{n(3-nn)}{6}x^3 - \frac{n(4-4nn)}{24}x^4 + \frac{n(5-10n^2+n^4)}{120}x^5 - \mathrm{rc.}}{1 - x + \frac{1-nn}{2}x^2 - \frac{1-3nn}{6}x^3 + \frac{1-6nn+n^4}{24}x^4 - \mathrm{rc.}}$$

Ueberhaupt aber hat man, wenn $n = 1$ ist,

$$e^{\omega}\sin.(x+\omega) = \sin.x(1+\omega-\tfrac{1}{3}\omega^3-\tfrac{1}{6}\omega^4-\tfrac{1}{30}\omega^5+\tfrac{1}{630}\omega^7+\mathrm{rc.})$$
$$+\omega\cos.x(1+\omega+\tfrac{1}{3}\omega^2-\tfrac{1}{30}\omega^4-\tfrac{1}{90}\omega^5-\tfrac{1}{630}\omega^6+\mathrm{rc.})$$

Wenn aber $n = 0$ wird, so bekommt man, weil $\sin n(x+\omega) = n(x+\omega)$; $\sin nx = nx$; und $\cos.nx = 1$ wird, wenn man allenthalben durch n dividirt,

$$e^{\omega}(x+\omega) = x + \omega x + \tfrac{1}{2}\omega^2 x + \tfrac{1}{6}\omega^3 x + \tfrac{1}{24}\omega^4 x + \mathrm{rc.}$$
$$+ \omega + \omega^2 + \tfrac{1}{2}\omega^3 + \tfrac{1}{6}\omega^4 + \tfrac{1}{24}\omega^5 + \mathrm{rc.}$$

und die Beschaffenheit dieser Reihe fällt in die Augen.

Fünftes Capitel.

Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede.

§. 103.

Es sey y das allgemeine Glied einer Reihe, welches zu dem Anzeiger x gehöre, und also y irgend eine Funktion von x. Ferner sey Sy das summirende Glied dieser Reihe, welches das Aggregat aller Glieder von dem ersten oder einem andern bestimmten Gliede an bis zu y, dieses eingeschlossen, ausdrucke. Dabey wollen wir die Summen der Reihen vom ersten Gliede an rechnen, so daß, wenn $x = 1$ gesetzt wird, y das erste Glied, und Sy ebenfalls dieses erste Glied gebe; hingegen, wenn $x = 0$ angenommen wird, das summirende Glied Sy verschwinde, weil gar keine Glieder summirt werden. Bey diesen Bedingungen ist also das summirende Glied Sy eine solche Funktion von x, die verschwindet, wenn $x = 0$ gesetzt wird.

§. 104.

Wenn das allgemeine Glied y aus mehrern Theilen besteht, und z. B. $y = p + q + r +$ 2c. ist: so kann man die Reihe selbst als ein Aggregat aus mehrern Reihen betrachten, welche die allgemeinen Glieder $p, q, r,$ 2c. haben. Sind daher die einzeln Summen dieser Reihen bekannt, so läßt sich

sich auch die Summe der gegebenen Reihe angeben, weil sie ein Aggregat aus den Summen der einzelnen Reihen ist. Wenn also $y = p + q + r +$ ꝛc. ist, so ist $Sy = Sp + Sq + Sr +$ ꝛc. Da wir nun oben (im ersten und zweyten Capitel) die Summen der Reihen angegeben haben, deren allgemeine Glieder Potestäten von x mit positiven Exponenten sind: so lassen sich die summirenden Glieder aller Reihen finden, deren allgemeine Glieder unter die Form $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ ꝛc. gehören, wenn α, β, γ, ꝛc. ganze positive Zahlen bedeuten, oder deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind.

§. 105.

Es sey in einer Reihe, deren allgemeines zu dem Anzeiger x gehöriges Glied $= y$ ist, das vor diesem vorhergehende oder zu dem Anzeiger $x - 1$ gehörige Glied $= v$. Da in diesem Falle v aus y entspringt, wenn man $x - 1$ anstatt x setzt, so wird

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

Wenn also y das allgemeine Glied dieser Reihe

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots & x-1 \quad x \\ a & +b & +c & +d & + \ldots\ldots\ldots & +v+y \end{array}$$

und das zu dem Anzeiger o gehörige Glied $= A$ ist: so ist v, als eine Funktion von x, das allgemeine Glied dieser Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots\ldots & x \\ A & +a & +b & +c & +d & + \ldots\ldots\ldots & v \end{array}$$

Wenn also Sv die Summe dieser Reihe bedeutet, so ist $Sv = Sy - y + A$, und es verschwindet Sv, wenn man $x = o$ setzt, weil alsdenn $Sy = o$ und $y = A$ wird.

§. 106.

Da also

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

ist: so hat man nach dem Vorhergehenden

$$Sv = Sy - S\frac{dy}{dx} + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

und, weil $Sv = Sy - y + A$ ist,

$$S\frac{dy}{dx} = y - A + S\frac{ddy}{2dx^2} - S\frac{d^3y}{6dx^3} + S\frac{d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

Sind daher die summirenden Glieder der Reihen bekannt, deren allgemeine Glieder $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, etc. sind: so kann man daraus das summirende Glied der Reihe erhalten, deren allgemeines Glied $= \frac{dy}{dx}$ ist. Die Größe A aber muß so beschaffen seyn, daß das summirende Glied $S\frac{dy}{dx}$ verschwinde, wenn $x = 0$ wird; und durch diese Bedingung wird dieselbe weit leichter bestimmt, als wenn man sagte, sie sey das zu 0 gehörige Glied in der Reihe, deren allgemeines Glied y ist.

§. 107.

Aus dieser Quelle schöpft man die Summe der Potestäten der natürlichen Zahlen. Denn es sey

$$y = x^{n+1}$$

Da hier

$$\frac{dy}{dx} = (n+1)x^n;$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}x^{n-1};$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-2};$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-3};$$

ꝛc.

ist: so bekommt man, wenn man diese Werthe substituirt,

$$(n+1)Sx^n = x^{n+1} - A + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} Sx^{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} Sx^{n-2} + \text{ꝛc.}$$

und, wenn man auf beyden Seiten durch $n+1$ dividirt,

$$Sx^n =$$

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{n}{2} Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3} Sx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} Sx^{n-3} - \text{ꝛc.}$$

$- C$ (oder einer beständigen Größe)

und diese beständige Größe muß so angenommen werden, daß das ganze summirende Glied o werde, wenn $x = 0$ gesetzt wird. Vermittelst dieser Formel läßt sich aus den bekannten Summen der niedrigern Potestäten, deren allgemeine Glieder x^{n-1}, x^{n-2}, ꝛc. sind, die Summe der höhern Potestäten finden, welche das allgemeine Glied x^n unter sich begreift.

§. 108.

Wenn n in diesem Ausdrucke eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist die Anzahl der Glieder endlich; und daher ist sogar die Summe unzähliger Potestäten, wenn $n = 0$ ist, absolut bekannt; es ist nemlich

$$S.x^0 = x.$$

Nun kann man aber auch zu den höhern Werthen fortgehen, indem, wenn man $n = 1$ setzt

S.x¹

$$S.x^1 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}Sx^0 = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x \text{ wird}$$

und setzt man nach und nach $n = 2, 3, 4,$ ꝛc., so bekommt man

$$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + Sx - \tfrac{1}{3}Sx^0 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$

$$S.x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{3}{2}Sx^2 - Sx + \tfrac{1}{4}Sx^0 = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2$$

$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{4}{2}Sx^3 - \tfrac{4}{2}Sx^2 + Sx - \tfrac{1}{5}Sx^0, \text{ oder}$$

$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x.$$

ꝛc.

Die folgenden Summen werden indeß durch die ferner zu erklärenden Methoden leichter gefunden.

§. 109.

Da nach dem Vorhergehenden

$$S\frac{dy}{dx} = y + \tfrac{1}{2}S\frac{ddy}{dx^2} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3y}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4y}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

ist: so wird, wenn man $\frac{dy}{dx} = z$ setzt,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dz}{dx}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2}; \text{ ꝛc.}$$

und da $dy = zdx$ ist, so wird y eine Größe, die zdx zum Differenziale hat, und dieses zeigt man auf die Art an, daß man

$$y = \int z\,dx$$

schreibt. Nun setzt zwar die Erfindung der Größe y aus z nach dieser Formel Integral-Rechnung voraus; aber wir können uns gleichwohl dieses Ausdrucks $\int z\,dx$ bedienen, wenn wir für z keine andere Funktionen von x setzen, als solche, die bey dem Differenziale zdx aus dem Vorhergehenden dargestellt werden können. Also wird

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

wenn man dazu eine beständige Größe setzt, wobey, wenn $x = 0$ wird, die Summe Sz ebenfalls verschwindet.

§. 110.

§. 110.

Substituirt man aber in dem obigen Ausdrucke anstatt y den Buchstaben z, oder differenzirt man, denn dieses führt eben dahin, die vorhergehende Gleichung: so wird

$$S\frac{dz}{dx} = z + \tfrac{1}{2}S\frac{ddz}{dx^3} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und setzt man anstatt y den Quotienten $\frac{dz}{dx}$, so bekommt man

$$S\frac{ddz}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^5z}{dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Auf ähnliche Art findet man durch die Substitution der Werthe $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; ꝛc.

$$S\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^5z}{dx^5} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^6z}{dx^6} - \text{ꝛc.}$$

$$S\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{d^3z}{dx^3} + \tfrac{1}{2}S\frac{d^5z}{dx^5} - \tfrac{1}{6}S\frac{d^6z}{dx^6} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^7z}{dx^7} - \text{ꝛc.}$$

und so ferner ohne Ende.

§. 111.

Wenn nun diese Werthe für $S\frac{dz}{dx}$; $S\frac{ddz}{dx^2}$; $S\frac{d^3z}{dx^3}$; ꝛc. nach und nach in den Ausdruck

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} + \tfrac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

gebracht werden: so findet man einen Ausdruck für Sz, welcher aus den Gliedern $\int z\,dx$; z; $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; ꝛc. besteht, deren Coefficienten aber leichter auf folgendem Wege erhalten werden. Man setze

$$Sz = \int z\,dx + \alpha z + \frac{\beta\,dz}{dx} + \frac{\gamma\,ddz}{dx^2} + \frac{\delta\,d^3z}{dx^3} + \frac{\varepsilon\,d^4z}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

und

und substituire für diese Glieder die Werthe, welche sie aus den vorhergehenden Reihen bekommen: so erhält man

$$\int z\,dx = Sz - \tfrac{1}{2}S\frac{dz}{dx} + \frac{1}{6}S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{24}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{120}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$\alpha z = +\alpha S\frac{dz}{dx} - \frac{\alpha}{2}S\frac{ddz}{dx^2} + \frac{\alpha}{6}S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\alpha}{24}S\frac{d^4z}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\beta dz}{dx} = \beta S\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\beta}{2}S\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\beta}{6}S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\gamma ddz}{dx^2} = \gamma S\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{\gamma}{2}S\frac{d^4z}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\delta d^3z}{dx^3} = \delta S\frac{d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und da diese Werthe, zusammen addirt, Sz hervorbringen müssen, so werden die Coefficienten α, β, γ, δ, ꝛc. aus folgenden Gleichungen bestimmt.

$$\alpha - \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0$$

$$\gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{2} + \frac{\gamma}{6} - \frac{\beta}{24} + \frac{\alpha}{120} - \frac{1}{720} = 0$$

$$\zeta - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{6} - \frac{\gamma}{24} + \frac{\beta}{120} - \frac{\alpha}{720} + \frac{1}{5040} = 0$$

ꝛc.

§. 112.

Aus diesen Gleichungen lassen sich also nach und nach die Werthe aller dieser Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. finden. Sie sind:

$\alpha =$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24} = 0$$

$$\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120} = -\frac{1}{720}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720} = 0$$

ꝛc.

und fährt man auf diese Art weiter fort, so nimmt man wahr, daß immer abwechselnd ein Glied verschwindet. Der dritte, fünfte, siebente Buchstabe, u. s. f., also überhaupt die durch die ungeraden Zahlen ihrer Ordnung nach bestimmten, werden, die erste ausgenommen, $= 0$, so daß daher diese Reihe wider das Gesetz der Continuität zu streiten scheint. Um so nöthiger ist ein strenger Beweis der Behauptung, daß alle ungerade Glieder außer dem ersten verschwinden.

§. 113.

Da die Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. aus den vorhergehenden nach einem beständigen Gesetze bestimmt werden, so bilden sie eine wiederkehrende Reihe. Um dieselbe zu entwickeln, nehme man folgende Reihe an:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{ꝛc.}$$

und setze den Werth derselben $= V$: so ist offenbar, daß diese wiederkehrende Reihe aus der Entwickelung des Bruchs sich ergiebt

$$V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 - \text{ꝛc.}}$$

und wenn dieser Bruch auf andere Art in eine ohne Ende fortlaufende Reihe, die nach den Potestäten von u fortgeht, auf-

aufgelöset werden kann, so muß gleichwohl nothwendig immer eben dieselbe Reihe

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{etc.}$$

wieder hervorgebracht werden. Auf diese Art wird sich ein anderes Gesetz die Buchstaben α, β, γ, δ, etc. zu bestimmen darbieten.

§. 114.

Da man, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist,

$$e^{-u} = 1 - u + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 - \tfrac{1}{120}u^5 + \text{etc.}$$

hat, so ist

$$\frac{1 - e^{-u}}{u} = 1 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{24}u^3 + \tfrac{1}{120}u^4 - \text{etc.}$$

und daher

$$V = \frac{u}{1 - e^{-u}}$$

Nun bringe man aus jener Reihe $\alpha u = \frac{1}{2}u$ weg, so daß

$$V - \tfrac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{etc.}$$

werde, so hat man

$$V - \tfrac{1}{2}u = \frac{\tfrac{1}{2}u(1 + e^{-u})}{1 - e^{-u}}$$

Man multiplicire ferner den Zähler und Nenner durch $e^{\frac{1}{2}u}$, so wird

$$V - \tfrac{1}{2}u = \frac{u(e^{\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u})}{2(e^{\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u})}$$

und durch die Verwandlung der Größen $e^{\frac{1}{2}u}$ und $e^{-\frac{1}{2}u}$ in Reihen,

$$V - \tfrac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \text{etc.}}{2\left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2.4.6} + \frac{u^4}{2.4.6.8.10} + \text{etc.}\right)}$$

oder

oder

$$V - \tfrac{1}{2}u = \frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4\ldots 12} + \frac{u^8}{2.\ldots 16} + \text{ꝛc.}}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6\ldots 14} + \frac{u^8}{4.6\ldots 18} + \text{ꝛc.}}$$

§. 115.

Da also in diesem Bruche keine ungeraden Potestäten vorkommen, so können dergleichen auch nicht in dem Ausdrucke seyn, den man daraus durch die Entwickelung erhält. Da also

$$V - \tfrac{1}{2}u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{ꝛc.}$$

ist: so müssen die Coefficienten der ungeraden Potestäten γ, ε, $\varkappa$, ι, ꝛc. insgesammt verschwinden. Auf diese Art ist klar, warum in der Reihe

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{ꝛc.}$$

die ungeraden Glieder insgesammt $= 0$ sind, ohne daß dadurch das Gesetz der Stetigkeit leide. Es ist also

$$V = 1 + \tfrac{1}{2}u + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \vartheta u^8 + \varkappa u^{10} + \text{ꝛc.}$$

und hat man die Buchstaben β, δ, ζ, ϑ, $\varkappa$. ꝛc. durch die Entwickelung des obigen Bruchs bestimmt, so bekommt man das summirende Glied Sz der Reihe, deren allgemeines zu dem Anzeiger x gehöriges Glied z ist, auf folgende Art ausgedruckt:

$$Sz = \int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\beta\,dz}{dx} + \frac{\delta\,d^3z}{dx^3} + \frac{\zeta\,d^5z}{dx^5} + \frac{\vartheta\,d^7z}{dx^7} + \text{ꝛc.}$$

§. 116.

Da die Reihe

$$1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \vartheta u^8 + \varkappa u^{10} + \text{ꝛc.}$$

aus der Entwickelung des folgenden Bruchs entspringt:

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} + \frac{u^6}{2.4.6.8.10.12} + \text{rc.}}{1 + \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} + \frac{u^6}{4.6.8.10.12.14} + \text{rc.}}$$

so werden die Buchstaben β, δ, ζ, ϑ, $\varkappa$, rc. nach dem Gesetze fortgehen, daß

$$\beta = \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4.6}$$

$$\delta = \frac{1}{2.4.6.8} - \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10}$$

$$\zeta = \frac{1}{2.4.6..12} - \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} - \frac{1}{4.6...14}$$

$$\vartheta = \frac{1}{2.4.6...16} - \frac{\zeta}{4.6} - \frac{\delta}{4.6.8.10} - \frac{\beta}{4.6...14} - \frac{1}{4.6...18}$$

rc.

ist. Es sind aber diese Werthe abwechselnd positiv und negativ.

§. 117.

Wenn also diese Buchstaben abwechselnd negativ genommen werden, so daß

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z - \frac{\beta dz}{dx} + \frac{\delta d^3z}{dx^3} - \frac{\zeta d^5z}{dx^5} + \frac{\vartheta d^7z}{dx^7} - \text{rc.}$$

ist: so werden die Buchstaben β, δ, ζ, ϑ, rc. aus folgendem Bruche bestimmt:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4...12} + \frac{u^8}{2.4...16} - \text{rc.}}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6...14} + \frac{u^8}{4.6...18} - \text{rc.}}$$

wenn man denselben in die Reihe

$$1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 + \vartheta u^8 + \varkappa u^{10} + \text{rc.}$$

auflöset. Es ist demnach

$\beta =$

$$\beta = \frac{1}{4.6} - \frac{1}{2.4}$$

$$\delta = \frac{\beta}{4.6} - \frac{1}{4.6.8.10} + \frac{1}{2.4.6.8}$$

$$\zeta = \frac{\delta}{4.6} - \frac{\beta}{4.6.8.10} + \frac{1}{4.6\ldots14} - \frac{1}{2.4\ldots12}$$

ꝛc.

allein hier werden alle Glieder negativ.

§. 118.

Wir wollen also $\beta = -A$; $\delta = -B$; $\zeta = -C$; ꝛc. folglich

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2} z + \frac{A dz}{dx} - \frac{B d^3 z}{dx^3} + \frac{C d^5 z}{dx^5} - \frac{D d^7 z}{dx^7} + \text{ꝛc.}$$

setzen, und um die Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. zu bestimmen, diese Reihe betrachten:

$$1 - Au^2 - Bu^4 - Cu^6 - Du^8 - Eu^{10} - \text{ꝛc.}$$

welche aus der Entwickelung des Bruchs:

$$\frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \frac{u^8}{2.4\ldots16} - \text{ꝛc.}}{1 - \frac{u^2}{4.6} + \frac{u^4}{4.6.8.10} - \frac{u^6}{4.6\ldots14} + \frac{u^8}{4.6\ldots18} - \text{ꝛc.}}$$

oder diese:

$$\frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.} = s,$$

welche aus der Entwickelung des folgenden Bruchs entspringt:

$$s = \frac{1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \text{ꝛc.}}{u - \frac{u^3}{4.6} + \frac{u^5}{4.6.8.10} - \frac{u^7}{4.6\ldots14} + \text{ꝛc.}}$$

 Da

Da aber

$$\cos.\tfrac{1}{2}u = 1 - \frac{u^2}{2.4} + \frac{u^4}{2.4.6.8} - \frac{u^6}{2.4\ldots12} + \text{ꝛc.}$$

und

$$\sin.\tfrac{1}{2}u = \frac{u}{2} - \frac{u^3}{2.4.6} + \frac{u^5}{2.4.6.8.10} - \frac{u^7}{2.4\ldots14} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$s = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}u}{2\sin.\tfrac{1}{2}u} = \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u$$

Wenn man daher die Cotangente des Bogens $\frac{1}{2}u$ in eine Reihe verwandelt, deren Potestäten nach den Potestäten von u fortgehen, so lassen sich daraus die Werthe der Buchstaben A, B, C, D, E, ꝛc. erkennen.

§. 119.

Da also $s = \frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}u$ ist, so hat man $\frac{1}{2}u = A.\cot.2s$ und differenzirt man, so wird $\frac{1}{2}du = \frac{-2ds}{1+4ss}$, oder $4ds + du + 4ssdu = 0$, oder $\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$. Da aber

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\begin{array}{rl}
\frac{4ds}{du} = & -\frac{4}{uu} - 4A - 3.4Bu^2 - 5.4Cu^4 - 7.4Du^6 \\
& - \text{ꝛc.} \\
1 = & 1 \\
4ss = & \frac{4}{uu} - 8A - 8Bu^2 - 8Cu^4 - 8Du^6 - \text{ꝛc.} \\
& + 4A^2u^2 + 8ABu^4 + 8ACu^6 + \text{ꝛc.} \\
& + 4BBu^6 + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

und

und bringt man die homogenen Glieder auf o, so bekommt man

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{A^2}{5}$$

$$C = \frac{2AB}{7}$$

$$D = \frac{2AC + BB}{9}$$

$$E = \frac{2AD + 2BC}{11}$$

$$F = \frac{2AE + 2BD + CC}{13}$$

$$G = \frac{2AF + 2BE + 2CD}{15}$$

$$H = \frac{2AG + 2BF + 2CE + DD}{17}$$

ꝛc.

und es fällt aus diesen Formeln sehr deutlich in die Augen, daß jeder dieser Werthe positiv sey.

§. 120.

Da aber die Nenner dieser Brüche sehr groß werden, und die Rechnung nicht wenig erschweren, so wollen wir statt der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. folgende Substitutionen brauchen:

$$A = \frac{\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$B = \frac{\beta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$C = \frac{\gamma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 7}$$

 D =

$$D = \frac{\delta}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 9}$$

$$E = \frac{\varepsilon}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 11}$$

ꝛc.

Alsdann findet man

$$\alpha = \tfrac{1}{2}$$

$$\beta = \tfrac{2}{3}\alpha^2$$

$$\gamma = 2 \cdot \tfrac{3}{3}\alpha\beta$$

$$\delta = 2 \cdot \tfrac{4}{3}\alpha\gamma \quad + \frac{8 \cdot 7}{4 \cdot 5}\beta^2$$

$$\varepsilon = 2 \cdot \tfrac{5}{3}\alpha\delta \quad + 2 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \ldots 5}\beta\gamma$$

$$\zeta = 2 \cdot \frac{12}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha\varepsilon + 2 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \ldots 5}\beta\delta + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \ldots \ldots 7}\gamma\gamma$$

$$\eta = 2 \cdot \frac{14}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha\zeta + 2 \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \ldots 5}\beta\varepsilon + 2 \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \ldots \ldots 7}\gamma\delta$$

ꝛc.

§. 121.

Mit mehrer Bequemlichkeit aber bedient man sich dieser Formeln:

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha\alpha}{2}$$

$$\gamma = \frac{6}{3} \cdot \alpha\beta$$

$$\delta = \frac{8}{3} \cdot \alpha\gamma + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{\beta\beta}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{10}{3} \cdot \alpha\delta + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \beta\gamma$$

$\zeta =$

$$\zeta = \frac{12}{3}.\alpha\varepsilon + \frac{12.11.10}{3.4.5}.\beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{3.4.5.6.7}.\frac{\gamma\gamma}{2}$$

$$\eta = \frac{14}{3}.\alpha\zeta + \frac{14.13.12}{3.4.5}.\beta\varepsilon + \frac{14.13.12.11.10}{3.4.5.6.7}.\gamma\delta$$

$$\vartheta = \frac{16}{3}.\alpha\eta + \frac{16.15.14}{3.4.5}.\beta\zeta + \frac{16.15.14.13.12}{3.4.5.6.7}.\gamma\varepsilon + \frac{16.15\ldots.10}{3.4\ldots.9}.\frac{\delta\delta}{2}$$

ꝛc.

Hat man nun nach diesem Gesetze, bey welchem die Rechnung mit keiner Schwierigkeit verknüpft ist, die Werthe der Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. gefunden: so läßt sich das summirende Glied jeder Reihe, deren allgemeines oder dem Anzeiger x zugehöriges Glied $= z$ ist, auf folgende Art ausdrucken:

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\alpha dz}{1.2.3dx} - \frac{\beta d^3z}{1.2.3.4.5dx^3} + \frac{\gamma d^5z}{1.2\ldots dx^5} - \frac{\delta d^7z}{1.2\ldots.9dx^7} + \frac{\varepsilon d^9z}{1.2\ldots.11dx^9} - \frac{\zeta d^{11}z}{1.2\ldots.13dx^{11}} + \text{ꝛc.}$$

Was aber die Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. betrifft, so hat man dafür folgende Werthe gefunden:

$$\alpha = \frac{1}{2} \qquad 1.2\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{1}{6} \qquad 1.2.3\beta = 1$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \qquad 1.2.3.4\gamma = 4$$

$$\delta = \frac{3}{10} \qquad 1.2.3.4.5\delta = 36$$

$$\varepsilon = \frac{5}{6} \qquad 1.2.3\ldots6\varepsilon = 600$$

$\zeta = \frac{691}{210}$ $\quad 1.2.3\ldots 7\zeta = 24.691$

$\eta = \frac{35}{2}$ $\quad 1.2.3\ldots 8\eta = 20160.35$

$\vartheta = \frac{3617}{30}$ $\quad 1.2.3\ldots 9\vartheta = 12096.3617$

$\iota = \frac{43867}{42}$ $\quad 1.2.3\ldots 10\iota = 86400.43867$

$\varkappa = \frac{1222277}{110}$ $\quad 1.2.3\ldots 11\varkappa = 362880.1222277$

$\lambda = \frac{854513}{6}$ $\quad 1.2.3\ldots 12\lambda = 79833600.854513$

$\mu = \frac{1181820455}{546}$ $\quad 1.2.3\ldots 13\mu = 11404800.1181820455$

$\nu = \frac{76977927}{2}$ $\quad 1.2.3\ldots 14\nu = 109109145600.76977927$

$\xi = \frac{23749461029}{30}$ $\quad 1.2.3\ldots 15\xi = 43589145600.23749461029$

$\pi = \frac{3615841276005}{462}$ $\quad 1.2.3\ldots 16\pi = 45287424000.3615841276005$

2c.

§. 122.

Diese Zahlen gewähren durch die ganze Lehre von den Reihen hindurch den größten Nutzen. Denn einmal lassen sich daraus die letzten Glieder in den Summen der geraden Potestäten finden, wovon oben (im ersten Theile §. 63.) bemerkt worden ist, daß man sie nicht eben so als die übrigen Glieder aus den Summen der vorhergehenden Potestäten erhalte. Denn bey den geraden Potestäten sind die letzten Glieder der Summen Produkte aus x und gewissen Zahlen, nemlich für die 2te, 4te, 6te, 8te, 2c. $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, 2c. mit abwech-

abwechselnden Zeichen. Es entspringen aber diese Zahlen aus den Werthen der Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc. welche wir vorhin gefunden haben, wenn man dieselben durch die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, ꝛc. dividirt. Uebrigens nennt man dieselben nach dem Namen ihres Erfinders Jacob Bernoulli die Bernouillischen Zahlen, und sie sind:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{6} = \mathfrak{A}$$

$$\frac{\beta}{5} = \frac{1}{30} = \mathfrak{B}$$

$$\frac{\gamma}{7} = \frac{1}{42} = \mathfrak{C}$$

$$\frac{\delta}{9} = \frac{1}{30} = \mathfrak{D}$$

$$\frac{\varepsilon}{11} = \frac{5}{66} = \mathfrak{E}$$

$$\frac{\zeta}{13} = \frac{691}{2730} = \mathfrak{F}$$

$$\frac{\eta}{15} = \frac{7}{6} = \mathfrak{G}$$

$$\frac{\vartheta}{17} = \frac{3617}{510} = \mathfrak{H}$$

$$\frac{\iota}{19} = \frac{43867}{798} = \mathfrak{I}$$

$$\frac{\varkappa}{21} = \frac{174611}{330} = \mathfrak{K} = \frac{283 \cdot 617}{330}$$

$$\frac{\lambda}{23} = \frac{854513}{138} = \mathfrak{L} = \frac{11 \cdot 131 \cdot 593}{2 \cdot 3 \cdot 23}$$

$$\frac{\mu}{25} = \frac{236364091}{2730} = \mathfrak{M}$$

$$\frac{\nu}{27} = \frac{8553103}{2} = \mathfrak{N} = \frac{13 \cdot 657931}{6}$$

ℑ 5 $\quad \frac{\xi}{29} =$

$$\frac{\xi}{29} = \frac{23749461029}{870} = \mathfrak{O}$$

$$\frac{\pi}{31} = \frac{8615841276005}{14322} = \mathfrak{P}$$

ꝛc.

§. 123.

Es lassen sich also die Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ꝛc. unmittelbar aus folgenden Gleichungen finden:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \mathfrak{A}^2$$

$$\mathfrak{C} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{9} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathfrak{B}^2$$

$$\mathfrak{E} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{11} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2}{11} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{13} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2}{13} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{1}{13} \cdot \mathfrak{C}^2$$

$$\mathfrak{G} = \frac{14 \cdot 13}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2}{15} \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{F} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2}{15} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{E} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \frac{2}{15} \cdot \mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

ꝛc.

und das Gesetz dieser Gleichungen ist offenbar, wenn man nur bemerkt, daß da, wo das Quadrat eines Buchstabens vorkommt, der Coefficient nur halb so groß sey, als er nach der Regel seyn zu müssen scheint. Eigentlich aber muß man die

die Glieder, in welchen die Produkte aus ungleichen Buchstaben enthalten sind, als zweymal vorkommend ansehen. Denn es ist z. B.

$$13\mathfrak{F} = \frac{12.11}{1.2}\mathfrak{A}\mathfrak{E} + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}\mathfrak{B}\mathfrak{D} + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\mathfrak{C}\mathfrak{C} + \frac{12.11.10.....5}{1.2.3.....8}\mathfrak{D}\mathfrak{B} + \frac{12.11.10....3}{1.2.3....10}\mathfrak{E}\mathfrak{A}.$$

§. 124.

Dann finden sich die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. auch in den Ausdrücken der Summen derjenigen Bruchreihen, welche unter folgender Formel

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.}$$

begriffen sind, so oft n eine gerade positive Zahl bedeutet. Wir haben die Summen dieser Reihen in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen (im ersten Buche im zehnten Capitel) durch die Potestäten der halben Peripherie π, wobey der Halbmesser $= 1$ gesetzt wurde, ausgedruckt, und daselbst trifft man die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. in den Coefficienten dieser Potestäten. Damit aber dies nicht zufälliger Weise statt zu finden scheine, sondern die Nothwendigkeit davon erhelle, wollen wir eben diese Summen auf einem besondern Wege suchen, wo das Gesetz derselben sich deutlich wird wahrnehmen lassen. Da wir oben (im zweyten Capitel §. 33.) aus der Einleitung gehabt haben,

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{1+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{ꝛc.}$$

so ist, wenn man je zwey und zwey Glieder vereinigt,

$\frac{\pi}{n}$

$$\frac{\pi}{n}\cot.\frac{m}{n}\pi = \frac{1}{m} - \frac{2m}{n^2-m^2} - \frac{2m}{4n^2-m^2} - \frac{2m}{9n^2-m^2} - \frac{2m}{16n^2-m^2} - \text{ꝛc.}$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2} + \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2mn}\cot.\frac{m}{n}\pi.$$

Nun wollen wir $n = 1$ und anstatt m den Buchstaben u setzen, so daß

$$\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{4-u^2} + \frac{1}{9-u^2} + \frac{1}{16-u^2} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u$$

werde. Löset man diese Brüche in Reihen auf, so bekömmt man

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{u^2}{2^4} + \frac{u^4}{2^6} + \frac{u^6}{2^8} + \frac{u^8}{2^{10}} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{3^6} + \frac{u^6}{3^8} + \frac{u^8}{3^{10}} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{16-u^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{u^2}{4^4} + \frac{u^4}{4^6} + \frac{u^6}{4^8} + \frac{u^8}{4^{10}} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

§. 125.

Setzt man daher

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.} = a$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.} = b$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{ꝛc.} = c$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{ꝛc.} = d$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{ꝛc.} = e$$

ꝛc.

so verwandelt sich die obige Reihe in folgende:

$$a + bu^2 + cu^4 + du^6 + eu^8 + fu^{10} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u.$$

Da nun §. 118. gefunden worden ist, daß bey den Buchstaben A, B, C, D, ꝛc., wenn man

$$s = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.}$$

setzt, $s = \frac{1}{2}\cot.\frac{1}{2}u$ wird: so bekommt man, wenn man

πu anstatt $\frac{1}{2}u$, oder $2\pi u$ anstatt u setzt,

$$\frac{1}{2}\cot.\pi u = \frac{1}{2\pi u} - A\pi u - 2^3 B\pi^3 u^3 - 2^5 C\pi^5 u^5 - 2^7 D\pi^7 u^7 - \text{ꝛc.}$$

und multiplicirt man durch $\frac{\pi}{u}$, so wird

$$\frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = \frac{1}{2uu} - 2A\pi^2 - 2^3 B\pi^4 u^2 - 2^5 C\pi^6 u^4 - \text{ꝛc.}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = 2A\pi^2 + 2^3 B\pi^4 u^2 + 2^5 C\pi^6 u^4 + 2^7 D\pi^8 u^6 + \text{ꝛc.}$$

Da wir nun so eben gefunden haben, daß

$$\frac{1}{2uu} - \frac{\pi}{2u}\cot.\pi u = a + bu^2 + cu^4 + du^6 + \text{ꝛc.}$$

ist, so muß auch nothwendiger Weise seyn

a =

$$\mathfrak{a} = 2A\pi^2 = \frac{2\alpha}{1.2.3}.\pi^2 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}.\pi^2$$

$$\mathfrak{b} = 2^3B\pi^4 = \frac{2^3\beta}{1.2.3.4.5}.\pi^4 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}.\pi^4$$

$$\mathfrak{c} = 2^5C\pi^6 = \frac{2^5\gamma}{1.2.3\ldots.7}.\pi^6 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots.6}.\pi^6$$

$$\mathfrak{d} = 2^7D\pi^8 = \frac{2^7\delta}{1.2.3\ldots9}.\pi^8 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2\ldots.8}.\pi^8$$

$$\mathfrak{e} = 2^9E\pi^{10} = \frac{2^9\varepsilon}{1.2.3\ldots.11}.\pi^{10} = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots.10}.\pi^{10}$$

$$\mathfrak{f} = 2^{11}F\pi^{12} = \frac{2^{11}\zeta}{1.2.3\ldots.13}.\pi^{12} = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots.12}.\pi^{12}$$

rc.

§. 126.

Auf diese leichte Art lassen sich nicht nur alle Reihen der reciproken Poteståten, welche der vorhergehende §. enthålt, schnell summiren, sondern es erhellet zugleich, wie ihre Summen aus den Werthen der Buchstaben α, β, γ, δ, ε, rc. oder auch aus den Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, rc. gefunden werden. Da wir also im 122sten § funfzehn von diesen Zahlen angegeben haben, so lassen sich daraus die Summen aller geraden Poteståten bis auf folgende und zwar selbige mit eingeschlossen erhalten:

$$1 + \frac{1}{2^{30}} + \frac{1}{3^{30}} + \frac{1}{4^{30}} + \frac{1}{5^{30}} + \frac{1}{6^{30}} + \text{rc.}$$

Es ist nemlich die Summe dieser Reihe

$$= \frac{2^{29}\varpi}{1.2.3\ldots.31}\pi^{30} = \frac{2^{29}\mathfrak{P}}{1.2.3\ldots.30}\pi^{30}$$

Will man diese Summen weiter fortsetzen, so ist solches durch die fernere Entwickelung der Buchstaben α, β, γ, rc. oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, rc. leicht.

§. 127.

Die Erfindung der Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. oder der daraus abgeleiteten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. verdanken wir vorzüglich der Entwickelung der Cotangente irgend eines Winkels in eine ohne Ende fortlaufende Reihe. Denn da

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u = \frac{1}{u} - Au - Bu^3 - Cu^5 - Du^7 - Eu^9 - \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + Du^8 + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u.$$

Wenn man also anstatt der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. die Werthe derselben substituirt, so findet man

$$\frac{\alpha u^2}{1.2.3} + \frac{\beta u^4}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^6}{1.2\ldots7} + \frac{\delta u^8}{1.2\ldots9} + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u,$$

und wenn man die Bernoullischen Zahlen braucht

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2\ldots8} + \text{ꝛc.} = 1 - \frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u.$$

Aus diesen Reihen lassen sich durch die Differenziation unzählige andere herleiten, und so eine Menge von Reihen summiren, in welchen jene merkwürdige Zahlen vorkommen.

§. 128.

Wir wollen die erste Gleichung nehmen und dieselbe durch u multipliciren, so daß

$$\frac{\alpha u^3}{1.2.3} + \frac{\beta u^5}{1.2\ldots5} + \frac{\gamma u^7}{1.2\ldots7} + \frac{\delta u^9}{1.2\ldots9} + \text{ꝛc.} = u - \frac{uu}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u$$

werde.

werde. Differenziirt man und dividirt darauf durch du, so bekommt man

$$\frac{\alpha u^2}{1.2} + \frac{\beta u^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma u^6}{1.2\ldots6} + \frac{\delta u^8}{1.2\ldots8} + \text{etc.} = 1 - u \cot.\tfrac{1}{2}u + \frac{uu}{4(\sin.\frac{1}{2}u)^2}$$

und, wenn man von neuem differenziirt,

$$\frac{\alpha u}{1} + \frac{\beta u^3}{1.2.3} + \frac{\gamma u^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.} = -\cot.\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{(\sin.\frac{1}{2}u)^2} - \frac{uu \cos.\frac{1}{2}u}{4(\sin.\frac{1}{2}u)^3}.$$

Wenn man hingegen die andere Gleichung differenziirt, so wird

$$\frac{\mathfrak{A}u}{1} + \frac{\mathfrak{B}u^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}u^5}{1.2\ldots5} + \frac{\mathfrak{D}u^7}{1.2\ldots7} = -\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u + \frac{u}{4(\sin.\frac{1}{2}u)^2}$$

Setzt man daher $u = \pi$, so wird, weil $\cot.\frac{1}{2}\pi = 0$, und $\sin.\frac{1}{2}u = 1$ ist,

$$1 = \frac{\alpha\pi^2}{1.2.3} + \frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots9} + \text{etc.}$$

$$1 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\alpha\pi^2}{1.2} + \frac{\beta\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\gamma\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\delta\pi^8}{1.2.3\ldots8} + \text{etc.}$$

$$\pi = \frac{\alpha\pi}{1} + \frac{\beta\pi^3}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^7}{1.2.3\ldots7} + \text{etc.}$$

oder

$$1 = \alpha + \frac{\beta\pi^2}{1.2.3} + \frac{\gamma\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\delta\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \text{etc.}$$

und zieht man hiervon die erste Gleichung ab, so bekommt man

$$\alpha = \frac{(\alpha-\beta)\pi^2}{1.2.3} + \frac{(\beta-\gamma)\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{(\gamma-\delta)\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \text{etc.}$$

Ferner

Ferner ist

$$1 = \frac{\mathfrak{A}\pi^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}\pi^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}\pi^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{\mathfrak{D}\pi^8}{1.2.3\ldots8} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\mathfrak{A}\pi}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^5}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^7}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$\frac{1}{4} = \frac{\mathfrak{A}}{1} + \frac{\mathfrak{B}\pi^2}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{C}\pi^4}{1.2.3.4.5} + \frac{\mathfrak{D}\pi^6}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.}$$

§. 129.

Aus der Tafel der Werthe der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. welche wir oben §. 121. mitgetheilt haben, erhellet, daß dieselben im Anfange abnehmen, dann aber wieder wachsen, und zwar ohne Ende. Es wird also der Mühe werth seyn zu untersuchen, in was für einem Verhältnisse diese Zahlen zu wachsen fortfahren, nachdem sie bereits eine sehr beträchtliche Größe erreicht haben. Es sey also φ irgend eine vom Anfange sehr weit entfernte Zahl aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. und ψ die unmittelbar darauf folgende. Da durch diese Zahlen die Summen der reciproken Potestäten bestimmt werden, so sey $2n$ der Exponent der Potestät, in dessen Summe sich φ befindet, also $2n + 2$ der Exponent derjenigen Potestät, wozu ψ gehört, und n schon eine sehr große Zahl. Dann hat man aus §. 125.

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{2n-1}\varphi}{1.2.3\ldots(2n+1)}\pi^{2n}$$

$$1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{4^{2n+2}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{2n+1}\psi}{1.2.3\ldots(2n+3)}\pi^{2n+2}$$

Dividirt man also diese Reihe durch jene, so findet man

$$\frac{1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \text{ꝛc.}}{1 + \frac{2}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \text{ꝛc.}} = \frac{4\psi}{(2n+2)(2n+3)}\,\frac{\pi^2}{\varphi}$$

Da aber n eine sehr große Zahl und beyde Reihen sehr nahe $= 1$ sind, so wird

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{4\pi^2} = \frac{nn}{\pi\pi}.$$

Nun zeigt n an, das wievielste Glied die Zahl φ von der ersten α angerechnet sey, und es wird sich daher die Zahl φ zu der folgenden ψ verhalten wie π^2 zu n^2, und dieses Verhältniß würde, wenn n eine unendlich große Zahl wäre, der Wahrheit vollkommen gemäß seyn. Da also $\pi\pi$ beynahe $= 10$ ist, so wird, wenn man $n = 100$ setzt, das hundertste Glied ohngefähr 1000mal kleiner als das folgende. Es bilden also die Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. so wie auch die Bernoullischen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. eine sehr divergirende Reihe, die selbst noch stärker anwächst als jede geometrische Reihe, die wachsend fortschreitet.

§. 130.

Hat man also die Werthe der Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. oder von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. gefunden: so läßt sich, wenn eine Reihe vorkommt, deren allgemeines Glied z eine Funktion seines Anzeigers x ist, das summirende Glied Sz auf folgende Art ausdrucken:

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{1}{6}\cdot\frac{dz}{1.2dx} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^3z}{1.2.3.4dx^3}$$

$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{d^5z}{1.2.3\ldots.6dx^5} - \frac{1}{30}\cdot\frac{d^7z}{1.2.3\ldots.8dx^7}$$

$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{d^9z}{1.2.3\ldots.10dx^9} - \frac{691}{2730}\cdot\frac{d^{11}z}{1.2.3\ldots.12dx^{11}}$$

$$+ \frac{7}{6}\cdot\frac{d^{13}z}{1.2.3\ldots.14dx^{13}} - \frac{3617}{510}\cdot\frac{d^{15}z}{1.2.3\ldots.16dx^{15}}$$

$$+ \frac{43867}{798}\cdot\frac{d^{17}z}{1.2.3\ldots.18dx^{17}} - \frac{174611}{330}\cdot\frac{d^{19}z}{1.2.3\ldots.20dx^{19}}$$

+

$$+ \frac{854513}{138} \cdot \frac{d^{21}z}{1.2.3\ldots22dx^{21}} - \frac{236364091}{2730} \cdot \frac{d^{23}z}{1.2.3\ldots24dx^{27}}$$
$$+ \frac{8553103}{6} \cdot \frac{d^{25}z}{1.2.3\ldots26dx^{25}} - \frac{23749461029}{870} \cdot \frac{d^{27}z}{1.2.3\ldots28\,dx^{27}}$$
$$+ \frac{8615841276005}{14322} \cdot \frac{d^{29}z}{1.2.3\ldots.30dx^{29}} - \text{ꝛc.}$$

Kennt man daher das Integral $\int z\,dx$ oder die Größe, deren Differenzial $= z\,dx$ ist, so findet man das summirende Glied vermittelst einer fortgesetzten Differenziation. Es muß aber dabey nicht aus der Acht gelassen werden, daß zu diesem Ausdrucke allemal eine beständige Größe von der Beschaffenheit kommen müsse, wobey die Summe $= 0$ wird, wenn x in Nichts übergeht.

§. 131.

Wenn also z eine ganze rationale Funktion von x ist, so läßt sich das summirende Glied, weil alsdann die Differenzialien endlich verschwinden, durch einen endlichen Ausdruck darstellen. Dies wollen wir durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Das summirende Glied folgender Reihe zu finden.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & & x \\ 1 & + & 9 & + & 25 & + & 49 & + & 81 & + & \ldots\ldots & + & (2x-1)^2 \end{array}$$

Da hier $z = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ ist, so wird

$$\int z\,dx = \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$$

denn hieraus erhält man durch die Differenziation

$$4xxdx - 4xdx + dx = zdx$$

Nun ist ferner

$$\frac{dz}{dx} = 8x - 4$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 8$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 0; \text{ rc.}$$

also das gesuchte summirende Glied =

$$\tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{3} \pm C;$$

und da die beständige Größe C so beschaffen seyn muß, daß dadurch die Glieder $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ verschwinden, so ist

$$S(2x-1)^2 = \tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x = \frac{x}{3}(2x-1)(2x+1)$$

Auf diese Art ist, wenn man $x = 4$ setzt, die Summe der 4 ersten Glieder

$$1 + 9 + 25 + 49 = \tfrac{4}{3}\cdot 7\cdot 9 = 84.$$

Zweytes Exempel.

Das summirende Glied folgender Reihe zu finden.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ 1 + & 27 + & 125 + & 343 + & \ldots\ldots & (2x-1)^3. \end{array}$$

Da

$$z = (2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

ist, so wird

$$\int z\,dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x;$$

$$\frac{dz}{dx} = 24x^2 - 24x + 6;$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = 48x - 24;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 48;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = 0; \text{ rc.}$$

Demnach

Demnach ist

$$
\begin{aligned}
S(2x-1)^3 = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 &- x \\
+ 4x^3 - 6x^2 &+ 3x - \tfrac{1}{2} \\
- 2x^2 &- 2x + \tfrac{1}{2} \\
&- \tfrac{1}{15}
\end{aligned}
$$

das ist

$$S(2x-1)^3 = 2x^4 - x^2 = x^2(2xx-1).$$

So ist z. B., wenn man $x = 4$ setzt,

$$1 + 27 + 125 + 343 = 16 \cdot 31 = 496.$$

§. 132.

Aus diesem allgemeinen Ausdrucke des summirenden Gliedes folgt sehr leicht dasjenige, welches wir im ersten Theile (im ersten Capitel, §. 29.) mitgetheilt haben, damals aber noch nicht beweisen konnten. Denn setzen wir

$z = x^n$; so ist

$$\int z\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \text{ und}$$

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$$

$$\frac{d^7z}{dx^7} = n(n-1) \;.\;.\;.\;.\;.\; (n-6)x^{n-7}$$

ꝛc.

und hieraus ergiebt sich folgendes summirende zu dem allgemeinen Gliede x^n gehörige Glied:

$$\int x^n =$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}x^{n+1} + \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}x^{n-1}\\
-\;&\frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n-3}\\
+\;&\frac{1}{42}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^{n-5}\\
-\;&\frac{1}{30}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-6)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;8}x^{n-7}\\
+\;&\frac{5}{66}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-8)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;10}x^{n-9}\\
-\;&\frac{691}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-10)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;12}x^{n-11}\\
+\;&\frac{7}{6}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-12)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;14}x^{n-13}\\
-\;&\frac{3617}{510}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-14)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;16}x^{n-15}\\
+\;&\frac{43867}{798}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-16)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;18}x^{n-17}\\
-\;&\frac{174611}{330}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-18)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;20}x^{n-19}\\
+\;&\frac{854513}{138}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-20)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;22}x^{n-21}\\
-\;&\frac{236364091}{2730}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-22)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;24}x^{n-23}\\
+\;&\frac{8553103}{6}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-24)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;26}x^{n-25}\\
-\;&\frac{23749461029}{870}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-26)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;28}x^{n-27}\\
+\;&\frac{8615841276005}{14322}\cdot\frac{n(n-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;(n-28)}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;30}x^{n-29}
\end{aligned}
$$

Dieser

Dieser Ausdruck unterscheidet sich nicht weiter von dem obigen, als daß wir hier die Bernoullischen Zahlen 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. gebraucht haben, dagegen wir uns oben der Zahlen α, β, γ, δ, ꝛc. bedienten, und die Uebereinstimmung ist offenbar. Hier haben wir also die summirenden Glieder aller Potestäten bis auf die dreyßigste, und zwar diese eingeschlossen, geben können, welches, wenn wir es auf eine andere Art hätten thun wollen, die weitläuftigsten und verdrießlichsten Rechnungen nöthig gemacht haben würde.

§. 133.

Wir haben schon oben §. 59. einen ähnlichen Ausdruck für das summirende Glied mitgetheilt, welcher ebenfalls nach den Differenzialien des allgemeinen Gliedes fortschreitet. Der Unterschied, wodurch es sich auszeichnet, bestand darin, daß dazu das Integral $\int z\,dx$ nicht nöthig war, und die Differenzialien des allgemeinen Gliedes durch gewisse Funktionen von x multiplicirt werden mußten. Wir wollen daher eben denselben Ausdruck noch auf eine andere Art suchen, welche der Natur der Reihen mehr angemessen ist, und woraus zugleich das Gesetz deutlicher erhellet, nach welchem die Coefficienten jener Differenzialien fortgehen. Es sey also das allgemeine Glied jener Reihe z irgend eine Funktion des Anzeigers x, das gesuchte summirende Glied $= s$. Da dieses eine solche Funktion von x ist, wie wir gesehen haben, daß es verschwindet wenn $x = 0$ gesetzt wird, so ist nach den von den Funktionen dieser Art oben erwiesenen Sätzen

$$s - \frac{x\,ds}{1\,dx} + \frac{x^2\,dds}{1.2\,dx^2} - \frac{x^3\,d^3s}{1.2.3\,dx^3} + \frac{x^4\,d^4s}{1.2.3\,dx^4} - \text{ꝛc.} = 0.$$

§. 134.

Da s die Summe aller Glieder der Reihe, vom ersten bis zum letzten z, in sich begreift: so ist klar, daß, wenn man in s anstatt x den um eins kleinern Ausdruck x — 1 setzt, die vorige Summe ihres letzten Gliedes beraubet werde. Es ist nemlich

$$s - z = s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und also

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Diese Gleichung giebt ein Mittel an die Hand, aus dem gegebenen summirenden Gliede s das allgemeine Glied zu finden, wobey wir uns nicht aufzuhalten brauchen. Verbindet man aber die gegenwärtige Gleichung auf eine geschickte Art mit derjenigen, welche wir im vorhergehenden §. gefunden haben: so lassen sich die Werthe von s durch x und z bestimmen. Wir wollen zu diesem Endzwecke

$$s - Az + \frac{Bdz}{dx} - \frac{Cddz}{dx^2} + \frac{Dd^3z}{dx^3} - \frac{Ed^4z}{dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

setzen, so daß A, B, C, D, ꝛc. die erforderlichen Coefficienten bedeuten, ohne zu bestimmen, ob sie beständige oder veränderliche Größen seyen. Denn da

$$z = \frac{ds}{dx} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

ist, so bekommt man, wenn man daraus die Werthe von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, ꝛc. in die obige Gleichung bringt,

$$
\begin{array}{rcl}
s & = & s \\
-Az & = & -\frac{Ads}{dx}+\frac{Adds}{2dx^2}-\frac{Ad^3s}{6dx^3}+\frac{Ad^4s}{24dx^4}-\frac{Ad^5s}{120dx^5}+ \text{ꝛc.} \\
+\frac{Bdz}{dx} & = & +\frac{Bdds}{dx^2}-\frac{Bd^3s}{2dx^3}+\frac{Bd^4s}{6dx^4}-\frac{Bd^5s}{24dx^4}+ \text{ꝛc.} \\
-\frac{Cddz}{dx^2} & = & -\frac{Cd^3s}{dx}+\frac{Cd^4s}{2dx^4}-\frac{Cd^5s}{6dx^5}+ \text{ꝛc.} \\
+\frac{Dd^3z}{dx^3} & = & +\frac{Dd^4s}{dx^4}-\frac{Dd^5s}{2dx^5}+ \text{ꝛc.} \\
-\frac{Ed^4z}{dx^4} & = & -\frac{Ed^5s}{dx^5}+ \text{ꝛc.} \\
 & \text{ꝛc.} &
\end{array}
$$

und diese Reihen zusammen genommen geben daher Null.

§. 135.

Da also nach §. 133.

$$0 = s-\frac{xds}{dx}+\frac{x^2dds}{2dx^2}-\frac{x^3d^3s}{6dx^3}+\frac{x^4d^4s}{24dx^4}-\frac{x^5d^5s}{120dx^5}+ \text{ꝛc.}$$

ist, so ergeben sich aus der Vergleichung dieser Reihe mit der vorhergehenden folgende Ausdrücke für die Buchstaben A, B, C, D, ꝛc.

$$
\begin{array}{l}
A = x \\
B = \frac{x^2}{2}-\frac{A}{2} \\
C = \frac{x^3}{6}-\frac{B}{2}-\frac{A}{6} \\
D = \frac{x^4}{24}-\frac{C}{2}-\frac{B}{6}-\frac{A}{24} \\
E = \frac{x^5}{120}-\frac{D}{2}-\frac{C}{6}-\frac{B}{24}-\frac{A}{120} \\
\qquad \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

Hat man daher die Werthe der Buchstaben A, B, C, D, ꝛc. gefunden, so läßt sich das summirende Glied $s = Sz$ aus dem allgemeinen Gliede z auf folgende Art bestimmen,

$$Sz = Az - \frac{Bdz}{dx} + \frac{Cddz}{dx^2} - \frac{Dd^3z}{dx^3} + \frac{Ed^4z}{dx^4} - \frac{Fd^5z}{dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 136.

Da aber

$$\begin{aligned}
A &= x \\
B &= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x \\
C &= \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{12}x \\
D &= \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{1}{24}x^2 \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

wird: so fällt in die Augen, daß diese Coefficienten dieselben sind, die wir oben §. 59. gehabt haben, und es ist daher auch jene Bestimmung des summirenden Gliedes mit der oben gefundenen einerley. Demnach ist

$$\begin{aligned}
A &= Sx^0 - S.1 \\
B &= \tfrac{1}{1}Sx^1 - \tfrac{1}{1}x \\
C &= \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2 \\
D &= \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3 \\
E &= \tfrac{1}{24}Sx^4 - \tfrac{1}{24}x^4 \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$Sz = xz - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man aber in z, dem allgemeinen Gliede, $x = 0$, so bekommt man das zu dem Anzeiger 0 gehörige Glied; und setzt man dasselbe $= a$, so wird

$$a = z - \frac{xdz}{dx} + \frac{x^2ddz}{2dx^2} - \frac{x^3d^3z}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

und also

$$\frac{xdz}{dx} - \frac{x^2ddz}{2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{6dx^3} - \frac{x^4d^4z}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = z - a.$$

Sub-

Substituirt man diesen Werth, so bekommt man

$$Sz = (x + 1)z - a - \frac{dz}{dx}Sx + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}Sx^3 + \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \text{rc.}$$

Kennt man also die Summen der Potestäten, so läßt sich hieraus aus jedem allgemeinen Gliede das ihm zukommende summirende Glied finden.

§. 137.

Da wir aber einen doppelten Ausdruck für das summirende Glied Sz, wenn z das allgemeine Glied ist, gefunden haben, und der eine das Integral $\int z\,dx$ enthält: so kann man nun durch die Vergleichung beyder Ausdrücke, wenn man sie einander gleich setzt, den Werth von $\int z\,dx$ durch eine Reihe darstellen. Denn da

$$\int z\,dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1.2dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \text{rc.}$$

$$=$$

$$(x+1)z - a - \frac{dz}{1dx}Sx + \frac{ddz}{1.2dx}Sx^2 - \frac{d^3z}{1.2.3dx^3}Sx^3 + \text{rc.}$$

ist: so wird

$$\int z\,dx =$$

$$(x+\tfrac{1}{2})z - a - \frac{dz}{dx}(Sx + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}) + \frac{ddz}{2dx^2}Sx^2 - \frac{d^3z}{6dx^3}(Sx^3 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{B})$$

$$+ \frac{d^4z}{24dx^4}Sx^4 - \frac{d^5z}{120dx^5}(Sx^5 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}) + \frac{d^6z}{720dx^6}Sx^6$$

$$- \frac{d^7z}{5040dx^7}(Sx^7 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}) + \text{rc.}$$

wo die Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, rc. die §. 122. stehenden Bernoullischen Zahlen bedeuten.

Es sey z. B. $z = xx$, so wird

$$a = 0;\quad \frac{dz}{dx} = 2x;\quad \text{und}\ \frac{ddz}{2dx^2} = 1.$$

Folglich ist

$$\int xxdx = (x + \tfrac{1}{2})xx - 2x\,\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}) + 1(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x)$$

oder

$$\int xxdx = \tfrac{1}{3}x^3.$$

Es giebt aber $\frac{1}{3}x^3$, wenn man differenzirt, $xxdx$.

§. 138.

Hier zeigt sich ein neuer Weg, die summirenden Glieder der Reihen der Potestäten zu finden. Denn da sich diese summirenden Glieder sehr leicht aus den vorhin angenommenen Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. zusammensetzen lassen, und jeder dieser Coefficienten aus den vorhergehenden entsteht: so wird, wenn man in den Formeln des 35sten §. anstatt jener Buchstaben die §. 136. gefundenen Werthe setzt,

$$Sx^1 - x = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x$$

$$Sx^2 - x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{2}(Sx - x)$$

$$Sx^3 - x^3 = \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}(Sx^2 - x^2) - \frac{3\cdot 2}{2\cdot 3}(Sx^1 - x^1)$$

$$Sx^4 - x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{4}{2}(Sx^3 - x^3) - \frac{4\cdot 3}{2\cdot 3}(Sx^2 - x^2) - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}(Sx - x)$$

ꝛc.

Hiernach lassen sich die Summen der höhern Potestäten aus den Summen der niedrigern finden.

§. 139.

Betrachtet man aber das Fortschreitungs-Gesetz der Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. welches §. 135 gefunden worden ist, genauer: so bemerkt man, daß dieselben eine wiederkehrende Reihe bilden. Denn entwickelt man den Bruch

$$\frac{x + \frac{1}{2}xxu + \frac{1}{6}x^3u^2 + \frac{1}{24}x^4u^3 + \frac{1}{120}x^5u^4 + \text{ꝛc.}}{1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 + \text{ꝛc.}}$$

nach den Potestäten von u, und setzt die daraus entspringende Reihe =

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + Fu^5 + \text{ꝛc.}$$

so wird, wie wir vorhin gefunden haben,

$$A = x;\quad B = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}A;\ \text{ꝛc.}$$

und hat man diese Reihe gefunden, so bekommt man daraus die summirenden Glieder der Potestäten-Reihen. Es geht aber der Bruch, aus dessen Entwickelung jene Reihe entspringt, in die Form $\frac{e^{xu} - 1}{e^u - 1}$ und wenn x eine ganze positive Zahl ist, in folgende über.

$$1 + e^u + e^{2u} + e^{3u} + \ldots\ldots + e^{(x-1)u}.$$

Da also

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
e^u &= 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} \\
e^{2u} &= 1 + \frac{2u}{1} + \frac{4u^2}{1.2} + \frac{8u^3}{1.2.3} + \frac{16u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} \\
e^{3u} &= 1 + \frac{3u}{1} + \frac{9u^2}{1.2} + \frac{27u^3}{1.2.3} + \frac{81u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.} \\
e^{(x-1)u} &= 1 + \frac{(x-1)u}{1} + \frac{(x-1)^2u^2}{1.2} + \frac{(x-1)^3u^3}{1.2.3} + \frac{(x-1)^4u^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

ist, so wird

$A = x$

$$A = x$$
$$B = S(x-1) = Sx - x$$
$$C = \tfrac{1}{2}S(x-1)^2 = \tfrac{1}{2}Sx^2 - \tfrac{1}{2}x^2$$
$$D = \tfrac{1}{6}S(x-1)^3 = \tfrac{1}{6}Sx^3 - \tfrac{1}{6}x^3$$

ꝛc.

Und hierdurch wird der Zusammenhang dieser Coefficienten mit den Summen der Potestäten aufs vollkommenste bestätiget und außer allem Zweifel gesetzt.

Sechstes Capitel.

Von der Summation der Progressionen durch ohne Ende fortlaufende Reihen.

§. 140.

Der allgemeine Ausdruck, welchen wir im vorhergehenden Capitel für das summirende Glied der Reihen, deren allgemeines oder zu dem Anzeiger x gehöriges Glied z ist, gefunden haben, nemlich

$$Sz = \int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A} dz}{1 \cdot 2 dx} - \frac{\mathfrak{B} d^3 z}{1.2\,3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 z}{1.2 \ldots 6 dx^3} - \text{rc.}$$

dient eigentlich zur Erfindung der Summen der Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, weil man in diesen Fällen endlich zu verschwindenden Differenzialien gelangt. Wenn hingegen z keine solche Funktion von x ist, so gehen die Differenzialien ohne Ende fort, und man erhält alsdenn eine unendliche Reihe, die die Summe der gegebenen Reihe bis und mit zu dem Gliede ausdruckt, dessen Anzeiger $= x$ ist. Die Summe der Reihe, wenn sie ohne Ende fortgesetzt wird, ergiebt sich also, wenn man $x = \infty$ annimmt, und man findet auf diese Art eine andere der vorigen gleiche ohne Ende fortlaufende Reihe.

§. 141.

Wenn man $x = 0$ setzt, so muß auch der Ausdruck, welcher die Summe darstellt, verschwinden, wie wir bereits angemerkt

gemerkt haben; und geschieht dieses nicht, so muß man eine solche beständige Größe zu der Summe hinzusetzen, oder von ihr wegnehmen, daß diese Bedingung erfüllt wird. Ist dieses geschehen, so bekommt man

wenn man setzt

$$\left.\begin{array}{ll} x = 1 & \text{das erste} \\ x = 2 & \text{das 1ste und 2te} \\ x = 3 & \text{das 1ste, 2te und 3te} \\ \text{ꝛc.} & \text{ꝛc.} \end{array}\right\} \text{Glied der Reihe.}$$

Weil also in diesen Fällen die Summe des ersten, der beyden ersten, der drey ersten Glieder u. s. w. bekannt sind, so ist solches auch der Werth der unendlichen Reihe, durch welche jene Summe ausgedruckt wird; und man sieht sich dadurch in den Stand gesetzt, eine unzählige Menge von Reihen zu summiren.

§. 142. a.

Da bey der Hinzufügung einer solchen beständigen Größe zu der Summe, daß diese verschwindet, wenn $x = 0$ wird, die wahre Summe auch allemal gefunden werden muß, wenn man für x andere Zahlen setzt: so ist klar, daß sich die wahre Summe ebenfalls allemal ergeben müsse, sobald eine solche beständige Größe hinzugesetzt worden ist, daß in irgend einem Falle die wahre Summe hervorgebracht wird. Fällt daher, wenn man $x = 0$ setzt, nicht in die Augen, was die Summe für einen Werth bekomme und was also dazu für eine beständige Größe gesetzt werden müsse: so kann man auch für x andere Zahlen setzen, und durch Hinzufügung einer beständigen Größe einen vollständigen Ausdruck für die Summe erhalten. Wie? wird durch das Folgende deutlich werden.

§. 142. b.

Wir wollen von folgender harmonischen Progression anfangen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x} = s.$$

Da das allgemeine Glied derselben $= \frac{1}{x}$ ist, so wird $z = \frac{1}{x}$, und das summirende Glied s wird auf folgende Art gefunden. Zuvörderst ist

$$\int z\,dx = \int \frac{dx}{x} = lx. \text{ Dann ferner}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}; \quad \frac{ddz}{2dx^2} = \frac{1}{x^3};$$

$$\frac{d^3z}{6dx^3} = -\frac{1}{x^4}; \quad \frac{d^4z}{24dx^4} = \frac{1}{x^5};$$

$$\frac{d^5z}{120dx^6} = -\frac{1}{x^6}; \text{ ꝛc.}$$

Hiernach ist also

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{ꝛc.}$$
$$+ C.$$

Diese hinzuzufügende beständige Größe C läßt sich aber aus dem Falle, wenn $x = 0$ ist, nicht bestimmen. Man setze also $x = 1$. Da alsdann $s = 1$ wird, so hat man

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{2} + \frac{\mathfrak{B}}{4} - \frac{\mathfrak{C}}{6} + \frac{\mathfrak{D}}{8} + C, \text{ und also}$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{ꝛc.}$$

Folglich ist das gesuchte summirende Glied

$$s = lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{ꝛc.}$$

§. 143.

Da die Bernoullischen Zahlen 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, ꝛc. eine divergirende Reihe bilden, so läßt sich hier der Werth der beständigen Größe nicht wirklich angeben. Wenn aber für x eine größere Zahl gesetzt, und die Summe eben so vieler Glieder wirklich gesucht wird, so findet man denselben auf eine leichte Art. Man setze zu dem Ende $x = 10$: so ist die Summe der zehn ersten Glieder =

$$2,9289682539682539\bar{6}8$$

und ihr muß der Ausdruck der Summe gleich seyn, wenn man darin $x = 10$ setzt. Dadurch bekommt man

$$l\,10 + \frac{1}{20} - \frac{\mathfrak{A}}{200} + \frac{\mathfrak{B}}{40000} - \frac{\mathfrak{C}}{6000000} + \frac{\mathfrak{D}}{800000000} - \text{ꝛc.}$$
$$+ C.$$

Setzt man also für $l\,10$ den hyperbolischen Logarithmen der Zahl 10, und statt 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc. die oben dafür gefundenen Werthe: so erhält man für die beständige Größe

$$C = 0,5772156649015325$$

und diese Zahl druckt daher die Summe der Reihe aus:

$$\frac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \frac{\mathfrak{E}}{10} - \text{ꝛc.}$$

§. 144.

Wenn für x keine sehr große Zahlen gesetzt werden, so findet man, weil alsdann die Summe der Reihe leicht unmittelbar gefunden werden kann, die Summe folgender Reihe:

$$\frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \text{ꝛc.} = s - lx - C.$$

Bedeutet aber x eine sehr große Zahl, so läßt sich die Summe dieser Reihe ebenfalls leicht finden, weil alsdann der Werth dieses Ausdrucks in Decimal-Brüchen gefunden wird. Nun ist zuvörderst klar, daß die Summe, wenn man die Reihe

ohne

ohne Ende fortlaufen läßt, unendlich groß seyn muß, indem wenn $x = \infty$ wird, auch lx ins Unendliche wächst. Um aber die Summe jeder Anzahl von Gliedern desto bequemer angeben zu können, wollen wir die Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ꝛc. in Decimal-Brüchen ausdrucken.

$$\mathfrak{A} = 0,1666666666666$$
$$\mathfrak{B} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{C} = 0,0238095238095$$
$$\mathfrak{D} = 0,0333333333333$$
$$\mathfrak{E} = 0,0757575757575$$
$$\mathfrak{F} = 0,2531135531135$$
$$\mathfrak{G} = 1,1666666666666$$
$$\mathfrak{H} = 7,0921568627451$$

ꝛc.

Es ist also

$$\frac{\mathfrak{A}}{2} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{4} = 0,0083333333333$$
$$\frac{\mathfrak{C}}{6} = 0,0039682539682$$
$$\frac{\mathfrak{D}}{8} = 0,0041666666666$$
$$\frac{\mathfrak{E}}{10} = 0,0075757575757$$
$$\frac{\mathfrak{F}}{12} = 0,0210927960928$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{14} = 0,0833333333333$$
$$\frac{\mathfrak{H}}{16} = 0,4432598039216$$

ꝛc.

Erstes Exempel.

Die Summe von tausend Gliedern der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \text{ꝛc.}$$

zu finden.

Man setze $x = 1000$. Da

$l10 = 2,30258509299404568840$ ist, so wird

$$\begin{array}{rl}
lx = & 6,9077552789821 \\
C = & 0,5772156649015 \\
\frac{1}{2x} = & 0,0005000000000 \\
\hline
 & 7,4849709438836 \\
\text{subtr. } \frac{\mathfrak{A}}{2xx} = & 0,0000000833333 \\
\hline
 & 7,4849708605503 \\
\text{add. } \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} = & 0,0000000000000 \\
\hline
\end{array}$$

so ist $7,4849708605503$ die gesuchte Summe, welche also noch nicht einmal $7\frac{1}{2}$ ausmacht.

Zweytes Exempel.

Die Summe von tausendmaltausend Gliedern der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ꝛc.}$$

zu finden.

Da $x = 1000000$ ist, so wird $lx = 6 . l10$; folglich

$$\begin{array}{rl}
lx = & 13,8155105579642 \\
C = & 0,5772156649015 \\
\frac{1}{2x} = & 0,0000005000000 \\
\hline
\end{array}$$

und $14,3927262228657$ = der gesuchten Summe.

§. 145.

§. 145.

Nimmt man also x groß genug an, so findet man die Summe schon in dem Logarithmen von x, wenn man dazu die beständige Größe C setzt, hinlänglich genau. Hieraus lassen sich vortrefliche Folgerungen ziehen. Bedeutet z. B. x eine sehr große Zahl, und setzt man

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \frac{1}{x} = s$$

und

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} + \dots \frac{1}{x+y} = t,$$

so wird, weil näherungsweise $s = lx + C$; und $t = l(x+y) + C$ ist

$$t - s = l(x+y) - lx = l\frac{x+y}{x}$$

und es läßt sich also dieser Logarithme näherungsweise durch eine aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehende harmonische Reihe ausdrucken, und zwar auf folgende Art:

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+y}.$$

Genauer findet man diesen Logarithmen, wenn man die obigen Summen s und t genauer nimmt. Da z. B.

$$s = lx + C + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12xx}, \text{ und}$$

$$t = l(x+y) + C + \frac{1}{2(x+y)} - \frac{1}{12(x+y)^2} \text{ ist:}$$

so wird

$$t - s = l\frac{x+y}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(x+y)} + \frac{1}{12xx} - \frac{1}{12(x+y)^2},$$

und also

$l\frac{x+y}{x}$

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+y)}$$
$$- \frac{1}{12xx} + \frac{1}{12(x+y)^2}.$$

Wenn aber x eine so große Zahl ist, daß die beyden letzten Glieder weggelassen werden können: so ist näherungsweise

$$l\frac{x+y}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \ldots + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}\right)$$

§. 126 b.

Aus dieser harmonischen Reihe läßt sich auch die Summe folgender Reihe herleiten, in welcher bloß die ungeraden Zahlen vorkommen:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2x+1}.$$

Denn da, wenn man alle Glieder nimmt,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+1}$$
$$=$$
$$l(2x+1) + C + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6(2x+1)^6}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

die Summe aber aller die geraden Zahlen enthaltenden Glieder

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots + \frac{1}{2x}$$

die Hälfte der obigen, oder

$$\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}lx + \frac{1}{4x} - \frac{\mathfrak{A}}{4x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{8x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{12x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{16x^8} - \text{ꝛc.}$$

ist, so bekommt man, wenn man diese Reihe von jener abzieht,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2x+1}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}C + l\frac{2x+1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{\mathfrak{A}}{2(2x+1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4(2x+1)^4} - \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{1}{4x} + \frac{\mathfrak{A}}{4x^2} - \frac{\mathfrak{B}}{8x^4} + \text{ꝛc.}$$

§. 146.

Man kann aber auch vermittelst eben desselben Ausdrucks die Summe einer jeden harmonischen Reihe finden. Es sey nemlich

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \frac{1}{4m+n} + \ldots + \frac{1}{mx+n} = s.$$

Da das allgemeine Glied $z = \frac{1}{mx+n}$ ist, so wird

$$\int z\,dx = \frac{1}{m}l(mx+n); \quad \frac{dz}{dx} = \frac{m}{(mx+n)^2};$$

$$\frac{ddz}{2dx^2} = \frac{mm}{(mx+n)^3}; \quad \frac{d^3z}{6dx^3} = \frac{m^3}{(mx+n)^4};$$

$$\frac{d^4z}{24dx^4} = \frac{m^4}{(mx+n)^5}; \quad \frac{d^5z}{120dx^5} = \frac{m^5}{(mx+n)^6}; \text{ ꝛc.}$$

Also wird

$$s = D + \frac{1}{m}l(mx+n) + \frac{1}{2(mx+n)} - \frac{\mathfrak{A}m}{2(mx+n)^2} + \frac{\mathfrak{B}m^3}{2(mx+n)^4}$$

$$- \frac{\mathfrak{C}m^5}{6(mx+n)^6} + \frac{\mathfrak{D}m^7}{8(mx+n)^8} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man demnach $x = 0$, so wird die hinzuzusetzende beständige Größe

$$D = -\frac{1}{m}ln - \frac{1}{2n} + \frac{\mathfrak{A}m}{2n^2} - \frac{\mathfrak{B}m^3}{4n^4} + \frac{\mathfrak{C}m^5}{6n^6} - \text{ꝛc.}$$

§. 147.

Wird hingegen $n = 0$, so bekommt man, da

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m} + \frac{1}{4m} + \ldots + \frac{1}{mx}$$
$$=$$
$$\frac{1}{m}C + \frac{1}{m}lx + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2mx^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4mx^4} - \text{etc.}$$

hingegen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{mx}$$
$$=$$
$$C + lmx + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \text{etc.}$$

ist, wenn man von dieser Reihe jene m mal genommen abzieht, so daß diese Reihe sich ergiebt,

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{3m} + \ldots + \frac{1}{mx}$$
$$\qquad - \frac{m}{m} \qquad\quad - \frac{m}{2m} \qquad\quad - \frac{m}{3m} \qquad\quad - \frac{m}{mx}$$

die Summe

$$lm + \frac{1}{2mx} - \frac{\mathfrak{A}}{2m^2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4m^4x^4} - \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{2x} + \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} - \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} + \text{etc.}$$

und setzt man $x = \infty$, so wird dieselbe $= lm$. Schreibt man also für m nach und nach die Zahlen 2, 3, 4. etc. so wird

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \text{etc.}$$
$$l3 = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} \text{ etc.}$$
$$l4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} - \text{etc.}$$
$$l5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{10} \text{ etc.}$$

etc.

§. 148.

Nach der Betrachtung dieser harmonischen Reihe wollen wir uns zur Untersuchung der reciproken Reihe der Quadrate wenden, und

$$s = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{xx}$$

setzen. Da das allgemeine Glied dieser Reihe $z = \frac{1}{xx}$ ist, so ist $\int z\,dx = -\frac{1}{x}$, und die Differenzialien von z

$$\frac{dz}{2dx} = -\frac{1}{x^3};\ \frac{ddz}{2.3dx^2} = \frac{1}{x^4};\ \frac{d^3z}{2.3.4dx^3} = -\frac{1}{x^5};\ \text{ꝛc.}$$

und also die Summe

$$s = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{2xx} - \frac{\mathfrak{A}}{x^3} + \frac{\mathfrak{B}}{x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{x^7} + \frac{\mathfrak{D}}{x^9} - \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} + \text{ꝛc.}$$

wo die beständige Größe C aus einem Falle, in welchem die Summe bekannt ist, bestimmt werden muß. Wir wollen also $x = 1$ setzen. Da alsdenn $s = 1$ wird, so ist

$$C = 1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{ꝛc.}$$

allein diese Reihe zeigt den Werth von C nicht, weil sie in einem hohen Grade divergirt. Setzt man indeß dieselbe ohne Ende fort, so ist aus dem Obigen bekannt, daß ihre Summe $= \frac{\pi\pi}{6}$ ist, und macht man also $x = \infty$, und setzt $s = \frac{\pi\pi}{6}$, so wird $C = \frac{\pi\pi}{6}$, weil alsdenn alle übrige Glieder verschwinden. Hiernach wird folglich

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6}.$$

§. 149.

Wenn die Summe dieser Reihe nicht bekannt gewesen wäre, so würde man den Werth der beständigen Größe C

aus irgend einem andern Falle, in welchem die Summe wirklich gefunden worden wäre, bestimmen müssen. In dieser Absicht wollen wir $x = 10$ setzen und zehn Glieder wirklich addiren. Dann findet man

$$s = 1,549767731166540690, \text{ ferner ist}$$

$$\text{add. } \frac{1}{x} = 0,1$$

$$\text{subtr. } \frac{1}{2xx} = 0,005$$

$$1,644767731166540690$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{A}}{x^3} = 0,000166666666666666$$

$$1,644934397833207356$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{B}}{x^5} = 0,000000333333333333$$

$$1,644934064499874023$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{C}}{x^7} = 0,000000002380952381$$

$$1,644934066880826404$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{D}}{x^9} = 0,000000000033333333$$

$$1,644934066847493071$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{E}}{x^{11}} = 0,000000000000757575$$

$$1,644934066848250646$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{F}}{x^{13}} = 0,000000000000025311$$

$$1,644934066848225335$$

$$\text{add. } \frac{\mathfrak{G}}{x^{15}} = 0,000000000000001166$$

$$\text{subtr. } \frac{\mathfrak{H}}{x^{17}} = \quad 71$$

$$1,644934066848226430 = C.$$

Diese

Diese Zahl ist zugleich der Werth des Ausdrucks $\frac{\pi\pi}{6}$, wie man aus dem bekannten Werthe von π durch die Rechnung finden kann. Hieraus erhellet auch, daß die Reihe 𝔄, 𝔅, ℭ ꝛc., ob sie gleich eine divergirende Reihe ist, gleichwohl eine wahre Summe habe.

§. 150.

Nun sey $z = \frac{1}{x^3}$, und

$$s = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{x^3}$$

Da

$$\int z dx = -\frac{1}{2xx};\ \frac{dz}{1.2.3dx} = -\frac{1}{2x^4};\ \frac{ddz}{1.2.3.4dx^2} = \frac{1}{2x^5};$$

$$\frac{d^3z}{1.2\dots5dx^5} = -\frac{1}{2x^6};\ \frac{d^5z}{1.2\dots7dx^5} = -\frac{1}{2x^8};\ \text{ꝛc.}$$

ist: so wird

$$s = C - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} + \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} - \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} + \text{ꝛc.}$$

und, da $s = 1$ wird, wenn man $x = 1$ setzt

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\mathfrak{A} - \tfrac{5}{2}\mathfrak{B} + \tfrac{7}{2}\mathfrak{C} - \tfrac{9}{2}\mathfrak{D} + \text{ꝛc.}$$

welcher Werth von C zugleich den Werth der gegebenen Reihe ausdruckt, wenn man sie ohne Ende fortlaufen läßt. Da aber die Summen der ungeraden Potestäten nicht so bekannt sind, als die der geraden, so muß jener Werth von C aus der gefundenen Summe einiger Glieder bestimmt werden. Es sey also $x = 10$, so hat man

$$C = s + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} - \frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} + \frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} - \text{ꝛc.}$$

Um

Um die Rechnung zu erleichtern, mache man

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2} = 0{,}250000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2} = 0{,}083333333333$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2} = 0{,}083333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2} = 0{,}150000000000$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2} = 0{,}416666666666$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2} = 1{,}645238095238$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2} = 8{,}750000000000$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2} = 60{,}283333333333$$

ꝛc.

Hiernach werden die zu s zu addirenden Glieder:

$$\frac{1}{2xx} = 0{,}005000000000000000$$

$$\frac{3\mathfrak{A}}{2x^4} = 0{,}000025000000000000$$

$$\frac{7\mathfrak{C}}{2x^8} = 0{,}000000000833333333$$

$$\frac{11\mathfrak{E}}{2x^{12}} = 0{,}000000000000416666$$

$$\frac{15\mathfrak{G}}{2x^{16}} = 0{,}000000000000000875$$

$$\overline{0{,}005025000833750875}$$

Die

Die davon zu subtrahirenden Glieder hingegen

$$\frac{1}{2x^3} = 0,0005000000000000000$$

$$\frac{5\mathfrak{B}}{2x^6} = 0,0000008333333333$$

$$\frac{9\mathfrak{D}}{2x^{10}} = 0,0000000000015000000$$

$$\frac{13\mathfrak{F}}{2x^{14}} = 0,0000000000000016452$$

$$\frac{17\mathfrak{H}}{2x^{18}} = 0,00000000000000000060$$

$$\begin{array}{rcl} & & 0,0005000833348349645 \\ \text{von} & & 0,0050250008333750875 \\ \hline & & 0,004524917485401030 \\ s & = & 1,197531985674193251 \\ \hline C & = & 1,202056903159594281 \end{array}$$

§. 132.

Wenn man auf diese Art weiter fortgeht, so findet man die Summe aller reciproken Potestäten-Reihen in Decimal-Brüchen ausgedruckt:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.} = 1,6449340668482264 = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{ꝛc.} = 1,2020569031595942$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.} = 1,0823232337111381 = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{ꝛc.} = 1,0369277551068632$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{ꝛc.} = 1,0173430619844491 = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{ꝛc.} = 1,0083492773866018$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{ꝛc.} = 1,0040773561979443 = \frac{2^7\mathfrak{D}}{1.2\ldots8}\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{ꝛc.} = 1,0020083928260822$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \text{ꝛc.} = 1,0009945751278180 = \frac{2^9\mathfrak{E}}{1.2\ldots10}\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{4^{11}} + \text{ꝛc.} = 1,0004941886041094$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \text{ꝛc.} = 1,0002460865533080 = \frac{2^{11}\mathfrak{F}}{1.2\ldots12}\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \frac{1}{4^{13}} + \text{ꝛc.} = 1,0001227233475857$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \text{ꝛc.} = 1,0000612481350587 = \frac{2^{13}\mathfrak{G}}{1.2\ldots14}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \frac{1}{4^{15}} + \text{ꝛc.} = 1,0000305882363070$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \text{ꝛc.} = 1,0000152822594086 = \frac{2^{15}\mathfrak{H}}{1.2\ldots16}\pi^{16}$$

ꝛc.

§. 152.

Umgekehrt lassen sich hieraus die Summen der unendlichen Reihen, welche aus den Bernoullischen Zahlen bestehen, darstellen. Denn es ist

$$1 + 0 - \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \text{ꝛc.} = 0,5772\,\text{ꝛc.}$$

$$1 + 1 - \tfrac{1}{2} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \text{ꝛc.} = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2$$

$$1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \frac{3\mathfrak{A}}{2} - \frac{5\mathfrak{B}}{2} + \frac{7\mathfrak{C}}{2} - \frac{9\mathfrak{D}}{2} + \text{ꝛc.} = 1,2020\,\text{ꝛc.}$$

$$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \frac{3.4\mathfrak{A}}{2.3} - \frac{5.6\mathfrak{B}}{2.3} + \frac{9.10\mathfrak{D}}{2.3} - \text{ꝛc.} = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\pi^4$$

$$1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \frac{3.4.5.\mathfrak{A}}{2.3.4} - \frac{5.6.7.\mathfrak{B}}{2.3.4} + \frac{7.8.9.\mathfrak{C}}{2.3.4} - \text{ꝛc.} = 1,0369\,\text{ꝛc.}$$

$$1 + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} + \frac{3.4.5.6.\mathfrak{A}}{2.3.4.5} - \frac{5.6.7.8.\mathfrak{B}}{2.3.4.5} + \frac{7.8.9.10.\mathfrak{C}}{2.3.4.5} - \text{ꝛc.} = \frac{2^5\mathfrak{C}}{1.2\ldots6}\pi^6$$

ꝛc.

Es lassen sich also diese Reihen abwechselnd vermittelst der Quadratur des Kreises summiren; aber von was für einer transcendenten Größe die übrigen abhangen, ist noch unbekannt, denn sie lassen sich nicht auf Potestäten von π mit ungeraden Exponenten bringen, so daß die Coefficienten rationale Zahlen wären. Damit indeß näherungsweise erkannt werden möge, wie die Coefficienten der ungeraden Potestäten von π beschaffen seyn werden, setze ich folgende Tabelle her:

1 +

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{rc. ohne Ende} = \frac{\pi}{0,0000} = \infty$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6,000} \quad \text{genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^3}{25,79436} \quad \text{näherungsw.}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^4}{90,0000} \quad \text{genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^5}{295,1215} \quad \text{näherungsw.}$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^6}{945,000} \quad \text{genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^7}{2995,286} \quad \text{näherungsw.}$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^8}{9450,000} \quad \text{genau}$$

$$1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{\pi^9}{29749,35} \quad \text{näherungsw.}$$

rc.

§. 153.

Hieraus läßt sich eine Methode herleiten, die Reihe der Bernoullischen Zahlen

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A,	B,	C,	D,	E,	F,	G,	H,	J,	rc.

ihrer anscheinenden großen Irregularität ungeachtet, zu interpoliren, oder zwischen jeden zweyen Gliedern das mittlere zu finden. Denn setzt man das zwischen dem ersten A und dem zweyten B liegende oder zu dem Anzeiger 1½ gehörige Glied = p: so ist

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{rc.} = \frac{2^2 p}{1.2.3}\pi^3$$

und

und also

$$p = \frac{3}{2\pi^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \text{ꝛc.}\right) = 0{,}05815227.$$

Auf ähnliche Art wird, wenn man das zwischen B und C liegende oder zu dem Anzeiger $2\frac{1}{2}$ gehörige Glied q setzt, da

$$1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{ꝛc.} = \frac{24q}{1.2.3.4.5}\pi^5$$

ist,

$$q = \frac{15}{2\pi^5}\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \text{ꝛc.}\right) = 0{,}02541327.$$

Wenn daher die Summen der Reihen, in welchen die Exponenten der Potestäten ungerade Zahlen sind, gefunden werden könnten: so ließe sich die Reihe der Bernoullischen Zahlen ebenfalls interpoliren.

§. 154.

Nunmehr sey $z = \frac{1}{nn + xx}$, und die Summe folgender Reihe zu suchen:

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \ldots\ldots + \frac{1}{nn+xx}.$$

Da $\int z\,dx = \int \frac{dx}{nn+xx}$ ist, so wird $\int z\,dx = \frac{1}{n}\text{Atang.}\frac{x}{n}$.

Man setze $\text{A cot.}\frac{x}{n} = u$; so wird $\int z\,dx = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$;

$\frac{x}{n} = \cot. u = \frac{\cos. u}{\sin. u}$; $\frac{nn+xx}{nn} = \frac{1}{\sin. u^2}$; $z = \frac{\sin. u^2}{nn}$;

und $\frac{dx}{n} = -\frac{du}{\sin. u^2}$ woher denn $du = -\frac{dx.\sin. u^2}{n}$.

Hiernach findet man die Differenzialien von z folgendermaßen:

$$dz = \frac{2\,du\,\sin.u\,.\,\cos.u}{nn} = -\frac{dx\,\sin.u^2\,.\,\sin.2u}{n^3}$$

und

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\sin.u^2\,.\,\sin.2u}{n^3}$$

$$\frac{ddz}{2\,dx} = -\frac{du(\sin u\,.\,\cos.u\,.\,\sin.2u + \sin.u^2\,.\,\cos.2u)}{n^3} = \frac{dx\,\sin.u^3\,.\,\sin.3u}{n^4}$$

und

$$\frac{ddz}{2\,dx^2} = \frac{\sin.u^3\,.\,\sin.3u}{n^4}.$$

Auf ähnliche Art ist, wie wir bereits oben für eben den Fall gefunden haben,

$$\frac{d^3z}{2.3\,dx^3} = -\frac{\sin.u^4\,.\,\sin.4u}{n^5};\quad \frac{d^4z}{2.3.4\,dx^4} = \frac{\sin.u^5\,.\,\sin.5u}{n^6}\ \text{rc.}$$

und daraus findet man die gesuchte Summe

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} + \frac{\sin.u\,.\,\sin.u}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2}\,.\,\frac{\sin.u^2\,.\,\sin.2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4}\,.\,\frac{\sin.u^4\,.\,\sin 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6}\,.\,\frac{\sin.u^6\,.\,\sin.6u}{n^7} + \frac{\mathfrak{D}}{8}\,.\,\frac{\sin u^8\,.\,\sin 8u}{n^9}$$
$$- \text{rc.} + C.$$

Wenn man, um diese Constante zu bestimmen $x = 0$ setzt, damit $s = 0$ werde, so wird $\cot.u = 0$, und also $u = 90°$; folglich $\sin.u = 1$; $\sin.2u = 0$; $\sin.4u = 0$; $\sin.6u = 0$, rc., und es scheint also $0 = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2nn} + C$, folglich $C = -\frac{1}{2nn}$ zu seyn. Allein es ist hier zu bemerken, daß des Verschwindens der übrigen Glieder ohnerachtet die Summe derselben, da die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, rc. ohne Ende wachsen, eine endliche Größe seyn kann.

§. 155.

§. 155.

Wir wollen daher, um diese beständige Größe gehörig zu bestimmen, $x = \infty$ setzen, weil wir die Summe jener Reihe, wenn sie ohne Ende fortläuft, bereits in der Einleitung bestimmt und gezeigt haben, daß sie $= -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$ sey. Setzt man aber $x = \infty$, so wird $u = 0$, also $\sin. u = 0$ und zugleich verschwinden die Sinus der vielfachen Bogen. Weil aber die Potestäten des Sinus u in dieser Reihe wachsen, so kann die Divergenz derselben das Verschwinden ihres Werthes nicht verhindern. Es wird demnach $s = \frac{\pi}{2n} + C$, und also

$$\frac{\pi}{2n} + C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}, \text{ und}$$

$$C = -\frac{1}{2nn} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}.$$

Folglich ist die gesuchte Summe

$$s = \frac{\pi}{2n} - \frac{u}{n} - \frac{\sin. u^2}{2nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2} \cdot \frac{\sin. u^2 \cdot \sin. 2u}{n^3} + \frac{\mathfrak{B}}{4} \cdot \frac{\sin. u^4 . \sin. 4u}{n^5} - \frac{\mathfrak{C}}{6} \cdot \frac{\sin. u^6 . \sin. 6u}{n^7} + \text{2c.}$$

$$+ \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}.$$

Ist n eine nur einigermaßen große Zahl, so wird das letzte Glied $\frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$ so klein, daß man dasselbe aus der Acht lassen kann.

§. 156.

Setzt man $x = n$, so daß

$$s = \frac{1}{nn+1} + \frac{1}{nn+4} + \frac{1}{nn+9} + \ldots\ldots + \frac{1}{nn+nn}$$

wird: so ist $\cot. u = 1$, und $u = 45° = \frac{\pi}{4}$. Hieraus ergiebt sich $\sin. u = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin. 2u = 1$; $\sin. 4u = 0$; $\sin. 6u = -1$; $\sin. 8u = 0$; $\sin. 10u = 1$; rc.

Daher ist

$$s = \frac{\pi}{4n} - \frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} - \frac{\mathfrak{A}}{2.2n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{6.2^3n^7} - \frac{\mathfrak{E}}{10.2^5n^{11}}$$
$$+ \frac{\mathfrak{G}}{14.2^7n^{15}} - \text{rc.} + \frac{\pi}{n(e^{2n\pi}-1)}$$

und in dieser Reihe kommen die Bernoullischen Zahlen nur eine um die andere vor. Wenn also der Werth von s schon durch wirklich angestellte Rechnung gefunden worden ist: so läßt sich daraus π bestimmen, indem

$$\pi = 4ns + \frac{1}{n} + \frac{\mathfrak{A}}{1.n^2} - \frac{\mathfrak{C}}{3.2^2n^6} + \frac{\mathfrak{E}}{5.2^4n^{10}} -$$
$$\frac{\mathfrak{G}}{7.2^6n^{14}} + \text{rc.} - \frac{\pi}{e^{2n\pi}-1}.$$

Denn ob sich gleich π in dem letzten Gliede befindet, so ist dieses Glied doch so klein, daß es die Bestimmung von π durch die Näherung nicht verhindert.

Exempel.

Es sey $n = 5$; so ist

$$s = \frac{1}{26} + \frac{1}{29} + \frac{1}{34} + \frac{1}{41} + \frac{1}{50}$$

und addirt man diese Glieder wirklich, so bekommt man

s =

$$s = 0{,}1467463056905494$$

Daher werden jene Glieder

$$4ns = 2{,}9349261138109898$$

$$\frac{1}{n} = 0{,}2$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{nn} = 0{,}0066666666666666$$

$$3{,}1415927804776565\overline{4}$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{3 \cdot 2^2 n^6} = 0{,}0000001269841269 8$$

$$3{,}1415926534935295 6$$

$$\frac{\mathfrak{E}}{5 \cdot 2^4 n^{10}} = 0{,}0000000000969696 9$$

$$3{,}1415926535904992 5$$

$$\frac{\mathfrak{G}}{7 \cdot 2^6 n^{14}} = 0{,}0000000000004266 6$$

$$3{,}1415926535900725 9$$

$$\frac{\mathfrak{J}}{9 \cdot 2^8 n^{18}} = 625$$

$$3{,}1415926535900788 4$$

Dieser Werth kommt der Wahrheit schon so nahe, daß es zu bewundern ist, wie man ihn durch eine so leichte Rechnung hat finden können. Es ist indeß derselbe etwas zu groß, weil davon $\frac{4\pi}{e^{2n\pi} - 1}$ abgezogen werden muß. Man kann aber den Werth von $\frac{4\pi}{e^{2n\pi} - 1}$, sobald π näherungsweise gefunden worden, ebenfalls bestimmen, und zwar vermittelst der Logarithmen auf folgende Art:

Da $\pi l e = 1{,}3643763538$ ist

so wird $l e^{2n\pi} = 10 \pi l e = 13{,}6437635$

Da nun $\frac{4\pi}{e^{2n\pi}-1} = \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} + \frac{4\pi}{e^{4n\pi}} +$ rc. ist, so fällt in die Augen, daß wir zu unserer Rechnung bloß das erste Glied brauchen. Vermehren wir also die Characteristik um die Zahl 17, weil wir so viel Decimalzifern haben, so wird

$$\begin{array}{rr}
l\pi = & 17,4971498 \\
l4 = & 0,6020600 \\
\hline
 & 18,0992098 \\
\text{subtr, } le^{2n\pi} = & 13,6437635 \\
\hline
 & 4,4554463
\end{array}$$

$$\text{Also } \frac{4\pi}{e^{2n\pi}} = \qquad 28539 \text{ subtr.}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{von} & 3,14159265359007884 \text{ so ist} \\
\hline
\pi = & 3,14159265358979345
\end{array}$$

Dieser Ausdruck weicht erst in der vorletzten Zifer von der Wahrheit ab, und dies deswegen, weil noch das Glied $\frac{\mathfrak{L}}{12.2^{10}n^{22}} = 22$ hätte müssen abgezogen werden. Geschieht dies, so bleibt selbst in der letzten Zifer kein Fehler. Uebrigens erhellet, daß man, wenn n größer als 10 angenommen worden wäre, die Peripherie π sehr leicht bis auf 25 und mehr Zifern hätte finden können.

§. 157.

Nun wollen wir für z transcendente Funktionen setzen, und $z = lx$ nehmen, so daß l hyperbolische Logarithmen anzeige, indem die gemeinen leicht darauf zurückgeführt werden. Es sey also

$$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + lx.$$

Da $z = lx$ ist, so wird $\int z\,dx = x\,lx - x$, weil das Differenzial hiervon $dx\,lx$ ist. Dann ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x};\ \frac{ddz}{dx^2} = -\frac{1}{x^2};\ \frac{d^3z}{1.2dx^3} = \frac{1}{x^3};\ \frac{d^5z}{1.2.3.4dx^5} = \frac{1}{x^5};$$

2c.

und folglich

$$s = xlx - x + \tfrac{1}{2}x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7} + \text{2c.}$$
$$+ C.$$

Für diese beständige Größe C aber findet man, wenn man $x = 1$ setzt, weil dann $s = l1 = 0$ wird,

$$C = 1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \text{2c.}$$

eine Reihe, die wegen ihrer großen Divergenz ganz untauglich ist, den Werth von C auch nur näherungsweise zu bestimmen.

§. 158.

Es läßt sich indeß derselbe nicht bloß näherungsweise, sondern selbst genau erhalten, wenn man den für π von Wallis erfundenen, und in der Einleitung (Th. 1. Cap. 5. §. 286. mitgetheilten Ausdruck braucht. Dieser Ausdruck ist:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12\ \text{2c.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11}$$

Denn nimmt man die Logarithmen, so bekommt man daraus

$$l\pi - l2 = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 + 2l10 + \text{2c.}$$
$$- l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 - 2l9 - 2l11 - \text{2c.}$$

und setzt man in der angenommenen Reihe $x = \infty$, so wird, da

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + lx = C + (x + \tfrac{1}{2})lx - x \text{ ist,}$$
$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + l2x = C + (2x + \tfrac{1}{2})l2x - 2x, \text{ und}$$
$$l2 + l4 + l6 + l8 + \ldots + l2x = C + (x + \tfrac{1}{2})lx + xl2 - x$$

und daher

$$l1 + l3 + l5 + l7 + \ldots + l(2x - 1) = xlx + (x + \tfrac{1}{2})l2 - x.$$

Da also

$$l\frac{\pi}{2} = 2l2 + 2l4 + 2l6 + \ldots + 2l2x - l2x$$
$$- 2l1 - 2l3 - 2l5 - \ldots - 2l(2x - 1)$$

ist, so wird, wenn man $x = \infty$ setzt,

$$l\frac{\pi}{2} = 2C + (2x + 1)lx + 2xl2 - 2x - l2 - lx$$
$$- 2xlx - (2x + 1)l2 + 2x$$

und also

$$l\frac{\pi}{2} = 2C - 2l2; \text{ folglich } 2C = l2\pi, \text{ und}$$
$$C = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

Auf diese Art findet man in Decimal-Brüchen

$$C = 0{,}9189385332046727417803297$$

und zugleich die Summe folgender Reihe

$$1 - \frac{\mathfrak{A}}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}}{3.4} - \frac{\mathfrak{C}}{5.6} + \frac{\mathfrak{D}}{7.8} - \frac{\mathfrak{E}}{9.10} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2}l2\pi.$$

§. 159.

Nachdem man so die beständige Größe $C = \frac{1}{2}l2\pi$ kennen gelernt hat, kann man auch die Summe jeder Menge von Logarithmen aus der Reihe $l1 + l2 + l3 +$ etc. angeben. Denn setzt man

$$s = l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots + lx$$

so wird

$$s = \tfrac{1}{2}l2\pi + (x + \tfrac{1}{2})lx - x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6x^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8x^7}$$
$$+ \text{etc.}$$

wenn nemlich die Logarithmen hyperbolische sind. Ist aber von gemeinen Logarithmen die Rede, so muß man auch in den Gliedern $\frac{1}{2}l2\pi + (x + \frac{1}{2})lx$ für $l2\pi$ und lx die gemeinen Logarithmen nehmen, und die übrigen Glieder der Reihe

$- x + \frac{\mathfrak{A}}{1.2x} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4x^3} +$ ꝛc. mit 0,434294481903251827 $= n$ multipliciren. In diesem Falle hat man für die gemeinen Logarithmen

$$l\pi = 0{,}497149872694133854351268$$
$$l2 = 0{,}301029995663981195213738$$
$$l2\pi = 0{,}798179868358115049565006$$
$$\tfrac{1}{2}l2\pi = 0{,}399089934179057524782503$$

Exempel.

Die Summe der ersten tausend gemeinen Logarithmen zu finden.

$$s = l1 + l2 + l3 + \ldots\ldots + l1000.$$

Es ist also $x = 1000$, und $lx = 3{,}000000000000$

und daher wird $xlx = 3000{,}000000000000$

$\tfrac{1}{2}lx = 1{,}500000000000$

$\tfrac{1}{2}l2\pi = 0{,}3990899341790$

$3001{,}8990899341790$

subtr. $nx = 434{,}2944819032518$

$2567{,}6046080309272$

Dann ist $\frac{n\mathfrak{A}}{1.2x} = 0{,}0000361912068$

subtr. $\frac{n\mathfrak{B}}{3.4x^3} = 0{,}0000000000012$

$0{,}0000361912056$

add. $2567{,}6046080309272$

die gesuchte Summe $s = 2567{,}6046442221328$

Da also s der Logarithme eines Produkts von tausend Zahlen $1.2.3\ldots1000$ ist, so erhellet hieraus, daß dieses Produkt, wenn man es wirklich suchte, aus 2568 Zifern bestehen, und zu den Anfangs-Zifern diese 4023872 haben würde.

§. 160.

Vermittelst dieser Summation der Logarithmen lassen sich daher die Produkte aus jeder Anzahl von Faktoren, die in der Ordnung der natürlichen Zahlen fortschreiten, näherungsweise angeben. Hieher gehört vorzüglich die Aufgabe: Den mittelsten oder größten Coefficienten jeder Potestät des Binomiums $(a + b)^m$ zu finden; wo zu bemerken ist, daß es, wenn m eine ungerade Zahl bedeutet, allemal zwey mittlere einander gleiche Coefficienten giebt, die zusammengenommen den mittelsten Coefficienten der nächsten geraden Potestät erzeugen. Da also der größte Coefficient jeder geraden Potestät doppelt so groß ist, als der mittelste Coefficient der vorhergehenden ungeraden Potestät, so ist es hinlänglich, wenn diese Aufgabe für den größten Coefficienten der geraden Potestäten aufgelöset wird. Es sey demnach $m = 2n$, wo der mittelste Coefficient

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\ldots(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots n}$$

ist. Man setze denselben $= u$, so hat man

$$u = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots\ldots\ldots\ldots 2n}{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots\ldots n)^2}$$

und wenn man die Logarithmen nimmt,

$$\begin{aligned} lu = {} & l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \ldots + l2n \\ & - 2l1 - 2l2 - 2l3 - 2l4 - 2l5 \ldots\ldots - 2ln. \end{aligned}$$

§. 161.

Braucht man die hyperbolischen Logarithmen, so wird

$$l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots\ldots\ldots + l2n$$

$$=$$

$$\tfrac{1}{2}l2\pi + (2n + \tfrac{1}{2})ln + (2n + \tfrac{1}{2})l2 - 2n$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \text{rc.}$$

und

und

$$2l1 + 2l2 + 2l3 + 2l4 + \ldots\ldots + 2ln$$

$$=$$

$$l2\pi + (2n+1)ln - 2n + \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} - \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} + \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} - \text{rc.}$$

Zieht man diesen Ausdruck von jenem ab, so bleibt

$$lu = -\tfrac{1}{2}l\pi - \tfrac{1}{2}ln + 2nl2 + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2n} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} - \text{rc.}$$

$$- \frac{2\mathfrak{A}}{1.2n} + \frac{2\mathfrak{B}}{3.4n^3} - \frac{2\mathfrak{C}}{5.6n^5} + \text{rc.}$$

und nimmt man je zwey und zwey Glieder zusammen, so wird

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^7n^7} - \text{rc.}$$

Es sey

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2^2n^2} - \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^4n^4} + \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^6n^6} - \frac{255\mathfrak{D}}{7.8.2^8n^8} + \text{rc.}$$

$$=$$

$$l\left(1 + \frac{A}{2^x n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \frac{D}{2^8n^8} + \text{rc.}\right)$$

so wird

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - 2nl\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \text{rc.}\right)$$

und also

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{A}{2^2n^2} + \frac{B}{2^4n^4} + \frac{C}{2^6n^6} + \text{rc.}\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}$$

Setzt man aber $2n = m$, so ist

$$l\left(1+\frac{A}{2^2n^2}+\frac{B}{2^4n^4}+\frac{C}{2^6n^6}+\frac{D}{2^8n^8}+\text{rc.}\right)=$$

$$\frac{A}{m^2}+\frac{B}{m^4}+\frac{C}{m^6}+\frac{D}{m^8}+\frac{E}{m^{10}}+\text{rc.}$$

$$-\frac{A^2}{2m^4}-\frac{AB}{m^6}-\frac{AC}{m^8}-\frac{AD}{m^{10}}-\text{rc.}$$

$$-\frac{BB}{2m^8}-\frac{BC}{m^{10}}-\text{rc.}$$

$$+\frac{A^3}{3m^6}+\frac{A^2B}{m^8}+\frac{A^2C}{m^{10}}+\text{rc.}$$

$$+\frac{AB^2}{m^{10}}+\text{rc.}$$

$$-\frac{A^4}{4m^8}-\frac{A^3B}{m^{10}}-\text{rc.}$$

$$+\frac{A^5}{5m^{10}}+\text{rc.}$$

und da dieser Ausdruck diesem folgenden gleich seyn muß:

$$\frac{3\mathfrak{A}}{1.2m^2}-\frac{15\mathfrak{B}}{3.4m^4}+\frac{63\mathfrak{C}}{5.6m^6}-\frac{255\mathfrak{D}}{7.8m^8}+\text{rc.}$$

so wird

$$A=\frac{3\mathfrak{A}}{1.2}$$

$$B=\frac{A^2}{2}-\frac{15\mathfrak{B}}{3.4}$$

$$C=AB-\tfrac{1}{3}A^3+\frac{63\mathfrak{C}}{5.6}$$

$$D=AC+\tfrac{1}{2}B^2-A^2B+\tfrac{1}{4}A^4-\frac{255\mathfrak{D}}{7.8}$$

$$E=AD+BC-A^2C-AB^2+A^3B-\tfrac{1}{5}A^5+\frac{1023\mathfrak{E}}{9.10}$$

rc.

Da

§. 148.

Da also $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{C} = \frac{1}{42}$; $\mathfrak{D} = \frac{1}{30}$; $\mathfrak{E} = \frac{5}{66}$; ꝛc. ist, so wird

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = -\frac{1}{96}$$

$$C = \frac{27}{640}$$

$$D = \frac{90031}{2^{11}.3^2.5.7}$$

ꝛc.

folglich

$$u = \frac{2^{2n}}{\left(1 + \frac{1}{2^4.n^2} - \frac{1}{2^9.3n^4} + \frac{27}{2^{15}.5n^6} - \frac{90031}{2^{19}.3^2.5.7n^8} + \text{ꝛc.}\right)^{2n}\sqrt{n\pi}}$$

oder

$$u = \frac{2^{2n}\left(1 - \frac{1}{2^4.n^2} + \frac{7}{2^9.3n^4} - \frac{121}{2^{13}.3.5n^6} + \frac{104969}{2^{19}.3^2.5.7n^8} - \text{ꝛc.}\right)^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

oder, wenn man jene Erhebung der Reihe wirklich vornimmt, näherungsweise,

$$u = \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4}\ \text{ꝛc.}\right)}$$

Demnach verhält sich das mittelste Glied in $(1+1)^{2n}$ zur Summe aller Glieder 2^{2n} wie

$$1 \text{ zu } \sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} - \frac{1}{128n^3} - \frac{5}{16.128n^4}\ \text{ꝛc.}\right)$$

oder, wenn man der Kürze wegen $4n = \nu$ setzt, wie

$$1 \text{ zu } \sqrt{n\pi}\left(1 + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu^2} - \frac{1}{2\nu^3} - \frac{5}{8\nu^4} + \frac{23}{8\nu^5} + \frac{53}{16\nu^6} - \text{2c.}\right)$$

Erstes Exempel.

Man soll den mittelsten Coefficienten des entwickelten Binomiums $(a + b)^{10}$ finden, wovon bekannt ist, daß er $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$ ausmacht.

Wenn man die letzte von den für u gefundenen Formeln braucht, so ist

$$\frac{1}{4n} = 0{,}0500000$$

$$\frac{1}{32n^2} = 0{,}0012500$$

$$0{,}0512500$$

$$\text{subtr.} \ \frac{1}{128n^3} = 625$$

$$0{,}0511875$$

$$\text{subtr.} \ \frac{1}{16 \cdot 128n^4} = 39$$

$$0{,}0511836$$

Also ist $1 + \frac{1}{4n} + \text{2c.} = 1{,}0511836$. Davon ist

der Logar. $= 0{,}0216784$

$ln = 0{,}6989700$

$l\pi = 0{,}4971498$

$1{,}2177982$

$l\sqrt{n\pi}(1 + \text{2c.}) = 0{,}6088991$

von $l\,2^{2n} = 3{,}0102999$

$ln = 2{,}4014008$, folglich

$n = 252.$

Zweytes Exempel.

Man soll das Verhältniß finden, welches das mittelste Glied des Binomiums $(1 + 1)^{100}$ zur Summe aller Glieder 2^{100} hat.

Wir wollen dazu die zuerst gefundene Formel

$$lu = l\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} - \frac{3\mathfrak{A}}{1.2.2n} + \frac{15\mathfrak{B}}{3.4.2^3n^3} - \frac{63\mathfrak{C}}{5.6.2^5n^5} + \text{ꝛc.}$$

brauchen, aus welcher sich, wenn $2n = m$ gesetzt wird, um die Potestät $(1 + 1)^m$ zu bekommen, und nach der Substitution der Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. folgende Bestimmung ergiebt:

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{1}{4m} + \frac{1}{24m^3} - \frac{1}{20m^5} + \frac{17}{112m^7} - \frac{31}{36m^9} + \frac{691}{88m^{11}} - \text{ꝛc.}$$

Da die hier vorkommenden Logarithmen hyperbolische Logarithmen sind, so multiplicire man sie durch

$$k = 0{,}434294481903251$$

um an ihrer Statt gemeine Logarithmen zu erhalten. Auf diese Art wird

$$lu = l\frac{2^m}{\sqrt{\frac{1}{2}m\pi}} - \frac{k}{4m} + \frac{k}{24m^3} - \frac{k}{20m^5} + \frac{17k}{112m^7} - \frac{31k}{36m^9} + \text{ꝛc.}$$

Da also u der mittelste Coefficient ist, so ist das gesuchte Verhältniß $2^m : u$, und folglich

$$l\frac{2^m}{u} = l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} + \frac{k}{4m} - \frac{k}{20m^5} - \frac{17k}{112m^7} + \frac{31k}{36m^9} - \frac{691k}{88m^{11}} + \text{ꝛc.}$$

Nun ist, weil der Exponent $m = 100$ ist,

$$\frac{k}{m} = 0{,}0043429448; \quad \frac{k}{m^3} = 0{,}0000004343;$$

k

$$\frac{k}{m5} = 0{,}0000000000$$

folglich

$$\frac{k}{4m} = 0{,}0010857362$$

$$\frac{k}{24m^3} = 0{,}0000000181$$

$$0{,}0010857181.$$

$$\text{Ferner ist } l\pi = 0{,}4971498726$$

$$l\tfrac{1}{2}m = 1{,}6989700043$$

$$l\tfrac{1}{2}m\pi = 2{,}1961198769$$

$$l\sqrt{\tfrac{1}{2}m\pi} = 1{,}0980599384$$

$$\frac{k}{4m} - \frac{k}{24m^3} + \text{ꝛc.} = 0{,}0010857181$$

$$1{,}0991456565 = l\frac{2^{100}}{u}$$

Folglich ist $\frac{2^{100}}{u} = 12{,}56451$, und es verhält sich daher in der Potestät $(1+1)^{100}$, wenn man dieselbe entwickelt, das mittelste Glied zur Summe aller Glieder wie 1 zu 12,56451.

§. 163.

Es bedeute nunmehr das allgemeine Glied z die Exponential-Funktion a^x, oder es sey die geometrische Reihe zu summiren:

$$s = a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots\ldots + a^x.$$

Da dies eine geometrische Reihe ist, so weiß man schon, daß die Summe $s = \frac{(a^x - 1)a}{a - 1}$ ist, wir wollen aber dieselbe nach der hier erklärten Methode suchen. Da also $z = a^x$ ist,

ist, so ist $\int z\,dx = \frac{a^x}{la}$, denn dessen Differenzial ist $a^x dx$. Ferner ist nunmehr

$$\frac{dz}{dx} = a^x la; \quad \frac{ddz}{dx^2} = a^x (la)^2; \quad \frac{d^3z}{dx^3} = a^x (la)^3; \text{ rc.}$$

also

$$s = a^x\left(\frac{1}{la} + \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3..6}(la)^5 - \text{rc.}\right)$$
$$+ C.$$

Um die Constante C zu bestimmen, setze man $x = 0$, und da alsdann $s = 0$ wird, so ergiebt sich

$$C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la + \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 - \text{rc.}$$

und es wird demnach

$$s = (a^x - 1)\frac{1}{la} + \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3...6}(la)^5$$
$$- \text{rc.}$$

Da also $s = \frac{(a^x - 1)a}{a-1}$ ist, so wird

$$\frac{a}{a-1} = \frac{1}{la} + \tfrac{1}{2} + \frac{\mathfrak{A}}{1.2}la - \frac{\mathfrak{B}}{1.2.3.4}(la)^3 + \frac{\mathfrak{C}}{1.2.3..6}(la)^5 - \text{rc.}$$

wo la den hyperbolischen Logarithmen von a bedeutet. Hieraus fließt

$$\frac{(a+1)la}{2(a-1)} = 1 + \frac{\mathfrak{A}(la)^2}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}(la)^4}{1.2.3.4} + \frac{\mathfrak{C}(la)^6}{1.2...6} - \text{rc.}$$

und so läßt sich also die Summe dieser Reihe angeben

§. 164.

Es sey das allgemeine Glied $z = \sin. ax$, und

$$s = \sin. a + \sin. 2a + \sin. 3a + \ldots\ldots + \sin. ax.$$

Da dieses eine wiederkehrende Reihe ist, so läßt sie sich ebenfalls summiren. Es ist nemlich

$$s = \frac{\sin.a + \sin.ax - \sin.(ax+a)}{1 - 2\cos.a + 1} =$$

$$\frac{\sin.a + (1 - \cos.a)\sin.ax - \sin.a\cos.ax}{2(1 - \cos.a)}$$

Nun ist aber

$$\int z\,dx = \int dx \sin.ax = -\frac{1}{a}\cos.ax$$

$$\frac{dz}{dx} = a\cos.ax; \quad \frac{ddz}{dx^2} = -aa\sin.ax$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = a^3\cos.ax; \quad \frac{d^5z}{dx^5} = a^5\cos.ax$$

ꝛc.

$$s = C - \frac{1}{a}\cos.ax + \frac{1}{2}\sin.ax + \frac{\mathfrak{A}a\cos.ax}{1.2} + \frac{\mathfrak{B}a^3\cos.ax}{1.2.3.4}$$

$$\frac{\mathfrak{C}a^5\cos.ax}{1.2.3.4.5.6} + \frac{\mathfrak{D}a^7\cos.ax}{1.2\ldots.8} + \text{ꝛc.}$$

Man setze $x = 0$, damit $s = 0$ werde, so bekommt man

$$C = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

folglich

$$s =$$

$$\frac{1}{2}\sin.ax + (1-\cos.ax)\left(\frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6} - \text{ꝛc.}\right)$$

Da aber $s = \frac{1}{2}\sin.ax + \frac{(1 - \cos.ax)\sin.a}{2(1 - \cos.a)}$ ist, so wird

$$\frac{\sin.a}{2(1-\cos.a)} = \frac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A}a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C}a^5}{1.2\ldots6}$$

$$- \text{ꝛc.}$$

und eben diese Reihe haben wir bereits oben §. 127. gehabt.

§. 144.

Nun sey $z = \cos.ax$, und die zu summirende Reihe

$$s = \cos.a + \cos.2a + \cos.3a + \ldots\ldots + \cos.ax;$$

wovon,

wovon, da es eine wiederkehrende Reihe ist, die Summe

$$s = \frac{\cos. a - 1 + \cos. ax - \cos.(ax + a)}{1 - 2\cos. a + 1} =$$

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos. ax + \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}a . \sin. ax$$

wird. Um aber dieselbe nach unserer gegenwärtigen Methode auszudrucken, so ist

$$\int z dx = \int dx \cos. ax = \frac{1}{a}\sin. ax; \quad \frac{dz}{dx} = -a \sin. ax;$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = a^3 \sin. ax; \quad \frac{d^5 z}{dx^5} = -a^5 \sin. ax; \text{ ꝛc. Folglich}$$

$$s = C + \frac{1}{a}\sin.ax + \tfrac{1}{2}\cos.ax - \frac{\mathfrak{A} a \sin.ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3 \sin.ax}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

Es sey $x = 0$, so wird $s = 0$, und $C = -\tfrac{1}{2}$; folglich

$$s = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.ax + \frac{1}{a}\sin.ax - \frac{\mathfrak{A} a \sin.ax}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3 \sin.ax}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

Da also $= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos. ax + \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}a \sin. ax$ ist, so wird wieder, wie wir bereits gefunden haben

$$\tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{a} - \frac{\mathfrak{A} a}{1.2} - \frac{\mathfrak{B} a^3}{1.2.3.4} - \frac{\mathfrak{C} a^5}{1.2.3\ldots6} - \text{ꝛc.}$$

§. 166.

Da, wenn a irgend einen Bogen bedeutet,

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}a + \sin. a + \tfrac{1}{2}\sin. 2a + \tfrac{1}{3}\sin. 3a + \tfrac{1}{4}\sin. 4a + \text{ꝛc.}$$

ist: so wollen wir diese Reihe betrachten, und $z = \frac{1}{x}\sin. ax$ setzen, so daß

$$s = \sin. a + \tfrac{1}{2}\sin. 2a + \tfrac{1}{3}\sin. 3a + \ldots + \frac{1}{x}\sin. ax$$

sey. In diesem Falle wird $\int z dx = S\frac{dx}{x}\sin. ax$, ein Integral, welches sich nicht darstellen läßt. Es ist aber

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a}{x}\text{cos.}\,ax - \frac{1}{x^2}\text{sin.}\,ax;$$

$$\frac{ddz}{dx^2} = -\frac{a^2}{x}\text{sin.}\,ax - \frac{2a}{x^2}\text{cos.}\,ax + \frac{2}{x^3}\text{sin.}\,ax;$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{a^3}{x}\text{cos.}\,ax + \frac{3a^2}{x^2}\text{sin.}\,ax + \frac{6a}{x^3}\text{cos.}\,ax - \frac{6}{x^4}\text{sin.}\,ax;$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = \frac{a^4}{x}\text{sin.}\,ax + \frac{4a^3}{x^2}\text{cos.}\,ax - \frac{12a^2}{x^3}\text{sin.}\,ax - \frac{24a}{x^4}\text{cos.}\,ax + \frac{24}{x^5}\text{sin.}\,ax.$$

Da wir aber weder die Integral-Formel $\int z\,dx$ entwickelt darstellen, noch diese Differenzialien bequem genug ausdrucken können, so sind wir auch nach der bisher erklärten Methode nicht im Stande die Summe dieser Reihe so zu bestimmen, daß sich daraus etwas schließen ließe. Eben diese Unbequemlichkeit stellt sich bey sehr vielen andern Reihen ein, so oft nemlich das allgemeine Glied nicht einfach genug ist, um zum Ausdrucke bequeme und nach einem leichten Gesetze fortgehende Differenzialien zu geben. Aus diesem Grunde wollen wir in dem folgenden Capitel andere allgemeine Ausdrücke für die Summen solcher Reihen aufsuchen, deren allgemeine Glieder entweder zu zusammengesetzt sind, oder gar nicht gegeben werden können. Insbesondere aber fällt die Unzulänglichkeit der bisher erklärten Methode in die Augen, wenn die Zeichen der gegebenen Reihe abwechseln. Denn so einfach alsdann auch die allgemeinen Glieder seyn mögen, so lassen sich doch die summirenden Glieder dieser Reihen nach jener Methode nicht bequem darstellen.

Siebentes Capitel.

Fortführung der Summation der Progressionen durch unbegrenzte Reihen.

§. 167.

Um die im vorhergehenden Capitel erklärte Summations-Methode zu ergänzen, wollen wir in dem gegenwärtigen solche Reihen betrachten, deren allgemeine Glieder mehr zusammengesetzte Ausdrücke sind. Da also der gefundene Ausdruck bey den geometrischen Progressionen, so leicht man auch auf andern Wegen die Summe derselben finden kann, gleichwohl die wahre Summe nicht giebt: so wollen wir zuvörderst solche Reihen untersuchen, deren Glieder Produkte aus den Gliedern einer geometrischen und irgend einer andern Reihe sind. Es sey daher diese Reihe gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & & x \\ s = ap & + bp^2 & + cp^3 & + dp^4 & + \ldots\ldots & + & yp^x \end{array}$$

welche aus der geometrischen Reihe p, p^2, p^3, ꝛc. und einer andern $a + b + c + d +$ ꝛc. besteht, in welcher das zu dem Anzeiger x gehörige Glied $= y$ ist; und dabey werde gefragt: Welches der allgemeine Ausdruck für den Werth ihrer Summe $s = S.yp^x$ sey?

§. 168.

Wir wollen uns bey der Beantwortung derselben eben der Schlußart bedienen, welche wir oben gebraucht haben,

und

und v das Glied bedeuten lassen, das in der Reihe $a + b + c + d +$ ꝛc. vor y vorhergeht, so wie A dasjenige, so seine Stelle vor a hat, oder zu dem Anzeiger o gehört. Bey diesen Voraussetzungen ist vp^{x-1} das allgemeine Glied der Reihe:

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{ap} + \overset{3}{bp^2} + \overset{4}{cp^3} + \ldots\ldots + \overset{x}{vp^{x-1}}$$

und bezeichnet man die Summe dieser Reihe durch $S.vp^{x-1}$, so hat man

$$S.vp^{x-1} = \frac{1}{p} S.vp^x = S.yp^x - yp^x + A$$

Da aber

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$S.yp^x - yp^x + A = \frac{1}{p} S.yp^x - \frac{1}{p} S\frac{dy}{dx}p^x + \frac{1}{2p} S\frac{ddy}{dx^2}p^x$$
$$- \frac{1}{6p} S\frac{d^3y}{dx^3}p^x + \frac{1}{24p} S\frac{d^4y}{dx^4}p^x - \text{ꝛc.}$$

und hieraus

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S\frac{dy}{dx}p^x + S\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \text{ꝛc.}\right)$$

Wenn man also die summirenden Glieder der Reihen kennt, deren allgemeine Glieder $\frac{dy}{dx}p^x$; $\frac{ddy}{dx^2}p^x$; $\frac{d^3y}{dx^3}p^x$; ꝛc. sind, so ist man auch im Stande, daraus das summirende Glied $S.yp^x$ zusammen zu setzen.

§. 169.

Hieraus lassen sich schon die Summen der Reihen bestimmen, deren allgemeine Glieder unter die Form $x^n p^x$ gehören.

hören. Denn es sey $y = x^n$; so wird $A = 0$, wofern nicht etwa $n = 0$ ist, in welchem Falle $A = 1$ seyn würde. Und da

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n-3}; \text{ ꝛc.}$$

ist, so bekommt man

$$S.x^np^x = \frac{1}{p-1}(x^np^{x+1} - Ap - nS.x^{n-1}p^x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}S.x^{n-2}p^x$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}S.x^{n-3}p^x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}S.x^{n-4}p^x - \text{ꝛc.})$$

Hieraus fließen folgende Summationen, wenn man für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzt; und zwar wird im ersten Falle, wenn $n = 0$ ist, $A = 1$, in den übrigen aber $A = 0$.

$$S.x^0p^x = S.p^x = \frac{1}{p-1}(p^{x+1} - p) = \frac{p^{x+1} - p}{p-1} = \frac{p(p^x - 1)}{p-1}$$

welches die bekannte Bestimmung der Summe einer geometrischen Progression ist.

$$S.xp^x = \frac{1}{p-1}(xp^{x+1} - S.p^x) = \frac{xp^{x+1}}{p-1} - \frac{p^{x+1} - p}{(p-1)^2}$$

$$\text{oder } S.xp^x = \frac{pxp^x}{p-1} - \frac{p(p^x - 1)}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2p^x = \frac{1}{p-1}(x^2p^{x+1} - 2S.xp^x + S.p^x) \text{ oder}$$

$$Sx^2p^x = \frac{x^2p^{x+1}}{p-1} - \frac{2xp^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)(p^x-1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3p^x = \frac{1}{p-1}(x^3p^{x+1} - S.x^2p^x + 3S.xp^x - S.p^x)$$

 oder

oder

$$S.x^3p^x = \frac{x^3p^{x+1}}{p-1} - \frac{3x^2p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{3(p+1)xp^{x+1}}{(p-1)^3} - \frac{p(pp+4p+1)(p^x-1)}{(p-1)^4}.$$

Geht man auf diese Art weiter fort, so findet man zwar nach und nach die Summen der höhern Potestäten, indeß läßt sich dieser Endzweck bequemer durch den allgemeinen Ausdruck erreichen, welchen wir nunmehr erklären wollen.

§. 170.

Da wir gesehen haben, daß

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}(yp^{x+1} - Ap - S.\frac{dy}{dx}p^x + S.\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S.\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \text{rc.})$$

ist, wenn A eine solche beständige Größe bedeutet, daß die Summe $=0$ wird, wenn man $x=0$ nimmt, denn in diesem Falle wird $y=A$, und $yp^{x+1}=Ap$: so können wir diese beständige Größe aus der Acht lassen, wofern wir uns nur daran erinnern, daß allemal eine solche beständige Größe zu der Summe gesetzt werden müsse, wobey sie, wenn $x=0$ wird, verschwindet, oder irgend einem andern bestimmten Falle ein Genüge thut. Setzt man also z anstatt y, so wird

$$S.p^xz = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{1}{p-1}S.p^x\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)}S.p^x\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{6(p-1)}S.p^x\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24(p-1)}S.p^x\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{120(p-1)}S.p^x\frac{d^5z}{dx^5} + \text{rc.}$$

Setzt man ferner nach und nach $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; rc. an die Stelle von y, so bekommt man

$$S.\frac{p^x dz}{dx} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{dz}{dx} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

$$S.\frac{p^x ddz}{dx^2} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^5z}{dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Substituirt man also nach und nach diese Werthe, so erhält man für $S.p^x z$ folgenden Ausdruck:

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{dz}{dx} + \frac{\beta p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\delta p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{\varepsilon p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^5z}{dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 171.

Um die Werthe der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. zu finden, setze man für jedes Glied die dafür vorhin gefundene Reihe; nemlich

$$\frac{p^{x+1}z}{p-1} = S.p^x z + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{p^{x+1}dz}{(p-1)dx} = S.\frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{p^{x+1}ddz}{(p-1)dx^2} = S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{p^{x+1}d^3z}{(p-1)dx^3} = S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \text{ꝛc.}$$

Wir haben also $S.p^x z = S.p^x z$

$$
\begin{array}{llll}
+ \frac{1}{p-1} S.\frac{p^x dz}{dx} & - \frac{1}{2(p-1)} S.\frac{p^x ddz}{dx^2} & + \frac{1}{6(p-1)} S.\frac{p^x d^3 z}{dx^3} & - \text{etc.} \\
- \alpha & - \frac{\alpha}{p-1} & + \frac{\alpha}{2(p-1)} & \\
 & + \beta & + \frac{\beta}{p-1} & \\
 & & - \gamma &
\end{array}
$$

und finden daraus folgende Werthe für die Buchstaben α, β, γ, δ, etc.

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1}\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1}\left(\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{p-1}\left(\delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120}\right)$$

etc.

§. 172.

Es sey der Kürze wegen $\frac{1}{p-1} = q$, so ist

$\alpha = q$

$\beta = \alpha q + \frac{1}{2}q = qq + \frac{1}{2}q$

$\gamma = \beta q + \frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{6}q = q^3 + qq + \frac{1}{6}q$

$\delta = \gamma q + \frac{1}{2}\beta q + \frac{1}{6}\alpha q + \frac{1}{24}q = q^4 + \frac{3}{2}q^3 + \frac{7}{12}q^2 + \frac{1}{24}q$

$\varepsilon = \delta q + \frac{1}{2}\gamma q + \frac{1}{6}\beta q + \frac{1}{24}\alpha q + \frac{1}{120}q,$

oder

$\varepsilon = q^5 + 2q^4 + \frac{5}{4}q^3 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{120}q$, und

$\zeta = q^6 + \frac{5}{2}q^5 + \frac{13}{6}q^4 + \frac{3}{4}q^3 + \frac{31}{360}q^2 + \frac{1}{320}q$

etc.

oder

oder

$$\alpha = \frac{q}{1}$$

$$\beta = \frac{2qq + q}{1 \cdot 2}$$

$$\gamma = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\delta = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\varepsilon = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\zeta = \frac{720q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$\eta = \frac{5040q^7 + 15120q^6 + 16800q^5 + 8400q^4 + 1806q^3 + 126q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

2c.

wo jeder Coefficient 16800 entsteht, wenn man die Summe der beyden vorhergehenden 1560 + 1800 durch den Exponenten von q, der hier = 5 ist, multiplicirt.

§. 173.

Setzt man nun aber anstatt q seinen Werth $\frac{1}{p-1}$, so wird

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$

$$\beta = \frac{p+1}{1 \cdot (p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp + 4p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3(p-1)^3}$$

$$\delta = \frac{p^3 + 11p^2 + 11p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(p-1)^4}$$

$\varepsilon =$

$$\varepsilon = \frac{p^4 + 26p^3 + 66p^2 + 26p + 1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$$

$$\zeta = \frac{p^5 + 57p^4 + 302p^3 + 302p^2 + 57p + 1}{1.2.3.4.5.6(p-1)^6}$$

$$\eta = \frac{p^6 + 120p^5 + 1191p^4 + 2416p^3 + 1191p^2 + 120p + 1}{1.2.3.4.5.6.7(p-1)^7}$$

ꝛc.

Das Gesetz, nach welchem diese Größen fortschreiten, ist dieses, daß wenn man irgend ein Glied

$$\frac{p^{n-2} + Ap^{n-3} + Bp^{n-4} + Cp^{n-5} + Dp^{n-6} + \text{ꝛc.}}{1.2.3 \ldots\ldots (n-1)(p-1)^{n-1}}$$

setzt, alsdann

$$A = 2^{n-1} - n$$

$$B = 3^{n-1} - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$C = 4^{n-1} - n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$D = 5^{n-1} - n.4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}3^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}2^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

ꝛc.

wird, wornach sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ ꝛc. so weit man will, fortsetzen lassen.

§. 174.

Betrachtet man das Fortschreitungsgesetz dieser Coefficienten genauer, so nimmt man bald wahr, daß dieselben eine wiederkehrende Reihe bilden, und sich ergeben, wenn man den Bruch

$$\frac{1}{1 - \frac{u}{p-1} - \frac{u^2}{2(p-1)} - \frac{u^3}{6(p-1)} - \frac{u^4}{24(p-1)} - \text{ꝛc.}}$$

ent-

entwickelt, indem man dadurch diese Reihe bekömmt:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{rc.}$$

Man setze jenen Bruch $= V$. Da alsdann

$$V = \frac{p-1}{p-1-u-\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}-\frac{u^4}{24}-\text{rc.}}$$

ist, so wird

$$V = \frac{p-1}{p-e^u}$$

wo e die Zahl bedeutet, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist. Druckt man nun V durch eine Reihe aus, und zwar nach den Potestäten von u geordnet, so erhält man

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{rc.}$$

und die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ rc. sind eben diejenigen, welche wir bey unserm gegenwärtigen Geschäfte brauchen. Hat man also diese Coefficienten gefunden, so ist

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \text{rc.}\right)$$
$$\pm C.$$

und dieser Ausdruck enthält das summirende Glied der Reihe:

$$ap + bp^2 + cp^3 + \dots\dots + p^x z$$

deren allgemeines Glied $= p^x z$ ist.

§. 175.

Da wir

$$V = \frac{p-1}{p-e^u}$$

gefunden haben, so wird

$$e^u = \frac{pV - p + 1}{V}$$

und, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$u = l(pV - p + 1) - lV$$

und

und hieraus durch die Differenziation

$$du = \frac{(p-1)dV}{pV^2 - (p-1)V}, \text{ daher denn}$$

$$pV^2 = (p-1)V + \frac{(p-1)dV}{du}.$$

Da also

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} pV^2 = p &+ 2\alpha pu + 2\beta pu^2 + 2\gamma pu^3 + 2\delta pu^4 + 2\varepsilon pu^5 + \text{ꝛc.} \\ &+ \alpha^2 pu^2 + 2\alpha\beta pu^3 + 2\alpha\gamma pu^4 + 2\alpha\delta pu^5 + \text{ꝛc.} \\ &+ \beta^2 pu^4 + 2\beta\gamma pu^5 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p-1)V = (p-1) &+ \alpha(p-1)u + \beta(p-1)u^2 + \gamma(p-1)u^3 \\ &+ \delta(p-1)u^4 + \varepsilon(p-1)u^5 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)dV}{du} = (p-1)\alpha &+ 2(p-1)\beta u + 3(p-1)\gamma u^2 + 4(p-1)\delta u^3 \\ &+ 5(p-1)\varepsilon u^4 + 6(p-1)\zeta u^5 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und durch die Vergleichung dieser Ausdrücke ergiebt sich

$$\begin{aligned} (p-1)\alpha &= 1 \\ 2(p-1)\beta &= \alpha(p+1) \\ 3(p-1)\gamma &= \beta(p+1) + \alpha^2 p \\ 4(p-1)\delta &= \gamma(p+1) + 2\alpha\beta p \\ 5(p-1)\varepsilon &= \delta(p+1) + 2\alpha\gamma p + \beta\beta p \\ 6(p-1)\zeta &= \varepsilon(p+1) + 2\alpha\delta p + 2\beta\gamma p \\ 7(p-1)\eta &= \zeta(p+1) + 2\alpha\varepsilon p + 2\beta\delta p + \gamma\gamma p \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Wenn man in diesen Formeln für p eine gegebene Zahl setzt, so findet man die Werthe der Coefficienten α, β, γ, δ, ꝛc. weit leichter als nach dem zuerst entdeckten Gesetze.

§. 176.

Ehe wir die besondern Fälle in Ansehung des Werthes von p untersuchen, wollen wir $z = x^n$ setzen, so daß die Reihe:

s =

$$s = p + 2^n p^2 + 3^n p^3 + 4^n p^4 + \ldots\ldots + x^n p^n$$

zu summiren sey. Alsdann ist nach dem vorhin gefundenen Ausdrucke

$$s = p^x\Big(\frac{p}{p-1}\cdot x^n - \frac{p}{(p-1)^2} n x^{n-1} + \frac{pp+p}{(p-1)^3}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}$$
$$- \frac{(p^3+4p^2+p)}{(p-1)^4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} + \text{ꝛc.}$$
$$\pm C,$$

so daß durch diese Constante $s = 0$ werde, wenn man $x = 0$ setzt. Schreibt man daher für n nach und nach die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4,$ ꝛc. so wird

$$S.x^0 p^x = p^x.\frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1}$$

$$S.x^1 p^x = p^x\Big(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2}\Big) + \frac{p}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2 p^x = p^x\Big(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}\Big) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3 p^x = p^x\Big(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}\Big)$$
$$+ \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}$$

$$S.x^4 p^x = p^x\Big(\frac{px^4}{p-1} - \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} - \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4}$$
$$+ \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}\Big) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}$$

$$S.x^5 p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3}$$
$$- \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^3} + \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5}$$
$$- \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6}$$

S.$x^6 p^x$

$$S.x^6p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3}$$
$$- \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} + \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5}$$
$$- \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6}$$
$$- \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7}$$

2c.

§. 177.

Hieraus erhellet, daß es allemal möglich ist die Summe darzustellen, wenn z eine ganze rationale Funktion von x aus der Reihe ist, deren allgemeines Glied durch p^xz ausgedruckt wird. Denn sucht man die Differenzialien von z, so kommt man endlich auf solche, die verschwinden. Wird z. B. die Reihe gegeben:

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \ldots\ldots + \frac{(xx+x)}{2}p^x$$

so ist, weil $z = \frac{xx+x}{2}$; $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2}$; und $\frac{ddz}{dx^2} = 1$

das summirende Glied

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x - \frac{2x+1}{2(p-1)} + \frac{p+1}{2(p-1)^2}\right) -$$
$$\frac{p}{p-1}\left(\frac{p+1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)}\right)$$

oder

$$s = p^{x+1}\left(\frac{xx}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^3}$$

Wenn aber z keine ganze rationale Funktion ist, so läuft der Ausdruck des summirenden Gliedes ohne Ende fort. Ist z. B. $z = \frac{1}{x}$ oder folgende Reihe zu summiren:

s =

$$s = p + \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{3}p^3 + \tfrac{1}{4}p^4 + \ldots\ldots + \frac{1}{x}p^x$$

so bekommt man, weil

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{xx};\ \frac{ddz}{dx^2} = \frac{2}{x^3};\ \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4};\ \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5};\ \text{ꝛc.}$$

das summirende Glied

$$s =$$

$$\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ C.$$

Allein in diesem Falle kann man die beständige Größe C nicht auf die Art bestimmen, daß man $x = 0$ setze. Nimmt man also $x = 1$, so wird, weil dann $s = p$ wird,

$$C = p - \frac{pp}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

§. 178.

Wenn also p keine bestimmte Zahl bedeutet, so erhält man hieraus wenig Vortheil zur Ausdrückung der Summen durch die Näherung. Es erhellt aber zuvörderst, daß man für p nicht 1 setzen darf, weil dabey alle Coefficienten α, β, γ, δ, ꝛc. unendlich groß werden würden. Da also die gegenwärtige Reihe durch die Substitution von $p = 1$ in die vorhin untersuchte übergeht, so ist es kein Wunder, wenn man diesen unter allen leichtesten Fall doch nicht daraus ableiten kann. Ferner ist es merkwürdig, daß die Summation bey $p = 1$ das Integral $\int z\,dx$ erfordert, da doch überhaupt die Summe ohne irgend ein Integral dargestellt werden kann. Wenn also alle Coefficienten α, β, γ, δ, ꝛc. unendlich werden, so tritt auch das Integral ein. Uebrigens ist dies der einzige Fall, wenn nemlich $p = 1$ ist, auf welchen sich die gefundene allgemeine Formel nicht anwenden läßt, und man hat nicht

Ursache, deswegen die gedachte allgemeine Formel zu verwerfen. Denn obgleich alle einzelne Glieder unendlich sind, so heben sich doch alle Unendliche in der That einander auf, und so bleibt bloß die endliche Größe übrig, welche der Summe gleich und mit derjenigen übereinstimmend ist, welche wir nach der vorhergehenden Methode gefunden haben. Dies wird weiter hin ausführlicher aus einander gesetzt werden.

§. 179.

Es sey also $p = -1$, wo folglich die Zeichen in der Reihe abwechseln werden:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ -a & +b & -c & +d & - \ldots\ldots & \pm z \end{matrix}$$

und dabey ist z positiv, wenn x eine gerade, negativ aber, wenn x eine ungerade Zahl ist. Setzt man also

$$s = -a + b - c + d - \ldots\ldots \pm z$$

so wird

$$s = \frac{\pm 1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \text{etc.}\right) + C$$

und das obere Zeichen gilt, wenn x eine gerade, das untere hingegen, wenn x eine ungerade Zahl bedeutet. Verändert man daher die Zeichen, so bekommt man

$$a - b + c - d + e - f + \ldots\ldots \mp z =$$

$$\mp \tfrac{1}{2}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3z}{dx^3} + \frac{\delta d^4z}{dx^4} - \text{etc.}\right) + C$$

und die Zeichen richten sich nach eben dem Gesetze.

§. 180.

In diesem Falle lassen sich die Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ, etc. aus den vorhin angeführten Werthen finden, wenn man

man allenthalben — 1 für p setzt. Noch leichter erhält man sie indeß aus den allgemeinen Formeln §. 175, woraus zugleich erhellt, daß sie wechselsweise = 0 werden. Denn setzt man p = — 1 so gehen jene Formeln in folgende über:

$$\begin{aligned}
-\ \ \alpha &= 1\\
-\ 4\beta &= 0\\
-\ 6\gamma &= 0 - \alpha^2\\
-\ 8\delta &= 0 - 2\alpha\beta\\
-\ 10\varepsilon &= 0 - 2\alpha\gamma - \beta\beta\\
-\ 12\zeta &= 0 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma
\end{aligned}$$

ꝛc.

Da also $\beta = 0$ ist, so wird auch $\delta = 0$, und ferner $\zeta = 0$, $\vartheta = 0$, ꝛc.; die übrigen Buchstaben aber haben folgende Bestimmung:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\tfrac{1}{2}\\
\gamma &= \frac{\alpha^2}{6}\\
\varepsilon &= \frac{2\alpha\gamma}{10}\\
\eta &= \frac{2\alpha\varepsilon + \gamma\gamma}{14}\\
\iota &= \frac{2\alpha\eta + 2\gamma\varepsilon}{18}
\end{aligned}$$

ꝛc.

§. 181.

Um die Rechnung bequemer zu machen, wollen wir neue Buchstaben einführen und setzen:

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{A}{1.2}\\
\beta &= \frac{B}{1.2.3.4}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon = -\frac{C}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\eta = \frac{D}{1.2.3\ldots.8}$$

$$\iota = -\frac{E}{1.2.3\ldots10}$$

ꝛc.

Hierbey ist die vorhin ausgedruckte Summe

$$\mp \tfrac{1}{2}\left(z + \frac{Adz}{1.2dx} - \frac{Bd^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{Cd^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \frac{Dd^7z}{1.2\ldots8dx^7} + \text{ꝛc.}\right)$$

Die Coefficienten aber werden durch folgende Formeln bestimmt:

$$A = 1$$

$$3B = \frac{4.3}{1.2}.\frac{AA}{2}$$

$$5C = \frac{6.5}{1.2}.AB$$

$$7D = \frac{8.7}{1.2}.AC + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{BB}{2}$$

$$9E = \frac{10.9}{1.2}.AD + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.BC$$

$$11F = \frac{12.11}{1.2}.AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}.BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.\frac{CC}{2}$$

ꝛc.

und die Rechnung zu erleichtern druckt man dieselben noch besser auf diese Art aus:

$$A = 1$$

$$B = 2.\frac{AA}{2}$$

$$C = 3.AB$$

$$D = 4.AC + 4.\frac{6.5}{3.4}.\frac{BB}{2}$$

E =

$$E = 5.AD + 5.\frac{8.7}{3.4}.BC$$

$$F = 6.AE + 6.\frac{10.9}{3.4}.BD + 6.\frac{10.9.8.7}{3.4.5.6}.\frac{CC}{2}$$

$$G = 7.AF + 7.\frac{12.11}{3.4}.BE + 7.\frac{12.11.10.9}{3.4.5.6}.CD$$

ꝛc.

Stellt man nun die Rechnung wirklich an, so wird

$$A = 1$$
$$B = 1$$
$$C = 3$$
$$D = 17$$
$$E = 155 = 5.31$$
$$F = 2073 = 691.3$$
$$G = 38227 = 7.5461 = 7.\frac{127.129}{3}$$
$$H = 929569 = 3617.257$$
$$I = 28820619 = 43867.9.73$$

ꝛc.

§. 182.

Wenn man diese Zahlen mit Aufmerksamkeit betrachtet, so läßt sich aus den Faktoren 691, 3617, 43867, leicht schließen, daß sie mit den Bernoullischen Zahlen zusammenhängen, und daraus bestimmt werden können. Untersucht man diesen Zusammenhang, so erhellet, daß sie aus den Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, ꝛc. auf folgende Art formirt werden können:

$$A = 2.1.3\mathfrak{A} = 2(2^2 - 1)\mathfrak{A}$$
$$B = 2.3.5\mathfrak{B} = 2(2^4 - 1)\mathfrak{B}$$
$$C = 2.7.9\mathfrak{C} = 2(2^6 - 1)\mathfrak{C}$$
$$D = 2.15.17\mathfrak{D} = 2(2^8 - 1)\mathfrak{D}$$

$$E = 2 \,.\, 31 \,.\, 33\, \mathfrak{E} = 2(2^{10} - 1)\mathfrak{E}$$
$$F = 2 \,.\, 63 \,.\, 65\, \mathfrak{F} = 2(2^{12} - 1)\mathfrak{F}$$
$$G = 2 \,.\, 127 \,.\, 129\, \mathfrak{G} = 2(2^{14} - 1)\mathfrak{G}$$
$$H = 2 \,.\, 255 \,.\, 257\, \mathfrak{H} = 2(2^{16} - 1)\mathfrak{H}$$
$$\text{ꝛc.}$$

Da also die Bernoullischen Zahlen Brüche, unsere Coefficienten aber ganze Zahlen sind, so fällt in die Augen, daß die Brüche durch diese Faktoren weggeschaft werden, und es ist daher

$$A = 1$$
$$B = 1$$
$$C = 3$$
$$D = 17$$
$$E = 5 \cdot 31 = 155$$
$$F = 3 \cdot 691 = 2073$$
$$G = 7 \cdot 43 \cdot 127 = 38227$$
$$H = 257 \cdot 3617 = 929569$$
$$I = 9 \cdot 73 \cdot 43867 = 28820619$$
$$K = 5 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 174611 = 1109652905$$
$$L = 89 \cdot 683 \cdot 854513 = 51943281731$$
$$M = 3 \cdot 4097 \cdot 236364091 = 2905151042481$$
$$N = 2731 \cdot 8191 \cdot 8553103 = 191329672483963$$
$$\text{ꝛc.}$$

Aus diesen Zahlen ist man also auch umgekehrt im Stande die Bernoullischen Zahlen herzuleiten.

§. 183.

Braucht man also die Bernoullischen Zahlen, so ist die Summe der Reihe:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & x \\ a & - & b & + & c & - & d & + & e & - & \ldots\ldots \mp & z \end{array}$$

$$=$$

$$\mp\left(\tfrac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots 6dx^5} - \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ C.$$

Hier

Hier aber erkennt man, daß iene Zahlen nicht durch einen Zufall herbeygeführt sind. Denn so wie man die gegebene Reihe erhält, wenn man von dieser

$$a + b + c + d + \ldots\ldots + z$$

wo alle Glieder das Zeichen + haben, die Summe der geraden Glieder $b + d + f +$ ꝛc. zweymal genommen, abzieht: so läßt sich auch der gefundene Ausdruck in zwey Theile auflösen, davon der eine die Summe aller das Zeichen + vor sich habenden Glieder und =

$$\int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}\,dz}{1.2dx} - \frac{\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}\,d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \text{ꝛc.}$$

ist; die Summe der übrigen Glieder aber findet man auf eben die Art, welche wir oben gebraucht haben. Denn da das letzte Glied z zu dem Anzeiger x gehört, so wird das vorhergehende, zu dem Anzeiger $x - 2$ gehörige,

$$z - \frac{2dz}{dx} + \frac{2^2ddz}{1.2dx^2} - \frac{2^3d^3z}{1.2.3dx^3} + \frac{2^4d^4z}{1.2.3.4dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und diese Form erhält man aus der, wodurch vorhin das vorhergehende Glied ausgedruckt wurde, wenn man darin $\frac{x}{2}$ für x setzt. Man bekömmt also die Summe der geraden Glieder, wenn man, in die Summe aller, $\frac{x}{2}$ statt x setzt, und diese Summe ist demnach:

$$\tfrac{1}{2}\int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{2\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{2^3\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{2^5\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Zieht man das Zwiefache dieser Summe von der vorhergehenden ab, wenn x eine gerade Zahl, oder umgekehrt, wenn x eine ungerade Zahl wird: so stellt der Rest die Summe der Reihe

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & & x \\ a & - & b & + & c & - & d & + & e & - \ldots\ldots & \mp & z \end{array}$$

dar, und es ist also dieselbe

 =

$$=$$

$$\mp \left(\tfrac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}\,dz}{1.2\,dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}\,d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \text{ꝛc.}\right) + C.$$

Dieser Ausdruck ist eben derselbe, als der so eben gefundene.

§. 184.

Man nehme statt z eine Potestät von x oder x^n, so daß die Summe folgender Reihe:

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots\ldots \mp x^n$$

zu suchen sey. Da

$$\frac{dz}{1\,dx} = \frac{n}{1}x^{n-1};\quad \frac{d^3z}{1.2.3\,dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3};\ \text{ꝛc.}$$

ist: so wird die gesuchte Summe, wenn man die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. braucht,

$$\mp \tfrac{1}{2}\Big(x^n + \frac{A}{2}n x^{n-1} - \frac{B}{4}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}$$
$$+ \frac{C}{6}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^{n-5}$$
$$- \frac{D}{8}\,\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots 7}x^{n-7} + \text{ꝛc.}\Big) + C$$

und das obere Zeichen gilt, wenn x eine gerade, das untere hingegen, wenn es eine ungerade Zahl ist. Die beständige Größe C aber muß auf die Art bestimmt werden, daß die Summe verschwinde, wenn man $x = 0$ setzt, und es gilt in diesem Falle das obere Zeichen. Setzt man also für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ꝛc.: so bekommt man folgende Summationen:

I. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots \mp 1 = \mp \tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}$.

Ist nemlich die Zahl der Glieder gerade, so ist die Summe $= 0$, und ist die Gliederzahl ungerade, so wird die Summe $= +1$.

II. $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots\ldots \mp x = \mp \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{4}$.

Ist

Ist nemlich die Zahl der Glieder eine gerade Zahl, so ist die Summe $= -\frac{1}{2}x$, und im entgegenstehenden Falle $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

III. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots \mp x^2 = \mp \frac{1}{2}(x^2 + x)$
nemlich für die gerade Gliederzahl $= -\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$
und für die ungerade $= + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

IV. $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots \mp x^3 = \mp \frac{1}{2}(x^3 + \frac{3}{2}xx - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}$
nemlich für d. gerade Gliederz. $= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$
und für die ungerade $= + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$

V. $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots \mp x^4 = \mp \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 - x)$
nemlich für die gerade Gliederz. $= -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$
und für die ungerade $= + \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x$

ꝛc.

§. 185.

Man erkennt hieraus, daß bey den geraden Potestäten, den Fall ausgenommen, wenn $n = 0$ ist, die hinzuzusetzende beständige Größe verschwindet, und daß in diesen Fällen die Summe der geraden Anzahl von Gliedern von der Summe der ungeraden Anzahl bloß in Ansehung der Zeichen verschieden ist. Wenn also x eine unendlich große Zahl ist, so fällt diese Unterscheidung weg, weil eine unendlich große Zahl weder gerade noch ungerade genennt werden kann, und es müssen also dabey die zweifelhaften Glieder weggelassen werden. Hieraus folgt, daß die Summe von Reihen dieser Art, wenn sie ohne Ende fortlaufen, bloß in der hinzuzufügenden beständigen Größe bestehe. Aus diesem Grunde ist:

$1 - 1 + 1 - 1 + $ ꝛc. ohne Ende $= \frac{1}{2}$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{ꝛc.} \ldots\ldots = \frac{A}{4} = + \frac{(2^2 - 1)\mathfrak{A}}{2}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{ꝛc.} \ldots\ldots = 0$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{ꝛc.} \ldots\ldots = \frac{B}{8} = - \frac{(2^4 - 1)\mathfrak{B}}{4}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = 0$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = \frac{C}{12} = + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}}{6}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = 0$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{etc.} \;\ldots\ldots = \frac{D}{16} = - \frac{(2^8-1)\mathfrak{D}}{8}$$

etc.

Eben diese Summen findet man nach der obigen für diejenigen Reihen erklärten Methode, in welchen die Zeichen + und − mit einander abwechseln.

§. 186.

Wenn man für n negative Zahlen setzt, so wird die Summe ein ohne Ende fortlaufender Ausdruck. Es sey $n = -1$, so ist die Summe der Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \ldots\ldots \mp \frac{1}{x}$$

$$=$$

$$\mp \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^5} + \frac{D}{8x^8} - \text{etc.}\right) + C.$$

Da aber die beständige Größe C hier nicht aus dem Falle bestimmt werden kann, wenn $x = 0$ ist, so muß man solches aus einem andern thun. Es sey $x = 1$, so ist, weil alsdenn die Summe $= 1$ ist, und das untere Zeichen genommen werden muß,

$$C = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \text{etc.}\right)$$

oder

$$C = \tfrac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \text{etc.}$$

Oder man setze $x = 2$, so wird, weil alsdenn die Summe $= \tfrac{1}{2}$ ist, und das untere Zeichen gilt,

C =

$$C = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2 \cdot 2^2} + \frac{B}{4 \cdot 2^4} - \frac{C}{6 \cdot 2^6} + \text{ꝛc.}\right)$$

oder

$$C = \tfrac{3}{4} - \frac{A}{4 \cdot 2^2} + \frac{B}{8 \cdot 2^4} - \frac{C}{12 \cdot 2^6} + \frac{D}{16 \cdot 2^8} - \text{ꝛc.}$$

Oder aber $= 4$, wo denn

$$C = \frac{17}{24} - \frac{A}{4 \cdot 4^2} + \frac{B}{8 \cdot 4^4} - \frac{C}{12 \cdot 4^6} + \frac{D}{16 \cdot 4^8} - \text{ꝛc.}$$

werden wird. Man mag indeß diese beständige Größe bestimmen wie man will, so findet man dafür stets denselben Werth. Dieser Werth druckt zugleich die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe aus, welche = 12 ist.

§. 187.

Uebrigens lassen sich mittelst dieser neuen Zahlen A, B, C, D, E, ꝛc. die Summen der reciproken Potestäten-Reihen, wenn die Exponenten gerade Zahlen sind und darin bloß die ungeraden Zahlen vorkommen, sehr leicht finden. Denn setzt man

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ꝛc.} = s.$$

so wird

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{s}{2^{2n}}$$

und dieses von jenem abgezogen giebt,

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{(2^{2n} - 1)s}{2^{2n}}$$

Da wir also die Werthe von s für die einzelnen Werthe von n schon mitgetheilt haben, §. 125, so ist:

1 +

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ꝛc.} = \frac{A}{1\,.\,2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{ꝛc.} = \frac{B}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{ꝛc.} = \frac{C}{1.2.3\ldots6} \cdot \frac{\pi^6}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{ꝛc.} = \frac{D}{1.2.3\ldots8} \cdot \frac{\pi^8}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{ꝛc.} = \frac{E}{1.2.3\ldots10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4}$$

ꝛc.

Wenn aber alle Zahlen vorkommen und die Zeichen abwechseln, so bekommt man, weil

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{(2^{2n}-1)s - s}{2^{2n}}$$

ist,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.} = \frac{(A-2\mathfrak{A})}{1\,.\,2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1\,.\,2} \cdot \pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.} = \frac{(B-2\mathfrak{B})}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \text{ꝛc.} = \frac{(C-2\mathfrak{C})}{1.2\ldots6} \cdot \frac{\pi^6}{4} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2\ldots6} \cdot \pi^6$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \text{ꝛc.} = \frac{(D-2\mathfrak{D})}{1.2\ldots8} \cdot \frac{\pi^8}{4} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1.2\ldots8} \cdot \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \text{ꝛc.} = \frac{(E-2\mathfrak{E})}{1.2\ldots10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4} = \frac{(2^9-1)\mathfrak{E}}{1.2\ldots10} \cdot \pi^{10}$$

ꝛc.

§. 188.

So wie wir bisher eine Reihe untersucht haben, deren Glieder Produkte aus den Gliedern einer geometrischen Reihe p, p^2, p^3, ꝛc. und aus den Gliedern irgend einer andern

dern Reihe, a, b, c, ꝛc. waren: so läßt sich auch eine Reihe behandeln, deren Glieder Produkte aus den Gliedern von irgend zwey Reihen sind, wovon die eine als bekannt betrachtet wird. Es sey die bekannte Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & x \\ A & + & B & + & C & + \ldots\ldots\ldots & Z \end{array}$$

die unbekannte hingegen:

$$a + b + c + \ldots\ldots\ldots\ldots z$$

und die Summe folgender Reihe zu suchen:

$$Aa + Bb + Cc + \ldots\ldots\ldots\ldots Zz$$

die wir $= Zs$ setzen wollen. Setzt man in der bekannten Reihe das vorletzte Glied $= Y$, und $x - 1$ statt x in den Ausdruck der Summe $S. Zs$: so geht derselbe in folgenden über:

$$Y\left(s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ꝛc.}\right)$$

Da dieser Ausdruck die Summe der Reihe Zs ohne das letzte Glied Zz darstellt, so wird

$$Zs - Zz = Ys - \frac{Yds}{dx} + \frac{Ydds}{2dx^2} - \frac{Yd^3s}{6dx^3} - \text{ꝛc.}$$

und diese Gleichung druckt das Verhältniß aus, welches die Summe Zs zu den Größen Y, Z und s hat.

§. 189.

Um dieselbe aufzulösen lasse man zuvörderst die Differenzial-Glieder aus der Acht, wodurch $s = \frac{Zz}{Z - Y}$ wird. Man setze $\frac{Zz}{Z - Y} = P^1$, und genau sey $s = P^1 + p$. Bringt man diesen Werth in die Gleichung, so erhält man:

$(Z-Y)p$

$$(Z-Y)p = -\frac{YdP^1}{dx} + \frac{YddP^1}{2dx^2} - \text{rc.}$$

$$-\frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^2} - \text{rc.}$$

Man setze auf beyden Seiten YP^1 hinzu, und da $P^1 - \frac{dP^1}{dx} + \frac{ddP^1}{2dx^2} - $ rc. der Werth von P^1 ist, der entsteht, wenn man $x-1$ für x nimmt, so sey dieser Werth $= P$. Alsdann ist

$$(Z-Y)p + YP^1 = YP - \frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^2} - \text{rc.}$$

und läßt man die Differenzialien weg, so wird

$$p = \frac{Y(P-P^1)}{Z-Y}.$$

Man setze $\frac{Y(P-P^1)}{Z-Y} = Q^1$, und dabey sey $p = Q^1 + q$: so wird

$$(Z-Y)q = -\frac{Y(dQ^1 + dq)}{dx} + \frac{Y(ddQ^1 + ddq)}{2dx^2} - \text{rc.}$$

und setzt man den Werth, welchen man für Q^1 findet, wenn man $x-1$ statt x setzt, $= Q$, so bekommt man

$$(Z-Y)q + YQ^1 = YQ - \frac{Ydq}{dx} + \frac{Yddq}{2dx^2} - \text{rc.}$$

woher denn, wenn man die Differenzialien wegläßt,

$$q = \frac{Y(Q-Q^1)}{Z-Y}$$

wird. Man setze $\frac{Y(Q-Q^1)}{Z-Y} = R^1$, und genau sey $q = R^1 + r$: so findet man auf ähnliche Art $r = \frac{Y(R-R^1)}{Z-Y}$, und fährt man auf diesem Wege fort, so wird die gesuchte Summe

$$Zs = Z(P^1 + Q^1 + R^1 + \text{rc.})$$ seyn.

§. 190.

§. 190.

Ist also irgend eine Reihe

$$Aa + Bb + Cc + \ldots\ldots + Yy + Zz$$

gegeben: so läßt sich die Summe derselben auf folgende Art bestimmen.

Man setze	und indem man $x - 1$ setzt	anstatt x
$\frac{Zz}{Z - Y} = P^1;$	gehe P^1	über in P
$\frac{Y(P - P^1)}{Z - Y} = Q^1;$	Q^1	Q
$\frac{Y(Q - Q^1)}{Z - Y} = R^1;$	R^1	R
$\frac{Y(R - R^1)}{Z - Y} = S^1;$	S^1	S

ꝛc.

Hat man diese Werthe gefunden, so ist die Summe der Reihe =

$$ZP^1 + ZQ^1 + ZR^1 + ZS^1 + \text{ꝛc.} + C$$

oder einer beständigen Größe, wobey die Summe $= 0$ wird, wenn man $x = 0$ setzt, oder, denn dies läuft eben darauf hinaus, wodurch alles so eingerichtet wird, daß dabey irgend einem bestimmten Falle ein Genüge geschieht.

§. 191.

Da diese Formel keine Differenzialien enthält, so ist ihre Anwendung in vielen Fällen sehr leicht, und man bekömmt darnach öfters die wahre Summe. Wird z. B. die Reihe:

$$p + 4p^2 + 9p^3 + 16p^4 + \ldots\ldots + x^2p^x$$

gegeben: so setze man $Z = p^x$ und $z = x^2$, wo also $Y = p^{x-1}$; $\frac{Z}{Z-Y} = \frac{p}{p-1}$; und $\frac{Y}{Z-Y} = \frac{1}{p-1}$ wird. Hierdurch bekommt man

$P =$

$$P^{I} = \frac{px^2}{p-1}; \quad P = \frac{pxx - 2px + p}{p-1}$$

$$Q^{I} = -\frac{2px+p}{(p-1)^2}; \quad Q = -\frac{2px+3p}{(p-1)^2}$$

$$R^{I} = \frac{2p}{(p-1)^3}; \quad R = \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$S^{I} =$ o; so wie auch alle übrige.

Folglich ist die Summe =

$$p^x\left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px+p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$=$$

$$p^{x+1}\left(\frac{x^2}{p-1} - \frac{2x}{(p-1)^2} + \frac{p+1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p-1}{(p-1)^3}$$

wie wir bereits oben gefunden haben.

§. 192.

Auf ähnliche Art, als wir zu diesem Summen-Ausdrucke gelangt sind, können wir einen andern für den Fall finden, wenn die gegebene Reihe nicht aus zwey andern Reihen zusammengesetzt ist; und dieser Ausdruck läßt sich insbesondere alsdenn brauchen, wenn man bey dem vorhergehenden endlich verschwindende Nenner bekommt. Es sey also die Reihe

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \qquad\qquad\quad x \\ s = a + b + c + d + \ldots\ldots + z \end{array}$$

gegeben. Da die Summe, wenn man $x-1$ für x setzt, das letzte Glied verliert, so ist

$$s - z = s - \frac{ds}{dz} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$z = \frac{ds}{dz} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Da

Da hier die Summe s selbst nicht vorkommt, so lasse man die höheren Differenzialien weg, damit $s = \int z\,dx$ werde. Ferner setze man $\int z\,dx = P^1$, der Werth davon gehe in P über, wenn man $x - 1$ für x setzt, und genau sey $s = P^1 + p$. Alsdann ist

$$z = \frac{dP^1}{dx} - \frac{ddP^1}{2dx^2} + \text{ꝛc.} + \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{Da } P = P^1 - \frac{dP^1}{dx} + \frac{ddP^1}{2dx^2} - \text{ꝛc. ist,}$$

so wird

$$Z - P^1 + P = \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \text{ꝛc.}$$

und daher

$$p = \int (Z - P^1 + P)\,dx.$$

Wird ferner $\int (Z - P^1 + P)\,dx = Q^1$ gesetzt, und geht dieser Werth in Q über, wenn man $x - 1$ für x setzt; so sey

$$\int (z - P^1 + P - Q^1 + Q)dx = R^1 = Q^1 - \int (Q^1 - Q)dx$$

ferner

$$R^1 - \int (R^1 - R)dx = S^1; \text{ ꝛc.}$$

so ist die gesuchte Summe

$$s = P^1 + Q^1 + R^1 + S^1 + \text{ꝛc.} + C$$

C so angenommen daß dadurch einem bestimmten Falle ein Genüge geschieht.

§. 193.

Durch eine geringe Veränderung der Buchstaben führt man diese Summation auf folgendes zurück. Es sey die Reihe:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & & x \\ s & = & a & + & b & + & c & + & d & + & \ldots\ldots\ldots + & z \end{array}$$

zu summiren.

Man setze	und wenn $x-1$ für x gesetzt wird	
$\int z\,dx = P$	so gehe P über in	p
$P - \int(P-p)dx = Q$	Q . . .	q
$Q - \int(Q-q)dx = R$	R . . .	r
2c.		

Hat man diese Werthe gefunden, so ist die gesuchte Summe

$$s = P + Q + R + S + \text{2c.}$$

und dieser Ausdruck druckt die Summe sehr vortheilhaft aus, wenn jene Integralien dargestellt werden können. Es sey, um den Gebrauch desselben durch ein Beyspiel zu erläutern, $z = xx + x$, so ist

$$P = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx; \qquad p = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}$$

$$P - p = xx - \tfrac{1}{6}; \quad \text{und } \int(P-p)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x$$

$$Q = \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x; \qquad q = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{3}$$

$$Q - q = x - \tfrac{1}{3}; \quad \text{und } \int(Q-q)dx = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{3}x$$

$$R = \tfrac{1}{2}x; \qquad r = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

$$R - r = \tfrac{1}{2}; \qquad \text{und } \int(R-r)dx = \tfrac{1}{2}x$$

$S = 0$; und so auch alle übrige Glieder. Daher ist die gesuchte Summe

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx\\ &\quad + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x = \tfrac{1}{3}x^3 + xx + \tfrac{2}{3}x = \tfrac{1}{3}x(x+1)(x+2)\\ &\qquad + \tfrac{1}{2}x.\end{aligned}$$

Auf diese Art lassen sich also die Summen aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, vermittelst fortgesetzter Integrationen finden; und es erhellet daraus sehr deutlich, was für ein weitläuftiges Feld die Lehre von der Summirung der Reihen sey, und was für eine Menge von Schriften mit den Methoden dazu, die theils schon bekannt sind, theils erst noch erfunden werden müssen, angefüllt werden könne.

§. 194.

§. 194.

Bis jetzt haben wir die Summen der Reihen vom ersten Gliede an bis zu dem, dessen Anzeiger x ist, gesucht, und nach der Erforschung derselben findet man die Summen eben dieser ohne Ende fortlaufenden Reihen, wenn man $x = \infty$ setzt. Oft gelangt man indeß hierzu auf eine bequemere Art, wenn man nicht die Summe der Glieder vom ersten an bis zu dem xten, sondern von dem xten an ohne Ende sucht, und es ist dieser Weg insbesondere bey den letztern Ausdrücken vortheilhaft. Es sey also eine Reihe gegeben, deren allgemeines oder dem Anzeiger x zugehöriges Glied durch z, das folgende zu dem Anzeiger $x + 1$ gehörige aber durch z^{I}, und die auf dieses folgenden durch z^{II}; z^{III}; angedeutet werden, und die Summe der Reihe zu suchen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & x & & x+1 & & x+2 & & x+3 & & \text{2c.} \\ s & = & z & + & z^{I} & + & z^{II} & + & z^{III} & + & \text{2c. ohne Ende.} \end{array}$$

Hier ist die Summe s eine solche Funktion von x, daß man, wenn man darin $x + 1$ statt x setzt, die Summe ohne das erste Glied erhält. Da also bey dieser Substitution s in

$$s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \text{2c.}$$

übergeht, so wird

$$s - z = s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{2c.}$$

oder

$$0 = z + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{2c.}$$

§. 195.

Wenn wir nun den vorigen Weg wieder betreten, so wird bey Vernachläßigung der höhern Differenzialien $s =$

$C - \int z\,dx$. Man setze also $\int z\,dx = P$, und genau sey $s = C - P + p$: so ist

$$o = z - \frac{dP}{dx} - \frac{ddP}{2dx^2} - \frac{d^3P}{6dx^3} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \text{etc.}$$

Es gehe P in P^{I} über, wenn man $x + 1$ für x setzt, so ist

$$o = z + P - P^{I} + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \text{etc.}$$

Setzt man daher die höhern Differenzialien bey Seite, so wird

$$p = \int(P^{I} - P)dx - P.$$

Man setze $\int(P^{I} - P)dx - P = -Q$, und dabey sey $p = -Q + q$: so ist

$$o = z + P - P^{I} - \frac{dQ}{dx} - \frac{ddQ}{2dx^2} - \text{etc.} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{etc.}$$

Es gehe Q in Q^{I} über, wenn man $x + 1$ für x setzt, so wird

$$o = z + P - P^{I} + Q - Q^{I} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{etc.}$$

und hieraus folgt

$$q = \int(Q^{I} - Q)dx - Q.$$

Wenn daher die I oberhalb neben jeder Größe den Werth anzeigt, welchen sie bekommt, wenn man $x + 1$ für x setzt, und dabey

$$\int z\,dx = P$$
$$P - \int(P^{I} - P)dx = Q$$
$$Q - \int(Q^{I} - Q)dx = R$$
$$R - \int(R^{I} - R)dx = S$$
$$\text{etc.}$$

angenommen wird, so ist die Summe der Reihe

$$z + z^{I} + z^{II} + z^{III} + z^{IV} + \text{etc.}$$
$$=$$
$$C - P - Q - R - S - \text{etc.}$$

wo

wo die beständige Größe C so beschaffen seyn muß, daß die ganze Summe verschwindet, wenn $x = \infty$ gesetzt wird. Da indeß die Anwendung dieses Ausdrucks Integrationen erfordert, so läßt sich der Gebrauch desselben hier noch nicht zeigen.

§. 196.

Um aber die Integral-Formeln zu vermeiden, wollen wir die Summe der Reihe $= ys$ setzen, wo y irgend eine bekannte Funktion von x bedeutet, welche die Werthe y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. bekommt, wenn man $x+1$; $x+2$; $x+3$; ꝛc. für x setzt. Setzt man nun $x+1$ für x so bekommt man die vorhergehende Reihe ohne das erste Glied, und die Summe dieser abgekürzten Reihe ist daher

$$y^{I}\left(s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \text{ꝛc.}\right) = ys - z$$

oder

$$z + \frac{y^{I}ds}{dx} + \frac{y^{I}dds}{2dx^2} + \frac{y^{I}d^3s}{6dx^3} + \text{ꝛc.} = (y - y^{I})s$$

Läßt man daher die Differenzialien weg, so bekommt man $s = \frac{z}{y - y^{I}}$. Man setze $\frac{z}{y^{I} - y} = P$, und genau sey $s = -P + p$: so wird

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{y^{I}dP}{dx} - \dfrac{y^{I}ddP}{2dx^2} - \dfrac{y^{I}d^3P}{6dx^3} - \text{ꝛc.} \\ + \dfrac{y^{I}dp}{dx} + \dfrac{y^{I}ddp}{2dx^2} + \dfrac{y^{I}d^3p}{6dx^3} + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = (y - y^{I})p$$

und also

$$\frac{y^{I}dp}{dx} + \frac{y^{I}ddp}{2dx^2} + \frac{y^{I}d^3p}{6dx^3} + \text{ꝛc.} = y^{I}(P^{I} - P) - (y^{I} - y)p$$

Man setze $Q = \frac{y^{I}(P^{I} - P)}{y^{I} - y}$, und dabey sey $p = Q + q$: so wird

$$y^{\text{I}}(Q^{\text{I}} - Q) + y^{\text{I}}\left(\frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{etc.}\right) = -(y^{\text{I}} - y)q$$

Man setze $R = \frac{y^{\text{I}}(Q^{\text{I}} - Q)}{y^{\text{I}} - y}$, und $q = -R + r$.

Fährt man auf diese Art fort, so wird die Summe der Reihe

$$z + z^{\text{I}} + z^{\text{II}} + z^{\text{III}} + z^{\text{IV}} + \text{etc.}$$

auf folgende Weise bestimmt. Es bedeute y irgend eine Funktion von x, und dabey werde gesetzt

$$P = \frac{z}{y^{\text{I}} - y} = \frac{z}{\Delta y}$$

$$Q = \frac{y^{\text{I}}(P^{\text{I}} - P)}{y^{\text{I}} - y} = \frac{y\Delta P}{\Delta y} + \Delta P$$

$$R = \frac{y^{\text{I}}(Q^{\text{I}} - Q)}{y^{\text{I}} - y} = \frac{y\Delta Q}{\Delta y} + \Delta Q$$

$$S = \frac{y^{\text{I}}(R^{\text{I}} - R)}{y^{\text{I}} - y} = \frac{y\Delta R}{\Delta y} + \Delta R$$

etc.

Alsdann ist die gesuchte Summe $=$

$$C - Py - Qy - Ry - Sy - \text{etc.}$$

wenn man für C eine solche beständige Größe nimmt, daß die Summe verschwindet, wenn man $x = \infty$ setzt.

§. 197.

Man nehme $y = a^x$, so wird, weil dann $y^{\text{I}} = a^{x+1}$ ist,

$$y^{\text{I}} - y = a^x(a - 1)$$

und folglich

$$P = \frac{z}{a^x(a-1)}; \qquad P^{\text{I}} = \frac{z^{\text{I}}}{a^{x+1}(a-1)}$$

$$Q = \frac{a(P^{\text{I}} - P)}{a - 1} = \frac{z^{\text{I}} - az}{a^x(a-1)^2}; \quad Q^{\text{I}} = \frac{z^{\text{II}} - az^{\text{I}}}{a^{x+1}(a-1)^2}$$

$$R = \frac{a(Q^{\text{I}} - Q)}{a - 1} = \frac{z^{\text{II}} - 2az^{\text{I}} + aaz}{a^x(a-1)^3}$$

S =

$$S = \frac{a(R^{I} - R)}{a - 1} = \frac{z^{III} - 3az^{II} + 3a^{2}z^{I} - a^{3}z}{a^{x}(a - 1)^{4}}$$

rc.

Daher ist die Summe der gegebenen Reihe:

$$C - \frac{z}{a - 1} + \frac{z^{I} - az}{(a - 1)^{2}} - \frac{z^{II} + 2az^{I} - a^{2}z}{(a - 1)^{3}}$$
$$+ \frac{z^{III} - 3az^{II} + 3a^{2}z^{I} - a^{3}z}{(a - 1)^{4}}$$

rc.

Eben dieser Summen-Ausdruck ist schon oben im ersten Capitel gefunden worden. Es lassen sich aber hieraus, indem man für y andere Werthe setzt, unzählige andere Ausdrücke ableiten, und daraus jedesmal derjenige wählen, welche für den daseyenden Fall der bequemste ist.

Achtes Capitel.

Von dem Gebrauch und dem Nutzen der Differenzial-Rechnung bey Formirung der Reihen.

§. 198.

Nun ist noch eine Anwendung der Differenzial-Rechnung in der Lehre von den Reihen übrig. Diese findet bey der Formirung der Reihen statt, und sie war es, welche oben gemeint wurde, als von der Entwickelung der Brüche, die eine Potestät irgend einer Funktion zum Nenner haben, in Reihen, die Rede war. Man verfährt dabey auf ähnliche Art als bey der Verwandlung der Funktionen in Reihen, wenn die zu verwandelnde Funktion einer Reihe gleich gesetzt wird, die in jedem ihrer Glieder unbestimmte Coefficienten hat, welche darauf aus gemachten Gleichungen entwickelt werden. Diese Entwickelung oder Bestimmung wird aber öfters in einem bewundernswürdigen Grade erleichtert und verkürzt, wenn man zuvor die Gleichung auf Differenzialien, erste sowohl als zweyte bisweilen, bringt; und da diese Methode in der Integral-Rechnung außerordentlichen Nutzen gewährt, so wollen wir sie im gegenwärtigen Capitel ausführlich kennen zu lernen suchen.

§. 199.

§. 199.

Zuvörderst will ich kürzlich dasjenige wiederholen, was ich oben über die Entwickelung der Brüche in Reihen, in so fern dieselbe ohne Differenzial-Rechnung zu Stande gebracht wird, gesagt habe. Es sey also irgend ein Bruch:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{rc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{rc.}} = s$$

nach den Potestäten von x in eine Reihe zu verwandeln. Man setze s einer unbestimmten Reihe gleich, oder

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \text{rc.}$$

Da, wenn man den Bruch durch die Multiplication wegschafft,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \text{rc.}$$
$$=$$
$$s(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \eta x^6 + \text{rc.})$$

wird: so bekommt man, wenn man für s die vorhin dafür angenommene Reihe setzt,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{rc.}$$
$$=$$
$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{A}\alpha & + \mathfrak{B}\alpha x & + \mathfrak{C}\alpha x^2 & + \mathfrak{D}\alpha x^3 & + \mathfrak{E}\alpha x^4 & + \mathfrak{F}\alpha x^5 \quad + \text{rc.} \\
 & + \mathfrak{A}\beta & + \mathfrak{B}\beta & + \mathfrak{C}\beta & + \mathfrak{D}\beta & + \mathfrak{E}\beta \quad + \text{rc.} \\
 & & + \mathfrak{A}\gamma & + \mathfrak{B}\gamma & + \mathfrak{C}\gamma & + \mathfrak{D}\gamma \quad + \text{rc.} \\
 & & & + \mathfrak{A}\delta & + \mathfrak{B}\delta & + \mathfrak{C}\delta \quad + \text{rc.} \\
 & & & & + \mathfrak{A}\varepsilon & + \mathfrak{B}\varepsilon \quad + \text{rc.} \\
 & & & & & + \mathfrak{A}\zeta \quad + \text{rc.}
\end{array}$$

Setzt man daher die einzelnen Glieder, welchen einerley Potestät von x zugehört, einander gleich: so findet man

$$\mathfrak{A}\alpha - A = 0$$
$$\mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\beta - B = 0$$
$$\mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{A}\gamma - C = 0$$
$$\mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{C}\beta + \mathfrak{B}\gamma + \mathfrak{A}\delta - D = 0$$
$$\mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{B}\delta + \mathfrak{A}\varepsilon - E = 0$$
$$\text{rc.}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die angenommenen Coefficienten A, B, C, D, 2c. bestimmen, und dadurch wird denn auch die Reihe

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{2c.}$$

gefunden, welche dem gegebenen Bruche s gleich ist. Wenn sowohl der Zähler als der Nenner des Bruchs s aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, so sind unter dieser Form alle wiederkehrende Reihen enthalten, von welchen die Einleitung eine vollständige Auseinandersetzung enthält.

§. 200.

Wenn aber entweder der Zähler oder der Nenner oder beyde zu irgend einer Dignität erhoben sind, so findet man auf diesem Wege die Reihe nicht anders als mit vieler Mühe, weil die Erhebung zu Dignitäten, den Fall ausgenommen, daß ein Binomium da ist, weitläuftige Arbeit erfordert. Durch die Differenzial-Rechnung kann man sich dieser Arbeit überheben. Es sey zuvörderst bloß der Zähler da, oder

$$s = (A + Bx + Cxx)^n$$

und eine nach den Potestäten von x fortschreitende Reihe zu suchen, welche der Dignität dieser dreytheiligen Größe gleich sey. Ist n eine ganze positive Zahl, so ist bekannt, daß diese Reihe nur eine endliche Zahl von Gliedern enthalte. Man nehme also wieder für s eine unbestimmte Reihe an, oder setze

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \mathfrak{G}x^6 + \text{2c.}$$

Daß das erste Glied dieser Reihe $\mathfrak{A} = A^n$ sey, ist bekannt. Denn setzt man $x = 0$, so wird aus der ersten Formel $s = A^n$, und aus der andern $s = \mathfrak{A}$. Man muß aber die Bestimmung dieses ersten Gliedes auf diese Art ohne Differenzialien suchen, weil die Differenzialien dasselbe unbestimmt lassen, wie sogleich erhellen wird.

§. 201.

Da $s = (A + Bx + Cx^2)^n$: so wird, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$ls = nl(A + Bx + Cx^2)$$

und hieraus, wenn man differenziirt,

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx}{A + Bx + Cx^2}, \text{ oder}$$

$$(A + Bx + Cx^2)\frac{ds}{dx} = ns(B + 2Cx)$$

Aus der angenommenen Reihe aber erhält man

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \text{rc.}$$

und wenn man daher für $\frac{ds}{dx}$ diese Reihe, und für s die angenommene Reihe setzt, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} & + 2A\mathfrak{C}x & + 3A\mathfrak{D}x^2 & + 4A\mathfrak{E}x^3 & + 5A\mathfrak{F}x^4 & + \text{rc.} \\
+ B\mathfrak{B} & + 2B\mathfrak{C} & + 3B\mathfrak{D} & + 4B\mathfrak{E} & + \text{rc.} & \\
& + C\mathfrak{B} & + 2C\mathfrak{C} & + 3C\mathfrak{D} & + \text{rc.} &
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{llllll}
nB\mathfrak{A} & + nB\mathfrak{B} & + nB\mathfrak{C} & + nB\mathfrak{D} & + nB\mathfrak{E} & + \text{rc.} \\
& + 2nC\mathfrak{A} & + 2nC\mathfrak{B} & + 2nC\mathfrak{C} & + 2nC\mathfrak{D} & + \text{rc.}
\end{array}$$

Setzt man also die Glieder gleich, in welchen sich einerley Potestät von x findet: so wird,

$$\mathfrak{B} = \frac{nB\mathfrak{A}}{A}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{(n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A}}{2A}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{(n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B}}{3A}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{(n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C}}{4A}$$

$\mathfrak{F} =$

$$\mathfrak{F} = \frac{(n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D}}{5A}$$

rc.

Da also, wie wir vorhin gesehen haben $\mathfrak{A} = A^n$ ist, so wird $\mathfrak{B} = nA^{n-1}B$, und hieraus lassen sich die übrigen Coefficienten insgesammt nach und nach bestimmen. Das Fortschreitungsgesetz derselben fällt aus diesen Formeln ganz leicht in die Augen, aber es würde sehr schwer zu entdecken gewesen seyn, wenn man das Trinomium unmittelbar zu den Potestäten hätte erheben wollen.

§. 202.

Eben diese Methode läßt sich anwenden, wenn überhaupt eine vieltheilige Größe zu einer Potestät erhoben werden soll. Denn es sey

$$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{rc.})^n$$

und

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{rc.}$$

angenommen werden: so ist $\mathfrak{A} = A^n$, und diesen Werth findet man, wenn man $x = 0$ setzt. Nimmt man nun wie vorhin die Logarithmen und ihre Differenzialien: so wird

$$\frac{ds}{s} = \frac{nBdx + 2nCxdx + 3nDx^2dx + 4nEx^3dx + \text{rc.}}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{rc.}}$$

oder

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{rc.})\frac{ds}{dx}$$

$$=$$

$$s(nB + 2nCx + 3nDx^2 + 4nEx^3 + \text{rc.})$$

Da ferner

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + 5\mathfrak{F}x^4 + \text{rc.}$$

ist,

ist, so bekömmt man, wenn man diese Reihen für s und $\frac{ds}{dx}$ substituirt,

$$\begin{array}{llllll}
A\mathfrak{B} & +2A\mathfrak{C}x & +3A\mathfrak{D}x^2 & +4A\mathfrak{E}x^3 & +5A\mathfrak{F}x^4 & +\text{ꝛc.} \\
 & +B\mathfrak{B} & +2B\mathfrak{C} & +3B\mathfrak{D} & +4B\mathfrak{E} & +\text{ꝛc.} \\
 & & +C\mathfrak{B} & +2C\mathfrak{C} & +3C\mathfrak{D} & +\text{ꝛc.} \\
 & & & +D\mathfrak{B} & +2D\mathfrak{C} & +\text{ꝛc.} \\
 & & & & +E\mathfrak{B} & +\text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{llllll}
nB\mathfrak{A} & +nB\mathfrak{B} & +nB\mathfrak{C} & +nB\mathfrak{D} & +nB\mathfrak{E} & +\text{ꝛc.} \\
 & +2nC\mathfrak{A} & +2nC\mathfrak{B} & +2nC\mathfrak{C} & +2nC\mathfrak{D} & +\text{ꝛc.} \\
 & & +3nD\mathfrak{A} & +3nD\mathfrak{B} & +3nD\mathfrak{C} & +\text{ꝛc.} \\
 & & & +4nE\mathfrak{A} & +4nE\mathfrak{B} & +\text{ꝛc.} \\
 & & & & +5nF\mathfrak{A} & +\text{ꝛc.}
\end{array}$$

Hieraus lassen sich folgende Bestimmungen herleiten:

$$\begin{aligned}
A\mathfrak{B} &= n\,.\,B\mathfrak{A} \\
2A\mathfrak{C} &= (n-1)B\mathfrak{B} + 2nC\mathfrak{A} \\
3A\mathfrak{D} &= (n-2)B\mathfrak{C} + (2n-1)C\mathfrak{B} + 3nD\mathfrak{A} \\
4A\mathfrak{E} &= (n-3)B\mathfrak{D} + (2n-2)C\mathfrak{C} + (3n-1)D\mathfrak{B} + 4nE\mathfrak{A} \\
5A\mathfrak{F} &= (n-4)B\mathfrak{E} + (2n-3)C\mathfrak{D} + (3n-2)D\mathfrak{C} + (4n-1)E\mathfrak{B} + 5nF\mathfrak{A} \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

und wie man aus diesen Formeln die angenommenen Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. selbst bestimme, und wie sie von einander abhangen, bedarf, da $\mathfrak{A} = A^n$ ist, keiner weitern Erörterung.

§. 203.

Da jede Potestät von $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ꝛc. wenn diese Größe aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, und n eine ganze positive Zahl ist, ebenfalls aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen muß: so ist klar, daß in diesem Falle die gefundenen Formeln endlich verschwinden.

Und

Und da, sobald ein Glied verschwindet, bereits alle Glieder da seyn müssen, so erhellet auch, daß mit einem Gliede sogleich alle folgende Null werden. Es sey die gegebene Formel ein Trinomium $A + Bx + Cx^2$, und der Cubus davon zu suchen; also $n = 3$. Alsdann ist

$$\begin{array}{rcll}
\mathfrak{A} & = & A^3 \quad \text{und also}; & \mathfrak{A} = A^3 \\
A\mathfrak{B} & = & 3B\mathfrak{A} \quad ; & \mathfrak{B} = 3A^2B \\
2A\mathfrak{C} & = & 2B\mathfrak{B} + 6C\mathfrak{A}; & \mathfrak{C} = 3AB^2 + 3A^2C \\
3A\mathfrak{D} & = & 1B\mathfrak{C} + 5C\mathfrak{B}; & \mathfrak{D} = B^3 + 6ABC \\
4A\mathfrak{E} & = & 0 + 4C\mathfrak{C}; & \mathfrak{E} = 3B^2C + 3AC^2 \\
5A\mathfrak{F} & = & -B\mathfrak{E} + 3C\mathfrak{D}; & \mathfrak{F} = 3BC^2 \\
6A\mathfrak{G} & = & -2B\mathfrak{F} + 2C\mathfrak{E}; & \mathfrak{G} = C^3 \\
7A\mathfrak{H} & = & -3B\mathfrak{G} + 1C\mathfrak{F}; & \mathfrak{H} = 0 \\
8A\mathfrak{J} & = & -4B\mathfrak{H} + 0 \quad ; & \mathfrak{J} = 0.
\end{array}$$

Da also schon zwey Glieder $= 0$ sind, und jedes von den folgenden von den beyden vorhergehenden abhängt, so fällt in die Augen, daß auch alle diese folgende Glieder $= 0$ seyn müssen. Um so merkwürdiger ist das Gesetz, nach welchem, wie wir gefunden haben, diese Coefficienten von einander abhangen.

§. 204.

Wenn n eine negative Zahl und also s einem Bruche gleich ist: so läuft die Reihe ohne Ende fort. Es sey also,

$$s = \frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^n}$$

und für den Werth dieses Bruchs folgende Reihe angenommen:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \text{etc.}$$

Setzt man in den obigen Formeln statt der Buchstaben A, B, C, D, etc. diese: α, β, γ, δ, etc. und nimmt dabey zugleich n nega-

negativ: so bekommt man folgende Bestimmungen der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, rc.:

$$\mathfrak{A} = a^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

$$\alpha\mathfrak{B} + \quad n\beta\mathfrak{A} = 0$$

$$2\alpha\mathfrak{C} + (n+1)\beta\mathfrak{B} + \quad 2n\gamma\mathfrak{A} = 0$$

$$3\alpha\mathfrak{D} + (n+2)\beta\mathfrak{C} + (2n+1)\gamma\mathfrak{B} + \quad 3n\delta\mathfrak{A} = 0$$

$$4\alpha\mathfrak{E} + (n+3)\beta\mathfrak{D} + (2n+2)\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)\delta\mathfrak{B} + \quad 4n\varepsilon\mathfrak{A} = 0$$

$$5\alpha\mathfrak{F} + (n+4)\beta\mathfrak{E} + (2n+3)\gamma\mathfrak{D} + (3n+2)\delta\mathfrak{C} + (4n+1)\varepsilon\mathfrak{B} + 5n\zeta\mathfrak{A} = 0$$

rc.

In diesen Formeln nimmt man eben das Gesetz wahr, welches wir bereits in der Einleitung kennen gelernt haben, dessen Richtigkeit aber erst hier streng dargethan werden konnte.

§. 205.

Auf diese Art verhält es sich, wenn der Zähler des Bruchs $= 1$, oder auch irgend eine Potestät von x, oder $= x^m$ ist, denn in diesem letzten Falle darf man nur die gefundene Reihe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 +$ rc. durch x^m multipliciren. Wenn aber der Zähler aus zwey und mehrern Gliedern besteht, so haben wir dafür oben das Fortschreitungsgesetz noch nicht bemerkt, und wollen es daher jetzt auf dem Wege der Differenzialien kennen zu lernen suchen. Es sey also

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{rc.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{rc.})^n}$$

und für den Werth dieses Bruchs die Reihe angenommen:

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \mathfrak{F}x^5 + \text{rc.}$$

Um das erste Glied $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, setze man $x = 0$, wobey man aus den ersten Ausdrücken $s = \frac{A}{\alpha^n}$, und aus der angenommenen Reihe $s = \mathfrak{A}$ erhält. Folglich ist nothwendiger Weise

Weise $A = \frac{A}{\alpha^n}$; und hat man dieses Glied, so lassen sich die übrigen durch die Differenziation finden.

§. 206.

Nimmt man die Logarithmen, so wird

$$\begin{aligned} ls = {} & l(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.) \\ & - nl(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \&c.) \end{aligned}$$

und differenziirt man, so ergiebt sich

$$\frac{ds}{s} = \frac{Bdx + 2Cdx + 3Dx^2dx + \&c.}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.} - \frac{n\beta dx - 2n\gamma x dx - 3n\delta x^2 dx - \&c.}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \&c.}$$

Schafft man ferner die Brüche vermittelst der Multiplication weg, so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{llllll} (A\alpha & + A\beta x & + A\gamma x^2 & + A\delta x^3 & + \&c. \\ & + B\alpha & + B\beta & + B\gamma & + \&c. \\ & & + C\alpha & + C\beta & + \&c. \\ & & & + D\alpha & + \&c. \end{array}\right\} \frac{ds}{dx} =$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} (B\alpha & + B\beta x & + B\gamma x^2 & + B\delta x^3 & + B\varepsilon x^4 & + \&c. \\ & + 2C\alpha & + 2C\beta & + 2C\gamma & + 2C\delta & + \&c. \\ & & + 3D\alpha & + 3D\beta & + 3D\gamma & + \&c. \\ & & & + 4E\alpha & + 4E\beta & + \&c. \\ & & & & + 5F\alpha & + \&c. \end{array}\right\} s$$

$$\left.\begin{array}{lllllll} -(A\beta & + 2A\gamma x & + 3A\delta x^2 & + 4A\varepsilon x^3 & + 5A\zeta x^4 & + \&c. \\ & + B\beta & + 2B\gamma & + 3B\delta & + 4B\varepsilon & + \&c. \\ & & + C\beta & + 2C\gamma & + 3C\delta & + \&c. \\ & & & + D\beta & + 2D\gamma & + \&c. \\ & & & & + E\beta & + \&c. \end{array}\right\} ns$$

Da nun $\frac{ds}{dx} = \mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}x + 3\mathfrak{D}x^2 + 4\mathfrak{E}x^3 + \&c.$ ist: so wird, wenn man substituirt:

$A\alpha\mathfrak{B}$

$$A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} - B\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + 2nA\gamma\mathfrak{A} + (n-1)B\beta\mathfrak{A} - 2C\alpha\mathfrak{A} = 0$$

$$\left.\begin{array}{rrrr}
3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} & + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} & + & 3nA\delta\mathfrak{A} \\
+ & B\alpha\mathfrak{C} + & nB\beta\mathfrak{B} & + (2n-1)B\gamma\mathfrak{A} \\
& - & C\alpha\mathfrak{B} & + (n-2)C\beta\mathfrak{A} \\
& & - & 3D\alpha\mathfrak{A}
\end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} & + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} & + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} & + & 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\
+ & 2B\alpha\mathfrak{D} + (n+1)B\beta\mathfrak{C} & + & 2nB\gamma\mathfrak{B} & + (3n-1)B\delta\mathfrak{A} \\
& + & 0C\alpha\mathfrak{C} + (n-1)C\beta\mathfrak{B} & & + (2n-2)C\gamma\mathfrak{A} \\
& & - & 2D\alpha\mathfrak{B} & + (n-3)D\beta\mathfrak{A} \\
& & & - & 4E\alpha\mathfrak{A}
\end{array}\right\} = 0$$

Hieraus läßt sich das Gesetz, nach welchem sich diese Formeln richten, leicht erkennen. Denn zuvörderst findet in der ersten Zeile einer jeden Gleichung eben das Gesetz statt, welches wir §. 284. gehabt haben. Ferner entstehen die Coefficienten in den zweyten Zeilen, wenn man von den Coefficienten der obern Zeilen $n + 1$ abzieht, und auf eben diese Art entstehen die Coefficienten jeder folgenden Reihe aus den der zunächst vorhergehenden. Was endlich die Buchstaben betrifft, die in einem jeden Gliede vorkommen, so lehrt der Anblick selbst die Art, wie sie mit einander verbunden werden müssen.

§. 207.

Wenn aber auch der Zähler des Bruchs eine Potestät, oder

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.})^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^n}$$

und die für den Werth dieses Bruchs angenommene Reihe

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.}$$

 ist:

ist: so wird $\mathfrak{A} = \frac{A^m}{\alpha^n}$, und die übrigen Coefficienten werden aus folgenden Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{r} A\alpha\mathfrak{B} + nA\beta\mathfrak{A} \\ -mB\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A\alpha\mathfrak{C} + (n+1)A\beta\mathfrak{B} + \quad 2nA\gamma\mathfrak{A} \\ -(m-1)B\alpha\mathfrak{B} + (n-m)B\beta\mathfrak{A} \\ - \quad 2mC\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3A\alpha\mathfrak{D} + (n+2)A\beta\mathfrak{C} + (2n+1)A\gamma\mathfrak{B} + \quad 3nA\delta\mathfrak{A} \\ -(m-2)B\alpha\mathfrak{C} + (n-m+1)B\beta\mathfrak{B} + (2n-m)B\gamma\mathfrak{A} \\ -(2m-1)C\alpha\mathfrak{B} + (n-2m)C\beta\mathfrak{A} \\ - \quad 3mD\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A\alpha\mathfrak{E} + (n+3)A\beta\mathfrak{D} + (2n+2)A\gamma\mathfrak{C} + (3n+1)A\delta\mathfrak{B} + \quad 4nA\varepsilon\mathfrak{A} \\ -(m-3)B\alpha\mathfrak{D} + (n-m+2)B\beta\mathfrak{C} + (2n-m+1)B\gamma\mathfrak{B} + (3n-m)B\delta\mathfrak{A} \\ -(2m-2)C\alpha\mathfrak{C} + (n-2m+1)C\beta\mathfrak{B} + (2n-2m)C\gamma\mathfrak{A} \\ -(3m-1)D\alpha\mathfrak{B} + (n-3m)D\beta\mathfrak{A} \\ - \quad 4mE\alpha\mathfrak{A} \end{array}\right\}$$

$$= 0$$

ꝛc.

Das Gesetz, nach welchem diese Formeln weiter fortgesetzt werden können, läßt sich leichter aus dem Anblicke selbst erkennen als durch Worte beschreiben. Steigt man aber herab, so werden die Coefficienten um $n + m$ vermindert, dagegen, wenn man horizontal fortgeht, um $n - 1$ vermehrt.

§. 208.

Hierdurch erhält die Lehre von den wiederkehrenden Reihen einen Zuwachs, indem wir den bisherigen Mangel ersetzt, und das Gesetz der Coefficienten nicht nur für den Fall bestimmt haben, wenn der Nenner des Bruchs irgend eine Potestät ist, sondern auch für den, wenn der Zähler aus

mehrern

mehrern Theilen besteht. Für diesen Fall das gedachte Gesetz zu finden, war der Weg der Induction nicht hinreichend. Außer den mannigfaltigen schon beschriebenen Vortheilen, welche man von den wiederkehrenden Reihen haben kann, gewähren dieselben auch bey der Erfindung der Summen der Reihen durch die Näherung sehr großen Nutzen; wovon wir bereits im ersten Capitel ein Beyspiel gehabt haben, indem wir daselbst eine Reihe vermittelst der Substitution $x = \frac{y}{1 + ny}$ in eine andere verwandelten, deren Gliederzahl öfters endlich ist. Diese Methode hätte sich dadurch noch weiter ausdehnen lassen, daß man für x andere Funktionen gesetzt hätte. Allein weil damals das Fortschreitungs-Gesetz der Reihen noch nicht bekannt war, welche man für die Potestäten der Funktionen von x würde haben setzen müssen: so hat es mir besser geschienen, diese Erweiterung für den gegenwärtigen Ort aufzubehalten, wo jenes Gesetz seinem ganzen Umfange nach bekannt ist. Bey genauerer Ueberlegung findet man indeß, daß dieses Geschäft auch ohne das erwähnte Fortschreitungs-Gesetz von statten gehe, wenn man nemlich die Methode zu Hülfe nimmt, wodurch wir dieses Gesetz selbst gefunden haben.

§. 209.

Es sey also die Reihe

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ꝛc.}$$

in eine andere zu verwandeln, deren Glieder Brüche sind, wovon die Nenner nach den Potestäten dieser Formel $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ ꝛc. fortschreiten. Um von den einfachern Fällen anzufangen, wollen wir

$$s = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B} x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C} x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D} x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{ꝛc.}$$

 anneh-

annehmen. Man setze diese Reihe der vorhergehenden gleich, und multiplicire auf beyden Seiten durch $\alpha + \beta x$: so wird:

$$\begin{matrix} A\alpha + B\alpha x + C\alpha x^2 + D\alpha x^3 + \text{ꝛc.} \\ + A\beta \quad + B\beta \quad + C\beta \quad + \text{ꝛc.} \end{matrix} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha+\beta x)^2} + \text{ꝛc.}$$

Man setze $\mathfrak{A} = A\alpha$, und mache

$$\begin{aligned} A\beta + B\alpha &= A^{I} \\ B\beta + C\alpha &= B^{I} \\ C\beta + D\alpha &= C^{I} \\ D\beta + E\alpha &= D^{I} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Alsdann findet man nach der Division durch x,

$$A^{I} + B^{I}x + C^{I}x^2 + D^{I}x^3 + \text{ꝛc.} = \frac{\mathfrak{B}}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{C}x}{(\alpha+\beta x)^2} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \text{ꝛc.}$$

Nun multiplicire man abermals durch $\alpha + \beta x$, und setze

$$\begin{aligned} A^{I}\beta + B^{I}\alpha &= A^{II} \\ B^{I}\beta + C^{I}\alpha &= B^{II} \\ C^{I}\beta + D^{I}\alpha &= C^{II} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird

$$A^{I}\alpha + A^{II}x + B^{II}x^2 + C^{II}x^3 + \text{ꝛc.} = \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}x}{\alpha+\beta x} + \frac{\mathfrak{D}x^2}{(\alpha+\beta x)^3} + \text{ꝛc.}$$

Hat man auf diese Art $\mathfrak{B} = A^{I}\alpha$ gefunden, so wird, wenn man auf ähnliche Art fortfährt, und dabey

$$\begin{aligned} A^{II}\beta + B^{II}\alpha &= A^{III} \\ B^{II}\beta + C^{II}\alpha &= B^{III} \\ C^{II}\beta + D^{II}\alpha &= C^{III} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} A^{III}\beta + B^{III}\alpha &= A^{IV} \\ B^{III}\beta + C^{III}\alpha &= B^{IV} \\ C^{III}\beta + D^{III}\alpha &= C^{IV} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

setzt,

$$\mathfrak{C} = A^{II}\alpha; \quad \mathfrak{D} = A^{III}\alpha; \quad \mathfrak{E} = A^{IV}\alpha; \quad \text{ꝛc.}$$

und die Summe der gegebenen Reihe läßt sich daher auf folgende Art ausdrucken:

$s =$

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A^{I}\alpha x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{A^{II}\alpha x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{A^{III}\alpha x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{ꝛc.}$$

Eben diese Reihe würde man erhalten haben, wenn man die Substitution $\frac{x}{\alpha + \beta x} = y$ oder $x = \frac{\alpha y}{1 - \beta y}$ gebraucht hätte.

§. 210.

Diese Verwandlung wird mit dem besten Erfolge vorgenommen, wenn die gegebene Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ꝛc. so beschaffen ist, daß sie endlich mit der wiederkehrenden oder vielmehr geometrischen Reihe zusammenstimmt, welche aus dem Bruche $\frac{P}{\alpha + \beta x}$ entsteht. Denn alsdann verschwinden endlich die Werthe A^{I}, B^{I}, C^{I}, D^{I}, ꝛc. und es müssen daher die Buchstaben A^{II}, A^{III}, A^{IV}, ꝛc. noch weit mehr eine sehr convergirende Reihe bilden. Wir können aber auf ähnliche Art auch bey drey- und mehrtheiligen Nennern verfahren, und der Nutzen davon ist insbesondere alsdenn sehr groß, wenn die gegebene Reihe endlich mit einer wiederkehrenden Reihe zusammenstimmt. Ist also z. B. die Reihe

$$s = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{ꝛc.}$$

gegeben: so setze man

$$s = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}^{I}x^2 + \mathfrak{B}^{I}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{\mathfrak{A}^{II}x^4 + \mathfrak{B}^{II}x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \frac{\mathfrak{A}^{III}x^6 + \mathfrak{B}^{III}x^7}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^4} + \text{ꝛc.}$$

Ferner multiplicire man allenthalben durch $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, und setze

$$A\gamma + B\beta + C\alpha = A^{I}$$
$$B\gamma + C\beta + D\alpha = B^{I} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = A\alpha$$

$$C\gamma + D\beta + E\alpha = C^{I} \qquad \mathfrak{B} = A\beta + B\alpha$$
$$\text{rc.}$$

so entsteht eine der vorigen ähnliche Gleichung, wenn man durch xx dividirt:

$$A^{I} + B^{I}x + C^{I}x^2 + D^{I}x^3 + E^{I}x^4 + \text{rc.} =$$
$$\frac{\mathfrak{A}^{I} + \mathfrak{B}^{I}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{\mathfrak{A}^{II}x^2 + \mathfrak{B}^{II}x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{\mathfrak{A}^{III}x^4 + \mathfrak{B}^{III}x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \text{rc.}$$

Wenn man also wie vorhin verfährt, und

$$\begin{array}{lll} A^{I}\gamma + B^{I}\beta + C^{I}\alpha = A^{II} & & \\ B^{I}\gamma + C^{I}\beta + D^{I}\alpha = B^{II} & \mathfrak{A}^{I} & = A^{I}\alpha \\ C^{I}\gamma + D^{I}\beta + C^{I}\alpha = C^{II} & \mathfrak{B}^{I} & = A^{I}\beta + B^{I}\alpha \\ \text{rc.} & & \text{ferner} \\ A^{II}\gamma + B^{II}\beta + C^{II}\alpha = A^{III} & & \\ B^{II}\gamma + C^{II}\beta + D^{II}\alpha = B^{III} & \mathfrak{A}^{II} & = A^{II}\alpha \\ C^{II}\gamma + D^{II}\beta + E^{II}\alpha = C^{III} & \mathfrak{B}^{II} & = A^{II}\beta + B^{II}\alpha \\ \text{rc.} & & \end{array}$$

setzt, und so ferner die ähnlichen Werthe aufsucht: so wird

$$s = \frac{A\alpha + (A\beta + B\alpha)x}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} + \frac{(A^{I}\alpha + (A^{I}\beta + B^{I}\alpha)x)x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}$$
$$+ \frac{(A^{II}\alpha + (A^{II}\beta + B^{II}\alpha)x)x^4}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^3} + \text{rc.}$$

§. 211.

Wenn $x = 1$ gesetzt wird, und der Umfang der gefundenen Formeln leidet durch diese Substitution nicht, da α, β, γ, nach Gefallen angenommen werden können; folglich

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \text{rc.}$$

ist: so erhält man, wenn man nach und nach

$$\begin{array}{l|l} A\gamma + B\beta + C\alpha = A' & A'\gamma + B'\beta + C'\alpha = A'' \text{ und} \\ B\gamma + C\beta + D\alpha = B' & B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = B'' \text{ so} \\ C\gamma + D\beta + E\alpha = C' & C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = C'' \text{ ferner} \\ \text{rc.} & \text{rc.} \end{array}$$

außer-

außerdem aber noch der Kürze wegen

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$

gesetzt wird, die Summe

$$s = (\alpha + \beta)\left(\frac{A}{m^1} + \frac{A'}{m^2} + \frac{A''}{m^3} + \frac{A'''}{m^4} + \text{ꝛc.}\right) + \alpha\left(\frac{B}{m} + \frac{B'}{m^2} + \frac{B''}{m^3} + \frac{B'''}{m^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

§. 212.

Auf eben die Art kann man auch noch mehrtheilige Nenner nehmen. Da indeß die Verfahrungsart aus dem Vorhergehenden schon hinlänglich abgenommen werden kann, so wollen wir uns bloß auf einen viertheiligen einschränken. Es sey also

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \text{ꝛc.}$$

Man suche folgende Werthe:

$$A\delta + B\gamma + C\beta + D\alpha = A'$$
$$B\delta + C\gamma + D\beta + E\alpha = B'$$
$$C\delta + D\gamma + E\beta + F\alpha = C'$$

ꝛc.

$$A'\delta + B'\gamma + C'\beta + D'\alpha = A''$$
$$B'\delta + C'\gamma + D'\beta + E'\alpha = B''$$
$$C'\delta + D'\gamma + E'\beta + F'\alpha = C''$$

ꝛc.

$$A''\delta + B''\gamma + C''\beta + D''\alpha = A'''$$
$$B''\delta + C''\gamma + D''\beta + E''\alpha = B'''$$
$$C''\delta + D''\gamma + E''\beta + F''\alpha = C'''$$

ꝛc.

Ferner sey

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = m.$$

Alsdann ist

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{A}{m}+\frac{A'}{m^2}+\frac{A''}{m^3}+\frac{A'''}{m^4}+\text{etc.}\right)$$
$$s=(\alpha+\beta)\left(\frac{B}{m}+\frac{B'}{m^2}+\frac{B''}{m^3}+\frac{B'''}{m^4}+\text{etc.}\right)$$
$$+\alpha\left(\frac{C}{m}+\frac{C'}{m^2}+\frac{C''}{m^3}+\frac{C'''}{m^4}+\text{etc.}\right)$$

Hieraus ist klar wie die Reihe fortschreitet, wenn dem Nenner m mehr Theile gegeben werden.

§. 213.

Es ist aber nicht nothwendig, daß die Nenner der Brüche, auf welche wir die Summe der Reihe bringen, gerade Potestäten derselben Formel, $\alpha+\beta x+\gamma x^2+$ etc. sind, sondern es kann in jedem Gliede eine andere Formel statt finden. Damit dieses deutlich werde, wollen wir zuvörderst nur zwey Glieder nehmen, und setzen, daß die Reihe

$$s=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{etc.}$$

in folgende Bruch-Reihe verwandelt werden solle:

$$s=\frac{\mathfrak{A}}{\alpha+\beta x}+\frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)}+\frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha+\beta x)(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)}$$
$$+\text{etc.}$$

Man multiplicire auf beyden Seiten durch $\alpha+\beta x$, und setze

$$\begin{aligned} A\beta+B\alpha&=A'\\ B\beta+C\alpha&=B' \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}=A\alpha,\\ C\beta+D\alpha&=C'\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

so wird nach der Division durch x

$$A'+B'x+C'x^2+D'x^3+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{A}'}{\alpha'+\beta' x}+\frac{\mathfrak{A}''x}{(\alpha'+\beta' x)(\alpha''+\beta'' x)}$$
$$+\text{etc.}$$

Multiplicirt man auf ähnliche Art durch $\alpha'+\beta' x$, dann durch $\alpha''+\beta'' x$ und so ferner, und setzt man

A'β'

$$\begin{array}{l|l}
A'\beta' + B'\alpha' = A'' & A''\beta'' + B''\alpha'' = A''' \\
B'\beta' + C'\alpha' = B'' & B''\beta'' + C''\alpha'' = B''' \\
C'\beta' + D'\alpha' = C'' & C''\beta'' + D''\alpha'' = C''' \\
\quad\text{ꝛc.} & \quad\text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
A'''\beta''' + B'''\alpha''' = A'''' \\
B'''\beta''' + C'''\alpha''' = B'''' \qquad \text{ꝛc.} \\
C'''\beta''' + D'''\alpha''' = C'''' \\
\quad\text{ꝛc.}
\end{array}$$

so wird $\mathfrak{A}' = A'\alpha'$; $\mathfrak{A}'' = A''\alpha''$; $\mathfrak{A}''' = A'''\alpha'''$; ꝛc. und daher die gegebene Reihe in folgende verwandelt:

$$s = \frac{A\alpha}{\alpha + \beta x} + \frac{A'\alpha' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{A''\alpha'' x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \text{ꝛc.}$$

Die Werthe α, β, α', β', α'', β'', α''', β''', ꝛc. sind willkührlich, und können jedesmal so angenommen werden, daß die neue Reihe stark convergirt.

§. 214.

Nun wollen wir die Factoren dreytheilig annehmen, und indem die Reihe

$$s = A + B + C + D + E + F + G + \text{ꝛc.}$$

zum Grunde gelegt wird,

$$\begin{array}{l|l}
A\gamma + B\beta + C\alpha = A' & A'\gamma' + B'\beta' + C'\alpha' = A'' \\
B\gamma + C\beta + D\alpha = B' & B'\gamma' + C'\beta' + D'\alpha' = B'' \\
C\gamma + D\beta + E\alpha = C' & C'\gamma' + D'\beta' + E'\alpha' = C'' \\
\quad\text{ꝛc.} & \quad\text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
A''\gamma'' + B''\beta'' + C''\alpha'' = A''' & A'''\gamma''' + B'''\beta''' + C'''\alpha''' = A'''' \\
B''\gamma'' + C''\beta'' + D''\alpha'' = B''' & B'''\gamma''' + C'''\beta''' + D'''\alpha''' = B'''' \\
C''\gamma'' + D''\beta'' + E''\alpha'' = C''' & C'''\gamma''' + D'''\beta''' + E'''\alpha''' = C'''' \\
\quad\text{ꝛc.} & \quad\text{ꝛc.}
\end{array}$$

 Ferner

Ferner, der Kürze wegen,

$$\alpha + \beta + \gamma = m$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma' = m'$$
$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' = m''$$
$$\alpha''' + \beta''' + \gamma''' = m'''$$

ꝛc.

setzen: so ist die Summe der angenommenen Reihe:

$$s = \frac{\alpha(A+B)}{m} + \frac{\alpha'(A'+B')}{m\,m'} + \frac{\alpha''(A''+B'')}{m\,m\,m''} + \frac{\alpha'''(A'''+B''')}{m\,m'm''m'''} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{\beta A}{m} + \frac{\beta' A'}{m\,m'} + \frac{\beta'' A''}{m\,m'm''} + \frac{\beta''' A'''}{mm\,m''m'''} + \text{ꝛc.}$$

§. 215.

Da diese Formeln einen solchen Umfang haben, daß ihr Gebrauch nicht sogleich klar seyn kann, so wollen wir die Verwandelung § 213. auf einen besondern Fall einschränken, und $x = -1$ setzen. Hiedurch bekommt man die Reihe:

$$s = A - B + C - D + E - F + G - \text{ꝛc.}$$

Setzt man also

$B - A = A'$	$B' - 2A' = A''$
$C - B = B'$	$C' - 2B' = B''$
$D - C = C'$	$D' - 2C' = C''$
$E - D = D'$	$E' - 2D' = D''$
ꝛc.	ꝛc.

$B'' - 3A'' = A'''$	$B''' - 4A''' = A''''$
$C'' - 3B'' = B'''$	$C''' - 4B''' = B''''$
$D'' - 3C'' = C'''$	$D''' - 4C''' = C''''$
$E'' - 3D'' = D'''$	$E''' - 4D''' = D''''$
ꝛc.	ꝛc.

so ist, nachdem man diese Werthe gefunden hat, die Summe der gegebenen Reihe gleich folgender Reihe:

$s =$

$$s = \frac{A}{2} - \frac{A'}{2.3} + \frac{A''}{2.3.4} - \frac{A'''}{2.3.4.5} + \frac{A''''}{2.3.4.5.6} - \text{2c.}$$

Auf ähnliche Art kann jede gegebene Reihe in unzählige andere ihr gleiche verwandelt werden, und unter diesen müssen natürlich auch convergirende seyn, durch welche man die Summe der gegebenen Reihe näherungsweise finden könne.

§. 216.

Ich kehre zur Erfindung der Reihen zurück, deren Fortschreitungsgesetz durch die Differenzial-Rechnung dargelegt wird. Da ich in dieser Rücksicht bereits die algebraischen Größen untersucht habe, so wende ich mich zu den transcendenten, und nehme an, daß eine folgendem Logarithmen gleiche Reihe zu suchen sey.

$$s = l(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{2c})$$

Es sey die Hülfsreihe, welche wir zu dieser Absicht annehmen:

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \mathfrak{F}x^6 + \text{2c.}$$

Da also aus der Differenziation jener Gleichung

$$\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{2c.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{2c.}}$$

gefunden wird: so hat man

$$(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{2c.})\frac{ds}{dx} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + \text{2c.}$$

Da ferner aus der angenommenen Gleichung auf eben dem Wege

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{2c.}$$

wird: so bekommt man, nach vorgenommener Substitution die Gleichung

$$\begin{array}{lllllll}
\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x & + 3\mathfrak{C}x^2 & + 4\mathfrak{D}x^3 & + 5\mathfrak{E}x^4 & + \text{ꝛc.} \\
+ \mathfrak{A}\alpha & + 2\mathfrak{B}\alpha & + 3\mathfrak{C}\alpha & + 4\mathfrak{D}\alpha & + \text{ꝛc.} \\
 & + \mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 3\mathfrak{C}\beta & + \text{ꝛc.} \\
 & & + \mathfrak{A}\gamma & + 2\mathfrak{B}\gamma & + \text{ꝛc.} \\
 & & & + \mathfrak{A}\delta & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

$$=$$

$$\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{ꝛc.}$$

und hieraus fließen folgende Bestimmungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \alpha \\
\mathfrak{B} &= -\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha + \beta \\
\mathfrak{C} &= -\tfrac{2}{3}\mathfrak{B}\alpha - \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}\beta + \gamma \\
\mathfrak{D} &= -\tfrac{3}{4}\mathfrak{C}\alpha - \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta - \tfrac{1}{4}\mathfrak{A}\gamma + \delta \\
\mathfrak{E} &= -\tfrac{4}{5}\mathfrak{D}\alpha - \tfrac{3}{5}\mathfrak{C}\beta - \tfrac{2}{5}\mathfrak{B}\gamma - \tfrac{1}{5}\mathfrak{A}\delta + \varepsilon
\end{aligned}$$

ꝛc.

§. 217.

Nun sey die Exponential-Größe

$$s = e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{ꝛc.}}$$

gegeben, so daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist; und die angenommene Hülfsreihe sey

$$s = 1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{ꝛc.}$$

denn wenn man $x = 0$ setzt, so erhellet schon, daß das erste Glied $= 1$ seyn müsse. Da also, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$ls = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird, wenn man differenziirt,

$$\frac{ds}{dx} = s(\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})$$

Nun

Nun ist aber aus der angenommenen Gleichung,

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + \text{ꝛc.} =$$

$$\overline{\begin{array}{cccccc} \alpha & + \mathfrak{A}\alpha x + & \mathfrak{B}\alpha x^2 + & \mathfrak{C}\alpha x^3 + & \mathfrak{D}\alpha x^4 + & \text{ꝛc.} \\ & + 2\beta & + 2\mathfrak{A}\beta & + 2\mathfrak{B}\beta & + 2\mathfrak{C}\beta & + \text{ꝛc.} \\ & & + 3\gamma & + 3\mathfrak{A}\gamma & + 3\mathfrak{B}\gamma & + \text{ꝛc.} \\ & & & + 4\delta & + 4\mathfrak{A}\delta & + \text{ꝛc.} \\ & & & & + 5\varepsilon & + \text{ꝛc.} \end{array}}$$

und hieraus findet man für die Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. folgende Bestimmungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \alpha \\ \mathfrak{B} &= \beta + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\alpha \\ \mathfrak{C} &= \gamma + \tfrac{2}{3}\mathfrak{A}\beta + \tfrac{1}{3}\mathfrak{B}\alpha \\ \mathfrak{D} &= \delta + \tfrac{3}{4}\mathfrak{A}\gamma + \tfrac{2}{4}\mathfrak{B}\beta + \tfrac{1}{4}\mathfrak{C}\alpha \\ \mathfrak{E} &= \varepsilon + \tfrac{4}{5}\mathfrak{A}\delta + \tfrac{3}{5}\mathfrak{B}\gamma + \tfrac{2}{5}\mathfrak{C}\beta + \tfrac{1}{5}\mathfrak{D}\alpha \end{aligned}$$

ꝛc.

§. 218.

Auch läßt sich, wenn ein Bogen, dessen Sinus oder Cosinus gesucht wird, durch eine zwey- drey- oder mehrtheilige Größe, ja selbst durch eine ohne Ende fortlaufende Reihe ausgedruckt ist, dieser Sinus und Cosinus ebenfalls nach der gegenwärtigen Methode durch eine unendliche Reihe darstellen. Um dies aber auf die bequemste Art zu thun, reichen die ersten Differenzialien nicht hin, sondern man muß dabey zu den zweyten Differenzialien seine Zuflucht zu nehmen. Es sey also

$$s = \sin.(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{ꝛc.})$$

und die dafür gesuchte Reihe

$$s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{ꝛc.}$$

denn daß das erste Glied verschwinde, ist bekannt. Da wir hier aber zu den zweyten Differenzialien herabsteigen müssen,

so

so muß auch der Coefficient $\mathfrak{A}$ anderswoher bestimmt werden, und dies kann geschehen, wenn man x unendlich klein nimmt. Denn alsdann ist der Bogen $= \alpha x$ seinem Sinus gleich, und es wird daher $\mathfrak{A} = \alpha$. Nun sey der Kürze wegen

$$z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}$$

damit $s = \sin. z$ werde: so findet man durch die Differenziation

$$ds = dz.\cos. z;\quad dds = ddz.\cos. z - dz^2 \sin. z$$

Da also $\sin. z = s$, und $\cos. z = \frac{ds}{dz}$ ist, so wird

$$dds = \frac{ds\,ddz}{dz} - s\,dz^2; \text{ oder } dz\,dds + s\,dz^3 + ds\,ddz.$$

§. 219.

Wir wollen annehmen, daß der Bogen z bloß durch ein Binomium ausgedruckt werde, und $z = \alpha x + \beta x^2$ setzen. Alsdann ist

$$dz = (\alpha + 2\beta x)dx$$

und wenn man dx als beständig betrachtet

$$ddz = 2\beta dx^2; \text{ und}$$

$$dz^3 = (\alpha^3 + 6\alpha^2\beta x + 12\alpha\beta^2 x^2 + 8\beta^3 x^3)dx^3$$

Da ferner $s = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{etc.}$ ist, so wird

$$\frac{ds}{dx} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}$$

$$\text{und } \frac{dds}{dx^2} = 2\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C}x + 12\mathfrak{D}x^2 + \text{etc.}$$

Braucht man diese Werthe in der Differenzial-Gleichung: so wird:

$\frac{dz\,dds}{dx^3}$

$$
\begin{array}{lllllll}
\dfrac{dzdds}{dx^3} = & 1.2\mathfrak{B}\alpha + & 2.3\mathfrak{C}\alpha x + & 3.4\mathfrak{D}\alpha x^2 + & 4.5\mathfrak{E}\alpha x^3 & + \text{ꝛc.} \\
 & & + 2.1.2\mathfrak{B}\beta & + 2.2.3\mathfrak{C}\beta & + 2.3.4\mathfrak{D}\beta & + \text{ꝛc.} \\
\dfrac{sdz^3}{dx^3} & & + & \mathfrak{A}\alpha^3 + & \mathfrak{B}\alpha^3 + & \mathfrak{C}\alpha^3 + \text{ꝛc.} \\
 & & & + & 6\mathfrak{A}\alpha^2\beta + & 6\mathfrak{B}\alpha^2\beta + \text{ꝛc.} \\
 & & & & + & 12\mathfrak{A}\alpha\beta^2 + \text{ꝛc.} \\
\hline
\dfrac{dsddz}{dx^3} = & 2\mathfrak{A}\beta & + 4\mathfrak{B}\beta & + 6\mathfrak{C}\beta & + 8\mathfrak{D}\beta & + \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$\mathfrak{B} = \frac{2\mathfrak{A}\beta}{2\alpha}$$

$$\mathfrak{C} = 0 - \frac{\mathfrak{A}\alpha^2}{2.3}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{2\mathfrak{C}\beta}{4\alpha} - \frac{6\mathfrak{A}\alpha\beta}{3.4} - \frac{\mathfrak{B}\alpha^2}{3.4}$$

$$\mathfrak{E} = -\frac{4\mathfrak{D}\beta}{8\alpha} - \frac{12\mathfrak{A}\beta^2}{4.5} - \frac{6\mathfrak{B}\alpha\beta}{4.5} - \frac{\mathfrak{C}\alpha^2}{4.5}$$

$$\mathfrak{F} = -\frac{6\mathfrak{E}\beta}{6\alpha} - \frac{8\mathfrak{A}\beta^3}{5.6\alpha} - \frac{12\mathfrak{B}\beta^2}{5.6} - \frac{6\mathfrak{C}\alpha\beta}{5.6} - \frac{\mathfrak{D}\alpha^2}{5.6}$$

$$\mathfrak{G} = -\frac{8\mathfrak{F}\beta}{7\alpha} - \frac{8\mathfrak{B}\beta^3}{6.7\alpha} - \frac{12\mathfrak{C}\beta^2}{6.7} - \frac{6\mathfrak{D}\alpha\beta}{6.7} - \frac{\mathfrak{E}\alpha^2}{6.7}$$

ꝛc.

und hat man diese Werthe gefunden, so ist

$$\sin.(\alpha x + \beta x^2) = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$$

und $\mathfrak{A} = \alpha$.

§. 220.

Auf ähnliche Art läßt sich der Cosinus eines jeden Winkels in eine Reihe verwandeln. Da aber Bogen sehr selten durch mehrtheilige Größen gegeben werden: so wollen wir den Gebrauch der zweyten Differenzialien bey der Erfindung

de

der Reihe für den Cosinus des Bogens x kennen zu lernen suchen. Es sey also $s = \cos. x$, und

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \mathfrak{D}x^8 - \text{etc.}$$

gesetzt worden. Da $ds = - dx \sin. x$, und $dds = - dx^2 \cos. x = - s dx^2$ ist, so ist $dds + s dx^2 = 0$, und man erhält also durch Substitution

$$\frac{dds}{dx^2} = - 1.2\mathfrak{A} + 3.4\mathfrak{B}x^2 - 5.6\mathfrak{C}x^4 + 7.8\mathfrak{D}x^6 - \text{etc.}$$

$$s = 1 - \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^4 - \mathfrak{C}x^6 + \text{etc.}$$

und dadurch, daß man die gleichnamigen Glieder gleich setzt,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{1.2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{3.4} = \frac{1}{1.2.3.4}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{5.6} = \frac{1}{1.2.3\ldots6}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{7.8} = \frac{1}{1.2.3\ldots8}$$

etc.

Auf diese Art erhellet, was wir auch schon oben ausführlich bewiesen haben, daß

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3\ldots6} + \frac{x^8}{1.2.3\ldots8} - \text{etc.}$$

ist, und die vorhergehende Reihe giebt, wenn man für den Sinus $\beta = 0$ und $\alpha = 1$ setzt,

$$\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \frac{x^9}{1.2.3\ldots9} - \text{etc.}$$

§. 221.

Aus diesen bekannten Reihen für den Sinus und Cosinus findet man die Reihen für die Tangente, die Cotangente, die

die Secante und Cosecante eines jeden Winkels. Denn die Tangente ergiebt sich, wenn man den Sinus durch den Cosinus, die Cotangente, wenn man den Cosinus durch den Sinus, die Secante, wenn man den Radius 1 durch den Cosinus, und die Cosecante, wenn man den Radius durch den Sinus dividirt. Es scheinen aber die durch diese Division gefundene Reihen sehr irregulär, ob sie gleich, die für die Secante ausgenommen, durch die oben gefundenen Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. auf ein leichtes Progressions-Gesetz zurückgebracht werden können. Denn da wir oben §. 127. gefunden haben,

$$\frac{\mathfrak{A}u^2}{1.2}+\frac{\mathfrak{B}u^4}{1.2.3.4}+\frac{\mathfrak{C}u^6}{1.2.3..6}+\frac{\mathfrak{D}u^8}{1.2.3..8}+\text{ꝛc.}=1-\frac{u}{2}\cot.\tfrac{1}{2}u$$

so wird, wenn man $\frac{1}{2}u=x$ setzt,

$$\cot.x=\frac{1}{x}-\frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2}-\frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4}-\frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2.3..6}-\frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2.3...8}-\text{ꝛc.}$$

und wenn man $\frac{1}{2}x$ für x schreibt,

$$\cot.\tfrac{1}{2}x=\frac{2}{x}-\frac{2\mathfrak{A}x}{1.2}-\frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4}-\frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2.3..6}-\frac{2\mathfrak{D}x^7}{1.2.3...8}-\text{ꝛc.}$$

§. 222.

Hieraus aber läßt sich die Tangente eines jeden Bogens auf folgende Art ausdrucken. Da

$$\text{tang.}\,2x=\frac{2\,\text{tang.}\,x}{1-\text{tang.}\,x^2}\ \text{ist, so wird}$$

$$\cot.\,2x=\frac{1}{2\,\text{tang.}\,x}-\frac{\text{tang.}\,x}{2}=\tfrac{1}{2}\cot.\,x-\tfrac{1}{2}\text{tang.}\,x$$

und also

$$\text{tang.}\,x=\cot.\,x-2\cot.\,2x$$

Da nun

$$\cot.x = \frac{1}{x} - \frac{2^2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^4\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^8\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} - \text{rc.}$$

$$2\cot.2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2^8\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^{12}\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \frac{2^{16}\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} - \text{rc.}$$

ist, so bekommt man durch die Subtraction dieser Reihe von jener

$$\text{tang}.x = \frac{2^2(2^2-1)\mathfrak{A}x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} + \frac{2^8(2^8-1)\mathfrak{D}x^7}{1.2\ldots8} + \text{rc.}$$

Braucht man daher die Buchstaben A, B, C, D, rc. §. 182. so wird

$$\text{tang}.x = \frac{2Ax}{1.2} + \frac{2^3Bx^3}{1.2.3.4} + \frac{2^5Cx^5}{1.2\ldots6} + \frac{2^7Dx^7}{1.2\ldots8} + \text{rc.}$$

§. 223.

Die Cosecante aber wird auf folgende Art gefunden. Da $\cot.x = \text{tang}.x + 2\cot.2x = \frac{1}{\cot.x} + 2\cot.2x$ ist, so wird $\cot.x^2 = 2\cot.x.\cot.2x + 1$, und wenn man die Wurzel auszieht,

$$\cot.x = \cot.2x + \text{cosec}.2x$$

daher denn

$$\text{cosec}.2x = \cot.x - \cot.2x,$$

und, wenn man x für 2x setzt,

$$\text{cosec}.x = \cot.\tfrac{1}{2}x - \cot.x.$$

Da wir nun die Cotangenten haben, nemlich

$$\cot.\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2\mathfrak{A}x}{1.2} - \frac{2\mathfrak{B}x^3}{1.2.3.4} - \frac{2\mathfrak{C}x^5}{1.2\ldots6} - \text{rc.}$$

$$\cot. x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 \mathfrak{A} x}{1.2} - \frac{2^4 \mathfrak{B} x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 \mathfrak{C} x^5}{1.2 \ldots 6} - \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man diese Reihe von jener abzieht

$$\operatorname{cosec}. x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A} x}{1.2} + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B} x^3}{1.2.3.4} + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C} x^5}{1.2 \ldots 6} + \text{ꝛc.}$$

§. 224.

Die Secante aber kann durch diese Bernoullischen Zahlen nicht ausgedruckt werden, sondern erfordert andere Zahlen, welche in den Summen der ungeraden reciproken Potestäten vorkommen. Denn wenn man setzt

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.} = \alpha \quad . \frac{\pi}{2^2}$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ꝛc.} = \frac{\beta}{1 . 2} . \frac{\pi^3}{2^4}$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{ꝛc.} = \frac{\gamma}{1.2.3.4} . \frac{\pi^5}{2^6}$$

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \text{ꝛc.} = \frac{\delta}{1.2 \ldots 6} . \frac{\pi^7}{2^8}$$

$$1 - \frac{1}{3^9} + \frac{1}{5^9} - \frac{1}{7^9} + \frac{1}{9^9} - \text{ꝛc.} = \frac{\varepsilon}{1.2 \ldots 8} . \frac{\pi^9}{2^{10}}$$

$$1 - \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{5^{11}} - \frac{1}{7^{11}} + \frac{1}{9^{11}} - \text{ꝛc.} = \frac{\zeta}{1.2 \ldots 10} . \frac{\pi^{11}}{2^{12}}$$

ꝛc.

so wird

$\alpha = 1$
$\beta = 1$
$\gamma = 5$
$\delta = 61$
$\varepsilon = 1385$
$\zeta = 50521$

$$\eta = 2702765$$
$$\vartheta = 199360981$$
$$\iota = 19391512145$$
$$\varkappa = 2404879661671$$
etc.

und durch diese Werthe bekommt man:

$$\sec. x = \alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2\ldots8}x^8 + \text{etc.}$$

§. 225.

Um den Zusammenhang dieser Reihe mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. kennen zu lernen, wollen wir die oben behandelte Reihe betrachten, nemlich:

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \text{etc.}$$

Man setze $m = \frac{1}{2}n - k$, so wird

$$\frac{\pi}{2n \cos. \frac{k}{n}\pi} =$$

$$\frac{1}{n-2k} + \frac{1}{n+2k} - \frac{1}{3n-2k} - \frac{1}{3n+2k} + \frac{1}{5n-2k} + \text{etc.}$$

Es sey $\frac{k\pi}{n} = x$, oder $k\pi = nx$, so wird

$$\frac{\pi}{2n}\sec. x = \frac{\pi}{n\pi - 2nx} + \frac{\pi}{n\pi + 2nx} - \frac{\pi}{3n\pi - 2nx} - \text{etc.}$$

oder

$$\sec. x = \frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} - \frac{2}{3\pi - 2x} - \frac{2}{3\pi + 2x} + \frac{2}{5\pi - 2x} + \text{etc.}$$

sec. x

$$\sec.x = \frac{4\pi}{\pi^2 - 4x^2} - \frac{4\cdot 3\pi}{9\pi^2 - 4x^2} + \frac{4\cdot 5\pi}{25\pi^2 - 4x^2} - \frac{4\cdot 7\pi}{49\pi^2 - 4x^2}$$
$$+ \text{rc.}$$

Verwandelt man nun die einzeln Glieder in Reihen, so wird

$$\sec.x = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{rc.}\right)$$
$$+ \frac{2^4 x^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{rc.}\right)$$
$$+ \frac{2^6 x^4}{\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{rc.}\right)$$
$$\text{rc.}$$

und wenn für diese Reihen die oben dafür gegebenen Werthe gesetzt werden, so erhält man eben die Reihe für die Secante, welche wir herausgebracht haben.,

§. 226.

Hieraus erhellet zugleich das Gesetz, nach welchem die Zahlen α, β, γ, δ, rc. wodurch die Summen der ungeraden Potestäten ausgedruckt werden, fortschreiten. Denn da

$$\sec.x = \frac{1}{\cos.x} = \alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2\ldots6}x^6$$
$$+ \text{rc.}$$

ist, so muß die Reihe nothwendig dem Bruche

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \frac{x^8}{1.2\ldots8} - \text{rc.}}$$

gleich seyn. Setzt man daher diese Gleichheit voraus, so bekommt man

$$1 =$$

$$\begin{array}{l} \alpha + \frac{\beta}{1.2}x^2 + \frac{\gamma}{1.2.3.4}x^4 + \frac{\delta}{1.2..6}x^6 + \frac{\varepsilon}{1.2...8}x^8 + \text{ꝛc.} \\ \quad - \frac{\alpha}{1.2} - \frac{\beta}{1.2.1.2} - \frac{\gamma}{1.2.1..4} - \frac{\delta}{1.2.1...6} - \text{ꝛc.} \\ \qquad\qquad + \frac{\alpha}{1.2.3.4} + \frac{\beta}{1..4.1.2} + \frac{\gamma}{1..4.1..4} + \text{ꝛc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{\alpha}{1...6} - \frac{\beta}{1..6.1.2} - \text{ꝛc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{\alpha}{1.....8} + \text{ꝛc.} \end{array}$$

Hieraus aber fließen folgende Gleichungen:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = \frac{2.1}{1.2}\alpha$$

$$\gamma = \frac{4.3}{1.2}\beta - \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}\alpha$$

$$\delta = \frac{6.5}{1.2}\gamma - \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\beta + \frac{6....1}{1....6}\alpha$$

$$\varepsilon = \frac{8.7}{1.2}\delta - \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\gamma + \frac{8....3}{1....6}\beta - \frac{8....1}{1....8}\alpha$$

ꝛc.

Und aus diesen Formeln sind die Werthe jener Buchstaben gefunden worden, welche wir §. 224. gegeben haben, und vermittelst welcher die Summen der Reihen ausgedruckt werden können, die unter den Ausdruck

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \text{ꝛc.}$$

gehören, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Neun-

Neuntes Capitel.

Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichungen.

§. 227.

Es ist bereits hinlänglich gezeigt worden, daß man jede Gleichung auf die Form der Funktionen zurückführen kann. Denn bedeutet y jede Funktion von x, so sind in dem Ausdrucke $y = 0$ alle nur mögliche endliche Gleichungen, die algebraischen und die transcendenten enthalten. Man versteht aber unter der Auflösung einer Gleichung $y = 0$, die Bestimmung desjenigen Werthes von x, der, in die Funktion y gesetzt, dieselbe $= 0$ macht. Meistens giebt es mehr als einen Werth für x, und man nennt sie die Wurzeln der Gleichung $y = 0$. Lassen wir daher $f, g, h, i,$ 2c. die Wurzeln der Gleichung $y = 0$ seyn: so ist die Funktion von der Art, daß sie $= 0$ wird, wenn man darin f oder g oder h 2c. für x setzt.

§. 228.

Da also die Funktion y verschwindet, wenn man für x darin f oder $x + (f - x)$ setzt, indem f eine Würzel der Gleichung $y = 0$ ist: so wird nach dem, was wir oben von den Funktionen gehabt haben,

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \text{2c.}$$

 Aus

Aus dieser Gleichung wird der Werth der Wurzel f auf die Art bestimmt, daß man für x setzen kann was man will, und dabey gleichwohl allemal durch die Substitution der Werthe, welche y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2dx^2}$, rc. bekommen, eine Gleichung erhält, welche den wahren Werth von f giebt. Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

setzen. Alsdann ist

$$\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2; \text{ und } \frac{d^3y}{6dx^3} = 1.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so wird

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f - x)(3xx - 4x + 3) + (f - x)^2(3x - 2) + (f - x)^3$$

oder, wenn man wirklich multiplicirt,

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0.$$

Man findet nemlich eine der gegebenen ähnliche Gleichung, die daher auch eben dieselben Wurzeln enthält.

§. 229.

Ob man indeß gleich auf diesem Wege zu keiner neuen Gleichung gelangt, aus welcher man den Werth der Wurzel f leichter finden könnte: so lassen sich dennoch daraus sehr wichtige Hülfsmittel zur Erfindung der Wurzeln herleiten. Nimmt man nemlich für x einen Werth an, welcher irgend einer Wurzel der Gleichung sehr nahe kommt, so daß die Größe $f - x$ eine sehr kleine Größe ist: so convergiren die Glieder der Gleichung

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

auf sehr merkliche Art, und man entfernt sich daher eben nicht beträchtlich von der Wahrheit, wenn man bloß die beyden

den ersten Glieder behält, und die übrigen insgesammt weglăßt. Hat man also für x einen Werthe gesetzt, der irgend einer Wurzel der Gleichung $y = 0$ beynahe gleich ist, so ist näherungsweise

$$0 = y + \frac{(f - x)\,dy}{dx}, \text{ oder } f = x - \frac{y\,dx}{dy}$$

und aus dieser Formel findet man, freylich nicht den wahren aber doch, einen dem wahren sehr nahe kommenden Werth von f. Setzt man nun diesen von neuem für x, so bekommt man dadurch den Werth von f noch genauer, und so kann man sich demselben immer mehr nähern.

§. 230.

Hiernach lassen sich zuvörderst die Wurzeln aller Dignitäten aus jeder gegebenen Zahl finden. Es sey z. B. die Zahl $a^n + b$ gegeben, damit daraus die nte Wurzel gezogen werde. Man setze

$$x^n = a^n + b; \text{ oder } x^n - a^n - b = 0$$

daß

$$y = x^n - a^n - b$$

sey. Alsdann ist

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} \text{ ꝛc.}$$

Setzt man daher die gesuchte Wurzel $= f$, oder $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ so ist

$$0 = x^n - a^n - b + n(f - x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2 x^{n-2}$$

$$+ \text{ ꝛc.}$$

Nimmt man also für x eine Zahl, die von der gesuchten Wurzel nicht sehr abweicht, und dies thut man, wenn man

$x = a$ macht, vorausgesetzt, daß b so klein sey, daß $a^n + b < (a+1)^n$ ist: so wird näherungsweise $b = na^{n-1}(f-a)$ und also

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

wodurch man den Werth der Wurzel schon viel genauer kennen lernt. Nimmt man aber noch das dritte Glied dazu, oder setzt man

$$b = na^{n-1}(f-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(f-a)^2$$

so wird

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1}(f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}$$

und folglich

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right)}$$

oder

$$f = \frac{(n-2)a + \sqrt{(aa + 2(n-1)b : na^{n-2})}}{n-1}$$

Vermittelst der Extraction der Quadratwurzel findet man daher den Werth der Wurzel f noch genauer.

Exempel.

Die Quadratwurzel aus irgend einer Zahl c zu finden; oder es sey $xx - c = y$.

Man setze die Zahl, welche der Wurzel am nächsten kommt $= a$, und $b = c - aa$. Da $aa + b = c$ und $n = 2$ ist, so giebt die erste Formel

$$f = a + \frac{c - aa}{2a} = \frac{c + aa}{2a}; \text{ und die andere } f = \sqrt{c}.$$

Da also die Wurzel zunächst $= \frac{c + aa}{2a}$ ist, so setze man diesen Werth für a, wodurch man den genauern Ausdruck

$f =$

$$f = \frac{cc + 6aac + a^4}{4a(c + aa)}$$

erhält. Es sey z. B. $c = 5$; so hat man aus der ersten Formel

$$f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}.$$

Man setze also $a = 2$, so wird $f = 2{,}25$; ferner $a = 2{,}25$, so bekommt man $f = 2{,}236111$; endlich $a = 2{,}236111$, so wird $f = 2{,}2360679$, welcher Werth der wahren Wurzel aus 5 schon sehr nahe kommt.

§. 231.

Auf ähnliche Art läßt sich aber auch die Wurzel einer jeden Gleichung vermittelst der Gleichung $f = x - \frac{ydx}{dy}$ näherungsweise finden, wenn man nemlich für x einen Werth angenommen hat, der von einer Wurzel der Gleichung nicht viel unterschieden ist. Um einen solchen Werth für x zu erhalten, setze man dafür nach und nach verschiedene Werthe, und wähle dann denjenigen, welche den kleinsten Werth der Funktion y, d. h. denjenigen giebt, der 0 am nächsten kommt. Ist z. B.

$$y = x^3 - 2xx + 3x - 4$$

so wird	wenn man setzt
$y = -4$	$x = 0$
$y = -2$	$x = 1$
$y = +2$	$x = 2$

und hieraus erhellet, daß die Wurzel zwischen 1 und 2 falle. Da also $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$ ist, so hat man zur Erfindung der Wurzel f aus $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$, die Gleichung:

$f =$

$$f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{(x^3 - 2xx + 3x - 4)}{3xx - 4x + 3}$$

Es sey also $x = 1$; so wird $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nun setze man $x = 2$, so wird $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Es sey $x = \frac{12}{7}$ so wird $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1{,}653$. Will man weiter gehen, so ist es bequemer die Logarithmen zu gebrauchen.

Man setze also $x = 1{,}653$, so wird

$$\begin{array}{rcl|rcl}
lx & = & 0{,}2182729 & x & = & 1{,}653000 \\
lx^2 & = & 0{,}4365458 & x^2 & = & 2{,}732409 \\
lx^3 & = & 0{,}6548187 & x^3 & = & 4{,}516673 \\
x^3 & = & 4{,}516673 & & & \\
3x & = & 4{,}959000 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl rcl}
x^3 + 3x & = & 9{,}475673 & 3xx + 3 & = & 11{,}197227 \\
2xx + 4 & = & 9{,}464818 & 4x & = & 6{,}612000 \\
\hline
\text{Zähler} & = & 0{,}010855 & \text{Nenner} & = & 4{,}585227 \\
l\,\text{d. Z.} & = & 8{,}0356298 & & & \\
l\,\text{d. N.} & = & 0{,}6613608 & x & = & 1{,}653000 \\
\hline
l\,\text{d. B.} & = & 7{,}3742690 & \text{Bruch} & = & 0{,}002367 \\
\hline
& & & f & = & 1{,}650633
\end{array}$$

und dieser Werth kommt der Wahrheit sehr nahe.

§. 232.

Noch schnellere Näherungen lassen sich aus dem allgemeinen Ausdrucke herleiten. Denn da wir, wenn eine Funktion $y = 0$ gesetzt, und die Wurzel dieser Gleichung $x = f$ angenommen wird,

$0 =$

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

gefunden haben: so sey $f - x = z$, folglich die Wurzel $f = x + z$. Ferner setze man

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{dr}{dx} = s;$$

so wird

$$0 = y + zp + \frac{z^2q}{2} + \frac{z^3r}{6} + \frac{z^4s}{24} + \frac{z^5t}{120} + \text{ꝛc.}$$

Hat man in dieser Gleichung für x irgend einen Werth, durch welchen denn auch y, p, q, r, s, ꝛc. bestimmt werden, angenommen, so muß man die Größe z suchen; und hat man dieselbe gefunden, so ist die Wurzel der gegebenen Gleichung $y = 0$ oder $f = x + z$. Es kommt also darauf an, aus dieser Gleichung den Werth der unbekannten Größe z auf die bequemste Art zu erhalten.

§. 233.

Man setze z folgender convergirenden Reihe gleich

$$z = A + B + C + D + E + \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man substituirt,

$$\begin{array}{lllllll}
y & = y & & & & & \\
pz & = Ap & + Bp & + Cp & + Dp & + Ep & + \text{ꝛc.} \\
\tfrac{1}{2}qz^2 & = & \tfrac{1}{2}A^2q & + ABq & + ACq & + ADq & + \text{ꝛc.} \\
 & & & & + \tfrac{1}{2}BBq & + BCq & + \text{ꝛc.} \\
\tfrac{1}{6}rz^3 & = & & \tfrac{1}{6}A^3r & + \tfrac{1}{2}A^2Br & + \tfrac{1}{2}A^2Cr & + \text{ꝛc.} \\
 & & & & & + \tfrac{1}{2}AB^2r & + \text{ꝛc.} \\
\tfrac{1}{24}sz^4 & = & & & \tfrac{1}{24}A^4s & + \tfrac{1}{6}A^3Bs & + \text{ꝛc.} \\
\tfrac{1}{120}tz^5 & = & & & & \tfrac{1}{120}A^5t & + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

A =

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5}$$

u.s.w.

Folglich wird

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2p}{2p^3} - \frac{y^3q^2}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4} - \frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5} - \text{u.s.w.}$$

Exempel.

Es sey die Gleichung $x^5 + 2x - 2 = 0$ gegeben.

Es ist $y = x^5 + 2x - 2$

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2$$

$$\frac{dp}{dx} = q = 20x^3$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2$$

$$\frac{dr}{dx} = s = 120x$$

u.s.w.

Nun setze man $x = 1$, weil dieser Werth von der wahren Wurzel nur wenig abweicht, so wird

$y = 1$; $p = 7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$

und folglich

$z =$

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5.1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

oder

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7} \text{ ꝛc.} = -0{,}18; \text{ also}$$

$$f = 0{,}82.$$

Wenn man diesen Werth von neuem für x setzte, so würde man die Wurzel in einem hohen Grade genau erhalten.

§. 231.

Wir haben also eine ohne Ende fortlaufende Reihe für die Wurzel einer jeden Gleichung gefunden; allein sie hat den doppelten Fehler, daß theils das Fortschreitungs-Gesetz derselben nicht einleuchtend, theils sie selbst zu zusammengesetzt und beym Gebrauche zu schwer ist. Wir wollen also dieselbe Untersuchung auf einem andern Wege anstellen, und einer Reihe nachforschen, welche die Wurzel jeder gegebenen Gleichung auf eine regulärere Art ausdrucke.

Es sey also wie vorhin die Gleichung $y = 0$ gegeben, so daß y jede Funktion von x bedeute: so kommt alles darauf an x so zu bestimmen, daß die Funktion $y = 0$ werde, wenn man darin den gefundenen Werth für x setzt. Da aber y eine Funktion von x ist, so ist auch umgekehrt x eine Funktion von y; und geht man von diesem Gesichtspunkte aus, so hat man den Werth der Funktion x zu suchen, den sie bekommt, wenn die Größe y verschwindet. Wenn man also f den Werth von x bedeuten läßt, wobey dieses geschiehet, und dies ist allemal eine Wurzel der Gleichung $y = 0$: so wird, weil x bey $y = 0$ in f übergehet, nach dem oben Bewiesenen

$$f = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2 ddx}{2dy^2} - \frac{y^3 d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4 d^4x}{24dy^4} - \text{ꝛc.}$$

und

und in dieser Gleichung wird dy als beständig betrachtet. Setzt man daher

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = q; \quad \frac{dq}{dy} = r; \quad \frac{dr}{dy} = s; \text{ ꝛc.}$$

und braucht diese Werthe, um die Rücksicht auf ein beständiges Differenzial wegzubringen, so wird

$$f = x - p + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{ ꝛc.}$$

§. 235.

Hat man also für x irgend einen Werth angenommen, so werden dadurch zugleich die Werthe von y und der Größen p, q, r, s, ꝛc. bestimmt; und hat man dieselben gefunden, so ist man im Besitze einer ohne Ende forlaufenden und den Werth der Wurzel f ausdrückenden Reihe. Hat aber die Gleichung $y = 0$ mehrere Wurzeln, so findet man dieselben wenn man für x verschiedene Werthe nimmt. Denn da y einen und denselben Werth haben kann, wenn gleich für x verschiedene Werthe angenommen werden: so ist es nichts besonderes, daß eine und dieselbe Reihe mehrere Werthe geben könne. Um aber die Zweydeutigkeit in diesen Fällen aus dem Wege zu räumen, und zugleich die Reihe convergirend zu machen, muß man für x einen Werth setzen, welcher dem gesuchten nahe kommt. Denn alsdann wird der Werth von y sehr klein, und die Glieder der Reihe nehmen beträchtlich ab, so daß man schon in wenigen Gliedern den Werth für f genau genug haben kann. Setzt man darauf diesen Werth für x, so wird die Größe y noch kleiner, und die Reihe convergirt noch stärker, und auf diese Art findet man die Wurzel f bald so genau, daß der bleibende Fehler nicht in Anschlag kommt. Hieraus fällt der große Vorzug der

gegen-

gegenwärtigen Formel vor der vorhergehenden deutlich in die Augen.

§. 236.

Wir wollen annehmen, daß die nte Wurzel aus irgend einer Zahl N zu ziehen sey. Sucht man also die der N am nächsten kommende nte Potestät, so erhält man ohne Mühe $N = a^n + b$, und es ist alsdann

$$x^n = a^n + b; \quad \text{und } y = x^n - a^n - b$$

folglich

$$dy = n x^{n-1} dx; \qquad \text{und } \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{n x^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)dx}{n x^2}; \qquad \text{und } \frac{dp}{dy} = q = -\frac{n-1}{n n x^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{n n x^{2n}}; \qquad \text{und } \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3 x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3 x^{3n}}; \quad \text{und}$$

$$\frac{dr}{dy} = s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4 x^{4n-1}}$$

ꝛc.

Nun setze man $x = a$; so wird $y = -b$, und die gesuchte Wurzel $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ auf folgende Art ausgedruckt:

$$f = a + \frac{b}{n a^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n.2n.a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n.2n.3n.a^{3n-1}}$$

$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n.2n.3n.4n.a^{4n-1}} + \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art erhalten wir eben die Reihe, welche man durch die gemeine Entwickelung des Binomiums $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ findet.

§. 237.

Hat man also durch die Extraction die Wurzel a, und zugleich den Rest b gefunden, so muß man zu der Wurzel noch den Werth des Bruchs $\frac{b}{na^{n-1}}$ addiren, um die Wurzel genauer zu bekommen. Es ist aber $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, weil $N = a^n + b$ ist. Allein auf diese Art erhält man die Wurzel größer als sie seyn sollte, und muß daher das dritte Glied abziehen. Um also durch die Division des Restes b die Wurzel der wahren näher zu erhalten, muß man den dazu erforderlichen Divisor aufsuchen, und wir wollen ihn =

$$na^{n-1} + \alpha b + \beta bb + \gamma b^3 + \text{rc.}$$

setzen. Da bey dieser Annahme

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \text{rc.}} =$$

$$\frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^3a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \text{rc.}$$

seyn muß, so wird, wenn man durch $na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \text{rc.}$ multiplicirt,

$$b = b$$

$$- \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{\alpha b^2}{2a^{n-1}} - \frac{(n-1)\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}}$$

$$+ \frac{\beta b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\beta b^4}{2n^2a^{2n-1}}$$

$$+ \frac{\gamma b^4}{na^{n-1}}$$

Hier-

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\beta = \frac{(n-1)\alpha}{2na^{n}} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = -\frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}.$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\beta}{2na^{n}} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6n^{2}a^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^{3}a^{2n+1}}$$

oder

$$\gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$$

Demnach ist der Bruch, welchen man zu der gefundenen Wurzel a noch hinzu addiren muß,

$$\frac{b}{na^{n-1} + \frac{(n-1)b}{2a} - \frac{(nn-1)bb}{12na^{n+1}} + \frac{(nn-1)b^{3}}{24na^{2n+1}}}$$

§. 238.

Wenn also die Quadratwurzel aus der Zahl N gezogen werden sollte, und die zunächst kleinere Wurzel a, und der Rest b bereits gefunden worden wäre: so müßte man zu a noch den Quotienten addiren, den man fände, wenn man den Rest b durch

$$2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^{3}} + \frac{b^{3}}{16a^{5}} - \text{ꝛc.}$$

dividirte. Sollte aber die Cubikwurzel gefunden werden, so müßte man den Rest b durch

$$3a^{2} + \frac{b}{a} - \frac{2bb}{9a^{4}} + \frac{b^{3}}{9a^{7}} - \text{ꝛc.}$$

dividiren; und hiervon wollen wir nun einige Beyspiele hersetzen.

Erstes Exempel.

Man soll die Quadratwurzel aus der Zahl 200 finden.

Man setze $N = 200$, und da das nächste Quadrat 196 ist, so wird $a = 14$ und $b = 4$. Da man also diesen Rest durch $28 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{196} + \frac{1}{7 \cdot 196 \cdot 98}$ dividiren soll, so hat man zum Divisor 28,142135; und dividirt man 4 dadurch, so bekommt man einen zu 14 hinzuzufügenden Decimalbruch, der bis zur zehnten Zifer und noch weiter richtig ist.

Zweytes Exempel.

Man soll die Cubikwurzel aus $N = 10$ finden.

Der nächste Cubus ist 8, und der Rest 2; also $a = 2$ und $b = 2$, und der Divisor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12,9444$. Demnach ist die gesuchte Cubikwurzel näherungsweise

$$= 2 + \frac{2}{12,9444} = 2 + \frac{10000}{64722}.$$

§. 239.

Die für die Wurzel gefundene Reihe kann auch als eine wiederkehrende aus einem Bruche entsprungene Reihe angesehen werden, indem dadurch die Glieder der Reihe auf weit weniger Glieder in dem Zähler und dem Nenner des gedachten Bruchs zurückgebracht werden. Bey einiger Aufmerksamkeit sieht man bald, daß beynahe sey

$$(a + b)^n = a^n \cdot \frac{a + \frac{(n+1)}{2} b}{a - \frac{(n-1)}{2} b}$$

und

und noch genauer

$$(a+b)^n = a^n . \frac{aa + \frac{(n+2)}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{(n-2)}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}$$

Auf ähnliche Art kann man durch Einführung mehrerer Glieder noch genauere Brüche bekommen, z. B.

$$(a+b)^n = a^n \times$$

$$\frac{a^3 + \frac{(n+3)}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)b^3}{120}}{a^3 - \frac{(n-3)}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)b^3}{120}}$$

Ja es läßt sich eine allgemeine Form geben, nach welcher man sich richten kann. Man setze nemlich

$$A = \frac{m(n+m)}{1.2m} \qquad \mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1.2m}$$

$$B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2(2m-1)}A \qquad \mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2(2m-1)}\mathfrak{A}$$

$$C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3(2m-2)}B \qquad \mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3(2m-2)}\mathfrak{B}$$

$$D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4(2m-3)}C \qquad \mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4(2m-3)}\mathfrak{C}$$

ꝛc. ꝛc.

Hat man diese Werthe bestimmt, so ist

$$(a+b)^n = a^n . \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \text{ꝛc.}}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 - \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \text{ꝛc.}}$$

§. 240.

Wenn in diesen Formeln für n gebrochene Zahlen gesetzt werden, so bekommt man darin sehr bequeme Ausdrücke zur Extraction der Wurzeln. So kann man, wenn die nte Wurzel aus der Form $a^n + b$ gezogen werden soll, folgende Ausdrücke gebrauchen:

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}$$

Wenn aber $a^n + b = N$ gesetzt wird, und also $a^n = N - b$ ist, so wird

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \cdot \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}$$

§. 241.

Die allgemeine Formel zur Erfindung der Wurzel einer jeden Gleichung leistet daher bey den Gleichungen, die aus mehrern Gliedern bestehen, eben den Nutzen, welchen die gewöhnliche Binomische Regel bey der Auflösung der reinen Gleichungen $x^n = o$ gewährt, und geht in diesem Fall auch in diese Regel über. Wenn aber die Gleichung eine unreine oder selbst transcendente Gleichung ist, so leidet auch dadurch der Gebrauch unserer Formel nicht, und giebt dann für den Werth der Wurzel eine ohne Ende fortlaufende Reihe. Da dem so ist, so wollen wir diese Anwendung genauer kennen zu lernen suchen. Es sey also folgende unreine aus drey Gliedern bestehende Gleichung gegeben:

$$x^n + cx = N$$

so daß c und N bekannte Größen bedeuten. Man setze $x^n + cx - N = y$, so wird $dy = (nx^{n-1} + c)dx$, und also $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$. Ferner ist nunmehr

dp =

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}dx}{(nx^{n-1}+c)^2};\ \text{und}\ q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}-c)^3}$$

Auf ähnliche Art findet man, da $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$ ist,

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-1}}{(nx^{n-1}+c)^5}$$

$$s = \left.\begin{array}{l} -n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} \\ +4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} \\ -n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4} \end{array}\right\} : (nx^{n-1}+c)^7$$

$$t = \left.\begin{array}{l} n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} \\ -n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{3n-7} \\ +n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(nn-29)c^2x^{2n-6} \\ -n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5} \end{array}\right\} : (nx^{n-1}+c)^9$$

ꝛc.

Hat man diese Werthe gefunden, so ist die Wurzel der gegebenen Gleichung,

$$f = x - py + \tfrac{1}{2}qy^2 - \tfrac{1}{6}ry^3 + \tfrac{1}{24}sy^4 - \tfrac{1}{120}ty^5 + ꝛc.$$

Denn man mag für x setzen was man will, (wodurch zugleich die Buchstaben y, p, q, r, ꝛc. bestimmte Werthe bekommen) so ist die Summe der Reihe allemal dem Werthe Einer Wurzel gleich.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 + 2x = 2$ gegeben.

Hier ist $c = 2$, $N = 2$, $n = 3$, und $y = x^3 + 2x - 2$.

Man setze $x = 1$, so wird $y = 1$; $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{84}{5^5}$; $s = -\frac{16.90}{5^7}$; ꝛc. und die Wurzel der Gleichung ist

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^5} - \frac{14}{5^5} - \frac{60}{5^7} - ꝛc. = 0{,}770751.$$

Nun setze man $x = 0,77$. Da $y = x^3 + 2x - 2$; $p = \frac{1}{3xx + a}$; $q = - 6p^3x$; $r = 9xxp^5 - 12p^5$, und $s = - 216 p^7x^3 + 720p^7x$ ist: so hat man, wenn man die Logarithmen nimmt,

$lx = 9,8864907$	$x = 0,77$
$lx^2 = 9,7729814$	$x^2 = 0,5929$
$lx^3 = 9,6594721$	$x^3 = 0,456533$
	$2x = 1,54$

$$x^3 + 2x = 1,996530$$

Folglich $y = -0,003467$

$$l - y = 7,5399538; \quad 3xx + 2 = 3,7787$$

$$lp = 9,4226575; \quad l(3xx+2) = 0,5773424$$

$$l - py = 6,9626113; \quad - py = 0,00091751l$$

$$lp^3 = 8,2679725$$

$$lx = 9,8864907$$

$$l3 = 0,4771213$$

$$ly^2 = 5,0799076$$

$$l - \tfrac{1}{2}qyy = 3,7114922 \quad - \tfrac{1}{2}qyy = 0,000000514$$

Hiernach ist die Wurzel $f = 0,0770916997$, und kaum in der letzten Zifer der Wahrheit nicht gemäß.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^4 - 2xx + 4x = 8$ gegeben.

Man setze $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, so wird $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)}$; $\frac{dp}{dx} = \frac{-3xx + 1}{4(x^3 - x + 1)^2}$. Folglich $q = \frac{-3xx + 1}{16(x^3 - x + 1)^3}$; $\frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{16(x^3 - x + 1)^4}$ und

$r =$

$$r = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{64(x^3 - x + 1)^5} \text{ ꝛc.}$$

Hierdurch bekömmt man für die Wurzel der Gleichung

$$f = x - \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} - \frac{(3xx - 1)yy}{32(x^3 - x + 1)^3} - \frac{(7x^4 - 4xx + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5}$$
$$- \text{ ꝛc.}$$

Man muß also x einen solchen Werth zu geben suchen, daß die Reihe convergire. Nun fällt in die Augen, daß, wenn man x so bestimmen wollte, daß $x^3 - x + 1 = 0$ würde, dann alle Glieder dieser Reihe, das erste ausgenommen, eine unendliche Größe bekämen, und man also seinen Zweck verfehlte. Es wird daher nothwendig für x einen solchen Werth zu erwählen, daß y klein und $x^3 - x + 1$ nicht klein werde. Es sey $x = 1$, so ist $y = -5$, und

$$f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64} - \text{ ꝛc.}$$

Da die drey Glieder $\frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$ eine geometrische Reihe bilden, deren Summe $\frac{5}{9}$ ist, so ist ohngefähr $f = \frac{14}{9}$. Es sey also $x = \frac{3}{2}$, so ist $y = -\frac{23}{16}$, und $x^3 - x + 1 = \frac{23}{8}$; folglich

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{407}{256.529} - \text{ ꝛc.} = 1{,}61$$

Nun setze man $x = 1{,}61$, so wird, wenn man zugleich $x^3 - x + 1 = z$ nimmt

$lx = 0{,}2068259$	$x = 1{,}61$
$lx^2 = 0{,}4136518$	$x^2 = 2{,}5921$
$lx^3 = 0{,}6204777$	$x^3 = 4{,}173281$
$lx^4 = 0{,}8273036$	$x^4 = 6{,}718983$

$$l-y = 8{,}4016934$$
$$lz = 0{,}5518502$$
$$l\frac{-y}{z} = 7{,}8498432$$
$$l4 = 0{,}6020600$$
$$l\frac{-y}{4z} = 7{,}2477832$$
$$l(3xx-1) = 0{,}8309926$$
$$ly^2 = 6{,}8033868$$
$$7{,}6343794$$
$$lz^3 = 1{,}6555506$$
$$5{,}9788288$$
$$l32 = 1{,}2041200$$
$$4{,}7747088$$

folglich

$$y = -0{,}025217$$
$$z = 3{,}563281$$
$$\frac{-y}{4z} = 0{,}0017692$$
$$3xx-1 = 6{,}7763$$
$$\frac{(3xx-1)y^2}{32z^4} = 0{,}000005952$$

Folglich
$$f = 1{,}6117632.$$

§. 242.

Diese Methode die Wurzeln der Gleichungen beynahe zu finden, erstreckt sich auch auf die transcendenten Größen. Wir wollen eine Zahl x suchen, deren aus irgend einem System genommener Logarithme zu der Zahl selbst ein bestimmtes Verhältniß habe. Man setze dieses Verhältniß $1 : n$, so hat man die Gleichung $x - nlx = 0$. Ferner sey k der Modulus jener Logarithmen, so daß man sie finde, wenn man die hyperbolischen Logarithmen durch k multiplicirt, wodurch $d.lx = \frac{kdx}{x}$ wird. Man setze demnach

$$x - nlx = y$$

und

und f sey der gesuchte Werth von x, wobey $x = n l x$ werde. Da also $y = x - n l x$ ist, so wird

$$dy = dx - \frac{k n dx}{x} = \frac{dx(x - kn)}{x},$$

und $\frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x - kn}$; also $dp = -\frac{kn dx}{(x-kn)^2}$; folglich

$$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-knx}{(x-kn)^3}; \qquad dq = \frac{2knxdx + k^2n^2dx}{(x-kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{knx(2x + kn)}{(x-kn)^3}; \text{ꝛc.}$$

Demnach wird

$$f = x - \frac{xy}{x - kn} - \frac{knxyy}{2(x-kn)^3} - \frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5} - \text{ꝛc.}$$

Wir werden aber unten sehen, daß diese Aufgabe keiner Auflösung fähig ist, wofern nicht $kn > e$ oder als die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist, d. h. es muß $kn > 2{,}7182818$ seyn.

Exempel.

Man soll eine Zahl außer 10 suchen, deren gemeine Logarithme der zehnte Theil der Zahl selbst sey.

Da von den gemeinen Logarithmen die Rede ist, so ist $k = 0{,}4342944819032 5$; und da $n = 10$ ist, so hat man $nk = 4{,}342944819032 5$. Setzt man nun $x = 1$ so wird $y = 1$ und

$$f = 1 + \frac{1}{3{,}3429} + \frac{2{,}1714724}{(3{,}3429)^3} - \text{ꝛc.}$$

folglich beynahe $f = 1{,}37$. Man setze also $x = 1{,}37$, so wird $lx = 0{,}136720567156406$, und da $y = x - 10 lx$ ist, so wird $y = 0{,}0027943284350$, und

$- x + kn = 2{,}9729448190325$. Es werde also

$lx =$

$$\begin{array}{rl}
lx = & 0,1367205 \\
ly = & 7,4462773 \\
\hline
& 7,5829978 \\
l(kn - x) = & 0,4731866 \\
\hline
& 1,1098122
\end{array} \quad \frac{-xy}{x-kn} = 0,00128769$$

Da ferner das dritte Glied

$$\frac{knxyy}{2(x-kn)^3} = \frac{kny}{2(x-kn)^2} \cdot \frac{xy}{x-k} \text{ ist,}$$

so wird

$$\begin{array}{rl}
l\frac{-xy}{x-kn} = & 7,1098122 \\
ly = & 7,4462773 \\
lkn = & 0,6377842 \\
\hline
& 5,1938527 \\
l(kn-x)^2 = & 0,9463732 \\
\hline
& 4,2474995 \\
l2 = & 0,3010300 \\
\hline
l\ \text{d. 3. Gl.} = & 3,9464695 \\
\text{1. Gl.}\ x = & 1,37 \\
\text{2. Gl.} = & 0,00128769 \\
\text{3. Gl.} = & 0,00000088 \\
\hline
f = & 1,37128857 \\
lf = & 0,137128857.
\end{array}$$

§. 243.

Wenn die Gleichung eine Exponential-Gleichung ist, so kann man dieselbe auf eine logarithmische zurückbringen. Soll z. B. der Werth von x gesucht werden, wobey $x^x = a$ ist, so wird $xlx = la$. Setzt man daher

$$y = xlx - la, \text{ so wird } dy = dxlx + dx$$

$$\text{und } \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1+lx}. \text{ Ferner ist nunmehr}$$

dp =

$$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}; \quad \text{und } \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3}$$

$$dy = \frac{dx}{x^2(1+lx)^3} + \frac{3dx}{x^2(1+lx)^4}; \quad \text{und folglich}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{x^2(1+lx)^4} + \frac{3}{x^2(1+lx)^5}. \quad \text{Ferner ist}$$

$$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+lx)^6}; \quad \text{also}$$

$$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7}, \quad \text{und}$$

$$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}$$

Wenn daher der wahre Werth von $x = f$, und also $f^f = a$ ist, so ist

$$f = x - \frac{y}{1+lx} - \frac{y^2}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2x^2(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$
$$- \frac{y^3}{6x^2(1+lx)^4} - \frac{5y^3}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$
$$- \frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7}$$
$$- \frac{y^5}{20x^4(1+lx)^6}$$

K.

Diese Reihe also, ohne Ende fortgesetzt, giebt den wahren Werth von f, man mag für x einen Werth setzen was für einen man will, indem man $y = x lx = la$ nimmt. Setzt man z. B. $x = 1$, so wird $y = -la$, und

$f =$

$$f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

wie la den hyperbolischen Logarithmen von a bedeutet.

Exempel.

Man soll die Zahl f suchen, wenn $f^f = 100$ ist.

Da $a = 100$, und $y = xlx - la = xlx - l100$ ist, so setze man, da bekannt ist, daß $f > 3$ und < 4 seyn muß, $x = \frac{7}{2}$. Alsdann ist

$$\begin{aligned} lx &= 1{,}25276296849 \\ xlx &= 4{,}38467034972 \\ l100 &= 4{,}60517018599 \\ \hline y &= -\,0{,}22049983627 \\ 1 + lx &= 2{,}25276296849 \end{aligned}$$

Demnach ist, wenn man die gemeinen Logarithmen braucht,

$$\begin{aligned} l-y &= 9{,}3434083 \\ l(1 + lx) &= 0{,}3527156 \\ \hline &\ 8{,}9906027; \quad \frac{-y}{1 + lx} = 0{,}0978797 \\ ly^2 &= 8{,}6868166 \\ 3l(1 + lx) &= 1{,}0581468 \\ \hline &\ 7{,}6286698 \\ l2x = l7 &= 0{,}8450980 \\ \hline &\ 6{,}7835718 \quad \frac{y^2}{2x(1 + lx)^3} = 0{,}0006075 \end{aligned}$$

Es ist also ohngefähr $f = 3{,}5972772$; wenn man aber die folgenden Glieder mit zu Hülfe nimmt, $f = 3{,}5972852$.

§. 244.

§. 244.

Außerdem aber leistet die Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichung einen vorzüglichen Nutzen, wenn eine gewisse Beziehung, welche zwischen den Wurzeln statt findet, bekannt ist. Es sey die Gleichung $y = 0$ gegeben, und y darin irgend eine Funktion von x. Wäre nun z. B. bekannt, daß zwey Wurzeln dieser Gleichung um die Größe a verschieden wären, so würde man diese Wurzeln leicht auf folgende Art entdecken. Es bedeute x die kleine Wurzel, und also $x + a$ die größere. Da die Funktion y verschwindet, wenn x eine von den Wurzeln der Gleichung $y = 0$ vorstellt, so wird sie es ebenfalls thun, wenn man darin $x + a$ statt x setzt. Es ist demnach

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

woher denn, da $y = 0$ ist, auch

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{a\,ddy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

wird. Diese beyden Gleichungen zusammen genommen, geben auf dem Wege der Elimination den Werth der Wurzel x, und die andere Wurzel ist um a größer.

Exempel.

Es sey die Gleichung:

$$x^5 - 24x^3 + 49x^2 - 36 = 0$$

gegeben, und davon irgend woher bekannt, daß zwey ihrer Wurzeln um 1 von einander verschieden sind.

Setzt man

$$y = x^5 - 24x^3 + 49x^2 - 36, \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Da nun $a = 1$ ist, so hat man

$$A \ldots 5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0.$$

Nun ist aber

$$B \ldots x^5 - 24x^3 + 49x^2 - 36 \,.\, 0.$$

Man multiplicire also die obere Gleichung durch x, und die untere durch 5, so bekommt man durch die Subtraction diese von jener

$$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0, \text{ oder}$$

$$C \ldots 5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0.$$

Zieht man hievon die erste A ab, so bleibt

$$\begin{array}{lrrrrr}
D \ldots & 19x^3 - & 45x^2 - & 18x + & 64 & = 0 \\
D.5x \ldots & 95x^4 - 225x^3 - & 90x^2 + & 320x & & = 0 \\
A.19 \ldots & 95x^4 + 190x^3 - & 1178x^2 + & 589x + & 494 & = 0 \\
\hline
E \ldots\ldots & 415x^3 - & 1088x^2 + & 269x + & 494 & = 0 \\
D.415 \ldots & 7885x^3 - & 18675x^2 - & 7470x + & 26560 & = 0 \\
E.19 \ldots & 7885x^3 - & 20672x^2 + & 5111x + & 9386 & = 0 \\
\hline
F \ldots\ldots & & 1997x^2 - & 12581x + & 17174 & = 0 \\
D.247 \ldots & 4693x^3 - & 11115x^2 - & 4446x + & 15808 & = 0 \\
E.32 \ldots & 13280x^3 - & 34816x^2 + & 8608x + & 15808 & = 0 \\
\hline
G \ldots\ldots & & 8587x^2 - & 23701x + & 13054 & = 0 \\
F.8587 \ldots & & 17148239x^2 - & 108033047x + & 147473138 & = 0 \\
G.1997 \ldots & & 17148239x^2 - & 47330897x + & 26068838 & = 0 \\
\hline
& & & 60702150x + & 121404300 & = 0
\end{array}$$

Hieraus

Hieraus folgt, $x = 2$, und es ist demnach auch $x = 3$ eine Wurzel der Gleichung.

§. 245.

Es kann indeß diese Operation auch ohne Differenzial-Rechnung zu Stande gebracht werden, weil man die Gleichung, welche die Differenzial-Rechnung gab, ebenfalls dadurch bekommt, daß man in der gegebenen Gleichung $x + a$ für x setzt. Uebrigens ist die gebrauchte Eliminations-Methode sehr mühsam, und würde, wenn die Gleichung zu einem höhern Grade gehörte, unsägliche Arbeit nöthig machen, daher sie bey transcendenten Gleichungen gar nicht brauchbar ist. Nehmen wir aber an, daß zwey Wurzeln einer Gleichung $y = 0$ einander gleich seyn, so verwandelt sich die Differenzial-Gleichung, weil dann $a = 0$ ist, in diese, $\frac{dy}{dx} = 0$. So oft daher eine Gleichung $y = 0$ zwey gleiche Wurzeln hat, so oft ist auch $\frac{dy}{dx} = 0$, und diese beyden Gleichungen geben, mit einander verbunden, den Werth von x, dem zwey Wurzeln gleich sind. Wenn also umgekehrt zwey Gleichungen, $y = 0$, und $\frac{dy}{dx} = 0$, eine Wurzel gemein haben, so ist diese Wurzel auch zweymal in der Gleichung $y = 0$ enthalten. Dieses findet statt, wenn nach gänzlicher Elimination der Größe x aus den beyden Gleichungen $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ eine identische Gleichung gefunden wird. Würde z. B. die Gleichung

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

gegeben, so wäre auch $3xx - 4x - 4 = 0$, und setzt man das Doppelte hiervon zu jener Gleichung hinzu, so wird

$x^3 + 4xx - 12x = 0$, oder $xx + 4x - 12 = 0$.
Das Dreyfache davon ist,

$$3xx + 12x - 36 = 0, \text{ also}$$
$$3xx - 4x - 4 = 0 \text{ davon abgezogen}$$
$$\text{so kommt } 16x - 32 = 0,$$
$$x - 2 = 0.$$

Da sich also $x = 2$ ergeben hat, so setze man diesen Werth in eine der vorhergehenden Gleichungen $3xx - 4x - 4 = 0$. Hierdurch bekommt man die identische Gleichung $12 - 8 - 4 = 0$, und daraus schließt man, daß die gegebene Gleichung $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ zwey gleiche Wurzeln, nemlich 2, habe.

§. 246.

Hat man also eine algebraische Gleichung von irgend einer Anzahl von Dimensionen:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0,$$

welche zwey einander gleiche Wurzeln enthält: so ist auch:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Es ist nemlich die zwiefache Wurzel jener Gleichung auch eine Wurzel von dieser. Man multiplicire jene mit n, und diese mit x, und subtrahire das letztere Produkt von dem ersten, so bekommt man

$$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Ferner multiplicire man jene durch a, diese durch b, und addire beyde: so wird

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und diese Gleichung, mit der gegebenen verbunden, wird die Wurzel geben, welche die gegebene Gleichung doppelt enthält. Da nun die Größen a und b willkührlich angenommen werden kön=

können, so hat man in den Coefficienten $a, a+b, a+2b, a+3b$, ꝛc. irgend eine arithmetische Progression; und wenn also eine Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, so findet man dieselben, wenn man die einzelnen Glieder der gegebenen Gleichung durch die Glieder irgend einer arithmetischen Progression multiplicirt, indem die auf diesem Wege resultirende Gleichung die Wurzel enthält, welche sich in der gegebenen zweymal findet. Werden z. B. die Glieder der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

durch folgende arithmetische Progression multiplicirt.

$$a;\ a+b;\ a+2b;\ a+3b;\ a+4b;\ \text{ꝛc.}$$

so entsteht diese neue Gleichung:

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

welche mit jener verbunden, die gleichen Wurzeln zu erkennen giebt. Und dies ist die hinlänglich bekannte Regel zur Erfindung der gleichen Wurzeln einer Gleichung, wenn dieselbe deren zwey enthält.

§. 247.

Hat eine Gleichung $y = 0$ drey gleiche Wurzeln, so ist nicht nur $\frac{dy}{dx} = 0$, sondern auch $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, wenn man für x den Werth der Wurzel setzt, die in der Gleichung $y = 0$ dreymal enthalten ist. Um sich hiervon zu überzeugen, setze man die drey Wurzeln der Gleichung x, $x+a$, $x+b$, so daß man sich zuvörderst dieselben als um a und b von einander verschieden vorstelle. Da nun y verschwindet, sowohl wenn man $x+a$, als wenn man $x+b$ für x setzt, so ist

$$y = 0$$

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{6dx^3} + \frac{a^4d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$y + \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2ddy}{2dx^2} + \frac{b^3d^3y}{6dx^3} + \frac{b^4d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Zieht man von diesen beyden leztern Gleichungen die erste ab, so wird

$$\frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2d^3y}{6dx^3} + \frac{a^3d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{bddy}{2dx^2} + \frac{b^2d^3y}{6dx^3} + \frac{b^3d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

Man subtrahire auch diese Gleichungen von einander, und dividire durch $a - b$, so wird

$$\frac{ddy}{2dx^2} + \frac{(a+b)d^3y}{6dx^3} + \frac{(aa+ab+bb)d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Endlich setze man $a = 0$ und $b = 0$, so daß nunmehr die angenommenen drey Wurzeln einander gleich werden, so erhält man

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{und} \quad \frac{ddy}{dx^2} = 0.$$

§. 248.

So oft daher eine Gleichung, $y = 0$, drey gleiche Wurzeln, nemlich, f, f, f hat, so oft ist die Größe f nicht bloß eine Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, sondern auch von $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Da also f eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, und ihres Differenzials $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ ist: so erhellet aus dem Vorhergehenden, daß sie in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zweymal enthalten ist. Wenn daher die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

drey

drey gleiche Wurzeln f, f, f enthält, so hat die Gleichung, welche man durch die Multiplication ihrer Glieder durch eine arithmetische Progression erhält, zwey gleiche Wurzeln f, f; und man kann diese von neuem durch eine arithmetische Progression multipliciren, um eine Gleichung zu bekommen, worin f nur einmal eine Wurzel ist. Man erhält auf diese Art drey Gleichungen, die eine gemeinschaftliche Wurzel haben, und findet durch ihre Verbindung die Wurzel selbst leicht. Denn wenn man solche arithmetische Progressionen wählt, deren erstes oder letztes Glied $= 0$ ist, so bekommt man eine um einen Grad niedrigere Gleichung, und erleichtert sich dadurch die Elimination.

§. 249.

Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß, wenn eine Gleichung, $y = 0$, vier gleiche Wurzeln f, f, f, f, hat, bey $x = f$ nicht nur $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, sondern auch $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ sey. So wie nemlich die Gleichung $y = 0$ die Wurzel f viermal enthält, so steckt dieselbe in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ dreymal, in der Gleichung $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ zweymal, und in der Gleichung $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ einmal. Dies sieht man noch leichter, wenn man erwägt, daß die Funktion y in diesem Falle die Form $(x - f)^4 X$ haben müsse, wenn X irgend eine Funktion von x bedeutet. Legt man diese Form zum Grunde, so ist

$$\frac{dy}{dx} = (x - f)^3 \left(4X + \frac{(x - f)\,dX}{dx}\right)$$

und also durch $(x-f)^3$ theilbar. Auf ähnliche Art hat $\frac{ddy}{dx^2}$ den Faktor $(x-f)^2$, und $\frac{d^3y}{dx^3}$ den Faktor $x-f$; woraus erhellet, daß die Wurzel $x=f$, wenn dieselbe in der Gleichung $y=0$ viermal enthalten ist, in $\frac{dy}{dx}=0$ dreymal, in $\frac{ddy}{dx^2}=0$ zweymal, und in $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ einmal stecken müsse.

Anmerkungen und Zusätze

zum

ersten Theile und der ersten Hälfte des zweyten Theils

der

vollständigen Anleitung

zur

Differenzial-Rechnung

von

Leonhard Euler

vom

Uebersetzer.

Anmerkungen und Zusätze

zum

ersten Theile.

Vorerinnerung.

Ich weiß es aus eigener und aus fremden Erfahrungen, daß man die Differenzial-Rechnung am leichtesten und gründlichsten erlernt, wenn man dabey ein Buch zum Grunde legt, welches dieselbe so vollständig, so ausführlich, und in einer so schönen Ordnung abhandelt, als dasjenige, dessen zweyten Theil ich hier der ersten Hälfte nach übersetzt habe. Dies ist daher auch der vorzüglichste Bewegungsgrund gewesen, der mich angetrieben, das vortrefliche Eulerische Werk durch eine Uebersetzung gemeiner zu machen, und seinen Gebrauch zu befördern. Um noch mehr für diejenigen zu sorgen, welche dasselbe zur Erlernung der Differenzial-Rechnung brauchen wollen, will ich hier den Anfang machen, solche Anmerkungen und Zusätze zu liefern, als mir bey einer zweyten Durchlesung nützlich scheinen; denn zweymal muß man wohl ein solches Werk lesen, weil man das erste Mal, wenigstens die volle und leichte Uebersicht des Ganzen selten bekommt, und kann es auch thun, weil die zweyte Durchlesung bey weitem nicht so viel Zeit und Mühe erfordert als die erste. Ueberhaupt also sind die Anmerkungen und Zusätze zu jedem Theile, die unmittelbar hinter der Uebersetzung desselben folgen, für die erste, diejenigen aber, welche ich bey dem folgenden Theile nachliefere, für die zweyte Durchlesung bestimmt. Denjenigen, für welche ich diese Arbeit hauptsächlich übernommen habe, ist, wie ich aus Erfahrungen und Versuchen weiß, eine solche Vertheilung vortheilhaft, und dies wird mich bey denen entschuldigen, die sich durch das bereits erworbene größere Maß von Fertigkeit mehr auf einmal zu fassen im Stande sind.

I.

Von der allgemeinen Mathematik überhaupt.

Ich habe bereits in den der Uebersetzung des ersten Theils beygefügten Anmerkungen und Zusätzen von der allgemeinen Mathematik und ihren Theilen geredet; hier will ich es auf eine andere und leichtere Art thun.

So vortreflich Hrn. Kants Definition der Mathematik ist, wenn man sie an den Elementen des Euclides prüft, so ist sie doch nicht von allen Unbequemlichkeiten frey, wenn man aus dem Gebiete der Elementar-Mathematik hinausgeht. Ich verweise dieserwegen auf das dritte Stück meiner Beyträge zur Beförderung des Studiums der Mathematik, und insbesondere auf die S. 207-211. stehende Anmerkung, desgleichen auf meine Abhandlung über den Begriff der Mathematik und ihre Theile im zweyten und fünften Stücke. Bewogen durch die daselbst angeführten Gründe, habe ich es gewagt, die Mathematik die Wissenschaft

schaft zu nennen, in so fern Anschauungen den Gegenstand derselben ausmachen, oder sie als die Wissenschaft der sinnlichen Formen zu beschreiben.

Legt man die letztere Beschreibung zum Grunde, so lassen sich die darin gedachten Formen theils einzeln untersuchen, theils überhaupt und im Allgemeinen betrachten. Das erste geschieht in der Elementar-Mathematik, das andere aber in der allgemeinen, die deswegen nothwendig von einem deutlichen Begriffe der ihr unterworfenen Formen ausgehen muß.

Soll ich daher Hrn. Kants Ausdrücke gebrauchen, so muß ich mir die Elementar-Mathematik als die Wissenschaft aus Constructionen vermittelst der Begriffe, die allgemeine hingegen als die Wissenschaft aus Begriffen vermittelst Constructionen gedenken. Angenommen ferner, daß die sinnlichen Formen, allgemein betrachtet, den Begriff der Größe geben, und daß also die allgemeine Mathematik die Größe, unabhängig von der Erfahrung und in deutlichen Begriffen gedacht, zum Gegenstande habe: so wird es so viel Theile der allgemeinen Mathematik geben, als sich verschiedene Arten, die Größe in Begriffen zu untersuchen, annehmen lassen.

Da also zu einem deutlichen Begriffe der Größe Vorstellung von den Bestandtheilen derselben und von der Menge dieser Bestandtheile in ihr gehört: so sind folgende Fälle möglich.

Einmal können die Bestandtheile, aus welchen man die Größen bestehen läßt, entweder ebenfalls Größen, oder Größen-Einheiten, Elemente im strengen Sinne seyn.

Ferner

Ferner können dieselben im ersten Falle entweder in jeder aus ihnen bestehenden Größe alle einander gleich angenommen werden, oder es kann diese Bedingung wegfallen.

Endlich kann, wenn die Bestandtheile in jeder aus ihnen bestehenden Größe lauter einander gleiche Größen sind, das Gesuchte, nach der Natur und Menge des Gegebenen, entweder bestimmt, oder nur unbestimmt zu finden seyn.

Hiernach begreift die allgemeine Mathematik

1. die niedere allgemeine Mathematik, welche die Größen aus einander gleichen Bestandtheilen bestehen läßt, und sich
   a. in die bestimmte, und
   b. in die unbestimmte niedere allgemeine Mathematik theilet.

2. die höhere allgemeine Mathematik, worin die Größen zum Theil als aus gleichen, zum Theil als aus ungleichen Bestandtheilen zusammengesetzt gedacht werden. Sie theilet sich in zwey Theile,
   a. in die Lehre von den Differenzen, welche, wenn die Größen gegeben sind, die Bestandtheile derselben, und
   b. in die Lehre von den Summen, welche aus gegebenen Differenzen die Größen finden lehrt, wozu diese Differenzen gehören.

3. die transcendente Mathematik, in welcher die Bestandtheile, woraus man die untersuchten Größen bestehen läßt, Größen-Einheiten oder Elemente im strengen Sinne sind. Auch diese hat zwey Theile,
   a. die Differenzial-Rechnung, und
   b. die Integral-Rechnung.

Weil

Weil aber die Sätze, welche man in der allgemeinen Mathematik findet, auf keine Weise bloß dazu dienen, die Sätze der Elementar-Mathematik auf eine andere Art zu ordnen, und sie etwa einer leichten Uebersicht näher zu bringen; sondern dadurch die Kenntniß von den Elementar-Gegenständen auf eine bewundernswürdige Art erweitert, und die bekannten größtentheils auf viel kürzern und leichtern Wegen gefunden werden können: so ist es natürlich, die Lehren der allgemeinen Mathematik nach ihrer Erfindung, zu diesen Vortheilen zu benutzen; und deswegen kann und muß jeder Haupttheil der allgemeinen Mathematik aus einem reinen und einem angewandten Theile bestehen, so daß der letztere die in dem ersten enthaltenen Sätze theils auf die discreten, theils auf die continuirlichen Größen anwende. So viel hier nochmals über die allgemeine Mathematik und ihren Theilen überhaupt; ich wende mich zu einigen Anmerkungen über die Differenzial- und Integral-Rechnung insbesondere.

II.

Von der Differenzial- und Integral-Rechnung insbesondere.

Man rühmt die Differenzial- und Integral-Rechnung wegen ihrer Erhabenheit und Wichtigkeit; sollte ihr Werth nicht noch erhöhet werden, wenn man dazu auch den Vorzug der Leichtigkeit setzen könnte? Schon das macht diesen Vorzug wahrscheinlich, daß die Differenzial- und Integral-Rechnung den Gegenstand der Mathematik in der größten Allgemeinheit untersuchen; so wie sichs daher ebenfalls erklären läßt, warum demungeachtet mehrere bey der Erlernung derselben

selben so viele Schwierigkeiten finden. Hat man nemlich die nöthigen Vorübungen gehabt, so ist die Beschäftigung mit dem Allgemeinsten deswegen nothwendiger Weise leichter, als jede speciellere Untersuchung, weil das Allgemeinste die wenigsten Merkmale enthält: allein hat es an den Vorübungen gefehlt, so erwirbt man sich dadurch meistens nur leere Begriffe; und diese sind allemal eine ergiebige Quelle von Schwierigkeiten, wenn sie nicht bloß durch Worte oder andere Zeichen ausgedruckt, sondern auch wirklich gebraucht werden sollen. Doch es wird der Mühe nicht unwerth seyn, hier zuvörderst die Differenzial-Rechnung, deren System vom Verfasser im ersten Theile vollständig mitgetheilt ist, aus diesem Gesichtspunkte genau und ausführlich zu betrachten.

Das Geschäft der Differenzial-Rechnung besteht, wie ich solches aus dem ersten Theile voraussetzen kann, lediglich in der Erfindung der Differenzialien der Funktionen der veränderlichen Größen, und es kann daher dieselbe füglich eben so viel Abtheilungen bekommen, als sich Hauptarten von Funktionen denken lassen. Nun sind die Funktionen

1. entweder gemeine oder höhere, d. h. entweder Funktionen veränderlicher Größen im eingeschränkten Verstande (Anmerk. und Zus. zum 1sten Th. S. 292.) oder Funktionen solcher veränderlicher Größen, die wieder Funktionen von andern veränderlichen Größen sind.
2. entweder Funktionen Einer oder Funktionen mehrerer veränderlicher Größen.
3. entweder entwickelte oder verwickelte Funktionen.

Hiernach ergeben sich folgende Capitel.

1. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten Funktionen Einer veränderlichen Größe. Dieses Capitel theilet sich aber, wegen seiner

ner

ner Weitläuftigkeit nach den beyden Hauptarten der ihm unterworfenen Funktionen in zwey andere.

a. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten algebraischen Funktionen.

b. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten transcendenten Funktionen.

2. Von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten Funktionen zweyer und mehrerer veränderlicher Größen.

3. Von der Erfindung der Differenzialien der höheren entwickelten Funktionen.

4. Von der Erfindung der Differenzialien der verwickelten Funktionen.

Vergleicht man diese Titel mit den Rubriquen des fünften bis neunten Capitels des ersten Theils, so wird man die vollkommenste Uebereinstimmung wahrnehmen.

Da aber die Differenzial-Rechnung ein Theil der allgemeinen Mathematik ist, und die allgemeine Mathematik die Größe in Begriffen vermittelst Constructionen, (willkührlicher nemlich) untersucht: so darf man hierbey noch nicht stehen bleiben, sondern muß die Zergliederung so weit fortsetzen, bis man die Arten der Funktionen in einer natürlichen Stufenfolge so speciell gefunden hat, daß sie Constructionen zulassen. Dieses soll nun zuvörderst mit den gemeinen und entwickelten algebraischen Funktionen geschehen. Es sey x die veränderliche Größe, deren gemeine und entwickelte algebraische Funktionen gesucht werden sollen: so sind nach dem Begriffe der algebraischen Funktion (Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Th. 1. Cap. 1. §. 7.)

1. die

1. die einfachen

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x^n \\ 2)\ x^{-n} \\ 3)\ x^{\frac{n}{m}} \\ 4)\ x^{-\frac{n}{m}} \end{array}\right\}\text{ oder allgemein } x^m$$

wenn n jede Zahl bedeutet.

2. die aus diesen zusammengesetzten,
   1) auf dem Wege der Addition und Subtraction,
   2) auf dem Wege der Erhebung zu Dignitäten nach dem der Addition und Subtraction,
   3) auf dem Wege der Multiplication und Division.

Bloß dieses und die Methode der allgemeinen Mathematik, überhaupt nemlich nur, vorausgesetzt, so läßt sich zum voraus bestimmen, was man in einem Systeme der Differenzial-Rechnung in dem Capitel von der Erfindung der Differenzialien der gemeinen und entwickelten algebraischen Funktionen antreffen werde. Nemlich, wenn die allgemeine aus der Definition der Differenzial-Rechnung selbst hergeleitete Regel zur Erfindung der Differenzialien jeder Funktion, wie es eigentlich seyn muß, in den Prolegomenen schon vorausgeschickt worden wäre,

1. die Anwendung dieser Regel auf die angeführten Fälle.
2. eine Untersuchung über die Natur der gefundenen Differenzialen.
3. für die Fälle, wo es dergleichen giebt, bequemere Methoden zur Erfindung der Differenzialien, als sich nach der allgemeinen Regel sogleich darbieten.

Nun sey es mir erlaubt, die gedachte allgemeine Regel als bekannt vorauszusetzen, oder mich deswegen auf die Ent-

wickelung

wickelung derselben, welche ich in den Anmerkungen und Zusätzen bey der Uebersetzung des ersten Theils S. 312 f. gegeben habe, zu berufen. Sobald man eine allgemeine Regel hat, und außerdem den Binomischen Lehrsatz brauchen kann, weil man seinen Beweis ohne Differenzial-Rechnung zu führen im Stande ist: so kann man die angeführten einfachen Fälle auf einmal vornehmen, indem man n in x^n jede Zahl bedeuten läßt, und die angeführten zusammengesetzten Fälle, wenn man die einfachsten von der ersten und dritten Classe nach der allgemeinen Regel behandelt hat, ohne Mühe auf das Dagewesene zurückführen. Auf diese Art erhellet, wie mich dünkt, hinlänglich, daß die Erfindnng der Differenzialien bis hierher mit ganz und gar keinen Schwierigkeiten verbunden sey, da das, was zur Natur dieser Differenzialien gehört, ebenfalls nur geringe Aufmerksamkeit erfordert.

Will man den Binomischen Lehrsatz nicht voraussetzen, so kann man den Satz, daß für jeden Werth von n allemal

$$d.x^n = nx^{n-1}dx$$

sey, durch ein Inductions-mäßiges Verfahren auf folgende Art finden.

Nach der allgemeinen Regel findet man

$$d.x^2 = 2xdx$$

$$d.x^3 = 3x^2dx.$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, und das Differenzial

$$d.x^n = nx^{n-1}dx \text{ ist, allemal}$$

$$d.x^{n+1} = (n+1)x^n dx$$

sey. Denn da

$$x^{n+1} = x^n.x, \text{ und } d.x^n = nx^{n-1}dx$$

ist, so wird

$$d.x^{n+1} = (x^n + n x^{n-1} dx)(x + dx) - x^{n+1}$$
$$= n x^n dx + x^n dx + n x^{n-1} dx^2$$
$$= (n + 1) x^n dx.$$

Nun ist aber die Formel $d.x^n = n x^{n-1} dx$ wahr für $n = 2$ und $n = 3$, also auch für 4, 5, 6, u. s. w. ohne Ende.

Dies vorausgesetzt bleibe hier, so wie auch nachher, n eine ganze Zahl, und dabey sey $z = x^{-n}$ und $d.z = d.x^{-n}$ zu finden. Da $z = x^{-n}$ seyn soll, so ist $z x^n = 1$, und also
$$(z + dz)(x^n + n x^{n-1} dx) - z x^n = 0, \text{ d. i.}$$
$$x^n dz + n z x^{n-1} dx = 0, \text{ oder}$$
$$x^n dz = - n z x^{n-1} dx. \text{ Hieraus aber folgt}$$
$$dz = - \frac{n z x^{n-1} dx}{x^n} = - \frac{n x^{-1} dx}{x^n} = - n x^{-n-1} dx$$

Ferner sey $z = x^{\frac{n}{m}}$, so ist $z^m = x^n$ und
$$m z^{m-1} dz = n x^{n-1} dx, \text{ also}$$
$$dz = \frac{n x^{n-1} dx}{m z^{m-1}} = \frac{n x^{n-1} dx}{m \times \frac{x^n}{x^{\frac{n}{m}}}}$$
$$= \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1} dx$$

Endlich sey $z = x^{-\frac{n}{m}}$, also $z^m = x^{-n}$: so ist
$$m z^{m-1} dz = - n x^{-n-1} dx, \text{ folglich}$$
$$dz = \frac{- n x^{-n-1} dx}{m z^{m-1} dx} = - \frac{n x^{-n-1} dx}{m \times \frac{x^{-n}}{x^{-\frac{n}{m}}}}$$
$$= - \frac{n}{m} x^{-\frac{n}{m} - 1} dx.$$

Ver-

Vergleicht man also die gefundenen Ausdrücke unter einander, so fällt in die Augen, daß sie unter die allgemeine Form

$$d.x^n = nx^{n-1}dx$$

gehören, wenn man darin n als ein allgemeines Zeichen aller Zahlen betrachtet. Auf diese Art hat man das, was ich in den Anmerkungen und Zusätzen beym ersten Theile, S. 390, meiner damaligen Absicht nach, nur kurz zu berühren brauchte, vollständig.

Um Gelegenheit zur Vergleichung zu geben, und zugleich um mir den Weg zu verschiedenen, bey der Erlernung der Differenzial Rechnung, nützlichen Anmerkungen zu bahnen, will ich, ehe ich weiter gehe, den ersten Abschnitt aus des Marquis de l'Hopital Analyse des infiniment petits nebst den in der Edition vom la Caille dazu gefügten Noten, übersetzt mittheilen. Es enthält derselbe die allgemeinen Regeln der Differenzial-Rechnung, und ist folgender:

Erste Erklärung.

Veränderliche Größen sind solche, die einer stetigen Vermehrung oder Verminderung fähig sind, und beständige dagegen diejenigen, die unverändert dieselben bleiben, während andere mit ihnen verbundene sich verändern. So sind z. B. bey der Parabel die Applicaten und Absciſſen veränderliche, der Parameter aber eine beständige Größe.

Zweyte Erklärung.

Der unendlich kleine Theil, um welchen die veränderlichen Größen bey ihrer stetigen Veränderung vermehrt oder vermindert werden, heißt das Differenzial dieser Größe. Es stelle z. B. die Linie AMB, Fig. 1, irgend eine Curve vor; ihre Axe oder Durchmesser sey die gerade Linie AC; PM eine ihrer Applicaten, und pm eine andere dieser unendlich nahe Applicate. Zieht man nun MR der AC parallel, desgleichen die Sehnen AM, Am; und beschreibt außerdem aus A mit AM den Kreisbogen MS: so ist Pp das Differenzial von AP; Rm das Differenzial von PM; Sm das Differenzial von AM und Mm das Differenzial von dem Bogen AM. Eben so ist das kleine Dreyeck MAm, welches den Bogen Mm zur Grundlinie hat, das Differenzial des Abschnitts AM, und der kleine Raum MPpm das Differenzial der zwischen den geraden Linien AP, PM und dem Bogen AM enthaltenen Fläche.

Zusatz.

1. Es fällt in die Augen, daß das Differenzial einer beständigen Größe = o ist, oder, denn dieses sagt dasselbe, daß die beständigen Größen kein Differenzial haben.

Willkührlicher Satz.

Um das Differenzial einer veränderlichen Größe, welche durch einen einzigen Buchstaben ausgedruckt wird, auf eine bequeme Art andeuten zu können, wollen wir dazu den Buchstaben d bestimmen, und, die Verwirrung zu vermeiden, denselben in der Folge bloß zu dieser Absicht brauchen. Setzt man z. B. die veränderlichen Größen $AP = x$; $PM = y$; $AM = z$; den Bogen $AM = u$; die vermischtlinige Figur $AMP = s$; den Abschnitt $AM = t$: so soll dx den Werth von Pp; dy den von Rm; dz den von Sm; du den von dem Bogen Mm; ds den von dem kleinen Raume MPpm und dt den von dem kleinen vermischtlinigen Dreyecke MAm anzeigen.

Erste Forderung oder Voraussetzung.

2. Es wird vorausgesetzt, daß man zwey Größen, welche bloß um einen unendlich kleinen Theil von einander verschieden sind, mit einander verwechseln könne, oder, welches eben darauf hinausläuft, daß eine Größe durch Hinzusetzung oder Wegnehmung eines unendlich kleinen Theils nicht verändert werde. So soll es z. B. gleich seyn, ob man Ap oder AP, pm oder PM, den kleinen Raum MPpm, oder das kleine Rechteck MPpR, den kleinen Abschnitt AMm oder das kleine Dreyeck AMS, den Winkel pAm oder PAM nimmt, u. s. f.

Hiezu gehört folgende Anmerkung.

„Diese Forderung oder vielmehr Voraussetzung, welche „Anfängern Schwierigkeit zu machen pflegt, enthält nichts, „was gegründete Einwendungen zuließe. Beschuldigt man „doch die Geometer und Astronomen des Mangels an Ge„nauigkeit nicht, und wie viel beträchtlicher sind ihre so häu„figen Auslassungen als die des Algebraisten! Nimmt z. B. der „Geometer, wenn er die Höhe eines Berges messen will, auf „ein Sandkorn Rücksicht, welches der Wind vom Gipfel des„selben wegführt? Setzen nicht die Astronomen, wenn sie „von den Fixsternen reden, den Durchmesser der Erde bey „Seite, dessen Größe fast 3000 (französische) Meilen beträgt? „Betrachten sie nicht bey der Berechnung der Mondfinster„nisse die Erde als eine Kugel, und vergessen also der Häuser, „der Thürme, der Berge auf derselben? Dergleichen darf „denn doch weit weniger aus der Acht gelassen werden als „dx, weil man eine unendliche Menge von dx braucht, um „Ein x zu bekommen. Es ist daher die Differenzial-Rech„nung die sicherste und genaueste unter allen Rechnungen, „und man würde Unrecht thun, wenn man wider die ge-

„dachte Voraussetzung Einwendungen machen wollte. Uebri„gens sind alle jene Vergleichungen aus Wolfs Elementen „der Mathematik, B. 1. S. 418. genommen."

Zweyte Forderung oder Voraussetzung.

3. Ferner wird vorausgesetzt, daß man eine krumme Linie als aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Linien zusammengesetzt, oder als ein Polygon von unendlich vielen Seiten betrachten dürfe, davon jede unendlich klein sey, und welche durch die eingeschlossenen Winkel die Krümmung der Linie bestimmen. So sollen z. B. der Theil der Curve Mm und der Kreisbogen MS wegen ihrer unendlichen Kleinheit als gerade Linien und also das kleine Dreyeck mSM als ein geradliniges Dreyeck angesehen werden können.

Willkührlicher Satz.

In der Folge werden die letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x, 2c. zur Bezeichnung der veränderlichen, die ersten a, b, c, 2c. aber zur Bezeichnung der beständigen Größen gebraucht werden, so daß, indem x in $x + dx$ übergeht, y, z, 2c. in $y + dy$; $z + dz$ verwandelt werden, (nach 1) a, b, c aber unverändert bleiben.

Erster Satz. Aufgabe.

4. Das Differenzial eines Aggregats zu finden.

Es sey das Differenzial von $a + x + y - z$ zu suchen. Nimmt man an, daß x um einen unendlich kleinen Theil vermehrt werde, d. h. daß x in $x + dx$ übergehe, so geht auch y in $d + dy$ und z in $z + dz$ über, die beständige Größe a aber bleibt dieselbe. Man erhält also in dem gedachten Falle $a + x + dx + y + dy - z - dz$ statt $a + x + y - z$,

und

und das Differenzial dieses Aggregats, welches man durch die Subtraction desselben von jenem Ausdrucke findet, ist daher: $dx + dy - dz$. Eben so verhält es sich in den übrigen Fällen, und so hat man die

Erste Regel,

für die durch Addition und Subtraction entstehenden Aggregate.

Man nimmt das Differenzial eines jeden Gliedes der gegebenen Größe, macht daraus mit Beybehaltung der Zeichen eine andere Größe. Auf diese Art bekommt man das gesuchte Differenzial.

Zweyter Satz. Aufgabe.

5. Das Differenzial eines Produkts zu finden.

1) Das Differenzial von xy ist $ydx + xdy$. Denn y geht in $y + dy$ über, wenn x in $x + dx$ verwandelt wird, und xy wird also alsdann $xy + ydx + xdy + dxdy$, weil dieses das Produkt aus $x + dx$ in $y + dy$ ist. Es ist demnach das Differenzial dieses Produkts $= ydx + xdy + dxdy$ oder $ydx + xdy$ (nach 2) weil $dxdy$ unendlich klein in Vergleichung mit ydx und xdy ist. Denn dividiret man ydx und $dxdy$ durch dx, so findet man y und dy; und da dy das Differenzial von y ist, so ist es auch unendlichmal kleiner als y. Folglich ist das Differenzial eines Produkts aus zweyen Größen gleich dem Produkte aus dem Differenziale der ersten Größe in die andere, nebst dem Produkte aus dem Differenziale der zweyten Größe in die erste.

2) Das Differenzial von xyz ist $yzdx + xzdy + xydz$. Denn betrachtet man das Produkt xy als eine einfache

Größe: so muß man nach dem so eben Bewiesenen das Produkt aus seinem Differenziale $ydx + xdy$ in die andere Größe z (welches $yzdx + xzdy$ ist) zu dem Produkte des Differenzials dz der zweyten Größe z in die erste xy (oder $xydz$) setzen; und es ist folglich das Differenzial von $xyz = yzdx + xzdy + xydz$.

3) Das Differenzial von $xyzu$ ist $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Dieses beweiset man auf ähnliche Art, indem man das Produkt xyz als eine einfache Größe beobachtet. Eben so verhält sichs mit den folgenden Produkten ohne Ende, und daher ergiebt sich die

Zweyte Regel

für die in einander multiplicirten Größen.

Das Differenzial eines Produkts ist gleich der Summe der Produkte aus dem Differenziale einer jeden Größe in alle übrige.

Also ist das Differenzial von $ax = xo + adx$ d. h. adx; das Differenzial von $(a+x) \times (b-y) = bdx - ydx - ady - xdy$.

Hiezu gehört folgende Anmerkung.

„Dieser Artikel bedarf einer ausführlichen Erläuterung. Man giebt zu, daß das Differenzial von xy gleich sey $ydx + xdy + dxdy$; allein man behauptet dabey, daß die Weglassung von $dxdy$ in der Praktik nicht ohne nachtheilige Folgen bleibe. Hier ist der Beweis des Gegentheils, in möglich größter Strenge, allein der allgemeinen Verständlichkeit wegen auch etwas weit hergeholt.

1) Jede unendliche Größe wird durch eines der folgenden Zeichen angedeutet, ∞, ∞^2, ∞^3, ꝛc.

2) Das erste dieser Zeichen bezeichnet ein Unendliches vom ersten Grade, das andere ein Unendliches vom zweyten Grade, das dritte ein Unendliches vom dritten Grade, u. s. f.

3) Ein Unendliches vom zweyten Grade ist unendlichmal größer als ein Unendliches vom ersten Grade, und eben so das Unendliche vom dritten Grade in Vergleichung mit dem vom zweyten.

4) Eine Unendliche Größe kann durch Hinzusetzung einer endlichen keinen Zuwachs, und durch die Wegnehmung derselben keine Verminderung leiden. Also ist $\infty + 1 = \infty$; so wie auch $\infty - 1 = \infty$. Was man von dem Unendlichen im Vergleichung mit dem Endlichen behauptet, das gilt auch von dem Unendlichen jedes höheren Grades in Vergleichung mit dem von einem niedrigern Grade. So ist z. B. $\infty^2 + \infty = \infty^2$, und $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$. Der Beweis hiervon ist in der vorhergehenden Anmerkung enthalten.

5) Jede unendlich kleine Größe läßt sich durch einen Bruch anzeigen, dessen Zähler ein Endliches, der Nenner aber ein Unendliches ist. So sind $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, ꝛc. Ausdrücke des unendlich Kleinen vom ersten, zweyten, dritten Grade, u. s. f. Auch giebt ein Bruch, dessen Zähler ein Unendliches von einem niedern, der Nenner aber ein Unendliches von einem höhern Grade ist, ein unendlich Kleines, z. B. $\frac{\infty}{\infty^2}$; weil $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$ ist.

6) Ein unendlich Kleines vom zweyten Grade ist unendlichmal kleiner als ein unendlich Kleines vom ersten Grade, und eben so verhält es sich mit den übrigen ohne Ende.

7) Eine unendlich kleine Größe ist nichts gegen eine endliche. So ist $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; $1 - \frac{1}{\infty} = 1$. Eben so ist ein unendlich Kleines vom zweyten Grade nichts gegen ein unendlich Kleines vom ersten Grade, und also z. B. $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Den Beweis findet man ebenfalls in der vorhergehenden Anmerkung.

8) xy ist das Produkt aus x in y.

9) $xy + ydx + xdy + dxdy$ ist das Produkt aus $x + dx$ in $y + dy$, d. h. das Produkt aus x nachdem es durch unendliche kleine Größen vermehrt worden ist, in y, nachdem mit demselben eben dasselbe geschehen. Daher ist $ydx + xdy + dxdy$ das Differenzial von xy.

10) $dxdy$ ist eine unendlich kleine Größe vom zweyten Grade in Vergleichung mit $ydx + xdy$, welche man als unendlich kleine Größen vom ersten Grade betrachten muß. Wir wollen zur Erläuterung das Rechteck ABCD oder xy, Fig. 2, betrachten. Vergrößern wir seine Grundlinie CD oder y um die unendlich kleine Größe Dn oder dy, und seine Höhe BD oder x um die ebenfalls unendlich kleine Größe Dp oder dx: so ist klar, daß das unendlich kleine Rechteck BmDn oder xdy, und das unendlich kleine Rechteck CDop oder ydx, unendlichmal größere Rechtecke sind, als das Rechteck Dnpr oder $dxdy$, weil jedes der ersten ein Produkt aus einer end-

endlichen Größe in eine unendlich kleine, das letzte hingegen ein Produkt aus zwey unendlich kleinen Größen ist. Es ist demnach $dxdy$ eine unendlichmal kleinere unendlich kleine Größe als ydx oder xdy, und man kann dasselbe aus der Acht lassen, ohne in der Anwendung den geringsten Fehler befürchten zu dürfen. Wenn also $ydx + xdy + dxdy$ das Differenzial von xy ist, so ist $ydx + xdy$ ebenfalls das Differenzial davon.

11) Es ist daher ausgemacht, daß das Differenzial eines Produkts zweyer Größen das Differenzial der ersten mit der andern, und das Differenzial der andern mit der ersten Größe multiplicirt enthalte; und nicht weniger, daß das Differenzial eines Produkts dreyer Größen gefunden werde, wenn man das Differenzial einer jeden dieser Größen mit dem Produkte der beyden andern multiplicirt. Das Differenzial von xyz z. B. ist $yzdx + xzdy + xydz$. Hier ist der Beweis:

Ich setze $xy = u$. Folglich ist das Differenzial von u mit dem Differenziale von xy einerley. Also ist $ydx + xdy = du$.

Ferner ist $xyz = uz$, wenn $xy = u$ ist. Also ist das Differenzial von xyz mit dem Differenzial von uz einerley, und dieses ist $zdu + udz$. Nun ist aber $zdu = yzdx + xzdy$, weil $du = ydx + xdy$ ist, und $udz = xydz$ weil $xy = u$ ist. Demnach ist $zdu + udz = yzdx + xzdy + xydz$; und wenn daher $zdu + udz$ das Differenzial von xyz ist, so ist auch $yzdx + xzdy + xydz$ dieses Differenzial. Man findet also das Differenzial eines Produkts dreyer Größen, wenn man das Produkt aus je zweyen mit dem Differenziale der dritten multiplicirt. Auf ähnliche Art erhält man

man das Differenzial eines Produkts aus vier Größen, indem man nemlich das Produkt aus je dreyen von ihnen mit dem Differenziale der vierten multiplicirt. Das Differenzial des Produkts $uxyz$ ist daher $xyzdu + uyzdx + uxzdy + uxydz$. Ueberhaupt ist das Differenzial eines Produkts aus mehreren Faktoren gleich der Summe der Produkte aus der Differenz jedes derselben in das Produkt aller übrigen. Der V. behauptet z. B. das Differenzial von $(a + x)(b - y)$ sey $bdx - ady - ydx - xdy$, und mit Recht. Denn es ist $(a + x)(b - y) = ab + bx - ay - xy$. Aber ab hat kein Differenzial; das Differenzial des übrigen aber ist offenbar $bdx - ady - ydx - xdy$."

Dritter Satz. Aufgabe.

6. Das Differenzial eines Bruchs zu finden.

Es ist das Differenzial von $\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$. Denn setzt man $\frac{x}{y} = z$, so ist $x = yz$; und da diese beyde veränderliche Größen stets einander gleich bleiben müssen, sie mögen vergrößert oder vermindert werden; so folgt, daß ihr Differenzial, das heißt, ihr Zuwachs oder ihre Verminderung ebenfalls gleich sey. Man hat demnach $dx = ydz + zdy$, und $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$, wenn man für z den Werth $\frac{x}{y}$ setzt. Hierdurch bekommt man die

Dritte Regel
für die Quotienten oder Brüche.

Das Differenzial eines Bruchs ist gleich dem Produkte aus dem Differenziale des Zählers in den Nenner, weniger dem

dem Produkte aus dem Differenziale des Nenners in den Zähler, nachdem das Ganze durch das Quadrat des Nenners dividirt worden.

So ist das Differenzial von $\frac{a}{x} = \frac{-adx}{xx}$; das Differenzial von $\frac{x}{a+x} = \frac{adx}{aa+2ax+xx}$. (Die hierzu gehörige Anmerkung ist von ganz und gar keiner Bedeutung.)

Vierter Satz. Aufgabe.

7. Das Differenzial einer jeden Potestät einer veränderlichen Größe zu finden.

Um eine allgemeine Regel für alle Potestäten, sowohl für die mit ganzen als für die mit gebrochenen und mit negativen Exponenten zu geben, müssen wir zuvörderst die Aehnlichkeit zwischen diesen verschiedenen Arten von Exponenten darthun.

Wenn man eine geometrische Reihe nimmt, deren erstes Glied 1, das zweyte aber irgend eine Größe x ist, und unter die Glieder ihre Exponenten schreibt: so bilden diese eine arithmetische Reihe.

Geometr. Progr. $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, ꝛc.
Arithmet. Progr. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, ꝛc.

Setzt man die geometrische Reihe jenseit 1, und die arithmetische jenseit 0 fort: so werden die Glieder der arithmetischen Reihe die Exponenten der Glieder der geometrischen. Also ist -1 der Exponent von $\frac{1}{x}$; -2 der Exponent von $\frac{1}{x^2}$, ꝛc.

Geometr. Progr. $x, 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$, ꝛc.
Arithmet. Progr. $1, 0, -1, -2, -3, -4$, ꝛc.

Führt

Führt man aber ein neues Glied in die geometrische Progression ein, so muß man, um seinen Exponenten zu haben, ein ähnliches in die arithmetische Reihe bringen.

Also hat $\sqrt[2]{x}$ zum Exponenten $\frac{1}{2}$; $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$; $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$; ꝛc. dergestalt, daß diese Ausdrücke $\sqrt{x}$ und $x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{x}$ und $x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{x^4}$ und $x^{\frac{4}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ und $x^{-\frac{3}{2}}$, ꝛc. einander ganz gleichbedeutend sind.

Geometrische Progressionen.

$1, \sqrt{x}, x;\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}, x;\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{x^2}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}.$

Arithmetische Progressionen.

$0, \frac{1}{2}, 1;\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1;\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}.$

Geometrische Progressionen.

$\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{x^2};\ \frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}, \frac{1}{x^2};\ \frac{1}{x^3}, \frac{1}{\sqrt{x^7}}, \frac{1}{x^4}$

$-1, -\frac{3}{2}, -2;\ -1, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 2;\ -3, -\frac{7}{2}, -4$

Es erhellet hieraus, daß man eben so, als $\sqrt{x}$ das mittlere geometrische Proportional-Glied zwischen 1 und x ist, auch in $\frac{1}{2}$ das mittlere arithmetische Proportional-Glied zwischen 0 und 1 hat; und auf ähnliche Art sind $\sqrt[3]{x}$ und $\frac{1}{3}$ mittlere Proportional-Glieder, jenes ein geometrisches, dieses ein arithmetisches, und die ersten von den beyden, die zwischen 1 und x und 0 und 1 liegen; u. s. w. Es folgt demnach aus der Natur dieser beyden Progressionen:

1. Daß

1. Daß die Summe der Exponenten jeder zweyer Glieder der geometrischen Progression der Exponent des Produkts aus diesen beyden Gliedern ist. Also ist x^{4+3} oder x^7 das Produkt aus x^3 in x^4, und $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ oder $x^{\frac{5}{6}}$ das Produkt aus $x^{\frac{1}{2}}$ in $x^{\frac{1}{3}}$, und $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ oder $x^{-\frac{2}{15}}$ das Produkt aus $x^{-\frac{1}{3}}$ in $x^{\frac{1}{5}}$ rc. Eben so ist $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ oder $x^{\frac{2}{3}}$ das Produkt aus $x^{\frac{1}{3}}$ in sich selbst, oder das Quadrat von $x^{\frac{1}{3}}$; x^{2+2+2} oder x^6 das Produkt aus x^2 in x^2 in x^2, oder der Cubus von x^2, und $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ oder $x^{-\frac{4}{3}}$ die vierte Potestät von $x^{-\frac{1}{3}}$ u. s. f. Auf diese Art erhellet, daß das Doppelte, das Dreyfache, das Vierfache u. s. f. eines Gliedes der geometrischen Reihe der Exponent des Quadrats, der Cubus u. s. w. dieses Gliedes ist; und es ist folglich auch die Hälfte, das Drittel u. s. f. eines jeden Gliedes der geometrischen Reihe der Exponent der Quadrat- der Cubikwurzel u. s. f. von diesem Gliede.

2. Daß die Differenz der Exponenten jeder zweyer Glieder der geometrischen Progressionen der Exponent des Quotienten dieser Glieder ist. Also ist $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ der Exponent des Quotienten $x^{\frac{1}{2}}$ durch $x^{\frac{1}{3}}$, und $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ der Exponent des Quotienten $x^{-\frac{1}{3}}$ durch $x^{\frac{1}{4}}$. Man sieht daraus, daß es gleichviel ist, ob man $x^{-\frac{1}{3}}$ durch $x^{-\frac{1}{4}}$ multiplicirt, oder durch $x^{\frac{1}{4}}$ dividirt. Eben so verhält es sich in den übrigen Fällen. Dies vorausgesetzt kann der Exponent entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn. Ist das erste und der Exponent außerdem positiv, so ist das Differenzial von $x^2 = 2xdx$, das von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^4 = 4x^3dx$, rc. Denn da das Quadrat von x nicht anders als das

das Produkt von x in x ist: so ist sein Differenzial $x\,dx + x\,dx = 2x\,dx$. Eben so ist der Cubus von x ein Produkt x in x in x, und also sein Differenzial $xx\,dx + xx\,dx + xx\,dx$. Da es sich auf eben die Art mit allen übrigen Potestäten verhält, so folgt, daß für den Fall, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, das Differenzial von $x^m = mx^{m-1}dx$ sey.

Wenn der Exponent eine negative Zahl ist: so findet man das Differenzial von x^{-m} oder $\frac{1}{x^m} = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Ist hingegen der Exponent ein Bruch, oder die Potestät von der Form $\sqrt[n]{x^m}$, oder $x^{\frac{m}{n}}$, wo $\frac{m}{n}$ jeden Bruch bedeutet: so setze man $x^{\frac{m}{n}} = z$, wodurch man $x^m = z^n$ erhält. Nach der Regel des ersten Falls ist hier $mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$, und also $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx$ oder $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, indem man für nz^{n-1} seinen Werth $nx^{m-\frac{m}{n}}$ setzt. Wenn der Exponent negativ ist: so findet man das Differenzial von $x^{-\frac{m}{n}}$ oder $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$. Hieraus fließt

Die vierte Regel

für alle Arten der Potestäten.

Das Differenzial einer jeden Potestät einer veränderlichen Größe wird gefunden, wenn man den Exponenten der Potestät um 1 vermindert, und dieselbe darauf durch den unverminderten Exponenten und das Differenzial der Wurzel multiplicirt.

Läßt man daher m jede Zahl, sie mag ganz oder gebrochen, positiv oder negativ seyn, und x jede veränderliche Größe bedeuten: so ist das Differenzial von x^m allemal $= m x^{m-1} dx$.

Exempel.

Das Differenzial des Cubus von $ay - xx$ oder von $(ay - xx)^3$ ist $3(ay - xx)^2 (ady - 2xdx) = 3a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2y^2xdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

Das Differenzial von $\sqrt{(xy + yy)}$ oder von $(xy + yy)^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2}(xy + yy)^{-\frac{1}{2}} \times (ydx + xdy + 2ydy)$ oder $\frac{ydx + xdy + ydy}{2\sqrt{(xx + yy)}}$.

Das Differenzial von $\sqrt{(a^4 + axyy)}$ oder von $(a^4 + axyy)^{\frac{1}{2}}$ ist $\frac{1}{2}(a^4 + axyy)^{-\frac{1}{2}}(ayydx + 2axydy)$ oder $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{(a^4 + axyy)}}$.

Das Differenzial von $\sqrt[3]{(ax + xx)}$ oder von $(ax + xx)^{\frac{1}{3}}$ ist $\frac{1}{3}(ax + xx)^{-\frac{2}{3}}(adx + 2xdx)$ oder $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax + xx)^2}}$.

Das Differenzial von $\sqrt{(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})}$ oder von $(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})^{\frac{1}{2}}$, ist $\frac{1}{2}(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})^{-\frac{1}{2}}$ $\left(adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{(a^4 + axyy)}}\right)$ oder $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{(ax + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})}}$ $+ \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{(a^4 + axyy)}\, 2\sqrt{(\sqrt{ax} + xx + \sqrt{(a^4 + axyy)})}}$.

Das Differenzial von $\frac{\sqrt[3]{(ax + xx)}}{\sqrt{(xy + yy)}}$ ist nach dieser Regel und nach der Regel von den Brüchen $= \frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax + xx)^2}} \times$ $\sqrt{(xy + yy)} \times \frac{-ydx - xdy - 2ydy}{2\sqrt{(xy + yy)}} \times \sqrt[3]{(ax + xx)}$.

Die hierzu gehörige Anmerkung ist folgende:

Dieser Artikel hat eine Menge von Erläuterungen nöthig, welche sich auf nachstehende Fragen zurückführen lassen.

Erste Frage: Wie kann man sagen, daß -1 der Exponent von $\frac{1}{x}$ sey?

Antwort. $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Denn es ist $x^{-1}.x^2 = x^{2-1} = x$; folglich x das Produkt aus x^2 in x^{-1}; folglich $\frac{x}{x^2} = x^{-1}$, weil die Division des Produkts durch den Multiplicandus zum Quotienten den Multiplicator giebt. Nun ist aber $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; folglich $x^{-1} = \frac{1}{x}$, und überhaupt jede Potestät mit einem ganzen negativen Exponenten nichts anders als die Einheit durch dieselbe Dignität mit einem positiven Exponenten dividirt. Demnach ist $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, 2c.

Zweyte Frage. Hat man Recht zu behaupten, daß der Exponent von $\sqrt[2]{x}$, $\frac{1}{2}$ sey?

Antwort. Ja; hier ist der Beweis davon. $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$; aber $x^{\frac{1}{2}}$ hat zum Exponenten $\frac{1}{2}$, also ist auch der Exponent von $\sqrt[2]{x}$, $\frac{1}{2}$. Es kommt demnach darauf an, daß gezeigt werde, $\sqrt[2]{x}$ sey $= x^{\frac{1}{2}}$, welches aber nicht schwer ist. Man kann es auf folgende Art thun.

$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$; folglich ist $x^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus x. Aber $\sqrt[2]{x}$ ist auch die Quadratwurzel aus x, folglich $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$, und überhaupt jede Potestät mit einem gebrochenen Exponenten nichts anders als die Wurzel einer Potestät, deren Exponent der Zähler des Bruchs, der Nenner aber der Exponent der Wurzel ist. Es ist daher $\sqrt[3]{x^1} = x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$.

Dritte Frage. Wie kann man $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$ ausdrucken?

Antwort. $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$. Hier ist der Beweis. $\sqrt[2]{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ (2te Fr.) also $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Aber $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ (nach der ersten Frage). Folglich ist $\frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$; und $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[2]{x^7}} = x^{-\frac{7}{2}}$.

Vierte Frage. Ist es wahr, daß $1, \sqrt{x}, x$ in einer geometrischen Reihe stehen?

Anwort. Es ist offenbar $1 : \sqrt[2]{x} = \sqrt[2]{x} : x$. Denn $1 \times x = x$, und $\sqrt[2]{x} . \sqrt{x} = x$. Also sind $1, \sqrt[2]{x}, x$ in einer geometrischen Progression.

Zusatz. 1. $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$ sind in einer geometrischen Progression. Denn es ist $1 : x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}}$; weil $1 \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$, und $x^{\frac{1}{3}} . x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$. Ferner ist auch $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} : x^{1}$; denn es ist $x^{\frac{1}{3}} . x = x^{1 + \frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$, und $x^{\frac{2}{3}} . x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$: folglich stehen $1, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, x$, oder $1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x$ in einer geometrischen Progression.

Was ihre Exponenten betrifft, nemlich $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$: so stehen dieselben in einer arithmetischen Progression; weil die Summe der beyden äußern der Summe der beyden mittlern gleich ist. Aus eben dem Grunde machen auch $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, 1$ eine arithmetische Progression.

Zusatz. 2. Eben das gilt von $1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{x^2}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x$, oder $1, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{2}{5}}, x^{\frac{3}{5}}, x^{\frac{4}{5}}, x$, und den Exponenten $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$.

Fünfte Frage. Sind $\frac{1}{x}, \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}, \frac{1}{x^2}$ in einer geometrischen Progression?

Antwort. $x^{-1}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$ sind in einer geometrischen Progression. Denn es ist $x^{-1} . x^{-2} = x^{-3}$; und $x^{-\frac{3}{2}} . x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{6}{2}} = x^{-3}$.

Daß

Daß -1, $-\frac{3}{2}$, -2 in einer arithmetischen Progression stehen, fällt in die Augen. Eben so verhält es sich nun aber auch mit den übrigen vom V. angeführten Beyspielen.

Sechste Frage. Wie läßt sichs beweisen, daß $2xdx$ das Differenzial von x^2 sey?

Antwort. xx ist das Produkt von x in x. Das Differenzial eines Produkts zweyer Größen ist aber das Differenzial der ersten Größe mit der andern, nebst dem Differenziale der andern Größe mit der ersten Größe multiplicirt. Also ist das Differenzial von $x^2 = xdx + xdx = 2xdx$. (2te Anmerk.)

Durch eben diese Anmerkung beweiset man, daß das Differenzial von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^4 = 4x^3dx$, und überhaupt das Differenzial von x^m, m mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will, $mx^{m-1}dx$ sey.

Siebente Frage. Wie beweiset man, daß $-mx^{-m-1}dx$ $= \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$ sey.

Antwort. Man multiplicire Zähler und Nenner des letzten Bruchs durch x^{2m}. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß

$$\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx \text{ ist.}$$

Achte Frage. Welches ist das Differenzial des Cubus von $ay - xx$?

Antwort. Das verlangte Differenzial ist $3a^3y^2dy - 6a^2x^2ydy + 3ax^4dy - 6a^2y^2xdx + 12ayx^3dx -$

 $6x^5dx$,

$6x^5 dx$, weil der Cubus von $ay - xx = a^3y^3 - 3a^2y^2x^2 + 3ayx^4 - x^6$ ist. Denn das Differenzial von a^3y^3 ist $3a^3yydy$, das von $-3a^2y^2x^2$ aber $-6a^2x^2ydy - 6a^2y^2xdx$, das von $3ayx^4$ ist $3ax^4dy + 12ayx^3dx$, und das von $-x^6$ endlich $-6x^5dx$. Folglich ist das angeführte Differenzial auch das wahre Differenzial von dem Cubus von $ay - xx$. (Auf ähnliche Art werden in dem Reste der Anmerkung die übrigen vom M. de l'Hopital erklärten Beyspiele erläutert.)

Anmerkung.

8. Es ist hierbey zu bemerken, daß bey der Aufsuchung der Differenzialien, sobald eine Größe x wachsend angenommen wurde, eben das mit den übrigen y, z, rc. geschah, d. h. daß wenn x in $x + dx$ verwandelt wurde, auch y und z, jenes in $y + dy$, dieses in $z + dz$ übergieng. Wenn daher von den daseyenden veränderlichen Größen einige abnehmen, indem die andern zunehmen: so muß man ihre Differenzialien in Vergleichung mit denen der wachsenden Größen als negativ betrachten, und folglich die Zeichen derselben verändern. Läßt man daher y und z abnehmen, wenn x wächst, d. h. läßt man y in $y - dy$, und z in $z - dz$ übergehen, wenn man $x + dx$ für x setzt; und will man dabey das Differenzial des Produkts xyz haben: so muß man in dem Differenzial-Ausdrucke $xydz + xzdy + yzdx$ (5) die Zeichen der Glieder verändern, worinn sich dy und dz befinden. Dies giebt für das gesuchte Differenzial $yzdx - xydz - xzdy$.

Zergliedert man nun zum andern (S. 303. Z. 6. von unten) die transcendenten Funktionen, so hat man an dem gegenwärtigen Orte, wo noch nichts weiter als die beyden ersten Theile der allgemeinen Mathematik und die Einleitung

in

in die Analysis des Unendlichen vorausgesetzt werden kann, keine transcendenten Größen als

1. die logarithmischen Größen,
2. die Exponential-Größen,
3. die transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen, und
4. diejenigen, welche sich aus diesen durch die Umkehrung ergeben.

Was besonders

1. die logarithmischen Größen betrifft, so sind dieselben entweder
   a. einfache logarithmische Größen, nemlich
      α. Logarithmen veränderlicher Größen im eingeschränkten Sinne,
      β. Logarithmen von Funktionen veränderlicher Größen: oder
   b. zusammengesetzte, d. h.
      α. Logarithmen von Produkten und Quotienten veränderlicher Größen
      β. Funktionen, welche aus algebraischen und logarithmischen Größen bestehen.
2. Die Exponential-Größen sind entweder,
   a. solche, bey denen bloß der Exponent, oder
   b. solche, bey denen auch die Größe veränderlich, oder endlich
   c. solche, bey denen der Exponent eine Exponential-Größe ist.
3. Die Formen der transcendenten Größen, welche aus dem Kreise entspringen, sind
   a. A. sin. x
   b. A. cos. x
   c. A. tang. x

d. A.cot.x

e. A.sec.x

f. A.cosec.x

g. A.sin.vers x

4. Die transcendenten Größen endlich, welche sich aus diesem durch die Umkehrung ergeben, sind

a sin. x

b cos. x

c. tang. x

d. cot. x

e sec. x

f. cosec. x

g. sin. vers. x

Man vergleiche hiermit den Abriß des sechsten Capitels im ersten Theile, S. 393 — 395.

Auch bis hierher ist also die Ordnung, in welcher die Elemente der Differenzial-Rechnung gefunden und gestellt werden müssen, so leicht und natürlich, daß sie ganz und gar nicht verfehlt werden kann. Gleichwohl ist diese Ordnung in den übrigen Theilen der Mathematik oft dasjenige, was die meiste Mühe verursacht, wie unter andern Hr. Schulz in seinen Anfangsgründen der reinen Mathesis, Königsberg, 1790 in der Vorrede, S. 3, bezeuget. Aber vielleicht ist die Erfindung der Differenzialien dafür mit desto größeren Schwierigkeiten verbunden? Wir wollen sehen.

Um von den algebraischen Funktionen anzufangen, so hat die Erfindung der Differenzialien der einfachen algebraischen Funktionen für denjenigen sicher keine Schwierigkeit, der in der Verwandlung der Ausdrücke dieser Funktionen die erforderliche Fertigkeit besitzt. Was die zusammengesetzten betrifft, so darf man nur, wenn man die einfachen Größen, welche die Funktion ausmachen, die Theile der

Funk-

Funktionen nennt, jedesmal das Differenzial eines jeden Theils der gegebenen Funktion auf die Art suchen, als wenn nur dieser Theil veränderlich und die übrigen alle beständige Größen wären, und darauf alle gefundenen Differenzialien zu einer Summe vereinigen. Da ferner diese Regel auch bey den transcendenten Funktionen anwendbar ist, so kommt es bey den transcendenten Funktionen ebenfals vorzüglich auf die einfachen Fälle an. Wer sich aber in Ansehung der Art wie die Differenzialien davon gefunden werden, an dasjenige erinnert, was im ersten Theile im sechsten Capitel steht, wird dadurch überzeugt werden, daß das Wichtigste in einem geschickten Gebrauche der Elementar- oder der niedern allgemeinen Mathematik bestehe.

Hieraus erhellen einige Mittel, sich die Erlernung der Differenzial Rechnung zu erleichtern. Das erste besteht darin, daß man sich so früh als möglich, und gleich nach der S. 304. gedachten allgemeinen Regel, von der Richtigkeit der vorhin angeführten, nicht durch Abstraction, sondern aus der Natur der Differenzial-Rechnung selbst überzeuge. Dies Mittel steht in eines jeden Gewalt, zu dem folgenden wäre Uebereinstimmung unter den Mathematikern erforderlich. Es würde nemlich die Erlernung und der Gebrauch der Differenzial-Rechnung dadurch viel bequemer werden, wenn man durchaus statt der Wurzelzeichen die gebrochenen Exponenten, und statt der Divisor-Dignitäten die Potestäten mit negativen Exponenten brauchen wollte. Außerdem läßt sich auch manche von den gewöhnlichen Auflösungen sehr abkürzen. Soll z. B. das Differenzial des Logarithmen von x gefunden werden: so ist die ganze Auflösung dieser Aufgabe folgende.

$$d.lx = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x};$$

denn es fließt ja aus der Definition des Logarithmen, daß $l(1+\frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x}$ sey. Um ferner das Differenzial des sinus von x zu finden, darf man nur

$$d.\sin.x = \sin.(x+dx) - \sin x = \sin.x.\cos.dx + \cos.x.\sin dx - \sin.x$$

setzen, und sich daran erinnern, daß $\cos dx = 1$, und $\sin.dx = dx$ sey, um hieraus sogleich $d.\sin.x = \cos.x.dx$ zu finden. Den Umstand, daß man hier $\cos.dx = 1$, aber $\sin.dx = dx$, und nicht $= 0$, setzt, werde ich nachher benutzen.

Bey Aufgaben von solcher Wichtigkeit und Brauchbarkeit, als den Aufgaben von der Erfindung der Differenzialien zukommt, ist sehr viel daran gelegen, daß man sich die Resultate derselben leicht und geläufig einpräge. Bleibt man bey den einfachen Funktionen stehen, so sind die Resultate der Aufgaben des ersten Hauptabschnitts der Differenzial-Rechnung folgende.

1. Von den algebraischen Funktionen.

$$d.x^n = nx^{n-1}dx \left\{ \begin{array}{lll} d.x^n = nx^{n-1}dx & = & nx^{n-1}dx \\ d.x^{-n} = -nx^{-n-1}dx & = & \dfrac{-ndx}{x^{n+1}} \\ d.x^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx & = & \dfrac{n}{m}\sqrt[m]{x^{n-m}}dx \\ d.x^{-\frac{n}{m}} = -\dfrac{n}{m}x^{\frac{-n-m}{m}}dx & = & -\dfrac{-ndx}{mx\sqrt[m]{x^n}} \end{array} \right.$$

$$d.yz = zdy + ydz; \quad d.\frac{y}{z} = \frac{zdy - ydz}{zz}.$$

2. Von

2. Von den transcendenten Funktionen.

1) den logarithmischen Größen: $d.lx = \frac{dx}{x}$,

2) den Exponential-Größen,

$$d.a^x = a^x dx la;\quad d.y^x = y^x dx ly + xy^{x-1}dy;$$

$$d.e^{e^x} = e^{e^x} e^x dx.$$

3) den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen,

$$d.A.\sin x = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}};\quad d.A.\cos x = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}};$$

$$d.A.\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{1+xx};\quad d.A.\cot x = \frac{-dx}{1+xx};$$

$$d.A.\sec x = \frac{dx}{x\sqrt{(xx-1)}};\quad d.A.\mathrm{cosec}\,x = \frac{-dx}{x\sqrt{(xx-1)}};$$

$$d.A.\sin.\mathrm{vers}\,x = \frac{dx}{\sqrt{(2x-xx)}}.$$

4) den transcendenten Größen, die sich aus der Umkehrung der vorhergehenden ergeben,

$$d.\sin x = dx.\cos x;\quad d.\cos x = -dx.\sin x$$

$$d.\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{\cos x^2};\quad d.\cot x = \frac{-dx}{\sin x^2}$$

$$d.\sec x = \frac{dx.\sin x}{\cos x^2} = dx\,\mathrm{tang}\,x.\sec x$$

$$d.\mathrm{cosec}\,x = \frac{-dx.\cos x}{\sin x^2} = dx\cot x.\mathrm{cosec}\,x$$

$$d.\sin.v.x = dx\sin x$$

Will man sich die Differenzialien, die unter die Form $nx^{n-1}dx$ gehören, durch Wurzelzeichen ausgedruckt, geläufig machen, so setze man zu den obigen noch

$$d.x^{\frac{1}{n}} = d.\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} dx = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$d.x^{-\frac{1}{n}} = d.\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = -\frac{1}{n} x^{\frac{-1-n}{n}} dx = \frac{-dx}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}} = \frac{-dx}{nx\sqrt[n]{x}}.$$

Dann unterscheide man Potestäten-Exponenten und Wurzel-Exponenten; desgleichen Multiplicator- und Divisor-Dignitäten, wovon jene einen positiven, diese einen negativen Exponenten haben, und setze den Wurzel-Exponenten der Dignitäten, woraus keine Wurzel gezogen, sondern die selbst genommen werden sollen, so wie er es in der That ist, $= 1$. Dieses vorausgesetzt, besteht das Differenzial einer jeden Potestät aus drey Faktoren,

1. aus dem Differenziale der Wurzel,
2. aus einer veränderlichen Größe, und
3. aus einer beständigen Größe.

Nr. 1. bietet sich in jedem Falle von selbst dar; Nr. 3. ist ein Bruch, dessen Zähler der Potestäten-Exponent, der Nenner aber der Wurzel-Exponent ist; außerdem aber ist dieser Bruch positiv bey den Multiplicator- und negativ bey den Divisor-Dignitäten. Da dieses sehr leicht gemerkt werden kann, so kommt es vorzüglich auf die in dem Differenziale enthaltene veränderliche Größe an. Den Fall, wenn die gegebene Potestät die Form $x^{\frac{1}{n}}$ hat, ausgenommen, so gehört die veränderliche Größe in dem Differenziale zu eben der Art, zu welcher die gegebene Potestät gehört, d. h. sie ist mit dieser entweder eine Multiplicator- oder eine Divisor-Potestät. Außerdem darf man nur bemerken, daß das Wurzelzeichen beybehalten, und der Exponent der gegebenen Dignität im ersten Falle um den Wurzel-Exponenten vermindert,

im

im andern um denselben vermehrt werde. Die Veränderung, welche der Fall $d.x^{-\frac{1}{n}} = d.\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \frac{-dx}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}} = \frac{-dx}{nx\sqrt[n]{x}}$ enthält, bietet sich dabey von selbst dar, und eben so fällt der Grund in die Augen, warum man $\frac{dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ statt $\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}}dx$ schreibt.

Vorausgesetzt also, daß nicht etwa der Beweis der allgemeinen Regeln, nach welchen man bey der Erfindung der Differenzialien zu verfahren angewiesen wird, Anstoß verursache; in welchem Falle ich auf dasjenige verweise, was ich beym ersten Theile in den Anmerkungen und Zusätzen und in der Vorrede gesagt habe: so ist bisher noch alles so leicht, daß man sehr unrecht thut, wenn man die Differenzial-Rechnung als schwer betrachtet. Selbst wenn man die zweyten und folgenden Differenzialien aufsuchen will, hat man außer dem Bisherigen nichts weiter nöthig, indem bey den gemeinen Funktionen die Differenzialien der Grundgröße als beständige Größen betrachtet werden müssen.

Ich lasse es hierbey bewenden, weil derjenige, der die Erfindung der Differenzialien der gemeinen entwickelten, algebraischen sowohl als transcendenten, Funktionen nicht mehr schwer findet, bey den übrigen Capiteln der Differenzial-Rechnung, wenn er sie nach einer Eulerischen Anleitung studirt, gewiß eben so wenig Schwierigkeit antreffen wird. Gern entwickelte ich freylich die Regeln zur Erfindung der Differenzialien aus dem S. 300. mitgetheilten Begriffe der transcendenten Mathematik und der daraus fließenden Erklärung der Differenzial-Rechnung; allein da über diese Regeln beym ersten Theile schon so viel gesagt worden ist, daß eine strengere Entwickelung nicht schlechthin nothwendig ist: so wende ich mich zu dem gegenwärtigen zweyten Theile der Eulerischen Anleitung zur Differenzial-Rechnung. Ich will zuvörderst den Inhalt tabellarisch hersetzen, so wie ich solches auch bey dem ersten Theile gethan habe, und darauf, wo es nöthig ist Erläuterungen, und zuletzt die vornehmsten Anwendungen der Differenzial-Rechnung auf die Geometrie hinzufügen.

Inhalt
des
zweyten Theils.

Inhalt des ersten Capitels.
Von der Umformung der Reihen.

1. Vorerinnerung, §. 1.
2. Verwandlung der Reihen:

$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 +$ ꝛc.

$ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 -$ ꝛc. §. 2-18.

a) durch die Substitution $x = \frac{y}{1+y}$, §. 2-11.

α. Verwandlung der Reihen: $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$ $+$ ꝛc., §. 2-6.

aa. Verwandlung selbst, §. 2. 3.

bb. Gebrauch des Gefundenen zur Erfindung der Summen gegebener Reihen, §. 4-6.

αα. ohne

αα. ohne Ende fortlaufender, §. 4.

ββ. begrenzter, §. 5. 6.

β. Verwandlung der Reihe: $ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 +$ etc., §. 7-11.

aa. Verwandlung selbst, §. 7.

bb. Gebrauch des Gefundenen, insbesondere, wenn $x = 1$ ist, §. 8-11.

αα. zur Erfindung der Summen, §. 8-10.

ββ. zur Erfindung stärker convergirender Reihen, §. 11.

b) durch die Substitution $x = y(1 - y)$, §. 12. 13.

c) durch die Substitution $x = y(1 + ny)^\nu$, §. 14.

d) durch solche Substitutionen, daß die Summe der gefundenen Reihe irrational wird, §. 15.

α. allgemein, §. 15.

β. besondere Fälle, §. 16. 17.

e. wenn für x transcendente Funktionen von y gesetzt werden, §. 18.

Inhalt des zweyten Capitels.

Von der Erfindung summirbarer Reihen.

1. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus Reihen, deren Summe bekannt ist, vermittelst der Differenziation, überhaupt, §. 19.

2. Besondere Fälle, §. 20.

a. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 +$ etc., §. 20-22.

α. durch die Differenziation und die Division des Gefundenen durch das Differenzial dx, §. 20.

 β. durch

β. durch eben diese Mittel, wenn die gegebene Reihe zuvor durch irgend eine Potestät von x multiplicirt worden, §. 21.

γ. Anwendung dieser Methode auf Reihen von einer bestimmten Anzahl von Gliedern, §. 22.

b. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus gegebenen wiederkehrenden Reihen, §. 23.

c. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus $S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 +$ ꝛc., §. 24. und zwar solcher

α. wo die Glieder dieser Reihe durch die Glieder einer arithmetischen Reihe multiplicirt werden, §. 24.

β. wo diese Glieder durch die Glieder einer Reihe der zweyten Ordnung multiplicirt werden, §. 25.

γ. wo dieselben durch die Glieder einer Reihe von irgend einer Ordnung multiplicirt werden, §. 26 = 28.

d. Von der Erfindung stärker convergirender Reihen, §. 28 = 31.

e. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus $S = \frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x} + \frac{1}{c+x} + \frac{1}{d+x} +$ ꝛc., §. 32 = 39.

f. Von der Erfindung summirbarer Reihen aus einigen andern in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen gefundenen Reihen, §. 40 = 43.

Inhalt des dritten Capitels.

Von der Erfindung der Differenzen.

1. Von der Erfindung der Differenzen, §. 44 = 53.

a. die ersten Differenzen, §. 44 = 51.

α. allge=

Inhalt des vierten Capitels.

Von der Verwandlung der Funktionen in Reihen.

Inhalt des 5ten bis 7ten Capitels.

Von der Erfindung der Summen der Reihen aus dem allgemeinen Gliede.

cc. Ge-cc. Gebrauch derselben, wenn z irgend eine andere Function von x ist, im sechsten und siebenten Capitel.

αα. Wenn das Integral $\int z\,dx$ gefunden und die Differenzialen $\frac{dz}{dx}$, $\frac{ddz}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, ꝛc. bequem genug ausgedruckt werden können, im sechsten Capitel.

ββ. Wenn dieser Fall nicht statt findet, im siebenten Capitel.

So viel zur allgemeinen Uebersicht, die genauere Darstellung des vom Verfasser genommenen Ganges soll, da dieselbe nicht füglich tabellarisch gegeben werden kann, nachher folgen.

Inhalt des achten Capitels.

Von dem Nutzen der Differenzial-Rechnung bey Formirung der Reihen.

1. Kurze Wiederholung dessen, was sonst schon über die Formirung der Reihen gesagt worden ist, §. 198. 199.
2. Gebrauch der Differenzial-Rechnung dabey, §. 200.
   a. Bey der Entwickelung der Formel: $s = (A + Bx + Cxx)^n$, §. 200. 201.
   b. Bey der Entwickelung der Formel:
   $$s = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.})^n,$$
   §. 202-204.
   α. allgemein, §. 202.
   β. wenn n ein ganze positive Zahl, §. 203.
   γ. wenn n eine negative Zahl ist, §. 204.

c. Bey der Entwickelung der Formel:

$$s = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^n}, \text{ §. 205. 206.}$$

d. Bey der Entwickelung der Formel:

$$s = \frac{(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.})^m}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{ꝛc.})^n}, \text{ §. 207.}$$

3. Erweiterung der Lehre von der Umformung der Reihen, §. 209.

a. Verwandlung der Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{ꝛc.}$

α. in $\frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{B}x}{(\alpha + \beta x)^2} + \frac{\mathfrak{C}x^2}{(\alpha + \beta x)^3} + \frac{\mathfrak{D}x^3}{(\alpha + \beta x)^4} + \text{ꝛc.}$ §. 209. 210.

β. in $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x}{\alpha + \beta x + \gamma x^3} + \frac{\mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x^3}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2} + \frac{\mathfrak{A}''x^4 + \mathfrak{B}''x^5}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3} + \text{ꝛc.}$, §. 210-212.

γ. in $\frac{\mathfrak{A}}{\alpha + \beta x} + \frac{\mathfrak{A}'x}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)} + \frac{\mathfrak{A}''x^2}{(\alpha + \beta x)(\alpha' + \beta' x)(\alpha'' + \beta'' x)} + \text{ꝛc.}$, §. 213.

δ. Anwendung dieser Verwandlung auf dreytheilige Faktoren, §. 214. 215.

aa. allgemein, §. 214.

bb. wenn $x = -1$ ist, §. 215.

b. Verwandlung der Reihe: $l(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{ꝛc.})$ in $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$, §. 216.

c. Verwandlung der Reihe: $e^{\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{ꝛc.}}$ in $1 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \mathfrak{E}x^5 + \text{ꝛc.}$, §. 217.

d. Verwandlung der Reihe: $\sin\sqrt{}(\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{ꝛc.})$ in $\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \text{ꝛc.}$, §. 218. 218.

e. Verwandlung von $s = \cos x$, nebst den daraus fliessenden Ausdrücken für andere trigonometrische Linien, §. 220-226.

Inhalt

Inhalt des neunten Capitels.

Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichungen.

4. Vom

4. Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung solcher Gleichungen, von deren Wurzeln ein gewisses Verhältniß bekannt ist, §. 244-249.

a. Wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung um eine gewisse Größe unterschieden sind, §. 244.

b. Wenn die gegebene Gleichung mehrere gleiche Wurzeln hat, §. 245.

α. Wenn sie deren zwey hat, §. 245. 246.

β. Wenn sie deren drey hat, §. 274. 248.

γ. Wenn sie deren vier hat, §. 249.