Anfangsgründe
der
Differenzial-
und
Integral-Rechnung.
zum Gebrauch
des
Ingenieurs und Artilleristen.

Von
einem Königl. Preußischen Offizier.

HALLE,
bey Johann Jacob Gebauer,
1784.

Vorbericht.

Der Nutzen, welchen der Ingenieur und Artillerist von der Differenzial- und Integral-Rechnung sich versprechen kann, ist von so vielen einsichtsvollen Männern auf eine so überzeugende Art dargethan worden, daß diese Wissenschaften nur von denjenigen verachtet werden können, welche den feierlichen Eid abgelegt haben, unter der Fahne der Unwissenheit und

der Vorurtheile, zu leben und zu sterben. Da die Wahrheit diese Herrn so wenig überzeugen kann, als die Wellen des Meers den Felsen erschüttern, den sie von allen Seiten umgeben; so bin ich durch diese unbezwingbare Beharrlichkeit der Mühe überhoben, den ausgebreiteten Nutzen jener Wissenschaften hier noch einmal zu wiederhohlen und ich darf also in diesem Vorbericht nur die Gründe anführen, welche mich bewogen haben, diese Bogen bekannt zu machen. Deutschland hat keine Anleitung zur Differenzial- und Integral-Rechnung aufzuweisen, welche zum Gebrauch des Ingenieurs und Artilleristen verfaßt ist und diejenige Anleitungen, welche wir besitzen, sind grösstentheils auf Begriffe gebauet, welche den Anfänger in Schwierigkeiten verwicklen, aus welchen er sich grösstentheils nicht herauszuhelfen weiß: ich verstehe nemlich darunter die Begriffe von den unendlich kleinen Grössen.

Da

Vorbericht.

Da mir vor einigen Jahren der Cours de mathématiques à l'usage du Corps royal d'Artillerie par M. Bézout zu Gesichte kam; so hoffte ich darin, jene Schwierigkeiten vermieden zu sehen. Meine Erwartung wurde aber getäuschet und ich faßte daher den Entschluß über diese Materie selbst nachzudenken, und einen Versuch zu machen, ob man die Differenzial-Rechnung nicht vortragen könnte, ohne die Begriffe von unendlich kleinen Grössen mit einzumischen. Ich wage es, diesen Versuch hiemit dem Urtheil der Kenner vorzulegen und gebe noch kürzlich von der Ordnung Rechenschaft, in welcher die Materien abgehandelt worden sind.

Gleich anfänglich beweise ich die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes, sowohl für ganze, als gebrochene, sowohl für positive, als negative Exponenten.

Hierauf folgt die Abhandlung der Differenzial-Rechnung selbst. Zuerst die Functionen dieser Art, $U = x^n$, $U = xy$ u. s. w. Die Grössen, um welche die veränderliche Grössen U, x, y wachsen, bezeichne ich durch ΔU, Δx, Δy, wo der Buchstabe Δ nicht die Stelle eines Factors vertritt, sondern ein blosses Zeichen ist, wie $log.\ x$ oder $\sqrt[3]{x}$ u. s. w. Diese Grössen pflegt man die Differenzen von U, x, y zu nennen.

Es erhellet leicht, daß $\frac{\Delta U}{\Delta x}$, $\frac{\Delta U}{\Delta y}$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, u. s. w. würklichen Grössen gleich sind. Wenn nun $\Delta U = o$, $\Delta x = o$, $\Delta y = o$; so setzet man statt des Buchstaben Δ den Buchstaben d, so daß $\Delta U = o = dU$, $\Delta x = o = dx$, $\Delta y = o = dy$ und gibt durch dieses Zeichen d zu verstehen, daß die Differenzen ΔU, Δx u. s. w. der Null gleich gesetzet worden sind. Es ist also auch hier d kein Factor, sondern ein bloßes Zeichen. So oft mithin dU, dx, dy u. s. w. vorkommen; so bedeuten diese

Aus-

Ausdrücke, Null. Nun ist man aber übereingekommen, solche Ausdrücke, wie $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, u. s. w. obgleich sie auch nichts weiter als Null sind, als Zeichen anzunehmen, wodurch das Daseyn gewisser Grössen angedeutet wird. Der Ausdruck $x\frac{dU}{dx}$ zeigt also keinesweges $x.\frac{o}{o}$ an, sondern man will damit so viel sagen, daß x mit einer gewissen Grösse, welche man durch das Zeichen $\frac{dU}{dx}$ anzeigt, multiplizirt worden sey. Hingegen ist der Ausdruck $dx.\frac{dU}{dy}$ weiter nichts, als Null.

Die Grössen ΔU, Δx u. s. w. sind eines weitern Wachsthums fähig. Man pflegt die Grössen, um welche dieselbe wachsen, durch $\Delta^2 U$, $\Delta^2 x$, $\Delta^3 U$, $\Delta^3 x$ u. s. w. zu bezeichnen und sucht aus der gegebenen Function den Werth von $\frac{\Delta^2 U}{\Delta^2 x}$ und $\frac{\Delta^3 U}{\Delta^3 x}$ u. s. w.

Setzt man nun $\Delta x = o = dx$, $\Delta U = o = dU$; so wird auch $d^2U = o = d^2U$, $\Delta^2 x = o = d^2x$ u. s. w. Dadurch kömmt man also wieder auf gewisse Grössen, welche neue Zeichen erfodern; wozu man diese gewählet hat, nämlich $\frac{d^2U}{d^2x}$, $\frac{d^3U}{d^3x}$ u. s. w.

Auf diesen Betrachtungen beruhet die **Differenzio-Differenzial-Rechnung.**

Die Lehre von den Differenzialien der Sinus, Cosinus, Tangenten u. s. w. beruhet darauf, daß

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

wo s den Bogen, x die Abscisse und y die Ordinate im Kreiß bezeichnet.

Die Lehre von den logarithmischen Differenzialien baue ich auf den bekannten Satz, daß die Subtangente in der logarithmischen Linie eine beständige Grösse sey.

Die

Die Anwendung der Differenzial-Rechnung zeige ich zuerst bei Aufsuchung der Subtangenten, Subnormallinien und dann bei der wichtigen Lehre von dem größten oder kleinsten Werthe einer Function. Den Halbmesser der Krümmung bestimme ich nur für senkrechte Coordinaten und concave Linien, weil eine größere Weitläuftigkeit meiner Absicht entgegen ist. Ich finde nöthig, hier beizufügen, daß ich bei Lesung dieser Abhandlung nur niedere Geometrie und die Lehre von den Kegel-Schnitten als bekannt voraussetze. Sonst würde ich mehr Gelegenheit gehabt haben, den Nutzen der Differenzial- und Integral-Rechnung in Aufgaben zu zeigen, welche dem Ingenieur und Artilleristen nichts anders, als interessant seyn können.

Die Integral-Rechnung ist, ausser einigen nothwendigen Veränderungen, beinahe ganz so geblieben, wie Herr Bezout sie geliefert hat. Alle diese Verän-

derungen anzuzeigen, halte ich für überflüßig. Die beträchtlichste ist mit der Lehre von den hyperbolischen Logarithmen vorgenommen worden. Die Reihen, auf welche man bei diesen Untersuchungen kömmt, führen mich auf die Methode, wie Exponenzial-Grössen differenziirt werden müssen, die ich dann auch, nach der Lehre von den hyperbolischen Logarithmen, auf eine neue und wie ich hoffe, vollkommen überzeugende Art vorgetragen habe.

Inhalt.

I. Differenzial-Rechnung.

5. Diffe-

Inhalt.

II. Integral-Rechnung.

6. Von

Inhalt.

16. Von

Inhalt.

Anfangs-

Anfangsgründe

der

Differenzial-Rechnung.

Der Binomische Lehrsaz.

§. 1.

Wenn man $(a+b)$ nach und nach in die zweite, dritte, vierte u. s. w. Dignität erhebt; so erhält man:

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

und so weiter.

§. 2.

Aus dieser Tabelle erhellet folgendes Gesetz der Exponenten:

„a hat im ersten Glied der Potenz mit der Potenz selbst ei-
„nen Exponenten, und sein Exponent wird in jedem Gliede
„um 1 vermindert, bis er im lezten Gliede $= 0$ wird, weil
„$a^0 = 1$. Der Exponent von b aber ist im ersten Gliede
„$= 0$, im zweeten $= 1$, und wächst in jedem Gliede um
„1, bis er im lezten dem Exponenten der Potenz gleich wird.

Ist also überhaupt m der Exponent einer Potenz, m aber eine ganze, positive Zahl; so sind die Potenzen von a folgende:

a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4}, a^{m-5} u. s. w.

§. 3.

Eben so leicht fällt aber das Gesez, nach welchem die Coeffizienten sich richten, nicht in die Augen. Den Coeffizienten des zweiten Gliedes einer Potenz wollen wir den ersten; den Coeffizienten des dritten Gliedes, den zweiten; den Coeffizienten des vierten Gliedes, den dritten Coeffizienten u. s. w. nennen. Bei einiger Aufmerksamkeit entdekt man folgende Gesetze:

I. Der erste Coeffizient einer jeden Potenz ist dem Exponenten der Potenz gleich.

So ist der erste Coeffizient der zweiten Potenz, $= 2$; der erste Coeffizient der vierten Potenz, $= 4$; und überhaupt der erste Coeffizient der $m$ten Potenz, $= m$, wofern m eine ganze, positive Zahl ist.

II. Erhellet aus obiger Tabelle, daß, zum Beyspiel, bei der dritten Potenz, der zweite Coeffizient der Summe des zweiten und ersten Coeffizienten der zweiten Potenz, und bei der vierten Potenz, der zweite Coeffizient der Summe des zweiten und ersten Coeffizienten der dritten Potenz gleich sey. Ueberhaupt wird man immer folgendes Gesez wahr finden:

Der Coeffizient eines Gliedes der nächst höhern Potenz ist die Summe der beiden Coeffizienten, die zum eben so vielten, und zum nächst vorhergehenden Gliede der nächst niedrigern Potenz gehören.

Zu einer bessern Uebersicht dieses Gesetzes wird folgende Tabelle beigefüget:

Poten-

Potenzen.	Erste Coeffizienten.	Zweite Coeffizienten.	Dritte Coeffizienten.
1	1 A	0 a	0 A
2	2 B	1 b	0 B
3	3 C	3 c	1 C
4	4 D	6 d	4 D
5	5 E	10 e	10 E
6	6 F	15 f	20 F
7	7 G	21 g	35 G
8	8 H	28 h	56 H
9	9 I	36 i	84 I
10	10 K	45 k	120 K
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$m-5$	$m-5$ O	o	O
$m-4$	$m-4$ P	p	P
$m-3$	$m-3$ Q	q	Q
$m-2$	$m-2$ R	r	R
$m-1$	$m-1$ S	s	S
m	m T	t	T

§. 4.

Der zweite Coeffizient der zweiten Potenz ist, wie wir gesehen haben, dem ersten Coeffizienten der ersten Potenz gleich, weil der zweite Coeffizient der ersten Potenz, $= 0$. Der zweite Coeffizient der dritten Potenz bestehet aus dem zweiten und ersten Coeffizienten der zweiten Potenz, und ist also $= 1 + 2$. Der zweite Coeffizient der vierten Potenz ist, $= 1 + 2 + 3$. Der zweite Coeffizient der fünften Potenz, $= 1 + 2 + 3 + 4$. Der zweite Coeffizient der sechsten, $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$; der zweite Coeffizient der siebenten, $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

Also ist immer der zweite Coeffizient jeder Potenz die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis auf die Zahl, die um 1 geringer ist, als der Exponent.

So ist der zweite Coeffizient der funfzehnten Potenz, $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14$.

Von der $m$ten Potenz ist also der zweite Coeffizient die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis auf $m - 1$. Diese Summe ist aber $= \frac{m(m-1)}{1.2}$ und mithin ist $\frac{m(m-1)}{1.2}$ der allgemeine Ausdruk für den zweiten Coeffizienten der Potenz m, wo nämlich m eine ganze, bejahte Zahl seyn muß.

§. 5.

Eben der Grundsaz §. 3. Nr. 2. führet uns auch auf den allgemeinen Ausdruk des dritten Coeffizienten einer jeden Potenz.

Es ist:

$b = a + \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$
$c = b + \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$
$d = c + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$
$e = d + \mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}$
$f = e + \mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E}$
$g = f + \mathfrak{F} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F}$
$h = g + \mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \mathfrak{G}$
$i = h + \mathfrak{H} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H}$
$k = i + \mathfrak{J} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H} + \mathfrak{J}$
und so weiter.

Ferner:

$B = A + a = o$
$C = B + b = b$
$D = C + c = b + c$
$E = D + d = b + c + d$
$F = E + e = b + c + d + e$
$G = F + f = b + c + d + e + f$
$H = G + g = b + c + d + e + f + g$
$I = H + h = b + c + d + e + f + g + h$
$K = I + i = b + c + d + e + f + g + h + i$
und so weiter.

Daher

Daher findet man

$$
\begin{aligned}
K = {} & A \\
& A + B \\
& A + B + C \\
& A + B + C + D \\
& A + B + C + D + E \\
& A + B + C + D + E + F \\
& A + B + C + D + E + F + G \\
& A + B + C + D + E + F + G + H
\end{aligned}
$$

und den dritten Coeffizienten der elften Potenz

$$
\begin{aligned}
= {} & A \\
& A + B \\
& A + B + C \\
& A + B + C + D \\
& A + B + C + D + E \\
& A + B + C + D + E + F \\
& A + B + C + D + E + F + G \\
& A + B + C + D + E + F + G + H \\
& A + B + C + D + E + F + G + H + I
\end{aligned}
$$

und so weiter.

So wird man, zum Beispiel, leicht finden, daß der dritte Coeffizient der dreizehnten Potenz, sey, =

$$
\begin{aligned}
& 1 \\
& 1 + 2 \\
& 1 + 2 + 3 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\
& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11
\end{aligned}
$$

Diesen Coeffizienten würde man demnach finden, wenn man alle diese arithmetische Progressionen summirte, und die gefundene Summen addirte.

§. 6.

Dieß führet uns ganz natürlich auf die Methode, den dritten Coeffizienten der Potenz m zu finden. Wenn wir denselben mit T bezeichnen; so kann man aus der Analogie schliessen, daß

$$\begin{aligned} T = {} & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots m - 2 \\ & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots m - 3 \\ & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots m - 4 \\ & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots m - 5 \\ & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots m - 6 \end{aligned}$$

und so weiter seyn müsse.

Es ist also

$$T = \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2} + \ldots$$

Nun ist aber

$$s = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \ldots \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}$$

also s die Summe der Glieder einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= 1$ und deren letztes Glied $= m - 2$, welches auch zugleich die Anzahl der Glieder ausdrückt, mithin

$$s = \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2}$$

Ferner

$$r = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \ldots \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$$

oder

$$r = \frac{(m-2)(m-3)}{1.\ 2}$$

und

$$q = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \mathfrak{E} + \mathfrak{F} + \ldots \mathfrak{P}$$

oder

$$q = \frac{(m-3)(m-4)}{1.\ 2}$$

Demnach ist

$$T = s + r + q + etc. \ldots$$

Man

Man setze, $m - 1 = n$; so wird $\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}$

$$+ \frac{(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} + \frac{(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2} + etc. =$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} + etc.$$

Aber

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{n}{2}(n - 1 + n - 2 + n - 3 + \ldots\ldots 1)$$

$$- \tfrac{1}{2}(n - 2 + n - 3 + n - 4 + \ldots\ldots 1)$$

$$- \tfrac{1}{2}(n - 3 + n - 4 + n - 5 + \ldots\ldots 1)$$

$$- \tfrac{1}{2}(n - 4 + n - 5 + n - 6 + \ldots\ldots 1)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} - \ldots\ldots$$

$$= \frac{ns}{2} - \frac{r}{2} - \frac{q}{2} - \ldots\ldots$$

Mithin ist $T = \frac{ns}{2} - \frac{r}{2} - \frac{q}{2} \ldots\ldots$

woraus folgt

$$s + r + q + \ldots\ldots = \frac{ns}{2} - \frac{r}{2} - \frac{q}{2} \ldots\ldots$$

oder

$$2s + 2r + 2q + \ldots\ldots = ns - r - q \ldots\ldots$$

$$2s - ns = -3r - 3q \ldots\ldots$$

$$\frac{(n-2)s}{3} + s = s + r + q + \ldots\ldots$$

$$\frac{(n+1)s}{3} = s + r + q + \ldots\ldots = T$$

Mithin

$$T = \frac{(n+1)}{3} \cdot \frac{n(n-1)}{1.\ 2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$$

der dritte Coeffizient der Potenz m.

Der erste Coeffizient der $m$ten Potenz ist m;

der zweite = = = = $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$;

der dritte = = = = $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$

Mithin kann man aus der Analogie schließen, daß der vierte seyn muß $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$;

der fünfte = $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$;

der sechste $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$

und so weiter.

Daher findet man

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}a^{m-2}b^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4 + etc.$$

§. 7.

Wenn die Allgemeinheit des Binomischen Lehrsatzes dargethan werden soll; so müssen noch folgende Fälle untersucht werden:

1. Wenn der Exponent eine negative, ganze Zahl ist;
2. Wenn er eine positive, gebrochene, und
3. Wenn er eine negative, gebrochene Zahl ist.

Wir werden mit der Untersuchung des zweiten und dritten Falles anfangen und daraus die Wahrheit des ersten abzuleiten suchen.

Es

Es sey das Binomium $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ gegeben, wo m, n ganze, positive Zahlen sind. Wir wollen annehmen, man könne setzen:

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b$$

$$+ \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{1 \cdot 2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 + etc.$$

und sehen, was aus dieser noch nicht erwiesenen Voraussetzung folge. Man setze

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{m\,b}{n\,a} \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} + etc. \right]$$

und

$$p = \frac{m\,b}{n\,a} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2}$$

$$+ \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1 \cdot \frac{m}{n} - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} + etc.$$

so ist

$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(1+p)$, woraus folgt $(a+b)^m = a^m (1+p)^n$.

Nun ist aber, §. 6.

$$(a+b)^m = a^m \left[1 + \frac{mb}{a} + \frac{m \cdot m - 1 \cdot}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} \right.$$

$$\left. + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} + etc. \right]$$

Wenn also bewiesen werden kann, daß

$$a^m(1+p)^n = a^m\left(1+\frac{mb}{a}+\frac{m\,.\,m-1}{1\,.\,2}\frac{b^2}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{m\,.\,m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{b^3}{a^2}+etc.\right)$$

so ist zu gleicher Zeit bewiesen, daß

$$(a+b)^m = a^m(1+p)^n.$$

Findet aber diese Gleichung statt, so hat auch die Gleichung

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(1+p)$$

und mithin auch diese

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\frac{b}{a}\right.$$
$$\left.+\frac{\frac{m}{n}\,.\,\frac{m}{n}-1}{1\,.\,2}\frac{b^2}{a^2}+etc.\right)$$

ihre vollkommene Richtigkeit.

Es ist aber

$$(1+p)^n = 1+np+\frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}p^2+\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}p^3\ etc.$$

Man findet

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{\frac{2m^2}{n^2}\,.\,\frac{m}{n}-1}{1\,.\,2}\frac{b^3}{a^3}+etc.$$

$$p^3 = \frac{m^3}{n^3}\frac{b^3}{a^3}$$

Demnach

Demnach

$$1 + np + \frac{n.n-1}{1.2}p^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}p^3 + etc.$$

$$= 1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m.\frac{m}{n}-1}{1.2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m.\frac{m}{n}-1.\frac{m}{n}-2}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3} etc.$$

$$+ \frac{m^2}{n}.\frac{n-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{\frac{2m^2}{n}.\frac{m}{n}-1.\frac{n-1}{2}}{1.2}\frac{b^3}{a^3} etc.$$

$$+ \frac{m^3}{n^2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\frac{b^3}{a^3} etc.$$

Der Coeffizient von $\frac{b^2}{a^2}$ ist, $= \frac{m.\frac{m}{n}-1.}{1.2} + \frac{m^2}{n}.\frac{n-1}{1.2}$

$$= m\left(\frac{m-n}{2n} + \frac{mn-m}{2n}\right) = m.\frac{mn-n}{2n} = \frac{m.m-1}{2}$$

Der Coeffizient von $\frac{b^3}{a^3}$ ist, $= \frac{m.\frac{m}{n}-1.\frac{m}{n}-2}{1.2.3} +$

$$\frac{\frac{2m^2}{n}.\frac{m}{n}-1.\frac{n-1}{2}}{1.2} + \frac{m^3}{n^2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} =$$

$$m\left(\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n} + \frac{m}{n}.\frac{m-n}{n}.\frac{n-1}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{m^2}{n^2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\right)$$

$$= m\left[\frac{(m-n)(m-2n) + 3m(m-n)(n-1)}{2n.3n}\right.$$

$$\left. + \frac{m^2(n-1)(n-2)}{2n.3n}\right]$$

$= m$

$$= m\left[\frac{m^2 - 3m + 2}{2 \cdot 3}\right] = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Es ist also

$$1 + np + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} p^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{2 \cdot 3} p^3 + etc.$$

$$= 1 + \frac{mb}{a} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} etc.$$

Wir finden demnach

$$a^m\left(1 + np + \frac{n \cdot n - 1}{2} p^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot}{2 \cdot 3} p^3 etc.\right)$$

$$= a^m\left(1 + \frac{mb}{a} + \frac{m \cdot m - 1}{2} \frac{b^2}{a^2} + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{b^3}{a^3} etc.\right)$$

und dieß ist es eben, was bewiesen werden sollte.

§. 8.

Um sich zu überzeugen, daß eben die Formel kann gebraucht werden, wenn von negativen Exponenten die Rede ist; so muß man bemerken, daß, wenn man durch T die Summe der Glieder bezeichnet, welche man erhalten würde, wenn man

$$(a + b)^{-\frac{m}{n}} \text{ in } a^{-\frac{m}{n}}\left(1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - etc.\right)$$

auflösete, stets die Gleichung

$$(a + b)^{-\frac{m}{n}} = T \text{ oder } \frac{1}{(a + b)^{\frac{m}{n}}} = T$$

oder endlich $1 = (a + b)^{\frac{m}{n}}$ T statt finden muß. Es muß daher bewiesen werden, daß, wenn man die Summe der Glieder, welche man erhält, wenn $(a + b)^{-\frac{m}{n}}$ in eine Reihe aufgelöset wird, und diese Summe mit der Reihe, in welche $(a + b)^{\frac{m}{n}}$ aufgelöset werden kann, multiplizirt, dieses Produkt der Einheit gleich sey.

Wir

Wir wollen also annehmen, man könne setzen:

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left(1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}+1\cdot\frac{m}{n}+2}{2\cdot 3}\frac{b^3}{a^3} + etc.\right)$$

Es ist bewiesen, daß

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\left(1 + \frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a} + \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1\cdot\frac{m}{n}-2}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{b^3}{a^3} + etc.\right)$$

Man multiplicire diese Reihen mit einander, schränke sich aber auf den Cubus von $\frac{b}{a}$ ein; so findet man das Produkt:

$$a^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\Bigg[1 - \frac{mb}{a} + \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}+1\cdot\frac{m}{n}+2}{2\cdot 3}\frac{b^3}{a^3} etc.$$

$$+ \frac{mb}{a} - \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{m}{n}+1\cdot\frac{b^3}{a^3}$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^3}{a^3}$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1\cdot\frac{m}{n}-2}{2\cdot 3}\frac{b^3}{a^3}$$

Wenn man die angezeigte Rechnung vollendet; so wird man finden, daß der Coeffizient von $\frac{b}{a}$; der Coeffizient von $\frac{b^2}{a^2}$;

der

der Coeffizient von $\frac{b^3}{a^3}$ u. s. w. Null ist. Eben dieses findet bei den höhern Potenzen von $\frac{b}{a}$ statt. Jenes Produkt ist also $= a^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} . 1 = a^0 . 1 = 1$. Und auf diese Art ist bewiesen, daß

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{m}{n} \frac{b}{a} + \frac{\frac{m}{n} . \frac{m}{n} + 1}{2} \frac{b^2}{a^2} - \frac{\frac{m}{n} . \frac{m}{n} + 1 . \frac{m}{n} + 2}{2 . 3} \frac{b^3}{a^3} + etc. \right)$$

gesetzet werden dürfe.

§. 9.

In diesen Betrachtungen ist zugleich der Beweis für den Fall enthalten, wenn der Exponent eine verneinte, ganze Zahl ist. Man siehet nämlich leicht, daß alle Schlüsse des vorigen Sphen ihre völlige Kraft behalten, wenn $n = 1$ gesetzet wird. Der Exponent m des Binomiums $(a+b)^m$ kann also entweder eine ganze positive, oder eine ganze negative oder eine positive, oder negative, gebrochene Zahl seyn; so ist es in allen diesen Fällen erlaubt, zu setzen

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1} b + \frac{m . m - 1}{1 . 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} a^{m-3} b^3 + etc.$$

Anfangs-

Anfangsgründe der Differenzial-Rechnung.

§. 10.

Unter den Grössen, welche wir hier betrachten wollen, gibt es einige, welche entweder wachsen oder abnehmen, und andere, welche beständig eben denselben Werth beibehalten. Die erstern, welche man mit den lezten Buchstaben x, y, z, des Alphabets zu bezeichnen pflegt, nennet man veränderliche; die leztern aber, beständige Grössen und diese drükt man durch die Buchstaben a, b, c, u. s. w. aus. So sind in krummen Linien die Coordinaten, veränderliche; der Parameter und die Axe aber, beständige Grössen.

§. 11.

Um das Stük zu bezeichnen, um welches eine Grösse zu- oder abgenommen hat, pflegt man vor solche Grössen den griechischen Buchstaben Δ zu schreiben, so, daß man, wenn angezeigt werden soll, die veränderliche Grösse x sey um eine gewisse Grösse gewachsen oder um dieselbe vermindert worden, $x \pm \Delta x$ schreibt.

Der Ausdruk Δx bezeichnet eine einzelne Grösse, wie $log. x$ oder $\sqrt[2]{x}$ u. s. w. Eine Potenz der Ordnung n von Δx solte eigentlich so geschrieben werden, wie $(\Delta x)^n$. Weil aber der Buchstabe Δ keinen besondern Factor bedeutet, sondern Δx als ein einziger Buchstabe in der Rechnung anzusehen ist; so schreibt man gewöhnlich Δx^n. Die zweite, dritte, vierte, u. s. w. Potenz von Δx wird demnach durch Δx^2, Δx^3, Δx^4, u. s. w. bezeichnet.

Es bedeutet also der Ausdruk Δx^n, daß die Differenz Δx in die $n$te Potenz erhoben worden sey, aber der Ausdruk $\Delta(x^n)$, daß die Differenz der Grösse x^n gesuchet werden soll.

§. 12.

§. 12.

Fig. 1. Es sey die Function $U = ax^n$ gegeben, wo n eine beständige, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl bedeutet. Diese Function kann als eine Gleichung der krummen Linie AM betrachtet werden, deren Abscissen durch x, die Ordinaten aber durch U ausgedrükt werden.

Weil U eine Function von x ist; so wird mit U eine Aenderung vorgehen, sobald mit x eine solche vorgenommen wird. Wächst also x um die Grösse $\Delta x = Pp$; so wird auch U um eine gewisse Grösse $\Delta U = mq$ zunehmen. Man erhält also

$$U + \Delta U = a\,(x + \Delta x)^n$$

Nun ist aber, §. 9.

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots.$$

Mithin

$$U + \Delta U = ax^n + anx^{n-1}\Delta x + \frac{an\,.\,n-1}{1\,.\,2}x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{an\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots.$$

und

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = anx^{n-1} + \frac{an\,.\,n-1}{1\,.\,2}x^{n-2}\Delta x$$
$$+ \frac{an\,.\,n-1\,.\,n-2}{1\,.\,2\,.\,3}x^{n-3}\Delta x^2 + \ldots.$$

Durch dieses Verfahren findet man also das Verhältniß von $mq : Mq$ oder das Verhältniß der Ordinate MP zu der Subsecante PT. Wolte man nun das Verhältniß der Ordinate MP zu der Subtangente PS finden; so siehet man leicht, daß sich das Verhältniß der Ordinate MP zu der Subsekante PT jenem Verhältniß immer mehr nähert, je kleiner die Differenzen ΔU, Δx, werden, daß aber das Verhältniß

der

der Ordinate zu der Subsekante dem Verhältniß der Ordinate zu der Subtangente nicht eher gleich werden kann, als bis $\Delta U = o$ und $\Delta x = o$ ist. Wenn dieses ~~dieses~~ geschiehet; so erhalten wir

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = anx^{n-1}$$

und dieß ist das Verhältniß, in welchem, in der krummen Linie AM, die Ordinate zu der Subtangente stehet. Um dieses Verhältniß auf eine allgemeine Art auszudrüken, bedient man sich gewißer Zeichen. Man sezt nemlich, wenn $\Delta U = o$ und $\Delta x = o$ geworden, vor die Größen U und x, den Buchstaben d, welcher auch hier nichts als ein Zeichen und kein Factor ist. Um also anzudeuten, daß man durch die vorhergehende Operazion das Verhältniß der Ordinate zu der Subtangente würklich gefunden habe; so schreibt man

$$\frac{dU}{dx} = anx^{n-1}$$

Man darf aber nicht glauben, als wolte man durch diesen Ausdruk sagen, es ist

$$\frac{o}{o} = anx^{n-1}.$$

Sondern $\frac{dU}{dx}$ ist ein Zeichen, wodurch man nicht nur das mehr erwehnte Verhältniß, sondern auch jede andere Grösse, wie max^{m-1}, wenn $U = ax^m$ ist, anzeigen kann.

§. 13.

Wenn $U = x^n$; so wird $\frac{dU}{dx} = nx^{n-1}$

Wenn $U = x^2$; - - $\frac{dU}{dx} = 2x$

Wenn $U = x^3$; - - $\frac{dU}{dx} = 3x^2$

Wenn $U = x^4$; - - $\frac{dU}{dx} = 4x^3$

Wenn $U = x^{-2}$; - - $\frac{dU}{dx} = -2x^{-3}$

Wenn $U = x^{\frac{2}{3}}$; - - $\frac{dU}{dx} = \frac{2x^{-\frac{1}{3}}}{3}$

Wenn $U = x^{-\frac{4}{5}}$; - - $\frac{dU}{dx} = -\frac{4x^{-\frac{9}{5}}}{5}$

und so weiter.

§. 14.

Wenn $U = a^2 \pm ax \pm by \pm z$; so wird

$U + \Delta U = a^2 \pm ax \pm a\Delta x \pm by \pm b\Delta y \pm z \pm \Delta z$,

weil a, b nicht wachsen und nicht abnehmen.

Daraus folgt

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \pm a \pm \frac{b\Delta y}{\Delta x} \pm \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Nun kann eine gewisse Aufgabe erfodern, daß man das Verhältniß wissen muß, welches durch das Zeichen $\frac{dU}{dx}$ angedeutet wird. Solches ist also

$$\frac{dU}{dx} = \pm a \pm \frac{bdy}{dx} \pm \frac{dz}{dx}$$

wenn ΔU, Δx, Δy, Δz, alle zugleich verschwinden. Sind die Gleichungen zwischen y, x, z, gegeben; so kann man daraus die Verhältnisse finden, welche durch die Zeichen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dU}{dx}$ angedeutet werden.

§. 15.

Andere Schriftsteller haben das Verhältniß der Ordinate zu der Subtangente auf eine andere Art gefunden, die hier deßwegen vorgetragen werden muß, um gewisse Ausdrüke besser zu verstehen. Sie haben nemlich unendlich kleine Grössen angenommen, worunter sie aber nichts anders verstehen, als Grössen, welche im Verhältniß gegen andere Grössen, als

Nichts

Nichts zu betrachten sind und daher aus der Rechnung weggelassen werden können. Als Beispiele führen sie ein Sandkorn an, das die Höhe eines Berges weder vergrößert, noch verkleinert, einen Bruch, dessen Zehler der Einheit gleich, der Nenner aber größer, als jede angebliche Zahl ist, welcher Bruch, nach ihrer Meinung, füglich weggelassen werden kann, wenn er in gewissen Rechnungen zu einer andern Zahl addirt oder davon subtrahirt werden soll.

Diesen unmathematischen Grundsaz haben sie in dem gegenwärtigen Fall folgendergestalt angewandt. Wenn, zum Beyspiel, $U = ax^2$; so nehmen sie an, U wachse, nach ihrem Sprachgebrauch, um eine unendlich kleine Grösse, welche sie mit dU bezeichnen. Eben so wird auch x um eine unendlich kleine Grösse dx zunehmen und sie erhalten demnach

$$U + dU = a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + adx^2$$
$$\text{und } dU = 2axdx + adx^2$$

wo nemlich dx^2 das Quadrat von dx ist, weil auch hier d ein Zeichen, aber keinen Factor vorstellet. Nun ist, nach dem gewöhnlichen Vortrage, dx ein solcher kleiner Bruch, von dem vorhin die Rede war, dessen Quadrat mithin mit desto größerm Rechte aus der Rechnung weggelassen werden kann. Dadurch erhalten sie also

$$dU = 2axdx,$$

welches man richtiger durch

$$\frac{dU}{dx} = 2ax$$

ausdrückt.

§. 16.

Diese lezte Erklärungsart hat folgende Redensarten eingeführet. Es ist dU das Differenziale von U und dx das Differenziale von x. Weil $dU = anx^{n-1}dx$, wenn $U = ax^n$; so nennet man den Ausdruk $anx^{n-1}dx$ das Differenziale von U oder von ax^n. Gewöhnlich gibt man daher folgende Regel:

Um das Differenziale dU einer Grösse $U = ax^n$ zu finden, multiplicire man ax^n mit dem Exponenten n, vermindere diesen Exponenten um 1 und erhebe x in die Dignität $n - 1$;

so dann multiplizire man das Produkt anx^{n-1} mit dem Differenziale von x, das heißt, mit dx.

Die Wissenschaft, das Differenziale von $U = ax^n$ zu finden, hat man daher die Differenzial-Rechnung genannt. Füglicher könnte man sie Methodum Tangentium nennen.

Die Formeln, §. 13. werden gewöhnlich auf folgende Art geschrieben:

1) $dU = nx^{n-1}dx$, 2) $dU = 2xdx$, 3) $dU = 3x^2dx$,

4) $dU = -2x^{-3}dx$, 5) $dU = \frac{2x^{-\frac{1}{3}}dx}{3}$,

6) $dU = -\frac{4x^{-\frac{9}{5}}dx}{5}$ u. s. w.

und, §. 14. $dU = \underline{+}\, adx \underline{+}\, bdy \underline{+}\, dz$.

§. 17.

Es sey die Function $U = xy$ gegeben und zugleicher Zeit angezeigt, daß zwischen U und x, U und y und endlich zwischen x und y gewisse Gleichungen statt finden, wie, zum Beispiel, $U = x^m$, $U = ay^p$, $x = cy^n$. Wenn nun in diesen Gleichungen keine andere veränderliche Grössen, als U und x, U und y, x und y vorkommen, welche auf eine Dignität erhoben sind, deren Exponent eine beständige Grösse ist; so ist man, vermöge des vorhergehenden, im Stande, die Verhältnisse oder die Grössen zu finden, welche die Mathematiker durch $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dx}{dy}$ auszudrücken pflegen.

Wenn in der Function $U = xy$, die Grösse x um Δx, y um Δy, und U um ΔU wächst; so erhalten wir

$$U + \Delta U = (x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

und

$$\Delta U = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

oder

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = y + \frac{x\Delta y}{\Delta x} + \Delta y.$$

Ver-

Verschwinden nun ΔU, Δx, Δy zu gleicher Zeit, oder es wird $\Delta U = o = dU$, $\Delta x = o = dx$, $\Delta y = o = dy$; so erhält man $\frac{dU}{dx} = y + \frac{xdy}{dx} + dy$. Nun zeigen die Ausdrücke $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ gewisse Grössen oder Verhältnisse gewisser Grössen an, welche anstatt dieser Zeichen gesetzet werden können: das Zeichen dy allein aber ist kein Zeichen einer Grösse, sondern schlechterdings, $= o$. Man erhält daher

$$\frac{dU}{dx} = y + x\frac{dy}{dx}$$

Weil $\Delta U = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$; so ist auch $\frac{\Delta U}{\Delta y} = \frac{y\Delta x}{\Delta y} + x + \Delta x$, und man erhält durch eben diese Schlüsse $\frac{dU}{dy} = \frac{ydx}{dy} + x$, weil dx allein keine Grösse, sondern Null anzeigt.

§. 18.

Man siehet leicht, daß diese Betrachtungen auf die Function $U = xy$, also auf die Function zweier veränderlichen Grössen, nicht eingeschränkt seyn, sondern sich mit eben der Wahrheit auf die Functionen dreier und mehrerer veränderlichen Grössen anwenden lasse. Wenn, zum Beispiel, $U = xyz$; so kann man immer annehmen, daß zwischen U, x, U und y, U und z und dann zwischen x, y, z, selbst gewisse Verhältnisse statt finden, welche durch Gleichungen ausgedrükt werden können. Man ist daher im Stande, zu finden, was die Zeichen $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$, $\frac{dx}{dy}$ u. s. w. eigentlich sagen wollen, und leicht wird man sich überzeugen, daß $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dz}$, $\frac{dz}{dx}$ u. s. w. gewisse Grössen, die Zeichen dx, dy, dz allein aber nichts, dann Null bedeuten. Wenn daher in der Function $U = xyz$ alle Grössen wachsend angenommen werden; so findet man

$$U + \Delta U = (x + \Delta x)(y + \Delta y)(z + \Delta z) =$$

$$xyz + zy\Delta x + zx\Delta y + xy\Delta z + z\Delta x\Delta y + y\Delta x\Delta z + x\Delta y\Delta z + \Delta x\Delta y\Delta z,$$

und

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = zy + \frac{zx\Delta y}{\Delta x} + \frac{xy\Delta z}{\Delta x} + z\Delta y + y\Delta z + \frac{x\Delta y\Delta z}{\Delta x} + \Delta y\Delta z.$$

Wenn nun $\Delta U = o = dU$, $\Delta x = o = dx$, $\Delta y = o = dy$, $\Delta z = o = dz$; so wird $\frac{dU}{dx} = zy + \frac{zxdy}{dx} + \frac{xydz}{dx} + zdy + ydz + \frac{xdydz}{dx} + dydz$ und $zdy = o$, $ydz = o$, $dydz = o$, $\frac{xdydz}{dx} = \frac{xdzdy}{dx} = o$. Denn obgleich $\frac{dz}{dx}$ oder $\frac{dy}{dx}$ eine würkliche Grösse vorstellet; so wird diese Grösse doch mit xdy oder xdz multiplizirt und muß mithin ebenfalls zu Null werden. Wir erhalten demnach

$$\frac{dU}{dx} = zy + \frac{zxdy}{dx} + \frac{xydz}{dx}.$$

Den Ausdruck

$$\Delta U = zy\Delta x + zx\Delta y + etc.$$

hätte man auch mit Δy oder Δz dividiren können. Im ersten Fall würde man erhalten haben

$$\frac{dU}{dy} = \frac{zydx}{dy} + zx + \frac{xydz}{dy}$$

und im andern Fall

$$\frac{dU}{dz} + zy\frac{dx}{dz} + zx\frac{dy}{dz} + xy.$$

§. 19.

Sonst trägt man diese Lehre auf folgende Art vor. Die Grössen ΔU, Δx, Δy, Δz u. s. w. werden durch dU, dx, dy, dz, u. s. w. ausgedrükt, mithin diese leztere als Grössen, aber als unendlich kleine Grössen betrachtet. §. 15.

Man

Man kann also mit den Zeichen dU, dx, dy u. s. w. eben so, wie mit würklichen Grössen, rechnen und deßwegen erhält man

1) $dU = ydx + xdy$, weil das Produkt $dxdy$, als das Produkt zweier unendlich kleiner Grössen, von selbst wegfällt.

2) $dU = zydx + zxdy + xydz$, weil die Glieder $zdxdy$, $ydxdz$, $xdydz$, $dxdydz$ so klein sind, daß sie weggelassen werden können.

Die gewöhnliche Regel ist also: Man findet das Differenzial der Function zwoer oder mehrerer veränderlichen Grössen, wenn man nach und nach jede Grösse als veränderlich betrachtet und so differenziirt, als wenn die übrigen beständige Grössen wären. Die Summe davon ist das gesuchte Differenziale.

§. 20.

Nunmehr ist es leicht, folgende Functionen zu differenziiren. Man findet $d(ax^m y^n) = ax^m d(y^n) + ay^n d(x^m) = nax^m y^{n-1} dy + may^n x^{m-1} dx$, und $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Wenn die Grösse, welche man differenziiren soll, aus mehreren Gliedern bestehet; so differenziirt man jedes Glied besonders. Zum Beispiel

$$d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cxdy + cydx.$$

Eben so

$$d\left(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}\right) = 2axdx + bdx - 2cyx^{-3}dx + cx^{-2}dy.$$

und

$$d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy.$$

Den Ausdruk $(a + bx + cx^2)^5$ differenziirt man eben so, wie den Ausdruk x^n. Man findet nemlich

$$d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 d(a + bx + cx^2)$$
$$= 5(a + bx + cx^2)^4 (b + 2cx)\, dx.$$

und

$$d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} = \tfrac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}\,d(a+bx^2)$$
$$= \tfrac{5}{3}(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}.\,2bxdx = \tfrac{10}{3}bxdx(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}$$

Wenn die zu differenziirende Grösse aus zusammengesezten Dignitäten und andern Factoren bestehet; so betrachtet man jeden Factor, als eine einfache veränderliche Grösse und verfährt nach den obigen Regeln. Es ist also:

$$d\left[x^3(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}\right] = (a+bx^2)^{\frac{5}{3}}d(x^3) + x^3d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}$$
$$= 3x^2dx(a+bx^2)^{\frac{5}{3}} + \tfrac{10}{3}bx^4dx\,(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Ferner $d\left[\dfrac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right] = d\left[(x+a)^3(x+b)^{-2}\right]$

$$= (x+a)^3d(x+b)^{-2} + (x+b)^{-2}d(x+a)^3$$
$$= \frac{(x+3b-2a)(x+a)^2dx.}{(x+b)^3}$$

Wenn eine Wurzel-Grösse differenziirt werden soll; so sezt man statt des Wurzelzeichens, Bruch-Exponenten. Es ist also

$$d(\sqrt{x}) = d(x^{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$$
$$d(\sqrt[5]{x^3}) = d(x^{\frac{3}{5}}) = \tfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx.$$

Ferner

$$d\left[\sqrt{(aa-xx)}\right] = d(aa-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{-xdx}{\sqrt{(aa-xx)}}$$

Endlich

$$d\left[x^m\sqrt[q]{(a+bx^n)^p}\right] = d\left[x^m(a+b^n)^{\frac{p}{q}}\right]$$
$$= \frac{pnb}{q}x^{m+n-1}dx\,(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1} + mx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

u. s. w.

Diffe-

Differenzio-Differenzial-Rechnung.

Es sey die Function $U = x^n$ gegeben. Man setze in dieselbe statt x nach und nach folgende Werthe:

$x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, $x + 4\Delta x$, $x + 5\Delta x$ u. s. w.

Die Grösse, in welche U sich verwandelt, wenn man $x + \Delta x$ statt x setzet, bezeichne man durch U'; durch U'' die Grösse, in welche U verwandelt wird, wenn man $x + 2\Delta x$ statt x setzet und endlich durch U''' die Grösse, in welche sich U verwandelt, wenn man $x + 3\Delta x$ statt x setzet, u. s. w. Es ist demnach,

$$U = x^n$$

$$U' = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

$$U'' = (x + 2\Delta x)^n = x^n + 2nx^{n-1}\Delta x + \frac{4n.n-1}{1.2} x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{8n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

$$U''' = (x + 3\Delta x)^n = x^n + 3nx^{n-1}\Delta x + \frac{9n.n-1}{1.2} x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{27n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

Mithin erhalten wir,

$$U' - U = \Delta U = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

$$U'' - U' = \Delta U' = nx^{n-1}\Delta x + \frac{3n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{7n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

$$U''' - U'' = \Delta U'' = nx^{n-1}\Delta x + \frac{5n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{19n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

u. s. w.

§. 22.

Wenn man von der Differenz $\Delta U'$ die Differenz ΔU abziehet; so bezeichne man durch $\Delta\Delta U$ oder kürzer durch $\Delta^2 U$ die Grösse, welche man dadurch erhält. Eben so drücke man durch $\Delta^2 U'$ die Grösse aus, welche herauskömmt, wenn man $\Delta U'$ von $\Delta U''$ abziehet. Es ist mithin

$$\Delta U' - \Delta U = \Delta^2 U = n.n - 1.x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

woraus folgt

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta x^2} = n.n - 1.x^{n-2} + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x\ etc.$$

Je kleiner Δx, ΔU werden, desto mehr nähert sich der Werth von $\frac{\Delta^2 U}{\Delta x^2}$ der Function $n.n-1.x^{n-2}$. Es kann aber niemals, so lange Δx, ΔU noch Grössen sind, der Werth von $\frac{\Delta^2 U}{\Delta x^2}$ der Function $n.n-1.x^{n-2}$ gleich werden. Wenn nun $\Delta x = o = dx$ und $\Delta U = o = dU$; so wird auch $\Delta^2 U = o$ und man pflegt dieses durch $d^2 U$ anzuzeigen. Wir erhalten demnach

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = n.n-1.x^{n-2}.$$

Statt der Grösse $n.n-1.x^{n-2}$ pflegt man öfters das Zeichen $\frac{d^2 U}{dx^2}$ zu setzen, so daß man überhaupt sagen kann, das

Zei-

Zeichen $\frac{d^2U}{dx^2}$ zeige das Daseyn gewisser Grössen an, und sey in der Stelle der vorigen oder einer ihr ähnlichen Grösse gesetzet worden. Der Ausdruck $\frac{d^2U}{dx^2}$ selbst kann keinen Werth haben, weil Null mit Null dividirt keine Grösse zum Quozienten geben kann.

§. 23.

Vorhin haben wir gefunden

$$\Delta U'' = nx^{n-1}\Delta x + \frac{5n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2} x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{19n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

und

$$\Delta U' = nx^{n-1}\Delta x + \frac{3n \,.\, n-1}{1 \,.\, 2} x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{7n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

Daraus folgt

$$\Delta U'' - \Delta U' = \Delta^2 U' = n \,.\, n-1 \,.\, x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{12n \,.\, n-1 \,.\, n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

Wenn man von der Differenz $\Delta^2 U'$ die Differenz $\Delta^2 U$ abziehet; so bezeichne man durch $\Delta^3 U$ die Grösse, welche man durch die Subtraction erhält. Da nun

$$\Delta^2 U = n \,.\, n-1 \,.\, x^{n-2}\Delta x^2 + n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, x^{n-3}\Delta x^3$$
$$+ \frac{14n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} x^{n-4}\Delta x^4 + etc.$$

so finden wir

$$\Delta^2 U' - \Delta^2 U = \Delta^3 U = n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, x^{n-3}\Delta x^3$$
$$+ \frac{3n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3}{2} x^{n-4}\Delta x^4 + etc.$$

wor-

woraus folgt

$$\frac{\Delta^3 U}{\Delta x^3} = n.n-1.n-2.x^{n-3} + \frac{3n.n-1.n-2.n-3}{2} x^{n-4} \Delta x \text{ etc.}$$

Wenn nun $\Delta x = o = dx$; so ist auch $\Delta x^3 = o = dx^3$ und $\Delta^3 U = o = d^3 U$ und man erhält

$\frac{d^3 U}{dx^3} = n.n-1.n-2.x^{n-3}$, wo $\frac{d^3 U}{dx^3}$ das Zeichen ist, womit man das Daseyn der Grösse $n.n-1.n-2.x^{n-3}$ oder einer ihr ähnlichen anzuzeigen pflegt.

§. 24.

Werden ähnliche Berechnungen weiter fortgesetzet; so ergiebt sich, daß

$$\frac{d^4 U}{dx^4} = n.n-1.n-2.n-3.x^{n-4}$$

$$\frac{d^5 U}{dx^5} = n.n-1.n-2.n-3.n-4.x^{n-5}$$

$$\frac{d^6 U}{dx^6} = n.n-1.n-2.n-3.n-4.x^{n-6}$$

u. s. w. sey.

n-5

§. 25.

Wenn $U = x^2$; so ist $\frac{d^2 U}{dx^2} = 2$.

Wenn $U = ax^4$; so ist $\frac{d^2 U}{dx^2} = 12ax^2$ und $\frac{d^3 U}{dx^3} = 24ax$.

Wenn $U = ax^m$; so ist $\frac{d^2 U}{dx^2} = m(m-1)ax^{m-2}$

$$\frac{d^3 U}{dx^3} = m(m-1)(m-2)ax^{m-3}$$

$$\frac{d^4 U}{dx^4} = m(m-1)(m-2)(m-3)ax^{m-4}$$

u. s. w.

§. 26.

§. 26.

Gewöhnlich trägt man diese Sätze auf folgende Art vor. Wenn, zum Beispiel, $U = x^3$ und man dU, dx als würkliche Grössen betrachtet; so wird

$$U + dU = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$$

$$\text{und } dU = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3.$$

Nun wachse dU um die Grösse d^2U, dx sey aber eine beständige Grösse, deren Werth bei allen Aenderungen, welche mit dU und x vorgenommen werden, nicht verändert wird. Man erhält mithin

$$dU + d^2U = 3(x + dx)^2dx + 3(x + dx)dx^2 + dx^3$$

$$= 3x^2dx + 6xdx^2 + 3dx^3 + 3xdx^2 + 3dx^3 + dx^3$$

$$\text{und } d^2U = 6xdx^2 + 6dx^3.$$

Aber $6dx^3$ ist, nach dem gewöhnlichen Vortrage, das Produkt dreier unendlich kleinen Grössen und verschwindet in Rücksicht auf $6xdx^2$, welches das Produkt zweier unendlich kleinen Grössen ist. Man bekömmt also

$$d^2U = 6xdx^2$$

und diesen Ausdruck würde man auch erhalten haben, wenn man $dU = 3x^2dx$, nach der Regel des 16ten Sphen differenziirt, dx aber als eine beständige Grösse betrachtet hätte.

Weil also d^2U das Differenziale von dU und $6xdx^2$ das Differenziale von $3x^2dx$ ist; so sind daher die Namen Differenzio-Differenziale und Differenzio-Differenzialrechnung entstanden.

Die Formeln §. 21. bis §. 25. pflegt man deswegen auf folgende Art auszudrücken:

$$d^2U = n.n - 1.x^{n-2}dx^2,$$

$$d^3U = n.n - 1.n - 2.x^{n-3}dx^3,$$

$$d^4U = n.n - 1.n - 2.n - 3.x^{n-4}dx^4,$$

$$d^5U = n.n - 1.n - 2.n - 3.n - 4.x^{n-5}dx^5$$

u. s. w. und man findet immer die folgende aus der vorhergehenden, wenn man nach §. 16. verfähret.

§. 27.

Man kann in jeder Funktion, zum Beispiel, in der Function $U = x^n$ annehmen, daß sowol U als x gewisse Functionen

nen von der veränderlichen Grösse t seyn; zum Beispiel, $U = (a + t^n)^p$, $x = at^m$ u. s. w. Ferner kann man annehmen, daß, wenn U und x nach willkührlichen Gesetzen wachsen, die Grösse t um die beständige Grösse Δt zunehme, so, daß die Werthe von t nach der arithmetischen Progression

$$t, t + \Delta t, t + 2\Delta t, t + 3\Delta t, t + 4\Delta t, t + 5\Delta t \text{ u. s. w.}$$

fortschreiten, indessen die correspondirenden Werthe von U folgende:

$$U,\ U + \Delta U,\ U + 2\Delta U + \Delta^2 U,\ U + 3\Delta U + 3\Delta^2 U + \Delta^3 U \text{ u. s. w.}$$

und die correspondirenden Werthe von x nächststehende:

$$x, x + \Delta x, x + 2\Delta x + \Delta^2 x, x + 3\Delta x + 3\Delta^2 x + \Delta^3 x$$

u. s. w. sind.

Sind nun die Gleichungen gegeben, wodurch U und x durch t und beständige Grössen ausgedrukt werden; so kann man daraus leicht die Grössen finden, welche die Mathematiker durch die Zeichen $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dU}{dt}, \frac{d^2U}{dt^2}$ u. s. w. anzudeuten pflegen.

§. 28.

Oben §. 21. haben wir in die Function $U = x^n$ nach und nach für x folgende Werthe gesetzt:

$$x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ x + 3\Delta x,\ x + 4\Delta x \text{ u. s. w.}$$

Es ist also x beständig um die unveränderliche Grösse Δx gewachsen. Nun kann aber auch der Fall statt finden, daß selbst Δx wächst oder abnimmt, wenn x wächst oder abnimmt und diesen Fall wollen wir hier nun näher untersuchen.

Es ist

$$U = x^n$$

$$U' = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2}\Delta x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

$U'' =$

$$U'' = (x + 2\Delta x + \Delta^2 x)^n$$
$$= x^n + 2nx^{n-1}\Delta x + nx^{n-1}\Delta^2 x + 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\Delta^2 x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta^2 x.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{8n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^2.\Delta x$$
$$+ 6n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta^2 x$$
$$+ n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta^2 x^2.\Delta^2 x + etc.$$

Ferner ist

$$U' - U = \Delta U = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta x^3 + etc.$$

und

$$U'' - U' = \Delta U' = nx^{n-1}\Delta x + nx^{n-1}\Delta^2 x$$
$$+ \frac{3n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta x^2 + 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}.\Delta^2 x.\Delta^2 x + 7n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta x$$
$$+ 6n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta^2 x$$
$$+ n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x.\Delta^2 x.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta^2 x^2.\Delta^2 x + etc.$$

Daraus folgt

$$\Delta U' - \Delta U = \Delta^2 U = nx^{n-1}\Delta^2 x + n.n-1.x^{n-2}\Delta x^2$$
$$+ 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}\Delta^2 x.\Delta^2 x + n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x^2.\Delta x$$
$$+ 6n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta^2 x.\Delta^2 x$$
$$+ n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x.\Delta^2 x.\Delta^2 x$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}x^{n-3}\Delta^2 x^2.\Delta^2 x + etc.$$

Weil

Weil U und x Functionen von t seyn können; so dividire man alle Glieder mit Δt^2, um die Werthe von $\frac{\Delta^2 U}{\Delta t^2}$, $\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$ u. s. w. zu bekommen. Es ist mithin

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta t^2} = nx^{n-1}\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + n.n-1.x^{n-2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}$$

$$+ 2n.n-1.x^{n-2}\Delta x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$$

$$+ \frac{n.n-1.}{1.2}x^{n-2}\Delta^2 x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + n.n-1.n-2.x^{n-3}\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}.\Delta x$$

$$+ 6n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta^2 x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$$

$$+ n.n-1.n-2.x^{n-3}\Delta x.\Delta^2 x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}x^{n-3}\Delta^2 x.\Delta^2 x.\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + etc.$$

Wenn nun ΔU, Δx, Δt alle zugleich verschwinden, wie solches hier vorausgesetzet wird; so ist

$$dx.\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ d^2x.\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\ dx.\frac{dx^2}{dt^2} = 0,$$

$$d^2x.\frac{d^2x}{dt^2} = 0, dx.d^2x.\frac{d^2x}{dt^2} = 0, d^2x.d^2x.\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

und wir erhalten

$$\frac{d^2U}{dt^2} = nx^{n-1}\frac{d^2x}{dt^2} + n.n-1.x^{n-2}\frac{dx^2}{dt^2}$$

Ist nemlich x eine Function von t; so sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx^2}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ Zeichen, welche an die Stelle gewisser Grössen, die durch x und t ausgedrükt sind, gesetzet werden. Würden nun diese Grössen selbst vorhanden und mit dx, d^2x, $d^2x.d^2x$, das heißt, mit Null multiplizirt seyn; so würden alle Glieder, in welchen solche Factoren vorkommen, zu Null werden und mithin aus der Rechnung weggelassen werden müssen.

Hier-

Hieraus erhellet, wie man verfahren müsse, wenn man die Grössen finden will, welche durch

$$\frac{d^3U}{dt^3}, \frac{d^4U}{dt^4}, \frac{d^5U}{dt^5}$$ u. s. w. angezeigt werden.

Wenn $U = x^2$; so wird

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{2xd^2x}{dt^2} + \frac{2dx^2}{dt^2}$$

Wenn $U = x^3$; so findet man

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{3x^2d^2x}{dt^2} + \frac{6xdx^2}{dt^2}$$

Ferner $U = ax^m$, gibt

$$\frac{d^2U}{dt^2} = max^{m-1}\frac{d^2x}{dt^2} + m(m-1)ax^{m-2}\frac{dx^2}{dt^2}$$

u. s. w.

§. 29.

Nimmt man, wie gewöhnlich geschiehet, unendlich kleine Grössen an; so kann diese Lehre von §. 27. an folgendergestalt vorgetragen werden.

Wenn, zum Beispiel, $U = x^2$; so ist $U + dU = x^2 + 2xdx + dx^2$ und $dU = 2xdx + dx^2$.

Ferner $dU + d^2U = 2(x + dx)(dx + ddx) + (dx + ddx)^2$ und $d^2U = 2xddx + 2dx^2 + 4dxddx + ddx^2$.

Hier fallen die Glieder $4dxddx$, ddx^2 weg, weil sie Produkte unendlich kleiner Grössen in einander und mithin noch unendlich kleiner, als $2xddx$, oder $2dx^2$ sind. Man erhält also

$$d^2U = 2xddx + 2dx^2$$

welchen Ausdruk man auch bekommen haben würde, wenn man $dU = 2xdx$ nach der Regel des 19ten §phen differenziirt, aber dx als eine veränderliche Grösse betrachtet hätte.

Die Formeln §. 27. 28. pflegt man daher gewöhnlich auf folgende Art zu schreiben:

$$d^2U = nx^{n-1}d^2x + n \cdot n - 1 \cdot x^{n-2}dx^2$$
$$d^2U = 2xd^2x + 2dx^2$$
$$d^2U = 3x^2d^2x + 6xdx^2$$
$$d^2U = max^{m-1}d^2x + m(m-1)ax^{m-2}dx^2$$ u. s. w.

§. 30.

Oben §. 17. haben wir gefunden

$$\Delta U = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Wenn wir nun annehmen, daß Δx um $\Delta^2 x$ wächst, wenn x um Δx wächst, daß Δy um $\Delta^2 y$ wächst, wenn y um Δy wächst; so erhalten wir

$$\Delta U + \Delta^2 U = (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y + \Delta y)(\Delta x + \Delta^2 x) + (\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y)$$

oder

$$\Delta U + \Delta^2 U = x\Delta y + \Delta x\Delta y + x\Delta^2 y + \Delta x\Delta^2 y + y\Delta x \quad \Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + \Delta y\Delta^2 x + \Delta x\Delta y + \Delta y\Delta^2 x + \Delta x\Delta^2 y + \Delta^2 x\Delta^2 y;$$

und

$$\Delta^2 U = x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta^2 y + 2\Delta x\Delta y + y\Delta^2 x + 2\Delta y\Delta^2 x + \Delta^2 x\Delta^2 y.$$

Weil nun U, x, y Functionen von t seyn können, §. 27. und man die Differenz von t als eine beständige Grösse annehmen darf; so dividire man alle Glieder mit Δt^2, wodurch man erhält

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta t^2} = \frac{x\Delta^2 y}{\Delta t^2} + 2\Delta x \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2} + \frac{2\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{y\Delta^2 x}{\Delta t^2} + 2\Delta y \cdot \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} + \Delta^2 x \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}.$$

Wenn nun ΔU, Δx, Δy, Δt alle zugleich verschwinden, so wird

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{xd^2 y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{yd^2 x}{dt^2}.$$

Denn man siehet leicht, daß $2dx \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = o$, $2dy \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = o$, $d^2 x \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = o$, seyn müsse.

§. 31.

Nimmt man, wie sonsten geschiehet, unendlich kleine Grössen an, so wird

$d^2 U =$

$$d^2U = xd^2y + 2dxd^2y + 2dxdy + yd^2x + 2dyd^2x + d^2xd^2y.$$

Nun sind $2dxd^2y$, $2dyd^2x$, und d^2xd^2y Produkte der unendlich kleinen Grössen erster Ordnung, nemlich dx, dy in unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, nemlich d^2x, d^2y. Daher dürfen diese Glieder, wegen ihrer Unbeträchtlichkeit, aus dem obigen Ausdruk weggelassen werden, und man erhält

$$d^2U = xd^2y + yd^2x + 2dxdy,$$

welchen man auch gefunden haben würde, wenn man

$$dU = xdy + ydx$$

so differenziirt, daß man dx, dy als würkliche und veränderliche Grössen betrachtet hätte und nach der Regel §. 19. verfahren wäre.

§. 32.

Wenn Δx eine beständige Grösse ist; so erhalten wir

$$\frac{\Delta^2U}{\Delta t^2} = \frac{x\Delta^2y}{\Delta t^2} + 2\Delta x.\frac{\Delta^2y}{\Delta t^2} + \frac{2\Delta x}{\Delta t}.\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

woraus folgt

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{xd^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt}.\frac{dy}{dt},$$

oder

$$d^2U = xd^2y + 2dxdy.$$

Ist Δy eine beständige Grösse, so erhält man

$$d^2U = yd^2x + 2dxdy.$$

Beide Ausdrücke würde man auch erhalten haben, wenn man in

$$dU = xdy + ydx$$

zuerst dy als eine veränderliche Grösse, dx aber als eine beständige Grösse, und dann den umgekehrten Fall betrachtet hätte.

§. 33.

Wenn wir bei der Function $U = xy$ annehmen, daß x nicht wachse, wenn y um Δy und U um ΔU wächst; so erhalten wir

$$\Delta U = x\Delta y.$$

Wenn nun aber x um Δx wächst, wenn Δy um Δ^2y wächst; so folgt:

$$\Delta U + \Delta^2 U = (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y)$$
$$= x\Delta y + \Delta x \Delta y + x\Delta^2 y + \Delta x \Delta^2 y$$

und

$$\frac{\Delta^2 U}{\Delta t^2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{x\Delta^2 y}{\Delta t^2} + \Delta x \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}.$$

Verschwinden nun Δx, Δy, Δt zu gleicher Zeit, so wird

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{xd^2 y}{dt^2} + dx \cdot \frac{d^2 y}{dt^2},$$

das heißt

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{xd^2 y}{dt^2},$$

weil $dx \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = o$,

oder

$$d^2 U = dxdy + xd^2 y,$$

welchen Ausdruk man auch bekommen haben würde, wenn man

$$dU = xdy$$

so differenziirt hätte, als wenn dy eine veränderliche, dx aber eine beständige Grösse wäre.

Wenn $U = x^{-1} y$, aber x nicht wächst, wenn y um Δy wächst; sondern erst alsdenn, wenn Δy um $\Delta^2 y$ wächst; so findet sich

$$d^2 U = \frac{d^2 y}{x} - \frac{dxdy}{x^2}.$$

§. 34.

Weil $\Delta^2 U = x\Delta^2 y + 2\Delta x \Delta^2 y + 2\Delta x \Delta y + y\Delta^2 x + 2\Delta y \Delta^2 x + \Delta^2 x \Delta^2 y$; so wird $\Delta^2 U + \Delta^3 U$

$$= (x + \Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) + 2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$
$$+ 2(\Delta x + \Delta^2 x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y + \Delta y)(\Delta^2 x + \Delta^3 x)$$
$$+ 2(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta^2 x + \Delta^3 x) + (\Delta^2 x + \Delta^3 x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$

woraus man endlich findet

$$d^3 U = xd^3 y + dxd^2 y + 2dxd^2 y + 2dyd^2 x + yd^3 x$$
$$+ dyd^2 x.$$

Hier-

Hieraus erhellet die Methode, wie man d^4U, d^5U, d^6U u. s. w. suchen müsse.

§. 35.

Ist $U = xyz$; so haben wir oben §. 18. gefunden

$$\Delta U = zy\Delta x + zx\Delta y + xy\Delta z + z\Delta y\Delta x + y\Delta z\Delta x + x\Delta y\Delta z + \Delta y\Delta\Delta x.$$

Daraus findet man

$$\begin{aligned}\Delta U + \Delta^2 U = {} & (z + \Delta z)(y + \Delta y)(\Delta x + \Delta^2 x)\\ & + (z + \Delta z)(x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y)\\ & + (x + \Delta x)(y + \Delta y)(\Delta z + \Delta^2 z)\\ & + (z + \Delta z)(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta x + \Delta^2 x)\\ & + (y + \Delta y)(\Delta z + \Delta^2 z)(\Delta x + \Delta^2 x)\\ & + (x + \Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta z + \Delta^2 z)\\ & + (\Delta y + \Delta^2 y)(\Delta z + \Delta^2 z)(\Delta x + \Delta^2 x)\end{aligned}$$

Und endlich

$$d^2U = zyd^2x + zdxdy + 2ydxdz + xyd^2z + xdydz + xdzdy + xzd^2y + zdxdy.$$

Auf eben die Art findet man d^3U, d^4U u. s. w.

§. 36.

Wenn $y^n = \frac{x^m}{a}$; so findet man $x = ay^{\frac{n}{m}}$ und

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{an}{m} y^{\frac{n}{m}-1} \frac{ddy}{dt^2} + \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} \frac{dy^2}{dt^2}.$$

Aber $\frac{an}{m} y^{\frac{n}{m}-1} = \frac{dx}{dy}$. Daher

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{ddy}{dt^2} + \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} \frac{dy^2}{dt^2}$$

oder

$$\frac{ddx}{dt^2} - \frac{dx}{dy} \cdot \frac{ddy}{dt^2} = \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} \frac{dy^2}{dt^2},$$

welches man gewöhnlich so ausdruckt,

$$\frac{dyddx - dxddy}{dy^2} = \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} dy.$$

Aber $d\left(\frac{an}{m} y^{\frac{n}{m}-1}\right) = \frac{an}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right) y^{\frac{n}{m}-2} dy = d\left(\frac{dx}{dy}\right)$

Daher

$$\frac{dyddx - dxddy}{dy^2} = d\left(\frac{dx}{dy}\right).$$

Auf eben die Art kann man sich leicht überzeugen, daß

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}.$$

Ist $y^n = (bb - aax^m)^2$; so findet man auf eben die Art

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2} \text{ und } d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}.$$

§. 37.

Wenn $U = ax^m + bx^r$; so findet man

$$d^2U = max^{m-1}d^2x + m(m-1)ax^{m-2}dx^2 + brx^{r-1}d^2x + br(r-1)x^{r-2}dx^2.$$

Ist aber Δx eine beständige Grösse; so wird

$$d^2U = m(m-1)ax^{m-2}dx^2 + br(r-1)x^{r-2}dx^2$$

und

$$d^3U = m(m-1)(m-2)ax^{m-3}dx^3 + br(r-1)(r-2)x^{r-3}dx^3$$

u. s. w.

Ist $U = x^m(a+x)^n$; so wird

$$U + \Delta U = (x + \Delta x)^m (a + x + \Delta x)^n.$$

Und wenn Δx eine beständige Grösse ist; so findet man

$$\frac{d^2U}{dx^2} = mnx^{m-1}(a+x)^{n-1} + n(n-1)x^m(a+x)^{n-2} + m(m-1)x^{m-2}(a+x)^n + mnx^{m-1}(a+x)^{n-1}.$$

Und

$$\frac{d^3U}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}(a+x)^n + n(n-1)(n-2)x^m(a+x)^{n-3} + 3mn(m-1)x^{m-2}(a+x)^{n-1} + 3mn(n-1)x^{m-1}(a+x)^{n-2}$$

u. s. w.

Von

Von den Differenzialien der Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten, Cosekanten.

§. 38.

Ehe wir zeigen können, wie man Sinus, Cosinus u. s. w. differenziire, müssen wir zuvor die Wahrheit folgender Sätze darzuthun suchen. *Fig. 1.*

Es sey AMZ eine beliebige krumme Linie. Man setze den Bogen $AM = s$; die Abscisse $AP = x$; die Ordinate $PM = y$. Wenn die Abscisse um das Stück $Pp = \Delta x$ wächst; so wird die Ordinate um die Grösse $qm = \Delta y$ und der Bogen AM um das Stük $Mm = \Delta s$ zunehmen.

Man ziehe ferner die Sekante mMT und in den Punkt M die Tangente NMS. Weil das Dreyek Mmq dem Dreyek MPT ähnlich ist; so verhält sich

$$\Delta y : \Delta x = y : PT$$

woraus folgt

$$PT = \frac{y\Delta x}{\Delta y}.$$

Je näher der Punkt m dem Punkt M kommt, desto mehr nähert sich das Verhältniß $MP : MT$ dem Verhältniß $MP : PS$ und desto mehr die Subsekante PT der Subtangente PS. Wenn nun der Punkt m in den Punkt M fällt, das ist, wenn $\Delta x = o = dx$ und $\Delta y = o = dy$; so verwandelt sich die Subsekante in die Subtangente, und man erhält $PT = \frac{ydx}{dy}$: ein allgemeiner Ausdruk für die Subtangente, in krummen Linien, deren Coordinaten senkrecht auf einander stehen. PT

§. 39.

Der Bogen Mm ist allezeit größer, als die Sehne Mm, oder es ist

$$\Delta s > \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

welches man auch so ausdrücken kann:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} > \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}.$$

Man setze also, es sey

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} - t = \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$$

Der Bogen Mm ist kleiner als die Linie MN, wo N der Punkt ist, da die verlängerte Ordinate die verlängerte Tangente schneidet, oder der Bogen Mm ist kleiner als $\sqrt{(Mq^2 + qN^2)}$. Aus den ähnlichen Dreiecken NMq und MPS folgt aber

$$SP : PM = Mq : qN,$$

oder $\frac{ydx}{dy} : y = \Delta x : qN.$

Demnach $qN = \Delta x \cdot \frac{dy}{dx}$.

Es ist mithin

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} < \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

Man setze daher, es sey

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} + z = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

Es ist also $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ immer grösser als $\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$ und kleiner als $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ (*).

Je

(*) „Weil $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ die Tangente des Winkels ist, welchen die Sehne „mM mit der Horizontallinie Mq einschließet, dahingegen „$\frac{dy}{dx}$ die Tangente des größern Winkels ist, welchen die Linie „NM

Je mehr sich aber der Punkt m dem Punkt M nähert, desto mehr nähert sich auch der Winkel mMq dem Winkel NMq oder die Grenze $\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$ der Grenze $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Und wenn $\Delta x = 0 = dx$; so erhält man

$$\frac{ds}{dx} - t = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

$$\text{und } \frac{ds}{dx} + z = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

woraus folgt

$$\frac{ds}{dx} - t = \frac{ds}{dx} + z$$

welche Gleichung unmöglich statt finden kann, wenn nicht $t = 0$, und $z = 0$. Man erhält also

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

welches man gewöhnlich so ausdrückt $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

§. 40.

Es sey nun $AMNB$ die Hälfte eines Kreises; *Fig. 2.* der Bogen $AM = \varphi$; die Abscisse oder der Queer-Sinus $AP = x$; der Sinus des Winkels ACM oder die Ordinate $PM = y$; der Halbmesser $= r$; so ist $yy = 2rx - xx$. Daraus folgt:

$$y\frac{dy}{dx} = r - x,$$

$$\text{und } \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(r - x)^2}{y^2}.$$

„NM mit eben der Horizontallinie Mq einschließet, so ist „$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kleiner als $\frac{dy}{dx}$. Um aber zu beweisen, daß $\frac{dy}{dx} = Tang.$ „NMq; so bedenke man, daß $NMq = MSP$, und daß „$SP : PM = 1 : Tang.\ MSP$, oder $\frac{ydx}{dy} : y = 1 : Tang.\ MSP$, „woraus folgt $Tang.\ MSP = Tang.\ NMq = \frac{dy}{dx}$.

Vorhin haben wir für jede krumme Linie gefunden $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Daher ist beim Kreis

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\left[1 + \frac{r^2 - 2rx + xx}{2rx - xx}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{2rx - xx + r^2 - 2rx + xx}{2rx + xx}}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{2rx - xx}} = \frac{r}{\sqrt{(2rx - xx)}}.$$

Es ist aber x der Queer-Sinus des Winkels φ, und $\sqrt{(2rx - xx)} = y$ sein Sinus. Deswegen ist

$$\frac{d\varphi}{d\,Sin.v.\varphi} = \frac{r}{Sin.\varphi} \text{ oder } d\varphi = \frac{r\,d(Sin.v.\varphi)}{Sin.\varphi},$$

wie man es gewöhnlich ausdrükt, oder endlich

$$\frac{d\varphi\, Sin.\varphi}{r} = d(Sin.v.\varphi).$$

§. 41.

Aber $Cosin.\varphi = r - Sin.v.\varphi$; daher $-dCosin.\varphi = d\,Sin.v.\varphi$ und

$$\frac{d\varphi}{-dCosin.\varphi} = \frac{r}{Sin.\varphi}$$

welches man gewöhnlich so ausdrükt

$$d\,Cosin.\varphi = -\frac{Sin.\varphi d\varphi}{r}$$

und die Regel giebt: Man findet das Differenzial des Cosinus, wenn man das verneinte Differenzial des Bogens mit dem Sinus multiplizirt und mit dem Radius dividirt.

Dieß ist eine uneigentliche Redensart. Man sucht die Grösse, deren Zeichen $\frac{d\,Cosin.\varphi}{d\varphi}$ ist, und diese Grösse finden wir $= -\frac{Sin.\varphi}{r}$.

§. 42.

Wir haben vorhin gefunden, $\frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{y}$, welches man auch so ausdrücken kann: $\frac{d\,Sin.\,\varphi}{d\,Sin.\,v.\,\varphi} = \frac{Cosin.\,\varphi}{Sin.\,\varphi}$. Weil aber $\frac{d\varphi}{r\,d\,Sin.\,v.\,\varphi} = \frac{1}{Sin.\,\varphi}$; so ist $d\,Sin.\,\varphi = \frac{Cosin.\,\varphi d\varphi}{r}$, und man gibt die Regel: Das Differenzial des Sinus ist gleich dem Differenzial des Bogens, multiplizirt mit dem Cosinus, und dieses Produkt dividirt mit dem Radius.

§. 43.

Wenn man das Differenziale der Tangente eines Bogens φ finden will, dessen Radius $= r$; so muß man sich erinnern, daß $Tang.\,\varphi = \frac{r\,Sin.\,\varphi}{Cosin.\,\varphi}$. Man setze $\frac{r\,Sin.\,\varphi}{Cosin.\,\varphi} = y$; so ist $r\,Sin.\,\varphi = y\,Cosin.\,\varphi$ und $r\,d\,Sin.\,\varphi = Cosin.\,\varphi d\varphi = dy\,Cosin.\,\varphi - \frac{y d\varphi\,Sin.\,\varphi}{r}$. Daraus folgt $dy = d\varphi\,\frac{(Cosin.\varphi)^2 + (Sin.\varphi)^2}{(Cosin.\varphi)^2} = \frac{r^2 d\varphi}{(Cosin.\varphi)^2}$, das heißt, $d\,Tang.\,\varphi = \frac{r^2 d\varphi}{(Cosin.\varphi)^2}$.

Das Differenzial der Tangente ist gleich einem Produkt aus dem Quadrat des Radius in das Differenziale des Bogens, dividirt durch das Quadrat des Cosinus.

§. 44.

Das Differenziale der Cotangente findet man auf eben die Art. Es ist nemlich

$$Cotang.\,\varphi = \frac{r\,Cosin.\,\varphi}{Sin.\,\varphi}.$$

Man setze $\frac{r\,Cosin.\,\varphi}{Sin.\,\varphi} = y$; so wird $r\,Cosin.\,\varphi = y\,Sin.\,\varphi$ und $r d(Cosin.\,\varphi) = y d(Sin.\,\varphi) + Sin.\,\varphi dy$, das heißt:

$$-\,Sin.\,\varphi d\varphi = \frac{y\,Cosin.\,\varphi d\varphi}{r} + Sin.\,\varphi dy$$

oder

oder

$$-\mathit{Sin.}\,\varphi d\varphi - \frac{(\mathit{Cosin.}\,\varphi d\varphi)^2 d\varphi}{\mathit{Sin.}\,\varphi} = \mathit{Sin.}\,\varphi dy$$

oder

$$-d\varphi \frac{(\mathit{Sin.}\,\varphi)^2 + (\mathit{Cosin.}\,\varphi)}{(\mathit{Sin.}\,\varphi)^2} = dy$$

Endlich

$$dy = d(\mathit{Cotang.}\,\varphi) = -\frac{r^2 d\varphi}{(\mathit{Sin.}\,\varphi)^2} = -d\varphi(\mathit{Cosec.})\varphi^2.$$

§. 45.

Es ist $\mathit{Sec.}\,\varphi = \frac{r^2}{\mathit{Cosin.}\,\varphi}$. Man setze $\frac{r^2}{\mathit{Cosin.}\,\varphi} = y$; so wird $o = yd(\mathit{Cosin.}\,\varphi) + \mathit{Cosin.}\,\varphi.\,dy$ oder $\frac{r\,\mathit{Sin.}\,\varphi d\varphi}{(\mathit{Cosin.}\varphi)^2} = dy = d(\mathit{Sec.}\,\varphi)$. Es ist also

$$d(\mathit{Sec.}\,\varphi) = d\varphi \frac{\mathit{Tang.}\varphi}{\mathit{Cosin.}\,\varphi} = \frac{d\varphi\,\mathit{Tang.}\,\varphi\,\mathit{Sec.}\,\varphi}{r^2}.$$

§. 46.

Weil $\mathit{Cosec.}\,\varphi = \frac{r^2}{\mathit{Sin.}\,\varphi}$; so findet man $d(\mathit{Cosec.}\,\varphi)$

$$= -\frac{\mathit{Cotang.}\,\varphi.\,d\varphi}{\mathit{Sin.}\,\varphi} = -\frac{d\varphi\,\mathit{Cotang.}\,\varphi.\,\mathit{Cosec.}\,\varphi}{r^2}.$$

§. 47.

Um diesen Abschnitt mit einem Blick zu übersehen, wird folgende Tabelle beigefüget.

Es

Es ist:

$$d\varphi = \frac{rd(Sin.\,v.\,\varphi}{Sin.\,\varphi} \text{ und } d(Sin.\,v.\,\varphi) = \frac{d\varphi\, Sin.\,\varphi}{r}$$

$$d\varphi = -\frac{rd(Cosin.\,\varphi)}{Sin.\,\varphi} \text{ und } d(Cosin.\,\varphi) = -\frac{Sin.\,\varphi d\varphi}{r}$$

$$d\varphi = \frac{rd(Sin.\,\varphi)}{Cosin.\,\varphi} \text{ und } d(Sin.\,\varphi) = \frac{Cosin.\,\varphi d\varphi}{r}$$

$$d\varphi = \frac{(Cosin.\,\varphi)^2 d\, Tang.\,\varphi}{r^2} \text{ und } d(Tang.\,\varphi) = \frac{r^2 d\varphi}{(Cosin.\,\varphi)^2}$$

$$d\varphi = \frac{d(Tang.\varphi)}{(Sec.\,\varphi)^2} \text{ und } d(Tang.\,\varphi) = d\varphi(Sec.\,\varphi)^2$$

$$d\varphi = -\frac{d(Cotang.\,\varphi)\,(Sin.\,\varphi)^2}{r^2} \text{ und } d(Cot.\,\varphi) = -\frac{r^2 d\varphi}{(Sin.\,\varphi)^2}$$

$$d\varphi = -\frac{d(Cotang.\,\varphi)}{(Cosec.\,\varphi)^2} \text{ und } d(Cotang.\,\varphi) = -d\varphi(Cosec.\,\varphi)^2$$

$$d\varphi = \frac{Cosin.\,\varphi}{Tang.\,\varphi}\, d(Sec.\,\varphi) \text{ und } d(Sec.\,\varphi) = \frac{Tang.\,\varphi d\varphi}{Cosin.\,\varphi}$$

$$d\varphi = \frac{r^2 d(Sec.\,\varphi)}{Tang.\,\varphi\, Sec.\,\varphi} \text{ und } d(Sec.\,\varphi) = \frac{Tang.\,\varphi\, Sec.\,\varphi d\varphi}{r^2}$$

$$d\varphi = \frac{Sin.\,\varphi}{Cotang.\,\varphi}\, d(Cosec.\,\varphi) \text{ und } d(Cosec.\,\varphi) = \frac{Cotang.\,\varphi d\varphi}{Sin.\,\varphi}$$

$$d\varphi = -\frac{r^2 d(Cosec.\,\varphi)}{Cotang.\,\varphi\, Cosec.\,\varphi} \text{ u. } d(Cosec.\varphi) = -\frac{Cot.\varphi Cosec.\varphi d\varphi}{r^2}.$$

§. 48.

In folgenden Beispielen wird der Radius = 1 angenommen. Man findet demnach

$$d(Cosin.\,3\varphi) = -3d\varphi\, Sin.\,3\varphi$$
$$d(Cosin.\,m\varphi) = -md\varphi\, Sin.\,m\varphi$$
$$d(Cosin.\,\tfrac{1}{2}\varphi) = -\tfrac{1}{2}d\varphi\, Sin.\,\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$d(Sin.\,m\varphi) = md\varphi\, Cosin.\,m\varphi$$
$$d(Sin.\,\tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{1}{2}d\varphi\, Cosin.\,\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$d(Sin.\,\tfrac{3}{4}\varphi) = \tfrac{3}{4}d\varphi\, Cosin.\,\tfrac{3}{4}\varphi$$

d(Sin.

$$d(Sin.\varphi\, Cosin.w) = Cosin.w d(Sin.\varphi) + Sin.\varphi d(Cosin.w)$$
$$= Cosin.w.\, Cosin.\varphi d\varphi - Sin.\varphi\, Sin.w dw$$
$$d(Sin.\varphi)^m = m(Sin.\varphi)^{m-1} d(Sin.\varphi) = md\varphi\, Cosin.\varphi (Sin.\varphi)^{m-1}$$
$$d(Tang.m\varphi) = \frac{md\varphi}{(Cosin.m\varphi)^2}$$
$$d(Tang.\varphi\, Tang.w) = Tang.\varphi\, d(Tang.w) + Tang.w\, d(Tang.\varphi)$$
$$= \frac{Tang.\varphi dw}{(Cosin.w)^2} + \frac{Tang.w.\, d\varphi}{(Cosin.\varphi)^2}$$
$$d(Tang.m\varphi)^n = n(Tang.m\varphi)^{n-1} d(Tang.m\varphi)$$
$$= \frac{mn(Tang.m\varphi)^{n-1} d\varphi}{(Cosin.m\varphi)^2}$$

u. s. w.

Von den logarithmischen Differenzialien.

§. 49.

Wenn x, y, zwei veränderliche Grössen sind, welche beide wachsen, so aber, daß sie während ihrem Zunehmen beständig einerley Verhältniß, zum Beispiel das Verhältniß $a:b$ gegen einander haben, und wenn diese Grössen sich zwei andern beständigen Grössen A, B dergestalt nähern, daß, wenn $x = A$, auch $y = B$ wird; so verhält sich

$$a : b = A : B$$

oder die Grössen A, B haben eben das Verhältniß unter einander, welches die Grössen x, y bei ihrem beiderseitigen Wachsen unveränderlich gegen einander behalten.

Weil nemlich $x : y = a : b$; so ist $x = \frac{ay}{b}$. Nun wollen wir annehmen, x sey so herangewachsen, daß $x = A$ geworden; so ist $A = \frac{ay}{b} = \frac{aB}{b}$, weil zu eben der Zeit auch $B = y$ geworden ist. Daraus folgt aber $a : b = A : B$.

§. 50.

§. 50.

Wenn x und y während ihrem beiderseitigen Wachsen einander beständig gleich sind; so ist auch $a = b$ und demnach $A = B$ oder die Grenzen, den sich die gleich grosse veränderliche Grössen x und y nähern, sind, unter dieser Voraussetzung, einander gleich.

§. 51.

Es sey GF eine krumme Linie, deren Abscissen *Fig. 3.* Aa, Ab, AB u. s. w. in einer arithmetischen, und deren Ordinaten AG, ac, bd u. s. w. in einer geometrischen Progression stehen. Man nennt diese krumme Linie die logarithmische Linie, weil ihre Abscissen die Logarithmen der Ordinaten sind.

Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen in dem Punkt A an; so bedeuten die Abscissen auf der Seite AB positive; die Abscissen linker Hand von A aber, negative Logarithmen. Die Ordinate AG sey $= 1$; und der Logarithmus dieser Zahl gleich Null. Die Ordinaten ac, bd u. s. w. bedeuten also ganze Zahlen, so wie die Ordinaten jenseits des Punkts A, eigentliche Brüche. Da sich nemlich die krumme Linie rechter Hand von A immer mehr von der Abscissenlinie entfernt, linker Hand von A aber sich derselben stets mehr nähert; so werden alle Ordinaten linker Hand von A kleiner als AG und folglich Theile desselben werden, und da $AG = 1$, so werden sie Theile der Einheit, das heißt, eigentliche Brüche werden.

§. 52.

Man kann zwo logarithmische Linien annehmen, deren Ordinaten in beiden in einerlei geometrischen Progression fortgehen, deren Abscissen aber zwo von einander verschiedene arithmetische Progressionen ausmachen: woraus erhellet, daß eine jede Zahl so viele Logarithmen haben könne, als man nur immer will. Nun kann man auch bei beiden logarithmischen Linien eine und eben dieselbe arithmetische Progression beibehalten, aber die Progression der Ordinaten in beiden verschieden annehmen. Daher denn zu Einem Logarithmus so viele Zahlen, als man will, gehören.

§. 53.

Fig. 4. Es sey $\alpha\beta$ eine logarithmische Linie. Die Abscisse MC setze man $= x$ und nehme an, daß dieselbe um die beständige Grösse Δx wachse, so daß die Abscissen in dieser Progression

$$x, x + \Delta x, x + 2\Delta x, x + 3\Delta x, x + 4\Delta x$$

u. s. w. fortschreiten.

Durch die Punkte a, c ziehe man die Tangenten Pa, $\underline{Qc}$, welche die logarithmische Linie in a und c berühren und die Abscissenlinie MN in P und $\underline{Q}$ durchschneiden. Man ziehe ferner die Ordinaten Aa, Cc, so kann erwiesen werden, daß die Theile der Abscissenlinie, welche zwischen den Ordinaten und Tangenten eingeschlossen sind, einander gleich seyn werden, das heißt, es wird $PA = \underline{QC}$ seyn. Wir wollen daher beweisen, daß die Subtangente in der logarithmischen Linie in allen Punkten gleich groß, oder daß sie eine unveränderliche Grösse sey.

§. 54.

Man nehme $AB = CD$ und ziehe die Ordinaten Bb, Dd, so ist, vermöge der Natur der logarithmischen Linie $Bb : Aa = Dd : Cc$. Ziehet man daher durch die Punkte c, d und a, b die gerade Linien dc und ba und verlängert dieselbe, bis sie die Grundlinie in q und p durchschneiden; so ist

$$qD : qC = Dd : Cc.$$

Ferner $pB : pA = Bb : Aa$. Daraus folgt $qD : qC = pB : pA$ und $qD - qC : qC = pB - pA : pA$, das heißt: $CD : qC = AB : pA$. Da wir nun $AB = CD = \Delta x$ angenommen haben; so ist auch $qC = pA$.

Man stelle sich nunmehr vor, daß die Punkte D näher an C, und B näher an A rücken, doch so, daß die Linien CD, AB beständig gleich bleiben; so ist auch beständig das Verhältniß $Dd : Bb$ dem Verhältniß $Cc : Aa$ gleich, und hieraus folgt dann wieder, daß $qC = pA$ ist. Die Linien $\underline{QC}$, PA sind aber die Grenzen, den sich die Linien qC, pA beständig nähern. Da nun diese veränderliche Grössen qC, pA bei allen Veränderungen beständig gleich bleiben; so sind auch die Grenzen derselben, nemlich die Subtangenten $\underline{QC}$, PA einander gleich, oder die

Sub-

Subtangente in der logarithmischen Linie ist eine beständige Grösse.

§. 55.

Ist also $\alpha\beta$ eine logarithmische Linie, deren Subtangente $= a$; so hat man

$$y\frac{dx}{dy} = a \text{ und } \frac{dx}{dy} = \frac{a}{y},$$

welches man gewöhnlich so ausdrukt

$$dx = \frac{ady}{y}$$

und daher die Regel giebt: Man findet das Differenziale der Abscisse in der logarithmischen Linie, wenn man das Differenziale der Ordinate mit dieser Ordinate selbst dividiret und den Quozienten mit der Subtangente derjenigen logarithmischen Linie multiplizirt, davon x und y die Ordinaten sind. Da nun die Abscisse der Logarithme der Ordinate ist; so erhellet hieraus, wie man das Differenziale eines Logarithmen finde.

Ist $a = 1$, so erhalten wir $dx = \frac{dy}{y}$ und diese Voraussetzung wird in den folgenden §phen beibehalten.

§. 56.

Wenn $x = log. y$; so findet man $dx = \frac{dy}{y}$. So ist auch

$$d\,log.\,x = \frac{dx}{x};\ d\,log.\,(a+x) = \frac{dx}{a+x}$$

$$d\,log.\left(\frac{a}{a+x}\right) = d\left[log.\,a - log.\,(a+x)\right] =$$

$$-\frac{d(a+x)}{a+x} = -\frac{dx}{a+x}.$$

Ferner $d\,log.\,\frac{1}{x} = d(log.\,1 - log.\,x) = -\frac{dx}{x}.$

$$d\,log.\,x^2 = d(2\,log.\,x) = \frac{2dx}{x}.$$

$$d\,log.\,xy = d(log.\,x + log.\,y) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

$$d\,log.\,\frac{x}{y} = d(log.\,x - log.\,y) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}.$$

$$d\,log.\left(\frac{a+x}{a-x}\right) = \frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x}.$$

$$d\,log.\,(aa + xx) = \frac{d(aa+xx)}{aa+xx} = \frac{2xdx}{aa+xx}.$$

$$d\,log.\,\sqrt{(aa+xx)} = \frac{d\sqrt{(aa+xx)}}{\sqrt{(aa+xx)}} = \frac{xdx}{aa+xx}.$$

Oder auf eine leichtere Art:

$$d\,log.\,\sqrt{(aa+xx)} = d\left[\tfrac{1}{2}\,log.\,(aa+xx)\right] = \frac{xdx}{aa+xx}.$$

Endlich

$$d\,log.\,(x^m(a+bx^n)^p) = d\left[m\,log.\,x + p\,log.\,(a+bx^n)\right]$$
$$= \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n} \quad \text{u. s. w.}$$

§. 57.

Es ist nun leicht, solche Grössen zu differenziiren, in welchen die Sinusse, Cosinusse, Tangenten u. s. w. Logarithmen gewisser Grössen sind. Wenn, zum Beispiel, $y = log.\,Sin.\,\varphi$; so wird $dy = \frac{d\,Sin.\,\varphi}{Sin.\,\varphi}$. Aber $dSin.\,\varphi = \frac{Cosin.\,\varphi d\varphi}{r}$, also $dy = \frac{Cosin.\,\varphi d\varphi}{r\,Sin.\,\varphi} = \frac{Cotang.\,\varphi d\varphi}{r^2}$. Mithin $d\,log.\,Sin.\,\varphi = \frac{Cotang.\,\varphi d\varphi}{r^2}$.

Wenn $y = log.\,Cosin.\,\varphi$; so wird $dy = \frac{d\,Cosin.\,\varphi}{Cosin.\,\varphi}$ $= \frac{-Sin.\,\varphi d\varphi}{r\,Cosin.\,\varphi} = \frac{-Tang.\,\varphi d\varphi}{r^2} = d\,log.\,Cosin.\,\varphi.$

Wenn

Wenn $y = log.Tang.\varphi$; so wird

$$dy = \frac{dTang.\varphi}{Tang.\varphi} = \frac{d\varphi(Sec.\varphi)^2}{Tang.\varphi} = \frac{d\varphi}{Tang.\varphi(Cosin.\varphi)^2}$$

$$= \frac{d\varphi}{Sin.\varphi\, Cosin.\varphi} = d(log.Tang.\varphi)$$

u. s. w.

Bestimmung der Subtangenten, Subnormallinien.

§. 58.

Aus dem 38. Sphen erhellet, daß der allgemeine Ausdruk für die Subtangente in krummen Linien, deren Coordinaten senkrecht sind, $\frac{ydx}{dy}$ sey. Sucht man also aus der gegebenen Gleichung der krummen Linie den Werth von $\frac{dx}{dy}$, und sezt denselben in $\frac{ydx}{dy}$; so findet man die Subtangente.

Bei der Parabel, wo $y^2 = ax$, findet man $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$ und $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x =$ der Subtangente.

Wenn $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$; so wird $\frac{dx}{dy} = \frac{-aay}{bbx}$ und $\frac{ydx}{dy} = \frac{-aay^2}{bbx} = \frac{-aa}{x} + x = x - \frac{aa}{x}$.

§. 59.

Auf die Sekante MT ziehe man die Senkrechte MR, und auf die Tangente MS die Senkrechte MK; so ist MK die Normallinie und PK die Subnormallinie. Es verhält sich $mq : Mq = MP : PT$. Da aber das Dreyek MPT dem Dreyek PMR ähnlich ist, so erhält man *Fig. 1.*

$$MP : PT = PR : MP$$

und demnach auch

$$mq : Mq = PR : MP$$

oder $$\Delta y : \Delta x = PR : y,$$

woraus folgt $PR = y \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Je näher aber der Punkt m dem Punkt M kommt; desto mehr nähert sich auch der Punkt R dem Punkt K, und wenn m in M fällt, das heißt, wenn $\Delta x = o = dx$, und mithin auch $\Delta y = o = dy$; so verwandelt sich PR in die Subnormallinie $PK = y \frac{dy}{dx}$, welches ein allgemeiner Ausdruk für die Subnormallinie in krummen Linien ist, deren Coordinaten senkrecht auf einander stehen. In der Parabel ist $y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}a$, und in der Ellipsis $\frac{dy}{dx} = -\frac{bbx}{aay}$ und $y \frac{dy}{dx} = -\frac{bbx}{aa}$.

Daraus kann man nunmehro leicht die Normallinie MK finden. In der Parabel ist, zum Beispiel, $MK = \sqrt{(ax + \frac{1}{4}a^2)}$ u. s. w.

Von dem grösten oder kleinsten Werth einer Function.

§. 60.

Eine der wichtigsten und schönsten Anwendungen der Differenzialrechnung ist die Methode, den grösten oder kleinsten Werth einer Function zu finden. Ihr Nutzen verbreitet sich über alle Theile der Mathematik und durch sie sind sehr interessante Erfindungen gemacht worden. Ehe wir aber diese Lehre selbst vortragen, ist es nöthig, einige Sätze voran zu schicken, ohne welche sie nicht gründlich abgehandelt werden kann.

§. 61.

Es sey die Function $y = x^m(a+x)^n$ gegeben. Wenn man die erste, zweite, dritte u. s. w. Differenzialien dieser Function in der Voraussetzung sucht, daß Δx eine beständige Grösse sey; so findet man

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(a+x)^n + nx^m(a+x)^{n-1}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}(a+x)^n + n(n-1)x^m(a+x)^{n-2}$$
$$+ 2mnx^{m-1}(a+x)^{n-1}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}(a+x)^n$$
$$+ n(n-1)(n-2)x^m(a+x)^{n-3}$$
$$+ 3mn(m-1)x^{m-3}(a+x)^{n-1}$$
$$+ 3mn(n-1)x^{m-1}(a+x)^{n-2}.$$

Man findet

$$(y+\Delta y) = (x+\Delta x)^m(a+x+\Delta x)^n$$
$$= \left.\begin{array}{r} x^m(a+x)^n + nx^m(a+x)^{n-1} \\ + mx^{m-1}(a+x)^n \end{array}\right\} . \Delta x$$
$$\left.\begin{array}{l} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}(a+x)^{n-2}x^m \\ + \dfrac{2mn(a+x)^{n-1}}{1.2}x^{m-1} \\ + \dfrac{m(m-1)(a+x)^n}{1.2}x^{m-2} \end{array}\right\} . \Delta x^2$$
$$\left.\begin{array}{l} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3}}{1.2.3}x^m \\ + \dfrac{3mn(n-1)(a+x)^{n-2}}{1.2.3}x^{m-1} \\ + \dfrac{3mn(m-1)(a+x)^{n-1}}{1.2.3}x^{m-2} \\ + \dfrac{m(m-1)(m-2)(a+x)^n}{1.2.3}x^{m-3} \end{array}\right\} . \Delta x^3 + etc.$$

woraus folgt:

$$y + \Delta y = y + \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + etc.$$

Das Gesetz, welches in dieser Reihe statt findet, fällt sogleich in die Augen. Die folgenden Glieder werden seyn:

$$\frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{d^5y}{dx^5}, \frac{\Delta x^6}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{d^6y}{dx^6}, etc.$$

Daher ist überhaupt

$$\Delta y = \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots \frac{\Delta x^r}{1.2.3\ldots r} \frac{d^ry}{dx^r}.$$

In eine ähnliche Reihe läßt sich überhaupt die Function $y = x^{\pm m}(a \pm x)^{\pm n}$ auflösen.

§. 62.

Wenn $y = ax^m + bx^r$; so ist $\frac{dy}{dx} = max^{m-1} + brx^{r-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)ax^{m-2} + br(r-1)x^{r-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)ax^{m-3} + br(r-1)(r-2)x^{r-3} \text{ u. s. w.}$$

Da nun

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= a(x + \Delta x)^m + b(x + \Delta x)^r \\ &= \left.\begin{matrix} ax^m + amx^{m-1} \\ bx^r + brx^{r-1} \end{matrix}\right\} . \Delta x \\ &\quad + \left.\begin{matrix} \frac{am(m-1)}{1.2} x^{m-2} \\ \frac{br(r-1)}{1.2} x^{r-2} \end{matrix}\right\} . \Delta x^2 \\ &\quad + \left.\begin{matrix} \frac{am(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} \\ \frac{br(r-1)(r-2)}{1.2.3} x^{r-3} \end{matrix}\right\} . \Delta x^3 + etc. \end{aligned}$$

so folgt: $y + \Delta y = y + \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$

$$+ \ldots\ldots \frac{\Delta x^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Wenn

Wenn, zum Beispiel, $y = ax - bx^3$; so findet man

$$y + \Delta y = y + \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Ist $y = ax^{-1} + cx^2$; so wird ebenfalls

$$y + \Delta y = y + \Delta x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$$

und so in andern Fällen auch.

§. 63.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen schreiten wir nunmehr zu der Abhandlung selbst.

Wenn eine Function von x bis auf einen gewissen Grad von x zu- und von da wieder abnimmt; so hat die Function einen größten Werth. Derselbe muß also so beschaffen seyn, daß, wenn man in die Function statt x setzet $x + \Delta x$ oder $x - \Delta x$, beidemal ein kleinerer Werth herauskomme, Δx mag so klein seyn, als es nur angenommen werden kann. In diesem Fall sagt man, es finde ein Maximum statt. Nimmt aber die Function bis auf einen gewissen Grad von x ab, und wächst sie von da an wieder; so sagt man, sie habe einen kleinsten Werth, es finde ein Minimum statt. Werden in diesem Falle die obigen Substitutionen vorgenommen; so müssen beidemal grössere Werthe herauskommen.

Die Ordinaten im Kreis und in der Ellipse wachsen, bis jene dem Halbmesser, diese der halben kleinen Axe gleich sind. Jenseits dieser Punkte nehmen die Ordinaten in beiden Linien wieder ab. Daher sind dieß Beispiele für den ersten Fall, für das Maximum, und die Gleichungen $x^2 - 2x + 3 = y$ und $x^2 - 10x + 60 = y$ Beispiele für das Minimum. Sezt man nemlich in die erste Gleichung $x = 1$; so findet man $y = 2$. Sezt man aber zuerst statt x eine grössere, dann auch eine kleinere Zahl; so findet man beidemal für y einen größern Werth. Gleiche Bewandtniß hat es mit der zweiten Gleichung. Sezt man $x = 5$; so wird $y = 35$. Jeder andere Werth von x giebt aber einen größern Werth für y.

§. 64.

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, wie man den größten oder kleinsten Werth einer Function finden und woran man erkennen könne, ob der gefundene Werth der größte oder kleinste der vorgegebnen Function sey, dabei aber unsere Untersuchungen nur auf solche Functionen einschränken, in welchen Ein Werth von x zu Einem Werth von y gehöret.

§. 65.

Wenn nun y eine solche einförmige Function von x ist; so findet man folgendergestalt, wenn diese Function einen größten oder kleinsten Werth hat. Wenn $x + \Delta x$ statt x gesetzet wird; so verwandelt sich die Function y in

$$y + \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} . \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} . \frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+ \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} . \frac{d^5y}{dx^5} + etc.$$

Und wenn $x - \Delta x$ statt x gesetzet wird, in

$$y - \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} . \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{1.2.3} . \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4} . \frac{d^4y}{dx^4}$$
$$- \frac{\Delta x^5}{1.2.3.4.5} . \frac{d^5y}{dx^5} + etc.$$

§. 66.

In dem Fall, da y ein Größtes ist, muß also seyn

$$y > y + \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} . \frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+ \frac{\Delta x^5}{120} . \frac{d^5y}{dx^5} + etc.$$

und

$$y > y - \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} . \frac{d^4y}{dx^4}$$
$$- \frac{\Delta x^5}{120} . \frac{d^5y}{dx^5} + etc.$$

§. 67.

§. 67.

Wenn aber y ein Kleinstes ist; so muß seyn

$$y < y + \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} . \frac{d^4y}{dx^4}$$
$$+ \frac{\Delta x^5}{120} . \frac{d^5y}{dx^5} + etc.$$

und

$$y < y - \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} . \frac{d^4y}{dx^4}$$
$$- \frac{\Delta x^5}{120} . \frac{d^5y}{dx^5} + etc.$$

§. 68.

Die Grösse Δx kann man so klein annehmen, daß die Summe der Glieder

$$\frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + etc.$$

welche auf das zweite Glied folgen, kleiner ist, als dieses zweite Glied. Wenn also $\frac{dy}{dx}$ das Zeichen einer positiven Grösse ist; so ist die Reihe

$$y + \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + etc.$$

ohnstreitig grösser als y. Die andere Reihe

$$y - \Delta x . \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} + etc.$$

aber kleiner als y.

Ist $\frac{dy}{dx}$ das Zeichen einer negativen Grösse, so erhält man die beiden Reihen

$$y - \Delta x . \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} - etc.$$

und

$$y + \Delta x . \frac{dy}{dx} - \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} - etc.$$

von welchen die erste Reihe kleiner und die zweite grösser als y ist, weil Δx so klein angenommen werden kann, daß die Summe der Glieder, so auf das zweite folgen, kleiner als dieses zweite Glied ist.

Daraus erhellet, daß y weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn könne, so lange $\frac{dy}{dx}$ eine würkliche Grösse anzeigt.

§. 69.

Wenn aber die Grösse, deren Zeichen $\frac{dy}{dx}$ ist, gleich Null, welches man dadurch anzeigt, daß man $\frac{dy}{dx}$ gleich Null setzet, und $\frac{d^2y}{dx^2}$ das Zeichen einer positiven oder negativen Grösse ist; so erhält man die beide Reihen.

$$y \pm \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} \pm \frac{\Delta x^4}{24} . \frac{d^4y}{dx^4} \pm \frac{\Delta x^5}{120} . \frac{d^5y}{dx^5} etc.$$

und

$$y \pm \frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2} \mp \frac{\Delta x^3}{6} . \frac{d^3y}{dx^3} \pm \frac{\Delta x^4}{24} . \frac{d^4y}{dx^4} \mp \frac{\Delta x^5}{120} . \frac{d^5y}{dx^5} etc.$$

Ist nun Δx wiederum so klein angenommen worden, daß die Summe der Glieder, welche auf das Glied $\frac{\Delta x^2}{2} . \frac{d^2y}{dx^2}$ folgen, kleiner ist, als eben dieses Glied; so sind beide Reihen grösser als y, wofern $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine positive Grösse anzeigt, und in diesem Fall hat die Function y einen kleinsten Werth.

Ist aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ das Zeichen einer negativen Grösse, so sind beide Reihen kleiner als y; folglich ist y ein größtes.

§. 70.

§. 70.

Ist aber auch die Grösse, deren Zeichen $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist, gleich Null, welches angezeigt wird, wenn man $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null setzet, wodurch man erhält

$$y \pm \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \pm \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} \pm \frac{\Delta x^5}{120} \cdot \frac{d^5y}{dx^5} \pm etc.$$

und

$$y \mp \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} \pm \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} \mp \frac{\Delta x^5}{120} \cdot \frac{d^5y}{dx^5} \pm etc.$$

so ist die erste Reihe grösser und die zweite kleiner als y, wofern $\frac{d^3y}{dx^3}$ eine positive Grösse anzeigt.

Zeigt aber $\frac{d^3y}{dx^3}$ eine negative Grösse an; so ist die erste Reihe kleiner und die zweite grösser als y, weil Δx so klein angenommen werden kann, daß die Summe der Glieder, welche auf das Glied $\frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3}$ folgen, kleiner ist, als eben dieses Glied. In beiden Fällen hat also die Function weder einen größten, noch kleinsten Werth.

Wenn $\frac{d^3y}{dx^3} = o$, aber $\frac{d^4y}{dx^4}$ eine würkliche Grösse anzeigt; so sind beide Reihen grösser als y, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ eine positive Grösse und beide Reihen kleiner als y, wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ eine negative Grösse anzeigt, weil Δx so klein angenommen werden kann, daß die Summe der Glieder, welche auf das Glied $\frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4}$ folgen, kleiner ist, als eben dieses Glied.

Wenn

Wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ das Zeichen einer positiven Grösse ist, hat die Function einen kleinsten, und wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ das Zeichen einer negativen Grösse ist; so hat sie einen größten Werth.

§. 71.

Aus diesen Betrachtungen, welche man ohne Schwierigkeit auf noch mehr Glieder ausdehnen kann, folgen diese Schlüsse: Wenn eine Function einen größten oder kleinsten Werth haben soll; so muß die Grösse, deren Zeichen $\frac{dy}{dx}$ ist, gleich Null seyn.

Zeigt $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine positive Grösse an; so ist y ein Kleinstes. Ist aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ das Zeichen einer negativen Grösse; so ist y ein Größtes.

Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} = o$, hingegen $\frac{d^3y}{dx^3}$ eine würkliche Grösse anzeigt; so findet weder ein Größtes noch Kleinstes statt, wenn gleich $\frac{dy}{dx} = o$. Daraus erhellet mithin, daß nicht allemal ein Größtes oder Kleinstes statt finde, wenn $\frac{dy}{dx} = o$, sondern daß $\frac{dy}{dx} = o$ seyn müsse, wenn ein Größtes oder Kleinstes statt finden soll.

Ist $\frac{d^3y}{dx^3} = o$, aber $\frac{d^4y}{dx^4}$ eine positive Grösse; so ist y ein Kleinstes, und wenn $\frac{d^4y}{dx^4}$ eine negative Grösse ist; so ist y ein Größtes.

Das

Das Kennzeichen des Größten ist, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, oder überhaupt $\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}$, wo $2m$ jede gerade Zahl bedeutet, eine negative und das Kennzeichen des Kleinsten ist, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ oder überhaupt $\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}}$ eine positive Grösse ist.

§. 72.

Das Verfahren, wodurch man den größten oder kleinsten Werth einer Function findet, bestehet also darin, daß man die gegebene Function differenziire, und die Grösse, deren Zeichen $\frac{dy}{dx}$ ist, gleich Null setze, aus dieser Gleichung aber den Werth von x suche.

Gewöhnlich bedient man sich des Ausdruks: Um den größten oder kleinsten Werth einer Function zu finden, setze man das Differenzial derselben $= o$. Dieß führet auf die irrige Vorstellung, als wenn das Differenziale einer Grösse nicht an und für sich selbst Null wäre, sondern erst bei Aufsuchung des größten oder kleinsten Werths einer Function, der Null gleich gesezt werden müsse. Deswegen sage ich ausdrüklich, daß man in diesem Falle $\frac{dy}{dx} = o$ setzen müsse, aber nicht $dx = o$ oder $dy = o$.

§. 73.

Um diese Methode in ein helleres Licht zu setzen, werden einige Beispiele, welche aus der niedern Geometrie hergenommen sind, beigefüget.

Zuerst sey die Frage vorgegeben: Eine gegebene Zahl a in zwey Theile zu zerlegen, davon das Produkt dieser Theile ein Größtes werde. Es sey x der eine Theil; so ist der andere $a - x$ und ihr Produkt $= ax - xx = y$. Folglich $\frac{dy}{dx} = a - 2x$ und $\frac{ddy}{dx^2} = -2$. Also hat diese Function einen

größten

größten Werth und derselbe findet statt, wenn $x = \frac{a}{2}$. Daher $ax - xx = \frac{a^2}{4}$. Das größte Produkt unter den Theilen $a - x$ und x, der Größe a, ist also das Quadrat ihrer Hälfte.

§. 74.

Diese Frage kann allgemeiner so vorgetragen werden: Man soll eine gegebene Größe a in solche zwei Theile zerlegen, daß das Produkt von einer bestimmten Dignität des einen Theils in die nemliche oder in eine andere Dignität des zweiten Theils ein Größtes werde. Es sey x der eine Theil und m der Exponent der Dignität, zu welcher er erhoben ist. Der zweyte Theil ist also $a - x$ und n sey der Exponent seiner Dignität; so ist das Produkt dieser Theile

$$x^m (a - x)^n = y$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -nx^m (a - x)^{n-1} + mx^{m-1} (a - x)^n = 0$$

und $mx^{m-1}(n - x)^n = nx^m (a - x)^{n-1}$

oder $m(a - x) = nx$

endlich $\frac{ma}{m + n} = x$.

§. 75.

Fig. 5. Wenn bei Bestimmung eines größten oder kleinsten, durch den Werth, der für die veränderliche Grösse gefunden wird, daß Größte oder Kleinste selbst eine verneinte Grösse wird; so folgt daraus, daß dasselbe nicht für den gegenwärtigen Fall, sondern für den gerad entgegen gesezten gehöre, wo die entgegengesezten Bedingungen statt finden.

Wenn man, zum Beispiel, die Linie AB dergestalt in dem Punkt C theilen sollte, daß das Quadrat von AC, dividirt mit BC, den kleinstmöglichen Quozienten gebe; so sei die gegebene Linie $AB = a$, $AC = x$; so ist $BC = a - x$, und der Quozient $= \frac{x^2}{a - x} = y$, woraus folgt $(2a - x)x = 0$. Dieß giebt,

entwe-

entweder $x = 0$, oder $x = 2a$. Wenn man den zweiten Werth in $\frac{x^2}{a - x}$ setzet, so verwandelt sich dieser Quozient in $-4a$. Das Minimum gehöret also nicht für den gegenwärtigen Fall. Wenn man den Ausdruk $x = 2a$ näher betrachtet, so findet man, daß der Punkt C nicht zwischen A und B liegen, sondern, daß man die Aufgabe nur alsdenn auflösen könne, wenn der Punkt C auf der Verlängerung von AB, jenseits B liegen solle. Wenn nemlich $AC' = x$; so ist BC' nicht mehr $= a - x$, sondern $= x - a$, und der Quozient $= \frac{x^2}{x - a}$. Daraus folgt aber $x^2 - 2ax = 0$, oder $x = 2a$; und dieß in die Formel gesezt, giebt $4a$, welches der kleinste Quozient ist, den man erhalten kann, wenn man $4a^2$ mit a dividiret.

§. 76.

Man soll, unter allen Linien, die man durch einen gegebenen Punkt in dem Winkel ABC ziehen kann, die Lage derjenigen bestimmen, welche mit den Seiten dieses Winkels das kleinstmögliche Dreieck einschließet.

Man ziehe durch den Punkt D die Linie DG mit AB parallel, und durch eben diesen Punkt nach Willkühr die Linie EF. Auf BC ziehe man die Senkrechte DK und aus eben dem Punkt E, wo EF und AB sich schneiden, die Senkrechte EL. Die Linien BG, DK werden als bekannt angenommen. Es sey $BG = a$, $DK = b$ und $BF = x$. *Fig. 6.*

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BEF, GDF folgt

$$GF : DF = BF : EF$$

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke DFK, ELF erhält man

$$DF : EF = DK : EL$$

oder

$$GF : BF = DK : EL$$

das heißt $x - a : x = b : EL = \frac{bx}{x - a}$

Der Innhalt des Dreyecks $BEF =$

$$\frac{bx}{x - a} \cdot \frac{x}{2} = \frac{\frac{1}{2}bxx}{x - a}.$$

wor-

woraus man durch die Methode des Kleinsten erhält

$$x = 2a$$

Nimmt man also $BF = 2a = 2BG$; so schließet die Linie FDE, die man durch die Punkte D und F ziehet, mit den andern Seiten das kleinstmögliche Dreyeck FBE ein.

§. 77.

Fig. 7. Von allen Dreyecken, welche einerlei Umfang und einerlei Grundlinie haben, dasjenige zu finden, welches den größten Innhalt hat.

Es sey $AB = a$ und der Umfang des Dreyecks ABC, $= c$. Man ziehe die Senkrechte CP und setze $AP = x$, $CP = y$; so ist $PB = a - x$; $AC = \sqrt{(xx + yy)}$; und $CB = \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)}$. Demnach erhält man

$$\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)} + a = c$$

oder

$$\sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)} = c - a$$

und aus dieser Gleichung folgt

$$y^2 = \frac{c^4 - 4ac^3 + 4a^2c^2 + 4ac^2x - 4c^2x^2 - 8a^2cx + 8acx^2}{4a^2 + 4c^2 - 8ac}$$

Der Innhalt des Dreyecks ist $\frac{ay}{2}$ und wenn $\frac{ay}{2}$ ein Größtes ist, so ist auch $\frac{a^2y^2}{4}$ ein Größtes. Es ist aber

$$\frac{a^2y^2}{4} = \frac{a^2c^4 - 4a^3c^3 + 4a^4c^2 + 4a^3c^2x - 4a^2c^2x^2 - 8a^4cx + 8a^3cx^2}{16a + 16c^2 - 32ac}$$

woraus man findet

$$4a^3c^2 - 8a^2c^2x - 8a^4c + 16a^3cx = 0$$

Diese Gleichung ist Null, wenn

$$4a^3c^2 - 8a^2c^2x = 0$$

und

$$16a^3cx - 8a^4c = 0$$

woraus folgt $x = \frac{1}{2}a$.

Daher ist das gesuchte Dreieck gleichschenklicht. Auf die Mitte der Linie AB ziehe man eine Senkrechte und beschreibe aus dem Punkt B und mit einem Halbmesser $= \frac{c - a}{2}$ einen Bogen, welcher

cher jene Senkrechte in dem Punkt C schneidet. Wenn man nun die Linien CB und CA ziehet; so erhält man das Dreyeck, welches unter allen Dreyecken von einerlei Umfang und Grundlinie den größten Inhalt hat.

§. 78.

Und überhaupt, wenn man unter allen Dreyecken von einerlei Umfang dasjenige finden soll, welches den größten Inhalt hat; so bemerke man, daß allezeit $AP = x = \frac{1}{2}a$ seyn müsse. Deßwegen erhält man

$$2\sqrt{\left(\frac{aa}{4} + yy\right)} = c - a$$

und $$y = \sqrt{\left(\frac{c^2 - 2ac}{4}\right)}.$$

Und weil dasselbe unter allen Dreiecken von einerlei Umfang den größten Inhalt hat; so muß man $\frac{a}{2}\sqrt{\left(c^2 - \frac{2ac}{4}\right)} = \frac{ay}{2}$ so differenziiren, daß man nur a als eine veränderliche Grösse betrachtet. Da erhält man

$\sqrt{\frac{c^2 - 2ac}{4}}$

$$\sqrt{(c^2 - 2ac)} - \frac{ac}{\sqrt{(c^2 - 2ac)}} = 0,$$

oder $$c^2 - 3ac = 0,$$

endlich $$a = \frac{c}{3}.$$

Vorhin haben wir gefunden $x = \frac{1}{2}a$ und da $a = \frac{c}{3}$; so folgt daraus, daß das Dreyeck gleichseitig seyn müsse. Von allen Dreyecken, welche einerlei Umfang haben, ist also das gleichseitige dasjenige, welches den größten Inhalt hat.

§. 79.

Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte b^3 und einer gegebenen Seite a dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Es sey x die eine gesuchte Seite; so ist ax dem Inhalt einer Seitenfläche gleich, welche man als die Grundfläche be-

trachten kann. Dividirt man b^3 durch ax, so hat man $\frac{b^3}{ax}$ für die Höhe des gesuchten Parallelepipedums. Man multiplizire diese Höhe nach und nach mit a und mit x; so erhält man zwo Produkte, deren Summe der Hälfte der Seitenfläche gleich ist. Daher ist

$$ax + \frac{b^3}{x} + \frac{b^3}{a}$$

die Hälfte der Oberfläche. Und man findet

$$a = \frac{b^3}{xx}, \quad x = \sqrt{\frac{b^3}{a}}$$

und

$$\frac{b^3}{ax} = \sqrt{\frac{b^6}{a^2x^2}} = \sqrt{\frac{b^3}{a}}.$$

Die eine Seite ist demnach $= a$ und eine jede der beiden andern $= \sqrt{\frac{b^3}{a}}$.

§. 80.

Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte b^3 dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.

Wenn eine Seite $= x$; so ist eine jede der beiden andern $= \sqrt{\frac{b^3}{x}}$, wie aus dem vorhergehenden erhellet. Daraus findet man die halbe Oberfläche des Parallelepipedums $=$

$$2x\sqrt{\frac{b^3}{x}} + \sqrt{\frac{b^3}{x}} \cdot \sqrt{\frac{b^3}{x}} = 2\sqrt{b^3x} + \frac{b^3}{x} = y$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^3}{\sqrt{b^3x}} - \frac{b^3}{x^2} = 0$$

$$x^2 = \sqrt{b^3x}$$

$$x^4 = b^3x$$

$$x = b$$

und $\sqrt{\frac{b^3}{x}} = b$, woraus folgt, daß der Würfel die kleinste Oberfläche habe.

§. 81.

§. 81.

Wenn der körperliche Inhalt eines mit Wasser angefüllten cylindrischen Gefäßes gegeben ist, und man nach den Ausmessungen desselben fragt, damit es eine gegebene Menge Wassers enthalten könne, wenn die innere Oberfläche des Cylinders die kleinstmögliche seyn soll; so sey a^3 die gegebene Menge Wassers oder der Inhalt des Gefäßes, x der innere Durchmesser, z die innere Höhe und das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : c$.

Die Grundfläche des Gefäßes ist also $= \frac{cx^2}{4}$; der körperliche Inhalt desselben $= a^3 = \frac{cx^2z}{4}$ und die innere Oberfläche $= cxz$. Es ist $z = \frac{4a^3}{cx^2}$ und $cxz = \frac{4a^3}{x}$. Daher ist die gesuchte Oberfläche $= \frac{4a^3}{x} + \frac{cx^2}{4}$, welche ein Kleinstes seyn soll. Man erhält demnach

$$-\frac{4a^3}{x^2} + \frac{cx}{2} = 0$$

oder

$$-4a^3 + \frac{cx^3}{2} = 0$$

$$x^3 = \frac{8a^3}{c}$$

$$x = \frac{2a}{\sqrt[3]{c}}$$

und

$$z = \frac{4a^3}{cx^2} = \frac{a}{\sqrt[3]{c}} = \frac{x}{2}.$$

Die innere Höhe des Gefäßes muß demnach dem Halbmesser der innern Grundfläche gleich seyn. Alsdenn ist die kleinste innere Oberfläche $= \frac{4a^3}{x} + \frac{cx^2}{4} = 2a^2\sqrt[3]{c} + aa\sqrt[3]{c} = 3a^2\sqrt[3]{c}$.

§. 82.

Unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche und Höhe dasjenige zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Es sey h die Höhe und cc die Oberfläche des Parallelepipedums, x und y aber die Seiten des Rechtecks, welches des Parallelepipedums Grundfläche ist. Die ganze Oberfläche bestehet aus sechs Rechtecken, davon zwey h zur Höhe und x zur Grundlinie, zwey andere ebenfalls h zur Höhe und y zur Grundlinie, und endlich die zwey leztern x zur Grundlinie und y zur Höhe haben. Die ganze Oberfläche ist also

$$2hx + 2hy + 2xy = cc$$

$$y = \frac{cc - 2hx}{2(h + x)}.$$

Der körperliche Innhalt des Parallelepipedums aber $= v = hxy$ $= \frac{hccx - 2h^2x^2}{2(h + x)}$, woraus folgt:

$$\frac{2(h + x)(hcc - 4h^2x) - 2(hccx - 2h^2x^2)}{4(h + x)^2} = \frac{dv}{dx} = 0$$

oder $(h + x)(hcc - 4h^2x) = hccx - 2h^2x^2$

$$h^2cc - 4h^3x = 2h^2x^2$$

Endlich

$$x = -h \pm \sqrt{\left(h^2 + \frac{cc}{2}\right)}$$

davon nur das obere Zeichen hier gilt.

Es ist $x^2 + 2hx = \frac{cc}{2}$. Daher ist auch

$$x^2 + 2hx = hx + hy + xy$$

und $y = \frac{x(h + x)}{(h + x)} = x$

Mithin erhalten wir

$$v = hxy = hx^2.$$

§. 83.

Wenn man nun nach der Höhe fragt, welche das Parallelepipedum haben muß, damit es den größten Inhalt unter allen

allen den erhalte, welche mit ihm einerlei Oberfläche haben; so weiß man schon, daß der körperliche Inhalt desselben sey

$$hx^2 = v.$$

Nun ist aber

$$x^2 = h^2 - 2h\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)} + h^2 + \frac{cc}{2},$$

$$hx^2 = 2h^3 - 2h^2\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)} + \frac{hcc}{2},$$

$$\frac{dv}{dh} = 6h^2 - 4h\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)} - \frac{2h^3}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)}} + \frac{cc}{2} = 0,$$

daher

$$6h^2 + \frac{c^2}{2} = 4h\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)} + \frac{2h^3}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)}}.$$

Diese Gleichung aufgelöset, findet man

$$36h^4 + 6h^2c^2 + \frac{c^4}{4} = 16h^4 + 8h^2c^2 + 16h^4 + \frac{4h^6}{h^2 + \frac{c^2}{2}}$$

oder

$$4h^4 - 2h^2c^2 + \frac{c^4}{4} = \frac{4h^6}{h^2 + \frac{c^2}{2}} \text{ und}$$

$$4h^6 - 2h^4c^2 + \frac{h^2c^4}{4} + 2h^4c^2 - h^2c^4 + \frac{c^6}{8} = 4h^6$$

das heißt $h^2\left(\frac{c^4}{4} - c^4\right) = -\frac{c^6}{8}$ oder

$$h^2 = \frac{c^2}{6}. \quad \text{Also ist } h = \sqrt{\left(\frac{c^2}{6}\right)}.$$

Weil $3h^2 = \frac{c^2}{2}$; so ist $x^2 + 2hx = 3h^2$, woraus folgt $h = x = y$. Daher ist $v = hxy = x^3$.

Unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat also der Würfel, dessen Seite die Quadratwurzel aus dem sechsten Theil dieser Oberfläche ist, den größten Inhalt.

§. 84.

Eben so verfährt man, wenn man folgende Aufgabe auflösen soll. Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche denjenigen zu finden, welcher den größten Inhalt hat.

Wenn x der Durchmesser der Grundfläche und y die Höhe des Cylinders ist; so ist, wofern $1 : c$ das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie, die ganze Oberfläche

$$= cxy + \frac{cx^2}{2} = bb.$$

Der Inhalt des Cylinders $= v = \frac{cx^2y}{2}$. Folglich, da

$$cxy = bb - \frac{cx^2}{2},$$

so ist $$y = \frac{bb}{cx} - \frac{x}{2}$$

und $$\frac{cx^2y}{2} = \frac{bbx}{2} - \frac{cx^3}{4} = v$$

Mithin $$\frac{bb}{2} - \frac{3cx^2}{4} = \frac{dv}{dx} = 0$$

$$x^2 = \frac{2bb}{3c}.$$

Man findet leicht $y^2 = \frac{2bb}{3c}$; daher ist $x = y$.

Unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche hat also derjenige den größten Inhalt, dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist; und umgekehrt hat derjenige Cylinder unter allen Cylindern von gleichem Inhalt die kleinste Oberfläche, dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist.

In Mörsern mit cylindrischen Kammern, deren Länge ihrem Durchmesser gleich ist, würkt also das Pulver am wenigsten auf die Seitenwände der Kammer.

§. 85.

§. 85.

Die Aufgabe, unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche dasjenige zu finden, welches den größten Inhalt hat, habe ich alsdenn erst aufgelöset, nachdem ich dasjenige gefunden hatte, welches mit andern einerlei Oberfläche und Höhe hat. In der That ist es auch leichter, wenn man bei der Auflösung einer Aufgabe von dieser Art im Anfange nur die kleinste Anzahl der veränderlichen Größen, nach und nach aber auch eine jede andere Größe, welche man vorhin als beständig betrachtete, veränderlich annimmt. Wenn man, zum Beispiel, eine gegebene Zahl in solche drey Theile zerlegen wollte, daß das Produkt dieser Theile ein Größtes wird; so verfahre man folgendergestalt.

Wenn a die gegebene Zahl und x, y die Theile sind, in welche sie zerlegt werden soll; so ist $a - x - y$ der dritte Theil, und das Produkt aller drei Theile ist

$$axy - x^2y - xy^2.$$

Statt x und y zugleich als veränderliche Größen zu betrachten, will ich zuerst nur x als eine solche annehmen. Da finde ich

$$ay - 2xy - y^2 = 0$$

und

$$x = \tfrac{1}{2}(a - y);$$

woraus folgt

$$axy - x^2y - xy^2 = \tfrac{1}{4}y(a - y)^2.$$

Nun differenziire ich so, daß ich y veränderlich annehme, und erhalte

$$\tfrac{1}{4}(a - y)^2 - \tfrac{2}{4}y(a - y) = 0$$

woraus $y = \tfrac{1}{3}a$ gefunden wird. Daher sind die drey Faktoren unter sich gleich und ein jeder $= \tfrac{1}{3}a$.

Von dem Halbmesser der Krümmung.

§. 86.

Fig. 8. Es sey SMT eine gerade Linie, welche eine gewisse krumme Linie AMN in dem Punkt M berühret. Man ziehe die Linie MB und mit solcher, in einer beliebigen Entfernung Pp die Linie TK parallel, welche die krumme Linie AMN in m schneidet.

Zu Tm, TM suche man die dritte geometrische Proporzional-Grösse und nehme an, dieselbe sey $= TK$ gefunden worden.

Man ziehe ferner die Linie MD in M auf ST senkrecht und verzeichne über der Sehne MB einen Kreiß, welcher die krumme Linie AN in M berühret. Man theile nemlich die Sehne MB in zween gleiche Theile, errichte darauf die Senkrechte Pu; so ist der Punkt C, wo sich Pu und MD durchschneiden, der Mittelpunkt dieses Kreißes.

Entweder ist die Linie TQ, welche den über der Sehne MB beschriebenen Kreiß $MRQB$ in R und Q schneidet, grösser als TK oder sie ist kleiner als TK oder endlich es ist $TK = TQ$.

§. 87.

Der Voraussetzung zufolge verhält sich

$$Tm : TM = TM : TK;$$

woraus folgt

$$(TM)^2 = Tm . TK.$$

Mit der Linie MD ziehe man die Parallele TL. Weil nun MT den Kreiß in M berühret; so ist, aus der Natur des Kreißes,

$$(TM)^2 = TH . TL,$$

aber es verhält sich

$$TH : TR = TQ : TL;$$

wor-

woraus folgt

$$TH.TL = TR.TQ$$

und also

$$(TM)^2 = TR.TQ = Tm.TK,$$

oder

$$Tm : TR = TQ : TK.$$

Stellt man sich nun vor, die Linie *TK* bewege sich mit sich selbst parallel fort und rücke näher an den Punkt *M*; so wird *TK* beständig kleiner seyn, als *TQ*: mithin auch *TR* kleiner als *Tm*, weil beständig die Proporzion

$$Tm : TR = TQ : TK$$

statt findet.

Folglich fällt der Bogen *Mm* der krummen Linie *AMN* innerhalb dem Bogen *MR* des Kreißes *MRQB*.

Ein jeder Kreiß, der über eine Sehne beschrieben wird, die grösser ist, als *MB* und die Linie *MT* in *M* berühret, fällt also offenbar ausserhalb dem Kreiß *MRQB* und die Krümmung des Kreißes *MRQB* nähert sich unter allen diesen Kreißen, am meisten der Krümmung der krummen Linie *AMN*. Einen solchen Kreiß nennt man daher den Krümmungskreiß: seinen Mittelpunkt *C* den Mittelpunkt der Krümmung: seinen Halbmesser *MC* den Halbmesser der Krümmung.

Ist also *TK* kleiner als *TQ*; so ist *MC* der Krümmungs-Halbmesser der krummen Linie *AMN*.

§. 88.

Setzen wir den Fall, die dritte geometrische Proporzional-Grösse, welche man zu *Tm*, *TM* sucht, sey grösser als *TQ*; so ist auch *TR* grösser, als *Tm*. Mithin fällt der Kreißbogen *MR* innerhalb dem Bogen der krummen Linie. Man beschreibe also einen Kreiß *Mrqb*, über eine Sehne *Mb*, die kleiner, als *MB*, ist, so daß er die Linie *MT* auch in *M* berühret und die Linie *TK* in *r* und *q* durchschneidet. Weil nun

$$(TM)^2 = Th.Tl$$

und vermöge der Voraussetzung

$$(TM)^2 = TK.Tm,$$

so ist $Tm.TK = Th.Tl$;

aber $Th : Tq = Tr : Tl$,

woraus folgt, $Th.Tl = Tq.Tr$,
und $Tm.TK = Tq.Tr$,
oder $Tm:Tr :: Tq:TK$.

Da nun Tq beständig kleiner angenommen wird als TK; so ist auch Tm beständig kleiner, als Tr und mithin muß der Bogen Mr des Kreißes $Mrqb$ innerhalb Mm, dem Bogen der krummen Linie AMN fallen.

Fällt aber schon der Kreisbogen Mr innerhalb dem Bogen Mm; so müssen alle Kreisbogen, welche auf Sehnen beschrieben werden, die kleiner als Mb sind, innerhalb dem Bogen Mm fallen.

Ist demnach TK kleiner als TQ, aber grösser als Tq; so ist $Mrqb$ der Krümmungskreis der krummen Linie AMN und Mc der Krümmungs-Halbmesser.

§. 89.

Untersuchen wir endlich den dritten Fall, wenn über der Sehne MB ein Kreis beschrieben wird, der durch den Punkt K gehet; so wird $TK = TQ$ und mithin auch $TR = Tm$, welches nur in dem Punkt M statt finden kann.

§. 90.

Wir wollen annehmen, TK sey kleiner als TQ, aber grösser als Tq und mithin den Krümmungs-Halbmesser MC durch Rechnung bestimmen. Man nehme an, daß die Natur der krummen Linie AMN durch eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten AP, PM gegeben sey. Man setze nemlich $AP = x$ und $PM = y$. Es kann also seyn $y^2 = ax$, $y^2 = 2ax - xx$, $y^2 = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ u. s. w.

Man kann daher die Subtangente SP als bekannt annehmen und sie $= s$ setzen. Man ziehe die Linie Mf mit Su parallel; so wird $Mf = Pp = \Delta x$ und $fm = \Delta y$, wenn man nemlich voraussetzet, daß die Abscisse und Ordinate um diese Grössen gewachsen seyn.

Man findet

$$(SM)^2 = (SP)^2 + (PM)^2 = s^2 + y^2.$$

Aus

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke SMP und MfT folgt

$$(SP)^2 : (SM)^2 = (Mf)^2 : (MT)^2,$$

oder

$$s^2 : s^2 + y^2 = \Delta x^2 : (MT)^2$$

und

$$(MT)^2 = \frac{(s^2 + y^2)\,\Delta x^2}{s^2}.$$

Da ferner

$$SP : PM = Mf : fT,$$

oder

$$s : y = \Delta x : fT;$$

$$fT = \frac{y\Delta x}{s},$$

hieraus erhält man

$$Tm = fT - fm = \frac{y\Delta x}{s} - \Delta y = \frac{y\Delta x - s\Delta y}{s}.$$

Nun ist aber

$$(TM)^2 = Tm \,.\, TK,$$

man setze $TK = z$; so wird

$$z = \frac{(s^2 + y^2)\Delta x^2}{(y\Delta x - s\Delta y)s}.$$

Man kann annehmen, es seyn y und x Functionen von t, zum Beispiel, $x = at^n + ct^p$, oder $x = t^m(a + t)^n$ u. s. w. und $y = at^m + abt^r$ oder $y = at - bt^4$ u. s. w.

Wenn nun Δt als unveränderlich betrachtet wird; so kann man sich aus §. 61. leicht überzeugen, daß

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{1.2\,dt^2}.\Delta t^2 + \frac{d^3x}{1.2.3\,dt^3}.\Delta t^3 + etc.$$

und

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}.\Delta t + \frac{d^2y}{1.2\,dt^2}.\Delta t^2 + \frac{d^3y}{1.2.3.dt^3}.\Delta t^3 + etc.$$

Daher

Daher findet man:

$$z = \frac{(s^2 + y^2)\left[\frac{dx^2}{dt^2}.\Delta t^2 + \frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}.\Delta t^3 + \frac{dx}{3dt}.\frac{d^3x}{dt^3}.\Delta t^4 + \frac{(d^2x)^2}{1.2.2.dt^4}.\Delta t^4 + etc.\right]}{s\left(\frac{ydx}{dt}.\Delta t + \frac{yd^2x}{1.2.dt^2}.\Delta t^2 + \frac{yd^3x}{1.2.3dt^3}.\Delta t^3 + etc. - \frac{sdy}{dt}.\Delta t - \frac{sd^2y}{1.2dt^2}.\Delta t^2 - \frac{sd^3y}{1.2.3.dt^3}.\Delta t^3 - etc.\right)}$$

Aber es ist die Subtangente $s = \frac{ydx}{dy}$. Daher findet man $\frac{sdy}{dt} = \frac{ydx}{dt}$ und mithin

$$z = \frac{(s^2 + y^2)\left[\frac{dx^2}{dt^2}.\Delta t^2 + \frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}.\Delta t^3 + \frac{dx}{3dt}.\frac{d^3x}{dt^3}.\Delta t^4 + \frac{(d^2x)^2}{4dt^4}\Delta t^4 + etc.\right]}{s\left(\frac{yd^2x}{1.2dt^2}.\Delta t^2 + \frac{yd^3x}{1.2.3dt^3}.\Delta t^3 + etc. - \frac{sd^2y}{1.2.dt^2}.\Delta t^2 - \frac{sd^3y}{1.2.3dt^3}.\Delta t^3 - etc.\right)}$$

oder

$$z = \frac{(s^2 + y^2)\left[\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}.\Delta t + \frac{dx}{3dt}.\frac{d^3x}{dt^3}.\Delta t^2 + \frac{(d^2x)^2}{4dt^4}.\Delta t^3 + etc.\right]}{s\left(\frac{yd^2x}{1.2dt^2} + \frac{yd^3x}{1.2.3dt^3}.\Delta t + etc. - \frac{sd^2y}{1.2dt^2} - \frac{sd^3y}{1.2.3dt^3}.\Delta t - etc.\right)}$$

Wenn

Wenn nun $\Delta x = o$, so ist auch $\Delta y = o$ und $\Delta t = o$. Der Punkt T fällt in den Punkt M und man erhält

$$z = MB = \frac{(s^2 + y^2)\frac{dx^2}{dt^2}}{y\left(\frac{yd^2x}{1.2dt^2} - \frac{sd^2y}{1.2dt^2}\right)}$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke SPM und PMC folgt

$$SP : SM : MP : MC,$$

oder $$s : \sqrt{(s^2 + y^2)} = \frac{(s^2 + y^2)\frac{dx^2}{dt^2}}{s\left(\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{sd^2y}{dt^2}\right)} : MC,$$

woraus folgt:

$$MC = \frac{\frac{dx^2}{dt^2}(s^2 + y^2)\sqrt{(s^2 + y^2)}}{s^2\left(\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{sd^2y}{dt^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{dx^2}{dt^2}\left(\frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2\right)\sqrt{\left(\frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2\right)}}{\frac{y^2dx^2}{dy^2}\left(\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{ydx}{dy}.\frac{d^2y}{dt^2}\right)}$$

$$= \frac{dx^2\left(\frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2\right)\sqrt{\left(\frac{y^2dx^2}{dy^2} + y^2\right)}}{\frac{y^2dx^2}{dy^2}\left(yd^2x - \frac{ydx}{dy}.d^2y\right)}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dyd^2x - dxd^2y}$$

$$= \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)^3}}{dy^2d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungs-Halbmesser für rechtwinklichte Coordinaten.

§. 91.

§. 91.

Wenn *AMN* eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$, so findet sich

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx\sqrt{(4x + a)}$$

und $$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2(4x + a)}{4x}.$$

Ferner $$dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx^3}{4x},$$

mithin $$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \left(\frac{4x + a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{4x + a}{a}\right)}.$$

§. 92.

Vermittelst der Krümmungs-Halbmesser kann man die Krümmung der krummen Linie *AMN* in einem beliebigen Punkt, mit ihrer Krümmung in einem andern Punkte vergleichen.

Ist nemlich der Krümmungs-Halbmesser in einer allgemeinen Formel gegeben; so hat man für einen jeden Punkt der krummen Linie den Halbmesser des Kreißes, welcher eben die Krümmung hat, wie die krumme Linie in diesem Punkte. Und weil die Krümmung eines Kreißes in eben dem Verhältniß zunimmt, in welchem sein Halbmesser abnimmt, daß ist, weil die Krümmungen der Kreiße in dem umgekehrten Verhältniß ihrer Halbmesser stehen; so ist man im Stande, die Krümmung der krummen Linie *AMN* in einem beliebigen Punkte, mit ihrer Krümmung in einem andern Punkte zu vergleichen. Wollte man also die Krümmung der Parabel in dem Anfangspunkt der Abscissen mit ihrer Krümmung bei der Ordinate, die durch den Brennpunkt gehet, vergleichen; so erinnere man sich, daß in dem ersten Punkt $x = o$, in dem andern aber $x = \frac{1}{4}a$, wofern a der Parabel Parameter ist. Sezt man diese Werthe nach und nach in den allgemeinen Ausdruk für den Krümmungs-Halbmesser der Parabel, nemlich in $\left(\frac{4x + a}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{4x + a}{a}\right)}$ so findet man denselben für den Anfangspunkt der Abscissen $= \frac{1}{2}a$ und für die oben angezeigte Ordinate $= a\sqrt{2}$. Die Krümmung in dem ersten Punkte verhält sich also zu der Krümmung im zweeten Punkte, wie $a\sqrt{2} : \frac{1}{2}a = 2\sqrt{2} : 1$.

Anfangsgründe

der

Integral = Rechnung.

Anfangsgründe
der
Integral-Rechnung.

§. 1.

Es sey die Function $U = x^n$ gegeben. In der Differenzial-Rechnung haben wir die Grösse gesuchet, deren Daseyn durch das Zeichen $\frac{dU}{dx}$, überhaupt durch das Zeichen $\frac{d^rU}{dx^r}$ oder $\frac{d^rU}{d^rx}$ angezeigt wird. Wenn man nun aus diesem Zeichen die Function U wieder finden soll; so geschiehet dieß nothwendig durch eine Methode, welche dem Differenziiren gerade entgegengesetzt und integriren genennet zu werden pflegt. Die Wissenschaft, welche die Regeln vorträgt, aus dem Zeichen $\frac{dU}{dx}$, oder überhaupt aus dem Zeichen $\frac{d^rU}{dx^r}$ und $\frac{d^rU}{d^rx}$ die Function U wiederherzustellen, heißt die Integral-Rechnung; die dadurch gefundene Grösse U aber das Integrale.

Um anzuzeigen, daß eine Grösse integrirt werden soll, bedient man sich des Zeichens $\int$, welches man für die zu integrirende Grössen setzet. Soll, zum Beispiel, angezeigt werden, daß man den Ausdruck $dU = nx^{n-1}dx$ integriren wolle, so schreibt man $\int dU = \int nx^{n-1}dx$.

Man bedient sich dieses Zeichens $\int$ (Summa) weil man sonsten die Integral-Rechnung als eine Wissenschaft vorträgt, welche die Summe von unendlich kleinen Grössen finden lehrt. Aus der Art aber, wie die Differenzial-Rechnung hier vorgetragen worden ist, erhellet, daß Summiren und Integriren keine gleichbedeutende Ausdrücke seyn können.

§. 2.

Eine jede veränderliche Grösse, welche algebraisch ausgedruckt ist, kann, wie wir gesehen haben, differenziirt werden. Aber man kann nicht eine jede Differenzial-Grösse, worunter nicht nur diejenige verstanden werden, welche aus einer vollkommenen Differenziation entstanden sind, sondern eine jede Grösse, in welcher die Zeichen dx, dy vorkommen, integriren, weil einige nicht aus einer vollkommenen Differenziation entstanden sind, wie xdy, $xdy - ydx$ u. s. w.

Von den Differenzialien einer veränderlichen Grösse, welche algebraisch integriret werden können.

§. 3.

Um ein eintheiligtes Differenziale zu integriren, muß man

1) Den Exponenten der veränderlichen Grösse um eine Einheit vermehren.

2) Das gegebene Differenziale mit einem Produkt aus diesem um Eins vermehrten Exponenten in dx oder dy dividiren.

Den Grund dieses Verfahrens findet man leicht in den oben gegebenen Regeln der Differenzial-Rechnung. Da man die Grösse, welche differenziirt worden ist, wieder finden soll; so ist es natürlich, daß man sich einer Methode bedienen müsse, die derjenigen gerade entgegengesetzt ist, welche man bei der Differenziazion angewandt hatte. So ist also

$\int 2x^1 dx = \frac{2x^2 dx}{2dx} = x^2$. Denn $d(x^2) = 2xdx$. Ferner

$\int xdx = \frac{x^2 dx}{2dx} = \frac{x^2}{2}$. In der That ist auch $d\left(\frac{x^2}{2}\right) = xdx$.

Es ist $\int ax^{\frac{2}{3}} dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1} dx}{(\frac{2}{3}+1)dx} = \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}$. Eben so:

$$\int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3} dx = \frac{ax^{-3+1} dx}{(-3+1)dx} = \frac{ax^{-2}}{-2} = \frac{-a}{2x^2}.$$

Ueber-

Ueberhaupt also, m mag eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl seyn,

$$\int ax^{m+1}dx = \frac{ax^{m+2}dx}{(m+2)dx} = \frac{ax^{m+2}}{m+2}.$$

Man braucht diese Regel nicht, um das Integrale von dx oder adx zu finden. Denn man siehet leicht, daß es in dem ersten Fall x und im andern ax ist.

Wenn das eintheilichte Differenziale eine Wurzel-Grösse enthält; so substituirt man, statt des Wurzelzeichens, einen Bruch-Exponenten. Um also $adx\sqrt[3]{x^2}$ zu integriren, so schreibt man $ax^{\frac{2}{3}}dx$ u. s. w.

§. 4.

Wir haben in der Differenzialrechnung gesehen, daß, wenn bei einer vorgegebenen Grösse beständige Glieder addirt oder subtrahirt waren, dieselbe durch die Differenziazion wegfielen. Wenn man also integrirt, so müssen diese beständige Glieder wiederum ergänzet werden. Diese hinzugesetzte beständige Grösse kann einen willkührlichen Werth haben, so lange man keine andere Absicht hat, als nur das Integrale zu finden, oder einen Ausdruck, welcher, wenn er differenziirt wird, dem vorgegebenen Differenziale gleich ist. In der That haben auch die beiden Ausdrücke $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ und $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + C$, wo C irgend eine beständige Grösse bezeichnet, einerlei Differenziale, nemlich $ax^m dx$, die beständige Grösse C mag einen Werth haben, welchen man will. Wenn aber die Integrazion in der Absicht unternommen wird, eine vorgelegte Aufgabe aufzulösen, so erhält jene beständige Grösse einen Werth, welcher aus den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden muß. Das Verfahren, dessen man sich bedient, die beständige Grösse zu finden, werden wir in der Folge an mehreren Beispielen zeigen: jedem Integrale aber, das auch nicht in der Absicht gefunden worden ist, eine Aufgabe aufzulösen, eine beständige Grösse C beifügen.

Von den zusammengesetzten Differenzialien, deren Integrale vermöge der obigen Regel gefunden werden kann.

§. 5.

1) Eine jede Grösse, in welcher keine zusammengesetzte Potestäten und zusammengesetzte veränderliche Divisoren vorkommen, läßt sich vermittelst der Regel §. 3. integriren. Wenn man $ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + edx$ integriren soll, so integrirt man jedes Glied besonders und erhält

$$\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C.$$

Eben so findet man

$$\int ax^3dx + \int bx^{-4}dx = \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^{-3}}{-3} + C$$

$$= \frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + C.$$

2) Wenn gleich auch zusammengesetzte Potestäten vorkommen, so kann man doch noch nach der oben gegebenen Regel verfahren, wofern nur diese Potestäten nicht im Nenner sind und ihr Exponent eine ganze bejahte Zahl ist. So kann man $(a + bx^2)^3dx$ leicht integriren, wenn man $a + bx^2$ würklich in die dritte Potenz erhebt, wodurch man erhält

$$(a + bx^2)^3dx = a^3dx + 3a^2bx^2dx + 3ab^2x^4dx + b^3x^6dx,$$

dessen Integrale $= a^3x + \frac{3a^2bx^3}{3} + \frac{3ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C.$

§. 6.

Da man eine jede zusammengesetzte Grösse, welche zu einer Dignität erhoben ist, deren Exponent eine ganze bejahte Zahl, in eine Reihe solcher Monomien verwandeln kann; so kann man also auch eine jede zusammengesetzte Grösse integriren, in welcher keine zusammengesetzte Grössen vorkommen, deren Exponent eine ganze, gebrochene verneinte Zahl ist. Wenn man

also

also $gx^3dx(a+bx^2)^2+a^2x^7dx(c+ex^2+fx^3)^4$ integriren soll, so löset man, nach den Regeln der Algebra, $(a+bx^2)^2$ in eine Reihe auf und multiplizirt jedes Glied dieser Reihe mit gx^3dx. Eben so verfährt man mit dem andern Gliede des vorgegebenen Differenzial-Ausdrucks; so darf man nur eine Reihe Monomien, nach der Vorschrift des 3ten §phen integriren.

§. 7.

Man muß hier den Fall ausnehmen, wo, wenn einer der Exponenten verneint ist, es nach der Auflösung in eine Reihe und der Multiplication mit dem Glied x^pdx geschehen könnte, daß der Exponent der veränderlichen Grösse in irgend einem Gliede $=-1$ würde; alsdenn kann die obige Regel hier nicht angewandt werden, sondern man muß vermittelst der Logarithmen integriren. Wenn z. B. $\frac{adx}{x^3}(a+bx^2)^2$ oder $ax^{-3}dx(a+bx^2)^2$ gegeben ist; so verwandelt man diesen Ausdruck in

$$ax^{-3}dx(a^2+2abx^2+b^2x^4)$$
$$=a^3x^{-3}dx+2a^2bx^{-1}dx+ab^2xdx.$$

Das Integrale der beiden äussersten Glieder ist $-\frac{a^3x^{-2}}{2}+\frac{ab^2x^2}{2}$; das Integrale des mitlern Gliedes aber $2a^2b\log.x$, wie wir in der Folge noch deutlicher sehen werden. Denn aus der Differenzial-Rechnung §. 56. folgt $\int\frac{dx}{x}=\log.x$.

§. 8.

3) Wenn aber auch in dem vorgegebenen Differenziale eine zusammengesetzte Grösse vorkommt, welche auf eine Potestät erhoben ist, deren Exponent eine ganze, gebrochene, bejahte oder verneinte Zahl seyn kann; so ist man dennoch im Stande, nach der obigen Regel zu integriren, wofern die Grösse, welche in die zusammengesetzte Potestät multiplicirt worden, dasjenige Differenziale ist, welches man finden würde, wenn man die zusammengesetzte Grösse so differenziirt, als wenn sie auf die Potestät 1 erhoben wäre.

In diesem Fall kommt es nur darauf an, die zusammengesetzte Grösse als eine Einige veränderliche Grösse zu betrachten und die Regel §. 3. Wort für Wort darauf anzuwenden. Der Ausdruck $gdx(a+bx)^p$ gehört für diesen Fall, weil gdx das Differenziale von $(a+bx)^1$, mit der beständigen Grösse $\frac{g}{b}$ multiplizirt, ist. Um also zu integriren, so schreibe ich

$$\int gdx(a+bx)^p = \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)d(a+bx)} + C$$

$$= \frac{gdx(a+bx)^{p+1}}{(p+1)bdx} + C = \frac{g(a+bx)^{p+1}}{(p+1)b} + C$$

Differenziirt man diese Grösse wieder; so findet man $gdx(a+bx)^p$.

Untersucht man ferner den Ausdruck

$$\frac{a^2dx+2axdx}{\sqrt{(aa+xx)}} \text{ oder } (a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}};$$

so wird man finden, daß man denselben nach der obigen Regel integriren könne, weil $a^2dx+2axdx$ das Differenziale von $ax+xx$, multiplizirt mit a ist.

Wendet man also jene Regel an, so findet man

$$\int (a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(a^2dx+2axdx)(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx+2xdx)} + C$$

$$= 2a(ax+xx)^{\frac{1}{2}} + C$$

Der einzige Fall, der hier eine Ausnahme macht, ist, wenn der Exponent der zusammengesetzten Grösse $= -1$. Alsdenn integrirt man durch Logarithmen.

Von den zweitheilichten Differenzialien, welche algebraisch integriret werden können.

§. 9.

Wir verstehen unter zweitheilichten Differenzialien solche, wo die Grösse, welche aus den mehresten Gliedern bestehet, die Po-

Potenz eines Binomiums ist. So ist $gx^5dx(a+bx)^{\frac{3}{5}}$ ein zweitheilichtes Differenziale. Eben die Beschaffenheit hat es mit $gx^m dx(a+bx^n)^p$, worunter jedes zweitheilichte Differenziale verstanden werden kann, weil die Buchstaben g, a, b, m, n, p alle mögliche, bejahte und verneinte Größen vorstellen. Nicht ein jedes zweitheilichte Differenziale kann man algebraisch integriren. Aus dem vorhergehenden erhellet aber, daß man ein zweitheilichtes Differenziale, wie

$$gx^m dx(a+bx^n)^p$$

in den beiden folgenden Fällen integriren könne:

1) wenn p eine ganze, bejahte Zahl ist, die Exponenten m, n mögen, den Fall §. 7. ausgenommen, übrigens beschaffen seyn, wie man will. §. 6. 7. 8.

2) Wenn der Exponent m von x ausser dem Wurzelzeichen um eine Einheit kleiner ist, als der Exponent n von x unter dem Wurzelzeichen, das ist, man kann überhaupt jedes Differenziale von dieser Art, wie

$$gx^{n-1}dx(a+bx^n)^p$$

integriren, n und p mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, den Fall ausgenommen, da $p = -1$. In der That ist auch $gx^{n-1}dx$ das Differenziale von $a+bx^n$, multiplizirt mit der beständigen Grösse $\frac{g}{nb}$. Dieß ist eben der Fall, den wir schon §. 8. betrachtet haben.

§. 10.

1) Man kann ein jedes zweitheilichte Differenziale integriren, in welchem der Exponent von x außer dem Binomio um eine Einheit vermehret, durch den Exponenten von x unter dem Binomio theilbar ist, und eine ganze bejahte Zahl zum Quozienten gibt.

Das Verfahren, dessen man sich in diesem Fall bedienen muß, sowol um zu integriren, als auch um die Allgemeinheit dieses Satzes zu erweisen, bestehet darin, daß man die zweygliedrige Grösse (ohne den Totalexponenten) einer einzigen veränderlichen Grösse gleich setzet, und vermittelst derselben und der beständigen Grössen das vorgegebene Differenziale auf eine

andere Art ausdrückt. Es sey $x^m dx(a+bx^n)^p$ das Differenziale, welches man algebraisch integriren soll.

Man setze $a+bx^n=z$, so ist $x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$; also

$$x^m=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ und } x^m dx(a+bx)^p=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} dx.z^p.$$

Aber $dx=\frac{dz}{nbx^{n-1}}=\frac{dz}{\frac{nbx^n}{x}}=\frac{dz}{\frac{nb(z-a)}{b}}=\frac{dz}{nb\left(\frac{z-a}{b}\right)^{1-\frac{1}{n}}}$

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Folglich:

$$\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1+\frac{1}{n}}.z^p\frac{dz}{nb}=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}.z^p.\frac{dz}{nb}.$$

Ist nun $\frac{m+1}{n}$ eine verneinte, oder gebrochene Zahl; so läßt sich in diesen Fällen $\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}$ nicht in eine endliche Reihe auflösen. Läßt sich aber $m+1$ würklich durch n theilen, ist der Quozient auch nur 1, aber eine bejahte Zahl; so kann man jedes Differenziale, welches diese Eigenschaft hat, algebraisch integriren. Nun ist $m+1$ der um Eins vermehrte Exponent von x ausser dem Binomio, und n der Exponent von x unter dem Binomio.

Man soll zum Beispiel $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$ integriren. Man siehet sogleich, daß dieses Differenziale einer Integrazion fähig ist, weil der Exponent von x ausser dem Binomio, nemlich 3, um Eins vermehret, 4 gibt, wodurch man, wenn mit dem Exponenten von x in dem Binomio, nemlich 2, dividirt wird, die ganze und bejahte Zahl 2 zum Quozienten erhält.

Man setze also $a+bx^2=z$ und folglich $x^2=\frac{z-a}{b}$.

Nun bemerke ich, daß das Differenziale x^3dx, welches vor dem

dem Binomio stehet, durch die Differenziation von x^4 (den beständigen Coeffizienten abgerechnet) entstanden ist; ich erhebe also die Gleichung $x^2 = \frac{z-a}{b}$ ins Quadrat und erhalte

$$x^4 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^2$$

und, wenn differenziirt wird,

$$4x^3dx = 2\left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{b}. \quad \text{Daher}$$

$$x^3dx = \left(\frac{z-a}{b}\right)\frac{dz}{2b} = \left(\frac{z-a}{2b^2}\right)dz$$

Substituirt man statt x^3dx und $(a+bx^2)$ ihre Werthe in z ausgedruckt, in die Grösse $gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$, so erhält man

$$\frac{g(z-a)dz}{2b^2}\cdot z^{\frac{4}{5}} = \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}.$$

Folglich

$$\int gx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}} = \int\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2} - \int\frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}$$

$$= \frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2b^2} - \frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2b^2} + C$$

$$= \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left[\frac{z}{(\frac{4}{5}+2)} - \frac{a}{(\frac{4}{5}+1)}\right] + C$$

$$= \frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left[\tfrac{5}{14}z - \tfrac{1}{9}a\right] + C.$$

Und setzt man endlich statt z seinen Werth $a+bx^2$ wieder, so findet man endlich

$$\frac{g(a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left[\tfrac{5}{24}(a+bx^2) - \tfrac{1}{9}a\right] + C.$$

§. 11.

Auf eine ähnliche Art verfährt man bei einem jeden andern Fall, der den nemlichen Bedingungen unterworfen ist. Zum

Beyspiel wollen wir $gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$ nehmen, welches einer vollkommenen Integrazion fähig ist, weil der Exponent 8, vermehrt mit eins, das ist, 9 durch den Exponent 3 von x in dem Binomio getheilt, eine ganze bejahte Zahl zum Quozienten gibt.

Ich setze also $a+bx^3=z$ und finde $x^3=\frac{z-a}{b}$, und weil x^8dz (einen beständigen Coeffizienten abgerechnet) durch die Differenziation von x^9 entstanden ist; so erhebe ich die Gleichung

$$x^3=\frac{z-a}{b}$$

in den Cubum und erhalte

$$x^9=\left(\frac{z-a}{b}\right)^3$$

dessen Differenziale

$$9x^8dx=3\left(\frac{z-a}{b}\right)^2\frac{dz}{b}$$

und

$$x^8dx=\left(\frac{z-a}{b}\right)^2\frac{dz}{3b}.$$

Das vorgegebene Differenziale $gx^8dx(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$ verwandelt sich also in

$$g\left(\frac{z-a}{b}\right)^2.z^{-\frac{2}{3}}.\frac{dz}{3b}=\frac{gz^{2-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}-\frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$$

$+\frac{ga^2z^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}$, dessen Integrale ist:

$$\frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3(3-\frac{2}{3})}-\frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3(2-\frac{2}{3})}+\frac{ga^2z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3(1-\frac{2}{3})}+C$$

welches sich in

$$\frac{g}{3b^3}.z^{1-\frac{2}{3}}\left[\frac{z^2}{3-\frac{2}{3}}-\frac{2az}{2-\frac{2}{3}}+\frac{a^2}{1-\frac{2}{3}}\right]+C$$

oder in

$$\frac{g}{3b^3}.z^{1-\frac{2}{3}}\left[\frac{3z^2}{7}-\frac{6az}{4}+3a^2\right]+C \text{ verwandelt.}$$

Setzt

Setzt man endlich statt z seinen Werth $a+bx^3$, so ist das gesuchte Integrale

$$=\frac{g}{3b^3}(a+bx^3)^{1-\frac{2}{3}}\left[\tfrac{3}{7}(a+bx^3)^2-\frac{6a}{4}(a+bx^3)+3a^2\right]+C$$

§. 12.

Wenn ein zweytheilichtes Differenziale die eben angeführte Eigenschaften nicht zu haben scheint, so muß man vorher Untersuchung anstellen, ob es dieselbe nicht besitze. Man macht den Exponenten von x in dem Binomio verneint, wenn er bejaht, und bejaht, wenn er verneint ist. Dieß geschiehet, wenn man die zwey Glieder des Binomiums durch die Potestät von x, welche sich in dem Binomio findet, dividirt, und mit eben derselben, erhoben zu einer Potestät, welche der Totalexponent des Binomiums anzeigt, ausser dem Binomio multiplizirt.

Wenn man zum Beispiel den Exponenten 2 von x in dem Binomio

$$gx^4dx(a+bx^2)^5$$

verneint machen will, so dividire man $a+bx^2$ mit x^2 und man erhält $gx^4dx\left(\frac{a}{x^2}+b\right)^5$ oder $gx^4dx(ax^{-2}+b)^5$. Da aber der Exponent 5 anzeigt, daß die Grösse x^2, mit welcher man dividirt hat, in die fünfte Potestät erhoben werden soll; so muß man, um der obigen Funktion ihren ersten Werth wieder zu geben, ausser dem Binomio mit $(x^2)^5=x^{10}$ multipliziren, wodurch man erhält: $gx^{14}dx(ax^{-2}+b)^5$.

Wenn man sich dieses Kunstgrifs bedient, so wird man finden, daß viele zweytheilichte Differenzialien, welche in der Regel §. 10. nicht begriffen sind, nunmehr auch zu jenem Fall gehören. Wenn ich, zum Beyspiel,

$$\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}} \text{ oder } aadx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$$

integriren sollte, so sehe ich, daß der Exponent von x außer dem Binomio, nemlich 0, mit 1 vermehrt, durch den Exponenten 2 von x in dem Binomio, nicht getheilt werden könne. Demnach würde ich mich betrügen, wenn ich daraus schliessen wollte,

wollte, daß die vorgegebene Grösse keiner algebraischen Integrazion fähig sey. Denn wenn ich den Exponenten der Potestät von x in dem Binomio verneint mache, indem ich schreibe

$$aa(x^2)^{-\frac{3}{2}}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$= aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$; so sehe ich sogleich, daß, wenn -3 mit 1 vermehrt, das ist, wenn -2 mit dem Exponenten -2 von x in dem Binomio getheilt wird, dadurch eine ganze bejahte Zahl erhalten werde. Setzt man also $aax^{-2}+1=z$; so finde ich daraus $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$, und da $x^{-3}dx$ (den beständigen Coeffizienten ausgenommen) das Differenziale von x^{-2} ist; so differenziire ich und finde $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$ und $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$. Das vorgegebene Differenziale

$$aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$$

verwandelt sich also in

$$-\frac{aa.dz}{2aa}.z^{-\frac{3}{2}}$$

oder in $$-\frac{z^{-\frac{3}{2}}dz}{2},$$

dessen Integrale ist:

$$-\frac{z^{1-\frac{3}{2}}}{2(1-\frac{3}{2})}+C=z^{-\frac{1}{2}}+C$$

$$=(aax^{-\frac{1}{2}}+1)^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{(aax^{-2}+1)}}+C$$

$$=\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}+C$$

Das Verfahren ist also das nemliche, wie in dem Fall §. 10.

§. 13.

Wir haben stillschweigend angenommen, daß sich nur in einem Gliede des Binomiums eine Potestät von x befinde. Kommt der Fall vor, daß in beiden Gliedern solche Potestäten vor-

vorhanden sind; so dividire man das Binomium durch eine der beiden Potestäten von x, welche in einem der beiden Gliedern des Binomiums vorkommen, multiplizire aber auch zu gleicher Zeit ausser dem Binomio mit eben der Grösse, zu einer Potestät erhoben, die der Totalexponent des Binomiums anzeigt. Wenn ich also

$$\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}} = aax^{-1}dx(ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$$

integriren soll; so verwandle ich diesen Ausdruck in

$$aax^{-1}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}} = aax^{-\frac{3}{2}}dx(a+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wendet man die Regel des 10. §phen an, so scheint diese Größe keiner algebraischen Integrazion fähig zu seyn. Macht man aber den Exponenten von x in dem Binomio verneint, so erhält man

$$aax^{-\frac{3}{2}}(x)^{-\frac{1}{2}}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$$

oder $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$, welches algebraisch integrirt werden kann. Setzt man man also $ax^{-1}+1=z$; so hat man

$$x^{-1} = \frac{z-1}{a} \text{ und } -x^{-2}dx = \frac{dz}{a}, \text{ oder } x^{-2}dx = -\frac{dz}{a}.$$

Also verwandelt sich $aax^{-2}dx(ax^{-1}+1)^{-\frac{1}{2}}$ in $adz.z^{-\frac{1}{2}}$, oder in $az^{-\frac{1}{2}}dz$, dessen Integrale ist $-\frac{az^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$ oder

$$-2az^{\frac{1}{2}}+C = -2a(ax^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$= -2a\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}+C$$

Wenn man bei einem zweytheilichten Differenziale die Untersuchung der beiden Fälle, die wir eben vorgetragen haben, vollendet hat; so darf man sicher schliessen, das es kein reines algebraisches Integrale habe, wenn es unter keinem dieser Fälle begriffen ist.

Dreytheilichte, viertheilichte u. s. w. Differenzialien sind in den oben angezeigten Fällen einer Integrazion fähig. Es giebt aber auch noch einige andere Fälle, wo sie ein pures algebraisches Integrale haben. Weil ihrer aber wenige sind und sie eben so selten vorkommen, so übergehen wir sie hier mit Stillschweigen.

Anwen-

Anwendung der vorhergehenden Regeln, den Inhalt solcher Flächen zu finden, welche theils von geraden, theils von krummen Linien begränzet werden.

§. 14.

Fig. 1. Es sey AZ eine beliebige krumme Linie. Man ziehe die Ordinaten LK, MP, mp auf die Axe Ap senkrecht, und setze $AP = x$, $PM = y$; ferner $Pp = \Delta x$ und $rm = \Delta y$; den Raum $APM = U$; so ist der Raum $PMmp = \Delta U$. Nun ist der Inhalt des Rechtecks $PMrp = y\Delta x$ und der Inhalt des Rechtecks $PRmp = (y + \Delta y)\Delta x$.

Man sieht leicht, daß

$$\Delta U > y\Delta x$$

oder

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} > y$$

Man setze also

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} - \varphi = y$$

Ferner ist

$$\Delta U < (y + \Delta y)\Delta x$$

oder

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} < (y + \Delta y)$$

Es kann also seyn

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} + \psi = y + \Delta y$$

Die Grenzen der Grösse $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ sind mithin y und $y + \Delta y$. Je kleiner Δx und mithin auch ΔU, Δy werden; desto mehr nähern sich diese Grenzen, und sie werden gleich, wenn $\Delta x = o$, $\Delta y = o$. In diesem Fall ist auch $\varphi = o$, $\psi = o$. Und man erhält

$$\frac{dU}{dx} = y$$

welches man gewöhnlich so schreibt:

$$dU = ydx$$

und

$$U = \int ydx.$$

§. 15.

§. 15.

Um diese Formel auf eine krumme Linie anzuwenden, deren Gleichung gegeben ist; so suche man aus derselben den Werth von y und setze ihn in die Gleichung $U = \int y dx$, deren Integrale die gesuchte Grösse giebt, wofern eine, aus den Umständen der Aufgabe zu bestimmende beständige Grösse dazu addirt oder davon subtrahirt worden ist.

§. 16.

Das Trapezium $PMmp$ kann man sowol, als die Differenz des Raums APM, als auch als die Differenz des Raums $KLMP$ betrachten. Findet man also, vermittelst der Formel $U = \int y dx$ ein Integrale; so ist keine Ursache vorhanden, warum dasselbe eher für den Raum APM, als für den Raum $KPLM$ gehöre, welcher letztere von dem ersten um die beständige Grösse KAL unterschieden ist. Man muß also zu dem gefundenen Integrale eine beständige Grösse hinzusetzen, welche anzeigt, um wie viel der Raum, den man zu bestimmen sucht, von demjenigen unterschieden sey, welchen man unmittelbar durch die Rechnung findet. Beispiele sind in diesem Fall am tauglichsten, die Methode kennen zu lernen, deren man sich bedienen muß, jene beständige Grösse zu bestimmen.

In dieser Absicht wollen wir die gewöhnliche Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, erwählen. Es ist also $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$; folglich $U = \int y dx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2 p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ und dieß ist der algebraische Ausdruck für den Quadrat-Inhalt der Parabel.

Man findet also den Inhalt des Raums APM oder des Raums $KPML$, welcher letztere von dem Punkt K an gerechnet wird, sobald die Abscisse x, der Parameter p und die beständige Grösse C oder der Punkt bestimmt ist, von wo aus man das Integrale rechnen will. Will man also dasselbe von dem Punkt A an rechnen; so ist $APM = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + C$. Um den Werth von C zu bestimmen, bemerke man, daß der Raum APM verschwinde, wenn x verschwindet, und in diesem Fall verwandelt sich jene Gleichung in $o = o + C$; folglich ist auch

auch $C = o$. Man braucht also zu dem gefundenen Integrale keine beständige Grösse hinzuzusetzen, und es ist $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$.

Wollte man aber das Integrale von dem Punkt K an rechnen, so daß $AK = b$, eine bekannte Grösse ist; so hat man

$$KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Nun wird aber der Raum $KPML = o$, wenn AP oder $x = b$ wird; es ist also $o = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$ und $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$; folglich

$$KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.$$

Man siehet hieraus, welchen Nutzen die beständige Grösse hat, welche zu dem Integrale addirt oder davon subtrahirt werden muß, und daß man dieselbe nur aus den Umständen der Aufgabe bestimmen könne.

Weil $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x$ ist; und $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} = y$; so hat man $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}AP \,.\, PM$. Ferner $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b$. Wenn nun $x = AK = b$ wird, so wird $yy = pb$ und $y = KL = p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$. Folglich $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}KL \,.\, AK$. Endlich der parabolische Raum $KPML$, $= \frac{2}{3}AP \,.\, PM - \frac{2}{3}AK \,.\, KL$. Von allen vier Kegelschnitten ist die Parabel der einzige, den man algebraisch integriren kann.

Zum zweiten Beyspiel wollen wir die allgemeine Gleichung für alle Parabeln, nemlich

$$y^{m+n} = a^m x^n$$

erwählen. Man findet also

$$y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$$

und $ydx = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} dx$, davon das Integrale

$$= \frac{a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}+1}}{\frac{n}{m+n}+1} + C$$

=

$$= \frac{m+n}{m+2n} a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} x + C = \frac{m+n}{m+2n} xy + C.$$

Es ist also $APM = \frac{m+n}{m+2n} xy$, weil APM verschwindet, wenn x verschwindet.

Anwendung der Integral-Rechnung auf die Rectificazion krummer Linien.

§. 17.

Eine krumme Linie rectifiziren heißt, eine gerade Linie angeben, welche der krummen Linie oder einem bestimmten Bogen derselben gleich ist. Die Methode, diesen Endzweck zu erreichen, ist folgende. *Fig. 1.*

Wenn der Bogen $AM = s$, die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$; so haben wir in der Differenzialrechnung bewiesen, daß für alle krumme Linien

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

woraus folgt $s = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

Es kommt also blos darauf an, die Formel $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ integriren zu können. Man differenziire die Gleichung der krummen Linie, und wenn man daraus den Werth von dy in x und dx, oder den Werth von dx in y und dy ausgedrückt, gefunden hat; so setze man denselben in $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, wo alsdenn x und dx^2 oder y und dy^2 vorkommen. Um hievon ein Beispiel zu geben, wollen wir von allen Parabeln, die man überhaupt durch die Gleichung $y^{m+n} = a^m x^n$ bezeichnet, diejenige erwählen, deren Natur durch $y^3 = ax^2$ ausgedrückt wird. Man findet also $x^2 = \frac{y^3}{a}$ und $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$. Mithin $dx = \frac{\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} dy}{a^{\frac{1}{2}}}$ und $dx^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{y dy^2}{a}$. Daher

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{9y dy^2}{4a}\right)} = dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}.$$

Die Integrazion dieser Formel hat keine Schwierigkeit, weil der Exponent von y außer dem Wurzelzeichen um eine Einheit kleiner ist, als der Exponent desselben unter dem Wurzelzeichen. Man findet also $\int dy \sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)} = \int dy \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9dy}{4a}} + C = \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Die beständige Größe C bestimmt man folgendergestalt. Wenn man die Länge des Bogens AM bestimmen will; so verschwindet dieselbe mit y. In diesem Fall ist also $\frac{8a}{27}(1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{8a}{27} + C = 0$ und $C = -\frac{8a}{27}$. Daher ist die Länge des Bogens $AM = \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8a}{27}$.

§. 18.

Wenn man wissen will, welches die übrige Parabeln sind, welche man rectifiziren kann; so erfährt man dieses folgendergestalt. Aus der Gleichung für diese krummen Linien

$$y^{m+n} = a^m x^n$$

findet man $y = a^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$. Es sey, Kürze halber, $\frac{m}{m+n} = k$ und $\frac{n}{m+n} = l$; so ist

$$y = a^k x^l$$

und $dy = la^k x^{l-1} dx$; daher $dy^2 = l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2$. Mithin

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dx^2 + l^2 a^{2k} x^{2l-2} dx^2)}$$
$$= dx\sqrt{(1 + l^2 a^{2k} x^{2l-2})}$$

welche Formel in diesem Zustande nur denn einer Integrazion fähig ist, wenn $2l - 2 = 1$. Verändert man aber das Zeichen des Exponenten von x unter dem Wurzelzeichen; so findet man $x^{-l+1} dx \sqrt{(x^{-2l+2} + l^2 a^{2k})}$, welches Differenziale algebra-

algebraisch integrirt werden kann, wofern $-l+1$, vermehrt mit Eins und durch $-2l+2$ dividirt, eine ganze bejahte Zahl zum Quozienten gibt, das ist, wenn $\frac{-l+2}{-2l+2}=t$, wo t eine solche Zahl anzeigt. Daraus folgt

$$-l+2=-2lt+2t \text{ und } l=\frac{2t-2}{2t-1}=\frac{n}{m+n};$$

endlich $m=\frac{n(2t-1)}{2t+2}-n.$

Alle Parabeln, welche rektifizirt werden können, sind also in der Gleichung

$$y^{\frac{n(2t-1)}{2t-2}}=a^{\frac{n(2t-1)}{2t-2}-n}x^n \text{ oder } y^{\frac{2t-1}{2t-2}}=a^{\frac{2t-1}{2t-2}-1}x$$

enthalten.

Anwendung auf die Berechnung des Inhalts krummlinigter Oberflächen.

§. 19.

Wir werden uns auf die Berechnung der Oberflächen solcher Körper einschränken, welche entstehen, wenn sich eine krumme Linie AM um die Axe AP bewegt. *Fig. 2.*

Indem sich der Bogen Am um die Linie Ap drehet, entsteht durch die Umdrehung der Sehne Mm ein abgekürzter Kegel, und es kann leicht erwiesen werden, daß die Oberfläche desselben einem Produkt aus der Sehne Mm in die Peripherie eines Kreises gleich ist, der eine Linie ah, aus der Mitte der Sehne Mm auf Ap senkrecht gezogen, zum Halbmesser hat. Es sey $r:c$ das Verhältniß des Halbmessers zur Peripherie; so ist

$$\frac{c}{r}\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$$
$$=\frac{c}{r}\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\sqrt{\left(1+\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$$

die Oberfläche des abgekürzten Kegels.

Wenn v die Oberfläche ist, welche durch die Umdrehung des Bogens AM entstanden; so kann man durch Δv die Oberfläche bezeichnen, welche durch die Umdrehung des Bogens Mm entstanden ist. Da ist aber

$$\Delta v > \frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$$

und $$\frac{\Delta v}{\Delta x} > \frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$$

Man ziehe die Tangente NMT und die Linie Nrp senkrecht auf Ap. Durch die Umdrehung der Linie MN entstehet ein abgekürzter Kegel, dessen Oberfläche einem Produkt aus der Linie MN in die Peripherie eines Kreises gleich ist, dessen Halbmesser eine Linie ist, welche auf AP senkrecht steht und die Linie MN in k in zwei gleiche Theile theilt. Nun ist

$$MN = \sqrt{\left(\Delta x^2 + \frac{\Delta x^2 dy^2}{dx^2}\right)} = \Delta x\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

und $hk = y + \frac{\Delta x dy}{2dx}$; daher ist die Oberfläche dieses abgekürzten Kegels, =

$$\frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta x dy}{2dx}\right)\Delta x\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

und $$\frac{\Delta v}{\Delta x} < \frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta x dy}{2dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}.$$

Der Werth von $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ fällt also zwischen diese Grenzen

$$\frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$$

und $$\frac{c}{r}\left(y + \frac{\Delta x dy}{2dx}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}.$$

Beide Grenzen nähern sich, wenn Δx abnimmt und wenn $\Delta x = o = dx$; so sind sie einander gleich. Dann erhält man

$$\frac{dv}{dx} = \frac{c}{r}\, y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$$

wel-

welches man gewöhnlich so ausdrückt:

$$dv = \frac{c}{r} y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

§. 20.

Man soll zum Beispiel die Oberfläche einer Kugel suchen. Der Kreis AMB, durch dessen Umdrehung die Kugel erzeugt worden, hat die Eigenschaft, daß $yy = ax - xx$, wenn $AP = x$, $PM = y$. Folglich erhalten wir:

$$dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{(ax - xx)}} \text{ und}$$

$$dy^2 = \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - xx}.$$

Also $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{\frac{1}{4}aadx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{aa - xx}\right)}$

$= \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$. Daher $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

$= \frac{c}{r}\sqrt{(ax - xx)} . \frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}} = \frac{\frac{1}{2}acdx}{r}$.

Das Integrale ist $= \frac{\frac{1}{2}acx}{r} + C$, oder blos $\frac{\frac{1}{2}acx}{r}$, wenn man die Oberfläche von dem Punkt A an haben will.

§. 21.

Will man die Oberfläche eines Paraboloides finden; so hat man

$$x = \frac{yy}{p}, dx = \frac{2ydy}{p}, \text{ und}$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{\Delta y^2 dy^2}{p^2}\right)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{pp}\right)}$$

Mithin $\frac{cy}{r}\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{cydy}{r}\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{pp}\right)}$,

davon das Integrale $= \dfrac{cydy}{r}\left(1 + \dfrac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} + C$

$$\frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{8ydy}{pp}}{}$$

$$= \frac{ppc}{12r}\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right) + C.$$

Wenn $y = 0$ ist; so findet man

$$C = -\frac{ppc}{12r}$$

Daher ist die Oberfläche des unbestimmten Paraboloides $AMLA =$

$$\frac{ppc}{12r}\left(1 + \frac{4y^2}{pp}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{ppc}{12r}.$$

Anwendung auf die Berechnung des körperlichen Inhalts.

§. 22.

Wir werden uns auf die Berechnung des Inhalts solcher Körper einschränken, welche durch die Umdrehung eines Kreises, einer Parabel, einer Ellipse u. s. w. um ihre Axe, erzeugt worden sind.

Fig. 3. Wenn die Fläche APM um die Axe AP bewegt wird; so sey U der Inhalt des Körpers, welcher dadurch erzeugt worden. Durch die Umdrehung der Fläche $PMmp$, welche von dem Bogen Mm begrenzet wird, entsteht ein Körper, dessen Inhalt $= \Delta U$, und durch die Umdrehung des Trapeziums $MPmp$ wird ein abgekürzter Kegel erzeugt, dessen Inhalt $= \frac{c}{2r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2)\frac{\Delta x}{3}$; durch das Rechteck $QPmp$ ein Cylinder, dessen Inhalt $= \frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2 . \Delta x$.

Nun

Nun ist aber

$$\Delta U > \frac{c}{2r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2) \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

oder $$\frac{\Delta U}{\Delta x} > \frac{c}{2r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2) \cdot \tfrac{1}{3}$$

und $$\Delta U < \frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2 \cdot \Delta x$$

oder $$\frac{\Delta U}{\Delta x} < \frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2$$

Die Grenzen von $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ sind also

$$\frac{c}{2r}(3y^2 + 3y\Delta y + \Delta y^2) \cdot \tfrac{1}{3} \text{ und } \frac{c}{2r}(y + \Delta y)^2$$

Beide Grenzen fallen zusammen, wenn $\Delta U = o = dU$, mithin auch $\Delta x = o = dx$ und $\Delta y = o = dy$ ist. Alsdenn erhalten wir:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{c}{2r} \cdot y^2$$

woraus folgt $$U = \frac{c}{2r} \int y^2 dx.$$

§. 23.

Zum ersten Beyspiel wollen wir den Ellipsoides erwählen. Die Gleichung für die Ellipse ist *Fig. 4.*

$$yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$$

wenn man $AP = x$, $PM = y$, die Axe $AB = a$, und $Dd = b$ setzet. Mithin ist

$$\frac{cy^2dx}{2r} = \frac{cbb}{2raa}(ax - xx)dx$$

$$= \frac{cbb}{2raa}(axdx - xxdx) \text{ und dessen Integral} =$$

$$\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C \text{ oder blos } \frac{cbb}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$$

wenn man den Inhalt von dem Punkt A an berechnen will.

Wollte man den Inhalt des ganzen Spheroides wissen; so setze man $x = AB = a$ und man erhält

$$\frac{cbb}{2raa}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{abbc}{12r} = \frac{bbc}{4r} \cdot \frac{a}{3} = \frac{bbc}{8r} \cdot \frac{2a}{3}.$$

Nun ist $\frac{bbc}{8r}$ der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser $= b = Dd$; $\frac{bbc}{8r} \cdot a$ ist also der Inhalt eines um den Ellipsoides verzeichneten Cylinders.

Wollte man aber den Inhalt des Ellipsoides nur von einem bestimmten Punkt K an berechnen; so setze man $AK = e$. Nun muß $\frac{bbc}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$ verschwinden, wenn $x = e$ wird; in welchem Fall man erhält

$$C = -\frac{bbc}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right).$$

Daher ist der Inhalt eines zwischen zwei parallelen Ebenen liegenden Stücks der Ellipsoide

$$= \frac{bbc}{2raa}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{bbc}{2raa}\left(\frac{ae^2}{2} - \frac{e^3}{3}\right)$$

Diese Formel dient, den Inhalt solcher Tonnen zu berechnen, welche als Ellipsoides betrachtet werden können.

§. 24.

Fig. 5. Den Inhalt eines Paraboloides findet man

$$= \int \frac{cy^2 dx}{2r} = \int \frac{cpxdx}{2r} = \frac{cpx^2}{4r} + C$$

oder blos $= \frac{cyy}{2r} \cdot \frac{x}{2}$, vom Punkt A an gerechnet. Wenn man den Inhalt des Paraboloides von einem bestimmten Punkt K an berechnen will; so verschwindet $\frac{cpx^2}{4r} + C$, wenn $x = e$ wird,

wird, und dann ist $C = -\frac{cpe^2}{4r}$. Daher ist der Inhalt eines solchen abgekürzten parabolischen Kegels $= \frac{cpx^2}{4r} - \frac{cpe^2}{4r}$. Und vermöge dieser Formel ist man einigermaaßen im Stande, von der Menge der Erde, welche eine Mine auswirft, ein Urtheil zu fällen.

Aus einigen Versuchen hat man den Schluß gezogen, daß, bei gleichartigen Erdreich, dessen Oberfläche MN horizontal ist, die Seitenwände des Trichters die Krümmung eines Paraboloides NAM erhalten, dessen Brennpunkt in dem Mittelpunkt der Minenkammer K liegt. Die Entfernung KP (die Linie des kleinsten Widerstandes) dieses Brennpunkts von der Ebene der Grundfläche MN dieses Trichters ist, nach einigen Versuchen die Hälfte des Durchmessers MN. Aus diesen gegebenen Grössen kann man folgendergestalt den Inhalt des Körpers $NOLM$, den die Mine herauswerfen soll, berechnen. Wenn $KP = PM = a$, so findet man aus den Eigenschaften der Parabel $\frac{aa}{a+e} = 4e$, wo $e = AK$ ist. Daraus folgt $e = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; und $x = a + e = \frac{1}{2}a(1 + \sqrt{2})$; mithin $xx - ee = a^2\sqrt{2}$. Da nun $p = 4e$; so ist $p(xx - ee) = 2a^3\sqrt{2}(-1 + \sqrt{2})$ $= 2a^3(2 - \sqrt{2})$. Es ist also $\frac{cp}{4r}(x^2 - e^2) = \frac{a^3c}{2r}(2 - \sqrt{2})$ $= \frac{355}{113} \cdot a^3 [2 - 1,4142135] = 1,8403012a^3 =$ dem gesuchten Inhalt, welcher also ohngefehr $\frac{46}{25}$ von dem Cubus des kleinsten Widerstandes ist. Wir haben in dieser Rechnung die Höhlung LAO nicht in Betrachtung gezogen, weil sie gröstentheils von der Gewalt herrühret, welche das Pulver auf den Boden des Trichters ausübet.

Fig. 6.

der Linie

§. 25.

Nun wollen wir noch den Inhalt eines sogenannten Klauen (onglet) berechnen, welcher entsteht, wenn man einen Cylinder nach einer auf seiner Grundfläche schief stehenden Rich-

tung durchschneidet, und, um bei dem einfachsten Falle stehen zu bleiben, annehmen, diese Richtung gehe durch
Fig. 7. den Mittelpunkt der Grundfläche des Cylinders. In der Figur ist *ABDE* dieser Körper.

Fig. 8. Wenn man denselben mit parallelen und auf der Grundfläche *ABE* senkrecht stehenden Ebenen durchschneidet, so entstehen dadurch ähnliche Dreyecke, welche sich wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten. Es sey also der Halbmesser *CE* der Grundfläche, $= r$, die Höhe $DE = h$ und y die Grundlinie *PM* des Dreyecks *PMN*; so hat man $CED : PMN = rr : yy$. Nun ist $CED = \frac{rh}{2}$, folglich $PMN = \frac{hyy}{2r}$. Die Abscisse $AP = x$ wachse um das Stück $Pp = \Delta x$; so verwandelt sich die Ordinate *PM* in $pm = y + \Delta y$. Und es verhält sich $CED : pmn = rr : (y + \Delta y)^2$ woraus folgt $pmn = \frac{h}{2r}(y + \Delta y)^2$.

Der Inhalt des Körpers *APMNA* sey $= U$, so ist der Inhalt der Schicht $PMNpmn = \Delta U$, und

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} > \frac{h}{2r}(2rx - xx)$$

und $$\frac{\Delta U}{\Delta x} < \frac{h}{2r}(2rx - x^2 + 2r\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2)$$

Wenn nun $\Delta x = o = dx$ wird, so ist auch $\Delta U = o = dU$, und die Grenzen von $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ sind einander gleich. Man erhält also

$$\frac{dU}{dx} = \frac{h}{2r}(2rx - xx)$$

und $$U = \frac{h}{2r}\left(\frac{2rx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C$$

Wenn $x = o$, so ist auch $U = o$, mithin $C = o$ und wenn $x = 2r$; so ist

$$U = \frac{h}{2r}\left(4r^3 - \frac{8r^3}{3}\right) = \tfrac{2}{3}hr^2 = \frac{hr}{2} \cdot \frac{4r}{3} = CED \cdot \tfrac{4}{3}AC.$$

Man sehe Belidors neuen Cursus der Mathematik.

Von

Von der Methode durch Näherung zu integriren.

§. 26.

Hier kann nur von mehrgliedrigen Differenzialien die Rede seyn, welche von den Regeln, die wir oben gegeben haben, eine Ausnahme machen. Die Art durch Näherung zu integriren, bestehet darin, daß man die vorgegebene Grösse in eine convergente Reihe von Monomien verwandelt, das Integrale eines jeden Gliedes sucht, und aus den Umständen der Aufgabe die Anzahl dieser Glieder bestimmt.

§. 27.

Wenn man die Grösse eines Kreisbogens AM aus seinem Sinu verso AP bestimmen soll; so verfährt man folgendergestalt: *Fig. 9.*

Es sey nun $AP = x$; der Durchmesser $AB = 1$; der Bogen $AM = u$; so ist $PM = \sqrt{(x - xx)}$ und wie die Differenzialrechnung lehrt,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

oder

$$du = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x - xx)}}$$

Daraus folgt

$$u = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x - xx)}} = \int \frac{\frac{1}{2}dx}{x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(1 - x)}}$$

$$= \int \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 - x)^{-\frac{1}{2}}.$$ Nun ist aber

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{5}{16}x^3 + etc.$$

Mithin

$$\int \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx(1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{5}{16}x^3 + etc.)$$

$$= x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + etc.$$

Zu diesem Integrale darf man keine beständige Grösse hinzusetzen, weil es verschwindet, wenn $x = 0$; denn alsdann ist auch der Bogen $AM = 0$. Wir erhalten demnach

Bog.

$$\text{Bog. } AM = x^{\frac{1}{2}}(1 + \tfrac{1}{6}x + \tfrac{3}{40}x^2 + etc.)$$

Weil der Sinus versus in allen den Fällen, in welchen der Bogen AM kleiner als die halbe Peripherie ist, auch kleiner als der Durchmesser 1 ist; so ist x ein Bruch. Die Glieder der obigen Reihe nehmen mithin desto geschwinder ab; je kleiner der Sinus versus des Bogens ist, dessen Grösse man bestimmen will. Wenn die Grösse eines Bogens gefunden werden soll, dessen Sinus versus der hundertste Theil des Durchmessers ist; so hat man $x = \frac{1}{100} = 0,01$ und folglich $x^{\frac{1}{2}} = 0,1$; daher

$$AM = 0,1\left(1 + \frac{0,01}{6} + \frac{3(0,01)^2}{40} + \frac{5}{112}(0,01) + etc.\right)$$

und da das folgende Glied dieser Reihe wenigstens hundertmal kleiner ist, als das Glied $\frac{5}{112}(0,01)^3$, so können wir von dem Grad der Genauigkeit, mit welchem die Grösse dieses Bogens bestimmt seyn wird, wenn wir uns an diese vier Glieder halten, ein Urtheil fällen, wenn wir jenes letzte Glied mit hundert dividiren. Nun ist $\frac{5}{112}(0,01)^3 = \frac{5}{112}(0,000001)$ $= \frac{0,000005}{112} = 0,0000000446$, und mit hundert dividirt, gibt $0,000000000446$.

Wenn wir demnach jedes Glied der obigen Reihe auf zehn Dezimalstellen berechnen; so können wir sicher daraus schließen, daß bei Berechnung der Größe des Bogens nicht um Eine Einheit bei der neunten Dezimalstelle gefehlt seyn wird. Wir erhalten:

$$\frac{5}{112}(0,01)^3 = 0,0000000446;$$

$$\frac{3}{40}(0,01)^2 = 0,0000075000;$$

$\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$. Mithin ist die Summe der obigen Reihe $= 0,1(1,0016742112) = 0,100167421$, wenn man bei 9 Dezimalstellen stehen bleibt, zu welchen man gar wohl noch die zehnte hätte hinzusetzen können.

Dieß

Dieß ist die Grösse eines Bogens, dessen Sinus versus dem hundertsten Theil des Durchmessers gleich ist.

Man könnte eine der ganzen Peripherie sich ziemlich nähernde Grösse finden, wenn man die gefundene Länge des Bogens AM durch die Zahl multiplizirte, welche anzeigt, wie oft die Anzahl der Grade dieses Bogens in 360^0 enthalten ist. Aber die Schwierigkeit bestehet darin, daß wir diese Zahl nicht wissen.

Da der Sinus von 30 Grad der Hälfte des Halbmessers gleich ist, und da man aus dem Sinus eines Bogens leicht seinen Sinus versus finden kann; so könnte man den Sinus versus von 30 Grad berechnen, denselben statt x in die obige Reihe setzen und das Resultat mit 12, als dem Quozienten von 360, mit 30 dividirt, multipliziren, wodurch man eine der Peripherie des Kreises sich nähernde Grösse finden würde. Weil aber in diesem Fall die obige Reihe wenig convergent wird, und man also genöthiget seyn würde, eine grosse Anzahl von Glieder zu berechnen, um ein der Wahrheit nur einigermaßen sich näherndes Resultat herauszubringen; so sind wir genöthiget, auf andere Mittel zu denken, wofern wir unsere Absicht erreichen wollen.

§. 28.

Wenn die Tangente eines Kreisbogens $= x$; der Bogen $= \varphi$ und der Halbmesser $= a$; so ist $d\varphi = \frac{aadx}{aa + xx}$ und $\varphi = \int \frac{aadx}{aa + xx} = \int aadx\,(aa + xx)^{-1}$.

Nun ist $(aa + xx)^{-1} = a^{-2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}\,etc.\right)$

Daher

$$\int \frac{aadx}{(aa + xx)} = \int dx\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - etc.\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} - \frac{x^6}{7a^6} + \frac{x^8}{9a^8} - etc.\right)$$

Es kommt also nur darauf an, ob wir einen Bogen kennen, welcher einigemal in der Peripherie enthalten und dessen Tangente

gente bekannt ist. Nun ist der Bogen von 45 Grad in diesem Fall; er ist 8mal in der Peripherie enthalten und seine Tangente ist dem Halbmesser gleich. Setzt man also $x = a$, so findet man für die Länge des Bogens φ folgende Reihe:

$$a(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + etc.)$$

Da aber die Glieder dieser Reihe noch sehr langsam abnehmen, so muß man zusehen, ob man den Bogen von 45 Grad nicht in zwei andere Bogen zerlegen könne, deren Tangenten bekannt sind. Es ist nicht nöthig, daß man die Anzahl der Grade jeder dieser Bogen wisse; wenn nur ihre Summe $= 45$ Grad ist, so ist dieses zu unserer Absicht hinreichend. Wenn wir einmal die Länge eines jeden Bogens aus seiner Tangente bestimmet haben werden, so werden wir beide Längen zusammen addiren und dadurch die Länge des Bogens von 45 Grad erhalten. Da diese Bogen kleiner sind, als der Bogen von 45 Grad, so sind ihre Tangenten kleiner als der Halbmesser, und folglich die Reihe für die Länge eines jeden Bogens convergenter und leichter zu berechnen.

Wenn b und c zwei beliebige Bogen sind; so hat man $Tang.(b + c) = \frac{Tang.\,b + Tang.\,c}{1 - Tang.\,b\,Tang.\,c}$, wofern der Halbmesser $= 1$. Wenn also $b + c = 45$ Grad, in welchem Falle $Tang.(b + c) = 1$, so hat man

$$\frac{Tang.\,b + Tang.\,c}{1 - Tang.\,b.\,Tang\,c} = 1$$

und

$$Tang.\,b = \frac{1 - Tang.\,c}{1 + Tang.\,c}$$

Setzt man $Tang.\,c = \frac{1}{2}$, so ist

$$Tang.\,b = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Man darf daher nur die Länge eines Bogens berechnen, dessen Tangente $= \frac{a}{2}$ und eines andern, dessen Tangente $= \frac{a}{3}$.

Setzt man also zuerst $\frac{a}{2}$ statt x, so erhält man die Reihe

$\frac{a}{2}$

$$\frac{a}{2}\left(1-\frac{1}{3.2^4}+\frac{1}{5.2^4}-\frac{1}{7.2^6}+\frac{1}{9.2^8}-\frac{1}{11.2^{10}}+etc.\right)$$

und dann $\frac{a}{3}$ statt x, so bekommt man die Reihe

$$\frac{a}{3}\left(1-\frac{1}{3.3^2}+\frac{1}{5.3^4}-\frac{1}{7.3^6}+\frac{1}{9.3^8}-\frac{1}{11.3^{10}}+\frac{1}{13.3^{12}}etc.\right)$$

Stellt man diese Rechnung würklich an und berechnet jede Reihe auf 10 Dezimalstellen, so findet man für den Werth der ersten Reihe

$$\frac{a}{2}(0,9272952180) \text{ oder } a(0,4636476090$$

und für den Werth der zweiten Reihe

$$\frac{a}{3}(0,9652516632) \text{ oder } a(0,3217505544)$$

Mithin ist die Länge des Bogens von 45 Grad,

$$= a(0,7853981634)$$

und dieses mit 4 multiplizirt, um die halbe Peripherie zu bekommen, gibt $a(3,1415926536)$. Es verhält sich also der Halbmesser zu der halben Peripherie, oder der Durchmesser zu der Peripherie $= a : a(3,1415926536) = 1 : 3,1415926536$, ein Verhältniß, welches man leicht, vermittelst der vorhergehenden Methode noch genauer finden kann.

Von den hyperbolischen Logarithmen.

§. 29.

Wenn x den Unterschied einer beliebigen Ordinate in der logarithmischen Linie von der Ordinate 1 bezeichnet; so kann durch $1+x$ die Grösse dieser Ordinate vorgestellet werden. Die Aufgabe ist: Man soll die zu dieser Ordinate gehörige Abscisse oder den Logarithmen der Zahl $(1+x)$ finden.

Es

Es sey a die Subtangente in dieser logarithmischen Linie: so ist $d\,log.(1+x) = \frac{adx}{1+x} = adx(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8 - x^9 + etc.)$ Integrirt man nun diese Reihe, so erhält man nothwendig

$$log.(1+x) = a\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - etc.\right)$$

Diese Reihe ist jedoch zu wenig convergent; deßwegen ist sie zu Berechnung der hyperbolischen Logarithmen nicht bequem genug. Indessen können vermittelst derselben folgende Wahrheiten entdeckt werden.

§. 30.

Wenn der Ausdruck $1 + \frac{\Delta x}{x}$ gegeben ist, dessen Logarithmus gefunden werden soll; so setze man $\frac{\Delta x}{x} = y$, und es ist

$$log.(1+y) = a\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - etc.\right)$$

Folglich auch

$$log.\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = a\left(\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{1.2.x^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3.x^3} - \frac{\Delta x^4}{1.2.3.4.x^4} etc.\right)$$

Auf eben die Art findet man

$$log.\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = a\left(\frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta y^2}{1.2.y^2} + \frac{\Delta y^3}{1.2.3.y^3} - \frac{\Delta y^4}{1.2.3.4.y^4} etc.\right)$$

§. 31.

Man soll aus dem gegebenen Logarithmus die dazu gehörige Zahl finden. Der gegebene Logarithmus sey $= z$. Da ist also

$$log.(1+x) = z \text{ und mithin}$$

$$\frac{z}{a}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + etc.\right)$$

Nun

Nun nehme man an, es sey

$$x = \frac{Az}{a} + \frac{Bz^2}{a^2} + \frac{Cz^3}{a^3} + \frac{Dz^4}{a^4} + etc.$$

wo die Coeffizienten A, B, C, D folgendermaaßen bestimmt werden. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{z}{a} = \frac{Az}{a} &+ \frac{Bz^2}{a^2} + \frac{Cz^3}{a^3} + \frac{Dz^4}{a^4} + etc.\\ &- \frac{A^2z^2}{2a^2} - \frac{2ABz^3}{2a^3} - \frac{B^2z^4}{2a^4}\\ &+ \frac{A^3z^3}{3a^3} - \frac{2ACz^4}{2a^4}\\ &+ \frac{3A^2Bz^4}{3a^4}\\ &- \frac{A^4z^4}{4a^4}\end{aligned}$$

Wenn diese Gleichung wahr seyn soll; so muß 1) $A = 1$, 2) die Summe der Glieder, welche in jeder Potenz von z multiplizirt sind, $= 0$ seyn.

Wir erhalten also

$$B - \frac{A^2}{2} = 0,\ C - AB + \frac{A^3}{3} = 0,$$

$$D - \frac{B^2}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0,$$

woraus folgt

$$B = \frac{1}{1.2},$$

$$C = \frac{1}{1.2.3},$$

$$D = \frac{1}{1.2.3.4},$$

und eben so würde man finden

$$E = \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

$$F = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} \text{ u. s. w.}$$

Daher erhalten wir

$$x = \frac{z}{a} + \frac{z^2}{1.2.a^2} + \frac{z^3}{1.2.3.a^3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.a^4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5.a^5} + etc.$$

und

$$1 + x = 1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{1.2.a^2} + \frac{z^3}{1.2.3.a^3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.a^4} + etc.$$

in welcher Reihe die Zahl $1 + x$ durch ihren Logarithmen z ausgedrückt ist.

§. 32.

Man kann jede Größe, wie b^y, als die Ordinate einer logarithmischen Linie betrachten, und da x der Unterschied dieser Ordinate von der Ordinate 1 seyn kann; so ist man auch berechtiget, $b^y = 1 + x$ anzunehmen. Da nun der Logarithme von b^y ist $y \log. b = z$; so findet man

$$b^y = 1 + \frac{y \log. b}{a} + \frac{y^2 (\log. b)^2}{1.2.a^2} + \frac{y^3 (\log. b)^3}{1.2.3.a^3} + \frac{y^4 (\log. b)^4}{1.2.3.4.a^4} + etc.$$

Gleiche Bewandniß hat es mit $b^{\Delta y}$ und man findet

$$b^{\Delta y} = 1 + \frac{\Delta y \log. b}{a} + \frac{\Delta y^2 (\log. b)^2}{1.2.a^2} + \frac{\Delta y^3 (\log. b)^3}{1.2.3.a^3} + etc.$$

Eben so kann $(y + \Delta y)^{\Delta t}$ als die Ordinate einer gewisser logarithmischen Linie angesehen werden, und man ist berechtiget, $(y + \Delta y)^{\Delta t} = 1 + x$ zu setzen. Da $\Delta t \log. (y + \Delta y)$ der Logarithme von jenem Ausdruck ist, so erhält man

$$(y + \Delta y)^{\Delta t} = 1 + \frac{\Delta t \log. (y + \Delta y)}{a} + \frac{\Delta t^2 (\log. (y + \Delta y))}{1.2.a^2}$$

$$\frac{\Delta t^3 (\log. (y + \Delta y))^3}{1.2.3.a^3} + etc.$$

§. 33.

§. 33.

Wenn das logarithmische System angenommen wird, in welchem die Subtangente $= 1$, und man die Zahl wissen will, deren Logarithme $= 1$; so findet man

$$1 + x = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + etc.$$

$= 2,718281828459$ und schränkt man sich nur auf sieben Dezimalstellen ein; so ist $1 + x = 2,7182818$.

§. 34.

Diese Zahl, deren Logarithme $= 1$, kommt in den algebraischen Calculs häufig vor. Man pflegt sie gewöhnlich durch e zu bezeichnen. Wenn $x = log.y$; so ist $x\, log.e = log.y$ und $log.e^x = log.y$. Daher auch $e^x = y$. Aber, vermöge der Voraussetzung, $log.(1 + x) = z$; mithin $1 + x = e^z$. Da findet man also

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + etc.$$

Auf eben die Art findet man, daß

$$e^{mz} = 1 + mz + \frac{m^2z^2}{1.2} + \frac{m^3z^3}{1.2.3} + \frac{m^4z^4}{1.2.3.4} + etc.$$

Ich suche nun eine convergentere Reihe, den Logarithmen einer Zahl zu finden.

Zuerst werde ich den Logarithmen eines uneigentlichen Bruches suchen, und dann zeigen, daß dadurch der Logarithme einer jeden Zahl gefunden werden könne. Die Subtangente $= 1$.

Es sey b die Summe des Zählers und Nenners des uneigentlichen Bruches, und x der Unterschied derselben. Der Bruch ist also $= \frac{b + x}{b - x}$ und $log.\frac{b + x}{b - x} = log.(b + x) - log.(b - x)$. Weil nun b als eine beständige Grösse angenommen werden muß; so ist

$$d\,log.\left(\frac{b+x}{b-x}\right)=\frac{dx}{b+x}+\frac{dx}{b-x}=\frac{2bdx}{b^2-x^2}\text{ und}$$

$$2bdx(b^2-x^2)^{-1}=2\left[\frac{dx}{b}+\frac{x^2dx}{b^3}+\frac{x^4dx}{b^5}+\frac{x^6dx}{b^7}\,etc.\right]$$

Das Integrale dieser Reihe ist nothwendig $=log.\left(\frac{b+x}{b-x}\right)$ und man erhält folglich

$$log.\left(\frac{b+x}{b-x}\right)=2\left[\frac{x}{b}+\frac{x^3}{3b^3}+\frac{x^5}{5b^5}+\frac{x^7}{7b^7}+\frac{x^9}{9b^9}+etc.\right]$$

Diese Reihe nähert sich schneller, als die Reihe §. 29. weil die Glieder um zwei Grade zunehmen.

§. 35.

Der Bruch $\frac{b+x}{b-x}$ solle alle mögliche uneigentliche Brüche vorstellen, und doch habe ich die Summe des Zählers und Nenners, nemlich b, als eine beständige Größe angenommen. Dieß ist aus der Ursache geschehen, weil man einen jeden Bruch, unbeschadet seines Werths, so einrichten kann, daß die Summe seines Zählers und Nenners einer beständigen Größe gleich ist. Die Summe des Zählers und Nenners des Bruchs $\frac{5}{4}$ soll, zum Beispiel, $=15$ seyn. Man multiplizire Zähler und Nenner mit p; so ist, vermöge der Voraussetzung, $5p+4p=15$, mithin $p=\frac{5}{3}$. Folglich der neue Bruch

$$=\frac{\frac{25}{3}}{\frac{20}{3}}$$ welcher die verlangte Eigenschaft hat.

§. 36.

Zu meiner Absicht ist es hinreichend, nur die Logarithmen der Zahlen 2 und 10 zu suchen. Um den Logarithmen der Zahl 2 zu finden, muß man den Logarithmen des Bruchs $\frac{2}{1}$ berechnen. Da ist also $b=3$ und $x=1$; daher

$\frac{x}{b}$

$\frac{x}{b} = \frac{1}{3}$ und es findet sich

$$\frac{x}{b} = 0,333333333$$

$$\frac{x^3}{3b^3} = 0,012345679$$

$$\frac{x^5}{5b^5} = 0,000823045$$

$$\frac{x^7}{7b^7} = 0,000005645$$

$$\frac{x^{11}}{11b^{11}} = 0,000000513$$

$$\frac{x^{13}}{13b^{13}} = 0,000000048$$

$$\frac{x^{15}}{15b^{15}} = 0,000000004$$

Davon ist die Summe

$$= 0,346573588$$

und demnach

$$log. 2 = 0,693147176$$

woraus folgt

$$log. 8 = 2,079441528.$$

§. 37.

Um den Logarithmen der Zahl 10 zu finden, muß man den Logarithmen des Bruchs $\frac{10}{8}$ berechnen.

Es ist also $b = 18$ und $x = 2$. Mithin $\frac{x}{b} = \frac{1}{9}$ und

$$\frac{x}{b} = 0,111111111$$

$$\frac{x^3}{3b^3} = 0,000457201$$

$$\frac{x^5}{5b^5} = 0,000003387$$

$$\frac{x^7}{7b^7} = 0,000000029$$

Davon ist die Summe

$$= 0,111571728$$

und mithin

$$log.\frac{10}{8} = 0,22314345$$

Da nun $10 = \frac{10.8}{8}$; so ist

$$log.10 = log.\frac{10}{8} + log.8 =$$

$$0,22314345 + 2,07944153$$

$= 2,30258509$, der hyperbolische Logarithme von 10.

§. 38.

Fig. 10. Es ist nicht schwer, aus diesen hyperbolischen Logarithmen die briggischen zu finden.

Ey seyen *BD*, *BE* zwo logarithmische Linien, deren gemeinschaftlicher Anfangspunkt der Abscissen in *A* ist. In der logarithmischen Linie *BE* sollen die Ordinaten in der geometrischen Progression 1, 10, 100, 1000 u. s. w. und die Abscissen in der arithmetischen Progression 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w. stehen, so, daß von $AB = 1$, der Logarithme $= 0$, und von der Ordinate 10 der Logarithme $= 1$ ist. Hier sey die Subtangente $= S$.

In der logarithmischen Linie *BD* sey ebenfalls 0 der Logarithmus von 1 und 1 der Logarithme der Zahl 2,7182818. In dieser Linie ist also die Subtangente $= 1$.

Man

Man ziehe in der logarithmischen Linie BE die beiden Ordinaten fg, hi; durch die Punkte f und h die Linien fk, hD mit der Axe AC parallel, um die Ordinaten kl, DC zu erhalten. Es sey $Ag = x$, $fg = y$; so ist $S = \frac{ydx}{dy}$ oder $\frac{S}{dx} = \frac{y}{dy}$. Ferner $Al = z$; so ist $\frac{1}{dz} = \frac{y}{dy}$; mithin $\frac{S}{dx} = \frac{1}{dz}$ oder $Sdz = dx$, woraus folgt $Sz = x$ und $S : 1 = x : z$.

Die Subtangente der logarithmischen Linie BE verhält sich also zu der Subtangente der logarithmischen Linie BD, wie die zu der Ordinate fg gehörige Abscisse zu der für die Ordinate kl gehörige Abscisse, oder: die Logarithmen, welche zu einerlei Zahlen in diesen beiden logarithmischen Systemen gehören, verhalten sich wie die Subtangenten der logarithmischen Linien, davon sie Abscissen sind. Also verhält sich der natürliche Logarithme von 10 zu dem briggischen Logarithmen von 10, wie $1 : S$ oder

$$2,3025809 : 1 = 1 : S$$

mithin $S = 0,43429448$.

§. 39.

Ist also der hyperbolische Logarithme einer Zahl gegeben; so kann man daraus, daß $x = Sz$, leicht den Logarithmen des briggischen Systems finden. Zum Beispiel, es ist

$$log. 2 = 0,693147176,$$

Mithin $\frac{0,693147176}{0,43429448} = Z = 0,3010300$

der briggische Logarithme von 2.

Man findet also den briggischen Logarithmen, wenn man den natürlichen Logarithmen eben der Zahl mit $0,43429448$ dividirt oder mit $2,3025809$ multiplizirt. Und den natürlichen Logarithmen findet man, wenn man den briggischen mit $0,43429448$ multiplizirt, oder mit $2,3025809$ dividirt.

§. 40.

Bei der gewöhnlichen Hyperbel ist $xy = 1$, wenn die Ordinaten auf den Abscissen senkrecht angenommen werden

und es ist mithin $\int ydx = \frac{\log. x}{1}$. Demnach ist der Inhalt dieser hyperbolischen Räume zugleich der Logarithme von x, dividirt mit Eins: oder man findet die Logarithmen der Abscissen in einer logarithmischen Linie, deren Subtangente $= 1$, wenn man jene hyperbolische Räume quadrirt. Aus dieser Verwandschaft der logarithmischen Linie, deren Subtangente $= 1$, mit der gewöhnlichen Hyperbel, ist der Name hyperbolische Logarithmen entstanden.

Von den Differenzialien der Exponenzial-Grössen.

§. 41.

Man nennet solche Grössen, welche zu einer Potestät erhoben sind, deren Exponent eine veränderliche Grösse ist, Exponenzial-Grössen. Dergleichen sind b^y, y^t u. s. w.

Bei den folgenden Untersuchungen wird die Subtangente in der logarithmischen Linie $= 1$ angenommen.

Es sey $z = b^y$. Wenn y um Δy wächst, so wird auch z um eine gewisse Grösse wachsen, welche man durch Δz zu bezeichnen pflegt. Man findet

$$\Delta z = b^y(b^{\Delta y} - 1)$$

Aber

$$b^{\Delta y} - 1 = \Delta y \log. b + \frac{\Delta y^2}{1.2}(\log. b)^2 + \frac{\Delta y^3}{1.2.3}(\log. b)^3 + etc.$$

woraus folgt

$$\Delta z = b^y \Delta y \log. b + \frac{b^y \Delta y^2}{1.2}(\log. b)^2 + \frac{b^y \Delta y^3}{1.2.3}(\log. b)^3 + etc.$$

oder

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = b^y \log. b + \frac{b^y \Delta y}{1.2}(\log. b)^2 + \frac{b^y \Delta y^2}{1.2.3}(\log. b)^3 + etc.$$

Wenn $\Delta y = 0 = dy$ wird, so ist auch $\Delta z = 0 = dz$ und $\frac{dz}{dy} = b^y \log. b$, welches man gewöhnlich so ausdrückt:

$dz =$

$$dz = b^y dy \log. b$$

und die Regel gibt: man findet das Differenzial einer Exponenzialgrösse, wenn man dieselbe mit dem Differenzial ihres Logarithmen multiplizirt. Denn $y \log. b$ ist der Logarithme von b^y.

§. 42.

Ferner sey $z = y^t$. Wenn alle diese veränderliche Grössen zugleich wachsen, so erhält man

$$z + \Delta z = (y + \Delta y)^{t + \Delta t}$$

und

$$\Delta z = (y + \Delta y)^{t + \Delta t} - y^t$$
$$= (y + \Delta y)^t (y + \Delta y)^{\Delta t} - y^t.$$

Aber

$$(y + \Delta y)^{\Delta t} = 1 + \Delta t \log.(y + \Delta y) + \frac{\Delta t^2}{1.2}(\log.(y + \Delta y))^2$$
$$+ \frac{\Delta t^3}{1.2.3}(\log.(y + \Delta y))^3 + etc.$$
$$= 1 + \Delta t \log. y\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) + \frac{\Delta t^2}{1.2}(\log.(y + \Delta y))^2$$
$$+ \frac{\Delta t^3}{1.2.3}(\log.(y + \Delta y))^3 + etc.$$
$$= 1 + \Delta t \log. y + \Delta t \log.\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) + \frac{\Delta t^2}{1.2}(\log.(y + \Delta y))^2$$
$$+ \frac{\Delta t^3}{1.2.3}(\log.(y + \Delta y))^3 + etc.$$

Aber

$$\log.\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{\Delta y}{y} - \frac{\Delta y^2}{1.2y^2} + \frac{\Delta y^3}{1.2.3y^3} - + etc.$$

Mithin $(y + \Delta y)^{\Delta t}$

$$= 1 + \Delta t \log. y + \frac{\Delta t \Delta y}{y} - \frac{\Delta t \Delta y^2}{1.2.y^2} + \frac{\Delta t \Delta y^3}{1.2.3.y^3} - + etc.$$
$$+ \frac{\Delta t^2}{1.2}(\log.(y + \Delta y))^2 + \frac{\Delta t^3}{1.2.3}(\log.(y + \Delta y))^3 + etc.$$

Demnach

$$\Delta z = (y + \Delta y)^t (y + \Delta y)^{\Delta t} - y^t$$

$$= (y + \Delta y)^t + (y + \Delta y)^t \Delta t \log. y + (y + \Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y}{y}$$

$$- \frac{(y + \Delta y)^t \Delta t \Delta y^2}{1.2.y^2} + (y + \Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y^3}{1.2.3.y^3} - + etc.$$

$$+ \frac{(y + \Delta y)^t \Delta t^2}{1.2} (\log.(y + \Delta y))^2$$

$$+ \frac{(y + \Delta y)^t \Delta t^3}{1.2.3} (\log.(y + \Delta y))^3 + etc.$$

$$- y^t.$$

Aber

$$(y + \Delta y)^t = y^t + t y^{t-1} \Delta y + \frac{t.t - 1}{1.2} y^{t-2} \Delta y^2$$

$$+ \frac{t.t - 1.t - 2}{1.2.3} y^{t-3} \Delta y^3 + etc.$$

Folglich

$$\Delta z = y^t + t y^{t-1} \Delta y + \frac{t.t - 1.}{1.2} y^{t-2} \Delta y^2$$

$$+ \frac{t.t - 1.t - 2}{1.2.3} y^{t-3} \Delta y^3 + etc.$$

$$+ (y + \Delta y)^t \Delta t \log. y + (y + \Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y}{y}$$

$$- (y + \Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y^2}{1.2.y^2} + (y + \Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y^3}{1.2.3.y^3} - + etc.$$

$$+ \left(\frac{y + \Delta y}{1.2}\right)^t \Delta t^2 (\log.(y + \Delta y))^2$$

$$+ \left(\frac{y + \Delta y}{1.2.3}\right)^t \Delta t^3 (\log.(y + \Delta y))^3 + etc.$$

$$- y^t$$

Das

Das heißt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = ty^{t-1} + \frac{t.t-1.}{1.2} y^{t-2}\Delta y + \frac{t.t-1.t-2}{1.2.3} y^{t-3}\Delta y^2 etc.$$

$$+ (y+\Delta y)^t \frac{\Delta t}{\Delta y} log.y + (y+\Delta y)^t \frac{\Delta t}{y}$$

$$- (y+\Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y}{1.2.y^2} + (y+\Delta y)^t \frac{\Delta t \Delta y^2}{1.2.3.y^3} - + etc.$$

$$+ \frac{(y+\Delta y)^t \Delta t^2}{1.2\Delta y} (log.(y+\Delta y))^2$$

$$+ \frac{(y+\Delta y)^t \Delta t^3}{1.2.3.\Delta y} (log.(y+\Delta y))^3 + etc.$$

Wenn nun $\Delta x = o = dx$; so ist auch $\Delta x = o = dy$ und $\Delta z = o = dz$. Mithin

$$\frac{dz}{dy} = \frac{ty^t}{y} + y^t \frac{dt}{dy} log.y$$

Gewöhnlich drückt man dieses so aus

$$dz = \frac{ty^t dy}{y} + y^t dt\, log.y = y^t \left(\frac{tdy}{y} + dt\, log.y \right)$$

und gibt eben die Regel, welche wir schon §. 12. angeführet haben.

§. 43.

Wenn $z = e^y$, wo nemlich e die Zahl ist, deren Logarithme $= 1$, so erhalten wir

$$\frac{dz}{dy} = e^y log.e = e^y$$

welches man gewöhnlich so ausdrückt $dz = e^y dy$.

Nun ist man im Stande, folgende Ausdrücke zu differenziiren:

$$d(a^x + y^z) = a^x dx\, log.a + y^z \left(dz\, log.y + \frac{zdy}{y} \right)$$

Und

Und

$$d(a^2+x^2)^x = (aa+xx)^x(dx\log.(aa+xx)) + \frac{2x^2dx}{aa+xx}$$

u. s. w.

Von der Integrazion logarithmischer Differenzialien.

§. 44.

Wir haben gesehen, daß $d\log.x = \frac{dx}{x}$ (Differenz. Rechn. §. 55. 56.) Daher ist umgekehrt $\int\frac{dx}{x} = \log.x + C$. Ferner $d\log.ax = \frac{adx}{xdx} = \frac{dx}{x}$ und $\log.ax = \log.x + C$, wo $C = \log.a$ seyn muß.

§. 45.

Ferner findet man

$$\int\frac{dx}{a+x} = \log.(a+x) + C$$

und

$$\int\frac{2xdx}{aa+xx} = \log.(aa+xx) + C.$$

In solchen Fällen ist also das Integrale der Logarithme des Nenners.

Um aber $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$ zu integriren, muß man diesem Differenziale eine solche Gestalt geben, daß das Differenziale des Nenners, nemlich $3x^2dx$, im Zähler vorkomme. Deßwegen muß man es so ausdrücken $\frac{a}{3}\cdot\frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$ und man findet dessen Integrale $= \frac{a}{3}\log.(a^3+x^3) + C$. Eben so ist

$$\int\frac{dx}{a-x}$$

$$\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{1}{-1} \cdot -\frac{1 \cdot dx}{a-x} = -\log.(a-x) + C$$

$$= \log. 1 - \log.(a-x) + C = \log. \frac{1}{a-x} + C$$

Ferner $$\int \frac{xdx}{aa+xx} = \tfrac{1}{2} \int \frac{2xdx}{aa+xx}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log.(aa+xx) + C = \log. \sqrt{(aa+xx)} + C.$$

Endlich $$\int \frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n} = \int \frac{a}{bn} \cdot \frac{nbx^{n-1}dx}{k+bx^n}$$

$$= \frac{a}{bn} \log.(k+bx^n) + C = \log.(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}} + C$$

§. 46.

Hier ist ein Beyspiel von der Art, wie man den Werth solcher Integralien in Zahlen bestimmen könne. Wenn man, zum Beispiel, nach dem Werth von $\log.(a+x)$ fragt, wenn $a = 5$ und $x = 2$; so muß man den hyperbolischen Logarithmen von 7 suchen. In dieser Absicht suche ich in den gewöhnlichen Tafeln den briggischen Logarithmus von 7, welcher ist 0,8450980. Ich multiplizire denselben mit 2,3025809 oder mit 2,3025851 und erhalte 1,9459100 oder 1,94591 für den Werth von $\log.(a+x)$ oder für den Werth des Integrals von $\frac{dx}{a+x}$, wenn $a = 5$ und $x = 2$.

§. 47.

Es kommen manchmal Differenzialien vor, die man durch Logarithmen integriren kann, obgleich sie nicht unter eben der Gestalt, wie die vorhergehenden erscheinen. Das Differenziale $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ gehört für diesen Fall. Es gelingt manchmal, denselben die Gestalt eines logarithmischen Differenzials zu geben, wenn man sie mit einer solchen Function von x multiplizirt, daß das daraus entstehende Produkt das Differenziale dieser

ser Function oder wenigstens ihr Differenziale, multiplizirt oder dividirt mit einer beständigen Grösse, ist. Dividirt man alsdenn mit der nemlichen Function wieder; so ist das Differenziale augenscheinlich ein logarithmisches Differenziale. Wenn man diese Bemerkung auf das Differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$$

anwendet, so multiplizire man dasselbe mit $x\sqrt{(xx-1)}$, wodurch man erhält $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}+dx$, welches in der That das Differenziale von $x+\sqrt{(xx-1)}$ ist. Mithin erhält man

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}=\int\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$$
$$=log.(x+\sqrt{(xx-1)})+C$$

Auf eben diese Art findet man das Differenziale von $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, wenn man den Zähler und Nenner mit $\sqrt{(-1)}$ multiplizirt, wodurch man erhält $\frac{dx\sqrt{(-1)}}{\sqrt{(xx-1)}}$, dessen Integrale $=\sqrt{(-1)}log.(x+\sqrt{(xx-1)})+C$ ist.

Von der Integrazion der Differenzialien der Exponenzial-Grössen.

§. 48.

Man kann hier keine andere Regel festsetzen, als daß man sich bemühen muß, das vorgegebene Differenziale in zwey andere Factoren zu zerlegen, davon der eine das Differenzial des Logarithmen des andern ist. Wenn dieß geschehen ist; so dividirt man mit diesem andern Factor. Man siehet also leicht, daß $x^y\left(dy\,log.x+\frac{ydx}{x}\right)$ einer Integrazion fähig ist, weil

der

der Factor $dy\,log.\,x + \frac{ydx}{dx}$ das Differenziale von $y\,log.\,x$ ist, und $y\,log.\,x$ ist der Logarithme von x^y. Man erhält also für das Integrale

$$\frac{x^y\left(dy\,log.\,x + \frac{ydx}{x}\right)}{d(log.\,x^y)} + C$$

$$= \frac{x^y\left(dy\,log.\,x + \frac{ydx}{x}\right)}{dy\,log.\,x + \frac{ydx}{x}} + C$$

$$= x^y + C.$$

Eben so erhellet, daß auch $e^{ax}dx$ einer Integrazion fähig sey, weil dx das Differenziale des Logarithmen von e^{ax}, dividirt mit einer beständigen Grösse, ist. Man erhält also

$$\int dx e^{ax} = \frac{e^{ax}dx}{a\,log.\,edx} = \frac{e^{ax}}{a\,log.\,e}.$$

Ist nun e die Zahl, deren Logarithme $= 1$; so findet man also das Integrale von $e^{ax}dx$, wenn man dieses Differenzial mit dem Differenzial des Exponenten von e dividiret.

§. 49.

Wenn das Differenziale $e^{ax}x^m dx$ gegeben ist und e die Zahl bezeichnet, deren Logarithme $= 1$, so ist $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

Man kann also setzen

$$\frac{e^{ax}x^m}{a} - f = \int e^{ax}x^m dx.$$

Differenziirt man, so wird

$$e^{ax}x^m dx + \frac{m}{a}x^{m-1}e^{ax}dx - df = e^{ax}x^m dx$$

Daher folgt also

$$\frac{m}{a}x^{m-1}e^{ax}dx = df.$$

Um

Um also f zu finden, so kommt es nur darauf an

$$\frac{m}{a} x^{m-1} e^{ax} dx \text{ zu integriren.}$$

Aber die Regel, ein solches Produkt zu integriren, wird erst aufgesuchet. Daher verfährt man mit demselben, wie oben, nemlich, man setzt

$$f = \frac{m x^{m-1} e^{ax}}{a^2} - g$$

weil $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$ ist.

Daraus findet man dg, wie vorhin df gefunden wurde. Es wird nemlich

$$df = \frac{m x^{m-1} e^{ax} dx}{a} = \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax} dx}{a^2} - dg.$$

Mithin $$dg = \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax} dx}{a^2}.$$

Es sey

$$g = \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax} dx}{a^2} - \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax} dx}{a^3} - dh$$

also $$dh = \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax} dx}{a^3}$$

Nun sey $$h = \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax}}{a^4} - f$$

Oben haben wir gefunden

$$\int e^{ax} x^m dx = \frac{e^{ax} x^m}{a} - f.$$

Mithin ist $$\int e^{ax} x^m dx = \frac{e^{ax} x^m}{a} - \frac{m x^{m-1} e^{ax}}{a^2}$$

$$+ \frac{m(m-1) x^{m-2} e^{ax}}{a^3} - \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3} e^{ax}}{a^4} + \ldots k$$

$$= e^{ax} \left(\frac{x^m}{a} - \frac{m x^{m-1}}{a^2} + \frac{m(m-1) x^{m-2}}{a^3} - \frac{m(m-1)(m-2) x^{m-3}}{a^4} + \ldots k \right)$$

Ist

Ist m eine ganze, positive Zahl, so bricht die Reihe ab, wenn der Exponent vorkommt, welcher in $m - m$ multiplizirt ist. Es sey, z. B. $m = 2$; so hat man

$$\int e^{ax} x^m dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$$

In diesem Fall wechseln die Glieder mit dem Zeichen + und — ab.

Wenn aber m eine ganze, verneinte Zahl ist, so hat man

$$\int \frac{e^{ax} dx}{x^m} = e^{ax}\left(\frac{1}{ax^m} + \frac{mx^{1-m}}{a^2} + \frac{m(1-m)x^{2-m}}{a^3} + etc.\right)$$

Nun sey wiederum $m = 2$; so ist

$$\int \frac{e^{ax} dx}{x^2} = e^{ax}\left(\frac{1}{ax^2} + \frac{2}{a^2 x} - \frac{1}{a^3}\right)$$

Es sey $m = \frac{2}{3}$, so ist, wenn wir diesen Werth in die erste Gleichung setzen,

$$\int e^{ax} x^{\frac{2}{3}} dx = e_{ax}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a} - \frac{2}{3a^2 x^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{a^3 x^{\frac{4}{3}}} + \frac{4}{3a^4 x^{\frac{4}{3}}} etc.\right)$$

und wenn wir ihn in die zweite setzen,

$$\int \frac{e^{ax} dx}{x^{\frac{2}{3}}} = e^{ax}\left[\frac{1}{ax^{\frac{2}{3}}} + \frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3a^2} - \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{9a^3} - \frac{8x^{\frac{7}{3}}}{27a^4} etc.\right]$$

§. 50.

Man kann die Zahl e, deren Logarithmus $= 1$, sehr vortheilhaft bei der Integrazion solcher Differenzialien gebrauchen, welche Logarithmen enthalten. Wenn man, zum Beispiel, $x^n dx (log.x)^m$ integriren soll, so setze man $log.x = z = z\, log.e$. Mithin ist $x = e^z$; $dx = e^z dz$ und

$$x^n dx (log.x)^m = z^m dz e^{(n+1)z},$$

welches Differenziale man in eben dem Fall, wie das vorige, algebraisch, und auf eben die Art, integriren kann.

Von der Integrazion solcher Differenzialien, in welchen Sinus und Cosinus vorkommen.

§. 51.

Wir haben gesehen, daß $d(Sin.\varphi) = d\varphi Cosin.\varphi$ und $d(Cosin.\varphi) = -d\varphi Sin.\varphi$ ist. Daher ist umgekehrt das Integrale der ersten Grösse $= Sin.\varphi + C$, und der zweiten $= Cosin.\varphi + C$. Auf diese beide Sätze kann man die Integrazion jedes Differenzials, in welchem Sinus und Cosinus vorkommen, bauen, wenn man übrigens die Regeln befolget, die wir bisher gegeben haben. Beispiele werden die Sache am deutlichsten machen.

Soll man $d\varphi Cosin.3\varphi$ integriren; so schreibe man statt dessen $\frac{3d\varphi Cosin.3\varphi}{3}$ und man findet das Integrale $= \frac{Sin.3\varphi}{3} + C$. Auf eben die Art findet man das Integrale von $d\varphi Sin.3\varphi$, wenn man statt dessen $\frac{-3d\varphi Sin.3\varphi}{-3}$ schreibt. Denn da ist das Integrale $= \frac{Cosin.3\varphi}{-3} + C$. Ueberhaupt verwandelt sich $\int d\varphi Sin.m\varphi$ in $\int \frac{-md\varphi Sin.m\varphi}{-m}$ und ist $= -\frac{Cosin.m\varphi}{m} + C$.

Soll man $(Sin.\varphi)^n d\varphi Cosin.\varphi$ integriren, so bedenke man, daß dieser Ausdruck $= (Sin.\varphi)^n d(Sin.\varphi)$ sey. Betrachtet man nun $Sin.\varphi$ als eine gewöhnliche veränderliche Grösse, wie x; so läßt sich jenes Differenziale wie $nx^{n-1}dx$ integriren, und man findet $\frac{(Sin.\varphi)^{n+1}}{n+1} + C$.

Wenn man $(Sin.m\varphi)^n d\varphi Cosin.m\varphi$ integriren soll, so schreibe man dafür

$$\frac{(Sin.m\varphi)^n md\varphi Cosin.m\varphi}{m} = \frac{(Sin.m\varphi)^n d(Sin.m\varphi)}{m},$$

dessen Integrale $= \frac{(Sin.m\varphi)^{n+1}}{m(n+1)} + C$.

Um

Um $\int (Cosin.m\varphi)^n d\varphi Sin.n\varphi$ zu finden, so schreibe man statt dessen

$$\int \frac{-(Cosin.m\varphi)^n m d\varphi Sin.m\varphi}{-m}$$

und man findet das Integrale

$$\frac{(Cosin\, m\varphi)^{n+1}}{-m(n+1)} + C.$$

Soll man $d\varphi Sin.p\varphi Cosin.q\varphi$ integriren, so muß man sich erinnern, daß $Sin.(a+b) = Sin.a\, Cosin.b + Sin.b\, Cosin.a$ $Sin.(a-b) = Sin.a\, Cosin.b - Sin.b\, Cosin.a$ sey, woraus folget:

$$Sin.a\, Cosin.b = \tfrac{1}{2} Sin.(a+b) + \tfrac{1}{2} Sin.(a-b)$$

Weil ferner

$$Cosin.(a+b) = Cosin.a\, Cosin.b - Sin.a\, Sin.b$$
$$Cosin.(a-b) = Cosin.a\, Cosin.b + Sin.a\, Sin.b;$$

so ist auch

$$Cosin.a\, Cosin.b = \tfrac{1}{2} Cosin.(a+b) + \tfrac{1}{2} Cosin.(a-b)$$

und

$$Sin.a\, Sin.b = \tfrac{1}{2} Cosin.(a-b) - \tfrac{1}{2} Cosin.(a+b)$$

Mithin ist

$$Sin.p\varphi Cosin.q\varphi = \tfrac{1}{2} Sin.(p+q)\varphi + \tfrac{1}{2} Sin.(p-q)\varphi.$$

Man soll also

$$\tfrac{1}{2} d\varphi Sin.(p+q)\varphi + \tfrac{1}{2} d\varphi Sin.(p-q)\varphi$$
$$= \frac{\tfrac{1}{2}(p+q) d\varphi Sin.(p+q)\varphi}{p+q} + \frac{\tfrac{1}{2}(p-q) d\varphi Sin.(p-q)\varphi}{p-q}$$

integriren, und das Integrale ist

$$= -\frac{\tfrac{1}{2} Cosin.(p+q)\varphi}{p+q} - \frac{\tfrac{1}{2} Cosin.(p-q)\varphi}{p-q} + C.$$

Auf eben diese Art integrirt man Differenzialien von dieser Form:

$$d\varphi Sin.p\varphi.\, Cosin.q\varphi.\, Sin.r\varphi,$$

wenn man diese Produkte in Sinus oder Cosinus der Summe oder Differenz der Bogen $p\varphi$, $q\varphi$, $r\varphi$ verwandelt.

Soll man $d\varphi (Sin.\varphi)^3$ integriren, so verwandle man dasselbe in $d\varphi\, Sin.\varphi (Sin.\varphi)^2$. Nun ist $(Sin.\varphi)^2 = Sin.\varphi\, Sin.\varphi$ $= \tfrac{1}{2} Cosin.(\varphi - \varphi) - \tfrac{1}{2} Cosin.(\varphi + \varphi) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} Cosin.2\varphi.$

Mithin $Sin.\varphi(Sin.\varphi)^2 = \frac{1}{2}Sin.\varphi - \frac{1}{2}Sin.\varphi Cosin.2\varphi$. Folglich $d\varphi(Sin.\varphi)^3 = \frac{1}{2}d\varphi Sin.\varphi - \frac{1}{2}d\varphi Sin.\varphi Cosin.2\varphi$.

Wenn man also mit $Sin.\varphi Cosin.2\varphi$ eben so verfähret, wie man mit $Sin.p\varphi Cosin.q\varphi$ verfahren ist; so hat alsdenn die Integrazion keine Schwierigkeit mehr.

Man siehet hieraus, wie man solche Ausdrücke $d\varphi(Sin.\varphi)^n$, $d\varphi(Cosin.\varphi)^n$, wo n eine positive und ganze Zahl bezeichnet, integriren müsse.

Auf eine ähnliche Art lassen sich solche Ausdrücke

$$d\varphi(Sin.p\varphi)^m(Cosin.q\varphi)^n(Sin.r\varphi)^s$$

wo m, n, s positive und ganze Zahlen sind, integriren.

Wenn in solchen Differenzialien ein Ausdruck für die Tangente vorkommt, so kann man denselben auf Sinus und Cosinus reduziren, weil $Tang.\varphi = \frac{Sin.\varphi}{Cosin.\varphi}$. u. s. w.

Von solchen Differenzialien, welche durch Kreisbogen, Kreissegmente u. s. w. integriret werden können.

§. 52.

Da logarithmische Tabellen, so wie auch Tabellen für den Sinus, Cosinus u. s. w. eines jeden Winkels berechnet worden sind; so ist es nicht nöthig, Differenzialien, welche sich entweder auf Logarithmen oder den Kreis beziehen, in Reihen aufzulösen; sondern man kann dieselbe auf folgende Art integriren.

§. 53.

Es läßt sich nemlich leicht zeigen, daß, zum Beispiel, der Ausdruck $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ das Differenziale eines Kreisbogens sey, dessen Durchmesser $= a$ und Abscisse $= x$ ist. Folglich sind das Integrale von $\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ax - xx)}}$ und die Länge des Bogens AM, *Fig. 9.* gleichbedeutende Ausdrücke. Fragt man

man also nach einem bestimmten Werth dieses Integrals, wenn x bestimmt ist; so subtrahire man von CA oder $\frac{1}{2}a$ den bekannten Werth von x oder PA; so erhält man CP.

In dem rechtwinklichten Dreyeck CMP ist also der rechte Winkel, die Hypothenus CM und die Seite CP bekannt. Daraus findet man den Winkel ACM. Kennt man aber die Anzahl Grede, welche der Bogen AM enthält; so kann man die Größe dieses Bogens leicht berechnen.

§. 54.

Ist das Differenziale

$$\frac{hdx}{\sqrt{(gkx - px^2)}}$$

gegeben, wo h, g, p und k beständige Grössen sind, so kann man dasselbe dem vorhergehenden ähnlich machen, wenn man erstlich Zähler und Nenner mit $\sqrt{p}$ dividirt, wodurch man erhält:

$$\frac{\frac{hdx}{\sqrt{p}}}{\sqrt{\left(\frac{gkx}{p} - xx\right)}} = \frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dk}{\sqrt{\left(\frac{gkx}{p} - xx\right)}}$$

Sodann Zähler und Nenner mit $\frac{gk}{2p}$ multiplizirt, woher man findet

$$\frac{h}{\frac{\sqrt{p}}{\frac{gk}{2p}}} \cdot \frac{\frac{gkdx}{2p}}{\sqrt{\left(\frac{gkx}{p} - xx\right)}} = \frac{2ph}{gk\sqrt{p}} \cdot \frac{\frac{gkdx}{2p}}{\sqrt{\left(\frac{gkx}{p} - xx\right)}}$$

und davon ist das Integrale die Länge eines Kreisbogens, dessen Durchmesser $= \frac{gk}{p}$ und Abscisse $= x$ ist, und welche noch mit $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$ multiplizirt werden muß.

§. 55.

Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen nicht in dem Punkt A, sondern in dem Punkt C an, und setzt den Halbmesser $CA = b$, die Abscisse $CP = x$; so ist

$$\frac{-bdx}{\sqrt{(bb - xx)}}$$

das Differenziale des Bogens AM. Ist also ein Differenziale von dieser Form

$$\frac{kdx}{\sqrt{(gh - pxx)}}$$

gegeben; so verwandle man dasselbe zuerst in

$$\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$$

Nun bedeutet $\frac{gh}{p}$ eben das, was vorhin bb in dem ersten Differenzial vorgestellt hat, und die Grösse $-b$ (der Factor von dx) ist im gegenwärtigen Fall $= -\frac{\sqrt{gh}}{k}$. Mit diesem multiplizire man Zähler und Nenner; so wird

$$\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\left(\frac{gh}{p}\right)}} \cdot -\frac{\sqrt{\left(\frac{gh}{p}\right)}dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$$

Setzt man nun $CA = \sqrt{\frac{gh}{p}}$ und $CP = x$; so ist

$$\frac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \cdot AM + C = \frac{-k}{\sqrt{gh}} \cdot AM + C$$

das gesuchte Integrale.

§. 56.

Es ist $\frac{aadx}{aa + xx}$ das Differenziale eines Kreisbogens, dessen Halbmesser $= a$ und Tangente $= x$ ist.

Die Grösse dieses Bogens kann man finden, wenn man aus der gegebenen Tangente x, den Winkel ACN suchet.

Wenn $\frac{kdx}{gb^2 + hxx}$ gegeben ist; so dividire man Zähler und Nenner mit h, wodurch man erhält

$$\frac{k}{h} \cdot \frac{dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$$

Alsdenn multiplizire man Zähler und Nenner mit $\frac{gb^2}{h}$, wodurch man erhält

$$\frac{\frac{k}{h}}{\frac{gb^2}{h}} \cdot \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx} = \frac{k}{gb^2} \cdot \frac{\frac{gb^2}{h}dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$$

Man findet also das Integrale des vorgegebenen Differenzials, wenn man die Länge eines Bogens berechnet, dessen Tangente $= x$ und Halbmesser $= \sqrt{\left(\frac{gb^2}{h}\right)}$ ist, und diese Länge mit $\frac{k}{gb^2}$ multiplizirt.

§. 57.

In dem Kreis ist $ydx = dx\sqrt{(ax - xx)}$. Ein jedes Differenzial also, welches entweder diese Gestalt schon hat, oder auf eine solche Form gebracht werden kann, wird durch die Hälfte eines Kreissegments integriret. Nimmt man den Anfangspunkt der Abscissen in dem Punkt C an, und setzet $CA = b$, $CP = x$; so ist $-dx\sqrt{(bb - xx)}$ das Differenziale des halben Segments APM.

Die Fälle anzugeben, in welchen das Integral eines zweitheilichten Differenzials von dem bekannten Integral eines andern zweytheilichten Differenzials abhängt.

§. 58.

Wenn man die gehörige Untersuchungen angestellet hat, ob ein vorgegebenes zweitheilichtes Differenziale algebraisch integrirt werden könne, und dadurch überzeugt worden ist, daß es nicht in den oben beschriebenen Fällen enthalten sey; so darf man dennoch seine Zuflucht noch nicht zu der Näherungsmethode nehmen, welche wir in einem der vorhergehenden Abschnitten erkläret haben. Denn es ist möglich, daß das Integrale des gegebenen zweitheilichten Differenzials von dem Differenzial eines einfachern zweitheilichten Differenzials abhange. Wir werden daher die Eigenschaften zu entwicklen suchen, welche solche Differenzialien besitzen müssen, wenn sie auf solche Art einer Integrazion fähig seyn solken.

§. 59.

Wenn man also untersuchen will, ob das Integrale von

$$x^m dx(a+bx^n)^p$$

von dem Integrale von

$$x^q dx(a+bx^n)^r$$

wo $m >$ ist, abhange; so verfähret man folgendergestalt. Man differenziire die Formel

$$x^{m+1}(a+bx^n)^p;$$

so findet man

$$d(x^{m+1}(a+bx^n)^p) = (m+1)dx.x^m(a+bx^n)^p$$
$$+ bnpx^{m+1}x^{n-1}dx(a+bx^n)^{p-1}$$

Mithin

$$d(x^{m+1}(a+bx^n)^p) - bnpx^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}$$
$$= (m+1)dx.x^m(a+bx^n)^p$$

oder

$$(m+1)dx.x^m(a+bx^n)^p = d(x^{m+1}(a+bx^n)^p)$$
$$- bnpx^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}$$

Folg-

Folglich

$$(m+1)\int dx.x^m(a+bx^n)^p = x^{m+1}(a+bx^n)^p$$
$$- bnp\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}$$

oder $$\int dx.x^m(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$$
$$- \frac{bnp}{m+1}\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1}.$$

Auf eben diese Art findet man

$$\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{m+n+1}$$
$$- \frac{bn(p-1)}{m+n+1}\int x^{m+2n}dx(a+bx^n)^{p-2}$$

wenn man in die obige Gleichung setzet, $m+n$ statt m und $p-1$ statt p.

Man erhält demnach

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$$
$$- \frac{bnpx^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+n+1)}$$
$$+ \frac{b^2n^2p(p-1)}{(m+1)(m+n+1)}\int x^{m+2n}dx(a+bx^n)^{p-2}.$$

§. 60.

Und man siehet leicht, daß überhaupt

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$$
$$- \frac{bnpx^{m+n+1}(a+bx^n)^{p-1}}{(m+1)(m+n+1)}$$
$$+ \frac{b^2n^2p(p-1)x^{m+2n+1}(a+bx^n)^{p-2}}{(m+1)(m+n+1)}$$
$$\ldots \pm \frac{b^{t-1}n^{t-1}p(p-1)(p-2)\ldots(p-t+1)}{(l+m)(l+m+n)(l+m+2n)\ldots(l+m+n(t-1))} \times$$
$$(x^{l+m+n(t-1)}(a+bx^n)^{p-t+1}) \mp$$

$$\mp \int x^{m+tn} dx (a+bx^n)^{p-t} \times$$

$$\frac{b^t n^t p(p-1) \ldots (p-t+1)}{(1+m)(1+m+n) \ldots (1+m+n(t-1))}$$

Das obere Zeichen findet statt, wenn t eine ganze, positive, aber ungrade Zahl, das untere Zeichen aber, wenn t eine ganze, positive und grade Zahl ist. Wenn nun $p-t=r$, oder $p-r=t$, oder einer ganzen Zahl gleich ist; so hängt das Integrale von $x^m dx(a+bx^n)^p$ von dem Integrale von $x^{m+tn} dx(a+bx^n)^p$ ab, und wenn $t=\frac{q-m}{n}$ eine ganze, positive Zahl ist; so hängt das Integrale des gegebenen Differenzials von dem Integrale von $x^q dx(a+bx^n)^r$ ab. Denn in diesem Fall hat man $q=m+tn$.

§. 61.

Nun hängt aber das Integrale von $x^{m+tn} dx(a+bx^n)^r$ von dem Integrale von $x^h dx(a+bx^n)^r$ ab, wofern

$$\frac{m+tn-h}{n}$$

oder

$$\frac{m-h}{n}$$

Das heißt, wenn der Unterschied der Exponenten von x ausser dem Binomio, dividirt mit dem Exponenten von x in dem Binomio, eine ganze, bejahte Zahl zum Quozienten giebt. Um dieses zu beweisen, nehme man die Formel

$$x^{q+1}(a+bx^n)^{p+1}$$

wodurch man erhält

$$d(x^{q+1}(a+bx^n)^{p+1}) = (q+1)x^q dx(a+bx^n)^{p+1}$$
$$+ dx.bn(p+1)x^{q+1+n-1}(a+bx^n)^p$$

oder

$$d(x^{q+1}(a+bx^n)^{p+1}) = (aq+a)x^q dx(a+bx^n)^p$$
$$+ (qbx^n + bx^n)x^q dx(a+bx^n)^p$$
$$+ bn(p+1)x^{q+n} dx(a+bx^n)^p$$
$$= (aq+a)x^q dx(a+bx^n)^p$$
$$+ (bnp+bn+qb+b)x^{q+n} dx(a+bx^n)^p$$

Mit-

Mithin erhält man

$$\int x^{q+n} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{q+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+n+q+1)}$$
$$- \frac{a(q+1)\int x^q dx (a+bx^n)^p}{b(np+n+q+1)}.$$

§. 62.

Wenn man also das Integrale von $x^m dx(a+bx^n)^p$ aus dem bekannten Integrale von $x^n dx(a+bx^n)^p$ finden will; so setze man $q+n=m$, oder $q=m-n$, wodurch man erhält:

$$\int x^m dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}$$
$$- \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)} \int x^{m-n} dx (a+bx^n)^p.$$

Eben so findet man

$$\int x^{m-n} dx (a+bx^n)^p = \frac{x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(1+m+np-n)}$$
$$- \frac{a(m-n+1)\int x^{m-2n} dx (a+bx^n)^p}{b(np+m+1-n)}.$$

Mithin erhält man die allgemeine Formel

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{1+m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)}$$

$$- \frac{a(1+m-n)x^{1+m-2n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^2(np+m+1)(np+m+1-n)}$$

$$+ \frac{a^2(1+m-n)(1+m-2n)x^{1+m-3n}(a+bx^n)^{p+1}}{b^3(np+m+1)(np+m+1-n)(np+m+1-2n)} \cdots\cdots$$

$$\pm \frac{a^{t-1}(1+m-n)(1+m-2n)\cdots\cdots(1+m-n(t-1))x^{1+m-tn}(a+bx^n)^{p+1}}{bt(np+m+1)(np+m+1-n)\cdots\cdots(np+m+1-n(t-1))}$$

$$\mp \frac{at(1+m-n)(1+m-2n)\cdots\cdots(1+m-tn)\int x^{m-tn}dx(a+bx^n)^p}{bt(np+m+1)(np+m+1-n)\cdots\cdots(np+m+1-n(t-1))}.$$

Das

Das oberste Zeichen gilt, wenn t eine grade, das untere aber, wenn t eine ungrade Zahl ist. Man siehet also hieraus, daß, wenn $m - tn = u$, oder wenn $m - u = tn$, oder $t = \frac{m-u}{n}$, d. h. wenn der Unterschied der Exponenten von x ausser dem Binomio, dividirt durch den Exponenten n von x in dem Binomio, eine ganze, bejahte Zahl zum Quozienten giebt, das Integrale von $x^m dx(a + bx^n)^p$ von dem Integrale von $x^u dx(a + bx^n)^p$ abhange, und jenes durch dieses gefunden werden könne.

§. 63.

Das Integrale von $dx(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ hängt von der Quadratur des Kreises ab. Es sey der Halbmesser $= 1$, die Abscisse $= x$; so ist die dazu gehörige Ordinate $= (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$. Wenn man nun $\int x^4 dx(1 - xx)^{\frac{5}{2}}$ durch Hülfe des Integrals von $dx(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ finden will; so siehet man, daß dieses angeht, weil $t = \frac{m-u}{n} = \frac{4-0}{2} = 2$ eine bejahte, ganze Zahl giebt. Nun ist aber $a = 1$, $b = -1$, $m = 4$, $n = 2$ und $p = \frac{5}{2}$; mithin findet man

$$\int x^4 dx(1 - xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1 - xx)^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$+ \frac{5x^7(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{5 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 3 \int x^8 dx(1 - xx)^{\frac{1}{2}}}{5 \cdot 7}$$

Ferner ist

$$\int x^8 dx(1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{-7}(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10}$$

$$- \frac{7x^5(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10 \cdot 8} - \frac{7 \cdot 5x^3(1 - xx)^{\frac{3}{2}}}{10 \cdot 8 \cdot 6}$$

$$- \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} x(1 - xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4} \int dx(1 - xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Dem-

Demnach erhält man

$$\int x^4 dx(1-xx)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-xx)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^7(1-xx)^{\frac{3}{2}}}{10}$$

$$- \frac{3}{10.8} x^5(1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3.5}{10.8.6} x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{3.5.3}{10.8.6.4} x(1-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{3.5.3}{10.8.6.4} \int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir haben aber schon oben gesehen, wie man das Integrale solcher Differenzialien, wie $dx\sqrt{(1-xx)}$ finden könne.

§. 64.

Wenn der Unterschied $m-n$ der Exponenten von x ausser dem Wurzelzeichen, dividirt durch den Exponenten n von x unter dem Wurzelzeichen, keine ganze, bejahte Zahl zum Quozienten geben würde; so dürfte man deswegen hieraus doch noch nicht schließen, daß das Integrale des gegebenen Differenzials von dem Integrale eines andern einfachern Differenzials nicht abhange. In solchen Fällen muß man den Exponenten der veränderlichen Grösse unter dem Wurzelzeichen in beiden Differenzialien verneint machen, und wenn der Unterschied der beiden neuen Exponenten ausser dem Wurzelzeichen, dividirt durch den Exponenten von x unter dem Wurzelzeichen, eine ganze, bejahte Zahl zum Quozienten gibt; so hängt das Integrale des einen Differenzials von dem Integrale des andern ab.

Fragt man, ob das Integrale von $x^{-8}dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ von dem Integrale von $dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ abhange; so würde man diese Frage bei dem ersten Anschein mit Nein beantworten, weil $\frac{m-u}{n} = -\frac{8}{4} = -2$. Verwandelt man aber jene Differenzialien in

$$x^{-10}dx(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$$

und in $x^{-2}dx(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}}$; so siehet man, daß $\frac{m-u}{n} = \frac{-10+2}{-4}$ eine ganze, bejahte Zahl zum Quozien-

ten

ten gibt. Daher hängt das Integrale des ersten Differenzials dennoch von dem Integrale des zweiten ab, und man erhält

$$\int x^{-10}dx(a^4x^{-4}-1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x^{-5}(a^4x^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}}{7a^4}$$

$$-\frac{5x^{-1}(a^4x^{-4}-1)^{\frac{1}{2}}}{21a^8} + \frac{5\int dx(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}}{21a^{12}} + C.$$

Von der Integrazion der razionalen Differenzialien.

§. 65.

Ein jedes razionale Differenziale kann entweder algebraisch oder durch Kreisbogen, oder durch Logarithmen, oder durch alle drei Hülfsmittel zugleich, oder endlich nur durch zwei derselben integriret werden.

Man kann es algebraisch integriren, wenn kein veränderlicher Nenner darinn vorkommt, wenigstens darf kein anderer, als nur Ein eintheilichter veränderlicher Nenner vorhanden seyn, den Fall ausgenommen, wenn der Exponent desselben $= 1$; alsdenn integrirt man durch Logarithmen, wie aus dem vorhergehenden erhellet.

Es sind also nur die Fälle noch übrig, wenn das vorgegebene Differenziale einen razionalen, zusammengesetzten oder mehrgliedrigen Nenner hat.

§. 66.

Der vorgelegte razionale Differenzial-Bruch muß aber so beschaffen seyn, daß der Exponent der höchsten Potestät der veränderlichen Grösse im Zähler um eine Einheit kleiner ist, als im Nenner. Wofern dieses nicht ist, so muß man den Zähler mit dem Nenner so lange dividiren, bis die übrigbleibende höchste Potestät im Zähler kleiner ist, als die höchste Potestät im Nenner. Wenn man, zum Beispiel,

$$\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$$

inte-

integriren sollte, so müste man zuerst x^3dx mit $aa + 3ax + xx$ dividiren, wodurch man xdx zum Quozienten und $-(3ax^2dx + aaxdx)$ zum Ueberrest bekommen würde. Man dividire daher diesen Rest wieder mit dem vorigen Nenner, wodurch man $-3adx$ zum Quozienten, und $8a^2xdx + 3a^3dx$ zum Rest erhält. Statt

$$\frac{x^3dx}{aa + 3ax + xx}$$

erhält man also diesen Ausdruck:

$$xdx - 3adx + \frac{8a^2xdx + 3a^3dx}{aa + 3ax + xx}$$

§. 67.

Um die Methode zu entdecken, vermittelst welcher man razionale Differenzial-Brüche integriren kann, muß man sich erinnern, daß das Differenziale des Logarithmen einer Grösse, gleich sey dem Differenzial dieser Grösse, dividirt mit der nemlichen Grösse. Da also diese Differenzialien allezeit durch Brüche ausgedrückt werden, so kann man leicht auf die Vermuthung fallen, daß die Integrazion der razionalen Differenzial-Brüche von den Logarithmen abhange. Es sey, zum Beispiel,

$$2a\,log.(a + x) - 2a\,log.(2a + x)$$

gegeben. Man findet

$$\frac{2adx}{a + x} - \frac{2adx}{2a + x}$$

oder

$$\frac{2aadx}{2aa + 3ax + xx}$$

Um nun diesen Bruch zu integriren, dürfte man denselben nur in zwei andere zerlegen, davon der eine $a + x$ und der andere $2a + x$ zum Nenner hätte, und deren Zähler beständige in dx multiplizirte Grössen wären. Beide Brüche würde man durch Logarithmen integriren müssen.

§. 68.

Es ist also ganz natürlich, daß man bei der Integrazion solcher Differenzial-Brüche versucht, dieselbe in so viel einfache Brüche

Brüche zu zerlegen, als der Nenner Faktoren hat, und einem jeden dieser Brüche einen solchen Faktor zum Nenner zu geben. Dieß ist auch in der That die Methode, deren man sich bedienen muß, seinen Endzweck zu erreichen, wenn alle Faktoren, woraus der Nenner des vorgelegten Differenzial-Bruchs bestehet, unter sich ungleich sind.

§. 69.

Wenn aber einige Faktoren dieses Nenners einander gleich sind; so darf man nicht erwarten, daß die obige Methode einen guten Erfolg habe, weil in diesem Falle das Integrale nicht allein von den Logarithmen abhangen kann.

Wollte man zum Beispiel

$$\frac{dx}{(a+x)^2}$$

integriren; so würde man das Integrale

$$-(a+x)^{-1}+C$$

finden, und dieß hängt gewiß nicht von den Logarithmen ab.

Wenn aber eine solche Grösse

$$\frac{aa}{a+x}+2a\log.(a+x)+2a\log.(2a+x)$$
$$-a\log.(3a+x)$$

gegeben wäre; so würde ihr Differenziale seyn

$$-\frac{aadx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{(a+x)}+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$$
$$=\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$$
$$=\frac{10a^4dx+26a^3xdx+17a^2x^2dx+3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$$

und wenn man diesen Bruch integriren wollte; so würde dazu nur erfodert werden, daß man denselben wieder in

$$\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2}+\frac{2adx}{2a+x}-\frac{adx}{3a+x}$$

verwandelte, oder in drey einfachere Brüche zerlegte, davon der erste ein Produkt aller gleichen Faktoren zum Nenner hätte,

und in dessen Zähler der Exponent der höchsten Potestät von x um Eine Einheit kleiner wäre, als der Exponent der höchsten Potestät im Nenner. Ein jeder der beiden andern Brüche würde einen der ungleichen Faktoren zum Nenner und keine Potestät von x im Zähler haben.

Wenn also

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})dx}{M+Nx+Px^2+\ldots\ldots Tx^n}$$

auf eine allgemeine Art jeden razionalen Differenzial-Bruch vorstellet, und man annimmt, daß in dem Nenner eine Anzahl von m gleichen Faktoren $x+g$, eine Anzahl von p gleichen Faktoren $x+h$, u. s. w.; ferner eine beliebige Anzahl von ungleichen Faktoren $x+i$, $x+q$, $x+r$ u. s. w. vorkommt, in welchem Fall der obige Ausdruck in

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p\ldots\ldots(x+i)(x+q)(x+r)}$$

verwandelt wird; so muß man, um integriren zu können, setzen

$$\frac{(a+bx+cx^2+\ldots\ldots kx^{n-1})dx}{(x+g)^m(x+h)^p\ldots\ldots(x+i)(x+q)(x+r)}$$

$$=\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx\ldots\ldots+Rdx}{(x+g)^m}$$

$$+\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots\ldots R'dx}{(x+h)^p}$$

$$+\ etc.\ldots\ldots\frac{Ldx}{x+i}+\frac{Mdx}{x+q}+\frac{Ndx}{x+r}+etc.$$

wo A, B, C u. s. w. beständige Grössen sind, deren Werth bestimmet werden muß, wenn man würklich integriren will. In Absicht der einfachen Brüche $\frac{Ldx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$ u. s. w. hat die Integrazion keine Schwierigkeit. Denn ihre Integralien sind

$$L\log.(x+i),\ M\log.(x+q)\ \text{u. s. w.}$$

Was aber die zusammengesetztern Brüche, wie

$$\frac{Ax^{m-1}dx+Bx^{m-2}dx+\ldots\ldots Rdx}{(x+g)^m}$$

betrift,

betrift, so setze man $x+g=z$, woraus folgt $x=z-g$ und $dx=dz$. Wenn diese Werthe in die obige Formel gesetzet werden; so verwandelt man dieselbe in eine Reihe eintheiligter Differenzialien, welche leicht integriret werden können, und von welchen ein Einziges die Form $\frac{dz}{z}$ hat, oder durch Logarithmen integrirt werden muß. Eben so verfähret man mit dem Gliede

$$\frac{A'x^{p-1}dx+B'x^{p-2}dx+\ldots\ldots R'dx}{(x+h)^p}$$

Man setzt nemlich

$$x+h=z'.$$

§. 70.

Es bleiben uns also nur noch zwei Sachen zu untersuchen übrig: die erste, die Faktoren des Nenners des vorgelegten Differenzialbruchs zu finden; die andere die Coeffizienten A, B, C u. s. w. zu bestimmen.

§. 71.

Um die Faktoren des Nenners zu finden, muß man eben so verfahren, als wenn man eine Gleichung, welche $=o$ ist, auflösen wollte, wodurch man die zweitheiligten Faktoren finden wird, durch deren Multiplication der Nenner entstanden ist. Wir berufen uns auf die Regeln, welche desfalls in der niedern Algebra gegeben werden.

§. 72.

Wenn man die Coeffizienten A, B, C u. s. w. bestimmen will; so bringt man zuerst alle Brüche, worin diese Coeffizienten vorkommen, auf einerlei Benennung. Dadurch erhält man zwey Glieder einer Gleichung, welche einerley Nenner haben, den man also auf beiden Seiten wegstreichen kann. Bringt man nun diese beide Glieder auf einerlei Seite; so kann die Gleichung, unabhängig von jedem Werthe von x, nicht anders statt finden, als wenn die Summe der Glieder, welche in Eine und eben dieselbe Potestät von x multiplizirt wird, Null ist. Dadurch erhält man so viele Gleichungen, als unbestimmte

Coeffizienten vorhanden sind. Die Bestimmung dieser Coeffizienten ist mithin keiner Schwierigkeit mehr unterworfen. Beispiele werden die Sache am besten erläutern.

§. 73.

Wenn man $\frac{dx}{aa - xx}$ integriren soll; so setze man

$$\frac{dx}{aa - xx} = \frac{Adx}{a + x} + \frac{Bdx}{a - x}$$

oder

$$\frac{dx}{aa - xx} = \frac{(Aa - Ax + Ba + Bx)dx}{aa - xx}$$

oder

$$1 = Aa - Ax + Ba + Bx,$$

woraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} 1 + Ax \\ - Aa - Bx \\ - Ba \end{array}\right\} = 0.$$

Dieß giebt $1 - Aa - Ba = 0$, und $A - B = 0$. Mithin $A = \frac{1}{2a} = B = \frac{1}{2a}$. Demnach

$$\frac{dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{2a}dx}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}dx}{a - x}$$

und

$$\int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} log.(a + x) - \frac{1}{2a} log.(a - x) + C$$

$$= \frac{1}{2a} log.\left(\frac{a + x}{a - x}\right) + C.$$

§. 74.

Zum zweiten Beispiel wollen wir den Bruch

$$\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a + x)^2(2a + x)(3a + x)}$$

erwäh-

erwählen. Man setze denselben

$$= \frac{(Ax+B)dx}{(a+x)^2} + \frac{Cdx}{2a+x} + \frac{Ddx}{3a+x}$$

und bringe diese Brüche auf einerlei Benennung, streiche den gemeinschaftlichen Nenner weg, dividire mit dx und bringe alle Glieder auf eine Seite; so wird

$$\left.\begin{array}{llll} 10a^4 & +26a^3x & +17a^2x^2 & +3ax^3 \\ -6Ba^2 & -5Bax & -Bx^2 & -Ax^3 \\ -3Ca^3 & -6Aa^2x & -5Aax^2 & -Cx^3 \\ -2Da^3 & -7Ca^2x & -5Cax^2 & -Dx^3 \\ & -5Da^2x & -4Dax^2 & \end{array}\right\} = 0$$

Mithin

$$3a - A - C - D = 0,$$
$$17a^2 - B - 5Aa - 5Ca - 4Da = 0,$$
$$26a^3 - 5Ba - 6Aa^2 - 7Ca^2 - 5Da^2 = 0,$$
$$10a^4 - 6Ba^2 - 3Ca^3 - 2Da^3 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$A = 2a,\ B = a^2,\ C = 2a,\ D = -a.$$

Das vorgegebene Differenziale verwandelt sich also in

$$\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$$

Das Integrale der beiden letztern Brüche ist

$$2a\log.(2a+x) - a\log.(3a+x)$$

Und um das Glied

$$\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2}$$

zu integriren, setze man $a+x=z$; so wird $x=z-a$ und $dx=dz$; daher

$$\frac{(2ax+aa)dx}{(a+x)^2} = \frac{(2az-aa)dz}{zz}$$

$= \frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{zz}$ und davon ist das Integrale

$$2a\log.z + \frac{aa}{z} = 2a\log.(a+x) + \frac{aa}{a+x}.$$

Mithin das vollständige Integrale

$$= \frac{aa}{a+x} + 2a\log(a+x) + 2a\log.(2a+x)$$
$$- a\log.(3a+x).$$

§. 75.

Wenn aber in dem Nenner des vorgelegten Differenzial-Bruchs einige unmögliche Faktoren vorkommen; so zerfällt man den Nenner zuerst in alle seine reelle Faktoren; das übrigbleibende Produkt aber, nicht in Faktoren vom ersten, sondern vom zweiten Grade. Für einen jeden Faktor vom zweiten Grade, den man allgemein mit $ax^2 + bx + c$ bezeichnen kann, bekommt man sodann einen Bruch von dieser Form

$$\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$$

Wenn man, zum Beispiel, $\frac{a^4dx}{a^3 - x^3}$ integriren soll; so findet man, daß $a - x$ ein Faktor des Nenners ist. Dividirt man nun den Nenner mit diesem Faktor; so erhält man $a^2 + ax + x^2$ zum Produkt der beiden andern Faktoren, welche aber beide unmöglich sind.

Statt also das vorgegebene Differenziale in drei einfachere Brüche zu zerlegen, davon ein jeder einen Faktor des Produkts $a^3 - x^3$ zum Nenner hat, zerlege man dasselbe nur in zwei Brüche, davon der eine den Faktor $a - x$ und der andere den Faktor $a^2 + ax + x^2$ zum Nenner hat. Man setze also

$$\frac{a^4dx}{a^3 - x^3} = \frac{Adx}{a - x} + \frac{Bxdx + Cdx}{a^2 + ax + x^2}$$

Bringt man diese zwei neue Brüche auf einerley Benennung, läßt den gemeinschaftlichen Nenner weg, dividirt mit dx und bringt alle Glieder auf eine Seite; so hat man

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ - Aa^2 - Cx + Bx^2 \\ - Ca - Bax \end{array}\right\} = 0$$

Setzt man nun gleich Null die Summe derjenigen Glieder, welche in die nemliche Potestät von x multipltzirt sind; so erhält man

B —

$$B - A = 0,\ C - Aa - Ba = 0,\ a^4 - Aa^2 - Ca = 0,$$

Mithin $A = \frac{a^2}{3}$, $B = \frac{a^2}{3}$, $C = \frac{2a^3}{3}$. Folglich ist

$$\int \frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \int \frac{a^2 dx}{3(a - x)} + \int \frac{a^2 x dx + 2a^3 dx}{3(a^2 + ax + xx)}.$$

Wie man das Integrale des zweiten Bruchs finde, wird man gleich sehen.

§. 76.

Wenn sich unter den Faktoren des zweiten Grades welche befinden, die unter sich gleich sind; so erhält man, für eine jede Anzahl n solcher gleichen Faktoren, einen Bruch von dieser Form

$$\frac{Ax^{2n-1}dx + Bx^{2n-2}dx + \ldots . Qdx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Wenn man, zum Beispiel,

$$\frac{(x^4 + 5ax^3 + 4a^3x)dx}{(aa + ax + xx)(a^3 - x^3)}$$

integriren wollte; so würde man finden, daß der Nenner in diese drey Faktoren

$$x - a,\ x^2 + ax + a^2, \text{ und } x^2 + ax + a^2$$

zerlegt werden könne. Ohne mich also dabey aufzuhalten, diese beide letztere in Faktoren, welche unmöglich seyn würden, zu zerlegen; so nehme ich vielmehr das Produkt derselben, nemlich $(x^2 + ax + a^2)^2$ zu dem Nenner Eines Bruches. In dem Zähler dieses Bruchs kommen alle Potestäten von x vor, deren höchster Exponent um Eine Einheit kleiner ist, als der höchste Exponent von x in dem Nenner. Man erhält also

$$\frac{(x^4 + 5ax^3 + 4a^3x)dx}{(a^2 + ax + x^2)(x^3 - a^3)}$$

$$= \frac{Adx}{x - a} + \frac{Bx^3dx + Cx^2dx + Dxdx + Edx}{(aa + ax + xx)^2}$$

Ferner

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + 5ax^3 - 3a^2Ax^2 + 4a^3x + E \\ - Ax^4 + Bax^3 - Dx^2 - Ex - a^4A \\ - Bx^4 - Cx^3 + aCx^2 + aDx \\ - 2Aax^3 \end{array}\right\} = 0$$

woraus folgt $A = \frac{10}{6-a}$, $B = \frac{a+4}{a-6}$, $C = \frac{6a-6a^2}{6-4}$, $D = \frac{24a^3-24a^2}{6-a}$, $E = \frac{10a^4}{6-a}$. Da also die Coeffizienten bestimmt sind; so bleibt uns nichts mehr übrig, als die Regeln vorzutragen, nach welchen der zweite Bruch integrirt werden muß.

§. 77.

Zuerst die Regeln, nach welchen Differenzialien dieser Form

$$\frac{Axdx + Bdx}{ax^2 + bx + c}$$

integrirt werden.

Wenn man Zähler und Nenner mit a dividirt; so kann man dasselbe auch so ausdrücken,

$$\frac{A'xdx + B'dx}{x^2 + b'x + c'}$$

Sodann schafft man das zweite Glied aus dem Nenner weg und setzet in dieser Absicht $x + \frac{1}{2}b' = z$, wodurch man erhält $x = z - \frac{1}{2}b'$ und $dx = dz$.

Dieß in den obigen Ausdruck gesetzt, giebt ein Differenziale von dieser Form

$$\frac{Czdz + Ddz}{zz + qq}$$

davon das Glied $\frac{Czdz}{zz+qq}$ durch Logarithmen, das andere aber durch einen Kreisbogen, dessen Radius $= q$, und Tangente $= z$, integrirt werden kann.

Man

Man soll, zum Beispiel,

$$\frac{\frac{a^2xdx}{3}+\frac{2a^3dx}{3}}{x^2+ax+a^2}$$

integriren. Man setze $x=z-\frac{1}{2}a$; so erhält man

$$\frac{\frac{a^2xdx}{3}+\frac{2a^3dx}{3}}{x^2+ax+a^2}$$

$$=\frac{a^2zdz}{3\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)}+\frac{a^3dz}{2\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)}$$

Das Integrale des ersten Gliedes ist $=\frac{a^2}{6}\log.\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)$ und das Integrale des zweiten ist die Länge eines Kreisbogens, dessen Tangente $=z$ und Halbmesser $=\frac{a}{2}\sqrt[2]{3}$.

§. 78.

Endlich wollen wir noch zeigen, wie Differenzialien von dieser Form

$$\frac{ax^3dx+bx^2dx+xdx+cdx}{(a^2+ax+x^2)^2}$$

integrirt werden müssen. Zu diesem Ende schaffe man zuerst das zweite Glied aus dem Nenner weg, und setze $x=z-\frac{1}{2}a$; so verwandelt sich das vorgegebene Differenziale in

$$\frac{az^3dz}{\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)^2}+\frac{Az^2dz}{\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)^2}+\frac{Bzdz}{\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)^2}+\frac{Cdz}{\left(z^2+\frac{3a^2}{4}\right)^2}$$

wo $A=b-\frac{3a^2}{4}$, $B=\frac{3a^3+4-4ab}{4}$, $C=\frac{a^2b}{4}+c-\frac{a}{2}$.

Diejenigen Glieder, wo z einen graden Exponenten hat, integrirt man nach der Methode §. 58. 59. u. s. w. Diejenigen Glieder aber, wo z einen ungraden Exponenten hat, nach §. 10.

Von einigen Verwandlungen, welche die Integrazion erleichtern können.

§. 79.

Hier lassen sich keine allgemeine Regeln geben. Die Uebersicht über das Ganze, der Gebrauch, den man von einer Grösse machen will, und die Fertigkeit im Calculiren, müssen in jedem Falle zeigen, was man zu thun hat.

Die Absicht solcher Verwandlungen ist, die vorgegebene Differenzialien razional zu machen. Gelingt dieses, so ist die Integrazion sodenn keiner Schwierigkeit mehr unterworfen.

§. 80.

Wenn eingliedrige Wurzelgrössen vorhanden sind; so verwandle man dieselbe zuerst in Potestäten, welche Brüche zu Exponenten haben, und diese Brüche bringe man auf einerlei Benennung. Stellt nun $x^{\frac{k}{n}}$ eine solche Potestät vor; so setze man $x^{\frac{1}{n}} = z$; mithin $x = z^n$ und $dx = nz^{n-1}dz$. Diesen Werth von dx in das gegebene Differenziale gesetzet, verwandelt dasselbe in eine razionale Grösse. So ist, zum Beispiel,

$$\frac{dx\sqrt{x} + adx}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx + adx}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{3}{6}}dx + adx}{x^{\frac{4}{6}} + x^{\frac{3}{6}}}.$$

Man setze $x^{\frac{1}{6}} = z$, oder $x = z^6$; so wird $dx = 6z^5dz$. Folglich $\frac{6z^8dz + 6az^5dz}{z^4 + z^3} = \frac{6z^5dz + 6az^2dz}{z + 1}$ wovon das Integrale leicht gefunden werden kann.

§. 81.

Eine jede Grösse, in welcher nur eine zusammengesetzte Wurzelgrösse vorkommt, welche den zweiten Grad nicht übersteiget, oder in welcher die veränderliche Grösse, unter dem Wurzelzeichen, auf keine höhere Potestät, als auf die zweite erhoben ist, kann man allezeit durch die eine oder andere der beiden folgenden Methoden razional machen:

1) Wenn man das Quadrat der veränderlichen Grösse unter dem Wurzelzeichen allein geschrieben hat; so setzet man die Wurzelgrösse gleich der in ihr vorkommenden veränderlichen Grösse $\pm$ einer andern veränderlichen Grösse.

2) Oder man zerlegt die Wurzelgrösse in ihre Faktoren und setzt sie dem Produkt einer dieser Faktoren in eine andere veränderliche Grösse, gleich.

Wenn also $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ gegeben wäre; so kann man setzen

$\sqrt{(xx-aa)} = x - z$. Mithin $x = \frac{zz+aa}{2z}$, und

$\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = -\frac{dz}{z}$, welches leicht zu integriren ist.

Man hätte auch setzen können

$$\sqrt{(xx-aa)} = \sqrt{(x-a)(x+a)} = (x-a)y.$$

Mithin $(x-a)(x+a) = (x-a)^2y^2$

und $(x+a) = (x-a)y^2$. Also findet man

$$x = \frac{a+ay^2}{y^2-1}, \quad \sqrt{(xx-aa)} = \frac{2ay}{y^2-1}$$

und $$\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}} = -\frac{2dy}{y^2-1}.$$

§. 82.

Diese Methode kann man auf die Rektification der Parabel anwenden, wo

$$s = \int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \int\sqrt{\left(dy^2+\frac{4y^2dy^2}{p^2}\right)}$$

$$= \int dy$$

$= \int dy \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)}$ ist. Man schreibe $\frac{2dy}{p} \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)}$ und setze $\sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + y^2\right)} = y + z$ u. s. w.

§. 83.

Wenn unter dem Wurzelzeichen kein zweites Glied vorhanden ist, so kann man die Wurzelgrösse gleich setzen einem Produkt aus einer neuen veränderlichen Grösse in die veränderliche Grösse unter dem Wurzelzeichen. Wenn also

$$\frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$$

gegeben ist; so kann man setzen

$$\sqrt{(aa - xx)} = xz.$$

Und wenn auch ein zweites Glied vorhanden wäre; so könnte man sich dieser Verwandlung doch bedienen, wenn dieses zweite Glied vorher weggebracht würde.

§. 84.

Endlich kann man, immer in der Absicht, das Differenziale razional zu machen, die veränderliche Grösse oder eine Funktion derselben einer andern veränderlichen Grösse oder einer Function derselben gleich setzen, in welcher man mit Fleiß einige Grössen vor der Hand unbestimmt läßt. Um, zum Beispiel, die Fälle kennen zu lernen, in welchen man

$$x^m dx (a + bx^n)^p$$

razional machen kann, so setze man

$$(a + bx^n)^p = z^q$$

wo q unbestimmt ist. Man findet also

$$a + bx^n = z^{\frac{q}{p}}$$

$$xn = \frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}$$

und $$x^m = \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Mithin

Mithin

$$x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p}+q-1} dz \left(\frac{z^{\frac{q}{p}}-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1}$$

und diese Grösse ist eines algebraischen Integrals fähig, q mag beschaffen seyn, wie man will, wenn $\frac{m+1}{n}-1$ eine ganze, positive Zahl oder Null ist.

Eben diesen Ausdruck kann man in dem Fall, wenn $\frac{m+1}{n}-1$ eine ganze, verneinte Zahl ist, razional machen, wenn man $q=p$ setzet.

Und wenn $p=\pm\frac{k}{2}$, wo k eine ganze, ungrade Zahl bezeichnet; so kann man den obigen Ausdruck unter die §. 81. angezeigte Fälle bringen, wenn man $q=k$ setzet, und $\frac{m+1}{n}=\pm\frac{k'}{2}$ ist, k' aber eine ganze, ungrade Zahl bedeutet.

§. 85.

In manchen Fällen kann man die Integrazion erleichtern, wenn man die veränderliche Grösse einer solchen Funktion, wie $\frac{1}{z}$, gleich setzet. Wenn, zum Beispiel,

$$\frac{x^{15}dx+adx}{x^{20}+x^{18}}$$

gegeben ist, so setze man $x=\frac{1}{z}$

und man findet $-\frac{z^3dz-az^{18}dz}{1+zz}$

welches in eine Reihe von Monomien und einen Ausdruck von dieser Form $\frac{Adz}{1+zz}$ aufgelöset werden kann.

Von

Von der Integrazion solcher Differenzialien, in welchen zwei oder mehr veränderliche Grössen vorkommen.

§. 86.

Wenn man auf die Regel zurückgehet, welche wir in der Differenzialrechnung für die Differenziazion mehrerer veränderlichen Grössen gegeben haben; so wird man daraus leicht den Schluß ziehen, daß man, um Differenzialien mehrerer veränderlichen Grössen zu integriren, alle diejenige Glieder, welche in das Differenziale einer und eben derselben veränderlichen Grösse multiplizirt sind, zusammen nehmen und so integriren müsse, als wenn nur eine einige veränderliche Grösse vorhanden oder alle andere beständig wären. Differenziirt man dieß gefundene Integrale, indem man nach und nach alle vorkommende Größen als veränderlich betrachtet und subtrahirt das Resultat von dem vorgegebenen Differenziale; so ist das gefundene Integrale vollständig, wofern bei dieser Subtraction nichts übrig bleibt, und eine beständige Grösse hinzugesetzet wird. Ist aber ein Rest vorhanden; so wird in demselben die veränderliche Grösse, mit welcher man die Integrazion angefangen hat, nicht vorkommen. Man verfährt sodann mit diesem Rest nach der vorigen Regel und wiederhohlet dieselbe bei jeder veränderlichen Grösse.

Wenn man, zum Beispiel, den Ausdruck

$$3x^2ydx + x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$$

integriren sollte; so nimmt man die zwey Glieder, welche in dx multiplizirt sind, nemlich

$$3x^2ydx + y^5dy$$

und integrirt dieselbe so, als wenn y eine beständige Grösse wäre. Davon ist das Integrale $x^3y + y^5x$. Wird nun dieser Ausdruck wieder differenziirt und das Resultat von dem vorgegebenen Differenziale subtrahirt, so bleibt nichts übrig. Man folgert hieraus, daß

$$x^3y + y^5x + C$$

das vollständige Integrale sey.

§. 87.

Soll man den Ausdruck

$$x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$$

integriren, so findet man, wenn alle Glieder, so mit dx multiplizirt sind, zusammen genommen werden, und so integrirt wird, als wenn y und z beständige Grössen wären, das Integrale $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Wird aber das Differenziale dieser Grösse von dem Gegebenen abgezogen; so bleibt y^2dx übrig; davon ist das Integrale $= \frac{y^3}{3}$ und dieses zu dem gefundenen addirt, giebt für das vollständige Integrale

$$x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$$

§. 88.

Weil es aber nicht möglich ist, ein jedes Differenziale, in welchem mehrere veränderliche Grössen vorkommen, zu integriren; so ist es nothwendig, die Fälle kennen zu lernen, in welchen die Sache möglich ist.

§. 89.

Es sey $Pdx + Qdy$ eine Differenzialgrösse, in welcher P, Q Functionen von x und y sind. Wenn dieselbe einer Integrazion fähig seyn soll; so muß das Differenziale von P, wenn y allein veränderlich betrachtet wird, dividirt mit dy, gleich seyn dem Differenziale von Q, wenn x allein veränderlich angenommen wird, dividirt mit dx: ein Satz, welchen man folgendergestalt

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

auszudrücken pflegt.

Um diese wichtige Eigenschaft des Differenzial-Ausdrucks

$$Pdx + Qdy$$

zu erweisen; so sey U das vollständige Integrale von $Pdx + Qdy$. Es ist also

$$dU = Pdx + Qdy.$$

Wei

Weil Pdx das Differenziale von U ist, wenn man nur x als veränderlich annimmt, und Qdy das Differenziale von U, wenn y veränderlich angenommen wird; so hat man, vermöge der obigen Bezeichnungsart,

$$P = \frac{dU}{dx}, \quad Q = \frac{dU}{dy}.$$

Den ersten Ausdruck differenziire man so, daß nur y veränderlich betrachtet wird, und dividire mit dy: den zweiten Ausdruck so, daß nur x veränderlich betrachtet wird, und dividire mit dx; so hat man

$$\frac{dP}{dy} = \frac{ddU}{dxdy}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{ddU}{dydx}.$$

Da nun nothwendig einerlei Resultat herauskommen muß, wenn man eine Function U entweder so differenziirt, daß man zuerst y und dann x, oder zuerst x und dann y veränderlich annimmt; so ist

$$\frac{ddU}{dxdy} = \frac{ddU}{dydx},$$

woraus folgt

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Es sey, zum Beyspiel, $U = xy$; so ist

$$dU = ydx + xdy$$

Mithin $P = y$, $Q = x$ und $\frac{dP}{dy} = 1$, $\frac{dQ}{dx} = 1$. Ferner $U = \sqrt{(xx + 2xy)}$, so ist

$$dU = \frac{xdx + ydx + xdy}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$$

woraus folgt

$$P = \frac{x + y}{\sqrt{(xx + 2xy)}} \quad Q = \frac{x}{\sqrt{(xx + 2xy)}}$$

und

$$\frac{dP}{dy} = \frac{xy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{xy}{(xx + 2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

Mithin $$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Wenn $dU = \frac{1}{3}y^3dx + xy^2dx$; so ist

$$P = \frac{1}{3}y^3, \quad Q = xy^2$$

und $$\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = y^2 = \frac{d(xy^2)}{dx} = y^2.$$

§. 90.

Wenn demnach ein solches Differenziale unmittelbar integrirt werden soll; so muß es die Eigenschaft haben, daß

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Wofern diese Eigenschaft nicht statt findet; so ist das vorgegebene Differenziale auch keiner unmittelbaren Integrazion fähig.

So kann, zum Beispiel,

$$ydx - xdy,$$

oder $$xydx + 2xdy$$

nicht integriret werden, weil beide Differenzialien die obige Eigenschaft nicht haben.

Wenn gleich aber

$$Pdx + Qdy = 0$$

kein vollständiges Differenziale, und demnach auch nicht

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

ist; so kann es doch Fälle geben, wo man die Gleichung

$$Pdx + Qdy = 0$$

in ein vollständiges Differenziale verwandeln kann, wenn man nemlich dieselbe mit einem gewissen Factor multiplizirt, wie wir bald sehen werden. Hat aber das vorgegebene Differenziale die Eigenschaft, daß

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

so integrirt man nach der Regel des 86ten Sphen.

Wenn $dU = \frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$; so findet man $U = \frac{1}{3}y^3x$. Und wenn

$$dU = (ax + by + c)dx + (bx + fy + g)dy$$

so findet man

$$U = \frac{axx}{2} + bxy + cx + \frac{fyy}{2} + gy.$$

§. 91.

Wenn mehr als zwei veränderliche Grössen in dem vorgegebenen Differenzial-Ausdruck befindlich sind, das heißt, wenn derselbe die Gestalt hat

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

so kann leicht bewiesen werden, daß

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$$

Denn es sey

$$U = \int(Pdx + Qdy + Rdz)$$

so ist

$$dU = Pdx + Qdy,$$

wofern z als eine beständige Grösse betrachtet wird, und daraus folgt

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}.$$

Ist y allein eine beständige Grösse, so ist

$$dU = Pdx + Rdz$$

und

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$$

Wenn endlich x allein eine beständige Grösse ist; so hat man

$$dU = Qdy + Rdz$$

und

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Betrach-

Betrachtet man demnach x, y, z zugleich als veränderliche Grössen; so hat man

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}.$$

Wenn diese Ausdrücke wahr sind, so ist $Pdx + Qdy + Rdz$ ein vollständiges Differenziale, und man integrirt solches nach der Regel des 86ten §phen. Wenn, zum Beispiel,

$$dU = 3y^4z^2x^2dx + 4x^3z^2y^3dy + 2x^3y^4zdz;$$

so ist $P = 3y^4z^2x^2$, $Q = 4x^3z^2y^3$, $R = 2x^3y^4z$.
Und man findet

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = 12y^3z^2x^2$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx} = 6y^4x^2z$$

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy} = 8y^3x^3z$$

Da also das vorgegebene Differenziale ein vollständiges Differenziale ist; so findet man $U = x^3y^4z^2$, nach der Regel §. 86.

Von den Differenzial-Gleichungen.

§. 92.

Wenn in der Differenzial-Gleichung nur zwey veränderliche Grössen x und y vorkommen, und auf der einen Seite x und dx, auf der andern aber y und dy sich allein befinden; so beruhet die Integrazion eines jeden Gliedes auf den Regeln, die wir oben bey den Differenzialien einer einzigen veränderlichen Grösse gegeben haben.

Wenn also $ax^my^ndx = by^qx^rdy$ gegeben ist, wodurch man auf eine allgemeine Art jede zweigliedrige Differenzial-Gleichung bezeichnen kann; so dividire man erst mit y^n, dann mit x^r, und man erhält

$$ax^{m-r}dx = by^{q-n}dy$$

davon das Integrale ist

$$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C.$$

§. 93.

Weil es aber geschehen kann, das entweder das eine oder das andere Glied der Differenzial-Gleichung, in welcher die veränderliche Größen abgesondert sind, oder keines von beiden algebraisch integrirt werden kann: die Gleichung aber entweder schon algebraisch ist, oder doch wenigstens auf eine algebraische Form gebracht werden kann; so ist es nöthig, diejenige Fälle, welche am häufigsten vorkommen, näher kennen zu lernen. Wenn, zum Beispiel, in der obigen Gleichung, $m-r=-1$ und $q-n=-1$ wäre; so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$$

und man erhält $a \log. x = b \log. y + \log. C$, weil man annehmen kann, daß die beständige Grösse ein Logarithmus sey. Dieser Gleichung kann man eine algebraische Form geben, wenn man sie so schreibt

$$\log. x^a = \log. y^b + \log. C = \log. Cy^b$$

woraus folgt $x^a = Cy^b$

eine algebraische Gleichung.

§. 94.

Wenn nur allein der Exponent $q-n=-1$; so wird

$$ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$$

und $$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = b \log. y + \log. C.$$

Dieser Gleichung kann man eine algebraische Form geben, wenn man das erste Glied mit $\log. e$ multiplizirt, wo nemlich e die Zahl, deren Logarithmus $= 1$. Es ist mithin

$$\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} \log. e = b \log. y + \log. C.$$

oder,

oder, wenn $m - r + 1 = p$, $\log. e^{\frac{axp}{p}} = \log. Cy^b$.

Endlich $$e^{\frac{axp}{p}} = Cy^b.$$

§. 95.

Zum zweiten Beispiel wollen wir

$$ndx = \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$$

erwählen, wo das zweite Glied das Differenziale eines Kreisbogens bezeichnet, dessen Sinus $= z$, und Halbmesser $= 1$ ist. Es ist mithin z der Sinus von $\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$, oder von $\int ndx$, das ist, von $nx + C$. Man erhält also

$$z = Sin.(nx + C).$$

Auf eben diese Art würde man aus der Gleichung

$$ndx = - \frac{dz}{\sqrt{(1 - zz)}}$$

folgern $$z = Cosin.(nx + C).$$

§. 96.

Weil $\frac{dz}{1 + zz}$ das Differenziale eines Kreisbogens bezeichnet, dessen Tangente $= z$ und Halbmesser $= 1$ ist; so schließet man aus der Gleichung

$$ndx = \frac{dz}{1 + zz},$$

daß $$z = Tang.(nx + C)$$ sey.

Wäre aber $ndx = \frac{bdz}{a + fzz}$ gegeben, und man sollte derselben eben die Form, wie der vorigen geben; so setze man $z = mu$, wo m eine beständige Grösse bedeutet. Der obige

Ausdruck verwandelt sich also in $\frac{bmdu}{a+fm^2u^2}$; setzt man $fm^2=a$, so ist $m=\sqrt{\frac{a}{f}}$, mithin erhält man

$$ndx=\frac{b\sqrt{\frac{a}{f}}du}{a+auu},$$

und $$\frac{du}{1+uu}=\frac{n}{b}dx\sqrt{af},$$

folglich $u=\frac{z}{m}=z\sqrt{\frac{f}{a}}=Tang.\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af}+C\right)$.

Endlich $z=\sqrt{\frac{a}{f}}Tang.\left(\frac{n}{b}x\sqrt{af}+C\right)$.

§. 97.

In diesen Ausdrücken $Sin.(nx+C)$, $Tang.(nx+C)$, welche wir eben gefunden haben, bezeichnet $nx+C$ die absolute Länge des Bogens in Theilen des Halbmessers. Weil es aber bequemer ist, wenn man den Bogen durch die Anzahl der Grade, die er enthält, als durch seine absolute Länge ausdrückt, so muß man dergleichen Größen durch die Anzahl der Grade, welche der Bogen enthält, zu bestimmen wissen; welche Absicht leicht erhalten wird, wenn man die gegebene Länge des Bogens durch die Anzahl der Theile vom Halbmesser, welche ein Grad enthält, d. i. durch $0,0174533$ dividiret, oder welches einerley Resultat geben wird, mit $57,2974166$ multipliziret. Der Sinus eines Bogens, dessen Länge $=b$, und der Sinus eines Bogens, dessen Anzahl Grade durch $b+57,2974166$ ausgedruckt wird, sind demnach gleichbedeutende Ausdrücke.

§. 98.

Wäre $\frac{ndx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ gegeben, wo beide Glieder die Differenzialien von Kreisbogen bezeichnen, welche sich

sich $= n : 1$ verhalten, und deren Sinus x und y sind; so muß man ein jedes dieser Differenzialien razional machen, wenn man integriren will, und dieß geschiehet, wenn man

$$\sqrt{(1 - xx)} = x\sqrt{(-1)} - z$$

und

$$\sqrt{(1 - yy)} = y\sqrt{(-1)} - t$$

setzet. Dadurch wird die Gleichung in diese

$$\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$$

verwandelt; denn es ist

$$x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - xx)} = z$$

mithin

$$dx\sqrt{(-1)} + \frac{xdx}{\sqrt{(1 - xx)}} = dz$$

oder

$$\frac{dx(x + \sqrt{(xx - 1)})}{\sqrt{(1 - xx)}} = dz,$$

endlich

$$\frac{ndx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{ndz}{x + \sqrt{(xx - 1)}}.$$

Ferner wird auf eben diese Art gefunden

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}} = \frac{dt}{y + \sqrt{(yy - 1)}}.$$

Daher ist

$$\frac{ndz}{x + \sqrt{(xx - 1)}} = \frac{dt}{y + \sqrt{(yy - 1)}}$$

und

$$ndz(y + \sqrt{(yy - 1)}) = dt(x + \sqrt{(xx - 1)})$$

oder

$$ndz(y\sqrt{-1} - \sqrt{(1 - yy)}) = dt(x\sqrt{-1} - \sqrt{(1 - xx)})$$

d. h.

$$ndz \,.\, t = dt \,.\, z$$

endlich

$$\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{z}$$

und davon ist das Integrale

$$n \log. z = \log. t + \log. C$$

oder

$$Ct = z^n,$$

und wenn man statt t und z ihre Werthe setzet,

$$C(y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - yy)}) = (x\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1 - xx)})^n$$

welche Gleichung auf eine allgemeine Art das Verhältniß der Sinus x und y zweier Bogen bezeichnet, davon der eine das mehrfache des andern ist. Um aber diese Gleichung anwenden zu können, muß man zuerst die beständige Grösse C bestimmen. Nun kann man annehmen, daß die beide Bogen einerlei Anfang haben, folglich x und y zu gleicher Zeit verschwinden; in diesem Fall verwandelt sich die Gleichung in

$$-C\sqrt{1} = -(-\sqrt{1})^n, \text{ oder } -C = (-1)^n.$$

Nun ist aber $(-1)^n$ entweder eine bejahte oder verneinte Größe, je nachdem n eine grade oder ungrade Zahl ist; man erhält also $-C = +1$ oder $C = \mp 1$; wo das obere Zeichen für den Fall gehört, da n eine grade, und das untere, da n eine ungrade Zahl ist; man bekommt also endlich

$$\mp(y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}) = (x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)})^n.$$

§. 99.

In jedem besondern Fall ist es leicht, die unmögliche Größen wegzuschaffen; das einfachste Mittel bestehet darin, alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, und die Summe der reellen Grössen $= o$ zu setzen; alsdenn ist die übrigbleibende Gleichung mit $\sqrt{-1}$ theilbar, und eben dieselbe, welche man findet, wenn man die Summe der reellen Grössen $= o$ setzet. Es sey, zum Beyspiel, $n = 2$, so ist

$$-y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-yy)}$$
$$= -xx - 2x\sqrt{-1} \cdot \sqrt{(1-xx)} + 1 - xx.$$

oder

$$\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}\sqrt{(1-xx)}$$
$$-y\sqrt{-1} = o.$$

Setzt man nun $= o$ die Summe der reellen Grössen; so ist

$$\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = o;$$

und die obige Gleichung verwandelt sich in

$$2x\sqrt{(-1)}\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = o,$$

welche mit $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt

$$2x\sqrt{(1-xx)} - y = o$$

oder $$y = 2x\sqrt{(1-xx)}.$$

Erhebt man nun diese Gleichung, und die Gleichung

$$\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = o,$$

oder

oder vielmehr $\sqrt{(1-yy)} = 1 - 2xx$ in das Quadrat; so erhält man ein und eben dasselbe Resultat.

§. 100.

Auf eben diese Art kann man die Cosinus und Tangenten der Bogen finden, welche das mehrfache von einem andern sind. Was diese letztern betrift; so integrirt man

$$\frac{ndx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$$

wenn man $1+xx$ in die Faktoren

$$(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$$

und $1+yy$ in die Faktoren

$$(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$$

zerlegt und setzet

$$\frac{ndx}{1+xx} = \frac{Adx}{(1+x\sqrt{-1})} + \frac{Bdx}{(1-x\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{Adx + Bdx - Axdx\sqrt{-1} + Bxdx\sqrt{-1}}{1+xx}$$

oder $ndx = Adx + Bdx - Axdx\sqrt{-1} + Bxdx\sqrt{-1}$

und daraus findet man $A = B = \frac{n}{2}$. Daher

$$\frac{ndx}{1+xx} = \frac{\frac{n}{2}dx}{(1+x\sqrt{-1})} + \frac{\frac{n}{2}dx}{(1-x\sqrt{-1})}$$

Mithin

$$n\int\frac{dx}{1+xx} = \frac{n}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)$$

Eben so findet man

$$\int\frac{dy}{1+yy} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right)$$

Endlich

$$n\log.\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right) = \log.\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right) + \log.C$$

oder $$\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n = C\left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right)$$

oder vielmehr

$$\left(\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right)^n = \left(\frac{1+y\sqrt{-1}}{1-y\sqrt{-1}}\right).$$

§. 101.

Weil wir nun schon mit dieser Materie beschäftiget sind, so wollen wir eine Methode lehren, die Sinus und Cosinus auf eine andere Art, als gewöhnlich geschiehet, auszudrücken. Es sey also

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$$

wodurch das Verhältniß zwischen dem Bogen x und seinem Sinus y ausgedrückt wird. Man setze

$\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - z$; so hat man

$$dx = \frac{-dz}{z\sqrt{-1}}$$

oder $$\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{-1}.$$

davon das Integrale

$$log.z = -x\sqrt{-1} + log.C$$

oder $log.z = -x\sqrt{-1}\, log.e + log.C$ ist.

Endlich $$z = Ce^{-x\sqrt{-1}}$$

und wenn man statt z seinen Werth setzet

$$y\sqrt{(-1)} - \sqrt{(1-yy)} = Ce^{-x\sqrt{-1}}.$$

Die beständige Grösse C kann man leicht bestimmen, wenn man bedenkt, daß der Bogen und der Sinus zu gleicher Zeit verschwinden müssen. Denn dadurch erhält man

$$-\sqrt{1} = C.$$

Mithin $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)} = -e^{-x\sqrt{-1}}.$

Folglich $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}.$

Ferner $$y = \frac{1-e^{2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}.e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Weil

Weil nun $y = Sin.x$; so hat man

$$Sin.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Setzet man in das zweite Glied der Gleichung

$$\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

statt y den eben gefundenen Werth; so erhält man

$$\sqrt{(1-yy)} = Cosin.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}.$$

Wir kehren nun zu der Integrazion der Differenzial-Gleichungen zurück.

§. 102.

Wenn man die veränderliche Grössen in der vorgegebenen Differenzial-Gleichung noch nicht von einander abgesondert hat; so muß man erst versuchen, die Gleichung, so wie sie ist, zu integriren. Denn es kann seyn, daß

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

wenn $Adx + Bdy = 0$, die vorgegebene Differenzial-Gleichung ist. Findet diese Bedingung statt, so integrirt man, wie oben §. 86. gezeigt worden ist.

§. 103.

Es ist aber auch möglich, daß diese Bedingung nicht statt findet und die Gleichung doch einer Integrazion fähig ist: aber sie ist es nur alsdenn, wenn man sie mit einem gewissen Faktor, der eine Funktion von x und y ist, multipliziret. Es sey P dieser Faktor. Sodenn muß

$$APdx + BPdy = 0$$

ein vollständiges Differenziale seyn, und mithin

$$\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}.$$

Es

Es kommt also darauf an, für P die gehörige Funktion von x, y zu finden. Da aber diese Untersuchung sehr weitläuftig ist; so werden wir uns blos auf den Fall einschränken, wenn P entweder nur eine Funktion von x, oder nur eine Funktion von y ist. Nimmt man den ersten Fall an; so findet man

$$P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$$

woraus folgt

$$\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx}{B}$$

Man findet also P leicht, wenn der Ausdruck

$$\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$$

eine Funktion von x ist, und dieß muß nothwendig seyn, wenn P eine Funktion von x seyn soll.

§. 104.

Dadurch wird man in den Stand gesetzet, auf eine allgemeine Art jede Gleichung von dieser Gestalt

$$Xy^q dy + X' y^{q+r} dx + X'' y^r dx = o$$

zu integriren, wo nemlich X, X', X'' gewisse Funktionen von x, so wie q, r gewisse willkührliche Exponenten bezeichnen.

Man dividire diese Gleichung mit X und y^r; setze aber $\frac{X'}{X} = F$, und $\frac{X''}{X} = F''$; so erhält man

$$y^{q-r} dy + F y^{q-r+r} dx + F' dx = o.$$

Um diese Gleichung integriren zu können, so multiplizire man dieselbe mit P, welches nemlich eine Funktion von x ist, und man erhält

$$P y^{q-r} dy + F P y^{q-r+r} dx + F' P dx = o.$$

Da also P eine Funktion von x ist; so ist auch $F'P$ eine Funktion von x, und $\int F' P dx$ findet man leicht vermittelst der

oben

oben gegebenen Regeln. Es kommt also nur noch darauf an, daß erwiesen werde, es sey

$$Pyq^{-r}dy + FPyq^{-r+1}dx$$

ein vollständiges Differenziale, und dazu wird erfodert, daß

$$\frac{d(Pyq^{-r})}{dx} = \frac{d(FPyq^{-r+1})}{dy}$$

oder $$yq^{-r}\frac{dP}{dx} = (q - r + 1)q^{q-r}FP,$$

woraus folgt $$\frac{dP}{P} = (q - r + 1)Fdx;$$

mithin $$log.P = \int(q - r + 1)Fdx.log.e$$

und $$P = e^{\int(q-r+1)Fdx}.$$

Diesen Werth von P in die Gleichung

$$Pyq^{-r}dy + etc.$$

gesetzt und integrirt, giebt

$$\frac{yq^{-r+1}}{q - r + 1}e^{\int(q-r+1)Fdx} + \int F'dxe^{\int(q-r+1)Fdx} + C = o.$$

Ich habe bei der Integrazion der Gleichung, wodurch P bestimmt worden ist, keine beständige Grösse hinzugesetzt, weil keine Bedingung vorhanden ist, aus welcher man sie bestimmen könnte, und man also berechtiget ist, dieselbe $= o$ zu setzen.

§. 105.

Zum Beispiel, man soll

$$dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)dx = o$$

integriren. Multiplizirt man mit dem Faktor P; so findet man

$$Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P(bx^2 + cx + f)dx = o;$$

Es muß also seyn

$$\frac{dP}{dx} = d\frac{\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x};$$

Mit-

Mithin $$\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$$

und $$log. P = a\, log. x$$

oder $P = x^a$. Die obige Gleichung verwandelt sich also in

$$x^a dy + ax^{a-1} y dx + bx^{a+2} dx + cx^{a+1} dx + fx^a dx = o,$$

deren Integrale

$$x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = o$$

ist.

§. 106.

Die vorige allgemeine Gleichung, welche integrirt worden, kömmt öfters vor, und die Methode, deren wir uns bei dieser Integrazion bedienet haben, läßt sich auf mehrere dergleichen Fälle anwenden. Sind die beide Gleichungen

$$dx + ady + (bx + cy) Tdt = o$$

und $$Kdx + a'dy + (b'x + c'y) Tdt = o$$

gegeben, wo T eine gewisse Funktion von t ist; so findet man das Integrale dieser beiden Gleichungen durch die vorhergehende Methode auf folgende Art.

Man multiplizire eine derselben, zum Beispiel, die erste, mit einem unbestimmten, aber beständigen Coeffizienten g, und addire sie zu der zweiten. Die Summe beider Gleichungen multiplizire man mit dem Faktor P, welcher eine Funktion von t ist; so erhält man

$$(gP + kP)dx + (gaP + a'P)dy$$
$$+ [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y] Tdt = o.$$

Weil nun diese Gleichung ein vollständiges Differenziale seyn soll; so hat man

$$\text{I.} \quad \frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d[((gbP + b'P)x + (gcP + cP')y)T]}{dx}$$

II.

$$\text{II.}\quad \frac{d(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d[((gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y)T]}{dy}$$

$$\text{III.}\quad \frac{d(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}.$$

Da nun P ganz allein eine Funktion von t ist; so verwandelt sich die letzte Gleichung in Null. Aus den beiden ersten Gleichungen findet man aber

$$(g + k)\frac{dP}{dt} = (g + b')PT$$

oder $$\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k}Tdt$$

und $$(ga + a')\frac{dP}{dt} = (gc + c')TP$$

oder $$\frac{dP}{P} = \frac{gc + c'}{ga + a'}Tdt.$$

Mithin $$\frac{gc + c'}{ga + a'}Tdt = \frac{gb + b'}{g + k}Tdt,$$

oder $$\frac{gc + c'}{ga + a'} = \frac{gb + b'}{g + k},$$

eine Gleichung vom zweiten Grade, woraus man also für g zwei Werthe findet.

Ist nun g bekannt, so findet man leicht P, weil man aus der Gleichung

$$\frac{dP}{P} = \frac{gb + b'}{g + k}Tdt$$

findet $$\log. P = \frac{gb + b'}{g + k}\int Tdt$$

oder $$P = e^{\frac{gb + b'}{g + k}\int Tdt}.$$

Weil

Weil angenommen worden ist, daß

$$(gP + kP)dx + (gaP + a'P)dy$$
$$+ [(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y]Tdt = 0$$

ein vollständiges Differenziale seyn, so ist auch

$$(gP + kP)dx + (gaP + a'P)dy = 0$$

ein vollständiges Differenziale, wenn man t als eine beständige Grösse betrachtet. Daher ist das Integrale

$$(gP + kP)x + (gaP + a'P)y + C = 0.$$

Bezeichnet man mit g den ersten Werth, den man für diese Grösse aus der obigen Gleichung vom zweiten Grad findet, mit g' den zweiten Werth derselben, endlich mit P' den Werth von P, wenn g' statt g gesetzet wird; so erhält man diese Gleichung

$$(gP' + kP')x + (g'aP' + a'P')y + C' = 0,$$

wo C' eine beständige Grösse anzeigt. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Grössen x und y in Funktionen von t und hinwiederum t in Funktionen von x und y bestimmen. Dadurch bahnet man sich den Weg, die obige Gleichung zu integriren.

§. 107.

Wenn die vorgegebene Differenzial-Gleichung nicht unter die Fälle, welche wir bisher betrachtet haben, gehöret; so muß man versuchen, ob man die veränderliche Grössen nicht von einander absondern könne. Oefters gehöret hiezu weiter nichts, als die Anwendung der gewöhnlichen Regeln der Algebra. In andern Fällen aber muß man zu Verwandlungen seine Zuflucht nehmen. Jedoch giebt es eine grosse Menge solcher Gleichungen, bei welchen eine schickliche Verwandlung, die man vornehmen muß, die veränderliche Grössen von einander abzusondern, noch nicht bekannt ist.

§. 108.

In der Gleichung

$$ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy(e + fx^h)^r$$

sondert man die veränderliche Grössen leicht von einander ab, wenn man schreibt

$$(a + by^q)x^n dx = y^k dy(e + fx^n)^r$$

und

und $$\frac{x^n dx}{(e+fx^h)^r} + \frac{y^k dy}{(a+by^q)}$$

deren Integrazion von der Integrazion zweitheilichter Differenzialien mit einer veränderlichen Grösse abhängt.

§. 109.

Hat man aber

$$gxdx = ax^4ydy + 2abx^2y^3dy + ab^2y^5dy,$$

so siehet man wohl, daß man diese Gleichung auch so

$$gxdx = (x^4 + 2bx^2y^2 + b^2y^4)aydy$$
$$= (x^2 + by^2)^2aydy$$

schreiben könne. Mit geringer Aufmerksamkeit wird man sehen, daß die Absonderung möglich ist, wenn man setzt

$$x^2 + by^2 = z,$$

mithin $$x^2 = z - by^2$$

und $$xdx = \tfrac{1}{2}dz - bydy;$$

dieß substituirt, erhält man

$$\tfrac{1}{2}gdz - gbydy = azzydy$$

und endlich $\frac{\frac{1}{2}gdz}{bg + azz} = ydy$, welches leicht integrirt werden kann.

§. 110.

Man kann in allen homogenen Gleichungen, wo zwei veränderliche Grössen vorkommen, das heißt, in solchen, wo x und y in einem jeden Gliede, sie mögen sich nun beisammen oder allein befinden, einerlei Ausmessung haben, die beide veränderliche Grössen von einander absondern. Denn es sey

$$Adx + Bdy = 0$$

eine homogene Gleichung. Man dividire mit einer Potestät von x, deren Exponent so groß ist, als die Anzahl der Ausmessungen der Gleichung. Ist dieß geschehen, so sind in den Coeffizienten A, B nur noch Potestäten von $\frac{y}{x}$ und beständige Grössen vorhanden, und man wird die obige Gleichung füglich durch

$$Fdx + F'dy = 0$$

bezeichnen können, wo F, F' Funktionen von $\frac{y}{x}$ und beständigen Grössen sind. Weil nun $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xx}$; so ist $dx = -\frac{xx}{y}d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y}dy$. Setzt man also $\frac{y}{x} = z$; so hat man $dx = -\frac{ydz}{zz} + \frac{dy}{z}$. Werden diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, so erhält man

$$-\frac{Fydz}{zz} + \frac{Fdy}{z} + F'dy = o$$

wo nunmehr F und F' Funktionen von z und beständigen Grössen sind. Aus dieser Gleichung findet man aber

$$\frac{dy}{y} = \frac{Fdz}{Fz + F'zz},$$

wo also die veränderliche Grössen völlig von einander abgesondert sind, weil auch in F, F' keine andere veränderliche Grösse mehr, als z vorkommt.

Zum Beispiel, man soll

$$y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = o$$

integriren, welches eine homogene Gleichung ist, in welcher die Anzahl der Ausmessungen $= 3$; man dividire mit x^3 und erhält

$$\frac{y^3dx}{x^3} + \frac{y^2dy}{x^2} + bdy = o.$$

Man setze $\frac{y}{x} = z$ oder $x = \frac{y}{z}$; so wird

$$dx = \frac{zdy - ydz}{zz}.$$

Daher verwandelt sich die obige Gleichung in

$$z^2dy - yzdz + z^2dy + bdy = o,$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + b},$$

deren

deren Integrale

$$log.y = \tfrac{1}{4} log.(2z^2 + b) + log.C,$$

oder $$y = C(2z^2 + b)^{\frac{1}{4}},$$

oder $$y^4 = C^4(2z^2 + b) = C^4\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right).$$

§. 111.

Es würde also sehr vortheilhaft seyn, wenn man alle Gleichungen homogen machen könnte. Dazu ist aber keine allgemeine Methode vorhanden; sondern man muß sich der Verwandlungen bedienen. Diejenigen, von welchen man sich einigen Nutzen versprechen kann, bestehen darin: eine der veränderlichen Größen oder eine Funktion derselben, oder auch eine Funktion zweyer veränderlichen Grössen einer Funktion einer neuen veränderlichen Grösse gleich zu setzen, welche auf eine Potestät erhoben wird, deren Exponent unbestimmt ist. Diese Exponenten bestimmt man alsdenn durch die Bedingung, daß die verwandelte Gleichung homogen seyn soll.

Wenn man z. B. die Fälle wollte kennen lernen, in welchen die Gleichung

$$ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = o,$$

(worunter man jede Gleichung mit drey Gliedern verstehen kann) homogen wird; so setze man $x = z^h$ und man erhält:

$$ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh}dy + cy^k dy = o.$$

Wenn nun diese Gleichung homogen seyn soll; so muß

$$k = qh + n, \text{ und } k = mh + h - 1$$

mithin

$$h = \frac{n+1}{m-q+1} \text{ und } k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$$

seyn.

Wenn also die Exponenten k, q, m und n so beschaffen sind, daß die letzte Bedingung statt finden kann; so ist die Gleichung homogen, und man kann die veränderliche Grössen von einander absondern.

Von den Differenzial-Gleichungen der zweyten, dritten u. s. w. Ordnung.

§. 112.

Weil man bei der fernern Differenziazion der Differenzial-Gleichungen ein beliebiges Differenziale als eine beständige Grösse annimmt; so dienet dieser Umstand in vielen Fällen die Integrazion zu erleichtern. Da es aber geschiehet, daß bei der Differenziazion grade ein solches Differenziale als beständig angenommen worden ist, welches die Integrazion erschweret; so müssen wir damit anfangen, die Methode zu erklären, wie man eine Differenzial-Gleichung, in welcher ein gewisses Differenziale als beständige Grösse betrachtet wird, in eine solche verwandeln könne, in welcher alle Differenzialien veränderlich angenommen werden. Ist diese Verwandlung geschehen, so kann man sodenn das tauglichste Differenziale beständig annehmen. Es sey also

$$Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = o$$

welches eine Differenzialgleichung zweier veränderlichen Grössen und von der zweiten Ordnung ist, in welcher dx beständig angenommen worden ist. Man dividire diese Gleichung mit dx, so erhält man

$$Adx + Bdy + C\frac{dy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = o$$

welche mit der vorigen ganz einerley ist. So lange nemlich dx beständig angenommen wird; so ist

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ddy}{dx}$$

Soll aber dx veränderlich seyn; so hat man

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$$

Die obige Gleichung verwandelt sich also in

$$Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = o$$

in welcher alle Differenzialien veränderlich sind.

Es

Es sey ferner eine Gleichung von der dritten Ordnung, wie

$$Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$$

gegeben, in welcher dx beständig angenommen ist.

Man dividire dieselbe mit dx^2, so hat man

$$Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + \frac{Eddy}{dx} + \frac{Fdy}{dx}\frac{ddy}{dx} + \frac{Gd^3y}{dx^2} = 0,$$

welche man auch so schreiben kann:

$$Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + \frac{Ddy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{Fdy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right) + Gd\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0.$$

und in dieser Gleichung sind alle Differenzialien veränderlich angenommen worden.

§. 113.

Es sey, zum Beyspiel,

$$dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$$

gegeben, wo dx beständig ist. Man siehet nicht gleich, wie man das Integrale dieser Gleichung finden könne. Setzt man aber dx veränderlich und schreibt

$$dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

so kann man in dieser angezeigten Differenziazion dy beständig annehmen, in welcher Voraussetzung man erhält

$$dxdy - \frac{dy^3}{dx} = -(adx + xdx)\frac{dyddx}{dx^2}$$

oder $$dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$$

und davon ist das Integrale

$$xdx + adx - ydy + Cdy = 0,$$

indem man eine beständige Grösse von eben der Ordnung, wie das Integrale, hinzusetzen muß. Diese Gleichung aufs neue integrirt, giebt

$$\frac{x^2}{2} + ax - \frac{y^2}{2} + Cy + C' = 0.$$

§. 114.

Wenn dieses Verfahren erlaubt seyn soll; so muß gezeigt werden, daß der Ausdruck

$$dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$$

in welchem dx beständig angenommen worden, nicht verändert werde, wenn man dx und dy veränderlich, und endlich dy beständig, dx aber veränderlich annimmt. Um dieses zu untersuchen, bedenke man, daß zwischen y und x stets ein gewisses Verhältniß statt finden werde, und daß mithin stets $dy = pdx$ sey. Ist nun dx eine beständige Grösse; so wird $ddy = dpdx$ und der obige Ausdruck verwandelt sich in

$$pdx^3 - p^3dx^3 = adpdx^2 + xdpdx^2$$

oder in

$$(p - p^3) = (a + x)\frac{dp}{dx}$$

Ist dx eine veränderliche Grösse, so wird

$$dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (a + x)dxd\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

oder

$$dx^2dy - dy^3 = adxddy - adyddx + xdxddy - xdyddx$$

und da

$$ddy = pddx + dpdx$$

so wird

$$(p - p^3)dx^3 = adpdx^2 + xdpdx^2$$

oder

$$(p - p^3) = (a + x)\frac{dp}{dx}$$

wie vorhin.

Ist dy beständig, so wird

$$dx^2dy - dy^3 = -(adyddx + xdyddx)$$

oder

oder

$$dx^2 + addx + xddx = dy^2$$

das heißt

$$dx^2 - \frac{adpdx}{p} - \frac{xdpdx}{p} = p^2dx^2$$

Endlich

$$(p - p^3) = (a + x)\frac{dp}{dx}$$

wie in den beiden vorigen Fällen.

§. 115.

Die Art, Differenzialien mehrerer veränderlichen Grössen zu integriren, welche wir §. 86. erkläret haben, läßt sich auf Differenzialausdrücke von allen Ordnungen anwenden, wenn man die Differenzialien ddx, ddy, d^3x, d^3y u. s. w. als eben so viele veränderliche Grössen betrachtet.

Wenn man also

$$x^3y^2ddy + 2x^3ydy^2 + (2x^2y + 3y^2x^2)dxdy + 2y^2xdx$$

wo dx beständig angenommen wird, integriren soll; so integrire man zuerst so, als wenn ddy allein veränderlich wäre, wodurch man erhält x^3y^2dy. Dieß differenziirt, giebt

$$3x^2y^2dxdy + 2x^3ydy^2 + x^3y^2ddy$$

welches von dem vorgegebenen Differenzial abgezogen,

$$2y^2xdx^2 + 2x^2ydxdy$$

zum Rest läßt. Man integrire diesen Ausdruck so, als wenn nur y veränderlich wäre, und man erhält

$$x^2y^2dx.$$

Ich differenziire dieses Integral, und ziehe sein Differenzial

$$2x^2ydydx + 2y^2xdx^2$$

von dem vorigen Rest ab, und da nichts übrig bleibt; so folgt, daß das Integrale des gegebenen Differenzialausdrucks ist

$$x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx$$

weil man eine beständige Grösse von eben der Ordnung, wie das Integrale hinzusetzen muß.

§. 116.

Auf eben diese Art integrirt man auch Differenzialgleichungen, wenn sie nemlich in der vorgegebenen Gestalt einer Integrazion fähig sind, welches man daraus sehen kann, wenn der letzte Rest, wie eben gezeigt worden, Null ist.

Ist dieser Rest nicht Null; so darf man daraus doch noch nicht schließen, daß die vorgegebene Differenzialgleichung keiner Integrazion fähig sey. Da man nemlich die zwei Glieder einer Gleichung mit einer Grösse multipliziren oder dividiren kann, so kann es einen Faktor geben, welcher, in die Gleichung multiplizirt, dieselbe einer Integrazion fähig macht.

Die allgemeine Beschaffenheit dieses Factors zu finden, ist eine Untersuchung, deren Weitläuftigkeit unserer Absicht nicht entspricht. Wir begnügen uns die Methode, deren man sich bei dieser Untersuchung bedienen muß, bei einem Falle zu erklären, welcher bei physisch-mathematischen Aufgaben öfters vorkommen kann. Die Rede ist nemlich von Gleichungen dieser Art:

$$ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$$

oder

$$d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0,$$

oder allgemein

$$d^ny + ad^{n-1}ydx + bd^{n-2}ydx + \ldots mydx^n + Xdx^n = 0$$

wo dx eine beständige Grösse, so wie a, b, c u. s. w. beständige Coeffizienten, X aber eine Function von x bezeichnet.

Gleichungen dieser Art werden durch die Multiplicazion eines Factors, welcher eine Function von x ist, einer Integrazion fähig, und diesen Factor findet man folgendergestalt:

Es sey die Gleichung

$$ddy + adydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0$$

gegeben; man zerlege das Glied $adydx$ in die beide andere

$$Kdydx \text{ und } (a - K)dydx;$$

so erhält man die neue Gleichung

$$ddy + Kdydx + (a - K)dydx + bydx^2 + Xdx^2 = 0,$$

wo K eine beständige, aber noch unbekannte Grösse bezeichnet. Nun setzt man, daß diese Gleichung einer Integrazion fähig werde,

werde, wenn man sie mit einem Faktor P, der eine Funktion von x ist, multipliziret. Die Gleichung

$$Pddy + PKdydx + [P(a - K)dy + Pbydx + PXdx]dx = o,$$

muß also, vermöge der Voraussetzung, ein vollständiges Differenziale seyn, und daher werden folgende Gleichungen statt finden.

$$\text{I. } \frac{dP}{dy} = \frac{d(PKdx)}{ddy}.$$

$$\text{II. } \frac{dP}{dx} = \frac{d[P(a - K)dy + Pbydx + PXdx]}{ddy}$$

$$\text{III. } \frac{d(PKdx)}{dx} = \frac{d[P(a - K)dy + Pbydx + PXdx]}{dy}$$

Aus der ersten Gleichung findet man nichts, weil P und K keine Funktionen von y und dy sind. Aus der zweyten findet man bei der nemlichen Voraussetzung

$$\frac{dP}{dx} = P(a - K)$$

und aus der dritten

$$\frac{KdP}{dx} = Pb$$

Sucht man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\frac{dP}{P}$, so hat man

erstlich $\frac{dP}{P} = (a - K)dx.$

und alsdann $\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{K}.$

Diese beide Werthe einander gleich gesetzet, giebt

$$KK - aK + b = o;$$

man findet mithin K aus einer Gleichung vom zweiten Grade und erhält für dasselbe zwei Werthe, welche wir mit m und m' bezeichnen wollen. Es ist demnach

$$\frac{dP}{P} = \frac{bdx}{m} \text{ und folglich}$$

$$log. P = \frac{bx}{m}; \text{ mithin } P = e^{\frac{bx}{m}}.$$

Die obige Gleichung

$$Pddy + \text{u. s. w.}$$

verwandelt sich also in

$$ddye^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + mdydxe^{\frac{bx}{m}}$$

$$+ (a - m)dydxe^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = o.$$

§. 117.

Diese Gleichung integrirt man folgendergestält. Zuerst sucht man das Integrale des Gliedes $ddye^{\frac{bx}{m}}$, in der Voraussetzung, daß ddy allein eine veränderliche Grösse sey, und erhält $dye^{\frac{bx}{m}}$. Man differenziire dieses Integrale und subtrahire das Resultat von der obigen Gleichung; so erhält man

$$\left(m + a - \frac{b}{m} - m\right)dydxe^{\frac{bx}{m}}$$

$$+ bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = o.$$

Aus der Gleichung

$$KK - aK + b = o$$

oder

$$m^2 - am + b = o$$

findet man

$$m - a + \frac{b}{m} = o,$$

oder

$$a - \frac{b}{m} - m = o.$$

Mithin ist

$$mdydxe^{\frac{bx}{m}} + bydx^2e^{\frac{bx}{m}} + Xdx^2e^{\frac{bx}{m}} = o$$

die

die Gleichung, deren Integrale man noch zu finden hat. Man integrire das Glied $mdydxe^{\frac{bx}{m}}$ so, als wenn nur y eine veränderliche Grösse wäre, und man erhält

$$mydxe^{\frac{bx}{m}}$$

zum zweiten Gliede des Integrals. Dieß differenziirt und das Differenziale von dem ersten Rest abgezogen, bleibt

$$Xdx^2e^{\frac{bx}{m}}$$

dessen Integrale wir allgemein durch

$$dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}}$$

bezeichnen und leicht gefunden werden kann, weil nur eine veränderliche Grösse vorkommt.

Das vollständige Integrale ist also

$$dye^{\frac{bx}{m}} + mydxe^{\frac{bx}{m}} + dx\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = C$$

oder

$$dy + mydx + dxe^{\frac{-bx}{m}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} = Ce^{\frac{-bx}{m}}$$

Weil aber keine Ursache vorhanden ist, warum man eher den Werth m, als den Werth m' von K gebrauchen sollte, so erhält man auch diese Gleichung

$$dy + m'ydx + dxe^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m'}} = C'e^{\frac{-bx}{m'}}$$

und daraus endlich

$$y = \frac{Ce^{\frac{-bx}{m}} - C'e^{\frac{-bx}{m'}} + e^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}} - e^{\frac{-bx}{m'}}\int Xdxe^{\frac{bx}{m}}}{m - m'}$$

§. 118.

Wäre eine Differenzialgleichung von der dritten Ordnung gegeben: so verfährt man auf die nemliche Art.

Eine solche sey z. B.

$$d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = o;$$

man schreibe sie auf diese Art:

$$d^3y + Kddydx + (a - K)ddydx + K'dydx^2$$
$$+ (b - K')dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = o.$$

wo K, K' wiederum beständige, aber noch unbekannte Größen bedeuten. Wenn man annimmt, daß diese Gleichung einer Integrazion fähig werde, wenn man sie mit einem Factor P, welcher eine Funktion von x ist, multiplicirt; d. i. wenn man setzt, die Gleichung

$$Pd^3y + PKddydx + P(a - K)ddydx + PK'dydx^2$$
$$+ P(b - K')dydx^2 + Pcydx^3 + PXdx^3 = o,$$

sey einer Integrazion fähig; so gebe man derselben diese Form

$$Pd^3y + PKddydx + [P(a - K)ddy + PK'dydx]dx$$
$$+ [P(b - K')dydx + Pcydx^2 + PXdx^2]dx = o.$$

Dadurch würde man sechs Gleichungen erhalten, welche aber wegen den beständigen Größen K und K', und weil P eine Function von x ist, auf drey reduziret werden können. Aus der letzten Gleichung würde man drey Werthe für K, und drey für K' und P erhalten, und dadurch bekäme man drey Gleichungen, in welchen y, x, dy, dx und ddy vorkommen. Schaft man also ddy und dy aus diesen Gleichungen weg; so findet man den Werth von y in x und beständigen Größen ausgedruckt.

§. 119.

Und hieraus erhellet also, wie man mit Differenzialgleichungen höherer Ordnungen zu verfahren habe.

Eben dieser Methode kann man sich auch noch bedienen, wenn eine grössere Anzahl veränderlicher Grössen vorhanden ist, wovon jedoch keine auf eine Dignität, die den ersten Grad übersteigt, erhoben ist, und welche weder in einander, noch in eines der Differenzialien dieser veränderlichen Grössen, ausser in das beständige Differenziale, multiplizirt seyn dürfen.

Wenn, zum Beispiel, die beide Gleichungen

$$addy + bddz + cdydx + edzdx + fydx^2 + gzdx^2 + Xdx^2 = 0,$$

und

$$a'ddy + b'ddz + c'dydx + e'dzdx + f'ydx^2 + g'zdx^2 + X'dx^2 = 0$$

gegeben sind, so muß man damit anfangen, die erste Gleichung mit einem beständigen, aber noch unbekannten Coeffizienten zu multipliziren und zu der zweiten zu addiren. In der Gleichung, welche man durch diese Operazion erhält, zerlegt man die Glieder, in welchen dy und dz vorkommen, in zwey Theile, wie wir eben gezeigt haben, und multiplizirt die Gleichung mit einem Factor, der eine Function von x ist.

§. 120.

Wenn in einer Differenzialgleichung, worin zwey veränderliche Grössen vorkommen sollten, die eine derselben fehlet, so kann man die Differenzialgleichung in eine Gleichung der nächst niedern Ordnung verwandeln, wenn man das erste Differenziale einer der veränderlichen Grössen, dem Differenzial der andern, multiplizirt mit einer neuen veränderlichen Grösse, gleich setzet.

Man

Man soll, zum Beispiel,

$$\frac{ddy}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=(ay+b)dx$$

integriren, wo dx beständig angenommen worden ist und die Grösse x fehlet; so setze man

$$dy=pdx$$

und man erhält mithin

$$ddy=dpdx$$

und

$$\frac{dp}{p}\sqrt{(1+pp)}=(ay+b)\frac{dy}{p}$$

oder $$dp\sqrt{(1+pp)}=(ay+b)dy.$$

Das zweite Glied kann man algebraisch, und das erste theils algebraisch, theils durch Logarithmen integriren.

Druckfehler.

Seite 28. L. 12. statt $\frac{d^6 U}{dx^6} = n.n - 1.n - 2.n - 3.n - 4.x^{n-6}$

lese man $\frac{d^6 U}{dx^6} = n.n - 1.n - 2.n - 3.n - 4.n - 5.x^{n-6}$

Seite 39. Linie 17. statt $MP : MT$ lese man $MP : PT$.

Seite 44. Linie 2. statt $-Sin.\varphi d\varphi - \frac{(Cosin.\varphi d\varphi)^2 d\varphi}{Sin.\varphi}$ lese man $-Sin.\varphi d\varphi - \frac{(Cosin.\varphi)^2 d\varphi}{Sin.\varphi}$.

Seite 50. Linie 16. statt $\frac{Cotang.\varphi d\varphi}{r}$ lese man $\frac{Cotang.\varphi d\varphi}{r^2}$.

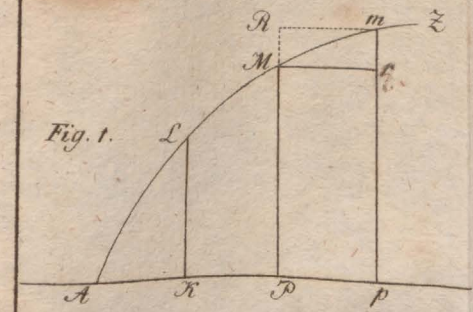
Seite 65. Linie 12. statt $\frac{a}{2}\sqrt{\left(c^2 - \frac{2ac}{4}\right)}$ lese man $\frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{c^2 - 2ac}{4}\right)}$.

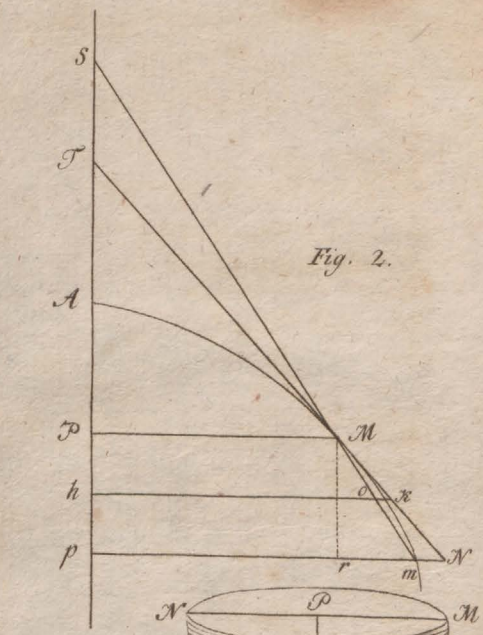
S. 69. L. 7. statt $6h^2 - 4h\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)} - \frac{2h^3}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)}}$ $+ cc$ lese man $6h^2 - 4h\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)} - \frac{2h^3}{\sqrt{\left(h^2 + \frac{c^2}{2}\right)}} + \frac{cc}{2}$.

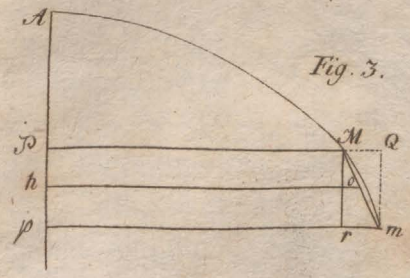
Seite 78. Linie 15. statt daß ist, lese man das ist.

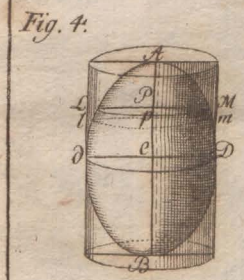
Seite 105. Linie 24. statt des kleinsten Widerstandes, lese man der kleinsten Widerstandslinie.

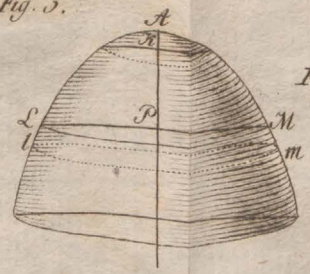
Seite 154. Linie 4. statt nach §. lese man nach §. 10.

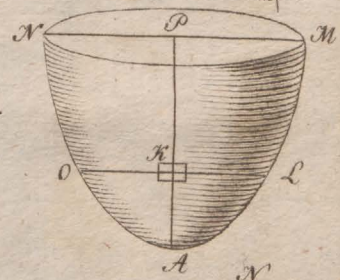


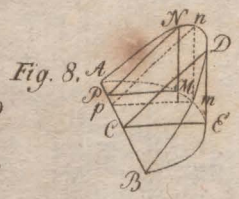


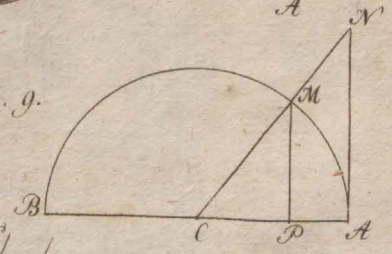


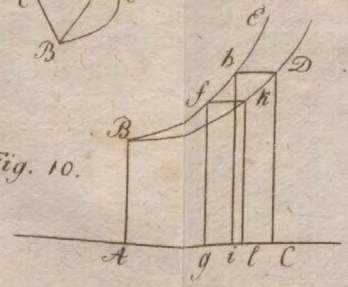


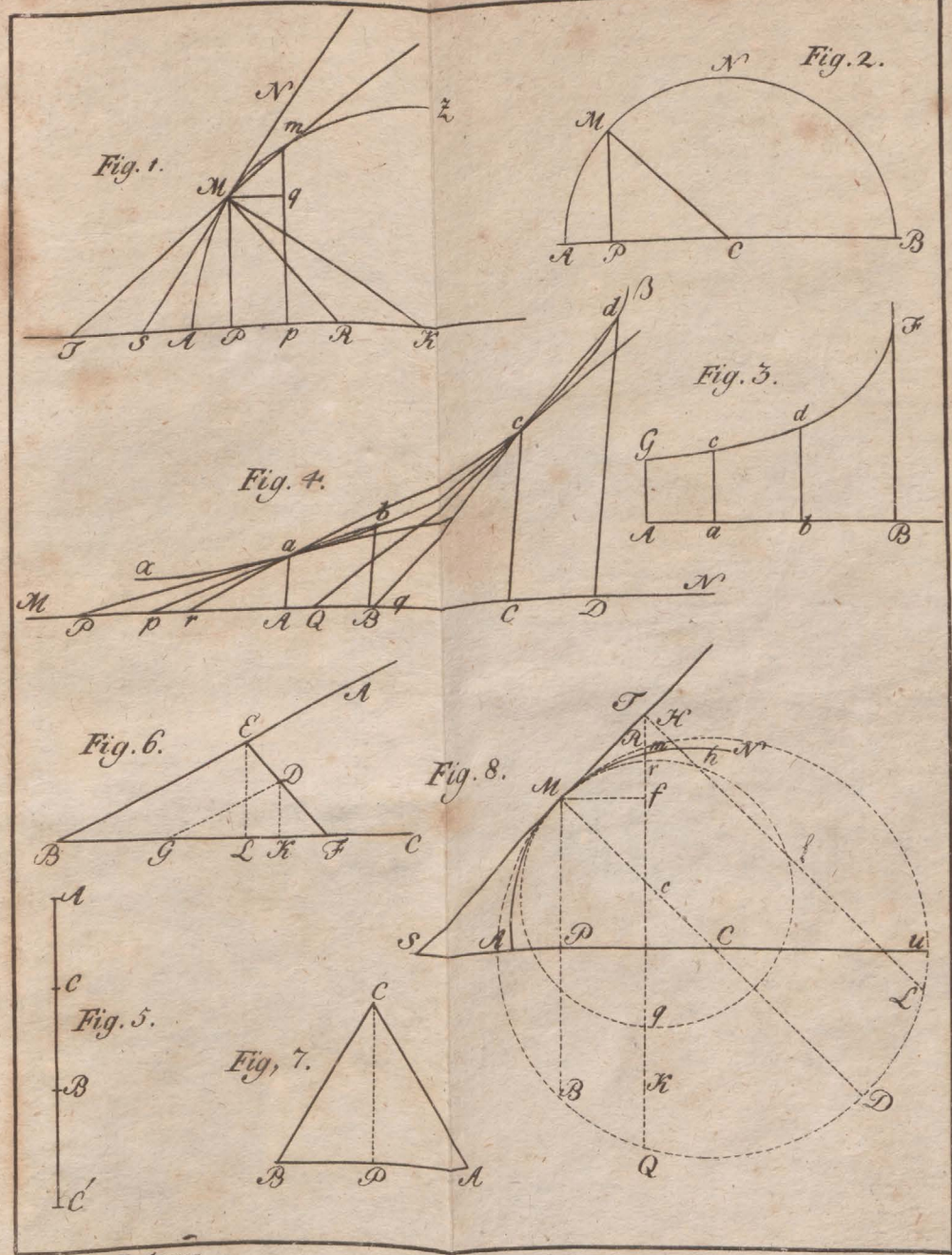












Different. Rechnung.