DIE
NATURWISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON
ARNOLD BERLINER
UNTER BESONDERER MITWIRKUNG VON HANS SPEMANN IN FREIBURG I. BR.

ORGAN DER GESELLSCHAFT DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE
UND
ORGAN DER KAISER WILHELM-GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG DER WISSENSCHAFTEN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN W 9

HEFT 52 (SEITE 1255—1286) 24. DEZEMBER 1926 VIERZEHNTER JAHRGANG

INHALT:

Emil Kraepelin †. Von Johannes Lange, München 1255
Übersicht über den geologischen Aufbau Afrikas. Von E. Krenkel, Leipzig. (Mit 4 Figuren) 1256
Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre. Von R. Courant, Göttingen 1265
Zuschriften:
Über die Charakterisierung der Hexosemonophosphorsäuren und ihr Verhalten bei der zellfreien Gärung. Von O. Meyerhof und K. Lohmann, Berlin-Dahlem 1277
Über das Verhältnis der klassischen Stereochemie zu den Arbeiten Weißenbergs. Von Walter Hückel, Göttingen 1279
Lichtquanten und Lichtwellen. Von W. Bothe, Berlin-Charlottenburg 1280
Beobachtungen über Wasserführung und Eisstoß an Flüssen Lapplands. Von Gustav Braun, Greifswald. (Mit 2 Figuren) . . . 1281
Zur Kenntnis der pflanzlichen Zellmembran. Von Erich Schmidt, München 1282
Quantentheorie des kontinuierlichen Absorptionsspektrums. Von J. R. Oppenheimer, Göttingen 1282

Fortsetzung des Inhaltes siehe II. Umschlagseite!

Fortsetzung des Inhaltes!

Das Verhalten von Aluminiumkrystallen bei Zugversuchen. Von Frhr. v. GÖLER, R. KARNOP und G. SACHS, Berlin-Dahlem . . 1282

Notiz über die Art des Regenbogenlichtes. Von FRIEDRICH RINNE, Leipzig 1283

Über den giftigen Honig des pontischen Kleinasien. Von H. FÜHNER, Bonn, und L. VAN ITALLIE, Leiden 1283

Albrecht Penck und die Meereskunde. Von G. SCHOTT, Hamburg 1284

BESPRECHUNGEN:

WOHLWILL, EMIL, Galilei und sein Kampf für die kopernikanische Lehre. (Ref.: M. v. Laue, Berlin) 1284

LOHR, E., Atomismus u. Kontinuitätstheorie in der neuzeitlich. Physik. (Ref.: E. Zilsel, Wien) 1286

DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Vierzehnter Jahrgang 24. Dezember 1926 Heft 52

Emil Kraepelin †.

Von Johannes Lange, München.

Am 7. Oktober 1926 starb in seinem einundsiebzigsten Lebensjahre Emil Kraepelin, der Schöpfer der modernen Psychiatrie, an den Folgen einer lange zurückreichenden Coronarsklerose, deren Mahnungen er nie anerkannt hatte. Er wurde mitten aus einem Planen und Schaffen herausgerissen, wie es in diesem Alter nahezu ohne Beispiel ist. Unmittelbar vor seinem Tode hatte er die grundlegende Umarbeitung eines großen Teiles seines Lehrbuches beendet; im Wirken für seine eigenste Schöpfung, die Deutsche Forschungsanstalt für Psychiatrie (Kaiser-Wilhelm-Institut), hatte er gerade im letzten Jahre seines Lebens Außerordentliches zustande gebracht; am Ende seines Todesmonats gedachte er eine in allen Einzelheiten aufs peinlichste vorbereitete, dem Studium der vergleichenden Psychiatrie und der Paralyse bestimmte Forschungsreise nach Indien und Ceylon anzutreten; er war voll von neuen wissenschaftlichen und organisatorischen Plänen: kurz, sein Tod bedeutet schon rein wissenschaftlich einen Verlust an allergrößten Zukunftswerten, nicht bloß, wie es gemeinhin in seinem Alter zu sein pflegt, den Hingang einer Persönlichkeit, deren Bedeutung in einem abgeschlossenen Werke liegt.

Daß Kraepelin gewesen ist, dafür legt die Entwicklung der Psychiatrie als Wissenschaft in der ganzen Welt lebendiges Zeugnis ab, und, bei aller Skepsis hinsichtlich der bleibenden Bedeutung eines Einzelschaffens, kann man sich nicht wohl vorstellen, daß die wesentlichen Forschungsergebnisse Kraepelins einmal vergessen werden sollten. — Seine erste und ihn sein ganzes Leben begleitende Vorliebe gehörte der Botanik. Als Student wurde er dann einer der ersten und eifrigsten Schüler W. Wundts, dessen naturwissenschaftlich-psychologische Methoden er späterhin auch auf psychiatrische Fragestellungen übertrug. Eine rein naturwissenschaftliche Betrachungsweise war es auch, die, von unbestechlicher Beobachtungsgabe und unbeirrbarem Wahrheitsdrang getragen, Kraepelins Bedeutung für die Psychiatrie begründete. Vor ihm suchte man die Seelenstörungen nach oberflächlichen psychischen Krankheitserscheinungen einzuteilen, etwa nach der vorwiegenden Stimmung, nach dem Vorhandensein oder Fehlen von Wahnideen, und erhielt so dauernd wechselnde Gruppen, deren Glieder nichts oder wenig miteinander zu tun hatten; jeder hatte sein eigenes Lehrgebäude; ja, vereinzelt glaubte man nur eine Form von Geisteskrankheit annehmen zu sollen, die unter den verschiedensten Bildern verlaufen könne. Die klinische Forschungsweise Kraepelins, die, auf Kahlbaums wenig beachtete Ansätze zurückführend, die Gesamtheit der erreichbaren Gegebenheiten jedes Einzelfalles, Ursachen, Krankheitserscheinungen, Verlauf, Ausgang, Leichenbefund, in Rechnung setzte, führte, neben einer Fülle anderer Erträgnisse, zur Aufstellung zweier großer Gruppen im Bereiche der „endogenen", d. h. ohne sichtbare äußere Ursachen auftretenden Geistestörungen, des manisch-depressiven Irreseins und der Dementia praecox bzw. Schizophrenie, deren grundsätzlicher Unterschied heute zu den Grundtatsachen psychiatrischen Denkens und Forschens geworden ist.

Wird die Systematik Kraepelins als seine Hauptleistung gern vorangestellt, so liegt deren wesentliche Bedeutung doch in der Vertiefung unseres gesamten psychiatrischen Wissens. Symptomatologie wie Ursachenlehre wurden in der gleichen Weise von dieser neuen Systematik befruchtet, die letztlich auch erst die gesamte jüngste Entwicklung, zum Teil unter lebendiger Mitwirkung Kraepelins, möglich gemacht hat. Nur dort, wo man von den Tatsachen abirrte und sich Gedankenspielereien überließ, ging er nicht mit. Bis zum Schluß war seine Haltung eine rein naturwissenschaftliche, wie er denn noch in seiner letzten Behandlung der organischen Psychosen allenthalben das voranstellte, was zähl-, meß- und wägbar, was wirklich greifbar und beweisbar war.

Seine und seiner Schüler Arbeiten bahnten den psychiatrischen Hilfswissenschaften, die bis dahin neben der Psychiatrie ihr Dasein geführt hatten, den Weg. Kraepelin selbst zog Nissl und Alzheimer und späterhin Spielmeyer, die Begründer und Fortsetzer der Histopathologie des Nervensystems, in seinen Kreis. Plaut war, als er seine grundlegenden serologischen Arbeiten schuf, sein engster Mitarbeiter und ist es, zuletzt mit Jahnel, bis zum Ende gewesen. Rüdins genealogische Untersuchungen wurden von ihm von allem Anfang an entscheidend gefördert. Leider nur allzu kurze Zeit wirkte auf Brodmann im Verein mit den genannten Forschern. Sie alle folgten nicht bloß dem Rufe seiner machtvollen Persönlichkeit, sondern dem großen Gedanken, der die Forschungsanstalt für Psychiatrie ins Leben gerufen hatte als eine Stätte, die reiner Forschung dienen und so zahlreichen Spezialgelehrten als möglich eine sorgenlose und von Vorlesungs- und Verwaltungslasten freie wissenschaftliche Tätigkeit im Dienste der Psychiatrie gewährleisten soll. Kraepelin hat diese Anstalt im Kriege als den Erfolg ganz vorwiegend seiner eigenen organisatorischen und Werbetätigkeit, welche eine Anzahl uneigennütziger Gönner gewann, zunächst als reine Stiftungsanstalt ins Leben gerufen, dann aber, eine Leistung von noch größerer Bedeutung, über Inflation, Zusammenbruch und große Verluste hinweg am Leben und lebensfähig erhalten und schließlich durch den Anschluß an die Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft und die Gewinnung eines großen Teiles der Baukosten für ein eigenes Heim für die Zukunft gesichert. Nur wer die unendlichen Schwierigkeiten, mit denen Kraepelin zu kämpfen hatte, einigermaßen überblickt, kann ermessen, welche ganz ungewöhnliche Leistung damit vollbracht ist.

Es ist hier nicht der Raum, auf weitere Einzelheiten einzugehen. Eine Fülle von Arbeiten psychiatrischen, psychologischen, philosophischen, forensichen, aber auch sozialen und politischen Inhalts sowie ein unermüdlicher Kampf gegen den von ihm auf rein wissenschaftlichem Wege als unbedingt schädlich erkannten Alkohol kennzeichnen die Bahn, die Kraepelin gegangen.

Kraepelin war ein ausgezeichneter Lehrer von eindringlicher Sachlichkeit, dessen Vorlesungen zahllose Schüler nicht bloß ihr psychiatrisches Wissen, sondern vor allem wesentliche Grundlagen wissenschaftlichen Denkens, hoher Berufsauffassung und sittlichen Ernstes danken, und aus dessen in der 9. Auflage soeben erscheinenden Lehrbuch sich die ganze Welt belehrt hat.

Dem Banne seiner einfachen, klaren, gewaltigen Persönlichkeit vermochte sich so leicht niemand zu entziehen, der in seinen Bereich kam. Und selbst seine Gegner — sein zielsicheres gerades Denken und Handeln mußte vielfach auf Widerstand stoßen — erkannten neidlos die überragende Bedeutung des Mannes, dessen Freundschaft seine Freunde glücklich machte.

Übersicht über den geologischen Aufbau Afrikas.

Von E. Krenkel, Leipzig.

I.

Als tiefstes, durch starke Abtragung erschlossenes Stockwerk seines geologischen Baues gibt Afrika das **afrizidische Grundgebirge** zu erkennen.

Das Material der Afrizidien[1]) besteht aus *archäischen* und *algonkischen Sedimenten.* Zu diesen gesellen sich jedoch *Intrusionen* von so gewaltigem Umfange, daß sie nun auf weiten Strecken neben den zurückstehenden, von ihnen metamorphosierten Schichtreihen als das eigentliche Grundgerüst Afrikas erscheinen. Kaum sieht man im östlichen Afrika, wo Grenzen zwischen diesen breit zu Tiefe ausladenden, ineinander verfließenden Batholithen zu ziehen wären. Wie langgestreckte schmale Inseln aber schwimmen im westlichen Südafrika die kümmerlichen, stark gefalteten Reste der Marydaleschichten — ja vielleicht auch Überbleibsel noch älterer, einem allerfrühesten Grundgebirge angehörender, mehrfach umgewandelter Sedimente — in den Gneisgraniten, ähnlich wie weiter im Osten im Betschuanalande die durch Überschiebungsbau mit dem Gneisgranit verknüpften, gefalteten Streifen der Kraaipanserie.

Trotz tiefer Entblößung uralter Massen sind in Afrika Gesteine nicht gefunden worden, die auf eine Herkunft aus der *Erstarrungskruste* der Erde deuten könnten.

Es wurde versucht, das *Alter* einzelner afrizidischer Gesteine mit physikalischen Methoden zu bestimmen. Wichtige Parallelen zu anderen ältesten Rumpfkernen der Erde zeigten sich. Die Bleimethode — Pb/U in Zirkon — ergab für das Alter gewisser Biotit-Gneise in Mozambique, daß sie den prähuronischen laurentischen Gesteinen Nordamerikas entsprechen, gewisse granulitische Granite aber im Alter den mittelpräkambrischen Graniten in Indien, Skandinavien und Kanada gleichstehen. Damit steht das präkambrische Alter sehr vieler, tektonisch gleichartig gelagerter Grundgebirgsgesteine nicht nur in Mozambique, sondern auch in Ost- und Südafrika fest.

Die **Auffaltung der Afriziden** umfaßt eine Reihe von großen, durch lange Ruhepausen getrennten Bewegungsperioden. Die Afriziden erscheinen uns zwar heute als *höhere tektonische Einheit.* In ihrem innersten Wesen aber bestehen sie aus Einzelbauten, die in kaum mehr erkennbarer (oder vielleicht erst sehr viel später bei reiferer Forschung entwirrbarer) Weise zu jener verschweißt wurden. Blicke in weit zurückliegende Zeiten tektonischer Umgestaltungen auf der Erde eröffnen sich uns.

Doch scheint es heute bereits möglich zu sein, im *zentralen Ostafrika* innerhalb der gesamten Afriziden **drei Hauptgebirgsbildungen** auszuscheiden, die von besonderer Wichtigkeit sind:

a) Es erlitten die *archäischen* Gesteinsreihen dieses Gebietes ihren frühesten, sicher erkennbaren Aufstau am *Ende des Archäicums.* Diese *Protoafriziden* bildeten ein Gebirge von sehr erheblicher Ausdehnung, das sich, soviel bisher bekannt ist, in keiner Richtung gegen völlig ungefaltete Regionen abgrenzen läßt. Allerdings schalten sich Strecken, so im küstennahen Ost-Afrika, ein, die nur ein geringes Maß der Faltung zu flachen Wellungen zeigen. Ob es sich in solchen Arealen um eine Art von Vorland der afrizidischen Faltung handelt, oder um nur weniger bewegte Zwischenstücke innerhalb der Protoafriziden, mag dahingestellt bleiben.

In die protoafrizidische Gebirgsbildung einbezogene Gesteinsreihen sind z. B. die Usambara- und die Turoka-Serie Ostafrikas, einzelne der verschiedenen, unter sich noch kaum recht vergleichbaren Gruppen des Swazilandsystems Südafrikas.

b) Eine zweite Hauptfaltung folgt im *unteren Algonkium.* Altalgonkische Gesteine liegen über weiten Räumen des östlichen Afrikas diskordant über dem abgetragenen Faltensockel der Protoafriziden.

[1]) Die Afriziden umfassen die Gesamtheit der bis gegen den Beginn des Palaeozoicums in Afrika aufgefalteten Regionen.

Diese frühalgonkische Hauptfaltung der Afriziden ergriff Schichtmassen von häufig recht grobklastischen Sedimenten, die aus der Abtragung des älteren Gebirges hervorgingen: Krystalline Quarzite, Quarzitglimmerschiefer der Massai-Serie Ostafrikas treten im Faltungsbilde hervor. In regionaler Trennung sind Gebiete zu erkennen, wo diese altalgonkischen Gesteine noch eine erhebliche Metamorphose erfuhren, und andere, wo kaum eine Veränderung an ihnen festzustellen ist.

Diese *Mesoafriziden* schmiegen sich entweder der protoafrizidischen Faltung an oder sie haben die Neigung, mit ihren jüngeren Faltenachsen diagonal, ja fast quer das Streichen des älteren Untergrundes zu kreuzen und sich mit ihm zu vergittern. Lange Zonen mit in gewissen Grenzen schwankendem *Ostweststreichen* zeichnen sie aus. Eine solche große Ostwestzone durchzieht den Norden der Massaisteppe bis an den Ostrand des Zentralgranites. Eine andere verläuft im Osten und im Süden des Viktoriasees. Die Uluberge in Britisch-Ostafrika gehören hierher. Auch im nördlichen Mozambique ist eine solche Ostwestzone festgestellt.

Eine prachtvolle *Scharung zweier Äste* des mesoafrizidischen Gebirges ist im westlichen Südafrika, nahe am Oranje, zwischen den Orten Kheis und Prieska, entblößt. Diese Kheis-Scharung ist später wiederholt tektonisch aufgelebt. In der Beuge beider Äste endet die viel jüngere, durch große Lagerungskomplikationen: Schuppungen, Überschiebungen, ausgezeichnete *Doornbergzone.*

Die mesoafrizidischen Ketten sind umfassender zerstört als die protoafrizidischen und nur unter günstigen Umständen erkennbar geblieben, so bei besonders tiefer Einfaltung oder bei Versenkung an Brüchen.

c) Eine *dritte Hauptfaltung* erlebten die Afriziden im *oberen Algonkium.* Das obere Algonkium läßt sich in Ostafrika in das *Kinga- und Karagwe-System* teilen. Das Kingasystem verrät in allen seinen Arealen deutlich die neoafrizidische Faltung. Auch sie besaß, wie die älteren Faltungen, ein erhebliches Maß an bewegender Kraft. Ihre Faltengebiete schmiegen sich, je nach den regionalen Bedingungen, den vorgeschaffenen Afriziden an. Jedoch war ihr Faltungsfeld beschränkter als das der früheren Faltungen.

Den *Neoafriziden* gehören an in Ostafrika das Gebiet der Kingaschichten im Kingagebirge, das Manjoemagebirge im Westen des Tanganjikasees. Mit ihrer Entstehung war im wesentlichen der Bau der Afriziden vollendet.

Schwächere Nachklänge ergriffen in beschränkteren Gebieten einzelne Schichtkomplexe auch des *Karagwesystems.* So haben die Karagweschichten des Zwischenseegebietes westlich des Viktoriasees einen leichten Faltenwurf erfahren.

Über diesen neoafrizidisch gefalteten Gesteinen folgen diskordant und fast ungefaltet gleichfalls fossilleere Schichtkomplexe, wie die Kundelungu- und Spungaberaschichten Ostafrikas, die Matsap(-Waterberg-)Schichten Südafrikas, die bereits zum tiefen Altpalaeozoicum neigen.

Übersichtlich zusammengefaßt erfuhr das Grundgebirge Ostafrikas folgende Hauptfaltungen:

a) die *Protoafriziden* werden aufgefaltet am Ende des Archäicums,

b) die *Mesoafriziden* im Altalgonkium,

c) die *Neoafriziden* im Oberalgonkium, und zwar in einer älteren kräftigeren Phase, die das

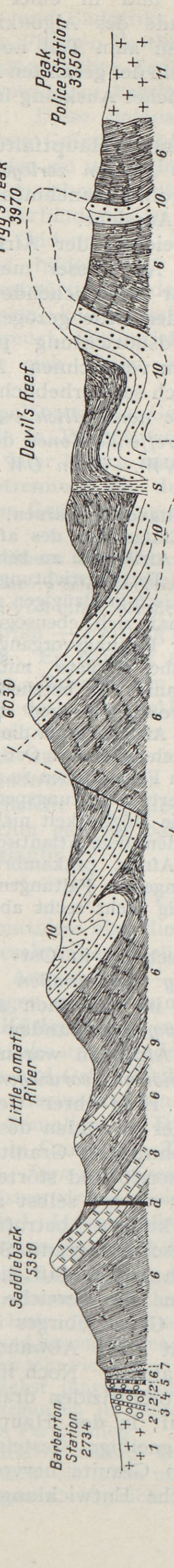


Fig. 1. *Profil durch das afrizidische Grundgebirge im Barberton-Distrikte Transvaals.* Nach A. L. HALL.
1 = Alter Hornblendegranit. 11 = Alter Biotitgranit.
2—3 Jamestown-Serie } des Präpalaeozoicums (verschiedene Schiefer, Magnetitquarzite, Quarzite, Konglomerate).
4—10 Moodies-Serie
S = Serpentin. d = basischer Gang.
Höhe: 0 750 1500 3000 6000 e. Fuß Länge: 0 1 2 3 e. Meil.

Kingasystem bewegte, und in einer jüngeren schwächeren, gegen Ende des Algonkiums, der auch das Karagwesystem zum Teil noch unterworfen wurde. Schlußstein der gesamten Afriziden-Faltung ist ihr schwächlicher Ausklang im unteren Altpalaeozoicum.

Ob sich die beiden ersten Hauptfaltungen wie die letztere *in einzelne Phasen zerlegen* werden lassen, deren Bestehen wohl anzunehmen ist, dafür besteht vorläufig wenig Aussicht.

Gern wird das **Streichen** der Afriziden als *meridional* bezeichnet. Aus dieser meridionalen Richtung wurden sogar weitreichende Schlüsse für den Urgebirgsbau der Erde gezogen. Gewiß ist ein um die Nordsüdrichtung pendelndes Streichen ihrer Falten zu verzeichnen. Aber diese Ausschläge erreichen doch sehr erhebliche Größen. Ja, sehr *bedeutsame, die nordsüdlich verlaufenden an Breite bei weitem übertreffende Zonen* des Grundgebirges in *ONO.-, WNW.- ja in OW.-Richtung* stellen sich ein.

Jedenfalls ist *dringend* davor zu warnen, immer nur die Großzügigkeit und Einfachheit des afrizidischen Grundgebirges über ganz Afrika hin zu betonen. Die tatsächlich beobachteten Faltungsrichtungen widersprechen einem schematisch-großzügigen Bau. In präkambrischen Zeiten hat sich ebensogut wie in jüngeren Erdperioden der Faltungsvorgang viel eher lokalisiert, als unendliche Gebiete mit gleichen Streichrichtungen überspannt. Zu betonen ist weiter die geringe Kenntnis großer Strecken des Grundgebirges, so im westlichen Afrika, ferner die Schwierigkeit, selbst in dem ähnlich gebauten Ost- und Südafrika die alten fossilfreien Formationen zu vergleichen und damit auch gleichwertige Faltungsperioden aufzustellen. Daneben ist die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß in dem dem Atlantischen Ozean anliegenden westlichen Afrika präkambrische Formationen auch von jüngeren Faltungen ergriffen worden sind, die vorläufig nicht recht abzuscheiden sind.

Im großen ganzen scheint in Ost- und Südafrika *Übereinstimmung der großen Faltungsperioden* zu herrschen, im einzelnen aber doch lokale *zeitliche Abweichungen* vorhanden zu sein.

Die Faltungen der Afriziden waren begleitet von *gewaltigen Intrusionen vorwiegend saurer Magmen.* So drang z. B. in ihrer Gefolgschaft der Zentralgranit auf, der im Süden des Viktoriasees einen der ausgedehntesten Granitaufbrüche Afrikas einnimmt. Er zerriß und störte den vorgeschaffenen Faltenbau, wurde selbst aber noch von faltenden Einwirkungen betroffen. Das gleiche gilt für den Betschuanagranit Südafrikas.

Im ganzen läßt sich sagen, daß die *zeitliche Folge der Eruptivgesteine* im Bereiche des entstehenden afrizidischen Grundgebirges in engster Verknüpfung steht mit dem Abwandel seiner Werdeakte, z. B. in Ostafrika. Noch in der geosynklinalen Zeit der Protoafriziden drangen dort diabasische Magmen auf; in den Hauptfaltungsphasen bildeten sich gneißige Gesteine; gegen Abschluß jener brachen Granite hervor. Es ist dasselbe große organische Entwicklungsbild, das sich in den jüngeren Faltengebirgen der Erde wiederholt. Ebenso wie in Ostafrika gestalteten sich die Eruptionsverhältnisse der Protoafriziden im westlichen Südafrika.

Tabelle der afrizidischen Gebirgsbildungen (Versuch).

Westliches Südafrika:	*Mittleres Ostafrika:*
1. *Kräftige Gebirgsbildung am Ende des Archaicums = Protoafriziden.*	
Hochmetamorphe Gesteine = Oranjeserie (älteste Teile der „Marydale-Gruppe")	Hochmetamorphe Gesteine: Usambara-Turokaserie
Intrusion des Betschuanagranits.	Intrusion des Zentralgranits.
Große Einrumpfung.	
2. *Kräftige Gebirgsbildung im Altalgonkium = Mesoafriziden.*	
Mehr oder weniger metamorphe, zum Teil fast unveränderte Gesteine (Teile der Marydale-Gruppe, Kaai- und Wilgenhoutdriftschichten; Kraaipanformation).	Metamorphe Gesteine der Massaiserie.
Intrusion des Upingtongranits.	„Ulugurugranite".
Große Einrumpfung.	
3. *Leichtere Gebirgsbildungen im Oberalgonkium bis ins tiefe Altpalaeozoicum. Neoafriziden.*	
a) Ventersdorpphase	a) Kingaphase
Diskordanz	Diskordanz
b) Transvaalphase	b) Karagwephase
Diskordanz	Diskordanz
c) Matsapphase	c) Kundelunguphase
Diskordanz	Diskordanz
Große Einrumpfung.	
Karruformation.	
4. *Faltung der Kapiden (mehrphasig).*	

II.

Wir verlassen das afrizidische Grundgebirge und werfen einen Blick auf die **Formationen des afrikanischen Algonkiums.**

Im afrikanischen Algonkium sind eine *Anzahl von Formationen* wohl zu trennen, deren Gesamtmächtigkeit z. B. in Südafrika 15000 m erreicht. In **Südafrika** können folgende große Gruppen zum Algonkium gerechnet werden: Das Witwatersrandsystem, das Ventersdorpsystem und das Transvaalsystem. Diese drei sind meist durch wichtige Diskordanzen voneinander getrennt.

Das *Witwatersrandsystem*, im südlichen Transvaal und in Oranje verbreitet, folgt diskordant über einer alten Abtragsfläche des protoafrizidischen Gebirges. Seine tiefere Abteilung ist quarzitisch-schiefrig ausgebildet, die obere dagegen enthält reichlich Sandsteine und Konglomerate. Zu dieser oberen Abteilung gehört die *Main-Bird-Serie* mit den goldhaltigen Konglomeraten am Witwatersrand. Die Mächtigkeit beider Abteilungen mag 8000 m sein. Ein Äquivalent des Witwatersrandsystems in Natal könnte die petrographisch ähnliche *Pongolaserie* sein.

Das *Ventersdorpsystem* ist zwar nicht die älteste, aber doch eine der wichtigsten, vorwiegend aus vulkanischen Gesteinen bestehenden Formationen Afrikas. Sie enthüllt uns eine Zeit immer und immer wieder erneuerter vulkanischer Ausbrüche von meist basischen Gesteinen und von sehr ansehnlicher Massenförderung. Sie läßt sich in einem nordostgestreckten Streifen verfolgen, der vom Oranje zwischen Prieska und Upington bis zu den Dwarsbergen in Transvaal zieht. Es ist bemerkenswert, daß aus überwiegenden *Vulkaniten bestehende Formationen* sich in Süd- und Ostafrika unter Verlagerung ihrer Zentren in verschiedenen Erdperioden bis ins Quartär wiederholen.

Das *Transvaalsystem* bedeckt von allen algonkischen Systemen Südafrikas das größte Areal. Es zeigt in seiner Mitte die Kalke und Dolomite des *Campbellrandes*, die während einer weit über das vorbestehende Festland vorgreifenden marinen *Ingression* abgesetzt wurden. In der oberen Transvaalformation, unmittelbar unter den Ongeluk-Laven, wurde ein *Tillit* — verfestigte Moränen einer Eiszeit — gefunden, der auch im kleinen Namalande (Numees-Serie über den Kaigaschichten) in ähnlicher geologischer Lage auftritt.

Eine sehr charakteristische Note erhält das Transvaalsystem durch ein im mittleren Transvaal gelegenes, 280 englische Meilen von Ost nach West langes und 160 M breites Feld intrusiver Gesteine, den *Bushveld-Igneous-Complex*, der vielleicht erst in Post-Waterbergzeit aufgedrungen ist. Die intrusive Masse erscheint als Lopolith[1]), dessen Fuß gebildet wird von tieferen Gliedern des Transvaalsystems, während sein Dach aus dessen jüngsten Schichten (Rooiberg-Quarziten) besteht. Der Bushveld-Komplex erbaut sich aus verschiedenen Gesteinen, wahrscheinlich Differentiationen ein und desselben Magmas, und zwar aus: Sodagraniten („rotem Granit") im Zentrum und basischen Gesteinen (Diabas, Norit, Gabbro, Pyroxenit) in den peripheren und tiefen Teilen. In diesen basischen Gesteinen liegen die großen *Platin*-Vorkommen des Potgietersrust-Lydenburg-Distriktes. Kräftige Kontaktmetamorphose zeichnet die umgebenden Gesteine aus. Intrusionen von Nephelinsyenit, so die des Pielandsberges, waren die Ausklänge der großen vulkanischen Phase.

III.

Das **Palaeozoicum** bringt für Klein- und Niederafrika bis tief in die Sahara, ja den Sudan, vorstoßende *marine Transgressionen des Silur- Devon- und Karbonmeeres.* Das Kambrische Meer dagegen gewann nur den Rand des, seit Beginn des Palaeozoicums nie wieder völlig überfluteten Festlandskernes Syrabiens am Toten Meere, und die Küste Westmarokkos, so zwischen Casablanca und Rabat.

Als Gegenstück zu Nordafrika wird das südliche *Kapland* während kurzer Zeit vom *Devonmeere*, die *Omanküste* Arabiens vom *Karbonmeere* bespült. Die flächenhaften Binnentransgressionen des Palaeozoicums über Niederafrika finden eine auffällige Parallele in denen der Kreidezeit, die Randtransgressionen des Devons (Bokkeveldschichten) und Perms (Eurydesmenschichten) am Längsblock Afrikas in denen des Mesozoicums.

[1]) Lopolith bezeichnet einen Körper intrusiver Gesteine von bestimmter Erscheinungsform (schüsselartige Decke).

Mittel- und Südafrika waren im Palaeozoicum auf weiten Flächen Festland.

Die paläozoischen Sedimente Nordafrikas sind gefaltet worden zu *kaledonischen und varistischen Gebirgen*[1]). Diese paläozoischen Gebirge haben den Golf von Guinea nicht erreicht. Nach Norden aber knüpfen sie unter der Region der in anderer Richtung streichenden, jüngeren Atlasfalten hinweg die Verbindung zu den Kaledoniden und Varistiden Südeuropas. Im Untergrunde Nordwestafrikas bilden die Varistiden wohl einen großen, westwärts sehenden Bogen, der die „*Sahariden*"[2]) von kaledonischem Alter überwältigt und überkreuzt. Die varistische Auffaltung verlief, soweit sie sich bisher erkennen läßt, in zwei Phasen.

Diese paläozoischen Gebirgsbewegungen waren ebenso wie in Europa von *intrusiven Vorgängen* begleitet. Hier lauern mancherlei Schwierigkeiten in der Abtrennung der durch beide geschaffenen krystallinen Gesteine von denen des Vorpalaeozoicums.

Aus keinem anderen Teile Afrikas ist eine paläozoische Faltung sicher bekannt geworden. Doch wird von einer solchen im Sudan, in Deutsch-Südwestafrika — Faltung der Konkipformation — gesprochen. Es handelt sich in ihnen wohl um algonkische Bewegungen, oder um Ausklänge solcher an der Grenze Algonkium-Palaeozoicum.

Aus der paläozoischen Zeit Afrikas wäre vielleicht noch zu erwähnen die flächenkleine *permische Randtransgression* über Deutsch-Südwestafrika, vielleicht auch über Südwestmadagaskar, die immerhin gewisse paläogeographische Rückschlüsse erlaubt.

IV.

Die Kenntnisse über die **mesozoischen** *Erlebnisse* Afrikas beschränken sich — mit einigen sehr wichtigen Ausnahmen — fast ganz auf seine gegenwärtigen Küstensäume.

Diese **Küstensäume** sahen *Randüberflutungen* aus allen Afrika umgebenden Meeren. Sie beginnen im Norden und *Osten* Afrikas in der *Trias*. Reste triasischer Marinschichten liegen in Nordmadagaskar, in Somalien am Djuba, auf der Halbinsel Musandim in Oman, am Toten Meere, am Rande der Sahara. *Jura* und *Kreide* greifen tiefer landein. Am schärfsten dringen sie in Ostafrika vor auf Arabien und Abessomalien. Der *Westen* kennt keinen marinen Jura, mit der wichtigen Ausnahme

[1]) Die *Kaledoniden* sind das älteste der postalgonkischen (besser vielleicht postkambrischen) Faltengebirge der Erde, die mit Ausgang des Silurs vollendet waren; sie sind besonders aus dem Nordwesten Europas bekannt, aber sehr viel weiter verbreitet. Die *Varistiden* sind das nächst jüngere Faltengebirgssystem, dessen älteste Bewegungen im Oberdevon einsetzten, deren letzte in das Perm fallen.

[2]) „*Sahariden*" nannte E. SUESS die Kaledoniden der Westsahara; sie fallen nicht mit den älteren Afriziden zusammen, obgleich diese Ansicht vertreten wurde.

der Kapverden, wohl aber wiederholte Bespülungen des Kreidemeeres. Der *Norden* Afrikas steht unter den Einwirkungen des Tethysmittelmeeres. Er allein zeigt in einzelnen mesozoischen Schichten die bathyale Facies eines tiefen geosynklinalen Meeres. In der *turonen Oberkreide* aber setzt die umfangreichste Binneningression, die der Kontinent kennt, vom Mittelmeere und vom Golfe von Guinea her Sudan und Saharien unter Wasser.

die Karruzeit. *Glazialperioden* begraben Teile des südlichen und mittleren Afrikas unter ausgedehnten Massen von Inlandseis. Die Geschichte der obengenannten Perioden zeigt uns weiter mächtige Ablagerungen im *Kongobecken*. Sie entstammen wohl einem permisch-mesozoischen Binnenmeere von erheblicher Ausdehnung. Dies fand seine Füllung vom Westen her aus dem südlichen Atlantischen Ozeane.

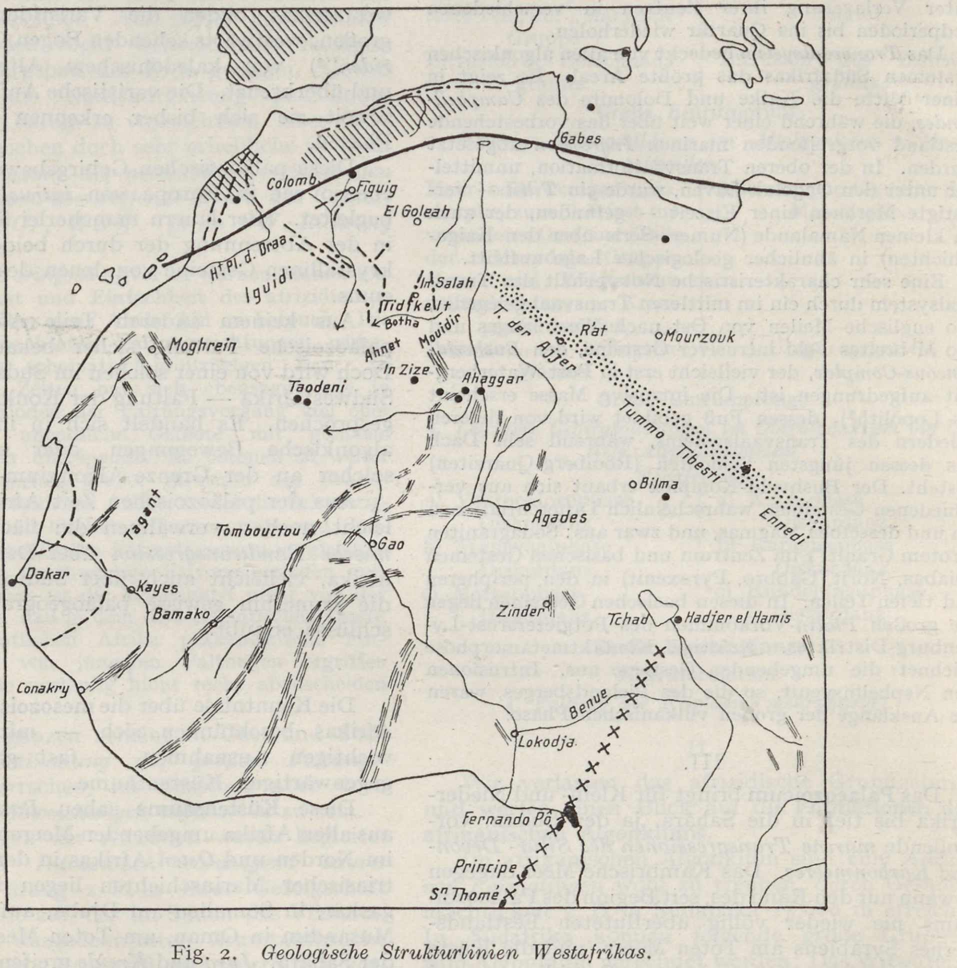


Fig. 2. *Geologische Strukturlinien Westafrikas.*

Fein gestrichelt: Streichrichtungen der Afriziden (der Gebirge vorpaläozoischen Alters).

.—.—.: Streichrichtungen der paläozoischen Gebirge, insbesondere der Varisciden.

——: Südgrenze der alpidischen, mesozoisch-tertiären Faltungszone.

////: Meseta-Stücke.

. . : Tertiär-quartäre Vulkane.

× × ×: Kamerun-Linie, begleitet von jungvulkanischen Gesteinen (meist nicht eingezeichnet).

::::: : Tibesti-Schwelle (Hebungsschwelle junger Entstehung in erythreischer Richtung).

Zusammengestellt nach verschiedenen Autoren, insbesondere Flammand.

Die oberkarbonisch-permische und mesozoische Geschichte des **Inneren** dagegen zeigt uns einmal die Bildung der terrestren *Karruschichten*. Sie verkleiden in großer Dicke den Süden Afrikas und ziehen in Ausläufern bis gegen Abessinien. Ein intensiver wiederholter Vulkanismus belebt

Oft wurde von einem *Wüstenklima* des inneren Afrikas während des Mesozoicums gesprochen. Weder die allgemeinen physikalischen und geologischen Zustände des Kontinents noch Einzeltatsachen sprechen überzeugend für diese Annahme.

Während des Mesozoicums ersteht das **Kapgebirge,** das heute nur den kümmerlichen Rest eines versunkenen großen Gebirgsgürtels darstellt. Es besteht aus einem ostwestlich gerichteten Hauptstamm, einem östlichen und westlichen Nebenast, die der indischen und atlantischen Küste Südafrikas parallel ziehen.

Ein Wiederaufleben des westlichen Astes, der am Kamiesberge endet, wird neuerdings für die südliche Namib Deutsch-Südwestafrikas angenommen. Dort ist die Namaformation, die der Transvaalformation des übrigen Südafrika entspricht, in Falten gelegt. Diese Faltung soll im Alter derjenigen der *Kapiden* entsprechen.

Über deren Alter sind nun die Ansichten noch geteilt. Die Faltung erfolgte wohl in verschiedenen Perioden während Oberperm und Kreide; die Hauptphase aber mag rhätisch sein.

wegungen heute noch an. Besonderheiten der Dichte und magnetischen Lagerung statten die tiefen Gräben aus, die *Zerrungsrisse* der Erdkruste sind. Kräftige *Erdbeben* finden in ihnen ihre Herde.

Unter diesen ostafrikanischen Gräben nehmen eine wichtige Stellung der *erythreische* und *adische Graben* ein, in deren breite Senken die jüngeren Schachtelgräben des Roten Meeres und des Golfes von Aden eingebettet sind. In Ostafrika aber ist hier besonders der große Grabenzug zu nennen, der Njassa-, *Tanganjika-* und Kiwusee enthält.

Schließlich überschüttet ein *kräftiger Vulkanismus,* mit den jungen Zerbrechungen des Kontinentalblockes verbunden, große Gebiete Afrikas mit seinen Erzeugnissen. Schon gegen Ende der Kreide fließen in Südwestarabien und Abessoma-

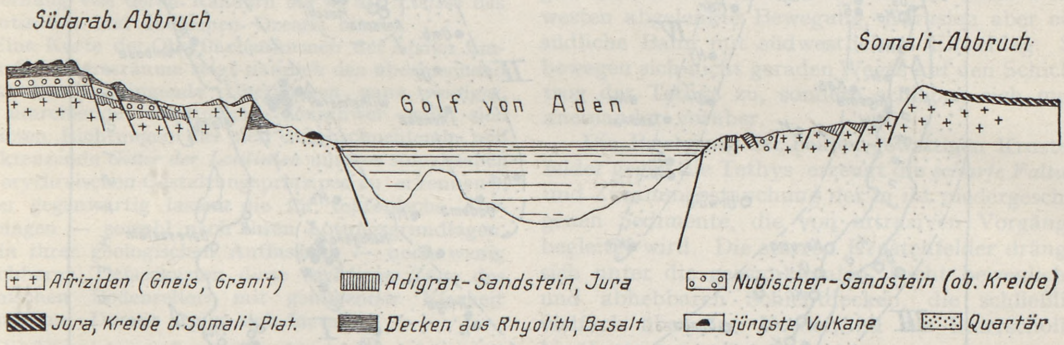


Fig. 3. *Querschnitt durch den Graben von Aden.*
Der breite Zerrgraben von Aden, im Norden vom Staffelabbruche Südarabiens, im Süden von dem des Somaliplateaus flankiert, birgt in sich den schmäleren und jüngeren Schachtelgraben des wassererfüllten Golfes von Aden.
(Stark überhöht; Länge ca. 450 km.)

V.

Aus der *tertiären und quartären Geschichte* Afrikas wären als Angelpunkte diese hervorzuheben.

Nordafrika sieht die Entstehung des *Atlas- und Syrischen Bogens* als Teilglieder des mediterranen Faltengürtels. Ihre ersten Faltungen liegen bereits im Mesozoicum. Ihre Bewegung geht auf die afrikanische Urmasse, die sie erzwingt. Atlas und Syrischer Bogen hängen sich an die Gebirge Südeuropas und Kleinasiens an. Der Atlas verlängerte sich in den Atlantik, umschlang vielleicht in einem Bogen den Norden Westafrikas.

Kleine Faltenzonen am *Senegal* und *Niger* entstanden gleichzeitig mit der mediterranen Gebirgsbildung, und aus gleichen Ursachen. Diese Faltenzonen haben in ihrer regionalen Einordnung Ähnlichkeit mit dem Strange der saxonischen Falten von Nordwestdeutschland bis zum Kaspischen Meere.

Weiter bilden sich die einzigartig ausgedehnten *ostafrikanischen Bruchzonen und* **Gräben.** Ihre früheste Anlage fällt in das Untertertiär. In einzelnen Teilen dauern die einsenkenden Be-

lien weite Decken aus. Ein neuer stärkerer Vulkanismus erwacht im Untertertiär. Er sucht vor allem Ostafrika, Madagaskar und Abessomalien heim. Doch auch im Sudan, in der Sahara äußert er sich, schon in der Oberkreide aufflammend. In wenigen tätigen Essen, so den Kiwuvulkanen, dem Karthala von Großkomoro, dem Piton de la Fournaise Réunions, dem Kamerunberge, nur leben die vulkanischen Kräfte Afrikas fort. Sie förderten ganz überwiegend *Alkaligesteine.*

Die im Tertiär entstehenden *Landverbindungen* zwischen Nordafrika und Eurasien ermöglichen den Austausch von Säugetierfaunen.

Während der Eiszeit der Nordhemisphäre sieht Afrika eine *Pluvialzeit* und eine größere *Vergletscherung* seiner Hochgebirgsinseln. Tief unter den gegenwärtigen Gletscherzungen liegende Endmoränen wurden am Kilimandscharo, Kenja und Ruwensori gefunden.

Die *Umrißformen* aber, mit denen das afrikanische Festland sich zur Gegenwart darbietet, erhielten seit dem Tertiär ihre Prägung. Seine Küsten werden entweder als Flexuren gedeutet, so in Südafrika, oder als Abbrüche.

VI.

Es wurden aus der *Tektonik* Afrikas die Faltengebirge verschiedenen Alters und die Zerreißungszonen erwähnt.

Die Hauptkennzeichen seines Baues, man möchte geradezu sagen dessen **Grundgesetz,** ist nun nachzutragen.

Der ganze Kontinent samt den umgebenden Meeresböden wird beherrscht durch scharf hervortretende Systeme von großen Bauzügen. Sie lassen sich in Faltungsrichtungen und Bruchlinien,

Das andere der beiden Systeme aber hält sich in einer *nordwestlichen* Richtung, ebenfalls mit einer Streuung über die Flanken seines allgemeinen Streichens. Es wurde wieder nach einem ostafrikanischen Namen und nach dem Vorbilde des erythreischen Grabens — als das **erythreische Bausystem** Afrikas bezeichnet.

Zwischen beiden stehen zwar Baulinien mit anderen Richtungen, so *meridional* verlaufende oder auch ostwestliche, wie im südlichen Kaplande. Sie aber stehen hinter jenen mit vereinzelten Aus-

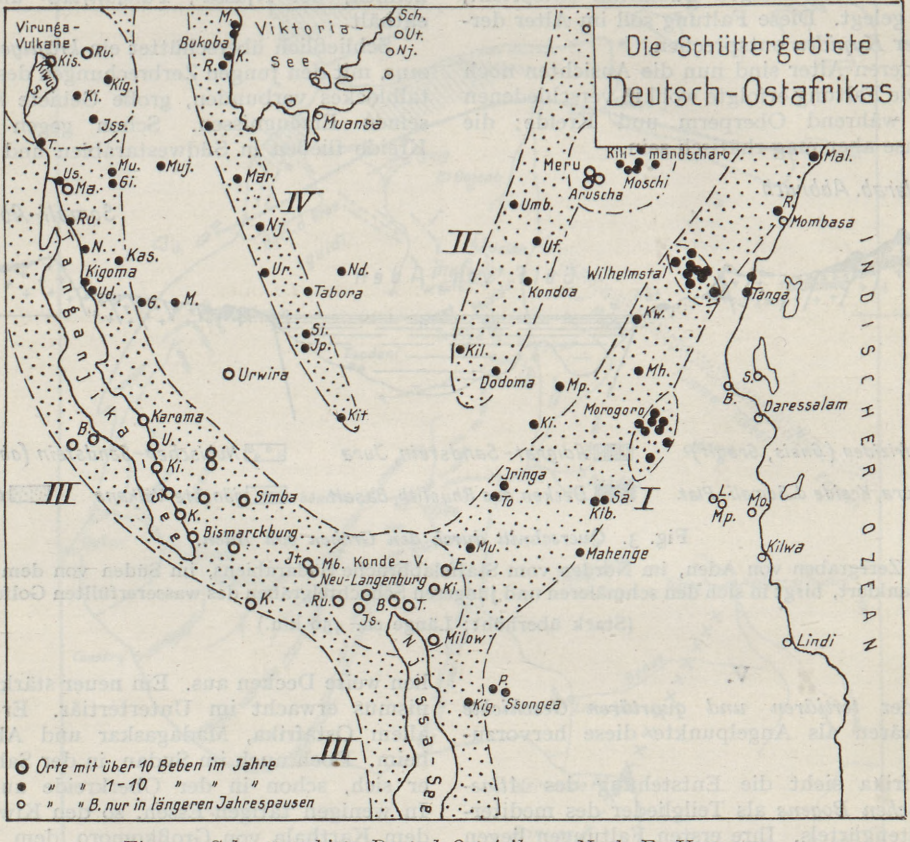


Fig. 4. *Schuettergebiete Deutsch-Ostafrikas.* Nach E. Krenkel.

Die *punktierten Streifen* stellen die langgestreckten Schuetterellipsen *tektonischer Beben* dar, die in den Gebieten der großen ostafrikanischen Bruchzonen entstehen (I = östliche, II = mittlere, III = westliche Bruchzone; IV = Bukoba-Bruchzone). *Rundlich* umgrenzt sind die Gebiete, in denen neben tektonischen reichlich *Beben vulkanischer Natur* vorkommen (Kilimandjaro-Meru-Gebiet, Konde-Vulkane, Virunga-Vulkane).

in der Anordnung von Schwellen und Becken und anderem in gleicher Weise erkennen. Diese Bauzüge halten bestimmte Richtungen ein.

Das eine dieser Systeme beharrt in einer *nordöstlichen* Bahn, mit gewissen Ausschlägen nach beiden Seiten seines Hauptstreichens. Es ist — nach einem in der Tektonik Ostafrikas eingebürgerten Namen und nach dem Vorbilde des langen Ostabbruches der Somalihalbinsel — das **somalische Bausystem**[1]) Afrikas genannt worden.

[1]) Vgl. E. Krenkel, Geologie Afrikas, Bd. I, Berlin 1925.

nahmen an Bedeutung weit zurück, sind zudem auch meist die jüngeren.

Das somalische Bausystem herrscht regionenweise über das erythreische, das letztere in anderen Gebieten über jenes. Sie pflegen sich zu kreuzen, so daß eine *großartige Gitterstruktur* erzeugt wird. Diese Gitterstruktur ist vom Verfasser in einer Skizze dargestellt worden, die als Versuch gewertet werden soll[1]). Sie zeigt nicht etwa Faltungslinien oder Bruchsysteme, sondern die Anordnung von Becken und Schwellen des afrikanischen Festlandes und

[1]) l. c. S. 26.

seiner Meeresumrahmung. Das *Raumgitter* der marinen und kontinentalen Becken, der untermeerischen und festländischen Schwellen leuchtet *in seiner Gesetzmäßigkeit* hervor,

Das somalische und erythreische Bausystem sind uralter Entstehung. Sie brechen bis in die jüngste Geschichte Afrikas wie alte, unheilbare Wunden der Kruste immer von neuem wieder hervor. Beide beherrschen das Baubild ganz Afrikas, Osten wie Westen und die Mitte. Sie lassen sich ebenso im Kapgebirge wie in den eurasiatischen Gebirgsgürteln wieder erkennen, wenn auch in jenen Umformungen der verschiedensten Art verschleiernd über sie hinweggriffen. *Einzelbeispiele* für beide ergeben sich aus der regionalen Geologie Afrikas in Fülle. Im Untergrunde der Sahara und des *Sudans* z. B. ist das somalische System von großer Wichtigkeit.

Aber nicht nur die afrikanische Kontinentalmasse steht unter ihrem Zwange. Diese großen formenden Kräfte greifen auch auf Tausende von Kilometern Entfernung von deren Rändern *bis in die Tiefsee* des Atlantischen und Indischen Ozeans hinaus.

Eine Karte der Oberflächenformen der Afrika umgebenden Meeresräume zeigt nämlich das überraschend scharf herausspringende Überwiegen ganz weniger, jene umreißender Richtungen. Unschwer ergibt sich in diesen Richtungen das sich durchschneidende und überkreuzende *Gitter der Leitlinien* unseres somalischen und erythreischen Gestaltungsprinzipes zu erkennen[1]). Schon gegenwärtig lassen die für tektonische Auswertungen — sowohl nach ihren Lotungsgrundlagen, wie in ihrer geologischen Auffassung — noch wenig brauchbaren Tiefseekarten diese wichtigen Züge des ozeanischen Bodenreliefs mit genügender Klarheit herauslesen. Daraus ergibt sich für uns:

Die Einwirkung der beiden für Afrika erkannten Bauprinzipien auf die Kontinentalmasse *gleicht* den aus den umgebenden flächenweiten Meeresböden herausleuchtenden Erscheinungen *so sehr*, daß:

einmal an der Gleichheit der tektonischen Kräfte hier wie dort nicht zu zweifeln ist,

zum anderen aber auch, das der Arbeit dieser Kräfte unterworfene Gesteinsmaterial im wesentlichen eine *Einheit* darstellen muß.

Das trockene Festland Afrikas unterscheidet sich in den Bauregeln und Bauformen *in nichts* von seinen, von Ozeanwasser überdeckten Nachbarflächen. *Festland und Meeresboden sind hier wenigstens eine stoffliche Einheit*. Der Meeresboden rund um Afrika ist keine Entblößung der Simasphäre: Er ist vielmehr ein niedergesunkener, in sich zerbrochener Abkömmling der afrikanischen Salisphäre, mit deren blutsverwandten Gesichtszügen. Diese niedergebröckelten Schollen eines einst umfangreicheren Afrika stehen mit ihrer Muttermasse noch in unlösbarem Verbande. Sie sind nicht von ihr über weite Entfernungen hin abgetriftet.

VII.

Den Nordrand Afrikas umkleiden Europa und Asien.

So muß hier auch die **geologische Verknüpfung** der afrikanischen und der eurasiatischen Kontinentalmasse gestreift werden.

Beide werden verkettet durch Zonen aufgefalteten Krustenmaterials. Solche verkittenden Zonen entstanden bereits zur Zeit der caledonischen und varistischen Gebirgsbildung, besonders klar verfolgbar aber während der mesozoisch-neozoischen. Letztere verkörpern sich im *mediteranen* oder *afrasischen Kettengebirgsgürtel*.

Seine Gebirge erwuchsen aus der Geosynklinale der *Tethys*. Sie schied als von West nach Ost gestrecktes, reich gegliedertes Mittelmeer die afrikanische und eurasiatische Kontinentenmasse.

Diese letzteren stehen im *Widerspiel* zueinander. Sie glitten und gleiten auf das sie trennende Mittelmeer zu. Afrika verfolgt dabei im großen ganzen eine nördliche, doch leicht nach Nordwesten abgelenkte Bewegung, Eurasien aber eine südliche Bahn mit südwestlichem Einschlag. Sie bewegen sich nicht geraden Weges auf den Schichttrog der Tethys zu, sondern schieben sich mehr aneinander vorüber.

Die Bewegung der beiden gewaltigen Krustenfelder gegen die Tethys erzeugt die *scharfe Faltung* und Zusammenstauchung der in ihr niedergeschlagenen Sedimente, die von intrusiven Vorgängen begleitet wird. Die starren Krustenfelder drängen sich unter die geosynklinalen, leicht beweglichen und abhebbaren Schichtdecken, die schließlich vielfach über den Vorderrand der Starrschollen hinübertreten müssen.

So wird durch die *gegensätzlichen Bewegungen* der eurasiatische Gebirgsstrang zwangsweise geboren, dessen Nordrand Eurasien, dessen Südrand Afrika und Indien begleitet. Sein Nordsaum, so die europäischen Alpen, zeigt — scheinbar — aktive Bewegungstendenz nach Norden, sein Südstamm, so der Atlas und der Syrische Bogen, nach Süden, also aus der mediteranen Geosynklinale heraus. In Wahrheit sind alle seine Bewegungen nur passive, erzwungen von den gegen den orogenen Trog der Tethys vorwandernden Krustenschollen.

Nord- und Südgrenze der eurasiatischen Gebirge stoßen an ihre Kontinente mit einem breiten Rande *mariner neritischer Sedimente*. Eindeutig klar ist das zu verfolgen über das ganze afrikanische Ufer der Tethys, wo neritische Schichtreihen den Afrika zugewandten Fuß des Atlas und der syrischen Gebirge begleiten, weniger klar aber am Gegenufer infolge nachträglicher tektonischer Reduktion und der großen Überschiebungen dorthin.

Die Außenflanken des eurasiatischen Gebirgsstranges *ebben* mit ihren Bewegungswellen allmählich aus. Ständig leichter und seichter werdende Faltenwellen strömen aus seinem stürmisch bewegten Innern auf den marinen, immer dünner sie überkleidenden Sedimentmantel der Kontinente hinauf. Schließlich klingen sie vor ruhigen Tafelschollen in auseinandertretenden

---

[1]) l. c. S. 7.

Büscheln und einsamen Falten aus. Dieses Austönen der mediteranen Faltung ist wieder am afrikanischen Ufer der Tethys prachtvoll zu erkennen, vom atlantischen Rande Afrikas bis zum äußersten Eck der nordsyrischen Tafel, dann entlang dem iranischen Gebirgsrande. Nurmehr ganz leise Verbiegungen der Sedimenthaut, oft zwischen ungefaltete Tafelstreifen eingestreut, stehen als letzte Vorposten des mediteranen Faltungsgürtels auf dem afrikanischen Kontinent. So zwischen Atlas und Saharatafel, zwischen syrischem Bogen und Innersyrien, so vor den Iranketten die einsamen mesopotamischen Faltenzüge.

Die Afrika gegenwärtig noch berührenden Teile des *zweiseitig* gebauten eurasiatischen Orogens[1]) gehören seinem südlichen, durchaus selbständigen Hauptstrang an, dem der *Dinariden*[2]). Innerhalb des — gegenüber seinen Vorfaltungsfelde stark eingeengten — Kettengebirgsgürtels selbst aber deutet die Art und Weise des Verlaufes seiner großen, mannigfach gebogenen und verschlungenen Leitlinien an, daß ihm Umformungen, Zerknitterungen, Schleppungen im Widerspiel zwischen afrikanischem und eurasiatischen Krustenfeld reichlich widerfuhren. Die Bogenform vieler Stücke, denen der „Gibraltarbogen" nur fälschlich beigerechnet wird, weist vor allem auf solche Schleppungen hin.

Alle *Bewegungsbilder* in den mediterranen, Afrika und Eurasien verknüpfenden Gebirgen aber mögen sich dieser Vorstellung über ihre Ursachen unterordnen:

Die — aus den archäischen Gebirgen als Rumpfreste überlieferten, nur fälschlich sogenannten — *Urschollen* der Erdrinde, die als ausgedehnte, in sich versteifte Tafeln zwischen sich die Pressungsbänder der Faltengebirge zusammenschieben, werden von einer *magmatischen Unterlage getragen*. Diese beharrt nicht in steter Ruhe, sondern steht unter einer gewissen Wanderneigung. Die Abkühlung der Erde ist es, die ihr physikalisches und chemisches Gleichgewicht stört. Diese Temperatur- und Stoffstörungen aber setzen sich in Strömungen des Magmas um. Seine langsamen Verlagerungen werden noch von der Rotation und den Gezeiten der Erde beeinflußt. Mit ihnen verträgt das Magma auf seinem Rücken die Rindenfelder der Erde, und bewegt sie gegen einander.

Es ist selbstverständlich, daß diese sich über Perioden der Erdgeschichte erstreckenden, langsamen Verschiebungen von Rindenschollen *nicht nur* auf die zwischen ihnen eingeschalteten, Schichterfüllten Tröge einwirken. Sie lösen auch *im Inneren* der Kontinente erhebliche Veränderungen aus, die sich vor allem in Zerreißungen, und in Lageänderungen größerer und kleinerer Teilstücke eines Krustenfeldes kundtun. Gerade dafür aber bietet Afrika gute Beispiele.

[1]) Ein *Orogen* ist eine durch gebirgsbildende (orogenetische) Bewegungen erzeugte höhere bauliche Einheit.

[2]) Als *Dinariden* wurden diejenigen Teile des alpidischen Faltensystems zusammengefaßt, die von einer gegen Süden (also auf Afrika zu) sehenden Bewegung beherrscht werden. Doch sollte der wenig glückliche Same durch einen besseren ersetzt werden.

VIII.

Zum Schlusse dieser Übersicht mögen *zwei Vorstellungskreise* berührt werden, die sich mit der geologischen Umbildung eines einst sehr viel größeren zum heutigen Afrika befassen.

Scheint zur Schöpfung von Faltungsgürteln Beweglichkeit von Rindenfeldern erforderlich, so wird deren Ausmaß sicherlich überschätzt, würde den Annahmen Wegeners über das **Abtriften** Südamerikas und Indiens von dem — relativ weniger beweglichen — Afrika gefolgt. Dieses Abwandern setzte mit Wegener zu einem Teile im Alttertiär, zum anderen in noch jüngeren Zeiten ein und führte in kurzen Zeitspannen zu sehr beträchtlichen Lageänderungen der in der simatischen Unterlage treibenden *salischen Blöcke*.

Zwei Annahmen aus Wegeners Gedankenkomplex sollen besprochen werden, da sie die regional-geologische Stellung Afrikas zu seinen Nachbarn im Osten und Westen behandeln, die *atlantische Spalte* und der *vorderindische Zusammenschub*.

Mittels der *atlantischen Spalte*, deren einzelne Strecken in verschiedener Zeit entstanden, lösten sich Süd- und Nordamerika in Wegeners Annahme vom zurückbleibenden Europa-Afrika.

Die bisher zur Beurteilung dieser Ansicht verfügbaren geologischen Tatsachen aus Westafrika und dem östlichen Südamerika zeugen nicht für sie. Weder die Struktur des afrizidischen und brasilianischen Grundgebirges, weder Tektonik, Alter und Lage der (fälschlich) als sehr eng zusammengehörig betrachteten Gebirge des Kaplandes und der Sierren der Provinz Buenos Aires, noch die auf der Brasilmasse nicht wiederzuerkennenden Züge der jungen Faltungszone am Niger, der auf Kamerun beschränkten Effusivregion, der afrikanischen Vorkommen von Oberkreide und Alttertiär sprechen im Sinne Wegeners.

Die Formen ferner des atlantischen Meeresbodens im Westen Afrikas erinnern in ihrer unruhigen Gestalt nicht an die bei simatischen Entblößungen zu fordernde Schlichtheit, sondern an die Morphogenie des benachbarten Festlandes. Er gibt sich durch sie als ursprünglicher Bestandteil der abgesunkenen Oberkruste zu erkennen. Beachtenswert sind in diesem Zusammenhange auch die kleinen Inseln inmitten des Atlantik, wie St. Helena, Aszension, Tristan d'Acunha, in deren vulkanischen Auswurfsmassen sich Bruchstücke der an der Erdoberfläche verbreiteten Gesteine finden.

Die *Eruptivgesteine* weiterhin zu beiden Seiten des Atlantik zeigen nicht im mindesten so enge Verwandtschaft, daß aus ihr die Zerspaltung einst einheitlicher *comagmatischer Provinzen* in nun durch Abtrift geschiedene Teile zu folgern ist. Die Summe der bisher bekannten Einzeltatsachen aus der Verbreitung der Eruptivgesteine am Atlantischen Ozean — so das *einseitig afrikanische* Vorkommen von Alkaligraniten in Nigerien und Dahomé, von Gesteinen der Charnokitreihe in Liberia und Oberguinea, von jungen Effusiven wie Nepheliniten, Leuzititen, Hauyngesteinen im innersten Winkel des Guineagolfes — spricht gegen die Trifthypothese.

Ebensowenig lassen sich auf der indischen Flanke Afrikas Landverschiebungen beträchtlichen Umfanges geologisch beweisen. Der harmonische, von einem *lemurischen Zusammenschub nicht* beeinflußte Verlauf der kaledonischen und varistischen, die Süd- und Nordkontinente der östlichen Halbkugel *bis nach Australien* verknüpfenden Gebirge streitet gegen die angenommenen Krustenverlagerungen.

Die Summe der geologischen Tatsachen von den Rändern des Atlantik und Indik, wohl auch aus der Tiefe dieser Meere, ist *nicht vereinbar* mit dem Gedanken einer Abwanderung von Schollen aus Afrika über tausende von Kilometern seit dem Eozän. — —

In scharfem Gegensatze zu WEGENER betrachtet KOBER als für die geotektonische Gliederung Afrikas und der angrenzenden Ozeangebiete von ausschlaggebender Bedeutung einen **„orogenen Ring"**, der als ununterbrochener Faltungswall die Kontinentalmasse umpanzert. Dieser orogene Ring umfaßt einmal die mediterranen Faltenzüge zwischen Gibraltarenge und Indusmündung. Von jener aber verlängert sich sein westlicher Ast über den Atlantischen Rücken, von dieser sein östlicher über den Westindik, bis beide weit südwärts des Kaplandes den Faltungskreis schließen. Mit Ausnahme des mediterranen Stückes sind alle Teile dieses orogenen Ringes unter den Ozean gesunken. Dem Boden des Atlantischen und Indischen Ozeans lastet nun ein *versenktes junges Orogen* auf.

Die Zeugnisse für einen geschlossen Afrika umrundenden orogenen Ring sind so hypothetisch, daß es unmöglich ist, sich mit der Vorstellung seines einstigen Bestehens zu befreunden. Gegen die von KOBER angenommene Abzweigung des östlichen Astes seines orogenen Ringes aus den iranisch-indischen Falten spricht aber — neben dem Bau der Indusketten selbst — mit aller Deutlichkeit die Bodengestaltung im *nördlichen Arabischen Meere*. In diesem vermittelt zwischen dem Omanbogen einer-, dem Indusbogen andererseits ein markanter, sich genau in deren Streichen einschaltender *untermeerischer Rücken* Er verkittet diese beiden Teilbögen zu einem prachtvoll geschwungenen Vorbogen der vorderasiatischen Hauptfaltenzüge. Sollte nun quer über diesen so schön geschlossenen Oman-Indusbogen der orogene Ring in den Indik hinausziehen? Deutet man diese Brücke nicht hinweg, so fällt mit ihrer Anerkennung zunächst der Ostast des orogenen Ringes und damit dieser auch als Ganzes.

Auch die Synthetiker des eurasiatischen Gebirgsbaues, wie ARGAND und STAUB, zeichnen in ihren Karten am Omangolfe den geschlossenen Zug seiner Ketten, ohne einen in den Indik strebenden Ast eines orogenen Ringes abzuzweigen.

Nicht der orogene Ring schreibt den tektonischen Stil Afrikas vor. Nirgends im afrikanischen Bauwerk zeigen sich Spuren einer seiner angenommenen Linienführung angepaßten, *konzentrischen* regional-geologischen Gliederung.

Die Summe der geologischen Erscheinungen, die sich in Afrika und in den umgebenden Meeresräumen beobachten oder wenigstens mutmaßen lassen, — so Gestalt und Oberflächenformung des Kontinents, die leitenden tektonischen Züge, die vulkanischen Erscheinungen, Erdbeben- und Massenstörungszonen, ferner das Relief der Ozeane — ist vielmehr im allgemeinen rückführbar auf die *Herrschaft des somalischen und erythreischen Baugesetzes*.

Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre[1]).

Von R. COURANT, Göttingen.

Funktionen reeller Veränderlicher.

Indem ich nun dazu übergehe, einige besonders wichtige Gebiete des RIEMANNschen Wirkens mehr im einzelnen zu besprechen, beginne ich zunächst mit der Funktionentheorie; allerdings nicht mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen, an die man heute beim Namen RIEMANN zuerst denkt, sondern mit der Theorie der reellen Funktionen, die ebenfalls RIEMANN wichtige Impulse verdankt.

Kaum eine andere Gedankenbildung ist so typisch für den Unterschied zwischen der antiken griechischen und der modernen Mathematik wie der Funktionsbegriff. Während in der alten Mathematik — wie sie bis vor kurzem dem Schulunterricht völlig den Stempel aufgedrückt hat — der individuelle Einzelfall vorherrschte, betrachtet der moderne Mathematiker die einzelnen Gegenstände in systematischem Zusammenhange unter dem Gesichtspunkt der funktionalen Abhängigkeit. Die ganze Tragweite dieser Ideenbildung kann ich hier nicht beleuchten. Ich will nur andeuten, daß naturgemäß in der geschichtlichen Entwicklung eine lange Zeit verging, ehe man sich zu voller begrifflicher Klarheit gegenüber dem Gedanken der Funktion durchgerungen hatte. Man war sich zunächst nicht einig darüber, was man allgemein unter einer Funktion $y = f(x)$ einer Veränderlichen x zu verstehen hätte, was eine „willkürliche Funktion" sei usw. Zunächst knüpfte man den Funktionsbegriff an den expliziten analytischen Ausdruck und glaubte demgemäß, Funktionen, die in unserem heutigen Sinne graphisch gegeben sind, oder in verschiedenen Intervallen ganz verschiedenen analytischen Bildungsgesetzen genügen und beim Übergang von einem zum anderen Intervall Unstetigkeiten ausweisen, nicht eigentlich als Funktionen ansehen zu dürfen. Merkwürdigerweise entging den Mathematikern des 18. Jahrhunderts die Tatsache, daß man sehr wohl derartige Vorkommnisse in einfacher Weise analytisch darstellen kann, wenn man nur den Grenzbegriff geeignet heranzieht. Zum Beispiel hat die Funktion

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

[1]) Fortsetzung des Aufsatzes aus Heft 36, S. 813 bis 818.

in dem Intervall $x^2 < 1$ überall den Wert 1, während sie in dem Gebiet $x^2 > 1$ den Wert 0 besitzt und für $x^2 = 1$ den Wert $\frac{1}{2}$ annimmt. Unsere Funktion ist also eine analytisch höchst einfach dargestellte typisch unstetige Funktion. Ein anderes charakteristisches Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sin x}{1 + x^{2n}} + \frac{\cos x}{1 + x^{-2n}} \right)$$

welche im Intervall $x^2 < 1$ mit $\sin x$, im Gebiete $x^2 > 1$ mit $\cos x$ übereinstimmt, also in verschiedenen Gebieten ganz verschiedenen analytischen Gesetzen genügt.

Ähnliche Beispiele könnte man beliebig häufen. Aber die historische Entwicklung ging einen anderen Weg. Von der mathematischen Physik her wurde FOURIER zu Beginn des 19. Jahrhunderts darauf geführt, im heutigen Sinne willkürliche Funktionen nach trigonometrischen Funktionen zu entwickeln. Er gelangte so zu den berühmten nach ihm benannten Reihenentwicklungen, welche auf das deutlichste zeigen, daß man Funktionen auch dann in sehr übersichtlicher und arithmetisch gesetzmäßiger Weise darstellen kann, wenn das Bildungsgesetz der Funktion keineswegs einheitlich ist. Zum Beispiel wird die Funktion $y = f(x)$, welche im Intervall $-\pi < x < 0$ den Wert -1, dagegen im Intervall $0 < x < \pi$ den Wert $+1$ besitzt, durch die FOURIERsche Reihe

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

dargestellt.

Man muß sich die Wirkung der FOURIERschen Entdeckung auf die mathematischen Gemüter als außerordentlich tiefgreifend vorstellen. Zum erstenmal erfährt der allgemeine Funktionsbegriff eine wesentliche entscheidende Klärung, und dies gerade im Zusammenhang mit den Anwendungen auf Physik, speziell die Wärmelehre. Man erkannte, daß die analytische Ausdrückbarkeit kein besonders ausgezeichnetes Charakteristikum für eine Funktion sei; und so war der Boden bereitet zu der begrifflichen Abstraktion, mit welcher kurz darauf DIRICHLET das Wesen der Funktion zu erfassen suchte. Er nannte einfach eine Funktion $y = f(x)$ jede auf Grund irgend einer Gesetzmäßigkeit einer in einem Gebiet willkürlich veränderlichen Größe x zugeordnete Größe y. Dieser DIRICHLETsche Funktionsbegriff ist natürlich viel zu vage und viel zu unbestimmt, um in seiner Allgemeinheit eine brauchbare Grundlage mathematischer Betrachtungen zu bilden. Ich spreche gar nicht davon, daß man die Unbestimmtheit, welche in dem Worte „gesetzmäßige Zuordnung“ liegt, zum Gegenstand einer Kritik machen kann und gemacht hat, einer Kritik übrigens, welche gerade wieder in unseren Tagen durch die interessanten Bemerkungen von BROUWER neu belebt worden ist. Ich meine nur, daß die Funktionen, welche der Mathematiker und erst recht der Physiker, Techniker usw. braucht in irgend welchem Sinne „vernünftig“ sein müssen, und daß die Bedeutung der „pathologischen Funktionen“ vor allem in den rein logisch begrifflichen Aufschlüssen liegt, die sie uns über das Wesen der vernünftigen Funktionen liefern; wie auch in der Physiologie die Erforschung des pathologischen Organismus dem Verständnis des gesunden dient, und wie in der Physik das Experiment durch Erzeugung unwahrscheinlicher, künstlicher, „unnatürlicher“ Vorgänge das Wirken einzelner Faktoren zu isolieren gestattet und so Licht auf den Ablauf der natürlichen Vorgänge wirft.

Die ganze moderne Theorie der reellen Funktionen beschäftigt sich mit der Frage, welche Einschränkung man dem allgemeinen Funktionsbegriff auferlegen muß, damit er in dem einen oder anderen Sinn brauchbar wird, z. B. damit die Funktion differenzierbar oder integrierbar oder damit sie in eine FOURIERsche Reihe entwickelbar ist.

RIEMANN hat in diese Fragen durch seine Habilitationsschrift: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ eingegriffen. Die Aufgabe, die er stellte, knüpft unmittelbar an die Leistungen von FOURIER und DIRICHLET an und fördert in weitgehender Weise die damals noch nicht bis in die letzten Feinheiten geklärte Frage, wie ausgedehnte Klassen von Funktionen man tatsächlich in FOURIERsche Reihen entwickeln kann. Zahlreiche Arbeiten, eine ganze Literatur, haben an diese Untersuchungen von RIEMANN angeknüpft, wie denn überhaupt die Theorie der FOURIERschen Reihen seit dem Erscheinen der RIEMANNschen Habilitationsschrift sich zu einem reizvollen spezialistischen Arbeitsfelde ausgestaltet hat. Was aber über dieses Spezialgebiet hinaus von größter allgemeiner Bedeutung an RIEMANNS Habilitationsschrift war, das ist ein Punkt, der in dieser Arbeit gewissermaßen nur die Rolle einer Nebenbetrachtung spielt, obwohl er mit den Grundlagen der modernen Analysis aufs engste zusammenhängt. Ich meine die von RIEMANN gegebene allgemeine Definition und Diskussion des Integralbegriffes.

Der Integralbegriff, für stetige Funktionen unmittelbar anschaulich durch die Vorstellung des Flächeninhaltes gegeben, ist einer weitgehenden Ausdehnung auch auf unstetige Funktionen fähig, wenn man die ursprünglich anschauliche Definition ins Arithmetische übersetzt. Man teile das Integrationsintervall von a bis b in N Teile der Länge $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$, wähle in jedem Teilintervall einen beliebigen Zwischenwert: $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_3$ und bilde die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} f(\xi_\nu) \Delta x_\nu .$$

Wenn diese Summe einen Grenzwert hat, sobald man N über alle Grenzen wachsen und dabei die Länge Δx_i des längsten Teilintervalles gegen 0 streben läßt, und wenn ferner dieser Grenzwert unabhängig von der Art der Intervalleinteilung und der Wahl der Zwischenwerte ist, so nennt man diesen Grenzwert das Integral der Funktion $f(x)$ über das Intervall $a \ldots b$ und schreibt dafür $\int_a^b f(x)\,dx$. Die eigentümliche Leistung von RIEMANN besteht nun nicht etwa in der Aufstellung dieser Definition, welche man heute kurz durch das Wort „RIEMANNsches Integral" bezeichnet, sondern in einer weitgehenden Diskussion der Tragweite dieser Begriffsbildung. Durch die Arithmetisierung des anschaulichen Integralbegriffes wird nämlich erreicht, daß eine große Klasse von unstetigen und für normales Empfinden pathologischen Funktionen integrierbar bleibt. Sie alle werden davon gehört haben, daß der Integralbegriff und das Problem seiner Ausdehnung auf möglichst weite Funktionenklassen gerade in der modernen Entwicklung der Theorie der reellen Funktionen im Mittelpunkte stehen. Durch eine einfache glückliche Idee ist es LEBESGUE gelungen, für den Integralbegriff eine Formulierung zu finden, die seine Anwendbarkeit über die von RIEMANN gefundenen Grenzen hinüber noch ausdehnt. Dieser Grundgedanke von LEBESGUE ist äußerst einfach und anschaulich verständlich. Stellen sie sich eine stetige Funktion $y = f(x)$ vor, für welche das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

definiert werden soll. Anstatt von einer Einteilung des x-Intervalles auszugehen, können wir mit demselben Recht ein Stück der y-Achse, welches den Wertevorrat der Funktion $f(x)$ im Intervall $a \ldots b$ enthält, in N Intervalle der Länge $\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots \Delta y_N$ einteilen. Nunmehr verstehen wir unter $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_N$ irgendwelche Werte von y in dem betreffenden Intervall, unter $l_1, l_2 \ldots l_N$ die Gesamtlänge der x-Intervalle, für welche der Funktionswert $f(x)$ in das betreffende y-Intervall hineinfällt; dann wird man offenbar den durch das Integral ausgedrückten Flächeninhalt auch als Grenzwert der Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} \eta_\nu l_\nu$$

auffassen können, wenn N über alle Grenzen wächst und dabei die größte Intervallänge Δy_i gegen 0 strebt. Der Vorteil dieser Integraldefinition ist der, daß man bei jeder Einteilung der y-Achse von vornherein ein Genauigkeitsmaß für die Güte der Approximation des Integrales durch die endliche Summe hat, und darin liegt das Geheimnis des Erfolges dieser von LEBESGUE herrührenden Wendung. Während bei stetigen oder nicht allzu unstetigen Funktionen die LEBESGUE Definition nicht mehr und natürlich auch nicht weniger leistet als die RIEMANNsche, zeigt es sich, daß der LEBESGUEsche Integralbegriff noch auf weitere Klassen pathologischer Funktionen ausdehnbar ist als der RIEMANNsche. Sie wissen, daß um den Begriff des LEBESGUEschen Integrales sich ein großer Teil der modernen Untersuchungen zur Theorie der reellen Funktionen gruppiert. Die Bedeutung dieser Dinge liegt, wie ich noch einmal hervorheben möchte, nicht etwa in irgendwelcher Anwendbarkeit solcher Funktionen, sondern in der Abrundung, welche der mathematische Funktionsbegriff überhaupt dadurch erfährt, ähnlich, wie die irrationalen Zahlen auch ohne unmittelbare praktische Bedeutung sind, aber doch ein unentbehrliches gedankliches Hilfsmittel zur Abrundung des Zahlbegriffes darstellen.

Um wieder auf RIEMANN zurückzukommen: Seine Habilitationsschrift war für ihn gewissermaßen nur eine Nebenarbeit, die erst nach seinem Tode publiziert wurde, und die er selbst trotz ihrer grundlegenden Bedeutung vor der Veröffentlichung zurückgehalten hat, vielleicht aus dem Gefühl, noch nicht in allen Einzelheiten diejenige Abrundung und Vollendung erreicht zu haben, die ihm als ideales Ziel vorschwebte. Man vergegenwärtige sich diese Tatsache angesichts des heutigen Zustandes, wo fast jeder Wissenschaftler seine Ergebnisse zu publizieren trachtet, noch bevor er sie selbst gründlich nach allen Richtungen durchdacht hat.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Unter den Arbeiten, die RIEMANN selbst veröffentlichte, sind die über Funktionen komplexer Variabler noch zu seinen Lebzeiten am meisten bekannt geworden und haben sich am schnellsten im allgemeinen Bewußtsein der mathematischen Welt durchgesetzt. Auch bei der Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher reichen die historischen Wurzeln weit ins 17. und 18. Jahrhundert zurück. Komplexe Zahlen als solche treten mit Notwendigkeit schon frühzeitig bei den Problemen der Algebra auf. Aber eine gewisse mystische Unklarheit, ein Mangel an wirklichem begrifflichem Verständnis der Operationen, die man mit diesen „unmöglichen" Zahlen vornahm, drängte ihren Gebrauch lange Zeit zurück. Noch GAUSS in seinem Streben nach einwandfreier Klarheit und Unmißverständlichkeit hat in seiner berühmten Doktordissertation, wo er den ersten Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra gab, geglaubt, man müsse dem Verständnis der Zeitgenossen durch Vermeiden des Imaginären entgegenkommen; so hat er den Fundamentalsatz ohne Erwähnung der komplexen Wurzeln einer Gleichung in der Form ausgesprochen, daß jede ganze rationale Funktion einer Variablen (mit reellen Koeffizienten) sich als Produkt von (reellen) linearen und quadratischen Faktoren darstellen läßt. GAUSS selbst ist es aber neben anderen gewesen, welcher endgültig den komplexen Zahlen in der Mathematik Bürgerrecht verschafft hat, indem er einwandfrei das Rechnen mit diesen komplexen Zahlen durch Bezugnahme auf geometrische Vorstellungen, die komplexe Zahlenebene, begründete, und Sie wissen, wie HAMILTON später diesen

Dingen die Wendung gegeben hat: Das Rechnen mit komplexen Zahlen ist nichts als eine bestimmte Rechnungsart mit Paaren reeller Zahlen.

In der Analysis begegnen uns komplexe Zahlen als unabhängige Veränderliche zuerst bei der Exponentialfunktion, wo die merkwürdige Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

seit EULER den Mathematikern geläufig war. Der Erfolg dieser Formel und die Annehmlichkeit ihrer Handhabung war so schlagend, daß man die ihr immerhin doch anhaftende Unklarheit gern in Kauf nahm. Die Formel verdankt ihre Entstehung der seinerzeit viel umstrittenen Frage, was man unter dem Logarithmus einer negativen Zahl zu verstehen habe und führte gleichzeitig mit ihrer Beantwortung zur Entdeckung der unendlichen Vieldeutigkeit der Logarithmusfunktion.

Frühzeitig bekannt war auch die merkwürdige Beziehung

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\log\frac{1 - ix}{1 + ix}.$$

Der Sinn aller dieser Formeln ist einfach der, daß die Potenzreihenentwicklungen für die Logarithmen bzw. die Exponentialfunktion formal zu den angegebenen Resultaten führen, wenn wir in diese Potenzreihen komplexe Argumente einsetzen und mit den komplexen Argumenten nach den bekannten Rechenregeln rechnen. An diese Tatsache hat später im 19. Jahrhundert WEIERSTRASS gewissermaßen angeknüpft, indem er die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln auf den Begriff der rationalen Rechenoperationen und der zugehörigen Grenzübergänge aufbaute; d. h. alle diejenigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen betrachtete, welche sich als Grenzwerte ganzer oder gebrochen rationaler Funktionen ergeben.

Es war aber nicht dieser geradlinig an die Mathematik des 18. Jahrhunderts anschließende Weg, den CAUCHY, der große Begründer der modernen komplexen Funktionentheorie, zu Beginn des 19. Jahrhunderts einschlug. Es ist gerade das Charakteristische und Originelle an CAUCHYS Leistung, daß er in einer ganz anderen Richtung vorging. Wir verstehen diese Leistung am besten, wenn wir an DIRICHLETS Definition des Funktionsbegriffes denken. Ihr entsprechend würde man als komplexe Funktion $\zeta = u + iv = f(x)$ einer komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ irgend eine komplexe Größe $u + iv$ verstehen, welche nach einem gegebenen Gesetze einer Größe z zugeordnet ist, wenn diese Größe z in einem vorgegebenen Gebiete der komplexen z-Ebene beliebig veränderlich ist. Mit anderen Worten, ebenso wie man das Rechnen mit komplexen Zahlen als ein Rechnen mit Paaren reeller Zahlen auffassen kann, hätte man die komplexen Funktionen als eine Zusammenfassung zweier Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ zu verstehen. Natürlich wäre mit einer solchen allgemeinen Definition weder für die reine Theorie noch für die Anwendungen etwas getan, und alles hängt davon ab, wie man diese neue Begriffsbildung einschränken wird, damit sie einen spezifischen Sinn erhält.

Die gewöhnliche Analysis, die Integral und Differentialrechnung, weist uns den Weg zu einer solchen Einschränkung.

Der große Fortschritt der modernen Mathematik beruht darauf, daß man mit den „vernünftigen“ Funktionen die Prozesse des Integrierens und Differenzierens vornehmen kann. Erinnern Sie sich an den Kernpunkt der Infinitesimalrechnung! Es handelt sich da um 3 Begriffe, einmal um den Begriff des Differentialquotienten, zweitens um den des bestimmten Integrales und drittens um den von dem letzteren begrifflich vollständig verschiedenen des unbestimmten Integrales, der Umkehrung des Differentialquotienten. Die entscheidende Tatsache der Infinitesimalrechnung ist nun, daß die beiden letzten Begriffe, bestimmtes Integral und unbestimmtes Integral, aufs engste miteinander zusammenhängen, indem nämlich das bestimmte Integral, als Funktion der oberen Grenze aufgefaßt, mit dem unbestimmten Integral übereinstimmt.

In der komplexen Funktionentheorie entsteht nun die Frage, ob man den allgemeinen vagen Funktionsbegriff so einschränken kann, daß für die komplexen Funktionen auch eine Differential- und Integralrechnung möglich wird. CAUCHYS Verdienst war, diese Frage gestellt und in positivem Sinne beantwortet zu haben. Zunächst werden wir verlangen, daß die Funktion $\zeta = f(z)$ differenzierbar sein soll, d. h. daß der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

existiert und unabhängig davon ist, in welcher Art die komplexe Größe h gegen 0 strebt. Die zweite Forderung erscheint ganz natürlich, wenn man sich daran erinnert, daß man bei den durch elementare Rechenausdrücke gegebenen reellen Funktionen $f(x)$ die Ableitung $f'(x)$ allein durch *formale* Operationen gewinnen kann (z.B. $f = x^n$, $f' = nx^{n-1}$), daß man also in jedem einzelnen Fall den Grenzübergang

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

gar nicht durchzuführen braucht. Will man ähnliches von einer Funktion eines komplexen Argumentes erwarten, so muß natürlich das Resultat des Grenzüberganges unabhängig sein von der Art, in der h gegen Null strebt. CAUCHY gab dieser Forderung die Form der später nach ihm und RIEMANN benannten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Irgendein Paar von Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit stetigen Differentialquotienten, welche diesen Gleichungen genügen, denken wir uns jetzt zu einer eigentlichen, wie man sagt *analytischen* Funktion $\zeta = f(z)$ zusammengefaßt.

Für eine solche Funktion kann man nun das unbestimmte Integral

$$\int f(z)\,dz = F(z)$$

definieren als eine analytische Funktion $F(z)$, für welche die Gleichung $F'(z) = f(z)$ gilt.

Man kann aber ebenso den Begriff des bestimmten Integrales aus der Theorie der reellen Funktionen auf eine komplexe Funktion übertragen, wenn man nur zwischen Anfangs- und Endpunkt des bestimmten Integrales noch irgendwie einen Integrationsweg wählt. Und nun ist es die entscheidende Entdeckung von CAUCHY, daß die obengestellte Forderung der Differenzierbarkeit die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung auch für das komplexe Gebiet zur Folge hat; d. h. aus der Differenzierbarkeit, bzw. aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen folgt, daß das bestimmte Integral, als Funktion der oberen Grenze aufgefaßt, auch ein unbestimmtes Integral ist, mit anderen Worten, eine differenzierbare Funktion $F(z)$ darstellt, deren Differentialquotient gleich $f(z)$ ist. In dieser Aussage ist die Tatsache mit einbegriffen, daß das bestimmte Integral zwischen zwei festen Grenzen von dem Integrationswege unabhängig ist. Ich kann mich jetzt nicht damit aufhalten, die genaueren Voraussetzungen zu schildern, unter denen dieser fundamentale CAUCHYsche Integralsatz gilt. Er ist Ihnen allen wohlbekannt, und es handelt sich hier nur darum, ihn vielleicht in eine etwas andere Beleuchtung zu rücken. Mit ihm war die Differential- und Integralrechnung für komplexe Funktionen begründet, und Sie wissen, mit welcher erstaunlichen Vielseitigkeit und mit welchem großartigen Erfolge CAUCHY die von ihm geschmiedeten Hilfsmittel handhabte. Nebenbei möchte ich bemerken, daß, wie sich viel später herausstellte, GAUSS ganz unabhängig von CAUCHY das Wesen der komplexen Funktionen und insbesondere die Integration im Komplexen vollständig durchschaut hat. Ein später aufgefundener und nach GAUSS' Tode abgedruckter Brief vom 18. Dezember 1811 an BESSEL gibt darüber genauen Aufschluß (vgl. GAUSS' Werke Bd. VIII, S. 90ff.).

Die Differential- und Integralrechnung ist aber nicht die einzige Quelle für unsere heutige Funktionentheorie. Die beiden obigen CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen vermitteln sofort die Beziehung zu ganz anderen, nach der Richtung der Physik hin liegenden Gebieten. Differenzieren wir die erste Gleichung nach x, die zweite nach y und addieren, so erhalten wir

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

und ganz entsprechend finden wir auch für die Funktion v, daß sie derselben Differentialgleichung $\Delta v = 0$ genügt. Diese Differentialgleichung, die sog. Potentialgleichung, ist wohl die wichtigste partielle Differentialgleichung, die in der Analysis betrachtet wurde. Sie hängt aufs engste mit zahlreichen Fragen der Physik zusammen. Ihr genügt das Geschwindigkeitspotential einer stationären Strömung einer zweidimensionalen inkompressiblen Flüssigkeit, die Temperatur einer stationären zweidimensionalen Wärmeströmung, das elektrostatische Potential zweidimensionaler Zustände, die Spannungsfunktionen der Elastizitätstheorie usw.; wir sehen hieraus, daß zwischen der Funktionentheorie und allen diesen physikalischen Gebieten ein enger Zusammenhang bestehen muß. Man kann diesen Zusammenhang sofort noch genauer erfassen, wenn man die leicht beweisbare Tatsache zu Hilfe nimmt, daß zu jeder der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ genügenden Potentialfunktion sich eine sog. konjugierte Potentialfunktion v hinzukonstruieren läßt, die mit u durch die beiden obigen CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verbunden ist. Bedeutet u das Geschwindigkeitspotential einer Strömung, so daß die Kurven $u(x, y) = \text{const.}$ die sog. Niveaulinien der Strömung sind, so bedeutet v die sog. Strömungsfunktion, und die Kurven $v = \text{const.}$ werden die Stromlinien. Der Zusammenhang zwischen all diesen Vorstellungen mit der Funktionentheorie ist für beide Seiten von größter Fruchtbarkeit geworden, wie wir sogleich noch sehen werden.

Zuvor aber muß ich noch auf eine dritte Fragestellung hinweisen, die ebenfalls zur Funktionentheorie hinführt. Es ist das Problem der konformen, d. h. winkeltreuen Abbildung, welche z. B. in der Kartographie eine große Rolle spielt. Es handelt sich da etwa darum, ein Stück einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y auf ein Stück einer anderen Ebene mit den Koordinaten u und v abzubilden; dann werden u und v Funktionen von x und y werden und — unter entsprechenden Stetigkeitsvoraussetzungen — erkennt man sehr leicht, daß diese Funktionen ebenfalls den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen genügen müssen. Also auch das Problem der konformen Abbildung führt unmittelbar auf die Funktionentheorie; die konforme Abbildung erweist sich als ein völlig adäquater geometrischer Ausdruck des Begriffes analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Alle diese Ansätze waren vorhanden, als RIEMANN mit seiner Dissertation und seinen weiteren funktionentheoretischen Arbeiten auf den Plan trat. RIEMANNS Bedeutung besteht nicht nur darin, daß er diese Gesichtspunkte zu einer großartigen Einheit zusammenfaßte und in ungeahnter Weise weiterführte, sondern daß er die Vielseitigkeit der Gesichtspunkte und Ideen mit dem Grundsatz verband, die Dinge nicht nur formal, sondern ihrem tiefsten Wesen nach begrifflich zu erfassen und ihre Zusammenhänge nach allen Seiten hin zu durchdringen. So gelang es ihm, mit seiner Funktionentheorie ein Werk von überwältigender Mannigfaltigkeit und Vielseitigkeit und doch innerer Einheitlichkeit zu schaffen, das mit Recht im Mittelpunkte des Universitätsunterrichtes der letzten Jahrzehnte gestanden hat.

Ich muß mich damit begnügen, einige typische Züge aus der RIEMANNschen funktionentheoretischen Gedankenwelt kurz zu zeichnen. Im Vordergrund stehen immer gewisse allgemeine sog. Existenzsätze, welche an die geometrische Auffassung anknüpfen und ein breites Fundament für den weiteren Aufbau der Gedanken liefern. Ich nenne vor allem das so berühmte RIEMANNsche Abbildungsprinzip, welches ich für den einfachsten und wichtigsten Fall folgendermaßen formulieren möchte:

Wenn in der Ebene der komplexen Variabeln $z = x + iy$ ein beliebiges, von einer aus einem einzigen Zuge bestehenden doppelpunktfreien stetigen Kurve begrenztes Gebiet G, und in der Ebene der komplexen Variabeln $\zeta = u + iv$ ein ebensolches Gebiet B gegeben ist, so gibt es immer eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$, durch welche das Gebiet G auf das Gebiet B umkehrbar eindeutig und konform abgebildet wird. Dabei kann man in jedem der beiden Gebiete noch zwei einander entsprechende Punkte und in diesen einander entsprechende Richtungen willkürlich vorschreiben, wonach dann die analytische Funktion eindeutig bestimmt ist. Die Bedeutung dieses Abbildungssatzes ist nicht hoch genug anzuschlagen. Während sonst die analytischen Funktionen immer durch analytische Prozesse formaler Art definiert wurden, ist hier ein geometrisches Erzeugungsprinzip für komplexe Funktionen gegeben. Man zeichne einfach zwei solche Gebiete hin und hat dann implizite eine analytische Funktion definiert. Es ist gewissermaßen die Übertragung der graphischen Definition reeller Funktionen ins Komplexe.

Bevor ich Ihnen die funktionentheoretische Bedeutung des RIEMANNschen Satzes an Beispielen klarmache, will ich seine physikalische Bedeutung veranschaulichen, wobei wir selbstverständlich die Natur der Berandung unserer Gebiete als hinreichend vernünftig annehmen, etwa die Randkurven aus stückweise stetig gekrümmten Bögen zusammengesetzt denken. Es genügt für den Beweis und die Diskussion des RIEMANNschen Satzes, *eines* der beiden Gebiete, etwa das Gebiet G, als beliebig anzunehmen, dem anderen aber eine spezielle Gestalt zu geben, etwa die eines Kreises oder einer Halbebene.

Zu der Abbildung auf einen Kreis kommen wir physikalisch sofort folgendermaßen: Wir stellen uns dieses Gebiet G als eine dünne Hartgummiplatte vor, die wir oben und unten mit einer Schicht aus Stanniol bekleben, so daß beide Metallschichten längs der Randkurve miteinander zusammenhängen. Einen beliebigen Punkt O der Oberseite bringen wir nun in leitende Verbindung mit dem positiven Pol einer elektrischen Batterie, während wir den darunterliegenden Punkt O' der Unterseite mit dem negativen Pol der gleichen Batterie verbinden. Es wird sich dann eine stationäre elektrische Strömung in dem aus den beiden Belegungen bestehenden „Doppelgebiet" bilden, wobei die Elektrizität vom Punkte O über den Rand weg nach dem Punkte O' strömt. Aus Symmetriegründen ist es klar, daß der Strom senkrecht zur Randkurve fließt und daß folglich auf der Randkurve ein konstantes Potential, etwa $U = 0$, herrschen muß, wenn mit U das elektrostatische Potential bezeichnet wird, das im übrigen der Differentialgleichung $\Delta U = 0$ genügen muß. Die Kurven $U = \text{const.}$, die Äquipotentiallinien, werden sich um den Punkt O ringartig zusammenziehen, wenn die Konstante von 0 an wächst. Die Strömungskurven $V = \text{const.}$ werden dazu orthogonal verlaufen und senkrecht auf die Randkurve auftreffen. Man kann nun sehr leicht sehen, daß die Funktion U eine Potentialfunktion ist, welche am Rande des Gebietes verschwindet und im Punkte O eine logarithmische Unendlichkeitsstelle besitzt, sonst aber in G regulär bleibt. Es ist die sog. GREENsche Funktion des Gebietes G. Man überzeugt sich dann unschwer davon, daß die komplexe Funktion der Variabeln $x + iy = z$

$$u + iv = e^{-(U + iV)} = f(z)$$

gerade die gewünschte konforme Abbildung des Gebietes G auf den Kreis vom Radius 1 : $|\zeta| < 1$ liefert.

Übrigens könnten wir unsere mathematische Tatsache auch noch physikalisch auf andere Art, z. B. durch Modelle aus der Elastizitätstheorie, durch Strömung von Wärme oder auch durch Spannungszustände in einen Dielektrikum mit zylindrischer metallischer Begrenzung über unserem Gebiet als Querschnitt veranschaulichen.

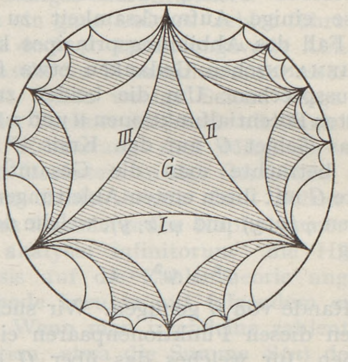
Es ist vielleicht nicht unnütz, auf diese letztere Veranschaulichung noch mit einigen Worten näher einzugehen. Ich will dazu der besseren Verständlichkeit halber statt elektrische Spannungen in einem Zylinder zu betrachten lieber ein räumliches Gebiet G zur Veranschaulichung heranziehen. Denken sie sich also das Innere eines Raumes, etwa dieses Zimmers, mit einer elektrisch leitenden Schicht tapeziert und dann in irgend einem Punkt O dieses Raumes die elektrische Ladung e konzentriert, dann wird sich in dem Raum ein Gleichgewichtszustand der elektrischen Spannung herausbilden. Es würde nämlich die elektrische Ladung in O, wenn sie sich ungestört auswirken könnte, um sich herum ein elektrisches Potential verbreiten, welches durch die Funktion $\frac{e}{r}$ gegeben ist, unter r den Abstand vom Punkte O verstanden. Die leitende Schicht auf den Wänden des umgebenden Raumes wird aber durch die Ladung in O influenziert, und das Feld dieser Influenzelektrizität zusammen mit dem primären Felde muß gerade die Eigenschaft haben, daß das Potential auf der gesamten Oberfläche des Raumstückes G einen konstanten Wert hat, den wir wegen der Freiheit einer additiven Konstante als Null annehmen können. So entsteht ein Potential, das im Punkte O eine charakteristische Unendlichkeitsstelle hat, auf der Oberfläche des Raumstückes G verschwindet und sonst in G regulär ist. Die Flächen gleichen

Potentials sind geschlossene um den Punkt O sich herumziehende Flächen, unter denen sich die Oberfläche von G als letzte befindet. Die so entstehende Potentialfunktion heißt die GREENsche Funktion des Gebietes G. Sie ist für das Potential in 3 Dimensionen genau das Analogon zu der GREENschen Funktion in 2 Dimensionen, welche uns die konforme Abbildung vermittelt.

Was aber nutzt uns für die Theorie der Funktionen die Tatsache, die unser allgemeiner Existenzsatz ausdrückt? Mit der Kenntnis von der bloßen Existenz einer Funktion ist im Einzelfalle nicht viel gewonnen, wenn wir nicht die Möglichkeit haben, über ihre Eigenschaften irgend etwas auszusagen. Hier greift nun ein höchst fruchtbarer RIEMANNscher Gedanke ein, der mit einer in der Mathematik häufigen historischen Ungenauigkeit als das SCHWARZsche Spiegelungsprinzip bezeichnet wird. Man kann zwar im allgemeinen bei beliebiger Gestalt der Begrenzung über die graphisch definierten Funktionen nichts Wesentliches aussagen. Aber wenn diese Begrenzungen geradlinige oder kreisförmige Stücke enthalten, und zwar entsprechende solche Stücke sowohl auf der Begrenzung von G als auch auf der Begrenzung von B, dann gilt das folgende Symmetrieprinzip: Spiegelt man die Gebiete an den kreisförmigen Begrenzungsstücken (d. h. transformiert man die Gebiete an diesen Kreisen durch reziproke Radien), so erhält man neue Gebiete, welche vermöge derselben Funktion $f(z)$ aufeinander konform abgebildet sind. Man kann also die graphisch definierten Funktionen durch den geometrischen Prozeß der Spiegelung analytisch fortsetzen — den allgemeinen Begriff der analytischen Fortsetzung kann ich hier nicht entwickeln —. Dabei kann es geschehen, daß nach einfacher oder mehrfacher Wiederholung des Spiegelungsprozesses dieselben Teile der einen oder anderen komplexen Ebene mehrfach von den gespiegelten Bereichen bedeckt werden. Wir werden so ganz zwanglos zu dem Begriff der RIEMANNschen Fläche geführt, den ich trotz seiner einschneidenden Bedeutung hier nur eben kurz streifen kann.

Als einfachstes Beispiel für eine geometrische Erzeugung von Funktionen nennen wir die konforme Abbildung eines Rechteckes auf die Halbebene. Beide Gebiete haben geradlinige Begrenzungsstücke. Die Abbildungsfunktion läßt sich also immer weiter durch Spiegelung fortsetzen, und eine sehr einfache und anschauliche Diskussion liefert uns auf diese Art die elliptischen Integrale und elliptischen Funktionen, mit reellem Modul k und nicht nur alle wesentlichen Eigenschaften der betreffenden Funktionen sondern schließlich auch unter Zuhilfenahme einfacher elementarer funktionentheoretischer Tatsachen, gewissermaßen als Schlußresultat, die analytischen Ausdrücke.

Ein ebenso einfaches und noch interessanteres Beispiel liefert uns die konforme Abbildung des nebenstehend gezeichneten nullwinkligen Kreisbogendreieckes G auf die Halbebene. Dieses Kreisbogendreieck wird aus drei gleich großen einander berührenden Kreisbögen I, II und III gebildet, welche in ein und demselben Kreise, etwa in einem Kreise mit dem Radius 1 um den Nullpunkt in der z-Ebene liegen. Hier kann man durch fortgesetzte Spiegelung den Ausgangsbereich immer weiter vervielfältigen, wobei die gespiegelten Dreiecke immer kleiner und kleiner werden, sich gegen den Rand des Kreises $|z| \leqq 1$ immer mehr andrängen und zusammen diesen Kreis vollständig ausfüllen. In der Figur sind diese Dreiecke abwechselnd schraffiert und weiß gelassen. Die Abbildungsfunktion des Kreisbogendreieckes auf die Halbebene läßt sich somit durch einen solchen unendlichen Spiegelungsprozeß in den ganzen Kreis hinein analytisch fortsetzen. Sie stellt im wesentlichen die berühmte sog. „Modulfunktion" dar, und auch für sie kann man aus unseren geometrischen Konstruktionen ohne Schwierigkeiten alle wesentlichen Eigen-



schaften und zum Schluß sogar ihren analytischen Ausdruck herleiten.

Wenn ich diese Beispiele nur kurz skizzieren konnte, muß ich mich erst recht mit Andeutungen begnügen, indem ich von der Fortsetzung dieser Gedankengänge in der Weiterentwicklung der Theorie der automorphen Funktionen spreche. Es mag genügen, zu wissen, daß jede geometrische Symmetrie in dem Gebiete G ihr Gegenbild in einer analytischen Symmetrie bei der Abbildungsfunktion $f(z)$ haben muß, und daß dieser Gedanke zu der grandiosen Theorie der automorphen Funktionen geführt hat, welche später von SCHOTTKY, KLEIN und POINCARÉ entworfen und von anderen hervorragenden Mathematikern weitergeführt worden ist und mit ihren Gipfelpunkten, dem sog. Uniformisierungstheorem, gewissermaßen einen Abschluß der RIEMANNschen Funktionentheorie darstellt.

Auch nur andeuten kann ich hier die tiefen Zusammenhänge, die RIEMANN mit Hilfe der später nach ihm benannten RIEMANNschen Flächen zwischen der Funktionentheorie und der Geometrie aufgedeckt hat, insbesondere zwischen den topologischen Eigenschaften der RIEMANNschen Flächen und charakteristischen Anzahlen, die bei der algebraischen Funktion auftreten.

Daß die RIEMANNschen Gedanken sich nicht ganz so schnell durchsetzten, wie es ihrer Bedeutung und durchschlagenden Kraft entsprach, lag vor allem an einem Mangel in RIEMANNS Existenzbeweisen, der sehr bald durch WEIERSTRASS aufgedeckt wurde. Ich habe in meinem Einleitungsvortrag von der lehrreichen und für die modernen Mathematiker äußerst wichtigen Entwicklung dieser Existenzbetrachtungen gesprochen und gesagt, daß das sog. DIRICHLETsche Prinzip, dessen RIEMANN sich bediente, nunmehr trotz aller ursprünglichen Kritik wieder voll zu Ehren gelangt ist, und daß heute der Bau der RIEMANNschen funktionentheoretischen Gedankenwelt fester gegründet dasteht als je. Auch die WEIERSTRASSschen Auffassungen, von deren Tendenz ich vorhin sprach, gliedern sich in zwangloser Weise in die RIEMANNschen Gedankengänge ein, bzw. bilden eine naturgemäße und notwendige Ergänzung von ihnen.

Es ist sehr lehrreich, der RIEMANNschen als DIRICHLETsches Prinzip bezeichneten Betrachtungsweise einige Aufmerksamkeit zu widmen. Für den Fall des Abbildungsprinzipes kann man diesen RIEMANNschen Gedanken etwa folgendermaßen aussprechen: Um die beiden zueinander konjugierten Potentialfunktionen u und v zu finden, welche das Gebiet G auf den Kreis $u^2 + v^2 = 1$ abbilden, betrachte man die Gesamtheit aller im Gebiete G mit ihren ersten Ableitungen stetigen Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$, welche der Nebenbedingung

$$\varphi^2 + \psi^2 = 1$$

auf dem Rande von G genügen. Wir suchen dann unter allen diesen Funktionenpaaren ein solches aufzusuchen, für welches das über G erstreckte Doppelintegral

$$\iint\limits_G \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right\} dx\,dy$$

einen möglichst kleinen Wert erhält. Man erkennt leicht, daß dieser kleinste Wert gerade Null sein muß, und daß dann die entsprechenden das Minimum charakterisierenden Funktionen $\varphi = u$ und $\psi = v$ den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen genügen und die gewünschte konforme Abbildung liefern. In der Herleitung dieser Tatsache aus der Minimumeigenschaft der Funktionen u und v liegt keinerlei Schwierigkeit.

Die von WEIERSTRASS erhobenen Bedenken richten sich auch nicht hiergegen, sondern gegen die ohne Beweis gemachte Voraussetzung, daß es *überhaupt* einen solchen kleinsten Wert gibt. WEIERSTRASS macht die Bemerkung, daß man vernünftig klingende Minimumaufgaben stellen kann, bei denen man sich von der Nichtexistenz einer Lösung sofort überzeugt. Ein berühmtes solches Beispiel ist die Aufgabe, 2 Punkte P und Q einer Geraden durch eine möglichst kurze stetig gekrümmte Linie zu verbinden, welche in ihren Endpunkten auf der Geraden PQ senkrecht steht. Dieses Problem hat, wie Sie leicht sehen, keine Lösung, denn man kann die Länge der Verbindungslinie so nahe wie man will, an die Länge der geradlinigen Strecke PQ heranbringen, aber diese Strecke selbst ist unter den Vergleichslinien nicht mehr zugelassen, weil sie der Nebenbedingung des Senkrechtstehens in den Endpunkten nicht genügt. Man sieht also, daß die RIEMANNsche Voraussetzung von der Existenz einer Lösung seines Minimumproblems einer näheren Begründung bedarf. Da RIEMANN eine solche Begründung nicht gegeben hatte und da es angesichts der WEIERSTRASSschen Kritik schwierig, ja hoffnungslos schien, diese Lücke auszufüllen, so wandte man sich von der RIEMANNschen Betrachtungsweise ab.

Und doch steckte in ihr ein so überzeugender Kern von Wahrheit, daß die geschichtliche Entwicklung nicht daran vorübergehen konnte. Ich sagte schon in meinem ersten Vortrage, daß es HILBERT gelang, die Lücke bei RIEMANN auszufüllen, und daß an diese Dinge eine der wichtigsten und zukunftsreichsten Entwicklungen der modernen Analysis anknüpft, nämlich alle die Untersuchungen, die man unter dem Namen „direkte Methoden der Variationsrechnung und Analysis" zusammenfaßt, und so sehen Sie, daß auch diesen RIEMANNschen Ideen lebendige Kräfte für die Gegenwart und Zukunft entsprungen sind.

Allerdings scheint es fast, als ob die großartige Entwicklung, welche die eigentliche allgemeine theoretische Funktionentheorie seit RIEMANN genommen hat, heute zu einem gewissen Abschluß gekommen sei, und als ob in der allgemeinen Funktionentheorie, (keineswegs in der Behandlung spezieller Funktionen), die wesentliche Arbeit getan ist. Demgegenüber darf uns eine scheinbar blühende funktionentheoretische Literatur der Gegenwart oder nahen Vergangenheit nicht täuschen, in der vergänglichen Modeströmungen wie dem programmatisch ausgesprochenen Bestreben, aus der Funktionentheorie die Heranziehung der Potentialtheorie zu verdrängen, eine übertriebene Bedeutung beigemessen wird.

Natürlich liegt der Gedanke nahe, die RIEMANNsche Funktionentheorie auf Funktionen mehrerer komplexer unabhängiger Veränderlicher zu übertragen, und in dieser Richtung sind zahlreiche kraftvolle Versuche gemacht worden. Aber diesen Versuchen stehen Schwierigkeiten entgegen, welche, wie mir scheint, in der Natur der Sache, in der Problemstellung selbst, liegen; eine rein äußerliche Verallgemeinerung entspricht nicht einer inneren zwingenden Notwendigkeit. Dies wird besonders klar, wenn man sich die Äquivalenz der Funktionentheorie mit den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen vor Augen hält. Diese stellen ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen für die zwei unbekannten Funktionen u und v dar, ein sog. *bestimmtes* System, d. h. ein System mit ebenso vielen Gleichungen als Unbekannten. Wollen wir ähnliche Bedingungen für Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, wie die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen aufstellen, so werden wir aber stets auf ein sog. *überbestimmtes* System von Differentialgleichungen geführt, d. h. auf ein System von mehr Differentialgleichungen als unbekannten Funktionen. Sie werden aus dieser Tatsache heraus schon verstehen, daß Komplikationen unnatürlicher Art dabei eintreten müssen. Es scheint daher, als ob, wie es auch wirklich in der neueren Entwicklung vielfach geschieht, die Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher sich zunächst mehr an spezielle Beispiele und konkrete analytische Prozesse heften muß, als es die klassische Funktionentheorie bei einer unabhängigen Veränderlichen tut.

Wenn so auf der einen Seite die RIEMANNschen Theorien in ihrer Entwicklung einen gewissen Abschluß erreicht haben, so ist dies mit den Anwendungen der Theorie auf die verschiedenartigsten mathematischen und physikalischen Fragen noch keineswegs der Fall. Schon bei RIEMANN selbst finden wir die mannigfachsten Beziehungen zwischen der Funktionentheorie und anderen Gebieten aufgedeckt; vom rein mathematischen Standpunkte ist dabei die Theorie der Minimalflächen von Bedeutung, in welcher RIEMANN selbst gerade durch intensivste Benutzung dieser funktionentheoretischen Methoden große Fortschritte erzielt hat. Diese Flächen, physikalisch definiert, als Gleichgewichtslagen dünner in irgend einen Rahmen eingespannter Flüssigkeitshäute mit Oberflächenspannung, mathematisch als Flächen mit der mittleren Krümmung 0, sind seit den Anfängen der modernen Mathematik Gegenstand mannigfacher Untersuchungen gewesen, sowohl wegen ihrer physikalischen Bedeutung als auch wegen ihrer interessanten mathematischen Eigenschaften. Die wichtigste dieser letzteren ist die Tatsache, daß man sie in verschiedener Weise konform auf die Ebene abbilden kann; die Beziehung dieser verschiedenen konformen Abbildungen zueinander wird durch analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen vermittelt, und auf diesem Wege gelang es RIEMANN mit Hilfe der Funktionentheorie, eine Reihe der wichtigsten Probleme aus dem Gebiete der Minimalflächen anzugreifen und damit eine ganz neue Entwicklungsphase dieser wichtigen geometrischen Disziplin anzubahnen.

Über die weiteren Anwendungen, die RIEMANN von der Funktionentheorie auf lineare Differentialgleichungen und auch verschiedenartige einzelne physikalische Probleme gemacht hat, will ich hier nicht sprechen. Ich möchte nur darauf hinweisen, daß gerade in der heutigen Zeit die RIEMANNschen Methoden und Ideen zur konformen Abbildung sich immer mehr Eingang auch in den technischen Anwendungen der Mathematik verschaffen. Die moderne praktisch so wichtig gewordene Theorie der Flugzeuge bietet dafür das glänzendste Beispiel.

Neben den bis jetzt geschilderten bahnbrechenden funktionentheoretischen Untersuchungen stehen bei RIEMANN unvermittelt funktionentheoretische Entwicklungen von gänzlich anderem Charakter, aber kaum weniger bewundernswert. RIEMANN war eben frei von jeder Einseitigkeit, und so stand ihm neben der unvergleichlichen Kraft begrifflicher Durchdringung auch im höchsten Maße die Fähigkeit zur Handhabung der mehr formalen rechnerischen Seiten der Mathematik zu Gebote. Schon in seinen eigentlichen großen funktionentheoretischen Arbeiten, insbesondere in seinen berühmten Untersuchungen über die ABELschen Funktionen (und zwar in den von ihm selbst nicht veröffentlichten Teilen, die später nur durch Vorlesungsausarbeitungen bekannt wurden), müssen wir die geradezu virtuose Technik bewundern, mit der er das Hilfsmittel der Rechnung handhabt. Ich denke dabei vor allem daran, wie er die allgemeinen ϑ-Funktionen einführt und zur Lösung seiner Probleme verwendet, mit einer Kunst, die ihn auch auf dem Gebiet der mathematisch-rechnerischen Technik als einen Mann allerersten Ranges charakterisiert.

Aber in ein ganz anderes Gebiet führt uns die kleine, und doch so bedeutungsvolle Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. Diese wenige Seiten lange Arbeit, welche er der Berliner Akademie als Dank für seine frühzeitige Ernennung zum Mitgliede vorlegte, stellt einen Markstein in der Geschichte der sog. analytischen Zahlentheorie dar. Schon EULER hat in einem faszinierenden Kapitel seiner „Introductio in analysin infinitorum" die Hilfsmittel der Analysis auf die Zahlentheorie angewandt. Seine Methode beruhte auf folgendem einfachen Gedanken: Wenn man irgendeine zahlentheoretische Funktion, etwa die Summe $S(n)$ der Teiler einer Zahl n, studieren will, so bilde man eine „erzeugende Funktion" einer stetigen Veränderlichen, z. B. die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n) x^n \quad \text{oder} \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n^s}.$$

Wenn man funktionentheoretische Eigenschaften dieser Funktionen kennt, so kann man daraus auf die zahlentheoretische Funktion $S(n)$ Rückschlüsse ziehen. EULER beschränkt sich im wesentlichen auf die einfachsten formalen Operationen, die mit solchen erzeugenden Funktionen vorgenommen werden. Erst DIRICHLET hat zu Beginn des 19. Jahrhunderts in seinen klassisch gewordenen Arbeiten die feineren Hilfsmittel der Analysis und Funktionentheorie auf die aus zahlentheoretischen Fragen entspringenden Funktionen angewandt, und er hat dabei vorzugsweise nicht Potenzreihen der oben geschilderten Art in Betracht gezogen, sondern unendliche Reihen von dem Typus der auch bei EULER auftretenden aber heute allgemein nach RIEMANN benannten ζ-Funktion

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Diese Funktion ist es, welche durch RIEMANNS Arbeit in den Vordergrund des Interesses der analytischen Zahlentheoretiker gerückt wurde, und ich möchte mit einigen Worten Ihnen plausibel machen, worin die Bedeutung der ζ-Funktion für die Zahlentheorie besteht. Der Kern der Sache liegt in der schon EULER bekannten Produktzerlegung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p}^{s} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right)$$

wobei rechts das Produkt über alle Faktoren der Form $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ gebildet werden muß und p die Reihe der Primzahlen durchläuft. Die Richtigkeit dieser Gleichung leuchtet sofort ein, wenn wir jeden dieser Faktoren in die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots$$

entwickeln, sodann alle diese Reihen miteinander multiplizieren und beachten, daß jede ganze Zahl n auf eine und nur eine Weise als Produkt von Primzahlpotenzen dargestellt werden kann. Um die Konvergenz unserer Reihen und Produkte zu sichern, muß man dabei voraussetzen, daß die Zahl $s = \sigma + it$ einen Realteil σ hat, welcher größer als 1 ist. Die obige Produktdarstellung der komplexen Funktion $\zeta(s)$ ist also gewissermaßen eine Zusammenfassung unendlich vieler zahlentheoretischer Relationen, nämlich der Primzahlzerlegungen aller ganzen Zahlen, in *eine einzige* analytische Formel. Daraus wird uns plausibel, daß die Betrachtung dieser analytischen Funktion für die Lehre von den Primzahlen tatsächlich eine große Bedeutung erlangen kann.

Eine Tatsache können wir aus der Produktformel sofort ablesen, nämlich daß es unendlich viele Primzahlen geben muß. Gäbe es nur endlich viele, so würde rechts ein Produkt stehen, das für *jeden* Wert von s einen bestimmten endlichen Wert hätte, z. B. auch für $s = 1$. Lassen wir aber s gegen 1 streben, so wird die linke Seite bekanntlich über alle Grenzen wachsen, und somit bedeutet die Annahme, daß es nur endlich viele Primzahlen gibt, einen Widerspruch.

Das eigentliche Primzahlproblem verlangt, die Anzahl $A(x)$ der unterhalb der Grenze x gelegenen Primzahlen anzugeben. Man kann sich sehr leicht davon überzeugen, daß eine genaue Angabe dieser Funktion $A(x)$ mit Hilfe elementarer Funktionen in brauchbarer Form unmöglich ist. RIEMANN greift nun dieses Problem mit höchster analytischer Kunst unter Verwendung der ζ-Funktion an. Die Formel, zu der gelangt, ist so verwickelt, daß man aus ihr nur mit Mühe theoretische Schlüsse ziehen kann, während sie für den praktischen Rechner, der nach den Restgliedern nicht fragt, gut brauchbar ist. Jedenfalls ist RIEMANNS Arbeit bahnbrechend geworden, denn sie hat die mannigfachsten Beziehungen zwischen der Funktionentheorie dieser speziellen ζ-Funktion und dem Primzahlproblem aufgedeckt. Noch heute ist eins der wichtigsten und ungelösten Probleme aus diesem Gebiete der Beweis der sog. RIEMANNschen Vermutung, nämlich daß sämtliche nicht negative Wurzeln der ζ-Funktion den reellen Teil $\frac{1}{2}$ besitzen. RIEMANNS funktionentheoretische Behandlung der ζ-Funktion ist für viele spätere andere Untersuchungen ähnlicher Funktionen immer vorbildlich gewesen. Das Primzahlproblem selbst ist heute durch das Verdienst vieler an RIEMANN mehr oder weniger anknüpfender Forscher so weit geführt, daß man für die Funktion $A(x)$ einen einfachen asymptotischen Ausdruck hergeleitet hat. Man konnte nämlich die schon bei GAUSS und anderen auftretende Vermutung beweisen, daß die Zahl $A(x)$ asymptotisch gleich $\frac{x}{\log x}$ ist, d. h. daß der Quotient dieser beiden Funktionen mit wachsendem x gegen 1 strebt.

Die Anwendung der Funktionentheorie auf die Zahlentheorie ist immer eines der reizvollsten und merkwürdigsten Gebiete der Mathematik gewesen. Vielleicht gerade deswegen, weil, je feiner und raffinierter die angewandten analytischen Hilfsmittel sind und je merkwürdiger der Erfolg dieser Methoden erscheint, desto stärker das Gefühl bleibt, daß man die Dinge doch noch lange nicht vollständig enträtselt hat, weil mit dieser analytischen Methode der Nimbus des Geheimnisvollen verbunden ist, ein Nimbus, der sicherlich verschwinden wird, wenn es einmal gelingen sollte, die arithmetischen Dinge wirklich rein arithmetisch zu erfassen.

Mathematische Physik.

RIEMANNS Funktionentheorie ist ihren inneren Motiven nach, wie wir sahen, auf engste mit den Vorstellungen der mathematischen Physik verknüpft; aber auch in ganz anderen Gebieten und noch direkter hat RIEMANNS vielseitiger Geist die mathematische Physik mächtig vorwärtsgetrieben. Es liegt natürlich heute nahe, dabei zunächst an die jetzt als „RIEMANNsche Geometrie" bezeichnete Disziplin und ihre Zusammenhänge mit der Relativitätstheorie zu denken. In seinem Habilitationsvortrage: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" hat RIEMANN diese großartigen Gedanken entwickelt, denen erst nach Jahrzehnten volle Wirksamkeit beschieden war. Schon das Wort „Hypothese" im Titel verrät den physikalischen Untergrund der Ideenbildungen. Die Geometrie erscheint nicht im KANTischen Sinne als Lehre von der reinen Anschauung, sondern als Wissenschaft, deren Zusammenhang mit der Erfahrung für ihren Aufbau entscheidend sein soll. Es ist hier nicht der Ort, diese RIEMANNsche Auffassung vom philosophischen Standpunkte aus zu diskutieren. Glücklicherweise ist jede mathematische Untersuchung, ebenso wie jede physikalische, ihrem Wesen nach stets unabhängig von irgendwelcher philosophischer Einstellung, wenn auch leider philosophische Vorurteile häufig genug der Entwicklung wissenschaftlicher Gedanken hindernd in den Weg treten.

Ich darf heute eine gewisse Bekanntschaft mit RIEMANNS Geometrie voraussetzen und kann mich damit begnügen, die Hauptmomente zu charakterisieren. Es handelt sich um das Studium beliebiger durch unabhängige stetige Veränderliche $x_1, x_2, \ldots$ charakterisierter Mannigfaltigkeiten und den in ihnen möglichen Maßbestimmungen. Die RIEMANNsche Idee war, eine solche Maßbestimmung auf die Betrachtung des „Unendlich Kleinen" zu gründen, ganz im Einklang mit den physikalischen Vorstellungen der Nahewirkung. Man kann, dieser Auffassung entsprechend, nicht einfach die Entfernung zwischen 2 Punkten definieren, sondern muß sich zunächst damit begnügen, ein „Linienelement" ds zu betrachten, welches RIEMANN vermöge einer homogenen quadratischen Differentialform

$$ds^2 = \sum a_{ik}(x_1, x_2 \ldots) dx_i dx_k$$

ansetzt. Die Länge einer Linie in der Mannigfaltigkeit wird dann durch ein Integral über die Quadratwurzel dieser Differentialform geliefert. Alle wesentlichen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit hängen aufs engste mit den Koeffizienten $a_{ik}(x_1, x_2, \ldots)$ der Differentialform zusammen, und das Studium dieser Koeffizienten führt auf die berühmten RIEMANNschen Invarianten, den Krümmungstensor usw. Sie wissen, wie diese Gedanken heute auf eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit angewandt worden sind, zu deren Bestimmungsstücken neben den Raumkoordinaten noch die Zeit als vierte Koordinate gehört. Mit dieser RIEMANNschen Theorie, die im übrigen die früheren nichteuklidischen Geometrien umfaßt, war also schon seit dem Jahre 1854 (veröffentlicht wurde RIEMANNS Vortrag allerdings erst 1868 durch DEDEKIND), das mathematische Rüstzeug für die Entwicklung der heutigen Relativitätstheorie bereit gestellt. Aber es bedurfte doch einer langen Zeit bis EINSTEINS Genie die große physikalische Konzeption hatte, ohne welche auch RIEMANNS Geometrie nur ein interessantes spezielles mathematisches Kapitel hätte bleiben müssen. Immerhin muß uns heute die prophetische Sehergabe frappieren, welche aus den Schlußworten des RIEMANNschen Habilitationsvortrages hervorleuchtet, und welche geradezu auf die heutige Relativitätstheorie zu zielen scheint. Ich möchte diese Worte hier zitieren:

„Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem inneren Grunde der Maßverhältnisse des Raumes.

Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, daß bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anderswoher hinzukommen muß. Es muß also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen, durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu NEWTON den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, daß diese Arbeit nicht durch die Beschränktkeit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt."

Sie sehen daraus, wie tief RIEMANN selbst über diese physikalischen Fragen nachgedacht hat; er hat übrigens auch in seinem Manuskript noch die Bemerkung hinzugefügt, daß gerade diese Schlußausführungen einer weiteren Ausgestaltung bedürfen, ein Zeichen dafür, wie die Sache ihn beschäftigt hat.

Noch auf einen Punkt in der RIEMANNschen Theorie möchte ich hinweisen. Welches ist der innere Grund dafür, daß man gerade eine *quadratische* Differentialform für die Maßbestimmung verwendet und das Linienelement nicht z. B. durch eine vierte Wurzel aus einer Differentialform vierter Ordnung mißt? Dieses Problem ist in verschiedenen Arbeiten u. a. von HELMHOLTZ und neuerdings von WEYL behandelt worden; die Begründung für den RIEMANNschen Ansatz wird da in gewissen gruppentheoretischen Überlegungen gesucht und gefunden. Vielleicht darf ich darauf hinweisen, daß die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, von der wir sogleich sprechen werden, uns noch einen ganz anderen, mehr physikalischen Grund, für die Bevorzugung der quadratischen Form aufzeigt. Der Ansatz einer quadratischen Differentialform bedeutet nämlich, daß in unserer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit als solcher das Licht keine Doppelbrechung erfährt.

Ich komme damit zu dem letzten Gegenstand, den ich in diesen Vorträgen zu erwähnen habe, nämlich auf die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Was RIEMANN hier geschaffen hat, ist uns manchmal nur in Form von Einschaltungen und Nebenbemerkungen in anderen Abhandlungen oder in Form von Notizen aus seinem Nachlaß zugänglich gemacht worden. Charakteristisch dafür ist die Auseinandersetzung der später berühmt gewordenen RIEMANNschen Integrationsmethode in seiner Abhandlung: „Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite." Sehr lange hat es gedauert, bis diese RIEMANNschen Ideen den Weg in das allgemeine wissenschaftliche Bewußtsein der Mathematiker gefunden haben, und noch heute ist längst nicht alles, was RIEMANN über diese Dinge gewußt hat, restlos verstanden und bekannt. Es handelt sich hier vorzugsweise um die mathematische Theorie der Ausbreitungsvorgänge oder, mathematisch gesprochen, um hyperbolische partielle Differentialgleichungen, während die partiellen Differentialgleichungen der Funktionentheorie und der Potentialtheorie elliptischen Charakter tragen und dementsprechend, allgemein zu reden, stationären Vorgängen oder Gleichgewichtszuständen entsprechen.

RIEMANN hat in der oben genannten Arbeit eine Methode angegeben, welche im Falle von zwei unabhängigen Veränderlichen — eine Raumkoordinate und der Zeit t — die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichungen von Ausbreitungsvorgängen liefert, falls diese Differentialgleichungen linear und von zweiter Ordnung sind.

Diese Methode beruht auf dem Begriff der Charakteristiken, und ich möchte, ohne auf irgendwelche Einzelheiten einzugehen, zum Schluß noch etwas über die allgemeinen Zusammenhänge sagen, die sich hier zwischen verschiedenen mathematischen und physikalischen Disziplinen auftun, wenn man im Geiste der RIEMANNschen Ideen bis zu einem moderneren Standpunkt weitergeht.

Betrachten wir etwa eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $u(x_1, x_2, x_3, t)$ der 3 Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeit t und nehmen diese Differentialgleichung der Einfachheit halber in der Gestalt

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

an, wo die Koeffizienten a_{ik} nur Funktionen der 3 Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 sind und die quadratische Form $\sum a_{ik} h_i h_k$ als positiv definiert vorausgesetzt sei. Diese Differentialgleichung ist typisch für Ausbreitungsvorgänge mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit im Raume. Das einfachste Beispiel ist die klassische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

zu welcher sich die MAXWELLschen Gleichungen verhalten, wie die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen der Funktionentheorie zur Potentialgleichung in 2 Dimensionen.

Für solche partielle Differentialgleichungen wie die obige ist ein ganz wesentlicher Zug der, daß ihre Lösungen Unstetigkeitsflächen irgendwelcher Art besitzen können, welche sich mit der Zeit durch den Raum fortbewegen; z. B. Unstetigkeitsflächen, auf deren einer Seite die „Erregung" u überall 0 ist, während sie auf der anderen Seite von 0 verschiedene Werte hat, oder auch Unstetigkeitsflächen für gewisse Ableitungen der Lösungen. Solche Unstetigkeitsflächen, die sich mit der Zeit durch den Raum hindurch bewegen, bedeuten physikalisch Wellenfronten. Denken wir uns die Gleichung einer Wellenfront in der Form

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = t$$

geschrieben, so genügt diese Funktion φ der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\sum a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 1,$$

welche die zu der gegebenen Differentialgleichung gehörige charakteristische Differentialgleichung heißt; man sieht aus ihr, daß man z. B. zur Zeit $t = 0$ die Wellenfront beliebig vorschreiben kann, und daß dann der weitere Ablauf der Wellenfront durch die gegebene Differentialgleichung geregelt ist. Diese bewegten Wellenfronten pflegt man in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen die zur Wellengleichung gehörigen charakteristischen Mannigfaltigkeiten zu nennen; die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die wir gefunden haben, wird in der Physik häufig mit einem häßlichen Namen, die Eikonalgleichung, benannt.

Zu ihr kann man nach den Regeln der Charakteristikentheorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung ein System von Raumkurven finden, ihre sog. Charakteristiken. Sie genügen einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen, die wir hier nicht ausführen wollen.

Diese charakteristischen Kurven sind physikalisch nun gerade die Strahlen, längs derer sich unser Ausbreitungsvorgang fortpflanzt, also im Falle der Optik die Lichtstrahlen. Betrachten wir alle durch einen Punkt des Raumes gehenden Strahlen, so erhalten wir den durch diesen Punkt gehenden Lichtkegel oder charakteristischen Kegel, den wir als ein dreidimensionales Gebilde im vierdimensionalen x, y, z, t-Raum auffassen müssen.

Es ist äußerst zweckmäßig, die Geometrie dieser Lichtstrahlen, d. h. die zu der gegebenen Wellengleichung gehörige geometrische Optik in der Sprache einer RIEMANNschen Geometrie auszudrücken, bei welcher das Linienelement durch die Gleichung

$$ds^2 = \sum A_{ik} dx_i dx_k - dt^2$$

gegeben wird, wobei die Größen A_{ik} die zur Matrix der Größen a_{ik} inverse Matrix bilden, d. h. entstehen, wenn man die Größen a_{ik} in ein quadratisches Schema anordnet und aus diesem Schema zu jeder Größe die zugehörige Unterdeterminante durch die Gesamtdeterminante dividiert. Die Lichtstrahlen werden dann „Nullinien" dieser Maßbestimmung, d. h. Linien, für welche die Entfernung zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte den Wert 0 hat.

Sie werden verstehen, daß die hier nur flüchtig skizzierten Zusammenhänge von großer Bedeutung sowohl für die Physik als auch für die mathematische Integrationstheorie der Wellengleichung sein müssen. Gerade in der letzten Zeit haben die Fortschritte der Quantentheorie gezeigt, daß mathematische Überlegungen dieser Art ganz wesentlich zur Klärung der prinzipiellen physikalischen Fragen dienen, im Gegensatz zu einer schon im Abklingen begriffenen Modeströmung, welche feinere mathematische Theorien für die moderne theoretische Physik als entbehrlich einschätzte.

Ich muß mir versagen, auf diese Dinge hier näher einzugehen. Nur auf einen Punkt möchte ich noch hinweisen: Ganz ähnliche Zusammenhänge wie für partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelten auch für partielle Differentialgleichungen vierter und höherer Ordnung sowie für Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Wir erhalten aber dann als charakteristische Differentialgleichung erster Ordnung nicht mehr partielle Differentialgleichungen, die quadratisch in den Ableitungen der Funktion φ sind, sondern solche, bei denen diese Ableitungen in vierter oder entsprechend höherer Potenz vorkommen. Dem entspricht es dann, daß die von einem Punkt des Raumes ausgehenden Lichtkegel nicht mehr nur aus einem Mantel bestehen, sondern aus zwei oder entsprechend mehr Mänteln, und diese Tatsache drückt sich in der Sprache der Wellenoptik so aus, daß bei einem derartigen physikalischen Phänomen Doppelbrechung herrscht. Halten Sie das mit der Bemerkung zusammen, daß solchen Differentialgleichungen keine Maßbestimmung mit einem quadratischen Linienelement mehr entsprechen würde, sondern eine Maßbestimmung, bei der das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einer Differentialform vierter Ordnung oder entsprechend kompliziertere Ausdrücke gegeben wird, so werden Sie meine vorhin ausgesprochene Bemerkung über den RIEMANNschen Ansatz verstehen. Dieser Ansatz entspricht eben der physikalisch-experimentellen Beobachtung, daß in unserem tatsächlichen leeren Raum keine Doppelbrechung herrscht.

Ich habe mich mit meinen letzten Ausführungen vielleicht ein wenig weiter von RIEMANN entfernt, als es meinem Thema entspricht, und so möchte ich schließen mit dem Ausdruck der Überzeugung, daß von allen RIEMANNschen Erbstücken die mathematische Physik dasjenige ist, das für die Gegenwart und nächste Zukunft den reichsten Erfolg verspricht.

Zuschriften.

Der Herausgeber hält sich für die Zuschriften nicht für verantwortlich.

Über die Charakterisierung der Hexosemonophosphorsäuren und ihr Verhalten bei der zellfreien Gärung.

Neben der Hexosediphosphorsäure von HARDEN und YOUNG, („HARDEN-YOUNGsche Säure“)[1]) bildet sich nach der Entdeckung von HARDEN und ROBISON[2]). bei der Gärung im Hefepreßsaft zu einem recht beträchtlichen Teil Hexosemonophosphorsäure („ROBISONsche Säure“), die nach den Untersuchungen ROBISONS[3]) sich durch starke Rechtsdrehung auszeichnet ($[\alpha]_D^{20}$ ca $+ 25°$), und deren Hydrolysenprodukte auf Grund ihres Osazons, ihrer optischen Drehung und Reduktion ein Gemisch von Fructose und Glucose mit Überwiegen der letzteren zu sein scheinen, wobei aber durch die Spaltung eine Veränderung und teilweise Zerstörung der Zucker eintreten. Die ROBISONsche Säure unterscheidet sich deutlich von der früher von NEUBERG[4]) durch partielle Hydrolyse aus der HARDEN-YOUNGschen Säure erhaltenen Hexosemonophosphorsäure („NEUBERGsche Säure“), die ähnlich wie ihr Ausgangsprodukt nur äußerst schwach rechts dreht ($[\alpha]_D^{20} + 1{,}5°$). Da die HARDEN-YOUNGsche Säure bei totaler Spaltung eine linksdrehende Ketose liefert und auch die Hydrolyse der NEUBERGschen Säure zu linksdrehenden Produkten führt, ließ sich für sie eine Fructosestruktur vermuten.

I.

Daß in der Tat in der ROBISONschen und NEUBERGschen Säure zwei verschiedene, wenn auch sehr ähnliche Zuckerphosphorsäuren, bzw. Gemische von ihnen, vorliegen, deren Zuckerrest bei der ersteren überwiegend ein Aldehydzucker, ähnlich der Glucose, bei der NEUBERGschen Säure aber ein Ketozucker ähnlich der Fructose ist, konnten wir durch 2 verschiedene Reaktionen unmittelbar an den Zuckerphosphorsäuren selbst höchst wahrscheinlich machen. Wir gewannen dafür die Säuren nach der Vorschrift der Autoren, die ROBISONsche Säure aus gärendem Hefemacerationssaft, die NEUBERGsche durch Hydrolyse mit Salzsäure aus „Candiolin“ von Bayers Farbwerken.

a) Vergleicht man nämlich den Zuckerreduktionswert nach BERTRAND mit dem nach der Hypojoditmethode von WILLSTÄTTER und SCHUDEL[1]), welche nur auf Aldosen, nicht Ketosen anspricht, während der BERTRAND-Wert für beide nahezu gleich ist, so erhält man bei der ROBISONschen Säure ein Verhältnis: $\frac{\text{Willstätter-Reduktion}}{\text{BERTRAND-Reaktion}}$ von 0,84, bei der NEUBERGschen aber ein Verhältnis von 0,25, bei der HARDEN-YOUNGschen von 0,10. Nach dem absoluten Betrag der Hypojoditreduktion, der, bezogen auf Glucose, für die ROBISONsche Säure 0,66, für die NEUBERGsche 0,18 für die HARDEN-YOUNGsche Säure 0,04 ist, könnte man vermuten, daß die beiden Monosäuren isomere Gemische von Aldehyd- und Ketozucker sind, erstere im Verhältnis 2 : 1, letztere 1 : 4,5. Der Ketosegehalt pro 1 g wäre danach in der NEUBERGschen Säure das $2^1/_2$fache wie bei der ROBISONschen.

b) Fructose wird in neutraler konzentrierter Phosphat-[2]) und Arseniatlösung[3]) bei Körpertemperatur von Luftsauerstoff rasch oxydiert, während Glucose beständig ist, was auf einer Katalyse durch Metallspuren in komplexer Bindung beruht. Nun zeigt die

[1]) YOUNG, Proc. of the roy. soc. of London, Ser. B 81, 528. 1909; HARDEN und YOUNG, Biochem. Zeitschr. 32, 173, 178. 1911.
[2]) Proc. of the chem. soc. 30, 16. 1914.
[3]) Biochem. journ. 16, 809. 1922.
[4]) Biochem. Zeitschr. 88, 432. 1918.

[1]) Ber. d. dtsch. chem. Ges. 51, 780. 1918.
[2]) O. WARBURG und YABUSOE, Biochem. Zeitschr. 146, 380. 1924.
[3]) O. MEYERHOF und K. MATSUOKA, Biochem. Zeitschr. 150, 1. 1924.

NEUBERGsche Säure unter diesen Umständen eine Spontanoxydation, die bei gleicher Konzentration gut zweimal so groß ist, wie die der Fructose, während die Oxydationsgeschwindigkeit der ROBISONschen Säure nur die Hälfte bis 2 Drittel derjenigen von Fructose erreicht. Beispielsweise ergibt ein Versuch in molarer Phosphatlösung als relative Werte für die Oxydationsgeschwindigkeit: NEUBERGsche Säure 81, Fructose 37, ROBISONsche Säure 17; ein Versuch in molarer Arseniatlösung in gleicher Reihenfolge 230, 98, 70; im Vergleich dazu HARDEN-YOUNGsche Säure 1, Glucose 0. Durch Veresterung mit *einem* Molekül Phosphorsäure wird also die Oxydationsgeschwindigkeit der Fructose gesteigert, während sie durch Veresterung mit 2 Mol. erlischt — ein für das physiologische Verhalten der Mono- und Di-Ester bedeutungsvoller Umstand — andererseits aber spricht die dreifach höhere Oxydationsgeschwindigkeit der NEUBERGschen gegenüber der ROBISONschen Säure für ein entsprechendes Vorwiegen der Fructosekonfiguration in der ersteren. [Daß die Proportion hier ähnlich ist wie bei a), stützt diese Vorstellung des isomeren Gemisches.]

c) Auf der anderen Seite liegt es nahe, daß die physikalisch-chemischen Eigenschaften der isomeren Monophosphorsäureester übereinstimmen. Wir maßen die 1. und 2. Dissoziationskonstante der Säuren durch Elektrotitration. Im Vergleich zur Phosphorsäure und anderen Phosphorsäureestern ergaben sich die folgenden Werte für die negativen Logarithmen der scheinbaren Dissoziationskonstanten (pk′) in $^m/_{10}$-$^m/_{20}$-Konzentration:

	pk'_1	pk'_2
Phosphorsäure[1])	1,99	6,81
Glycerinphosphorsäure[1]) . . .	1,40	6,33
HARDEN-YOUNGsche Säure[1]) .	1,48	6,29
ROBISONsche Säure	0,94	6,11
NEUBERGsche Säure	0,97	6,11

Man sieht daraus, daß die Dissoziationskonstanten in gesetzmäßiger Weise mit der Zahl der auf einen Phosphorsäurerest entfallenden Alkoholgruppen der Substituenten zunehmen; sie sind daher für Glycerinphosphorsäure und Hexosediphosphorsäure nahezu gleich und für die beiden Monoester unter sich ebenfalls gleich, aber noch weiter gesteigert.

II.

Die ROBISONsche und die NEUBERGsche Säure stimmen nun in ihrem Verhalten bei der alkoholischen Gärung mit geringen quantitativen Differenzen überein, ganz unterschiedlich von der HARDEN-YOUNGschen Säure, worauf schon kurz hingewiesen wurde[2]). Genau wie die freien Zucker zeigen sie bei Zugabe zum Hefeextrakt einen allmählichen „Gäranstieg" mit anschließender rascher Zerfallsperiode[3]) und danach eine Phase herabgesetzter, aber konstanter Gärgeschwindigkeit. Und genau wie bei den freien Zuckern findet während der ersten Phase unter teilweiser Vergärung ein Übergang in Hexosediphosphorsäure statt, die dann in der zweiten Periode zerfällt. Acetaldehyd, der den Gäranstieg der freien Zucker beschleunigt[4]) wirkt hier ebenso, während diejenige Substanz, durch die die Zerfallsgeschwindigkeit der HARDEN-YOUNGschen Säure in spezifischer Weise erhöht wird, arsensaures Salz[1]), ebenso wie erst *nach* Veresterung der Zucker auch erst *nach* Veresterung der Mono-Ester ihre Wirkung erkennen läßt. Dabei ist aber auszuschließen, daß diese erst nach Abspaltung freien Zuckers in die HARDEN-YOUNGsche Säure übergehen. Hiergegen spricht schon, daß die ROBISONsche Säure spontan im Hefesaft aus Zucker gebildet wird und die Möglichkeit ihrer Isolierung offenbar nur dem Umstand verdankt, daß der dargelegte gekoppelte Zerfalls-Veresterungsprozeß, besonders bei starkem Überschuß an Monosäureester, vorzeitig stecken bleiben kann. Vergleichsweise vergärt die NEUBERGsche Säure noch rascher als die ROBISONsche und verestert sich meist auch stärker.

III.

Die erstaunlich weitgehende Übereinstimmung zwischen der Milchsäurespaltung des Zuckers im Muskelextrakt und der alkoholischen Gärung im Hefesaft dokumentiert sich auch bei den Monoestern, wobei auch im Muskelextrakt die NEUBERGsche Säure etwas rascher reagiert als die ROBISONsche. Diese Übereinstimmung beruht eben auf der genau gleichen Rolle, die die Veresterung des Phosphates für den Zuckerzerfall in beiden Fällen spielt und beschränkt sich daher auf diejenigen Momente, bei denen die Veresterung das Eintreten und die Geschwindigkeit der Vorgänge bestimmt. Zum Beispiel rührt der allmähliche Anstieg der alkoholischen Gärung nicht von dieser Veresterung, sondern wahrscheinlich von dem anfänglichen Mangel an Wasserstoffacceptor während der Bildung der sauerstoffreichen Brenztraubensäure her, und der Aldehyd verkürzt die Angärungsperiode, indem er als Wasserstoffacceptor dient[2]). Infolgedessen fehlt der Gäranstieg und die Aldehydwirkung bei der Milchsäurebildung im Muskelextrakt, die in der Phosphatperiode sofort mit maximaler Geschwindigkeit einsetzt. Andererseits steigert das Arseniat durch Erhöhung der Zerfallsgeschwindigkeit der Hexosediphosphorsäure und wirkt daher (in sehr kleinen Konzentrationen, etwa $^m/_{2000}$) genau so bei der Milchsäurebildung wie der Gärung, indem es die Spaltung der zugesetzten HARDEN-YOUNGschen Säure von vornherein stark steigert, die Milchsäurebildung aus Monoestern aber erst nach Ablauf der raschen Zerfallsperiode.

Antagonistisch zum Natriumarseniat verhält sich Natriumfluorid, da es die Aufspaltung der Hexosediphosphorsäure in Milchsäure und Phosphorsäure spezifisch hemmt[3]). Dieser Umstand gestattet eine Feststellung, die für die Gleichgewichtsbedingungen der gekoppelten Zerfalls-Veresterungsreaktion von Interesse ist. In Gegenwart von $^n/_{10}$-Natriumfluorid werden nämlich die Monoester im Muskelextrakt mit ähnlicher Geschwindigkeit angegriffen wie ohne Fluorid, hierbei aber, indem die Milchsäurebildung ausbleibt, zur Gänze in Hexosediphosphorsäure umgelagert. Dieser Prozeß verläuft also für sich allein freiwillig, wobei eine meßbare und auf Grund der obigen Dissoziationskonstanten auch berechenbare Säuerung des Systems stattfindet.

IV.

Das geschilderte Verhalten der Monoester in Verbindung mit der spontanen Bildung der ROBISONschen

[1]) Werte nach O. MEYERHOF und J. SURANYI, Biochem. Zeitschr. 178, 427. 1926.

[2]) O. MEYERHOF, Naturwissenschaften. Dezember 1926, Festheft der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft.

[3]) Die rasche Zerfallsperiode hatte schon ROBISON an seiner Säure beobachtet, konnte sie aber nicht erklären (Biochem. Journ. a. a. O.).

[4]) C. NEUBERG, Biochem. Zeitschr. 88, 145. 1918; A. HARDEN und HENLEY, Biochem. journ. 14, 642. 1920.

[1]) HARDEN und YOUNG, Proc. of the roy. soc. 83, 451. 1911; O. MEYERHOF, Zeitschr. f. physiol. Chem. 102, 185. 1918.

[2]) Vgl. Anm. Nr. 1, diese Spalte: NEUBERG, HARDEN.

[3]) O. MEYERHOF, Biochem. Zeitschr. 178, 462. 1926.

Säure während der Zuckergärung läßt kaum eine andere Deutung zu, als daß wir es hier mit den primären Veresterungsprodukten der Zucker zu tun haben, die dann sekundär unter teilweisem Übergang in HARDEN-YOUNGsche Säure zerfallen. Das Überwiegen der Aldehydkonfiguration bei der ROBISONschen Säure kann dann darauf bezogen werden, daß diese Konfiguration wegen ihrer höheren Stabilität der Umwandlung leichter entgeht als die Ketosekonfiguration und daher in größerer Menge erfaßt wird, während die etwas rascher reagierende NEUBERGsche Säure der Zusammensetzung des primär gebildeten Produktes näher kommt. Wie dem aber auch sei, so gestattet dieser Umstand, wie schon kürzlich erwähnt, den HARDEN-YOUNGschen Gärungsgleichungen eine rationelle Deutung zu geben; indem nämlich der ganze reagierende Zucker zunächst zu Monophosphorsäure verestert wird und dann, während das eine Molekül in Alkohol und Kohlensäure zerfällt, ein zweites die frei werdende Phosphorsäure aufnimmt. Daß hier das Verhältnis 1 : 1 zwischen zerfallenden und veresternden Molekülen besteht, muß auf spezielle Ursachen, vielleicht eine besonders geregelte Bildungsgeschwindigkeit der Monoester bezogen werden, denn bei direktem Zusatz dieser zu Hefe- oder Muskelextrakt reagieren sie in der Regel auch schon mit dem vorhandenen anorganischen Phosphat, so daß sich viel mehr von ihnen in Hexosediphosphorsäure umlagert als zerfällt. Nun besteht aber nach unseren Versuchen die genau hälftige Teilung der Zuckermoleküle in zerfallende und veresternde nur bei der Vergärung der freien Hexosen, und ebenso auch bei ihrer Spaltung in Milchsäure. Dagegen bildet sich bei der Vergärung des Glykogens besonders am Anfang leicht 3—4mal so viel Hexosediphosphorsäure, als gleichzeitig Glucosegruppen zerfallen. Ja auch hier läßt sich durch Zusatz von $^{n}/_{500}$ bis $^{n}/_{1000}$-Fluorid die Vergärung fast vollständig aufheben, während die Veresterung kaum geschwächt weitergehen kann.

Die HARDEN-YOUNGschen Gleichungen stellen also nur einen Spezialfall dar, der allein bei den freien Hexosen, hier aber meist erstaunlich genau verwirklicht ist[1]). Von der Aufklärung ihres feineren Mechanismus sind daher wichtige Aufschlüsse zu erwarten über die besonderen Bedingungen, die die Veresterung der freien Hexosen, gegenüber den Hydrolyseprodukten des Glykogens, erfordert.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Biologie, den 30. November 1926.
O. MEYERHOF und K. LOHMANN.

Über das Verhältnis der klassischen Stereochemie zu den Arbeiten Weißenbergs.

Die Krystallanalyse hat gezeigt, daß die Formen der im Gitter vorkommenden Moleküle (die von WEISSENBERG Mikrobausteine genannt werden) gelegentlich sehr von denen abweichen, die man aus Tetraedern konstruiert. Überhaupt lassen, was man schon lange weiß, die mit Hilfe der klassischen Stereochemie konstruierten Molekülmodelle im allgemeinen keinen Zusammenhang zwischen Molekülbau und Krystallform erkennen. Es scheint also, als ob man hier, wie HABER[2]) sich ausdrückt, an eine Mauer ohne Durchgang käme.

[1]) EULER und OHLSEN (Zeitschr. f. physiol. Chem. 76, 468. 1912) fanden indes eine besondere Heferasse, deren Macerationssaft Hexosen nur verestert, ohne sie zu vergären.

[2]) Naturwissenschaften 14, 852. 1926.

Wenn diese Mauer auch keinen Durchgang besitzt, so erscheint sie wenigstens doch übersteigbar, wenn man sich zweierlei überlegt: 1. Inwieweit fordert die klassische Stereochemie einen tetraedrischen Bau der Moleküle? 2. Inwieweit ist man berechtigt, die aus krystallisierten Stoffen gemachten experimentellen Feststellungen über die Formen der Mikrobausteine, die durch WEISSENBERG theoretisch begründet worden sind, auf das von Gitterkräften freie, isolierte Molekül zu übertragen?

1. Die Forderungen der Tetraederhypothese faßt RICHTER[1]) in seiner Arbeit, die das gleiche Thema wie die vorliegende behandelt, so auf, als müßten die vier Substituenten eines Kohlenstoffatoms fest in den Ecken eines Tetraeders liegen. Diese früher gelegentliche vertretene Form der Hypothese von der absolut festen Lage benachbarter Atome wird heutzutage wohl kaum mehr verfochten, wenn auch der richtige Standpunkt nicht immer so deutlich dargelegt wird, wie dies z. B. im Lehrbuch von MEYER-JACOBSON[2]) geschehen ist. Danach sind die tetraedrischen Lagen nur als Gleichgewichtslagen anzusehen. Wenn andere Formen vorkommen, die LE BEL a priori als möglich ansieht, so müssen wegen der Zahl der beobachteten Isomeren diese Formen sehr leicht in die tetraedrische Form übergehen bzw. sich über die tetraedrische Lage ineinander umlagern können. Daß die tetraedrische Lage die energetisch bevorzugte, aber nicht die allein mögliche sein soll, hat besonders deutlich BAEYER[3]) bei der Aufstellung seiner Spannungstheorie ausgesprochen: Abweichungen von der tetraedrischen Lage können vorkommen, sie bedingen aber eine Erhöhung des Energieinhaltes der Moleküls im Vergleich mit der tetraedrischen Lage. Sind keine Hinderungen durch Ringschluß vorhanden, so wird sich normalerweise eine tetraedrische Lage einstellen. Wenn RICHTER sagt: „Die VAN 'T HOFFsche Deduktion des Tetraeders beruht auf der völlig willkürlichen Annahme, daß alle rein formal denkbaren Modifikationen auch realisierbar seien, so wird mit anderen Worten die Frage des Energieinhaltes, d. h. der Stabilität der auf dem Papier konstruierten Isomeren, ganz außer acht gelassen —", so ist das gelegentlich wohl geschehen, als man z. B. gegen die BREDTsche Campherformel anführte, daß es nach ihr wegen der 2 asymmetrischen Atome 4 aktive Campher geben müsse, während nur zwei bekannt waren; ganz allgemein ist das aber, wie die BAEYERsche Spannungstheorie zeigt, nie der Fall gewesen.

Aber auch schon vor langer Zeit ging BAEYER davon ab, um in allen mit tetraedrischer Lage der Kohlenstoffatome konstruierbaren Modellen die normalen Atomlagen zu sehen. Das geht aus seiner Annahme über die ebene Struktur des Cyclohexanringes hervor, der sich aus unverzerrten Tetraedern nicht aufbauen läßt, während nach SACHSE „spannungsfreie" räumliche Modelle möglich sind. In der Folge hat sich zwar diese BAEYERsche Vorstellung nicht als haltbar erwiesen, aber auch heute legt man sich noch die Frage vor, inwieweit das Tetraeder die zweckmäßigste Ausdrucksform für das chemische und physikalische Verhalten von Verbindungen ist, und ob man eine Beeinflussung der „Spannung" — und somit des Energieinhaltes tetraedrischer und anderer Lagerungen — durch Substitution anzunehmen hat.

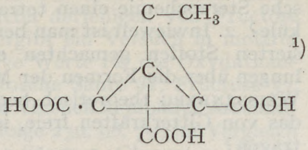
Die Existenz eines pyramidalen Pentaerythrits ist also zunächst nur insofern etwas Neues, als hier die

[1]) Naturwissenschaften 14, 889. 1926.

[2]) Bd. I[1], S. 91.

[3]) Ber. d. dtsch. chem. Ges. 18, 2277. 1885.

Abweichung vom Tetraeder nicht in einer ringförmigen Verbindung verwirklicht ist; in ringförmigen Verbindungen, wie z. B. im Cyclopropan oder gar in Verbindungen vom Typ



[1])

muß man ähnlich große Verzerrungen annehmen. Von Bedeutung wäre es, festzustellen, ob die pyramidale Form des Pentaerythrits energiereicher oder energieärmer ist als die tetraedrische, d. h. ob die von der konsequent angewandten Spannungstheorie geforderte Spannung sich durch eine Erhöhung des Energieinhaltes beim pyramidalen Pentaerythrit zu erkennen gibt oder nicht.

2. Nun gibt die WEISSENBERGsche Theorie keinen Anhaltspunkt für die Größe der zwischen beiden denkbaren Formen des Pentaerythrits bestehenden Energiedifferenz, ja, sie vermag nicht einmal das Vorzeichen anzugeben. Denn die Tatsache, daß im krystallisierten Pentaerythrit das pyramidale Molekül vorkommt, beweist noch nichts für einen besonders geringen Energieinhalt derselben Form in gelöstem oder gasförmigem Zustand. Die Vermutung, daß die Energiedifferenz der genannten Konfigurationen klein ist — einige Cal., Größenordnung der Schmelzwärme, die beiläufig meist nicht ein Hundertstel der Atombindungsenergie oder weniger, sondern bis zu 10% davon ausmacht[2]) —, ist nicht streng bewiesen, da die Schmelzwärme als Differenz der Gitterenergie und der Deformationsenergie der Moleküle aufzufassen ist. Auch wenn man aber die genannte Vermutung als richtig annimmt, folgt aus dem von WEISSENBERG und REIS selbst zitierten Verteilungssatz *nicht* annähernd gleiches Mengenverhältnis der Isomeren im flüssigen oder gasförmigen Zustand, z. B. für eine Umwandlungswärme von 0,5 Cal 71 : 29; von 2 Cal 97 : 3; von 4 Cal 99,9 : 0,1.

Beim Schluß von der Symmetrie der Moleküle im Gitter (Mikrobausteine) auf die Symmetrie der isolierten Moleküle muß man sehr vorsichtig sein, da die ins Gitter eintretenden Moleküle infolge Wirkung der Kraftfelder der Nachbarmoleküle Deformationen erleiden, die eine Änderung der Symmetrie zur Folge haben *können*. Über die mögliche Größe dieser Deformationen, die, wenn stetig, stets mit Erhöhung des Energieinhaltes verbunden sind, kann man vorläufig keine Aussagen machen. Man hat daher mit der *Möglichkeit* zu rechnen, daß auch der pyramidale Pentaerythrit seine Entstehung einer solchen Deformation der tetraedrischen Form verdankt. Aber es bleibt jedenfalls die Annahme WEISSENBERGS zu diskutieren, wonach der pyramidale Pentaerythrit entweder einer relativ stabilen oder gar absolut stabilen Lage der Atome in flüssigem oder gasförmigem Zustand entsprechen kann. Darüber können jedoch nur neue Experimente entscheiden.

Ein Punkt, den RICHTER in seiner Zusammenfassung nicht erwähnt, sind die Zweifel WEISSENBERGS an der Zuverlässigkeit der auf die Zahl der Isomeren sich gründenden Konfigurations- und Konstitutionsbestimmungen der nach der klassischen Theorie vorauszusehenden Verbindungen. Sie gründen sich darauf, daß die WEISSENBERGsche Theorie viel mehr Isomere verlangt als die VAN 'T HOFFsche Hypothese. Wie eine nähere Prüfung zeigt, erweisen sich diese Zweifel jedoch als nicht berechtigt, da im allgemeinen die Stabilität der von VAN 'T HOFF geforderten Isomeren nach den vorliegenden Erfahrungen von ganz anderer Größenordnung sein muß als die der nach WEISSENBERG möglichen Isomeren.

Die vorstehenden Ausführungen werden in einer Arbeit, die in den „Berichten" im Druck ist, noch ausführlich begründet werden.

Göttingen, den 11. Oktober 1926. WALTER HÜCKEL.

[1]) BEESLEY und THORPE, Soc. 117, 602. 1920.

[2]) Man darf hier nicht etwa Sublimationswärme und Aufspaltungsarbeit des Moleküls in lauter Einzelatome vergleichen, Werte, die FAJANS einmal (Ber. d. dtsch. chem. Ges. 55, 2835. 1922) nebeneinander gestellt hat.

Lichtquanten und Lichtwellen.

In der immer mehr an Boden gewinnenden dualistischen Vorstellung vom Wesen der Strahlung („Wellen *und* Korpuskeln"), welche auch auf die materiellen Vorgänge übergegriffen hat, ist offenbar von besonderer Wichtigkeit die Frage, welchem Teilwellenvorgang im allgemeinen (*nicht* gerichteten) Strahlungsfelde die einzelnen Korpuskeln zuzuordnen sind. Man kann die hierfür in Frage kommenden Möglichkeiten folgendermaßen formulieren: entweder ist ein Lichtquant Repräsentant des *ganzen* Wellenfeldes in einer gewissen Umgebung oder aber einer ebenen Partialwelle. Im ersten Falle käme man wohl kaum um den Schluß herum, daß der Impuls eines Lichtquants $h\nu$ im allgemeinen kleiner als $h\nu/c$ sein müßte, da für ein klassisches Strahlungsvolumen das Verhältnis Energie : Impuls im allgemeinen kleiner als c ist; das Lichtquant würde sich danach stets in der Richtung des POYNTINGschen Vektors, und zwar im allgemeinen mit Unterlichtgeschwindigkeit, bewegen. Im zweiten Falle wäre dagegen der Lichtquantenimpuls stets genau $h\nu/c$, die Bewegung gradlinig mit der Geschwindigkeit c. Dies ist die Überlegung, die dem folgenden Experiment zugrunde lag.

Die Strahlung eines Röntgenrohres mit W-Anode (100 kV konst.) fiel auf zwei gleich weit entfernte Paraffinprismen („Primärstrahler"). Die an diesen gestreute Strahlung traf ein drittes Paraffinprisma („Sekundärstrahler"), welches sich in der Mitte zwischen den beiden Primärstrahlern befand. Die am Sekundärstrahler zum zweiten Mal, und zwar unter 90°, gestreute Strahlung wurde auf ihre Absorbierbarkeit untersucht. Durch die beschriebene Anordnung wurde erreicht, daß im Sekundärstrahler zwei entgegengesetzt gerichtete Strahlungen von gleicher Intensität gleichzeitig bestehen, so daß der mittlere Energiefluß verschwindet. Würde man nun entsprechend der ersten der beiden erwähnten Möglichkeiten annehmen, daß in diesem Falle der Lichtquantenimpuls wesentlich kleiner als $h\nu/c$ ist, so wäre die COMPTON-DEBYEsche Quantentheorie der Zerstreuung, welche ja mit dem Impuls $h\nu/c$ rechnet, nicht mehr direkt anwendbar, sie müßte einer kleinen Abänderung unterzogen werden, deren Resultat darin besteht, daß die Wellenlängenänderung wesentlich kleiner wird. Es wäre also zu erwarten, daß die zweimal gestreute Strahlung härter ist, wenn beide Primärstrahler aufgestellt sind, als wenn einer von ihnen entfernt ist. Die Messungen ergaben keinerlei Andeutung eines derartigen Effektes. Eine etwaige Änderung des Comptoneffektes im beiderseitigen Strahlungsfelde könnte nicht mehr als etwa 1% des normalen betragen. Dieses Resultat bezieht sich zunächst auf die gesamte (Brems- + WK-) Strahlung des Rohres, doch enthielt diese immerhin genügend WK-Strahlung, daß auch für diese allein ein Effekt von der zu erwartenden Größe ausgeschlossen erscheint.

Dieses Ergebnis besagt, daß die Lichtquanten den *ebenen Partialwellen* zuzuordnen sind. Es ist nicht zu leugnen, daß der Anschauung hieraus ganz fundamentale Schwierigkeiten entstehen. Denken wir uns z. B. eine streng monochromatische stehende Welle, so läßt die Erfahrung keinen Zweifel darüber, daß in den Knotenebenen keine Lichtquanten sein können, obwohl zwischen ihnen solche mit Lichtgeschwindigkeit sich befinden. Somit kann von einer kontinuierlichen „Bewegung" der Quanten („Ort = stetige Funktion der Zeit") überhaupt nicht gesprochen werden, obwohl nach früheren Versuchen der Erhaltungssatz für die Lichtquanten strenge Gültigkeit besitzt. Mit allem Vorbehalt könnte man etwa sagen, daß die Lichtquanten „springen"; die Mängel einer solchen Ausdrucksweise wären wohl dieselben wie bei den „springenden" Elektronen der älteren Quantentheorie.

Eine Auffassung wie die kürzlich von L. DE BROGLIE[1]) angedeutete, wonach im Interferenzfeld die Lichtquanten sich mit veränderlicher Geschwindigkeit senkrecht zu den Flächen gleicher Phase bewegen sollen, ist nach unserem Versuchsergebnis nicht möglich. Sollte dieses sich wirklich auch auf die Materiewellen übertragen lassen, so würden ebenfalls wohl der SCHRÖDINGERschen Vorstellung von den „Wellenpaketen" erhebliche Schwierigkeiten entstehen.

Versuchen wir noch, unser Resultat für die Strahlungsstatistik nutzbar zu machen, so liegt es nahe, als wellenmäßiges Korrelat des Lichtquants genauer nicht eine streng ebene Welle, sondern ein „Elementarbündel" (im LAUEschen Sinne) von geringem Frequenzbereich, großer Länge und kleinem Öffnungswinkel zu verstehen. Jedes Elementarbündel kann beliebig viele (auch 0) Quanten enthalten; ihre mittlere Zahl wird durch die klassisch berechnete „Energie" des Bündels bestimmt. Die unabhängigen Elemente der Statistik sind also nicht die Lichtquanten, sondern die Elementarbündel, deren Zahl gleich derjenigen der BOSEschen Phasenzellen ist. Dies dürfte der eigentliche Sinn der BOSEschen Statistik sein. Man gewinnt auf diesem Wege ein trotz allem wieder recht anschauliches Bild von der Energieverteilung und besonders den Energieschwankungen in der Strahlung, wie in der demnächst in der Zeitschr. f. Phys. erscheinenden ausführlichen Arbeit gezeigt werden soll.

Berlin-Charlottenburg, Physikalisch-Technische Reichsanstalt, den 6. November 1926. W. BOTHE.

[1]) L. DE BROGLIE, Nature 118, 441. 1926.

Beobachtungen über Wasserführung und Eisstoß an Flüssen Lapplands.

Auf meiner diesjährigen Lapplandreise (s. den Bericht über die vorjährige in dieser Zeitschr. 13, H. 45) habe ich ausgedehnte Bootfahrten unternommen, die mir Gelegenheit gaben, einige Erscheinungen im Leben natürlicher Flüsse zu beobachten, die bisher meines Wissens nicht so deutlich erkannt sind.

Es handelt sich bei den Flüssen Inner-Lapplands um Ströme, die noch ganz im Urzustand sich befinden, an denen jedenfalls in ihren oberen Teilen noch keine bessernde menschliche Hand eingegriffen hat. Sie sind auch morphologisch gesprochen noch sehr jung, da ja die Eiszeit dort erst seit ein paar tausend Jahren vorbei ist, sie scheiden sich deutlich in ruhige, oft seeartig erweiterte Stellen, zwischen denen Stromschnellen liegen. Die Anwohner, denen die Flüsse als einzige im Sommer benutzbare Verkehrswege dienen, bezeichnen die ruhigen Stellen auf schwedisch als „sel", auf finnisch als „suvanto", die Stromschnellen als „niva", wenn sie geringes Gefäll haben; als „koski", wenn sie kräftig sind (Finnisch). Die Wasserführung schwankt sehr: am Käkkäläjoki, einem der Quellflüsse des großen Ounasjokisystems, das bei Rovaniemi sich mit dem

Fig. 1. Käkkälojoki oberhalb Peltoonoma. Einfassung durch natürliche „Deiche" mit Weiden- und Birkengebüsch. G. BRAUN phot. 1926.

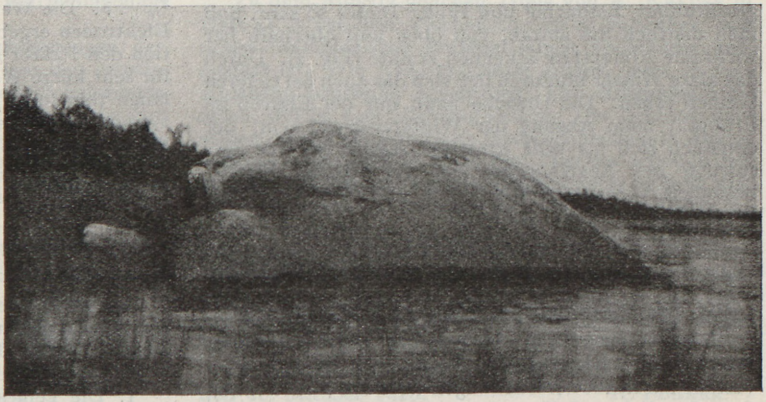


Fig. 2. Eisbestoßener Stein im Bett des Muonio-Flusses ges. von oberhalb. G. BRAUN phot. 1926.

Kemijoki vereinigt, fanden wir selbst weit oben Hochwasserarken bis zu 2 mm über dem Niederwasser, das wir im vergangenen August hatten, das als ziemlich niedrig uns bezeichnet wurde.

Der Sommer 1926 war in Lappland sehr trocken gewesen, das Frühjahrshochwasser war bald vorübergerauscht und dann waren die Flüsse auf den erwähnten niedrigen Stand gesunken. Bei Hochwasser überschwemmen die Flüsse die Niederungen und schütten am Ufer einen natürlichen Deich auf, mit dem sie in bekannter Weise ihr Bett erhöhen. Es bedeckt sich mit Weiden- und Birkengebüsch (Fig. 1). Hinter ihm bilden sich Moore, die ganz regelmäßig beide Seiten begleiten. Wenn nun im Herbst die Regenperiode wieder einsetzt, dann füllen sich zunächst diese Moore, die im Sommer auch zum Teil abtrocknen, mit Wasser an. Nach einer gewissen Zeit sind sie vollgesogen und nun geben sie *den Überschuß an den Fluß ab.* Das war es eben, was ich dieses Jahr so besonders gut beobachten konnte, dies starke seitliche Hineinrieseln durch den Uferdamm oder von oben her, wenn der Fluß eingeschnitten ist, ein dauerndes Rauschen von Rinnsalen fast ununterbrochen auf viele Kilometer Länge. *Dadurch* nahm der Fluß an Wasserführung und Breite zu, viel weniger durch die Nebenflüsse, die in derselben Weise gespeist werden.

Auch die zweite hier zu erwähnende Erscheinung trat in diesem Jahr wegen des niedrigen Wasserstandes besonders auffällig hervor: das ist die an allen Blöcken im Torne- und Muonio-Fluß usw. bis hinab auf den Grund zu beobachtende *Abnutzung durch den Eisstoß.* Die im Flußbett liegenden Blöcke und auch das Anstehende sind normalerweise durch das Wasser und den Algenbesatz braun gefärbt und äußerlich glatt. An der oberen Seite aber erwiesen sie sich sämtlich als abgeschrammt, hellfarbig und rauh. Dieses so sehr, daß man deutlich die starke, von oben und oberhalb her wirksame Abnutzung erkennen konnte (Fig. 2). Durch das klare Wasser hindurch ließ sich das auch bei tieferen Steinen sehen. Die Ursache kann nur der Eisstoß im Frühjahr beim Abgang der Wintereisdecke sein, der demnach sich als sehr kräftiges Agens bei der Zerstörung des Anstehenden und der Blöcke erweist, besonders wirksam, wenn es sich wie hier um körnige krystalline Gesteine handelt.

Greifswald, den 15. November 1926.

GUSTAV BRAUN.

Zur Kenntnis der pflanzlichen Zellmembran.

Entsprechend dem Vorkommen von polymeren Anhydro-Glykuronsäuren in Braunalgen ist es uns im Verlauf unserer Untersuchungen über die Konstitution der pflanzlichen Zellmembran gelungen, auch in den Skelettsubstanzen einer Reihe von höheren Pflanzen quantitativ durch konduktometrische Titration polymere Säuren zu bestimmen.

Untersucht wurden: Polytrichum commune (Frauenhaar), Pteridium aquilinum (Adlerfarn), Picea excelsa (Fichte), Abies pectinata (Tanne), Stipa tenacissima (Esparto), Triticum vulgare (Weizenstroh), Fagus silvatica (Buche), Canabis sativa (Hanf), Linum usitatissimum (Flachs), Scorzonera hispanica (Schwarzwurz).

Es zeigte sich, daß in den untersuchten Pflanzen der Prozentgehalt der Säure nicht in allen Skelettsubstanzen gleich ist. Er ist am niedrigsten in der Skelettsubstanz der Fichte, die nur ca. 3% Säure enthält, und am höchsten in der Skelettsubstanz der Buche, in der wir etwa 12% nachweisen konnten.

In diesem letzten Beispiel haben wir auch schon die polymere Anhydrosäure aus der Skelettsubstanz durch spezifische Extraktion mit Alkalien präparativ dargestellt, ihr Äquivalentgewicht bestimmt und sie als Polyglykuronsäure charakterisiert.

Im Gegensatz zu diesen Befunden läßt sich bei Baumwolle und Tunicin keine Säure nachweisen.

Diese experimentellen Untersuchungen sind in der Dissertation von KARL MEINEL, die im Oktober der philosophischen Fakultät, II. Sektion, der Ludwigs-Maximilians-Universität in München handschriftlich vorgelegt wurde, ausführlich beschrieben.

München, den 12. November 1926.

ERICH SCHMIDT.

Quantentheorie des kontinuierlichen Absorptionsspektrums.

Die undulatorische Mechanik ermöglicht eine Theorie der aperiod schen Vorgänge bzw. eine Berechnung der Intensitätsverteilung in den kontinuierlichen Spektren. Die Theorie ist kürzlich auf die Hyperbelbahnen des Wasserstoffatoms angewandt worden (Proc. Cambr. Phil. Soc., Okt. 1926). Die Formeln sind für diese Mitteilung zu umständlich; sie ergeben eine Abschätzung der Intensität der kontinuierlichen Röntgen-Absorptionsspektren. Die ist, wie ich glaube, die erste experimentelle Prüfung dieser Teile der Theorie. Nach der Theorie fängt die Absorption plötzlich an der Seriengrenze an und nimmt dort einen Wert an, der für ein bestimmtes n_k-Elektron der Wellenlänge der Grenze proportional ist. Für sehr kurze Wellen ist der Absorptionskoeffizient für ein Elektron von der Form $f(n, k)\, \lambda^{2+k} Z^{2(k+1)}$, wo Z die effektive Kernladung und λ die Wellenlänge der Strahlen ist, und wo $k = 1/2$, $3/2, \ldots$ Die Werte von $f(n, k)$ für die verschiedenen Elektronen ergeben summiert für die atomare Absorption den Faktor $\lambda^{\alpha} Z^{\beta}$, wo β zwischen 3 und 4,5 liegt; für sehr kurze Wellen ist $\alpha = 2{,}5$; für mittlere Wellenlänge (bis zum $9/10$ der Seriengrenze) liegt α zwischen 2,5 und 3. Dies stimmt mit den empirisch gewonnenen Formeln überein.

Göttingen, Institut für theoretische Physik, den 1. November 1926.

J. R. OPPENHEIMER.

Das Verhalten von Aluminiumkrystallen bei Zugversuchen.

An Hand einer größeren Zahl von Zerreißversuchen an Aluminiumkrystallen verschiedener Orientierung konnten deren Festigkeitseigenschaften mit gewisser Vollständigkeit ermittelt werden.

1. Die gemessenen technologischen Größen: Zugspannung und Abmessungsänderungen wurden auf die physikalisch als maßgebend anzusehenden Größen: Schubspannung auf der Gleitfläche in der Gleitrichtung und krystallographische Abgleitung zurückgeführt. Als krystallographische Abgleitung wird dabei die gegenseitige Verschiebung zweier Gleitflächen im Abstande 1 eingeführt.

Bei doppelter Gleitung auf gleichberechtigten Gleitsystemen hängt die Dehnung mit der Orientierungsänderung ebenso zusammen, als ob die Winkelhalbierende der beiden Gleitrichtungen resultierende Gleitrichtung wäre. Bei der Umrechnung wurde der von TAYLOR und ELAM[1]) festgestellte Mechanismus der einfachen und doppelten Gleitung zugrunde gelegt. Mit

[1]) G. J. TAYLOR und C. F. ELAM, Proceedings Roy. Soc. 102 A, 643—667. 1923; 108 A, 28—51. 1925.

Hilfe der aus dem Deformationstensor für einfache und doppelte Gleitung abgeleiteten Beziehungen wurden Schablonen für graphische Umrechnung entworfen, die für alle Metalle mit gleichem Gleitmechanismus, also für alle Metalle mit regulär-flächenzentriertem Gitter gültig sind[1]).

2. Die Kurven: Schubspannung-Abgleitung für verschiedene Krystalle verlaufen sowohl bei einfacher wie doppelter Gleitung gleichartig innerhalb eines Bereichs von $\pm$ 15% um den Mittelwert. Krystalle, deren Stabachse einer Würfeldiagonale nahezu parallel geht, zeigen hierbei i. M. einen um 10—15% größeren Widerstand als andere Krystalle. Die Kurven: Zugspannung-Dehnung und Zugspannung-Querschnittsverminderung verlaufen dagegen bei verschiedenen Krystallen sehr verschiedenartig; ebenso ergeben die Kurven: Schubspannung-Dehnung[2]), Schubspannung-Querschnittsverminderung und auch Schubspannung-Abschiebung[3]) keine gute Übereinstimmung.

3. Die Festigkeit der Krystalle zeigt nahezu die gleiche Abhängigkeit von der Orientierung wie die Zugspannung, die eine konstante Schubspannung in der Ausgangslage hervorruft. Krystalle, deren Achse einer Würfeldiagonalen parallel geht, haben eine fast doppelt so große Festigkeit wie solche Krystalle, bei denen eine Gleitfläche unter etwa 45° zur Stabachse liegt.

4. Der Einschnürbeginn, der die Dehnung der Krystalle bestimmt, kann experimentell aus dem Zusammenhang zwischen Dehnung und Querschnittsverminderung, und theoretisch aus der Höchstlastbedingung[4]) in guter Übereinstimmung ermittelt werden. Krystalle, deren Achsen nahezu parallel einer Würfelflächendiagonalen verlaufen, die also den größten Weg bei einfacher Gleitung zurücklegen, haben die höchste Dehnung, Krystalle, deren Achsen der Würfeldiagonale parallel liegen, die geringste.

5. Die beobachteten Querschnittsänderungen der Krystalle weichen in geringem Maße von den errechneten ab. Insbesondere tritt die rechnerisch geforderte Verbreiterung der größten Querschnittsabmessung nur bei Orientierungen der Stabachse in größerer Entfernung von der Würfelachse ein. Diese Beobachtungen deuten darauf hin, daß der Gleitmechanismus durch Hineinspielen von Gleitbewegungen auf anderen (als den durch die Spannungsverhältnisse bevorzugten) Gleitsystemen etwas gestört wird.

Die Untersuchung wird an anderer Stelle vollständig veröffentlicht werden.

Berlin-Dahlem, den 6. November 1926.

Frhr. v. Göler, R. Karnop und G. Sachs.

Notiz über die Art des Regenbogenlichtes.

Beobachtet man die schöne Himmelserscheinung des Regenbogens durch ein vor das Auge gehaltenes Nicolsches Prisma, so erkennt man beim Drehen des Nicols ein bogenstückweises Verschwinden des Phänomens. Das Regenbogenlicht ist somit sehr ausgeprägt linear polarisiert, und zwar verlaufen seine Schwingungen tangential zum Bogen. Das gilt sowohl für den Haupt- als auch für den Nebenregenbogen.

Eine einfache hier nicht näher zu erörternde Überschlagsrechnung liefert die damit harmonierenden zahlenmäßigen Verhältnisse.

Der erwähnte, immerhin doch sehr drastische Umstand ist, wie es scheint, im Kreise der naturkundlich Interessierten sehr wenig bekannt. In den mir zugänglichen physikalischen Lehrbüchern, ja selbst in dem großen meteorologischen Werke von Pernter-Exner, das dem Regenbogen 80 Seiten widmet, fehlt eine entsprechende Darlegung. Indes ist in der Abhandlung von Chr. Wiener über die Helligkeit des klaren Himmels der in Rede stehende Umstand in allgemeineren Erörterungen mit enthalten, und in den theoretischen Studien von W. Möbius über den Regenbogen findet man eine einschlägige Berechnung, indes auch nicht für Wassertropfen, sondern für Glaskugeln.

Es ist der Zweck obiger Notiz, die erwähnte, mir seit vielen Jahren bekannte Erscheinung mehr als jetzt der Fall ist in den Interessenkreis, besonders auch der Lehrer an Schulen, zu rücken.

Nach einer von meinem Assistenten Dr. S. Rösch ausgeführten Berechnung ist das Verhältnis der Intensitäten des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Lichtes zu der des in der Einfallsebene schwingenden $I^s : I^p$ beim Hauptregenbogen etwa 21 : 1. Für den Nebenregenbogen ergibt sich $I^s : I^p$ zu etwa 8,5 : 1.

Der Gang der Rechnung und ihre Ergebnisse hinsichtlich der Regenbögen höherer Ordnung sollen im Zentralbl. für Mineralogie veröffentlicht werden.

Leipzig, den 22. November 1926.

Friedrich Rinne.

Über den giftigen Honig des pontischen Kleinasien.

Zu dem Aufsatz gleichen Titels von K. Krause in Heft 44, S. 976 dies. Wochenschr. ist zu bemerken, daß dieses toxikologische Problem längst vollständig aufgeklärt ist. Wie Krause richtig angibt, sind es verschiedene pontische Alpenrosen-, also Rhododendronarten, welche den Gifthonig liefern. Der Giftstoff derselben ist das stickstofffreie bitter schmeckende *Andromedotoxin*, welches Plugge und Zaaijer schon in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts isoliert und in vielen Ericaceen nachgewiesen haben. Es fehlt bemerkenswerterweise in den bei uns bekanntesten Alpenrosen, Rhododendron ferrugineum und hirsutum. Näheres kann in A. J. Kunkel, Handbuch der Toxikologie, Jena 1901, S. 942 oder in R. Kobert, Lehrbuch der Toxikologie, Stuttgart 1906, Bd. II, S. 1149, nachgelesen werden.

Bonn, Pharmakologisches Institut der Universität, den 28. Oktober 1926. H. Fühner.

* * *

Der interessante Aufsatz von Herrn K. Krause kann ergänzt werden durch Hinweis auf frühere Veröffentlichungen.

Nachdem schon W. Stockmann (vide J. C. Tresh, Notes on trebizonde Honey. The Pharmac. journ. and Transactions 1887/88, S. 397) Andromedotoxin für die Giftwirkung des giftigen Honigs als vermutliche Ursache angegeben hat, wurde von dem verstorbenen Groninger Professor Plugge der Beweis geliefert, daß den Nektarien von Rhododendron ponticum ein giftiger Honig entnommen werden kann. Dieser Honig vermochte schon in kleinen Dosen (40—90 mg) bei Fröschen die für Andromedotoxin typischen Vergiftungssymptomen hervor zu rufen.

Von Plugge und seinen Schülern sind viele Ericacee

[1]) C. F. Elam, Proc. Roy. Soc. 112 A, 289—296. 1926.

[2]) G. J. Taylor und C. F. Elam, a. a. O.

[3]) E. Rosbaud und E. Schmid, Zeitschr. f. Phys. 32, 97—225. 1925.

[4]) G. Sachs, Ber. Werkstoffausschuß V. D. Eisenhüttenleute Nr. 58 (1925); Mech. Technologie, S. 26, Leipzig, 1925.

auf die Anwesenheit des Andromedotoxins untersucht worden. Auch Rhododendron ponticum enthält diesen Stoff. Aus dem Honig, welchen den Nektarien entnommen wurde, konnte Andromedotoxin isoliert werden.

Die Untersuchungen PLUGGES finden sich u. a. m. Arch. f. Pharmazie 1891, S. 554.

Leiden, den 20. November 1926. L. VAN ITALLIE.

Albrecht Penck und die Meereskunde.

In den Naturwissenschaften 14, H. 21 hatte ich mich unter dem Titel „Albrecht Penck, die Meereskunde und die ‚Meteor'-Expedition" gegen nicht weniger als 3 Aufsätze von Herrn A. PENCK wenden müssen, die zahlreiche und nicht unbedeutende Irrtümer enthalten. PENCK hat in den Naturwissenschaften H. 41 eine längere Entgegnung unter dem Titel „A. Merz und die ‚Meteor'-Expedition" gebracht.

Soweit diese mit der Vorgeschichte der „Meteor"-Expedition sich befaßt, gehe ich nicht wieder darauf ein, um an meinem Teile dies nationale Unternehmen dem Streite endlich zu entziehen; PENCKS Einzelheiten können auch unmöglich die Allgemeinheit interessieren oder von ihr kontrolliert werden. Da, wie PENCK selbst wiederholt, meine Berichterstattung mit Zustimmung der Notgemeinschaft unter Benutzung von Unterlagen, die die Marineleitung zur Verfügung stellte, sowie auf Grund eigener Kenntnis und Mitwirkung bei den Vorarbeiten erfolgt war, bleibt kein Raum für irgendwelche sachlichen Unrichtigkeiten meinerseits.

Wissenschaftlich wichtig ist allein die Frage, wem das Verdienst für die großen, umwälzenden neuen Anschauungen der Meereskunde über die ozeanischen Wasserumsetzungen gebührt. Dies allein drückt A. PENCK wohl letzten Endes immer wieder die Feder in die Hand, um seinem Schüler A. MERZ die Priorität des Gedankens zu sichern. Wenn er jetzt auch W. BRENNECKES Verdienste mit anerkennt, so ist dies ein Fortschritt; aber er genügt nicht. Die ersten neuzeitlichen Beobachtungen in dieser Richtung stammen von der „Gauss"-Expedition E. v. DRYGALSKIS 1901—1903, der schon in seinen Vorberichten auf die merkwürdigen Salzgehaltsverhältnisse in der atlantischen Zwischenschicht hingewiesen hat. Was alles die „Gauss"-Expedition in dieser Hinsicht beobachtete, erkennen wir jetzt erst deutlich aus dem soeben ausgegebenen großen Buche E. v. DRYGALSKI: „Ozean und Antarktis", Berlin 1926. Dann aber kam hauptsächlich durch W. BRENNECKES Tätigkeit und Ergebnisse auf S. M. S. „Planet" und „Deutschland", also 1906 und 1911, die Frage in vollen Fluß, und BRENNECKE hat in allen wesentlichen Punkten schon 1911, dann ausführlich 1921 ungefähr gleichzeitig mit A. MERZ und G. WÜST (1922 usw.), die neuen Vorstellungen, die wir heute haben, begründet. BRENNECKE allein hat das neue, in allen Beziehungen einwandfreie und genügend zahlreiche Beobachtungsmaterial beigebracht. MERZ und WÜST haben in älteren Werken, besonders des „Challenger" und der „Gazelle", entsprechende Daten systematisch untersucht und bearbeitet; sie würden es wohl nicht unternommen haben, ihre neuen Profile zu zeichnen und zu veröffentlichen, wenn sie nicht als wichtige Stütze für die alten Daten die neuen von V. DRYGALSKI und besonders von BRENNECKE gehabt hätten.

So stellt sich für jeden Unbefangenen die geschichtliche Entwicklung dar. Es ist leider richtig, daß Berufene und Unberufene, wie W. MEINARDUS vor kurzem in Petermanns Geogr. Mitt. 1926, S. 219, ausführte, sich förmlich gedrängt haben, zu dieser ganzen Frage das Wort zu nehmen. MEINARDUS' Darlegung deckt sich genau mit meiner hier oben nur skizzierten Auffassung und ich kann den Lesern der „Naturwissenschaften", sofern sie daran Anteil nehmen, nur raten, diese Zeilen des Göttinger Gelehrten auch zu lesen. Auch E. v. DRYGALSKI hat sich ebenfalls vor wenigen Wochen, in den Sitzungsber. d. Münch. Akad. Juni 1926, gegen die „sachlich und historisch irreführende Darstellung" gewandt, die A. PENCK über die historische Entwicklung dieser unserer Kenntnisse von der Tiefenbewegung der Ozeane in der Deutschen Lit.-Zeitg. 1926, Nr. 19 gegeben hat. Dazu kommt die Stellungnahme von O. PETTERSSON, Göteborg, die in den Naturwissenschaften H. 21 von mir angeführt wurde und gleichfalls PENCKS Auffassung widerlegt. *Somit haben wir jetzt vier voneinander unabhängige Äußerungen, die alle gegen Pencks Darstellung sich richten.* Ich verzichte deshalb auf jede weitere Widerlegung im einzelnen, bis auf einen persönlichen Punkt. PENCK behauptet, ich hätte die neue Darstellung der ozeanischen Großwasserbewegungen „ohne Quellenangabe" in der zweiten Auflage meiner „Geographie des Atlantischen Ozeans" wiedergegeben. Dabei sind S. 142 alle die Namen der in Betracht kommenden Forscher, auch MERZ-WÜST genannt und auf S. 140 und 141, die die entscheidenden Profile bringen, steht unter jeder Figur deutlich „Nach W. BRENNECKE". Warum ich nicht „Nach A. MERZ" schrieb, ist wohl aus meiner obenstehenden Übersicht verständlich: aber einerlei; wie A. PENCK sagen kann, die Darstellung sei ohne Quellenangabe erfolgt, ist für mich, „um keinen schärferen Ausdruck zu gebrauchen, eine große Unbegreiflichkeit", eine ebenso große Unbegreiflichkeit wie die, wenn A. PENCK in der Dtsch. Lit.-Zeitg. 1926, S. 917 schreibt, „ich (SCHOTT) sehe in den Meeresströmungen lediglich eine unmittelbare oder mittelbare Windwirkung", während z. B. nur ein Blick in meine „Physische Meereskunde" 3. Auflage 1924, S. 141—146, ihn vom Gegenteil überzeugt hätte.

Hamburg, den 12. Oktober 1926. G. SCHOTT.

Besprechungen.

WOHLWILL, EMIL, **Galilei und sein Kampf für die kopernikanische Lehre.** Band I: Bis zur Verurteilung der kopernikanischen Lehre durch die römischen Kongregationen. Hamburg und Leipzig 1909. — Band II: Nach der Verurteilung der kopernikanischen Lehre durch das Dekret von 1616. Leipzig: Leopold Voss 1926. XXII, 435 S. und 1 Tafel. Preis geh. RM 16.—, geb. RM 18.50.

17 Jahre nach dem ersten Bande ist jetzt der zweite erschienen. Er ist aus dem Nachlaß des Verfassers herausgegeben, und das Vorwort, das eine große Zahl von Mitwirkenden aufzählt, ist unterzeichnet von Dr. med. FRIEDRICH WOHLWILL in Hamburg. Die Galileibiographie, die E. WOHLWILL zu seinem Lebenswerk machte, ist zeitlich über sein Leben hinausgewachsen. Als er den ersten Band nach 40 jährigen Vorstudien veröffentlichte, war er schon 74 Jahre alt. Als er 3 Jahre darauf starb, hinterließ er als „nicht fertig" gekennzeichnete Ausarbeitungen zu 6 Kapiteln des zweiten Bandes, ein als fertig bezeichnetes Schlußkapitel „Nach GALILEIS Tod", Aufzeichnungen zu den Prozeßakten, die er nach seinem Besuch in Rom und

dem Studium des einschlägigen Vatikanmanuskriptes 1891 niedergeschrieben und zur Veröffentlichung bestimmt hatte, und eine Abhandlung aus dem Jahre 1911 „Über den Betrug des Simon Marius aus Gunzenhausen" (der die Entdeckung der Jupitertrabanten für sich in Anspruch genommen hat). Aus diesem Material ist unter vielfacher Benutzung später bekannt gewordener Literatur dann der zweite Band zusammengestellt. Die beiden letzten Abhandlungen sind ihm samt einem Abschnitt „Sagenhafte Ergänzungen der Jugendgeschichte" als Anhänge beigefügt. Sonst aber ist alles so organisch zusammengefügt, und schließt sich dem ersten Bande so wohl an, daß dem Referenten wenigstens nur das kurze Hinweggehen über den Inhalt der „Discorsi" über die Mechanik und die Fallgesetze von 1638 als eine vermutliche Folge der Entstehung des zweiten Bandes aufgefallen ist. Und auch dieser Mangel wird dadurch zum großen Teil aufgehoben, daß der Inhalt dieser Schrift Forschungen aus der Paduaner Zeit Galileis entstammt, und diese Forschungen im ersten Bande eingehend besprochen sind.

Werfen wir einen Blick auf den Hauptinhalt beider Bände: Eine Einleitung über die Entstehung des kopernikanischen Systems und seine Aufnahme bei den Zeitgenossen dient dazu, die Heftigkeit der Kämpfe verständlich zu machen, in die sich Galilei verwickelte. Sodann lesen wir von Galileis Jugendgeschichte, seinen mathematischen Studien, seiner ersten Professur in Pisa. 1592 folgt er einem Ruf der Republik Venedig an die Universität Padua, der er 18 Jahre als Mathematiker angehört. In diese Zeit „die beste seines ganzen Lebens" fallen die Untersuchungen über die Mechanik (freier Fall, Pendelbewegung), die ihn weit über die aristotelische Physik hinausführen, und die er später in den schon erwähnten „Discorsi" zusammengefaßt hat. Auch Kopernikaner wurde er um diese Zeit, ohne jedoch als solcher hervorzutreten.

Die entscheidende Wendung bringt dann die Erfindung des Fernrohrs. Auf unbestimmte Gerüchte aus Holland hin setzt Galilei selbst aus einer Konvex- und einer Konkavlinse 1609 ein solches Instrument zusammen, und zwar rein durch probieren; die Theorie hat erst später Keppler gegeben. Er demonstriert es in Venedig und überreicht ein Exemplar der Signoria, die ihm mit Verdoppelung seines Gehaltes und lebenslänglicher Anstellung dankt. Unter den Vielen, die damals solche Instrumente besitzen, ist aber Galilei der einzige, der es mit Erfolg für astronomische Beobachtung anzuwenden versteht. Er entdeckt die Ähnlichkeit der Mond- mit der Erdoberfläche, die Phasen der Venus, die 4 Monde des Jupiter und ihre Umläufe und bemerkt die ersten, nicht richtig deutbaren Anzeichen des Saturnringes. Aus dem allem werden ihm zwingende Beweise für Kopernikus. Die wohlberechnete Benennung der Jupitermonde als „medizeischen Sterne" bringt ihm die Erfüllung seines alten Wunsches, vom Lehramt befreit am Hofe des Großherzogs von Toskana in seiner Heimatstadt sich der Forschung hingeben zu können. Und so siedelt Galilei 1610 aus der Republik Venedig, die die Forderungen der Inquisition mehr als einmal abgelehnt hat, über in eine absolute Monarchie, bei der aber die Souveränität des Fürsten Machtsprüchen aus Rom gegenüber gänzlich versagte. In der Tat hat der Großherzog ihm in den späteren Kämpfen keinen Schutz zu gewähren gewagt, der über liebenswürdige Empfehlungen hinausging.

Zunächst freilich sieht es nicht nach solchen Kämpfen aus. Gewiß begleitet die Gegnerschaft der Gelehrten der alten Schule jede seiner Schriften. Aber in Rom wird er 1611 bei einem Besuch von allen Seiten auf das höchste gefeiert. Durch Augenschein überzeugt er die Gelehrten des Collegium Romanum von der Richtigkeit seiner astronomischen Beobachtungen, wird vom Papst in Audienz empfangen und Mitglied der Academia dei Lincei. Freilich auf die kopernikanische Deutung, insbesondere auf die Bewegung der Erde, bezieht sich die Zustimmung, die man ihm ausspricht, nicht, und in den geheimen Akten der Inquisition taucht damals zuerst der Name Galileis auf.

Wes das Herz voll ist, des geht der Mund über. Ob nun Galilei über schwimmende Körper oder über die Sonnenflecken schreibt, oder eine (übrigens irrtümliche) Theorie der Ebbe und Flut vertritt, immer schreibt er kopernikanisch. Und erst leise, aber allmählich lauter taucht unter den Gründen seiner Gegner der auf: Nach der Bibel ruht die Erde. Und dann dauert es nicht mehr lange, daß bei der Inquisition direkte Denunziationen wegen ketzerischer Lehren einlaufen. Schon bevor diese eine sichtbare Wirkung ausüben, sucht sich Galilei mit dem Widerspruch zwischen dem Wortlaut der Schrift und der wissenschaftlichen Erkenntnis auseinander zu setzen. Es ist tief schmerzlich, zu beobachten, mit welchem Aufwand von Zeit und Sophistik der große Mann den aussichtslosen Versuch immer wiederholt, einen Widerspruch fortzuschaffen, der doch nun einmal da ist. Für ihn handelte es sich sichtlich um mehr, als einem offiziellen Schritt der kirchlichen Autoritäten vorzubeugen; er litt innerlich unter dem Zwiespalt. 1615 begann die Inquisition mit Nachforschungen, was Galilei über die Erdbewegung mündlich lehre, und trotz seiner persönlichen Bemühungen in Rom und, obwohl man ihn dort als Schützling des Großherzogs von Toskana nicht ohne Rücksicht behandelte, kam es im Februar 1616 zu dem Urteil der Inquisition, das die Sätze von der Bewegung der Erde um die ruhende Sonne als ketzerisch verdammte. Kardinal Bellarmin lud Galilei auf Befehl des Papstes vor sich und ermahnte ihn, die genannten Sätze aufzugeben. Galilei erklärte, sich der Weisung zu unterwerfen (26. II. 1616). Auch sonst stößt das Verbot nirgends auf offenen Widerspruch.

Eine Möglichkeit ließ das Dekret offen: Galilei durfte die Erdbewegung „als Hypothese" vertreten. Etwa nach dem Schema: Alle wissenschaftlichen Gründe sprechen für sie, aber trotzdem kann sie nach höherer Offenbarung nicht für wahr gehalten werden. Darauf sucht sich Galilei in der Folgezeit zurückzuziehen. Schlecht genug gelingt es ihm. Denn was nutzt die Beteuerung der Unterwerfung unter höhere Offenbarung in Einleitung und Schluß eines Buches, wenn der gesamte sonstige Inhalt ein mit Galileischer Überzeugungskraft geschriebener Beweis für Kopernikus ist?

Mit Hängen und Würgen erteilt zwar die kirchliche Zensur den „Dialogen über Ebbe und Flut", wie Galilei anfangs das Buch vorsichtshalber nennen will, die Druckerlaubnis. Aber zu Verdächtigungen und Intriguen finden persönliche Gegner in ihnen Stoff genug. Und als sie erst Papst Urban VIII., der als Kardinal Barberini in nahen Beziehungen zu Galileis römischen Freunden gestanden hat, eine Stelle zeigen, durch die er sich persönlich getroffen fühlen konnte, da ist das Unheil nicht mehr abzuwenden. Die Inquisition macht ihm den Prozeß, bei den Verhören fehlt nicht die Drohung mit der Folter; und trotzdem bedurfte es noch eines (nach Wohlwill) gefälschten Aktenstückes, um zu dem beabsichtigten Urteil zu gelangen. Galilei muß abschwören, und wird zu Gefängnis verurteilt. Seine „Dialoge" werden verboten (1633).

Ein Jahr darauf erscheinen sie in lateinischer Übersetzung in Holland. Aus seiner Haft heraus hat GALILEI sie ins Ausland gerettet. Und ebenso gelingt ihm dies noch mit anderen Schriften, z. B. mit den Unterredungen über Mechanik und die Fallgesetze, dem letzten und reifsten seiner physikalischen Werke. Es ist das Buch, von dem an die heutige Mechanik datiert. Aber unabgeschwächt bleibt auch 9 Jahre lang der Haß seiner Feinde und ihre Furcht. Dem 78 jährigen, erblindeten, mehr einem Leichnam ähnlichen Greis gestatten sie nur auf wenige Wochen und unter den schärfsten Beschränkungen den erbetenen Aufenthalt in Florenz. In seinem Gefängnis stirbt er 1642. Selbst über den Tod hinaus verfolgt ihn der Haß und die Dekrete von 1616 bleiben zwei Jahrhunderte lang in Kraft, bis sie endlich 1822 unter einer an den Haaren herbeigezogenen Rechtfertigung für die frühere Entscheidung aufgehoben werden.

Dies der Hauptinhalt. Daneben erfährt man aber noch vieles andere aus der Geschichte der Naturwissenschaft. Das Wirken TYCHOS und KEPPLERS, welche Stellung GALILEI zu ihnen und welche sie zu ihm einnahmen, ziehen vor unseren Augen vorüber. Wir erfahren, welchen Eindruck GILBERTS Schrift über den Magneten auf GALILEI und andere Zeitgenossen machte. Und was den Reiz bedingt, den jeder Teil des umfangreichen Werkes auf den Leser ausübt: Dies Buch hat sein Verfasser mit dem Herzen geschrieben. „Ich habe mich für ihn begeistert", heißt es in einer für die Vorrede bestimmten, jetzt von FRIEDRICH WOHLWILL mitgeteilten Notiz, „weil ich, seit ich ihn aus den Quellen kennenlernte, ihn immer ansehen mußte als einen von denen, die ihr volles Herz dem Pöbel offenbarten, und kam dazu, über ihn schreiben zu wollen, weil ich fand, daß Leute, die nie ein volles Herz gehabt, nie mit den Herrschenden in Widerspruch sich zu setzen vermocht hatten, wagten, von ihm gering zu denken."

Dabei ist das Buch keine Verhimmelung. Es stellt einen großen Menschen dar, mit seinen Irrtümern und seinen Schwächen, mit seinen gelegentlichen Verkennungen der Leistungen anderer. Auch das gehört zu der geistigen Entwicklung GALILEIS, der WOHLWILL mit feinem, physikalischem und menschlichem Verständnis nachgeht. Um so heller strahlen uns die weltgeschichtlichen Leistungen GALILEIS aus dem Buch entgegen, wenn wir sehen, daß sie nicht einem Übermenschen auf unbegreifliche Weise in den Schoß gefallen sind, sondern als Siege in einem dauernden heißen Ringen mit dem Irrtum von einem Menschen erkämpft sind.

Die Grundlage der ganzen Darstellung aber bildet eine (nach FR. WOHLWILL) „fast auf die Spitze getriebene" historische Gewissenhaftigkeit, die keine irgendwie erreichbare Quelle außer acht gelassen hat. Sie gibt dem Werk einen wissenschaftlichen Rang, durch den es in der Literatur über die Geschichte der Physik wohl einzig dasteht.

M. v. LAUE, Berlin.

LOHR, E., **Atomismus und Kontinuitätstheorie in der neuzeitlichen Physik.** Wissenschaftliche Grundfragen, herausgegeben von R. HÖNIGSWALD. Heft 6. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1926. 82 S. Preis RM 4.—.

Die Abhandlung des Brünner Physikers ist aus einem Salzburger Hochschulkursus hervorgewachsen. Nach einigen auf ZELLER und WINDELBAND gestützten Angaben über den griechischen Atomismus gibt sie einen knappen Überblick über die moderne Atomistik, einen Überblick, der mit dem 17. Jahrhundert anhebt, die Gastheorie, den chemischen Atomismus, die Elektronen- und Quantentheorie und ihre Schwierigkeiten berücksichtigt und bis zu HEISENBERGS Quantenmechanik sich erstreckt. Der 2. Hauptteil behandelt die Kontinuitätstheorie, zu der Verf. selber sich bekennt. Zustandsvariable und in Differentialgleichungen zu fassende Feldgesetze seien die kontinuitätstheoretischen Grundbegriffe, GUSTAV JAUMANN († 1924), der Schüler MACHS, habe das Programm der Kontinuitätstheorie als erster folgerecht formuliert: alle Naturbeschreibung habe zu erfolgen in linearen, partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, enthaltend möglichst wenige Zustandsvariable; Materie sei zurückzuführen auf relativ beständige Feldzustände, Geschwindigkeit sei aufzufassen als bloße Zustandsvariable, Materialkonstanten seien darzustellen als Funktionen aus Zustandsvariablen und universellen Konstanten. Im einzelnen habe JAUMANN in den MAXWELLschen Gleichungen die Dielektrizitätskonstante ersetzt durch eine Funktion neuer Zustandsvariablen und habe so auch Kathoden- und Kanalstrahlen als Wellenstrahlen, und zwar als Longitudinalwellen darstellen können. Diese theoretischen Resultate habe er experimentell verifiziert durch Ablenkungsversuche, die mit Unrecht bestritten würden. Durch die Einfügung von Tensoren ließe sich mit den JAUMANNschen Gleichungen weiters auch Zeemaneffekt, Dispersion u. a. m. beherrschen. Man habe zwar JAUMANN die Häufung neuer und willkürlicher Zustandsvariabeln vorgeworfen, doch sei dieser Vorwurf im Hinblick auf das höchst mannigfaltige und doch einheitlich behandelte Gebiet unberechtigt. Prinzipiell befriedige die Kontinuitätstheorie besser als der Atomismus, doch sei sie, und zwar nur aus Mangel an Arbeitskräften, noch nicht ausgebaut; denn die überwiegende Mehrheit der Physiker wende sich, verführt durch die erzielten Erfolge, heute dem Atomismus zu.

In ihrer Ablehnung eines grobschlächtigen Substanzbegriffes, in ihrer Polemik gegen die Überschätzung mechanischer Modelle zeigt sich die Untersuchung beherrscht von der Betrachtungsweise MACHS. Freilich ergibt sich die Frage, ob eine wirklich ausgeführte Kontinuitätstheorie sich schließlich vom Atomismus nicht vielleicht weniger unterscheiden würde als Verf. annimmt. Würde doch auch sie bei der Behandlung von Erscheinungen „atomarer" Größenordnung zu stetigen Funktionen mit einer diskreten Zahl sehr steiler Maxima oder zu gleichwertigen Mitteln greifen müssen. (Vgl. den Verf. selber S. 70 über α-Szintillationen und S. 74 f. über die diskrete Zahl der Elemente). Was schließlich die vom Verf. in den Vordergrund gerückte Spezialgestalt der Kontinuitätstheorie, nämlich die JAUMANNsche anlangt — den MIEschen Entwurf behandelt Verf. S. 79 als eine Halbschlächtigkeit — so wird eine vorwiegend für Philosophen bestimmte volkstümliche Darstellung etwa eine neuerliche Überprüfung anregen, aber weder eine Entscheidung herbeiführen noch physikalische Bedenken entkräften können. Den Intentionen des Verf.s entsprechend seien deshalb hier die Physiker auf JAUMANNS Physik der kontinuierlichen Medien, Wiener Denkschr. 95. 1918 und das Verzeichnis seiner Publikationen Phys. Zeitschr. 26, 189. 1925, hingewiesen.

E. ZILSEL, Wien.

Herausgeber und verantwortlicher Schriftleiter: Dr.-Ing. e. h. DR. ARNOLD BERLINER, Berlin W 9.
Verlag von Julius Springer in Berlin W 9. — Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

*Hierzu eine Beilage vom Verlag **Julius Springer** in Wien*

Verlag von Julius Springer in Berlin W 9 / Verantwortlich für den Anzeigenteil C. Lemke, Berlin W / Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig