Herrn Director Mund
als ein Zeichen der Hochachtung
und Ergebenheit
Elbing am 20sten Febr. 1830.
der Verfasser.

System der Erzeugung, Verwandlung und Theilung geometrischer Figuren, nach wissenschaftl. Principien ohne Benutzung compilatorischer Hülfsmittel entworfen und ausgeführt etc. von M. G. Graber. [illegible]
1828. 8. 1 2/3 rh.
Rec. Hall. Lit. Ztg. Januar 1830. No 164. S. 125.

Geometrische Aufgaben

von

August Richter.

Erster Theil.

Lawson's Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck.

Halberstadt,
bei Carl Brüggemann.

1829.

Herrn

Friedrich Pax,

Lehrer am Domgymnasium

zu

Magdeburg,

widmet diese Blätter

als ein, wenn auch unvollkommenes, Denkmal

der Freundschaft

der Verfasser.

Vorrede.

„In keiner Wissenschaft sind eigene Uebungen mehr nothwendig
„als in der Mathematik, und wenn der eigene Fleiss des Zuhörers
„nicht hinzukommt, so mag derselbe immer die Hoffnung aufgeben,
„es in der Wissenschaft auch nur bis zum Mittelmässigen zu bringen.“
Karsten, Anfangsgr. d. math. Wiss., Bd. I, Vorr.

Die Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, welche das vorliegende Werkchen behandelt, sind dem grössern Theile nach aus einem von John Lawson 1773 zu Rochester herausgegebenen Verzeichnisse von Aufgaben über die Construction des Dreiecks genommen. Der vollständige Titel desselben ist: *„A Synopsis of all the Data for the Construction of Triangles, from which Geometrical Solutions have hitherto been in Print. With References to the Authors, where those Solutions are to be found. By John Lawson, B. D. Rector of Swanscombe, in Kent.“* Diese Sammlung besteht aus zwei Abtheilungen; die erste enthält 161 Aufgaben über das Dreieck im Allgemeinen, die zweite 94 Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck insbesondere. Lawson giebt aber von keiner Aufgabe eine Auflösung, auch nicht eine Andeutung der Construction, sondern nur Citate einiger (meist englischen) Werke, in welchen sich die Auflösungen befinden. In der zweiten Abtheilung hat er jedoch nur folgende 11 Aufgaben mit den nebenstehenden Citaten versehen:

Lawson

Nro. 8. *Universal Magazine, July* 1767. — *Ladies Diary,* 1772. *qu.* 633 *Cor.* — *Miscellanea Scientifica Curiosa. Lond.* 1766. *pag.* 196. *Cor. II.*

- 18. *Turner's Mathematical Exercises. Lond.* 1750. *pr.* 37.

- 26. *D'Omerique, Analysis Geom. Gadibus,* 1699. *L. III. pr.* 37. — *Vieta, Geo. Eff. pr.* 18. — *Oughtred's Clavis. ch.* 19. *pr.* 25. — *Herigon (Curs. Math. Paris.* 1644. *V Tomi), Geometriae planae pr.* 9. — *Schooten's Exercitationes Math. Lugd. Bat.* 1657. *pr.* 38.

- 75. *Oughtred's Clavis, ch.* 19. *pr.* 11. — *Ronayne's Algebra. Lond.* 1727. *B. II. ch.* 2. *pr.* 1. — *Ghetaldi Var. Probl. Collectio. Venetiis,* 1607. *pr.* 19. — *Ghetaldus, de Resolutione et Compositione Math. Romae,* 1640. *L. III. pr.* 2. — *Renaldinus, de Res. et Comp. Math. Patavii,* 1668. *pag.* 518.

- 76. *Oughtred's Clavis ch.* 19. *pr.* 18. — *D'Omerique, Anal. geom. L. III. pr.* 24. — *Renaldinus, de Res. et Comp. Math. pag.* 412. — *Ghetaldus, var. probl.* 18. — *Ghetaldus, de Res. et Comp. L. III. pr.* 1. — *Foster's Miscellanies or Math. Lugubrations. Lond.* 1659. *pr.* 18.

- 89. *Simpson's Algebra. Lond.* 1767. *pr.* 36. — *Simpson's Select. Exercises. Lond.* 1752. *pr.* 45.

- 90. *Wolfius's Algebra (translated by Hanna. Lond.* 1739) *pr.* 114. — *Simpson's Select Exerc. pr.* 46. — *Vieta, first Appendix to Apollonius Gallus, pr.* 7.

- 91. *Simpson's Algebra, pr.* 39.

- 92. *Gentleman's Diary, qu.* 266.

- 93. *Ladies Diary, qu.* 633.

- 94. *Ladies Diary, qu.* 648.

Für den grössten Theil der übrigen Aufgaben, welche ohne Citate gelassen sind, könne (sagt Lawson) die Construction aus einem gewissen Werke abgeleitet werden, das er nicht nennen wolle, damit sich der junge Geometer an diesen Aufgaben üben möge. Vielleicht meint Lawson damit die „*Sectio determinata*" des Apollonius, wenigstens lassen sich mehrere jener Aufgaben darauf zurückführen. Diese Schrift stellte Snellius 1608 in seinem „*Apollonius Batavus*" wieder her. Lawson selbst lieferte davon 1772 eine englische Uebersetzung, und Wales begleitete dieselbe mit einer neuen Wiederherstellung. Rob. Simson's Wiederherstellung erschien erst 1776 unter seinen nachgelassenen Werken.

Die Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, welche Lawson aufgenommen hat, sind nach seiner Bemerkung solche, welche bisher noch nicht allgemein gelöst worden waren. Es sind jedoch einige darunter, welche sich ohne die geringste Schwierigkeit allgemein lösen lassen; bei diesen habe ich entweder die allgemeine Auflösung hinzugefügt oder wenigstens bemerkt, dass die Analysis vom rechten Winkel unabhängig sey.

Besonders anziehend ist Lawson's Sammlung durch die Bezeichnung der einzelnen Stücke eines Dreiecks mit Buchstaben. Ob er selbst auf diese Erfindung gekommen sey, kann ich nicht entscheiden; es scheint aber aus seiner einleitenden Bemerkung hervorzugehen. Die Zeichen, deren er sich bedient, sind folgende:

H bezeichnet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

V - den Winkel in der Spitze (irgend eines Dreiecks).

B - die Basis oder die Gegenseite des Winkels *V*.

A und a	bezeichnet die Winkel an der Basis.	
P	-	den Perpendikel aus V nach B, oder die Höhe des Dreiecks
S und s	-	die Seiten, welche V einschliessen, S die grössere *), s die kleinere.
m und n	-	die Segmente der B, welche P bildet, m das grössere *) (an S liegende).
Ar.	-	den Inhalt (*Area*).
Per.	-	den Umfang (*Perimeter*).
L	-	die Linie aus V nach B, welche V halbirt.
λ	-	eine Linie aus V nach B, welche die B nach einem gegebenen Verhältnisse theilt.
l	-	eine andere näher bezeichnete Linie.
R	-	den Radius des eingeschriebenen Kreises.
$\odot$	-	Kreis.
$\square$	-	Quadrat.

Die beiden letzten Zeichen gebraucht Lawson, wenn gegeben ist der Radius des in das Dreieck eingeschriebenen Kreises oder die Seite des eingeschriebenen Quadrats; sie sind aber nicht zweckmässig gewählt, weil sie nicht die gegebenen Stücke selbst, sondern nur die Wörter Kreis und Quadrat bezeichnen. Auch das Zeichen R wird dem deutschen Mathematiker

---

*) Es ist jedoch zu bemerken, dass nicht immer unter S die grössere Seite, und unter m der grössere Abschnitt zu verstehen sey, wofern nicht irgend ein Datum dies näher bestimmt. Die Aufgabe $V, S:m, n$ z. B. ist ganz einerlei mit $V, s:n, m$. Wäre aber gegeben $V, S:m, m-n$, so hat jetzt S seine bestimmte Bedeutung durch das Datum $m-n$, und eine andere Aufgabe würde seyn $V, s:n, m-n$.

nicht zusagen, weil er dieses für den rechten Winkel zu brauchen gewohnt ist. Ich würde vorschlagen

r für den Radius des umschriebenen Kreises,
ϱ - - - - eingeschriebenen -
q - die Seite des eingeschriebenen Quadrats.

Ein schätzbares Verdienst um die Erleichterung des Unterrichts würde sich Derjenige erwerben, welcher für möglichst viele Bestimmungsstücke des Dreiecks eine systematische Zeichensprache aufzustellen und diese auch für Aufgaben anderer Art brauchbar zu machen versuchte.

Die Aufgaben über das Dreieck, mit denen sich das vorliegende Werkchen beschäftigt, zerfallen in zwei Classen. Die erste enthält bestimmte Aufgaben, bei denen zwei von einander unabhängige Data das gesuchte Dreieck der Gattung und Grösse nach bestimmen; die andere dagegen enthält unbestimmte Aufgaben, bei denen ein gegebenes Verhältniss das gesuchte Dreieck nur der Gattung oder der Form nach bestimmt oder ein Dreieck giebt, das dem gesuchten ähnlich ist. Lawson setzt deshalb zu allen Aufgaben der zweiten Art hinzu: *any other datum* oder *any other* (und noch ein anderes Datum). Die Aufgaben dieser Classe kommen sämmtlich darauf zurück:

„eine der Lage und Grösse nach gegebene gerade „Linie in Segmente zu theilen, deren Quadrate „oder Rechtecke (einzeln oder in verschiedenen „Verbindungen) ein gegebenes Verhältniss zu „einander haben."

Die hieraus entstehenden Probleme sind gewissermaassen eine Art derjenigen Aufgaben, welche Apollonius in seiner „*Sectio determinata*" behandelt. Weil nun mehrere dieser Aufgaben über die Theilung der Linie schon für sich einen bedeutenden Umfang einnehmen, so habe ich sie von den Aufgaben über das Dreieck abgesondert und gleichsam als *Lemmata* voraufgeschickt. Dem jüngen Mathematiker, welcher etwa diese Sammlung durchzustudiren gedenkt, rathe ich jedoch nicht, mit diesen Aufgaben anzufangen; vielmehr wird es zweckmässiger seyn, vorher die Aufgaben der ersten Classe durchzugehen. Ich empfehle ihm aber dringend, vor dem Studium einer ausgewählten Aufgabe zu allererst einen eigenen Versuch in der Auflösung derselben zu machen. Es kann nicht fehlen, dass er oft die Construction selbst findet, besonders wenn er sich mit den Lemmen und den auf Seite 7, 8 in Zeichen ausgedrückten Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks bekannt gemacht hat. Vielleicht gelingt es ihm auch, für manche Aufgabe eine Construction zu erfinden, die einfacher und zierlicher ist als die hier gegebene. Denn keine der in dieser Sammlung befindlichen Auflösungen ist aus irgend einem Werke entlehnt, und es könnte daher wohl seyn, dass von so mancher Aufgabe eine bessere Construction sich angeben lässt und anderwärts schon gegeben ist. Die Aufgabe $m-P, n$ z. B. lässt sich einfacher so lösen (die Figur wird sich aus den folgenden Angaben leicht herstellen lassen): „Auf den „Schenkeln eines rechten W. nimm $EF=n$ und EG „$=m-P$, errichte auf EF auf der dem Schenkel EG „entgegengesetzten Seite die senkrechte $FH=EF$, ver-„binde GH und beschreibe über dieser Linie einen Halb-„kreis, welcher die verlängerte EF auf der Seite des „Punktes E in D schneide; ziehe DH, DG und verlän-„gere die Linien HF und DG, bis sie sich im Punkte „K treffen: so ist $\triangle DHK$ das gesuchte.“ — Noch bitte ich, den zweiten Theil des Beweises in *Lemma* 18 folgendermaassen zu berichtigen:

„2) Ist $\square BF.CG$ kleiner als das Q. der hal-„ben BC (Fig. 17), so schneidet der Halbkreis „die BC in zwei Punkten D und d. Zieht man „nun nach irgend einem Punkte R in einer Ver-„längerung der BC, z. B. in der nach B hin lie-„genden, die geraden Linien FR und GR, so ist „wegen des rechten W. bei B der W. FRB und „um so mehr der W. FRG ein spitzer. Dieser „W. steht aber auf dem Durchm. FG, mithin „liegt der P. R und deshalb beide Verlängerun-„gen der BC ausserhalb des Kreises. Ferner „verbinde GB und FC, so sind die W. FBG und „FCG ebenfalls spitze, weil jeder ein Theil ei-„nes rechten ist. Sie stehen aber auf dem „Durchm. FG, folglich liegen auch die Punkte „B und C ausserhalb des Kreises u. s. w.“

Durch diese Verbesserung wird der Beweis unabhängig vom 2ten Theile des 17ten *Lemma*, woselbst bewiesen worden ist, dass die Mitte der BC innerhalb des Kreises liege.

Mein Zweck bei der Ausarbeitung dieser Aufgaben war zunächst, die Hülfsmittel zum Privatstudium der Schüler zu vermehren. Jeder Schulunterricht muss, wenn er fruchtbar werden soll, von Seiten des Schülers durch Privatfleiss unterstützt werden. Dieser muss sich nun zwar zunächst in Wiederholung des in der Classe Vorgetragenen und in Vorbereitung auf die kommende Lection zeigen; ausserdem aber soll die Schule auch recht zeitig den Schüler zu einer selbstgewählten zweckmässigen Beschäftigung hinführen, damit er das Gelernte anwenden lerne und den Grund zu einer selbstständigen Forschung lege. Mit grosser Weisheit hat daher Ein Hohes Ministerium bereits für die alten Sprachen Privatlectüre angeordnet; und das unverkennbare Bestreben der neuern Zeit, fürs erste wenigstens ein Gleichgewicht unter den eingeführten Lehrgegenständen herzustellen, lässt hoffen, dass jene Verfügungen auch bald die Muttersprache und einzelne Zweige der Mathematik und der Naturwissenschaften berücksichtigen werden.

Elbing, im Juli 1829.

Der Verfasser.

Uebersicht der Aufgaben.

1. Theilung der Linie.

Die der Lage und Grösse nach gegebene Linie *BC* (Fig. 21.)
werde bezeichnet mit . . . . H
und ihre Abschnitte *CD* mit . . . . m
und . . . . *BD* mit . . . . n

	Man soll die Abschnitte so bestimmen, dass	Nummer der aufgelösten Aufgabe.
1	$m^2 = 2n^2$	Aufgabe I.
2	$m^2 - 2n^2$ gleich einer gegebenen Fläche	- II.
3	$Hm : n^2$ gleich einem gegeb. Verhältnisse	- III.
4	$Hm : H^2 - m^2$	- IV.
5	$Hm : H^2 + m^2$	- V.
6	$Hm : Hn + n^2$	- VI.
7	$Hm : mn - n^2$	- VII.
8	$Hm : n^2 - mn$	- VIII.
9	$H^2 + Hm : m^2$	- IX.
10	$H^2 + Hm : mn$	- X.
11	$H^2 + Hm : Hm + mn$	- XI.
12	$Hm + mn : n^2 - mn$	- XI. Anm. 2.
13	$Hm + mn : Hn + m^2$	- XI. Anm. 3.
14	$H^2 + Hm : n^2 - mn$	- XII.
15	$Hn + m^2 : n^2 - mn$	- XII. Anm. 2.
16	$Hm + n^2 : m^2 + 2n^2$	- XII. Anm. 3.
17	$H^2 + Hm : mn - n^2$	- XIII.
18	$Hm + n^2 : mn - n^2$	- XIII. Anm 1.
19	$m^2 + 2n^2 : mn - n^2$	- XIII. Anm. 3.
20	$Hm + n^2 : m^2 + 2n^2$	- XIII. Anm. 5.
21	$H^2 + 2Hm : mn$	- XIV.
22	$H^2 + Hm + m^2 : mn$	- XIV. Anm. 2.
23	$H^2 + 2m^2 : mn$	- XIV. Anm. 4.

	Man soll die Abschnitte so bestimmen, dass	Nummer der aufgelösten Aufgabe.
24	$H^2 + Hm + m^2 : H^2 + 2m^2$	Aufgabe XIV. Anm. 6.
25	$2H^2 + Hm : Hm + 2m^2$	- XV.
26	$H^2 + Hm + m^2 : Hm + 2m^2$	- XV. Anm. 2.
27	$H^2 - m^2 : Hm + 2m^2$	- XV. Anm. 3.
28	$2H^2 + m^2 : Hn$	- XVI.
29	$H^2 + Hm + m^2 : Hn$	- XVI. Anm. 1.
30	$2Hm + m^2 : Hn$	- XVI. Anm. 2.
31	$H^2 + Hm + m^2 : 2Hm + m^2$	- XVI. Anm. 3.
32	$m^2 + n^2 : mn$	- XVII.
33	$m^2 - n^2 : mn$	- XVIII.
34	$m^2 - n^2 : Hn + n^2$	- XIX.
35	$m^2 - n^2 : Hm + n^2$	- XIX. Anm. 2.
36	$Hm + n^2 : Hn + n^2$	- XIX. Anm. 3.
37	$m^2 - n^2 : Hm + m^2$	- XX.
38	$Hm + n^2 : Hn + n^2$	- XX. Anm. 2.

2. Rechtwinkliges Dreieck.

In dem $\triangle ABC$ (Fig. 14.) sey der Winkel A ein rechter, und AD stehe senkrecht auf BC. Man bezeichne

die Hypotenuse BC mit . . . . H
die Höhe AD mit . . . . P
die eine Kathete AC mit . . . . S
die andere Kathete AB mit . . . . s
den an AC liegenden Abschnitt CD mit . . m
den an AB liegenden Abschnitt BD mit . . n
den Inhalt des Dreiecks ABC mit . . . . . $\triangle$
den Umfang des Dreiecks ABC mit . . . . U.

	Lawson	Das $\triangle$ ABC zu construiren, wenn gegeben ist	Nummer der aufgelösten Aufgabe.
1	1	$H,\ HP + P^2$	Aufgabe 19.
2	2	$H,\ P^2 - n^2$	- 42.
3	.	$H,\ P : m - n$	- 12.
4	3	$H,\ m^2 - P^2$	- 20.
5	4	$H,\ S + m$	- 21.
6	4	$H,\ S - m$	- 41.
7	.	$H,\ S + n$	- 41. Anm. 2.
8	.	$H,\ S - n$	- 21. Anm.
9	.	$H,\ S^2 - s^2$	- 1. Anm. 1.

	Lawson	Das $\triangle$ *ABC* zu construiren, wenn gegeben ist	Nummer der aufgelösten Aufgabe.	
10	5	$H,\ S^2 + m^2$	Aufgabe 22.	
11	6	$H,\ S^2 + n^2$	- 18.	
12	.	$H,\ S^2 - n^2$	- 22.	Anm. 2.
13	7	$H,\ m^2 - n^2$	- 1.	—
14	8	H, Linie halbirend einen W. an H	- 57.	
15	9	$H^2 : Ss$	- 92.	
16	10	$H^2 : S^2 + m^2$	- 22.	Anm. 1.
17	16	$HP : S^2 + n^2$	- 63.	
18	11	$H + P,\ HP$	- 39.	
19	12	$H + P,\ HP + P^2$	- 6.	
20	.	$H + P,\ Ss + P^2$	- 6.	Anm. 2.
21	.	$H + P,\ P + m$	- 27.	Anm.
22	.	$H + P,\ Ss$	- 39.	Anm. 2.
23	13	$H + P,\ S^2 + n^2$	- 4.	
24	.	$H + P,\ n$	- 27.	Anm.
25	14	$H + P,\ m^2 + n^2$	- 55.	
26	.	$\frac{1}{2}H + P,\ S + s$	- 9.	
27	.	$\frac{1}{2}H + P,\ S - s$	- 11.	
28	.	$\frac{1}{2}H + P,\ m - n$	- 9.	
29	.	$H - P,\ P - n$	- 43.	Anm.
30	.	$H - P,\ m - P$	- 28.	Anm.
31	.	$H - P,\ S^2 + n^2$	- 4.	Anm.
32	.	$H - P,\ m$	- 43.	Anm.
33	.	$H - P,\ n$	- 28.	Anm.
34	.	$\frac{1}{2}H - P,\ S + s$	- 10.	
35	18	$\frac{1}{2}H - P,\ S - s$	- 9.	
36	.	$\frac{1}{2}H - P,\ m - n$	- 9.	
37	.	$H^2 + P^2,\ m$	- 23.	Anm. 2.
38	15	$HP + P^2,\ P$	- 5.	
39	17	$HP + P^2 : S^2 + n^2$	- 93.	
40	26	$HS,\ s$	- 34.	
41	27	$HS : s^2$	- 34.	Anm.
42	.	$H + S,\ H + m$	- 46.	Anm.
43	.	$H + S,\ S + m$	- 14.	Anm.
44	.	$H + S,\ S - m$	- 46.	Anm.
45	.	$H + S,\ S + n$	- 24.	Anm.
46	19	$H + S,\ m$	- 24.	
47	20	$H + S,\ n$	- 14.	
48	.	$H - S,\ H + m$	- 45.	Anm.
49	.	$H - S,\ S + m$	- 45.	
50	.	$H - S,\ S - m$	- 13.	Anm.

	Lawson	Das $\triangle$ *ABC* zu construiren, wenn gegeben ist	Nummer der aufgelösten Aufgabe.
51	.	$H - S,\ S - n$	Aufgabe 25. Anm.
52	19	$H - S,\ m$	- 25.
53	.	$H - S,\ n$	- 13.
54	21	$H^2 + S^2 : P^2$	- 71.
55	22	$H^2 + S^2 : S^2 + m^2$	- 94.
56	23	$H^2 + S^2,\ m$	- 23.
57	25	$H^2 + S^2 : m^2$	- 23. Anm. 1.; Aufgabe 70.
58	24	$H^2 + S^2,\ n$	- 32.
59	31	$H + S + m,\ H^2 + m^2$	- 56.
60	28	$H + S + m,\ H^2 + S^2 + m^2$	- 52.
61	30	$H + S + m,\ HS + mS$	- 48.
62	29	$H + S + m,\ HS + mS + S^2$	- 51.
63	32	$H^2 + S + m^2 : HS + mS$	- 64.
64	33	$H^2 + S^2 + m^2 : HS + mS + S^2$	- 95.
65	34	$H^2 + S^2 + m^2,\ H + m$	- 49.
66	36	$H^2 + S^2 + m^2 : H^2 + 2m^2$	- 80.
67	35	$H^2 + S^2 + m^2 : H^2 - m^2$	- 89.
68	37	$H^2 + S^2 + m^2 : P^2$	- 78.
69	38	$H^2 + S^2 + m^2,\ S$	- 50.
70	39	$H^2 + S^2 + m^2 : s^2$	- 83.
71	42	$H^2 + S^2 + m^2 : Sn$	- 96.
72	41	$H^2 + S^2 + m^2 : S^2 + 2m^2$	- 81.
73	40	$H^2 + S^2 + m^2 : 2S^2 + m^2$	- 85.
74	43	$H^2 + S^2 + m^2,\ n$	- 35.
75	44	$HS + mS + S^2,\ H + m$	- 54.
76	45	$HS + mS + S^2,\ S$	- 53.
77	46	$H + m,\ H^2 - m^2$	- 3.
78	47	$H + m,\ P$	- 40.
79	.	$H + m,\ S$	- 47.
80	48	$H + m,\ s$	- 26.
81	.	$H + m,\ S + m$	- 45. Anm.
82	.	$H + m,\ S - m$	- 46.
83	50	$H^2 + m^2 : S^2$	- 66.
84	49	$H^2 + 2m^2 : P^2$	- 79.
85	50	$H^2 - m^2 : S^2$	- 65.
86	51	$H^2 - m^2 : S^2 + 2m^2$	- 82.
87	52	$H^2 - m^2,\ n$	- 3. Anm. 1.
88	.	$P,\ S^2 + n^2$	- 18. Anm. 2.
89	53	$P,\ m^2 + n^2$	- 37.
90	54	$P^2 : m^2 + n^2$	- 86.

	Lawson	Das $\triangle$ *ABC* zu construiren, wenn gegeben ist	Nummer der aufgelösten Aufgabe.	
91	54	$P^2 : m^2 - n^2$	Aufgabe 87.	
92	60	$P^2 + s^2 : m^2 - P^2$	- 72.	
93	61	$P^2 + s^2 : S^2 + n^2$	- 73.	
94	.	$P + m,\ P + n$	- 15.	Anm.
95	55	$P + m,\ n$	- 27.	
96	58	$P + m,\ m - n$	- 15.	
97	.	$m - P,\ P - n$	- 16.	
98	57	$m - P,\ n$	- 28.	
99	.	$m - P,\ m - n$	- 16.	Anm.
100	59	$P + n,\ m - n$	- 15.	Anm.
101	56	$P - n,\ m$	- 43.	
102	.	$P - n,\ m - n$	- 16.	Anm.
103	62	$m^2 - P^2,\ P^2 - n^2$	- 17.	
104	.	$m^2 - P^2 : S^2$	- 69.	Anm.
105	64	$m^2 - P^2 : s^2$	- 69.	
106	.	$m^2 - P^2,\ S^2 - s^2$	- 17.	Anm.
107	65	$m^2 - P^2 : S^2 + n^2$	- 74.	
108	68	$m^2 - P^2,\ n$	- 29.	
109	70	$m^2 - P^2 : n^2$	- 29.	Anm.
110	72	$m^2 - P^2,\ m - n$	- 8.	
111	.	$m^2 - P^2,\ m^2 - n^2$	- 17.	Anm.
112	63	$P^2 - n^2 : S^2$	- 68.	
113	.	$P^2 - n^2 : s^2$	- 68.	Anm.
114	.	$P^2 - n^2,\ S^2 - s^2$	- 17.	Anm.
115	66	$P^2 - n^2 : S^2 + n^2$	- 75.	
116	67	$P^2 - n^2,\ m$	- 44.	
117	69	$P^2 - n^2 : m^2$	- 44.	Anm. 2.
118	71	$P^2 - n^2,\ m - n$	- 7.	
119	.	$P^2 - n^2,\ m^2 - n^2$	- 17.	Anm.
120	73	$P^2 - n^2 : m^2 + 2n^2$	- 76.	
121	74	$Pm - Pn : S^2 + n^2$	- 97.	
122	75	$S,\ n$	- 33.	
123	76	$S,\ m - n$	- 30.	
124	76	$s,\ m - n$	- 30.	Anm.
125	78	$S^2 : s^2 + n^2$	- 67.	
126	79	$S^2 : 2s^2 + n^2$	- 84.	
127	77	$S^2 : n^2$	- 33.	Anm.;
			Aufg 70.	Anm. 2.
128	.	$S + m,\ S - n$	Aufgabe 21.	Anm.
129	80	$S + m,\ n$	- 14.	Anm.
130	.	$S - m,\ S + n$	- 42.	Anm. 2.

	Lawson	Das △ *ABC* zu construiren, wenn gegeben ist	Nummer der aufgelösten Aufgabe.	
131	.	$S - m$, n	Aufgabe 13.	Anm.
132	.	$S + n$, m	- 24.	Anm.
133	.	$S - n$, m	- 25.	Anm.
134	81	$S^2 + m^2$, n	- 31.	
135	83	$S^2 + n^2 : s^2 + n^2$	- 91.	
136	82	$S^2 + n^2$, m	- 36.	
137	84	$S^2 + n^2$, $m - n$	- 38.	
138	85	$S^2 + n^2 : m^2 - n^2$	- 90.	
139	86	$S^2 + n^2 : m^2 + 2n^2$	- 77.	
140	.	$S^2 - n^2$, $s^2 + n^2$	- 22.	Anm. 2.
141	87	$s^2 + n^2 : m^2 - n^2$	- 88.	
142	88	$m - n$, $m^2 - n^2$	- 2.	
143	89	△, Seiten in arithmetischer Proportion	- 58.	
144	.	*U*, Seiten in arithmetischer Proportion	- 58.	Anm. 2.
145	90	△, Seiten in geometrischer Proportion	- 59.	
146	91	*U*, Seiten in geometrischer Proportion	- 59.	Anm.
147	92	Linie, welche einen Winkel an *H* halbirt; und Linie aus dem rechten Winkel, welche die vorige halbirt	- 60.	
148	93	*H* und ein Abschnitt von *S* zwischen dem Scheitel des rechten W. und dem auf *H* in ihrer Mitte errichteten Perpendikel	- 61.	
149	94	1, eine Kathete; 2, eine ihr parallele Linie zwischen der Hypotenuse und der andern Kathete; 3, das Rechteck aus *H* und der Linie, welche aus dem an der gegebenen Kathete liegenden spitzen Winkel nach dem in der andern Kathete liegenden Endpunkte der Parallele gezogen wird	- 62.	

Einige Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks, welche bei der Auflösung der Aufgaben gebraucht werden.

1.	$H : S = S : m$	
2.	$H : s = s : n$	
3.	$m : P = P : n$	
4.	$S^2 = Hm$	folgt aus 1.
5.	$s^2 = Hn$	- - 2.
6.	$P^2 = mn$	- - 3.
7.	$H^2 : S^2 = H : m$	- - 4.
8.	$S^2 : S^2 = m : n$	- - 4. 5.
9.	$m^2 : P^2 = m : n$	- - 6.
10.	$H^2 : S^2 = S^2 : m^2$	- - 1.
11.	$m^2 : P^2 = P^2 : n^2$	- - 3.
12.	$H + S : S + m = H : S = S : m$	- - 1.
13.	$H - S : S - m = H : S = S : m$	- - 1.
14.	$H + S : S + m = H - S : S - m$	- - 12. 13.
15.	$m + P : P + n = m : P = P : n$	- - 3.
16.	$m - P : P - n = m : P = P : n$	- - 3.
17.	$H^2 + S^2 : S^2 + m^2 = H^2 : S^2 = H : m$	- - 10. 7.
18.	$H^2 + S^2 : H^2 - m^2 = H^2 : s^2 = H : n$	- - 17. *convert.*
19.	$H^2 - m^2 : S^2 + m^2 = s^2 : S^2 = n : m$	- - 17. *divid.*
20.	$m^2 - P^2 : P^2 - n^2 = m^2 : P^2 = m : n$	- - 11. 9.
21.	$(H + S)\,m = (S + m)\,S$	- - 12.
22.	$(H - S)\,m = (S - m)\,S$	- - 13.
23.	$(H + S)\,S = (S + m)\,H$	- - 12.
24.	$(H - S)\,S = (S - m)\,H$	- - 13.
25.	$(H + S)(S - m) = (S + m)(H - S)$	- - 14.
26.	$(m + P)\,P = (P + n)\,m$	- - 15.
27.	$(m - P)\,P = (P - n)\,m$	- - 16.
28.	$(m + P)\,n = (P + n)\,P$	- - 15.
29.	$(m - P)\,n = (P - n)\,P$	- - 16.
30.	$HP = Ss$	*Lemma* 14. Zus.
31.	$H^2 : Ss = H : P$	folgt aus 30.
32.	$S^2 + n^2 = s^2 + m^2 = H^2 - P^2 = (H + P)(H - P)$	*Lemma* 15.
33.	$H^2 + m^2 = 2S^2 + n^2$	folgt aus 32.
34.	$H^2 + S^2 + m^2 = 3S^2 + n^2$	- - 33.
35.	$(m - n)^2 = H^2 - 4P^2 = (H + 2P)(H - 2P)$	*Lemma* 16.
36.	$(S + s)^2 = H(H + 2P)$	siehe Aufgabe 9.

Denn $(S + s)^2 = S^2 + s^2 + 2Ss$ (*Lemma* 1.)

$= H^2 + 2HP$ (*Lemma* 14.)

$= H(H + 2P)$.

37. $(S-s)^2 = H(H-2P)$ . . . . siehe Aufgabe 9.

Denn $(S-s)^2 = S^2 + s^2 - 2Ss$ (*Lemma* 2.)

$= H^2 - 2HP$ (*Lemma* 14)

$= H(H-2P)$.

Zieht man (Fig. 14) AH nach der Mitte der Hypotenuse BC und fällt AD senkrecht auf BC: so ist

38. $AH = BH = CH$.

39. $AD \overline{\lessgtr} \frac{1}{2} BC$

40. W. BAD = W. C

W. CAD = W. B.

Lemmata.

1. **Lehrsatz.** (Eucl. 2, 4). Fig. 1.

Das Quadrat der Summe zweier Linien ist gleich den Quadraten beider Linien nebst dem doppelten Rechtecke aus beiden.

Wenn $AB = AC + CB$,
so ist $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\square ACB$.

Zusatz. Das Quadrat der ganzen Linie ist viermal so gross als das Quadrat der halben.

Wenn $AC = CB$, so ist $AB^2 = 4AC^2$.

2. **Lehrsatz.** (Eucl. 2, 7). Fig. 1.

Das Quadrat der Differenz zweier Linien ist gleich den Quadraten beider Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden.

Wenn $AC = AB - BC$,
so ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\square ABC$.

3. **Lehrsatz.** (Eucl. 2, 5). Fig. 2.

Wenn man eine gerade Linie halbirt und einen beliebigen Punkt in derselben nimmt: so ist das Quadrat der halben Linie gleich dem Rechtecke aus den ungleichen Abschnitten nebst dem Quadrate des Segmentes zwischen den Theilungspunkten.

Die Linie AB sei in C halbirt und in D beliebig getheilt: so ist $AC^2 = \square ADB + CD^2$.

Zusatz 1. (Pappi *Lemma* 13). Weil $AC^2 = \square ADB + CD^2$, so ist $AC^2 > \square ADB$. Das Quadrat der halben Linie ist also grösser als das Rechteck aus irgend zwei ungleichen Abschnitten der ganzen.

Zusatz 2. Nimmt man in einer geraden Linie AB einen beliebigen Punkt C, so ist $\square ACB$ entweder gleich dem Quadrate der halben AB oder kleiner.

Zusatz 3. Weil $AC^2 = \square ADB + CD^2$, so ist $AC^2 - CD^2 = \square ADB$. Es ist aber BD die Summe der Linien BC oder AC und CD, und AD die Differenz derselben; folglich ist das Rechteck aus der Summe und Differenz zweier Linien gleich der Differenz der Quadrate von beiden Linien.

In Zeichen: $\square (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

4. Lehrsatz. (Eucl. 2, 6). Fig. 3.

Wenn man eine gerade Linie halbirt und in ihrer Verlängerung einen beliebigen Punkt nimmt: so ist das Quadrat des Segmentes zwischen beiden Theilungspunkten gleich dem Rechtecke aus den ungleichen Abschnitten der Linie nebst dem Quadrate ihrer Hälfte.

Die Linie AB sey in C halbirt, und D sey ein beliebiger Punkt in ihrer Verlängerung: so ist $CD^2 = \square ADB + AC^2$.

Zusatz. Aus der letzten Gleichung folgt $CD^2 - AC^2 = \square ADB$. Es ist aber BD die Summe der Linien CD, AC und AD die Differenz derselben. Es ergiebt sich also auch hieraus die in Zusatz 3 zum vorigen Lemma aufgestellte Folgerung.

5. Lehrsatz. Fig. 4. 5.

Wenn in einer geraden Linie zwei Punkte gleichweit von der Mitte dieser Linie genommen werden: so ist das Rechteck aus den Abschnitten durch den einen Punkt gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten durch den andern Punkt.

Die Linie AB sey in C halbirt, und die Punkte D, E seyen von der Mitte C gleichweit entfernt: so ist $\square ADB = \square AEB$.

6. Lehrsatz. Fig. 4. 5.

Wenn das Rechteck aus zwei Abschnitten einer Linie gleich ist dem Rechtecke aus zwei andern Abschnitten derselben, und die Theilungspunkte liegen beide entweder in der Linie selbst oder in ihren Verlängerungen: so sind beide Punkte von der Mitte der Linie gleichweit entfernt.

Die Linie AB sey in C halbirt, und die Punkte D,E seyen entweder beide in AB selbst, oder beide in ihren Verlängerungen so genommen, dass $\square ADB = \square AEB$: so ist $CD = CE$.

7. Lehrsatz (Pappi *Lemma* 14). Fig. 4. 5.

Das Rechteck zweier Abschnitte einer geraden Linie ist grösser als das Rechteck zweier anderen Abschnitte derselben, wenn der erste Theilungspunkt der Mitte der Linie näher oder von ihr entfernter ist als der andere, je nachdem beide Punkte in der Linie selbst oder in ihren Verlängerungen genommen sind.

Fig. 4. Die Linie AB sey in C halbirt, und D, E seyen in AB selbst so genommen, dass $CD < CE$: so ist $\square ADB > \square AEB$.

Fig. 5. Dagegen ist $\square ADB < \square AEB$, wenn die Punkte D, E in den Verlängerungen der AB so genommen werden, dass $CD < CE$ ist.

8. Lehrsatz. Fig. 4. 5.

Wenn in einer geraden Linie zwei Punkte entweder beide in der Linie selbst, oder beide in ihren Verlängerungen genommen werden: so ist der erste Theilungspunkt im ersten Falle der Mitte der Linie näher als der zweite, im andern Falle aber von ihr entfernter, wenn das Rechteck aus den Abschnitten durch den ersten Punkt grösser ist als das Rechteck aus den Abschnitten durch den zweiten.

Fig. 4. Die Linie AB sey in C halbirt, und in AB selbst seyen die Punkte D, E so genommen, dass $\square ADB > \square AEB$: so ist $CD < CE$.

Fig. 5. Es bleibe dieselbe Annahme, und die Punkte D, E liegen beide in der verlängerten AB: so ist $CD > CE$.

Zusatz. Fig. 4. Wenn in einer geraden Linie drei Punkte D, C, E genommen werden, und das $\square ADB$ durch den ersten Punkt ist grösser als das $\square ACB$ durch den zweiten Punkt: so ist auch das $\square ACB$ grösser als das $\square AEB$ durch den dritten Punkt.

Weil $\square ADB > \square ACB$, so ist (*Lemma* 8) D der Mitte der AB näher als C; daher liegt die Mitte zwischen A und C. Folglich ist der Punkt C der Mitte der AB näher als der Punkt E, und deshalb (*Lemma* 7) $\square ACB > \square AEB$.

9. Lehrsatz. (Eucl. 2, 9. 10) Fig. 2. 3.

Wenn man eine gerade Linie in zwei gleiche, und durch einen beliebigen Punkt (in der Linie selbst oder in ihrer Verlängerung) in zwei ungleiche Abschnitte theilt: so ist die Summe der Quadrate von den ungleichen Abschnitten gleich dem doppelten Quadrate der halben Linie nebst dem doppelten Quadrate des Segmentes zwischen den Theilungspunkten.

Die Linie AB sey in C halbirt und in D beliebig getheilt: so ist

$$AD^2 + DB^2 = 2AC^2 + 2CD^2.$$

Zusatz. Fig. 1. Wenn also in einer Linie AB zwischen ihren Endpunkten ein beliebiger Punkt C genommen wird, so ist $AC^2 + CB^2$ entweder gleich dem doppelten Quadrate der halben AB, oder grösser.

$$AC^2 + CB^2 \overset{=}{>} \tfrac{1}{2}AB^2.$$

10. Lehrsatz. Fig. 6.

Wenn ein erstes Rechteck gleich ist einem zweiten, aber die Differenz der Seiten im ersten grösser ist als im zweiten: so ist die grössere Seite des ersten grösser als die grössere Seite des zweiten, die kleinere Seite des ersten aber kleiner als die kleinere Seite des zweiten.

In den Verlängerungen der Linien AB, CD seyen die Punkte E, F so genommen, dass $\square AEB = \square CFD$, und es sey $AB > CD$: so ist $AE > CF$, und $BE < DF$.

Halbire AB und CD in G und H, so ist $AG > CH$, also

$$AG^2 > CH^2.$$

Es ist aber nach der Annahme

$$\square AEB = \square CFD;$$

folglich ist, wenn man Gleiches zu Ungleichem addirt,

$$AG^2 + \square AEB > CH^2 + \square CFD,$$

das ist......... $GE^2 > HF^2$ (*Lemma* 4).

Folglich ist $GE > HF$, mithin, weil $AG > CH$ ist, auch $AE > CF$.

Ferner, wegen der gleichen Rechtecke ist $AE : CF = FD : EB$. Nun ist, wie eben gezeigt worden, $CF < AE$; folglich ist $EB < FD$.

11. Lehrsatz. Fig. 7.

Wenn die Linie FD gleich der mittlern Proportionale zwischen zwei ungleichen FB und FC gemacht wird: so ist der Ueberschuss der grössern FB über FD grösser als der Ueberschuss der FD über die kleinere FC.

Denn weil $BF : FD = DF : FC$, so ist *divid.* $BF - FD : FD = DF - FC : FC$.

Nun ist $FD > FC$, folglich $BF - FD > DF - FC$.

Zusatz 1. Sind also BF, DF, CF in einer geraden Linie vom Punkte F aus nach einer Richtung hin genommen, so ist $BD > DC$.

Zusatz 2. Weil $BD > DC$, so ist, wenn beiderseits DF und FC hinzukommt, $BF + FC > 2DF$. Die Summe zweier ungleichen Linien ist also grösser als die mittlere Proportionale zwischen ihnen doppelt genommen. Dieser Satz ist ein besonderer Fall von Eucl. 5, 25.

12. Lehrsatz. Fig. 8.

Die Linie BC sey in E, und ihre Hälfte CE in A halbirt, und in der Verlängerung der BC sey der Punkt K so genommen, dass das vierfache Quadrat von AK gleich ist dem dreifachen Quadrate von CK: ich behaupte, dass das

Quadrat der Verlängerung BK gleich ist dem dreifachen Quadrate der halben BC

$$BK = \sqrt{\tfrac{3}{4} BC^2}.$$

Mache $AF = AK$, so ist $CF = EK$, und $FK^2 = 4AK^2$ (*Lemma* 1, Zus.) Nach der Annahme ist aber $4AK^2 = 3CK^2$, mithin ist $FK^2 = 3CK^2$. Nimm $KL = KC$ und ziehe von der letzten Gleichung CK^2 ab: so ist (*Lemma* 4, Zus.) $\square CFL = 2CK^2 = \square LCK$. Daher ist

$$FL : LC = KC : CF \text{ oder } EK$$

und *divid*...... $FC : CL = CE : EK$,

das ist........ $EK : 2CK = BE : EK$.

Folglich ist *invert.* und *divid.*

$$KC + CE : EK = KB : BE.$$

Mache $CN = CE$, so ist $KC + CE = KN$, also

$$KN : EK = KB : BE$$

und, wenn man die Differenzen der homologen Glieder nimmt,

$$NB : BK = KB : BE.$$

Folglich ist $BK^2 = \square NBE = 3BE^2$, oder gleich dem dreifachen Quadrate der halben BC.

13. Lehrsatz. Fig. 9.

Die Linie CF sey in G halbirt, und in ihrer Verlängerung sey der Punkt P so genommen, dass das Quadrat von CP gleich ist dem dreifachen Quadrate von GP: ich behaupte, dass, wenn FG in T halbirt wird, $TP^2 = 3FT^2$ sey.

$$TP = \sqrt{\tfrac{3}{16} CF^2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3\,CF^2}.$$

Mache $PV = PG$. Weil $CP^2 = 3GP^2$, so ist, wenn auf beiden Seiten GP^2 abgezogen wird, $\square GCV = 2GP^2 = \square VGP$. Daher ist

$$CV : VG = PG : GC \text{ oder } GF$$

und *divid*..... $CG : GV = PF : FG$,

also, wenn man die Hälften der Hinterglieder nimmt,

$$CG : GP = PF : GT$$

und $\square CGT = \square GPF$. Endlich setze auf beiden Seiten GT^2 hinzu, so ist $\square CTG$ oder $3FT^2 = TP^2$.

Zusatz. Es ist $FP = TP - TF$

$$= \frac{\sqrt{3CF^2}}{4} - \frac{CF}{4}.$$

14. Lehrsatz. Fig. 10. 11.

Das Rechteck zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus der auf die dritte Seite gefällten Höhe und dem Durchmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Um das $\triangle ABC$ sey ein Kreis beschrieben, und aus A sey der Durchmesser AE gezogen, und der Perpendikel AD auf BC gefällt: so wird behauptet, dass $\square BAC = \square DAE$ sey.

Verbinde CE, so ist W. $ABD =$ W. AEC (denn in Fig. 10. stehen sie auf einem Bogen; in Fig. 11. aber, weil $ABCE$ ein Viereck im Kreise ist); auch ist W. $ADB =$ W. ACE, denn beide sind rechte. Daher ist $\triangle ADB \sim \triangle ACE$, und $AB : AD = AE : AC$; folglich $\square BAC = \square DAE$.

Zusatz. [$Ss = HP$]. Ist W. BAC ein rechter, so ist BC der Durchmesser des Kreises; mithin ist zufolge des Lemma $\square BAC = \square AD . BC$. Im rechtwinkligen Dreiecke also ist das Rechteck der Katheten gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem auf sie aus der Spitze gefällten Perpendikel.

15. **Lehrsatz.** [$S^2 + n^2 = s^2 + m^2$]. Fig. 10. 11.

Wenn man aus der Spitze eines Dreiecks auf die Basis einen Perpendikel fällt, so ist das Quadrat des einen Abschnittes derselben nebst dem Quadrate der dem andern Abschnitte anliegenden Seite gleich dem Quadrate des letztern Abschnittes nebst dem Quadrate der andern Seite.

Im $\triangle ABC$ sey AD senkrecht auf BC gefällt: ich behaupte, dass $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$ sey.

Denn nach dem pythagorischen Lehrsatze ist
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 + BD^2$$
und $$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BD^2 + CD^2,$$
folglich ist $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2$.

Zusatz 1. Ist der Winkel BAC ein rechter, so ist $AD^2 = \square BDC$, also
$$\begin{aligned} AD^2 + CD^2 + BD^2 &= \square BDC + CD^2 + BD^2 \\ &= BC^2 - \square BDC \\ &= BC^2 - AD^2. \end{aligned}$$

Für das rechtwinklige Dreieck ist also
$$S^2 + n^2 = s^2 + m^2 = H^2 - P^2.$$

Zusatz 2. Weil nach dem Lehrsatze
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2,$$
so ist, wenn auf beiden Seiten BD^2 und AB^2 abgezogen wird,
$$AC^2 - AB^2 = CD^2 - BD^2.$$

Für jedes Dreieck ist also $S^2 - s^2 = m^2 - n^2$. Auch folgt hieraus der Satz: Wenn auf einer geraden Linie BC in einem beliebigen Punkte D ein Perpendikel errichtet wird, und aus den Endpunkten B, C der Linie nach einem beliebigen Punkte A des Perpendikels gerade Linien AB, AC gezogen werden: so ist der Unterschied der Quadrate von den gezogenen Linien gleich dem Unterschiede der Quadrate von den Segmenten der ersten Linie.

Zusatz 3. Weil nach Lemma 3. Zus. 3.

$$S^2 - s^2 = \square(S+s)(S-s)$$

und $m^2 - n^2 = \square(m+n)(m-n)$,

so sind diese Rechtecke einander gleich. Es ist aber, wenn ein Winkel an der Basis stumpf ist, $m - n = B$ *), und, wenn kein Winkel an der Basis stumpf ist, $m + n = B$; folglich ist

im ersten Falle $\square(S+s)(S-s) = \square(m+n)B$,

und im zweiten $\square(S+s)(S-s) = \square(m-n)B$.

Hieraus folgt, dass

$$S+s : B = m+n : S-s$$

oder $S+s : B = m-n : S-s$.

Fällt man also aus der Spitze eines Dreiecks auf die Basis einen Perpendikel, so verhält sich die Summe der beiden Seiten zur Basis wie die Summe oder Differenz der beiden Abschnitte in der Basis (je nachdem an ihr ein Winkel oder keiner ein stumpfer ist) zur Differenz der Seiten.

Dieser Satz lässt sich auch so beweisen:

Fig. 12. 13. Im $\triangle ABC$ sey auf BC die Senkrechte AD gefällt, und es sey $AC > AB$. Beschreibe um den Mittelpunkt A mit dem Radius AB einen Kreis, so wird derselbe die Seite AC in E und, je nachdem der W. ABC ein spitzer (Fig. 12) oder ein stumpfer (Fig. 13) ist, entweder die Basis BC selbst oder ihre Verlängerung in einem Punkte F schneiden.

Verlängere AC, bis sie die Peripherie nochmals in G trifft: so ist wegen des Kreises

$$GC : CB = FC : CE.$$

Nun ist aber $GC = AC + AB$, $FC = CD \mp BD$, und $CE = AC - AB$. Folglich ist

$$AC + AB : BC = CD \mp BD : AC - AB.$$

16. **Lehrsatz.** $[H^2 = (2P)^2 + (m-n)^2]$. Fig. 14.

Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrate der doppelten Höhe sammt dem Quadrate von der Differenz der Abschnitte in der Hypotenuse.

In $\triangle ABC$ sey der W. A ein rechter, und die Linie AD senkrecht auf BC gefällt, und es sey $CD > DB$: so ist

$$BC^2 = (2AD)^2 + (CD - DB)^2.$$

---

*) B bezeichne die Basis des Dreiecks, welche den Seiten S und s anliegt.

Beschreibe um das $\triangle ABC$ einen Kreis, der Mittelpunkt sey H; ziehe den Durchmesser AE, fälle EG senkrecht auf BC, verlängere AD bis nach F in der Peripherie und verbinde EF: so ist $EF = BC$; daher ist $DGEF$ ein Parallelogramm, und $EF = DG$. Nun sind die $\triangle\triangle\, ADH, EGH$ offenbar gleichwinklig und haben die gleichen Seiten AH, HE; folglich ist $DH = HG$. Es ist aber $BH = HC$, mithin auch $BD = CG$, und demnach DG die Differenz der Abschnitte CD, DB. Es war aber $EF = DG$, folglich ist auch $EF = CD - DB$. Ferner, weil AF senkrecht auf dem Durchmesser BC steht, ist $AD = DF$, also AF die doppelte Höhe AD. Nun ist in dem rechtwinkligen $\triangle AFE$

$$AE^2 = AF^2 + FE^2,$$

und es ist $AE = BC$, folglich ist

$$BC^2 = (2AD)^2 + (CD - DB)^2.$$

Zusatz. Zieht man in der letzten Gleichung auf beiden Seiten AD^2 ab, so erhält man, weil nach *Lemma* 1. Zus. $(2AD)^2 = 4AD^2$ ist,

$$BC^2 - AD^2 = 3AD^2 + (CD - DB)^2,$$

oder in Zeichen

$$H^2 - P^2 = 3P^2 + (m - n)^2.$$

Weil nun nach *Lemma* 15. Zus. 1. $S^2 + n^2 = s^2 + m^2 = H^2 - P^2$ ist, so ist auch

$$S^2 + n^2 = s^2 + m^2 = 3P^2 + (m - n)^2.$$

17. Lehrsatz. Fig. 15.

Wenn auf einer geraden Linie BC in ihren Endpunkten auf derselben Seite Perpendikel BF, CG errichtet werden, und das Rechteck derselben gleich ist dem Quadrate der halben BC oder kleiner: so wird der über der Linie FG (welche die Endpunkte der Perpendikel verbindet) beschriebene Halbkreis die BC im ersten Falle berühren, im zweiten aber schneiden.

Halbire BC in K und verbinde GK und FK. Ist nun 1) $\square BF.CG = BK^2$, so verlängere die Linien GK und FB, bis sie sich in L treffen: so ist offenbar $\triangle LBK \cong \triangle GCK$, denn sie haben gleiche Winkel, und es ist $BK = KC$. Daher ist $BL = CG$, also $\square FBL = \square BF.CG = BK^2$. Folglich ist W. FKL, sowie sein Nebenwinkel FKG ein rechter. Wird also über FG ein Halbkreis beschrieben, so geht er durch K. Errichtet man nun KH senkrecht auf BC, so ist wegen der drei Parallelen BF, KH, CG

$$BK : KC = FH : HG,$$

mithin ist $FH = HG$, also H der Mittelpunkt, und HK sein Radius. Dieser Radius steht aber senkrecht auf BC, folglich berührt BC den Kreis.

2) Ist aber $\square BF.CG < BK^2$, so nimm in CG von C nach G hin den Abschnitt CM, sodass $\square BF.CM = BK^2$: so ist $\square BF.CG < \square BF.CM$, und $CG < CM$. Verbindet man also MK, so liegt diese Linie zwischen FK und GK, und daher ist W. $FKG >$ W. FKM. Nun erhellt aber aus dem Vorigen, dass W. FKM ein rechter sey; folglich ist W. FKG ein stumpfer. Beschreibt man also über FG einen Halbkreis, so liegt der Punkt K innerhalb desselben; folglich schneidet BC den Kreis.

18. Aufgabe. Fig. 16. 17.

Eine gegebene gerade Linie in zwei Abschnitte zu theilen, deren Rechteck einem gegebenen gleich ist.

Gegeben sey die Linie BC und $\square pq$, welches aber nicht grösser sey als das Quadrat der halben BC (*Lemma* 3, Zus. 1).

Errichte auf BC in ihren Endpunkten auf einer Seite derselben die Perpendikel BF und CG gleich den gegebenen Linien p und q, verbinde FG und beschreibe über dieser Linie einen Halbkreis: so wird derselbe (*Lemma* 17) die BC entweder in einem Punkte K berühren oder in zwei Punkten D und d schneiden: ich behaupte, dass jeder von den genannten Punkten der gesuchte Theilungspunkt sey.

1) Ist $\square pq$ oder $\square BF.CG$ gleich dem Quadrate der halben BC (Fig. 16), so berührt der Halbkreis die BC in K. Zieht man nun den Radius HK, so steht er senkrecht auf BC, mithin sind die Linien BF, CG, HK parallel, und es ist $FH : HG = BK : KC$. Folglich ist $BK = KC$, und $\square BKC = BK^2 = \square pq$.

2) Ist $\square BF.CG$ kleiner als das Quadrat der halben BC (Fig. 17), so schneidet der Halbkreis die BC in zwei Punkten D und d. Verbinde GB und FC, so sind die Winkel FBG und FCG spitze, weil jeder ein Theil eines rechten ist. Sie stehen aber auf dem Durchmesser FG, folglich liegen die Punkte B und C ausserhalb des Kreises, und somit die Durchschnittspunkte D und d zwischen B und C.

Zieht man nun FD und GD, so ist

$$\text{W.}\, BDG = \text{W.}\, DCG + \text{W.}\, CGD \quad (\text{Eucl. } 1, 32).$$

Es ist aber W. FDG = W. DCG,

weil jeder derselben ein rechter ist; folglich ist, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, W. BDF = W. CGD. Daher

sind die rechtwinkligen Dreiecke BDF und CGD ähnlich, und es ist . . . . $FB:BD = DC:CG$,
also . . . . $\square BDC = \square BF.CG = pq$.
Ebenso wird bewiesen, dass $\square BdC = \square pq$ sey.

Anmerkung. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ist folgende:

Fig. 18. Errichte auf BC in ihren Endpunkten auf einer Seite die Senkrechten BF und CG gleich den Seiten p und q des gegebenen Rechtecks, verbinde FG und beschreibe über BC einen Halbkreis: so wird derselbe die FG entweder in einem Punkte H berühren oder in zwei Punkten H und h schneiden.

Errichte in den genannten Punkten auf FG Perpendikel, so werden dieselben die BC in den gesuchten Punkten D und d treffen. Den Beweis findet man unter andern in Diesterweg's Bearbeitung der Apollonischen Schrift „*de sectione rationis*", Lehnsatz A. Seite 1. ff.

19. Aufgabe. Fig. 19.

In der Verlängerung einer geraden Linie einen Punkt zu finden, so dass das Rechteck aus den Abschnitten der Linie einem gegebenen gleich sey.

Gegeben sey die Linie BC und das $\square pq$.

Auf BC errichte in ihren Endpunkten nach entgegengesetzten Seiten die Perpendikel BF und CG gleich p und q, verbinde FG und beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis: so wird derselbe die Verlängerungen der BC in den Punkten D und d schneiden. Denn zieht man GB und FC, so sind offenbar die Winkel FBG und FCG stumpfe, denn die rechten Winkel FBC und BCG sind Theile derselben. Die stumpfen Winkel stehen aber beide auf dem Durchmesser FG, folglich liegen die Punkte B, C innerhalb des Kreises, und somit die Durchschnittspunkte D und d ausserhalb desselben.

Ich behaupte nun, dass die Punkte D und d beide das Verlangte leisten. Verbinde FD und GD, so ist W. FDG ein rechter als Winkel im Halbkreise; auch ist W. CDG + W. CGD gleich einem rechten, weil der dritte Winkel C im $\triangle DCG$ ein rechter ist; mithin ist

$$\text{W. } FDG = \text{W. } CDG + \text{W. } CGD,$$

und, wenn man den gemeinschaftlichen W. CDG wegnimmt,

$$\text{W. } FDB = \text{W. } CGD.$$

Daher sind die rechtwinkligen $\triangle\triangle FBD, DCG$ ähnlich, und es ist . . . . . . $FB:BD = DC:CG$,

also . . . . $\square BDC = \square BF.CG = \square pq$.
Ebenso wird bewiesen, dass $\square BdC = \square pq$ sey.

Anmerkung. Fig. 20. Eine andere Auflösung dieser Aufgabe ist folgende:

Auf BC errichte in ihren Endpunkten nach entgegengesetzten Richtungen die Senkrechten BF und CG gleich den Seiten p und q des gegebenen Rechtecks, verbinde FG und beschreibe um BC als Durchmesser einen Kreis: so wird derselbe die FG in zwei Punkten H und h schneiden. Errichte in diesen Punkten auf FG Perpendikel, so werden dieselben die Verlängerte BC in den gesuchten Punkten D und d treffen. Den Beweis siehe bei Diesterweg, Lehnsatz B, Seite 4.

20. Erklärung. (Eucl. *Dat.* Erkl. III).

Geradlinige Figuren heissen der Gattung nach gegeben (*specie datae*), wenn jeder ihrer Winkel gegeben ist, und die Verhältnisse ihrer Seiten gegeben sind.

21. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 43).

Ein Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn jeder Winkel des Dreiecks der Grösse nach gegeben ist.

22. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 44).

Ein Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn ein Winkel des Dreiecks und das Verhältniss der ihn einschliessenden Seiten gegeben ist.

23. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 46).

Ein rechtwinkliges Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn das Verhältniss der einen spitzen Winkel einschliessenden Seiten gegeben ist.

24. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 77).

Ein Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn ein Winkel desselben gegeben ist, und der aus diesem Winkel auf die Gegenseite gefällte Perpendikel ein gegebenes Verhältniss zu dieser Seite hat.

25. Lehrsatz. Fig. 12. 13.

Ein Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn ein Winkel desselben gegeben ist, und der aus diesem Winkel auf die Gegenseite gefällte Perpendikel zu einem Abschnitte dieser Seite ein gegebenes Verhältniss hat.

In dem $\triangle ABC$ sey aus A auf BC der Perpendikel AD gefällt, und es sey gegeben W. BAC und das Verhältniss $AD:DB$; ich behaupte, dass das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben sey.

Weil der W. ADB als rechter gegeben ist, sowie das

Verhältniss der einschliessenden Seiten AD und DB: so ist (*Dat.* 44) $\triangle ADB$ der Gattung nach gegeben, mithin ist der W. ABD, also auch W. ABC bekannt. Von dem $\triangle ABC$ sind also die Winkel A und B gegeben, folglich ist (*Dat.* 43) dieses Dreieck der Gattung nach gegeben.

26. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 79).

Ein Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn ein Winkel desselben gegeben ist, und wenn die aus diesem Winkel auf die Gegenseite gezogene und mit ihr einen gegebenen Winkel machende Linie diese Gegenseite in Segmente theilt, die ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.

Zusatz 1. Ein rechtwinkliges Dreieck ist daher der Gattung nach gegeben, wenn die durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.

Zusatz 2. Ein rechtwinkliges Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn das Verhältniss der Hypotenuse zu einem ihrer Abschnitte gegeben ist.

27. Lehrsatz. Fig. 14.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn das Verhältniss einer Kathete zu dem der andern Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse gegeben ist.

In dem $\triangle ABC$ sey der Winkel A ein rechter, AD stehe senkrecht auf BC, und es sey das Verhältniss $AB:CD$ gegeben; ich behaupte, dass $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben sey.

Halbire CD in G. Weil $AB:CD$ gegeben wird, so ist auch $AB:DG$ und $AB^2:DG^2$ gegeben. Es ist aber $AB^2 = \square CBD$, folglich ist das Verhältniss $\square CBD:DG^2$ und *comp.* $BG^2:GD^2$ (*Lemma* 4), mithin $BG:GD$, und *divid.* $BD:DG$, also auch $BD:DC$ gegeben. Folglich ist nach *Lemma* 26, Zus. 1. $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

28. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 56).

Wenn eine der Gattung nach gegebene geradlinige Figur über einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie beschrieben wird, so ist die Figur der Grösse nach gegeben.

Theilung der Linie.

Verhältniss der einschliessenden Seiten AD und DB: so ist (*Dat.* 44) $\triangle\ ADB$ der Gattung nach gegeben, mithin ist der W. ABD, also auch W. ABC bekannt. Von dem $\triangle\ ABC$ sind also die Winkel A und B gegeben, folglich ist (*Dat.* 40) dieses Dreieck der Gattung nach gegeben.

26. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 77).

Ein Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn ein Winkel desselben gegeben ist, und wenn die aus diesem Winkel auf die Gegenseite gezogene und mit der einen gegebenen Winkel machende Linie diese Gegenseite in Segmente theilt, die ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.

Zusatz 1. Ein rechtwinkliges Dreieck ist ferner der Gattung nach gegeben, wenn die durch die Höhe gebildeten Abschnitte der Hypotenuse ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.

Zusatz 2. Ein rechtwinkliges Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn das Verhältniss der Hypotenuse zu einem ihrer Abschnitte gegeben ist.

27. Lehrsatz. Fig. 18.

Ein rechtwinkliges Dreieck ist der Gattung nach gegeben, wenn das Verhältniss einer Kathete zu dem der andern Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse gegeben ist.

In dem $\triangle\ ABC$ sey der Winkel A ein rechter, AD stehe senkrecht auf BC, und es sey das Verhältniss $AB : CD$ gegeben; ich behaupte, dass $\triangle\ ABC$ der Gattung nach gegeben sey.

Halbire CD in G. Weil $AB : CD$ gegeben wird, so ist auch $AB : DG$ und $AB^2 : DG^2$ gegeben. Es ist aber $AB^2 = \square\ CBD$, folglich ist das Verhältniss des $\square\ CBD : DG^2$ und comp. $BG^2 : GD^2$ (*Lemma* 4), mithin $BG : GD$, und divid. $BD : DG$, also auch $BD : DC$ gegeben. Folglich ist nach *Lemma* 26, Zus. 1. $\triangle\ ABC$ der Gattung nach gegeben.

28. Lehrsatz. (Eucl. *Dat.* 56).

Wenn eine der Gattung nach gegebene geradlinige Figur über einer der Grösse nach gegebenen geraden Linie beschrieben wird, so ist die Figur der Grösse nach gegeben.

Aufgabe I. Fig. 21.

$$m^2 = 2n^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass das Quadrat von dem grössern Abschnitte BD gleich ist dem doppelten Quadrate des kleinern CD.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, und es sey $BD > CD$: so ist

$$BD^2 = 2CD^2.$$

Mache $CE = CD$, so ist $2CD^2 = \square\, EDC$, also $BD^2 = \square\, EDC$, mithin

$$ED : DB = BD : DC,$$

und *comp.* . . . . $EB : BD = BC : CD.$

Verlängere BC um $CF = BC$, so ist $EB = DF$, also

$$FD : DB = FC : CD,$$

folglich *invert.* und *compon.*

$$BF : FD = DF : FC.$$

Daher ist DF die mittlere Proportionale zwischen BF und FC. Nun sind BF und FC gegeben, also auch FD und somit der Punkt D.

Synthesis. Verlängere BC um $CF = BC$ und nimm FD gleich der mittlern Proportionale zwischen BF und FC: so ist D der gesuchte Punkt.

Denn weil $BF : FD = DF : FC$, so ist *divid.* und *invert.*

$$FD : DB = FC \text{ oder } BC : CD.$$

Mache $CE = CD$, so ist $FD = EB$, also

$$EB : BD = BC : CD$$

und *divid.* . . . . . $ED : DB = BD : DC,$

mithin $BD^2 = \square\, CDE$. Es ist aber $\square\, CDE = 2CD^2$, weil $DE = 2CD$ ist; folglich ist auch $BD^2 = 2CD^2$.

Anmerkung. Nimmt man die mittlere Proportionale FD nach der entgegengesetzten Seite, so leistet der Punkt D dasselbe.

Aufgabe II. Fig. 22.

$m^2 - 2n^2$.

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass der Ueberschuss des Quadrats von dem grössern Abschnitte BD über das doppelte Quadrat von dem kleinern CD einer gegebenen Fläche gleich sey.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, und es sey $BD > DC$: so ist

$$BD^2 - 2CD^2$$

gegeben. Mache $DE = DC$, so ist $BD^2 - CD^2 = \square CBE$ (*Lemma* 4, Zus.). Ferner nimm $\square BC \,.\, EG = CD^2$, so ist

$$BD^2 - 2CD^2 = \square CBE - \square BC \,.\, EG$$
$$= \square CBG.$$

Daher ist $\square CBG$ gegeben, mithin (*Dat.* 61) die Linie BG und der Punkt G.

Weil nun $\square BC \,.\, EG = CD^2$ oder $= \square CDE$, so ist

$$GE : ED = DC : CB,$$

das ist, wenn $CF = BC$ gemacht wird,

$$GE : ED = DC : CF$$

und *comp.* $GD : DE$ oder $DC = DF : FC$.

Die Summen der homologen Glieder haben aber dasselbe Verhältniss, mithin ist

$$GF : FD = DF : FC,$$

also FD die mittlere Proportionale zwischen GF und FC. Da nun die Linien GF und FC gegeben sind, so ist auch DF und deshalb der Punkt D gegeben.

Determination. Offenbar muss die gegebene Fläche kleiner seyn als das Quadrat der gegebenen Linie BC.

Synthesis. Nimm $\square CBG$ gleich der gegebenen Fläche, und es sey $BG < BC$. Verlängere BC um $CF = BC$ und nimm FD gleich der mittlern Proportionale zwischen GF und FC: ich behaupte, dass D der gesuchte Punkt sey.

Denn nach *Lemma* 11. ist $GD > DC$. Macht man also $DE = DC$, so liegt E zwischen G und D. Weil nun $GF : FD = DF : FC$, so ist, wenn man die Differenzen der homologen Glieder nimmt,

$$GD : DC \text{ oder } DE = DF : FC$$

und *divid.* . . . . . . $GE : ED = DC : CF$ oder BC,
mithin $\square BC \,.\, GE = \square EDC = CD^2$. Es ist aber

$$\square CBE = BD^2 - CD^2, \text{ (Lemma 4, Zus.)},$$

folglich, wenn man hiervon die Gleichung

$$\square BC \,.\, GE = CD^2$$

wegnimmt, ist $\square CBG = BD^2 - 2CD^2$.

Anmerkung 1. Macht man FE gleich der mittlern Proportionale zwischen BF und FC: so ist nach Aufgabe I. E der Grenzpunkt, für welchen $BE^2 = 2EC^2$, oder $BE^2 - 2EC^2 = 0$ ist. Nimmt man nun zwei beliebige Punkte D und H zwischen E und C: so behaupte ich, dass der dem Punkte C nähere Punkt H eine grössere Fläche bestimme als der von ihm entferntere D. Denn weil $BH > BD$, und $HC < CD$: so ist

$$BH^2 > BD^2$$
$$\text{und } 2CH^2 < 2CD^2,$$

folglich ist $BH^2 - 2CH^2 > BD^2 - 2CD^2$. — Hieraus ergiebt sich auch leicht die Umkehrung.

Anmerkung 2. Nimmt man die mittlere Proportionale FD nach der entgegengesetzten Seite, so leistet der Punkt D dasselbe.

Aufgabe III. Fig. 23.

Hm : n^2.

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass das Rechteck aus der gegebenen Linie BC und dem einen Abschnitte CD zum Quadrate des andern Abschnittes BD ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$\square BCD : BD^2$$

gegeben. Mache $\square BE . CD = BD^2$, so ist das gegebene Verhältniss

$$= \square BCD : \square BE . CD, \text{ das ist}$$
$$= CB : BE;$$

mithin ist, weil CB gegeben wird, die Linie BE der Lage und Grösse nach gegeben. Weil nun $\square BE . CD = BD^2$, so ist . . . . $CD : DB = DB : BE$

und *compon*. . . . . $CB : BD = DE : EB$,

mithin $\square BDE = \square CBE$. Nun ist $\square CBE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BDE$; und da die Differenz BE der Seiten bekannt ist, so sind die Seiten selbst und somit der Punkt D gegeben.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$. In der Verlängerung der BC nimm den Punkt E so, dass $CB : BE = p : q$, und in der nach B hin Verlängerten BE nimm den Punkt D so, dass $\square BDE = \square CBE$ ist: so behaupte ich, dass D der gesuchte Punkt sey.

Denn weil $\Box CBE < \Box BCE$, so ist $\Box BDE < \Box BCE$, und der Punkt D liegt demnach zwischen B und C. Wegen der gleichen Rechtecke BDE und CBE aber ist

$$CB : BD = DE : EB$$

und *divid.* . . . . . $CD : DB = DB : BE$,

also $\Box CD \,.\, BE = BD^2$. Daher ist

$$\Box BCD : BD^2 = \Box BCD : \Box CD \,.\, BE$$
$$= BC : BE = p : q.$$

Anmerkung 1. Nimmt man den Punkt D in der andern Verlängerung der BE, so leistet er dasselbe.

Anmerkung 2. Ist das gegebene Verhältniss $p : q$ das Verhältniss der Gleichheit, so ist $\Box BCD = BD^2$, und dies ist die Aufgabe der *sectio media et extrema ratione* (im mittlern und äussern Verhältnisse).

Anmerkung 3. Die Aufgabe $Hm : n^2$ ist ein besonderer Fall von Apollonius, „*De sectione determinata*“, Buch 1, Aufg. 2, Fall 1 (bearbeitet von Diesterweg. Mainz, 1822). In der allgemeinen Aufgabe nämlich kann die Linie H jede Grösse haben.

Aufgabe IV. Fig. 24.

$$Hm : H^2 - m^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass das Rechteck aus der gegebenen Linie BC und einem ihrer Abschnitte CD zum Ueberschusse des Quadrats der gegebenen Linie BC über das Quadrat des genannten Abschnittes CD ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$\Box BCD : BC^2 - CD^2$$

gegeben. Mache $\Box ECD = BC^2 - CD^2$, so ist das gegebene Verhältniss

$$= \Box BCD : \Box ECD, \text{ das ist}$$
$$= BC : CE.$$

Daher ist das letztere Verhältniss gegeben, mithin, weil BC gegeben wird, die Linie CE der Lage und Grösse nach. Weil nun $BC^2 - CD^2 = \Box ECD$, so ist, wenn auf beiden Seiten CD^2 hinzukommt, $BC^2 = \Box EDC$. Nun ist BC^2 gegeben, also auch $\Box EDC$. Es ist aber die Differenz EC der Seiten bekannt, folglich sind die Seiten selbst und der Punkt D gegeben.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p:q$. In der Verlängerten BC nimm den Punkt E so, dass $BC:CE = p:q$, und in der nach B hin Verlängerten CE nimm den Punkt D so, dass $\square CDE = BC^2$ ist: so wird D der verlangte Punkt seyn.

Denn weil $BC^2 < \square CBE$, so ist auch $\square CDE < \square CBE$; mithin liegt D zwischen B und C. Ferner, weil $\square CDE = BC^2$, so ist $\square DCE = BC^2 - CD^2$. Folglich ist

$$\square BCD : BC^2 - CD^2 = \square BCD : \square DCE$$
$$= BC : CE = p:q.$$

Anmerkung 1. Ein dem Punkte C näherer Punkt bestimmt ein kleineres Verhältniss als ein von ihm entfernterer. Es seyen D, H zwei beliebige Punkte zwischen B, C, und es sey $CH < CD$: so ist

$$\square BCH < \square BCD,$$

und weil $CH^2 < CD^2$, ist

$$BC^2 - CH^2 > BC^2 - CD^2.$$

Folglich ist (Pappi *Lemma* 11)

$$\square BCH : BC^2 - CH^2 < \square BCD : BC^2 - CD^2.$$

Hieraus folgt auch leicht die Umkehrung.

Anmerkung 2. Nimmt man den Punkt D in der andern Verlängerung der CE, so ist $\square BCD : CD^2 - BC^2 = p:q$.

Aufgabe V. Fig. 23.

$$Hm : H^2 + m^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass das Rechteck aus der gegebenen Linie BC und einem ihrer Abschnitte CD zur Summe der Quadrate von den genannten Linien BC, CD ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$\square BCD : BC^2 + CD^2$$

gegeben. Mache $\square ECD = BC^2 + CD^2$, so ist das gegebene Verhältniss

$$= \square BCD : \square ECD, \text{ das ist}$$
$$= BC : CE;$$

daher ist wegen der gegebenen BC auch CE der Lage und Grösse nach gegeben. Weil nun $\square ECD = BC^2 + CD^2$, so ist, wenn auf beiden Seiten CD^2 abgezogen wird, $\square CDE = BC^2$. Nun ist BC^2 gegeben, also auch $\square CDE$. Es ist aber die Summe CE der Seiten bekannt, folglich sind die Seiten selbst und somit der Punkt D gegeben.

Determination. Weil $BC^2 = \square CDE$, und $CD < BC$ ist, denn der Punkt D liegt zwischen B und C: so ist (*Lemma* 11, Zus. 2) $CE > 2BC$, mithin $BC : CE < BC : 2BC$, oder $1 : 2$. Das gegebene Verhältniss muss also kleiner seyn als das Verhältniss des Einfachen zum Doppelten.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$, und es sey $2p < q$. Mache $BC : CE = p : q$, so ist $2BC < CE$, das ist $EB > BC$, und daher $\square EBC > BC^2$. Die Linie EC lässt sich also in zwei Punkten zu beiden Seiten des Punktes B so theilen, dass das Rechteck aus den Abschnitten durch je einen Punkt gleich BC^2 ist. Es sey aber D der zwischen B, C liegende Theilungspunkt: ich behaupte, dass er der Aufgabe genüge.

Denn weil $BC^2 = \square CDE$, so ist, wenn CD^2 hinzukommt, $BC^2 + CD^2 = \square DCE$. Daher ist

$$\begin{aligned} \square BCD : BC^2 + CD^2 &= \square BCD : \square DCE \\ &= BC : CE = p : q. \end{aligned}$$

Anmerkung. Der zweite zwischen B, E liegende Theilungspunkt leistet dasselbe.

Aufgabe VI. Fig. 25.

$$Hm : Hn + n^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten Punkt D zu finden, sodass das Rechteck aus der gegebenen Linie BC und dem einen Abschnitte CD zur Summe des Quadrats von dem andern Abschnitte BD und des Rechtecks aus diesem Abschnitte BD und der gegebenen Linie BC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$\square BCD : \square CBD + BD^2$$

gegeben. Verlängere BC um $BE = BC$, so ist

$$\begin{aligned} \square CBD + BD^2 &= \square EBD + BD^2 \\ &= \square EDB. \end{aligned}$$

Daher ist das gegebene Verhältniss gleich $\square BCD : \square EDB$.*)

---

*) In einer geraden Linie sind also drei Punkte C, B, E gegeben; man soll zwischen den beiden ersten C, B einen vierten Punkt D finden, sodass das Rechteck aus dem ersten Segmente CD und einer gegebenen Linie BC zum Rechteck aus dem zweiten und dritten Segmente BD, ED ein gegebenes Verhältniss habe. Die Aufgabe ist demnach auf die *sectio determinata*, Buch 1, Aufg. 3, Fall 1., gebracht.

In der Verlängerung der CE nimm den Abschnitt EF so, dass $\square EF.CD = \square EDB$: so ist das obige Verhältniss

$$= \square BCD : \square EF.CD, \text{ das ist}$$
$$= BC : EF.$$

Es ist aber BC gegeben, mithin EF der Lage und Grösse nach, also auch BF. Weil nun $\square EF.CD = \square EDB$, so ist

$$CD : DB = DE : EF$$

und *comp.* . . . . . $CB : BD = DF : FE,$

mithin ist $\square BDF = \square BC.EF$. Es ist aber $\square BC.EF$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BDF$; und weil die Differenz BF der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst, mithin der Punkt D gegeben.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$. Verlängere BC um $BE = BC$, mache $BE : EF = p : q$ und nimm in der nach B hin liegenden Verlängerung der FB den Punkt D so, dass $\square BDF = \square BC.EF$: so liegt D zwischen B und C, weil $\square BC.EF < \square BCF$ ist. Ich behaupte nun, dass D der gesuchte Punkt sey.

Denn wegen der gleichen Rechtecke ist $CB : BD = DF : FE$, also *divid.* $CD : DB = DE : EF$, und $\square BDE = \square CD.EF$. Fs ist aber $\square BDE = \square EBD + BD^2 = \square CBD + BD^2$. Folglich ist

$$\square BCD : \square CBD + BD^2 = \square BCD : \square CD.EF$$
$$= BC : EF = p : q.$$

Anmerkung. Nimmt man den Punkt D in der andern Verlängerung der BF, so ist $\square BCD : BD^2 - \square CBD = p : q$.

Aufgabe VII. Fig. 26.

$$Hm : mn - n^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass das Rechteck aus der gegebenen Linie BC und dem grössern Abschnitte CD zum Ueberschusse des Rechtecks aus beiden Abschnitten CD, DB über das Quadrat des kleinern Abschnittes BD ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, und es sey $CD > BD$, so ist das Verhältniss

$$\square BCD : \square BDC - BD^2$$

gegeben. Mache $DG = DB$, so ist $\square BDC - BD^2 = \square GDC - GD^2 = \square CGD$. Ferner nimm $\square DCH = \square CGD$, so ist das gegebene Verhältniss

$$= \square BCD : \square DCH, \text{ das ist}$$
$$= BC : CH;$$

daher ist die Linie CH und somit auch BH der Lage und Grösse nach gegeben. Weil nun $\square DCH = \square CGD$, so ist

$$CD : DG \text{ oder } DB = GC : CH$$

und *compon.* . . . . $CB : BD = GH : HC$.

Verlängere BC um $CF = BC$, so ist $FB : BG = CB : BD$, weil $FB = 2BC$, und $BG = 2BD$ ist; mithin ist

$$FB : BG = GH : HC$$

und $\square BGH = \square BF.CH$. Nun ist $\square BF.CH$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BGH$; und weil die Summe BH der Seiten bekannt ist, so sind die Seiten selbst, also der Punkt G und somit auch der Punkt D gegeben.

D e t e r m i n a t i o n. Weil zur Construction erforderlich ist, dass $BC : CH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse genommen, $CF = BC$ gemacht, und die Linie BH in G so getheilt werde, dass $\square BGH = \square BF.CH$ sey: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square BF.CH$ grösser ist als das Quadrat der halben BH; und es wird eine Gränze stattfinden, wenn G die Mitte der BH ist.

1) Das Gränzverhältniss $BC : CH$ sey gefunden. Halbire BH in G, so ist der Voraussetzung zufolge $\square BF.CH = \square BGH$, also

$$FB : BG = GH : HC$$

und *convert.* . . . . . $BF : FG = HG$ oder $BG : GC$.

Die Differenzen der homologen Glieder haben aber dasselbe Verhältniss, daher ist

$$BF : FG = GF : FC.$$

Folglich ist FG die mittlere Proportionale zwischen BF und FC. Die Linien BF, FC sind aber gegeben, also auch FG, mithin BG und die ihr gleiche GH, folglich CH und das Verhältniss $BC : CH$.

Man findet also das Gränzverhältniss $BC : CH$ auf folgende Weise: Verlängere BC um $CF = BC$ und nimm FG gleich der mittlern Proportionale zwischen BF und FC: so ist (*Lemma* 11) $BG > GC$. Macht man also $GH = BG$, so liegt H zwischen C und F. Ich behaupte nun, dass $\square BGH = \square BF.CH$, und dass, wenn BG in D halbirt wird, $\square BCD : \square BDC - BD^2 = BC : CH$ sey.

Denn weil $BF : FG = GF : FC$, so ist *convert.* $FB : BG$ oder $HG = FG : GC$, und *permut.*

$$BF : FG = HG : GC,$$

und nochmals *convert.* $FB : BG = GH : HC$,

also $\square BGH = \square BF.CH$.

Ferner ist . . . . . . $FB : BG = CB : BD$, weil $FB = 2BC$, und $BG = 2BD$ ist; folglich ist

$$CB : BD = GH : HC$$

und *divid.* $CD : DB = GC : CH$,

also $\square DCH = \square BD \,.\, CG$
$= \square DGC$
$= \square GDC - GD^2$
$= \square BDC - BD^2$.

Daher ist

$$\square BCD : \square BDC - BD^2 = \square BCD : \square DCH = BC : CH.$$

2. Jetzt ist zu untersuchen, ob $BC : CH$ ein grösstes oder kleinstes Verhältniss sey. Nimm also einen beliebigen Punkt E in BC, sodass $CE > EB$ ist: so ist das Verhältniss

$$\square BCE : \square BEC - BE^2$$

zu vergleichen mit

$$BC : CH, \text{ das ist mit } \square BCE : \square ECH.$$

Weil nun in beiden Verhältnissen die Vorderglieder gleich sind, so vergleiche die Hinterglieder mit einander, nämlich

$$\square BEC - BE^2 \text{ mit } \square ECH.$$

Mache $EK = BE$, so ist

$$\square BEC - BE^2 = \square KEC - KE^2 = \square CKE;$$

vergleiche daher

$$\square CKE \text{ mit } \square ECH,$$

also $CE : EK$ oder EB mit $KC : CH$

und *comp.* $CB : BE$ mit $KH : HC$.

Es ist aber $CB : BE = FB : BK$, desshalb werde

$$FB : BK \text{ mit } KH : HC$$

verglichen, also $\square BKH$ mit $\square BF \,.\, CH$, das ist mit $\square BGH$. Offenbar aber ist $\square BGH > \square BKH$, weil G die Mitte der BH ist; daher ist auch

$$\square BF \,.\, CH > \square BKH,$$

mithin $FB : BK > KH : HC$,

das ist $CB : BE > KH : HC$

und *divid.* $CE : EB$ oder $EK > KC : CH$,

also $\square CKE < \square ECH$. Folglich ist

$$\square BCE : \square CKE > \square BCE : \square ECH,$$

das ist $\square BCE : \square BEC - BE^2 > BC : CH$.

Hieraus folgt, dass $BC : CH$ das kleinste Verhältniss sey.

S y n t h e s i s. Verlängere BC um $CF = BC$, nimm FG gleich der mittlern Proportionale zwischen BF, FC, und mache $GH = BG$: so ist $BC : CH$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $BC:CH$, so halbire BG in D: so ist, wie in der Determination bewiesen worden ist,

$$\square BCD : \square BDC - BD^2 = BC : CH.$$

Ist das gegebene Verhältniss kleiner als $BC:CH$, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist aber das gegebene Verhältniss $p:q > BC:CH$, so sey $BC:CR = p:q$; so ist $CR < CH$.

Da nun . . . . . . $\square BF.CH = \square BGH$

aber . . . . $\square BF.RH > \square BG.RH$,

so ist, wenn man Ungleiches von Gleichem wegnimmt,

$$\square BF.CR < \square BGR.$$

Folglich lässt sich die Linie BR in zwei Punkten K und k so theilen, dass die Rechtecke BKR und BkR beide gleich $\square BF.CR$ sind. Beide Punkte werden aber in der Linie BC selbst liegen, weil $\square BF.CR > \square BCR$ ist. Halbire nun BK in E, und Bk in e: ich behaupte, dass die Punkte E, e beide das Verlangte leisten.

Denn weil $\square BF.CR = \square BKR$, so ist $FB:BK$, das ist $CB:BE = KR:RC$, und *divid.* $CE:EB$ oder $EK = KC:CR$, mithin $\square ECR = \square CKE$. Nun ist $\square CKE = \square BEC - BE^2$. Folglich ist

$$\square BCE : \square BEC - BE^2 = \square BCE : \square ECR$$
$$= BC : CR = p : q.$$

Ebenso wird gezeigt, dass der Punkt e dasselbe leiste.

Zusatz. Das kleinste Verhältniss $BC:CH$ wird so bestimmt: Es ist CH der Ueberschuss der Linien BF, FC über die Linien BF, FH, das ist der Ueberschuss der dreifachen BC über die doppelte FG. Das Quadrat von FG aber ist gleich dem doppelten Quadrate von BC. Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der BC zum Ueberschusse der dreifachen BC über die doppelte Seite des Quadrats, welches dem zwiefachen Quadrate der BC gleich ist.

$$BC : 3BC - 2\sqrt{2BC^2}.$$

Aufgabe VIII. Fig. 27.

$$Hm : n^2 - mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass das Rechteck aus der gegebenen Linie BC und dem kleinern Abschnitte BD zum Ueberschusse des Quadrates von dem grössern Abschnitte CD über das Rechteck aus beiden Abschnitten BD, DC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, und es sey $CD > BD$, so ist das Verhältniss

$$\square CBD : CD^2 - \square BDC$$

gegeben. Mache $DE = CD$, so ist

$$CD^2 - \square BDC = DE^2 - \square BDE$$
$$= \square DEB.$$

Daher ist das Verhältniss

$$\square CBD : \square DEB$$

und, wenn man $\square DBF = \square DEB$ macht, auch

$$\square CBD : \square DBF, \text{ das ist}$$
$$CB : BF$$

gegeben, mithin die Linie BF der Lage und Grösse nach. Weil nun $\square DBF = \square DEB$, so ist

$$BD : DE \text{ oder } DC = EB : BF$$

und *comp.* . . . . $BC : CD = EF : FB.$

Verlängere BC um $BG = BC$, so ist

$$BC : CD = GC : CE,$$

weil $2BC = GC$, und $2CD = CE$ ist; daher ist

$$GC : CE = EF : FB$$

und . . . . $\square CEF = \square CG . BF.$

Nun ist $\square\ CG . BF$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square CEF$; und da die Differenz CF der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst gegeben, mithin der Punkt E, also die Linie CE, somit ihre Hälfte CD und der Punkt D.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$. Verlängere BC um $BG = BC$, nimm von B nach C hin den Abschnitt BF so, dass $CB : BF = p : q$ ist, in der nach B hin Verlängerten CB nimm den Punkt E so, dass $\square CEF = \square CG . BF$, und halbire CE in D: so ist D der gesuchte Punkt.

Denn weil $\square CG . BF > \square CBF$ und $< \square CGF$, so ist auch . . . . $\square CEF > \square CBF$ und $< \square CGF$, mithin liegt E zwischen B,G, und deshalb D zwischen B, C; es ist also $CE > CB$, und, wenn man die Hälften nimmt, $CD > \frac{1}{2}CB$, oder $CD > DB$. — Weil nun $\square CG . BF = \square CEF$, so ist $GC : CE = EF : FB$, das ist $BC : CD = EF : FB$, und *divid.* $BD : DC$ oder $DE = EB : BF$, also $\square DBF = \square BED = ED^2 - \square BDE = CD^2 - \square BDC$. Folglich ist

$$\square CBD : CD^2 - \square BDC = \square CBD : \square DBF$$
$$= CB : BF = p : q.$$

Anmerkung. Dem Anfänger könnte es auffallen, dass die Aufgaben VII und VIII, $Hm : mn - n^2$ und $Hm : n^2 - mn$, welche einander so ähnlich zu seyn scheinen, doch zu ganz verschiedenen Resultaten führen, indem bei Aufgabe VII ein *minimum*, bei Aufgabe VIII aber gar keine Gränze stattfindet. Folgende Betrachtung kann diese Schwierigkeit heben.

In Aufgabe VII ist $m > n$, in Aufgabe VIII dagegen $n > m$. In jener liegt also m zwischen den Gränzen $\frac{H}{2}$ und H, in dieser aber zwischen $\frac{H}{2}$ und 0. In Aufgabe VII ist daher das Verhältniss $Hm : mn - n^2$

für $m = \frac{H}{2}$ gleich $\frac{H^2}{2} : \frac{H^2}{4} - \frac{H^2}{4} = \frac{H^2}{2} : 0$ unendlich gross,

und

für $m = H$ gleich $H^2 : 0 - 0 = H^2 : 0$ unendlich gross.

Wenn also m von seinem kleinsten Werthe $\frac{H}{2}$ bis zu seinem grössten H stetig wächst, so wird das Verhältniss $Hm : mn - n^2$ von einem unendlich grossen Werthe herabsteigen bis zu einem kleinsten, und von da wieder hinauf bis zu einem unendlich grossen. Es muss hier also ein *minimum* stattfinden.

In Aufgabe VIII dagegen ist das Verhältniss $Hm : n^2 - mn$

für $m = \frac{H}{2}$ gleich $\frac{H^2}{2} : \frac{H^2}{4} - \frac{H^2}{4} = \frac{H^2}{4} : 0$ unendlich gross,

und

für $m = 0$ gleich $0 : H^2 - 0 = 0 : H^2$ unendlich klein.

Wenn also m von seinem kleinsten Werthe 0 bis zu seinem grössten $\frac{H}{2}$ hinaufsteigt, so wird auch das Verhältniss $Hm : n^2 - mn$ von seinem unendlich kleinen bis zu seinem unendlich grossen Werthe wachsen, und es kann zwischen beiden weder ein *maximum* noch ein *minimum* stattfinden. Durch ähnliche Betrachtungen lassen sich bei mehreren der folgenden Aufgaben schon vor der Analysis die Determinationen angeben.

Aufgabe IX. Fig. 28.

$H^2 + Hm : m^2$.

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des Quadrats von der gegebenen Linie BC und des Rechtecks aus ihr und einem ihrer Abschnitte CD zum Quadrate dieses Abschnittes ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCD : CD^2$$

gegeben. Verlängere BC um $CE = BC$, so ist

$$BC^2 + \square BCD = EC^2 + \square ECD$$
$$= \square CED;$$

mithin ist das gegebene Verhältniss $= \square CED : CD^2$ *) und, wenn man $\square ED \,.\, CF = CD^2$ macht, auch

$$= \square CED : \square ED \,.\, CF, \text{ das ist}$$
$$= EC : CF, \text{ oder } BC : CF.$$

Es ist aber BC gegeben, also auch CF der Lage und Grösse nach. Weil nun $\square ED \,.\, CF = CD^2$, so ist

$$ED : DC = DC : CF$$

und *divid.* . . . . . . $EC : CD = DF : FC$,

also . . . . $\square CDF = \square ECF$.

Nun ist $\square ECF$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square CDF$; und weil die Differenz CF der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst, mithin der Punkt D gegeben.

Determination. Weil der Punkt D zwischen B und C liegen soll, so ist $\square CBF > \square CDF$. Es ist aber $\square CDF = \square ECF$ (nach der Analysis), mithin ist $\square CBF > \square ECF$. Nun ist $BC = CE$, folglich $BF > FC$. Halbirt man also BC in G, so ist $CF < CG$, und $EC : CF > EC : CG$. Es ist aber $EC : CF$ das gegebene Verhältniss, und $EC : CG = 2 : 1$. Folglich muss das gegebene Verhältniss grösser seyn als das Verhältniss des Doppelten zum Einfachen.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$, und es sey $p > 2q$. In BC nimm den Punkt F so, dass $BC : CF = p : q$, so ist $BC > 2CF$, oder $BF > FC$, mithin $\square CBF > \square BCF$. Nimmt man also in der Verlängerten CF den Punkt D so, dass $\square CDF = \square BCF$, so wird D zwischen B und F liegen. Ich behaupte nun, dass D der gesuchte Punkt sey.

Denn verlängere BC um $CE = BC$, so ist wegen der gleichen Rechtecke

$$BC \text{ oder } EC : CD = DF : FC,$$

---

*) In einer geraden Linie sind also zwei Punkte E, C gegeben; in der Verlängerung einen dritten Punkt D zu finden, sodass das Rechteck aus einer gegebenen Linie CE und dem ersten Abschnitte ED zum Quadrate des zweiten Abschnittes CD ein gegebenes Verhältniss habe. Die Aufgabe ist demnach auf die *sectio determ.* Buch 1, Aufg. 2, Fall 2, b gebracht.

also *compon.* . . . . $ED : DC = DC : CF$
und . . . . $CD^2 = \square ED \cdot CF$.

Daher ist

$$\square CED : CD^2 = \square CED : \square ED \cdot CF,$$

das ist $BC^2 + \square BCD : CD^2 = EC : CF = p : q$.

Anmerkung. Nimmt man den Punkt D in der andern Verlängerung der CF, so ist $BC^2 - \square BCD : CD^2 = p : q$.

Aufgabe X. Fig. 29.

$$H^2 + Hm : mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des Quadrats von der gegebenen Linie BC und des Rechtecks aus ihr und einem ihrer Abschnitte CD zum Rechteck aus beiden Abschnitten BD, DC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC$$

gegeben. Verlängere BC um $CF = BC$, so ist

$$BC^2 + \square BCD = CF^2 + \square FCD$$
$$= \square CFD;$$

und das gegebene Verhältniss ist gleich $\square CFD : \square BDC$ *). Ferner mache $\square FD \cdot CH = \square BDC$, so ist das obige Verhältniss

$$= \square CFD : \square FD \cdot CH, \text{ das ist}$$
$$= FC : CH, \text{ oder } BC : CH;$$

mithin ist die Linie CH der Lage und Grösse nach gegeben. Weil nun $\square FD \cdot CH = \square BDC$, so ist

$$FD : DB = DC : CH$$

und *compon.* . . . . $FB : BD = DH : HC$,
also . . . . $\square BDH = \square BF \cdot CH$.

Nun ist $\square BF \cdot CH$ wegen seiner bekannten Seiten ge-

---

*) In einer geraden Linie sind also drei Punkte F, C, B gegeben; man soll zwischen dem zweiten und dritten einen vierten Punkt D finden, sodass das Rechteck aus dem ersten Abschnitte FD und einer gegebenen Linie FC zum Rechtecke aus den beiden andern Abschnitten BD, CD ein gegebenes Verhältniss habe. Die Aufgabe ist demnach auf die *sectio determ.* Buch 1, Aufg. 3, Fall 3. gebracht.

geben, also auch $\square BDH$; und da die Summe BH der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst, folglich auch der Punkt D gegeben.

Determination. Weil zur Construction erforderlich ist, dass $BC:CH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse genommen, $CF = BC$ gemacht, und die Linie BH in D so getheilt werde, dass $\square BDH = \square BF.CH$ sey: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square BF.CH$ grösser ist als das Quadrat der halben BH; und offenbar wird eine Gränze stattfinden, wenn D die Mitte der BH ist.

1. Angenommen, das Gränzverhältniss $BC:CH$ sey gefunden. Halbire BH in D, so ist der Voraussetzung zufolge $\square BDH = \square BF.CH$, also

$$FB:BD = DH:HC$$

und *convert.* . . . . . $BF:FD = HD$ oder $BD:DC$,
folglich *perm.* und *conv.* $BF:FD = DF:FC$.

Daher ist FD die mittlere Proportionale zwischen BF und FC. Nun sind aber BF und FC gegeben, also auch FD, mithin BD und die gleiche DH, folglich CH und das Verhältniss $BC:CH$.

Man findet also das Gränzverhältniss auf folgende Weise. Verlängere BC um $CF = BC$, und nimm FD gleich der mittlern Proportionale zwischen BF und FC: so ist (*Lemma* 11) $BD > DC$. Macht man also $DH = BD$, so liegt der Punkt H in der Linie CF. Ich behaupte nun, dass $\square BDH = \square BF.CH$, und dass $BC^2 + \square BCD : \square BDC = BC:CH$ sey.

Denn weil $BF:FD = DF:FC$, so ist *convert.* und *perm.*

$$BF:FD = BD \text{ oder } HD:DC$$

und nochmals *conv.* $FB:BD = DH:HC$,
mithin . . . . $\square BDH = \square BF.CH$.

Ferner folgt aus der letzten Proportion *divid.*

$$FD:DB = DC:CH,$$

also . . . . $\square BDC = \square DF.CH$.

Daher ist

$$\square DFC : \square BDC = \square DFC : \square DF.CH,$$

das ist $BC^2 + \square BCD : \square BDC = FC:CH = BC:CH$.

2. Jetzt ist zu untersuchen, ob $BC:CH$ ein grösstes oder kleinstes Verhältniss sey. Nimm einen beliebigen Punkt E in BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCE : \square BEC$$

zu vergleichen mit

$$BC:CH, \text{ oder } FC:CH.$$

Es ist aber $BC^2 + \square BCE = \square CFE$, vergleiche also
$$\square CFE : \square BEC$$
mit . . . $FC : CH$, das ist mit $\square CFE : \square FE \,.\, CH$.

Da nun in beiden Verhältnissen die Vorderglieder gleich sind, so vergleiche die Hinterglieder, nämlich
$$\square BEC \text{ mit } \square FE \,.\, CH.$$

Es werde daher $FE : EB$ mit $EC : CH$ verglichen, und *comp.* $FB : BE$ mit $EH : HC$, also $\square BEH$ mit $\square BF \,.\, CH$ oder mit $\square BDH$. Nun ist aber $\square BDH > \square BEH$, weil D die Mitte der BH ist; daher ist auch
$$\square BF \,.\, CH > \square BEH,$$
also . . . . $FB : BE > EH : HC$
und *divid.* . . . . . . $FE : EB > EC : CH$,
mithin . . . . $\square BEC < \square EF \,.\, CH$.

Folglich ist
$$\square CFE : \square BEC > \square CFE : \square EF \,.\, CH,$$
das ist $BC^2 + \square BCE : \square BEC > FC : CH$, oder $BC : CH$; woraus hervorgeht, dass $BC : CH$ das kleinste Verhältniss sey.

S y n t h e s i s. Verlängere BC um $CF = BC$, nimm FD gleich der mittlern Proportionale zwischen BF, FC und mache $DH = BD$: so ist $BC : CH$ das kleinste Verhältniss. Ist also $BC : CH$ selbst das gegebene Verhältniss, so ist (wie in der Determination bewiesen worden ist)
$$BC^2 + \square BCD : \square BDC = BC : CH,$$
mithin ist D der gesuchte Punkt. — Ist das gegebene Verhältniss kleiner, so ist die Auflösung nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $p : q > BC : CH$, so sey $BC : CR = p : q$; so ist $CR < CH$. Da nun
$$\square BF \,.\, CH = \square BDH,$$
aber . . . . $\square BF \,.\, RH > \square BD \,.\, RH$,
so ist, wenn man Ungleiches von Gleichem abzieht, $\square BF \,.\, CR < \square BDR$. Daher lässt sich die Linie BR in zwei Punkten E, e zu beiden Seiten des Punktes D so theilen, dass die Rechtecke BER und BeR gleich $\square BF \,.\, CR$ sind. Ich behaupte, dass beide Punkte das Verlangte leisten.

Denn weil $\square BF \,.\, CR = \square BER$, so ist
$$FB : BE = ER : RC$$
und *divid.* . . . . . $FE : EB = EC : CR$,
mithin . . . . $\square BEC = \square EF \,.\, CR$.

Folglich ist
$$\square CFE : \square BEC = \square CFE : \square EF \,.\, CR,$$
das ist $BC^2 + \square BCE : \square BEC = FC : CR = p : q$.

Ebenso wird bewiesen, dass der Punkt e dasselbe leiste.

Zusatz 1. Das kleinste Verhältniss $BC : CH$ wird so bestimmt: Es ist CH der Ueberschuss der Linien BF, FC über BF, FH, das ist der Ueberschuss der dreifachen BC über die doppelte FD; das Quadrat von FD aber ist gleich dem zwiefachen Quadrate der BC. Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der BC zu dem Ueberschusse der dreifachen BC über die doppelte Seite des Quadrats, welches zweimal so gross ist als das Quadrat der BC.

$$BC : 3BC - 2\sqrt{2BC^2}.$$

Zusatz 2. Der Radius eines Kreises sey r, und die Seite des eingeschriebenen Quadrats s, so ist $s^2 = 2r^2$, und $s = \sqrt{2r^2}$, mithin

$$r + \frac{s}{2} : r - \frac{s}{2} = r + \tfrac{1}{2}\sqrt{2r^2} : r - \tfrac{1}{2}\sqrt{2r^2}.$$

Dividirt man die Glieder des zweiten Verhältnisses durch $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so ist

$$r + \frac{s}{2} : r - \frac{s}{2} = r : 3r - 2\sqrt{2r^2}.$$

Das in Zusatz 1 bestimmte kleinste Verhältniss ist daher auch gleich dem Verhältnisse der Summe des Radius eines Kreises und der halben Seite des eingeschriebenen Quadrates zur Differenz derselben Linien.

Geometrisch lässt sich dies so zeigen. Fig. 30. In den Kreis um O sey das Quadrat $BCFE$ eingeschrieben. Ziehe den Durchmesser GH senkrecht auf BC, EF, welche denselben in L, K schneiden: so ist aus bekannten Gründen $KO = OL = \frac{1}{2}BC$. Daher ist $KG = GO + \frac{1}{2}BC$, und $GL = GO - \frac{1}{2}BC$. Ziehe die Diagonale CE, welche durch O geht, und den Radius BO, welcher senkrecht auf CE steht, und verbinde EG, welche die Linien BC, BO in M, N schneide: so ist W. OEN = W. LGM, weil $OG = OE$ ist; daher ist in den rechtwinkligen $\triangle\triangle\, EON, GLM$ auch W. ENO = W. GML, mithin W. BNM = W. BMN, und somit $BM = BN$. Zieht man also nach BC die Linie OP der EG parallel, so ist auch $BO = BP$, also

$$\begin{aligned} CP &= CB - BO \\ &= BC - GO. \end{aligned}$$

Wegen der Parallelen aber ist $CP = PM$, weil $CO = OE$ ist; daher ist

$$CM = 2BC - 2GO.$$

Weil nun . . . . . $CL = LO$,

so ist, wenn beiderseits $GL + LM$ hinzukommt,

$$GL + CM = GO + LM,$$

das ist $GL + 2BC - 2GO = GO + LM.$

Auf beiden Seiten setze $2GO$ hinzu und ziehe dann $2BC$ und LM ab, so ist

$$GL - LM = 3GO - 2BC.$$

Weil nun $LM \mp EK$, so ist $KG : GL = KE$ oder $KO : LM$, und, wenn man die Differenzen der homologen Glieder nimmt,

$$KG : GL = GO : GL - LM$$
$$= GO : 3GO - 2BC.$$

Das Quadrat von BC aber ist gleich dem doppelten Quadrate des Radius GO. Demnach hat die Summe KG des Radius eines Kreises und der halben Seite des eingeschriebenen Quadrats zur Differenz GL derselben Linien dasselbe Verhältniss als eine Linie GO zu dem Ueberschusse ihres Dreifachen $3GO$ über die zwiefache Seite $2BC$ desjenigen Quadrats, welches dem doppelten Quadrate jener Linie gleich ist.

Aufgabe XI. Fig. 31.

$$H^2 + Hm : Hm + mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des Quadrats von der gegebenen Linie BC und des Rechtecks aus ihr und einem ihrer Abschnitte CD zur Summe desselben Rechtecks und des Rechtecks aus beiden Abschnitten BD, DC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC$$

gegeben. In der Verlängerten BC nimm die Abschnitte CF und BG gleich BC, so ist

$$BC^2 + \square BCD = FC^2 + \square FCD$$
$$= \square CFD$$

und . . . . $\square BCD + \square BDC = \square BG . CD + \square BDC$
$$= \square GDC.$$

Folglich ist das gegebene Verhältniss $= \square CFD : \square GDC$*). Mache $\square FD . GH = \square GDC$, so ist jenes Verhältniss $= \square CFD : \square FD . GH$, das ist $= CF : GH$; mithin ist die Linie GH der Lage und Grösse nach gegeben.

---

*) In einer geraden Linie sind also drei Punkte F, C, G gegeben; man soll einen vierten D finden. Die Aufgabe ist deshalb auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufg. 3, Fall 3, gebracht.

Weil nun $\square FD \,.\, GH = \square GDC$, so ist

$$FD : DC = DG : GH$$

und *divid.* . . . . . $FC : CD = DH : HG$,

mithin . . . . $\square CDH = \square CF \,.\, GH$.

Es ist aber $\square CF \,.\, GH$ gegeben, also auch $\square CDH$; und weil die Summe CH der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst, also der Punkt D gegeben.

Determination. Weil zur Construction erforderlich ist, dass BC um $BG = BC$ verlängert, $BC : GH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse gemacht, und die Linie CH im Punkte D so getheilt werde, dass $\square CDH = \square BC \,.\, GH$ sey: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square BC \,.\, GH$ grösser ist als das Quadrat der halben CH; und offenbar wird eine Gränze stattfinden, wenn D die Mitte der CH ist.

1. Das Gränzverhältniss $BC : GH$ sey gefunden. Halbirt man also CH in D, so ist $\square CDH = \square BC \,.\, GH$,

mithin . . . . . . $GH : HD = DC : CB$ oder CF,

also *compon.* . . $GD : DH$ oder $DC = DF : FC$.

Nun haben aber die Summen der homologen Glieder dasselbe Verhältniss, mithin ist

$$GF : FD = DF : FC,$$

also FD die mittlere Proportionale zwischen GF und FC. Daher ist FD gegeben, also CD und die ihr gleiche DH, folglich GH und das Verhältniss $BC : GH$.

Man findet also das Gränzverhältniss, wenn in den Verlängerungen der BC die ihr gleichen Abschnitte CF und BG genommen, FD gleich der mittlern Proportionale zwischen GF, FC gemacht, und $HD = DC$ genommen wird. Ich behaupte nun, dass $\square CDH = \square CF \,.\, GH$, und dass

$$BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC = BC : GH$$

sey. Denn weil $GF : FD = DF : FC$, so ist, wenn man die Differenzen der homologen Glieder nimmt,

$$GD : DC \text{ oder } DH = DF : FC,$$

mithin *divid.* . . . . $GH : HD = DC : CF$

und . . . . $\square CDH = \square CF \,.\, GH$.

Ferner folgt *convert.* aus der vorletzten Proportion

$$DG : GH = FD : DC$$

und . . . . $\square CDG = \square FD \,.\, GH$.

Folglich ist

$$\square CFD : \square CDG \qquad = \square CFD : \square FD.GH,$$

das ist $BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC = CF : GH = BC : GH$.

2. Jetzt ist zu untersuchen, ob $BC : GH$ ein grösstes oder kleinstes Verhältniss sey. Es bleibe die vorige Constru-

ction, und es sey E ein beliebiger Punkt in BC: so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC \text{ mit } CF : GH,$$

oder . . . $\square CFE : \square GEC$ mit $\square CFE : \square GH . FE$

zu vergleichen. Vergleiche daher die Hinterglieder mit einander, nämlich

$$\square GEC \text{ mit } \square GH . FE,$$

also . . . . $FE : EC$ mit $EG : GH$

und *divid.* . . . . $FC : CE$ mit $EH : HG$,

mithin . . . . . . $\square CEH$ mit $\square FC . GH$, das ist

mit $\square CDH$.

Es ist aber offenbar $\square CDH > \square CEH$, weil D die Mitte der CH ist; demnach ist auch

$$\square FC . GH > \square CEH,$$

also . . . . $FC : CE > EH : HG$

und *compon.* . . . . . $FE : EC > EG : GH$

und deshalb . . . . . $\square GEC < \square FE . GH$.

Folglich ist $\square CFE : \square GEC > \square CFE : \square FE . GH$,

das ist $BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC > CF : GH$,

woraus hervorgeht, dass $CF : GH$, das ist $BC : GH$, das kleinste Verhältniss sey.

3. Ich behaupte ferner, dass von zwei Punkten, welche auf einer Seite des Punktes D liegen, der ihm nähere ein kleineres Verhältniss bestimme als der von ihm entferntere.

Weil . . . . . $BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC$

oder . . . . . $\square CFE : \square GEC > CF : GH$

ist, so mache $CF : GK = \square CFE : \square GEC$; so ist $GK < GH$, und, wie in der Analysis, wird sich zeigen lassen, dass $\square CEK = \square FC . GK$ sey. Man nehme nun einen beliebigen Punkt A in der Linie BC, welcher mit E auf einer Seite des Punktes D liegt, aber weiter als E von D entfernt ist: so ist zu vergleichen das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCA : \square BCA + \square BAC \text{ mit } CF : GK,$$

oder . . . . $\square CFA : \square GAC$ mit $\square CFA : \square FA . GK$.

Vergleiche daher die Hinterglieder mit einander, nämlich

$$\square GAC \text{ mit } \square FA . GK.$$

Es werde also verglichen

$$FA : AC \text{ mit } AG : GK$$

und *divid.* . . . . . $FC : CA$ mit $AK : KG$,

also . . . . $\square CAK$ mit $\square FC . GK$, oder

mit $\square CEK$.

Vergleiche auch $\square CDK$ mit $\square CEK$ oder mit $\square FC . GK$.

Weil nun $\square CDK > \square CDH$ oder $\square FC . GH$

und . . . $\square FC . GH > \square FC . GK$ oder $\square CEK$, so ist um so mehr $\square CDK > \square CEK$, woraus erhellt (*Lemma* 8, Zus.), dass auch $\square CEK > \square CAK$ sey. Es ist aber $\square CEK = \square FC.GK$, folglich ist $\square FC.GK > \square CAK$, mithin

$$FC : CA > AK : KG$$

und *compon.* . . . . $FA : AC > AG : GK$,

also . . . . $\square CAG < \square FA.GK$.

Daher ist $\square CFA : \square CAG \qquad > \square CFA : \square FA.GK$,

das ist $BC^2 + \square BCA : \square BCA + \square BAC > CF : GK$.

Es ist demnach bewiesen, dass die vom Punkte D entfernteren Punkte grössere Verhältnisse bestimmen als die ihm näheren. Hieraus folgt zugleich, dass unter allen in BD möglichen Punkten der Punkt B das grösste Verhältniss $\square CFB : \square GBC$ bestimme. Es ist aber $\square CFB : \square GBC = FB : BG$, weil $CF = BC$ ist; und, wenn man BG in L halbirt, $FB : BG = BG : GL$. Folglich ist $\square CFB : \square GBC = BG : GL$, das ist $= 2 : 1$.

Synthesis. Verlängere BC um die Abschnitte CF, BG gleich BC, nimm FD gleich der mittlern Proportionale zwischen GF, FC, mache $DH = DC$ und halbire BG in L: so ist, wie in der Determination gezeigt worden ist, $\square CDH = \square FC.GH$; ferner ist $BC : GH$ das kleinste Verhältniss, $BC : GL$ aber grösser als jedes Verhältnisss, welches irgend ein zwischen B und D genommener Punkt bestimmt. — Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $BC : GH$, so ist D der gesuchte Punkt; denn in der Determination ist bewiesen worden, dass

$$BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC = BC : GH$$

ist. — Wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als $BC : GH$, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Ist das gegebene Verhältniss $p : q$ grösser als $BC : GH$, aber kleiner als $BC : GL$, so mache $BC : GK = p : q$; so liegt K zwischen H und L. Weil nun . . $\square CDK > \square CDH$ oder $\square FC.GH$

und . . . $\square FC.GH > \square FC.GK$,

so ist um so mehr $\square CDK > \square FC.GK$. Daher lässt sich die Linie CK in zwei Punkten E, e zu beiden Seiten des Punktes D so theilen, dass die Rechtecke CEK und CeK beide gleich $\square FC.GK$ sind. Der eine Punkt E liege zwischen C und D; ich behaupte, dass der andere e zwischen B und D falle. Da $FC = CB$, aber $GK > KB$, weil $GL = LB$ und K zwischen L, B ist: so ist $\square FC.GK > \square CBK$, das ist $\square CeK > \square CBK$, woraus folgt, dass e zwischen B und E liegt. Ich behaupte nun, dass beide Punkte E, e das Verlangte leisten.

Denn weil $\square CEK = \square FC.GK$, so ist

$$FC : CE = EK : KG$$

und *compon.* . . . . $FE : EC = EG : GK$,

also . . . . $\square CEG = \square FE.GK$.

Folglich ist $\square CFE : \square CEG \quad = \square CFE : \square FE.GK$,

das ist $BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC = CF : GK = p : q$.

Ebenso wird bewiesen, dass der Punkt e dasselbe leiste.

Ist das gegebene Verhältniss gleich $BC : GL$, so wird, wenn man CL in zwei Punkten E und e so theilt, dass die Rechtecke CEL und CeL gleich $\square FC.GL$ sind, der eine Punkt e in B fallen, und der andere E die Mitte der BC seyn. Denn weil $FC = CB$, und $GL = LB$, so ist $\square FC.GL = \square CBL$, also auch $\square CeL = \square CBL$; mithin fällt e in B. Ferner, weil $\square CeL = \square CEL$, so ist $eL = CE$. Nun ist $eL = BL = \frac{1}{2}BC$, mithin auch $CE = \frac{1}{2}BC$, oder E die Mitte der BC. — Dass nun der Punkt E das Verlangte leiste, kann wie oben bewiesen werden. Für den Punkt e oder B aber ist

$$\square CFe : \square GeC = 2BC^2 : BC^2 \text{ oder } BC : GL.$$

Endlich, wenn das gegebene Verhältniss $p : q$ grösser ist als $BC : GL$, wie $BC : GR$: so lässt sich CR in zwei Punkten E und e so theilen, dass die Recktecke CER und CeR gleich $\square FC.GR$ sind. Weil nun $GR < RB$, so ist $\square FC.GR < \square CBR$, also auch $\square CeR < \square CBR$, woraus folgt, dass e zwischen B und R liegt; und weil der gleichen Rechtecke wegen

$$GR : Re = eC : CF \text{ oder } CB,$$

und $eC > CB$ ist, so ist $GR > Re$. Es ist aber $GR < \frac{1}{2}BC$, also um so mehr Re und somit auch die ihr gleiche $CE < \frac{1}{2}BC$, das ist $BE > EC$. — Dass nun der Punkt E der Aufgabe genüge, erhellt aus dem Obigen. Für den Punkt e aber, welcher zwischen B und G liegt, ist

$$\square CFe = CF^2 + \square FCe = BC^2 + \square BCe, \text{ und}$$
$$\square CeG = \square GB.eC - \square BeC = \square BCe - \square BeC.$$

Weil nun $\square CeG = \square Fe.GR$, was wie früher bewiesen wird: so ist für den Punkt e

$$\begin{aligned} BC^2 + \square BCe : \square BCe - \square BeC &= \square CFe : \square FE.GR \\ &= FC : GR \\ &= BC : GR \\ &= p : q. \end{aligned}$$

Zusatz. Das kleinste Verhältniss $BC : GH$ wird so bestimmt: Es ist GH der Ueberschuss der Linien GF, FC über HF, FC, das ist über $2FD$, weil $HD = DC$ ist. Nun ist die Summe der Linien GF, FC gleich der vierfachen BC, und das Quadrat von FD ist gleich $\square GFC$, das ist gleich $3BC^2$.

Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der BC zu dem Ueberschusse der vierfachen BC über die doppelte Seite desjenigen Quadrats, welches dreimal so gross ist als das Quadrat der BC.

$$BC : 4BC - 2\sqrt{3BC^2}.$$

Anmerkung 1. Soll ein Punkt E in BC gefunden werden, sodass $BE > EC$, und $BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC$ gleich einem gegebenen Verhältnisse $p : q$ sey: so erhellt aus der vorigen Construction, dass $p : q > 2 : 1$ seyn müsse, und dass es nur einen Punkt von der verlangten Eigenschaft in BC gebe.

Anmerkung 2. Soll seyn

$$\square BCD + \square BDC : BD^2 - \square BDC = p : q,$$

so ist *invert.* und *compon.*

$$BD^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC = p + q : p,$$

und nochmals *compon.*

$$BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC = 2p + q : p;$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIte reducirt. Eine Determination findet aber nicht statt. Denn da $BD > DC$ seyn muss, weil $\square BDC$ von BD^2 abgezogen werden soll: so muss, vermöge Anmerk. 1, das gegebene Verhältniss, nämlich $2p + q : p$, grösser als $2 : 1$ seyn; und dieses ist offenbar immer der Fall, es mag $p \gtreqless q$ seyn.

Anmerkung 3. Soll seyn

$$\square BCD + \square BDC : \square CBD + CD^2 = p : q,$$

so ist *invert.* und *compon.*

$$BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BCD = p + q : p,$$

und somit die Aufgabe auf die XIte gebracht.

Für die Determination wird sich ergeben müssen, dass das grösste Verhältniss

$$4BC - 2\sqrt{3BC^2} : 2\sqrt{3BC^2} - 3BC$$

sey. Denn es muss seyn

das kleinste Verh. $p + q : p = CB$ oder $BG : GH$,
also *divid.* - - - $q : p = BH : HG$,
mithin *invert.* - grösste - $p : q = GH : HB$.

Es ist aber nach dem Zusatze

$$GH = 4BC - 2\sqrt{3BC^2}.$$

und . . . . $HB = HF + FC - (BF + FC)$
$= 2FD - 3BC$
$= 2\sqrt{3BC^2} - 3BC.$

Anmerkung 4. Dividirt man das grösste Verhältniss in Anmerk. 3 durch $4 - 2\sqrt{3}$, so erhält man

$$BC : \frac{\sqrt{3BC^2}}{2}.$$

Geometrisch lässt sich dies so beweisen: Mache $CB : BK = GH : HB$, und es sey $RK = KB$, so ist *compon.*

$$CK : KR = GB \text{ oder } CB : BH,$$

also *invert.* und *compon.*

$$RC : CK = HC : CB.$$

Halbire BC in E, so ist $RC = 2EK$. Nimmt man also von den Vordergliedern die Hälften, so ist

$$EK : KC = DC : CB \text{ oder } CF.$$

Ferner halbire EC in A und schliesse nochmals *compon.*, so ist . . . . $2AK : KC = DF : FC$.

Nun ist $DF^2 = 3FC^2$, mithin ist das Quadrat von $2AK$ gleich $3KC^2$, folglich (*Lemma* 12) $BK^2 = 3BE^2$ oder gleich dem dreifachen Quadrate der halben BC.

$$BK = \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2} = \frac{\sqrt{3BC^2}}{2}.$$

Aufgabe XII. Fig. 32.

$$H^2 + Hm : n^2 - mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des Quadrates der gegebenen Linie BC und des Rechtecks aus ihr und dem kleinern Abschnitte BD zum Ueberschusse des Quadrats von dem grössern Abschnitte CD über das Rechteck aus beiden Abschnitten ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, und es sey $CD > BD$, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square CBD : CD^2 - \square BDC$$

gegeben. Verlängere BC um $BF = BC$ und mache $DE = DC$, so ist . . . . . $BC^2 + \square CBD = BF^2 + \square FBD$
$= \square BFD$
und . . . . $CD^2 - \square BDC = ED^2 - \square BDE$
$= \square BED$,
daher ist das Verhältniss $\square BFD : \square BED$, oder, wenn man $\square FD \,.\, BG = \square BED$ macht, $\square BFD : \square FD \,.\, BG$, das ist $FB : BG$, oder $CB : BG$ gegeben, mithin die Linie BG der Lage und Grösse nach. Weil nun $\square FD \,.\, BG = \square BED$, so ist . . . . . $FD : DE$ oder $DC = EB : BG$,
und *compon.* . . . . $FC : CD = EG : GB$.

Mache $GH = GB$ und verdoppele die Hinterglieder, so ist

$$FC : CE = EG : BH,$$

also . . . . $\square\, CEG = \square\, FC \,.\, BH.$

Nun ist $\square\, FC \,.\, BH$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square\, CEG$. Es ist aber die Differenz CG der Seiten bekannt, folglich sind die Seiten selbst gegeben, mithin der Punkt E, also auch der Punkt D.

Determination. In der Analysis ist gezeigt worden, dass $\square\, BFD : \square\, BED$ gleich dem gegebenen Verhältnisse sey. Nun liegt aber der Punkt E zwischen B und F; denn weil CD kleiner als CB, aber grösser als $\frac{1}{2}CB$ ist, so ist $2CD$ oder CE kleiner als $2CB$ oder CF, und grösser als CB. Folglich ist $\square\, BFD > \square\, BED$, und das gegebene Verhältniss muss deshalb das Verhältniss des Grössern zum Kleinern seyn.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$ und $p > q$. Nimm $CB : BG = p : q$, so ist $BG < BC$. Verlängere BC um $BF = BC$ und mache $GH = BG$. Weil $BG < BC$, das ist $GH < BF$: so ist, wenn beiderseits BG hinzukommt, $BH < FG$, also $\square\, CF \,.\, BH < \square\, CFG$. Es ist aber $\square\, CF \,.\, BH > \square\, CBG$. Nimmt man also in der Linie FG den Punkt E so, dass $\square\, CEG = \square\, CF \,.\, BH$, so wird der Punkt E zwischen B und F liegen. Halbire nun CE in D; ich behaupte, dass D der gesuchte Punkt sey.

Denn weil $CE > BC$ und $< CF$, so ist, wenn man die Hälften nimmt, $CD > \frac{1}{2}BC$ und $< BC$. Folglich liegt D zwischen B, C, und es ist $CD > DB$. Weil nun $\square\, CF \,.\, BH = \square\, CEG$, so ist $FC : CE = EG : BH$, und, nimmt man von den Hintergliedern die Hälften,

$$FC : CD = EC : GB,$$

mithin *divid.* . . $FD : DC$ oder $DE = EB : BG$

und . . . . $\square\, BED = \square\, FD \,.\, BG.$

Daher ist

$$\square\, BFD : \square\, BED = \square\, BFD : \square\, FD \,.\, BG$$
$$= FB : BG$$
$$= CB : BG = p : q.$$

Nun ist

$$\square\, BFD = FB^2 + \square\, FBD = BC^2 + \square\, CBD$$

und $$\square\, BED = ED^2 - \square\, BDE = CD^2 - \square\, BDC.$$

Folglich ist

$$BC^2 + \square\, CBD : CD^2 - \square\, BDC = p : q.$$

Anmerkung 1. Die Aufgabe konnte auch auf die XIte gebracht werden; denn es sey

$$H^2 + Hm : n^2 - mn = p : q,$$

so ist *convert.* $H^2 + Hm : 2Hm + 2mn = p : p - q$,

mithin . . . . $H^2 + Hm : Hm + mn = p : \frac{p-q}{2}$.

Anmerkung 2. Soll seyn

$$Hn + m^2 : n^2 - mn = p : q,$$

so ist . . . . . $2Hn + 2m^2 : n^2 - mn = 2p : q$,

und *divid.* . . $H^2 + Hm : n^2 - mn = 2p - q : q$,

mithin ist die Aufgabe auf die XIIte reducirt. Zufolge der Determination der XIIten Aufgabe muss seyn $2p - q > q$, also $2p > 2q$, das ist $p > q$.

Anmerkung 3. Soll seyn

$$Hm + n^2 : m^2 + 2n^2 = p : q,$$

so kann $p \gtreqless q$ seyn.

1. Ist $p = q$, also $Hm + n^2 = m^2 + 2n^2$, so ist, wenn beiderseits m^2 und n^2 abgezogen wird, $mn = n^2$, also $m = n$.

2. Ist $p > q$, so lässt sich die Aufgabe auf die folgende reduciren. Siehe Anmerk. 5 zu Aufg. XIII.

3. Ist $p < q$, so ist, wenn man setzt das erste Glied zum Ueberschusse des zweiten über das erste,

$$Hm + n^2 : n^2 - mn = p : q - p,$$

und, wenn man die Vorderglieder verdoppelt und dann *divid.* schliesst,

$$H^2 + Hm : n^2 - mn = 3p - q : q - p;$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIIte reducirt.

Determination. Zufolge der Determ. zu Aufg. XII. muss seyn $3p - q > q - p$, also $4p > 2q$, oder $2p > q$. Folglich muss das gegebene Verhältniss grösser seyn als das Verhältniss des Einfachen zum Doppelten.

Aufgabe XIII. Fig. 33.

$$H^2 + Hm : mn - n^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des Quadrates der gegebenen Linie BC und des Rechtecks aus ihr und dem grössern Abschnitte CD zum Ueberschusse des Rechtecks aus beiden Abschnitten BD, DC über das Quadrat des kleinern Abschnittes BD ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, und es sey $CD > DB$, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2$$

gegeben. Verlängere BC um $CF = BC$ und mache $DG = BD$:
so ist . . $BC^2 + \square BCD = FC^2 + \square FCD = \square CFD$,
und. . . $\square BDC - BD^2 = \square GDC - GD^2 = \square CGD$.

Das gegebene Verhältniss ist daher gleich $\square CFD : \square CGD$, oder, wenn man $\square FD \,.\, CH = \square CGD$ macht,

$$= \square CFD : \square FD \,.\, CH,$$

das ist . . . . . $= FC : CH$ oder $BC : CH$;
mithin ist die Linie CH der Lage und Grösse nach gegeben. Weil nun $\square FD \,.\, CH = \square CGD$, so ist

$$FD : DG \text{ oder } DB = GC : CH$$

und *compon.* . . . . $FB : BD = GH : HC$.

Verlängere BF um $FK = BF$, so ist

$$KB : BG = FB : BD.$$

Folglich ist . . . . $KB : BG = GH : HC$
und . . . . $\square BGH = \square BK \,.\, CH$.

Nun ist das letztere Rechteck gegeben, also auch das erstere; und weil die Summe BH der Seiten gegeben ist, so sind es die Seiten selbst, also der Punkt G und somit auch der Punkt D.

Determination. Weil $BC : CH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse genommen, $BK = 4BC$ gemacht, und die Linie BH in G so getheilt werden muss, dass $\square BGH = \square BK \,.\, CH$ sey: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square BK \,.\, CH$ grösser ist als das Quadrat der halben BH; und es wird eine Gränze stattfinden, wenn G die Mitte der BH ist.

1. Das Gränzverhältniss $BC : CH$ sey gefunden. Halbire BH in G, so ist der Annahme zufolge $\square BGH = \square BK \,.\, CH$, also

$$KB : BG = GH : HC$$

und *convert.* . . . . $BK : KG = HG$ oder $BG : GC$.
Folglich ist *perm.* und nochmals *convert.*

$$BK : KG = GK : KC,$$

mithin ist KG die mittlere Proportionale zwischen den gegebenen BK, KC. Daher ist KG gegeben, also GB und die ihr gleiche GH, folglich CH und das Verhältniss $BC : CH$.

Man findet also das Gränzverhältniss auf folgende Weise: Nimm $BK = 4BC$ und mache KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC, so ist (*Lemma* 11, *Zus.* 1) $BG > GC$. Macht man also $GH = BG$, so liegt der Punkt H in der Verlängerung von BC. Ich behaupte nun, dass $\square BGH = \square BK \,.\, CH$, und dass, wenn BG in D halbirt wird,

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2 = BC : CH$$

sey. Denn weil KG die mittlere Proportionale ist zwischen BK und KC: so ist

$$BK : KG = GK : KC$$

und *convert.* . . $KB : BG$ oder $GH = KG : GC$,
also *perm.* und *convert.*

$$KB : BG = GH : HC$$

und . . . . $\square BGH = \square BK . CH$.
Ferner weil . . . . $KB : BG = FB : BD$,
so ist . . . . $FB : BD = GH : HC$
und *divid.* $FD : DB$ oder $DG = GC : CH$,
mithin . . . . $\square CGD = \square FD . CH$.
Daher ist $\square CFD : \square CGD = \square CFD : \square FD . CH$
$= FC : CH = BC : CH$.

Es ist aber

$$\square CFD = FC^2 + \square FCD = BC^2 + \square BCD$$

und . . $\square CGD = \square CDG - DG^2 = \square BDC - BD^2$.
Folglich ist

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2 = BC : CH.$$

2. Jetzt ist zu untersuchen, ob $BC : CH$ ein grösstes oder kleinstes Verhältniss sey. Nimm einen beliebigen Punkt E in der Linie BC, sodass $CE > EB$, und mache $EM = BE$: so ist zu vergleichen das Verhältniss

$BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2$ mit $BC : CH$,
das ist . . $\square CFE : \square CME$ mit $\square CFE : \square CH . FE$.

Da nun beide Verhältnisse einerlei Vorderglied haben, so vergleiche die Hinterglieder mit einander, nämlich

$\square CME$ mit $\square CH . FE$,
also . . . . $FE : EM$ oder EB mit $MC : CH$
und *compon.* . . . . . . $FB : BE$ mit $MH : HC$.

Es ist aber $FB : BE = KB : BM$; deshalb werde verglichen

$KB : BM$ mit $MH : HC$,
also . . . . $\square BMH$ mit $\square BK . CH$, das ist
mit $\square BGH$.

Nun ist aber $\square BGH > \square BMH$, weil G die Mitte der BH ist; daher ist auch

$$\square BK . CH > \square BMH,$$

also . . . . $KB : BM > MH : HC$,
das ist . . . . $FB : BE > MH : HC$
und *divid.* . $FE : EB$ oder $EM > MC : CH$;
mithin . . . . $\square CME < \square FE . CH$.
Daher ist $\square CFE : \square CME > \square CFE : \square FE . CH$,
das ist $BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2 > FC$ oder $BC : CH$;
woraus hervorgeht, dass $BC : CH$ das kleinste Verhältniss sey.

Synthesis. Verlängere BC um $CF = BC$ und $FK = BF$, nimm KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK, KC und mache $GH = BG$: so liegt H in der verlängerten BC, ferner ist $\square BGH = \square BK.CH$, und $BC:CH$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Ist also $BC:CH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse, so halbire BG in D; so ist, wie in der Determination gezeigt worden ist,

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2 = BC : CH.$$

Wird ein kleineres Verhältniss gegeben, so ist die Auflösung nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $p : q > BC : CH$, so mache $BC : CR = p : q$; dann ist $CR < CH$. Weil nun

$$\square BK.CH = \square BGH$$

und . . . . $\square BK.RH > \square BG.RH$,

so ist, wenn man Ungleiches von Gleichem abzieht,

$$\square BK.CR < \square BGR.$$

Folglich lässt sich die Linie BR in zwei Punkten M, m zu beiden Seiten des Punktes G so theilen, dass die Rechtecke BMR und BmR gleich $\square BK.CR$ sind. Offenbar liegen aber beide Punkte M, m zwischen B und C, weil $\square BCR < \square BK.CR$ ist. Halbire nun die Abschnitte BM und Bm in E und e: ich behaupte, dass die Punkte E und e beide das Verlangte leisten.

Denn weil $\square BK.CR = \square BMR$, so ist

$KB : BM$, oder $FB : BE = MR : RC$,

also *divid.* . . . $FE : EB$ oder $EM = MC : CR$

und . . . . $\square CME = \square FE.CR$.

Daher ist . . . $\square CFE : \square CME = \square CFE : \square FE.CR$,

das ist $BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2 = FC : CR$

$= BC : CR$

$= p : q$.

Ebenso wird bewiesen, dass der Punkt e der Aufgabe genüge.

Zusatz. Das kleinste Verhältniss $BC : CH$ wird so bestimmt. Es ist CH der Ueberschuss der Linien BK, KC über BK, KH, das ist über $2KG$. Die Linien BK, KC zusammengenommen sind aber gleich dem Siebenfachen der BC, und das Quadrat von KG ist gleich dem $\square BKC$, das ist gleich dem zwölffachen Quadrate der BC. Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der BC zu dem Ueberschusse ihres Siebenfachen über die doppelte Seite des Quadrats, welches zwölfmal so gross ist als das Quadrat der BC.

$$BC : 7BC - 2\sqrt{12BC^2}.$$

Anmerkung 1. Soll seyn

$$Hm + n^2 : mn - n^2 = p : q,$$

so ist nach Verdoppelung der Vorderglieder und *compon.*

$$H^2 + Hm : mn - n^2 = 2p + q : q;$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIIIte gebracht. Für die **Determination** wird sich ergeben müssen, dass das kleinste Verhältniss gleich

$$\sqrt{12BC^2} - 3BC : 7BC - 2\sqrt{12BC^2}$$

sey. Denn es ist vermöge der Determination zu Aufg. *XIII*

das kleinste Verh. $2p+q : q = FC : CH$,

also *divid.* - - - $2p : q = FH : HC$

und . . . . - - - $p : q = \frac{1}{2}FH : HC$.

Es ist aber $FH = FC - CH$

$$= BC - (7BC - 2\sqrt{12BC^2})$$

$$= 2\sqrt{12BC^2} - 6BC;$$

mithin . . . . . $\frac{1}{2}FH = \sqrt{12BC^2} - 3BC$.

Anmerkung 2. Dividirt man das kleinste Verhältniss in Anm. 1 durch $\sqrt{12} - 3$, so erhält man

$$BC : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}BC^2} - BC.$$

Geometrisch lässt sich dies so zeigen. Weil KG die mittlere Proportionale ist zwischen BK und KC, so ist

$$GK : KC = BK : KG$$

und *divid.* . . . . . $GC : CK = BG : GK$,

also *invert.* und *perm.*

$$CK : KG = CG : GB.$$

Daher ist *compon.* $CK + KG : KG = CB : BG$

$$= FB : BH$$

und *divid.* . . . . $CK : KG = FH : HB$,

also *invert.* und *divid.* . $GC : CK = 2CH$*) $: HF$

und nochmals *invert.* . . $KC : CG = FH : 2HC$

$$= \tfrac{1}{2}FH : HC.$$

Das kleinste Verhältniss für die Aufgabe in Anm. 1 ist daher gleich $KC : CG$. Es ist aber KC gleich der dreifachen BC, und CG der Ueberschuss der KG über die KC, das ist der Ueberschuss der Seite des Quadrats, welches dem zwölffachen Quadrate der BC gleich ist, über die dreifache BC. Folglich ist das kleinste Verhältniss

$$= 3BC : \sqrt{12BC^2} - 3BC$$

$$= BC : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}BC^2} - BC.$$

---

*) Denn es ist $HB = HC + CB = HC + CF = 2CH + HF$.

Anmerkung 3. Soll seyn

$$m^2 + 2n^2 : mn - n^2 = p : q,$$

so ist *compon.* $Hm + n^2 : mn - n^2 = p + q : q$,

und, wenn man die Vorderglieder verdoppelt und nochmals *compon.* schliesst,

$$H^2 + Hm : mn - n^2 = 2p + 3q : q;$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIIIte reducirt. Für die **Determination** wird sich ergeben, dass das kleinste Verhältniss gleich

$$3\sqrt{12BC^2} - 10BC : 7BC - 2\sqrt{12BC^2}$$

sey. Denn es ist vermöge der Determination der XIIIten Aufgabe

das kleinste Verh. $2p + 3q : q = FC : CH$,

also *divid.* - - - $2p + 2q : q = FH : HC$,

folglich - - - $p + q : q = \frac{1}{2}FH : HC$

und *divid.* - - - $p : q = \frac{1}{2}FH - HC : HC$.

Es ist aber $\frac{1}{2}FH = \sqrt{12BC^2} - 3BC$

und . . . . $HC = 7BC - 2\sqrt{12BC^2}$,

folglich $\frac{1}{2}FH - HC = \sqrt{12BC^2} - 3BC - (7BC - 2\sqrt{12BC^2})$

$$= 3\sqrt{12BC^2} - 10BC.$$

Anmerkung 4. Dividirt man das kleinste Verhältniss in Anm. 3 durch $3\sqrt{12} - 10$, so erhält man

$$BC : \frac{\sqrt{3BC^2} - BC}{4}.$$

Geometrisch kann dies so bewiesen werden. Weil $BK : KG = GK : KC$, so ist *divid.*

$$BG : GK = GC : CK,$$

also *invert.* $KG : GB$ oder $GH = KC : CG$.

Es ist aber (nach Anm. 2)

$$KC : CG = \tfrac{1}{2}FH : HC,$$

mithin ist . . . . . $KG : GH = \frac{1}{2}FH : HC$

und *divid.* . . . . . $KH : HG = \frac{1}{2}FH - HC : HC$.

Nun ist $KH = KF + FH = BF + FH = 2FG$, folglich

$$KH : HG = 2FG : GH.$$

Weil aber $BK : KG = GK : KC$, so ist *convert.*

$$KB : BG = KG : GC,$$

also . . . . $\square BK . CG = \square BGK$,

und, setzt man beiderseits FG^2 hinzu,

$$\square BK . CG + FG^2 = BF^2 \text{ (\textit{Lemma} 3)}$$
$$= \square KBC \text{ *)};$$

---

*) Denn weil $KB = 2BF$, und $BF = 2BC$: so ist $KB : BF = FB : BC$, also $BF^2 = \square KBC$.

folglich, wenn auf beiden Seiten $\square BK \cdot CG$ abgezogen wird,

$$FG^2 = \square KBG.$$

Daher ist . . . . . $BK : FG = FG : GB$ oder GH
und . . . . $2BK : FG = 2FG : GH$,
oder . . . . $BK : \frac{1}{2}FG = 2FG : GH$.

Es war aber nach dem Obigen

$$2FG : GH = KH : HG = \tfrac{1}{2}FH - HC : HC.$$

Daher ist das kleinste Verhältniss $p : q = BK : \frac{1}{2}FG$. Nun ist

$$FG = GK - KF,$$

und, wenn man GK in L halbirt und beiderseits die Hälfte nimmt, ... $\frac{1}{2}FG = GL - BC$.

Es ist aber $GK^2 = \square BKC$, und, wenn man die vierten Theile nimmt, $GL^2 = \square BCK = 3BC^2$. Folglich ist das kleinste Verhältniss $BK : GL - BC$ gleich dem Verhältnisse der vierfachen BC zu dem Ueberschusse, welchen über BC die Seite des Quadrats hat, welches dem dreifachen Quadrate der BC gleich ist.

Anmerkung 5. Soll seyn

$$Hm + n^2 : m^2 + 2n^2 = p : q,$$

so kann $p \gtreqless q$ seyn. Für $p \eqslantless q$ sind die Auflösungen in der dritten Anmerk. zu Aufgabe XII angedeutet. Ist aber $p > q$, so ist *convert.*

$$Hm + n^2 : mn - n^2 = p : p - q,$$

und, wenn man die Vorderglieder verdoppelt und *compon.* schliesst,

$$H^2 + Hm : mn - n^2 = 3p - q : p - q;$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIIIte zurückgeführt. Für die Determination wird folgen müssen, dass das grösste Verhältniss $p : q$. gleich

$$\sqrt{12BC^2} - 3BC : 3\sqrt{12BC^2} - 10BC$$

sey. Denn es ist vermöge der Determ. der XIIIten Aufgabe

das kleinste Verh. $3p - q : p - q = FC : CH$,
also *divid.* - - - $2p : p - q = FH : HC$,
mithin - - - $p : p - q = \frac{1}{2}FH : HC$
und *convert.* - grösste - $p : q = \frac{1}{2}FH : \frac{1}{2}FH - HC$.

Es ist aber, wie in Anmerk. 3 gezeigt worden ist,

$\frac{1}{2}FH = \sqrt{12BC^2} - 3BC$
und . . . . $\frac{1}{2}FH - HC = 3\sqrt{12BC^2} - 10BC$.

Anmerkung 6. Dividirt man das grösste Verhältniss in Anmerk. 5 durch $\sqrt{12} - 3$, so erhält man

$$BC : \frac{6BC - \sqrt{12BC^2}}{3}.$$

Geometrisch lässt sich dies so herleiten. Es ist

$$BK : KG = GK : KC,$$

also *divid.* BG oder $GH : GK = GC : CK$

und *invert.* . . . . . . $KG : GH = KC : CG.$

Nun ist nach Anmerk. 4

$$KG : GH = \tfrac{1}{2}FH : HC,$$

mithin ist . . . . . . $\tfrac{1}{2}FH : HC = KC : CG$

und *convert.* $\tfrac{1}{2}FH : \tfrac{1}{2}FH - HC = KC : KC - CG.$

Daher ist das grösste Verhältniss gleich $KC : KC - CG$. Macht man nun $CQ = CG$, so ist $KC - CG = KQ$. Die Summe der Linien KG, KQ ist aber gleich $2KC$ oder $6BC$, mithin ist KQ der Ueberschuss der sechsfachen BC über KG oder über die Seite des Quadrats, welches zwölfmal so gross ist als BC^2. Folglich ist das grösste Verhältniss $KC : KC - CG$ gleich dem Verhältnisse der dreifachen BC zu dem Ueberschusse der sechsfachen BC über die Linie, deren Quadrat zwölfmal so gross ist als das Quadrat der BC.

Aufgabe XIV. Fig. 34.

$$H^2 + 2Hm : mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des Quadrats von der gegebenen Linie BC und des doppelten Rechtecks aus ihr und einem ihrer Abschnitte CD zum Rechteck aus beiden Abschnitten BD, DC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + 2\square BCD : \square BDC$$

gegeben. Verlängere BC um $CF = BC$ und halbire CF in G, so ist $BF = 2BC$ und $BC = 2CG$; daher ist $FB : BC = BC : CG$, mithin

$$BC^2 = \square BF \,.\, CG.$$

Ferner ist . . . $2\square BCD = \square BF \,.\, CD.$

Folglich ist $BC^2 + 2\square BCD = \square BF \,.\, GD,$

mithin das gegebene Verhältniss

$$= \square BF \,.\, GD : \square BDC\text{*)}.$$

Macht man nun $\square BH \,.\, GD = \square BDC$, so ist jenes Verhältniss

$$= \square BF \,.\, GD : \square BH \,.\, GD$$
$$= BF : BH.$$

*) Die Aufgabe ist also auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufg. 3, Fall 3, gebracht.

Es ist aber BF bekannt, also auch BH der Lage und Grösse nach. Weil nun $\square BH \,.\, GD = \square BDC$, so ist

$$GD : DC = DB : BH$$

und *divid.* . . . . . $GC : CD = DH : HB$,

also . . . . $\square CDH = \square GC \,.\, BH$.

Nun ist $\square GC \,.\, BH$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square CDH$; und weil die Summe CH der Seiten bekannt ist, so sind die Seiten selbst, also der Punkt D gegeben.

D e t e r m i n a t i o n. Weil zur Construction erforderlich ist, dass BC um $CF = BC$ verlängert, CF in G halbirt, $BF : BH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse genommen, und CH im Punkte D so getheilt werde, dass $\square CDH = \square GC \,.\, BH$ sey: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square GC \,.\, BH$ grösser ist als das Quadrat der halben CH; und es wird eine Gränze stattfinden, wenn D die Mitte der CH ist.

1. Die Gränze sey gefunden. Der Punkt H nämlich sey so genommen, dass, wenn CH in D halbirt wird, $\square CDH = \square GC \,.\, BH$ sey: so ist

$$BH : HD = DC : CG,$$

also *compon.* $BD : DH$ oder $DC = DG : GC$ oder GF,

und nochmals *compon.* $BC : CD = DF : FG$ oder GC,

folglich . . . . $\square CDF = \square BCG$.

Nun ist $\square BCG$ gegeben, also auch $\square CDF$, mithin die Linie CD und die ihr gleiche DH, folglich der Punkt H und das Gränzverhältniss $BF : BH$.

Um also das Gränzverhältniss zu finden, verlängere BC um $CF = BC$, halbire CF in G und nimm in der nach B hin verlängerten FC den Punkt D so, dass $\square CDF = \square BCG$; ich behaupte, dass D zwischen B, C liege, und dass $BD > DC$ sey. Denn wegen der gleichen Rechtecke ist

$$DF : BC \text{ oder } CF = GC : CD.$$

Nun ist offenbar $DF > FC$, mithin auch $GC > CD$. Es ist aber GC die Hälfte der BC. Weil also die Hälfte der BC grösser als CD ist, so liegt der Punkt D zwischen B, C, und es ist $BD > DC$. Macht man also $DH = DC$, so liegt H zwischen B und D. Ich behaupte nun, dass $\square CDH = \square CG \,.\, BH$, und dass

$$BC^2 + 2 \square BCD : \square BDC = FB : BH$$

sey. Denn weil $\square BCG = \square CDF$, so ist

$$BC : CD = DF : CG \text{ oder } FG$$

und *divid.* $BD : DC$ oder $DH = DG : GF$ oder GC

und nochmals *divid.* $BH : HD = DC : CG$,

also . . . . $\square CDH = \square CG \,.\, BH$.

Ferner, weil $BD:DH = DG:GC$ war, ist *convert.*

$$DB:BH = GD:DC,$$

also . . . . $\square BDC = \square DG.BH$.

Folglich ist $\square BF.DG : \square BDC = \square BF.DG : \square DG.BH$
$= FB:BH$.

Es ist aber $\square BF.DG = \square BF.GC + \square BF.CD$
$= BC^2 + 2\square BCD$.

Demnach ist auch

$$BC^2 + 2\square BCD : \square BDC = FB:BH.$$

2. Jetzt ist zu untersuchen, ob $FB:BH$ ein grösstes oder kleinstes Verhältniss sey. Man nehme also einen beliebigen Punkt E in der Linie BC, so ist das Verhältniss $BC^2 + 2\square BCE : \square BEC$ zu vergleichen mit $FB:BH$.

Nun ist . . . . $BC^2 = \square BF.GC$

und . . . . . . $2\square BCE = \square BF.CE$,

also . . $BC^2 + 2\square BCE = \square BF.GE$.

Es werde also verglichen

$\square BF.GE : \square BEC$ mit $FB:BH$, das ist
mit $\square BF.GE : \square BH.GE$;

und weil in beiden Verhältnissen die Vorderglieder gleich sind, so vergleiche die Hinterglieder mit einander, nämlich

$\square BEC$ mit $\square BH.GE$,

also . . . . $EB:BH$ mit $GE:EC$

und *divid.* . . . $EH:HB$ mit $GC:CE$,

also . . . . $\square CEH$ mit $\square GC.BH$ oder $\square CDH$.

Es ist aber offenbar $\square CDH > \square CEH$, weil D die Mitte der CH ist; folglich ist auch

$$\square GC.BH > \square CEH,$$

mithin . . . . $EH:HB < GC:CE$

und *compon.* . . . . $EB:BH < GE:EC$,

also . . . . $\square BEC < \square BH.GE$.

Folglich ist $\square BF.GE : \square BEC > \square BF.GE : \square BH.GE$,

das ist $BC^2 + 2\square BCE : \square BEC > FB:BH$;

woraus hervorgeht, dass $FB:BH$ das kleinste Verhältniss sey,

Synthesis. Verlängere BC um $CF = BC$, halbire CF in G, nimm in der nach B hin liegenden Verlängerung der CF den Punkt D so, dass $\square CDF = \square BCG$ ist, und mache $DH = DC$: so ist $FB:BH$ das kleinste Verhältniss, und $\square CDH = \square GC.BH$. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $FB:BH$, so ist D der gesuchte Punkt, wie oben bewiesen worden ist. — Wenn das gegebene Verhältniss kleiner ist als $FB:BH$, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $p:q$ grösser als $FB:BH$, so sey $FB:BR = p:q$. Dann ist offenbar $BR < BH$

Daher ist . . $\square CDR > \square CDH$ oder $\square GC.BH$.
Es ist aber . . $\square GC.BH > \square GC.BR$,
folglich ist um so mehr $\square CDR > \square GC.BR$, woraus hervorgeht, dass sich die Linie CR in zwei Punkten E und e so theilen lasse, dass die Rechtecke CER und CeR beide gleich $\square GC.BR$ sind. Ich behaupte, dass die Punkte E, e beide das Verlangte leisten. Denn weil $\square CER = \square GC.BR$,
so ist . . . . $GC : CE = ER : RB$
und *compon.* . . . . . $GE : EC = EB : BR$,
mithin . . . . $\square BEC = \square GE.BR$.
Daher ist . . . $\square BF.GE : \square BEC = \square BF.GE : \square GE.BR$,
das ist $BC^2 + 2\square BCE \quad : \square BEC = FB : BR = p : q$.

Ebenso wird bewiesen, dass der Punkt e dasselbe leiste.

Zusatz. Das kleinste Verhältniss $FB : BH$ oder $BC : \frac{1}{2}BH$ wird so bestimmt. Es ist $\square CDF = \square BCG = 2GC^2$, also, wenn auf beiden Seiten GC^2 hinzukommt, $GD^2 = 3GC^2$. Nun ist BH der Ueberschuss der Linie BF über FH, das ist der Ueberschuss von $2BC$ über $2GD$; also, wenn man die Hälften nimmt, $\frac{1}{2}BH$ der Ueberschuss der Linie BC über GD. Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der BC zu dem Ueberschusse derselben über die Seite des Quadrats, welches dem dreifachen Quadrate der halben BC gleich ist.

$$BC : BC - \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}.$$

Anmerkung 1. Halbirt man BH in R, so ist $CB : BR = FB : BH$, mithin ist $CB : BR$ das kleinste Verhältniss der Aufgabe. Weil nun

$$DH = \tfrac{1}{2}CH$$

und $RH = \frac{1}{2}BH$,

so ist . . . . $DR = \frac{1}{2}BC = GC$,
mithin, wenn man CD hinzusetzt, $CR = GD$. Es ist aber $GD^2 = 3GC^2 = \square BGC$, mithin auch $CR^2 = 3GC^2 = \square BGC$, oder CR die mittlere Proportionale zwischen BG und GC.

Anmerkung 2. Soll seyn

$$H^2 + Hm + m^2 : mn = p : q,$$

so ist *compon.* $H^2 + 2Hm \quad : mn = p+q : q$,
mithin ist die Aufgabe auf die XIVte reducirt. Für die Determination wird sich ergeben müssen, dass das kleinste Verhältniss gleich

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2} : BC - \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}$$

sey. Denn es muss seyn vermöge der Determ. zu Aufg. XIV.
das kleinste Verh. $p+q : q = FB : BH$
$= CB : BR$ (Anm. 1),
also *divid.* - - - $p : q = CR : RB$.

Es ist aber $CR = GD = \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}$
und $RB = BC - CR = BC - \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}$.

Anmerkung 3. Fig. 35. Dividirt man das kleinste Verhältniss in Anmerk. 2 durch $\sqrt{\tfrac{3}{4}}$, so erhält man

$$BC : \sqrt{\tfrac{4}{3}BC^2} - BC.$$

Geometrisch lässt sich dies folgendermaassen herleiten. Man nehme $BC : CQ = CR : RB$, so ist *invert.* und *comp.*

$$QB : BC = BC : CR.$$

Halbire QB in M und nimm die Hälften der Vorderglieder, so ist . . . . $MB : BC = GC : CR$, und, wenn man die Quadrate nimmt,

$$MB^2 : BC^2 = GC^2 : CR^2.$$

Da nun (Anm. 1) $CR^2 = 3GC^2$, so ist $BC^2 = 3MB^2$, oder $MB^2 = \tfrac{1}{3}BC^2$, folglich $BQ^2 = \tfrac{4}{3}BC^2$. Es ist aber $CQ = BQ - BC$. Folglich ist das kleinste Verhältniss $CR : RB$, oder $BC : CQ$ gleich dem Verhältnisse der BC zu dem Ueberschusse, welchen über BC die Seite des Quadrats hat, das viermal so gross ist als der dritte Theil des Quadrats von BC.

Anmerkung 4. Soll seyn

$$H^2 + 2m^2 : mn = p : q,$$

so ist *compon.* $H^2 + 2m^2 + mn : mn = p + q : q$,
und nochmals *compon.*

$$H^2 + 2Hm : mn = p + 2q : q,$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIVte zurückgeführt. Determination. Das kleinste Verhältniss ist gleich

$$\sqrt{3BC^2} - BC : BC - \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}.$$

Denn nach der Determ. der XIVten Aufgabe ist

$$\begin{aligned} \text{das kleinste Verh. } p + 2q : q &= FB : BH \\ &= CB : BR, \end{aligned}$$

also *divid.* - - - $p + q : q = CR : RB$ oder RH
und nochmals *divid.* das kl. Verh. $p : q = CH : HR$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } CH = CR - RH &= CR - RB \\ &= 2CR - BC \\ HR = RB &= BC - CR \end{aligned}$$

und . . . . $CR = \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}$, also $2CR = \sqrt{3BC^2}$.

Anmerkung 5. Dividirt man das kleinste Verhältniss der vieten Anmerk. durch $\sqrt{3} - 1$, so erhält man

$$BC : \frac{\sqrt{3BC^2} - BC}{4},$$

welches durch folgende geometrische Schlüsse bewiesen werden kann. Man nehme (Fig. 36) $CF:FP = CH:HR$ und mache $PS = PF$, so ist *compon.*

$$CP:PF \text{ oder } PS = CR:RH \text{ oder } RB$$

und nochmals *compon.*

$$CS:SP = CB:BR,$$

also *convert.* . . . . $SC:CP = BC:CR.$

Halbire CF in G, so ist $SC = 2GP$. Nimmt man also von den Vordergliedern die Hälften, so ist

$$GP:PC = GC:CR,$$

mithin . . . . . . $GP^2:PC^2 = GC^2:CR^2.$

Es ist aber $CR^2 = 3GC^2$, also auch $PC^2 = 3GP^2$. Daher ist, wenn FG in T halbirt wird, (nach *Lemma* 13) $TP^2 = 3FT^2$. Nun ist FP der Ueberschuss der TP über FT, das ist der Ueberschuss, um welchen der vierte Theil der BC von der Linie übertroffen wird, deren Quadrat gleich ist dem dreifachen Quadrate von dem vierten Theile der BC. Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der BC zu dem Ueberschusse, welchen über den vierten Theil der BC diejenige Linie hat, deren Quadrat dreimal so gross ist als das Quadrat von dem vierten Theile der BC.

Anmerkung 6. Soll seyn

$$H^2 + Hm + m^2 : H^2 + 2m^2 = p:q,$$

so ist . . $2H^2 + 2Hm + 2m^2 : H^2 + 2m^2 = 2p:q.$

Daher ist *divid.* aus der zweiten Proportion

$$H^2 + 2Hm : H^2 + 2m^2 = 2p - q:q$$

und *divid.* aus der ersten Proportion

$$mn : H^2 + 2m^2 = p - q:q.$$

Folglich ist aus dem Gleichen

$$H^2 + 2Hm : mn = 2p - q : p - q,$$

und somit die Aufgabe auf die XIVte gebracht. Determination. Offenbar muss das gegebene Verhältniss grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit. Aus der Determination der XIVten Aufgabe aber wird folgen, dass es nicht grösser seyn dürfe als das Verhältniss

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2} : \sqrt{3BC^2} - BC.$$

Denn es muss seyn

das kleinste Verh. $2p - q : p - q = CB:BR,$

also *divid.* - - - $p : p - q = CR:RB$ oder RH

und *convert.* - grösste - $p:q = RC:CH.$

Es ist aber $CR = GD = \sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2}$

und $CH = CR - RB = 2CR - BC$

$$= 2\sqrt{\tfrac{3}{4}BC^2} - BC$$

$$= \sqrt{3BC^2} - BC.$$

Anmerkung 7; Dividirt man das grösste Verhältniss der sechsten Anm. durch $\sqrt{\frac{3}{4}}$, so erhält man

$$BC : 2BC - 2\sqrt{\tfrac{1}{3}BC^2}.$$

Geometrisch kann dies so bewiesen werden. Fig. 35. Man nehme BC oder $CF : FQ = RC : CH$, so ist *convert.*

$$BC : CQ = CR : RB.$$

Folglich ist, wie in Anmerkung 3 gezeigt worden ist, $BQ^2 = \frac{4}{3}BC^2$, also BQ, die doppelte Seite des Quadrats, welches dem dritten Theile des Quadrats von BC gleich ist. Es ist aber $FQ = FB - BQ = 2BC - BQ$. Folglich ist das grösste Verhältniss $BC : FQ$

$$= BC : 2BC - 2\sqrt{\tfrac{1}{3}BC^2}.$$

Aufgabe XV. Fig. 37.

$$2H^2 + Hm : Hm + 2m^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des doppelten Quadrats der gegebenen Linie BC und des Rechtecks aus ihr und einem ihrer Abschnitte CD zur Summe desselben Rechtecks und des doppelten Quadrats von dem genannten Abschnitte CD ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$2BC^2 + \square BCD : \square BCD + 2CD^2$$

gegeben. In der Verlängerung der BC nimm die Abschnitte CF und FK gleich BC, so ist

$$2BC^2 = \square BCK,$$

also . . . . $2BC^2 + \square BCD = \square BC.KD$.

Ferner ist $\square BCD = \square FCD$ und, wenn man $GD = DC$ macht, $2CD^2 = \square GCD$, mithin

$$\square BCD + 2CD^2 = \square FG.CD.$$

Daher ist das gegebene Verhältniss

$$= \square BC.KD : \square FG.CD$$

und, nimmt man $\square FE.KD = \square FG.CD$, auch

$$= \square BC.KD : \square FE.KD, \text{ das ist}$$
$$= BC : FE.$$

Die Linie BC ist aber gegeben, also auch FE der Lage und Grösse nach. — Weil nun $\square FE.KD = \square FG.CD$, so ist . . . . $KD : DC = GF : FE$

und *divid.* . . . . . $KC : CD = GE : EF$.

Mache $FH = FE$ und verdoppele die Hinterglieder, so ist

$$KC : CG = GE : EH$$

und . . . . . . $\square CK . EH = \square CGE.$

Nun ist $\square CK . EH$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square CGE$; und weil die Differenz CE der Seiten bekannt ist, so sind die Seiten selbst, mithin der Punkt G und somit der Punkt D gegeben.

Determination. Weil $BC > CD$, so ist $2BC^2 > 2CD^2$ und

$$2BC^2 + \square BCD > \square BCD + 2CD^2.$$

Folglich muss das gegebene Verhältniss grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$ und $p > q$. In der Verlängerung der BC nimm die Abschnitte CF und FK gleich BC, und von F nach B hin den Abschnitt FE so, dass $CF : FE = p : q$ ist: so liegt E zwischen C und F, weil $p > q$ und deshalb $CF > FE$ ist. Ferner mache $FH = FE$, nimm in der nach B hin verlängerten CE den Punkt G so, dass $\square CGE = \square CK . EH$ ist, und halbire GC in D: ich behaupte, dass D der gesuchte Punkt sey. Denn weil offenbar $CK > EH$, so ist $CK^2 > \square CK . EH$, also auch $CK^2 > \square CGE$. Es ist aber $\square CGE > CG^2$, also um so mehr $CK^2 > CG^2$, mithin $CK > CG$, und, wenn man die Hälften nimmt, $BC > CD$; woraus folgt, dass D zwischen B und C liege. — Weil nun $\square CK . EH = \square CGE$, so ist . . . . $KC : CG = GE : EH$

und nach Halbirung der Hinterglieder

$$KC : CD = GE : EF,$$

also *compon.* . . . . $KD : DC = GF : FE$

und . . . . $\square CD . GF = \square KD . FE.$

Daher ist

$$\square BC . KD : \square CD . GF = \square BC . KD : \square KD . FE$$
$$= BC : FE = p : q.$$

Es ist aber, wie in der Analysis gezeigt worden ist,

$$\square BC . KD = 2BC^2 + \square BCD$$

und $\square CD . GF = \square BCD + 2CD^2$;

folglich ist $2BC^2 + \square BCD : \square BCD + 2CD^2 = p : q.$

Anmerkung 1. Nimmt man in der nach K hin liegenden Verlängerung der CE den Punkt G so, dass $\square CGE = \square CK . EH$, und halbirt CG in D, so ist

$$2BC^2 - \square BCD : 2CD^2 - \square BCD = p : q.$$

Anmerkung 2. Soll seyn

$$H^2 + Hm + m^2 : Hm + 2m^2 = p : q,$$

so ist . . $2H^2 + 2Hm + 2m^2 : Hm + 2m^2 = 2p : q$,
und *divid.* . . . $2H^2 + Hm \quad : Hm + 2m^2 = 2p - q : q$,
mithin ist die Aufgabe auf die XVte gebracht. Das gegebene Verhältniss muss offenbar grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Anmerkung 3. Soll seyn

$$H^2 - m^2 : Hm + 2m^2 = p : q,$$

so ist . . . $2H^2 - 2m^2 : Hm + 2m^2 = 2p : q$
und *compon.* $2H^2 + Hm \quad : Hm + 2m^2 = 2p + q : q$,
mithin ist die Aufgabe auf die XVte gebracht. Eine Determination findet aber nicht statt. Denn es sey $p \gtreqless q$, so ist immer $2p + q > q$, und deshalb das Verhältniss $2p + q : q$ der Determination der XVten Aufgabe entsprechend.

Aufgabe XVI. Fig. 38.

$$2H^2 + m^2 : Hn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe des doppelten Quadrats der gegebenen Linie BC und des Quadrats von einem ihrer Abschnitte CD zum Rechteck aus dem andern Abschnitte BD und der gegebenen Linie BC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$2BC^2 + CD^2 : \square CBD$$

gegeben. Nimm in der verlängerten Linie BC den Abschnitt CG so, dass $\square CG.BD = 2BC^2 + CD^2$ ist: so ist das gegebene Verhältniss

$$= \square CG.BD : \square CBD$$
$$= GC : CB;$$

folglich ist GC gegeben. Mache $\square CG.DE = CD^2$, so ist

$$\square CG.BD = 2BC^2 + \square CG.DE,$$

und, wenn man $\square CG.DE$ auf beiden Seiten abzieht,

$$\square CG.BE = 2BC^2.$$

Weil nun BC, also $2BC^2$ gegeben ist, so ist $\square CG.BE$ gegeben; es ist aber CG bekannt, also auch BE. Da nun $\square CG.DE = CD^2$, so ist

$$ED : DC = DC : CG$$

und *compon.* . . . . $EC : CD = DG : GC$,
mithin . . . . $\square CDG = \square ECG$.

Das letztere Rechteck ist aber seiner bekannten Seiten wegen gegeben, also auch das erstere; und weil die Differenz CG der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst und somit der gesuchte Punkt D gegeben.

Determination. Zur Construction der Aufgabe ist erforderlich, dass der Punkt E zwischen B und C liege, oder dass $BE < BC$ sey. In der Verlängerung der BC mache $CF = BC$, so ist $\square FBC = 2BC^2$. Nun ist aber $\square CG.BE = 2BC^2$, also ist $\square FBC = \square CG.BE$ und $CB:BE = CG:FB$. Es ist aber $CB > BE$, mithin $CG > FB$. Daher ist $GC:CB > FB:BC$ oder $2:1$. Nun war $GC:CB$ das gegebene Verhältniss, folglich muss dieses grösser seyn als das Verhältniss des Doppelten zum Einfachen.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p:q$, und es sey $p > 2q$. In der Verlängerung der BC nimm $CF = BC$, und den Punkt G so, dass $GC:CB = p:q$, so ist $GC > 2CB$, das ist $GC > BF$. In BC nimm den Abschnitt BE so, dass $\square GC.BE = \square FBC$, so wird E zwischen B und C fallen. Denn aus diesen gleichen Rechtecken folgt $GC:BF = CB:BE$. Es ist aber $GC > BF$, also auch $CB > BE$. Endlich nimm in BC den Punkt D so, dass $\square CDG = \square ECG$: so behaupte ich, dass D der gesuchte Punkt sey.

Weil $\square ECG < \square CEG$, so ist auch $\square CDG < \square CEG$, mithin liegt D zwischen E und C. Wegen der gleichen Rechtecke ECG, CDG aber ist

$$EC:CD = DG:GC$$

und *divid.* . . . . . $ED:DC = DC:CG$,

also . . . . . . $\square ED.CG = CD^2$.

Ferner ist $\square BE.CG = \square FBC = 2BC^2$,

mithin ist, wenn man Gleiches zu Gleichem addirt,

$$\square BD.CG = 2BC^2 + CD^2.$$

Folglich ist

$$2BC^2 + CD:\square CBD = \square BD.CG:\square CBD$$
$$= GC:CB = p:q.$$

Anmerkung 1. Soll seyn

$$H^2 + Hm + m^2 : Hn = p:q,$$

so ist *compon.* . . . $2H^2 + m^2 : Hn = p + q : q$,

mithin die Aufgabe auf die XVIte reducirt. Determination. Zufolge der Determ. der XVIten Aufgabe muss seyn $p + q > 2q$, also $p > q$.

Anmerkung 2. Soll seyn

$$2Hm + m^2 : Hn = p:q,$$

so ist nach Verdoppelung der Hinterglieder

$$2Hm + m^2 : 2Hn = p : 2q$$

und *compon.* . . $2H^2 + m^2 : 2Hn = p + 2q : 2q,$

folglich . . . . . $2H^2 + m^2 : Hn = p + 2q : q,$

und somit die Aufgabe auf die XVIte gebracht. Eine Determination findet aber nicht statt. Denn es sey $p \gtreqless q$, so ist immer $p + 2q > 2q$.

Diese Aufgabe kann auch so gelöst werden: In der Verlängerung der BC nimm die Abschnitte CF und $FK = BC$, mache $GK : KF$ gleich dem gegebenen Verhältnisse $p : q$ und nimm in der nach B hin verlängerten GC den Punkt D so, dass $\square CDG = \square BC \,.\, KG$ ist: so wird der Punkt D offenbar zwischen B und C fallen. Ich behaupte, dass er das Verlangte leiste. Denn weil $\square CDG = \square BC \,.\, KG$, so ist

$$BC : CD = DG : GK$$

und *divid.* . . . . . . $BD : DC = DK : KG,$

mithin . . $\square BD \,.\, GK = \square CDK = \square DCK + CD^2$

$$= 2 \square BCD + CD^2.$$

Folglich ist

$$2 \square BCD + CD^2 : \square CBD = \square BD \,.\, GK : \square CBD$$
$$= GK : BC = p : q.$$

Anmerkung 3. Soll seyn

$$H^2 + Hm + m^2 : 2Hm + m^2 = p : q,$$

so ist *convert.* $H^2 + Hm + m^2 : Hn = p : p - q$

und *compon.* $2H^2 + m^2 : Hn = 2p - q : p - q,$

mithin ist die Aufgabe auf die XVIte reducirt. Die Determination ist einleuchtend; es muss nämlich $p > q$ seyn.

Aufgabe XVII. Fig. 39.

$$m^2 + n^2 : mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass die Summe der Quadrate von beiden Abschnitten BD, DC zum Rechtecke derselben ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, so ist das Verhältniss

$$BD^2 + DC^2 : \square BDC$$

gegeben. Daher ist *compon.* $BD^2 + DC^2 + \square BDC : \square BDC$ und nochmals *compon.*

$$BC^2 : \square BDC \text{ (\textit{Lemma} 1)}$$

gegeben. Da nun BC^2 bekannt ist, so ist $\square BDC$ und somit der Punkt D gegeben.

Determination. Halbire BC in E, so ist

$$BD^2 + DC^2 \underset{>}{=} 2BE^2 \quad (\textit{Lemma}\ 9,\ \text{Zus.})$$

und $$\square BDC \underset{<}{=} BE^2 \quad (\textit{Lemma}\ 3,\ \text{Zus. } 2);$$

daher ist $BD^2 + DC^2 : \square BDC \underset{>}{=} 2BE^2 : BE^2$, oder $2:1$. Das gegebene Verhältniss darf also nicht kleiner seyn als das Verhältniss des Doppelten zum Einfachen.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p:q$, und es sey p nicht kleiner als $2q$. Ist nun $p = 2q$, so halbire BC in E; so ist E der gesuchte Punkt. Denn es ist

$$BE^2 + EC^2 = 2BE^2$$

und . . . . $\square BEC = BE^2$,

folglich . . . . $BE^2 + EC^2 : \square BEC = 2:1$

$$= p:q.$$

Ist aber $p > 2q$, so nimm in einer geraden Linie $MN = p$ und $NO = OP = q$, so ist $MN > 2\,OP$, also $MP > 4PO$. Nimmt man also in BC den Punkt G so, dass $BC : CG = MP : PO$, so ist auch $BC > 4CG$, also $BC^2 > 4 \square BCG$, und (*Lemma* 1, Zus.) $BE^2 > \square BCG$. Daher lässt sich die Linie BC in zwei Punkten D und d zu beiden Seiten des Punktes E so theilen, dass die Rechtecke BDC und BdC gleich $\square BCG$ sind. Ich behaupte, dass die Punkte D und d beide das Verlangte leisten. Denn weil $\square BDC = \square BCG$,

so ist . . . . . $BC^2 : \square BDC = BC^2 : \square BCG$

$$= BC : CG = MP : PO.$$

Daher ist *dividendo*

$$BD^2 + DC^2 + \square BDC : \square BDC = MO : OP$$

und nochmals *dividendo*

$$BD^2 + DC^2 : \square BDC = MN : NO$$

$$= p:q.$$

Ebenso wird bewiesen, dass der Punkt d dasselbe leiste.

Aufgabe XVIII. Fig. 40.

$$m^2 - n^2 : mn.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass der Unterschied der Quadrate von beiden Abschnitten BD, DC zum Rechtecke aus ihnen ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, und es sey $BD > DC$, so ist das Verhältniss

$$BD^2 - DC^2 : \square BDC$$

gegeben. Mache $DE = CD$, so ist

$$BD^2 - DC^2 = \square CBE.$$

Ferner mache $\square BE.CF = \square BDC$, so ist das gegebene Verhältniss

$$= \square CBE : \square BE.CF$$
$$= BC : CF.$$

Es ist aber BC gegeben, also auch CF. Weil nun $\square BDC = \square BE.CF$, so ist

$$DB : BE = FC : CD$$

und *convert.* . . $BD : DE$ oder $DC = CF : FD$.

Mache $FG = FC$, so ist

$$BD : DC = GF : FD,$$

also *invert.* und *compon.*

$$CB : BD = DG : GF$$

und . . . $\square BDG = \square BC.GF = \square BCF$.

Es ist aber $\square BCF$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BDG$; und weil die Differenz BG der Seiten dieses Rechtecks gegeben ist, so sind die Seiten selbst, mithin der Punkt D gegeben.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$. Mache $BC : CF = p : q$, und $FG = CF$, und nimm in der nach C hin verlängerten BG den Punkt D so, dass $\square BDG = \square BC.FG$ ist: so wird der Punkt D zwischen B und C liegen, weil $\square BC.FG < \square BCG$ ist; und, wenn der Punkt F in der Linie BC ist, wird der Punkt D zwischen F und C liegen, weil dann $\square BC.FG > \square BFG$ ist. Ich behaupte, dass der Punkt D das Verlangte leiste.

Denn weil $\square BC.FG = \square BDG$, so ist

$$CB : BD = DG : GF,$$

also *divid.* und *invert.*

$$BD : DC = GF \text{ oder } CF : FD.$$

Da nun $GF > FD$, denn es ist $GF = FC$: so ist $BD > DC$. Macht man also $DE = DC$, so liegt E zwischen B, D, und es ist

$$BD : DE = CF : FD.$$

Daher ist *convert.* $DB : BE = FC : CD$

und . . . . . . $\square BE.FC = \square BDC$.

Ferner ist . . . . $\square CBE = BD^2 - DC^2$.

Folglich ist

$$BD^2 - DC^2 : \square BDC = \square CBE : \square BE.FC$$
$$= BC : CF = p : q.$$

Anmerkung 1. Wenn $p = 2q$, so fällt G in B; alsdann ist GD oder BD die mittlere Proportionale zwischen BC und CF. Eine bessere Auflösung ist daher vielleicht folgende (Fig. 41). In der Verlängerung der BC nimm den Punkt H so, dass $CB : BH = p : q$, und mache $HG = BH$:

so ist $\square CBH < \square CBG$; daher lässt sich die Linie CG in zwei Punkten zu beiden Seiten des Punktes B so theilen, dass das Rechteck aus den Abschnitten durch je einen Punkt gleich $\square CBH$ ist. Es sey D der in BC liegende Punkt: so ist er der gesuchte. Denn wegen der gleichen Rechtecke CBH, CDG ist

$$DG : BH \text{ oder } GH = BC : CD$$

und *divid.* . . . . $DH : HB = BD : DC.$

Nun ist $DH > HB$, also $BD > DC$. Macht man also $DE = DC$, so liegt E zwischen B, D, und es ist

$$DH : HB = BD : DE$$

und *divid.* . . . . $DB : BH = BE : ED$ oder DC,

mithin . . . . . . $\square BDC = \square EBH.$

Es ist aber $BD^2 - DC^2 = \square CBE.$

Folglich ist

$$BD^2 - DC^2 : \square BDC = \square CBE : \square EBH$$
$$= CB : BH = p : q.$$

Anmerkung 2. Nimmt man den Punkt D in Fig. 40 in der andern Verlängerung der BG, oder in Fig. 41 auf der andern Seite des Punktes B (also zwischen G und H, weil $\square CBH < \square CHG$ ist): so ist in beiden Fällen

$$CD^2 - DB^2 : \square BDC = p : q.$$

Aufgabe XIX. Fig. 42.

$$m^2 - n^2 : Hn + n^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass der Unterschied der Quadrate von beiden Abschnitten BD,DC zur Summe des Quadrats vom kleinern Abschnitte BD und des Rechtecks aus ihm und der gegebenen Linie BC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der Punkt D sey gefunden, und es sey $CD > DB$, so ist das Verhältniss

$$CD^2 - DB^2 : \square CBD + BD^2$$

gegeben. Mache $DE = BD$ und $BF = BC$, so ist

$$CD^2 - DB^2 = \square BCE$$

und . . . . . . $\square CBD + BD^2 = \square FBD + BD^2$
$$= \square FDB = \square FDE.$$

Daher ist das gegebene Verhältniss

$$= \square BCE : \square FDE$$

oder, wenn man $\square CE . FH = \square FDE$ macht,

$$= \square BCE : \square CE . FH$$
$$= BC : FH;$$

daher ist die Linie FH gegeben. Weil nun $\square CE.FH = \square FDE$, so ist

$$CE:ED = DF:FH$$

und *compon.* . $CD:DE$ oder $DB = DH:HF$.

Mache $HG = FH$, so ist

$$CD:DB = DH:HG$$

und *compon.* . . . . $CB:BD = DG:GH$,

also . . . . $\square BDG = \square BC.GH$.

Es ist aber $\square BC.GH$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BDG$; und weil die Differenz BG der Seiten bekannt ist, so sind es die Seiten selbst und somit der Punkt D.

Synthesis. Verlängere BC um $BF = BC$, mache $BF:FH$ gleich dem gegebenen Verhältnisse $p:q$, nimm $HG = FH$, und in der nach B hin verlängerten BG nimm den Punkt D so, dass $\square BDG = \square BC.GH$ ist: so behaupte ich, dass D der gesuchte Punkt sey. Denn weil $\square BC.GH < \square BCG$, so ist auch $\square BDG < \square BCG$, mithin liegt D zwischen B und C. Wegen der gleichen Rechtecke aber ist

$$CB:BD = DG:GH$$

und *divid.* . . . . $CD:DB = DH:HG$ oder HF.

Weil nun $DH > HF$, so ist $CD > DB$. Macht man also $DE = DB$, so liegt E zwischen D, C, und es ist

$$CD:DE = DH:HF.$$

Daher ist *divid.* $CE:ED = DF:FH$

und . . . . . . $\square CE.FH = \square EDF = \square BDF$.

Folglich ist

$$\square BCE : \square BDF = \square BCE : \square CE.FH,$$

das ist $CD^2 - DB^2 : \square CBD + BD^2 = BC:FH = p:q$.

Anmerkung 1. Nimmt man den Punkt D in der andern Verlängerung der Linie BG, so ist

$$CD^2 - DB^2 : BD^2 - \square CBD = p:q.$$

Anmerkung 2. Soll seyn

$$m^2 - n^2 : Hm + n^2 = p:q,$$

so ist, wenn man setzt das erste Glied zum Ueberschusse des zweiten über das erste

$$m^2 - n^2 : Hn + n^2 = p : q - p,$$

mithin ist die Aufgabe auf die XIXte gebracht. Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar das Verhältniss des Kleinern zum Grössern seyn.

Anmerkung 3. Soll seyn

$$Hm + n^2 : Hn + n^2 = p:q,$$

so kann $p \gtreqless q$ seyn. 1) Ist $p = q$, so ist $Hm + n^2 = Hn + n^2$, also $Hm = Hn$ und $m = n$, mithin der gesuchte Punkt die Mitte der BC. 2) Ist $p > q$, so ist *divid.*

$$m^2 - n^2 : Hn + n^2 = p - q : q,$$

mithin die Aufgabe auf die XIXte gebracht. 3) Ist aber $p < q$, so vergleiche Anmerkung 2 zu Aufgabe XX.

Aufgabe XX. Fig. 43.

$$m^2 - n^2 : Hm + m^2.$$

In einer geraden Linie sind zwei Punkte B, C gegeben; zwischen ihnen einen dritten D zu finden, sodass der Unterschied der Quadrate von beiden Abschnitten BD, DC zur Summe des Quadrats von dem grössern Abschnitte CD und des Rechtecks aus ihm und der gegebenen Linie BC ein gegebenes Verhältniss habe.

Analysis. Der gesuchte Punkt D sey gefunden, und es sey $CD > DB$, so ist das Verhältniss

$$CD^2 - DB^2 : \square BCD + CD^2$$

gegeben. Mache $CF = BC$ und $DE = DC$, so ist

$$CD^2 - DB^2 = \square CBE$$

und . . . . . . $\square BCD + CD^2 = \square FCD + CD^2$

$$= \square FDC = \square FDE.$$

Daher ist das gegebene Verhältniss

$$= \square CBE : \square FDE$$

oder, wenn man $\square BE . FH = \square FDE$ macht,

$$= \square CBE : \square BE . FH$$

$$= BC : FH;$$

mithin ist FH gegeben. Weil nun $\square BE . FH = \square FDE$, so ist . . . . $DE : EB = HF : FD$.

Nun ist $DE > EB$, weil E in der verlängerten BC liegt; daher ist $HF > FD$, und D liegt zwischen C, H. Aus der obigen Proportion folgt aber *convert.*

$$ED \text{ oder } CD : DB = FH : HD.$$

Mache $HG = FH$, so ist

$$CD : DB = GH : HD,$$

also *invert.* und *compon.*

$$BC : CD = DG : GH$$

und . . . . . . $\square BC . GH = \square CDG$.

Es ist aber $\square BC . GH$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square CDG$; und weil die Summe CG der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst und somit der Punkt D gegeben.

Determination. Weil in der Analysis gezeigt worden ist, dass der Punkt D zwischen C und H liege, und weil $CH < HG$, denn es ist $CH < FH$, und $FH = HG$: so ist $\square CDG < \square CHG$ (*Lemma* 7). Nun ist $\square CDG = \square BC \,.\, GH$, mithin ist $\square BC \,.\, GH < \square CHG$, und demnach $BC < CH$, also $BF < FH$. Folglich ist $BC : FH < BC : BF$, oder $1 : 2$. Es war aber $BC : FH$ das gegebene Verhältniss, folglich muss dieses kleiner seyn als das Verhältniss des Einfachen zum Doppelten.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $p : q$, und es sey $2p < q$. In der Verlängerung der BC nimm $CF = BC$ und von F nach B hin den Abschnitt FH so, dass $CF : FH = p : q$ ist: so ist $2CF$ oder $FB < FH$, mithin liegt der Punkt H in der Verlängerung von FB. Macht man nun $HG = FH$, so ist $BG > HG$, also $\square CBG > \square CB \,.\, HG$. Deshalb lässt sich die Linie CG in zwei Punkten zu beiden Seiten des Punktes B so theilen, dass das Rechteck der Abschnitte durch je einen Punkt gleich $\square CB \,.\, HG$ ist. Es sey nun D der in BC liegende Theilungspunkt: ich behaupte, dass er das Verlangte leiste. Denn weil $\square CDG = \square CB \,.\, HG$, so ist . . . . $BC : CD = DG : GH$, also *divid.* und *invert.*

$$CD : DB = GH \text{ oder } FH : HD.$$

Weil nun $FH > HD$, so ist $CD > DB$. Macht man also $DE = CD$, so liegt E in der verlängerten BC, und es ist

$$ED : DB = FH : HD$$

und *convert.* . . . . $DE : EB = HF : FD$,
also . . . . . . $\square BE \,.\, FH = \square EDF = \square CDF$.

Daher ist

$$\square CBE : \square CDF = \square CBE : \square BE \,.\, FH$$
$$= BC : FH = p : q.$$

Es ist aber, wie in der Analysis gezeigt worden ist,

$$\square CBE = CD^2 - DB^2$$
und $$\square CDF = \square BCD + CD^2.$$

Folglich ist

$$CD^2 - DB^2 : \square BCD + CD^2 = p : q.$$

Anmerkung 1. Nimmt man den Punkt D auf der andern Seite des Punktes B, so leistet er dasselbe.

Anmerkung 2. Soll seyn

$$Hm + n^2 : Hn + n^2 = p : q,$$

so kann $p \gtreqless q$ seyn. Für $p \geqq q$ ist die Auflösung angedeutet in Anm. 3 zu Aufgabe XIX. Ist aber $p < q$, so ist, wenn man setzt den Ueberschuss des zweiten Gliedes über das erste zum zweiten,

$$n^2 - m^2 : Hn + n^2 = q - p : q,$$

das ist . . . $m^2 - n^2 : Hm + m^2 = q - p : q$,

und somit ist die Aufgabe auf die XXste gebracht. **Determination.** Zufolge der Determ. der Aufgabe XX muss seyn $2(q-p) < q$, das ist $2q - 2p < q$, und $q < 2p$ oder $p : q > 1 : 2$.

Construction

des rechtwinkligen Dreiecks

aus gegebenen Stücken.

In den Analysen werden folgende leichte Aufgaben vorausgesetzt:

1) m, n	4) H, S	7) $P, m - n$
2) H, m	5) S, m	8) $S, H + s$
3) H, P	6) m, P	9) $S, H - s$

Aufgabe 1. Fig. 44. 45.

$$H,\ m^2 - n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) der Unterschied der Quadrate von ihren Abschnitten; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Weil

$$m^2 - n^2 = \square\,(m+n)(m-n)\ \ (\textit{Lemma}\ 3,\ \text{Zus.}\ 3)$$
$$= \square\ \ H\,(m-n),$$

so ist $\square\, H\,(m-n)$ gegeben. Es wird aber H gegeben, also ist (*Dat.* 61) $m-n$ und somit m und n selbst gegeben *).

Determination. Weil $m^2 < H^2$, und um so mehr $m^2 - n^2 < H^2$, so muss die gegebene Fläche kleiner seyn als das Quadrat der gegebenen Hypotenuse.

Anmerkung 1. Die Aufgabe

$$H,\ S^2 - s^2$$

ist einerlei mit der obigen, weil (nach *Lemma* 15, Zus. 2)

$$S^2 - s^2 = m^2 - n^2.$$

Anmerkung 2. Die obige Analysis ist offenbar ganz unabhängig von dem Winkel, welcher der Seite H gegenübersteht. Die allgemeine Auflösung ist folgende.

Es sey BC die gegebene Seite, V der gegebene Winkel, welcher dieser Seite gegenübersteht, und a^2 die gegebene Fläche.

Beschreibe über BC den Kreisabschnitt BOC, welcher des Winkels V fähig ist.

---

*) Wenn die Summe $m+n=s$ und die Differenz $m-n=d$ zweier Grössen m und n gegeben ist, so sind beide Grössen bekannt. Die grössere m ist $= \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$, und die kleinere $n = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$.

1. Ist W. V kein spitzer, so sey $a^2 < BC^2$. Nimm in BC (Fig. 44) den Abschnitt CE so, dass $\square BCE = a^2$ ist, halbire BE in D, errichte in diesem Punkte auf BC einen Perpendikel, welcher die Kreislinie in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn BC ist die gegebene Basis, W. $BAC = V$ nach der Construction, und $CD^2 - DB^2 = \square BCE$ (*Lemma* 4, Zus.) $= a^2$.

2. Ist Winkel V ein spitzer, so kann a^2 gleich BC^2 oder kleiner oder grösser seyn.

a) Ist $a^2 < BC^2$, so construire, wie vorhin gelehrt worden ist.

b) Ist $a^2 = BC^2$, so ziehe durch C den Durchmesser CA und verbinde AB, so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn weil AB senkrecht auf BC steht, so ist der eine Abschnitt der Basis $= BC$, und der andere $= 0$.

c) Ist $a^2 > BC^2$, so ziehe (Fig. 45) den Radius $FG \parallel BC$, fälle GH senkrecht auf BC und mache $HK = HB$. Obenbar berührt GH den Kreis, und es darf a^2 nicht grösser seyn als $CH^2 - HB^2$ oder als $\square BCK$.

Ist nun $a^2 = \square BCK$, so verbinde GB und GC; so ist $\triangle GBC$ das gesuchte.

Ist aber $a^2 < \square BCK$, so sey $\square BCE = a^2$. Halbire BE in D und errichte in diesem Punkte auf BK einen Perpendikel, so wird derselbe die Peripherie in zwei Punkten A und a schneiden, weil der Punkt D zwischen B und H liegt. Verbinde AB und AC, sowie aB und aC: so werden die $\triangle\triangle\, ABC$ und aBC beide der Aufgabe genügen. Denn weil $DE = DB$, so ist $CD^2 - DB^2 = \square BCE = a^2$.

Das grösste Rechteck BCK wird so bestimmt: Verlängere FG nach M in der Peripherie und fälle MN senkrecht auf BC, so ist $HN = GM$, also HN gleich dem Durchmesser des Kreises. Fälle auch FL senkrecht auf BC, so ist $HL = LN$ und $BL = LC$, also HB oder $HK = CN$. Daher ist $CK = HN = GM$ und $\square BCK = \square BC \,.\, GM$. Folglich ist die grösste Fläche a^2 gleich dem Rechteck aus der Basis und dem Durchmesser des Kreises.

Aufgabe 2. Fig. 44—46.

$$m - n, \quad m^2 - n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Unterschied der Abschnitte in der Hypotenuse und 2) der Unterschied ihrer Quadrate; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Weil $m^2 - n^2 = \square(m-n)H$ und $m-n$ gegeben wird, so ist H gegeben, also auch m und n.

Determination. Weil $H > m-n$, so ist $\square H(m-n) > (m-n)^2$. Es ist aber $\square H(m-n)$ gleich der gegebenen Fläche $m^2 - n^2$; folglich muss diese grösser seyn als das Quadrat von der gegebenen Differenz der Abschnitte m und n.

Anmerkung 1. Einerlei mit der obigen Aufgabe ist $m-n$, $S^2 - s^2$.

Anmerkung 2. Die zweite Aufgabe wird allgemein so gelöst:

Es sey CE die gegebene Differenz der Abschnitte, a^2 die gegebene Fläche, und V der gegebene Winkel.

1. Ist V kein spitzer Winkel, so muss $a^2 > CE^2$ seyn. Man nehme in der Verlängerung der CE (Fig. 44) den Punkt B so, dass $\square BCE = a^2$, beschreibe über BC einen Kreisabschnitt BOC, welcher des Winkels V fähig ist, halbire BE in D, errichte in diesem Punkte auf BC einen Perpendikel, welcher die Kreislinie in A treffe, und verbinde AB und AC: so wird $\triangle ABC$ das gesuchte seyn.

2. Ist V ein spitzer Winkel, so darf a^2 nicht kleiner als CE^2 seyn.

a) Ist $a^2 = CE^2$, so beschreibe (Fig. 46) über CE ein des Winkels V fähiges Kreissegment COE, ziehe den Durchmesser CA und verbinde AE; so ist $\triangle AEC$ das gesuchte, weil CE die Differenz der Abschnitte in der Basis ist.

b) Ist $a^2 > CE^2$, so kann das gesuchte $\triangle$ spitzwinklig oder stumpfwinklig seyn. Soll es stumpfwinklig seyn, so beschreibe (Fig. 46) über CE ein des Winkels V fähiges Segment COE, ziehe wie in Fig. 45 die Tangente GH senkrecht auf CE und mache $HK = HE$: so ist $CH^2 - HE^2$ oder $\square ECK$ das *maximum*. Ist nun $a^2 = \square ECK$, so verbinde GC und GE: so ist $\triangle GCE$ das verlangte. Ist $a^2 < \square ECK$, so mache $\square ECB = a^2$, halbire BE in D, errichte in diesem Punkte auf BC eine Senkrechte, welche die Kreislinie in A und a schneide, und verbinde AC, AE und aC, aE: so sind ACE und aCE beide die gesuchten Dreiecke. — Soll das gesuchte $\triangle$ spitzwinklig seyn, so findet keine Gränze statt. Die Construction wird wie unter 1 gemacht.

Aufgabe 3. Fig. 47.

$$H + m,\ H^2 - m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, und

2) der Unterschied der Quadrate von den genannten Linien; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CD \text{ und } BC^2 - CD^2.$$

Verlängere BC um $CE = BC$, so ist $DE = BC + CD$, mithin ist DE der Grösse nach gegeben. Weil aber $BC = CE$, so ist

$$BC^2 - CD^2 = \square BDE \ (\textit{Lemma } 3, \text{ Zus. } 3).$$

Daher ist $\square BDE$ gegeben, mithin, weil DE gegeben wird, ist auch (*Dat.* 61) BD gegeben. Folglich ist die Linie BE, also ihre Hälfte BC und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Offenbar ist $BD < DE$, mithin $\square BDE < DE^2$. Die gegebene Fläche muss also kleiner seyn als das Quadrat der gegebenen Linie.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm DE gleich der gegebenen Linie, und DF gleich der Seite des Quadrats, welches der gegebenen Fläche gleich ist, und es sey $DF < DE$. Verbinde EF und errichte auf ihr im Punkte F eine senkrechte, welche die verlängerte ED in B schneide: so ist $\square BDE = DF^2$. Weil nun $DF < DE$, so ist $DF^2 < DE^2$, mithin $\square BDE < DE^2$, also $BD < DE$. Halbirt man also BE in C, so liegt C zwischen D und E. Ueber BC beschreibe einen Halbkreis, welcher den Perpendikel DF in A schneide, und verbinde AB und AC: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn weil $BC = CE$, so ist

$$BC + CD = DE$$

$$\text{und } BC^2 - CD^2 = \square BDE = DF^2.$$

Anmerkung 1. Die Aufgabe

$$H^2 - m^2, \ n$$

kommt auf die obige zurück. Denn es ist

$$\square BDE = H^2 - m^2$$

$$\text{und} \quad BD = n;$$

mithin ist auch $DE = H + m$ gegeben. **Determination.** Weil $ED > DB$, so ist $\square BDE > BD^2$. Die gegebene Fläche muss also grösser seyn als das Quadrat des gegebenen Abschnittes.

Anmerkung 2. Die obige Analysis ist unabhängig vom Winkel BAC und gilt daher für jedes Dreieck.

Aufgabe 4. Fig. 48.

$H + P, \; S^2 + n^2.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und Höhe, und 2) die Summe der Quadrate von der einen Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + AD \text{ und } AC^2 + BD^2.$$

Nach *Lemma* 15, Zus. 1 ist $AC^2 + BD^2 = BC^2 - AD^2$. Macht man nun in BC die Abschnitte CF und CE gleich AD, so ist

$$\begin{aligned} BC^2 - AD^2 &= BC^2 - CE^2 \\ &= \square\, EBF \text{ (\textit{Lemma} 4, Zus.)}, \end{aligned}$$

mithin ist $\square\, EBF$ gegeben. Es ist aber die eine Seite $BE = BC + AD$ gegeben, also auch die andere Seite BF (*Dat.* 61). Daher ist FE, also die Hälfte CE oder AD bekannt, und die Aufgabe auf H, P gebracht.

Determination. Offenbar ist $\square\, EBF < BE^2$. Weil aber $BC \geqq 2AD$ *), so ist $BC \geqq 2CF$, also $BF \geqq FC$, das ist $BF \geqq \frac{1}{3}BE$. Macht man also $BG = \frac{1}{3}BE$, so ist $\square\, EBF \geqq \square\, EBG$, das ist $\square\, EBF \geqq \frac{1}{3}BE^2$. Daher muss die gegebene Fläche kleiner seyn als das Quadrat von der gegebenen Linie, aber nicht kleiner als der dritte Theil desselben.

Synthesis. Es sey BE die gegebene Summe der Hypotenuse und Höhe. Nimm $BG = \frac{1}{3}BE$, und die gegebene Fläche sey kleiner als BE^2, aber nicht kleiner als $\square\, EBG$. Ist nun $\square\, EBG$ gleich der gegebenen Fläche, so halbire GE in C; dann ist $CE = \frac{1}{2}BC$, und es lässt sich also über BC als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck construiren, dessen Höhe gleich CE ist. Es ist aber klar, dass dieses Dreieck das Verlangte leiste. — Wenn aber die gegebene Fläche, wie $\square\, EBF$, grösser ist als $\square\, EBG$ und kleiner als BE^2, so halbire FE in C; dann ist offenbar $CE < \frac{1}{2}BC$. Daher lassen sich über der Hypotenuse BC zwei rechtwinklige Dreiecke construiren, deren Höhen gleich CE sind; und es ist leicht zu beweisen, dass beide Dreiecke der Aufgabe genügen werden.

---

*) Die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ist nicht grösser als die halbe Hypotenuse.

Anmerkung. Ebenso lässt sich die Aufgabe

$$H - P,\ S^2 + n^2$$

behandeln. Es ist nämlich

$$BF = H - P$$

$$\square EBF = S^2 + n^2,$$

daher ist EB gegeben, und die Aufgabe auf H, P gebracht. Determination. Es ist offenbar $\square EBF > BF^2$. Weil aber $BF \geqq \frac{1}{3} BE$, das ist $3BF \geqq BE$, so ist, wenn $BH = 3BF$ gemacht wird, $\square HBF \geqq \square EBF$, das ist $3BF^2 \geqq \square EBF$. Die gegebene Fläche muss also grösser seyn als das Quadrat der gegebenen Linie, aber nicht grösser als das Dreifache desselben.

Aufgabe 5. Fig. 49.

$$HP + P^2,\ P.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Höhe und 2) die Summe des Quadrats der Höhe und des Rechtecks aus ihr und der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle\ ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AD \text{ und } \square BC \,.\, AD + AD^2.$$

Verlängere BC um $CE = AD$, so ist $\square BC \,.\, AD + AD^2 = \square BEC$. Daher ist $\square BEC$ gegeben. Es ist aber die eine Seite CE dieses Rechtecks gegeben, also auch (*Dat.* 61) die andere BE, mithin BC und das $\triangle\ ABC$.

Determination. Weil $BC \geqq 2AD$ oder $2CE$, so ist $BE \geqq 3CE$. Mache $EF = 3CE$, so ist $BE \geqq FE$, mithin $\square BEC \geqq \square FEC$ oder $3CE^2$. Die gegebene Fläche darf also nicht kleiner seyn als das dreifache Quadrat der gegebenen Höhe.

Synthesis. Es sey CE die gegebene Höhe, und die gegebene Fläche sey nicht kleiner als $3CE^2$. Mache $FE = 3CE$, so ist $\square FEC = 3CE^2$. Ist nun die gegebene Fläche gleich $\square\ FEC$, so ist FC die Hypotenuse des gesuchten Dreiecks. — Ist aber die gegebene Fläche grösser als $\square FEC$, wie $\square BEC$: so ist $BC > FC$, also $BC > 2CE$. Daher lassen sich über BC zwei rechtwinklige Dreiecke mit der Höhe CE beschreiben, und es ist klar, dass beide der Aufgabe genügen werden.

Anmerkung. Die Analysis ist unabhängig vom W. BAC.

Aufgabe 6. Fig. 50.

$$H+P, \quad HP+P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und der Höhe, und 2) die Summe des Rechtecks aus beiden Linien und des Quadrats der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC+AD \text{ und } \square BC.AD+AD^2.$$

Verlängere BC um $CE=AD$, so ist

$$BC+AD=BE$$

und . . . . $\square BC.AD+AD^2=\square BEC.$

Daher ist die Linie BE und das $\square BEC$ gegeben. Weil nun der Inhalt dieses Rechtecks und eine Seite BE desselben gegeben wird, so ist (*Dat.* 61) die andere Seite EC, also auch BC und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $AD \overline{\gtrless} \frac{1}{2}BC$, so ist auch $CE \overline{\gtrless} \frac{1}{2}BC$, das ist $CE \overline{\gtrless} \frac{1}{3}BE$. Mache $EF=\frac{1}{3}BE$, so ist $\square BEC \overline{\gtrless} \square BEF$. Nun ist $\square BEF=\frac{1}{3}BE^2$; folglich darf die gegebene Fläche nicht grösser seyn als der dritte Theil des Quadrats von der gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey BE die gegebene Summe der Hypotenuse und Höhe. Nimm $EF=\frac{1}{3}BE$, und die gegebene Fläche sey nicht grösser als $\square BEF$. Ist nun $\square BEF$ gleich der gegebenen Fläche, so beschreibe über der Hypotenuse BF mit der Höhe EF ein rechtwinkliges Dreieck, so wird es das verlangte seyn. Ist aber $\square BEF$ grösser als die gegegebene Fläche, so sey dieser gleich das $\square BEC$; so ist offenbar $CE<EF$, also CE kleiner als die halbe BC. Daher lassen sich über BC zwei rechtwinklige Dreiecke mit der Höhe CE beschreiben, und es ist einleuchtend, dass beide der Aufgabe genügen werden.

Anmerkung 1. Die Analysis ist unabhängig vom W. BAC.

Anmerkung 2. Die Aufgabe

$$H+P, \quad Ss+P^2$$

kommt auf die obige zurück, denn für das rechtwinklige Dreieck ist $Ss=HP$.

Aufgabe 7. Fig. 51.

$P^2 - n^2, \ m - n.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Differenz der Abschnitte der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss des Quadrats der Höhe über das Quadrat des kleinern Abschnittes; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben

$$CD - DB \text{ und } AD^2 - DB^2.$$

Mache $BE = CD$, so ist

$$CD - DB = DE$$

und

$$\begin{aligned} AD^2 - DB^2 &= \square CDB - DB^2 \\ &= \square EBD - DB^2 \\ &= \square EDB. \end{aligned}$$

Daher ist die Linie DE und das $\square EDB$ gegeben. Es ist aber die eine Seite ED dieses Rechtecks gegeben, also auch (*Dat.* 61) die andere DB. Daher ist BE, das ist CD, bekannt, und somit die Aufgabe auf m, n gebracht.

Synthesis. Auf der gegebenen Differenz DE der Abschnitte in der Hypotenuse errichte im Endpunkte D einen Perpendikel, nimm in demselben zu beiden Seiten des Punktes D die Abschnitte DG und DH gleich den Seiten des Rechtecks, welches der gegebenen Fläche gleich ist, verbinde EH und mache W. DGB = W. DEH: so ist $\square BDE = \square GDH$. Halbire DE in F, beschreibe um F mit dem Radius BF einen Kreis, welcher die verlängerte BE in C, und den Perpendikel GH in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn weil $CF = FB$ und $EF = FD$, so ist $CD = BE$, also . . . . $CD - DB = DE$.

Ferner ist . . $AD^2 - DB^2 = \square CDB - DB^2$

$$\begin{aligned} &= \square EBD - DB^2 \\ &= \square BDE = \square GDH. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. Fig. 52.

$m^2 - P^2, \ m - n.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Differenz der Abschnitte der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss des Quadrats vom grössern Abschnitte über das Quadrat der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben

$$CD - DB \text{ und } CD^2 - DA^2.$$

Mache $CE = DB$, so ist

$$CD - DB = DE$$

$$\text{und } CD^2 - DA^2 = CD^2 - \square CDB$$
$$= CD^2 - \square DCE$$
$$= \square CDE.$$

Daher ist die Linie DE und das $\square CDE$ bekannt. Es wird aber die eine Seite DE dieses Rechtecks gegeben, folglich ist auch (*Dat.* 61) die andere Seite CD gegeben, mithin CE, das ist BD, und die Aufgabe auf m, n gebracht.

Determination. Weil $CD > DE$, so ist $\square CDE > DE^2$. Die gegebene Fläche muss also grösser seyn als das Quadrat der gegebenen Linie.

Synthesis. Auf dem gegebenen Unterschiede DE der Abschnitte in der Hypotenuse errichte im Endpunkte D eine Senkrechte und mache in derselben vom Punkte D aus auf einer Seite desselben die Abschnitte DG und DH gleich den Seiten des Rechtecks, welches der gegebenen Fläche gleich ist. Es sey aber $\square GDH > DE^2$. Verbinde EH und ziehe aus G nach DE die Linie GC, sodass W. $DGC =$ W. DEH ist: so ist $\square CDE = \square GDH$. Nun ist $\square GDH > DE^2$, also auch $\square CDE > DE^2$; daher ist $CD > DE$, und, wenn man DE in F halbirt, $CF > FE$ oder FD. Beschreibt man also um den Mittelpunkt F mit dem Radius CF einen Kreis, so wird derselbe die verlängerte CD in B, und die senkrechte DG in A schneiden. Verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das gesuchte sey.

Denn es ist offenbar $CE = BD$, also

$$CD - DB = DE.$$

Ferner ist . . . . $CD^2 - DA^2 = CD^2 - \square CDB$
$$= CD^2 - \square DCE$$
$$= \square CDE = \square GDH.$$

Aufgabe 9. Fig. 53—56.

$$\tfrac{1}{2}H - P,\ S - s$$
$$\tfrac{1}{2}H + P,\ S + s$$
$$\tfrac{1}{2}H - P,\ m - n$$
$$\tfrac{1}{2}H + P,\ m - n$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben der Ueberschuss der halben Hypotenuse über die Höhe und der Unterschied der Katheten oder der Unterschied der Abschnitte der Hypotenuse; — oder die Summe der halben Hypotenuse und der Höhe und die Summe der Katheten oder der Unterschied der Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Fig. 53. Im $\triangle ABC$ sey der W. A ein rechter, und $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC, beschreibe um den Mittelpunkt A mit der kleinern Kathete AB einen Kreis, welcher BC in E, und AC in F schneide, und verlängere AC bis nach G in der Peripherie: so ist

$$CG = AC + AB = S + s$$
$$CF = AC - AB = S - s$$
$$CE = CD - BD = m - n.$$

Durch E ziehe den Durchmesser EH und verbinde HG und HF, welche verlängert die BC in L und K schneiden, und ziehe die Linien BH, BG, BF.

Weil der rechte W. GHF durch die Linie HB halbirt wird, denn die Bogen GB, BF sind Quadranten, und weil zugleich HB senkrecht auf LK steht: so ist aus bekannten Gründen

$$LB = BH = BK.$$

Weil nun $BH : AD = HE : EA$, so ist $BH = 2AD = 2P$, folglich ist

$$CL = H + 2P$$
$$CK = H - 2P.$$

Nun ist

$$\text{W. } BGF = \text{W. } BHF$$

und, nach einer bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks, auch

$$\text{W. } BLH = \text{W. } BHF,$$

mithin ist W. $BGF =$ W. BLH. Die $\triangle\triangle\, LCG$, GCB haben aber ausserdem den W. C gemein, folglich ist

$$LC : CG = GC : CB$$

und . . . . $CG^2 = \square BCL$,

das ist in Zeichen $(S+s)^2 = \square H(H+2P)$.

Wird also $S+s$ und $\frac{1}{2}H + P$, also auch das Doppelte $H+2P$, gegeben: so ist H bekannt, und die Aufgabe ist auf H, $S+s$ oder auch auf H, P gebracht.

Weil AH und AF Radien sind, so ist W. $EHF =$ W. GFH. Nun ist

$$\text{W. } EHF = \text{W. } EBF$$

und . . . . W. $GFH =$ W. CFK,

mithin ist auch W. $EBF =$ W. CFK. Die $\triangle\triangle\, BCF$, FCK haben aber ausserdem den W. C gemein, folglich ist

$$BC : CF = FC : CK$$

und . . . . $CF^2 = \square BCK$,

das ist . . . . $(S-s)^2 = \square H(H-2P)$.

Wird also $S - s$ und $\frac{1}{2}H - P$, also auch das Doppelte $H - 2P$, gegeben: so ist H bekannt, und die Aufgabe ist auf $H, S - s$ oder auf H, P gebracht.

Verbindet man EF, so sind wegen der Durchmesser EH, FG die Linien GH, EF parallel; daher ist

$$GC : CF = LC : CE$$

und . . . . $GC^2 : CF^2 = LC^2 : CE^2$.

Nun ist $GC^2 = \square BCL$ und $CF^2 = \square BCK$, mithin ist

$$\begin{aligned} GC^2 : CF^2 &= \square BCL : \square BCK \\ &= CL : GK \\ &= CL^2 : \square LCK. \end{aligned}$$

Folglich ist auch $LC^2 : CE^2 = CL^2 : \square LCK$, und deshalb

$$CE^2 = \square LCK,$$

das ist . . . . $(m - n)^2 = \square (H + 2P)(H - 2P)$.

Wird also gegeben $m - n, H + 2P$, so findet man $H - 2P$, und wird gegeben $m - n, H - 2P$, so erhält man $H + 2P$. In beiden Fällen ist also die Aufgabe auf H, P gebracht.

Determination. Fig. 53.

1) Für $S + s$, $\frac{1}{2}H + P$.

Weil $BC \gtreqless 2AD$, so ist $BC \gtreqless BL$. Halbirt man also LC in D, so ist $\square BCL \gtreqless \square DCL$, das ist $CG^2 \gtreqless 2CD^2$. Ferner ist aber $\square BCL < CL^2$, also $CG^2 < CL^2$, und $CG < CL$ oder $2CD$. Die gegebene Summe der Katheten muss daher kleiner seyn als die doppelte gegebene Summe der halben Hypotenuse und der Höhe, das Quadrat jener Summe aber nicht kleiner als das doppelte Quadrat der letztern Summe.

2) Für $S - s$, $\frac{1}{2}H - P$.

Weil $\square BCK > CK^2$, so ist $CF^2 > CK^2$, und $CF > CK$. Die gegebene Differenz der Katheten muss also grösser seyn als der doppelte gegebene Ueberschuss der halben Hypotenuse über die Höhe.

3) Für $m - n$, $\frac{1}{2}H + P$.

Weil $\square LCK < LC^2$, so ist $CE^2 < LC^2$, und $CE < CL$. Die gegebene Differenz der Abschnitte muss kleiner seyn als die doppelte gegebene Summe.

4) Für $m - n$, $\frac{1}{2}H - P$.

Weil $\square LCK > CK^2$, so ist $CE^2 > CK^2$, und $CE > CK$. Die gegebene Differenz der Abschnitte muss grösser seyn als der doppelte gegebene Ueberschuss der halben Hypotenuse über die Höhe.

Synthesis.

1) $S + s$, $\frac{1}{2}H + P$. (Fig. 54).

In einer geraden Linie nimm die Abschnitte CO und OL jeden gleich der gegebenen Summe der halben Hypotenuse und der Höhe, und CM gleich der Summe der Katheten; und es sey $CM < CL$, aber CM^2 nicht kleiner als $\square\, OCL$. Mache in CL den Abschnitt CB gleich der dritten Proportionale zu LC und CM, so ist $CM^2 = \square\, BCL$, daher ist $\square\, BCL$ nicht kleiner als $\square\, OCL$, mithin $BC \gtreqless OC$, folglich $LB \lesseqgtr BC$, oder $\frac{1}{2} LB \lesseqgtr \frac{1}{2} BC$. Errichtet man also auf BC die senkrechte $BN = \frac{1}{2} LB$, beschreibt über BC einen Halbkreis und zieht durch N der BC eine Linie parallel: so wird dieselbe den Halbkreis entweder berühren oder schneiden. Es sey A einer von den Punkten, in welchen die Parallele den Kreis trifft. Verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle\, ABC$ das verlangte sey.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $LB = 2AD$, also . . . . $BC + 2AD = CL$
und . . . . $\frac{1}{2} BC + AD = CO$.

Ferner ist vermöge der Analysis

$$(AC + AB)^2 = \square\, BCL$$

und nach der Construction

$$CM^2 = \square\, BCL,$$

folglich ist $AC + AB = CM$.

2) $S - s$, $\frac{1}{2} H - P$. (Fig. 55).

In einer geraden Linie nimm die Abschnitte CO und OK jeden gleich dem gegebenen Ueberschusse der halben Hypotenuse über die Höhe, und CM gleich der gegebenen Differenz der Katheten; und es sey $CM > CK$. In der Linie CK nimm den Abschnitt CB gleich der dritten Proportionale zu CK und CM, so ist offenbar $BC > CK$, und $BK < BC$, oder $\frac{1}{2} BK < \frac{1}{2} BC$. Beschreibt man also über BC einen Halbkreis, errichtet auf ihr die senkrechte $BN = \frac{1}{2} BK$ und zieht durch N der BC eine Linie parallel: so wird dieselbe den Halbkreis in zwei Punkten schneiden. Es sey A einer von den Durchschnittspunkten. Verbinde AB und AC, so ist $\triangle\, ABC$ das gesuchte.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $2AD = BK$, also

$$BC - 2AD = CK$$

und . . . . $\frac{1}{2} BC - AD = CO$.

Ferner ist vermöge der Analysis

$$(AC - AB)^2 = \square\, BCK$$

und nach der Construction

$$CM^2 = \square\, BCK,$$

folglich ist $AC - AB = CM$.

3) $m - n$, $\frac{1}{2} H + P$. (Fig. 56).

In einer geraden Linie nimm CE gleich der Differenz der Abschnitte, und CL gleich der doppelten Summe der halben Hypotenuse und der Höhe; und es sey $CE < CL$. In CL nimm den Abschnitt CK gleich der dritten Proportionale zu CL und CE, so wird K zwischen L und C liegen, und es ist $CE^2 = \square LCK$. Halbire LK in B, so ist offenbar $\frac{1}{2}BK < \frac{1}{2}BC$. Beschreibt man also über BC einen Halbkreis, errichtet $BN = \frac{1}{2}BK$ senkrecht auf BC und zieht der BC durch N eine Linie parallel: so wird dieselbe den Kreis in zwei Punkten schneiden. Es sey A einer von den Durchschnittspunkten; verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ der Aufgabe genüge.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $2AD = BK = BL$, daher ist

$$BC + 2AD = CL.$$

Ferner ist vermöge der Analysis

$$(CD - DB)^2 = \square LCK$$

und nach der Construction

$$CE^2 = \square LCK,$$

folglich ist $CD - DB = CE$.

Aehnlich ist die Construction der Aufgabe $m - n$, $\frac{1}{2}H - P$.

Anmerkung 1. Fig. 53. Nach *Lemma* 4, Zus. ist

$$\square LCK = BC^2 - BK^2,$$

also auch . . . . . . $CE^2 = BC^2 - BK^2$,

eine Gleichung, welche bereits in *Lemma* 16 anders bewiesen worden ist. Sie lässt sich auch auf folgende Weise darthun. Verlängere BA nach M in der Peripherie und ziehe CM und EM.

Weil CA senkrecht auf BM steht, und $BA = AM$ ist, so ist

$$CM = BC.$$

Ferner ist . . . . $EM = BH = BK$,

weil die $\triangle\triangle$ BAH, MAE offenbar congruent sind. Wegen des rechten Winkels CEM aber ist

$$CM^2 = CE^2 + EM^2,$$

folglich ist auch . . . $BC^2 = CE^2 + BK^2$.

Anmerkung 2. Die Aufgaben

$$m - n, \ \tfrac{1}{2}H + P$$
$$m - n, \ \tfrac{1}{2}H - P$$

lassen sich auch folgendermaassen behandeln. Fig. 53. Im $\triangle ABC$ sey der W. A ein rechter; halbire BC in E, verbinde AE und fälle AD senkrecht auf BC: so ist

$$m - n = 2DE$$
$$\tfrac{1}{2}H = AE.$$

Von dem rechtwinkligen Dreiecke ADE wird also gegeben

$$DE \text{ und } AE \pm AD,$$

daher ist dieses Dreieck durch die Aufgabe S, $H \pm s$ gegeben. Man findet also AE und somit das Doppelte, nämlich BC.

Anmerkung 3. Fig. 53. In der obigen Analysis sind folgende Gleichungen bewiesen

$$1)\quad CG^2 = \square BCL$$
$$2)\quad CF^2 = \square BCK$$
$$3)\quad CE^2 = \square LCK.$$

Der Beweis für diese Gleichungen ist unabhängig vom W. BAC geführt worden. Sie gelten deshalb allgemein für jedes $\triangle ABC$ und dienen zur Auflösung mancher etwas schwierigen Aufgaben, z. B.

$$V,\ P,\ S+s$$
$$V,\ P,\ S-s$$
$$B,\ P,\ S+s$$
$$B,\ P,\ S-s,$$

wo B die Basis BC bezeichnet, V den Gegenwinkel A, und P den aus V auf B gefällten Perpendikel.

Aufgabe 10. Fig. 57.

$$\tfrac{1}{2}H - P,\ S+s.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Ueberschuss der halben Hypotenuse über die Höhe, und 2) die Summe der Katheten; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AC + AB \text{ und } \tfrac{1}{2}BC - AD.$$

Verlängere AC um $AG = AB$, mache in BC die Abschnitte BO und OK gleich AD und halbire CK in P, so ist

$$OP = \tfrac{1}{2}BC,$$

also . . . . $KP = \tfrac{1}{2}H - P$

und . . . . $CG = S + s.$

Nun ist aber, wenn BC um $BL = BK$ verlängert wird, $CL = H + 2P$, also, wie in Aufgabe 9 bewiesen worden ist,

$$CG^2 = \square BCL$$

und, wenn man die Hälften nimmt, weil $BP = 2\,CL$ ist,

$$\tfrac{1}{2}CG^2 = \square CBP.$$

Daher ist $\square CBP$ gegeben. Es ist aber die Differenz $CP (= KP)$ der Seiten gegeben, folglich sind die Seiten selbst, also BC, somit BK und AD gegeben, und die Aufgabe ist auf H, P gebracht.

Determination. Weil $BP > KP$, so ist $\square CBP$ oder $\tfrac{1}{2}CG^2 > \square CKP$, und, wenn man beiderseits das Doppelte nimmt, $CG^2 > CK^2$, also $CG > CK$. Es ist aber CG die gegebene Summe der Katheten, und CK der doppelte Ueberschuss der halben Hypotenuse über die Höhe; folglich muss die gegebene Summe grösser seyn als der doppelte gegebene Ueberschuss.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm CR gleich der gegebenen Summe, und CP gleich der gegebenen Differenz, und es sey $CR > 2CP$. Auf CP errichte nach der dem Schenkel CR entgegengesetzten Seite die senkrechte $PQ = \frac{1}{2}CR$, verbinde QR und beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte CP in B schneide: so ist

$$\square CR.PQ = \square CBP.$$

Macht man nun $PK = CP$, so ist nach der Voraussetzung $CR > CK$, also $CR^2 > CK^2$, und, wenn man die Hälften nimmt,

$$\square CR.PQ > \square CKP;$$

folglich ist auch $\square CBP > \square CKP$, mithin liegt der Punkt K zwischen B und P. In der senkrechten CR mache den Abschnitt CS gleich der Hälfte von BK, so ist offenbar $CS < \frac{1}{2}BC$. Beschreibt man also über BC einen Halbkreis und zieht durch S der BC eine Linie parallel, so wird dieselbe den Halbkreis schneiden. Es sey A einer von den Durchschnittspunkten; verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC und halbirt BK in O, so ist

$$OP = \tfrac{1}{2}BC$$

und . . . . $OK = AD$,

also . . . . . . $\frac{1}{2}BC - AD = KP = CP$.

Ferner verlängere BC um $BL = BK$, so ist

$$CL = 2BP$$

und . . . . $\square BCL = 2\square CBP$

$$= 2\square CR.PQ$$

$$= CR^2.$$

Weil aber $CL = BC + BK = BC + 2AD$, so ist, wie früher bewiesen worden ist,

$$\square BCL = (AC + AB)^2,$$

folglich ist $(AC + AB)^2 = CR^2$, und $AC + AB = CR$.

Aufgabe 11. Fig. 58.

$\frac{1}{2}H + P,\ S - s.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der halben Hypotenuse und der Höhe, und 2) die Differenz der Katheten; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, in welchem $AC > AB$ sey. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$\tfrac{1}{2}BC + AD \text{ und } AC - AB.$$

In BC nimm die Abschnitte BO und $OK = AD$ und halbire CK in P, so ist $OP = \tfrac{1}{2}BC$, also

$$BP = \tfrac{1}{2}H + P,$$

und, wenn man in AC den Abschnitt $AF = AB$ nimmt,

$$CF = S - s.$$

Weil nun, wie in Aufgabe 9 gezeigt worden ist,

$$CF^2 = \square BCK,$$

so ist . . . . $\tfrac{1}{2}CF^2 = \square BCP$;

daher ist $\square BCP$ bekannt. Es ist aber die Differenz BP der Seiten dieses Rechtecks gegeben, folglich sind die Seiten selbst, also BC, somit BK und AD gegeben, und die Aufgabe ist demnach auf H, P gebracht.

Determination. Weil $BP > PK$ und $PK = PC$, so ist $BP > PC$. Macht man also $PS = BP$, so ist $\square BCP < \square BSP$, also $2\square BCP$ oder $CF^2 < BS^2$, und $CF < BS$. Folglich muss die gegebene Differenz der Katheten kleiner seyn als die doppelte gegebene Summe der halben Hypotenuse und der Höhe.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm BP gleich der gegebenen Summe, und PQ gleich der gegebenen Differenz, und es sey $PQ < 2BP$. Errichte auf BG nach der dem Perpendikel PQ entgegengesetzten Seite die senkrechte $BR = \tfrac{1}{2}PQ$, verbinde QR und beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis, welcher die verlängerte BP in C schneide: so ist

$$\square PQ \,.\, BR = \square BCP.$$

Verlängert man nun BP um $PS = BP$, so ist nach der Voraussetzung $PQ < BS$, also $PQ^2 < BS^2$, und, wenn man die Hälften nimmt,

$$\square PQ \,.\, BR < \square BSP.$$

Folglich ist $\square BCP < \square BSP$, und $PC < PS$ oder BP. Nimmt man also $PK = PC$, so fällt der Punkt K zwischen B und P. Halbire BK in O, so ist offenbar $BO < \tfrac{1}{2}BC$. Beschreibt man nun über BC einen Halbkreis, nimmt in der senkrechten BR den Abschnitt $BT = BO$ und zieht durch T der BC eine Linie parallel, so wird dieselbe den Kreis schneiden. Es sey A einer von den Durchschnittspunkten; verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist

$$AD = BT$$
$$= BO$$

und . . . . $\frac{1}{2}BC = OP$,

folglich $\frac{1}{2}BC + AD = BP$.

Ferner ist . . . . $PQ^2 = 2 \square PQ \,.\, BR$

$$= 2 \square BCP$$
$$= \square BCK$$

und, wie früher bewiesen worden ist, weil $BK = 2AD$,

$$(AC - AB)^2 = \square BCK,$$

folglich ist $(AC - AB)^2 = PQ^2$, und $AC - AB = PQ$.

Aufgabe 12. Fig. 59.

(Diesterw. Geom. Aufg., Theil 2, Nr. 17).

$$H, P : m - n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) das Verhältniss der Höhe zum Unterschiede der Abschnitte in der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > BD$: so ist gegeben

$$BC \text{ und } AD : CD - BD.$$

Mache $CE = BD$, so ist $DE = CD - BD$, mithin ist das Verhältniss

$$AD : DE$$

und, wenn man DE in F halbirt, auch

$$AD : DF$$

gegeben. Verbindet man also AF, so ist (*Dat.* 44) $\triangle ADF$ der Gattung nach gegeben. Nun ist aber offenbar AF die Hälfte von BC, mithin gegeben, folglich ist $\triangle ADF$ der Gattung und Grösse nach bekannt; folglich ist die Linie AD der Grösse nach gegeben, und somit die Aufgabe auf H,P gebracht.

Synthesis. Es sey BC die gegebene Hypotenuse, und $p : q$ das gegebene Verhältniss. Halbire BC in F, nimm in ihr den Abschnitt $FG = q$, errichte auf der Linie FG in ihrer Mitte H die senkrechte $HK = p$, verbinde FK, verlängere sie, wenn es nöthig ist, bis sie den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneidet, und ziehe AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC und macht $FE = FD$, so ist $DE = CD - BD$. Wegen der ähnlichen Dreiecke aber ist

$$AD : DF = KH : HF$$

und, wenn man die Hinterglieder verdoppelt,

$$AD : DE = KH : FG,$$

das ist . . . . . . $AD : CD - BD = p : q.$

Anmerkung. Die Aufgabe lässt sich offenbar allgemein für jeden Winkel BAC ebenso lösen.

Aufgabe 13. Fig. 60.

$H - S, n.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Ueberschuss der Hypotenuse über eine Kathete, und 2) der Abschnitt der Hypotenuse, welcher der andern Kathete anliegt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC - CA \text{ und } BD.$$

In BC nimm den Abschnitt $CE = CA$, so wird der Punkt E zwischen B und D liegen, und es ist

$$BC - CA = BE,$$

daher ist BE gegeben, also, weil BD gegeben wird, auch ED und somit das Verhältniss $BE : ED$. Wegen des rechtwinkligen Dreiecks aber ist

$$BC : CA = AC : CD,$$

das ist . . . . $BC : CE = EC : CD.$

Daher ist *divid.* und *permut.*

$$BE : ED = EC : CD.$$

Nun ist das erste Verhältniss bekannt, also auch das zweite. Es ist aber auch die Differenz ED der Linien EC und CD bekannt, folglich sind die Linien selbst gegeben, und somit ist die Aufgabe auf S, m gebracht.

Determination. Offenbar ist $BE < BD$. Weil aber CE die mittlere Proportionale ist zwischen BC und CD, so ist (*Lemma* 11, Zus. 1) $BE > ED$, das ist $BE > \frac{1}{2} BD$. Folglich muss der gegebene Ueberschuss kleiner seyn als der gegebene Abschnitt, aber grösser als seine Hälfte.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm vom Punkte B nach einer Richtung hin das Segment BD gleich dem gegebenen Abschnitte, und das Segment BE gleich dem gegebenen Ueberschusse, und es sey $BE < BD$, aber $BE > \frac{1}{2} BD$, das ist $BE > ED$. Errichte auf BD auf einer Seite die senkrechten EF und DG gleich BE und ED: so wird, weil $EF > DG$ ist, die Linie FG der nach D hin verlängerten BD in einem Punkte C begegnen. Aus C ziehe an den Perpendikel DG die Linie $CA = CE$ und verbinde AB: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das gesuchte sey.

Denn es ist $EF : DG$, das ist

$$BE : ED = EC : CD,$$

also *perm.* und *compon.*

$$BC : CE = EC : CD$$

oder . . . . $BC : CA = AC : CD$,

mithin ist W. BAC ein rechter. Es ist aber BD der gegebene Abschnitt, und $BC - CA = BC - CE = BE$; folglich ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben

$H - S$, $S - m$

und . . . . $S - m$, n

folgt aus der obigen. Denn es ist

$$BD = n$$
$$BE = H - S$$
$$DE = S - m.$$

Es ist aber $BD = BE + DE$. Sind also zwei von den Linien BD, BE, DE gegeben, so ist auch die dritte bekannt.

Anfgabe 14. Fig. 61.

$$H + S,\ n$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse, und 2) die Summe der Hypotenuse und der dem andern Abschnitte anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BD \text{ und } BC + CA.$$

Verlängere BC um $CE = AC$, so ist

$$BC + CA = BE,$$

folglich ist BE gegeben. Es wird aber auch BD gegeben, mithin ist DE bekannt. Da nun

$$BC : CA = AC : CD,$$

das ist . . . . . . $BC : CE = EC : CD$,

so ist *compon.* und *permut.*

$$BE : ED = EC : CD.$$

Nun sind die Linien BE, ED und somit ihr Verhältniss bekannt, also auch das Verhältniss $EC : CD$; folglich sind, weil auch die Summe der Linien EC, CD bekannt ist, diese Linien selbst gegeben und somit auch das $\triangle ABC$.

Determination. Es muss natürlich die gegebene Summe der Kathete und Hypotenuse grösser seyn als der gegebene Abschnitt.

Synthesis. Es sey BD der gegebene Abschnitt, und BE die gegebene Summe. Es sey aber $EB > BD$, und beide in einer geraden Linie vom Punkte B aus nach einer Richtung hin genommen. Errichte auf DE auf entgegengesetzten Seiten die senkrechten $EF = BE$ und $DG = DE$ und verbinde FG, welche DE in C schneide: so ist

$$EC : CD = EF : DG = BE : ED.$$

Nun ist $BE > ED$, mithin $EC > CD$. Beschreibt man daher um C mit CE einen Kreis, so wird er die DG in einem Punkte A schneiden. Verbinde AB und AC, so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn weil

$$BE : ED = EC : CD,$$

so ist *permut.* und *divid.*

$$BC : CE = EC : CD$$

das ist . . . . . . $BC : CA = AC : CD,$

woraus folgt, dass W. BAC ein rechter ist.

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben

$$H + S,\ S + m$$
$$S + m,\ n$$

beruht auf der obigen. Denn es ist

$$BE = H + S$$
$$DE = S + m$$
$$BD = n.$$

Es ist aber $BE = BD + DE$. Sind also zwei der Linien BE, DE, BD gegeben, so ist auch die dritte bekannt.

Aufgabe 15. Fig. 62.

$$P + m,\ m - n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Differenz der Abschnitte der Hypotenuse, und 2) die Summe der Höhe und des grössern Abschnitts; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > BD$: so ist gegeben

$$CD + DA \text{ und } CD - BD.$$

Mache $DE = DB$ und $DF = DA$, so ist

$$CD + DA = CF$$

und . . . . $CD - BD = CE;$

daher sind CE und CF gegeben. Weil nun

$$BD : DA = AD : DC,$$

so ist auch . . . . $ED : DF = FD : DC,$

also *compon.* und *permut.*

$$EF : FC = FD : DC.$$

Es ist aber das erste Verhältniss bekannt, weil die Linien EF und FC gegeben werden; mithin auch das Verhältniss $FD : DC$. Nun ist aber auch die Summe CF der Linien FD, DC gegeben, folglich sind diese Linien selbst und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Es ist offenbar $FC > CE$. Die gegebene Summe muss also grösser seyn als die gegebene Differenz.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm vom Punkte C aus nach derselben Richtung hin CE gleich der gegebenen Differenz, CF gleich der gegebenen Summe, und es sey $CF > CE$. Ueber EF beschreibe das Quadrat $EFGH$, ziehe die Linien CG und FH, welche einander in A schneiden, und errichte AB senkrecht auf AC: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey. Denn fälle AD senkrecht auf BC, so ist $AD = DF$, weil $HE = EF$ ist; daher ist

$$CD + DA = CF.$$

Weil nun der Parallelen wegen

$$GF : AD, \text{ oder } EF : FD = FC : CD,$$

so ist *divid.* . . . . $ED : DF = FD : DC,$

das ist . . . . $ED : DA = AD : DC.$

Wegen des rechten Winkels BAC aber ist

$$BD : DA = AD : DC,$$

mithin ist $ED = DB$ und $CD - BD = CE$.

Anmerkung. Die Aufgaben

$$P + m,\ P + n$$
$$P + n,\ m - n$$

lassen sich auf die obige reduciren. Denn es ist

$$CF = P + m$$
$$EF = P + n$$
$$CE = m - n.$$

Es ist aber $CF = CE + EF$. Sind also zwei von den Linien CF, CE, EF gegeben, so findet man daraus die dritte.

Aufgabe 16. Fig. 63.

$$m - P,\ P - n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Ueberschuss des grössern Abschnitts der Hypotenuse über die

Höhe, und 2) der Ueberschuss der Höhe über den kleinern Abschnitt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, und $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$CD - DA \text{ und } AD - DB.$$

Auf dem grössern Abschnitte CD mache $DF = DA$, und $DE = DB$, so ist

$$CF = CD - DA$$

und . . . . $FE = AD - DB$,

daher sind die Linien CF und FE der Grösse nach gegeben. Wegen des rechtwinkligen Dreiecks aber ist

$$CD : DA = AD : DB,$$

das ist . . . . . . $CD : DF = FD : DE$,

also *convert.* und *permut.*

$$CD : DF = CF : FE.$$

Weil nun das letztere Verhältniss bekannt ist, denn die Linien CF und FE werden der Grösse nach gegeben, so ist es auch das Verhältniss $CD : DF$. Es ist aber die Differenz CF beider Linien bekannt, folglich sind CD und DF oder DA der Grösse nach gegeben, und die Aufgabe ist auf *m*, *P* gebracht.

Determination. In der Analysis ist gezeigt worden, dass

$$CD : DF \text{ oder } DA = CF : FE$$

sey. Nun ist $CD > DA$, also $CF > FE$. Folglich muss der gegebene Ueberschuss des grössern Abschnitts über die Höhe grösser seyn als der gegebene Ueberschuss der Höhe über den kleinern Abschnitt.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm vom Punkte F aus nach entgegengesetzten Richtungen die Abschnitte FC und FE, jenen gleich dem gegebenen Ueberschusse des grössern Abschnitts über die Höhe, diesen gleich dem gegebenen Ueberschusse der Höhe über den kleinern Abschnitt, und es sey $CF > FE$. Ueber EF beschreibe das Quadrat $EFGH$ und verbinde CG und FH: so werden sich beide Linien, weil $CF > GH$ ist, über GH hinaus verlängert in einem Punkte A schneiden. Errichte in diesem Punkte auf AC eine Senkrechte, welche die verlängerte CE in B treffe: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $AD \mathrel{=\!\!|\!\!=} EH$, also . . . . $AD : DF = HE : EF$.

Nun sind HE, EF als Seiten eines Quadrats einander gleich, mithin ist $AD = DF$, folglich

$$CD - DA = CF.$$

Ferner ist $AD = \!\!| = FG$, mithin

$$DC : CF = AD : FG$$
$$= DF : FE,$$

und *convert.* . . . . $CD : DF = FD : DE$,

das ist . . . . $CD : DA = AD : DE$.

Wegen des rechtwinkligen $\triangle ABC$ aber ist

$$CD : DA = AD : DB;$$

daher ist $DB = DE$ und $AD - DB = FD - DE = EF$.

Anmerkung. Durch dieselbe Construction können auch die Aufgaben

$$m - P,\ m - n$$
$$P - n,\ m - n$$

gelöst werden. Denn es ist

$$CF = m - P$$
$$EF = P - n$$
$$CE = m - n.$$

Es ist aber $CE = CF + FE$. Sind also zwei von den Linien CF, EF, CE gegeben, so ist immer die dritte bekannt.

Aufgabe 17. Fig. 64.

$$m^2 - P^2,\ P^2 - n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Ueberschuss des Quadrats der Höhe über das Quadrat des kleinern Abschnitts der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss des Quadrats von dem grössern Abschnitte über das Quadrat der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben

$$AD^2 - DB^2 \text{ und } CD^2 - DA^2.$$

Wegen des rechtwinkligen Dreiecks ist

$$CD : DA = AD : DB,$$

also . . . . . . $CD^2 : DA^2 = AD^2 : DB^2$

und, weil die Differenzen der homologen Glieder dasselbe Verhältniss haben,

$$CD^2 : DA^2 = CD^2 - DA^2 : AD^2 - DB^2.$$

Dies letzte Verhältniss ist aber gegeben, weil die Grössen selbst gegeben werden; folglich ist das Verhältniss $CD^2 : DA^2$, mithin $CD : DA$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben, also, weil $CD^2 - DA^2$ gegeben wird, auch der Grösse nach.

Determination. Weil $CD^2 : DA^2 = CD^2 - DA^2 : AD^2 - DB^2$, und $CD^2 > DA^2$ ist: so ist auch $CD^2 - DA^2 > AD^2 - DB^2$. Folglich muss der gegebene Ueberschuss des Quadrats von dem grössern Abschnitte über das Quadrat der Höhe grösser seyn als der gegebene Ueberschuss des Quadrats der Höhe über das Quadrat des andern Abschnitts.

Synthesis. Es sey m^2 der Ueberschuss des Quadrats von dem grössern Abschnitte der Hypotenuse über das Quadrat der Höhe, n^2 der Ueberschuss des Quadrats der Höhe über das Quadrat von dem kleinern Abschnitte der Hypotenuse, und es sey $m > n$. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm $CE = m$ und $EF = n$, beschreibe über CE einen Halbkreis, ziehe in demselben die Sehne $EG = EF$, verbinde CF und CG, mache in CG den Abschnitt $CH = CE$, ziehe bis an die verlängerte CE die Linie $HD \# GE$, ferner ziehe durch D mit EF eine Linie parallel, welche die Verlängerung der CF in A schneide, und errichte im Punkte A auf CA einen Perpendikel, welcher die verlängerte CD in B treffe: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn weil

$$CD^2 : DA^2 = AD^2 : DB^2,$$

so ist . . . . . . $CD^2 : DA^2 = CD^2 - DA^2 : AD^2 - DB^2$.

Es ist aber $CD^2 : DA^2 = CE^2 : EF^2 = m^2 : n^2$.

Folglich ist . . $CD^2 - DA^2 : AD^2 - DB^2 = m^2 : n^2$.

Nun ist . . . . . $DA : EF = DH : EG$,

denn beide Verhältnisse sind gleich $DC : CE$; und es ist $EF = EG$, mithin ist $DA = DH$ und

$$\begin{aligned} CD^2 - DA^2 &= CD^2 - DH^2 \\ &= CH^2 = CE^2 = m^2, \end{aligned}$$

folglich ist auch $AD^2 - DB^2 = n^2$.

Anmerkung. Auf die vorige Aufgabe lassen sich reduciren:

$$S^2 - s^2,\ P^2 - n^2$$
$$S^2 - s^2,\ m^2 - P^2$$
$$m^2 - n^2,\ P^2 - n^2$$
$$m^2 - n^2,\ m^2 - P^2.$$

Denn es ist

1) $S^2 - s^2 = m^2 - n^2$ (*Lemma* 15, Zus. 2)
2) $(m^2 - P^2) + (P^2 - n^2) = m^2 - n^2$.

Aufgabe 18. Fig. 65.

$$H,\ S^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) die Summe der Quadrate von der einen Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC \text{ und } AC^2 + BD^2.$$

Weil BC gegeben ist, so ist auch BC^2, mithin der Ueberschuss von BC^2 über $AC^2 + BD^2$, das ist $\square BDC$ oder AD^2, bekannt. Folglich ist die Aufgabe auf H, P gebracht.

Determination. Halbire BC in P. Weil $BD < AB$, also $BD^2 < AB^2$, so ist $AC^2 + BD^2 < AC^2 + AB^2$ oder $< BC^2$. Ferner, weil

$$BC^2 = 4BP^2$$

und . . . . $\square BDC \leqq BP^2$,

so ist der Ueberschuss von BC^2 über $\square BDC \geqq 3BP^2$. Jener Ueberschuss aber ist gleich der gegebenen Fläche. Folglich muss diese kleiner seyn als das Quadrat der gegebenen Hypotenuse, aber nicht kleiner als das dreifache Quadrat ihrer Hälfte.

Synthesis. Es sey BC die gegebene Hypotenuse, und $\square BCE$ die gegebene Fläche. Halbire BC in P, und es sey $\square BCE < BC^2$, aber nicht $< 3BP^2$: so wird $\square CBE$ nicht $> BP^2$ seyn. Errichte auf BC auf einer Seite die senkrechten $BF = BE$ und $CG = BC$, verbinde FG und beschreibe um BC als Durchmesser einen Kreis, so wird er die Linie FG in irgend einem Punkte H treffen, weil $\square BF.CG$ (oder $\square CBE$) nicht grösser ist als das Quadrat der halben BC. Errichte nun auf FG im Punkte H einen Perpendikel, welcher BC in D schneide, errichte ferner DA bis zur Peripherie senkrecht auf BC und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

$$\begin{aligned}\text{Denn es ist } AC^2 + BD^2 &= BC^2 - \square BDC \\ &= BC^2 - \square BF.CG \\ &= BC^2 - \square CBE \\ &= \square BCE.\end{aligned}$$

Anmerkung 1. Ist $AC^2 + BD^2 = 3BP^2$, so ist $\square CBE = BP^2$; folglich berührt dann FG den Halbkreis, und es giebt nur ein $\triangle ABC$. Ist aber $AC^2 + BD^2 > 3BP^2$, so ist $\square CBE < BP^2$; dann schneidet FG die Peripherie, und man erhält zwei Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, aber einander congruent sind.

Anmerkung 2. Die Aufgabe P, $S^2 + n^2$ lässt sich auf die vorige oder auch unmittelbar auf H, P bringen. Denn es ist $P^2 + (S^2 + n^2) = H^2$ bekannt.

Aufgabe 19. Fig. 66.

$H,\ HP + P^2$.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse, und 2) die Summe des Quadrats von der Höhe und des Rechtecks aus der Höhe und der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC \text{ und } \square BC\,.\,AD + AD^2.$$

Verlängere BC um $CE = AD$, so ist $\square BC\,.\,AD = \square BCE$ und $AD^2 = CE^2$, mithin $\square BC\,.\,AD + AD^2 = \square BEC$. Daher ist $\square BEC$ gegeben. Es wird aber die Differenz BC der Seiten gegeben, folglich sind die Seiten selbst, also CE, das ist AD, gegeben, und somit ist die Aufgabe auf H, P gebracht.

Determination. Halbire BC in P und mache $CQ = CP$, so ist $AD \leqq CP$, das ist $CE \leqq CQ$, und $\square BEC \leqq \square BQC$ oder $3\,CQ^2$. Es ist aber $\square BEC$ gleich der gegebenen Fläche, und CQ die halbe Hypotenuse. Folglich darf die gegebene Fläche nicht grösser seyn als das dreifache Quadrat der halben gegebenen Hypotenuse.

Synthesis. Die gegebene Hypotenuse sey BC; halbire sie in P und mache $PQ = BC$: so ist CQ gleich der halben BC, und $\square BQC$ gleich dem dreifachen Quadrate der CP. Die gegebene Fläche sey aber nicht grösser als $\square BQC$. Ist sie nun gleich $\square BQC$, so ist CQ oder CP die Höhe des gesuchten Dreiecks. Ist sie aber kleiner als $\square BQC$, wie $\square pq$: so beschreibe um BC als Durchmesser einen Kreis, errichte auf BC in ihren Endpunkten auf entgegengesetzten Seiten die senkrechten $BF = p$, $CG = q$, verbinde FG, welche die Kreislinie in H schneide, und errichte in diesem Punkte auf FG einen Perpendikel, welcher die verlängerte BC in E treffe. Wegen des Kreises ist (*Lemma* 19, Anm.)

$$\square BEC = \square BF\,.\,CG = \square pq.$$

Es ist aber $\square pq < \square BQC$,
mithin ist $\square BEC < \square BQC$, also $EC < QC$, das ist EC kleiner als die Hälfte von BC. Nimmt man also in der senkrechten GC den Abschnitt $CK = CE$ und zieht $KO =\!|\!= BC$, so wird KO die Kreislinie schneiden. Es sey A einer von den Durchschnittspunkten. Verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das gesuchte sey. Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $AD = CK = CE$, mithin

$$\square BC\,.\,AD + AD^2 = \square BEC = \square pq.$$

Anmerkung 1. Der zweite Durchschnittspunkt der Linie KO und des Kreises bestimmt ein anderes Dreieck, welches die gegebenen Bedingungen erfüllt, aber dem $\triangle ABC$ congruent ist.

Anmerkung 2. Die Aufgabe lässt sich allgemein lösen, wenn der Winkel BAC auch nicht ein rechter ist.

Ueber der gegebenen Basis BC beschreibe einen Kreisabschnitt BAC, welcher des gegebenen Winkels in der Spitze fähig ist. Errichte auf BC in ihrer Mitte P eine Senkrechte, welche die Peripherie in R treffe, und nimm in der Verlängerung der BC den Abschnitt $CQ = PR$, so darf die gegebene Fläche nicht grösser als $\square BQC$ seyn. Die Construction ist einleuchtend.

Aufgabe 20. Fig. 67.

$H, m^2 - P^2.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) der Ueberschuss des Quadrats vom grössern Abschnitte der Hypotenuse über das Quadrat der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > BD$: so ist gegeben

$$BC \text{ und } CD^2 - AD^2.$$

Halbire BC in P und mache $CE = BD$: so ist $DP = PE$ und $AD^2 = \square BDC = \square DCE$. Daher ist $CD^2 - AD^2 = \square CDE$, mithin ist $\square CDE$ gegeben, also auch die Hälfte desselben, nämlich $\square CDP$. Es ist aber BC und die Hälfte CP, die Differenz der Seiten dieses Rechtecks, gegeben; folglich sind die Seiten selbst, also der Punkt D und das $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Zur Lösung der Aufgabe ist erforderlich, dass der Punkt D zwischen B und P liege, also $\square CDP < \square CBP$, und, wenn beide verdoppelt werden, $\square CDE < BC^2$ sey. Es ist aber $\square CDE$ gleich der gegebenen Fläche; folglich ist zur Construction nur erforderlich, dass die gegebene Fläche kleiner sey als das Quadrat der gegebenen Hypotenuse.

Synthesis. Es sey BC die gegebene Hypotenuse, und die gegebene Fläche $\square pq$ sey kleiner als BC^2. Halbire BC in P, errichte auf CP in ihren Endpunkten nach entgegengesetzten Richtungen die Perpendikel $CF = p$ und $PH = q$, halbire CF in G, verbinde GH und beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis, welcher die nach B hin verlängerte CP in D schneide: so ist (*Lemma* 19) $\square CDP = \square CG.PH$. Weil nun nach der Voraussetzung $BC^2 > \square pq$, oder

$$BC^2 > \square CF.PH,$$

so ist, wenn man die Hälften nimmt,

$$\square CBP > \square CG.PH,$$

mithin auch . . . $\square CBP > \square CDP$,

woraus hervorgeht, dass D zwischen B und P liege. Beschreibe nun über BC ein rechtwinkliges Dreieck ABC, sodass AD senkrecht auf BC steht: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste.

Denn macht man $CE = BD$, so ist

$$AD^2 = \square BDC = \square DCE,$$

mithin . . $CD^2 - AD^2 = \square CDE$.

Nun ist aber $\square CDP = \square CG.PH$, und, wenn man beide verdoppelt, $\square CDE = \square CF.GH = \square pq$; folglich ist auch $CD^2 - AD^2 = \square pq$.

Aufgabe 21. Fig. 68.

$$H, S + m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) die Summe einer Kathete und des ihr anliegenden Abschnitts der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC \text{ und } AC + CD.$$

Nimm DE und CF gleich AC, so ist $CE = AC + CD$, mithin ist CE gegeben. Nun ist

$$DC : CA = AC : CB,$$

das ist . . . . $CD : DE = FC : CB$,

folglich *compon.* $CE : ED$ oder $CF = FB : BC$

und . . . . $\square BCE = \square BFC$.

Es ist aber $\square BCE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, mithin auch $\square BFC$; und da die Differenz BC der Seiten gegeben wird, so sind die Seiten selbst, also CF, das ist AC, und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $CF = CA$, und $CA < BC$, so ist $FC < BC$. Verlängere also BC um $CQ = BC$, so ist $\square BFC < \square BQC$ oder $\square QBC$. Nun ist $\square BFC = \square BCE$, also ist $\square BCE < \square QBC$, und $CE < QB$ oder $< 2BC$. Die gegebene Summe muss also kleiner seyn als die doppelte gegebene Hypotenuse.

Synthesis. Es sey BC die gegebene Hypotenuse, CE die gegebene Summe, und $CE < 2BC$. Beschreibe um BC als Durchmesser einen Kreis, errichte auf ihr nach entgegengesetzten Richtungen die senkrechten $BG = BC$ und $CH = CE$ und verbinde GH, welche den Kreis auf der Seite der CH in K schneide. Errichte in diesem Punkte auf GH eine Senkrechte, welche die verlängerte BC in F treffe: ich behaupte, dass $FC < CB$ sey. Denn mache $CQ = BC$, so ist $BQ = 2BC$, also $EC < BQ$, mithin

$$\square ECB < \square QBC \text{ oder } < \square BQC.$$

Nun ist wegen des Kreises

$$\square ECB = \square BG . CH = \square BFC;$$

folglich ist auch $\square BFC < \square BQC$, also $FC < CQ$ oder BC. Daher lässt sich in dem Kreise die Sehne $CA = CF$ ziehen; verbinde AB: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn fälle AD senkrecht auf BC, so ist

$$DC : CA = AC : CB$$

das ist . . . . $DC : CF = FC : CB$

und *compon.* . . . . $DF : FC = FB : BC.$

Wegen der gleichen Rechtecke BFC, ECB aber ist

$$EC : FC = FB : BC;$$

folglich ist $DF = EC$. Nun ist $DF = AC + CD$; folglich ist $AC + CD = EC$.

Anmerkung. Ebenso gelöst werden die Aufgaben

$$H,\ S - n \text{ (oder } n - S)$$
$$S + m,\ S - n \text{ (oder } n - S).$$

Denn macht man $DE = AC$, so ist

$$\begin{aligned} BC &= H \\ CE &= S + m \\ BE &= S - n \text{ (wenn } DE > DB) \\ &= n - S \text{ (wenn } DE < DB). \end{aligned}$$

Es ist aber $BC = CE \pm BE$. Sind also zwei von den Linien BC, CE, BE gegeben, so ist auch die dritte bekannt.

Aufgabe 22. Fig. 68.

$$H,\ S^2 + m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) die Summe der Quadrate von der einen

Kathete und von dem ihr anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC \text{ und } AC^2 + CD^2.$$

Verlängere BC um $CF = CD$, so ist $AC^2 = \square BCD = \square BCF$, mithin

$$\begin{aligned} AC^2 + CD^2 &= \square BCF + CF^2 \\ &= \square BFC. \end{aligned}$$

Daher ist $\square BFC$ gegeben. Es wird aber die Differenz BC der Seiten dieses Rechtecks gegeben; folglich sind die Seiten selbst, also CF, das ist CD, und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Es muss seyn AC oder $CF < CB$. Nimmt man also $CQ = BC$, so ist $\square BFC < \square BQC$ oder $2BC^2$. Es ist aber $\square BFC$ gleich der gegebenen Fläche; folglich muss diese kleiner seyn als das doppelte Quadrat der gegebenen Hypotenuse.

Synthesis. Es sey BC die gegebene Hypotenuse, und die gegebene Fläche $\square pq$ kleiner als $2BC^2$. Beschreibe um BC als Durchmesser einen Kreis, errichte anf BC nach verschiedenen Seiten die senkrechten $BG = p$ und $CH = q$ und verbinde GH, welche die Peripherie in zwei Punkten schneiden wird. In einem derselben, K, errichte auf FG eine Senkrechte, welche die nach C hin verlängerte BC in F treffe: ich behaupte, dass $FC < CB$ sey. Denn mache $CQ = BC$, so ist $\square BQC = 2BC^2$, mithin ist $\square pq < \square BQC$. Wegen des Kreises aber ist $\square BFC = \square pq$; daher ist $\square BFC < \square BQC$, also $FC < CQ$ oder CB. Macht man also $CD = CF$, so fällt der Punkt D zwischen B und C. Errichte nun auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den Halbkreis in A treffe, und ziehe BA und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn es ist
$$\begin{aligned} AC^2 + CD^2 &= \square BCD + CD^2 \\ &= \square BCF + CF^2 \\ &= \square BFC = \square pq. \end{aligned}$$

Anmerkung 1. Ebenso wird gelöst $H^2 : S^2 + m^2$. Denn nimmt man für H eine beliebige Linie BC an, so findet man durch die vorstehende Construction das $\triangle ABC$, welches dem gesuchten ähnlich ist. Für die Determination hat man $H^2 : S^2 + m^2 = BC^2 : \square BFC$. Nun ist $\square BFC < 2BC^2$, mithin ist $BC^2 : \square BFC > BC^2 : 2BC^2$ oder $1 : 2$. Das gegebene Verhältniss muss also grösser seyn als das Verhältniss des Einfachen zum Doppelten.

Anmerkung 2. Auf die 22ste Aufgabe lassen sich reduciren

$$H,\ S^2 - n^2$$
$$S^2 - n^2,\ s^2 + n^2.$$

Denn es ist $(S^2 - n^2) + (s^2 + n^2) = S^2 + s^2 = H^2$. Sind also zwei von den drei Grössen H, $S^2 - n^2$, $s^2 + n^2$ gegeben, so findet man die dritte.

Aufgabe 23. Fig. 49.

$$H^2 + S^2,\ m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse und 2) die Summe der Quadrate von der Hypotenuse und von der jenem Abschnitte anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$CD \text{ und } BC^2 + CA^2.$$

Mache $CE = CD$, so ist $AC^2 = \square BCD = \square BCE$, also

$$BC^2 + CA^2 = BC^2 + \square BCE$$
$$= \square CBE.$$

Daher ist $\square CBE$ gegeben. Es ist aber die Differenz CE der Seiten gegeben; folglich sind die Seiten selbst, also BC und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $BC > CD$, so ist $\square CBE > \square CDE$. Es ist aber $\square CDE = 2CD^2$, weil $DE = 2CD$ ist; folglich muss die gegebene Fläche grösser seyn als das doppelte Quadrat des gegebenen Abschnitts.

Synthesis. Es sey EC der gegebene Abschnitt; mache $DC = CE$, und die gegebene Fläche sey grösser als $\square CDE$. Nimmt man also $\square CBE$ gleich der gegebenen Fläche, so ist $BC > CD$. Beschreibe nun über BC ein rechtwinkliges Dreieck, sodass BD und DC die Abschnitte der Hypotenuse sind: so ist dieses das verlangte.

Anmerkung 1. Hiernach lässt sich auch die Aufgabe

$$H^2 + S^2 : m^2$$

auflösen. Denn nimmt man m als gegeben an, so ist $H^2 + S^2$ gegeben.

Anmerkung 2. Die Aufgabe

$$H^2 + P^2,\ m$$

kommt ebenfalls auf die obige zurück. Denn es ist

$$(H^2 + P^2) + m^2 = H^2 + S^2.$$

Aufgabe 24. Fig. 69.

$H + S,\ m.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse und 2) die Summe der anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CA \text{ und } CD.$$

Verlängere BC um $CE = AC$, so ist $BE = BC + CA$, mithin ist BE gegeben. Weil $AC^2 = \square BCD$, so ist $CE^2 = \square BCD$, und, wenn auf beiden Seiten $\square DCE$ hinzukommt,

$$\square DEC = \square BE.CD.$$

Da nun das letztere Rechteck wegen seiner bekannten Seiten gegeben ist, so ist es auch $\square DEC$. Es wird aber die Differenz CD der Seiten gegeben; folglich sind die Seiten selbst, mithin CE, das ist AC, und $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $BC > CD$, und $AC > CD$, so ist

$$BC + AC > 2CD.$$

Die gegebene Summe der Hypotenuse und Kathete muss also grösser seyn als das Doppelte des gegebenen Abschnitts.

Synthesis. Es sey DF die Summe der Hypotenuse und Kathete, DC der gegebene Abschnitt, und es sey $DF > 2DC$. Um DC als Durchmesser beschreibe einen Kreis, errichte auf ihr in den Endpunkten zu beiden Seiten die senkrechten $DG = DF$ und $CH = CD$, und verbinde GH, welche den Kreis in zwei Punkten schneiden wird. Es sey aber K derjenige Durchschnittspunkt, welcher dem Punkte H der nähere ist. Errichte in diesem Punkte auf GH eine Senkrechte, welche die CF in E treffe: ich behaupte, dass $CE > CD$ sey. Denn es ist $\square CED = \square DG.CH = \square FDC$. Da nun nach der Voraussetzung $FD > 2DC$, das ist $FC > CD$, so ist

$$\square DFC > \square FDC,$$

mithin auch .... $\square DFC > \square CED$,

woraus folgt, dass der Punkt E zwischen C und F liege. Weil nun $\square CED = \square FDC$, so ist

$$FD : DE = EC : CD,$$

folglich, weil $FD > DE$, auch $EC > CD$. Beschreibt man also aus C mit CE einen Kreis, so wird derselbe die senkrechte DG in einem Punkte A schneiden. Verbinde AC und errichte auf ihr in A einen Perpendikel, welcher die verlängerte CD in B treffe: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das gesuchte sey. Denn es ist $AC^2 = \square BCD$, das ist $CE^2 = \square BCD$, und, wenn man $\square DCE$ hinzusetzt,

$$\square DEC = \square BE.CD.$$

Nun ist . . . $\square DEC = \square FDC$, mithin ist $\square BE.CD = \square FDC$ und $BE = DF$. Es ist aber $BE = BC + CA$; folglich ist $BC + CA = DF$.

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben

$$H + S,\ S + n$$
$$S + n,\ m$$

folgt aus der obigen. Denn es ist

$$DC = m$$
$$DF = H + S$$
$$CF = S + n.$$

Es ist aber $DF = DC + CF$. Werden also zwei von den Linien DC, DF, CF gegeben, so ist damit auch die dritte gegeben.

Aufgabe 25. Fig. 70.

$$H - S,\ m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Ueberschuss der Hypotenuse über eine Kathete, und 2) der dieser Kathete anliegende Abschnitt der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC - AC \text{ und } CD.$$

In BC mache den Abschnitt $CE = AC$, so ist $BE = BC - AC$, mithin ist BE gegeben. Wegen des rechtwinkligen Dreiecks aber ist

$$BC : CA = AC : CD,$$

das ist . . . . $BC : CE = EC : CD$

und *divid.* . . . . . $BE : EC = ED : DC$,

also . . . . $\square BE.CD = \square CED$.

Nun ist $\square BE.CD$ wegen seiner gegebenen Seiten bekannt, also auch $\square CED$. Es ist aber die Differenz CD der Seiten dieses Rechtecks gegeben; folglich sind die Seiten selbst gegeben, also EC, das ist AC, und somit die Aufgabe auf S, m gebracht.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm CD gleich dem gegebenen Abschnitte, CF gleich dem gegebenen Ueberschusse, errichte auf CD nach entgegengesetzten Seiten die Perpendikel $DG = CD$ und $CH = CF$, verbinde GH, beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis, welcher die nach D hin verlängerte CD in E schneide, ziehe an den Perpendikel DG die Linie $CA = CE$ und errichte AB senkrecht auf AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn weil W. BAC ein rechter, und $CA = CE$ ist, so lässt sich wie in der Analysis zeigen, dass

$$\square BE.CD = \square CED$$

sey. Es ist aber wegen des Kreises

$$\begin{aligned}\square CED &= \square DG.CH\\ &= \square DCF,\end{aligned}$$

folglich ist $\square BE.CD = \square DCF$ und $BE = CF$, mithin

$$\begin{aligned}BC - CA &= BC - CE\\ &= BE = CF.\end{aligned}$$

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben

$$H - S,\ S - n$$
$$S - n,\ m$$

folgt aus der obigen. Denn macht man $BF = AC$, so ist

$$\begin{aligned}CD &= m\\ CF &= H - S\\ DF &= S - n.\end{aligned}$$

Es ist aber $CD = CF + DF$. Werden also zwei von den Linien CD, CF, DF gegeben, so kann daraus die dritte gefunden werden.

Ebenso behandelt werden die Aufgaben

$$H - S,\ n - S$$
$$n - S,\ m.$$

In diesem Falle ist $S < n$. Macht man also $BE = AC$, so ist

$$\begin{aligned}CD &= m\\ CE &= H - S\\ DE &= n - S\\ CD &= CE - DE.\end{aligned}$$

Aufgabe 26. Fig. 71.

$$H + m,\ s.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, und 2) diejenige Kathete, welche dem andern Abschnitte anliegt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CD \text{ und } AB.$$

Verlängere BC um $CE = BC$, so ist

$$BC + CD = DE,$$

mithin ist DE der Grösse nach gegeben. Nun ist

$$AB^2 = \square CBD$$

und, wenn man das Doppelte nimmt,

$$2AB^2 = \square EBD.$$

Es ist aber AB und somit $2AB^2$ gegeben, folglich auch $\square EBD$; und da die Differenz DE der Seiten gegeben wird, so sind die Seiten selbst, mithin BD und BE, also die Hälfte BC und deshalb $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Die gegebene Kathete muss natürlich kleiner seyn als die gegebene Summe.

Synthesis. Es sey DE die gegebene Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, errichte auf DE in ihren Endpunkten auf entgegengesetzten Seiten Perpendikel, in einem derselben nimm den Abschnitt EH gleich der gegebenen Kathete, in dem andern aber den Abschnitt $DG = 2EH$, und es sey $EH < DE$. Um DE als Durchmesser beschreibe einen Kreis und verbinde GH, welche die Kreislinie in zwei Punkten schneidet. Es sey aber K derjenige Durchschnittspunkt, welcher dem Punkte G der nähere ist. Errichte in diesem Punkte auf GH eine Senkrechte, welche die verlängerte ED in B treffe: ich behaupte, dass $BD < DE$ sey. Denn in der Verlängerung der ED nimm $DF = DE$. Weil $EH < DE$ oder DF, so ist $DG < EF$, mithin

$$\square DG . EH < \square EFD.$$

Nun ist wegen des Kreises

$$\square DG . EH = \square EBD,$$

also ist $\square EBD < \square EFD$, und somit $BD < DF$ oder DE. Halbirt man also BE in C, so liegt C zwischen D und E. Errichte nun in C auf DE einen Perpendikel, welcher die Kreislinie in L treffe, so ist

$$CL^2 = \square ECD = \square BCD.$$

Nun ist $BC > CD$, also auch $CL > CD$. Daher lässt sich aus C an den Perpendikel DG eine Linie $CA = CL$ ziehen. Verbinde AB, so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn weil $\square BCD = CL^2 = CA^2$, so ist W. BAC ein rechter. Daher ist $AB^2 = \square CBD$, und, wenn man beiderseits das Doppelte nimmt,

$$2AB^2 = \square EBD = \square EH . DG$$
$$= 2EH^2,$$

weil $DG = 2EH$ ist; woraus hervorgeht, dass AB gleich der gegebenen Kathete EH ist. Es ist aber auch

$$BC + CD = EC + CD = DE;$$

folglich ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Aufgabe 27. Fig. 72.

$P + m;\ n.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse, und 2) die Summe des andern Abschnitts und der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BD \text{ und } AD + DC.$$

Verlängert man also BC um $CE = AD$, so ist

$$DE = AD + DC,$$

mithin ist DE der Grösse nach gegeben *). Mache auch $DF = AD$, so ist, weil

$$CD : DA = AD : DB,$$

auch . . . . $DC : CE = FD : DB$

und *compon.* $DE : EC$ oder $DF = FB : BD$,

mithin . . . . $\square BDE = \square BFD$.

Nun ist $\square BDE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BFD$. Es ist aber die Differenz BD der Seiten bekannt, also sind die Seiten selbst, mithin DF, das ist DA, und deshalb auch $\triangle ABC$ gegeben.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm die Abschnitte BD und DE gleich den gegebenen Linien. Ueber BE beschreibe einen Halbkreis und errichte im Punkte D auf BE eine Senkrechte, welche die Peripherie in G schneide. Halbire die Linie BD, welche ein Abschnitt der Hypotenuse ist, in H, und nimm in HE den Abschnitt $HF = HG$, in der senkrechten DG mache den Abschnitt $DA = DF$, ziehe BA und errichte auf ihr die senkrechte AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn es ist $GH^2 = HF^2$, und, wenn beiderseits HD^2 abgezogen wird, $GD^2 = \square BFD$. Nun ist $GD^2 = \square BDE$, mithin ist $\square BDE = \square BFD$. Daher ist

$$ED : DF = FB : BD$$

und *divid.* . . . . . $EF : FD = FD : DB$.

---

*) Weil nun $\square BDC = AD^2 = CE^2$, so ist das Verhältniss $\square BDC : CE^2$ gegeben. In einer geraden Linie sind also zwei Punkte D, E gegeben; zwischen ihnen soll ein dritter C gefunden werden, sodass das Rechteck aus dem einen Abschnitte DC und einer gegebenen Linie BD zum Quadrate des andern Abschnitts CE ein gegebenes Verhältniss habe. Folglich ist die Aufgabe auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufg. 2, Fall 1, gebracht.

Es ist aber . . $CD:DA = AD:DB$
und $FD = DA$, folglich ist $EF = CD$ und deshalb
$$AD + DC = DF + FE = DE.$$

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben
$$H + P,\ P + m$$
$$H + P,\ n$$
ergiebt sich leicht aus der obigen. Denn es ist
$$BE = H + P$$
$$DE = P + m$$
$$BD = n.$$

Es ist aber $BE = BD + DE$. Sind also zwei von den Linien BE, BD, DE gegeben, so findet man daraus die dritte.

Aufgabe 28. Fig. 73.

$$m - P,\ n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der kleinere Abschnitt der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss des grössern über die Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben
$$BD \text{ und } CD - DA.$$

In CD mache den Abschnitt $DF = AD$, so ist
$$CF = CD - DA,$$
mithin ist CF gegeben. *) Mache auch $FE = BD$, so ist, weil
$$CD:DA = AD:DB$$
ist, auch . . . . . $CD:DF = DF:FE$,
mithin *divid*. . . . . $CF:FD = DE:EF$
und . . . . $\square\, CFE = \square\, EDF$.

Es ist aber $\square\, CFE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square\, EDF$; und da die Differenz EF der Seiten gegeben wird, so sind die Seiten selbst, also FD, das ist DA, und somit $\triangle ABC$ gegeben.

---

*) Weil $\square\, CDB = AD^2 = DF^2$, so ist das Verhältniss $\square\, CDB : DF^2$ gegeben. In einer geraden Linie sind also zwei Punkte C, F gegeben; in der Verlängerung der Linie soll ein dritter Punkt D gefunden werden, sodass das Rechteck aus dem grössern Abschnitte CD und einer gegebenen Linie BD zum Quadrate des kleinern Abschnitts FD ein gegebenes Verhältniss habe. Folglich ist die Aufgabe auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufgabe 2, Fall 2b, gebracht.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm CF gleich dem gegebenen Ueberschusse, und FE gleich dem gegebenen Abschnitte. Errichte auf EF zu beiden Seiten die senkrechten $EG = EF$ und $FH = FC$, verbinde GH und beschreibe über dieser Linie auf der Seite des Punktes E einen Halbkreis, welcher die verlängerte FE in D schneide. Verbinde FG, ziehe durch D der senkrechten EG eine Linie parallel, welche der verlängerten FG in A begegne, verbinde CA und errichte auf ihr bis nach CD hin die Linie AB senkrecht: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste.

Denn weil $\square EDF = \square EG.FH$ (*Lemma* 19)

$$= \square EFC,$$

so ist . . . . . $CF : FD = DE : EF$

und *compon.* $CD : DF = DF : FE.$

Nun ist aber $AD = DF$, weil $GE = EF$ ist, folglich ist

$$CD : DA = AD : FE.$$

Wegen des rechten Winkels BAC aber ist

$$CD : DA = AD : DB.$$

Daher ist $DB = FE$. Und weil $DF = AD$ ist, so ist

$$CD - DA = CF.$$

Anmerkung. Auf die obige Aufgabe lassen sich reduciren

$$H - P,\ m - P$$
$$H - P,\ n.$$

Denn weil $EF = BD$, so ist $DF = BE$. Nun ist $DF = AD$, also $BE = AD$. Daher ist

$$CE = H - P$$
$$CF = m - P$$
$$EF = n.$$

Es ist aber $CE = CF + EF$. Sind also zwei von den Linien CE, CF, EF gegeben, so ist zugleich auch die dritte gegeben.

Aufgabe 29. Fig. 74.

$$m^2 - P^2,\ n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der kleinere Abschnitt der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss des Quadrats vom grössern Abschnitte über das Quadrat der Höhe; das Dreieck zu constru[illegible]n.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $BD < DC$: so ist gegeben

$$BD \text{ und } CD^2 - DA^2.$$

Mache $DE = DC$, so ist $CD^2 - DA^2 = CD^2 - \square CDB$
$$= ED^2 - \square EDB$$
$$= \square DEB.$$

Daher ist $\square DEB$ gegeben. Es ist aber die Differenz BD der Seiten gegeben, folglich sind die Seiten selbst, also DE, das ist DC, und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Synthesis. Auf dem gegebenen Abschnitte BD der Hypotenuse errichte nach entgegengesetzten Seiten die senkrechten BF und DG gleich den Seiten eines Rechtecks, welches der gegebenen Fläche gleich ist, verbinde FG und beschreibe über dieser Linie auf der Seite des Punktes B einen Halbkreis, welcher die Verlängerung der BD in E schneide; mache $DC = DE$, beschreibe über der Linie BC einen Halbkreis, welcher den Perpendikel DG in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn es ist $\square BF.DG = \square DEB$
$$= DE^2 - \square BDE$$
$$= CD^2 - \square BDC$$
$$= CD^2 - DA^2.$$

Anmerkung. Die Aufgabe $m^2 - P^2 : n^2$ lässt sich auf die obige bringen. Denn nimmt man n als gegeben an, so ist $m^2 - P^2$ bekannt.

Aufgabe 30. Fig. 75.

$S, m - n.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Differenz der beiden Abschnitte der Hypotenuse, und 2) die Kathete, welche dem grössern Abschnitte anliegt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben
$$CD - DB \text{ und } AC.$$

Halbire BC in E, so ist DE die halbe Differenz der Abschnitte CD und DB, mithin ist DE der Grösse nach gegeben. Weil nun $AC^2 = \square BCD$ und AC gegeben wird, so ist $\square BCD$ gegeben, also auch seine Hälfte, nämlich $\square ECD$. Es ist aber die Differenz DE der Seiten dieses Rechtecks gegeben, folglich sind die Seiten selbst, also DC und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $AC > CD$, so ist um so mehr $AC > CD - DB$. Die gegebene Kathete muss also grösser seyn als die gegebene Differenz.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm DG gleich der gegebenen Kathete, und DF gleich der gegebenen Differenz, und es sey $DG > DF$. Halbire DF in E, errichte auf ihr in diesem Punkte auf der dem Perpendikel DG entgegengesetzten Seite die senkrechte EH halb so gross als DG, verbinde GH und beschreibe über dieser Linie auf der Seite des Punktes E einen Halbkreis, welcher die verlängerte DE in C schneide: so ist

$$\square DG.EH = \square DCE.$$

Weil nun der Annahme zufolge $DG^2 > DF^2$, und, wenn man die Hälften nimmt,

$$\square DG.EH > \square DFE,$$

so ist auch $\square DCE > \square DFE$. Daher liegt C in der Verlängerung der DF, und es ist $EC > EF$ oder ED. Beschreibt man also um den Mittelpunkt E mit EC einen Kreis, so wird derselbe die senkrechte DG in A und die verlängerte ED in B schneiden. Verbinde nun AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das gesuchte sey. Denn weil $BE = EC$, so ist

$$CD - DB = 2DE = DF.$$

Ferner ist $\square ECD = \square DG.EH$, und, wenn man beiderseits das Doppelte nimmt,

$$\square BCD = DG^2.$$

Es ist aber auch $\square BCD = AC^2$;
folglich ist $AC = DG$.

Anmerkung. Wird gegeben $s, m-n$, das ist AB und $CD-DB$: so mache $DE = BD$; dann ist $CE = CD-DB$, also CE gegeben. Es ist aber $AB^2 = \square CBD$, also $2AB^2 = \square CBE$. Daher ist $\square CBE$, mithin CB gegeben. Eine Determination findet nicht statt.

Oder: Halbire BC in E. Weil $AB^2 = \square CBD$, so ist $\frac{1}{2}AB^2 = \square EBD$. Mithin ist $\square EBD$ gegeben; und weil DE die halbe Differenz der Abschnitte gegeben ist, so sind EB und BD gegeben.

Aufgabe 31. Fig. 76.

$$S^2 + m^2, n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse, und 2) die Summe der Quadrate von dem andern Abschnitte und von der demselben anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BD \text{ und } DC^2 + CA^2.$$

Verlängere BC um $CE = CD$, so ist, weil $AC^2 = \square BCD = \square BCE$ und $DC^2 = CE^2$ ist, $AC^2 + CD^2 = \square BEC$; mithin ist $\square BEC$ gegeben, also auch seine Hälfte. Halbire daher BD in F, so ist FC die Hälfte von BE, also $\square FCE$ oder $\square FCD$ die Hälfte von $\square BEC$, mithin ist $\square FCD$ gegeben. Es ist aber die Differenz FD der Seiten bekannt, folglich sind die Seiten selbst gegeben, also CD und somit $\triangle ABC$.

Synthesis. Den gegebenen Abschnitt BD halbire in F, errichte auf FD in den Endpunkten auf beiden Seiten die senkrechten DG und FH gleich den Seiten des Rechtecks, welches der gegebenen Fläche gleich ist. Halbire FH in K, verbinde GK, beschreibe über dieser Linie auf der Seite des Punktes D einen Halbkreis, welcher die verlängerte FD in C treffe, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher den Perpendikel DG in A schneide, und verbinde AB und AC: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste.

Denn verlängert man BC um $CE = CD$, so ist $BE = 2FC$, also

$$\square BEC = 2\square FCE$$
$$= 2\square FCD.$$

Es ist aber des Kreises wegen

$$\square FCD = \square DG.FK$$

und, wenn man beiderseits das Doppelte nimmt,

$$\square BEC = \square DG.FH;$$

folglich, weil . . . $\square BEC = \square BCE + CE^2$
$$= \square BCD + CD^2$$
$$= AC^2 + CD^2,$$

ist auch $AC^2 + CD^2 = \square DG.FH$ oder gleich der gegebenen Fläche.

Aufgabe 32. Fig. 77.

$H^2 + S^2$, n.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse, und 2) die Summe der Quadrate von der Hypotenuse und von der dem andern Abschnitte anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BD \text{ und } BC^2 + CA^2.$$

Weil $CA^2 = \square BCD$, so ist $BC^2 + \square BCD$ gegeben, mithin, wenn man von dieser Summe das Quadrat der bekannten BD wegnimmt, auch

$$2\square BCD + \square BDC.$$

Verlängere DB um $BE = \frac{1}{2}DB$, so ist $\square BDC = 2\square EB.CD$; daher ist

$$2\square BCD + 2\square EB.CD,$$

das ist . . . . . . $2\square ECD$,

gegeben, also auch die Hälfte, nämlich $\square ECD$. Es ist aber die Differenz ED der Seiten gegeben; folglich sind die Seiten selbst, mithin EC, also BC und demnach das $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Die gegebene Fläche muss offenbar grösser seyn als das Quadrat des gegebenen Abschnitts.

Synthesis. Es sey BD der gegebene Abschnitt, p^2 die gegebene Fläche, und es sey $p > BD$. Verlängere DB um ihre Hälfte bis E, errichte auf ihr im Punkte D eine Senkrechte, ziehe an dieselbe die Linie $BF = p$ und errichte auf BF im Punkte F einen Perpendikel, welcher die verlängerte BD in G schneide. In der Linie DF nimm den Abschnitt $DK = DG$ und errichte auf DE auf der entgegengesetzten Seite den Perpendikel $EH = EB$, verbinde HK und beschreibe über dieser Linie einen Halbkreis, welcher die nach D hin verlängerte ED in C schneide. Endlich beschreibe über BC ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Spitze A in FK liegt: ich behaupte, dass dieses Dreieck der Aufgabe genüge.

Denn es ist

$$\square EH.DK \text{ oder } \square EB.DG = \square ECD \text{ (Lemma 19)}$$

und, wenn man beiderseits das Doppelte nimmt,

$$\begin{aligned}\square BDG = 2\square ECD &= 2\square BCD + 2\square EB.CD \\ &= 2\square BCD + \square BDC.\end{aligned}$$

Auf beiden Seiten setze BD^2 hinzu, so ist

$$\begin{aligned}\square GBD \text{ oder } BF^2 &= 2\square BCD + \square CBD \\ &= BC^2 + \square BCD \\ &= BC^2 + CA^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 33. Fig. 78.

S, n.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) eine Kathete und 2) der an der andern Kathete liegende Abschnitt der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AC \text{ und } BD.$$

Weil $AC^2 = \square BCD$, so ist $\square BCD$ bekannt; und weil die Differenz BD der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst, mithin BC und folglich $\triangle ABC$ gegeben.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm BD gleich dem gegebenen Abschnitte der Hypotenuse, und DE gleich der gegebenen Kathete. Halbire BD in F, verbinde EF, in der nach D hin verlängerten BD nimm $FC = FE$, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher DE in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte. Denn es ist $CF^2 = FE^2$, und, wenn man FD^2 abzieht, $\square BCD = DE^2$. Es ist aber auch $\square BCD = AC^2$, folglich ist $AC = DE$.

Anmerkung. Die Aufgabe $S^2 : n^2$ lässt sich auf die obige reduciren. Denn nimmt man S^2 als gegeben an, so ist n^2 gegeben, mithin S und n. — Auch lässt sich die Construction vermittelst Aufgabe III machen, wenn man die Hypotenuse als gegeben annimmt.

Aufgabe 34. Fig. 79.

HS, *s*.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) eine Kathete und 2) das Rechteck aus der andern Kathete und der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, so ist gegeben

$$AC \text{ und } \square ABC.$$

Weil AC gegeben ist, so ist auch AC^2 oder $\square BCD$, mithin das Verhältniss

$$\square ABC : \square BCD,$$

das ist . . . . $AB : CD$,

gegeben, also (*Lemma* 27) $\triangle ABC$ der Gattung nach. Es wird aber eine Seite AC dieses Dreiecks der Grösse nach gegeben, folglich ist (*Dat.* 56) $\triangle ABC$ auch der Grösse nach gegeben.

Synthesis. Es sey EF gleich der gegebenen Kathete, und $\square EF . p$ gleich der gegebenen Fläche. Errichte $EB = p$ senkrecht auf EF, halbire EF in G, verbinde BG, nimm in derselben die Abschnitte GC und GD jeden gleich GF, errichte auf BC die senkrechte DL, ziehe nach derselben die Linie $BA = BE$ *), verbinde AC, mache in ihr $CH = EF$ und ziehe $HK \;=\!\!\!|\!\!\!=\; AB$: so ist $\triangle HKC$ das verlangte.

---

*) Weil $BE + EG > GB$, und $EG = GD$, so ist $BE > BD$.

Wegen des rechten W. bei E ist

$$BG^2 = BE^2 + EG^2$$

und, wenn man $DG^2 = EG^2$ abzieht,

$$\square CBD = BE^2 = AB^2,$$

mithin ist W. BAC und also auch KHC ein rechter. Daher ist $AC^2 = \square BCD$ und

$$\square CBA : AC^2 = \square CBA : \square BCD$$
$$= AB : CD = BE : EF.$$

Folglich ist auch, weil die $\triangle\triangle\, ABC$ und HKC ähnlich sind,

$$\square CKH : HC^2 = BE : EF$$
$$= \square BEF : EF^2.$$

Nun ist $HC^2 = EF^2$, folglich $\square\, CKH = \square\, BEF = \square\, p\,.\,EF$.

Anmerkung. Ebenso wird gelöst die Aufgabe $HS : s^2$. Denn nimmt man s als gegeben an, so ist auch HS bekannt.

Aufgabe 35. Fig. 80.

$$H^2 + S^2 + m^2,\ n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse, und 2) die Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von ihrem zweiten Abschnitte und von der daran liegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BD \text{ und } BC^2 + CA^2 + CD^2.$$

Weil $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ (*Lemma* 15), so ist, wenn beiderseits $2AC^2$ hinzugesetzt wird,

$$BC^2 + CA^2 + CD^2 = 3AC^2 + BD^2;$$

daher ist die letztere Summe bekannt und, wenn man hiervon die bekannte Grösse BD^2 abzieht, auch $3AC^2$ und somit AC. Folglich ist die Aufgabe auf S, n (Aufg. 33) gebracht.

Determination. Die gegebene Fläche muss natürlich grösser seyn als das Quadrat der gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey BD der gegebene Abschnitt der Hypotenuse, und BK die Seite des Quadrats, welches der gegebenen Fläche gleich ist; und es sey $BK > BD$. Errichte auf BD im Punkte D eine Senkrechte, ziehe an dieselbe die Linie $BE = BK$, errichte auf der entgegengesetzten Seite den Perpendikel $BF = \frac{1}{3}DE$, verbinde EF und beschreibe um BD als Durchmesser einen Kreis, welcher EF in zwei Punkten schneiden wird. Es sey aber G derjenige Durchschnittspunkt, welcher dem Punkte E der nähere ist. Errichte in diesem Punkte auf EF eine Senkrechte, welche die verlängerte BD in C treffe, ziehe die Tangente CH und an den Perpendikel DE ziehe die Linie $CA = CH$ und verbinde AB: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn weil $CA = CH$ und $CH^2 = \square BCD$, so ist auch $AC^2 = \square BCD$, mithin W. BAC ein rechter. Nun ist wegen des Kreises

$$\square BCD = \square DE \,.\, BF$$

und, wenn man beiderseits das Dreifache nimmt,

$$3 \square BCD = DE^2,$$

weil $DE = 3BF$ ist. Auf beiden Seiten setze BD^2 hinzu, so ist

$$3 \square BCD + BD^2 = BE^2 = BK^2.$$

Es ist aber $3 \square BCD + BD^2 = BC^2 + CA^2 + CD^2$, folglich ist auch die letzte Summe $= BK^2$.

Aufgabe 36. Fig. 81.

$S^2 + n^2, m.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) ein Abschnitt der Hypotenuse, und 2) die Summe der Quadrate von einer Kathete und von dem der zweiten Kathete anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$CD \text{ und } AC^2 + BD^2.$$

Weil CD und somit CD^2 gegeben wird, so ist der Ueberschuss von $AC^2 + BD^2$ über CD^2, das ist $\square CBD$ oder AB^2 gegeben. Daher ist auch AB bekannt und somit die Aufgabe auf S, n (Aufg. 33) gebracht.

Determination. Weil $AC > CD$, so ist $AC^2 > CD^2$ und um so mehr $AC^2 + BD^2 > CD^2$. Die gegebene Fläche muss also grösser seyn als das Quadrat des gegebenen Abschnitts.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm CD gleich dem gegebenen Abschnitte der Hypotenuse, und CE gleich der Seite des Quadrats, welches der gegebenen Fläche gleich ist, und es sey $CE > CD$. Errichte auf CD im Punkte D eine Senkrechte und beschreibe um den Mittelpunkt C mit CE einen Kreis, so wird er die Senkrechte in einem Punkte F schneiden, weil $CE > CD$ ist. Halbire CD in G, verbinde FG, nimm in der nach D hin verlängerten GD den Abschnitt

$GB = GF$, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher den Perpendikel DF in A schneide, und verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das gesuchte sey.

Denn es ist $\square CBD = BG^2 - GD^2$ (*Lemma* 4, Zus.)

$$= FG^2 - GD^2 = DF^2,$$

und, wenn auf beiden Seiten DC^2 hinzukommt,

$$\square CBD + DC^2 = DF^2 + DC^2,$$

das ist . . . . . $AB^2 + DC^2 = CF^2 = CE^2$.

Es ist aber

$$AB^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2 \text{ (Lemma 15)},$$

folglich ist $AC^2 + BD^2 = CE^2$, das ist gleich der gegebenen Fläche.

Aufgabe 37. Fig. 82.

$$P, m^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Höhe und 2) die Summe der Quadrate von den Abschnitten der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AD \text{ und } BD^2 + DC^2.$$

Weil AD gegeben wird, so ist $2AD^2$ bekannt, mithin auch $BD^2 + DC^2 + 2AD^2$, das ist BC^2, und somit BC. Folglich ist die Aufgabe auf H, P gebracht.

Determination. Halbire BC in F. Weil die Linie BC in F halbirt und in D beliebig getheilt ist, so ist (*Lemma* 9, Zus.)

$$BD^2 + DC^2 \geqq 2BF^2.$$

Da nun $BF \geqq AD$, also $2BF^2 \geqq 2AD^2$, so ist auch

$$BD^2 + DC^2 \geqq 2AD^2.$$

Die gegebene Fläche darf daher nicht kleiner seyn als das doppelte Quadrat der gegebenen Höhe.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm $EC = EG$ gleich der gegebenen Höhe, verbinde CG und errichte auf ihr die senkrechte GB gleich der Seite des Quadrats, welches der gegebenen Fläche gleich ist. Es sey aber GB nicht kleiner als GC. Verbinde BC und halbire sie in F.

Weil . . $BG^2 + GC^2 = BC^2 = 4BF^2$ (*Lemma* 1, Zus.)

und $GC \leqq GB$, also . . $GC^2 \leqq GB^2$,

so ist . . . . $GC^2 \leqq \frac{1}{2}BC^2$ oder $2BF^2$

und, wenn man beiderseits die Hälfte nimmt,

$$CE^2 \leqq BF^2.$$

Beschreibt man also über BC einen Halbkreis, errichtet auf BC die senkrechte $CH = CE$ und zieht der BC durch H eine Linie parallel: so wird diese den Kreis in irgend einem Punkte A treffen. Verbinde AB und AC, so ist leicht zu zeigen, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste.

Aufgabe 38. Fig. 83.

$$S^2 + n^2,\ m - n.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Differenz der Abschnitte der Hypotenuse, und 2) die Summe der Quadrate von dem einen Abschnitte und von der an dem andern Abschnitte liegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben

$$CD - DB \text{ und } AC^2 + BD^2.$$

Mache $CE = BD$, so ist $DE = CD - DB$, mithin ist DE der Grösse nach gegeben. Nun ist (*Lemma* 16, Zus.)

$$AC^2 + BD^2 = 3AD^2 + DE^2$$

und die Grössen $AC^2 + BD^2$ und DE^2 werden gegeben, folglich ist auch $3AD^2$ gegeben, mithin ist AD bekannt, und die Aufgabe ist auf $P, m - n$ gebracht.

Determination. Weil $AC > CD$, so ist um so mehr $AC > DE$, und $AC^2 > DE^2$, folglich auch $AC^2 + BD^2 > DE^2$. Die gegebene Fläche muss also grösser seyn als das Quadrat der gegebenen Linie.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm DE gleich der gegebenen Differenz, und DG gleich der Seite des Quadrats, welches der gegebenen Fläche gleich ist, und es sey $DG > DE$. Auf DE errichte in ihrer Mitte F einen Perpendikel, ziehe an denselben die Linie $DH = DG$, verlängere HF um $FK = \frac{1}{3}HF$ und beschreibe um HK als Durchmesser einen Kreis, so wird derselbe die verlängerte DE in den Punkten B und C schneiden. Denn es ist $BF^2 = \square KFH$, und, wenn man auf beiden Seiten das Dreifache nimmt,

$$3BF^2 = FH^2.$$

Weil nun nach der Annahme DG oder $DH > DE$, so ist $DH^2 > DE^2$, und, wenn man beiderseits DF^2 abzieht,

$$FH^2 > 3DF^2.$$

Folglich ist auch $3BF^2 > 3DF^2$, mithin $BF > DF$; woraus hervorgeht, dass die Durchschnittspunkte B und C in den Verlängerungen der DE liegen. Beschreibe nun über

BC einen Halbkreis, errichte auf ihr im Punkte D einen Perpendikel, welcher die Kreislinie in A schneide, und verbinde AB und AC: ich behaupte, dass das $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn weil $BF = FC$ und $DF = FE$, so ist $BD = CE$, mithin

$$DE = CD - DB.$$

Ferner ist, wie bereits gezeigt worden ist,

$$FH^2 = 3BF^2.$$

Es ist aber $DF^2 = BF^2 - \square BDC$ (*Lemma* 3, Zus. 3).
Folglich ist $FH^2 + DF^2 = 4BF^2 - \square BDC$,
das ist DH^2 oder $DG^2 = BC^2 - \square BDC$
$= AC^2 + BD^2$ (*Lemma* 15, Zus. 1).

Aufgabe 39. Fig. 50.

$$H + P,\ HP.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und Höhe, und 2) das Rechteck aus beiden Linien; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$\square BC.AD \text{ und } BC + AD.$$

In der Verlängerung der BC nimm den Abschnitt $CE = AD$, so ist

$$BC + AD = BE$$

und . . . . $\square BC.AD = \square BCE.$

Daher ist die Linie BE und das $\square BCE$ gegeben. Weil also von diesem Rechteck der Inhalt und die Summe BE der Seiten gegeben ist, so sind die Seiten selbst, also BC und CE oder AD gegeben, und die Aufgabe ist daher auf H, P gebracht.

Determination. Weil $AD \leqq \frac{1}{2}BC$, so ist auch $CE \leqq \frac{1}{2}BC$. Nimmt man also $EF = \frac{1}{3}BE$, so ist $CE \leqq EF$, mithin $\square BCE \leqq \square BFE$. Weil aber $BF = 2FE$, so ist $\square BFE = 2FE^2$. Folglich darf die gegebene Fläche nicht grösser seyn als das doppelte Quadrat von dem dritten Theile der gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey BE die gegebene Summe der Hypotenuse und der Höhe. Mache $EF = \frac{1}{3}BE$, so ist $\square BFE = 2FE^2$. Die gegebene Fläche sey aber nicht grösser als $\square BFE$. Ist sie nun gleich $\square BFE$, so beschreibe über der Hypotenuse BF ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe FE, so wird dieses das verlangte seyn. Ist aber die gegebene Fläche kleiner als $\square BFE$, so mache $\square BCE$ gleich der gegebenen Fläche; so wird $CE < FE$, also $CE < \frac{1}{2}BC$ seyn. Daher lassen sich über der Hypotenuse BC zwei rechtwinklige Dreiecke construiren, deren Höhen gleich CE sind, und es ist klar, dass beide den Bedingungen der Aufgabe entsprechen werden.

Anmerkung 1. Die Analysis ist unabhängig vom W. BAC.

Anmerkung 2. Die Aufgabe $H + P$, Ss ist einerlei mit der obigen, weil für das rechtwinklige Dreieck $Ss = HP$ ist.

Aufgabe 40. Fig. 84.

$H + m$, P.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Höhe und 2) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AD \text{ und } BC + CD.$$

Verlängere BC um $CE = CD$, so ist $BE = BC + CD$, mithin ist BE der Grösse nach gegeben. Da nun $AD^2 = \square BDC$, so ist, wenn man beiderseits das Doppelte nimmt, $2AD^2 = \square BDE$. Es wird aber AD, also $2AD^2$ gegeben, folglich auch $\square BDE$; und weil die Summe BE der Seiten dieses Rechtecks gegeben wird, so ist BD, folglich wegen der gegebenen Höhe das $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $\square BDE$ gleich ist dem doppelten Quadrate der gegebenen Höhe, und $\square BDE$ nicht grösser ist als das Quadrat der halben BE: so muss das doppelte Quadrat der gegebenen Höhe nicht grösser seyn als das Quadrat der halben gegebenen Summe.

Synthesis. Auf der gegebenen Summe BE errichte in ihren Endpunkten auf derselben Seite die senkrechten BG und EH, jene gleich der gegebenen Höhe, diese gleich $2BG$, und es sey $\square BG.EH$ nicht grösser als das Quadrat der halben BE. Verbindet man nun GH und beschreibt über dieser Linie einen Halbkreis, so wird derselbe (*Lemma* 17) die Linie BE in irgend einem Punkte D treffen. Halbire die Abschnitte BD und DE in F und C, errichte $DA =$

BG *) senkrecht auf BE und verbinde AB, AC und AF, AE: so behaupte ich, dass die $\triangle\triangle\, ABC, AFE$ beide der Aufgabe genügen.

Denn wegen des Kreises ist $\square\, BDE = \square\, BG \,.\, EH$ (*Lemma* 18). Nimmt man also von den Seiten DE und EH die Hälften DC und BG, so ist $\square\, BDC = BG^2$. Es ist aber $AD = BG$, mithin ist $\square\, BDC = AD^2$, folglich ist W. BAC ein rechter. Ferner ist AD gleich der gegebenen Höhe und $BC + CD = BC + CE = BE$. Folglich ist $\triangle\, ABC$ das verlangte.

Ferner, weil $\square\, BDE = \square\, BG \,.\, EH$, so ist, wenn man von den Seiten BD, EH die Hälften FD, BG nimmt, $\square\, FDE = BG^2 = AD^2$, mithin W. FAE ein rechter. Auch ist AD gleich der gegebenen Höhe und $EF + FD = EF + FB = BE$. Folglich genügt auch $\triangle\, AFE$ der Aufgabe.

Anmerkung. Wenn $2AD^2 = \frac{1}{4}BE^2$, so berührt BE den Halbkreis. Dann ist $BD = DE$, und die $\triangle\triangle\, ABC, AFE$ sind congruent. Ist aber $2AD^2 < \frac{1}{4}BE^2$, so schneidet DE den Halbkreis. Der zweite Durchschnittspunkt bestimmt ebenfalls zwei Dreiecke, welche aber den $\triangle\triangle\, ABC, AFE$ congruent sind.

Aufgabe 41. Fig. 85.

H, S — m.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) der Ueberschuss einer Kathete über den anliegenden Abschnitt der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle\, ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC \text{ und } AC - CD.$$

Mache $CE = AC$, so ist $ED = AC - CD$, mithin ist ED gegeben. Da nun

$$BC : CA = AC : CD,$$

das ist . . . . $BC : CE = EC : CD$,
so ist *convert*. . . . $CB : BE = CE : ED$,
also . . . . $\square\, BC \,.\, DE = \square\, BEC$.

Nun ist $\square\, BC \,.\, DE$ gegeben, also auch $\square\, BEC$. Es wird aber auch die Summe BC der Seiten gegeben, folglich sind die Seiten selbst gegeben, mithin die Linie CE, das ist AC, und somit das $\triangle\, ABC$.

---

*) Verbinde FG, welche verlängert den in D errichteten Perpendikel in A treffe: so ist offenbar $AD = BG$.

Determination. Weil der Punkt E zwischen B und C liegt, so ist, wenn BC in P halbirt wird, $\square BEC \leqq BP^2$ (*Lemma* 3, Zus. 2), mithin auch $\square BC \,.\, DE \leqq BP^2$. Halbirt man nun BP in d, so ist $BP^2 = \square CBd$ (weil $CB : BP = PB : Bd$). Folglich ist $\square BC \,.\, DE \leqq \square CBd$, und deshalb $DE \leqq Bd$, oder $DE \leqq \frac{1}{4} BC$. Der gegebene Ueberschuss darf also nicht grösser seyn als der vierte Theil der gegebenen Hypotenuse.

Synthesis. Es sey BC die gegebene Hypotenuse, und die Linie p die gegebene Differenz, und p sey nicht grösser als der vierte Theil von BC. Beschreibe über BC einen Halbkreis, auf derselben Seite errichte auf BC die senkrechten $CF = BC$ und $BG = p$ und verbinde FG: so wird diese Linie den Halbkreis in irgend einem Punkte H treffen, weil offenbar $\square CF \,.\, BG$ oder $\square BC \,.\, p$ nicht grösser ist als das Quadrat der halben BC. Im Punkte H errichte auf FG eine Senkrechte, welche BC in E treffe, ziehe die Sehnen $CA = CE$ und $Ba = BE$ und verbinde BA und Ca: so sind ABC und aBC die gesuchten Dreiecke.

Denn fälle AD senkrecht auf BC, so ist

$$BC : CA = AC : CD,$$

das ist . . . . $BC : CE = EC : CD$,

also *convert.* . . . $CB : BE = CE : ED$

und . . . . . . $\square BC \,.\, DE = \square BEC$.

Es ist aber . . $\square BC \,.\, p = \square BEC$,

weil $\square BC \,.\, p = \square CF \,.\, BG$, und letzteres $= \square BEC$ ist; folglich ist auch $\square BC \,.\, DE = \square BC \,.\, p$ und $DE = p$. Nun ist

$$DE = EC - CD = AC - CD,$$

folglich ist $AC - CD = p$.

Ebenso, wenn ad senkrecht auf BC gefällt wird, ist

$$CB : Ba = aB : Bd,$$

das ist . . . . $CB : BE = EB : Bd$

und *convert.* . . . . $BC : CE = BE : Ed$,

also . . . . . . $\square BC \,.\, Ed = \square BEC$

$= \square BC \,.\, p$,

mithin ist $Ed = p$ und $Ba - Bd = p$.

Anmerkung 1. Ist $p = \frac{1}{4} BC$, so ist $\square BEC = \frac{1}{4} BC^2$, also $BE = EC$; dann sind also die $\triangle\triangle\, ABC, aBC$ congruent. Ist aber $p < \frac{1}{4} BC$, so ist nicht $BE = EC$, und die $\triangle\triangle$ sind nicht congruent. In diesem Falle schneidet FG die Peripherie in einem zweiten Punkte, wodurch man noch zwei andere $\triangle\triangle$ erhält, die aber den vorigen congruent sind.

Anmerkung 2. Ebenso gelöst werden die Aufgaben

$$H,\ S+n$$
$$S-m,\ S+n.$$

Denn macht man in Fig. 84 $DE = AC$, so ist

$$BC = H$$
$$CE = S-m$$
$$BE = S+n.$$

Es ist aber $BE = BC + CE$. Sind also zwei von den Linien BC, CE, BE gegeben, so ist auch die dritte bekannt.

Aufgabe 42. Fig. 85. 86. 87.

$$H,\ P^2 - n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) der Ueberschuss des Quadrats der Höhe über das Quadrat des kleinern Abschnitts der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Fig. 85. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $BD > DC$: so ist gegeben

$$BC \text{ und } AD^2 - DC^2.$$

Mache $DE = DC$, so liegt E zwischen B und D. Weil nun

$$AD^2 = \square BDC = \square BDE.$$

so ist, wenn $DC^2 = DE^2$ abgezogen wird,

$$AD^2 - DC^2 = \square BED.$$

Folglich ist $\square BED$ gegeben, also auch das Doppelte, nämlich $\square BEC$. Es wird aber die Summe BC der Seiten gegeben, folglich sind die Seiten selbst, also der Punkt E und somit der Punkt D und das $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Halbire BC in P, so ist (*Lemma* 3, Zus. 1) $\square BEC \leqq CP^2$, also, wenn man beiderseits die Hälfte nimmt, $\square BED \leqq \frac{1}{2} CP^2$. Es ist aber $\square BED$ gleich der gegebenen Fläche; folglich darf diese nicht grösser seyn als das halbe Quadrat von der Hälfte der gegebenen Hypotenuse.

Synthesis. Halbire die gegebene Hypotenuse BC in P, und die gegebene Fläche, $\square pq$, sey nicht grösser als das halbe Quadrat von CP, so ist $2\square pq$ nicht grösser als CP^2. Beschreibe über BC einen Halbkreis, errichte auf BC auf einer Seite die senkrechten $CF = p$ und $BK = q$ und verlängere BK um $KG = BK$, so ist $\square CF.BG = 2\square pq$, also jenes Rechteck nicht grösser als CP^2. Verbindet man daher FG, so wird diese Linie den Halbkreis in irgend einem Punkte H treffen. Errichte in diesem Punkte auf FG eine Senkrechte, welche BC in E schneide, halbire die Abschnitte BE und EC in d und D, errichte DA und da bis zur Peripherie senkrecht auf BC und verbinde AB, AC und aB, aC: so sind ABC und aBC die gesuchten Dreiecke.

Denn wegen des Kreises ist (*Lemma* 18, Anm.)

$$\sqsubset BEC = \sqsubset CF.BG$$

und, wenn man beiderseits die Hälfte nimmt,

$$\sqsubset BED = \sqsubset CF.BK$$
$$= \sqsubset pq.$$

Setze $ED^2 = DC^2$ hinzu, so ist

$$\sqsubset BDE = \sqsubset pq + DC^2.$$

Es ist aber . . . $\sqsubset BDE = \sqsubset BDC = AD^2$;
folglich ist $AD^2 = \sqsubset pq + DC^2$, und $AD^2 - DC^2 = \sqsubset pq$.

Ebenso ist, weil $\sqsubset BEC = \sqsubset CF.BG$, wenn beiderseits die Hälfte genommen wird, $\sqsubset dEC = \sqsubset CF.BK = \sqsubset pq$. Setze nun $dE^2 = dB^2$ hinzu, so ist $\sqsubset CdE$, das ist $\sqsubset CdB$, oder $ad^2 = \sqsubset pq + dB^2$, mithin ist

$$ad^2 - dB^2 = \sqsubset pq.$$

Anmerkung 1. Wenn $\sqsubset pq = \frac{1}{2}CP^2$, also $\sqsubset CF.BG = CP^2$ ist, so berührt FG den Halbkreis, und die Linie HE geht durch P. Dann ist also $BE = EC$, mithin $Bd = CD$, und die $\triangle\triangle$ aBC, ABC sind congruent. Ist aber $\sqsubset CF.BG < CP^2$, so schneidet FG den Halbkreis, und dann ist nicht $BE = EC$, also auch nicht $Bd = CD$, und die $\triangle\triangle$ sind nicht congruent. Der zweite Durchschnittspunkt bestimmt dann noch zwei andere $\triangle\triangle$, welche der Aufgabe genügen, aber den vorigen congruent sind.

Anmerkung 2. Fig. 86. 87. Wenn die gegebene Fläche ein Quadrat ist, so kann die Aufgabe auch auf folgende Weise gelöst werden. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm FE gleich der gegebenen Hypotenuse, und FA gleich der Seite des gegebenen Quadrats. Verbinde AE und fälle aus der Mitte H der Linie AE die HG senkrecht auf EF: so ist aus bekannten Gründen $GH = \frac{1}{2}AF$, also $\sqsubset AF.GH = \frac{1}{2}AF^2$. Es sey aber die gegebene Fläche AF^2 nicht grösser als $\frac{1}{2}FG^2$, so ist $\frac{1}{2}AF^2$ nicht grösser als $\frac{1}{4}FG^2$. Daher wird (*Lemma* 17) der über AH beschriebene Halbkreis die FG entweder berühren (Fig. 86) oder schneiden (Fig. 87). Es sey D einer von den Treffpunkten. Verbinde HD, nimm in dieser Linie die Abschnitte $DC = DF$, und $DB = DE$, und ziehe AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn verbinde AD, und fälle auf ihre Verlängerung den

Perpendikel EK, so ist $EK \mathrel{=\!\!|\!\!=} HD$, weil W. ADH ein Winkel im Halbkreise ist. Es ist aber auch $GH \mathrel{=\!\!|\!\!=} AF$; folglich ist

$$AD : DK = AH : HE = FG : GE.$$

Nun ist $FG = GE$, also $AD = DK$ und $AD^2 = \square ADK$. Weil aber die rechten Winkel AFE, AKE auf einer Basis stehen, liegen die Punkte A, F, K, E in einer Kreislinie. Daher ist $\square ADK$ oder $AD^2 = \square EDF = \square BDC$. Folglich ist W. BAC ein rechter. In dem rechtwinkligen $\triangle AFD$ aber ist

$$AD^2 = AF^2 + FD^2 = AF^2 + CD^2,$$

folglich ist $AD^2 - DC^2 = AF^2$, das ist gleich der gegebenen Fläche. Auch erhellt aus der Construction, dass $BC = EF$; mithin ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Wenn der Halbkreis die Linie FG in einem zweiten Punkte d schneidet (Fig. 87), so erhält man durch dieselbe Construction noch ein anderes $\triangle Abc$ von denselben Eigenschaften. Die $\triangle\triangle ABC$, Abc sind aber nicht congruent, weil ihre Höhen AD und Ad ungleich sind.

Aufgabe 43. Fig. 88.

$$P - n, m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der grössere Abschnitt der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss der Höhe über den kleinern Abschnitt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben

$$CD \text{ und } AD - DB.$$

Mache $BE = AD$, so ist $DE = AD - DB$, mithin ist DE der Grösse nach gegeben *). Mache auch $DF = AD$: so ist, weil

$$CD : DA = AD : DB$$

ist, auch . . . . . $CD : DF = EB : BD$

---

*) Weil nun $\square BDC = AD^2 = BE^2$, so ist das Verhältniss $\square BDC : BE^2$ gegeben. In einer geraden Linie sind also zwei Punkte D, E gegeben; in der Verlängerung soll ein dritter Punkt B gefunden werden, sodass das Rechteck aus dem kleinern Abschnitte BD und einer gegebenen Linie DC zum Quadrate des grössern Abschnitts BE ein gegebenes Verhältniss habe. Folglich ist die Aufgabe auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufg. 2, Fall 2, a gebracht.

und *convert.* . . . . $DC : CF = BE$ oder $DF : ED$,
mithin . . . . $\square CFD = \square CDE$.

Da nun $\square CDE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben ist, so ist es auch $\square CFD$. Es ist aber die Summe CD der Seiten gegeben, mithin sind die Seiten selbst, also DF, das ist AD, und $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil CD im Punkte F so getheilt werden muss, dass $\square CFD = \square CDE$ ist: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square CDE$ grösser ist als das Quadrat der halben CD, das ist, wenn DE grösser ist als der vierte Theil der CD. Die gegebene Differenz darf also nicht grösser seyn als der vierte Theil des gegebenen Abschnitts.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm CD gleich dem gegebenen Abschnitte, und DE gleich der gegebenen Differenz, und es sey DE nicht grösser als $\frac{1}{4}CD$. Errichte auf CD die Linie $DK = CD$ senkrecht. Ist nun $DE = \frac{1}{4}CD$, so halbire DK in G, verbinde CG und errichte auf ihr im Punkte G einen Perpendikel, welcher die Verlängerung der CD in H schneide: so ist $\triangle GHC$ das verlangte. Denn halbirt man CD in O, so ist $\square CDE = DO^2 = DG^2$, mithin

$$CD : DG = GD : DE$$

Es ist aber . . . . $CD : DG = GD : DH$,
folglich ist $DE = DH$, also $HE = 2ED = DO = DG$, und somit $GD - DH = HE - DH = DE$. Ist aber $DE < \frac{1}{4}CD$, so errichte innerhalb des W. CDK auf der Linie DK den Perpendikel $KL = DE$, verbinde CL und beschreibe über dieser Linie einen Halbkreis: so wird derselbe die DK in zwei Punkten A und a schneiden, weil $\square CD . KL$, das ist $\square CDE$, kleiner ist als DO^2 oder DG^2. Verbinde CA und Ca und errichte AB und ab senkrecht auf AC und aC: so sind die $\triangle\triangle\, ABC$ und abC die gesuchten.

Denn es sey $DF = DA$, so ist $\square DFC = \square DAK = \square CD . KL = \square CDE$. Daher ist

$$DC : CF = FD : DE$$

und *convert.* . . . . $CD : DF = DF : FE$,
das ist . . . . $CD : DA = AD : FE$.
Es ist aber . . . . $CD : DA = AD : DB$.
Daher ist $FE = DB$, mithin, weil $DE = DF - FE$, auch $DE = AD - DB$.

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle abC$ das Verlangte leiste.

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben
$H - P$, $P - n$
$H - P$, m

folgt aus der obigen. Denn macht man $BE = AD$, so ist

$$CD = m$$
$$CE = H - P$$
$$DE = P - n.$$

Es ist aber $CD = CE + DE$. Sind also zwei von den Linien CD, CE, DE gegeben, so ist auch die dritte bekannt.

Aufgabe 44. Fig. 89.

$$P^2 - n^2, m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der grössere Abschnitt der Hypotenuse, und 2) der Ueberschuss des Quadrats der Höhe über das Quadrat des kleinern Abschnitts der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist gegeben

$$CD \text{ und } AD^2 - DB^2.$$

Mache $DE = DB$, so ist $AD^2 - DB^2 = \square CDB - DB^2 = \square CDE - DE^2 = \square CED$. Daher ist $\square CED$ gegeben. Es ist aber die Summe CD der Seiten gegeben; folglich sind die Seiten selbst, also DE, das ist BD, und somit $\triangle ABC$ gegeben.

Determination. Weil $AD^2 - DB^2 = \square CED$, und $\square CED$ nicht grösser ist als das Quadrat der halben CD, so ist $AD^2 - DB^2$ nicht grösser als das Quadrat der halben CD. Folglich darf die gegebene Fläche nicht grösser seyn als das Quadrat des halben gegebenen Abschnitts.

Synthesis. Es sey CD der gegebene Abschnitt der Hypotenuse, und die gegebene Fläche nicht grösser als das Quadrat der halben CD. Errichte auf CD auf einer Seite die senkrechten DF und CG gleich den Seiten des Rechtecks, welches der gegebenen Fläche gleich ist, verbinde FG und beschreibe über CD einen Halbkreis: so wird er die FG in irgend einem Punkte H treffen. Errichte in diesem Punkte auf FG eine Senkrechte, welche CD in E schneide, errichte EK bis zum Halbkreise senkrecht auf CD, verbinde DK und CK, in den Verlängerungen der CD nimm $DB = DE$ und $Cb = CE$, und in den Perpendikeln DF und CG nimm $DA = DK$ und $Ca = CK$, endlich verbinde AB und AC, sowie aD und ab: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle ABC$ und aDb beide das Verlangte leisten.

Denn weil $\square CDE = DK^2$, das ist $\square CDB = DA^2$, so ist W. BAC ein rechter. Daher ist $AD^2 - DB^2 =$

$\Box CDB - DB^2 = \Box CDE - DE^2 = \Box CED = \Box CG . DF$, das ist gleich der gegebenen Fläche. Folglich genügt $\triangle ABC$ der Aufgabe.

Ebenso, weil $\Box DCE = CK^2$, das ist $\Box DCb = Ca^2$, ist W. Dab ein rechter; daher ist $aC^2 - Cb^2 = \Box DCb - Cb^2 = \Box DCE - CE^2 = \Box DEC = \Box CG . DF$, oder gleich der gegebenen Fläche. Folglich leistet auch $\triangle ABC$ das Verlangte.

Anmerkung 1. Ist $\Box CG . DF = \frac{1}{4} CD^2$, so berührt FG den Halbkreis. Alsdann ist $DE = EC$ und $\triangle ABC \cong \triangle aDb$. Ist aber $\Box CG . DF < \frac{1}{4} CD^2$, so ist nicht $DE = EC$, also auch nicht $\triangle ABC \cong \triangle aDb$. In diesem Falle schneidet FG den Halbkreis noch in einem zweiten Punkte, und man erhält alsdann durch eine ähnliche Construction noch zwei andere Dreiecke, welche aber den beiden vorigen congruent sind.

Anmerkung 2. Die Aufgabe $P^2 - n^2 : m^2$ lässt sich auf die obige reduciren, wenn man m als gegeben annimmt. Für die Determination wird sich ergeben müssen, dass das gegebene Verhältniss nicht grösser seyn dürfe als das Verhältniss 1 : 4.

Aufgabe 45. Fig. 90. 91.

$H - S, \; S + m.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) der Ueberschuss der Hypotenuse über eine Kathete, und 2) die Summe dieser Kathete und des ihr anliegenden Abschnitts; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Fig. 90. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC - AC \text{ und } AC + CD.$$

In BC nimm den Abschnitt $CG = AC$, und in der verlängerten BC den Abschnitt $CE = CD$, so ist

$$BG = BC - AC$$

und . . . . $GE = AC + CD$,

daher sind BG und GE, also auch ihre Summe BE der Grösse nach gegeben *). Ferner verlängere BC um $CF = AC$. Weil nun des rechtwinkligen Dreiecks wegen

*) Wegen des rechtwinkligen Dreiecks ist $AC^2 = \Box BCD$, das ist $CG^2 = \Box BCE$. In einer geraden Linie sind also drei Punkte B, G, E gegeben; man soll zwischen den beiden letzten

$$BC : CA = AC : CD,$$

so ist . . $BC + CA : BC - CA = AC + CD : AC - CD,$

das ist . . $BC + CF : BC - CG = GC + CE : FC - CE,$

oder . . . . . $BF : BG = GE : FE$

und . . . . $\square BGE = \square BFE.$

Nun ist $\square BGE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square BFE$; und weil die Differenz BE der Seiten bekannt ist, so sind die Seiten selbst gegeben, also auch GF und die Hälfte GC oder AC, folglich $\triangle ABC$.

Synthesis. Fig. 91. In einer geraden Linie nimm vom Punkte G aus nach entgegengesetzten Richtungen die Abschnitte BG und GE, jenen gleich dem gegebenen Ueberschusse $(H - S)$, diesen gleich der gegebenen Summe $(S + m)$. Errichte auf BE nach entgegengesetzten Seiten die Perpendikel $BM = BG$ und $EK = GE$, verbinde KM und beschreibe über dieser Linie auf der Seite des Punktes E einen Halbkreis, welcher die verlängerte BE in F schneide: so ist (*Lemma* 19) $\square BFE = \square BM . EK = \square BGE$, also

$$FB : BG = GE : EF.$$

Nun ist $FB > BG$, also $GE > EF$. Halbirt man also GF in C, so liegt C zwischen G und E. Errichte auf BE im Punkte G einen Perpendikel und ziehe an denselben die Linie $CA = BC$: so ist $\triangle AGC$ das verlangte.

Denn aus der obigen Proportion folgt, wenn man setzt die halbe Summe der Glieder zur halben Differenz,

$$BC : CG = GC : CE.$$

Fällt man nun GN senkrecht auf AC, so ist

$$AC \text{ oder } BC : CG = GC : CN,$$

mithin ist $CE = CN$, und daher

$$GC + CN = GC + CE = GE.$$

Ferner ist . . . $AC - CG = BC - CG = BG,$

folglich leistet $\triangle AGC$ das Verlangte.

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben

$H - S,\ H + m$

$S + m,\ H + m$

folgt aus der obigen. Denn es ist

$$BG = H - S$$
$$GE = S + m.$$
$$BE = H + m.$$

---

einen vierten Punkt C finden, sodass das Rechteck aus dem ersten und dritten Abschnitte BC, CE gleich ist dem Quadrate des zweiten Abschnitts GC. Folglich ist die Aufgabe auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufg. 5, Fall 2, a gebracht.

Es ist aber $BE = BG + GE$. Sind also zwei der Linien BG, GE, BE gegeben, so findet man daraus auch die dritte.

Aufgabe 46. Fig. 90. 92.

$$H + m,\ S - m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, und 2) die Differenz zwischen diesem Abschnitte und der ihm anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Fig. 90. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CD \text{ und } AC - CD.$$

In der Verlängerung der BC nimm $CE = CD$ und $CF = AC$, so ist . . . . $BE = BC + CD$
und . . . . $FE = AC - CD$,
daher sind BE und FE der Grösse nach gegeben. *). Ferner nimm $CG = CF$. Weil nun

$$BC : CA = AC : CD,$$

so ist, wenn man setzt die Summen der homologen Glieder zu ihren Differenzen,

$$BC + CA : BC - CA = AC + CD : AC - CD,$$

das ist $BC + CF : BC - CG = GC + CE : FC - CE$,
oder . . . . $BF : BG = GE : FE$
und . . . . . . $\square BFE = \square BGE$.

Es ist aber $\square BFE$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, folglich auch $\square BGE$; und da die Summe BE der Seiten gegeben wird, so sind die Seiten selbst gegeben, mithin GE, also GF und die Hälfte CF, folglich BC und CA.

Determination. Weil die Linie BE im Punkte G so getheilt werden muss, dass $\square BGE$ gleich ist dem gegebenen $\square BFE$: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $\square BFE$ grösser ist als das Quadrat der halben BE. Halbire also BE in D und nimm in ihrer Verlängerung den Punkt H so, dass $\square BHE = BD^2$, so darf EF nicht grösser seyn als EH.

---

*) Wegen des rechtwinkligen Dreiecks ist $AC^2 = \square BCD$, das ist $FC^2 = \square BCE$. In einer geraden Linie sind also drei Punkte B, E, F gegeben; man soll zwischen den beiden ersten einen vierten Punkt C finden, sodass das Rechteck aus den beiden ersten Abschnitten BC, CE gleich ist dem Quadrate des dritten Abschnitts FC. Folglich ist die Aufgabe auf die *sectio determ.*, Buch 1, Aufg. 5, Fall 3, a gebracht.

Synthesis. Fig 92. Es sey BE die gegebene Summe der Hypotenuse und des einen Abschnitts, und p der Ueberschuss der Kathete über den Abschnitt. Halbire BE in D, errichte $EK = DE$ senkrecht auf BE, verbinde DK und mache in DE den Abschnitt $DH = DK$, so ist $\square BHE = DE^2$. Ist nun $p = EH$, so halbire DH in O, errichte auf BE im Punkte D einen Perpendikel und ziehe an denselben die Linie $OP = OB$, so ist $\triangle ODP$ das verlangte.

Wegen der gleichen Rechtecke BHE, BDE ist

$$HB : BD = DE : EH.$$

Nun ist $HB > BD$, also $DE > EH$, folglich liegt die Mitte O der Linie DH zwischen D und E. Aus der obigen Proportion aber erhält man, wenn man setzt die halbe Summe der Glieder zur halben Differenz,

$$BO : OD = DO : OE.$$

Fällt man nun DQ senkrecht auf OP, so ist

$$PO \text{ oder } BO : OD = DO : OQ,$$

mithin ist $OQ = OE$. Daher ist

$$PO + OQ = BO + OE = BE$$

und . . . . . $DO - OQ = HO - OE = EH = p$.

Ist $p > EH$, so ist die Aufgabe nicht möglich. Wenn aber $p < EH$ ist, so mache $EF = p$, so ist $EF < EH$ und $\square BFE < \square BHE$ oder DE^2. Errichte auf BE nach einer Seite die Perpendikel $BM = BF$ und $EL = EF$, verbinde LM und beschreibe über dieser Linie einen Halbkreis, so wird derselbe die BE in zwei Punkten G und g schneiden. Halbire GF in C, und gF in c: so lässt sich wie oben zeigen, dass die Punkte C und c zwischen E und G oder g liegen. Errichte auf BE in den Punkten G und g Perpendikel und ziehe an den ersten die Linie $CA = CB$, und an den zweiten die Linie $ca = cB$: so werden die $\triangle\triangle\, AGC, agc$ beide der Aufgabe genügen.

Der Beweis wird wie oben geführt.

Zusatz. Der grösste Ueberschuss EH der Kathete über den anliegenden Abschnitt wird so bestimmt: Es ist

$$\square BHE = DE^2$$

und, wenn DE^2 hinzukommt,

$$DH^2 = 2DE^2 = \tfrac{1}{2}BE^2.$$

Es ist aber $EH = DH - DE$. Folglich ist der grösste Ueberschuss der Kathete über den Abschnitt gleich dem Ueberschusse, welchen über die halbe gegebene Summe die Seite des Quadrats hat, welches halb so gross ist als das Quadrat jener Summe.

$$S - m \overline{\overline{<}} \sqrt{\frac{(H+m)^2}{2}} - \frac{H+m}{2}.$$

Anmerkung. Die Auflösung der Aufgaben

$$H + m,\ H + S$$
$$S - m,\ H + S$$

folgt aus der obigen. Denn es ist

$$BF = H + S$$
$$BE = H + m$$
$$EF = S - m.$$

Es ist aber $BF = BE + EF$. Sind also zwei von den Linien BF, BE, EF gegeben, so ist immer die dritte bekannt.

Aufgabe 47. Fig. 93.

$$H + m,\ S.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, und 2) die Kathete, welche diesem Abschnitte anliegt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AC \text{ und } BC + CD.$$

Weil $AC^2 = \square BCD$ und AC^2 gegeben wird, so ist $\square BCD$ bekannt. Es wird aber die Summe der Seiten dieses Rechtecks gegeben, mithin sind die Seiten selbst gegeben, und somit ist die Aufgabe auf H, m gebracht.

Determination. Verlängere BC um $CE = CD$, so ist $BE = BC + CD$. Weil nun AC die mittlere Proportionale ist zwischen BC und CD, das ist zwischen BC und CE: so ist (*Lemma* 11, Zus. 2) $BE > 2AC$, oder AC kleiner als die halbe BE. Folglich muss die gegebene Kathete kleiner seyn als die Hälfte der andern gegebenen Linie.

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm FG gleich der gegebenen Summe und GH gleich der gegebenen Kathete, und es sey $GH < \frac{1}{2}FG$. Beschreibe innerhalb des W. FGH über FG einen Halbkreis und ziehe durch H mit FG eine Linie parallel, so wird dieselbe den Halbkreis in zwei Punkten schneiden, weil GH kleiner ist als der Radius. Es sey A einer von den Durchschnittspunkten. Fälle AC senkrecht auf FG, so sind die Abschnitte FC und CG ungleich. Es sey nun $FC > CG$, so ist auch $FC > CA$. Daher lässt sich aus C an die Parallele AH eine Linie $CB = FC$ ziehen. Ich behaupte nun, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn aus der Construction erhellt, dass der W. BAC ein rechter, und die Kathete AC gleich GH sey. Fällt man nun AD senkrecht auf BC, so ist $AC^2 = \square BCD$. Wegen des Halbkreises aber ist $AC^2 = \square FCG$, mithin ist $\square BCD = \square FCG$. Weil nun $BC = FC$, so ist $CD = CG$, folglich $BC + CD = FG$.

Aufgabe 48. Fig. 94.

$$H+m+S,\ HS+mS.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse, eines ihrer Abschnitte und der daran liegenden Kathete, und 2) die Summe zweier Rechtecke, deren Grundlinien die Hypotenuse und der genannte Abschnitt, und deren gemeinschaftliche Höhe die genannte Kathete sind; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CD + AC \text{ und } \square BCA + \square DCA.$$

In der Verlängerung der BC nimm $CE = CD$ und $EF = AC$, so ist

$$BF = BC + CD + CA$$

$$\text{und } \ldots\ldots \square BEF = \square BC.EF + \square CEF$$
$$= \square BCA + \square DCA.$$

Daher ist BF und $\square BEF$ gegeben, also die Linien BE und EF; mithin ist die Aufgabe auf $H + m$, S (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Weil AC oder EF die mittlere Proportionale ist zwischen BC und CD oder CE, so ist (*Lemma* 11, Zus. 2) $BE > 2EF$, und, wenn beiderseits EF hinzukommt, $BF > 3EF$. Macht man also $FH = \frac{1}{3}BF$, so ist $FH > EF$ und deshalb (*Lemma* 7) $\square BEF < \square BHF$. Es ist aber $\square BHF = 2HF^2$. Folglich muss die gegebene Fläche kleiner seyn als das doppelte Quadrat von dem dritten Theile der gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey BF gleich der gegebenen Linie. Nimm $FH = \frac{1}{3}BF$, und die gegebene Fläche sey kleiner als $\square BHF$: so lässt sich BF in zwei Punkten so theilen, dass das Rechteck aus den Abschnitten durch je einen Punkt gleich der gegebenen Fläche ist. Es sey E der dem Punkte F näher liegende Theilungspunkt, so ist $\square BEF < \square BHF$, also (*Lemma* 8) $EF < FH$, mithin $EF < \frac{1}{2}BE$. Daher lässt sich die Linie BE in zwei ungleiche Abschnitte BC, CE theilen, deren Rechteck gleich EF^2 ist. Es sey aber $BC > CE$, so ist BC die Hypotenuse, und CE ein Abschnitt derselben, welcher der Kathete EF anliegt.

Aufgabe 49. Fig. 94.

$H+m, H^2+S^2+m^2$.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, und 2) die Summe der Quadrate von den genannten Linien und von der jenem Abschnitte anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC+CD \text{ und } BC^2+CD^2+CA^2.$$

Verlängere BC um $CE=CD$: so ist

$$BE=BC+CD,$$

mithin ist BE gegeben. Da nun $AC^2=\square BCD=\square BCE$, so ist die gegebene Fläche

$$=BC^2+\square BCE+CE^2.$$

Dieses ist aber der Ueberschuss von BE^2 über $\square BCE$, folglich ist auch $\square BCE$ oder AC^2 gegeben, und somit die Aufgabe auf $H+m, S$ (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Offenbar ist die gegebene Fläche kleiner als BE^2. Weil aber $EC=CD$, und $CD<BC$, so ist $\square BCE$ kleiner als das Quadrat der halben BE. Es ist aber BE^2 gleich dem vierfachen Quadrate ihrer Hälfte, mithin ist der Ueberschuss von BE^2 über $\square BCE$ grösser als das dreifache Quadrat der halben BE. Dieser Ueberschuss aber ist gleich der gegebenen Fläche; folglich muss diese grösser seyn als das dreifache Quadrat der halben gegebenen Linie, jedoch kleiner als das Quadrat der ganzen.

Synthesis. Es sey BE die gegebene Linie, und die gegebene Fläche sey kleiner als das Quadrat von BE, aber grösser als das dreifache Quadrat ihrer Hälfte: so wird der Ueberschuss von BE^2 über die gegebene Fläche kleiner seyn als das Quadrat der halben BE. Theilt man also BE in C so, dass $\square BCE$ gleich ist diesem Ueberschusse, so werden die Abschnitte BC, CE ungleich seyn. Es sey aber $BC>CE$: so ist BC die Hypotenuse, und CE ein Abschnitt derselben.

Aufgabe 50. Fig. 95.

$H^2+S^2+m^2, S$.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) eine Kathete und 2) die Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von jener Kathete und von dem ihr anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AC \text{ und } BC^2 + AC^2 + CD^2.$$

Verlängere BC um $CE = CD$, so ist $AC^2 = \square BCD = \square BCE$; mithin ist die gegebene Fläche

$$= BC^2 + \square BCE + CE^2$$

und, wenn man das bekannte Quadrat von AC oder das ihm gleiche $\square BCE$ hinzusetzt, so ist BE^2, also die Linie BE, bekannt. Folglich ist die Aufgabe auf $H+m, S$ (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Weil $BC > CE$, so ist $\square BCE$ oder AC^2 kleiner als das Quadrat der halben BE. Halbirt man also BE in O, so ist $BO^2 > AC^2$, und, wenn man beiderseits das Vierfache nimmt, $BE^2 > 4AC^2$. Auf beiden Seiten ziehe $\square BCE$ oder AC^2 ab, so ist

$$BC^2 + \square BCE + CE^2 > 3AC^2.$$

Die gegebene Fläche muss daher grösser seyn als das dreifache Quadrat der gegebenen Kathete.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm die Abschnitte GC und CF gleich der gegebenen Kathete, beschreibe um C mit CF einen Kreis, errichte auf FG nach entgegengesetzten Richtungen die Perpendikel FH und GK gleich den Seiten des gegebenen Rechtecks, und es sey $\square FH.GK > 3CF^2$. Verbinde HK, welche die Kreislinie in L schneide, und errichte in diesem Punkte auf HK einen Perpendikel, welcher die verlängerte CF in M treffe: so ist $\square FMG = \square FH.GK$, mithin $\square FMG > 3CF^2$. Setzt man nun auf beiden Seiten CF^2 hinzu, so ist $CM^2 > 4CF^2$ oder FG^2, mithin $CM > FG$; folglich, wenn man die gleichen Grössen FC, CG wegnimmt, $MF > FC$. Daher ist $\square MFC > FC^2$, und es lassen sich in der Linie CM zwei Punkte B und D auf beiden Seiten des Punktes F so nehmen, dass die Rechtecke CDM und CBM gleich FC^2 sind. In dem Punkte D, welcher zwischen C und F liegt, errichte auf BC eine Senkrechte, welche die Kreislinie in A treffe, und verbinde AB und AC: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey.

Denn wegen der gleichen Rechtecke CDM, CBM ist $BC = DM$, mithin

$$\square BCD = \square CDM = CF^2 = CA^2,$$

folglich ist W. BAC ein rechter. Ferner ist

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 + CD^2 &= MD^2 + \square MDC + CD^2 \\ &= MC^2 - \square MDC \\ &= MC^2 - CF^2 \\ &= \square FMG = \square FH.GK, \end{aligned}$$

und AC ist gleich der gegebenen Kathete; folglich genügt $\triangle ABC$ der Aufgabe.

Aufgabe 51. Fig. 94.

$$H+S+m,\ HS+mS+S^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse, der einen Kathete und des ihr anliegenden Abschnitts der Hypotenuse, und 2) die Summe dreier Rechtecke, deren Grundlinien die genannten Linien, und deren gemeinschaftliche Höhe die genannte Kathete sind.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC+AC+CD \text{ und } \square BCA+\square DCA+CA^2.$$

In der Verlängerung der BC nimm $CE=CD$ und $EF=CA$, so ist

$$BC+CD+AC=BF,$$

mithin ist die Linie BF gegeben. Ferner ist die gegebene Fläche

$$=\square BC.EF+\square CEF+EF^2$$
$$=\square BFE,$$

folglich ist $\square BFE$ gegeben. Weil nun eine Seite BF dieses Rechtecks gegeben wird, so ist (*Dat.* 61) auch die andere Seite FE bekannt, mithin die Linie BE. Folglich ist die Aufgabe auf $H+m, S$ (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Weil $BC > CD$ oder CE, so ist $\square BCE$ kleiner als das Quadrat der halben BE; mithin ist auch EF^2 (welches $=\square BCE$ ist) kleiner als das Quadrat der halben BE, also $EF < \frac{1}{2}BE$, oder $EF < \frac{1}{3}BF$, und deshalb $\square BFE < \frac{1}{3}BF^2$. Die gegebene Fläche muss daher kleiner seyn als der dritte Theil des Quadrats von der gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey BF die gegebene Linie, $\square BFE$ die gegebene Fläche, und es sey $EF < \frac{1}{3}BF$. Theile BE in C so, dass $\square BCE = EF^2$, und es sey $BC > CE$: so ist BC die Hypotenuse, und CE der Abschnitt derselben, welcher der Kathete EF anliegt.

Aufgabe 52. Fig. 96.

$$H+S+m,\ H^2+S^2+m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse, eines ihrer Abschnitte und der anliegenden Kathete, und 2) die Summe der Quadrate von den genannten Linien; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + AC + CD \text{ und } BC^2 + AC^2 + CD^2.$$

Verlängere BC um $CE = CD$, so ist die gegebene Fläche

$$= BC^2 + \square BCE + CE^2$$
$$= BE^2 - \square BCE$$
$$= BE^2 - AC^2.$$

Ferner verlängere BE um $EF = AC$ und mache $EG = EF$, so ist

$$BC + CA + CD = BF$$

und . . . . $BE^2 - AC^2 = BE^2 - EF^2$
$$= \square FBG.$$

Daher ist die Linie BF und das $\square FBG$ gegeben; und da eine Seite FB dieses Rechtecks gegeben wird, so ist (*Dat.* 61) die andere Seite BG gegeben, mithin GF, also deren Hälfte EF, folglich die Linien BE, EF, und die Aufgabe ist demnach auf $H+m$, S (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Weil CD oder CE kleiner ist als BC, so ist $\square BCE$, also auch das ihm gleiche Quadrat von EG oder EF, kleiner als das Quadrat der halben BE; mithin ist EG kleiner als die Hälfte von BE, das ist $BG > GE$, also $BG > \frac{1}{3}BF$, und $\square FBG > \frac{1}{3}BF^2$. Folglich muss die gegebene Fläche grösser seyn als der dritte Theil des Quadrats von der gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey BF die gegebene Linie, und $\square FBG$ die gegebene Fläche. Es sey aber $\square FBG$ grösser als der dritte Theil des Quadrats von BF, so wird BG grösser seyn als $\frac{1}{3}BF$. Halbirt man also GF in E, so ist $EG < GB$, das ist $EG < \frac{1}{2}BE$. Daher lässt sich BE in zwei Punkten so theilen, dass das Rechteck aus den Abschnitten durch je einen Punkt gleich GE^2 ist. Es sey C einer von diesen Theilungspunkten, und $BC > CE$. Beschreibe über BC ein rechtwinkliges $\triangle ABC$, sodass der durch den Perpendikel AD gebildete Abschnitt CD gleich CE ist: so wird $\triangle ABC$ der Aufgabe genügen.

Denn wegen des rechten W. BAC ist

$$AC^2 = \square BCD = \square BCE.$$

Es ist aber $GE = EF$ und $GE^2 = \square BCE$, mithin ist

$$AC^2 = EF^2 \text{ und } AC = EF.$$

Daher ist

$$BC + CD + AC = BC + CE + EF$$
$$= BF.$$

Ferner ist

$$BC^2 + CD^2 + AC^2 = BC^2 + CE^2 + \square BCE$$
$$= BE^2 - \square BCE$$
$$= BE^2 - EF^2 = \square FBG.$$

Folglich ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Aufgabe 53. Fig. 97.

$HS + mS + S^2, S.$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) eine Kathete und 2) die Summe des Quadrats derselben und zweier Rechtecke, welche die Kathete zur Höhe und die Hypotenuse und den der Kathete anliegenden Abschnitt zu Grundlinien haben; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$AC \text{ und } AC^2 + \square BCA + \square DCA.$$

Mache $DE = BC$ und $CF = AC$, so ist die gegebene Fläche $= \square EFC$. Daher ist $\square EFC$ gegeben. Da nun die eine Seite FC dieses Rechtecks gegeben ist, so ist auch die andere EF bekannt, mithin die Linie CE; folglich ist die Aufgabe auf $H + m, S$ (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Weil AC oder CF die mittlere Proportionale ist zwischen BC und CD, oder zwischen ED und DC: so ist (*Lemma* 11, Zus. 2) $EC > 2CF$. Macht man also $GC = 2CF$, so ist $EF > GF$, und $\square EFC > \square GFC$ oder $3FC^2$. Es ist aber $\square EFC$ gleich der gegebenen Fläche; folglich muss diese grösser seyn als das dreifache Quadrat der gegebenen Kathete.

Synthesis. Es sey FC die gegebene Kathete, und FK die Seite des Quadrats, welches der gegebenen Fläche gleich ist. Verlängere FC um $CG = 2FC$, und es sey $FK^2 > \square GFC$. Errichte auf GF im Punkte C einen Perpendikel, ziehe an denselben die Linie $FH = FK$ und errichte HE senkrecht auf FH: so ist $\square EFC = FH^2 = FK^2$, mithin $\square EFC > \square GFC$, also $EF > GF$, und $EC > GC$. Hieraus folgt, dass FC kleiner ist als die Hälfte von CE, und dass sich also die Linie CE in zwei Punkten B und D so theilen lasse, dass die Rechtecke EBC und EDC gleich FC^2 sind. In dem Punkte D, welcher zwischen B und C liegt, errichte auf BC einen Perpendikel, ziehe an denselben die Linie $CA = CF$ und verbinde AB: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste.

Denn wegen der gleichen Rechtecke EBC, EDC ist $BC = ED$, also

$$\square BCD = \square EDC = CF^2 = CA^2,$$

mithin ist der W. BAC ein rechter. Ferner ist

$$\begin{aligned}\square EFC &= \square ED\,.\,CF + \square DCF + CF^2\\ &= \square BCA \quad + \square DCA + CA\ ,\end{aligned}$$

und die Kathete AC ist gleich der gegebenen Linie CF, folglich genügt $\triangle ABC$ der Aufgabe.

Aufgabe 54. Fig. 98.

$$HS + mS + S^2,\ H + m.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und eines ihrer Abschnitte, und 2) die Summe des Quadrats von der diesem Abschnitte anliegenden Kathete und zweier Rechtecke, welche diese Kathete zur Höhe, und die Hypotenuse und den genannten Abschnitt zu Grundlinien haben; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CD \text{ und } \square BCA + \square DCA + AC^2.$$

Nimm $DE = BC$ und $CF = CA$, so ist

$$BC + CD = EC$$

und die gegebene Fläche ist

$$\begin{aligned}&= \square ED\,.\,CF + \square DCF + CF^2\\ &= \square EFC,\end{aligned}$$

daher ist die Linie EC und das $\square EFC$ bekannt. Da nun die Differenz EC der Seiten dieses Rechtecks gegeben wird: so sind die Seiten selbst, also CF gegeben, und somit ist die Aufgabe auf $H + m$, S (Aufgabe 47) gebracht.

Determination. Weil AC die mittlere Proportionale ist zwischen BC, CD, das ist, weil CF die mittlere Proportionale zwischen ED und DC ist: so ist CF kleiner als die halbe EC. Macht man also $CG = \frac{1}{2}CE$, so ist $CF < CG$, und $\square EFC < \square EGC$. Es ist aber $\square EFC$ gleich der gegebenen Fläche und $\square EGC = 3\,CG^2$, das ist gleich dem dreifachen Quadrate der halben EC. Folglich muss die gegebene Fläche kleiner seyn als das dreifache Quadrat der halben gegebenen Linie.

Synthesis. Es sey EC gleich der gegebenen Linie, verlängere sie um CG gleich ihrer Hälfte, und die gegebene Fläche sey kleiner als $\square EGC$. Nimmt man also in der nach G verlängerten EC den Punkt F so, dass $\square EFC$ gleich ist der gegebenen Fläche: so liegt F zwischen C, G, und es ist CF kleiner als CG oder als die Hälfte von EC. Daher lässt sich die Linie EC in zwei Punkten B und D so theilen, dass die Rechtecke EBC und EDC gleich CF^2 sind. Construire nun über der Hypotenuse BC das rechtwinklige $\triangle ABC$, sodass die Linie AD senkrecht auf BC steht: so ist klar, dass dieses Dreieck das Verlangte leiste.

Aufgabe 55. Fig. 96.

$$H + P, \; m^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse und der Höhe, und 2) die Summe der Quadrate von den beiden Abschnitten der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + AD \text{ und } BD^2 + DC^2.$$

Verlängere BC um $CE = AD$, so ist $BE = BC + AD$, mithin ist die Linie BE der Grösse nach gegeben. Da nun

$$\begin{aligned} BD^2 + DC^2 &= BC^2 - 2 \square BDC \\ &= BC^2 - 2AD^2 \\ &= BC^2 - 2CE^2, \end{aligned}$$

so ist vermittelst Aufgabe II der Punkt C in der gegebenen Linie BE bekannt, folglich ist die Aufgabe auf H,P gebracht.

Determination. Es ist offenbar $BD^2 + DC^2 < BE^2$. Weil aber $AD \mathrel{\substack{=\\<}} \frac{1}{2}BC$, so ist auch $CE \mathrel{\substack{=\\<}} \frac{1}{2}BC$, das ist $CE \mathrel{\substack{=\\<}} \frac{1}{3}BE$. Macht man also $EG = \frac{1}{3}BE$, so ist $CE \mathrel{\substack{=\\<}} EG$. Daher ist nach Anmerk. 1 zu Aufgabe II

$$BC^2 - 2CE^2 \mathrel{\substack{=\\>}} BG^2 - 2GE^2.$$

Weil nun $BG = 2GE$, so ist (*Lemma* 1, Zus.) $BG^2 = 4GE^2$, also $BG^2 - 2GE^2 = 2GE^2$. Folglich muss die gegebene Fläche kleiner seyn als das Quadrat der gegebenen Linie, aber nicht kleiner als das doppelte Quadrat von dem dritten Theile derselben.

Synthesis. Es sey BE die gegebene Summe der Hypotenuse und der Höhe, und das Quadrat der Linie p die gegebene Fläche. Nimm $EG = \frac{1}{3}BE$, so ist $BG^2 - 2GE^2 = 2GE^2$. Es sey aber p^2 kleiner als BE^2 und nicht kleiner als $2GE^2$. Ist nun $p^2 = 2GE^2$, so lässt sich, weil $BG = 2GE$ ist, über BG ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe GE beschreiben, und dieses wird das verlangte seyn.

Ist aber $p^2 > 2GE^2$, so theile nach Aufgabe II die Linie BE in C so, dass $BC^2 - 2CE^2 = p^2$ ist: so wird nach Anmerk. 1 zu jener Aufgabe der Punkt C dem Punkte E näher seyn als der Punkt G. Daher ist $CE < \frac{1}{2}BC$, und es lassen sich über BC zwei rechtwinklige Dreiecke beschreiben, deren Höhen gleich CE sind, und welche der Aufgabe genügen werden.

Aufgabe 56. Fig. 94.

$$H + S + m,\ H^2 + m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Summe der Hypotenuse, eines ihrer Abschnitte und der anliegenden Kathete, und 2) die Summe der Quadrate von der Hypotenuse und von dem genannten Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben

$$BC + CD + AC \text{ und } BC^2 + CD^2.$$

In der Verlängerung der BC nimm $CE = CD$, und $EF = AC$: so ist

$$BC + CD + AC = BF$$

und .... $BC^2 + CD^2 = BC^2 + CE^2$

$$= BE^2 - 2\square BCE$$

$$= BE^2 - 2EF^2,$$

weil $AC = EF$ und $AC^2 = \square BCD = \square BCE$ ist. Es ist also die Linie BF und die Fläche $BE^2 - 2EF^2$ gegeben, folglich ist nach Aufgabe II der Punkt E bekannt, also die Linien BE, EF, und somit ist die Aufgabe auf $H + m$, S (Aufg. 47) gebracht.

Determination. Zuerst ist klar, dass $BC^2 + CD^2 < BF^2$ sey. Weil aber AC die mittlere Proportionale zwischen BC und CD, das ist, weil EF die mittlere Proportionale ist zwischen BC und CE: so ist (*Lemma* 11, Zus. 2) $BE > 2EF$, und, wenn beiderseits EF hinzukommt, $BF > 3EF$. Macht man also $FH = \frac{1}{3}BF$, so ist $EF < FH$. Daher liegt der Punkt E näher an F als der Punkt H, und es ist also vermöge Anmerk. 1 zu Aufgabe II

$$BE^2 - 2EF^2 > BH^2 - 2HF^2.$$

Es ist aber $BH^2 - 2HF^2 = 2HF^2$, weil $BH = 2HF$ ist (*Lemma* 1, Zus,), mithin ist

$$BE^2 - 2EF^2 > 2HF^2.$$

Folglich muss die gegebene Fläche grösser seyn als das doppelte Quadrat von dem dritten Theile der gegebenen Linie, aber kleiner als das Quadrat der ganzen.

Synthesis. Es sey BF die gegebene Linie. Nimm in derselben $FH = \frac{1}{3}BF$, und die gegebene Fläche sey kleiner als BF^2, aber grösser als $2HF^2$ oder grösser als $BH^2 - 2HF^2$. Theile nach Aufgabe II die Linie BF im Punkte E so, dass $BE^2 - 2EF^2$ gleich ist der gegebenen Fläche: so wird nach Anmerk. 1 zu der genannten Aufgabe der Punkt E zwischen H und F liegen, mithin $EF < \frac{1}{2}BE$ seyn. Daher lässt sich BE in zwei ungleiche Abschnitte BC, CE theilen, deren Rechteck gleich EF^2 ist. Es sey aber $BC > CE$: so ist BC die Hypotenuse, und CE ein Abschnitt derselben, welcher der Kathete EF anliegt.

Aufgabe 57. Fig. 99.

H, Linie, halbirend einen spitzen Winkel.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) die Linie, welche einen Winkel an derselben halbirt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Halbire W. ACB durch die Linie CD: so ist gegeben

$$BC \text{ und } CD.$$

Halbire CD in E und verbinde AE: so ist

$$\text{W.}\,EAC = \text{W.}\,ACE,$$

weil $AE = EC$ ist; daher ist

$$\text{W.}\,AED = 2\,\text{W.}\,ACD$$
$$= \text{W.}\,ACB.$$

Zieht man nun $DF \mathrel{=\!\!|\!\!=} BC$, so ist W. $AFD =$ W. ACB, mithin ist . . . . W. $AFD =$ W. AED, woraus folgt, dass $ADEF$ ein Viereck im Kreise, also

$$\square DCE = \square ACF$$

sey. Nun ist $\square DCE$ bekannt, also auch $\square ACF$. Wegen des Vierecks im Kreise aber ist

$$\text{W.}\,BDC = \text{W.}\,AFE$$

und deshalb, weil ausserdem nach der Annahme

$$\text{W.}\,BCD = \text{W.}\,ACE$$
$$= \text{W.}\,EAF,$$

sind die $\triangle\triangle\, BDC, EFA$ ähnlich, und es ist

$$BC : CD = EA : AF.$$

Da nun die Linien BC, CD, EA bekannt sind, so ist AF der Grösse nach gegeben. Es wird aber auch $\square ACF$ gegeben, mithin sind die Seiten dieses Rechtecks bekannt, also AC und somit $\triangle ABC$.

Determination. Es ist offenbar $BC > CD$. Die gegebene Hypotenuse muss also grösser seyn als die gegebene Halbirungslinie.

S y n t h e s i s. Es sey CD die gegebene Halbirungslinie. Beschreibe um dieselbe als Durchmesser einen Kreis, halbire sie in E und nimm in ihr den Abschnitt EG gleich der halben gegebenen Hypotenuse, und es sey $EG > EC$. Ziehe den Durchmesser HK senkrecht auf CD, verbinde GH und ziehe derselben CL parallel: so ist EL kleiner als EH oder ED. Ferner verbinde CK, errichte auf ihr die senkrechte $KM = EL$, beschreibe um KM als Durchmesser einen Kreis und ziehe durch seinen Mittelpunkt die Secante CNO: so ist $OC < CD$. Denn es ist

$$\square DCE = CK^2 = \square OCN.$$

Nun ist aber die Differenz DE der Seiten des $\square DCE$ grösser als die Differenz ON oder EL der Seiten des $\square OCN$, folglich ist (*Lemma* 10) $DC > CO$. Deshalb lassen sich in dem Kreise um E zwei Sehnen AC und CP, jede gleich CO, ziehen. Verbinde AD und verlängere die Linien AD, CP bis zum Durchschnitte B: so behaupte ich, dass ABC das verlangte Dreieck sey.

Die Linie CA schneide den Halbmesser EH in F, und es werde AE, DF verbunden. Wegen der rechten Winkel DAF, DEF ist $ADEF$ ein Viereck im Kreise, mithin ist

$$\square ACF = \square DCE = \square OCN.$$

Nun ist $AC = CO$, also $CF = CN$, und deshalb

$$AF = ON = EL.$$

Wegen des Vierecks im Kreise ist ferner

$$\text{W. } BDC = \text{W. } AFE,$$

und wegen der gleichen Sehnen AC, CP ist

$$\begin{aligned} \text{W. } PCD &= \text{W. } DCA \\ &= \text{W. } EAF. \end{aligned}$$

Daher sind die $\triangle\triangle$ BCD, EAF gleichwinklig, und es ist

$$\begin{aligned} BC : CD &= AE : AF \\ &= EH : EL \\ &= EG : EC \\ &= 2EG : CD. \end{aligned}$$

Folglich ist $BC = 2EG$, das ist gleich der gegebenen Hypotenuse.

Aufgabe 58. Fig. 100.

(Diesterw. Geom. Aufg., Theil 1, Nr. 72.)

Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, dessen Inhalt gegeben ist, und dessen Seiten in arithmetischer Proportion stehen.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, in welchem der Winkel A ein rechter, und $AC > AB$ sey: so sind die Seiten BC, AC, AB in arithmetischer Proportion *), mithin ist $2AC = BC + AB$. Verlängere AB um $BD = BC$, so ist $AD = 2AC$, mithin ist das Verhältniss $DA : AC$ gegeben, und deshalb, wenn die Linie CD gezogen wird, das Dreieck CAD der Gattung nach (*Dat.* 44), folglich die Winkel ACD und ADC und somit ihr Unterschied, nämlich der W. ACB. Daher ist auch das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben (*Dat.* 43), folglich, weil sein Inhalt gegeben wird, auch der Grösse nach.

Synthesis. Der gegebene Inhalt sey die Fläche P. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm die Abschnitte GF und FC, letzteren halb so gross als den ersteren, und verbinde GC: so ist W. $GCF >$ W. CGF, weil $GF > FC$ ist. Macht man also W. $GCH =$ W. CGF, so liegt H zwischen F und G. Ist nun der Inhalt des $\triangle CFH$ gleich der Fläche P, so ist dieses Dreieck das verlangte. Denn halbire FG in K, so liegt K zwischen G und H, weil CH oder GH grösser als HF ist.

Daher ist $HK = GH - GK = CH - CF$

und . . . . . . $HK = FK - FH = CF - FH$.

Folglich ist $CH - CF = CF - FH$, das ist, die Seiten des $\triangle CFH$ stehen in arithmetischer Proportion.

Ist aber der Inhalt des $\triangle CFH$ nicht gleich der Fläche P, so nimm in CF den Abschnitt CA, dessen Quadrat zum Quadrate von CF dasselbe Verhältniss hat als die Fläche P zum $\triangle CFH$, und ziehe durch A der FH eine Parallele, welche die CH oder ihre Verlängerung in B treffe: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte. Denn wegen der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle CFH$, CAB sind die Seiten des ersteren proportionirt den Seiten des letzteren, mithin stehen die Seiten des $\triangle ABC$ in arithmetischer Proportion. Ferner ist wegen der Aehnlichkeit

$$AC^2 : CF^2 = \triangle ABC : \triangle FHC.$$

Nach der Construction aber ist

$$AC^2 : CF^2 = P : \triangle FHC,$$

folglich ist $\triangle ABC = P$.

Anmerkung 1. Die Aufgabe lässt sich allgemein lösen, wenn statt des rechten Winkels BAC irgend ein anderer gegeben wird. Man nehme W. CFG gleich dem gegebenen und construire völlig wie oben.

---

*) d. h. es ist $BC - AC = AC - AB$; folglich ist, wenn man auf beiden Seiten AC und AB hinzusetzt, $BC + AB = 2AC$.

Anmerkung 2. Ist in der obigen Aufgabe der Umfang des $\triangle ABC$ statt des Inhalts gegeben, so mache man DL gleich dem gegebenen Umfange, theile DL in die gleichen Abschnitte DE, EA und AL, errichte auf DL die Linie $AC = AL$ senkrecht, verbinde CD und mache W. DCB = W. ADC: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Aufgabe 59. Fig. 101.

(Diesterw. Geom. Aufg., Theil 1, Nr. 73.)

Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, dessen Inhalt gegeben ist, und dessen Seiten in geometrischer Proportion stehen.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, in welchem der W. A ein rechter, und $AC > AB$ sey: so ist nach der Annahme

$$BC : CA = AC : AB.$$

Fällt man nun AD senkrecht auf BC, so ist

$$BC : CA = AC : CD,$$

mithin ist $CD = AB$. Weil nun

$$CB : BA = AB : BD,$$

so ist auch . . . . $BC : CD = CD : DB$.

Daher ist BC im Punkte D im mittlern und äussern Verhältnisse getheilt (Aufgabe III, Anmerk. 2). Folglich ist das Verhältniss $BD : DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben. Es wird aber der Inhalt des Dreiecks gegeben, folglich ist es auch der Grösse nach gegeben.

Synthesis. Der gegebene Inhalt sey die Fläche P. Eine beliebige gerade Linie CE theile (Aufgabe III, Anmerk. 2) im Punkte G im mittlern und äussern Verhältnisse, sodass $EC : CG = CG : GE$, errichte auf CE im Punkte G eine Senkrechte, welche den über CE beschriebenen Halbkreis in F schneide, und verbinde FE und FC: so ist

$$CE : EF = FE : EG.$$

Es ist aber nach der Construction

$$CE : CG = CG : GE,$$

mithin ist $EF = CG$. Weil nun

$$EC : CF = FC : CG,$$

so ist auch . . . . $EC : CF = CF : FE$,

das ist, die Seiten des $\triangle FEC$ stehen in geometrischer Proportion. Ist nun $\triangle FEC = P$, so ist offenbar $\triangle FEC$ das verlangte. Ist aber nicht $\triangle FEC = P$, so nimm in CF den Abschnitt CA, dessen Quadrat zum Quadrate von CF dasselbe Verhältniss hat als die Fläche P zum $\triangle FEC$. Ziehe durch A der FE eine Linie parallel, welche die CE oder deren Verlängerung in B schneide: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte. Denn weil die $\triangle\triangle ABC, FEC$ ähnlich sind, so haben die Seiten des ersten Dreiecks dieselben Verhältnisse zu einander als die Seiten des zweiten und stehen deshalb in geometrischer Proportion. Ferner ist wegen der ähnlichen Dreiecke

$$AC^2 : FC^2 = \triangle ABC : \triangle FEC$$

und nach der Construction

$$AC^2 : FC^2 = P : \triangle FEC,$$

folglich ist $\triangle ABC = P$.

Anmerkung. Wenn statt des Inhalts des $\triangle ABC$ sein Umfang $= p$ gegeben wird: so construire, wie oben gezeigt worden ist, das $\triangle FEC$. Ist nun der Umfang dieses Dreiecks $= p$, so ist es das verlangte. Ist aber der Umfang desselben nicht $= p$, so nimm in der Linie CF den Abschnitt CA, welcher zu CF dasselbe Verhältniss hat als die gegebene Linie p zum Umfange des $\triangle FEC$, und ziehe AB $\#$ FE: so wird das $\triangle ABC$ der Aufgabe genügen.

Aufgabe 60. Fig. 102.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Linie, welche einen Winkel an der Hypotenuse halbirt, und 2) die Linie, welche, aus der Spitze des rechten Winkels nach der Hypotenuse gezogen, die vorige halbirt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, in welchem der W. A ein rechter sey. Halbire den W. ABC durch BD, und durch die Mitte E der Linie BD ziehe aus A nach BC die Linie AF: so sind die Linien

$$BD \text{ und } AF$$

gegeben. Weil in dem $\triangle ABD$ der W. A ein rechter, und die Linie BD in E halbirt ist: so sind die Linien AE, BE, ED einander gleich. Es wird aber BD gegeben, also auch ihre Hälfte AE, und somit, weil AF gegeben wird, auch EF. Weil nun $BE = EA$, so ist

$$\text{W. } ABE = \text{W. } BAE;$$

es ist aber . . . W. ABE = W. EBF (nach der Annahme), mithin ist W. BAE = W. EBF, also die $\triangle\triangle ABF$ und BEF, welche ausserdem den Winkel F gemein haben, gleichwinklig. Daher ist

$$AF : FB = BF : FE.$$

Nun ist AF und FE bekannt, also auch FB. Weil also die Seiten des $\triangle EBF$ bekannt sind, so ist W. EBF bekannt, daher W. ABF, mithin auch $\triangle ABF$, folglich die Seite AB und das $\triangle ABC$ selbst.

Determination. An die Verlängerung der AF ziehe die Linie $BG \mathrel{=\!\!|\!\!=} AC$, so ist $AG : BD = AE : ED$. Nun ist $AE = ED$, also $AG = BD$; daher ist $AF < BD$, und $AE = EG = BE$. In dem $\triangle BEF$ aber ist

$$BE < BF + FE,$$

das ist . . . . $EG < BF + FE$

und, wenn man beiderseits EF abzieht,

$$FG < BF, \text{ also } GF^2 < BF^2.$$

Es ist aber $BF^2 = \square AFE$, weil BF die mittlere Proportionale ist zwischen AF und FE. Daher ist auch $GF^2 < \square AFE$, mithin

$$GF : FA < EF : FG$$

und *compon.* . . . . . $GA : AF < EG : GF$,

also *permut.* . . . . . $AG : GE < AF : FG$.

Folglich ist *invert.* und *compon.*

$$EG + GA : AG > GA : AF.$$

Nun ist aber $EG + GA : AG = 3 : 2$, weil $EG + GA = 3AE$ und $AG = 2AE$ ist; mithin ist

$$3 : 2 > GA : AF$$

oder . . . . $3AF > 2GA$

das ist . . . . $3AF > 2BD$.

Die Linie AF muss demnach kleiner als BD, ihr Dreifaches aber grösser als die doppelte BD seyn.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm vom Punkte A aus nach einer Richtung hin den Abschnitt AG gleich der Linie, welche den Winkel an der Hypotenuse halbirt, und den Abschnitt AF gleich der andern gegebenen Linie, und es sey $AF < AG$, aber $3AF > 2AG$. Halbire AG in E, so wird dieser Punkt zwischen A und F liegen, weil offenbar AF grösser ist als die halbe AG. In der Linie AF nimm FH gleich der mittlern Proportionale zwischen AF und FE, so ist offenbar $FH < FA$; ich behaupte aber auch, dass $FH > FG$ sey. Denn weil $3AF > 2AG$, so ist

$$3 : 2 > AG : AF.$$

Nun ist $EG + GA : AG = 3 : 2$. Folglich ist

$$EG + GA : AG > AG : AF,$$

also *divid.* und *invert.*

$$AG : GE < AF : FG;$$

daher ist *permut.* und *divid.*

$$GF : FA < EF : FG,$$

und . . . . $FG^2 < \square AFE$.

Es ist aber nach der Construction

$$FH^2 = \square AFE,$$

folglich ist $FG^2 < FH^2$ und $FG < FH$. Beschreibt man also um AG als Durchmesser einen Kreis $ABGD$ und einen andern um den Mittelpunkt F mit dem Radius FH: so wird derselbe den ersten in zwei Punkten B und B' schneiden, weil FH kleiner als FA und grösser als FG ist. Durch B ziehe den Durchmesser BD, verbinde AD und BF, verlängere sie bis zum Durchschnitte C und ziehe AB: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn erstlich halbirt die gegebene AF die Linie BD, welche der gegebenen AG gleich ist, in dem Punkte E. Ferner weil $\square AFE = FH^2 = FB^2$, so ist

$$AF : FB = BF : FE,$$

mithin $\triangle AFB \backsim \triangle BFE$, und W. BAF = W. EBF. Es ist aber

$$\text{W.}\,BAF = \text{W.}\,ABE,$$

weil $AE = EB$; folglich ist W. ABE = W. EBF, das ist, die Linie BD halbirt den W. ABC.

Nimmt man in der obigen Construction den Punkt B' statt B: so erhält man ein zweites Dreieck von denselben Eigenschaften, welches aber dem $\triangle ABC$ congruent ist.

Aufgabe 61. Fig. 103.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) die Hypotenuse und 2) der Abschnitt der grössern Kathete zwischen dem Scheitel des rechten Winkels und dem auf der Hypotenuse in ihrer Mitte errichteten Perpendikel; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Errichte auf der Hypotenuse BC in ihrer Mitte D einen Perpendikel, welcher die grössere Kathete AC in E schneide: so sind gegeben die Linien

$$BC \text{ und } AE.$$

Wegen der rechten Winkel BAE, BDE ist $ABDE$ ein Viereck im Kreise, mithin ist $\square ACE = \square BCD$. Nun ist $\square BCD$ wegen seiner bekannten Seiten gegeben, also auch $\square ACE$. Es wird aber die Differenz AE der Seiten gegeben, mithin sind die Seiten desselben, also AC und folglich $\triangle ABC$ selbst gegeben.

Determination. Durch D ziehe der AB eine Linie parallel, welche AC in F schneide: so ist W. CDF ein spitzer, mithin liegt F zwischen C und E, und es ist $AE < AF$. Weil nun $AF : BD = AC : BC$, und $AC < BC$, so ist $AF < BD$, und um so mehr $AE < BD$. Der gegebene Abschnitt der Kathete muss also kleiner seyn als die halbe gegebene Hypotenuse. *)

Synthesis. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm EH gleich der gegebenen Hypotenuse, und AE gleich dem gegebenen Abschnitte der Kathete, und es sey AE kleiner als die halbe EH. Errichte auf AE im Punkte A auf der dem Schenkel EH entgegengesetzten Seite eine senkrechte $AG = \frac{1}{2} EH$, verbinde GH und beschreibe um diese Linie als Durchmesser einen Kreis: so wird derselbe die verlängerte AE in den Punkten C und C' schneiden. Es sey aber der Punkt C auf der Seite des Punktes E. Halbire EH in K, und AC in F. Wegen des Kreises ist

$$\square ACE = \square EH.AG = \square EHK.$$

Es ist aber die Differenz AE der Seiten des $\square ACE$ kleiner als die Differenz EK der Seiten des $\square EHK$; folglich ist (*Lemma* 10) $AC < EH$, und, wenn man die Hälften nimmt, $AF < EK$ oder AG. Errichtet man also auf AC im Punkte F eine senkrechte FL und beschreibt aus A mit AG einen Kreis, so wird derselbe die FL in einem Punkte D treffen. Verbinde CD und verlängere sie nach B in AG: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ der Aufgabe genüge.

Denn zieht man AD, so ist $AD = DC$, und $BD = DC$, beides weil $AF = FC$ ist. Daher ist $BC = 2AD = 2AG = EH$. Ferner ist

$$\square BCD = \square EH.AG,$$

weil $BC = EH$, und $CD = AG$ ist, und es ist

$$\square ACE = \square EH.AG,$$

mithin ist $\square BCD = \square ACE$. Folglich liegen die Punkte A, B, D, E in einer Kreislinie, und es ist, wenn ED gezogen wird, W. BDE ein rechter.

Anmerkung. Nimmt man den Punkt C' statt des Punktes C, so ist $\square AC'E = \square EHK$. Nun ist bei jeder beliebigen Grösse der AE immer $C'A^2 < \square AC'E$, mithin auch $C'A^2 < \square EHK$, folglich um so mehr $C'A^2 < EH^2$, und $C'A < EH$. Halbirt man also $C'A$ in F' und errichtet $F'L'$ senkrecht auf $C'A$, so wird der um A mit AG beschriebene Kreis die $F'L'$ in einem Punkte D' treffen. Verbinde

---

*) Etwas kürzer lässt sich dies aus der Umkehrung von *Lemma* 10 beweisen.

$C'D'$ und verlängere sie bis zum Punkte B' in AG: so ist auch $\triangle AB'C'$ das verlangte, nur dass der Abschnitt AE in der Verlängerung der kleinern Kathete liegt.

Aufgabe 62. Fig. 104—107.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: 1) eine Kathete, 2) eine ihr parallele Linie zwischen der andern Kathete und der Hypotenuse, und 3) das Rechteck aus der Hypotenuse und derjenigen Linie, welche von dem Scheitelpunkte des an der gegebenen Kathete liegenden spitzen Winkels nach dem in der andern Kathete liegenden Durchschnittspunkte der gegebenen Parallele gezogen ist; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Zwischen BC und AC oder zwischen ihren Verlängerungen ziehe $DE \mathrel{=\!|\!=} AB$ und verbinde BE, so ist gegeben

$$AB,\ DE \text{ und } \square\, CBE.$$

Beschreibe um das $\triangle BEC$ einen Kreis und ziehe den Durchmesser CF, so ist (*Lemma* 14) $\square\, CBE = \square\, AB \,.\, CF$. Weil nun $\square\, CBE$ und die Linie AB gegeben wird, so ist auch CF und somit der Kreis BCF der Grösse nach gegeben. Der W. CED aber ist ein rechter, denn es ist $ED \mathrel{=\!|\!=} AB$, daher geht ED durch den Punkt F. Verlängere AB, wenn es nöthig ist, bis sie CF in G schneide: so ist wegen der Parallelen

$$AB : ED = AC : CE = GC : CF.$$

Daher ist wegen der gegebenen Linien AB, ED das Verhältniss $GC : CF$ gegeben. Nun ist CF bekannt, also auch CG. Beschreibe über CG einen Halbkreis, welcher durch A geht, weil der W. GAC ein rechter ist; so berühren sich die Halbkreise GAC, FEC in dem Punkte C, weil die Durchmesser CG, CF in einer geraden Linie liegen. Es sind also zwei Halbkreise GAC, FEC, die sich innerlich in C berühren, der Lage und Grösse nach gegeben, und aus dem Endpunkte G des einen ist eine gerade Linie GBA zu ziehen, deren zwischen beiden Peripherien liegendes Segment AB einer gegebenen Linie gleich sey; folglich ist die Linie BA vermittelst „Apollon. *de Inclinationibus*" (bearbeitet von Diesterweg; Berlin 1823. Buch 2, Aufg. 2, Fall 1, *A*, *b*. *c*. Seite 60 ff.) der Lage nach, und somit das $\triangle ABC$ der Gattung und Grösse nach gegeben.

Determination. In den Determinationen der genannten Aufgaben wird gezeigt, dass, wenn AB nicht mit dem

Durchmesser CF zusammenfallen soll (weil sonst kein $\triangle ABC$ möglich wäre), $AB < CF$ seyn müsse. Daher ist AB^2 kleiner als $\square AB.CF$, oder kleiner als $\square CBE$. Folglich muss die gegebene Fläche grösser seyn als das Quadrat von der gegebenen Kathete. Auch ist klar, dass die gegebenen Linien AB, DE nicht einander gleich seyn dürfen.

S y n t h e s i s. In einer geraden Linie nimm FH gleich der gegebenen Kathete, und FK gleich der gegebenen Parallele, und P sey die gegebene Fläche. Die Linien FH, FK seyen aber nicht einander gleich, und P sey grösser als FH^2. In FH nimm den Abschnitt FC so, dass $\square CFH = P$ ist: so wird offenbar $CF > FH$ seyn. In der Linie CF nimm von C nach F hin das Segment CG gleich der vierten Proportionale zu FK, FH, FC und beschreibe um die Durchmesser FC, GC Kreise, welche sich in C berühren werden: so lässt sich, weil $CF > FH$ ist, nach „A p o l l o n. *de Inclin.*" aus G eine Linie ziehen, deren zwischen beide Peripherien fallendes Segment gleich FH ist.

Wenn nun $CF > CG$ (oder $FH < FK$) ist, so errichte Fig. 107 GL bis zum grössern Kreise senkrecht auf GC. Ist nun in diesem Falle $FH = GL$, so ist GL selbst das zwischen beide Peripherien fallende Segment. Verbinde alsdann CL, so ist $\triangle CGL$ das verlangte. Denn ziehe an die verlängerte CL die Linie $FM =\!\!|\!\!= GL$ und verbinde FL, so ist wegen der Parallelen

$$FM : GL = FC : CG$$

und nach der Construction

$$FK : FH = FC : CG.$$

Nun ist $GL = FH$ nach der Voraussetzung, folglich ist

$$FM = FK.$$

Ferner ist . . . . . $\square CLF = \square CF.GL$ (*Lemma* 14)
$= \square CFH = P$;

folglich genügt das $\triangle CGL$ der Aufgabe.

In allen übrigen Fällen aber, nämlich wenn 1) $CG > CF$ ist (Fig. 104), oder wenn 2), im Falle $CG < CF$ ist, FH nicht gleich GL ist (Fig. 105, 106), wird die durch G zu ziehende Linie nicht senkrecht auf GC stehen und wird den um GC beschriebenen Kreis in einem zweiten Punkte treffen. Es sey nun AB das Segment der gezogenen Linie, welches gleich FH ist. Verbinde AC und BC, so behaupte ich, dass das $\triangle ABC$ das Verlangte leiste.

Denn CA schneide die andere Kreislinie in E, ziehe FE, EB und verlängere, wenn es nöthig ist, die Linien FE, CB bis zum Durchschnitte D: so ist nach *Lemma* 14

$$\square CBE = \square CF \,.\, AB$$
$$= \square CFH = P.$$

Ferner ist wegen der Parallelen

$$ED : AB = EF : AG$$
$$= FC : CG$$
$$= KF : FH \text{ (nach der Constr.).}$$

Nun ist $AB = FH$, folglich auch $ED = KF$.

Aufgabe 63. Fig. 108.

$$HP : S^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Rechtecks aus der Hypotenuse und der Höhe zur Summe der Quadrate von der einen Kathete und von dem an der andern Kathete liegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben das Verhältniss

$$\square BC \,.\, AD : AC^2 + BD^2.$$

Mache in BC den Abschnitt $CE = AD$, so ist

$$\square BC \,.\, AD = \square BCE$$

und . . . . $AC^2 + BD^2 = BC^2 - AD^2$ (*Lemma* 15, Zus. 1)

$$= BC^2 - CE^2.$$

Folglich ist das gegebene Verhältniss $= \square BCE : BC^2 - CE^2$. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe IV der Punkt E gegeben, mithin das Verhältniss $BC : CE$ oder $BC : AD$ und somit (*Dat.* 77) $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Halbire BC in F. Weil AD oder $CE \gtreqless CF$, so ist zufolge der Anmerk. 1 zu Aufgabe IV

$$\square BCE : BC^2 - CE^2 \gtreqless \square BCF : BC^2 - CF^2.$$

Nun ist $\square BCF = 2BF^2$ und $BC^2 - CF^2 = 3BF^2$ (Zus. zu *Lemma* 1),

mithin $\square BCF : BC^2 - CF^2 = 2BF^2 : 3BF^2 = 2 : 3$,

und desshalb . . $\square BCE : BC^2 - CE^2 \gtreqless 2 : 3$.

Folglich darf das gegebene Verhältniss nicht grösser seyn als das Verhältniss des Zwiefachen zum Dreifachen.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$, nicht grösser als $2 : 3$. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels nimm $BC = m$, und $BH = n$, halbire BH in K, verbinde CK und nimm in KB den Abschnitt $KL = KC$: so ist $KL^2 = KC^2$, und, wenn man beiderseits KB^2 abzieht, $\square BLH = BC^2$.

Ferner ziehe BL^2 ab, so ist $\square HBL = BC^2 - BL^2$. Daher ist

$$\square CBL : BC^2 - BL^2 = \square CBL : \square HBL$$
$$= CB : BH = m : n.$$

Halbire BC in F und mache in ihr den Abschnitt $CE = BL$, so ist

$$\square CBL : BC^2 - BL^2 = \square BCE : BC^2 - CE^2$$

und $$\square BCF : BC^2 - CF^2 = 2BF^2 : 3BF^2 = 2:3.$$

Weil nun nach der Annahme $m:n \gtreqless 2:3$, so ist

$$\square BCE : BC^2 - CE^2 \gtreqless \square BCF : BC^2 - CF^2.$$

Hieraus folgt (Aufgabe IV, Anmerk. 1), dass $CE \gtreqless CF$ ist. Beschreibt man also über BC einen Halbkreis und zieht durch L der BC eine Linie parallel, so wird sie die Peripherie entweder in einem Punkte berühren oder in zwei Punkten schneiden. Es sey nun A irgend ein Punkt, in welchem die Parallele den Kreis trifft. Verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ dem gesuchten ähnlich sey. Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $AD = BL$, also

$$\square BC . AD = \square CBL$$

und . . . . $$AC^2 + BD^2 = BC^2 - AD^2$$
$$= BC^2 - BL^2.$$

Daher ist $\square BC . AD : AC^2 + BD^2 = \square CBL : BC^2 - BL^2$
$$= m : n.$$

Aufgabe 64. Fig. 109.

$$H^2 + S^2 + m^2 : HS + mS.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der daran liegenden Kathete zur Summe der Rechtecke aus dieser Kathete und der Hypotenuse und aus derselben Kathete und dem genannten Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : \square BCA + \square DCA.$$

Verlängere BC um $CE = CD$ und mache $EF = AC$, so ist

$$AC^2 = \square BCD = \square BCE, \text{ und } CD^2 = CE^2;$$

daher ist

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 = BC^2 + \square BCE + CE^2$$
$$= BE^2 - \square BCE$$
$$= BE^2 - EF^2.$$

Ferner ist $\square BCA = \square BC . EF$, und $\square ACD = \square FEC$,

mithin . . $\square BCA + \square ACD = \square BC \,.\, EF + \square FEC$
$$= \square BEF.$$
Folglich ist das gegebene Verhältniss gleich
$$BE^2 - EF^2 : \square BEF.$$

Nimmt man also die Linie BE als gegeben an, so ist nach Aufgabe IV der Punkt F und die Linie EF gegeben; und weil $EF^2 = \square BCE$ ist, so ist auch $\square BCE$, mithin die Linien BC, CE, somit das Verhältniss $BC : CE$ oder CD und das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Determination. Halbire BE in G. Weil $BC > CD$, das ist $BC > CE$, so ist $\square BCE < EG^2$, mithin auch $EF^2 < EG^2$, und $EF < EG$. Daher ist nach Aufg. IV, Anmerk. 1
$$\square BEF : BE^2 - EF^2 < \square BEG : BE^2 - EG^2$$
und *invert.*
$$BE^2 - EF^2 : \square BEF > BE^2 - EG^2 : \square BEG.$$

Nun ist $BE^2 - EG^2 = 3EG^2$, und $\square BEG = 2EG^2$, also das letzte Verhältniss $= 3EG^2 : 2EG^2 = 3 : 2$. Folglich ist
$$BE^2 - EF^2 : \square BEF > 3 : 2.$$
Das gegebene Verhältniss muss also grösser seyn als das Verhältniss des Dreifachen zum Doppelten.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss $m : n$ sey $> 3 : 2$. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels mache $HB = m$, und $BE = n$, halbire HB in K, verbinde EK und mache in KB den Abschnitt $KL = KE$, so ist $KL^2 = KE^2$, also, wenn beiderseits KB^2 abgezogen wird, $\square HLB = BE^2$, und, wenn noch BL^2 weggenommen wird,
$$\square HBL = BE^2 - BL^2.$$

In BE nimm den Abschnitt $EF = BL$, so ist $\square HB \,.\, EF = BE^2 - EF^2$. Daher ist
$$\square BEF : BE^2 - EF^2 = \square BEF : \square HB \,.\, EF$$
$$= EB : BH = n : m.$$

Halbire BE in G, so ist
$$\square BEG : BE^2 - EG^2 = 2EG^2 : 3EG^2 = 2 : 3.$$

Weil nun nach der Voraussetzung $m : n > 3 : 2$, also *invert.* $n : m < 2 : 3$, so ist
$$\square BEF : BE^2 - EF^2 < \square BEG : BE^2 - EG^2.$$
Folglich ist nach Aufgabe IV, Anmerk. 1 der Punkt F dem Punkte E näher als der Punkt G, oder es ist EF, das ist BL, kleiner als die halbe BE. Beschreibt man also über BE einen Halbkreis und zieht der BE durch L eine Linie parallel, so wird dieselbe den Kreis schneiden. Aus dem einen Durchschnittspunkte M fälle MC senkrecht auf BE, so sind die Abschnitte BC und CE ungleich. Auf dem grössern BC nimm den Abschnitt $CD = CE$, errichte auf BC in D

einen Perpendikel, ziehe an denselben die Linie $CA = CM$ und verbinde AB, so wird $\triangle ABC$ der Aufgabe genügen. Denn weil

$$\square BCD = \square BCE = CM^2 = CA^2,$$

so ist W. BAC ein rechter. Weil nun $CE = CD$, und $EF = AC$ ist, so wird wie in der Analysis gezeigt, dass

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 = BE^2 - EF^2$$

und . . . . . $\square BCA + \square ACD = \square BEF$

sey. Folglich ist

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : \square BCA + \square ACD = BE^2 - EF^2 : \square BEF = m : n.$$

Aufgabe 65. Fig. 109.

$$S^2 : H^2 - m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Quadrats von einer Kathete zum Ueberschusse des Quadrats der Hypotenuse über das Quadrat von dem an der genannten Kathete liegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben das Verhältniss

$$AC^2 : BC^2 - CD^2,$$

das ist . . . . . $\square BCD : BC^2 - CD^2$.

Nimmt man also die Hypotenuse BC als gegeben an, so findet man durch Aufgabe IV den Punkt D, also das Verhältniss $BD : DC$. Folglich ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Eine Determination findet nicht statt, und die Construction ergiebt sich leicht aus der Analysis.

Aufgabe 66. Fig. 110.

$$S^2 : H^2 + m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Quadrats von einer Kathete zur Summe der Quadrate von der Hypotenuse und von demjenigen ihrer Abschnitte, welcher jener Kathete anliegt; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist gegeben das Verhältniss

$$AC^2 : BC^2 + CD^2,$$

das ist . . . . . $\square BCD : BC^2 + CD^2$.

Nimmt man also die Hypotenuse BC als gegeben an, so findet man durch Aufgabe V den Punkt D. Daher ist das Verhältniss $BD : DC$ und das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Determination. Vermöge der Determination zu Aufgabe V ist

$$\square BCD : BC^2 + CD^2 < 1 : 2.$$

Das gegebene Verhältniss muss also kleiner seyn als das Verhältniss des Einfachen zum Doppelten.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $CB : BF$, und es sey $FB > 2BC$, so lässt sich nach Aufgabe V die Linie BC in einem Punkte D so theilen, dass

$$\square BCD : BC^2 + CD^2 = CB : BF$$

ist. Errichte auf BC im Punkte D einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so wird $\triangle ABC$ das Verlangte leisten.

Aufgabe 67. Fig. 110.

$$S^2 : s^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Quadrats von der einen Kathete zur Summe der Quadrate von der andern Kathete und von dem ihr anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AC^2 : AB^2 + BD^2,$$

das ist . . . . . $\square BCD : \square CBD + BD^2$

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe VI der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Die Construction ist einleuchtend.

Aufgabe 68. Fig. 111.

$$S^2 : P^2 - n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Quadrats von der grössern Kathete zum Ueberschusse des Quadrats von der Höhe über das Quadrat von dem kleinern Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $AC > AB$, so ist das Verhältniss

$$AC^2 : AD^2 - DB^2$$

oder . . . . $\square BCD : \square BDC - DB^2$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe VII der Punkt D, mithin das Verhältniss $BD:DC$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben

Determination. Mache $CF = BC$, nimm FG gleich der mittlern Proportionale zwischen BF und FC und mache $GH = GB$, so ist, wie in Aufgabe VII bewiesen worden ist, $BC:CH$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm die gleichen Abschnitte BC und CF, mache FG gleich der mittlern Proportionale zwischen BF und FC und nimm $GH = GB$: so ist $BC:CH$ das kleinste Verhältniss. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $BC:CH$, so beschreibe über BC einen Halbkreis, halbire BG in D, errichte in diesem Punkte auf BC eine Senkrechte, welche den Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte. Denn vermöge Aufgabe VII ist

$$\square BCD : \square BDC - BD^2 = BC : CH,$$

das ist . . . $AC^2 : AD^2 - BD^2 = BC : CH.$

Ist das gegebene Verhältniss kleiner als $BC:CH$, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $m:n > BC:CH$, so lässt sich vermittelst Aufgabe VII die Linie BC in zwei Punkten E und e so theilen, dass die Verhältnisse

$$\square BCE : \square BEC - BE^2 \text{ und } \square BCe : \square BeC - Be^2$$

dem Verhältnisse $m:n$ gleich sind. Errichtet man nun auf BC in den Punkten E und e Perpendikel, welche dem über BC beschriebenen Halbkreise in L und l begegnen, und verbindet LB, LC und lB, lC: so ist klar, dass die $\triangle\triangle\, LBC$ und lBC beide der Aufgabe genügen.

Anmerkung. Wenn gegeben wird $s^2 : P^2 - n^2$ $(= p : q)$, so ist, weil $s^2 = P^2 + n^2$, das Verhältniss $P^2 + n^2 : P^2 - n^2$ gegeben; also, wenn man setzt die halbe Summe beider Glieder zur halben Differenz, auch das Verhältniss $P^2 : n^2 \left(= \frac{p+q}{2} : \frac{p-q}{2} \right)$ und somit $P:n$, folglich das gesuchte Dreieck der Gattung nach.

Aufgabe 69. Fig. 111.

$$s^2 : m^2 - P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Quadrats von der kleinern Kathete zum Ueberschusse des Quadrats von dem grössern Abschnitte der Hypotenuse über das Quadrat von der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, und $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AB^2 : CD^2 - AD^2$$

oder . . . . $\sqsubset CBD : CD^2 - \sqsubset BDC$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe VIII der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach. — Die Construction ergiebt sich hiernach von selbst.

Anmerkung. Wenn gegeben wird $S^2 : m^2 - P^2 (= p : q)$, so ist $S^2 = m^2 + P^2$. Daher ist das Verhältniss $m^2 + P^2 : m^2 - P^2$, mithin, wenn man setzt die halbe Summe beider Glieder zur halben Differenz, $m^2 : P^2 \left(= \frac{p+q}{2} : \frac{p-q}{2}\right)$ gegeben, folglich das gesuchte Dreieck der Gattung nach.

Aufgabe 70. Fig. 112.

$$H^2 + S^2 : m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse und von der einen Kathete zum Quadrate des dieser Kathete anliegenden Abschnittes der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 : CD^2$$

das ist . . . . $BC^2 + \sqsubset BCD : CD^2$

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe IX der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BC : CD$ und somit das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. In der genannten Aufgabe ist gezeigt worden, dass das gegebene Verhältniss grösser seyn müsse als das Verhältniss des Doppelten zum Einfachen.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$ und $m > 2n$. In einer geraden Linie nimm die Abschnitte $BM = m$, und $MN = n$, halbire MN in C und beschreibe über BC einen Halbkreis; ferner halbire MC in E, errichte in diesem Punkte auf BC eine Senkrechte, welche die Kreislinie in F treffe, und verbinde BF und FC: so ist

$$BF^2 : FC^2 = BE : EC.$$

Nun ist offenbar $BE > EC$, also $BF^2 > FC^2$ und $BF > FC$. Halbirt man also den Nebenwinkel CFG des W. BFC durch eine Linie, so wird dieselbe die nach C hin verlängerte BC in einem Punkte H treffen. Mache $HK = HC$, ich behaupte, dass $CK < BC$ sey. Denn weil FH den äussern Winkel am $\triangle BFC$ halbirt, ist

$$BF : FC = BH : HC,$$

mithin . . . . . . $BF^2 : FC^2 = BH^2 : HC^2$.
Nun ist . . . . . $BF^2 : FC^2 = BE : EC$,
folglich ist . . . $BH^2 : HC^2 = BE : EC$ oder EM
und *divid.* . . $\square KBC : HC^2 = BM : ME$,
mithin, wenn man das Vierfache der Hinterglieder nimmt,

$$\square KBC : KC^2 = BM : MN$$
$$= m : n.$$

Nun ist der Annahme zufolge $m > 2n$, also ist $\square KBC > 2KC^2$. Macht man nun $CD = CK$, so ist $\square KDC = 2KC^2$, mithin ist

$$\square KBC > \square KDC$$

also . . . . $BC > CD$ oder CK.
Daher liegt der Punkt D zwischen B und C. Errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche die Kreislinie in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte.

Denn es ist . . . . . $CD^2 = CK^2$
und . . . . $BC^2 + AC^2 = BC^2 + \square BCD$
$= BC^2 + \square BCK$
$= \square KBC$;
folglich ist $BC^2 + AC^2 : CD^2 = \square KBC : CK^2$
$= m : n$.

Anmerkung 1. Wenn $m : n = 6 : 1$, so ist $\triangle ABC$ gleichschenklig. Denn nimmt man $BD = DC$, so ist $BC^2 = 4CD^2$, und $AC^2 = 2CD^2$, mithin $BC^2 + AC^2 = 6CD^2$.

Anmerkung 2. Soll seyn $BC^2 - AC^2 : CD^2$, das ist $AB^2 : CD^2$, $= m : n$, so findet keine Determination statt, weil $AB \gtreqless CD$ seyn kann. Es bleibe die Construction wie oben, nur halbire man den Winkel BFC statt seines Nebenwinkels durch die Linie FH', so ist

$$BF : FC = H'B : H'C \text{ (Eucl. 6, 3)},$$

mithin wie oben $H'B > H'C$. Macht man also $DH' = H'C$, so fällt D zwischen B und C; errichte DA senkrecht auf BC und verbinde AB und AC, so ist

$$H'B^2 : H'C^2 = BE : EC,$$

also *divid.* . . $\square CBD : H'C^2 = BM : ME$
und, wenn man das Vierfache der Hinterglieder nimmt,
$$\square CBD \text{ oder } AB^2 : CD^2 = BM : MN.$$

Aufgabe 71. Fig. 113.

$$H^2 + S^2 : P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse und der einen Kathete zum Quadrate der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss
$$BC^2 + AC^2 : AD^2$$
das ist . . . . . $BC^2 + \square BCD : \square BDC$
gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe X der Punkt D, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Determination. In Aufgabe X, Zus. 1 ist bewiesen worden, dass das gegebene Verhältniss nicht kleiner seyn darf als das Verhältniss einer Linie zu dem Ueberschusse ihres Dreifachen über die doppelte Seite des Quadrats, welches zweimal so gross ist als das Quadrat jener Linie; oder, was dasselbe ist (Aufgabe X, Zus. 2), als die Summe des Radius eines Kreises und der halben Seite des eingeschriebenen Quadrats zur Differenz derselben Linien.

Synthesis. In einen beliebigen Kreis um den Mittelpunkt O sey ein Quadrat $BCEF$ eingeschrieben. Durch O ziehe auf die Seiten BC und EF eine senkrechte KH und verlängere sie bis zum Punkte G in der Peripherie: so ist $HG : GK$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $HG : GK$, so beschreibe über BC einen Halbkreis, verbinde EG, welche die BC in P treffe, errichte in diesem Punkte auf BC einen Perpendikel, welcher den Halbkreis in R schneide, und verbinde RB und RC: so ist $\triangle RBC$ das verlangte. Denn weil
$$EC^2 + CP^2 = EP^2$$
und . . . . $PR^2 = \square BPC = \square EPG$,
so ist . . . $EC^2 + CP^2 : PR^2 = EP^2 : \square EPG$
$$= EP : PG$$
$$= HK : KG.$$
Folglich ist *componendo*
$$(EC^2 + CR^2 \text{ oder}) \; BC^2 + CR^2 : PR^2 = HG : GK.$$

Wird ein kleineres Verhältniss als $HG : GK$ gegeben, so ist die Auflösung nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $m : n > HG : GK$, so mache $HL : LK = m : n$. Dann ist

$$HL : LK > HG : GK,$$

und *divid.* . . . . . $HK : KL > HK : KG$,

mithin ist $KL < KG$. Zieht man also durch L eine Linie mit BC parallel, so wird sie den Kreis um O in zwei Punkten M und M' treffen. Verbinde EM und EM', welche die BC in D und D' schneiden, errichte in diesen Punkten auf BC Perpendikel, welche dem über BC beschriebenen Halbkreise in A und A' begegnen, und verbinde AB und AC, sowie $A'B$ und $A'C$: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle\, ABC$ und $A'BC$ beide das Verlangte leisten.

Denn weil

$$ED^2 = EC^2 + CD^2 = BC^2 + CD^2$$

und . . . . $AD^2 = \square\, BDC = \square\, EDM$,

so ist . . . $BC^2 + CD^2 : AD^2 = ED^2 : \square\, EDM$

$$= ED : DM$$

$$= HK : KL.$$

Folglich ist *componendo*

$$BC^2 + AC^2 : AD^2 = HL : LK$$

$$= m : n.$$

Ebenso wird bewiesen, dass das $\triangle\, A'BC$ dasselbe leiste.

Anmerkung. Die $\triangle\triangle\, ABC$, $A'BC$ sind nicht congruent. Denn wegen der Parallelen ist

$$ED : DM = ED' : D'M',$$

also . . . . $ED^2 : \square\, EDM = D'E^2 : \square\, ED'M'$.

Nun ist aber $ED^2 > D'E^2$, weil ED vom Perpendikel EC weiter als $D'E$ entfernt ist; folglich ist auch $\square\, EDM > \square\, ED'M'$, woraus hervorgeht, dass $AD > A'D'$ sey.

Aufgabe 72. Fig. 114.

$$P^2 + s^2 : m^2 - P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Höhe und von der kleinern Kathete zum Ueberschusse des Quadrats von dem grössern Abschnitte der Hypotenuse über das Quadrat der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, und $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AB^2 + AD^2 : CD^2 - AD^2,$$

das ist . . $\square\, CBD + \square\, BDC : CD^2 - \square\, BDC$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XI, Anmerk. 2 der Punkt D, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Synthesis. Es sey $m : n$ das gegebene Verhältniss. In einer geraden Linie nimm $CE = EF = m$, und $FB = n$, so ist offenbar $BC > 2CE$, also $BC : CE > 2 : 1$. Daher lässt sich nach Aufgabe XI (vergleiche daselbst Anmerk. 1) die Linie BC in einem Punkte D so theilen, dass $CD > DB$, und

$$BC^2 + \square CBD : \square CBD + \square BDC = BC : CE$$

ist. Beschreibe über BC einen Halbkreis, errichte auf ihr im Punkte D einen Perpendikel, welcher die Peripherie in A treffe, und verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste. Denn aus der obigen Proportion folgt *divid.*

$$\square CBD + CD^2 : \square CBD + \square BDC = BE : EF$$

und nochmals *divid.*

$$CD^2 - \square BDC : \square CBD + \square BDC = BF : FE,$$

das ist $CD^2 - AD^2 \quad : \quad AB^2 \quad + \quad AD^2 \quad = n : m.$

Folglich ist *invertendo*

$$AB^2 + AD^2 \quad : \quad CD^2 \quad - \quad AD^2 \quad = m : n.$$

Aufgabe 73. Fig. 115.

$$P^2 + s^2 : S^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Höhe und von einer Kathete zur Summe der Quadrate von einer Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AC^2 + AD^2 : AB^2 + CD^2$$

das ist . . $\square BCD + \square BDC : \square CBD + CD^2$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XI, Anmerk. 3 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Vermöge der Determination zu Aufgabe XI, Anmerk. 3, 4 darf das gegebene Verhältniss nicht grösser seyn als das Verhältniss, welches eine Linie zu der halben Seite des Quadrats hat, welches dem dreifachen Quadrate dieser Linie gleich ist.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm die gleichen Abschnitte GB, BC, CF, mache FD gleich der mittlern Proportionale zwischen GF und FC und nimm $DH = DC$: so ist, wie in Aufgabe XI, Anmerk. 4 gezeigt worden ist, $GH : HB$ das grösste Verhältniss. Ist nun das gegebene Verhältniss $= GH : HB$, so errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn nach Aufgabe XI ist

$$BC^2 + \square BCD : \square BCD + \square BDC = BG : GH,$$

mithin *divid.* und *invert.*

$$\square BCD + \square BDC : \square CBD + CD^2 = GH : HB,$$

das ist . . $AC^2 + AD^2 \quad : \quad AB^2 + CD^2 = GH : HB.$

Ist das gegebene Verhältniss grösser als $GH : HB$, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $m : n < GH : HB$, so nimm in GB den Punkt R so, dass $GR : RB = m : n$, so wird R zwischen G und H liegen, und $GR < GH$ seyn. Daher lassen sich nach Aufgabe XI in der Linie BC, wenn $m > n$ ist, zwei Punkt E und e zu beiden Seiten des Punktes D, oder, wenn m nicht $> n$ ist, wenigstens ein Punkt E zwischen C und D nehmen, sodass die Verhältnisse

$$BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC \text{ und}$$
$$BC^2 + \square BCe : \square BCe + \square BeC$$

gleich $BG : GR$ sind. Errichte im Punkte E und, wenn der Punkt e möglich ist, auch in diesem auf BC Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in L und l schneiden, und verbinde LB, LC und lB, lC: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle\, LBC$ und lBC beide der Aufgabe genügen. Denn weil

$$BC^2 + \square BCE : \square BCE + \square BEC = BG : GR,$$

so ist *divid.* und *invert.*

$$\square BCE + \square BEC : \square CBE + CE^2 = GR : RB,$$

das ist $LC^2 + LE^2 : LB^2 + CE^2 = m : n.$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle\, lBC$ das Verlangte leiste.

Anmerkung. Die Aufgaben $P^2 + s^2 : s^2 + m^2$ (oder $P^2 + S^2 : S^2 + n^2$) und $P^2 + s^2 : H^2 - P^2$ (oder $P^2 + S^2 : H^2 - P^2$) sind einerlei mit der obigen. Denn es ist (*Lemma* 15, Zus. 1) $S^2 + n^2 = s^2 + m^2 = H^2 - P^2$.

Aufgabe 74. Fig. 115.

$$S^2 + n^2 : m^2 - P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von einer Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse zum Ueberschusse des Quadrats von dem grössern Abschnitte der Hypotenuse über das Quadrat der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte, und $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC: so ist das Verhältniss

$$AC^2 + BD^2 : CD^2 - AD^2,$$

das ist . . . . $\square BCD + BD^2 : CD^2 - \square BDC$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XII, Anmerk. 2 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und demnach das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit. — Die Synthesis ergiebt sich hiernach leicht aus der Analysis.

Aufgabe 75. Fig. 116.

$$S^2 + n^2 : P^2 - n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von einer Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse zum Ueberschusse des Quadrats der Höhe über das Quadrat des kleinern Abschnitts der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, und es sey $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AC^2 + BD^2 : AD^2 - BD^2,$$

das ist . . . $\square BCD + BD^2 : \square BDC - BD^2$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIII, Anmerk. 1 der Punkt D gegeben, also das Verhältniss $BD : DC$, und das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Verlängere BC um $CF = BC$ und $FK = BF$ und nimm KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC: so ist, wie in Aufgabe XIII, Anmerk. 1, 2 gezeigt worden ist, $KC : CG$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm $BC = CF$ und $FK = BF$ und mache KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC: so ist $KC : CG$ das kleinste Verhältniss. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $KC : CG$, so halbire BG in D, errichte in diesem Punkte auf BC einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und ziehe AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn macht man $GH = BG$, so erhellt aus Aufgabe XIII, dass

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2 = FC : CH$$

ist. Daher ist *dividendo*

$$BC^2 + CD^2 + BD^2 : \square BDC - BD^2 = FH : HC$$

und, wenn man von den Vordergliedern die Hälfte nimmt,

$$\square BCD + BD^2 : \square BDC - BD^2 = \tfrac{1}{2} FH : HC.$$

Nun ist aber das erste Verhältniss

$$= AC^2 + BD^2 : AD^2 - BD^2$$

und das zweite Verhältniss, wie in Aufgabe XIII, Anmerk. 2 gezeigt worden ist,

$$= KC : CG,$$

folglich ist $AC^2 + BD^2 : AD^2 - BD^2 = KC : CG.$

Ist das gegebene Verhältniss kleiner als $KC : CG$, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn aber ein Verhältniss $m : n$ gegeben wird, das grösser als $KC : CG$ oder $\frac{1}{2} FH : HC$ ist: so ist nach Verdoppelung der Vorderglieder $2m : n > FH : HC$. Nimmt man also in FC den Punkt R so, dass $FR : RC = 2m : n$, so fällt R zwischen C und H, und es lassen sich daher nach Aufgabe XIII in der Linie BC zwei Punkte E und e so nehmen, dass die Verhältnisse $BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2$ und $BC^2 + \square BCe : \square BeC - Be^2$ gleich $FC : CR$ sind. Errichte in diesen Punkten auf BC Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in L und l treffen, und verbinde LB und LC, sowie lB und lC: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle LBC$ und lBC beide der Aufgabe genügen. Denn weil

$$BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2 = FC : CR,$$

so ist *divid.*

$$BC^2 + CE^2 + BE^2 : \square BEC - BE^2 = FR : RC$$
$$= 2m : n$$

und, wenn man die Hälften der Vorderglieder nimmt,

$$\square BCE + BE^2 : \square BEC - BE^2 = m : n,$$

das ist . . $LC^2 + BE^2 : LE^2 - BE^2 = m : n.$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle lBC$ das Verlangte leiste.

Aufgabe 76. Fig. 116.

$m^2 + 2n^2 : P^2 - n^2$.

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe des Quadrats von dem grössern Abschnitte der Hypotenuse und des doppelten Quadrats von dem kleinern Abschnitte zum Ueberschusse des Quadrats der Höhe über das Quadrat des kleinern Abschnitts der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden, und es sey $AC > AB$. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$CD^2 + 2BD^2 : AD^2 - DB^2,$$

das ist . . . . . $CD^2 + 2BD^2 : \square BDC - DB^2$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIII, Anmerk. 3 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. In der verlängerten BC nimm $CF = BC$, und $FK = BF$, mache KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC und nimm $GH = BG$: so ist, wie in Aufgabe XIII, Anmerk. 3, 4 gezeigt worden ist, $KH : HG$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm $BC = CF$ und $FK = BF$, mache KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC und nimm $GH = BG$: so ist $KH : HG$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $KH : HG$, so halbire BG in D, errichte in diesem Punkte auf BC einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn vermöge der Construction ist nach Aufgabe XIII

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2 = FC : CH.$$

Daher ist *dividendo*

$$BC^2 + CD^2 + BD^2 : \square BDC - BD^2 = FH : HC,$$

und, wenn man von den Vordergliedern die Hälfte nimmt,

$$CD^2 + \square BDC + BD^2 : \square BDC - BD^2 = \tfrac{1}{2}FH : HC,$$

also nochmals *dividendo*

$$CD^2 + 2BD^2 : \square BDC - BD^2 = \tfrac{1}{2}FH - HC : HC.$$

Nun ist aber das erste Verhältniss

$$= CD^2 + 2BD^2 : AD^2 - BD^2,$$

und, wie in Aufgabe XIII, Anmerk. 4 gezeigt worden ist, das zweite Verhältniss

$$= KH : HG.$$

Folglich ist

$$CD^2 + 2BD^2 : AD^2 - BD^2 = KH : HG.$$

Ist das gegebene Verhältniss kleiner als $KH : HG$, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Wird aber ein Verhältniss $m : n$ gegeben, das grösser als $KH : HG$ oder $\frac{1}{2}FH - HC : HC$ ist, so ist *compon.*

$$m + n : n > \tfrac{1}{2}FH : HC$$

und nach Verdoppelung der Vorderglieder

$$2m + 2n : n > FH : HC.$$

Nimmt man also in FC den Punkt R so, dass $FR : RC = 2m + 2n : n$, so fällt R zwischen C und H, und es lassen sich nach Aufgabe XIII in der Linie BC zwei Punkte E und e so nehmen, dass die Verhältnisse

$BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2$ und $BC^2 + \square BCe : \square BeC - Be^2$

gleich $FC : CR$ sind. Errichte auf BC in den Punkten E und e Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in L und l schneiden, und verbinde LB, LC und lB, lC: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle$ LBC, lBC beide das Verlangte leisten. Denn weil

$$BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2 = FC : CR,$$

so ist *dividendo*

$$BC^2 + CE^2 + BE^2 : \square BEC - BE^2 = FR : RC$$
$$= 2m + 2n : n,$$

und, wenn man von den Vordergliedern die Hälfte nimmt,

$$CE^2 + BE^2 + \square BEC : \square BEC - BE^2 = m + n : n,$$

mithin nochmals *dividendo*

$$CE^2 + 2BE^2 : \square BEC - BE^2 = m : n$$

das ist . . $CE^2 + 2BE^2 : \quad LE^2 - BE^2 = m : n.$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle lBC$ der Aufgabe genüge.

Aufgabe 77. Fig. 117.

$$S^2 + n^2 : m^2 + 2n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von einer Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse zur Summe des Quadrats von einem Abschnitte und des doppelten Quadrats von dem andern; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AC^2 + BD^2 : CD^2 + 2BD^2,$$

das ist . . . $\square BCD + BD^2 : CD^2 + 2BD^2$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XII, Anmerk. 3, oder Aufgabe XIII, Anmerk. 5, der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD:DC$ und das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Verlängere BC um $CF = BC$, und $FK = BF$, nimm KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC und mache $CQ = CG$: so geht aus den Determinationen der genannten Aufgaben hervor, dass das gegebene Verhältniss grösser seyn müsse als $CF:FB$, aber nicht grösser seyn dürfe als $CK:KQ$.

Synthesis. In einer geraden Linie mache $BC = CF$ und $FK = BF$, nimm KG gleich der mittlern Proportionale zwischen BK und KC und mache $CQ = CG$: so muss das gegebene Verhältniss grösser als $CF : FB$ und nicht grösser als $CK:KQ$ seyn.

Ist nun 1) $m = n$, so halbire BC in D, errichte in diesem Punkte auf ihr die senkrechte $DA = DB$ und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn offenbar ist der W. BAC ein rechter; und weil $BD = DC$, so ist $\square BCD$ oder $AC^2 = BD^2 + DC^2$, und $AC^2 + BD^2 = 2BD^2 + DC^2$, mithin das Verhältniss beider Summen gleich $m:n$.

2) Ist $m < n$, und $m:n > CF:FB$, so halbire FK in L und nimm $LK:KP = m:n$. Weil nun $CF:FB = LK:KF$, so ist

$$LK:KP > LK:KF;$$

daher liegt P zwischen L und F, und es ist offenbar $CP > PL$. Demnach lässt sich vermittelst Aufgabe XII die Linie BC im Punkte D so theilen, dass

$$BC^2 + \square BCD : BD^2 - \square BDC = CP:PL$$

ist. Errichte im Punkte D auf BC einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ der Aufgabe genüge. Denn aus der obigen Proportion folgt *compon.*

$$BC^2 + BD^2 + CD^2 : BD^2 - \square BDC = CL:LP,$$

und, nimmt man die Hälften der Vorderglieder,

$$\square BCD + BD^2 : BD^2 - \square BDC = KL:LP.$$

Daher ist, wenn man setzt das erste Glied zur Summe beider,

$$\square BCD + BD^2 : CD^2 + 2BD^2 = LK:KP,$$

das ist . . $AC^2 + BD^2 : CD^2 + 2BD^2 = m:n.$

3) Ist $m > n$, und $m:n = CK:KQ$, so halbire BG in D, errichte in diesem Punkte auf BC einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so wird $\triangle ABC$ das gesuchte seyn.

Denn aus der Construction und aus Aufgabe XIII erhellt, dass, wenn $GH = BG$ genommen wird,

$$BC^2 + \square BCD : \square BDC - BD^2 = FC : CH$$

ist. Daher ist *dividendo*

$$BC^2 + CD^2 + BD^2 : \square BDC - BD^2 = FH : HC$$

und, wenn man die Vorderglieder halbirt,

$$\square BCD + BD^2 : \square BDC - BD^2 = \tfrac{1}{2}FH : HC$$
$$= KC : CG \text{ oder } CQ.$$

Denn es ist in Aufgabe XIII, Anmerk. 6 bewiesen worden, dass

$$KC : CG = \tfrac{1}{2}FH : HC$$

sey. Aus der obigen Proportion folgt daher *convertendo*

$$\square BCD + BD^2 : CD^2 + 2BD^2 = CK : KQ,$$

das ist . . . $AC^2 + BD^2 : CD^2 + 2BD^2 = m : n$.

4) Ist $m > n$, und $m : n < CK : KQ$, so mache $LK : KS = m : n$; so ist $LK : KS < CQ : KQ$, und S liegt zwischen L und K. Daher ist *convert.* $KL : LS > KC : CQ$ oder CG. Nun ist, wenn $GH = BG$ genommen wird, in Aufgabe XIII, Anmerk. 6 bewiesen worden, dass $KC : CG = \frac{1}{2}FH : HC$. Folglich ist $KL : LS > \frac{1}{2}FH : HC$, und nach Verdoppelung der Vorderglieder $CL : LS > FH : HC$, mithin *compon.* $CS : SL > FC : CH$. Folglich lassen sich nach Aufgabe XIII in der Linie BC zwei Punkte E und e so finden, dass die Verhältnisse $BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2$ und $BC^2 + \square BCe : \square BeC - Be^2$ gleich $CS : SL$ sind. Errichte nun in den Punkten E und e auf BC Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in M und m schneiden, und verbinde MB und MC, sowie mB und mC: so sind MBC und mBC die verlangten Dreiecke. Denn weil

$$BC^2 + \square BCE : \square BEC - BE^2 = CS : SL,$$

so ist *dividendo*

$$BC^2 + CE^2 + BE^2 : \square BEC - BE^2 = CL : LS$$

und nach Halbirung der Vorderglieder

$$\square BCE + BE^2 : \square BEC - BE^2 = KL : LS,$$

mithin ist *convertendo*

$$\square BCE + BE^2 : CE^2 + 2BE^2 = LK : KS,$$

das ist . . $MC^2 + BE^2 : CE^2 + 2BE^2 = m : n$.

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle\, mBC$ der Aufgabe genüge.

Aufgabe 78. Fig. 118.

$$H^2 + S^2 + m^2 : P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der daranliegenden Kathete zum Quadrate der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle\, ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : AD^2,$$

das ist . . . . . . $BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square BDC$

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIV, Anmerk. 2 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BC : CD$ und somit das $\triangle\, ABC$ der Gattung nach.

Determination. Nimm in der Linie BC den Abschnitt CR gleich der Seite des Quadrats, welches dem dreifachen Quadrate der halben BC gleich ist: so ist, wie in Aufgabe XIV, Anmerk. 2 bewiesen wird, $CR : RB$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf.

Synthesis. Eine beliebige gerade Linie BC theile in R so, dass das Quadrat von CR gleich ist dem dreifachen Quadrate der halben BC: so ist $CR : RB$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $CR : RB$, so mache $RH = BR$, halbire CH in D, errichte in diesem Punkte auf BC eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle\, ABC$ das gesuchte.

Denn nach Aufgabe XIV ist

$$BC^2 + 2 \square BCD : \square BDC = CB : BR$$

also *divid.* $BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square BDC = CR : RB$,

das ist . . $BC^2 + AC^2 + CD^2 : AD^2 =$ dem gegebenen Verh.

Wird ein kleineres Verhältniss als $CR : RB$ gegeben, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $m : n > CR : RB$, so sey $CN : NB = m : n$; so wird N zwischen B und R fallen. Daher lässt sich nach Aufgabe XIV die Linie BC so in zwei Punkten E und e theilen, dass die Verhältnisse

$$BC^2 + 2\square BCE : \square BEC \text{ und } BC^2 + 2\square BCe : \square BeC$$

gleich $CB : BN$ sind. Errichte auf BC in den Punkten E und e Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in L und l schneiden, und verbinde LB und LC, sowie lB und lC: ich behaupte, dass die Dreiecke LBC und lBC beide der Aufgabe genügen.

Denn weil

$$BC^2 + 2 \square BCE : \square BEC = CB : BN,$$

so ist *divid.* $BC^2 + \square BCE + CE^2 : \square BEC = CN : NB$,

das ist . . . $BC^2 + LC^2 + CE^2 : LE^2 \quad = m : n$.

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle\, lBC$ das Verlangte leiste.

Aufgabe 79. Fig. 118.

$$H^2 + 2m^2 : P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe des Quadrats von der Hypotenuse, und des doppelten Quadrats von einem ihrer Abschnitte zum Quadrate der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + 2CD^2 : AD^2,$$

das ist . . . . $BC^2 + 2CD^2 : \square BDC$

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIV, Anmerk. 4 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Nimm CR gleich der Seite des Quadrats, welches dem dreifachen Quadrate der halben BC gleich ist, und mache $HR = RB$: so darf nach Aufgabe XIV, Anmerk. 4 das gegebene Verhältniss nicht kleiner als $CH : HR$ seyn.

Synthesis. Eine beliebige gerade Linie BC theile in R so, dass CR^2 gleich ist dem dreifachen Quadrate der halben BC, und mache $HR = RB$: so ist $CH : HR$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Ist nun das gegebene Verhältniss $= CH : HR$, so halbire CH in D; so ist nach Aufgabe XIV

$$BC^2 + 2\square BCD : \square BDC = CB : BR,$$

mithin *dividendo*

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square BDC = CR : RB \text{ oder } RH,$$

und nochmals *dividendo*

$$BC^2 + 2CD^2 : \square BDC = CH : HR.$$

Errichtet man also auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneidet, und verbindet AB und AC: so ist offenbar $\triangle ABC$ das verlangte.

Ist das gegebene Verhältniss kleiner als $CH : HR$, so ist die Auflösung nicht möglich. Ist aber das gegebene Verhältniss $m : n > CH : HR$, so nimm in der verlängerten BC den Punkt Q so, dass $BC : CQ = m : n$ ist. Weil also $BC : CQ > CH : HR$, so ist *compon.* $BQ : QC > CR : RH$ oder RB. Nimmt man also in der Linie BC den Punkt N so, dass $CN : NB = BQ : QC$, so liegt N zwischen B und R. Daher lassen sich nach Aufgabe XIV in der Linie BC zwei Punkte

E und e zu beiden Seiten des Punktes D so nehmen, dass die Verhältnisse

$$BC^2 + 2\square BCE : \square BEC \text{ und } BC^2 + 2\square BCe : \square BeC$$

gleich $CB : BN$ sind. Errichte auf BC in den Punkten E und e Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in L und l schneiden, und verbinde LB und LC, sowie lB und lC: so behaupte ich, dass die $\triangle\triangle\ LBC$ und lBC beide das Verlangte leisten. Denn weil

$$BC^2 + 2\square BCE : \square BEC = CB : BN,$$

so ist *divid.* $BC^2 + \square BCE + CE^2 : \square BEC = CN : NB$

$$= BQ : QC$$

und nochmals *dividendo*

$$BC^2 + 2CE^2 : \square BEC \text{ oder } LE^2 = BC : CQ$$

$$= m : n.$$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle\, lBC$ der Aufgabe genüge.

Aufgabe 80. Fig. 118.

$$H^2 + S^2 + m^2 : H^2 + 2m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der daranliegenden Kathete zur Summe des Quadrats von der Hypotenuse und des doppelten Quadrats von dem genannten Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : BC^2 + 2CD^2,$$

das ist . . $BC^2 + \square BCD + CD^2 : BC^2 + 2CD^2$

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIV, Anmerk. 6 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BC : CD$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Verlängere BC um $CF = BC$ und nimm BQ gleich der doppelten Seite des Quadrats, welches dem dritten Theile des Quadrats von BC gleich ist: so darf, wie in Aufgabe XIV, Anmerk. 6, 7 bewiesen wird, das gegebene Verhältniss nicht grösser als $CF : FQ$ seyn, muss aber grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm beliebig die gleichen Abschnitte BM und MQ, ferner nimm den Abschnitt BC so, dass $BC^2 = 3BM^2$ ist, und mache $CF = BC$: so ist $CF : FQ$ das grösste Verhältniss, welches gegeben werden darf. Nimm in BC den Punkt R so, dass

$$BR : RC = QC : CB,$$

so ist *compon.* . . $BC : CR = QB : BC$

und, wenn man CF in G halbirt und von den Vordergliedern die Hälfte nimmt,

$$GC : CR = MB : BC.$$

Nun ist $BC^2 = 3MB^2$, mithin ist $CR^2 = 3GC^2$. Macht man also $RH = BR$ und halbirt HC in D, so ist, wie in Aufgabe XIV, verbunden mit Anmerk. 1, bewiesen wird,

$$BC^2 + 2\square BCD : \square BDC = CB : BR.$$

Daher ist *dividendo*

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square BDC = CR : RB$$
$$= FC : CQ,$$

also *convertendo*

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : BC^2 + 2CD^2 = CF : FQ.$$

Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $CF : FQ$, so errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist offenbar $\triangle ABC$ das verlangte.

Ist das gegebene Verhältniss grösser als $CF : FQ$, oder kleiner als das Verhältniss der Gleichheit, so ist die Aufgabe nicht möglich. — Wird aber ein Verhältniss $m : n < CF : FQ$ und grösser als das Verhältniss der Gleichheit gegeben, so mache $CF : FS = m : n$. Weil nun

$$CF : FS < CF : FQ,$$

so ist *convert.* . . . $FC : CS > FC : CQ$

oder . . . . $FC : CS > CR : RB.$

Nimmt man also in BC den Punkt N so, dass $CN : NB = FC : CS$, so wird N zwischen B und R liegen, und daher lässt sich nach Aufgabe XIV die BC in zwei Punkten E nnd e so theilen, dass die Verhältnisse

$$BC^2 + 2\square BCE : \square BEC \text{ und } BC^2 + 2\square BCe : \square BeC$$

gleich $CB : BN$ sind. Errichte in den Punkten E und e auf BC Perpendikel, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in L und l schneiden, und verbinde LB und LC, sowie lB und lC: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle\ LBC$ und lBC beide der Aufgabe genügen.

Denn weil

$$BC^2 + 2\square BCE : \square BEC = CB : BN,$$

so ist *dividendo*

$$BC^2 + \square BCE + CE^2 : \square BEC = CN : NB$$
$$= FC : CS.$$

Folglich ist *convertendo*

$$BC^2 + \square BCE + CE^2 : BC^2 + 2CE^2 = CF : FS,$$

das ist $BC^2 + LC^2 + CE^2 \ : BC^2 + 2CE^2 = m : n.$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle lBC$ das Verlangte leiste.

Aufgabe 81. Fig. 110.

$$H^2 + S^2 + m^2 : S^2 + 2m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der daran liegenden Kathete zur Summe des Quadrats von dieser Kathete und des doppelten Quadrats von dem genannten Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : AC^2 + 2CD^2,$$

das ist . . $BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square BCD + 2CD^2$

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XV, Anmerk. 2 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$ und $m > n$. In einer geraden Linie nimm $BC = CF = m$, und $EF = n$: so ist $CF > FE$, also auch $BE > EF$. Daher lässt sich nach Aufgabe XV die Linie BC in D so theilen, dass

$$2BC^2 + \square BCD : \square BCD + 2CD^2 = BE : EF$$

ist. Errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das Verlangte leiste. Denn aus der obigen Proportion folgt *compon.*

$$2BC^2 + 2\square BCD + 2CD^2 : \square BCD + 2CD^2 = BF : FE$$

und, wenn man die Hälften der Vorderglieder nimmt,

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square BCD + 2CD^2 = CF : FE,$$

das ist $BC^2 + AC^2 \quad + CD^2 : \; AC^2 \quad + 2CD^2 = m : n.$

Aufgabe 82. Fig. 110.

$$H^2 - m^2 : S^2 + 2m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Ueberschusses des Quadrats der Hypotenuse über das Quadrat von einem ihrer Abschnitte zur Summe des doppelten Quadrats von diesem Abschnitte und des Quadrats von der anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Das gesuchte $\triangle ABC$ sey gefunden. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 - CD^2 : AC^2 + 2CD^2,$$

das ist . . . . . $BC^2 - CD^2 : \square BCD + 2CD^2$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XV, Anmerk. 3 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$. In einer geraden Linie nimm $BC = CE = m$, und $EF = n$, so ist offenbar $BF > FE$; daher lässt sich nach Aufgabe XV in drr Linie BC der Punkt D so nehmen, dass

$$2BC^2 + \square BCD : \square BCD + 2CD^2 = BF : FE$$

ist. Errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey. Denn aus der obigen Proportion folgt *divid.*

$$2BC^2 - 2CD^2 : \square BCD + 2CD^2 = BE : EF,$$

folglich, wenn man von den Vordergliedern die Hälfte nimmt und AC^2 für $\square BCD$ setzt,

$$BC^2 - CD^2 : AC^2 + 2CD^2 = CE : EF$$
$$= m : n.$$

Aufgabe 83. Fig. 110.

$$H^2 + S^2 + m^2 : s^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der demselben anliegenden Kathete zum Quadrate der andern Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : AB^2,$$

das ist . . . . $BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square CBD$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XVI, Anmerk. 1 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $FC : CB$, und es sey $FC > CB$, so ist $FB > 2BC$. Daher lässt sich nach Aufgabe XVI die Linie BC in D so theilen, dass

$$2BC^2 + CD^2 : \square CBD = FB : BC$$

ist. Errichte auf BC im Punkte D einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn aus der obigen Proportion folgt *dividendo*

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square CBD = FC : CB,$$

daher ist $BC^2 + \quad AC^2 \quad + CD^2 : \quad AB^2 \quad = FC : CB.$

Aufgabe 84. Fig. 110.

$$2s^2 + n^2 : S^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe des doppelten Quadrats einer Kathete und des Quadrats von dem anliegenden Abschnitte der Hypotenuse zum Quadrate der andern Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$2AC^2 + CD^2 : AB^2,$$

das ist . . . . . $2\square BCD + CD^2 : \square CBD$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XVI, Anmerk. 2 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Eine Determination findet nicht statt, und die Construction ist einleuchtend.

Aufgabe 85. Fig. 110.

$$H^2 + S^2 + m^2 : 2S^2 + m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der demselben anliegenden Kathete zur Summe des doppelten Quadrats von dieser Kathete und des Quadrats von dem genannten Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : 2AC^2 + CD^2,$$

das ist . . $BC^2 + \square BCD + CD^2 : 2\square BCD + CD^2$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XVI, Anmerk. 3 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD:DC$ und somit das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm $EB:BC$ gleich dem gegebenen Verhältnisse $m:n$, und es sey $EB > BC$; so ist auch $EB > EC$, und, wenn man $EF = EB$ macht, $FE > EC$, also $FC > 2CE$. Daher lässt sich nach Aufgabe XVI die Linie BC in D so theilen, dass

$$2BC^2 + CD^2 : \square CBD = FC : CE$$

ist. Errichte im Punkte D auf BC eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC; ich behaupte, dass $\triangle ABC$ das verlangte sey. Denn aus der obigen Proportion folgt *dividendo*

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : \square CBD = FE : EC$$
$$= BE : EC$$

und *convertendo*

$$BC^2 + \square BCD + CD^2 : 2\square BCD + CD^2 = EB : BC$$

das ist $BC^2 + AC^2 + CD^2 : 2AC^2 + CD^2 = m : n.$

Aufgabe 86. Fig. 119.

$$m^2 + n^2 : P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von den Abschnitten der Hypotenuse zum Quadrate der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BD^2 + DC^2 : AD^2,$$

das ist . . . . $BD^2 + DC^2 : \square BDC$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XVII der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD:DC$ und $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. In der Determination zu Aufgabe XVII ist gezeigt worden, dass

$$BD^2 + DC^2 : \square BDC \geqq 2 : 1$$

sey. Folglich darf das gegebene Verhältniss nicht kleiner seyn als das Verhältniss des Doppelten zum Einfachen.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $CE:EH$, und es sey $2HE$ nicht grösser als EC. Verlängere CH um

$HB = HE$ und beschreibe über BC einen Halbkreis. Ist nun $2HE$ oder $BE = EC$, so errichte auf BC im Punkte E eine Senkrechte, welche die Peripherie in G schneide, und verbinde GB und GC: so ist $\triangle GBC$ das verlangte. Denn weil $BE = EG = EC$, so ist $2EG^2 = BE^2 + EC^2$. Es ist aber auch $2HE = EC$. Folglich ist

$$BE^2 + EC^2 : EG^2 = CE : EH.$$

Ist aber $2HE$ oder $BE < EC$, so lässt sich nach Aufgabe XVII die Linie BC in zwei Punkten D und d so theilen, dass die Verhältnisse

$$BD^2 + DC^2 : \square BDC \text{ und } Bd^2 + dC^2 : \square BdC$$

gleich $CE : EH$ sind. Errichte nun auf BC in den Punkten D und d Perpendikel, welche die Peripherie in A und a schneiden, und verbinde AB und AC, sowie aB und aC: so werden offenbar die $\triangle\triangle\ ABC$ und aBC das Verlangte leisten.

Anmerkung. Die Punkte D und d sind aber von der Mitte der BC gleichweit entfernt, weil (nach der Construction der XVIIten Aufgabe) $\square BDC = \square BdC$ ist; woraus hervorgeht, dass die $\triangle\triangle\ ABC$ und aBC congruent sind.

Aufgabe 87. Fig. 119.

$$m^2 - n^2 : P^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Unterschieds der Quadrate von den Abschnitten der Hypotenuse zum Quadrate der Höhe; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $BD > DC$: so ist das Verhältniss

$$BD^2 - DC^2 : AD^2,$$

das ist .... $BD^2 - DC^2 : \square BDC$,

gegeben. Nimmt man also BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XVIII der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $CH : HB$. Theile nach Aufgabe XVIII die Linie BC im Punkte D so, dass $BD^2 - DC^2 : \square BDC = CH : HB$ ist, beschreibe über BC einen Halbkreis, errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche die Peripherie in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist, wie leicht erhellt, $\triangle ABC$ das verlangte.

Aufgabe 88. Fig. 117.

$$m^2 - n^2 : s^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Unterschieds der Quadrate von den Abschnitten der Hypotenuse zur Summe der Quadrate von dem kleinern Abschnitte und von der ihm anliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$: so ist das Verhältniss

$$CD^2 - DB^2 : AB^2 + BD^2,$$

das ist . . . . . $CD^2 - DB^2 : \square CBD + BD^2$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIX der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD:DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Eine Determination findet nicht statt, und die Construction ergiebt sich leicht aus der Analysis.

Aufgabe 89. Fig. 110.

$$H^2 + S^2 + m^2 : H^2 - m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der daran liegenden Kathete zum Ueberschusse des Quadrats der Hypotenuse über das Quadrat des genannten Abschnitts; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : BC^2 - CD^2$$

gegeben. Verlängere BC um $CE = CD$, so ist $AC^2 = \square BCD = \square BCE$, und $CD^2 = CE^2$; daher ist das gegebene Verhältniss

$$= BC^2 + \square BCE + CE^2 : BC^2 - CE^2$$
$$= \square EBC + CE^2 : BC^2 - CE^2.$$

Nimmt man also die Linie BE als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIX, Anmerk. 2 der Punkt C bekannt, mithin das Verhältniss $BC:CE$ oder $BC:CD$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $FB:BE$, und es sey $FB > BE$, so lässt sich nach Aufgabe XIX, Anmerk. 2 die Linie BE in C so theilen, dass

$$BC^2 - CE^2 : \square EBC + CE^2 = EB : BF$$

ist. In BC nimm den Abschnitt $CD = CE$, errichte im Punkte D auf BC einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Denn wegen des rechten Winkels BAC ist $AC^2 = \square BCD = \square BCE$; auch ist $CD^2 = CE^2$, mithin

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 = BC^2 + \square BCE + CE^2$$
$$= \square EBC + CE^2.$$

Folglich ist

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : BC^2 - CD^2 = \square EBC + CE^2 : BC^2 - CE^2$$
$$= FB : BE.$$

Aufgabe 90. Fig. 117.

$$m^2 - n^2 : S^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Unterschieds der Quadrate von den Abschnitten der Hypotenuse zur Summe der Quadrate von einer Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das verlangte. Fälle AD senkrecht auf BC, und es sey $CD > DB$, so ist das Verhältniss

$$CD^2 - DB^2 : AC^2 + BD^2,$$

das ist . . . . . $CD^2 - DB^2 : \square BCD + BD^2$,

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIX, Anmerk. 2 der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar kleiner seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm vom Punkte B nach einer Richtung hin die Abschnitte BC und BF in dem gegebenen Verhältnisse $m : n$, und es sey $BC < BF$: so lässt sich nach Aufgabe XIX in BC ein Punkt D finden, sodass

$$CD^2 - BD^2 : \square CBD + BD^2 = BC : CF$$

ist. Errichte auf BC in dem Pnnkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A treffe, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn aus der obigen Proportion folgt, wenn man setzt das erste Glied zur Summe beider,

$$CD^2 - BD^2 : \square CBD + CD^2 = BC : BF,$$

das ist $CD^2 - BD^2 : AB^2 + CD^2 = m : n.$

Es ist aber (*Lemma* 15) $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$, folglich genügt $\triangle ABC$ der Aufgabe.

Aufgabe 91. Fig. 115.

$$S^2 + n^2 : s^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der einen Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse zur Summe der Quadrate von dem genannten Abschnitte und von der daranliegenden Kathete; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$AC^2 + BD^2 : AB^2 + BD^2,$$

das ist . . . $\square BCD + BD^2 : \square CBD + BD^2$

gegeben. Nimmt man also die Linie BC als gegeben an, so ist nach Aufgabe XIX, Anmerk. 3, oder nach Aufgabe XX, Anmerk. 2, der Punkt D gegeben, mithin das Verhältniss $BD : DC$, und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. In der Determination zu Aufgabe XX, Anmerk. 2 ist gezeigt worden, dass das gegebene Verhältniss grösser seyn müsse als das Verhältniss des Einfachen zum Doppelten.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$ und $2m > n$. Ist nun $m = n$, so construire das bei A rechtwinklige $\triangle ABC$, in welchem $AB = AC$ sey; so wird es der Aufgabe genügen. Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist $AC^2 = AB^2$, mithin $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BD^2$, und deshalb das Verhältniss dieser Summen $= m : n$.

Ist $m > n$, so nimm in der Verlängerung der beliebigen Linie BC den Punkt G so, dass $CG : GB = m : n$, so lässt sich vermittelst Aufgabe XIX in BC ein Punkt D finden, sodass

$$CD^2 - BD^2 : \square CBD + BD^2 = CB : BG$$

ist. Errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn aus der obigen Proportion folgt *componendo*

$$\square CBD + CD^2 : \square CBD + BD^2 = CG : GB,$$

das ist nach *Lemma* 15

$$AC^2 + BD^2 : AB^2 + BD^2 = m : n.$$

Endlich, wenn $m < n$ ist, so nimm in der verlängerten BC den Punkt F so, dass $CF : FB = m : n$. Weil nun nach der Annahme $2m > n$, so ist $2CF > FB$, mithin $FC > CB$, und $FB > 2BC$, folglich $CB : BF < 1 : 2$. Daher lässt sich nach Aufgabe XX in BC ein Punkt D so finden, dass

$$BD^2 - CD^2 : \square CBD + BD^2 = CB : BF$$

ist. Errichte auf BC im Punkte D einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn aus der obigen Proportion folgt *invert.* und *convert.*

$$\square CBD + BD^2 : \square CBD + CD^2 = BF : FC,$$

das ist vermittelst *Lemma* 15

$$AB^2 + BD^2 : AC^2 + BD^2 = n : m.$$

Aufgabe 92. Fig. 120.

$$H^2 : Ss.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Quadrats der Hypotenuse zum Rechtecke beider Katheten; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, so ist das Verhältniss

$$BC^2 : \square BAC$$

gegeben. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist $\square BAC = \square BC \,.\, AD$ (*Lemma* 14, Zus.), daher ist das gegebene Verhältniss gleich

$$BC^2 : \square BC \,.\, AD,$$

das ist . . . . $BC : AD$.

Folglich ist (*Dat.* 77) $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Determination. Halbire BC in E, so ist $AD \leqq BE$, mithin

$$BC : AD \geqq BC : BE \text{ oder } 2 : 1.$$

Das erste Verhältniss ist aber gleich dem gegebenen; folglich darf dieses nicht kleiner seyn als das Verhältniss des Doppelten zum Einfachen.

Synthesis. Ueber einer beliebigen geraden Linie BC beschreibe einen Halbkreis, errichte auf ihr in der Mitte E eine senkrechte, welche die Kreislinie in F schneide, und das gegebene Verhältniss $m : n$ sey nicht kleiner als $BC : EF$. Ist nun $m : n = BC : EF$, so verbinde BF und CF: ich behaupte, dass $\triangle BFC$ das gesuchte sey. Denn es ist $\Box BFC = \Box BC \,.\, EF$ (*Lemma* 14, Zus.), daher ist

$$BC^2 : \Box BFC = BC^2 : \Box BC \,.\, EF$$
$$= BC : EF = m : n.$$

Ist aber $m : n > BC : EF$, so mache $BC : EG = m : n$, so ist $EG < EF$. Zieht man also durch G eine Linie mit BC parallel, so wird dieselbe die Kreislinie in zwei Punkten A und a schneiden. Verbinde AB und AC, sowie aB und aC: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle$ ABC und aBC beide das Verlangte leisten. — Denn fällt man AD senkrecht auf BC, so ist (*Lemma* 14, Zus.) $\Box BAC = \Box BC \,.\, AD = \Box BC \,.\, EG$. Folglich ist

$$BC^2 : \Box BAC = BC^2 : \Box BC \,.\, EG$$
$$= BC : EG = m : n.$$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle aBC$ der Aufgabe genüge.

Anmerkung. Die Aufgabe lässt sich allgemein lösen, wenn der gegebene Winkel BAC auch nicht ein rechter ist. Beschreibe um das $\triangle ABC$ einen Kreis, dessen Durchmesser d sey, so ist (*Lemma* 14) $\Box BAC = \Box AD \,.\, d$; daher ist $BC^2 : \Box AD \,.\, d$ gegeben. Nimmt man nun BC als gegeben an, so ist $\Box AD \,.\, d$ gegeben. Weil aber BC und W. BAC gegeben wird, so ist d bekannt, mithin auch AD.

Aufgabe 93. Fig. 114.

$$HP + P^2 : S^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe des Rechtecks aus der Hypotenuse und der Höhe und des Quadrats der Höhe zur Summe der Quadrate von der einen Kathete und von dem an der andern Kathete liegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$\Box BC \,.\, AD + AD^2 : AC^2 + BD^2$$

gegeben. In BC nimm die Abschnitte CE und CG jeden gleich AD, so ist

$$\Box BC \,.\, AD + AD^2 = \Box BCG + CG^2$$
$$= \Box BGC$$

und . . . . $AC^2 + BD^2 = BC^2 - AD^2$ (*Lemma* 15, Zus. 1)

$$= BC^2 - CE^2$$
$$= \Box GBE \text{ (\textit{Lemma} 4, Zus.).}$$

Daher ist das Verhältniss $\Box BGC : \Box GBE$, das ist GC oder

$CE:EB$ gegeben, also *invert.* und *compon.* $BC:CE$ oder AD, und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Halbire BC in F. Weil AD oder $CE \lesseqgtr CF$ ist, so ist (Pappi *Lemma* 12) $CE:EB \lesseqgtr CF:FB$. Es ist aber $CF = FB$, und, wie in der Analysis gezeigt worden ist, $CE:EB$ gleich dem gegebenen Verhältnisse; folglich darf dieses nicht grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m:n$, und m nicht $> n$. In einer geraden Linie nimm $CE = m$ und $EB = n$, beschreibe über BC einen Halbkreis, errichte auf derselben Seite auf BC die senkrechte $CH = CE$ und ziehe durch H der Linie BC eine Parallele, so wird diese die Kreislinie entweder berühren oder schneiden, weil CE oder CH offenbar nicht grösser ist als die halbe BC. Es sey A einer von den Punkten, in welchen die Parallele den Kreis trifft. Verbinde AB und AC: so behaupte ich, dass $\triangle ABC$ der Aufgabe genüge.

Denn verlängere BC um $CG = CE$ und fälle AD senkrecht auf BC, so ist $AD = HC = EC = CG$. Daher ist, wie in der Analysis gezeigt worden ist,

$$\square BC \,.\, AD + AD^2 = \square BGC$$

und . . . . $AC^2 + BD^2 = \square GBE$.

Folglich ist

$$\begin{aligned} \square BC \,.\, AD + AD^2 : AC^2 + BD^2 &= \square BGC : \square GBE \\ &= CG \text{ oder } CE : EB \\ &= \quad m : n. \end{aligned}$$

Aufgabe 94. Fig. 114.

$$H^2 + S^2 : S^2 + m^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse und von der einen Kathete zur Summe der Quadrate von derselben Kathete und von dem daranliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 : AC^2 + CD^2$$

gegeben. Wegen des rechtwinkligen Dreiecks ist

$$BC : CA = AC : CD,$$

also . . . . $BC^2 : CA^2 = AC^2 : CD^2$.

Die Summen der homologen Glieder haben aber dasselbe Verhältniss; daher ist

$$BC^2 + CA^2 : AC^2 + CD^2 = BC^2 : CA^2.$$

Da nun das erste Verhältniss gegeben wird, so ist $BC^2 : CA^2$, das ist $BC : CD$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Determination. Das gegebene Verhältniss muss offenbar das Verhältniss des Grössern zum Kleinern seyn.

Synthesis. Das gegebene Verhältniss sey $m : n$ und $m > n$. In einer geraden Linie nimm vom Punkte C nach einer Seite hin $BC = m$, $CD = n$, beschreibe über BC einen Halbkreis, welcher den auf BC im Punkte D errichteten Perpendikel in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn wegen des rechten Winkels BAC ist, wie in der Analysis gezeigt worden ist,

$$\begin{aligned} BC^2 + CA^2 : AC^2 + CD^2 &= BC^2 : CA^2 \\ &= BC : CD \\ &= m : n. \end{aligned}$$

Aufgabe 95. Fig. 110.

$$H^2 + S^2 + m^2 : HS + mS + S^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von der einen Kathete und von dem daran liegenden Abschnitte der Hypotenuse zur Summe des Quadrats jener Kathete, des Rechtecks aus ihr und aus der Hypotenuse, und des Rechtecks aus derselben Kathete und dem anliegenden Abschnitte; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD : \square BCA + \square ACD + AC^2$$

gegeben. In der Verlängerung der BC nimm $CE = CD$, und zu beiden Seiten des Punktes E mache $EF = EG = AC$: so ist

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 + CD^2 &= BC^2 + \square BCE + CE^2 \\ &= BE^2 - \square BCE \\ &= BE^2 - EF^2 \\ &= \square FBG \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \square BCA + \square ACD + AC^2 &= \square BC . EF + \square CEF + EF^2 \\ &= \square BFE. \end{aligned}$$

Daher ist das gegebene Verhältniss

$$\begin{aligned} &= FBG : \square BFE \\ &= BG : FE = BG : GE. \end{aligned}$$

Nimmt man also BE als gegeben an, so ist GE bekannt, folglich weil $GE^2 = \square BCE$ ist, auch die Abschnitte BC und CE, also das Verhältniss $BC : CE$ oder $BC : CD$ und das $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Halbire BE in H. Weil $BC > CD$, oder $BC > CE$, so ist $\square BCE < EH^2$. Es ist aber $\square BCE = EG^2$, mithin ist $EG^2 < EH^2$, und $EG < EH$, also $BG > GE$ und $BG : GE > BH : HE$. Nun ist in der Analysis gezeigt worden, dass $BG : GE$ gleich ist dem gegebenen Verhältnisse, und es ist $BH = HE$; folglich muss das gegebene Verhältniss grösser seyn als das Verhältniss der Gleichheit.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm die Abschnitte BG und GE in dem gegebenen Verhältnisse, und es sey $BG > GE$. Theile die Linie BE in C so, dass $\square BCE = EG^2$, so werden die Abschnitte BC und CE ungleich seyn, weil EG^2 kleiner ist als das Quadrat der halben BE. Es sey also $BC > CE$. Mache $CD = CE$, errichte auf BE im Punkte D einen Perpendikel, welcher den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so wird $\triangle ABC$ das Verlangte leisten.

Denn weil W. BAC ein rechter ist, so ist $AC^2 = \square BCD = \square BCE = EG^2$, folglich ist $AC = EG$, und deshalb, wie in der Analysis gezeigt worden ist,

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : \square BCA + \square ACD + AC^2 = BG : GE.$$

Aufgabe 96. Fig. 121.

$$H^2 + S^2 + m^2 : Sn.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss der Summe der Quadrate von der Hypotenuse, von einem ihrer Abschnitte und von der daran liegenden Kathete zum Rechteck aus dieser Kathete und dem andern Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte. Fälle AD senkrecht auf BC, so ist das Verhältniss

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : \square AC \,.\, BD$$

gegeben. Nimm die Linie p so, dass

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 = \square p \,.\, BD$$

ist, so ist das Verhältniss

$$\square p \,.\, BD : \square AC \,.\, BD,$$

das ist . . . . $p : AC$,

gegeben; folglich, wenn AC als gegeben angenommen wird, die Linie p. Weil nun

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 = AC^2 + AD^2 + BD^2$$

und, wenn AC^2 hinzukommt,

$$BC^2 + AC^2 = 2AC^2 + AD^2 + BD^2,$$

also, wenn noch CD^2 hinzugesetzt wird,

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 = 3AC^2 + BD^2$$

ist, so ist auch $3AC^2 + BD^2 = \square p \,.\, BD$. Macht man also $DM = p$, so ist

$$3AC^2 + BD^2 = \square BDM$$

und, wenn BD^2 auf beiden Seiten weggenommen wird,

$$3AC^2 \quad = \square DBM.$$

Nun wird AC als gegeben angenommen, folglich ist $3AC^2$ und deshalb auch $\square DBM$ bekannt. Es ist aber die Summe DM der Seiten dieses Rechtecks gegeben, folglich auch der Abschnitt BD. Daher ist das Verhältniss $AC : BD$ bekannt, und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben (*Lemma* 27).

Determination. Weil $MD : AC$ in dem gegebenen Verhältnisse genommen, und MD in B so getheilt werden muss, dass $\square DBM = 3AC^2$ ist: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $3AC^2$ grösser ist als das Quadrat der halben DM; und eine Gränze wird stattfinden, wenn B die Mitte der DM ist. Mache die Abschnitte DE, EF und FG gleich AC, so ist $\square GDE = 3AC^2$, mithin $\square DBM = \square GDE$. Ist nun B die Mitte der DM, so ist DB die mittlere Proportionale zwischen GD und DE, mithin ist DB, also auch DM und somit das Gränzverhältniss $DM : AC$ bekannt.

Es ist nun zu untersuchen, ob dieses Verhältniss ein grösstes oder kleinstes sey. Es sey also irgend ein anderes rechtwinkliges $\triangle LHK$ construirt, dessen Spitze L in der senkrechten AD liegt, und dessen eine Kathete $LK = AC = DE$ ist. Wie in der Analysis werde gezeigt, dass

$$\begin{aligned} HK^2 + LK^2 + KD^2 &= 3LK^2 + HD^2 \\ &= 3DE^2 + HD^2 \end{aligned}$$

sey: so sind die Verhältnisse

$$3DE^2 + HD^2 : \square LK \,.\, HD \text{ oder } \square EDH$$

und . . . . $MD : DE$, oder $\square MDH : \square EDH$

mit einander zu vergleichen. In beiden Verhältnissen sind aber die Hinterglieder gleich; vergleiche daher die Vorderglieder

$$3DE^2 + HD^2 \text{ und } \square MDH$$

und, wenn von beiden HD^2 abgezogen ist, die Reste

$$3DE^2 \text{ und } \square MHD$$

mit einander. Es ist aber $3DE^2 = \square MBD$, und $\square MBD > \square MHD$, weil B die Mitte von MD ist; mithin ist auch

$$3DE^2 > \square MHD$$

und, wenn HD^2 hinzukommt,

$$3DE^2 + HD^2 > \square MDH.$$

Daher ist

$$3DE^2 + HD^2 : \square EDH > \square MDH : \square EDH,$$

das ist $HK^2 + LK^2 + HD^2 : \square LK . HD > MD : DE$,

woraus hervorgeht, dass $MD : DE$ (oder $MD : AC$) ein kleinstes Verhältniss sey.

Synthesis. In einer geraden Linie nimm beliebig die gleichen Abschnitte DE, EF, FG, nimm DB gleich der mittlern Proportionale zwischen GD und DE, und mache $MB = BD$: so ist $MD : DE$ das kleinste Verhältniss, welches gegeben werden darf. — Ist nun das gegebene Verhältniss $m : n = MD : DE$, so nimm in der verlängerten BD den Punkt C so, dass $\square BCD = DE^2$. Errichte auf BC im Punkte D eine Senkrechte, welche den über BC beschriebenen Halbkreis in A schneide, und verbinde AB und AC: so ist $\triangle ABC$ das gesuchte. Denn weil W. BAC ein rechter ist, so ist $AC^2 = \square BCD = DE^2$, also $AC = DE$. Nun ist, wie in der Analysis bewiesen worden ist,

$$\begin{aligned} BC^2 + AC^2 + CD^2 &= 3AC^2 + BD^2 \\ &= 3DE^2 + BD^2. \end{aligned}$$

Daher ist

$$BC^2 + AC^2 + CD^2 : \square AC \,.\, BD = 3DE^2 + BD^2 : \square EDB.$$

Es ist aber

$$3DE^2 = \square GDE = DB^2 = \square MBD,$$

also . . . . $3DE^2 + BD^2 = \square MDB$.

Folglich ist das erste Verhältniss $= \square MDB : \square EDB = MD : DE = m : n$.

Ist das gegebene Verhältniss kleiner als $MD : DE$, so ist die Auflösung nicht möglich. — Ist aber das gegebene Verhältniss $m : n > MD : DE$, so sey $ND : DE = m : n$; dann ist $ND > MD$, also $\square NBD > \square MBD$ oder $\square GDE$. Daher lässt sich die Linie ND in zwei Punkten H und h so theilen, dass die Rechtecke NHD und NhD gleich $\square GDE$ oder $3DE^2$ sind. In den Verlängerungen der Linien HD und hD nimm die Punkte K und k so, dass die Rechtecke HKD und hkD gleich DE^2 sind; beschreibe über HK und hk Halbkreise, welche die senkrechte AD in den Punkten L und l schneiden, und verbinde LH und LK, sowie lh und lk: so behaupte ich, dass die Dreiecke LHK und lhk beide der Aufgabe genügen.

Denn wegen des rechten W. HLK ist $LK^2 = \square HKD = DE^2$, also $LK = DE$. Daher ist

$$\square LK \,.\, HD = \square EDH$$

und . . .
$$\begin{aligned} HK^2 + LK^2 + KD^2 &= 3LK^2 + HD^2 \\ &= 3DE^2 + HD^2 \\ &= \square NHD + HD^2 \\ &= \square NDH. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} HK^2 + LK^2 + KD^2 : \square LK \,.\, HD &= \square NDH : \square EDH \\ &= ND : DE = m : n. \end{aligned}$$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle lhk$ das Verlangte leiste.

Zusatz. Das kleinste Verhältniss $MD : DE$ wird so bestimmt: Es ist $MD = 2DB$, und das Quadrat von DB gleich dem dreifachen Quadrate von DE. Folglich ist das kleinste Verhältniss gleich dem Verhältnisse, welches zu einer Linie die doppelte Seite des Quadrats hat, das dem dreifachen Quadrate jener Linie gleich ist.

$$[2\sqrt{3DE^2} : DE].$$

Aufgabe 97. Fig. 122.

$$Pm - Pn : S^2 + n^2.$$

Von einem rechtwinkligen Dreieck ist gegeben: das Verhältniss des Rechtecks aus der Höhe und der Differenz der Abschnitte in der Hypotenuse zur Summe der Quadrate von der einen Kathete und von dem ihr nicht anliegenden Abschnitte der Hypotenuse; das Dreieck zu construiren.

Analysis. Es sey $\triangle ABC$ das gesuchte, in welchem $AC > AB$ sey. Fälle AD senkrecht auf BC und mache $CG = BD$, so ist DG der Unterschied der Abschnitte CD und DB. Daher ist der Annahme zufolge das Verhältniss

$$\square ADG : AC^2 + BD^2$$

gegeben. Nun ist nach *Lemma* 16, Zus. $AC^2 + BD^2 = DG^2 + 3AD^2$; mithin ist das gegebene Verhältniss

$$= \square ADG : DG^2 + 3AD^2.$$

Setze $\square HDG = DG^2 + 3AD^2$, so ist das obige Verhältniss

$$= \square ADG : \square HDG$$
$$= AD : DH.$$

Nimmt man also die Höhe AD als gegeben an, so ist die Linie DH gegeben. Weil nun $\square HDG = DG^2 + 3AD^2$, so ist, wenn man beiderseits DG^2 abzieht, $\square DGH = 3AD^2$. Folglich ist $\square DGH$ gegeben, mithin der Punkt G und der Abschnitt DG. Nun ist $\square DCG = \square BDC = AD^2$, mithin ist $\square DCG$ gegeben, folglich DC, also das Verhältniss $AD : DC$ und somit $\triangle ABC$ der Gattung nach.

Determination. Weil zur Construction erforderlich ist, dass $AD : DH$ in dem gegebenen Verhältnisse genommen, und die Linie DH in G so getheilt werde, dass $\square DGH = 3AD^2$ sey: so wird die Aufgabe nicht möglich seyn, wenn $3AD^2$ grösser ist als das Quadrat von der halben DH; und eine Gränze wird stattfinden, wenn der Punkt G die Mitte der DH ist.

Das Gränzverhältniss wird leicht auf folgende Weise gefunden. Es sey dasselbe gleich $AD : DH$. Halbirt man nun

DH in G, so ist der Annahme zufolge $3AD^2 = \square DGH = DG^2$. Wird nun AD gegeben, so ist $3AD^2$ bekannt, mithin DG^2, also die Linie DG und ihr Doppeltes DH.

Es ist nun zu untersuchen, ob $AD:DH$ ein grösstes oder kleinstes Verhältniss sey. Es werde also ein anderes $\triangle AFE$ von derselben Höhe AD construirt, in welchem $ED > DF$ sey. Mache $EM = DF$, so ist $DM = ED - DF$. Es werde also das Verhältniss

$$\square ADM : AE^2 + FD^2 \text{ mit } AD : DH$$

verglichen. Nun ist nach *Lemma* 16, Zus. $AE^2 + FD^2 = DM^2 + 3AD^2$. Vergleiche also die Verhältnisse

$$\square ADM : DM^2 + 3AD^2 \quad \text{und}$$
$$AD : DH, \text{ oder } \square ADM : \square MDH.$$

Beide Verhältnisse haben aber gleiche Vorderglieder; vergleiche also die Hinterglieder mit einander, nämlich $DM^2 + 3AD^2$ mit $\square MDH$. Auf beiden Seiten ziehe DM^2 ab, so ist $3AD^2$ mit $\square DMH$ zu vergleichen. Nun ist $3AD^2 = \square DGH$, und $\square DGH > \square DMH$, weil G die Mitte der DH ist; folglich ist

$$3AD^2 > \square DMH, \text{ also } DM^2 + 3AD^2 > \square MDH \text{ und}$$
$$\square ADM : DM^2 + 3AD^2 < \square ADM : \square MDH,$$

das ist $\square ADM : AE^2 + FD^2 < AD : DH$,
woraus hervorgeht, dass $AD : DH$ ein grösstes Verhältniss sey.

S y n t h e s i s. In einer geraden Linie nimm beliebig die gleichen Abschnitte AD und DK, errichte auf ihr die senkrechte DR und beschreibe um A mit AK einen Kreis, welcher DR in G schneide: so ist, wenn AG verbunden wird,

$$AD^2 + DG^2 = AG^2 = AK^2 = 4AD^2,$$

mithin $DG^2 = 3AD^2$. Ferner nimm in der Linie DR den Abschnitt $GH = DG$, so ist $\square DGH = DG^2 = 3AD^2$, und somit $AD:DH$ das grösste Verhältniss, welches gegeben werden darf. — Ist nun das gegebene Verhältniss gleich $AD:DH$, so nimm in der verlängerten DG den Punkt C so, dass $\square DCG = AD^2$ ist, verbinde AC und errichte AB senkrecht auf AC: so ist $\triangle ABC$ das verlangte. Denn weil $AD^2 = \square BDC$, und auch $AD^2 = \square DCG$, so ist $\square BDC = \square DCG$, also $BD = CG$ und $DG = CD - DB$. Daher ist nach *Lemma* 16, Zus. $AC^2 + BD^2 = DG^2 + 3AD^2$. Nun ist $3AD^2 = \square DGH$, also

$$DG^2 + 3AD^2 = \square HDG.$$

Folglich ist

$$\square ADG : AC^2 + BD^2 = \square ADG : \square HDG$$
$$= AD : DH.$$

Ist das gegebene Verhältniss grösser als $AD:DH$, so ist die Auflösung nicht möglich. Wenn aber das gegebene Verhältniss $m:n < AD:DH$ ist, so mache $AD:DR = m:n$, so ist $DR > DH$; daher ist $\square DGR > \square DGH$. Es lässt sich also die Linie DR in zwei Punkten M und m zu beiden Seiten des Punktes G so theilen, dass die Rechtecke DMR und DmR gleich $\square DGH$ oder gleich $3AD^2$ sind. In den Verlängerungen der Linien DM und Dm nimm die Punkte E und e so, dass die Rechtecke DEM und Dem gleich AD^2 sind. Verbinde EA und eA und errichte AF auf AE, und Af auf Ae senkrecht: ich behaupte, dass die $\triangle\triangle AEF$ und Aef beide der Aufgabe genügen.

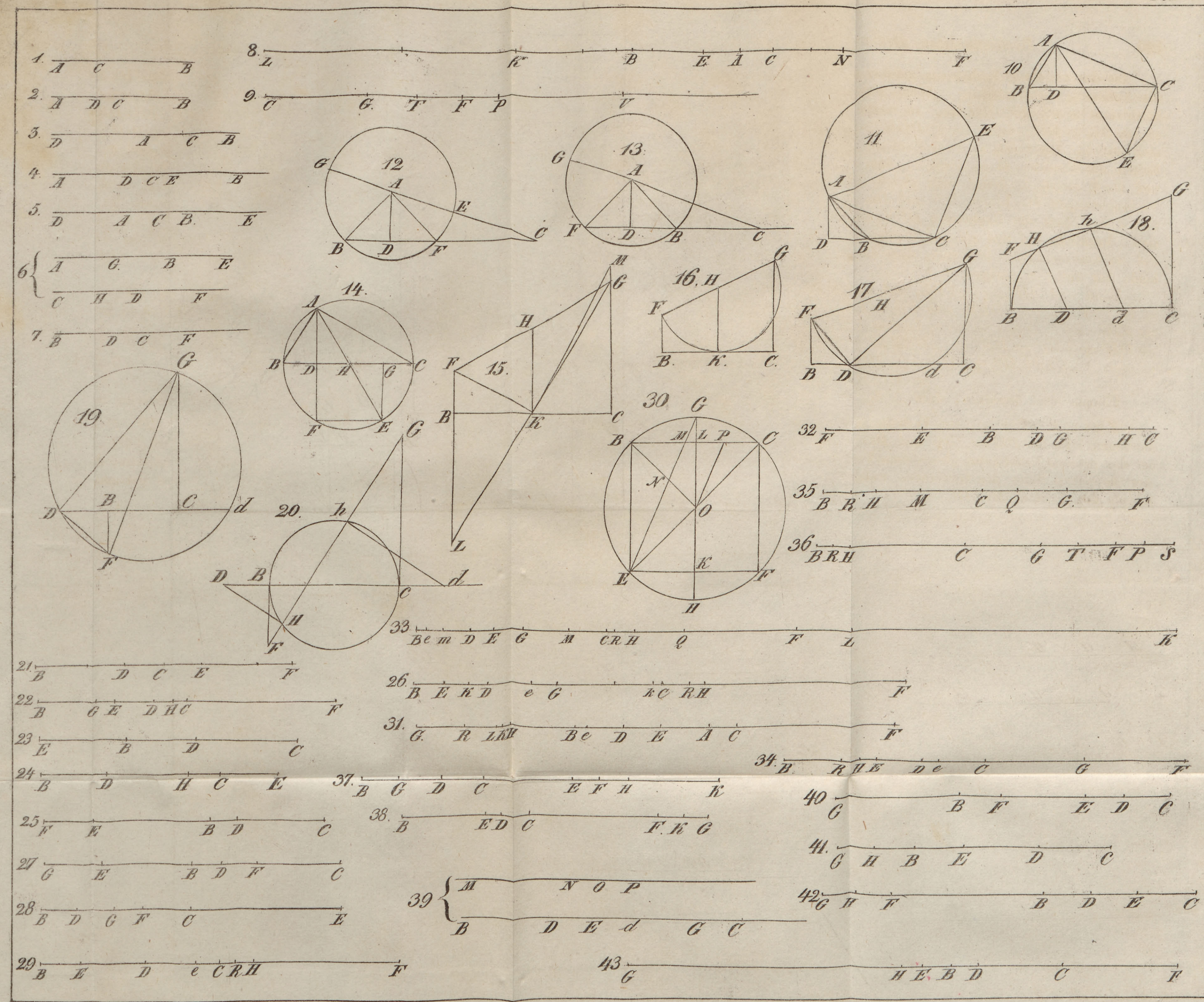
Denn weil $AD^2 = \square FDE$, und auch $AD^2 = \square DEM$, so ist $\square FDE = \square DEM$, also $FD = EM$, und folglich $DM = ED - DF$. Daher ist nach *Lemma* 16, Zus. $AE^2 + FD^2 = DM^2 + 3AD^2 = DM^2 + \square DMR = \square RDM$. Folglich ist

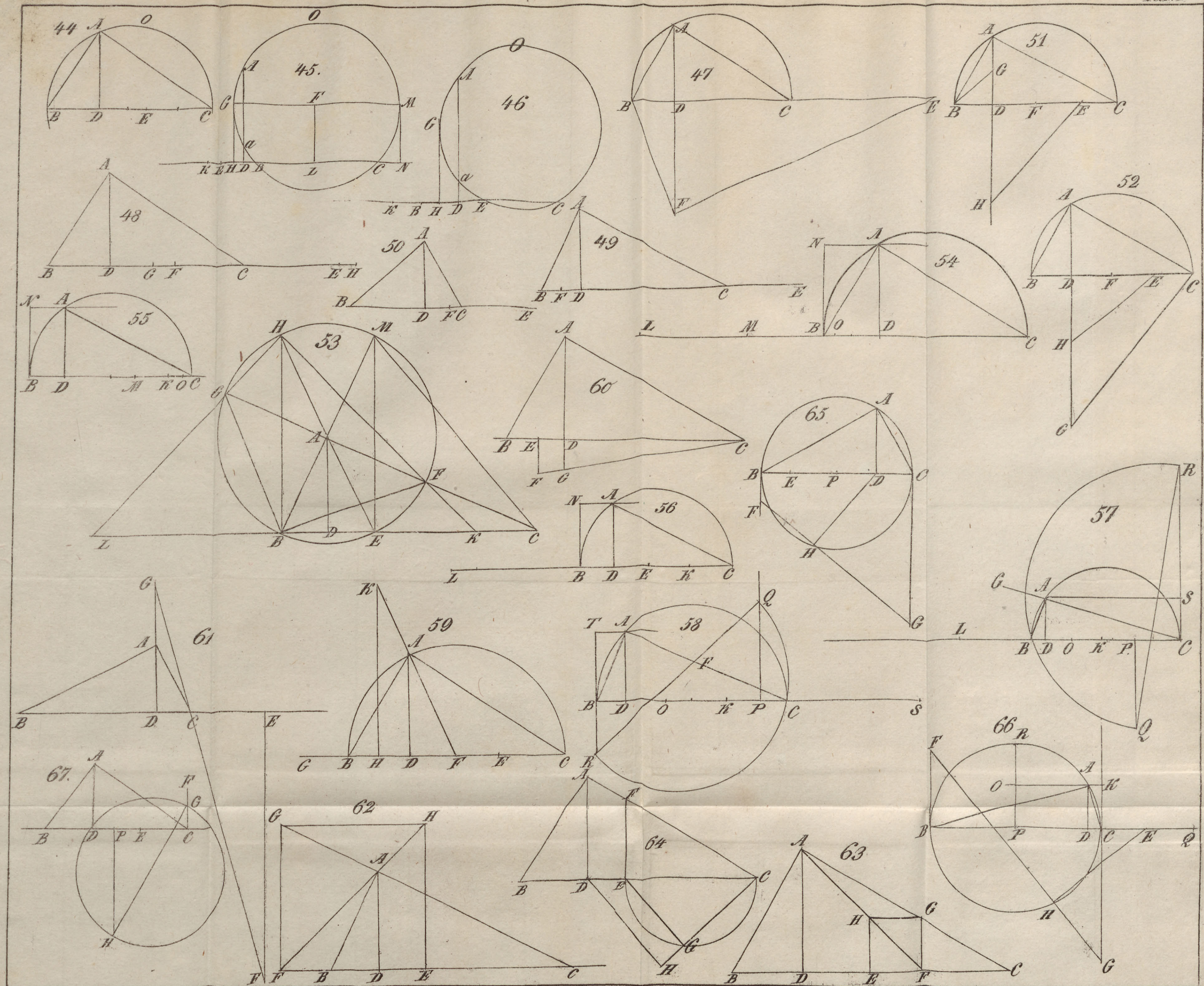
$$\square ADM : AE^2 + FD^2 = \square ADM : \square RDM$$
$$= AD : DR = m : n.$$

Ebenso wird bewiesen, dass $\triangle Aef$ dasselbe leiste.

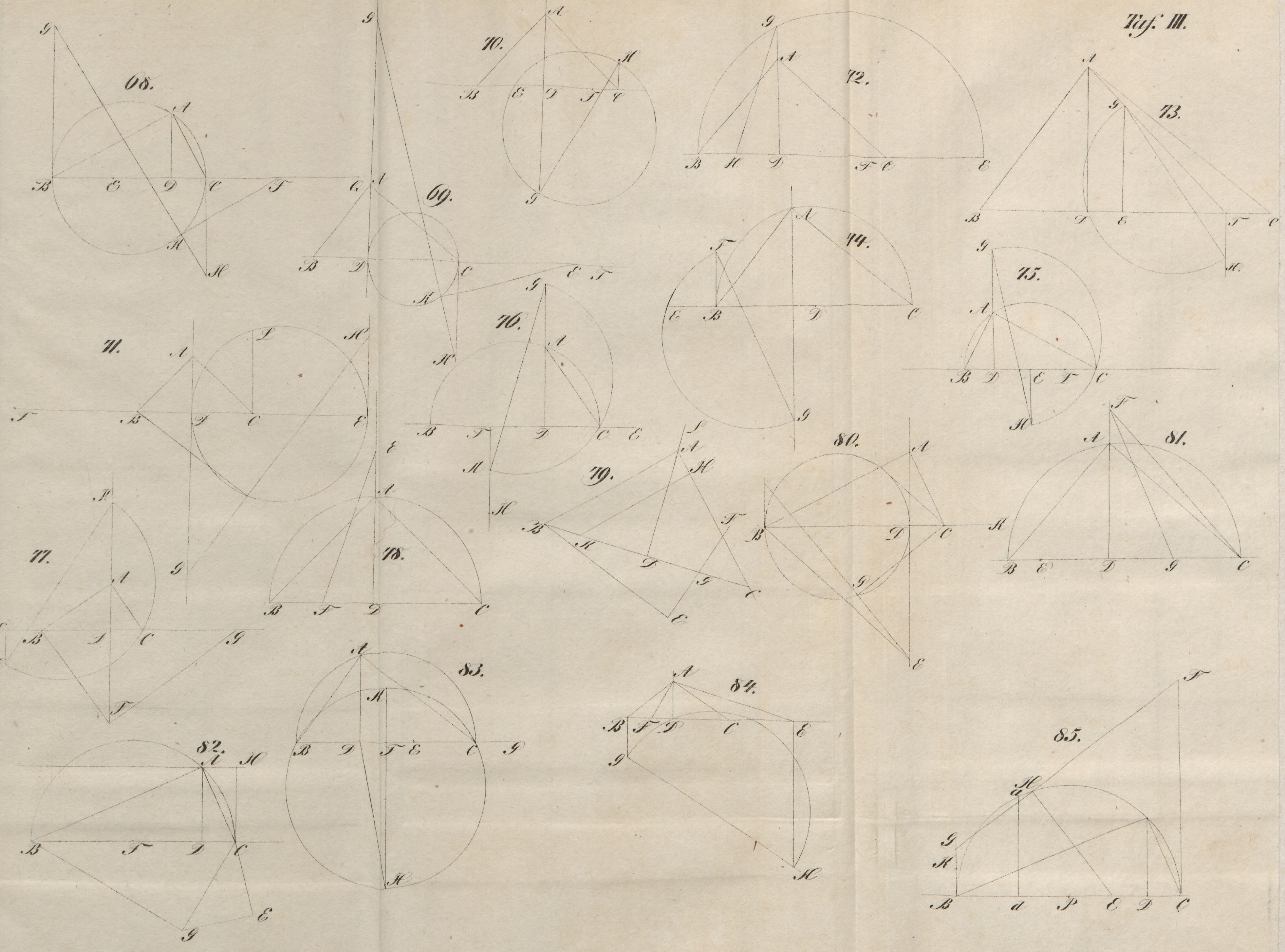
Zusatz. Das grösste Verhältniss $AD:DH$ wird so bestimmt. Es ist $DH = 2DG$ und $DG^2 = 3AD^2$. Folglich ist das grösste Verhältniss gleich dem Verhältnisse der AD zu der doppelten Seite des Quadrats, welches dreimal so gross ist als das Quadrat der AD.

$$[AD : 2\sqrt{3AD^2}].$$

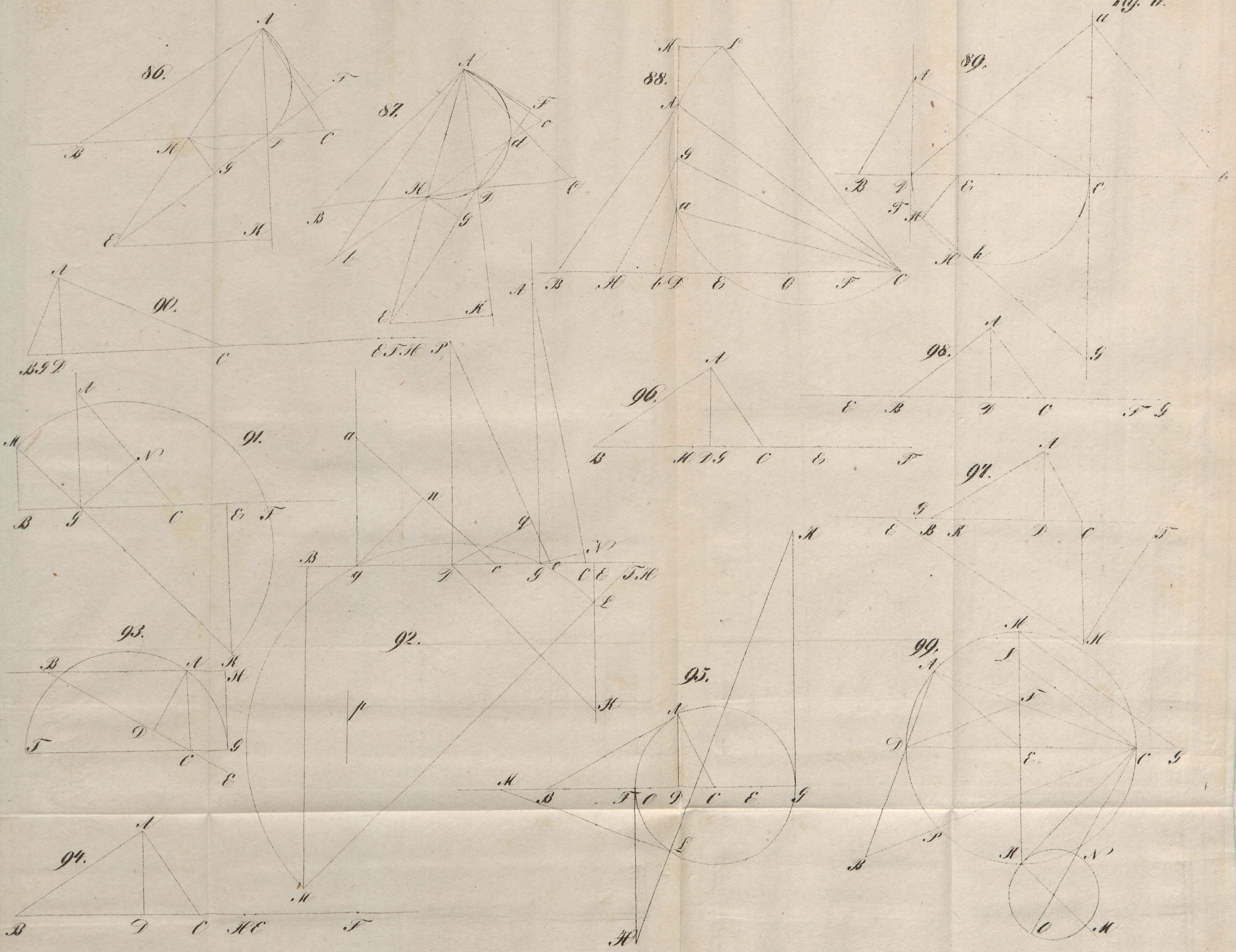


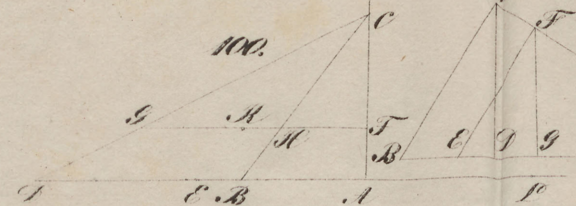

44
45.
46
47
51
48
50
49
52
54
55
53
60
65
56
57
61
59
58
66
67.
62
64
63

Taf. III.

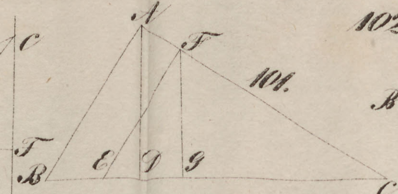


Taf. IV.

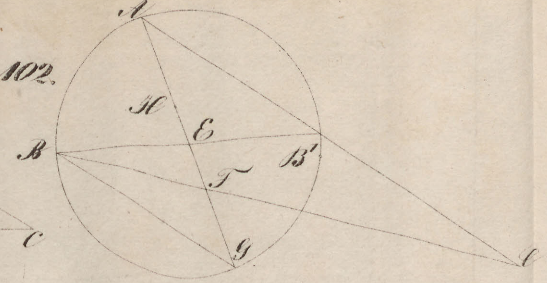




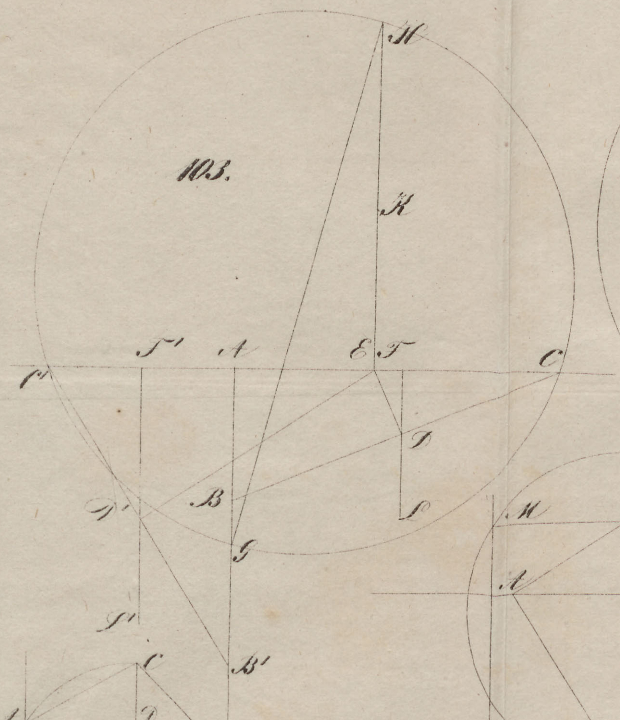
100.



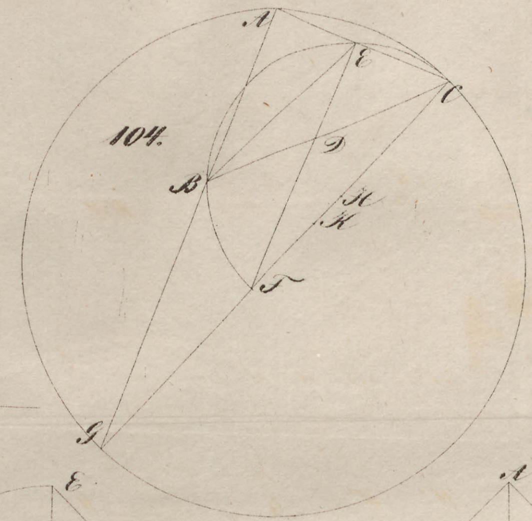
101.



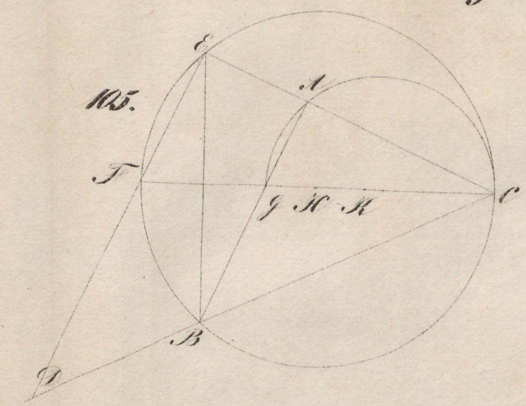
102.



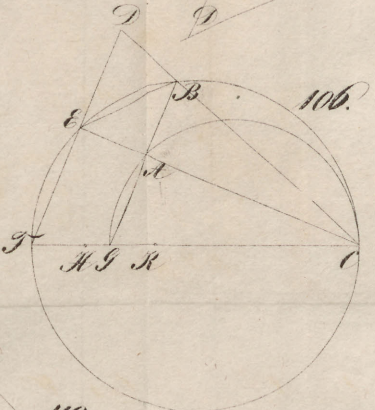
103.



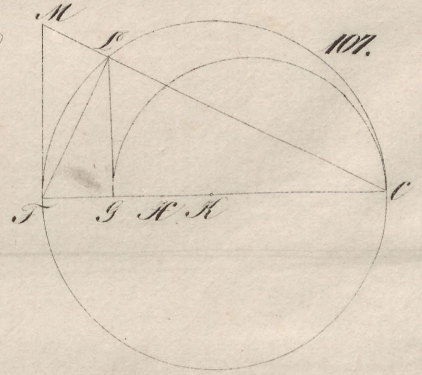
104.



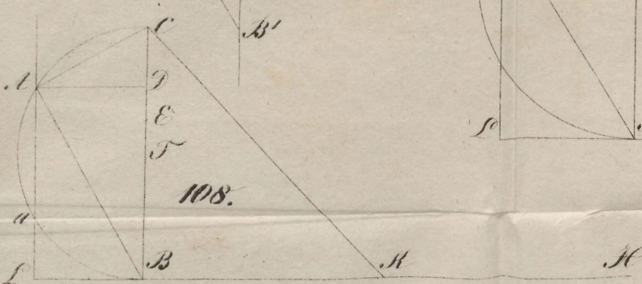
105.



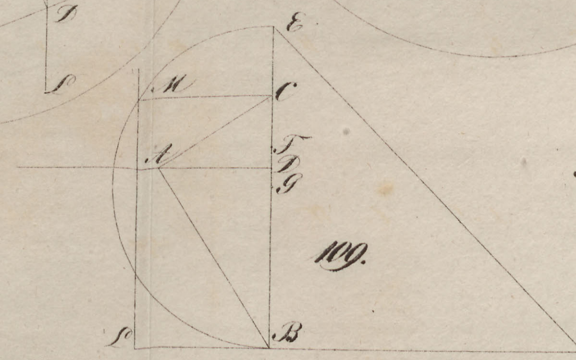
106.



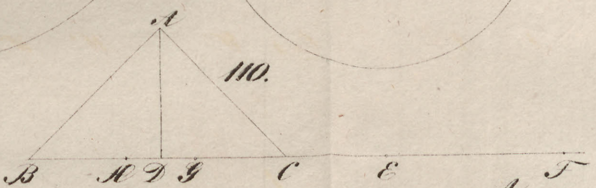
107.



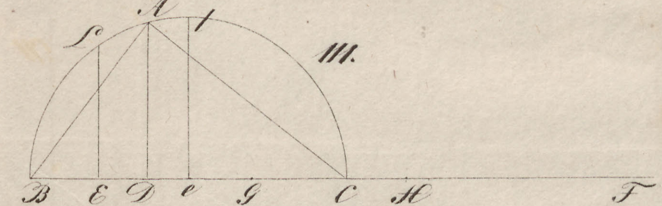
108.



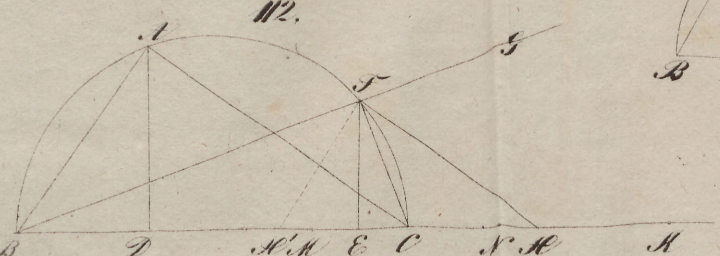
109.



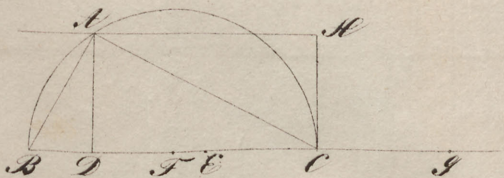
110.



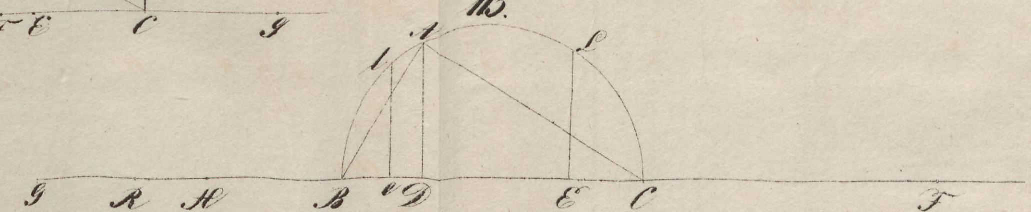
111.



112.



114.



115.

Taf. VI.