Die

Combinationslehre

und ihre

Anwendung auf die Analysis

zum

Gebrauche für Gymnasien und höhere Anstalten

abgefaßt

von

Franz Adrian Köcher,

der Philosophie Doktor, Mitglied der Militair-Examinations-Commission in Schlesien, Lehrer der Mathematik am Königl. Friedrichsgymnasium und an der Königl. Kriegsschule in Breslau.

Mit einem Kupfer.

Leipzig,
bei Paul Gotthelf Kummer.
1822.

Dem

Hoch- und Wohlgebornen

Herrn von Natzmer

General, Divisions-Commandant und Ritter hoher Orden

in

Ehrfurcht gewidmet

Hoch- und Wohlgeborner Herr General!

Die besondere Sorgfalt, mit der Dieselben das mathematische Studium unter der vortrefflichen Direktion des Herrn Majors von Stutterheim befördern und beleben, hat auch in mir, dem Sie den mathematischen Unterricht gütigst anvertraut haben, den lebhaftesten Wunsch erweckt, den Kriegsschülern auch dann noch, wenn sie die Kriegsschule verlassen und die vorgeschriebenen Gegenstände bereits erlernt haben, auf irgend eine Art zu nützen. So entstanden diese Blätter, die Frucht meines Privatfleißes.

Von dem lebhaftesten Gefühle der Dankbarkeit, daß Dieselben meine Bemühungen gütigst bemerkten, durchdrungen, nehme ich mir die Freiheit, Ihnen diese wenigen Blätter zuzueignen, und habe die Ehre mich zu nennen

Euer Hochwohlgeboren
des Herrn Divisions-Commandanten

gehorsamster
Köcher.

Vorrede.

Die Combinationslehre und ihre Anwendung auf die Analysis gehört unstreitig unter die schönsten Theile der Mathematik und weckt im vorzüglichen Grade das Denkvermögen. Bei der Größe ihres Umfanges schien es mir nicht überflüssig zu seyn, für die Schüler der ersten Gymnasialclasse eine Auswahl solcher Theile zu treffen, die, in stätem Zusammenhange sich aneinander reihend, allmählig von leichteren Gegenständen zu schwereren führen und zugleich die wichtigsten Sätze enthalten. Wirkliche Anwendung der vorgetragenen Sätze in Beispielen spricht den Geist der Schüler am besten an, gibt Fertigkeit in der Anwendung der vorgetragenen Lehren und macht dem Lernenden das deutlicher, was beim Durchlesen eines Satzes der Fassungskraft entgangen seyn könnte; aus diesem Grunde sind überall die nöthigen Beispiele aufgestellt worden, an denen das Vorgetragene geübt werden kann. Auch sind in diesem Wiederholungsbuche denn dies soll es für Schüler der ersten Classe seyn, nur solche Gegenstände aufgenommen worden, welche für Gymnasien in der Mathematik vorgeschrieben sind.

Leichtigkeit im Vortrage, Gründlichkeit in Beweisen und ungezwungene Entwickelung der auf einander folgenden Sätze war mein Streben; ob ich es erreicht habe, mögen meine Leser beurtheilen. Wenn auch nicht alles neu darin erscheint, so ist doch nicht alles andern Schriftstellern abgeborgt. Belehrung in bescheidener Form soll immer mit vielem Danke angenommen werden.

Breslau, den 13. Febr. 1822.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einleitung in die Combinationslehre . . . . §. 1 — 14
Erstes Kapitel. Permutationen mit Aufgaben hierüber . . . . §. 14 — 22
Zweites Kapitel. Combinationen . . . §. 22 — 25
Combinationen a ohne Wiederholung . . . §. 25 — 31
b mit unbedingter Wiederholung §. 31 — 34
c mit eingeschränkter Wiederholung §. 34 — 37
Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . . . §. 37 — 40
Drittes Kapitel. Variation . . . . . §. 40 — 43
Viertes Kapitel. Anwendung der Variation auf die Bildung der Potenz eines Binomiums . §. 43 — 56
Fünftes Kapitel. Anwendung des Binomialsatzes auf gebrochene und negative Exponenten, allgemeiner Beweis desselben . . . . §. 56 — 59
Sechstes Kapitel. Variationen zu bestimmten Summen . . . . §. 59 — 67
Siebentes Kapitel. Anwendung der Variationen zu bestimmten Summen auf den polynomischen Lehrsatz . . . . §. 67 — 72
Der polynomische Lehrsatz für beliebige Exponenten a mit indepedenter . . . . §. 72 — 74
mit rekurrirender Form . . . . §. 74 — 76
Achtes Kapitel. Anwendung der Variation auf die Division zusammengesetzter Formen . . §. 76 — 86

II. Abschnitt.

Erstes Kapitel. Entwickelung der Exponentialgrößen . . . . §. 86 — 110
Zweites Kapitel. Logarihmotechnie §. 110 — 131

III. Abschnitt.

Anwendung des Binomialsatzes auf die Berechnung trigonometrischer Größen . . . . §. 131 — 149

IV. Abschnitt.

Zurückführung der Exponentialgrößen mit unmöglichen Exponenten auf trigonometrische Ausdrücke, und Entwickelung einiger merkwürdigen Reihen aus denselben . . . . . . §. 149 — 155

V. Abschnitt.

Erstes Kapitel. Involutionen . . . §. 155 — 159
Zweites Kapitel. Anwendung der Involutionen auf zusammenhängende Brüche . . . §. 159 — 164
Drittes Kapitel. Involutorische Darstellung arithmetischer Reihen höheren Ranges, und involutorisch entwickelte Summenausdrücke dieser Reihen . . . . §. 164 — 178
Interpoliren und allgemeine Interpolationsformel §. 178 — 181
Allgemeine Formel für das n te Glied einer Reihe höheren Ranges aus der Interpolationsformel abgeleitet . . . . §. 181 — 182
Allgemeine Summenformel für n Glieder einer Reihe eines höheren Ranges involutorisch dargestellt . . . . §. 182 — 184
Summenformel für die r ten Potenzen aller natürlichen Zahlen . . . . §. 184 — 185

VI. Abschnitt.

Erstes Kapitel. Von den verschwindend kleinen und unnennbar großen Größen . . . §. 185 — 194
Zweites Kapitel. Anwendung solcher Größen auf die Summirung einiger besonderen Reihen §. 194 — 199

Anhang.

Umkehrung der Reihen . . . . §. 199 — 214

I. Abschnitt.

Einleitung in die Combinationslehre.

§. 1. Erklärung. Die Combinationslehre ist die Wissenschaft der Ordnung, welche bei den verschiedenen Arten, Dinge zusammenzugesellen, beobachtet werden muß.

§. 2. Erklärung. Die beliebig angenommenen Dinge, welche zusammengestellt werden, heißen Elemente, weil aus ihnen, wie aus einfachen Bestandtheilen, Zusammensetzungen gebildet werden.

§. 3. Erklärung. Die Art der Zusammensetzung besteht in einer unmittelbaren Folge der Elemente, und dieses bloße Nebeneinandersetzen ist das Zeichen ihrer combinatorischen Verbindung.

§. 4. Erklärung. Der Inbegriff mehrerer zusammengestellten Elemente heißt eine Complexion, und sind die Elemente nach einer bestimmten Ordnung zusammengestellt, so heißt dieser Inbegriff eine Form, z. B. abc, 134 sind Formen aus den Elementen a, b, c; 1, 3, 4.

§. 5. Erklärung. Eine Folge von Elementen ist eine Reihe von Elementen.

§. 6. Erklärung. Ist eine Reihe von Elementen gegeben, so lassen sich, in Beziehung auf diese Elemente, nur zwei Arten ursprünglicher Zusammenstellungen denken; entweder treten alle Elemente zugleich in die Form, und dann lassen sich die aus ihnen gebildeten Formen bloß durch die verschiedene Stellung der in ihnen enthaltenen Elemente unterscheiden, indem die Elemente, wiewohl deren in allen solchen Formen gleichviele und dieselben sind, in einer Form nicht durchgängig dieselbe Stelle einnehmen, wie in der andern; oder es treten nur immer einige der gegebenen Elemente in die Form ein, und dann unterscheiden sich die Formen dadurch, daß eine Form nicht durchgängig dieselben Elemente hat, wie die andere.

Das vollständige Aufsuchen aller Formen ausgegebener Elemente bei der ersten Voraussetzung heißt permutiren; bei der zweiten Voraussetzung aber combiniren, und nur diese beiden Operationen sind ursprünglich.

z. B. Die Formen abc, acb, cab, cba, bca, bac aus den Elementen a, b, c sind Permutationsformen.

Die Formen ab, ac, bc aber Combinationsformen.

§. 7. Erklärung. Die Regeln, nach denen sich alle mögliche Formen darstellen lassen, so daß keine Form doppelt gesetzt werde, auch nicht eine fehle, können nur auf der Ordnung beruhen, in welcher man allmählig die Elemente in die einzelnen Formen zusammenfügt.

§. 8. Erklärung. Die Elemente selbst, welche es auch seyn mögen, werden immer nach der Folge ihres Zählens, wie bei Zahlen 1, 2, 3, 4 .... 2c. oder nach der Folge ihres Schreibens, wie bei den Buchstaben einer Sprache a, b, c, d .... etc. eingetheilt in frühere oder niedrigere, in spätere oder höhere; 1 ist niedriger als 2, und dieses niedriger als 3, und so fort; eben so ist a niedriger als b, und b niedriger als c, und so weiter. Dieses Merkmal, die Zeit, ist das einzige, welches allen beliebig gewählten Elementen ohne Unterschied zukommt.

§. 9. Erklärung. Dasselbe Merkmal kommt auch den Stellen in der Form zu, die wir von der Linken gegen die Rechte zu steigend vorstellen wollen, so daß die erste Stelle links die niedrigste oder früheste, und die folgenden Stellen als spätere oder höhere erscheinen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

§. 10. Erklärung. Selbst die Formen können dieses Merkmal erhalten, und eine Form wird die niedrigste heißen, wenn sie aus den niedrigsten Elementen besteht. Höher heißt eine Form, wenn bei Besetzung gleich hoher Stellen in zwei Formen die eine in dieser Stelle ein höheres Element hat als die andere in derselben Stelle; unter den drei Formen 111, 123, 133 ist die erste die niedrigste, und die dritte höher als die zweite, weil an ihrer zweiten Stelle ein höheres Element 3 > 2 erscheint.

§. 11. **Erklärung.** Die Formen, welche gleichviele Elemente in sich fassen, heißen Formen derselben Classe, und die mit demselben Elemente anfangen, machen zusammen eine Ordnung, welche nach diesem Anfangselemente den Namen führt, z. B.

aaaaa
aaab
abb — heißen Formen der Ordnung a, aber nicht derselben Classe.

bbbb
bbbc
bbcc — heißen Formen der Ordnung b und Formen der vierten Classe.

ccc
ccd
cdd — heißen Formen der Ordnung c und Formen der dritten Classe.

§. 12. **Erklärung.** Eine Zusammenstellung der Formen nach Ordnungen heißt lexikographisch; eine Zusammenstellung der Formen nach der Zahl der Elemente, die in ihnen vorkommen, arithmographisch.

Z. B. Die im vorigen §. 11 aufgestellten Formen sind lexikographisch, nachstehende Formen aber arithmographisch geordnet.

a
b
c
ab
ac
bc
abc
abd
acd — und zugleich auch lexikographisch alle jene, welche zu derselben Classe gehören.

§. 13. Erklärung. Wird in einer Form ein Element oft wiederholt, so schreibt man es einmal mit einem rechts darüber stehenden Exponenten, welcher Wiederholungsexponent heißt. Z. B. statt aaabb schreibt man a^3b^2.

Erstes Kapitel.

Permutiren.

§. 14. Erklärung. Das Aufsuchen von Formen, die sich wenigstens durch die verschiedene Stellung zweier Elemente unterscheiden, heißt permutiren.

Dabei können zwei Fälle Statt finden, entweder sind alle Elemente verschieden, oder mehrere darunter identisch.

§. 15. Erklärung. Die Anzahl der Permutationsformen aus gegebenen Elementen abcde wird ausgedrückt durch NP (a, b, c, d, e) numerus permutationum (a, b, c, d, e).

§. 16. Satz. Sind n verschiedene Elemente gegeben, so ist die Anzahl der aus ihnen hervorgehenden Formen gleich einer Reihe von Faktoren, die mit dem Faktor 1 anhebt, in der jeder folgende Faktor um 1 zunimmt und mit einem Faktor schließt, welcher gleich ist der Anzahl der zu permutirenden Elemente. In Zeichen NP (a, b, c, d ..... n) $=$ 1. 2. 3. 4 ..... n.

Beweis. Für ein Element ist nur eine Permutationsform möglich, das Element selbst, weil von keiner höheren oder niedrigeren Stelle die Rede seyn kann. Tritt aber ein zweites Element hinzu, b zu a, so sind nun zwei Stellen eröffnet, ba, und weil das hinzugetretene Element beide Stellen durchlaufen kann, so sind dadurch zwei Permutationsformen möglich, ba und ab. Es geben also zwei Elemente 1. 2 Permutationsformen. Tritt noch ein drittes Element c hinzu, so erscheinen die beiden vorigen Formen ba und ab mit diesem Elemente c an der Spitze wieder, cba und cab, und da dies neue Element in jeder der beiden Formen drei Stellen durchlaufen kann, so gibt jede der vorigen zwei Formen drei neue Formen cba, bca, bac; cab, acb, abc. Es geben also drei Elemente 1. 2. 3. = 6 Formen. Kommt das vierte Element hinzu, so erscheint dieses Element an der Spitze aller sechs Formen wieder, und es werden in jeder dieser sechs Formen vier Stellen eröffnet, welche das Element durchlaufen kann. Jede dieser sechs Formen gibt also vier neue Formen, und man erhält 1. 2. 3. 4 = 24 Formen. Man darf also nur die Anzahl der vorigen Formen, wenn ein neues Element hinzutritt, durch die Anzahl der zu permutirenden Elemente multipliciren; denn drei Elemente geben 1. 2. 3 = 6 Formen, und kommt ein viertes Element hinzu, so sind der zu permutirenden Elemente vier, also auch 1. 2. 3 × 4 = 24 Formen. Hätte man nun aus n — 1 Elementen 1. 2. 3. 4 .... × (n — 1) Formen gebildet, und käme nun ein neues Element hinzu, so gäbe es n — 1 + 1 = n zu permutirende Elemente, und in jeden von den 1. 2. 3. 4 .... (n — 1) Formen würden n Stellen eröffnet, welche das neue Element durchliefe, und die Anzahl aller Formen von n Elementen wäre NP (a, b, c, d .... n) = 1. 2. 3. 4 ..... (n — 1). n.

§. 17. Lehrsatz. Gibt es unter n Elementen r identische, so ist die Anzahl der Permutationsformen NP $= \frac{1.2.3.4\ldots.n}{1.2.3\ldots.r}$.

D. h. die Anzahl der Permutationsformen ist = der vollen Permutationszahl, dividirt durch die kleinere Permutationszahl, wenn wir die Zahl der aus n Elementen hervorgehenden Formen die volle, und die Zahl der aus den r identischen hervorgehenden Formen, wo sie nicht identisch wären, die kleine Permutationszahl nennen.

Beweis. Es mögen a, a, a, a, b die Elemente seyn, unter denen vier identische vorkommen; wären sie nicht identisch, so gäben sie 1. 2. 3. 4 = 24 Permutationsformen; die Anzahl der Permutationsformen aber von den Elementen a, a, a, a, b, wenn sie alle verschieden wären, müßte nach §. (16) 1. 2. 3. 4. 5 = 120 seyn. Da aber die vier identischen a, a, a, a, statt 1. 2. 3. 4 = 24 Formen zu geben, nur eine Form geben aaaa, so kann das hinzutretende Element b in der einzigen Form baaaa fünf Stellen durchlaufen baaaa, abaaa, aabaa, aaaba, aaaab, und man erhält fünf Formen statt 120, also 24 mal weniger, d. h. gerade um so viel mal weniger, als diese identischen Elemente Formen gäben, wenn sie nicht identisch wären; man erhält demnach $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ = 5 Formen. Gäbe es nun n Elemente, unter denen r identische wären, so hätte man, wenn alle verschieden wären 1. 2. 3. 4.... n Formen, deren Zahl wir = p setzen wollen, so daß 1. 2. 3. 4..... n = p sey; die r identischen gäben, im Falle sie verschieden wären, 1. 2. 3... r Permutationsformen, welche wir = k setzen wollen. Die gesuchte Anzahl der Formen, welche wir mit x bezeichnen wollen, ist also um k mal kleiner als p; daher ist kx = p, und daraus folgt $x = \frac{p}{k}$, oder wenn man die Werthe setzt $x = \frac{1.2.3.4....n}{1.2.3.4...r}$.

§. 18. Satz. Sind unter n Elementen r identische von der einen und n — r von der andern Art, z. B. aaa bbbb, so ist die Anzahl der Permutationsformen

$$NP = \frac{1.2.3.4.....n}{1.2.3.4..n-r \times 1.2.3.4...r}.$$

Beweis. Wenn unter den n Elementen nur r identische wären, so wäre die Anzahl der Permutationsformen $= \frac{1.2.3.4.....n}{1.2.3.4....r}$, und diese Zahl sey = m; da aber noch $(n-r)$ identische sind, so muß diese Zahl der Permutationsformen m noch um $(1.2.3.4 \ldots n-r)$ mal geringer seyn nach §. (17.), als sie wäre, wenn die $n-r$ Elemente nicht identisch wären. Bezeichnen wir die Anzahl der Permutationsformen, die wir suchen, mit x, so ist $x.[1.2.3.4 \ldots (n-r)] = m$ oder

$$x = \frac{m}{1.2.3.4 \ldots (n-r)};$$ und war aber auch

$$m = \frac{1.2.3.4 \ldots n}{1.2.3.4 \ldots r},$$ also ist auch

$$x = \frac{1.2.3.4 \ldots n}{1.2.3.4 \ldots (n-r) \times 1.2.3.4 \ldots r}.$$

Zusaß 1. Eben so könnte bewiesen werden, daß, wenn es unter n Elementen m identische von einer, r identische von der zweiten und p identische von der dritten Art gäbe, die Anzahl der Permutationsformen

$$NP = \frac{1.2.3.4 \ldots n-1.n}{1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots r \times 1.2.3 \ldots p}$$ sey.

Beispiel. Die Anzahl der Permutationsformen von $a^m.b^r.c^p$, wenn wir $m+r+p=N$ setzen, ist

$$NP = \frac{1.2.3.4 \ldots (N-1).N}{1.2.3 \ldots m \times 1.2.3 \ldots r \times 1.2.3 \ldots p},$$ oder

$$NP = \frac{1.2.3 \ldots m.m+1.m+2.m+3 \ldots (N-1).N}{1.2.3 \ldots m \times 1.2.3.4 \ldots r \times 1.2.3 \ldots p},$$

oder $$NP = \frac{m+1.m+2.m+3 \ldots (N-1).N}{1.2.3 \ldots r \times 1.2.3 \ldots p},$$

weil jede kleinere Permutationszahl in der größeren enthalten ist, und $N > m$ seyn muß, da $N = m+r+p$ ist.

Zusaß 2. Wäre $m = r = p$, so wäre

$$NP = \frac{(m+1).(m+2).(m+3) \ldots (N-1).N}{(1.2.3 \ldots m)^2}.$$

Beispiel 1. Die Anzahl der Permutationsformen von $a^2b^2c^2$, wie $m = r = p = 2$ ist, wird demnach seyn NP $(a^2\, b^2\, c^2) = \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6}{(1.\ 2)^2} = 90$, weil $N = 2 + 2 + 2 = 6$ ist.

§. 19. Aufgaben über die Permutationen.

Aufgabe 1. Ein Freund lud fünf Gäste zu Tische; da jeder aus Bescheidenheit der letzte seyn wollte, so versprach er, so oft sie zu bitten, bis jede von den 6 Personen alle mögliche Verwechslungen würde erfahren haben. Wie oft mußte die Einladung geschehen?

Auflösung. 720 mal.

Denn NP $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6 = 720$.

Aufgabe 2. Ein Lehrer, welcher zwei gute Schüler aa, drei unruhige bbb und einen schläfrigen c hatte, nahm jeden Tag mit denselben eine Verwechselung vor, bis ihn endlich einer fragte, wann dieses Verwechseln aufhören würde, worauf er die Antwort erhielt, bis sie in der Ordnung cabbab sitzen würden. Die wievielte Versetzung ist diese?

Antwort. Die 54ste.

Beweis. Den Versetzungen der Ordnung c gehen die der Ordnung a und b voran. Von der Ordnung a bekommt man $\frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3} = 20$ Ordnungen; denn nimmt man das Element a hinweg, so ist NP (abbbc) $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 3} = 20$ Formen, denen a vorgesetzt werden kann.

Von der Ordnung b erhält man 30 Permutationsformen; denn nimmt man das eine b hinweg, so ist NP (aabbc) $= \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}{1.\ 2.\ 1.\ 2} = 30$, denen das Element b vorgesetzt wird. Es fängt also die 51te Form mit c an. Die Form cabbab kommt erst nach den Formen caabbb und cababb vor, und von diesen beiden kommt jede nur einmal vor, also ist die 54ste die Form cabbab.

Aufgabe 3. Wie viel Versetzungen lassen die Buchstaben lahnsbda eines zweisylbigen Wortes zu, dessen erste Sylbe einen Theil des menschlichen Körpers, die zweite aber das Fabrikat eines Webers, das Ganze aber einen Schmuck an demselben Theile des Körpers vorstellt?

Antwort. 20160.

Denn $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2} = 20160.$

Unter diesen Versetzungen ist eine, welche auch das Wort vollständig geordnet enthält.

Aufgabe 4. Wie ist die Ordnung der sitzenden, wenn c das achtemal vorsitzt, in der Angabe 2.?

Aufgabe 5. Wie viele Versetzungen lassen die Buchstaben des Wortes roma zu, und wie viele etwas bezeichnende Wörter erhält man durch die Realisirung der Versetzungen?

Aufgabe 6. Wie oft läßt sich das Produkt abcd in kleinere Produkte zu zwei Faktoren zerfällen?

Antwort. In drei, und zwar folgende: ab. cd, ac. bd, ad. bc.

Beweis. Das Produkt abcd können wir so betrachten, als gäbe es zwei identische Elemente ab, cd, da sie ihre Stelle nicht ändern und also nur eine Form abcd geben können. Da ferner jedes dieser Elemente aus zwei Elementen zusammengesetzt ist, die ebenfalls ihre Stelle nicht ändern, so haben wir so oftmal zwei identische Elemente, als es zusammengesetzte identische Elemente ab und cd gab. Die Anzahl der Permutationsformen, wenn keine dieser Beschränkungen Statt fände, wäre 1. 2. 3. 4, bei diesen Beschränkungen aber ist sie $\frac{1.2.3.4}{1.2.(1.2)^2} = 3.$

Um dies noch mehr einzusehen, mögen aus abcd alle Permutationsformen gebildet werden; so erhalten wir folgende 24 Formen.

1 dcab	9 dabc	17 dbca
2 cdab	10 adbc	81 bdca
3 cadb	11 abdc	19 bcda
4 cabd	12 abcd	20 bcad
5 dacb	13 dcba	21 dbac
6 adcb	14 cdba	22 bdac
7 acdb	15 cbda	23 badc
8 acbd	16 cbad	24 bacd

Ueberall finden wir zwei und zwei Formen, welche zwei identische Produkte geben, mit gleicher Stellung der zwei in ihnen befindlichen Faktoren und zwar dc. ab in Nr. 1 und 11; cd. ab und ab. cd in Nr. 2 und 12.)

Aufgabe 7. Wie oft läßt sich das Produkt abcdef in kleinere Produkte zu zwei Faktoren zerfällen?

Antwort. In 15.

Beweis. Die drei Produkte ab. cd. ef können als drei identische Elemente betrachtet werden, da bei der Realisirung der Permutationsformen aus den 6 Elementen wirklich Formen vorkommen, in denen diese kleineren Produkte so beisammen stehen, daß die in ihnen enthaltenen zwei Elemente ihre Stelle nicht verändern, und zwar kommen immer drei und drei solche Formen vor, wie oben zwei und zwei Formen in Nr. 1 und 11, Nr. 2 und 12 waren. Man kann demnach die zwei Faktoren eines jeden der drei Produkte ab. cd. ef als zwei identische Elemente betrachten. Ohne diese Beschränkungen wäre die Anzahl der Permutationsformen 1. 2. 3. 4. 5. 6, mit diesen Beschränkungen aber nach §. 18. Zusatz 2. $= \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3 \times (1.2)^3} = \frac{4.5.6}{(1.2)^3}$

$$= \frac{m+1.\,m+2.\,m+3 \ldots N-1.\,N}{(1.2)^m}, \text{ wo } N = 6,$$

$m = 3$, also $NP = \frac{4.\,5.\,6}{8.} = \frac{4.\,5.\,6}{4.\,2} = 15.$

Aufgabe 8. In wie viel Produkte, jedes zu drei Faktoren läßt sich das Produkt abcdef zerlegen?

Antwort. In 10.

Beweis. Da hier nur zwei Produkte sind, jedes zu drei Faktoren abc. def, so ist NP

$$= \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2 \times (1.2.3)^2} = \frac{3.4.5.6}{(1.2.3)^2}$$

$$= \frac{m+1.\ m+2.\ m+3 \ldots.\ N-1.\ N}{(1.\ 2.\ 3)^m} \text{ wo } m = 2$$

ist, da nur zwei Produkte abc. def da sind; daher ist $NP = \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6}{(1.\ 2.\ 3)^2} = \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6}{3.\ 6} = 10$. Die Produkte selbst sind folgende: abc. def, abd. cef, abe. cdf, abf. cde, acd. bef, ace. bdf, acf. bde, ade. bcf, adf. bce, aef. bcd.

Zusatz. Wenn demnach ein Produkt aus n kleineren Produkten, jedes zu m Faktoren, bestünde, so ließe es sich in $\frac{n+1.\ n+2.\ n+3 \ldots. (mn-1).\ mn}{(1.\ 2.\ 3. \ldots.\ m)^n}$ kleinere Produkte von m Faktoren zerlegen.

Aufgabe 9. Die Anzahl der Permutationsformen von folgenden Ausdrücken zu finden: a^n, $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$, $a^{n-4}b^4 \ldots\ldots a^{n-r}b^r$.

Auflösung. $NP(a^n) = 1$.

$NP(a^{n-1}b) = n$

$$NP(a^{n-2}b^2) = n\,\frac{(n-1)}{1.2.}$$

$$NP(a^{n-3}b^3) = n\,\frac{(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$NP(a^{n-4}b^4) = n.\,\frac{(n-1).(n-2.(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

$$NP(a^{n-r}b^r) = n.\frac{(n\text{-}1).(n\text{-}2).(n\text{-}3).(n\text{-}4)\ldots.(n\text{-}r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5 \ldots.\ r-1.\ r}.$$

Beweis. Nach §. 17, ist

$$NP(a^n) = \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots .\ n}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ \ldots .\ n}. = 1.$$

$$NP(a^{n-1}b^1) = \frac{1.2.3.4\ldots.(n-1).\ n}{1.2.3.4\ldots.n-1 \times 1} = \frac{n}{1} = n.$$

$$NP(a^{n-2}b^2) = \frac{1.2.3.4\ldots.(n-2).(n-1).\ n}{1.2.3.4\ldots.n-2 \times 1.2}.$$

$$= \frac{(n-1).\ n}{1.\ 2}.\ \text{§. 18.}$$

$$NP(a^{n-3}b^3) = \frac{1.2.3.4.5\ldots.(n-3).(n-2).(n-1).n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots.n-3 \times 1.\ 2.\ 3}.$$

$$= \frac{(n-2).\ (n-1).\ n}{1.\ 2.\ 3}.\ \text{§. 18.}$$

$$NP(a^{n-4}b^4) = \frac{1.2.3.4.5\ldots.(n\text{-}4).(n\text{-}3).(n\text{-}2).(n\text{-}1).n}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots.n-4 \times 1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

$$= \frac{n.\ (n-1).\ (n-2).\ (n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.\ \text{§. 18.}$$

$$NP = (a^{n-r}b^r) = \frac{1.2.3.4.5\ldots.(n\text{-}r).(n\text{-}r+1)\ldots(n\text{-}1).n}{1.2.3.4.5\ldots.n-r \times 1.2.3\ (r-1).r}.$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots.(r-1).\ r}.\ \text{§. 18.}$$

Zusatz 3. Die wirkliche Realisirung dieser Formen geschieht durch successive Entwickelung wie in §. 16. Wäre die Anzahl der Permutationsformen von folgenden Elementen zu suchen 1, 2, 3, 4, 5, so hätte man nach §. 16) von dem ersten Elemente die Form

1) 1 . . . . = 1

von zweien 2) 12, 21 . . . . = 1. 2

von dreien 3) $\left\{\begin{array}{l} 312,\ 321 \\ 132,\ 231 \\ 123,\ 213 \end{array}\right\} \ldots = 1.\ 2.\ 3$

von vieren 4) $\left\{\begin{array}{l} 4312, 4132, 4123, 4321, 4231, 4213 \\ 3412, 1432, 1423, 3421, 2431, 2413 \\ 3142, 1342, 1243, 3241, 2341, 2143 \\ 3124, 1324, 1234, 3214, 2314, 2134 \end{array}\right\}$

und so fort.

§. 20. Aus der wirklichen Realisirung der Permutationsformen lassen sich folgende Zusätze ableiten.

1. Alle Permutationsformen aus denselben Elementen, wie in Nr. 4. Zusatz 3., geben einerlei Summe.

2. Jedes Element kommt in einer Vertikalreihe so oft vor, als in jeder andern.

3. Ist daher auch die Summe in allen Vertikalreihen gleich.

4. Die Summe aller Permutationsformen aus gegebenen Elementen ist gleich der Summe einer einzigen Form, multiplicirt mit der Anzahl aller Permutationsformen, d. i. mit der Versetzungszahl. Heißt nun die Summe in einer Form S, und die Anzahl der Formen n, so ist diese Summe $= n. S$.

5. Setzt man alle Permutationsformen in Nr. 4. vertikal unter einander, so ist, wenn wir die Anzahl aller zu permutirenden Elemente m nennen, die Summe einer jeden Vertikalreihe, da in einer jeden dasselbe Element gleichvielmal vorkommt, $= \frac{nS}{m}$; denn es gibt soviel Vertikalreihen, als Elemente zu permutiren sind, jede Vertikalreihe gibt eine gleiche Summe, nach (3), und die Summe aller Vertikalreihen ist gleich der Summe aller Formen $= nS$; daher gibt $\frac{nS}{m}$, d. h. die Summe nS, dividirt durch die Anzahl der Vertikalreihen, welche gleich ist der Anzahl der zu permutirenden Elemente, die Summe einer Vertikalreihe.

In Nr. 4 ist $m = 4$, $S = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$ und $n = 24$; daher ist $nS = 24. 10 = 240$ und $\frac{nS}{m} = \frac{240}{4} = 60$.

Aufgabe 1. Wie viel beträgt die Ziffernsumme in allen Permutationsformen aus den Elementen 1, 2, 2, 3, 4?

Antwort. 720.

Denn $S = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 12$
$n = \frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5}{1.\,2} = 60$ nach §. 17. also $nS = 12.\,60$
$= 720.$

Aufgabe 2. Wie viel beträgt jede Vertikalreihe, wenn die Formen unter einander stehen?

Antwort. 144. weil hier $m = 5$.

Zweites Kapitel.

Combiniren.

§. 22. Erklärung. Das Combiniren ist das Aufsuchen von Formen, welche sich dadurch unterscheiden, daß in der einen Form nicht durchgängig dieselben Elemente sind, wie in der andern.

Dabei kommt es also nicht auf die verschiedene Stellung der Elemente in der Form, sondern bloß auf die Verschiedenheit der Elemente an.

Die Formen, welche aus gegebenen Elementen durch Combiniren entstehen, werden in Classen eingetheilt, und die Anzahl der Elemente in einer Form bestimmt den Grad der Classe.

Die Classe wird durch den Buchstaben C bezeichnet, worüber der Grad der Classe gesetzt wird, so daß $\overset{3}{C}(1, 2, 3, 4, 5)$ alle mögliche Combinationen zur dritten Classe aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 bedeutet, und jede daraus hervorgehende Form drei Elemente enthält.

Zusatz. Da es bei Combinationsformen nicht auf die Folge der zusammengesetzten Elemente ankommt, so darf man beim Combiniren dies als die einfachste Regel aufstellen, daß nie ein höheres Element einem früheren vorangehe.

§. 23. Erklärung. Bei Aufsuchung der Combinationsformen aus gegebenen Elementen sind zwei Wege möglich, der eine ist auf Subordination, der andere auf Coordination der Formen gegründet.

Die Subordination (das Unterordnen der Formen) besteht in einem successiven Fortrücken von Formen einer niederen Classe zu den nächst höheren, indem man aus Formen der ersten Classe durch Vorsetzen eines Elementes, das jedoch nicht höher seyn darf als das Anfangselement, die Formen der nächst höheren Classe bildet z. B.

$\overset{1}{C}$ (1, 2, 3, 4) gibt 1, 2, 3, 4

$\overset{2}{C}$ (1, 2, 3, 4) gibt 11, 12, 13, 14
22, 23, 24
33, 34
44

$\overset{3}{C}$ (1, 2, 3, 4) gibt 111, 112, 113, 114, 122, 123,
124, 133, 134, 144,
222, 223, 224, 233, 234, 244, 333,
334, 344, 444.

Dabei kann Wiederholung eines und desselben Elementes in einer und derselben Form unbedingt gestattet seyn, in welchem Falle jedes Element so oft in die Form gesetzt werden kann, bis der Grad der Classe erreicht ist, wie in den Formen 111, 222, 333, 444 bei $\overset{3}{C}$; oder die Wiederholung kann bedingt gestattet seyn, wo jedes Element so oft in die Form gesetzt wird, als die Bedingung vorschreibt; oder die Wiederholung ist gar nicht gestattet, und dann folgen die Elemente in der natürlichen Ordnung.

§. 24. Bei der Coordination bildet man alle Formen von einer und derselben Classe; jedoch wird die niedrigste Form dadurch gebildet, daß man die niedrigsten Elemente so lange setzt, bis der Grad der Classe erreicht ist. Um eine successiv höhere Form zu bilden, wirft man das Element in der letzten Stelle hinaus und setzt dafür ein nächst höheres, und zwar so lange, bis in diese

Stelle kein höheres Element mehr gesetzt werden kann, weil kein höheres mehr vorhanden ist; hierauf geht man zur vorletzten Stelle, wirft das Element allda hinaus, und setzt dafür ein nächst höheres, die letzte Stelle aber besetzt man mit demselben, und so fort. Z. B. die Combinationsformen aus den Elementen 1, 2, 3, 4 zur dritten Classe lassen sich coordinirend so darstellen

$\overset{3}{C}(1, 2, 3, 4)$ gibt 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124,
133, 134, 144, 222, 223, 224, 233,
234, 244, 333, 334, 341, 444.

Dabei ist Wiederholung entweder unbedingt gestattet, oder bedingt, oder gar nicht.

1. Combinationen ohne Wiederholung.

§. 25. Satz. Sind n Elemente gegeben, so ist die Anzahl aller Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholung $= \frac{n(n-1)}{1.2}$.

Beweis. Es mögen die gegebenen Elemente a, b, c, d, e, f . . . . . n seyn. Man sondere zuerst das erste Element a ab, um es mit den übrigen (n — 1) Elementen zu verbinden a [b, c, d, e, f . . . . n — 1]
eben so b; b [a, c, d, e, f . . . . n — 1]
dann eben so c; c [a, b, d, e, f . . . . n — 1]
und so sondere man nach und nach alle n Elemente ab, um jedes derselben mit den (n — 1) übrigen Elementen zu zweien und zweien zu verbinden: so werden auf diese Art alle n Elemente einzeln mit (n — 1) Elementen zu zweien verbunden, und daher muß die Verbindung zu zweien, welche Binionen heißen n (n — 1) geschehen; in dieser Anzahl von Binionen kommt aber jede Binion zweimal vor, ab und ba, ac und ca, da und ad; und da eine bloße Versetzung beim Combiniren keine neue Form gibt, so muß die durch n (n — 1) ausgedrückte Anzahl von Binionen, da jede zweimal vorkommt, durch 2 di-

vidirt werden, und die Anzahl der Binionen ohne Wiederholung aus n Elementen ist $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

§. 26. Satz. Die Anzahl der Combinationsformen zur dritten Classe ohne Wiederholung aus n gegebenen Elementen ist $= \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$.

Beweis. Es mögen n Elemente zu dreien ohne Wiederholung zu verbinden seyn, so bilde man zuerst alle Verbindungen zu zweien, deren es $\frac{n(n-1)}{1.\,2}$ gibt. Diese Verbindungen zu zweien ab, ac, ad etc. werden mit den übrigen Elementen, deren es nun $n-2$ gibt, verbunden, und zwar

ab [c, d, e.... n — 2]	bc [a, d, e.... n — 1]
ac [b, d, e.... n — 2]	bd [a, c, e.... n — 1]
ad [b, c, e.... n — 2]	etc.

Es werden also alle Binionen, deren es $\frac{n(n-1)}{1.\,2}$ gibt, mit $n-2$ Elementen verbunden, und die Anzahl der daraus entstandenen Ternionen ist $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2}$. Jede Ternion aber kommt dreimal vor, abc, acb, bca, und da Versetzungen beim Combiniren nach §. 22. keine neue Form geben, so muß man die Anzahl der Ternionen, da jede dreimal vorkommt, noch durch drei dividiren, so daß die Anzahl aller Ternionen ohne Wiederholung $= \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,1.\,3}$ ist.

§. 27. Satz. Die Anzahl aller Quaternionen ohne Wiederholung aus n Elementen ist $= \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}$.

Beweis. Es mögen alle Ternionen aus n Elementen schon gebildet seyn; ihre Anzahl ist $= \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$ und zwar abc, abd, abe etc. acd, ace etc. bcd, bce etc. Verbindet man jede dieser $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3.}$ Ternionen mit den übrigen $n-3$ Elementen, nämlich

abc [d, e, f.... $n-3$] acd [b, e, f..... $n-3$]
abd [c, e, f.... $n-3$] ace [b, d, f.... $n-3$]
abe [c, d, f.... $n-3$] etc.
etc. bcd [a, e, f.... $n-3$]

so werden alle $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$ Ternionen mit $n-3$ Elementen verbunden $\frac{n.\,n-1.\,n-2.}{1.\,2\,\,3}\,n-3$ Quaternionen geben; aber jede Quaternion kommt viermal abcd, abdc, acdb, bcda, und da Versetzungen beim Combiniren keine neue Form geben, nach §. 22, so muß die Anzahl der Quaternionen, da jede viermal vorkommt, noch durch 4 dividirt werden, so daß die Anzahl der Quaternionen aus n Elementen ohne Wiederholung $= \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}$ ist.

Zusatz 1. Diese Schlüsse können für jede Classe von Combinationen fortgesetzt werden, und da bei jedem dieser Ausdrücke der erste Faktor im Zähler die Zahl der Elemente, der höchste Faktor im Nenner der Grad der Classe, der subtraktive Theil im Zähler zuletzt mit einer Zahl sich endiget, die um eine Einheit kleiner ist als der höchste Faktor im Nenner, so können wir die Combinationsformen der p ten Classe aus n Elementen nach diesen Bemerkungen $= \frac{n.\,n-1.\,n-2.n-3\,....\,n-(p-1)}{1.\,2.\,3.\,4\,.........\,p}$ setzen.

Zusatz 2. Auch haben wir gesehen, daß die Bildung aller Combinationsformen aus n Elementen zu irgend einer Classe, z. B. zur vierten, dadurch hervorging, daß wir die Anzahl der Combinationsformen zur nächst niedrigen Classe, hier zur dritten, nämlich $\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}$ mit den $n-3$ übrigen Elementen verbanden, wodurch aber jede Form der vierten Classe so oft mal sich wiederholte, als der Grad der Classe ist, daher mußte auch die Anzahl der Formen $\frac{n.\,n-1.\,n-2.}{1.\,2.\,3}\;n-3$ durch 4 noch dividirt werden, d. i. durch den Grad der Classe.

Zusatz 3. Die Anzahl der Combinationsformen aus gewissen Elementen a, b, c ... etc. zu irgend einer Classe möge durch C mit darüber gesetztem Grade und darunter gesetzten Elementen bezeichnet werden, z. B. $\frac{\overset{r}{C}}{a\ldots.n}$ heißt alle Combinationsformen zur rten Classe aus den Elementen a, b, c....n.

Satz 28. Die Anzahl der Combinationsformen aus n Elementen zur rten Classe ist $\frac{\overset{r}{C}}{a\ldots.n}$

$$= \frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots.n-r+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots r}.$$

Beweis. Es mögen alle Formen aus n Elementen zur $(r-1)$ten Classe gebildet seyn, und es sey $r-1=p$, so ist $\frac{\overset{p}{C}}{a\ldots.n} = \frac{n.n-1.\,n-2\ldots n-(p-1)}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots p}$. §. 27. Zusatz 1, um die rte Classe zu bilden, das ist $p+1$, weil $r-1=p$, oder $r=p+1$ ist, verbinden wir alle Formen der pten Classe mit den übrigen $(n-p)$ Elementen, wodurch wir Formen der $(p+1)$ten Classe erhalten §. 23., und dadurch ist $\frac{\overset{p+1}{C}}{a\ldots.n}$

$$= \frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots.\,n-(p-1).}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots p}\,(n-p).$$ Da

aber jede Form so oftmal vorkommt, als der Grad der Classe anzeigt, nach Zusatz 2. §. 27., so muß man, nach eben diesem Zusatze, den Ausdruck

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2\,\ldots\ldots n-(p-1).}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots p}\; n-p$$ noch durch

den Grad der Classe $p+1$ dividiren; und dem zu Folge

ist $$\frac{\overset{p+1}{C}}{a\ldots\ldots n} = \frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots\ldots[n-(p-1)].(n-p)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots p.\,(p+1)}.$$

Nun ist $p+1=r$ und $p-1=r-2$, daher ist

auch $$\frac{\overset{r}{C}}{a\ldots\ldots n} = \frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots\ldots n-r+2.\,n-r+1}{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\ldots\ldots r-1.\,r}$$

oder auch $$\frac{\overset{r}{C}}{a\ldots\ldots n} = \frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots\ldots n-r+1}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots r},$$

wo die Faktoren $n-r+2$ und $r-1$ als frühere oder vorhergehende Faktoren ohnehin darunter verstanden werden.

Zusatz. Hätte man aber aus $n-1$ Elementen Combinationsformen zur $(r-1)$ten Classe zu bilden, so dürfte man in die Formel §. 28. nur $n-1$ und $r-1$ für n und r setzen, und es wäre

$$\frac{\overset{r-1}{C}}{a\ldots\ldots n-1} = \frac{n-1.\,n-2.\,n-3\ldots\ldots n-r+1}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots r-1},$$

denn der letzte Faktor $n-r+1$ geht in folgenden über: $n-1-(r-1)+1 = n-1-r+2 = n-r+1$.

Nun können $n-1$ Elemente aus n Elementen dadurch entstehen, daß man entweder das erste Element a, oder das zweite b, oder das dritte c, oder d etc. absondert. Macht man nun aus den $n-1$ übrigen Elementen Combinationsformen zur $r-1$ten Classe, so erhält man Formen der $r-1$ten Classe die kein a, ferner auch auf eben diese Art aus $n-1$ Elementen Formen, die kein b, und eben so aus $n-1$ Elementen die kein c enthalten ꝛc. Verbände man nun mit allen Formen, die kein a enthalten, dieses Element a, mit allen Formen, die kein b enthalten, dieses Element b, mit allen, die kein c enthalten, dieses Element c und so fort, bis man alle n Elemente mit solchen Formen der $r-1$ten Classe verbunden hätte, so würde jede Combinationsform, da sie nun ein Element mehr enthält, um einen Grad höher, also der $r-1+1=r$ten Classe, und man hätte nun $\frac{n-1.\,n-2.\,n-3\ldots n-r+1.}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots r-1}\,n$ Formen der $r$ten Classe, deren Anzahl durch $N\overset{r}{C}$ bezeichnet werden mag, so daß $N\overset{r}{C}=\frac{n-1.\,n-2.\,n-3\ldots n-r+1.\,n.}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r-1}$

Es ist aber auch $\frac{n-1.\,n-2.\,n-3\ldots(n-r+1).\,n}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r-1}$ $=\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3\ldots(n-r+1).\,r}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r-1.\,r}$, weil wir ohne Aenderung des Werthes Zähler und Nenner mit r multipliciren können; dem zu Folge ist nun $N\overset{r}{C}$ $=\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3\ldots(n-r+1).\,r}{1.\,2.\,3.\,4.\,5\ldots\ldots r-1.\,r}$. Nun ist aber nach §. 28. $\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3\ldots n-r+1}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots r}$ $=\frac{\overset{r}{C}}{a\ldots n}$; also auch $N\overset{r}{C}=r.\,\frac{\overset{r}{C}}{a\ldots n}$ d. h. Die Anzahl der Combinationsformen zur $r$ten Classe ist in diesem Falle gleich der Anzahl aller Combinationsformen zur $r$ten Classe aus n Elementen, wenn diese Anzahl r mal genommen wird; oder man erhält die Combinationsformen aus n Elementen zur $r$ten Classe r mal, d. i. so oftmal, als der Grad der Classe anzeigt.

Beispiel. Man bilde aus den übrigen Elementen, wenn man von diesen Elementen a, b, c, d, e, immer eins absondert, Formen zur dritten Classe. Diese sind:

Nr. 1.	Nr. 2.	Nr. 3.	Nr. 4.	Nr. 5.
bcd	acd	abd	abc	abc
bce	ace	abe	abe	abd
bde	ade	ade	ace	acd
cde	cde	bde	bce	bcd
$\overset{\frown}{a}$	$\overset{\frown}{b}$	$\overset{\frown}{c}$	$\overset{\frown}{d}$	$\overset{\frown}{e}$

Wir haben also aus jeden 5 — 1 Elementen vier Formen zur dritten Classe erhalten, wie es die Formel $\frac{n.\ n-1.\ n-2}{1.\ 2.\ 3}$ in §. 26. angibt, wo $n = 4$ hier bedeutet, also $\frac{4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3} = 4$. Nun verbinden wir mit den Formen, die kein a enthalten, dieses a mit denen, die kein b enthalten, b etc. doch so, daß keine Form doppelt vorkommt, so läßt sich, wie wir deutlich sehen, a nur mit den Formen in Nr. 1. verbinden, denn die Formen cde in Nr. 2. und bde in Nr. 3, bce in Nr. 4, bcd in Nr. 5. wiederholen sich ja in Nr. 1; diese Formen realisirt sind:

abcd	abcd	abcd	abcd	abce
abce	abce	abce	abde	abde
abde	abde	acde	acde	acde
acde	bcde	bcde	bcde	bcde;

Wir haben nun $4.\ \frac{\overset{4}{C}}{a,\ b,\ c,\ d,\ e} = 4.\ \frac{[5.\ 4.\ 3.\ 2]}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ $= 4.\ 5 = 20$ Formen erhalten.

§. 29. Dieses Verfahren läßt sich nun überhaupt durch folgende Gleichung darstellen.

$$\frac{a\overset{r-1}{C}}{b,c,d,\ldots n} + \frac{b\overset{r-1}{C}}{a,c,d\ldots n} + \frac{c\overset{r-1}{C}}{a,b,d\ldots n} \ldots,\ \text{etc. etc.}$$

$$= r.\ \frac{\overset{r}{C}}{a,b,c,d\ldots n}.$$

§. 30. Lehrsatz. Man findet die Anzahl aller Combinationsformen zur $r$ten Classe aus n Elementen, wenn man zuerst aus $n-1$ Elementen alle Formen der $r$ten Classe, dann aus denselben $n-1$ Elementen alle Formen zur $r-1$ten Classe bildet, mit denen das ausgeschiedene Element verbunden wird, und diese Anzahl der Formen der 4ten Classe zu der vorigen Anzahl der Formen der 4ten Classe addirt.

Beweis. Man nehme von n Elementen eins hinweg und mache aus den übrigen alle Formen zur $r$ten Classe, welche das ausgeschiedene Element nicht enthalten. Nun mache man auch aus denselben $n-1$ Elementen alle Formen zur $r-1$ten Classe und verbinde mit ihnen das ausgeschiedene Element, so erhält man diejenigen Formen zur $r$ten Classe, welche das ausgeschiedene Element führen, und welche in der vorigen Anzahl fehlten, um alle Formen aus n Elementen zur $r$ten Classe zu haben.

Zusatz 1. Auch läßt sich dies allgemein so beweisen $\dfrac{\overset{r}{C}}{a,b,c\dots n-1} = \dfrac{n-1.n-2.n-3\dots n-1-r+1}{1.2.3\dots r-1.r}$

nach §. 28. Zusatz $\dfrac{\overset{r-1}{C}}{a,b,c\dots n-1}$

$= \dfrac{n-1.\ n-2.\ n-3\dots n-1-(r-1)+1}{3.\ 2.\ 3\dots\dots\dots r-1}$, also

$$\frac{\overset{r}{C}}{b,c\dots n-1} + \frac{a\overset{r-1}{C}}{b,c\dots n-1} = \frac{n-1.n-2.n-3\dots n-r}{1.2.3\dots r-1.r}$$

$+ \dfrac{n-1.\ n-2.\ n-3\dots n-r+1}{1.\ 2.\ 3\dots\dots r-1}$ dem Faktor $n-r$ muß der Faktor $n-r+1$ als der nächst höhere vorangehen; dem zu Folge ist

$$\frac{n-1.\ n-2.\ n-3\dots n-r+1.\ n-r}{1.2.3\dots\dots r-1.r}$$

$$+\frac{n-1.\,n-2.\,n-3\ldots n-r+1.\,r}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r-1.\,r}$$

$$=\frac{[n-1.\,n-2.\,n-3\ldots n-r+1].\,[n-r+r]}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots r-1.\,r},$$

wenn man alles auf gleichen Nenner bringt, und den gemeinschaftlichen Faktor absondert. Es ist endlich

$$\frac{\overset{r}{C}}{b,c\ldots n-1}+\frac{a\overset{r-1}{C}}{b,c,d\ldots n-1}=\frac{n.\,n-1.\,n-2\ldots n-r+1}{1.\,2.\,3\ldots r}$$

$$=\frac{\overset{r}{C}}{a,b,c,d\ldots n}$$ nach §.

Zusatz 2. Da $\frac{\overset{r}{C}}{b,c,d\ldots n-1}+\frac{a\overset{r-1}{C}}{b,c,d\ldots n-1}$ $=\frac{\overset{r}{C}}{a,b,c,d\ldots n}$, so ist auch $\frac{a\overset{r-1}{C}}{b,c,d\ldots n-1}$ $=\frac{\overset{r}{C}}{a,b,c,d\ldots n}-\frac{\overset{r}{C}}{b,c,d\ldots n-1}$ d. h. man findet die Anzahl aller Formen aus $n-1$ Elementen zur $r-1$ten Classe, womit das ausgeschiedene Element, welches in ihnen nicht enthalten ist, verbunden werden müßte, um sie zu Formen der $r$ten Classe umzubilden, wenn man von der Anzahl aller Formen zu $r$ten Classe aus n Elementen, die Anzahl aller Formen zur $r$ten Classe aus $n-1$ Elementen abzieht.

Z. B. $\frac{\overset{3}{C}}{a,b,c,d,e}$ gibt abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde; $\frac{\overset{3}{C}}{b,c,d,e}$ gibt bcd, bce, bde, cde.

also $\frac{\overset{3}{C}}{a,b,c,d,e} - \frac{\overset{3}{C}}{b,c,d,e} = \begin{matrix} a\ bc \\ a\ bd \\ a\ cd \\ a\ ce \\ a\ de \end{matrix} = \frac{a\overset{r-1}{C}}{b,c,d,e}$

2. Combinationen mit unbedingter Wiederholung.

§. 31. Satz. Die Anzahl aller Binionen aus n Elementen, wenn wir sie durch $\frac{\overset{2}{Cr}}{a\ldots n}$ bezeichnen, wo der hineingesetzte Buchstabe r so viel repetitio, Wiederholung bedeutet, und a....n die Elemente; ist $\frac{\overset{2}{Cr}}{a\ldots n} = \frac{n.(n-1)}{1.2.}$.

Beweis. Die Anzahl aller Binionen aus n Elementen ohne Wiederholung ist $\frac{n.(n-1)}{1.2.}$. Da aber hier jedes Element mit sich selbst verbunden wird, so gibt es, da n Elemente gegeben sind, noch n Binionen nebst den $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ Binionen ohne Wiederholung, also die Anzahl aller Binionen mit Wiederholung $\frac{\overset{2}{Cr}}{a\ldots n}$

$$= \frac{n.(n-1)}{1.2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{1.2} = \frac{n^2 + n}{1.2}$$

$$= n.\frac{(n+1)}{1.2}.$$

§. 32. Satz. Die Anzahl aller Ternionen aus n Elementen mit unbedingter Wiederholung ist

$$\frac{\overset{3}{Cr}}{a\ldots n} = \frac{n.(n+1).n+2}{1.2.3}.$$

Beweis. Man bilde zuvor alle Binionen, deren Anzahl $\frac{n.(n+1)}{1.2.}$ ist. Jede dieser Binionen kann nicht nur mit allen n Elementen, sondern auch mit den beiden Elementen, aus denen sie selbst besteht, verbunden werden, und so kann jede der $\frac{n.(n+1)}{1.2.}$ Binionen mit $n+2$ Elementen verbunden werden, und die dadurch hervorgehende Anzahl von Ternionen ist $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.}$; die wirkliche Realisirung dieser Ternionen aa [a, b, c, d.....n], ab [a, b, c, d....n], ac [a, b, c, d....n] etc. Ferner aa [a, a], ab [a, b], ac [a, c] etc. zeigt, daß jede Ternion dreimal vorkommt und zwar aaa, aaa, aaa; aab, aba, aba, und da Versetzungen keine neue Form geben, §. 23, so muß man, weil jede Form nur einmal vorkommen darf, die Anzahl der Ternionen $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.}$ noch durch 3 dividiren, so daß $\frac{\overset{3}{C}}{a....n} = \frac{n.(n+1).(n+2)}{1.2.3}$ ist.

§. 33. Satz. Die Anzahl der Quaternionen aus n Elementen mit Wiederholung ist $\frac{\overset{4}{C}}{a....n}$ $= \frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{1.2.3.4}$.

Beweis. Man bilde zuvor alle Ternionen, deren Anzahl $\frac{n.\,n+1.\,n+2}{1.2.3.}$; jede derselben kann mit allen Elementen und auch mit jedem der drei Elemente, aus denen sie besteht, verbunden werden, weil jedes Element so oft in die Form gesetzt werden kann, bis der Grad der Classe erreicht ist. Es kann also jede der Ternionen mit $n+3$ Elementen verbunden werden, so daß

$\frac{n.\ n+1.\ n+2.\ n+3}{1.\ 2.\ 3}$ Quaternionen dadurch entstehen; da nun jede Quaternion viermal vorkommt, weil aaa [a, b, c, d .... n], aab [a, b, c, d .... n] etc., aaa [a, a, a], aab [a, a, b] etc. verbunden wird, und dadurch aaaa, aaaa, aaaa, aaaa; aaab, aaba, aaba, aaba etc., entstehen, so muß man, da jede Form nur einmal vorkommen soll, die Anzahl der Quaternionen $\frac{n.\ n+1.\ n+2.\ n+3}{1.\ 2.\ 3}$ durch 4 dividiren, so daß

$$\frac{\overset{4}{C'}}{a \ldots n} = \frac{n.\ n+1.\ n+2.\ n+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \text{ ist.}$$

Zusatz. Dieselben Schlüsse gelten auch für jede folgende Classe, auch stimmen die Ausdrücke mit denen in den §en 25, 26, 27, 28 überein, nur daß dort die Faktoren des Zählers successiv ab-, hier successiv zu nehmen, also dem §. 28. gemäß ist hier $\frac{\overset{r}{C'}}{a \ldots n}$

$$= \frac{n.\ n+1.\ n+2 \ldots n+r-1}{1.\ 2.\ 3 \ldots \ldots r}.$$

3. Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen.

§. 34. Erklärung. Eine Form wird species genannt, und mit S bezeichnet, die Anzahl der Formen mit n (numerus), die Ordnung der Formen mit A, B, C, D, E ... etc.; so heißen aaaaa
aaab
aab Formen der Ordnung A; b, bb, bbc, bbbd Formen der Ordnung B und so fort; $\overset{nS}{A}$ heißt die Anzahl der Formen der Ordnung A; $\overset{nS}{B}$ heißt die Anzahl der Formen der Ordnung B etc.

§. 35. Satz. Wenn von den Elementen a^{α}, b^{β},

c^γ .... etc. die Anzahl der Formen jeder Ordnung angegeben werden soll, so ist

$$\overset{nS}{A} = \alpha \quad \overset{nS}{B} = (1+\alpha)\beta \quad \overset{nS}{C} = (1+\alpha).(1+\beta)\gamma,$$

wo die Exponenten α, β, γ anzeigen, wie oft jedes Element wiederholt werden darf.

Beweis. 1) Man setzt zuerst a, dann aa, dann aaa und dies so lange, als die Wiederholung gestattet ist, welches der Exponent α anzeigt, also α mal; dadurch erhalten wir alle Formen der Ordnung a von der αten Classe; ihre Anzahl ist $= \alpha$, also $\overset{nS}{A} = \alpha$.

2) Setze man, um die Ordnung B zu erhalten, zuerst b allein; dann wiederhole man alle Formen der Ordnung A mit Vorsetzung des Elementes b; hierauf setze man bb allein, dann wiederhole man wieder alle Formen der Ordnung A, indem man ihnen bb vorsetzt; ferner setze man bbb allein und wiederhole dann alle Formen der Ordnung A, indem man ihnen bbb vorsetzt, und dies wird so oft fortgesetzt, als die Wiederholung von b vermöge des Exponenten β gestattet ist, also β mal, so hat man die Ordnung B, und man hat nicht nur alle Formen des Elementes b, deren Zahl $= \beta$ ist, sondern auch die Formen der Ordnung A β mal wiederholt; daher ist $\overset{nS}{B} = \beta + \overset{nS}{A}\beta = \beta + \alpha\beta = (1+\alpha)\beta$.

3) Setze man, um die Ordnung c zu erhalten, zuerst c allein, dann alle Formen der Ordnung A, denen c vorgesetzt wird; hierauf alle Formen der Ordnung B, denen ebenfalls c vorgesetzt wird; dann setze man cc und hierauf wiederhole man alle Formen der Ordnung A und setze jeder Form cc vor, dann wiederhole man wie zuvor die Ordnung B und setze jeder Form cc vor; nun setzt man ccc allein und wiederholt erst wieder die Ordnung A, dann die Ordnung B und setzt jeder ccc vor und so fährt man fort, das Element c zu wiederholen und auch die vorhergehenden Ordnungen zu wiederholen, als der

Exponent γ es vorschreibt; dadurch erhalten wir erst alle Formen des Elementes c, deren Anzahl $= \gamma$; dann eine so oftmalige Wiederholung der Ordnungen A und B, als der Exponent γ anzeigt; es ist also nach dieser Regel $\overset{nS}{C} = \gamma + \overset{nS}{A}\gamma + \overset{nS}{B}\gamma$, oder $\overset{nS}{C} = \gamma + \alpha\gamma + (1+\alpha)\beta\gamma$, oder $\overset{nS}{C} = \gamma(1+\alpha) + (1+\alpha)\beta.\gamma = (1+\alpha)[\gamma+\beta\gamma] = (1+\alpha).(1+\beta).\gamma$.

Zusatz. Dem zu Folge wäre von

$$a^\alpha . b^\beta . c^\gamma . d^\delta \ldots . l^\lambda . m^\mu .$$

$\overset{nS}{M} = (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma).(1+\delta)\ldots(1+\lambda).\mu$.

Beispiel. Es sey $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, also $a^2 b^2 c^2$, so ist $\overset{nS}{A} = 2$, $\overset{nS}{B} = (1+2).2 = 6$, $\overset{nS}{C} = (1+2).(1+2).2 = 18$.

Realisirung dieser Formen.

Zuerst von A $\left\{\begin{array}{l} a \\ aa \end{array}\right\}$ gibt es 2 Formen,

dann von B $\left\{\begin{array}{ll} b & bb \\ ba & bba \\ baa & bbaa \end{array}\right\}$ gibt es 6 Formen,

dann von C $\left\{\begin{array}{ll} c & cc \\ ca & cca \\ caa & ccaa \\ cb & ccb \\ cba & ccba \\ cbaa & ccbaa \\ cbb & ccbb \\ cbba & ccbba \\ cbbaa & ccbbaa \end{array}\right\}$ gibt es 18 Formen, wenn wir nach der im Beweise enthaltenen Anleitung verfahren.

Beispiel 2. Die Anzahl der Formen jeder Ordnung von $a^3 b^2 c$ ist $\overset{nS}{A} = 3$, $\overset{nS}{B} = (1+3).2 = 8$, $\overset{nS}{C} = (1+3).(1+2).1 = 12$.

Realisirung.

Zuerst von A $\left\{\begin{array}{l} a \\ aa \\ aaa \end{array}\right\}$ gibt es 3 Formen.

von B $\left\{\begin{array}{ll} b & bb \\ ba & bba \\ baa & bbaa \\ baaa & bbaaa \end{array}\right\}$ gibt es 8 Formen.

von C $\left\{\begin{array}{ll} c & cbb \\ ca & cbba \\ caa & cbbaa \\ caaa & cbbaaa \\ cb & \\ cba & \\ cbaa & \\ cbaaa & \end{array}\right\}$ gibt es 12 Formen, denn $\overset{1}{c}$ zeigt, daß c nur einmal gesetzt und die vorigen Ordnungen nur einmal wiederholt werden dürfen.

§. 36. Satz. Die Summe aller Formen von allen Ordnungen zusammen, der Elemente a^{α}, b^{β}, $c^{\gamma}\dots$ l^{λ}, m^{μ} ist $= (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma)\dots(1+\mu) - 1$.

Beweis.

Es ist $\overset{nS}{A} = \alpha$, $\overset{nS}{B} = (1+\alpha)\beta$, $\overset{nS}{C} = (1+\alpha).(1+\beta)\gamma$, $\overset{nS}{D} = (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma)\delta\dots$ etc. also die Summe $= \alpha + (1+\alpha)\beta + (1+\alpha).(1+\beta).\gamma + (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma)\delta\dots$ etc.

Es wird der Werth einer Größe nicht geändert, wenn man zu ihr 1 addirt und 1 wieder abzieht, also ist auch die Summe $= (1+\alpha) + (1+\alpha)\beta + (1+\alpha).(1+\beta)\gamma + (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma).\delta\dots$ etc. $- 1$.

Nun ist $(1+\alpha).(1+\alpha).\beta = (1+\alpha)[1+\beta]$; also die Summe $= (1+\alpha)(1+\beta) + (1+\alpha).(1+\beta).\gamma + 1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma)\delta\dots$ etc. $- 1$.

Ferner ist $(1+\alpha).(1+\beta) + (1+\alpha).(1+\beta).\gamma = (1+\alpha).(1+\beta)[1+\gamma]$ also ist die Summe

$= (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma+(1+\alpha.(1+\beta).(1+\gamma).\delta \ldots$ etc. $- 1$.

Der Ausdruck ist auch $= (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma).[1+\delta]$ weil der Faktor $(1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma)$ in beiden Gliedern vorkommt; also auch die Summe $= (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma).(1+\delta) \ldots$ etc. $- 1$, so finden wir bei Fortsetzung dieses Verfahrens die Summe $S = (1+\alpha).(1+\beta).(1+\gamma).(1+\delta) \ldots (1+\mu) - 1$.

Beispiel. Wie groß ist die Anzahl aller Formen von allen Ordnungen der Elemente $a^2\, b^2\, c$?

Antwort. $S = (1+3).(1+2).(1+1) - 1 = 4.3.2 - 1 = 23$ wie es auch wirklich der Fall ist, da vorhin $\overset{nS}{A} = 3$, $\overset{nS}{B} = (1+3).2 = 8$,

$\overset{nS}{C} = (1+3).(1+2).1 = 12$ war; also $\overset{nS}{A} + \overset{nS}{B} + \overset{nS}{C} = 2 + 8 + 12 = 23$.

§. 37.

Anwendung der Combinationen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Aufgabe I. Zu finden, wie viel Würfe mit zwei Würfeln möglich sind. — Wie sich Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit verhalte, zwei gleiche bestimmte Felder, z. B. die beiden Asse oder Eins und Eins zu werfen. — Wie sich Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, zwei gleiche, jedoch nicht bestimmte Felder zu werfen. — Wie sich endlich Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, zwei ungleiche, jedoch bestimmte Felder, z. B. 1 und 2 zu werfen.

Auflösung. 1) Mit zwei Würfeln sind 36 Würfe möglich.

2) Die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, zwei gleiche bestimmte Felder zu werfen, ist wie 1 : 36.

3) Die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit,

zwei gleiche jedoch unbestimmte Felder zu werfen, wie $6:36 = 1:6$.

4) Die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, zwei ungleiche, jedoch bestimmte Würfe, wie 1 und 2, zu werfen, verhält sich wie $1:18$.

Beweis. Nr. 1. Zwei Würfel haben 12 Felder; die Anzahl aller Binionen ist §. (25.)
$\frac{12\,(12-1)}{1.\,2} = 66$. Da jedoch nie zwei Felder eines und desselben Würfels zum Vorschein kommen können, es sey denn der Würfel zerspränge, was hier nicht gedacht wird, so muß man die Binionen, welche die 6 Felder eines Würfels geben, und deren Anzahl $\frac{6.\,(6-1)}{1.\,2} = 15$ ist, zweimal nehmen, da es zwei Würfel sind, und 2. 15 von 66 abziehen, so erhält man die Würfe $66 - 30 = 36$.

Nr. 2. Unter diesen 36 Würfen sind 6 gleiche, doch kann der Fall eintreten, daß der Wurf Eins und Eins der letzte ist, also der 36te und daher das Verhältniß $1:36$.

Nr. 3. Da es sechs gleiche Würfe gibt, und darunter der eine, gleichviel, welcher gewünscht wird, so ist das Verhältniß $= 6:36 = 1:6$.

Nr. 4. Unter den 36 Würfen kommt auch der Wurf 1 und 2, aber zweimal vor; denn einmal gibt Würfel A die Einheit und B den Zweier; ein andermal Würfel B die Einheit und A den Zweier; also das Verhältniß wie $2:36 = 1:18$.

Anmerkung. Bei Nr. 2 ist jedoch nicht gesagt, daß der 36ste Eins und Eins geben müsse; es kann dies unter 1000 Würfen nicht vorkommen und unter 36 Würfen mehrmal; nur wenn kein Grund vorhanden ist, warum der eine Wurf mehrmal vorkommen sollte als der andere, gilt das Gesagte.

Aufgabe II. Wenn zwei Spieler A und B mit zwei Würfeln dergestalt um die Wette spielen, daß bei jedem Wurf über 7 der Spieler A, bei jedem Wurfe unter 8 der Spieler B sämmtliche Einlage einziehen, wie muß sich, der Billigkeit gemäß, die Einlage des A zu der des B verhalten?

Antwort. Wie 15 : 21.

Beweis. Um unter den 36 Würfen diejenigen herauszufinden, die nie mehr als 7 zeigen, wohl aber weniger oder gerade 7, verbinde man zuerst mit der Einheit des Würfels A als 6 Felder des Würfels B, dies gibt 6 Würfe, dann den Zweier des Würfels A mit den ersten 5 Feldern des Würfels B, dies gibt 5 Würfe, dann den Dreier des Würfels A mit den ersten 4 Feldern des Würfels B, dies gibt 4 Würfe, in allem also 6 + 5 + 4 Würfe, die nie über 7 zeigen; die Verbindung des Feldes 4 mit den ersten 3 Feldern des Würfels B kann nicht Statt finden, weil diese schon vorkam, als man den Dreier des Würfels A mit den ersten 4 Feldern des Würfels B verband. Für den Spieler A sind demnach 15, für den Spieler B aber 36 — 15 = 21 Würfe vortheilhaft; daher muß die Einlage von A zu der des B wie 15 : 21 seyn.

Aufgabe III. 1) Zu finden, wie viel Würfe mit drei Würfeln möglich sind. — 2) Wie sich Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit verhalte, drei bestimmte gleiche Felder zu werfen. — 3) Drei unbestimmte gleiche Felder. — 4) Einen bestimmten Wurf von zwei gleichen und einem verschiedenen Felde, z. B. 2, 2, 4. — 5) Einen Wurf von zwei bestimmten gleichen und einem dritten unbestimmten. — 6) Einen Wurf von zwei unbestimmten gleichen Feldern und einem bestimmten dritten Felde zu treffen.

Auflösung. Nr. 1. gibt 216.
Nr. 2. gibt 1 : 216.
Nr. 3. gibt 6 : 216 = 1 : 36.
Nr. 4. gibt 3 : 216 = 1 : 72.

Nr. 5. gibt 1 : 12.
Nr. 6. gibt 1 : 12.

Beweis. Drei Würfel haben 18 Felder, also $\frac{18.\ 17.\ 16}{1.\ 2.\ 3} = 816$ Ternionen; davon gehen ab, erstens die Ternionen, welche 6 Felder eines Würfels geben, also $\frac{6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3} \times 3$ da es drei Würfel gibt, dann die Binionen der 6 Felder eines Würfels, deren es, da es drei Würfel gibt, $\frac{6.\ 5.\ 3}{1.\ 2.}$ gibt und die, mit den 12 Feldern der beiden übrigen Würfel verbunden, $\frac{6.\ 5}{1.\ 2} \times 3.\ 12 = 540$ Ternionen geben, also gibt es $816 - 70 - 540 = 216$ Würfe, welche man jedoch kürzer erhält, wenn man die 36 Binionen der zwei Würfel in Aufgabe 1. mit den 6 übrigen Feldern des dritten Würfels verbindet.

2) Unter den 216 Würfen gibt es 6 gleiche; es kann aber der Fall eintreten, daß der Wurf von drei bestimmten gleichen Feldern gerade der letzte unter den 6 gleichen, also unter den 216 der letzte ist, wobei wieder die Anmerkung wie Nr. 2. Statt findet.

3) Bei dem Wurfe von drei gleichen aber unbestimmten Feldern, deren es unter 216 Würfen 6 gibt, muß das Verhältniß wie $6 : 216 = 1 : 36$ seyn.

4) Der Wurf 2, 2, 4 kann von den drei Würfeln auf dreierlei Art geworfen werden, da diese drei Elemente, unter denen zwei identische sind, drei Versetzungen geben $= \frac{1.\ 2.\ 3}{1.\ 2.} = 3$ und zwar Würfel

A,	B,	C,
2	2	4
2	4	2
4	2	2

unter 216 Würfen, die mit drei Würfeln gemacht wer-

den, kann also dieser Wurf dreimal vorkommen, und daher das Verhältniß wie 3:216 = 1:72.

5) Ist das dritte ungleiche Feld unbestimmt, so sind, da jedes dritte Feld mit den beiden andern gleichen 3 Versetzungen gibt, 3. 6 = 18 Versetzungen möglich, und daher das Verhältniß wie 18:216 = 1:12.

6) Bei zwei Würfeln gibt es nach Nr. 3. des §. 37. sechs Würfe von zwei gleichen unbestimmten Feldern, das bestimmte Feld des dritten Würfels kann mit jeden zwei gleichen Feldern drei Versetzungen geben, also mit den sechs Würfen von zwei gleichen Feldern auf 6. 3 = 18 verschiedene Arten fallen, und daher ist das Verhältniß = 18:216 = 1:12.

Aufgabe IV. Wie viele Quinternen, Quaternen, Ternen, Amben und einzelne Treffer lassen 90 Nummern zu, und, wenn von diesen 90 Nummern nur fünf herausgezogen werden, wie verhält sich da die Wahrscheinlichkeit, einen Quinterno, Quaterno, Terno, Ambo und einzelnen Treffer zu errathen.

Auflösung. Es sind 43949268 Quinternen, 2555190 Quaternen, 117480 Ternen, 4005 Amben und 90 einzelne Treffer.

Die Wahrscheinlichkeit, einen Quinterno zu treffen, verhält sich wie 1:43949268; die, einen Quaterno zu treffen, wie 1:511038; die, einen Terno zu treffen, wie 1:11748; einen Ambo zu errathen, wie 10:4005: einen einzelnen Treffer zu errathen, wie 1:18.

Beweis. Es gibt

$$\frac{90.\ 89.\ 88\ 87.\ 86}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ 5} = 43949268 \text{ Quinternen,}$$

$$\frac{90.\ 89.\ 88.\ 87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190 \text{ Quaternen,}$$

$$\frac{90.\ 89.\ 88}{1.\ 2.\ 3} = 117480 \text{ Ternen,}$$

$$\frac{90.\ 89}{1.\ 2} = 4005 \text{ Amben.}$$

Die fünf herausgezogenen Nummern geben eine Quinterne; also ist die Wahrscheinlichkeit, einen Quinterno getroffen zu haben, wenn man einen Zettel mit fünf Nummern gesetzt hätte, wie 1 : 43949268.

Die fünf gezogenen Nummern geben $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$ Quaternen, also ist die Wahrscheinlichkeit, einen Quaterno zu treffen, wie 5 : 2555190 = 1 : 511038.

Die fünf gezogenen Nummern geben $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Ternen; also die Wahrscheinlichkeit, einen Terno zu errathen, wie 10 : 117480 = 1 : 11748 etc.

Aufgabe V. Zwei Spieler A und B spielen mit drei Würfeln dergestalt um die Wette, daß der Spieler A sämmtliche Einlage gewinnt, wenn drei gleiche, jedoch unbestimmte Felder aufgeworfen werden; dagegen der Spieler B sämmtliche Einnahme gewinnt, wenn drei ungleiche, jedoch bestimmte Felder, z. B. 1, 2, 3 geworfen werden: wie muß die Einlage des A zu der des B sich verhalten?

Antwort. Die Einlagen müssen von beiden gleich groß seyn.

Beweis. 1) Die Wahrscheinlichkeit, einen unbestimmten, jedoch gleichen Wurf zu machen, verhält sich zur Unwahrscheinlichkeit, wie 1 : 36 nach Aufgabe III., 2) Unter 216 Würfen läßt sich der Wurf 1, 2, 3 auf 1. 2. 3 = 6 Arten thun, da drei ungleiche Felder 6 Versetzungen zulassen; daher ist die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, einen solchen Wurf zu thun, wie 6 : 216 = 1 : 36. Die Einlagen müssen aber nach der Wahrscheinlichkeit des Gewinnes berechnet seyn, wenn mit Billigkeit gespielt wird; daher müssen die Einlagen von beiden gleich groß seyn.

§. 38.

Aufgabe über die Combinationen mit eingeschränkten Wiederholungen.

Es soll die Anzahl aller Divisoren, welche die Zahl 360 hat, angegeben und diese Faktoren dargestellt werden.

Auflösung. Die Primzahlen, das ist solche Zahlen, die außer 1 und sich selbst keinen Faktor haben, von 360 sind $2, 2.2.3.3.5 = 2^3.3^2.5^1$. Es ist also die Zahl der Divisoren $(1+3).(1+2).(1+1) = 4.3.2 = 24$; und die Divisoren selbst sind folgende: 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Beweis. Da die übrigen Divisoren nebst den primitiven 2, 2, 2, 3, 3, 5 durch Combinationen entstehen, und zwar aus den primitiven Divisoren, so bilden wir alle Formen von der nullten bis zur 6ten Classe, welche die höchste ist, da die Summe der Exponenten $3+2+1=6$ ist.

Zuerst bilden wir die Formen der Ordnung 2, dann der Ordnung 3, dann der Ordnung 5, so ist die Summe aller Formen aller Ordnungen nach §. 36. $= (1+3).(1+2).(1+1) = 4.3.2 = 24$, und da jede Form ein solcher Divisor ist, so ist auch die Anzahl der Divisoren $= 24$; eigentlich $(1+3).(1+2).(1+1) - 1 = 23$, aber 1 wird dazu gerechnet.

Realisirung dieser Formen nach §. 35. Sie sind

$2^0 = 1 = 2^0$	$3^0 = 1 = 3^0$	$3.3 = 3^2$
$2 = 2^1$	$3 = 3^1$	$3.3.2 = 3^2.2^1$
$2.2 = 2^2$	$3.2 = 3^1.2^1$	$3.3.2.2 = 3^2.2^2$
$2.2.2 = 2^3$	$3.2.2 = 3^1.2^2$	$3.3.2.2.2 = 3^2.2^3$
	$3.2.2.2 = 3^1.2^3$	

$5^0 = 1 = 5^0$	$5.3 = 5^1.3^1$
$5 = 5^1$	$5.3.2 = 5^1.3^1.2^1$
$5.2 = 5^1.2^1$	$5.3.2.2 = 5^1.3^1.2^2$
$5.2.2 = 5^1.2^2$	$5.3.2.2.2 = 5^1.3^1.2^3$
$5.2.2.2 = 5^1.2^3$	

$5.3.3 = 5^1.3^2$
$5.3.3.2 = 5^1.3^2.2^1$
$5.3.3.2.2 = 5^1.3^2.2^2$
$5.3.3.2.2.2 = 5^1.3^2.2^3$.

Zusatz. Da die Formen der vorhergehenden Ordnung immer mit den Formen der nachfolgenden Ordnung combinirt werden, so kann man die Formen einer jeden Ordnung als einen Faktor betrachten und diese Divisoren dadurch erhalten, daß wir erstens 2^3 in alle successive Potenzen 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, eben so 3^2 in 3^0, 3^1, 3^2, und 5 in 5^0, 5^1 zerfällen und die Summe aller Potenzen von derselben Wurzel als einen Faktor des Produktes ansehen, aus welchem die Divisoren hervorgehen sollen, und in der That ist $(2^0+2^1+2^2+2^3)\times(3^0+3^1+3^2)\times(5^0+5^1)$ = allen den vorigen Combinationsformen, und gibt wie diese Combinationsformen die in der Auflösung aufgestellten Divisoren.

§. 39.

Verschiedene Aufgaben über die Combinationen.

Wenn zwei Spieler A und B so um die Wette spielen, daß A die sämmtliche Einlage gewinnt, wenn er drei unbestimmte ungleiche Felder wirft; dagegen B sämmtliche Einlage gewinnt, wenn zwei gleiche und ein ungleiches Feld, die jedoch nicht bestimmt sind, geworfen werden: wie verhält sich da die Einlage des A zu der des B der Billigkeit gemäß?

Antwort. Wie 4 : 3.

Denn es gibt 120 solche Würfe von ungleichen Feldern, also das Verhältniß beim Spieler A wie $120 : 216 = 5 : 9$, aber beim Spieler B wie $90 : 216 = 5 : 12$, also die Einlage des A zu der des B wie $\frac{12}{5} : \frac{9}{5} = 4 : 3$, da A größere Wahrscheinlichkeit hat zu gewinnen. — Wie sind diese Verhältnisse gefunden worden?

Drittes Kapitel.

Variation.

§. 40. Erklärung. Die Variation ist eine ordnende Operation, welche das Permutiren und Combiniren involvirt, und zwar bildet sie erst Combinationsformen und permutirt dann dieselben.

Bei dieser Operation werden mehrere von einander getrennte Reihen von Elementen vorausgesetzt. In alle diese Reihen greift die Variation ein, nimmt bald aus dieser, bald aus jener Reihe ein Element heraus, um dasselbe in die Variationsform einzutragen.

Jedoch geschieht dieses Eintragen nach einer bestimmten Ordnung, so daß die erste Stelle der Form mit einem Elemente aus der ersten Reihe, die zweite Stelle in der Form mit einem Elemente aus der zweiten Reihe, und überhaupt die $n$te Stelle der Form mit einem Elemente aus der $n$ten Reihe besetzt wird.

Zusatz 1. Die gegebenen Reihen von Elementen können entweder deren gleich viele oder ungleich viele haben. Für unsern Zweck genügt der Fall, wenn die Reihen gleich viele Elemente haben.

Zusatz 2. Es mögen drei Reihen $\left\{\begin{array}{c}\underline{1,\ 2,\ 3}\\ a,\ b,\ c\\ d,\ f,\ g\\ h,\ k,\ p\end{array}\right\}$

gegeben seyn. Wir können für diese Reihen einen Index einführen, welcher aus den Zahlen 1, 2, 3, wie oben zu sehen ist, besteht, so daß durch 1 immer das erste Element, durch 2 das zweite und durch 3 das dritte einer jeden Reihe bezeichnet wird. Dadurch sind wir in den Stand gesetzt, aus dem Index die Combinationsformen zu bilden, und zwar zur sovielten Classe, als Reihen da sind, und dann diese Formen zu permutiren, zuletzt aber für den Index die durch ihn bezeichneten Elemente in die Formen einzuführen. Soll der Index diesem Zwecke genügen, so muß er zwei Bedingungen erfüllen. Erstens muß er anzeigen, aus welcher Stelle das durch ihn vorgestellte Element zu nehmen ist, und diese Bedingung erfüllt er durch seine Stelle in der Form, weil die $n$te Stelle in der Form mit einem Elemente aus der $n$ten Reihe zu besetzen ist §. 40. Ferner zeigt der Index durch die Menge seiner Einheiten, überhaupt durch seine Größe, das wievielte Element aus der angezeigten Reihe genommen werden muß.

§. 41. Aufgabe. Alle Variationsformen der drei Reihen (a, b, c); (d, f, g); h, k, p darzustellen.

Auflösung. Wir führen, nachdem die Reihen unter einander gestellt worden sind, $\left\{\begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ \hline a, & b, & c \\ d, & f, & g \\ h, & k, & p \end{matrix}\right\}$ den Index nach Zusatz 2 ein, wie er hier erscheint 1, 2, 3. Hierauf bilden wir durch coordinirendes Verfahren nach (§. 24.) Combinationsformen zur sovielten Classe, als Reihen sind, also zur dritten Classe, welche, da Wiederholung unbedingt gestattet ist, und jedes Element so oft gesetzt werden darf, bis der Grad der Classe erreicht ist, sich so gestalten

111 permutirt, keine Permutationsform.
112 .... 121, 211
113 .... 131, 311
122 .... 212, 221
123 .... 213, 231, 321, 312, 132
133 .... 313, 331
222. .... keine Permutationsform.
223 .... 232, 322
233 .... 323, 332
333 .... keine Permutationsform.

Die Anzahl der Combinationsformen muß nach §. 32., da hier drei unbedingt wiederholbare Elemente 1. 2. 3 sind, $= \frac{3.(3+1).(3+2)}{1.2.3.} = 10$ seyn, und da keine

Form doppelt vorkommen darf, so können wir uns zugleich überzeugen, ob alle Formen gehörig aufgestellt sind. Von diesen Formen lassen drei, in denen lauter identische Elemente vorkommen, keine Permutation zu, ihre Zahl bleibt also $= 3$; eine, welche aus drei verschiedenen Elementen besteht, läßt nach §. 16., $1.2.3 = 6$ Versetzungen, und die übrigen, von denen jede zwei identische und ein verschiedenes Element hat, lassen jede für sich nach §. 17. $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$ Versetzungen zu, und so ist die Anzahl aller Variationsformen $3 + 6 + 3.6 = 27$.

Nun setzen wir für den Index die Elemente, und wir erhalten die Formen adh, adk, afh, bdh, adp, agh, cdh, afk, bdk, bfh, afp, bhp, bgh, cfh, cdk, agk, agp, cdp, cgh, bfk, bfp, bgk, cfk, bgp, cfp, cgk, cgp.

Beweis. Durch das coordinirende Verfahren nach §. 24. erhalten wir alle Combinationsformen zur dritten Classe, so daß keine doppelt erscheint, und auch keine fehlt; durch das Verfahren nach §. 16, 17. erhalten wir sie gehörig permutirt; aber aus gegebenen Elementen Combinationsformen bilden und dieselben dann permutiren, heißt, nach §. 40., variiren: es sind also aus den gegebenen Elementen alle Variationsformen gebildet.

Zusatz 1. Nimmt man an, daß die Reihen gleich viele und identische Elemente haben, $\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a, & b, & c \\ a, & b, & c \end{matrix}\right\}$ so dürfen wir in den Formen des §. 41. da, wo 1 vorkommt a, wo 2 vorkommt b, und wo 3 erscheint, c setzen, und wir erhalten dann:

$aaa = a^3$ permutirt $\frac{1.2.3}{1.2.3} = 1$ also a^3

$aab = a^2b$ .... $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$ also $3a^2b$ oder aab,

aba, baa

$aac = a^2c$ permutirt $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$ also $3a^2c$ oder aac,
aca, caa

$abb = ab^2 \ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3}{1.2} = 3$ also $3ab^2$ oder abb,
bab, bba

$abc = abc \ldots\ldots\ldots 1.2.3 = 6$ also $6abc$ oder abc,
acb, cab, cba, bca, bac

$acc = ac^2 \ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3}{1.2} = 3$ also $3ac^2$ oder acc,
cac, cca

$bbb = b^3 \ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3}{1.2.3} = 1$ also b^3

$bbc = b^2c \ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3}{1.2.} = 3$ also $3b^2c$ oder bbc,
bcb, cbb

$bcc = bc^2 \ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3}{1.2} = 3$ also $3bc^2$ oder bcc,
cbc, ccb

$ccc = c^3 \ldots\ldots\ldots \frac{1.2.3}{1.2.3} = 1 = c^3.$

Zusatz 2. Multipliciren wir die Faktoren $(a+b+c).(a+b+c).(a+b+c)$, so erhalten wir das Produkt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 = (a+b+c)^3$, und wir sehen daraus, daß die Multiplikation zusammengesetzter Faktoren nichts anders als Variiren sey.

§. 42. Satz. Jede Multiplikation zusammengesetzter Faktoren ist eine Variation.

Ist ein Polynomium mit einem andern zu multipliciren, so wird jedes einzelne Glied des Multiplikators mit allen Gliedern des Multiplikandus multiplicirt. Da nun jeder der beiden polynomischen Faktoren in seinen Gliedern eine Reihe von Elementen darstellt, so wird durch die Multiplikation je zweier Glieder eine Combinationsform aus zwei Elementen gebildet, und da nicht nur das zweite Glied des Multiplikators mit dem ersten Gliede des Multiplikandus, sondern auch das zweite Glied des Multiplikandus mit dem ersten des Multiplikators multiplicirt wird, so findet auch bei der Multiplikation zweier ungleich hoher Stellen eine Permutation Statt; aber Combiniren und Permutiren zusammen heißt Variiren; demnach ist jede Multiplikation zusammengesetzter Faktoren eine Variation.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Variation auf die Bildung der Potenz eines Binomiums.

§. 43. Erklärung. Jede Potenz eines Binomiums, das ist einer zweigliedrigen Größe, ist ein Produkt aus gleichen, jedoch zusammengesetzten Faktoren. Mehrere zusammengesetzte Faktoren multipliciren, heißt, nach §. 42., alle Variationsformen aus den Gliedern der zusammengesetzten Faktoren bilden, zu denen jeder Faktor ein Glied als ein Element hergibt.

Zusatz. Da bei der Bildung irgend einer Potenz eines Binomiums mehrere gleiche Faktoren, von denen jeder zwei Theile hat, unter einander multiplicirt werden, so hat man mehrere Reihen, welche gleich viele und gleiche Elemente haben. Für diese führen wir den Index 1 und 2 ein und bilden nach §. 24. aus diesem Index alle Combinationsformen zur so vielten Classe, als Reihen oder zusammengesetzte Faktoren gegeben sind, und permutiren dann die Elemente in den einzelnen Combinationsformen.

Zusatz 2. Die Elemente hängen in den einzelnen Combinationsformen durch Multiplikation zusammen; die Formen sind demnach Produkte; und da einerlei Faktoren in veränderter Ordnung einerlei Produkte geben, so wird das Permutiren, welches an jeder Combinationsform vorgenommen wird, solche Formen hervorbringen, die sich blos durch die Stellung der Elemente von einander unterscheiden, und die demnach identische Produkte sind, denn abc = acb = cab = cba = bca = bac; daher zeigt die Permutationszahl blos an, wie oft ein und dieselbe Form als Produkt zu nehmen ist.

§. 44. Satz. Die Permutationszahl einer Form bei der Bildung irgend einer Potenz eines Binomiums ist ein Coeffizient dieser Form.

Beweis. Die Permutationszahl zeigt an, wie oft eine Form als ein und dasselbe Produkt, nur mit veränderter Stellung der Faktoren, zu setzen ist, dasselbe zeigt aber auch jeder Coeffizient an, also ist die Permutationszahl ein Coeffizient.

Zusatz. Bei der Bildung einer Potenz eines Binomiums heißt dieser Coeffizient Binomialcoeffizient.

§. 45. Aufgabe. Die allgemeine Form einer jeden Potenz eines Binomiums aufzustellen.

Auflösung. Ist a+b) das Binomium und n der Exponent, zu dessen Potenz (a+b) zu erheben ist, so ist

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b^1 + \frac{n.(n-1)a^{n-2}b^2}{1.2}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2).a^{n-3}b^3}{1.2.3}$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).a^{n-4}b^4}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{n.(n-1).n-2)\ldots(n-r+1).a^{n-r}b^r}{1.2.3\ldots\ldots r}.$$

Beweis. Da $(a+b)^n$ nichts anders ist, als ein Produkt aus n solchen gleichen Faktoren wie (a+b), so haben wir alle Variationsformen zur nten Classe zu bilden. Wir haben demnach n solche identische Reihen $\left\{\begin{array}{c}1.\ 2\\ \hline a+b\\ a+b\\ a+b\\ \vdots\\ a+b\end{array}\right\}$ und führen für diese Reihen den Index 1 und 2 ein, und nun werden die Formen nach dem in §. 24. angeführten coordinirenden Verfahren gebildet, indem wir Formen zur n ten Classe bilden, da es n Reihen gibt, und von der niedrigsten Form, welche n Elemente, und zwar die niedrigsten, enthält, dadurch zu einer nächst höheren Form aufsteigen, daß wir das Element in der letzten Stelle hinauswerfen und dafür ein nächst höheres setzen. Die niedrigste Form hat also lauter Elemente der ersten Art, da es hier nur zwei Arten von Elementen gibt, a und b, also lauter a, und zwar so oft gesetzt, als der Grad der Classe anzeigt. Diese niedrigste Form ist demnach 1. 1. 1. 1 .... n mal oder a. a. a .... n mal $= a^n$, wenn wir für den Index 1 das durch ihn bezeichnete Element a setzen. Jede folgende Form verliert ein Element der ersten Art und bekommt dafür ein Element der zweiten Art, so daß zwar immer n Elemente sich in der Form befinden, aber jede folgende Form von der vorhergehenden sich dadurch unterscheidet, daß sie ein Element der ersten Art weniger und eins der zweiten Art mehr hat; die folgende Form ist also $a^{n-1}b$, die dritte ist $a^{n-2}b^2$, die vierte $a^{n-3}b^3$ und die erste Form nach der anfänglichen, die erste also nicht mitgerechnet, ist $a^{n-r}b^r$.

Die Permutationszahlen sind nach §. 19. Aufgabe 9.

von $a^{n-1}b = \frac{n}{1}$

von $a^{n-2}b^2 = \frac{n.(1-1)}{1.2}$

von $a^{n-3}b^3 = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3}$

von $a^{n-4}b^4 = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}$

von $a^{n-r}b^r = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots.(n-r+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots.r}$.

Demnach ist $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.\,a^{n-1}b$

$+ \frac{n.(n-1).\,a^{n-2}b^2}{1.\,2} + \frac{n.(n-1).(n-2).\,a^{n-3}b^3}{1.\,2.\,3}\ldots$

$+ \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-r+1).\,a^{n-r}b^r}{1.\,2.\,3\ldots\ldots.r}$.

Zusatz. Der Bequemlichkeit wegen hat man für die Binomialcoeffizienten eine eigene Bezeichnung eingeführt, den Buchstaben B, welcher über sich die Stellenzahl (Index) und vor sich den Exponenten der Potenz führt, so daß ${}^n\overset{1}{B} = \frac{n}{1}$; ${}^n\overset{2}{B} = \frac{n.(n-1)}{1.\,2}$;

${}^n\overset{3}{B} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3}$;

${}^n\overset{r}{B} = \frac{n.(n-1).\,n-2).(n-3)\ldots.(n-r+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots.r}$.

Jeder dieser Binomialcoeffizienten zeigt an, daß der ihm vorgesetzte Exponent so oft als Faktor, jedoch successiv, um 1 kleiner zu setzen sey, als sein Index anzeigt, und daß dies Produkt durch eine Reihe von Faktoren dividirt werden müsse, die mit dem Faktor 1 beginnt und mit dem Index schließt.

Beispiel 1. $(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}.\,a^4b$

$+ \frac{5.4}{1.2}a^3b^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}a^2b^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}a^1b^4$

$+ \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}a^0b^5$,

also $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Beispiel 2.

$$(8+2)^4 = 8^4 + \frac{4}{1}.8^3.2 + \frac{4.3}{1.2}.8^2.2^2$$
$$+ \frac{4.3.2}{1.2.3}.8.2^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}.8^0.2^4.$$

$$(8+2)^4 = 4096 + 4.512.2 + 6.64.4 + 4.8.8 + 16.$$
$$= 4096 + 4096 + 1536 + 256 + 16.$$

$$= \begin{array}{r} 4096 \\ 4096 \\ 1536 \\ 256 \\ 16 \\ \hline \end{array}$$
$$(8+2)^4 = 10000$$

Zusatz. Aus der Entwickelung der Potenz sehen wir, daß die Anzahl der Glieder um 1 größer sey, als der Exponent Einheiten hat; daß ferner die Potenzen des ersten Theils successiv ab-, die des zweiten Theils aber zunehmen.

§. 46. **Satz.** Wenn ein Binomium zur $n$ten Potenz erhoben wird, so wird der $(n+1)$te Coeffizient $= 0$, und die Reihe ist begrenzt.

Beweis. Da keine Potenz, weder des ersten, noch des zweiten Theiles, weder von a noch $b = 0$ werden kann, so muß ein Coeffizient $= 0$ werden, wenn die Reihe abbrechen soll; es sey dies der $p$te Coeffizient, also ${}^n\overset{p}{\mathfrak{B}} = 0$, oder $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots p}$ $= 0$; multiplicirt man beiderseits mit dem Nenner, so ist ferner $n.(n-1).(n-2).(n-3\ldots.(n-p+1) = 0$; dividirt man beiderseits durch ein Produkt aus allen Faktoren bis auf den letzten $n-p+1$, so ist $n-p+1 = 0$; daraus folgt $n+1 = p$; also der $n+1$te Coeffizient ist $= 0$; es ist daher ${}^{n}\overset{p}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{n+r}{\mathfrak{B}} = 0$, und wirklich ist ${}^{n}\overset{n+1}{\mathfrak{B}} = \dfrac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)\ldots n-n-1+1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots\ldots\ldots n+1}$

$= 0$ oder ${}^{n}\overset{n+1}{\mathfrak{B}} = \dfrac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)\ldots\times 0}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 6\ldots\ldots\ldots r}$

$= 0$; denn wenn ein Faktor = Null ist, so ist das ganze Produkt = Null.

Besondere Beziehungen, welche zwischen den Binomialcoeffizienten Statt finden.

§. 47. Satz. Zwei auf einander folgende Coeffizienten einer Binomialpotenz, welche eine Binomialreihe heißen mag, geben, zusammen addirt, einen Coeffizienten einer und einen Grad höheren Reihe, und zwar den sovielten in dieser höheren Reihe, als der letzte der beiden addirten in seiner Reihe ist; in Zeichen:

$${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}.$$

Beweis.

$${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{n.\ (n-1).\ (n-2).\ (n-3)\ldots n-r+1}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots r}$$

$${}^{n}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = \frac{n.\ (n-1).(n-2).(n-3)\ldots n-r}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots r.\ r+1}.$$ Beide Brüche bringen wir dadurch auf gleichen Nenner, daß wir Zähler und Nenner des ersten Bruches mit $(r+1)$ multipliciren, dann die Brüche addiren und die gemeinschaftlichen Faktoren herausheben; es ist dann ferner

$$\frac{n.\ (n+1).\ (n+2).\ (n+3)\ldots(n-r+1).\ r+1}{1.\ 2.\ 4.\ 4\ldots\ldots\ldots r.\ r+2}$$

$$+\frac{n.\ (n-1).\ (n-2).\ (n-3)\ldots n-r}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots r.\ r+1}$$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots r.\ r+1}.[r+1+n-r]$$

$$= \frac{n.\ (n-1).\ (n-2).\ (n-3)\ldots(n-r+1).\ (n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ldots\ldots\ldots r.\ r+1}$$

$$= \frac{(n+1).\,n.\,(n-1).\,(n-2)\ldots\,n-r+1}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,r.\,r+1} = {}^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}};$$

denn der erste Faktor im Zähler ist der Exponent der Potenz, und der höchste Faktor im Nenner ist der Index des Coeffizienten.

Beispiel. ${}^{5}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{5.4.3}{1.2.3}$; ${}^{5}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$;

es ist also $\frac{5.4.3}{1.2.3} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$

$\frac{5.4.3}{1.2.3.4}.\,[4+2] = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = {}^{6}\overset{4}{\mathfrak{B}}$; also

$${}^{5}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{5}\overset{4}{\mathfrak{B}} = {}^{6}\overset{4}{\mathfrak{B}}.$$

§. 48. Satz. Zwei Binomialcoeffizienten, welche gleich weit vom Anfange und vom Ende abstehen, sind einander gleich.

Beweis. Nennen wir den einen Coeffizienten nach dem anfänglichen der $r$ten, und den gleichweit vom Ende abstehenden den $p$ten, so muß, wenn wir die Reihe rückwärts lesen, der Index $p = r$ seyn, da beide Coeffizienten gleichweit von ihren Enden abstehen sollen. Nun ist ${}^{n}\overset{p}{\mathfrak{B}} = \frac{n.\,(n-1).\,(n-2).\,(n-3)\ldots.(n-p+1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots\,p}$

${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{n.\,(n-1).\,(n-2)\,(n-3)\ldots.n-r+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots\ldots\,r}$; da

$p = r$ ist, so ist $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots\,r}$

$= \frac{n.\,(n-1).\,(n-2).\,(n-3)\ldots.(n-p+1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots\,p}$, also

${}^{n}\overset{p}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}}$.

Zusatz. Dies bringt bei der Berechnung einer Binomialpotenz den Vortheil, daß, wenn man in der Entwickelung der Coeffizienten über die Hälfte der Reihe hinaus ist, die folgenden Coeffizienten dieselben sind, nur rückwärts genommen, und daher brauchen die folgenden Coeffizienten nicht berechnet, sondern bloß abgeschrieben zu werden. Hat die Potenz einen ungeraden Exponenten, so hat die Binomialreihe eine gerade Anzahl von Gliedern und es gibt dann in der Mitte zwei gleiche auf einander folgende Coeffizienten; bei einer geraden Potenz aber ist die Anzahl der Glieder ungerade, und es gibt dann in der Mitte der Reihe einen höchsten Exponenten, wie folgende zwei Beispiele zeigen.

I. $(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9.$

II. $(a-b)^8 = a^8 + 8a^7.-b + 28a^6.(-b)^2 + 56a^5.(-b)^3 + 70a^4.(-b)^4 + 56a^3.(-b)^5 + 28a^2.(-b)^6 + 8a.(-b)^7 + b^8.$

Zusatz 2. Da alle ungerade Potenzen einer negativen Wurzel negativ sind, so sind, wenn ein Theil eines Binomiums negativ ist, jene Glieder der Binomialreihe negativ, in denen eine ungerade Potenz dieses negativen Gliedes als Faktor vorkommt.

§. 49. Satz. Alle Binomialcoeffizienten einer Binomialreihe mit einem ganzen positiven Exponenten sind zusammengenommen einer gleich hohen Potenz der Zahl 2 gleich; in Zeichen:

$$1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots\ldots {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}} = 2^{n}.$$

Beweis. $(a+b)^{n} = a^{n} + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\, a^{n-1}b^{1} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\, a^{n-2}b^{2} + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\, a^{n-3}b^{3} \ldots\ldots + {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}.\, a^{0}b^{n}$, setzen wir nun $a = 1$ und $b = 1$, so sind alle Potenzen von a und $b = 1$; also auch $(1+1)^{n}$

$= 1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots\ldots {}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}$; da nun ${}^{n}\overset{n}{\mathfrak{B}}$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots\times(n-n+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots n} = 1 \text{ ist,}$$

so ist $2^{n} = 1 + {}^{n}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots\ldots + 1.$

§. 50. Satz. Jeder Binomialcoeffizient mit seinem Index multiplicirt, ist gleich dem vorhergehenden Coeffizienten, wenn dieser mit der Differenz aus dem Exponenten und seiner Stellenzahl multiplicirt wird; in Zeichen: $r.\,{}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,(n-r+1)$.

Beweis.

$${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots.(n-r+2).(n-r+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots(r-1).\,r}$$

$${}^{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots.(n-r+2)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\ldots r-1}.$$ Da der zweite Coeffizient ganz in dem ersten enthalten ist, indem alle Faktoren bis auf $(n-r+1)$ darin enthalten sind, so ist ${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,\frac{(n-r+1)}{r}$; daher ist $r.\,{}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,(n-r+1)$.

Anmerkung. Dieser Satz wird in der Folge oft vorkommen und ist daher wohl zu merken.

Beispiel. $5.\,{}^{8}\overset{5}{\mathfrak{B}} = {}^{8}\overset{4}{\mathfrak{B}}.\,(8-4)$; denn ${}^{8}\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$ und $5.\,{}^{8}\overset{5}{\mathfrak{B}} = \frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4\,5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$; $(8-4)\,{}^{8}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3.\,4}$; es ist aber $\frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4}{1.\,2.\,3.\,4} = \frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$; daher ist auch $5.\,{}^{8}\overset{5}{\mathfrak{B}} = {}^{8}\overset{4}{\mathfrak{B}}(8-4)$.

Zusatz. Da $r.\,{}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,(n-r+1)$ ist, so ist auch ${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,\frac{(n-r+1)}{r}$, und wir sind dadurch im Stande, aus jedem vorhergehenden Coeffizienten den nachfolgenden, also aus einem alle übrige zu entwickeln, wenn wir den vorhergehenden bereits bekannten Coeffizienten mit der Differenz aus dem Exponenten der Potenz und der Stellenzahl multipliciren, und das Produkt daraus durch die Stellenzahl des gesuchten nachfolgenden dividiren. Z. B. Der erste Coeffizient der Binomialpotenz $(a+b)^9 = a^9 + 9\,a^8 b \ldots$ ꝛc. ist 9, seine Stellenzahl $= 1$; es ist also der zweite Coeffizient, vermöge der Formel $= \frac{9.(9-1)}{2} = 36$; der dritte $= \frac{36.(9-2)}{3} = 84$; der vierte $= \frac{9.(9-3)}{4} = 126$, wie es im Beispiele I. des §. 48. Zusatz wirklich der Fall ist.

Eine für künftige Sätze höchst wichtige Beziehung zwischen Binomialcoeffizienten von verschiedenen Binomialreihen spricht nachfolgender Satz aus:

§. 51. **Satz.** Jeder Binomialcoefficient irgend einer Binomialreihe ist gleich der Summe aller Coeffizienten von einem um 1 niedrigeren Index aus allen successiv niederen Binomialreihen; in Zeichen:

$$ {}^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{r}{\mathfrak{B}} \ldots + 1. $$

Beweis. Nach §. 47. ist

$$ \begin{array}{rcl} {}^{u+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} & = & {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} \\ {}^{n}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} & = & {}^{n-1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} \\ {}^{n-1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} & = & {}^{n-2}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} \\ \vdots & \text{ꝛc.} & \vdots \\ {}^{r+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} & = & {}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{r}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} \end{array} $$

Setzt man Gleiches für Gleiches, so ist auch

$$ {}^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{r}{\mathfrak{B}} \ldots $$

${}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{r+1}\overset{r}{\mathfrak{B}}$; es ist aber ${}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}$

$= \frac{r.(r-1).(r-2)\ldots(r-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots(r-1).r} = 1$, und

$${}^{r}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3)\ldots r-(r+1)+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots r.\,r+1} = 0;$$

denn $\dfrac{r.(r-1).(r-2).(r-3)\ldots r-(r+1)+1}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots r.\,r+1}$

$$= \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3\ldots(r-r-1+1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots r.\,r+1} = 0,$$

denn ist ein Faktor Null, so ist es auch das ganze Produkt; daher ist endlich auch

$${}^{n+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-1}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{r}{\mathfrak{B}} \ldots + r.$$

Zusatz. Dem Bewiesenen zu Folge ist nun

$${}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} = {}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{n-4}\overset{1}{\mathfrak{B}} \ldots + 1.$$

$${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} = {}^{n-1}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{n-4}\overset{2}{\mathfrak{B}} \ldots + 1.$$

$${}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} = {}^{n-1}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{n-4}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots + 1.$$

$$\vdots$$

$${}^{n}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{n-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{n-2}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{n-3}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{n-4}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} \ldots + 1.$$

Entwickeln wir diese Coeffizienten, so ist $\dfrac{n.(n-1)}{1.\,2}$

$$= \frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{1} + \frac{n-3}{1} + \frac{n-4}{1} \ldots + 1,$$ weil

nach §. 45. Zusatz ${}^{n}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \dfrac{n.(n-1)}{1.\,2}$, und

${}^{n-1}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \dfrac{n-1}{1}$, ${}^{n-2}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \dfrac{n-2}{1}$ ist.

Ferner $\dfrac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3} = \dfrac{(n-1).(n-2)}{1.\,2}$

$$+ \frac{(n-2).(n-3)}{1.\,2} + \frac{(n-3.(n-4)}{1.\,2}$$

$$+ \frac{(n-4.(n-5)}{1.\,2} \ldots + 1,$$ weil nach §. 45. Zusatz

$${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3} \text{ und } {}^{n-1}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{(n-1).(n-2)}{1.\,2},$$

$${}^{n-2}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{(n-2).(n-3)}{1.\,2} \text{ ist u.}$$

Ferner $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}$

$$= \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\,2.\,3} + \frac{(n-2).(n-3).(n-4)}{1.\,2.\,3}$$

$$+ \frac{(n-3).(n-4).(n-5)}{1.\,2.\,3} \ldots + 1, \text{ weil nach §. 45.}$$

Zusatz $${}^{n}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}, \text{ und}$$

$${}^{n-1}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\,2.\,3}, \text{ und}$$

$${}^{n-2}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{(n-2).(n-3).(n-4)}{1.\,2.\,3} \text{ ist u.}$$

Endlich allgemein $\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\, r}$

$$= \frac{(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\, r-1}$$

$$+ \frac{(n-2).(n-3).(n-4)\ldots(n-r)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\, r-1}$$

$$+ \frac{(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)\ldots(n-r-1)}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\ldots\, r-1} + \ldots + 1.$$

Es sey $n = 8$, so erhalten wir 1stens $\frac{8.\,7}{1.\,2}$

$= \frac{7}{1} + \frac{6}{1} + \frac{5}{1} + \frac{4}{1} + \frac{3}{1} + \frac{2}{1} + 1$ oder

$28 = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$; welches die Summe der natürlichen Zahlen ist.

2tens $\frac{8.\,7.\,6}{1.\,2.\,3} = \frac{7.\,6}{1.\,2} + \frac{6.\,5}{1.\,2} + \frac{5.\,4}{1.\,2} + \frac{4.\,3}{1.\,2}$

$+\frac{3.2}{1.2}+\frac{2.1}{1.2}$ oder $56=21+15+10+6+3+1$, welche späterhin unter dem Namen der Triangularzahlen vorkommen werden.

3tens $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}=\frac{7.6.5}{1.2.3}+\frac{6.5.4}{1.2.3}+\frac{5.4.3}{1.2.3}$ $\frac{4.3.2}{1.2.3}+\frac{3.2.1}{1.2.3}$ oder $70=35+20+10+4+1$, welche Zahlen auch später unter dem Namen der Pyramidalzahlen vorkommen werden.

§. 52. Willkürlicher Satz.

Es soll künftig unter dem Zeichen ${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ immer 1, und unter ${}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{B}}$ immer Null verstanden werden; also ${}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{B}}=0$, weil in der That der Coeffizient des ersten Gliedes §. 45. $=1$, und der Coeffizient vor dem ersten Gliede also der ${}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{B}}$ gar nicht existirt, also $=0$ zu setzen ist.

§. 53. Satz. Wenn man das Produkt zweier Binomialcoeffizienten aus verschiedenen Binomialreihen mit der Summe ihrer Zeiger multiplicirt, so ist das Produkt daraus gleich der Summe zweier Produkte, von denen jedes zwei Faktoren hat, den nächst vorgehenden Coeffizienten der einen Reihe, die Differenz aus dem Exponenten und seinem Index und den andern Coeffizienten der andern Reihe; in Zeichen: $n.{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ $={}^{\alpha}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}.(\alpha-n+4)\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}+{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.(\beta-2).{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Es ist $(n-3).{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}={}^{\alpha}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}.(\alpha-n+4)$ §. 50, also auch $(n-3).\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}={}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}.{}^{\alpha}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}.(\alpha-n+4)$ eben so ist $3.{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}={}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.(\beta-2)$, daher auch $3.{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}\,{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}={}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.(\beta-2).{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}$; addirt man Gleiches zu Gleichen, so ist ferner $n-3\;{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ $+\,3.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}} = {}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-n+4)$ $+\,{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-2)$ oder $(n-3+3).\,{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ $= {}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-n+4) + {}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-2)$ oder $n.\,{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}} = {}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{n-4}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-n+4)$ $+\,{}^{\alpha}\overset{n-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-2).$

Beispiel. $5.\,{}^{4}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{6}\overset{2}{\mathfrak{B}} = {}^{4}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(4-2).\,{}^{6}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{6}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,(6-1).\,{}^{4}\overset{3}{\mathfrak{B}}$; denn es ist ${}^{4}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3} = 4$, ${}^{4}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(4-2).\,{}^{6}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{4.\,3}{1.\,2} \times 2.\,\frac{6.\,5}{1.\,2} = 180$ ${}^{6}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{6.\,5}{1.\,2} = 15$, ${}^{6}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,(6-1).\,{}^{4}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{6}{1}.\,5.\,\frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3} = 120$ also $5.\,4.\,15 = 180 + 120$, das ist $300 = 300$.

Erläuterungssatz. Die Variation setzt uns in den Stand, Produkte aus polynomischen Faktoren zu bilden, welche nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, und wir können darüber folgenden Satz aufstellen.

§. 54. Satz. Das Produkt zweier polynomischen Faktoren, deren Glieder nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, ist eine polynomische Größe von derselben Form; in Zeichen:

$$(b^0x^0 + b^1x^1 + b^2x^2 + b^3x^3 + b^4x^4 \ldots b^nx^n)$$
$$\times\,(a^0x^0 + a^1x^1 + a^2x^2 + a^3x^3 + a^4x^4 \ldots a^nx^n)$$
$$= 1 + Ax = Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots Nx^n.$$

Beweis. Da die Glieder eines jeden polynomischen Faktors nach Potenzen der Hauptgröße α fortschreiten, „denn diesen Namen kann die unbekannte, in allen Gliedern als Faktor vorkommende Größe führen,“

so können wir als Index für die Glieder beider Reihen die Exponenten der Hauptgröße selbst einführen, und aus diesem Index alle Variationsformen bilden. Wird nun das rte Glied des Produktes nach dem anfänglichen verlangt, denn unter dem rten kann jedes andere verstanden werden, so müssen alle jene Glieder unter einander multiplicirt werden, deren Indizes zusammen r geben, weil dadurch Produkte hervorgehen, welche die rte Potenz der Hauptgröße führen, und daher als gleichartige Glieder in eine Summe vereinigt werden können; denn Glieder, welche dieselbe Potenz der Hauptgröße führen, sind gleichartig, ihre Coeffizienten und Zeichen mögen wie immer beschaffen seyn.

Da nach §. 42. Multiplieiren nichts anders als Variiren ist, so bilden wir, da es nur zwei Faktoren, also zwei Reihen von Elementen gibt, Combinationsformen zur zweiten Classe, welche dann permutirt werden; jedoch stellen wir nur jene Elemente des Index zusammen, welche die Summe r geben. Denn da die unter dem Index vorgestellten Elemente einer Form nichts anders als Faktoren sind, die Form aber das Produkt ist, so werden durch dies Zusammenstellen solcher Elemente, deren Indices zusammen die Summe r geben, in der That solche zwei Glieder immer unter einander multiplicirt, deren Produkt die rte Potenz der Hauptgröße führt. Diese Formen zur Summe r sind sammt ihren Permutationen 0. r und r. 0, 1. r — 1 und r — 1. r, 2. r — 2 und r — 2. 2 2c. Setzen wir statt des Index die durch ihn bezeichneten Elemente, so erhalten wir:

$a^0 x^0 . b^r x^r = b^r x^r$, weil $a^0 = 1$ und $x^0 = 1$

$a^1 x^1 . b^{r-1} x^{r-1} = a^1 b^{r-1} x^r$

$a^2 x^2 . b^{r-2} x^{r-2} = a^2 b^{r-2} x^r$

$\vdots \qquad \vdots$

$a^{r-2} x^{r-2} b^2 x^2 = a^{r-2} b^2 x^r$

$a^{r-1} x^{r-1} b^1 x^1 = a^{r-1} b^1 x^r$

$a^r x^r b^0 x^0 = a^r x^r$

und das rte Glied nach dem anfänglichen, wenn wir es durch R bezeichnen, ist: $R = [b^r + a^r b^{r-1} + a^2 b^{r-2} + a^3 b^{r-3} \ldots + a^{r-2} b^r + a^{r-1} b^1 + a^r] x^r$.

Nun zeigt ferner der Exponent der Hauptgröße an, das wievielte Glied nach dem anfänglichen aufgestellt worden ist; da nun unter r alle mögliche ganze Zahlen vorgestellt werden können, so kann unter x^r die Potenz der Hauptgröße eines jeden Gliedes vorgestellt werden, und setzen wir successiv $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$, $r = 4$ rc., so erhalten wir das erste, zweite, dritte Glied und so fort. Bezeichnen wir die Summe aller Partialprodukte für den ersten Coeffizienten durch A, für den zweiten durch B, für den dritten durch C, so ist das Produkt $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots\ldots Rx^r$ von derselben Form, wie jeder polynomische Faktor.

Zusatz. Aus dem Beweise ergibt sich ein mechanisches Verfahren, jeden Coeffizienten des Produktes zu bestimmen: Man schreibe alle Glieder des einen Faktors vom verlangten, das ist, dem rten bis zum nullten oder ersten, und setze darunter die Glieder des andern Faktors vom nullten bis zum rten so, daß immer zwei Glieder unter einander stehen, deren Indices gleich sind dem Index des verlangten; sollten einige Glieder in einem Faktor fehlen und Sprünge in dem Exponenten der Hauptgröße vorkommen, so führe man diese Glieder mit dem Coeffizienten Null ein; hierauf multiplicire man die unter einander stehenden Glieder; die Summe aller daraus entstehenden Partialprodukte ist der Coeffizient des verlangten Gliedes.

Beispiel 1. Von dem Produkte der beiden Faktoren $(1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5)$. $(1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6)$ soll der Coeffizient des fünften Gliedes gefunden werden. Er ist nach dieser Regel $+ \left\{ \begin{matrix} 6, 15, 20, 15, 6, 1 \\ 1, 7, 21, 35, 35, 21 \end{matrix} \right\} . x^5$ $= (6 + 105 + 420 + 525 + 210 + 21) . x^5 = 1287 x^5$.

Der Coeffizient des zehnten Gliedes ist:

$$+\begin{Bmatrix} 6x^5, & 15x^4 \\ 21x^5, & 7x^6 \end{Bmatrix} = (126+105).x^{10} = 231\,x^{10}.$$

Beispiel 2. Von $(1+3x+5x^2+9x^4).(1+2x+8x^3+7x^4)$ soll der Coeffizient des vierten Gliedes gesucht werden. Er ist

$$+\begin{Bmatrix} 9, 0, 5, 3.\ 1 \\ 1, 2, 0, 8, 7 \end{Bmatrix} x^4 = (9+0+0+24+7)\,x^4 = 40\,x^4.$$

§. 55. Satz. Wenn zwei Binomialreihen $(1+x)^\alpha = ({}^\alpha\overset{0}{\mathfrak{B}}x^0 + {}^\alpha\overset{1}{\mathfrak{B}}x^1 + {}^\alpha\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^\alpha\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 + \ldots + {}^\alpha\overset{n}{\mathfrak{B}}x^n)$ und $(1+x)^\beta = ({}^\beta\overset{0}{\mathfrak{B}}x^0 + {}^\beta\overset{1}{\mathfrak{B}}x^1 + {}^\beta\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^\beta\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 + \ldots + {}^\beta\overset{n}{\mathfrak{B}}x^n)$ mit einander multiplicirt werden, so geben sie eine Binomialreihe von derselben Form, in der jeder Binomialcoeffizient sich aus der Summe der Exponenten $\alpha+\beta$ so bildet, wie jeder Coeffizient in der zu multiplicirenden Reihe sich aus seinem Exponenten α oder β gebildet hat; in Zeichen: Es ist der $r$te Coeffizient des Produktes

$$= \frac{(\alpha+\beta)}{1} . \frac{(\alpha+\beta-1)}{2} . \frac{(\alpha+\beta-2)}{3} . \frac{(\alpha+\beta-3)}{4} \ldots . \frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r} = {}^{\alpha+\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}.$$

Beweis. I. Es ist nach §. 54. Zusatz das $r$te Glied des Produktes aus beiden Reihen

$$= ({}^\alpha\overset{r}{\mathfrak{B}}.{}^\beta\overset{0}{\mathfrak{B}} + {}^\alpha\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.{}^\beta\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^\alpha\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.{}^\beta\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^\alpha\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.{}^\beta\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^\beta\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.{}^\alpha\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^\beta\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.{}^\alpha\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^\beta\overset{r}{\mathfrak{B}}.{}^\alpha\overset{0}{\mathfrak{B}})\,x^r.$$

Ferner ist nach §. 53.

1) $r.\,{}^\alpha\overset{r}{\mathfrak{B}}.{}^\beta\overset{0}{\mathfrak{B}} = {}^\alpha\overset{r-1}{\mathfrak{B}}(\alpha-r+1).\,{}^\beta\overset{0}{\mathfrak{B}}$
$+\,{}^\beta\overset{-1}{\mathfrak{B}}.(\beta+1).\,{}^\alpha\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^\alpha\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.(\alpha-r+1)$, weil nach §. 52. ${}^\beta\overset{0}{\mathfrak{B}} = 1$ und ${}^\beta\overset{-1}{\mathfrak{B}} = 0$.

2) $r.\,{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-r+2).\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}$
$+\,{}^{\beta}\overset{0}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-\alpha).\,{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} = {}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-r+2)$
$+\,\beta.\,{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.$

3) $r.\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-r+3).\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}$
$+\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-1).\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.$

4) $r.\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha}\overset{r-4}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-r+4).\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}$
$+\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-2).\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}$

$r.\,{}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} = {}^{\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-r+2).\,{}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{0}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-0).\,{}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$
$= {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-r+2) + {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,\alpha.$

$r.\,{}^{\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{0}{\mathfrak{B}} = {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-r+1).\,{}^{\alpha}\overset{0}{\mathfrak{B}}$
$+\,{}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha+1).\,{}^{\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}} = {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-r+1).$

Es ist demnach:

$r.\,[{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{0}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}$
$+\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots\, {}^{\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{0}{\mathfrak{B}}].$
$= {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-r+1)$
$+\,{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,\beta + {}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha-r+2)$
$+\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-1)$
$+\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,(\alpha-r+3)\ldots$
$+\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-2)\ldots$ ꝛc.
$+\ldots\ldots$
$+\ldots\ldots$
${}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,[\alpha$
$+\,{}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,(\beta-r+1)$

$$= (\alpha+\beta-r+1)\,[{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}$$
$$+ {}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} \ldots\ldots + {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}]$$

wenn man die Glieder, welche gleiche Faktoren bei sich haben, addirt.

Da die erste Seite der Gleichung in seinen Gliedern der Coeffizient des $r$ten Gliedes ist aus dem Produkte der beiden Binomialreihen, so ist die andere Seite der Gleichung der $r-1$te Coeffizient, multiplicirt mit der Differenz aus dem Exponenten $(\alpha+\beta)$ und der Stellenzahl $r-1$; es gehört also dieser $r-1$te Binomialcoeffizient zu einer Binomialreihe der Potenz $\alpha+\beta$, und wir können ihn durch ${}^{\alpha+\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$ bezeichnen, und dem zu Folge ist:

$$\text{II. } r.\,[{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} \,.\,.\, {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}$$
$$+ {}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}]$$
$$= (\alpha+\beta-r+1)\;{}^{\alpha+\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.$$

Nun ist nach §. 53. ${}^{\alpha+\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}\,(r-1)$
$= {}^{\alpha+\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha+\beta-r+2)$; also auch ${}^{\alpha+\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$
$= {}^{\alpha+\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,\dfrac{(\alpha+\beta-r+2)}{r-1}$; ${}^{\alpha+\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,(r+2)$
$= {}^{\alpha+\beta}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha+\beta-r+3)$; also auch ${}^{\alpha+\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}$
$= {}^{\alpha+\beta}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,\dfrac{(\alpha+\beta-r+3)}{r-2}$ und so fort; endlich auch
${}^{\alpha+\beta}\overset{r-m+1}{\mathfrak{B}}\,(r-m+1) = {}^{\alpha+\beta}\overset{r-m}{\mathfrak{B}}.\,(\alpha+\beta-r+m)$ und
${}^{\alpha+\beta}\overset{r-m+1}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha+\beta}\overset{r-m}{\mathfrak{B}}.\,\dfrac{(\alpha+\beta-r+m)}{r-m+1}$.

Setzt man Gleiches für Gleiches, so erhalten wir endlich:

III. $[{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}$
$+ {}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^{\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.{}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.{}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}]$
$= \frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}.\frac{(\alpha+\beta-r+2)}{r-1}.\frac{(\alpha+\beta-r+3)}{r-2}\ldots\frac{\alpha+\beta-r+m}{r-m+1}$

welches in der That der $r$te Binomialcoeffizient des Produktes aus beiden Binomialreihen, also $= {}^{\alpha+\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ ist; denn wir dürfen nur $m = r$ setzen, um den $r$ten Coeffizienten zu haben, und es ist dann, wenn wir die erste Seite der Gleichung der Kürze wegen mit R bezeichnen:

$$R = \frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}.\frac{(\alpha+\beta-r+2)}{r-1}.\frac{(\alpha+\beta-r+3)}{r-2}\ldots\frac{\alpha+\beta}{1}$$

$= {}^{\alpha+\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}$; da nach §. 45. Zusatz ${}^{\alpha+\beta}\overset{r}{\mathfrak{B}}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)}{1}.\frac{(\alpha+\beta-1)}{2}.\frac{(\alpha+\beta-2)}{3}.\frac{(\alpha+\beta-3)}{4}\ldots\frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}$$

ist. Der eben aufgestellte Satz hat demnach seine Richtigkeit, da unter dem $r$ten Coeffizienten jeder Coeffizient vorgestellt werden kann, wenn wir $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ rc. setzen.

Zusatz 1. Um für $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ rc. die auf einander folgenden Binomialcoeffizienten zu erhalten, dürfen wir nur die am Anfange des Beweises aufgestellten Gleichungen addiren, und zwar zuerst Nr. 1 und 2; dann Nr. 1, 2 und 3; dann Nr. 1, 2, 3 und 4, und so fort. Es ergeben sich dadurch folgende Gleichungen:

1) $r)\ [{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{0}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}] = (\alpha+\beta-r+1)\,{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$
$+ (\alpha-r+2)\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}$

also ${}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}.{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$
$+ \frac{(\alpha-r+2)}{r}.{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}.$

2) r. $[{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}]$

$$= (\alpha+\beta-r+1).\,[{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}]$$
$$+ (\alpha-r+2)\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}$$

also $[{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}]$

$$= \frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}.\,[{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}]$$
$$+ \frac{(\alpha-r+3)}{r}.\,{}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}.$$

3) $[{}^{\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}]$

$$= \frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}.\,[{}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{r-3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}]$$
$$+ \frac{(\alpha-r+4)}{r}.\,[{}^{\alpha}\overset{r-4}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}].$$

ꝛc.

Man setze nun $r = 1$, so ist:

I. ${}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} = \frac{\alpha+\beta.}{1}$ aus Nr. 1. weil ${}^{\beta}\overset{0}{\mathfrak{B}} = 1\ {}^{\alpha}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}$ $= {}^{\alpha}\overset{1-1}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha}\overset{0}{\mathfrak{B}} = 1;\ {}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha}\overset{1-2}{\mathfrak{B}} = {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{B}} = 0$ nach §. 52., also auch $\frac{(\alpha-r+2)}{r}.\,{}^{\alpha}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} = 0$ ist.

Für $r = 2$ ist:

II. ${}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{(\alpha+\beta-1)}{2}\ {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}]$,

oder wenn man für ${}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}}$ den Werth aus Nr. I. setzt, ist ${}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} = \frac{(\alpha+\beta-1)}{2}.\frac{\alpha+\beta}{1}$

$$= \frac{(\alpha+\beta)}{1}.\frac{(\alpha+\beta-1)}{2}.$$

Für r = 3 ist:

$$\text{III.}\quad {}^{\alpha}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-2)}{3}\,.\,[{}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}}]$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-2)}{3}\,.\,\frac{(\alpha+\beta-1)}{2}\,.\,\frac{(\alpha+\beta)}{1}$$

rc.

Zusatz 2. Dasselbe erhalten wir auch aus der Gleichung für den rten Coeffizienten in Nr. III. des Beweises, wenn wir nur bei den verschiedenen Werthen von r in den Faktoren da abbrechen, wo im Nenner ein Werth = 0 erscheint; denn der höchste Faktor im Nenner ist ja nach §. 45. Zusatz der Index, ist also irgendwo ein Faktor im Nenner = Null, so ist dies der Coeffizient 1, weil $\overset{0}{\mathfrak{B}} = 1$ ist. Z. B. Es sey r = 3, so ist aus der Gleichung Nr. III. des Beweises

$$[{}^{\alpha}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}]$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-2)}{3}\,.\,\frac{(\alpha+\beta-1)}{3-1}\,.\,\frac{(\alpha+\beta)}{3-2}\,.\,\frac{(\alpha+\beta-3+4)}{3-3}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta-2)}{3}\,.\,\frac{(\alpha+\beta-1)}{2}\,.\,\frac{(\alpha+\beta)}{1}\,.\,\frac{\alpha+\beta+1}{0}$$

aber $\frac{\alpha+\beta+1}{0} = 1$, weil der Index 0 zum Coeffizienten 1 gehört; also ${}^{\alpha}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{2}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\alpha}\overset{1}{\mathfrak{B}}\,.\,{}^{\beta}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\beta}\overset{3}{\mathfrak{B}}$ $= \frac{(\alpha+\beta-2)}{3}\,.\,\frac{(\alpha+\beta-1)}{2}\,.\,\frac{\alpha+\beta}{1}\,.$

Zusatz 3. Auch sieht man dadurch deutlich, aus welchen Binomialcoeffizienten, und wie sich jeder Binomialcoeffizient des Produktes zusammen setze. Z. B. Es sey die eine Reihe der 4ten, die andere der 6ten Potenz, welche unter einander multiplicirt werden sollen, und es soll der 4te Binomialcoeffzient des Produktes gefunden werden, so erhalten wir ${}^{4}\overset{4}{\mathfrak{B}} + {}^{4}\overset{3}{\mathfrak{B}}.\,{}^{6}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{4}\overset{2}{\mathfrak{B}}.\,{}^{6}\overset{2}{\mathfrak{B}}$ $+ {}^{4}\overset{1}{\mathfrak{B}}.\,{}^{6}\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^{6}\overset{4}{\mathfrak{B}}$ $= \frac{(4+6)}{1}.\frac{(4+6-1)}{2}.\frac{(4+6-2)}{3}.\frac{(4+6-3)}{4}$, oder $\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} + \frac{4.3.2}{1.2.3}.\frac{6}{1} + \frac{4.3}{1.2}.\frac{6.5}{1.2} + \frac{4}{1}.\frac{6.5.4}{1.2.3}$ $+ \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = \frac{10}{1}.\frac{9}{2}.\frac{8}{3}.\frac{7}{4}$, oder auch $1 + 4.6$ $+ 6.15 + 20.4 + 15 = 210$ oder $210 = 210$; und in der That ist ${}^{10}\overset{4}{\mathfrak{B}} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210$.

Zusatz 4. Multiplicirt man zwei andere Binomialreihen, eine der Potenz γ, die andere der Potenz δ, so geben diese wieder eine Reihe, in der sich jeder Coeffizient aus $(\gamma + \delta)$ bildet; werden nun solche zwei Reihen, eine der Potenz $(\alpha + \beta)$, die andere der Potenz $(\gamma + \delta)$, multiplicirt, so bekommt man eine Reihe von derselben Form, in der sich jeder Coeffizient aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ bildet. Dasselbe fände statt, wenn n Reihen von verschiedenen Potenzen unter einander multiplicirt würden, deren Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots \nu$ wären; der rte Binomialcoeffizient eines solchen Produktes ist ${}^{(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta \ldots \nu)}\overset{r}{\mathfrak{B}}$. Sind alle diese Exponenten unter einander gleich $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \zeta \ldots \nu$, so ist der rte Binomialcoeffizient ${}^{n\alpha}\overset{r}{\mathfrak{B}}$ $= \frac{n\alpha}{1}.\frac{(n\alpha-1)}{2}.\frac{(n\alpha-2)}{3}.\frac{(n\alpha-3)}{4}.\frac{(n\alpha\ 4)}{5} \ldots \frac{(n\alpha-r+1)}{r}$; z. B. $[(1+x)^5]^4 = [1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5]^4$ der dritte Coeffizient dieser Potenz ist ${}^{5.4}\overset{3}{\mathfrak{B}} = \frac{5.4}{1}.\frac{(4.5-1)}{2}.\frac{(4.5-2)}{3} = \frac{20}{1}.\frac{19}{2}.\frac{18}{3}$ $= 1140$.

Fünftes Kapitel.

Anwendung des Binomialsatzes auf gebrochene und negative Exponenten.

§. 56. Satz. $(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{\frac{n}{m}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{4}{\mathfrak{B}}x^4 \ldots\ldots {}^{\frac{n}{m}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$.

Beweis. Sollen beide Ausdrücke gleich seyn, so müssen sie auch, zu gleichen Potenzen erhoben, gleiche Resultate geben. Es muß also auch $\left[(1+x)^{\frac{n}{m}}\right]^{\frac{m}{n}} = \left[1 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{\frac{n}{m}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 \ldots {}^{\frac{n}{m}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r\right]^{\frac{m}{n}}$. Daraus folgt nach Zusatz 4. des §. 35. $(1+x) = 1 + {}^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}}\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}}\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}}\overset{3}{\mathfrak{B}} + \ldots + {}^{\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{n}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r = 1 + {}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{1}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^{1}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 \ldots {}^{1}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$. Es ist aber ${}^{1}\overset{1}{\mathfrak{B}}x = \frac{1}{1}.\,x$, ${}^{1}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 = \frac{1.(1-1)}{1.\,2}.\,x^2 = 0$; also ist auch $(1+x) = 1 + 1.\,x + 0.\,x^2 = 1+x$; denn alle übrige Coeffizienten ${}^{1}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3$, ${}^{1}\overset{4}{\mathfrak{B}}x^4$ sind $= 0$. Dem zu Folge muß auch $(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{\frac{n}{m}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^{\frac{n}{m}}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 \ldots {}^{\frac{n}{m}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$ seyn.

§. 57. Satz. $(1+x)^{-\frac{n}{m}} = 1 + {}^{-\frac{n}{m}}\overset{1}{\mathfrak{B}}x + {}^{-\frac{n}{m}}\overset{2}{\mathfrak{B}}x^2 + {}^{-\frac{n}{m}}\overset{3}{\mathfrak{B}}x^3 \ldots + {}^{-\frac{n}{m}}\overset{r}{\mathfrak{B}}x^r$.

Beweis. $\left[(1+x)^{-\frac{n}{m}}\right]^{-\frac{m}{n}} = [1 + {}^{-\frac{m}{n}}\overset{1}{B}x + {}^{-\frac{n}{m}}\overset{2}{B}x^2 + {}^{-\frac{n}{m}}\overset{3}{B}x^3 \dots {}^{-\frac{n}{m}}\overset{r}{B}x^r]^{-\frac{m}{n}}$; denn sind diese Ausdrücke im Lehrsatze gleich, so müssen sie auch gleich bleiben, wenn sie zu gleichen Potenzen erhoben werden; daher $(1+x)^1$

$$= 1 + {}^{-\frac{n}{m}\cdot-\frac{m}{n}}\overset{1}{B}x + {}^{-\frac{n}{m}\cdot-\frac{m}{n}}\overset{2}{B}x^2 + {}^{-\frac{n}{m}\cdot-\frac{m}{n}}\overset{3}{B}x^3 + {}^{-\frac{n}{m}\cdot-\frac{m}{n}}\overset{4}{B}x^4 \dots\dots {}^{-\frac{n}{m}\cdot-\frac{m}{n}}\overset{r}{B}x^r = 1 + {}^1\overset{1}{B}x + {}^1\overset{2}{B}x^2 + {}^1\overset{3}{B}x^3 \dots\dots + {}^1\overset{3}{B}x^r.$$

Nun ist aber ${}^1\overset{1}{B}x = \frac{1}{1}\cdot x$; $x^2\overset{2}{B} = \frac{1.(1-1).x^2}{1.2} = 0.\ x^2$ und alle übrige Coeffizienten müssen $= 0$ seyn.

Zusatz. Für einen gebrochenen Exponenten n ist die Binomialreihe unbegrenzt; denn es möchte sonst der Coeffizient eines Gliedes, z. B. der r te nach §. 46. $= 0$ werden; also wäre $\frac{n.n-1.n-2.n-3\dots n-r+1}{1.2.3.4\dots\dots r} = 0$, oder $n - r + 1 = 0$, $n = r + 1$; ein Bruch n gleich einer ganzen Zahl, welches unmöglich ist; sie ist also unbegrenzt.

§. 58. Der Binomialsatz für gebrochene Exponenten findet vorzüglich bei Wurzelausziehungen aus solchen binomischen Größen seine Anwendung, die keine vollkommene Potenz des Wurzelexponenten sind, und aus denen die Wurzeln demnach nicht genau gezogen werden. Z. B. $\sqrt{(a^2+x^2)}$; $\sqrt[3]{(a^3+x^3)}$; $\sqrt[3]{(a^2-b)}$. Solche irrationale Größen können als Potenzen mit gebrochenen Exponenten dargestellt werden, und zwar ist $\sqrt{(a^2+x^2)} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[3]{(a^3+x^3)} = (a^3+x^3)^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{(a^2-b)} = (a^2-b)^{\frac{1}{3}}$. Alle diese Ausdrücke können auf die einfache Form des Binomiums $(1+z)$ gebracht werden. Z. B. $\sqrt{(a^2+x^2)} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$ $= (a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2)^{\frac{1}{2}}} = a\left(\frac{a^2+x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left[1+\frac{x^2}{a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$ $= a\,[1+z)^{\frac{1}{2}}$, wenn man $\frac{x^2}{a^2} = z$ setzt. Nun ist

$$(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}z+\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1}{1.\ 2}.z^2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2}{1.\ 2.\ 3}.z^3$$

$$+\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.z^4 \ldots \text{rc.}$$

$$= 1+\tfrac{1}{2}z+\frac{1.-1}{2.\ 4}.z^2+\frac{1.-1.-3}{2.\ 4.\ 6}.z^3$$

$$+\frac{1.-1.-3.-5}{2.\ 4.\ 6.\ 8}z^4 \ldots \text{rc.}$$

$= 1+\frac{1}{2}z-\frac{z^2}{2.\ 4}+\frac{1.\ 3z^3}{2.\ 4.\ 6}-\frac{1.\ 3.\ 5z^4}{2.\ 4.\ 6.\ 8}$; setzen wir nun für z den Werth $\frac{x^2}{a^2}$, so ist ferner $a\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)$

$$= a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}-\frac{x^4}{2.\ 4.\ a^4}+\frac{1.\ 3.\ x^6}{2.\ 4.\ 6.\ a^6}-\frac{1.\ 3.\ 5.\ x^8}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ a^8}\right)\ldots$$

$$= a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{2.\ 4.\ a^3}+\frac{1.\ 3.\ x^6}{2.\ 4.\ 6.\ a^3}-\frac{1.\ 3.\ 5.\ x^8}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ a^7}\ldots$$

$$= \sqrt{(a^2+x^2)}$$

Auch bei der Ausziehung der Wurzel eines höheren Grades aus besonderen Zahlen ist der Binomialsatz mit Vortheil anwendbar und zwar dann, wenn die Wurzel mehr als 7 Ziffern haben muß; denn sonst führt die Anwendung der Logarithmen schneller zum Ziele, z. B. $\sqrt[5]{241}$; hier soll die Wurzel mit 10 Decimalstellen richtig gefunden werden. Man zerfällt in einem solchen Falle die Größe unter dem Wurzelzeichen in zwei Theile dergestalt, daß der eine Theil eine vollkommene Potenz des Wurzelgrades ist.

$$\sqrt[5]{241} = \sqrt[5]{(3^5 - 2)} = \sqrt[5]{3^5\left(1 - \frac{2}{3^5}\right)}$$

$$= 3.\left(1 - \frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}.$$ Nun ist $\left(1 - \frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$= 1 - \frac{2}{5.\,3^5} - \frac{1.\,4.\,2^2}{1.\,2.\,5.\,5.\,3^{10}} - \frac{1.\,4.\,9.\,2^3}{1.\,2.\,3.\,5.\,5.\,5.\,3^{15}}$$

$$- \frac{1.\,4.\,9.\,14.\,2^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,5.\,5.\,5.\,3^{20}};$$ also auch $\left(1 - \frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$

$$= 1 - 0{,}001646090535 - 0{,}000005419228$$
$$- 0{,}000000026761 - 0{,}000000000154;$$

ferner $\left(1 - \frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}} = 1 - 0{,}001651536678$

$= 0{,}9983484633$, da man nur 10 Decimalstellen verlangte; daher ist auch $3\left(1 - \frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{241}$

$$= 2{,}9950453899.$$

Sechstes Kapitel.

Variationen zu bestimmten Summen.

§. 59. Erläuterungssätze. Wir haben in §. 54. bei der Multiplikation polynomischer Faktoren, welche nach Potenzen einer Hauptgröße regelmäßig fortschreiten, den rten Coeffizienten des Produktes dadurch gefunden, daß wir Variationsformen zur sovielten Classe bildeten, als polynomische Faktoren zu multipliciren waren; dabei jedoch nur jene Elemente des Index zusammenstellten, deren Summe gleich dem Index des verlangten Gliedes war, wobei wir aber vom Index Null diese Faktoren anfangen ließen. Was da von zwei solchen polynomischen Faktoren gesagt wurde, kann auf das Produkt mehrerer Faktoren angewendet werden, da man das Produkt aus zwei Faktoren immer als einen neuen Faktor betrachten kann. Um das Produkt von n solchen Faktoren zu bilden, müßten wir Formen der n ten Classe bilden, und zwar zur Summe r, das heißt, es müßten solche Elemente des Index zusammengestellt werden, deren Summe gleich r wäre, wenn man den r ten Coeffizienten des Produktes zu bilden hätte.

§. 60. Da wir es jedoch künftig blos mit der Multiplikation identischer Faktoren, oder was auf eins hinausgeht, blos mit Potenzen solcher Faktoren zu thun haben, bei denen nach §. 41. Zusatz 1. die Bildung der Variationsformen darin besteht, daß wir erst alle Combinationsformen zur sovielten Classe bilden, als Faktoren da sind, oder als der Exponent der verlangten Potenz besagt, und dann diese Formen permutiren, so haben wir uns hier blos mit der Methode zu befassen, Combinationsformen zu bilden, deren Elemente zusammen eine Summe geben, welche gleich ist dem Index des verlangten Gliedes.

§. 61. Erklärung. Die Bildung solcher Combinationsformen, deren Elemente eine bestimmte Summe geben, heißt Combiniren zu bestimmten Summen, so wie das Bilden solcher Variationsformen, deren Elemente eine bestimmte Summe geben, Variiren zu bestimmten Summen heißt.

§. 62. Dabei gibt es ein doppeltes Verfahren, entweder das coordinirende §. 24., wo alle Formen von derselben Classe sind, oder das subordinirende §. 23., bei welchem man von niederen Classen zu höheren aufsteigt. In beiden Fällen ist jedoch dies als unabänderliche Regel fest zu stellen, daß nie ein früheres oder niedrigeres Element auf ein höheres oder späteres folge.

§. 63. Coordinirend verfährt man so:

Man setze in alle frühere Stellen das niedrigste Element des Index, in die letzte aber ein Element, groß genug, um mit den übrigen die bestimmte Summe voll zu machen; wenn also der Index mit Null anhebt, wie in §. 54., so setzt man in alle frühere Stellen 0, in die letzte aber ein Element, groß genug, um mit allen frühe- ren Elementen die bestimmte Summe zu geben, welches demnach in diesem Falle der Summe selbst gleich ist; ist aber das niedrigste Element des Index 1, so besetzt man alle Stellen der Form mit 1, die letzte Stelle aber mit einem Elemente des Index, welches mit den übrigen Ei- nern die verlangte Summe gibt; dadurch erhält man die niedrigste Form. Z. B. von I. $(\overset{0}{a} + \overset{1}{b}x + \overset{2}{c}x^2 + \overset{3}{d}x^3 + \overset{4}{e}x^4 + \overset{5}{f}x^5 + \overset{6}{g}x^6 + \overset{7}{h}x^2 + \overset{8}{k}x^8)^5$ müßte man For- men der fünften Classe bilden, und verlangt man das 7te Glied nach dem anfänglichen, so müßte man Formen zur Summe 7 bilden, von denen die niedrigste 00007 wäre.

Aber von II. $(ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6)^5$ wäre die niedrigste unter den Formen der fünften Classe zur Summe 7 die Form 11113.

2. Hat man bei einer beschränkten Anzahl von Ele- menten kein so hohes, um die Summe voll zu machen, so besetze man die letzte Stelle mit dem höchsten Elemente, das man hat, und lege den vorhergehenden so viel bei, bis die Summe erreicht ist, und zwar erst der vorletzten Stelle das möglich höchste, dann der drittletzten Stelle und so fort, ohne jedoch gegen §. 22. Zusatz zu fehlen. Z. B. die niedrigste Form der fünften Classe zur Summe 14 von I. ist 00068, von II. aber 11156.

3. Um die nächst höheren Formen derselben Sum- me und Classe zu bilden, sehe man auf das Element der letzten Stelle, ist dasselbe um mehr denn 1 größer, als das vorletzte Element, so vermindere man das letzte und erhöhe das vorletzte um 1, dadurch erhält man die nächst höheren Formen derselben Classe und Summe §. 10; also die nächst höhere Form zur Summe 7 aus I. ist 00016, aus II. aber 11122; zur Summe 14 aber aus I. ist 00077.

4. Ist aber das letzte Element dem vorletzten gleich, oder nur um 1 größer, so gehe man zu früheren Stellen und suche die nächst niedrigere Stelle auf, in der ein Element steht, das um mehr als 1 kleiner ist als das Element der letzten Stelle; dieses Element an der früheren Stelle erhöhe man um 1, ohne jedoch die früheren Elemente zu ändern, in die späteren Stellen setze man Elemente, die dem erhöhten gleich sind, bis auf die letzte Stelle, in der ein Element stehen muß, das alle übrige zur bestimmten Summe ergänzt und nicht kleiner, wohl aber größer seyn kann als die früheren. Es ist also die nächst höhere Form zur Summe 14 aus II. 11228; da aber kein so großes Element wie 8 in II. da ist, so verfährt man nach Nr. 2., und die nächst höhere Form ist 11246.

5. Hat die Form kein Element, welches um mehr als 1 kleiner ist als das letzte Element, so ist sie die letzte und höchste Form dieser Classe und zu dieser Summe. Die höchste Form zur Summe 7 in I. ist demnach 11122, in II. eben so 11122.

Alle Formen der fünften Classe zur Summe 7 sind folgende:

aus I.	00007	aus II. aber	11113
	00016		11122.
	00025		
	00034		
	00115		
	00124		
	00133		
	00223		
	01114		
	01123		
	01222		
	11113		
	11122		

§. 64. Subordinirendes Verfahren. Beim subordinirenden Verfahren, wo man von den Formen der niedrigsten Classe, von den Unionen zu den höheren Classen, den Binionen, Ternionen ꝛc. aufsteigt, setze man:

1. Die Zahl n hier 7 als Union hin.

2. Man zerlege die Zahl n in zwei Theile 1 und n — 1, 2 und n — 2 und so fort, indem man immer das erste Element um 1 erhöhet und das zweite um 1 erniedriget, bis beide einander entweder gleich sind, oder das letzte nur um 1 höher ist als das erste; dadurch erhält man die Binionen.

3. Aus den Binionen erhält man die Ternionen, indem man das letzte Element einer jeden Binion in zwei Theile zerlegt, so lange, bis beide einander gleich sind, oder der letzte nur 1 größer ist als der vorletzte; jedoch darf keiner der beiden Theile kleiner seyn als das vorhergehende Element; dadurch erhält man die Ternionen.

4. Eben so verfährt man mit dem letzten Elemente einer jeden Ternion, um die Quaternionen zu erhalten, und so fort.

Nach dieser Regel sind die Formen zur Summe 7 folgende.

Die Union ist 7

Binionen ... 16, 25, 34 } aus 7

Ternionen 115, 124, 133 } aus der Binion 16.
223 aus der Binion 25.

Quaternionen 1114, 1123 } aus der Ternion 115.
1222 aus der Ternion 124.

11113, 11122 } aus der Quaternion 1114.

Ableitung der Formen einer höheren Summe aus Formen einer niedrigeren Summe.

§. 65. I. Die Formen zur Summe n werden aus denen zur Summe n — 1 so abgeleitet:

1. Man setze allen Formen der Summe n — 1 das Element 1 vor.

2. In denjenigen Formen zur Summe n — 1, welche nicht zwei gleiche Anfangselemente haben, erhöhe man das erste um 1. Z. B. aus den Formen zur Summe 4 1111, 112, 13, 22, 4 sind die zur Summe fünf folgende: 11111, 1112, 113, 122, 14, 23, 5; diesen wird, wie hier geschehen ist, das Element beigefügt, welches allein die verlangte Summe gibt.

§. 66. II. Um die Variationsformen aller Classen zur Summe 1, 2, 3, 4 ꝛc. zu haben, darf man nur die Combinationsformen aller Classen zur Summe 1, 2, 3, 4 ꝛc. bilden und diese permutiren; wenn man nun den Variationsformen zur Summe 4 das Element 1, denen zur Summe 3 das Element 2, denen zur Summe 2 das Element 3 und denen zur Summe 1 das Element 4 vorsetzt, so hat man die Variationsformen aller Classen zur Summe fünf, wenn man nur noch die Union 5 hinzufügt.

Denn die Variationsformen zur Summe 4 sind: 4; 13, 31; 22; 112, 121, 211; 1111; die Formen zur Summe 3 sind 3; 12, 21, 111; die Formen zur Summe 2 sind 2; 11; und die Form zur Summe 1 ist 1.

Die Variationsformen zur Summe fünf sind: 5; 14, 41; 23, 32; 122, 212, 221; 113, 131, 311; 1112, 1121, 1211, 2111 und diese sind gleich den Formen

$$\begin{array}{c|r} 1 & 4 \\ 1 & 13 \\ 1 & 31 \\ 1 & 22 \\ 1 & 112 \\ 1 & 121 \\ 1 & 211 \\ 1 & 1111 \end{array} + \begin{array}{c|r} 2 & 3 \\ 2 & 12 \\ 2 & 21 \\ 2 & 111 \end{array} + \begin{array}{c|r} 3 & 2 \\ 3 & 11 \end{array} + \begin{array}{c|r} 4 & 1 \end{array} + 5$$

Bezeichnen wir die Variationsformen zur Summe r durch $\overset{r}{\mathfrak{r}}$ oder auch ${}^{r}\mathfrak{r}$, und die Elemente 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \overset{4}{a}, \overset{5}{a} \ldots$ etc., so ist ${}^{r}\mathfrak{r}$

$$= \overset{1}{a}\,{}^{r-1}\mathfrak{r} + \overset{2}{a}\,{}^{r-2}\mathfrak{r} + \overset{3}{a}\,{}^{r-3}\mathfrak{r} + \overset{4}{a}\,{}^{r-4}\mathfrak{r} \ldots\ldots + \overset{r-1}{a}\,{}^{1}\mathfrak{r} + \overset{r}{a}.$$

Siebentes Kapitel.

Anwendung der Variation zu bestimmten Summen auf den polynomischen Satz.

§. 67. Erklärung. Ein jeder Ausdruck, der aus mehr als zwei Theilen besteht, welche durch das Additions- oder Subtraktionszeichen verbunden sind, heißt ein Polynomium.

§. 68. Erklärung. Die nte Potenz eines Polynomiums ist ein Produkt aus gleichen, jedoch zusammengesetzten Faktoren. Zusammengesetzte Faktoren sind Reihen von eben so vielen Elementen, als Theile in einem jeden Faktor vorkommen. Diese identischen Faktoren unter einander multipliciren, heißt Variationsformen aus den Elementen dieser identischen Reihen, von denen jede gleichviele und gleiche Elemente hat, bilden, indem das Multipliciren, wodurch jede Potenz gebildet wird, nach §. 42. ein Variiren ist.

§. 69. Aufgabe. Die nte Potenz von $(a+b+c+d \ldots. m)$ zu bilden.

Auflösung. Da $(a+b+c+d \ldots. m)^n$ ein Produkt aus n identischen, jedoch zusammengesetzten Faktoren ist, und jeder Faktor in seinen Theilen eine Reihe von Elementen darstellt, so führen wir für alle diese n Reihen einen Index, und zwar den Index 1, 2, 3, 4 .... m ein und bilden aus demselben alle Variationsformen zur nten Classe, da es n Reihen gibt; jedoch sind die Elemente unbedingt wiederholbar. Wir bilden also zuerst alle Combinationsformen zur n ten Classe aus unbedingt wiederholbaren Elementen und permutiren dann die Elemente einer jeden Form. Da jedoch Versetzung der Elemente in einer Form nichts anders ist, als Versetzung der Faktoren eines Produktes, welches die Form selbst ist, einerlei Faktoren aber in veränderter Ordnung einerlei Produkt geben, so ist die Permutationszahl nichts anders, als der Coeffizient, welcher anzeigt, wie oft die Form als Produkt zu setzen ist. Bei der Bildung dieser Combinationsformen bedienen wir uns des in §. 24. aufgestellten coordinirenden Verfahrens und verfahren dabei, wie folgt.

1. Bilden wir die niedrigste Form, welche das niedrigste Element so oft enthält, als der Grad der Classe angibt; diese bestehe demnach aus 1 oder a so oftmal genommen, bis der n te Grad der Classe erreicht ist, und sie ist dem zu Folge $= a^n$.

2. Werfen wir aus der letzten Stelle dieser Form a^n das letzte Element hinaus, um dafür zuerst das nächst höhere b, dann das noch höhere c, d.... etc. zu setzen, bis kein höheres mehr vorhanden ist; dadurch ergeben sich die Formen $a^{n-1}b$, $a^{n-1}c$, $a^{n-1}d$.... etc., das heißt, wir verbinden a^{n-1} mit allen Unionen der übrigen $(m-1)$ Elemente. Bezeichnen wir den Inbegriff aller Unionen von $(m-1)$ Elementen durch $\overset{1}{\underset{m-1}{C'}}$, so ergibt sich $a^{n-1}\overset{1}{\underset{m-1}{C'}}$.

3. Weil nun in der letzten Stelle keine Erhöhung mehr statt findet, so werfen wir in der vorletzten Stelle das Element hinaus, wodurch wir a^{n-2} erhalten, und setzen dafür das nächst höhere b, aber die letzte Stelle besetzen wir auch mit b, so daß wir $a^{n-2}bb$ erhalten;

nun wird das Element b in der letzten Stelle hinausgeworfen, um dafür successiv die höheren c, d .... m setzen zu können; läßt die letzte Stelle keine Erhöhung mehr zu, so geht es an die vorletzte, in der wir statt b das Element c setzen, und die letzte Stelle füllen wir auch mit c aus; so daß wir $a^{n-2}cc$ erhalten; nun erleidet wieder die letzte Stelle successive Erhöhungen, bis wir $a^{n-2}dd$ erhalten, und so wird die Operation fortgesetzt, bis die beiden letzten Stellen mit dem höchsten Elemente besetzt sind $a^{n-2}mm$; dadurch bilden wir aber alle Binionen mit unbedingter Wiederholung aus den übrigen (m — 1) Elementen und verbinden diese Binionen mit a^{n-2}. Bezeichnen wir den Inbegriff dieser Binionen mit gestatteter Wiederholung aus (m — 1) Elementen durch $\overset{2}{\underset{m-1}{C'r}}$, so erhalten wir $a^{n-2}\overset{2}{\underset{m}{C'r}}$, wo das hineingesetzte r repetitio) Wiederholung bedeutet.

4. Nun wird zur drittletzten Stelle geschritten, und das niedrigste Element hinausgeworfen, wodurch man a^{n-3} erhält; statt dessen setzt man b und besetzt die beiden letzten Stellen auch mit b; dies gibt $a^{n-3}bbb$; das Element b in der letzten Stelle wird hinausgeworfen, und dafür successiv ein höheres gesetzt, bis keins mehr vorhanden ist; dann wird das vorletzte b hinausgeworfen und wie in Nr. 2. ein höheres gesetzt, und eben so geschieht es mit der drittletzten Stelle, das heißt, wir bilden alle Ternionen mit Wiederholung aus m — 1 Elementen und verbinden sie mit a^{n-3}. Bezeichnen wir den Inbegriff aller Ternionen mit $\overset{3}{\underset{m-1}{C'r}}$, so erhalten wir $a^{n-3}\overset{3}{\underset{m-1}{C'r}}$.

5. Dies Verfahren geht nun so fort, bis auch das erste Element a verschwindet, und wir die Form b^n erhalten. Mit b^{n-1} werden nun ebenfalls alle Unionen, dann alle Binionen mit b^{n-2}, dann alle Ternionen der übrigen $(m-2)$ Elemente $c, d, e \ldots m$ mit b^{n-3} und so fort verbunden, bis man auf die Form c^n kommt.

6. Mit c^{n-1} werden alle Unionen, mit c^{n-2} alle Binionen, mit c^{n-3} alle Ternionen, mit c^{n-4} alle Quaternionen, aus den übrigen $m-3$ Elementen $d, e \ldots m$ verbunden, bis man die Form d^n erhält.

7. Dies Verfahren muß so lange auf diese Art fortgesetzt werden, bis man die Form erhält, welche das höchste Element so oft enthält, als der Grad der Classe, das ist der Exponent der Potenz besagt, also m^n.

8. Für die Permutationszahl gilt folgendes:

α) Die Formen a^n, b^n, c^n, $d^n \ldots m^n$ haben nach §. 19. Aufgabe 9. blos die Permutationszahl 1.

β) Bei allen Unionen ist die Permutationszahl n; denn nach §. 19. Aufgabe 9. ist $a^{n-1}b$

$$= \frac{1.1.3.4.5\ldots(n-1).n}{1.2.3.4.5\ldots n-1.1} = \frac{n}{1}.$$

γ) Bei allen Binionen aus zwei identischen Elementen, wie $a^{n-2}b$, ist die Permutationszahl $\frac{n.n-1}{1.2}$ nach §. 19.; bei allen Binionen von zwei ungleichen, wie $a^{n-2}bc$ ist sie $n.n-1$; denn

$$\frac{1.2.3.4\ldots n-2.n-1.n}{1.2.3.4\ldots n-2.1.1} = n.n-1.$$

δ) Ueberhaupt richtet sich die Permutationszahl nach den Elementen der Form und wird immer nach §. 19.

Aufgabe 9. aufgestellt. Wir wollen sie durch π bezeichnen, und so ist:

$$(a + b + c + d \ldots m)^n$$

$$= a^n + \pi a^{n-1} \overset{1}{\underset{m-1}{C'}} + \pi a^{n-2} \overset{2}{\underset{m-1}{C'}} + \pi a^{n} \overset{3}{\underset{m-1}{C'}} \text{ etc.}$$

$$+ b^n + \pi b^{n-1} \overset{1}{\underset{m-2}{C'}} + \pi b^{n-2} \overset{2}{\underset{m-2}{C'}} + \pi b^{n-3} \overset{3}{\underset{m-2}{C'}} \ldots$$

$$+ c^n + \pi c^{n-1} \overset{1}{\underset{m-3}{C'}} + \pi c^{n-2} \overset{2}{\underset{m-3}{C'}} + \pi c^{n-3} \overset{3}{\underset{m-3}{C'}} \ldots \text{ etc.}$$

$$+$$

$$+$$

$$+ m^n,$$

wobei m — 1 die Elemente b, c, d .... m
m — 2 die Elemente c, d, e .... m
m — 3 die Elemente d, e, f .... m bedeutet.

Beweis. Jede Potenz ist ein Produkt aus identischen Faktoren, welches durch Multiplikation der identischen Faktoren gebildet wird; nun ist die Multiplikation nach §. 42. nichts anders, als eine Variation; da hier alle Variationsformen aus den Elementen der identischen Faktoren gebildet worden sind, so sind auch diese identischen Faktoren unter einander multiplicirt worden, und man hat die nte Potenz von $(a + b + c + d \ldots m)$ gebildet.

Beispiel. $(a + b + c + d)^3$

$$= a^3 + \pi a^2 \begin{cases} b \\ c \\ d \end{cases} + \pi a \begin{cases} bb \\ bc \\ bd \\ cc \\ cd \\ dd \end{cases} + b^3 + \pi b^2 \begin{cases} c \\ d \end{cases} + \pi b \begin{cases} cc \\ cd \\ dd \end{cases}$$

$$+ c^3 + \pi c^2 (d + \pi c, dd + d^3$$

oder

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{(a+b+c+d)^3} \\
= a^3 + 3a^2b & + 3ab^2 & + b^3 & + 3b^2c & + 3ac^2 & \\
\quad + 3a^2c & + 6abc & & + 3b^2d & + 6acd & \\
\quad + 3a^2d & + 6abd & & & + 3ad^2 & \\
 & + 3ac^2 & & & & \\
 & + 6acd & & & & \\
 & + 3ad^2 & & & & \\
\multicolumn{6}{l}{\quad + c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3.}
\end{array}
$$

Die Permutationszahl von a^2b ist nach §. 19. $\frac{1.2.3}{1.2} = 3$, von abc ist sie $= 1.2.3 = 6$.

Beispiel II. $(a-b-c)^4$

$$
= a^4 + \pi a^3 \left\{\begin{matrix} -b \\ -c \end{matrix}\right. + \pi a^2 \left\{\begin{matrix} -b.-b \\ -b.-c \\ -b.-c \end{matrix}\right. + \pi a \left\{\begin{matrix} -b.-b.-b \\ -b.-b.-c \\ -b.-c.-c \\ -c.-c.-c \end{matrix}\right.
$$

$$
+ b^4 + \pi.-b^3.-c + \pi.b^2.-c.-c + \pi.-b.-c.-c.-c + c^4
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{(a-b-c)^4} \\
= a^4 - 4a^3b & + 6a^2b^2 & - 4ab^3 & + b^4 & + 4b^3c & + 6b^2c^2 \\
\quad - 4a^3c & + 12a^2bc & - 12ab^2c & & + 4bc^3 & + c^4 \\
 & + 6a^2c^2 & - 12abc^2 & & & \\
 & & - 4ac^3 & & &
\end{array}
$$

Anmerkung. Dieses leichte und bequeme Niederschreiben der Formen, welches nach §. 24. ganz mechanisch geschieht, ist weit schneller und sichert mehr vor dem Fehlen als die bloße Multiplikation.

§. 70. Erläuterungssatz. Wenn polynomische Faktoren, welche nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, multiplicirt werden sollen, so wissen wir aus §. 54., daß das Produkt eine Reihe von derselben Form ist, welche ebenfalls nach Potenzen derselben Hauptgröße fortschreitet, und daß die Coeffizienten Summen sind aus den Partialprodukten von solchen Coeffizienten der zu multiplicirenden Reihen, deren Indices (Zeiger) zusammenaddirt gleich sind der Potenz, welche die Hauptgröße des verlangten Gliedes im Produkte hat.

§. 71. **Aufgabe.** Die $n$te Potenz des Polynomiums $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots rx^r)$ zu bilden.

Auflösung. Da die Glieder regelmäßig nach Potenzen derselben Hauptgröße x fortschreiten, und da selbst dem ersten Gliede die Hauptgröße mit dem Exponenten Null als Faktor beigefügt werden kann, so können wir die Hauptgröße selbst als Zeiger für die Glieder der zu potenzirenden Reihe einführen und alle Variationsformen zur $n$ten Classe aus diesem Index bilden, und zwar zuerst alle Combinationsformen zur $n$ten Classe mit unbedingt gestatteter Wiederholung der Elemente nach §. 24., und dann können die Elemente in den einzelnen Formen permutirt werden. Da aber Versetzung der Elemente in der Form nichts anders ist, als Versetzung von Faktoren, denn die Elemente sind Faktoren, einerlei Faktoren in veränderter Ordnung einerlei Produkt geben, so zeigt die Permutationszahl nichts anders an, als wie oft die Form als Produkt zu setzen ist, und ist demnach ein Coeffizient. Nun dürfen aber bloß jene Elemente des Zeigers in eine Form zusammengestellt werden, deren Summe gleich ist der Potenz der Hauptgröße von dem verlangten Gliede des Produktes. Wollte man dasjenige Glied des Produktes, welches x^6 zum Faktor hat, hier in unserem Falle das sechste nach dem anfänglichen, eigentlich also das siebente, so müßten wir jene Elemente des Zeigers zusammenordnen, deren Summe $= 6$ wäre, auch dürften nur so viele Elemente in eine jede Form eintreten, als der Grad der Classe, der immer gleich ist, dem Exponenten der Potenz oder der Anzahl der zu multiplicirenden Reihen besagt, überdies dürfte auch in dem Zusammenstellen der Elemente nie ein späteres oder höheres einem früheren oder niedrigeren nach §. 22. Zusatz vorangehen, und dann werden, statt der Elemente des Zeigers, die durch sie vorgestellten Glieder der Reihe gesetzt. Bezeichnen wir den Inbegriff aller Formen, welche derselben Summe angehören, durch ${}^{m}\overset{n}{\mathfrak{C}'}$, wenn zur Summe m combinirt werden sollte, bei welchem Ausdrucke ${}^{m}\overset{n}{C}r$ der Inbegriff aller Formen der $n$ten Classe zur Summe m bezeichnet wird, der hineingesetzte Buchstabe r (repetitio Wiederholung), der Buchstabe C aber Combinationsform bedeutet, und bezeichnen wir ferner die Permutationszahl durch π, die allerdings nach den Elementen in der Form sich richtet, so können wir das $m$te Glied des Produktes nach dem anfänglichen durch $\pi^{m}\overset{n}{C}r\,x^{m}$ bezeichnen, und dann ist das sechste nach dem anfänglichen $\pi^{6}\overset{n}{C}x^{6}$, und es ist

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots rx^r)^n = a^n + \pi^1\overset{n}{C}r\,x^1 + \pi^2\overset{n}{C}r\,x^2 + \pi^3\overset{n}{C}r\,x^3 + \pi^4\overset{n}{C}r\,x^4 \ldots + \pi^m\overset{n}{C}r\,x^m \ldots \pi^r\overset{n}{C}x^r.$$

Beweis. Jede Potenz ist ein Produkt aus identischen Faktoren, welches durch die Multiplikation der identischen Faktoren gebildet wird; jede Multiplikation ist nach §. 42. eine Variation, die zuerst das Combiniren und dann das Permutiren involvirt. Daß ferner nur der Inbegriff jener Formen, deren Elemente eine der Potenz der Hauptgröße von dem verlangten Gliede gleiche Summe geben, den Coeffizienten des verlangten Gliedes darstellt, geht daraus hervor, weil nur jene Formen oder Produkte, welche dieselbe Potenz der Hauptgröße, und zwar die Potenz des gesuchten Gliedes zum Faktor haben, in eine Summe gebracht werden können. Alle Formen aber, welche dieselbe Potenz der Hauptgröße führen, gehören derselben Summe an, und diese ist gleich dem Exponenten der Hauptgröße, die sie als Faktor führen; also ist auch der Inbegriff aller Formen, deren Elemente eine der Potenz der Hauptgröße von dem verlangten Gliede gleiche Summe geben, der Coeffizient des gesuchten Gliedes.

Zusatz. Hätte nun das zur $n$ten Potenz zu erhebende Polynomium auch im ersten Gliede schon die

Hauptgröße in irgend einer Potenz als Faktor, so wäre

$$(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots rx^r)^n = b^n x^n + \pi^{n+1}\overset{n}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}x^{n+1} + \pi^{n+2}\overset{n}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}x^{n+2} + \pi^{n+3}\overset{n}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}x^{n+3} \ldots + \pi^{n+r}\overset{n}{C}x^{n+r},$$

oder auch $(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots rx^r)^n$

$$= \pi^{n}\overset{n}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}x^{n} + \pi^{n+1}\overset{n}{C}x^{n+1} + \pi^{n+2}\overset{n}{C}x^{n+} + \pi^{n+3}\overset{n}{C}x^{n+3} + \pi^{n+4}\overset{n}{C}x^{n+4} \ldots + \pi^{n+r}\overset{n}{C}x^{n+r}.$$

Beispiel. Es ist $(\overset{0}{a} + \overset{1}{bx} + \overset{2}{cx^2} + \overset{3}{dx^3} + \overset{4}{ex^4})^4$ zu entwickeln. Die Form zur Summe 0 oder ${}^{0}\overset{4}{C}x^{0} = 0000 = a.\,a.\,a.\,a = a^4$ und $\pi = 1$.

${}^{1}\overset{4}{C}x^{1} = 0001 = a^3bx$ und $\pi = \frac{1.\,2.\,3.\,4}{1.\,2.\,3} = 4$

also $\pi\,{}^{1}\overset{4}{C}x^{1} = 4a^3bx$

${}^{2}\overset{4}{C}x^{2} = 0002 = a^3cx^2$ und $\pi = \frac{1.\,5.\,3.\,4}{1.\,2.\,3} = 4$

$0011 = a^2bx.\,bx \quad \pi = \frac{1.\,2.\,3.\,4}{1.\,2.\,1.\,2} = 6$

also $\pi\,{}^{2}\overset{4}{C}x^{2} = \left.\begin{array}{l} 4a^3c \\ +\,6a^2b^2 \end{array}\right\} x^2$

${}^{3}\overset{4}{\mathfrak{C}}\mathrm{r} = 0003 = a^3dx^3, \quad \pi = 4,$

$0012 = a^2bx.\,cx^2 \quad \pi = \frac{1.\,2.\,3.\,4}{1.\,2}$

$0111 = a.\,bx.\,bx.\,bx \quad \pi = 4$

also $\pi\,{}^{3}\overset{4}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}x^{3} = \left.\begin{array}{l} 4a^3d \\ +\,12a^2bc \\ +\,4ab^3 \end{array}\right\} x^3$

$$\begin{array}{llll}
{}^{4}\overset{4}{C}x = 0004 = & a^3 . ex^4, & \pi = & 4, \\
\phantom{{}^{4}\overset{4}{C}x =}\ 0013 & a^2 . bx . dx^3 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{4}\overset{4}{C}x =}\ 0022 & a^2 . cx^2 . cx^2 & \pi = & 6 \\
\phantom{{}^{4}\overset{4}{C}x =}\ 0112 & a . bx . bx . cx^2 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{4}\overset{4}{C}x =}\ 1111 & bx . bx . bx . bx & \pi = & 1
\end{array}$$

$$\text{also } \pi\, {}^{4}\overset{4}{C}x^4 = \left.\begin{array}{l} 4a^3e \\ + 12a^2bd \\ + 6a^2c^2 \\ + 12ab^2c \\ + b^4 \end{array}\right\} x^4$$

$$\begin{array}{llll}
{}^{5}\overset{4}{C}x = 0014 = & a^2 . bx . ex^4, & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{5}\overset{4}{C}x =}\ 0023 = & a^2 . cx^2 . dx^3 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{5}\overset{4}{C}x =}\ 0113 = & a . bx . bx . dx^3 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{5}\overset{4}{C}x =}\ 0122 = & a . bx . cx^2 . cx^2 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{5}\overset{4}{C}x =}\ 1112 = & b^3x^3 . cx^2 & \pi = & 4
\end{array}$$

$$\text{also } \pi\, {}^{5}\overset{4}{C}x = \left.\begin{array}{l} 12a^3be \\ + 12a^2cd \\ + 12ab^2d \\ + 12abc^2 \\ + 4b^3c \end{array}\right\} x^5$$

$$\begin{array}{llll}
{}^{6}\overset{4}{C}x = 0033 = & a^2 . dx^3 . dx^3, & \pi = & 6 \\
\phantom{{}^{6}\overset{4}{C}x =}\ 0024 & a^2 . cx^2 . ex^4 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{6}\overset{4}{C}x =}\ 0114 & a . bx . bx . ex^4 & \pi = & 12 \\
\phantom{{}^{6}\overset{4}{C}x =}\ 0123 & a . bx . cx^2 . dx^3 & \pi = & 24 \\
\phantom{{}^{6}\overset{4}{C}x =}\ 1113 & bx . bx . bx . dx^3 & \pi = & 4 \\
\phantom{{}^{6}\overset{4}{C}x =}\ 1122 & b^2x^2 . c^2x^4 & \pi = & 6 \\
\phantom{{}^{6}\overset{4}{C}x =}\ 0222 & a . c^3x^6 & \pi = & 4
\end{array}$$

$$\text{also } \pi\, {}^{6}\overset{4}{C}x^6 = \left.\begin{array}{l} 6a^2d^2 \\ + 12a^2ce \\ + 12ab^2e \\ + 24abcd \\ + 4b^3d \\ + 6b^2c^2 \\ + 4ac^3 \end{array}\right\} x^6$$

$\overset{4}{7C} = 0034 = a^2 . dx^3 . ex^4, \quad \pi = 12$

$0124 \quad a . bx . cx^2 . ex^4 \quad \pi = 24$

$0133 = a . bx . dx^3 . dx^3 \quad \pi = 12$

$0223 \quad a . cx^2 . cx^2 . dx^3 \quad \pi = 12$

$1114 \quad b^3x^3 . ex^4 \quad \pi = 4$

$1123 \quad b^2x^2 . cx^2 . dx^3 \quad \pi = 12$

$1222 \quad bx . c^3x^6 \quad \pi = 4$

also $\pi \, \overset{4}{7C}x^7 = \left.\begin{array}{r} 12\,a^2de \\ 24\,abce \\ 12\,abd^2 \\ 12\,ac^2d \\ 4\,b^3e \\ 12\,b^2cd \\ 4\,bc^3 \end{array}\right\} x^7$

$\overset{4}{8C} = 0044$
0134
0224
0233
1124 ꝛc.
1133
1223
2222

Beispiel II. Es soll

$$\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \ldots\right)$$ zur 9ten

Potenz erhoben werden.

Auflösung. Da die Reihe nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreitet, welche immer um den Exponenten 2 zunehmen, und das Produkt nach §. 54, 59. eine Reihe von derselben Form seyn muß, so wird auch die Reihe des Produktes nach den Potenzen der Hauptgröße x und zwar nach den Potenzen x^9, x^7, x^{13}, x^{15}, x^{17}, x^{19}.... ꝛc. Es werden daher alle Formen zu den Summen 9, 11, 13, 15, 17, 19 ꝛc. aus den Elementen 1, 3, 5, 7, 9, 11 .... rc. des Index gebildet. Diese Formen sind:

1. zur Summe 9, 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1
$= x. x. x. x. x. x. x. x. x = x^9$ und
$$\pi = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = 1$$

2. zur Summe 11, $1.1.1.1.1.1.1.1.3 = x^8. - \frac{x^3}{3}$
$= - \frac{x^{11}}{3}$ und $\pi = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 9$
nach §. 19. Aufgabe 9. unter π wird die Permutationszahl bezeichnet.

3. Formen zur Summe 13,
$$1.1.1.1.1.1.1.1.5 = x^8. \frac{x^5}{5} = \frac{x^{13}}{5}$$
$$1.1.1.1.1.1.1.3.3 = x^7. - \frac{x^3}{3}. \frac{x^3}{3} = \frac{x^{13}}{9}$$
$$\overset{1}{\pi} = 9, \ \overset{2}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7.1.2} = \frac{8.9}{1.2} = 36$$

4. Formen zur Summe 15,
$$1.1.1.1.1.1.1.1.7 = x^8. - \frac{x^7}{7} = - \frac{x^{15}}{7}$$
$$1.1.1.1.1.1.1.3.5 = x^7. - \frac{x^3}{3}. \frac{x^5}{5} = - \frac{x^{15}}{15}$$
$$1.1.1.1.1.1.3.3.3 = x^6. - \frac{x^3}{3}. - \frac{x^3}{3}. - \frac{x^3}{3} = - \frac{x^{15}}{27}$$
$$\overset{1}{\pi} = 9 \ \overset{2}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7} = 8.9,$$
$$\overset{3}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.1.2.3} = \frac{7.8.9}{1.2.3} = 84$$

5. Formen zur Summe 17,

$$1.1.1.1.1.1.1.1.9 = x^8 . \frac{x^9}{9} = \frac{x^{17}}{9}$$

$$1.1.1.1.1.1.1.3.7 = x^7 . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^7}{7} = \frac{x^{17}}{21}$$

$$1.1.1.1.1.1.1.5.5 = x^7 . \frac{x^5}{5} . \frac{x^5}{5} = \frac{x^{17}}{25}$$

$$1.1.1.1.1.1.3.3.5 = x^6 . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . \frac{x^5}{5} = \frac{x^{17}}{45}$$

$$1.1.1.1.1.3.3.3.3 = x^5 . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . = \frac{x^{17}}{81}$$

$$\overset{1}{\pi} = 9, \quad \overset{2}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.7} = 8.9,$$

$$\overset{3}{\pi} = \frac{8.9}{1.2}, \quad \overset{4}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.6.1.2} = \frac{7.8.9}{1.2} = 252,$$

$$\overset{3}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.1.3.3.4} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126.$$

Die Formen zur Summe 19 sind:

$$1.1.1.1.1.1.1.1.1.11 = x^8 . -\frac{x^{11}}{11} = -\frac{x^{19}}{11}, \quad \overset{1}{\pi} = 9$$

$$1.1.1.1.1.1.1.1.3.9 = x^7 . -\frac{x^3}{3} . \frac{x^9}{9} = -\frac{x^{19}}{27}, \quad \overset{2}{\pi} = 8.9$$

$$1.1.1.1.1.1.1.1.5.7 = x^7 . \frac{x^5}{5} . -\frac{x^7}{7} = -\frac{x^{19}}{35}, \quad \overset{3}{\pi} = 8.9$$

$$1.1.1.1.1.1.1.3.3.7 = x^6 . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^7}{7} = -\frac{x^{19}}{63},$$

$$\overset{4}{\pi} = \frac{7.8.9}{1.2}$$

$$1.1.1.1.1.1.3.5.5 = x^6 . -\frac{x^3}{3} . \frac{x^5}{5} . \frac{x^5}{5} = -\frac{x^{19}}{75},$$

$$\overset{5}{\pi} = \frac{7.8.9}{1.2}$$

$$1.1.1.1.1.3.3.3.5 = x^5 . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . \frac{x^5}{5} = -\frac{x^{19}}{135},$$

$$\overset{6}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5.1.2.3} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3}$$

$$1.1.1.1.3.3.3.3.3 = x^4 . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} . -\frac{x^3}{3} = -\frac{x^{19}}{243},$$

$$\overset{7}{\pi} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.4.1.2.3.4.5} = \frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}$$

ꝛc.

Demnach ist: $\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \ldots\right)^9$

$$= x^9 - 9 . \frac{x^{11}}{3} + \left.\begin{array}{l} \frac{9}{5} \\ + \frac{8.9.1}{1.2.9} \end{array}\right\} x^{13} \left.\begin{array}{l} - 9 . \frac{1}{7} \\ - 8.9 . \frac{1}{15} \\ - \frac{7.8.9.1}{1.2.3.27} \end{array}\right\} x^{15}$$

$$\left.\begin{array}{l} + 9 . \frac{1}{9} \\ + 8.9 . \frac{1}{21} \\ + \frac{8.9}{1.2} . \frac{1}{25} \\ + \frac{7.8.9}{1.2} . \frac{1}{45} \\ + \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} . \frac{1}{81} \end{array}\right\} x^{17} \left.\begin{array}{l} - 9 . \frac{1}{11} \\ - 8.9 . \frac{1}{27} \\ - 8.9 . \frac{1}{35} \\ - \frac{7.8.9}{1.2} . \frac{1}{63} \\ - \frac{7.8.9}{1.2} . \frac{1}{75} \\ - \frac{6.7.8.9}{1.2.3} . \frac{1}{135} \\ - \frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5} . \frac{1}{243} \end{array}\right\} x^{19} \text{ ꝛc.}$$

Der polynomische Lehrsatz für beliebige Exponenten mit independenter Form.

§. 72. **Lehrsatz.** Wenn unter dem Exponenten n jede ganze, gebrochene, positive oder negative Zahl verstanden wird, so ist $[a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots\ldots]^n$

$$
\begin{aligned}
&= a^n + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\left[\pi\,{}^{1}\overset{1}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x + \pi\,{}^{2}\overset{1}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^2 + \pi\,{}^{3}\overset{1}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^3 + \pi\,{}^{4}\overset{1}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^4 \ldots \pi\,{}^{r}\overset{1}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^r\right] \\
&\quad + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\left[\ldots\ldots + \pi\,{}^{2}\overset{2}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^2 + \pi\,{}^{3}\overset{2}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^3 + \pi\,{}^{4}\overset{2}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^4 \ldots \pi\,{}^{r}\overset{2}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^r\right] \\
&\quad + {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \pi\,{}^{3}\overset{3}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^3 + \pi\,{}^{4}\overset{3}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^4 \ldots \pi\,{}^{r}\overset{3}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^r\right] \\
&\quad + {}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \pi\,{}^{4}\overset{4}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^4 \ldots \pi\,{}^{r}\overset{4}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^r\right] \\
&\quad \vdots \\
&\quad {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}\left[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pi\,{}^{r}\overset{r}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}\,x^r\right]
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir können die Summe aller Glieder hinter dem ersten $(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots) = B$ setzen, und dadurch das Polynomium auf ein Binomium von der Gestalt $(a+B)^n$ bringen. Nun ist nach §. 45.

$$
(a+B)^n = a^n + {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}B + {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}B^2 + {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}B^3 + {}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}B^4 \ldots\ldots {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}B^r
$$

oder

$$
\begin{aligned}
(a+B)^n = a^n &+ {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}[bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots]^1 \\
&+ {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}[bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots]^2 \\
&+ {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}[bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots]^3 \\
&+ {}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}[bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots]^4 \\
&\;\vdots \\
&\;\; {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}[bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots]^r
\end{aligned}
$$

Nun ist nach §. 71. Zusatz

$(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots)^1$

$$= \pi^1 \overset{1}{C}\mathrm{r}x + \pi^2 \overset{1}{C}\mathrm{r}x^2 + \pi^3 \overset{1}{C}\mathrm{r}x^3 \ldots\ldots \pi^r \overset{1}{C}\mathrm{r}x^r$$

$(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots)^2$

$$= \pi^2 \overset{2}{C}\mathrm{r}x^2 + \pi^3 \overset{2}{C}\mathrm{r}x^3 + \pi^3 \overset{2}{C}\mathrm{r}x^3 \ldots\ldots \pi^r \overset{2}{C}\mathrm{r}x^r$$

$(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots)^3$

$$\vdots \quad = \pi^3 \overset{3}{C}\mathrm{r}x^3 + \pi^4 \overset{3}{C}\mathrm{r}x^4 + \pi^5 \overset{3}{C}\mathrm{r}x^5 \ldots\ldots \pi^r \overset{3}{C}\mathrm{r}x^r$$

$(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots)^r$

$$= \pi^r \overset{r}{C}\mathrm{r}x^r + \pi^{r+1} \overset{r}{C}\mathrm{r}x^{r+1} \ldots\ldots$$

also auch $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots\ldots)^n = a^n$

$$+ {}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1}\,[\pi^1 \overset{1}{C}\mathrm{r}x^1 + \pi^2 \overset{1}{C}\mathrm{r}x^2 + \pi^3 \overset{1}{C}\mathrm{r}x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + \pi^r \overset{1}{C}\mathrm{r}x^r]$$

$$+ {}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}\,[\ldots\ldots \pi^2 \overset{2}{C}\mathrm{r}x^2 + \pi^3 \overset{2}{C}\mathrm{r}x^3 + \pi^4 \overset{2}{C}\mathrm{r}x^4 \ldots\ldots + \pi^r \overset{2}{C}\mathrm{r}x^r]$$

$$+ {}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}\,[\ldots\ldots\ldots\ldots + \pi^3 \overset{3}{C}\mathrm{r}x^3 + \pi^4 \overset{3}{C}\mathrm{r}x^4 \ldots\ldots + \pi^r \overset{3}{C}\mathrm{r}x^r]$$

$$+ {}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4}\,[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \pi^4 \overset{4}{C}\mathrm{r}x^4 \ldots\ldots + \pi^r \overset{4}{C}\mathrm{r}x^r]$$

$$\vdots$$

$$+ {}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}\,[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \pi^r \overset{r}{C}\mathrm{r}x^r].$$

§. 73. **Satz.** Der unabhängige Coeffizient des $r$ten Gliedes nach dem anfänglichen, der mit x^r multiplizirt ist, wenn wir denselben mit R bezeichnen, ist:

$$R = \pi^r \overset{1}{C}\mathrm{r}.\,{}^n\overset{1}{\mathfrak{B}}a^{n-1} + \pi^r \overset{2}{C}\mathrm{r}.\,{}^n\overset{2}{\mathfrak{B}}a^{n-2}$$
$$+ \pi^r \overset{3}{C}\mathrm{r}.\,{}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3} + \pi^r \overset{4}{C}\mathrm{r}.\,{}^n\overset{4}{\mathfrak{B}}a^{n-4} \ldots$$
$$\pi^r \overset{r}{C}\mathrm{r}.\,{}^n\overset{r}{\mathfrak{B}}a^{n-r}.$$

Beweis. Jedes Glied der binomischen Reihe gibt bei seiner vollständigen Entwickelung einen Theil, der mit x^r multiplicirt wird und eine Variationsform zur Summe r ist, und diese Variationsformen sind von verschiedenen Classen, von der ersten bis zur rten, jede wird mit dem ebensovielten Binomialcoeffizienten multiplicirt, als die Classe derselben besagt; der erste Theil des Binomiums gibt $\pi^r \overset{1}{C}r.\ {}^n\overset{1}{B}a^{n-1}$; der zweite Theil des Binomiums gibt $\pi^r \overset{2}{C}r.\ {}^n\overset{2}{B}a^{n-2}$ .... ꝛc. der rte Theil des Binomiums gibt $\pi^r \overset{r}{C}r.\ {}^n\overset{r}{B}a^{n-r}$; alle diese Produkte haben x^r zum Faktor; nun ist aber der Inbegriff aller Produkte, welche dieselbe Potenz der Hauptgröße x^r zum Faktor haben, der Coeffizient des verlangten Gliedes nach §. 54., demnach ist

$$R = \pi^r \overset{1}{C}r.\ {}^n\overset{1}{B}a^{n-1} + \pi^r \overset{2}{C}r.\ {}^n\overset{2}{B}a^{n-2}$$
$$+ \pi^r \overset{3}{C}r.\ {}^n\overset{3}{B}a^{n-3} \ldots + \pi^r \overset{r}{C}r.\ {}^n\overset{r}{B}a^{n-r}.$$

Beispiel. Es soll von

$(\overset{0}{4} + \overset{1}{2x} + \overset{2}{5x^2} - \overset{3}{3x^3} + \overset{4}{6x^4})^{\frac{1}{2}}$ das vierte Glied nach dem anfänglichen, welches mit x^4 multiplicirt ist, gefunden werden. Bezeichnen wir dasselbe mit D, so ist

$$D = [\pi^4 \overset{1}{C}r.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}4^{\frac{1}{2}-1} + \pi^4 \overset{2}{C}r.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}4^{\frac{1}{2}-2}$$
$$+ \pi^4 \overset{3}{C}r.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{B}4^{\frac{1}{2}-3} + \pi^4 \overset{4}{C}r.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{B}4^{\frac{1}{2}-4}]\, x^4.$$

Realisirt ist

1) $\pi^4 \overset{1}{C} = \pi.4 = 1.6 \,|$

$${}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}.4^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}.4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

also $\pi^4 \overset{1}{C}r.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{1}{B}4^{\frac{1}{2}-1} = 6.\frac{1}{4} = \frac{6}{4}$

2) $\pi^4 \overset{2}{C} = \pi.1.3 = 2.2.-3 \,|$
$\phantom{2) \pi^4 \overset{2}{C}} = \pi.2.2 = 1.5.\quad 5 \,|$

$${}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}4^{\frac{1}{2}-2} = \frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}}{1.2}.4^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{8}.\frac{1}{8}$$

also $\pi^4 \overset{2}{C}r.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{2}{B}4^{\frac{1}{2}-2} = (-12+25).\frac{-1}{64} = \frac{-13}{64}$

$$3)\ \pi.\ {}^4\overset{3}{\mathfrak{C}}\mathrm{r} = \pi.\ 1.\ 1.\ 2 = 3.\ 2.\ 2.\ 5\,\Big|$$

$$ {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{\mathfrak{B}}4^{\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}}{1.\ 2.\ 3}.\ 4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{16.\ 32}$$

$$\text{also } \pi\ {}^4\overset{3}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{3}{\mathfrak{B}}4^{\frac{1}{2}-3} = 60.\ \frac{1}{512} = \frac{60}{412}$$

$$4)\ \pi\ {}^4\overset{4}{\mathfrak{C}}\mathrm{r} = \pi.\ 1.\ 1.\ 1.\ 1 = 1.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2\,\Big|$$

$$ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{\mathfrak{B}}4^{\frac{1}{2}-4} = \frac{\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}.-\frac{3}{2}.-\frac{5}{2}}{1.\ 2.\ 3.\ 3}.\ \frac{1}{4^{\frac{7}{2}}}$$

$$\text{also } \pi\ {}^4\overset{4}{\mathfrak{C}}\mathrm{r}.\ {}^{\frac{1}{2}}\overset{4}{\mathfrak{B}}4^{\frac{1}{2}-4} = \frac{-5.\ 16}{16384} = \frac{-5}{1024}.$$

Das 4te Glied dieser Potenz ist demnach

$$D = \left(\frac{6}{4} - \frac{12}{64} + \frac{60}{512} - \frac{5}{1024}\right)x^4 = \frac{1443}{1024}x^4.$$

Rekurrirende Entwickelung.

§. 74. Erläuterungssätze. Die indepedente Bestimmung ist nicht nur die einfachste, sondern auch die sicherste und schnellste; doch fordert es die Vollständigkeit der Theorie, die Coeffizienten einer Polynomialpotenz auch recurrirend, das ist, jeden nachfolgenden aus den vorhergehenden zu entwickeln.

§. 75. Wir haben gesehen, daß jeder Coeffizient einer Polynomialpotenz ein Inbegriff von Variationsformen zur sovielten Summe sey, als die Potenz der bei ihm stehenden Hauptgröße besagt; jedoch sind diese Formen von verschiedenen Classen und gehen von der ersten Classe bis zu jener hinauf, welche gleich hoch ist mit der Stellenzahl des gesuchten Coeffizienten; jede dieser Variationsformen hat überdies einen Binomialcoeffizienten von gleichem Grade mit ihrer Classe und eine dem Binomialcoeffizienten zukommende Potenz des ersten Theiles zum Faktor. Ist es eine Form der dritten Classe, so ist dasdurch sie vorgestellte Produkt mit ${}^n\overset{3}{\mathfrak{B}}a^{n-3}$ multiplizirt; allgemein eine Form der mten Classe führt als Faktor noch $^{n}\overset{m}{\mathfrak{V}}a^{n-m}$.

Jeder Inbegriff von Variationsformen einer höheren Summe entsteht aus Variationsformen zu niederen Summen, wenn man diesen das Element vorsetzt, welches die kleinere Summe zur größeren voll macht; in Zeichen, wenn $\overset{1}{a} = 1$, $\overset{2}{a} = 2$, $\overset{3}{a} = 3$, $\overset{4}{a} = 4$ ist, und $\mathfrak{r}$ den Inbegriff von Variationsformen bedeutet, so ist

$$\text{§. 66.}\quad {}^{r}\mathfrak{r} = \overset{1}{a}\,{}^{r-1}\mathfrak{r} + \overset{2}{a}\,{}^{r-2}\mathfrak{r} + \overset{3}{a}\,{}^{r-3}\mathfrak{r} \ldots\ldots \overset{r-1}{a}\,{}^{1}\mathfrak{r} + \overset{r}{a}.$$

Da nun jeder Coeffizient ein Inbegriff von Variationsformen ist in einer Polynomialpotenz, so könnten wir in der That jeden nachfolgenden Coeffizienten aus den vorhergehenden schon entwickelten bestimmen, wenn nur nicht diese Variationsformen niederer Coeffizienten mit verschiedenen Binomialcoeffizienten und den ihnen zukommenden Potenzen des ersten Theils multiplicirt wären.

Ist es aber möglich einen Faktor auszumitteln, mit dem jede Variationsform eines niederen Coeffizienten multiplicirt werden muß, um Produkte zu erhalten, aus deren Summe der nachfolgende Coeffizient besteht, so haben wir in der That ein Mittel, aus schon entwickelten Coeffizienten den nachfolgenden zu bestimmen, welches Verfahren recurrirend genannt wird, weil man bei Bestimmung eines Coeffizienten zu früheren schon entwickelten zurückgeht.

Es möge $\overset{k}{f}$ ein solcher Faktor seyn, wobei k jede mögliche ganze Zahl von 1 an bedeuten kann; die Coeffizienten der Polynomialpotenz mögen durch $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A} \ldots\ldots \overset{r}{A}$ vorgestellt werden, wenn sie noch mit gewissen Faktoren versehen werden, so kann der $r$te Coeffizient auf folgende Art dargestellt werden: $\overset{r}{A} = \overset{1}{f}\,\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A} + \overset{2}{f}\,\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{A} + \overset{3}{f}\,\overset{3}{a}\,\overset{r-3}{A} \ldots\ldots \overset{r}{f}\,\overset{r}{a}\,\overset{0}{A}$, weil jeder dieser Coeffizienten ein Inbegriff von Variationsformen ist zu einer Summe, welche der darüber gesetzte Index bezeichnet.

Wir wollen, um die Darstellung im Allgemeinen leichter zu übersehen, von einem besondern Falle ausgehen, und von $(\overset{0}{4} + \overset{1}{2x} + \overset{2}{5x^2} - \overset{3}{3x^3} + \overset{4}{6x^4})^n$ den vierten Coeffizienten $\overset{4}{A}$ durch die übrigen niederen, wie kurz zuvor ausdrücken: $\overset{4}{A} = \overset{1}{f}\,\overset{1}{a}\,\overset{3}{A} + \overset{2}{f}\,\overset{2}{a}\,\overset{2}{A} + \overset{3}{f}\,\overset{3}{a}\,\overset{1}{A} + \overset{4}{f}\,\overset{4}{a}\,\overset{0}{A}$, wobei wieder $\overset{1}{a} = 1$, $\overset{2}{a} = 2$, $\overset{3}{a} = 3$, $\overset{4}{a} = 4$ ist.

Da jeder Coeffizient ein Inbegriff von Variationsformen ist, so muß auch $\overset{4}{A}$ ein Inbegriff von Variationsformen seyn, und zwar von verschiedenen Classen und zur Summe 4; jede dieser Variationsformen ist mit einem gewissen Faktor multiplicirt, doch müssen unter den Elementen 1, 2, 3, 4, aus denen diese Formen gebildet werden, die durch sie vorgestellten Größen 2, 5, — 3, 6 verstanden werden. Wir wollen diese Formen realisiren:

$\overset{4}{A}$	$=$	$\overset{1}{f}\,\overset{1}{a}\,\overset{3}{A}$	$+\ \overset{2}{f}\,\overset{2}{a}\,\overset{2}{A}$	$+\ \overset{3}{f}\,\overset{3}{a}\,\overset{1}{A}$	$+\ \overset{4}{f}\,\overset{4}{a}\,\overset{0}{A}$
4		1 | 3	2 | 1	3 | 1	4
1.3, 3.1		1 | 1.2	2 | 1.1		
2.2		1 | 1.1.1			
1.1.2, 1.2.1, 2.1.1					
1.1.1.1					

$\overset{0}{A}$ gibt keine Form, weil zur Summe 0 keine Form existiren kann. Auch bedeuten $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A} \ldots \overset{r}{A}$ nicht blos den Inbegriff dieser Formen, sondern Inbegriffe von

Produkten, und diese Formen kommen nur mit vor in ihnen.

Wir heben nun eine Form unter denen zur Summe 4 aus, gleichviel welche; es sey die Form 1. 1. 2. Das Element 1 kommt in ihr zweimal vor, das Element 2 aber nur einmal; wie oft ein Element vorkommt, mag durch u bezeichnet werden, so ist im ersten Fall $u = 2$, im andern $u = 1$; die Summe aller u, welche durch Su bezeichnet werden soll, ist $Su = 3$; nun ist 3 der Grad der Classe, den wir durch m anzeigen wollen, also $Su = m$, welches bei jeder Form Statt findet, da der Grad der Classe von der Anzahl der Elemente abhängt. Die Produkte, welche hervorgehen, wenn man die Größe eines Elementes mit der Zahl, wie oft es vorkommt, multiplizirt, müssen zusammengenommen der Summe gleich seyn, zu welcher combinirt wird, oder so viel Einheiten, als die Elemente in der gegebenen Form enthalten; das Element 1 kommt zweimal vor, also $1 . 2 = 2$, das Element 2 aber einmal, $2 . 1 = 2$, die Summe dieser Produkte $1 . 2 + 2 . 1 = 4$ ist gleich der Summe, zu der die Form 1. 1. 2, welche auch 4 enthält, combinirt ist. Bezeichnen wir die Größe eines Elementes durch k, so ist $Suk = r$, wenn Suk die Summe aller Produkte aus uk, und r die Summe der Form vorstellt, und u und k alle mögliche ganze Zahlen von 1 an bedeuten; denn die Summe einer Form hängt ja von der Größe und Anzahl der in ihr vorkommenden Elemente ab.

Die Form 1. 1. 2 gibt durch Permutation ihrer Elemente drei Formen 1. 1. 2, 1. 2. 1, 2. 1. 1, die Permutationszahl sey überhaupt N, so können wir die Anzahl der Permutationsformen, welche ein gewisses Element an der Spitze haben, hier die Anzahl der Formen, welche 1 an der Spitze führen, durch $\frac{uN}{m} = \frac{2 . 3}{3}$ ausdrücken; denn ist eine Form von der m ten Classe, so hat sie m Elemente; ihre Permutationszahl sey N; um zu wissen, wieviel es Permutationsformen gebe, welche ein gewisses Element $\overset{k}{a}$ an der Spitze haben, sondere man dieses Element ab und suche die Permutationszahl der übrigen $(m - 1)$ Elemente auf, diese sey M; setzt man allen M Formen das Element $\overset{k}{a}$ vor, so hat man alle Formen, welche das Element $\overset{k}{a}$ an der Spitze haben; da nun jedes der m Elemente an der Spitze stehen kann, so gibt es $m.M$ Permutationsformen und alle zusammen sind die N Permutationsformen, wenn alle m Elemente verschieden sind, also $m.M = N$; kommt aber ein Element u mal vor, dann ist allerdings die Zahl $m.M$ um das u fache größer als N, also $m.M = u.N$, daraus folgt $M = \frac{u.N}{m}$; nun bedeutet M die Anzahl der Permutationsformen, welche ein gewisses Element an der Spitze haben, also läßt sich die Anzahl der Formen, die ein gewisses Element an der Spitze haben, allgemein durch $\frac{u.N}{m}$ vorstellen.

Die Anzahl der Formen, welche in unserem besonderen Falle das Element 2 an der Spitze führen, ist $\frac{u.N}{m} = \frac{1.3}{3} = 1$.

Die Formen 1.1.2, 1.2.1, welche 1 an der Spitze führen, sind aus den Formen 1.2, 2.1 zur Summe 3 entstanden, welche demnach Theile des Coeffizienten $\overset{1}{f}\,\overset{1}{a}\,\overset{3}{A}$ sind, und den Faktor $\overset{1}{f}$ haben; die Form 2.1.1, welche 2 an der Spitze führt, ist entstanden aus 1.1, also aus einer Form zur Summe zwei, welche ein Theil des Coeffizienten $\overset{2}{f}\,\overset{2}{a}\,\overset{2}{A}$ ist, und allda den Faktor $\overset{2}{f}$ hat. Die Formen 1.2, 2.1 und 1.1 hätten als Formen der zweiten Classe den ${}^{n}\overset{2}{B}4^{n-2}$ zum Faktor haben müssen.

Es sey nun eine Form der m ten Classe zur Summe r, die also ein Theil des r ten Coeffizienten ist, herausgehoben, ihre Permutationszahl sey N, die Anzahl der Permutationsformen, welche ein gewisses Element $\overset{k}{a}$ an der Spitze führen, und aus dieser Form der m ten Classe beim wirklichen Permutiren der Elemente hervorgehen, läßt sich, wie kurz zuvor bewiesen wurde, durch $\frac{uN}{m}$ ausdrücken. Die Formen, welche dieses Element $\overset{k}{a}$ an der Spitze führen, sind entstanden aus den Formen der (m — 1) ten Classe zur Summe r — k durch Vorsetzung des Elementes $\overset{k}{a}$, und da haben sie den Faktor $\overset{k}{f}$; und weil es Formen der (m — 1) ten Classe sind, so wurden sie mit dem ${}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}a^{n-(m-1)}$ multiplicirt; nun soll das durch die Form der m ten Classe und zur r ten Summe vorgestellte Produkt, wenn es mit der Permutationszahl N und dem ${}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}}a^{n-m}$ multiplicirt wird, gleich seyn den Produkten, welche aus den Formen der (m — 1) ten Classe zur Summe r — k hervorgehen, wenn man ihnen erst das ergänzende Element $\overset{k}{a}$ vorsetzt, dann dieselben mit dem Faktor $\overset{k}{f}$ und mit dem ${}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}a^{n-(m-1}$ multiplicirt; wie auch mit der ihnen zukommenden Permutationszahl $\frac{uN}{m}$; in Zeichen, es soll

$$S\left(\frac{uN}{m}\cdot\overset{k}{f} + {}^{n}\overset{m-r}{\mathfrak{B}}a^{n-(m-1)}\right) = {}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}}a^{n-m}\ N$$ seyn,

wenn unter S die Summe aller Produkte angedeutet wird; denn die Formen der (m — 1) ten Classe, wenn man ihnen das ergänzende Element $\overset{k}{a}$ vorsetzt, sind ja nichts anders als die mit der Permutationszahl N versehene Form der m ten Classe; 1|1. 2 1|2 1 und 2|1. 4 sind nichts anders als die mit der Permutationszahl 3 versehene Form 1. 1. 2, aus der, wie wir gesehen haben, durch Permutiren die Formen 1. 1. 2, 1. 2. 1, 2. 1. 1 hervorgingen; also kann man in dem Ausdrucke $S\left(\frac{{}^{n}N}{m}\cdot \overset{k}{f}.\ {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-(m-1)}\right) = {}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}}\, a^{n-m} N$ die Formen selbst als gleiche Produkte zu beiden Seiten weglassen.

Aber nach §. 50. ist $m\, {}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}.\ (n-m+1)$ und ${}^{n}\overset{m}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{n-m+1}{m}\right)$, und $a^{n-(m-1)} = a^{n-m+1} = a^{n-m}.\ a$; daher ist auch $S\left(\frac{{}^{n}N}{m}\cdot \overset{k}{f}.\ {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}\, a^{n-m}.\ a\right) = {}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}.\ \frac{n-m+1}{m}\cdot a^{n-m}.\ N$; wird auf beiden Seiten durch Gleiches dividirt, so ist $S u \overset{k}{f} a = n-m+1$ und $S u \overset{k}{f} = \frac{n-m+1}{a}$, wo k jeden Werth von 1 an, jedoch nur den einer ganzen Zahl haben kann, da es ein bloßer Index ist.

Nun kommt es darauf an, für $\overset{k}{f}$ einen Werth auszumitteln, der für alle Formen derselben Summe, ihre Classe mag wie immer seyn, derselbe ist; ein Werth der also blos vom Exponenten der Potenz n, von der Summe r und der Stellenzahl k abhängt.

Da die Summe aus $u\overset{k}{f}$ dreitheilig ist, $S u \overset{k}{f} = \frac{n}{a} - \frac{m}{a} + \frac{1}{a}$, so muß der Faktor $\overset{k}{f}$ selbst dreitheilig seyn, die Theile mögen β, γ, δ seyn, so daß $S u \overset{k}{f} = Su\beta + Su\gamma + Su\delta$ ist. Der erste Theil soll $\frac{n}{a}$ seyn, also $Su\beta = \frac{n}{a}$ oder $Suk\beta = \frac{nk}{a}$, wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt; nun war oben $Suk = r$, also auch $r.\ \beta = \frac{nk}{a}$, und $\beta = \frac{nk}{ra}$. Der zweite Theil soll $\frac{-m}{a}$ seyn, also $Su\gamma = \frac{-m}{a}$; aber oben war $Su = m$, also auch $m\gamma = \frac{-m}{a}$ und $\gamma = \frac{-1}{a}$. Der dritte Theil soll $\frac{1}{a}$ seyn, $Su\delta = \frac{1}{a}$, oder $Suk\delta = \frac{k}{a}$, oben war $Suk = r$, also $r\delta = \frac{k}{a}$ und $\delta = \frac{k}{ra}$. Da nun $Su\overset{k}{f} = Su\beta + Su\gamma + Su\delta$ angenommen wurde, so ist auch $\overset{k}{f} = \beta + \gamma + \delta$, also auch $\overset{k}{f} = \frac{nk}{ra} - \frac{1}{a} + \frac{k}{ra}$, oder $\overset{k}{f} = \frac{nk - r + k}{ra}$, wenn alles auf einerlei Nenner gebracht wird.

Da nun $\overset{r}{A} = \overset{1}{f}\,\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A} + \overset{2}{f}\,\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{A} + \overset{3}{f}\,\overset{3}{a}\,\overset{r-3}{A} \ldots\ldots + \overset{r-1}{f}\,\overset{r-1}{a}\,\overset{1}{A} + \overset{r}{f}\,\overset{r}{a}\,\overset{0}{A}$ ist, so ist auch

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)}{ra}.\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A} + \frac{(2n-r+2)}{ra}.\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{A} + \frac{(3n-r+3)}{ra}.\overset{3}{a}\,\overset{r-3}{A} \ldots + n\frac{(r-1)-r+r-1}{ra}.\overset{r-1}{a}\,\overset{1}{A} + \frac{nr-r+r}{ra}.\overset{r}{a}\,\overset{0}{A}$$

oder

$$\overset{r}{A} = \frac{(n-r+1)}{ra}\overset{1}{a}\,\overset{r-1}{A} + \frac{(2n-r+2)}{ra}.\overset{2}{a}\,\overset{r-2}{A} + \frac{(3n-r+3)}{ra}.\overset{3}{a}\,\overset{r-3}{A} \ldots + \frac{[n(r-1)-1]}{ra}\overset{r-1}{a}\,\overset{1}{A} + \frac{nr}{ra}.\overset{r}{a}\,\overset{0}{A}.$$

Die successiven Coeffizienten sind demnach:

I. $\overset{0}{A} = \overset{0}{A} = a^n$.

II. $\overset{1}{A} = \frac{n\overset{1}{a}\overset{0}{A}}{a}$ hier muß man $\overset{1}{a} = 1$ von dem ersten Gliede a der polynomischen Wurzel unterscheiden, da $\overset{1}{a}$ ein Element ist.

III. $\overset{2}{A} = \frac{(n-1).\overset{1}{a}\overset{1}{A} + 2n\overset{2}{a}\overset{0}{A}}{2a}.$

IV. $\overset{3}{A} = \frac{(n-2)\overset{1}{a}\overset{2}{A} + (2n-1)\overset{2}{a}\overset{1}{A} + 3n\overset{3}{a}\overset{0}{A}}{3a}.$

V. $\overset{4}{A} = \frac{(n-3)\overset{1}{a}\overset{3}{A} + (2n-2)\overset{2}{a}\overset{2}{A} + (3n-1)\overset{3}{a}\overset{1}{A} + 4n\overset{4}{a}\overset{0}{A}}{4a}.$

und so weiter.

Beispiel. Von $(\overset{0}{4} + \overset{1}{2x} + \overset{2}{5x^2} - \overset{3}{3x^3} + \overset{4}{6x^4})^{\frac{1}{2}}$ sollen die fünf ersten Glieder nach der Recursionsformel entwickelt werden. Sie sind

I. $\overset{0}{A} = a^n$; und weil hier $a = 4$ und $n = \frac{1}{2}$, so ist $\overset{0}{A} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

II. $\overset{1}{A} = \frac{n\overset{1}{a}\overset{0}{A}}{a} = \frac{\frac{1}{2}.2.2}{4} = \frac{1}{2}$ weil $\overset{1}{a} = 1$ und durch dies Element der Coeffizient 2 vorgestellt wird, so wie $\overset{2}{a} = 5$ $\overset{3}{a} = -3$ und $\overset{4}{a} = 6$ ist.

III. $\overset{2}{A} = \frac{(n-1)\overset{1}{a}\overset{1}{A} + 2n\overset{2}{a}\overset{0}{A}}{2.a} = \frac{(\frac{1}{2}-1).2.\frac{1}{2} + 2.\frac{1}{2}.5.2}{2.4}$

$= \frac{-\frac{1}{2}.2.\frac{1}{2} + 10}{8} = \frac{-\frac{2}{4} + \frac{40}{4}}{8} = \frac{38}{32} = \frac{19}{16}.$

IV. $\overset{3}{A} = \frac{(n-2).\overset{1}{a}\overset{2}{A} + (2n-1)\overset{2}{a}\overset{1}{A} + 3n\overset{3}{a}\overset{0}{A}}{3a}$

$= \frac{(\frac{1}{2}-2).2\,\frac{19}{16}}{3.4} + \frac{(2.\frac{1}{2}-1).5.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{2}.-3.2}{3.4}.$

$$= \frac{-\frac{3}{2}.2.\frac{19}{16} + 0 + \frac{6}{2}.-3}{3.4} = \frac{-\frac{57}{16} - \frac{18}{2}}{12}$$

$$= \frac{-57 - 144}{16.12} = \frac{-201}{16.12} = \frac{-67}{64}.$$

$$\overset{4}{A} = \frac{(n-3).\overset{1}{a}\overset{3}{A} + (2n-2)\overset{2}{a}\overset{2}{A} + (3n-1)\overset{3}{a}\overset{1}{A} + 4n\overset{4}{a}\overset{0}{A}}{4a}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}-3).2.-\frac{67}{64} + (2.\frac{1}{2}-2).5.\frac{19}{16} + (3.\frac{1}{2}-1).-3.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2}.6.2}{16}$$

$$= \frac{1443}{1024}.$$

Die fünf ersten Glieder von $(4 + 2x + 5x^2 - 3x^3 + 6x^4)^{\frac{1}{2}}$ sind demnach $2 + \frac{x}{2} + \frac{19x^2}{16} - \frac{67x^3}{64} + \frac{1443x^4}{1024} \ldots$

Achtes Kapitel.

Anwendung der Variation auf die Division zusammengesetzter Formen.

§. 76. Erläuterungssätze. Wenn zwei Formen, welche von 1 anfangen und nach Potenzen derselben Hauptgröße fortschreiten, dividirt werden sollen, so kann die in Bruchform aufgestellte Division so umgeändert werden, daß der Dividendus als Faktor eines Bruches erscheint, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner aber der Divisor ist; denn es ist

$$\frac{1 + b^1x + b^2x^2 + b^3x^3 \ldots + b^n x^n}{1 - a^1x - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots - a^m x^m}$$

$$= (1 + b^1x + b^2x^2\, b^3x^3 \ldots + b^n x^n) \times \frac{1}{1 - a^1x - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots - a^m x^m}.$$

§. 77. Da bei jeder Division der Quotient so beschaffen seyn muß, daß er, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus gibt, so muß man jederzeit den Quotienten finden können, sobald der Dividendus und der Divisor gegeben sind. Wir dürfen vermöge dieses Satzes uns einen Quotienten vom ähnlichen Baue mit dem Divisor fingiren und das Produkt aus diesem Quotienten mit dem Divisor dem Dividendus gleich setzen, so wird sich dann nach den Regeln der Gleichung der unbekannte Faktor oder Quotient bestimmen lassen.

§. 78. Wir beginnen dabei mit dem einfachen Falle, wo der Dividendus die Einheit, der Divisor aber eine nach Potenzen der Hauptgröße fortschreitende Form ist, und fingiren uns einen Quotienten vom ähnlichen Baue mit dem Divisor, welcher ebenfalls von 1 anhebt, dessen Coeffizienten aber noch unbestimmt sind und Vorzeichen haben, die denen im Divisor entgegengesetzt sind, aus dem Grunde, weil bei wirklicher Division das Produkt aus dem Divisor und Quotienten vom Dividendus abgezogen wird, und dadurch nach den Regeln der Subtraktion entgegengesetzte Zeichen hervorgehen. Auch bestätiget dieses sogleich die in wenigen Gliedern ausgeführte Division; denn

$$1 - a^1x - a^2x^2 - a^3x^3 : 1 = 1 + a^1x + 2a^2x^2$$

$$\begin{array}{rrrr}
1 & -\,a^1x & -\,a^2x^2 & -\,a^3x^3 \\
\hline
 & +\,a^1x & +\,a^2x^2 & +\,a^3x^3 \\
 & +\,a^1x & +\,a^2x^2 & +\,a^3x^3 \\
\hline
 & & 2\,a^2x^2 & +\,2\,a^3x^3 \\
 & & +\,2\,a^2x^2 & -\,2\,a^3x^3 \\
\hline
 & & = & +\,4\,a^3x^3
\end{array}$$

§. 79. Es sey nun $\dfrac{1}{1 - a^1x - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots\ldots - a^m x^m}$

$= 1 + A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 \ldots\ldots + A^m x^m$, wobei die Coeffizienten noch völlig unbestimmt sind; das Produkt aus dem Divisor und Quotienten muß dem Dividendus 1 gleich seyn. Das Produkt aus dem Divisor und Quotienten fängt aber selbst schon mit 1 an, es müssen also die übrigen Glieder des Produktes = Null seyn. Das Produkt zweier polynomischen Faktoren, die nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten und zwar regelmäßig fortgehen, ist nach §. 54. von derselben Form mit den Faktoren, und der r te Coeffizient eines solchen Produktes wird nach §. 54. Zusatz gefunden, wenn man die Coeffizienten des einen Faktors vom r ten an bis zum Nullten hinschreibt, darunter die des andern vom Nullten bis zum r ten so setzt, daß die Indices von je zwei unter einander stehenden dem Index des verlangten Coeffizienten r gleich sind; in Zeichen das Produkt aus beiden ist

$$1 + \left.\begin{matrix} 1.\ A \\ -a^1.\ 1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 1.\ A^2 \\ -a^1.\ A^1 \\ -a^2.\ 1 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 1.\ A^3 \\ -a^1.\ A^2 \\ -a^2.\ A^1 \\ -a^3.\ 1 \end{matrix}\right\} x^3 \ldots$$

$$\left.\begin{matrix} +1.\ A^r \\ -a^1.\ A^{r-1} \\ -a^2.\ A^{r-2} \\ -a^3.\ A^{r-3} \\ \vdots \\ -a^{r-2}.\ A^2 \\ -a^{r-1}.\ A^1 \\ -a^r.\ 1 \end{matrix}\right\} x^r \ldots = 1.$$

Ziehen wir beiderseits 1 ab, so ist dann auch

$$\left.\begin{array}{l}1.A^1\\-a^1.1\end{array}\right\} x \;+\; \left.\begin{array}{l}1.A^2\\-a^1.A^1\\-a^2.1\end{array}\right\} x^2 \;+\; \left.\begin{array}{l}1.A^3\\-a^1.A^2\\-a^2.A^1\\-a^3.1\end{array}\right\} x^3 \ldots\ldots$$

$$+\left.\begin{array}{l}1.A^r\\-a^1.A^{r-1}\\-a^2.A^{r-2}\\-a^3.A^{r-3}\\ \vdots\\-a^{r-2}.A^2\\-a^{r-1}.A^1\\-a^r.1\end{array}\right\} x^r = 0.$$

Dieses Produkt, soll es gleich Null seyn, muß auch für jeden Werth von $x =$ gleich Null bleiben. Dividiren wir beiderseits erst durch x, und setzen dann $x = 0$, so erhalten wir $1.A^1 - 1.a^1 = 0$ und daraus folgt $A^1 = a^1$; da nun $1.A^1 - 1.a^1 = 0$, so verschwindet $\left.\begin{array}{l}1.A^1\\-a^1.1\end{array}\right\} x$. Dividiren wir nun wieder beiderseits durch x^2 und setzen dann $x = 0$, so erhalten wir $1.A^2 - a^1.A^1 - a^2.1 = 0$, und daraus $A^2 = a^1.A + a^2.1$. Da $1.A^2 - a^1.A^1 - a^2.1 = 0$, so verschwindet der Ausdruck $\left.\begin{array}{l}1.A^2\\-a^1.A^1\\-a^2.1\end{array}\right\} x^2$.
Nun dividiren wir wieder beiderseits durch x^3, und setzen dann $x = 0$, so erhalten wir $1.A^3 - a^1 A^2 - a^2.A^1 - a^3.1 = 0$ und daraus folgt $A^3 = a A^2 + a^2.A^1 + a^3.1$. Durch ein gleiches Verfahren erhalten wir ferner auch $A^r = a^1.A^{r-1} + a^2.A^{r-2} + a^3.A^{r-3} \ldots\ldots a^{r-2} A^2 + a^{r-1} A^1 + a^r.1$.

§. 80. Wir haben also eine Rekursionsformel wie in §. 54. 75., wodurch wir jeden nachfolgenden Coeffizienten des Quotus aus den vorhergehenden Quotienten bestimmen. Es ist:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & A^0 = 1 \\
& A^1 = a^1\, A^0 \\
& A^2 = a^1 . A^1 + a^2\, 1 \\
& A^3 = a^1 . A^2 + a^2 . A^1 + a^3 . 1 \\
& A^4 = a^1\, A^3 + a^2\, A^2 + a^3 . A^1 + a^4 \\
& \qquad \text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

Beispiel. Von $\dfrac{1}{1 - 2x - 5x^2 - 3x^3 - 4x^4}$ sind die ersten fünf Glieder:

$$
\begin{aligned}
& A^0 = 1 \\
& A^1 = a^1 . A^0 = 2 . 1, \text{ weil } a^1 = 2,\ a^2 = 5,\ a^3 = 3, \\
& \qquad a^4 = 4 \\
& A^2 = a^1\, A^1 + a^2 . 1 = 2 . 2 + 5 . 1 = 9 \\
& A^3 = a^1\, A^2 + a^2\, A^1 + a^3 . 1 = 2 . 9 + 5 . 2 \\
& \qquad + 3 . 1 = 31 \\
& A^4 = a^1 . A^3 + a^2 . A^2 + a^3\, A^1 + a^4 . 1 . = 2 . 31 \\
& \qquad + 5 . 9 + 3 . 2 + 4 = 62 + 45 + 6 + 4 = 117.
\end{aligned}
$$

also ist $\dfrac{1}{1 - 2x - 5x^2 - 3x^3 - 4x^4}$

$$= 1 + 2x + 9x^2 + 31x^3 + 117x^4.$$

Indepedente Bestimmung eines jeden Coeffizienten dieses Quotienten.

§. 81. Die independente Bestimmung ist immer der höchste Zweck der Analysis; für sie eine Regel aufzufinden, kann nun keine Schwierigkeit haben.

Der Ausdruck $A^r + a^1\, A^{r-1} + a^2 . A^{r-2} + a^3 . A^{r-3} \ldots + a^{r-2}\, A^2 + a^{r-1}\, A^1 + a^r . 1$ stimmt so mit dem Ausdruck ${}^{r}\mathfrak{r} = a^{1}\, {}^{r-1}\mathfrak{r} + a^{2}\, {}^{r-2}\mathfrak{r} + a^{3}\, {}^{r-3}\mathfrak{r} \ldots + a^{r-2}\, {}^{2}\mathfrak{r} + a^{r-1}\, {}^{1}\mathfrak{r} + a^{r} . 1$ in §. 66. überein, daß die Behauptung: „Jeder Coeffizient des Quotienten sey ein Inbegriff von Variationsformen zu allen Classen und zu einer Summe, welche den Index des jedesmaligen Coeffizienten ausdrückt" sich von selbst rechtfertiget. Die Elemente, welche in die Variationsformen eintreten, sind keine andern als die Coeffizienten des Divisors mit entgegengesetzten Zeichen, wovon §. 78. der Grund angegeben worden ist, und in natürlicher Ordnung genommen.

Bezeichnen wir den Inbegriff von Variationsformen zur Summe r durch ${}^{r}\mathfrak{V}$, wobei sich $\mathfrak{V}$ auf die Elemente a^1, a^2, a^3, a^4 des Divisors bezieht; so ist $A^1 = {}^1\mathfrak{V}$, $A^2 = {}^2\mathfrak{V}$, $A^3 = {}^3\mathfrak{V}$, $A^r = {}^r\mathfrak{V}$, und

$$\frac{1}{1 - ax - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots - a^m x^m} = 1 + {}^1\mathfrak{V}x + {}^2\mathfrak{V}x^2 + {}^3\mathfrak{V}x^3 \ldots + {}^r\mathfrak{V}x^r \ldots {}^m\mathfrak{V}x^m.$$

§. 82. Die Variationsformen, welche aus den Elementen des Divisors entstehen, sind Produkte, die Elemente aber die Faktoren. Alle Produkte, welche sich blos durch verschiedene Stellung der Faktoren unterscheiden, sind einander gleich; man braucht also blos diejenigen Formen derselben Summe zu bestimmen, welche sich durch die Menge der Elemente von einander unterscheiden und ihnen die Permutationszahl beizufügen, d. h. man erzeuge aus den unbedingt wiederholbaren Elementen des Divisors Combinationsformen von allen Classen zu einer Summe, welche gleich ist dem Index des gesuchten Coeffizienten und füge jeder Form die Permutationszahl als Faktor bei. Ist nun unter ${}^r\mathfrak{Cr}$ der Inbegriff aller Combinationsformen von allen Classen aus unbedingt wiederholbaren Elementen zur Summe r bezeichnet, so ist:

$$\frac{1}{1 - ax - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots\ldots a^m x^m} = 1 + \pi\,{}^1\mathfrak{Cr}x + \pi\,{}^2\mathfrak{Cr}x^2 + \pi\,{}^3\mathfrak{Cr}x^3 \ldots\ldots + \pi\,{}^r\mathfrak{Cr}x^r + \ldots + \pi\,{}^m\mathfrak{Cr}x^m.$$

Beispiel. Es soll von $\dfrac{1}{1-2x-5x^2-3x^3-4x^4}$, wo $a^1 = 2$, $a^2 = 5$, $a^3 = 3$, $a^4 = 4$ der Coeffizient des 4ten Gliedes nach dem anfänglichen bestimmt werden. Es ist dieses 4te Glied $\pi\,{}^4\mathfrak{C}r x^4$ und der Coeffizient $\pi\,{}^4\mathfrak{C}r$. Nun ist

$$
\begin{array}{rcrcr}
{}^4\mathfrak{C}r & = & 4 & = & 4 \\
1.3 & = & 2.3 \times 2 & = & 12 \\
2.2 & = & 5.5 & = & 25 \\
1.1.2 & = & 2.2.5 \times 3 & = & 50 \\
1.1.1.1 & = & 2.2.2.2 & = & 16
\end{array}
$$

also $\pi\,{}^4\mathfrak{C}r = 4 + 12 + 25 + 60 + 16 = 117$ und $\pi\,{}^4\mathfrak{C}r x^4 = 117\,x^4$.

Bestimmung des Restes.

§. 83. Die Vollständigkeit der Operation fordert es, auch den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleiben muß, wenn das Produkt aus dem Quotienten und dem Divisor von dem Dividendus abgezogen wird. Nun ist das Produkt aus dem Divisor und dem Quotienten bis zu jenem Grade, zu welchem der Quotient aufsteigt, mit dem Dividend identisch; man braucht also nur jene Glieder des Produktes, welche über diesen Grad hinausgehen, zu berechnen und mit umgekehrten Zeichen zu nehmen, weil der Dividendus 1 ist, um den Rest zu haben.

Ist nun der Quotient $(1 + \pi\,{}^1\mathfrak{C}r x + \pi\,{}^2\mathfrak{C}r x^2 + \pi\,{}^3\mathfrak{C}r x^3 \ldots\ldots + \pi\,{}^n\mathfrak{C}r x^n)$ nach §. 82. bis zum nten Grade entwickelt, so bilde man aus ihm und dem Divisor $(1 - ax - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots\ldots - a^m x^m)$ ein Produkt und behalte von diesem Produkte blos jene Glieder mit entgegengesetzten Zeichen bei, welche eine höhere Potenz der Hauptgröße als x^n führen.

Sollte nun von den Gliedern des Produktes, welche eine höhere Potenz als x^n führen, das rte nach der Rekursionsformel in §. 79. aufgestellt werden, so ist dasselbe

$-A^{n+r}x^{n+r} = -A^n . a^r + A^{n-1} . a^{r+1} + A^{n-2} . a^{r+2}$
$\ldots\ldots A^2 . a^{n+r-2} + A^1 . a^{n+r-1} + a^{n+r} . 1) x^{n+r}$.

Beispiel. Wir haben in §. 80 gefunden

$$\frac{1}{1 - 2x - 5x^2 - 3x^3 - 4x^4}$$
$$= 1 + 2x + 9x^2 + 31x^3\ 117x^4 \ldots.$$

und es soll nun, da hier mit dem vierten Gliede nach dem anfänglichen abgebrochen wurde, der Rest gefunden werden. Wir hätten das Produkt der beiden Faktoren $(1 + 2x + 9x^2 + 31x^3 + 117x^4)$ und $(1 - 2x - 5x^2 - 3x^3 - 4x^4)$ zu bilden und nur jene Glieder mit entgegengesetzten Zeichen beizubehalten, welche eine größere Potenz als x^4 zum Faktor haben, weil das Produkt der beiden Faktoren bis zu x^4, zu welchem der Quotient entwickelt wurde, mit dem Dividendus identisch ist. Jene Glieder also des Produktes, welche x^5, x^6 ... ꝛc. zum Faktor haben, geben mit entgegengesetzten Zeichen wegen §. 78. den Rest. Die Formel für jedes dieser Glieder ist: $-A^{n+r}x^{n+r} = (A^n . a^r + A^{n-1} . a^{r+1} + A^{n-2} . a^{r+2} \ldots . A^2 a^{n+r-2} + A^1 . a^{n+r-1} + a^{n+r} . 1) x^{n+r}$.

Da hier $A^n = 117$, $A^{n-1} = 31$, $A^{n-2} = 9$, $A^{n-3} = 2$, $A^{n-4} = 1$, also $n = 4$ ist, und das fünfte Glied schon zum Reste gehört, so ist $r = 1$, also $a^r = a^1 = 2$, $a^{r+1} = a^2 = 5$, $a^{r+2} = a^3 = 3$, $a^{r+3} = a^4 = 4$. Demnach ist das erste Glied des Restes

$$-A^5x^5 = -(A^4 . a^1 + a^2 A^3 + a^3 A^2 + a^4 A^1)x^5$$
$$= -(117 . 2 + 31 . 5 + 9 . 3 + 4 . 2)x^5$$
$$= -(234 + 155 + 27 + 8)x^5 = -424x^5.$$

Das 2te Glied des Restes ist:

$$-A^6x^6 = -(A^4 a^2 + a^3 A^3 + a^4 A^2)x^6$$
$$= -(117 . 5 + 3 . 31 + 4 . 9) . x^6$$
$$= -(585 + 93 + 36)x^6 = -714x^6.$$

Das dritte Glied des Restes ist:

$$-A^7x^7 = -(A^4 . a^3 + a^4 . A^3)\,x^7$$
$$= -(117 . 3 + 4 . 31)\,x^7 = -(351 + 123)\,x^7$$
$$= -475\,x^7.$$

Das vierte Glied ist:

$$-A^8x^8 = -(A^4 . a^4)\,x^8 = -(117 . 4)\,x^8$$
$$= -468\,x^8.$$

Der ganze Rest also:

$$-424\,x^5 - 714\,x^6 - 475\,x^7 - 468\,x^8.$$

§. 84. Ein leichter Uebergang führt uns nun zur Auffindung des Quotienten von

$$\frac{b + b^1x + 2^2x^2 + b^3x^3 \ldots\ldots + b^nx^n}{1 - ax - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots\ldots a^mx^m}.$$

Man fingirt den Quotienten wie in §. 79., nur daß sein Anfangsglied nicht 1, sondern b seyn muß, und der fingirte Quotient sey $b + A^1x + A^2x^2 + A^3x^3 \ldots + A^mx^m$. Das Produkt aus dem Quotienten und dem Divisor muß dem Dividendus gleich seyn. Demnach ist nach §. 54.

$$b + \left.\begin{matrix} 1 . A^1 \\ -a^1\,b \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} 1 . A^2 \\ -1^1\,A \\ -a^2\,b \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 1 . A^3 \\ -a^1 . A^2 \\ -a^2 . A^1 \\ -a^3 . b \end{matrix}\right\} x^3 \ldots\ldots$$

$$\left.\begin{matrix} 1 . A^r \\ -a^1 . A^{r-1} \\ -a^2 . A^{r-2} \\ -a^3 . A^{r-3} \\ \vdots \\ -a^{r-2} . A^2 \\ -a^{r-1} . A \\ -a^r . b^1 \end{matrix}\right\} x^r = b + b^1x^1 + b^2x^2 + b^3x^3 \ldots + b^nx^n$$

Zieht man auf beiden Seiten Gleiches ab, so ist

$$\begin{array}{l} b \\ -b \\ \end{array}\left.\begin{array}{l} +1.\,A^1 \\ -a^1\,b \\ -b^1 \end{array}\right\}x \left.\begin{array}{l} +1.\,A^2 \\ -a^1\,A^1 \\ -a^2\,b \\ -b^2 \end{array}\right\}x^2 \left.\begin{array}{l} +1.\,A^3 \\ -a^1\,A^2 \\ -a^2\,A^1 \\ -a^3\,b \\ -b^3 \end{array}\right\}x^3 \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.\,A^r \\ -a^1\,A^{r-1} \\ -a^2\,A^{r-2} \\ -a^3\,A^{r-3} \\ \vdots \\ -a^{r-2}\,A^2 \\ -a^{r-1}\,A^1 \\ -a^r\,b \\ -b^r \end{array}\right\}x^r = 0.$$

Nun kann eben so wie in §. 79. gewiesen werden, daß $A^r - a^1 A^{r-1} - a^2 A^{r-2} - a^3 A^{r-3} \ldots\ldots - a^{r-2}.A^2 - a^{r-1}.A^1 - a^r b - b^r = 0$ sey; also auch $A^r = a^1 A^{r-1} + a^2 A^{r-2} + a^3.A^{r-3} \ldots\ldots a^{r-2}.A^2 + a^{r-1}.A^1 + a^r.b + b^r$. Weil nun r jeden möglichen Werth haben kann, so ergibt sich wieder ein Mittel, jeden nachfolgenden Coeffizienten des Quotus aus früheren schon gefundenen Coeffizienten zu entwickeln.

Beispiel. Von $\dfrac{3 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 5x^4}{1 - 4x - 3x^2 - 7x^3 - 2x^4}$ sollen die ersten fünf Glieder entwickelt werden; hier ist $a^1 = 4$ $a^2 = 3$ $a^3 = 7$, $a^4 = 2$ $b = 3$, $b^1 = 2$ $b^2 = 4$, $b^3 = 6$, $b^4 = 5$.

$A^1 = a^1 b + b^1 = 4.3 + 2 = 14$, wenn man $r = 1$ setzt.

$A^2 = a^1 A^1 + a^2 b + b^2 = 4.14 + 3.3 + 4 = 56 + 9 + 4 = 69$, wenn man $r = 2$ setzt.

$A^3 + a^1A^2 + a^2A^1 + a^3b + b^3$
$= 4.69 + 3.14 + 7.3 + 6 = 345$, wenn $r = 3$.
$A^4 = a^1A^3 + a^2A^2 + a^3A^1 + a^4b + b^4$
$= 4.345 + 3.69 + 7.14 + 2.3 + 5 = 1696$;

also $\dfrac{3 + 2x + 4x^2 + 6x^3 + 5x^4}{1 - 4x \quad 3x^2 - 7x^3 - 2x^4}$
$= 3 + 14x + 69x^2 + 345x^3 + 1696x^4 \ldots$

Independente Bestimmung eines jeden Coeffizienten für den Quotienten.

§. 85. Es ist nach §.

$$\frac{b + b^1x + b^2x^2 + b^3x^3 \ldots + b^nx^n}{1 - a^1x - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots - a^mx^m}$$
$$= (b + b^1x + b^2x^2 + b^3x^3 \ldots + b^nx^n)$$
$$\times \frac{1}{1 - a^1x^1 - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots - a^mx^m},$$

und
$$\frac{1}{1 - ax^1 - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots a^mx^m}$$
$$= 1 + \pi^1 \mathfrak{C}rx + \pi^2 \mathfrak{C}rx^2 + \pi^3 \mathfrak{C}rx^3 \ldots$$
$$+ \pi^n \mathfrak{C}rx^n$$ nach §. 82., also ist auch

$$\frac{b + b^1x + b^2x^2 + b^3x^3 \ldots + b^nx^n}{1 - a^1x^1 - a^2x^2 - a^3x^3 \ldots - a^mx^m}$$
$$= (b + b^1x^1 + b^2x^2 + b^3x^3 \ldots + b^nx^n)$$
$$\times (1 + \pi^1 \mathfrak{C}rx + \pi^2 \mathfrak{C}rx^2 + \pi^3 \mathfrak{C}rx^3 \ldots + \pi^n \mathfrak{C}rx^n).$$

Es ist also der Quotient aus diesen beiden zusammengesetzten Formen gleich dem Produkte zweier polynomischen Faktoren. Das erste Glied des Produktes aus
$(b + b^1x + b^2x^2 \ldots + b^nx^n)$
$+ (1 + \pi^1 \mathfrak{C}rx + \pi^2 \mathfrak{C}rx^2 \ldots + \pi^n \mathfrak{C}rx^n)$
ist b. Jedes folgende, überhaupt das rte, weil unter dem rten jedes nachfolgende nach dem anfänglichen be-

zeichnet werden kann, ist nach §. 79., nach der bekannten Recursionsformel, wenn wir es durch R bezeichnen:

$$R = (\pi^{r}\mathfrak{C}r\,b^{0} + \pi^{r-1}\mathfrak{C}r\,b^{1} + \pi^{r-2}\mathfrak{C}r\,b^{2} \ldots\ldots$$
$$+ \pi^{2}\mathfrak{C}r\,b^{r-2} + \pi^{1}\mathfrak{C}r\,b^{r-1} + b^{r}\,x^{r}.$$

Nun bedeutet vermöge §. 82. $\pi^{r'}\mathfrak{C}r$ den Inbegriff aller Combinationsformen von allen Classen zur Summe r aus den unbedingt wiederholbaren Elementen des Divisors, und π ist die Permutationszahl, welche jeder Form, die ein Produkt ist, als Faktor beigefügt wird, die independente Bestimmung des Coeffizienten spricht sich demnach so aus: „Man bilde alle Combinationsformen aus den unbedingt wiederholbaren Elementen des Divisors zu den successiven Summen, die bis zur Zahl des geforderten Gliedes, diese mit inbegriffen, möglich sind, und versehe jede Form mit ihrer Permutationszahl. Man füge jedem Inbegriffe von Formen einer gewissen Summe das Element des Dividendus bei, dessen Index mit der Summe, zu der combinirt wurde, zusammen genommen, dem Index des verlangten Gliedes gleich ist, zu dem Aggregate aller daraus hervorgehenden Produkte addire man das Element des Divisors, dessen Index dem Index des verlangten Gliedes gleich kommt.“

Beispiel. Das vierte Glied nach dem ersten von $\dfrac{3 + 2x + 4x^{2} + 6x^{3} + 5x^{4}}{1 - 4x - 3x_{2} - 7x^{3} - 2x^{4}}$ ist

$= (\pi^{4}\mathfrak{C}r\,b^{0} + \pi^{4}\mathfrak{C}r\,b^{1} + \pi^{2}\mathfrak{C}r\,b^{2} + \pi^{1}\mathfrak{C}r\,b^{3} + b^{4})\,x^{4}$,

hier ist $b^{0} = 3$, $b^{1} = 2$, $b^{2} = 4$, $b^{3} = 6$, $b^{4} = 5$

$^{4}\mathfrak{C}r = 4 = 2$ also $\pi^{4}\mathfrak{C}r\,b^{0}$

$1.2 = 4.7,\ \pi = 2$ $= 3\,[2 + 56 + 9$

$2.2 = 3.3$ $+ 144 + 256]$

$1.1.2 = 4,4.3,\ \pi = 3$

$1.1.1.1 = 4.4.4.4$

$$
\begin{array}{llll}
{}^{3}\mathfrak{C}x = 3 = 7 & & \pi\,{}^{3}\mathfrak{C}x b^{1} & \\
\quad 1.2 = 4.3,\ \pi = 2 & & = 2\,[7 + 24 + 64] & \\
\quad 1.1.1 = 4.4.4 & & & \\
{}^{2}\mathfrak{C}x = 3 = 3 & & \pi\,{}^{2}Cb^{2} = 4\,[3 + 16] & \\
\quad 1.1 \quad 4.4 & & & \\
{}^{1}\mathfrak{C}x = 1 = 4 & & \pi\,{}^{1}\mathfrak{C}x b^{3} = 6\,[4] & \\
 & & b^{r} = 5 &
\end{array}
$$

Also ist das vierte Glied $= [6 + 168 + 27 + 432 + 768 + 14 + 48 + 128 + 12 + 64 + 24 + 5]\,x^4 = 1696\,x^4$ wie zuvor.

II. Abschnitt.

Erstes Kapitel.

Entwickelung der Exponentialgrößen.

§. 86. Erläuterungssatz. Im 5. Kapitel haben wir durch Hülfe des Binomialsatzes ein Binomium auf die Potenz eines vorgeschriebenen, mithin bekannten Exponenten erhoben und den Werth dieser Potenz in einer Reihe von Produkten dargestellt, von denen jedes nebst dem zugehörigen Coeffizienten aus zwei Faktoren bestand, die selbst Potenzen aus den beiden Theilen des Grundfaktors waren, und wo die Coeffizienten aus dem vorgeschriebenen Exponenten sich bildeten; in Zeichen: Es war

$$
(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.\,\overline{n-1}}{1.\,2}.\,a^{n-2}b^2 + \frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}}{1.\,2.\,3}a^{n-3}b^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{n.\,\overline{n-1}.\,\overline{n-2}\ldots.(n-r+1)}{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\ldots\ldots\,r}a^{n-r}b^r.
$$

Setzen wir $a = 1$ um die einfachste Form des Grundfaktors zu haben, so ist

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n.n-1}{1.2} b^2 + \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} b^3 \ldots$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2\ldots\ldots(n-r+1).}{1.1.3.4\ldots\ldots\ldots r} b^r.$$

Hier setzten wir den Grundfaktor $(1+b)$ als bekannt voraus, ferner auch den Exponenten, unbekannt war uns der Werth dieser Potenz, den wir jedoch in einer Reihe von Produkten darstellten, so daß die Reihe nach den successiven Potenzen des Grundfaktors $b^1, b^2, b^3 \ldots b^r$ fortschreitet. Hier gab also der Grundfaktor $(1+b)$ die Hauptgröße, nach deren Potenzen die Reihe fortgeht, denn alle Potenzen von 1 sind wieder 1, der Exponent, aus dem sich der Coeffizient eines jeden Gliedes bildete, stellte nur eine Nebengröße vor.

§. 87. Eine solche Entwickelung kann aber nur dazu dienen, eine bestimmte Potenz dieses Grundfaktors zu berechnen, etwan die 8te oder 9te und so fort. Bei einer jeden neuen Potenz aber dieses Grundfaktors müßte eine neue Binomialreihe entwickelt, und was gerade am schwierigsten ist, jeder Coeffizient, der sich aus dem Exponenten bildet, von neuem berechnet werden. Die Reihe selbst würde zwar immer bei einer jeden neuen Potenz des Grundfaktors $(1+b)$ nach Potenzen von b fortschreiten, aber die Coeffizienten müßten wegen des neuen Exponenten von neuem berechnet werden.

§. 88. Würde nun gar gefordert, alle mögliche Potenzen dieses Grundfaktors zu berechnen, um ein ganzes Potenzensystem von diesem Grundfaktor aufzustellen, selbst gebrochene Zahlen nicht ausgeschlossen, denn auch diese können Potenzen eines Grundfaktors seyn, so können wir leicht abnehmen, mit welcher Mühe wir die Coeffizienten einer jeden neuen Binomialpotenz zu berechnen hätten. Dazu kommt noch der Umstand, daß, wenn der Exponent ein Bruch ist, die Binomialreihe nach §. 57. Zusatz unbegrenzt ist, und daß wir dann mit der Entwickelung der Coeffizienten nie fertig werden könnten, wenn wir alle zu entwickeln hätten.

§. 89. Um also einer solchen Forderung alle Potenzen eines und desselben Grundfaktors zu berechnen, auf die kürzeste und leichteste Art zu genügen, müssen wir eine einzige, beliebig weit fortzusetzende Reihe aufstellen, welche uns jede Potenz des angenommenen Grundfaktors gibt, und weil das Berechnen der Coeffizienten immer das schwierigste ist, so müssen wir die Reihe so einrichten, daß die Coeffizienten immer dieselben bleiben, welche Potenz auch durch diese Reihe gefordert wird.

Sollen aber die Coeffizienten für jeden Werth der Reihen dieselben bleiben, so müssen sie aus einer constanten Größe gebildet seyn, die nur der Grundfaktor ist; und da die Reihe immer einen andern Werth haben muß, so wie man eine andere Potenz des Grundfaktors fordert, so muß die Hauptgröße, nach deren successiven Potenzen die Reihe fortschreitet, eine veränderliche, jedoch jedesmal bekannte Größe seyn, und diese ist der Exponent. Die Coeffizienten müssen also aus dem constanten Grundfaktor gebildet werden; die Reihe selbst muß nach Potenzen des veränderlichen Exponenten, als der Hauptgröße, fortschreiten.

§. 90. Erklärung. Eine solche Reihe, welche nach Potenzen des Exponenten fortschreitet, und deren Coeffizienten sich aus dem Grundfaktor bilden, wird eine Exponentialreihe genannt.

§. 91. Da uns keine andere Methode, eine solche Reihe aufzustellen, bekannt ist, als der Binomialsatz, so stellen wir zuvor eine Binomialreihe auf und verwandeln dieselbe in eine Exponentialreihe. Aber vor der wirklichen Umformung der Binomialreihe in eine Exponentialreihe müssen wir noch folgendes berücksichtigen: Die Binomialreihe schließt, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist; §. 46.; die Exponentialreihe, die zur Berechnung eines ganzen Potenzensystems, also auch dann gelten soll, wenn der Exponent, auf dessen Potenz der

Grundfaktor erhoben wird, ein Bruch ist, darf nie schließen. Diese Schwierigkeit wird durch den Kunstgriff gehoben, daß jede Binomialreihe, auch dann, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, sich in unbestimmte Weite hinausführen läßt; denn von $(a + b)^3$ ist das tausendste Glied

$$= \frac{3.(3-1).(3-2).(3-3)\ldots(3-999)a^{3-1000}b^{1000}}{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,1000}$$

nach dem anfänglichen, und das ganze Glied ist $= 0$, weil ein Faktor darin $3 - 3 = 0$ ist.

§. 92. Nun können wir sofort zur Umwandlung der Binomialreihe in die Exponentialreihe schreiten.

$$\text{Es sey } (1 + a)^x = 1 + x.\,a + \frac{x.(x-1)a^2}{1.\,2}$$

$$+ \frac{x.(x-1).(x-2)\,a^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x.(x-1).(x-2).(x-3).\,a^3}{1.\,2.\,3.\,4} \ldots$$

$$\frac{x.(x-1).(x-2)\ldots(x-r+1)a^r}{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\ldots\ldots\,r},$$

wo wir also $(1 + a)$ zum Grundfaktor und x zu einem beliebigen Exponenten annehmen. Um aus dieser Binomialreihe die beabsichtigte Exponentialreihe zu erhalten, führen wir die Multiplikation in den einzelnen Coeffizienten, wenigstens in einigen derselben aus, und setzen jene Produkte, die zum Faktor eine gleich hohe Potenz der Hauptgröße x haben, denn nach Potenzen von x muß die neue Reihe fortschreiten, unter einander.

Diese Multiplikation nehmen wir aus dem Grunde vor:

1) Um zu wissen, aus welchen Theilen der zu den successiven Potenzen von x gehörende Coeffizient der neuen Exponentialreihe bestehen werde; zweitens um einzusehen, wie jeder Theil eines Coeffizienten gefunden werde.

Die Realisirung dieser Multiplikation gibt:

1) $x.a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ax$

2) $\frac{x.(x-1)a^2}{1.2} = \ldots\ldots\ldots - \frac{a^2x}{1.2} + \frac{a^2x^2}{1.2}$

3) $\frac{x.(x-1).(x-2).a^3}{1.2.3} = \ldots + \frac{2a^3x}{1.2.3} - \frac{3a^3x^2}{1.2.3} + \frac{x^3a^3}{1.2.3}$

4) $\frac{x.(x-1).(x-2).(x-3)a^4}{1.2.3.4} = \ldots - \frac{6a^4x}{1.2.3.4} + \frac{11a^4x^2}{1.2.3.4}$

$$- \frac{6a^4x^3}{1.2.3.4} + \frac{a^4x^4}{1.2.3.4}$$

2c.

Der erste Coeffizient in der zu entwickelnden Exponentialreihe ist derjenige, der mit x^1 multiplicirt ist. Alle aus der Multiplikation hervorgehende Partialprodukte, welche x^1 zum Faktor haben, sind demnach Theile des ersten Coeffizienten in der Exponentialreihe. Wir sehen aber auch aus der wirklich ausgeführten Multiplikation, daß jedes Glied der Binomialreihe einen Theil gebe, der mit x^1 multiplicirt ist, also einen Theil zum ersten Coeffizienten der Exponentialreihe.

2) Sehen wir auch, daß es gerade die subtraktiven Theile der Binomialcoeffizienten $x-0$, $\frac{x.(x-1)}{1.2}$, $\frac{x.(x-1).(x-3)}{1.2.3}$ 2c. sind, deren Combinirung zu eins, zwei, drei und so fort die Theile für den ersten Coeffizienten der Exponentialreihe geben, wenn man mit den aus dieser Verbindung hervorgehenden Produkten, nämlich mit -1, $-1.-2 = 2$, $-1.-2.-3 = -6$, $-1.-2.-3.-4 = 24$ die successiven Potenzen des Grundfaktors a, von a^2 anzufangen, denn $(x-0).a = xa$, multiplicirt:

$$\begin{aligned} -\ 1.\ a^2 &= -\ a^2 \\ +\ 2.\ a^3 &= +\ 2\ a^3 \\ -\ 6.\ a^4 &= -\ 6\ a^4 \\ +\ 24.\ a^5 &= +\ 24\ a^5 \end{aligned}$$

Weil die Binomialreihe unbegrenzt fortgeht, und jeder Binomialcoeffizient einen Theil für den ersten Exponentialcoeffizienten hergibt, so muß die Anzahl der Theile, aus denen sich der erste Exponentialcoeffizient gestaltet, unbegrenzt groß seyn.

Da ferner die subtraktiven Theile der Binomialcoeffizienten durch Multiplikation diese Theile für den ersten Exponentialcoeffizienten geben, so gibt auch das Produkt aus den subtraktiven Theilen des r ten Binomialcoeffizienten $\frac{x.(x-1).(x-2).(x-3)\ldots x-(r-1)}{1.\,2.\,3.\,4.\ldots\ldots(r-1).\,r}$ und zwar das Produkt $\frac{-1.-2.-3.-4\ldots\times-(r-1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r-1.\,r}$ $=\frac{(-1)^{r-1}.(1.2.3.4\ldots(r-1)}{1.2.3.4\ldots(r-1).r}$, wenn man damit noch a^r multiplicirt, den r ten Theil $=\frac{(-1)^{r-1}a^r}{r}$ des ersten Exponentialcoeffizienten. Es ist hier

$$\frac{-1.-2.-3.-4\ldots-(r-1)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots r-1.\,r}$$

$$=\frac{-1.1.-1.2.-1.3\ldots-1.(r-1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots\ldots r-1.\,r}$$

$$=\frac{(-1)^{r-1}.1.2.3\ldots(r-1)}{1.\,2.\,3\ldots\ldots r-1.\,r}.$$

Da nun alle Theile, welche mit x^1 multiplicirt sind, Theile des ersten Coeffizienten sind

$$xa-\frac{xa^2}{2}+\frac{xa^3}{3}-\frac{xa^4}{4}\ldots\frac{(-1)^{r-1}a^r}{r}$$

$$x\left[a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\ldots\frac{(-1)^{r-1}a^r}{r}\right],$$

so ist der erste Exponentialcoeffizient, wenn wir denselben durch A^1 bezeichnen

$$A^1=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}\ldots\frac{(-1)^{r-1}a^r}{r},$$

und da unter dem r ten jeder beliebige Theil vorgestellt werden kann, so kann die Anzahl der Theile beliebig fortgesetzt, und der erste Coeffizient mit der möglich größten Schärfe berechnet werden.

§. 94. Aber eine Schwierigkeit, dem Anscheine nach kaum zu heben, stellt sich der Umformung der Binomialreihe in die Exponentialreihe entgegen. Die Exponentialreihe muß §. 57. Zusatz unbegrenzt fortgehen, der Coeffizienten gibt es also unzählig viele, und da schon der erste ein Inbegriff von unzählig vielen Theilen ist, wie sollen die übrigen Coeffizienten entwickelt werden?

Diese Schwierigkeit kann ohne Mühe gehoben werden; gelingt es uns, die folgenden Coeffizienten als successive Potenzen des ersten darzustellen, so kommt es nur darauf an, den ersten A^1 mit möglich größter Schärfe zu berechnen. Wir bezeichnen vorläufig die folgenden Coeffizienten durch ${}^1A$, ${}^3A$, ${}^4A \ldots {}^rA$, ${}^nA$, wo die darüber gesetzten Zeichen keine Exponenten, sondern einen bloßen Index vorstellen, ohne uns um den Werth dieser Coeffizienten, von denen blos der erste ${}^1A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \ldots \frac{(-1)^{r-1}a^r}{r}$, bekannt ist, zu bekümmern, und die beabsichtigte Exponentialreihe der Exponentialgröße $(1+a)^x$ ist $(1+a)^x = 1 + {}^1Ax + {}^2Ax^2 + {}^3Ax^3 \ldots + {}^rAx^r \ldots + {}^nAx^n$.

Wir erheben, um den in §. 94. ausgesprochenen Zweck zu erreichen, die Exponentialgröße, mithin auch die ihren Werth ausdrückende Reihe zum Quadrate, so ist das Resultat $[(1+a)^x]^2 = (1+a)^{2x}$ eine Exponentialgröße, deren Exponent das Doppelte des vorigen ist; nun muß aber auch noch die Reihe zum Quadrat erhoben werden, wobei wir nach §. 54. Zusatz verfahren können, und es ist:

$$(1+a)^{2x} = 1 + 2\,{}^{1}A.x + \left.\begin{matrix} {}^{1}A^{2} \\ +\,2\,{}^{2}A \end{matrix}\right\} x^{2} + \left.\begin{matrix} 2\,{}^{1}A\,{}^{2}A \\ +\,2\,{}^{3}A \end{matrix}\right\} x^{3}$$

$$+ \left.\begin{matrix} 2\,{}^{1}A\,{}^{3}A \\ +\,{}^{2}A^{2} \\ +\,2\,{}^{4}A \end{matrix}\right\} x^{4} \ldots \left.\begin{matrix} +\,2\,{}^{r}A \\ +\,2\,{}^{r-1}A\,{}^{1}A \\ +\,2\,{}^{r-2}A\,{}^{2}A \\ +\,2\,{}^{r-3}A\,{}^{3}A \\ \vdots \qquad \vdots \end{matrix}\right\} x^{r}$$

Es ist aber auch:

$$(1+a)^{2x} = 1 + A.\,2x + {}^{2}A\,(2x)^{2} + {}^{3}A\,(2x)^{3} + {}^{4}A\,(2x)^{4} \ldots + {}^{r}A\,(2x)^{r} \ldots$$

oder $(1+a)^{2x} = 1 + 2\,{}^{1}Ax + 4\,{}^{2}Ax^{2} + 8\,{}^{3}Ax^{3} + 16\,{}^{4}Ax^{4} \ldots + 2^{r}\,{}^{r}Ax^{r}$;

denn nach §. 89. sollen die Coeffizienten der Exponentialreihe constant seyn, es muß also der Werth der Hauptgröße sich ändern, so wie eine andere Potenz gefodert wird.

Es ist also auch $1 + 2\,{}^{1}Ax + 4\,{}^{2}Ax^{2} + 8\,{}^{3}Ax^{3} + 16\,{}^{4}Ax^{4} \ldots + 2^{r}\,{}^{r}Ax^{r}$

$$= 1 + 2\,{}^{1}Ax + \left.\begin{matrix} {}^{1}A^{2} \\ +\,2\,{}^{2}A \end{matrix}\right\} x^{2} \left.\begin{matrix} +\,2\,{}^{1}A\,{}^{2}A \\ +\,2\,{}^{3}A \end{matrix}\right\} x^{3}$$

$$\left.\begin{matrix} +\,2\,{}^{1}A\,{}^{3}A \\ +\,{}^{2}A^{2} \\ +\,2\,{}^{4}A \end{matrix}\right\} x^{4} \ldots \left.\begin{matrix} +\,2\,{}^{r}A \\ +\,2\,{}^{r-1}A\,{}^{1}A \\ +\,2\,{}^{r-2}A\,{}^{2}A \\ +\,2\,{}^{r-3}A\,{}^{3}A \\ \vdots \qquad \vdots \end{matrix}\right\} x^{r}$$

und wenn man Gleiches von Gleichem abzieht:

$$\begin{matrix} 1 + 2\,{}^1Ax \\ -1 - 2\,{}^1Ax \\ \end{matrix} \left.\begin{matrix} +\,{}^1A^2 \\ +\,2\,{}^2A \\ -\,4\,{}^2A \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} +\,2\,{}^1A\,{}^2A \\ +\,2\,{}^3A \\ -\,8\,{}^3A \end{matrix}\right\} x^3$$

$$\left.\begin{matrix} +\,2\,{}^1A\,{}^3A \\ +\,{}^2A^2 \\ +\,2\,{}^4A \\ -\,16\,{}^4A \end{matrix}\right\} x^4 \ldots\ldots \left.\begin{matrix} +\,2\,{}^rA \\ +\,2\,{}^{r-1}A\,{}^1A \\ +\,2\,{}^{r-2}A\,{}^2A \\ +\,2\,{}^{r-3}A\,{}^3A \\ \vdots \quad \vdots \\ -\,2^r\,{}^rA \end{matrix}\right\} x^r = 0.$$

§. 95. Eben so wie in §. 79. kann hier gewiesen werden, daß $1 - 1 = 0$, $2\,{}^1Ax - 2\,{}^1Ax = 0$, woraus ${}^1A = {}^1A$ folgt; ${}^1A^2 + 2\,{}^2A - 4\,{}^2A = 0$, oder ${}^1A^2 = 2\,{}^2A$, oder $\frac{{}^1A^2}{2} = {}^2A$; $2\,{}^1A\,{}^2A + 2\,{}^3A - 8\,{}^3A = 0$, $2\,{}^1A\,{}^2A - 6\,{}^3A = 0$, oder $2\,{}^1A\,{}^2A = 6\,{}^3A$, nun ist ${}^2A = \frac{{}^1A^2}{2}$, also $\frac{2\,{}^1A^3}{2} = 6\,{}^3A$, $\frac{{}^1A^3}{6} = {}^3A$, oder $\frac{{}^1A^3}{1.2.3} = {}^3A$; $2\,{}^1A\,{}^3A + {}^2A^2 + 2\,{}^4A - 16\,{}^4A = 0$, oder $\frac{2\,{}^1A.\,{}^1A^3}{1.2.3} + \frac{{}^1A^4}{4} - 14\,{}^4A = 0$, oder $\frac{{}^1A^4}{3} + \frac{{}^1A^4}{4} = 14\,{}^4A$ und $\frac{7\,{}^1A^4}{12} = 14\,{}^4A$, oder $\frac{{}^1A^4}{24} = {}^4A$, oder $\frac{{}^1A^4}{1.2.3.4} = {}^4A$ und so fort,

$$\text{also } (1 + a)^x = 1 + {}^1Ax + \frac{{}^1A^2x^2}{1.2} + \frac{{}^1A^3x^3}{1.2.3} + \frac{{}^1A^4x^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots$$

§. 96. Wird nun bewiesen, daß dieses Gesetz auch für den r ten Coeffizienten Statt findet, vorausgesetzt, daß es für den $(r - 1)$ als richtig angenommen wird; oder mit andern Worten, kann bewiesen werden, daß dieses Gesetz für jeden nachfolgenden gilt, vorausgesetzt, daß es für jeden vorhergehenden Statt findet, so ist die Allgemeinheit desselben dargethan:

Es ist $2\,{}^{r}A + {}^{r-1}A\,{}^{1}A + {}^{r-2}A\,{}^{2}A + {}^{r-3}A\,{}^{3}A \ldots$
$+ {}^{3}A^{r-3} + {}^{2}A^{r-2}A + {}^{1}A^{r-1}A - 2^{r}\,{}^{r}A = 0,$
also auch ${}^{r-1}A\,{}^{1}A + {}^{r-2}A\,{}^{2}A + {}^{r-3}A\,{}^{3}A \ldots + {}^{3}A^{r-3}A$
$+ {}^{2}A^{r-2}A + {}^{1}A^{r-1}A = 2^{r}\,{}^{r}A - 2\,{}^{r}A$
$= {}^{r}A\,(2^{r} - 2).$

Nun ist nach der Voraussetzung ${}^{r-1}A = \dfrac{{}^{1}A^{r-1}}{1.2.3 \ldots r-1}$

und ${}^{1}A^{1} = \dfrac{A^{1}}{1};$

also ${}^{r-1}A.\,{}^{1}A = \dfrac{{}^{1}A^{r-1}.\,{}^{1}A^{1}}{1.2.3 \ldots r-1.\,1} = \dfrac{{}^{1}A^{r}}{1.2.3 \ldots r-1.1};$

ferner $\left.\begin{array}{l} {}^{r-2}A = \dfrac{{}^{1}A^{r-2}}{1.2.3 \ldots r-2} \\ {}^{2}A = \dfrac{{}^{1}A^{2}}{1.2} \end{array}\right\}$; also ${}^{r-2}A\,{}^{2}A$

$$= \frac{{}^{1}A^{r}}{1.2.3 \ldots (r-2).\,1.2}.$$

Eben so finden wir ${}^{r-3}A\,{}^{3}A = \dfrac{{}^{1}A^{r}}{1.2.3 \ldots (r-3).\,1.2.3};$

${}^{r-4}A\,{}^{4}A = \dfrac{{}^{1}A^{r}}{1.2.3 \ldots r-4.\,1.2.3.4}$ 2c.; daher ist auch

$$\ldots \frac{A^{r}}{1.2.3 \ldots (r-1).\,1} + \frac{A^{r}}{1.2.3 \ldots (r-2).\,1.2}$$
$$+ \frac{{}^{1}A^{r}}{1.2.3 \ldots (r-3.\,1.2.3} + \frac{{}^{1}A4}{1.2.3 \ldots (r-4).\,1.2.3.4}$$
$$= {}^{r}A\,(2^{r} - 2),$$ oder auch

$$\frac{A^r . r}{1.2.3 \ldots (r-1).r} + \frac{A^r . r. (r-1)}{1.2.3 \ldots (r-2).(r-1).r.1.2}$$
$$+ \frac{A^r . (r.(r-1).(r-2)}{1.2.3 \ldots (r-3).(r-2).(r-2).r.1.2.3}$$
$$+ \frac{A^r . (r.r-1.r-2.r-3)}{1.2.3 \ldots (r-4).(r-3).(r-2).(r-1).r.1.2.3.4}$$
$$= A^r (2^r - 2), \text{ oder}$$

$$\frac{{}^1A^r}{1.2.3 \ldots (r-1).r} . \left[\frac{r}{1} + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + \frac{r.r-1.r-2.r-3..}{1.2.3.4}\right]$$
$$= {}^rA (2^r - 2), \text{ oder}$$

$$\frac{A^r}{1.2.3.(r-1).r} . [{}^r\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{3}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{4}{\mathfrak{B}} \ldots {}^r\overset{r-1}{\mathfrak{B}}]$$
$$= A^r (2^r - 2) \text{ §. 45. Zusatz.}$$

Nun ist §. 49. $[1 + {}^r\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^r\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + 1] = 2^r$, also: ${}^r\overset{1}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{2}{\mathfrak{B}} + {}^r\overset{3}{\mathfrak{B}} \ldots + {}^r\overset{r-1}{\mathfrak{B}} = 2^r - 2$ daher ist auch: $\frac{{}^1A^r}{1.2.3 \ldots (r-).r} [2^r - 2] = {}^rA (2^r - 2)$;

endlich ist auch $\frac{{}^1A^r}{1.2.3 \ldots (r-1).r} = {}^rA$ was zu beweisen war, und die Allgemeinheit dieses Gesetzes ist dargethan; also: $(1 + a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} \ldots + \frac{A^r}{1.2.3 \ldots r}$ wobei

$$A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^4}{3} \ldots \frac{(-1)^{r-1} a^r}{r}.$$

§. 97. Dieser erste Coeffizient A und mit ihm alle übrige, hängt, wie wir sehen, von dem Grundfaktor a ab, er ändert sich nicht, so lange dieser Grundfaktor, Basis genannt, beibehalten wird, was immer für einen Werth der Exponent x erhalten mag, oder was immer für eine Potenz des Grundfaktors gefordert wird. Es können also durch diese Reihe alle Potenzen des Grundfaktors berechnet werden, also kann ein ganzes Potenzensystem durch dieselbe aufgestellt werden.

§. 98. Wollte man ein anderes Potenzensystem aufstellen, so müßte man einen andern Grundfaktor annehmen, dadurch würde der erste Coeffizient der Exponentialreihe und mit ihnen alle übrige einen von diesem Grundfaktor abhängenden, jedoch unveränderlichen Werth erhalten, solange dieser neue Grundfaktor z. B. $(1+b)$ beibehalten würde.

§. 99. Erklärung. Dieser erste Coeffizient heißt Modulus des Potenzensystems. Es ist also der Modulus eines Potenzensystems eine bestimmte, von dem Grundfaktor abhängige Zahl und ist der Grundfaktor des Systems $(1+a)$, so ist der Modulus, wenn wir ihn A nennen, Modul.

$$A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \ldots \frac{(-1)^{r-1} a^r}{r}.$$

Für einen andern Grundfaktor $(1+b)$ wäre Modul.

$$B = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{3} \ldots \frac{(-1)^{r-1} b^r}{r}.$$

§. 100. Sollte nun durch die Exponentialreihe wirklich ein Potenzensystem berechnet werden, so müßten wir zuerst daran denken, der Exponentialreihe eine solche Gestalt zu geben, daß die Berechnung der Coeffizienten mit der geringsten Mühe verrichtet würde. Dieses würde unstreitig dann der Fall seyn, wenn man den Modulus $A = 1$ setzte, weil alle übrige Coeffizienten als successive Potenzen dieses Modulus A ebenfalls $= 1$ würden.

Nun müßte aber untersucht werden, wie die Basis angenommen werden müßte; ohne Zweifel müßte dieser Grundfaktor von der Art seyn, daß der von ihm abhänzige und aus ihm zu berechnende Modulus A = 1 würde. Man setze nun in der Exponentialreihe A = 1, so ist $(1 + a)^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$

$$+ \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots \frac{x^r}{1.2.3\dots r}.$$

Weil aber jede Größe, die als Wurzel gelten soll, zum Exponenten 1 hat, so setzen wir, um den Werth des Grundfaktors zu finden, den Exponenten x = 1, und es ist $(1 + a)^1 = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4} \dots + \frac{1}{1.2.3\dots r};$$

oder $(1 + a) = 2{,}718281828459$, und $a = 1{,}718281828459$, wenn man 15 Glieder der Reihe entwickelt.

§. 101. Diese Basis $(1 + a) = 2{,}718281828459$ wird mittelst eines eigenen Buchstabens e ausgedrückt, der Bequemlichkeit wegen, so daß e^x eine beliebige Potenz der Basis 2,718281828459 bedeutet, also

$$e^x = (2{,}718281828459)^x.$$

§. 102. **Erklärung.** Das Potenzensystem, welches aus diesem Grundfaktor „Basis genannt" hervorgeht, heißt das natürliche oder auch hyperbolische, natürlich, weil die Entwickelung der Potenzen die einfachste ist; hyperbolisch, weil durch die Logarithmen dieses Potenzensystems gewisse Flächenräume der Hyperbel, einer krummen Linie von besondern Eigenschaften, ausgedrückt werden.

§. 103. Den Werth einer beliebigen Potenz in diesem natürlichen Potenzensysteme gibt die Exponentialreihe in ihrer einfachsten Gestalt

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \dots \frac{x^r}{1.2.3\dots r}.$$

§. 104. An dieser Reihe ist zu bemerken, daß sie für einen jeden Werth, den der Exponent x annimmt, convergirt. Ist dieser Exponent ein echter Bruch, so ist dies für sich klar. Ist er aber eine ganze Zahl, dann divergirt die Reihe, d. i. die folgenden Glieder werden immer größere Zahlen, welche ganze Einheiten in sich fassen, und zwar divergirt die Reihe so lange, bis man zu einem Gliede kommt, wo der höchste Faktor im Nenner gleich ist dem Exponenten x. Von da an convergirt die Reihe.

Denn ist man bis zu einem Gliede gekommen, welches $= \frac{x^x}{1.2.3\ldots x}$ ist, so ist das folgende $\frac{x^{x+1}}{1.2.3\ldots x.(x+1)} = \frac{x^x . x}{1.2.3\ldots x.(x+1)}$; das folgende wird also schon kleiner seyn, weil es aus dem vorhergehenden $\frac{x^x}{1.2.3\ldots x}$ dadurch entsteht, daß man es mit einem echten Bruche $\frac{x}{x+1}$ multiplicirt.

Darauf kommt es aber bei der Entwickelung der Glieder vorzüglich an, daß die Reihe bald und schnell convergire, und zwar so, daß wir Glieder erhalten, welche keine ganzen Einheiten, keine Zehntheile, keine Hundertheile, und so fort, und oft bis in die zehnte Decimalstelle und noch weiter keinen Werth geben. Hat man zehn Decimalstellen zu entwickeln, so muß man in der Entwickelung der Glieder so lange fortfahren, bis man ein Glied entwickelt, welches in der zehnten Decimalstelle noch keinen Werth gibt.

§. 105. Die Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r}$$

ist demnach zur Entwickelung der Potenzen ganz geeignet.

§. 106. Die Kenntniß, welche wir von dem Zusammenhange zwischen dem Modulus und der Basis besitzen, kann in folgenden zwei Formeln ausgedrückt werden.

Modul. $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \ldots \frac{(-1)^{r-1}\, a^r}{r}$

von der Basis $(1+a)$. Ferner ist die Basis oder der Grundfaktor, der zum Modulus A gehört, Basis Moduli

$$A = (1+a) = 1 + A + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} \ldots \frac{A^r}{1.2.3\ldots r}.$$

§. 107. Ist einmal durch Hülfe dieser Reihe ein Potenzensystem berechnet, so ist es leicht, ein anderes Potenzensystem für eine andere Basis zu entwickeln.

Es sey die Basis dieses neuen Systems b; man suche in dem berechneten Systeme die Potenz auf, welche dieser Basis b gleich ist. Es sey $e^\beta = b$, so daß b eine Potenz der Grundzahl e ist. Wird von dieser Basis b die xte Potenz gefordert, so ist $(b)^x = (e^\beta)^x$, weil $b = e^\beta$ ist; also ist $b^x = e^{\beta x}$. Nun ist nach §. 100. $e^{\beta x} = 1 + \beta x + \frac{\beta^2 x^2}{1.2} + \frac{\beta^3 x^3}{1.2.3}$

$$+ \frac{\beta^4 x^4}{1.2.3.4} \ldots + \frac{\beta^r x^r}{1.2.3\ldots r}.$$

§. 108. Durch Hülfe dieser Reihe sind wir im Stande, alle Potenzen von $b = e^\beta$ zu berechnen.

§. 109. Beispiel. Es sey $e^x = e^{\frac{1}{4}} = e^{0,25}$, so ist $e^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$ $+ \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5$ und $e^{\frac{1}{4}}$ $= 1,2840249$; das folgende Glied $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6$ gibt in der 7ten Decimalstelle noch Nulle, also ist bei dem 6ten Gliede nach dem anfänglichen die Grenze, wenn man nur 7 Decimalstellen verlangt.

Zweites Kapitel.

Entwickelung der Logarithmen. Logarithmotechnie.

§. 110. Wir haben die Potenzirung in doppelter Gestalt verrichtet, einmal mit Hülfe der Binomialreihe, und diese Entwickelung diente dazu, eine bestimmte Potenz zu berechnen; ein andermal durch Hülfe der Exponentialreihe, und diese Entwickelung diente dazu, ein ganzes Potenzensystem zu berechnen.

Nun legen wir uns die Aufgabe vor, den Exponenten auszumitteln, auf dessen Potenz wir einen angenommenen Grundfaktor zu erheben hätten, um eine Zahl zu erhalten, welche eine Potenz dieses Grundfaktors seyn soll. Dabei nehmen wir den Grundfaktor und die Potenz als bekannt an und suchen den Exponenten.

§. 111. Diese Aufgabe, welche aus dem gegebenen Grundfaktor und der gegebenen Potenz den Exponenten zu suchen fordert, auf dessen Potenz man den Grundfaktor erheben müßte, um die gegebene Potenz zu erzeugen, heißt Exponenziren oder auch Graduiren.

§. 112. Wir haben aber dabei noch die besondere Absicht, eine solche Reihe aufzustellen, die uns in den Stand setzt, für eine jede Zahl, die als Potenz eines angenommenen Grundfaktors gelten soll, den Exponenten, welcher auch Logarithmus dieser Zahl genannt wird, zu berechnen; und da alle Logarithmen solcher Zahlen, welche Potenzen eines angenommenen Grundfaktors sind, zu einem Systeme gehören, dessen Basis dieser Grundfaktor ist, so soll uns diese Reihe in den Stand setzen, alle Logarithmen eines Systemes aus ihr zu berechnen.

§. 112. Sind einmal die Logarithmen eines Systemes berechnet, so ist es auch möglich, durch sehr einfache arithmetische Operationen die Logarithmen für jedes andere System, dem eine andere Basis zum Grunde liegt, zu berechnen, wie wir in der Folge sehen werden.

§. 113. Der Werth dieses zu suchenden Exponenten soll also durch eine Reihe ausgedrückt werden, in der nur zwei bekannte Größen, der Grundfaktor und die Potenz, vorkommen; überdies sollen durch diese Reihe alle Logarithmen eines Systems berechnet werden. Der Werth der Reihe muß sich also ändern, so wie die Potenz, für welche der Logarithmus gesucht wird, sich ändert. Ist a der Grundfaktor und b die Potenz und $a^x = b$, so ist klar, daß der Logarithmus x, weil a constant ist, sich ändere, wenn für eine andere Potenz c, der Logarithmus zu suchen ist.

Die Reihe selbst soll nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreiten, die Coeffizienten constant seyn, wie immer der Werth der Reihe sich ändern mag. Die Coeffizienten müssen demnach aus einer constanten Größe gebildet werden, und diese ist der Grundfaktor; die Hauptgröße, weil sie veränderlich seyn muß, wenn der Werth der Reihe sich ändern soll, muß aus einer veränderlichen Größe genommen werden, und diese ist die Potenz, welche immer anders angenommen wird, wenn ein anderer Logarithmus berechnet werden soll.

§. 114. Da es uns frei steht, was immer für eine Basis anzunehmen und die Logarithmen von was immer für einem Systeme zu berechnen, so können wir dazu jenes System wählen, dessen Basis oder Grundfaktor wir im vorigen Kapitel für den Modulus 1 berechneten, und wir können demnach die Logarithmen des natürlichen oder hyperbolischen Systems, dessen Basis e $= 2,718281828459$, berechnen.

§. 115. Es sey die Zahl, welche als Potenz dieses Grundfaktors gelten soll $(1 + x)$, und $e^z = (1 + x)$.

In dieser Potenz $(1+x)$ kann x jede ganze und jede gebrochene Zahl seyn, so lange der Exponent z positiv ist, weil die Logarithmen aller ganzen Zahlen in einem Systeme, dessen Grundfaktor größer als 1 ist, positiv, die Logarithmen aber der echten Brüche negativ sind. Wird $x = 0$, so wird auch $z = 0$, weil $e^0 = 1$; jede Potenz mit dem Exponenten Null ist $= 1$; endlich muß $(1+x)$ ein echter Bruch, also x ein negativer echter Bruch seyn, wenn z negativ ist.

Da nun $e^z = (1+x)$, so ist $z. \log \text{nat } e = \log \text{nat.} (1+x)$. Nun ist der Logarithmus der Basis immer 1; also $\log \text{nat } e = 1$, daher ist $z. 1 = \log \text{nat } (1+x)$, oder $z = \log \text{nat } (1+x)$. Der Werth dieses Exponenten z soll nun in einer Reihe nach Potenzen der veränderlichen Größe x ausgedrückt werden.

§. 116. Wir gelangen zu dieser Reihe durch folgenden Kunstgriff. Wir erheben $e^z = (1+x)$ zur nten Potenz; so ist $(e^z)^n = (1+x)^n$ oder

$$e^{zn} = (1+x)^n.$$

Nun ist nach §. 45. $(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1}$

$$+ \frac{n.(x-1)x^2}{1.2} + \frac{n.(n-1).(n-2)x^3}{1.2.3} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)\ldots.(n-r+1).x^r}{1.2.3.4\ldots\ldots\ldots\ldots r}.$$

Diese Binomialreihe verwandeln wir nach §. 92, 93, 94, 95. in eine Exponentialreihe, die nach Potenzen von n fortschreitet, so wird der erste Coeffizient nach §. 93, 97., wenn wir ihn durch A bezeichnen, wieder $A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots \frac{(-1)^{r-1} x^r}{r}$, und die Exponentialreihe der Exponentialgröße $(1+x)^n$ ist ganz wie in §. 96. $(1+x)^n = 1 + An + \frac{A^2 n^2}{1.2}$

$$+ \frac{A^3 n^3}{1.2.3} + \frac{A^4 n^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots + \frac{A^r n^r}{1.2.3\ldots r}.$$

Es ist aber nach §. 107. $e^{nz} = 1 + nz + \frac{n^2 z^2}{1.2}$

$$+ \frac{z^3 n^3}{1.2.3} + \frac{z^4 n^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots \frac{z^r n^r}{1.2.3\ldots r}.$$

Es ist also auch $1 + An + \frac{A^2 n^2}{1.2} + \frac{A^3 n^3}{1.2.3}$

$$+ \frac{A^4 n^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots + \frac{A^r n^r}{1.2.3\ldots r} = 1 + nz + \frac{n^2 z^2}{1.2}$$

$$+ \frac{n^3 z^3}{1.2.3} + \frac{n^4 z^4}{1.2.3.4} \ldots\ldots + \frac{n^r z^r}{1.2.3\ldots r}$$

und daher ist ferner

$$\left.\begin{matrix} 1 + An + \frac{A^2}{1.2} \\ -1 - zn - \frac{z^2}{1.2} \end{matrix}\right\} n^2 \quad \left.\begin{matrix} + \frac{A^3}{1.2.3} \\ - \frac{z^3}{1.2.3} \end{matrix}\right\} n^3$$

$$\left.\begin{matrix} + \frac{A^4}{1.2.3.4} \\ - \frac{z^4}{1.2.3.4} \end{matrix}\right\} n^4 \quad \left.\begin{matrix} \ldots\ldots + \frac{A^r}{1.2.3\ldots r} \\ \ldots\ldots - \frac{z^r}{1.2.3\ldots r} \end{matrix}\right\} n^r = 0$$

und nach §. 79, 95. $1 - 1 = 0$; $A - z = 0$, also $A = z$; $\frac{A^2}{1.2} - \frac{z^2}{1.2} = 0$, $\frac{A^2}{1.2} = \frac{z^2}{1.2}$, und $A = z$; $\frac{A^3}{1.2.3} - \frac{z^3}{1.2.3} = 0$, $\frac{A^3}{1.2.3} = \frac{z^3}{1.2.3}$ oder $A = z$; $\frac{A^r}{1.2.3..r} - \frac{z^r}{1.2.3..r} = 0$, und $\frac{A^r}{1.2.3..1}$ $= \frac{z^r}{1.2.3..r}$, und $A^r = z^r$, also $A = z$.

Nun ist $A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \frac{(-1)^{r-1} x^r}{r}$,

also auch $z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \frac{(-1)^{r-1} x^r}{r}$.

Da aber $z = \log \text{nat } (1 + x)$ ist, so ist auch $\log \text{nat}$ $(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \frac{(-1)^{r-1} x^r}{r}$.

§. 116. Diese Reihe gibt uns zwar den Logarithmus einer Zahl $(1 + x)$, welche größer ist als 1, aber nicht den Logarithmus eines echten Bruches. Den echten Bruch können wir durch $(1 - x)$ bezeichnen, wo x einen echten negativen Bruch bedeutet, und dann ist nach §. 115. $- z = \log \text{nat } (1 - x$.

Nun ist $z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \frac{(-1^{r-1} x^r}{r}$ $= \log \text{nat } (1 + x)$, also $- z = - x - \frac{(-x)^2}{2}$ $+ \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} \ldots\ldots \frac{(-1)^{r-1} (-x)^r}{r} = \log \text{nat}$ $(1 + x)$ oder $- z = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots - \frac{x^r}{r}$ $= \log \text{nat } (1 - x)$.

§. 117. Diese beiden Reihen $\log \text{nat } (1 + x)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \frac{(-1)^{r-1} x^r}{r}$$

und $\log \text{nat } (1 - x) = - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots\ldots \frac{-x^r}{r}$

sind die beiden Fundamentalreihen zur Berechnung der Logarithmen. In dieser Gestalt aber sind sie wenig brauchbar und können nur dann angewendet werden, wenn x ein echter Bruch ist und zwar ein sehr kleiner Bruch.

§. 118. Combiniren wir aber diese beiden Reihen, so können sie gut brauchbar gemacht werden. Da Zahlen, welche Potenzen desselben Systems sind, dividirt werden, wenn man den Logarithmus oder Exponenten des Divisors von dem des Dividendus abzieht, so ist:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \frac{(-1)^r x^r}{r}$$

$$- \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots - \frac{x^r}{r}\right]$$

oder $\log\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots \frac{2x^r}{r}$

oder $\log\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots + \frac{x^r}{r}\right]$. I.

§. 119. Da wir den Quotienten zweier Zahlen einer dritten gleich setzen können, so sey $\frac{1+x}{1-x} = z$, daraus folgt $1 + x = z - xz$, ferner $x + xz = z - 1$, oder $x(1+z) = z - 1$, oder $x = \frac{z-1}{z+1}$, setzen wir diese Werthe in die vorige Gleichung, so ist $\log z$

$$= 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 \dots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\cdot\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^r\right]$$

Beispiel. Es sey $z = 2$, so ist $\log 2$

$$= 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}} \dots\right].$$

Nun ist $\frac{1}{3} = 0{,}33833333$

$$\frac{1}{81} = 0{,}01234567$$

$$\frac{1}{1215} = 0{,}00082305$$

$$\frac{1}{15309} = 0{,}00000565$$

$$\frac{1}{1948617} = 0{,}00000051$$

also $\log 2 = 2.\ 0{,}34657351 = 0{,}69314702$.

§. 120. Die Reihe, welche wir zur Berechnung des Logarithmus von 2 angewendet haben, ist allerdings für jeden Werth von z convergirend, aber doch nicht von der Art, daß man schon durch Berechnung einiger Glieder den gesuchten Logarithmus fände; denn es mußten 5 Glieder entwickelt werden, um den Logarithmus von 2 zu finden und zwar mit sieben Decimalstellen. Wir müssen demnach auf andere Kunstgriffe sinnen, um den Logarithmus einer Zahl durch die Entwickelung von wenigen Gliedern zu erhalten.

§. 121. Erklärung. Der Inbegriff solcher Kunstgriffe heißt Logarithmotechnie.

§. 122. Der erste Kunstgriff, den wir anwenden wollen, soll darin bestehen, eine Reihe aufzustellen, durch welche wir den Logarithmus einer Zahl finden, wenn der Logarithmus einer andern schon bekannt ist. Wir sind dazu bereits berechtiget, weil wir den Logarithmus von zwei durch die vorhin angeführte Reihe berechnet haben.

Wir nehmen zu diesem Zwecke wieder die Reihe

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots \frac{x^r}{r}\right]$$

vor, und setzen $x = \frac{m}{2p+m}$ gleich einem sehr kleinen

Bruche, so ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{m}{2p+m}}{1-\frac{m}{2p+m}}$ oder $\frac{1+x}{1-x}$

$= \frac{2p+2m}{2p} = \frac{p+m}{p}$; dann ist $\log\left(\frac{p+m}{p}\right)$

$$= 2\left[\frac{m}{2p+m} + \frac{1}{3}.\frac{m^3}{(2p+m)^3} + \frac{1}{5}.\frac{m^5}{(2p+m)^5} \dots + \frac{1}{r}.\frac{m^r}{(2p+m)^r}\right]; \text{ oder}$$

$$\log(p+m) - \log p = 2\left[\frac{m}{2p+m} + \frac{1}{3}\frac{m^3}{(2p+m)^3} + \frac{1}{5}.\frac{m^5}{(2p+m)^5} \dots + \frac{1}{r}.\frac{m^r}{(2p+m)^r}\right]; \text{ oder}$$

$$\text{II. } \log(p+m) = \log p + 2\left[\frac{m}{2p+m} + \frac{1}{3}.\frac{m^3}{(2p+m)^3} + \frac{1}{5}.\frac{m^5}{(2p+m)^5} \dots + \frac{1}{r}.\frac{m^r}{(2p+m)^r}\right].$$

§. 123. Diese Reihe spricht ferner die Methode aus, den Logarithmus einer zweitheiligen Größe zu finden, wenn der Logarithmus des einen Theils bereits gefunden ist.

Um den Logarithmus von 3 mittelst dieser Reihe zu berechnen, setzen wir $p = 2$, und $m = 1$, so ist log 3

$$= \log 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}.\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}.\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\frac{1}{5^9}\right].$$

$$\text{Nun ist log } 2 = 0{,}69314701$$
$$\frac{1}{5} = 0{,}20000000$$
$$\frac{1}{375} = 0{,}00266666$$
$$\frac{1}{15625} = 0{,}00006400$$
$$\frac{1}{546875} = 0{,}00000182$$

Also $\log 3 = 0{,}69314701 + 2\,0{,}20273248$
$= 0{,}69314701 + 0{,}40546496$
oder $\log 3 = 1{,}09861197$ oder mit 7 Decimalstellen $= 1{,}0986120$, der nur in der letzten Decimalstelle um 3 Einheiten abweicht und hier zu klein ist. Genauer finden wir ihn, wenn wir 6 Glieder mit 9 Decimalstellen entwickeln.

§. 124. Durch Hülfe dieser Reihe können wir die Logarithmen der Zahlen in ihrer natürlichen Folge berechnen, die Convergenz wird immer früher eintreten, je größer p wird, indem m immer $= 1$ bleibt, wenn wir die Logarithmen der um 1 zunehmenden Zahlen berechnen. Auf diese Reihe gründet sich auch der Gebrauch der Proportionaltheile bei den Logarithmen.

§. 125. Durch einen andern Kunstgriff erhalten wir den Logarithmus einer Zahl, wenn man voraussetzen darf, daß der Logarithmus einer nächst kleineren oder nächst größeren Zahl bekannt ist. Es sey $\log z - 1$ bekannt, und $\log z$ zu suchen.

Da §. 116. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots - \frac{x^r}{r}$ ist, so setze man $x = \frac{1}{z}$, da nach §. 115. $(1-x)$ ein echter Bruch, also auch $-x$ ein negativer echter Bruch ist, dann ist $\log\left(1 - \frac{1}{z}\right)$

$$= \log\left(\frac{z-1}{z}\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4z^4} \ldots$$

$$- \frac{1}{rz^r};$$ oder

$$\log(z-1) - \log z = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3}$$

$$- \frac{1}{4z^4} \ldots - \frac{1}{rz^r}$$

und III. $\log(z-1) + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{4z^4} \ldots$

$$+ \frac{1}{rz^r} = \log z \text{ (A)}.$$

Ferner war §. 115. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$$- \frac{x^4}{4} \ldots \frac{(-1)^{r-1} x^r}{r}$$

also, wenn $x = \frac{1}{z}$ gesetzt wird:

$$\log\left(1+\frac{1}{z}\right) = \log\left(\frac{z+1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3}$$

$$- \frac{1}{4z^4} \ldots \frac{(-1)^{r-1} \cdot 1}{r} \cdot \frac{1}{z^r}$$

und $\log(z+1) - \log z = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3}$

$$- \frac{1}{4z^4} \ldots \frac{(-1)^{r-1} \cdot 1}{r} \cdot \frac{1}{z^r}$$

und $\log(z+1) - \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{4z^4} \ldots$

$$\frac{(-1)^{r-1} \cdot 1}{r} \cdot \frac{1}{z^r} = \log z \text{ (B)}.$$

Addiren wir die Reihen (A) und (B), so erhalten wir

$\log(z+1) + \log(z-1) + \frac{2}{2z^2} + \frac{2}{4z^4} \ldots + \frac{2}{rz^r}$ $= 2\log z$, wenn in beiden r eine gerade Zahl ist, so ist $(-1)^{r-1}$ eine ungerade Potenz und negativ, welche beim Transponiren in B positiv wird; endlich ist $\frac{1}{2}\log(z+1) + \frac{1}{2}\log(z-1) + \frac{1}{2z^2} + \frac{2}{4z^4} \ldots$ $+ \frac{1}{rz^r} = \log z$ IV. wo r eine gerade Zahl und auch einen geraden Exponenten bedeutet.

§. 126. Diese letzte Reihe ist vorzüglich geeignet, die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen; denn ist z eine Primzahl, so ist es weder $z-1$ noch $z+1$, sondern diese sind zusammengesetzte Zahlen (diesen Namen führt jede andere, die keine Primzahl ist), und man kann diese durch die frühere Reihe §. 119. berechnen. Je größer nun z ist, desto brauchbarer ist diese Formel.

§. 127. Wenn wir in der Formel:

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \ldots \frac{x^r}{r}\right],$$

wenn r ungerade ist statt x setzen $\frac{1}{z}$, so ist:

$$\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \frac{1}{7z^7} \ldots + \frac{1}{rz^r}\right];$$ daraus erhalten wir:

$$\log(z+1) - \log(z-1) = 2\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \frac{1}{7z^7} \ldots + \frac{1}{rz^r}\right]$$

$$\text{V. } \log(z+1) = \log(z-1) + 2\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \frac{1}{7z^7} \ldots + \frac{1}{rz^r}\right].$$

Man setze ferner $z = 2p - 1$, so ist $\frac{z+1}{z-1}$ $= \frac{2p-1+1}{2p-2} = \frac{p}{p-1}$; also $\frac{z+1}{z-1} = \frac{p}{p-1}$. Nun ist $\log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3}.\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{z^5} + \frac{1}{7}.\frac{1}{z^r}\ldots + \frac{1}{r}.\frac{1}{z^r}\right]$ wo r ein ungerader Exponent ist;

also auch $\log\left(\frac{p}{p-1}\right) = 2\left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(2p-1)^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{(2p-1)^5} + \frac{1}{7}.\frac{1}{(2p-1)^7} + \frac{1}{r}.\frac{1}{(2p-1)^r}\right]$;

und ferner $\log p = \log(p-1)$

$$+ 2\left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(2p-1)^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{(2p-1)^5} + \frac{1}{7}.\frac{1}{(2p-1)^7} + \frac{1}{r}.\frac{1}{(2p-1)^r}\right].$$

Setzen wir überdies noch $p = q^2$, so ist

$$\log q^2 = \log(q^2-1) + 2\left[\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{(2q^2-1)^5}\ldots + \frac{1}{r}.\frac{1}{(2q^2-1)^r}\right],$$

oder $2\log q = \log(q+1).(q-1$

$$+ 2\left[\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(2q-1)^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{(2q^2-1)^5}\ldots\right],$$

oder VI. $\log q = \frac{1}{2}\log(q+1) + \frac{1}{2}\log(q-1)$

$$+ \left[\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3}.\frac{1}{(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{(2q^2-1)^5}\ldots\right].$$

Diese Reihe gibt den Logarithmus einer Primzahl, wenn der Logarithmus einer nächst höheren und nächst niedrigeren zusammengesetzten Zahl bekannt ist, und hat die vortheilhafte Eigenschaft, daß sie sehr schnell convergirt.

Beyspiel. Es sey $q = 7$; also $\log 7 = \frac{1}{2}\log 8$
$$+ \frac{1}{2}\log 6 + \left[\frac{1}{97} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(97)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(97)^5}\ldots\right]$$

$$\frac{1}{97} = 0{,}01030928$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(97)^3} = 0{,}00000037$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(97)^5} = 0{,}00000000$$

$$1{,}03972077 = \tfrac{1}{2}\log 8$$

$$0{,}89587973 = \tfrac{1}{2}\log 6$$

$$\log 7 = 1{,}94591015$$

Hier gibt das dritte Glied $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(97)^5}$ noch in der 11ten Decimalstelle keinen Werth.

§. 128. Zuletzt wollen wir noch eine Reihe aufstellen. Es soll $\log z$ berechnet werden, mz bedeutet ein Vielfaches von z, welches Vielfache von einer dritten Zahl n um d verschieden ist; $mz = n + d$. Es wird vorausgesetzt, daß $\log m$ und n schon gefunden ist. Wenn mz um ein geringes größer ist, als n, $mz = n + d$, so ist $mz = \frac{n}{n}(n + d) = n\left(\frac{n}{n} + \frac{d}{n}\right)$, oder $mz = n\left(1 + \frac{d}{n}\right)$.

Es ist also $\log m + \log z = \log n + \log\left(1 + \frac{d}{n}\right)$, aber $\log\left(1 + \frac{d}{n}\right) = \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \frac{d^4}{4n^4}\ldots \frac{(-1)\,d^r}{r\ \ n^r}$ §. 115., wenn man $\frac{d}{n} = x$, also $\left(1 + \frac{d}{n}\right) = (1 + x)$ setzt.

Daher ist:

$$\log z = \log n - \log m + \frac{d}{n} - \frac{d^2}{2n^2} + \frac{d^3}{3n^3} - \frac{d^4}{4n^4} \ldots\ldots$$

Dadurch sind wir im Stande, den Logarithmus einer Zahl zu finden, wenn man von ihr ein Vielfaches anzugeben weiß, das um etwas geringes von einer Zahl n, deren Logarithmus schon bekannt, abweicht, jedoch muß auch der Logarithmus des Faktors m bekannt seyn.

Beispiel. Ist $z = 11$, $m = 6$, $n = 68$, so ist $d = 2$, denn $68 - 6.\,11 = 2$, $n - mz = d$; und es ist $\log 11 = \log 68 - \log 6 - \frac{2}{68} - \left(-\frac{2}{68}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{68}\right)^3 \ldots$ weil hier d negativ ist; denn da $mz = 6.\,11$ $n = 68$, so ist $mz = n - d$ $6.\,11 = 68 - 2$, also ist $\log 11 = \log 68 - \log 6 - \frac{1}{34} - \frac{1}{2.\,34^2} - \frac{1}{3.\,34^3} \ldots$

Nach §. 115. ist $\log(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \ldots \frac{(-1)a^r}{r}$

und Modulus Basis $(1+a)$; $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \ldots \frac{(-1)a^r}{r}$

daher ist auch $A = \log \text{nat}\,(1+a)$. Weil nun in §. 96.

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} \ldots + \frac{A^rx^r}{1.2.3\ldots r}$$

so ist auch: $(1+a)^x = 1 + \log nat\,(1+a).\,x$

$$+ \frac{[\log nat\,(1+a)]^2.\,x^2}{1.\,2} + \frac{[\log nat\,(1+a)]^3.\,x^3}{1.\,2.\,3} \ldots$$

$$+ \frac{[\log nat\,(1+a)]^r\,x^r}{1.\,2.\,3\,\ldots\ldots\,r}.$$

Die Coeffizienten einer Exponentialreihe sind demnach aus den Logarithmen des natürlichen Potenzensystems hergenommen, daher auch dieses natürliche Potenzensystem das richtigste ist.

§. 129. Nun kann auch, wie wir in §. 112. angedeutet haben, nachgewiesen werden, daß es leicht sey, auch die Logarithmen eines andern Systems zu berechnen, sobald nur die Logarithmen von einem Systeme berechnet sind.

Es sey die Basis des neuen Systems a und $(1+y)$ eine Potenz dieser Basis, und zwar sey $a^z = (1+x)$, so ist $z.\log a = \log\,(1+y)$, und weil der Logarithmus der Basis in einem jeden Systeme $= 1$, so ist $z = \log\,(1+y)$. Wir suchen nun die Zahl a im berechneten hier im natürlichen Potenzensysteme auf, und sehen, was für eine Potenz a von der Basis e sey. Es sey $e^m = a$, so ist auch $(e^m)^z = 1+x$, oder $e^{mz} = (1+y)$. Nun sehen wir auch, was für eine Potenz der Basis e die Zahl $(1+y)$ ist; gesetzt wir finden, daß $e^n = (1+y)$ ist, so ist auch $e^{mz} = e^n$. Weil gleiche Potenzen von gleicher Wurzel auch gleiche Exponenten haben, so ist $mz = n$ und $z = \frac{n}{m}$. Nun ist n der natürliche Logarithmus von $(1+y)$, in Zeichen $n = \log nat\,(1+y)$ und $m = \log nat\,a$; daher ist $z = \frac{\log nat\,(+y)}{\log nat\,a}$ d. h. soll irgend eine Zahl $(1+y)$ als eine Potenz irgend einer Basis betrachtet und ihr Logarithmus gesucht werden, so dividire man den Logarithmus dieser Zahl durch den Logarithmus der Basis, wobei die Logarithmen aus dem schon berechneten Systeme genommen werden, hier aus dem natürlichen Potenzensysteme.

Da $y = \frac{\log nat (1 + y)}{\log nat a}$, so ist auch

$y = \frac{1}{\log nat a} \times \log nat (1 + y)$. Die Größe

$\frac{1}{\log nat a}$, womit der Logarithmus einer Zahl aus dem berechneten Potenzensysteme multiplicirt werden muß, um den Logarithmus derselben Zahl für eine andere Basis, also für ein anderes System zu finden, heißt Modulus.

Wäre $1 + y = 100$, und sollte der briggische Logarithmus der Zahl 100 gefunden werden, so ist derselbe $y = \frac{1}{\log nat 10} \times \log nat 100$ oder $y = \frac{1}{2{,}30258509} \times \log nat 100$ oder $y = 0{,}4342945 . \log nat 100$. Der Modulus, womit der natürliche Logarithmus von 100 multiplicirt werden muß, um den briggischen Logarithmus von 100 zu haben, ist 0,4342945. Dieser Modulus ist es, womit jeder natürliche Logarithmus zu multipliciren ist, um den briggischen für dieselbe Zahl zu erhalten. Im natürlichen Potenzensysteme ist dieser Modulus, wie wir in §. 100. erfahren haben, 1.

§. 130. Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen e wird zuweilen mit Vortheil gebraucht, um aus einer logarithmischen Gleichung eine unbekannte Größe zu entwickeln. Z. B. aus der Gleichung $\log nat. x^2 = \frac{m}{n} + \log nat \frac{c}{x}$, sey x zu finden, so ist $2 \log nat x = \frac{m}{n} + \log nat c - \log nat x$, und $2 \log nat x + \log nat x - \log nat c = \frac{m}{n}$ oder $3 \log nat x$

$-\log nat\, c = \frac{m}{n}.\, 1$; oder $\log nat \frac{x^3}{c} = \frac{m}{n}.\, 1$. Nun ist $1 = \log nat\, e$, daher $\log nat \frac{x^3}{c} = \frac{m}{n}. \log nat\, e$, und ferner $\log nat \frac{x^3}{c} = \log nat\, e^{\frac{m}{n}}$. Weil nun gleichen Logarithmen in demselben Systeme gleiche Zahlen entsprechen, so ist $\frac{x^3}{c} = e^{\frac{m}{n}}$, und $x^3 = c.\, e^{\frac{m}{n}}$; daraus folgt endlich $x = \sqrt[3]{c.\, e^{\frac{m}{n}}}$.

Bemerkung. Es ist $3. \log nat.\, x = \log nat.\, x + \log nat\, x + \log nat\, x = \log nat\, (x.\, x.\, x) = \log nat\, x^3$, weil Potenzen von derselben Wurzel multiplicirt werden, wenn man ihre Exponenten oder Logarithmen addirt; ferner ist $3 \log nat\, x - \log nat\, c = \log nat \left(\frac{x^3}{c}\right)$, weil Potenzen von derselben Wurzel dividirt werden, wenn man ihre Exponenten oder Logarithmen subtrahirt.

III. Abschnitt.

Anwendung des Binomialsatzes auf die Berechnung trigonometrischer Funktionen.

§. 131. Die Geometrie belehrt uns schon über den Zusammenhang, in welchem die Winkel und die Seiten eines Dreieckes stehen, und zwar dadurch, daß sie uns an dem rechtwinkeligen Dreiecke, worauf alle übrige zurückgeführt werden, wenn man aus der Spitze eines Winkels auf die gegenüberliegende Seite ein Loth fällt, klar darstellt, wie bei nicht geänderter Hypotenuse jeder von den beiden spitzigen Winkeln geändert wird, wenn die Catheten ihre Größe ändern.

§. 132. Die Trigonometrie, deren Geschäft es ist, aus der bekannten Größe der Seiten die Größe der ihnen gegenüber liegenden Winkel zu messen, kann diese Aufgabe nur dadurch lösen, daß sie den Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln noch genauer untersucht.

§. 133. Zu diesem Zwecke sucht sie solche Zahlengrößen auf, deren Quantität die jedesmalige Größe des in Rede stehenden Winkels angibt. Diese Zahlengrößen bildet sie aus den Verhältnissen, in welchen bei dem rechtwinkeligen Dreiecke jede der beiden Catheten zu der Hypotenuse steht, die als unveränderlich angenommen wird. Sie gibt der Hypotenuse einen unveränderlichen Zahlenwerth, gewöhnlich die Einheit, und drückt die dem Winkel gegenüberliegende Cathete AB, welche sie das Loth, so wie auch die anliegende Cathete BC, welche sie das abgeschnittene Stück nennt, in Theilen der Einheit, also als echte Brüche aus.

§. 134. Sie stellt ferner diese Zahlengrößen als Quotienten dar und gibt diesen Quotienten besondere Namen. Sie nennt den Quotienten, welcher entsteht, wenn man das in Zahlen ausgedrückte Loth durch die in Zahlen ausgedrückte Hypotenuse dividirt, den sinus des dem Lothe gegenüber liegenden Winkels, in Zeichen $\frac{AB}{AC} = \sin.\hat{x}$, wo sin. den sinus und $\hat{x}$ den Winkel $\hat{x}$ Fig. I. bezeichnet. Den Quotienten, welcher entsteht, wenn das in Zahlen ausgedrückte abgeschnittene Stück durch die in Zahlen ausgedrückte Hypotenuse dividirt wird, nennt sie Cosinus des anliegenden Winkels, in Zeichen $\frac{BC}{AC} = \cos\hat{x}$. Ferner nennt sie den Quotienten $\frac{AB}{BC}$, die Tangente des dem Lothe gegenüberliegenden Winkels;

das Umgekehrte aber $\frac{BC}{AB}$ die Cotangente, in Zeichen $\frac{AB}{BC} = \text{tang}\ \hat{x}$ und $\frac{BC}{AB} = \cos.\ \hat{x}$.

Es ist klar, daß jeder von diesen Quotienten sich ändere, wie sich der durch ihn bezeichnete Winkel ändert.

§. 135. Es sey nun CBA ein rechtwinkeliges Dreieck Fig. 1. und Winkel x derjenige, dessen Sinus oder Cosinus bestimmt werden soll. Man beschreibe mit der Hypotenuse CA als Radius aus dem Punkte C, also aus dem Scheitel des in Rede stehenden Winkels einen Quadranten, so wird $\hat{x}$ zu einem Centriwinkel, der Bogen AGM das Maß des Winkels $\hat{x}$. Setzen wir nach §. 133. $CA = 1$, so ist $\frac{AB}{BC} = \sin\ \hat{x}$ oder $AB = \sin x$, ferner ist $\frac{BC}{AC} = \cos\ \hat{x}$, oder $BC = \cos\ \hat{x}$ und weil sowohl AB als BC kleiner sind wie AC, welche $= 1$ ist, so sehen wir, daß sinus und cosinus echte Brüche sind, da keine der Catheten im rechtwinkeligen Dreiecke der Hypotenuse gleich wird.

§. 136. Wir wissen, daß $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ist, also $AB^2 + BC^2 = 1$, weil $AC = 1$ ist, nun ist $AB = \sin x$, $BC = \cos x$, also ist auch $\sin{}^2 x + \cos{}^2 x = 1$.

§. 137. Es sey $DC = BC = 1$. Fig. 2., ferner sey $DG = \sin y$ bekannt, wie auch $BA = \sin x$, $GC = \cos y$, und $AC = \cos x$, so finden wir auch $DF = \sin(x+y)$ und $FC = \cos(x+y)$. Man ziehe GH parallel mit BA, und GE parallel mit AC.

1. Es ist △gl ABC ∽ GHC ∽ FOC ∽ GOE ∽ GED und daher $\frac{BA}{BC} = \frac{GH}{GC}$ oder $\frac{\sin x}{1} = \frac{GH}{\cos y}$, daraus folgt $GH = \sin x.\ \cos y$; dann ist ferner

$\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{DG}$ oder $\frac{\cos x}{1} = \frac{DE}{\sin y}$, also $DE = \cos \hat{x}.$ $\sin y$. Nun ist $GH = EF$, und $EF + DE = DF$, also ist auch $DF = \sin x. \cos y + \cos \hat{x}. \sin y$; es ist aber $DF = \sin (x+y)$; also ist $\sin (x+y) = \sin x. \cos y + \sin y. \cos \hat{x}.$

2. $\frac{AC}{BC} = \frac{HC}{GC}$ oder $\frac{\cos x}{4} = \frac{HC}{\cos x}$, daraus folgt $HC = \cos \hat{x}. \cos y$; ferner ist $\frac{BA}{BC} = \frac{GE}{DG}$ oder $\frac{\sin x}{1} = \frac{GE}{\sin y}$, und $GE = \sin x. \sin y$. Nun ist $GE = HF$, und $HC - HF = FC$; also ist auch $FC = \cos x.$ $\cos y - \sin x. \sin y$, aber $FC = \cos (x+y)$; daher ist $\text{Cos} (x+y) = \cos x. \cos y - \sin x. \sin y.$

Diese Verhältnisse der Seiten wurden aus dem Grunde aufgestellt, weil im ähnlichen Dreiecke die dem gleichen Winkel gegenüberliegenden Seiten im glichen Verhältnisse stehen.

§. 138. Setzen wir in den beiden Gleichungen $\sin (x+y) = \sin x. \text{Cos}\, x + \sin y. \cos x$ und $\cos (x+y) = \cos x. \cos y - \sin x. \sin y$, $x = y$, so ist I. $\sin 2x = 2 \sin x. \text{Cos}\, x$ und eben so

II. $\text{Cos}\, 2x = \text{Cos}^2 x - \sin^2 x$. Eine dritt Formel

III. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ soll auch für unsern künftigen Zweck ihre Anwendung finden.

§. 139. Was von dem ganzen und doppelten Winkel gilt, gilt auch vom halben und einfachen Winkel; dem zu Folge ist, wenn wir $x = \frac{a}{2}$ setzen:

I. $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2}. \cos \frac{a}{2}$

II. $\text{Cos}\, a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$

III. $\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = 1.$

§. 140. Mit diesen drei Formeln, zu denen späterhin sich noch eine vierte gesellen soll, beginnen wir unsere Untersuchung.

§. 141. In der Geometrie hören wir, daß zwischen dem Durchmesser und der Peripherie, also auch zwischen dem Radius und der Peripherie eines Kreises ein constantes Verhältniß statt finde. Wir finden die Länge der Peripherie $= 3,1415 \ldots$ Diametern, und bezeichnen diese Zahl, welche die Ludolphische genannt wird, durch π, so daß $\pi = 3,1415 \ldots$ ist.

§. 142. Es sey z ein sehr kleiner Centriwinkel; setzen wir den Radius $BC = 1$, Fig. 3. so ist $\frac{BA}{BC} \sin \hat{z}$ oder auch $BA = \sin z$. Es ist ferner $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, also auch $\cos^2 z = 1 - \sin^2 z$ und $\cos z = \sqrt{(1 - \sin^2 z)}$. Ist nun $\hat{z}$ verschwindend klein, so fellt das Loth AB mit dem Bogen ${}^1AB$ fast zusammen und man kann ohne Fehler statt des Lothes AB den Bogen setzen, den wir $= x$ setzen wollen; da $AB = \sin z$, so ist auch $x = \sin z$ und $x^2 = \sin^2 z$; daher ist auch $\cos z = \sqrt{(1 - x^2)}$ oder $\cos z = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

§. 143. Wir verwandeln nun $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Binomalreihe, in welcher der erste Binomialcoeffizient ${}^{\frac{1}{2}}\mathfrak{B}^{1} = \frac{1}{2}$ ist; diesen setzen wir $= a$, so daß $\frac{1}{2} = a$ ist, und ohne uns um die folgenden Coeffizienten zu bekümmern, setzen wir dieselben $= b$, $= c$, $= d$ etc., so ist $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - ax^2 + bx^4 - cx^6 + dx^8 \ldots$. Da $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ ist nach §. 136. und $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$, so ist $\cos^2 z = \cos^2 z - (1 - \cos^2 z)$ oder $\cos 2z = 2\cos^2 z - 1$, welches die vierte Formel ist, die wir zu unserer Untersuchung brauchen.

Es ist nun auch:

$$\cos 2z = 2\,[1 - \underline{a}\,x^2 + bx^4 - cx^6 + dx^8 \ldots]^2 - 1.$$

Die Erhebung dieser Reihe zum Quadrate läßt sich nach §. 54. sehr leicht bewirken. Wir finden

$$\operatorname{Cos} 2z = 2\,[1 - 2ax^2 \left.\begin{matrix} + a^2 \\ + 2b \end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix} - 2ab \\ - 2c \end{matrix}\right\} x^6 \left.\begin{matrix} + b^2 \\ + 2ac \\ + 2d \end{matrix}\right\} x^8] \ldots - 1$$

$$\text{oder } \operatorname{Cos} 2z = 1 - 4ax^2 \left.\begin{matrix} + 2a^2 \\ + 4b \end{matrix}\right\} x^4 \left.\begin{matrix} - 4ab \\ - 4c \end{matrix}\right\} x^6 \left.\begin{matrix} + 2b^2 \\ + 4ac \\ + 4d \end{matrix}\right\} x^8 \ldots$$

Da zu einem doppelten Centriwinkel ein doppelter Bogen gehört, und

$$\cos d = 1 - a.\,x^2 + b.\,x^4 - c.\,x^6 + d.\,x^8 \ldots$$

ist, so ist auch:

$$\cos 2z = 1 - a.\,(2x)^2 + b.\,(2x)^4 - c.\,(2x)^6 + d.\,(2x)^8 \ldots$$

$$\text{oder } \cos 2z = 1 - 4ax^2 + 16bx^4 - 64cx^6 + 256dx^8 \ldots$$

daher ist

$$\begin{array}{llllll} & 1 - 4ax^2 & + 16b.x^4 & - 64cx^6 & + 256dx^8 \ldots \\ = & 1 - 4ax^2 & + 2a^2.\,x^4 & - 4ab.x^6 & + 2b^2.x^8 \\ & & + 4b.\,x^4 & - 4c.\,x^6 & + 4ac.x^8 \\ & & & & + 4d.x^8 \end{array}$$

oder

$$\left.\begin{array}{lllll} 1 - 4ax^2 & + 16bx^4 & - 64cx^6 & + 256d \\ -1 + 4ax^2 & - 2a^2x^4 & + 4ab.x^6 & - 2b^2 \\ & - 4b.x^4 & + 4c.\,x^6 & - 4ac \\ & & & - 4d \end{array}\right\} x^8 \ldots = 0.$$

Daraus folgt nach §. 79. $1 - 1 = 0$ oder $1 = 1$; $- 4ax^2 + 4ax^2 = 0$ oder $a = a$; $16b - 4b - 2a^2 = 0$ oder $12b = 2a^2$, $6b = a^2$, und $b = \frac{a^2}{6}$; $- 64c + 4ab + 4c = 0$ oder $- 60c = - 4ab$, $- 15c = - ab$ und $c = \frac{ab}{15}$ oder weil $b = \frac{a^2}{6}$, so ist

$c = \frac{a^3}{90}$; $256d - 4d - 2b^2 - 4ac = 0$, oder

$252d = 4ac + 2b^2$, und weil $c = \frac{a^3}{90}$, $b^2 = \frac{a^4}{36}$, so

ist erstens $126d = 2ac + b^2$, dann $126d = \frac{2a^4}{90} + \frac{a^4}{36}$

oder $126d = \frac{4a^4 + 5a^4}{180}$ oder $126d = \frac{9a^4}{180} = \frac{a^4}{20}$,

daraus folgt $d = \frac{a^4}{126.20}$.

Es ist also

$$\cos z = 1 - ax^2 + \frac{a^2x^4}{6} - \frac{a^3x^6}{90} + \frac{a^4x^8}{126.20} \ldots.$$

aber $a = \frac{1}{2}$; daher ist auch

$$\cos z = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{90.8} + \frac{x^8}{16.20.126} \ldots,$$

oder $$\cos z = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \quad \text{I.}$$

§. 143. Das Gesetz, nach welchem diese Reihe fortschreitet, ist nun leicht zu erkennen. Die Hauptgröße schreitet nach Potenzen fort, deren Exponent immer um zwei zunimmt, der Nenner ist jedesmal eine Permutationszahl des Exponenten.

§. 144. Satz. Der Sinus eines Winkels $\hat{z}$, der einen andern Winkel $\hat{x}$ zu 90° ergänzt, ist der Cosinus des andern Winkels $\hat{x}$, in Zeichen $\sin x = \cos \hat{z}$.

Beweis. Es ist Fig. $\frac{AC}{BC} = \operatorname{cosin} z$, $\frac{BF}{BC} = \sin x$, oder weil $BF = AC$ ist, so ist auch $\frac{AC}{BC} = \sin x$, nun ist auch $\frac{AC}{BC} = \cos \hat{z}$, also $\cos \hat{z} = \sin x$.

§. 145. Nachdem wir eine Reihe zur Berechnung des Cosinus von irgend einem Winkel aufgefunden haben, sind wir im Stande auch eine Reihe aufzustellen, durch welche der Sinus eines jeden Winkels berechnet werden kann.

Fig. 4. Wir nehmen zu dieser Absicht einen sehr großen spitzigen Winkel an BCA, so daß der Winkel, der ihn zu 90° ergänzt, nämlich der Winkel BCF, verschwindend klein ist.

Da Winkel BCF = z verschwindend klein ist, so fällt das Loth BF oder der linearische Sinus des Winkels z mit dem Bogen zusammen, so daß wir statt BF oder statt sin z ohne merklichen Fehler den Bogen, den wir y nennen wollen, setzen können, also sin z = y, und da sin z = cos x, so ist auch cos x = y.

Nun ist sin x = $\sqrt{}$ (1 — cos² x), also auch sin x = $\sqrt{}$ (1 — y²) oder sin x = $(1-y^2)^{\frac{1}{2}}$ $= 1 - ay^2 + by^4 - cy^6 + dy^8 \ldots$, wenn wir in der daraus hervorgehenden Binomialreihe die Coeffizienten durch a, b, c, d etc. bezeichnen, wo a = $\overset{\frac{1}{2}\;1}{\mathfrak{B}}$ = ½ ist.

Nun ist $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} . \cos \frac{x}{2} = \sin \frac{x}{2} . 2 \cos \frac{x}{2}$

§. 139. und weil cos x = y, also $2 \cos \frac{x}{2} = \frac{2y}{2} = y$ ist, so ist $\sin x = \sin \frac{x}{2} . y$, nun ist auch $\sin \frac{x}{2}$

$$= 1 - a.\left(\frac{y}{2}\right)^2 + b.\left(\frac{y}{2}\right)^4 - c.\left(\frac{y}{2}\right)^6 + d.\left(\frac{y}{2}\right)^8 \ldots$$

weil zu einem halben Winkel auch ein halber Bogen gehört, also auch

$$\sin = y\left[1 - \frac{ay^2}{4} + \frac{by^4}{16} - \frac{cy^6}{64} + \frac{dy^8}{256} \ldots\right]$$

aber nach §. 142. ist auch

$$\cos x = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{y^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}.$$

Da nun $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ist, so ist auch das Quadrat dieser beiden Reihen $= 1$.

Um die Erhebung zum Quadrate bequemer einzurichten, wollen wir die Coeffizienten der ersten Reihe durch A, B, C, D, E und so weiter, die der zweiten durch α, β, γ, δ, ε etc. bezeichnen, wo also $A = \frac{a}{4}$, $B = \frac{b}{16}$ ist, und so fort, aber $\alpha = \frac{1}{1.2}$ $\beta = \frac{1}{1.2.3.4}$ und so weiter ist; dann ist auch

$$y^2 [1 - Ay^2 + By^4 - Cy^6 + Dy^8]^2 + [1 - \alpha y^2 + \beta y^4 - \gamma y^6 + \delta y^6 - \varepsilon y^8 \ldots]^2 = 1 \text{ ist.}$$

Nach §. 54. ist ferner

$$y^2 \left[1 - 2Ay^2 \begin{matrix} + A^2 \\ + 2B \end{matrix}\Big\} y^4 \begin{matrix} - 2AB \\ - 2C \end{matrix}\Big\} y^6 \begin{matrix} + B^2 \\ + 2AC \\ + 2D \end{matrix}\Bigg\} 8 \ldots \right]$$

$$+ \left[1 - 2\alpha y^2 \begin{matrix} + \alpha^2 \\ + 2\beta \end{matrix}\Big\} y^4 \begin{matrix} - 2\alpha\beta \\ - 2\gamma \end{matrix}\Big\} y^6 \begin{matrix} + \beta^2 \\ + 2\alpha\gamma \\ + 2\delta \end{matrix}\Bigg\} y^8 = 1 \right].$$

Multipliciren wir mit y^2, setzen wir die gleichartigen Gliede untereinander und bringen die Gleichung auf Null, so ist:

$$\begin{matrix} \\ + 1 \\ - 1 \end{matrix} \begin{matrix} y^2 - 2A \\ - 2\alpha y^2 + \alpha^2 \\ + 2\beta \end{matrix}\Bigg\} y^4 \begin{matrix} + A^2 \\ + 2B \\ - 2\alpha\beta \\ - 2\gamma \end{matrix}\Bigg\} y^6 \begin{matrix} - 2AB \\ - 2C \\ + \beta^2 \\ + 2\alpha\gamma \\ + 2\delta \end{matrix}\Bigg\} y^8 = 0.$$

Nun ist nach §. $1 - 1 = 0$;

2) $y^2 - 2\alpha y^2 = 0$, $y^2 = 2\alpha y^2$, oder $\frac{y^2}{2y^2} = \alpha$,

oder $\frac{1}{2} = \alpha$

3) $-2A + \alpha^2 + 2\beta = 0$, $\alpha^2 + 2\beta = 2A$, aber

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{1.2.3.4}$$

also $\frac{1}{4} + \frac{2}{1.2.3.4} = 2A$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 2A$,

und $\frac{1}{6} = A$.

4) $2B + A^2 - 2\alpha\beta - 2\gamma = 0$, $2B = 2\alpha\beta + 2\gamma - A^2$;

nun ist $A^2 = \frac{1}{36}$, $2\alpha\beta = 2.\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3.4}$, 2γ

$$= 2.\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$$

also $2B = \frac{1.5.6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{2}{1.2.3.4.5.6} - \frac{1}{1.2.3.6}$,

oder $2B = \frac{32}{1.2.3.4.5.6} - \frac{20}{1.2.3.4.5.6} = \frac{12}{1.2.3.4.5.6}$

$$= \frac{1}{1.3.4.5} \text{ und } B = \frac{1}{1.2.3.4.5}$$

5) $-2C - 2AB + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\delta = 0$,

$\beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\delta - 2AB = 2C$, $\beta^2 = \frac{1}{1.2.3.4}.$

$\frac{1}{1.2.3.4}$, $2\alpha\gamma = 2.\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$,

$2\delta = 2.\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}$, $-2AB = -2.\frac{1}{1.2.3}.$

$\frac{1}{1.2.3.4.5}$. Daraus folgt $C = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$.

Da nun $\sin x = y - Ay^3 + By^5 - Cy^7 + Dy^9 \ldots$,

so ist $\sin x = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5}$

$$- \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{y^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}, \ldots \quad \text{II.}$$

und auch hier ist das Gesetz, nach welchem die Reihe fortgeht, leicht zu erkennen. Die Haupt- d. i. die Länge des Bogens schreitet nach den ungeraden Potenzen fort, die Nenner aber sind die Permutationszahlen der Exponenten.

§. 146. Um beide Reihen für den Cosinus und Sinus zur wirklichen Berechnung noch mehr einzurichten, geben wir derselben eine andere Gestalt. Es sey für den Radius 1 die Länge des Bogens von $90^\circ = c$. Der in der Reihe als Hauptgröße vorkommende Bogen stellt nicht die Grade, sondern nur die in Theilen des Radius ausgedrückte Länge vor. Da nun diese Bogenlänge unbestimmt angenommen wurde, so ist diese Bogenlänge offenbar ein Theil von der Bogenlänge c, die einem Winkel von 90° angehört. Der wievielte Theil aber der unbestimmt in der Reihe angenommene Bogen von der Bogenlänge c sey, kann nur die Größe des Winkels, dessen Cosinus oder Sinus gesucht wird, bestimmen; denn der sovielte Theil dieser Winkel von 90° ist, der sovielte ist die Bogenlänge x, oder y von c. Wir wollen diesen Theil allgemein durch $\frac{m}{n}$ ausdrücken, so daß $x = \frac{m}{n}.c$, oder auch $y = \frac{m}{n}.c$ sey, wo m die Grade, Minuten und Sekunden des Winkels, dessen Cosinus oder Sinus gesucht wird, bedeutet, aber $n = 90^\circ$ ist; c bedeutet den vierten Theil der Peripherie 6,283185307978, und bedeutet π die halbe Peripherie, für den Radius 1, so ist $\pi = 3{,}141592653989$ und für den Radius 1 ist $c = \frac{\pi}{2} = 1{,}570796326794$.

So wie aber die Bogenlänge x oder $y = \frac{m}{n}.c$ ist, so ist der Winkel $\hat{z}$, oder $\hat{x} = \frac{m}{n}.90^\circ$, daher ist

$$\text{I. } \mathrm{Cos}\,\frac{m}{n}.90^\circ = 1 - \frac{m^2}{n^2}.\frac{c^2}{2} + \frac{m^4}{n^4}.\frac{c^4}{1.2.2.4}$$
$$- \frac{m^6}{n^6}.\frac{c^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{m^8}{n^8}.\frac{c^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \dots\dots$$

$$\text{II. } \sin.\frac{m}{n}.90^\circ = \frac{m}{n}.c - \frac{m^3}{n^3}.\frac{c^3}{1.2.3} + \frac{m^5}{n^5}.\frac{c^5}{1.2.3.4.5}$$
$$- \frac{m^7}{n^7}.\frac{c^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{m^9}{n^9}.\frac{c^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.$$

Beide Reihen convergiren sehr schnell, dabei ist:

$$\frac{c^2}{2} = 1{,}23370055014 \qquad c = 1{,}57079632679$$

$$\frac{c^4}{1.2.3.4} = 0{,}25366950790 \qquad \frac{c^3}{1.2.3} = 0{,}64596409751$$

$$\frac{c^6}{1.2.3.4.5.6} = 0{,}02086348076 \qquad \frac{c^5}{1.2.3.4.5} = 0{,}07969262625$$

$$\frac{c^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 0{,}00091926027 \qquad \frac{c^7}{1.2.3.4.5.6.7} = 0{,}00468175414$$

$$\frac{c^{10}}{1.2.3.4.5\ldots 10} = 0{,}00002520204 \qquad \frac{c^9}{1.2.3\ldots 9} = 0{,}00016044118$$

$$\frac{c^{12}}{1.2.3.4\ldots 12} = 0{,}00000047109 \qquad \frac{c^{11}}{1.2.3\ldots 11} = 0{,}00000359884$$

$$\frac{c^{14}}{1.2.3\ldots 14} = 0{,}00000000639 \qquad \frac{c^{13}}{1.2.3\ldots 13} = 0{,}00000005692$$

$$\frac{c^{16}}{1.2.3\ldots 16} = 0{,}00000000007 \qquad \frac{c^{15}}{1.2.3\ldots 15} = 0{,}00000000067.$$

Beispiel. Es sey cos 90° zu berechnen, so ist $m = 90^\circ$, also $\cos\frac{90^\circ}{90^\circ}.90^\circ = 1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{1.2.3.4}$

$$-\frac{c^6}{1.2.3\ldots6}+\frac{c^8}{1.2.3\ldots8}-\frac{c^{10}}{1.2.3\ldots10}+\frac{c^{12}}{1.2.3\ldots12}$$
$$-\frac{c^{14}}{1.2.3\ldots14}+\frac{c^{16}}{1.2.3\ldots16}-\frac{c^{18}}{1.2.3\ldots18},$$

also $\cos 90^9 = 1$

$$+\frac{c^4}{1.2.3.4} = 0{,}25366950790$$
$$+\frac{c^8}{1.2.3\ldots8} = 0{,}00091926027$$
$$+\frac{c^{12}}{1.2.3\ldots12} = 0{,}00000047109$$
$$+\frac{c^{16}}{1.2.3\ldots16} = 0{,}00000000007$$
$$1{,}25458923933$$

$$-\frac{c^2}{2} = -1{,}23370055014$$
$$-\frac{c^6}{1.2.3\ldots6} = -0{,}02086348076$$
$$-\frac{c^{10}}{1.2.3\ldots10} = -0{,}00002520204$$
$$-\frac{c^{14}}{1.2.3\ldots14} = -0{,}00000000639$$
$$-\frac{c^{18}}{1.2.3\ldots18} = -0{,}00000000000$$
$$-1{,}25458923933$$

also $\cos 90° = 1{,}25458923933$
$- 1{,}25458923933 = 0 \cos 90° = 0.$

Zusatz. Je kleiner der Winkel, dessen Sinus oder Cosinus berechnet werden soll, desto wenigere braucht man zu entwickeln. Um den Cosinus von $1''$ zu berechnen, braucht man gar nur ein Glied, insofern die Funktion nur mit 11 Decimalstellen verlangt wird; denn da hier $m = 1$ Sekunde $n = 90° = 324000''$, so ist

$$\text{Cos}\ \frac{1^{1)}}{90^\circ}.\ 90^\circ = 1 - \frac{1}{(324000)^2}.\frac{c^2}{2}$$

$$= -\frac{1,23370055014}{104976000}$$

und wir finden $\cos 1'' = 1 - 0,00000001175$

$$= 0,99999998825.$$

Satz. Es ist $\text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Beweis. Es ist nach §. 134. $\frac{BA}{BC} = \sin x$, $\frac{AC}{BC} = \cos x$, $\frac{BA}{AC} = \text{tang } x$, ferner $BA = BC.\sin x$, $AC = BC.\cos x$, und daraus folgt $\frac{BC.\ \sin x}{BC,\ \cos x} = \frac{BA}{AC} = \text{tang } x$, oder $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x$.

§. 147. Hätten wir nun eine Reihe aufzustellen, durch welche die Tangente eines jeden Winkels berechnet werden könnte, so dürften wir nur die Reihe für den Sinus durch die Reihe für den Cosinus dividiren, um eine Reihe für die Tangente zu erhalten.

Wir wollen die Coeffizienten der Reihe für den Sinus und für den Cosinus durch allgemeine Zeichen ausdrücken. Es sey für den Winkel z, und den zugehörigen Bogen x, $\frac{\sin \hat{z}}{\cos \hat{z}}$

$$= x\,\frac{(1 - b^1x^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + b^4x^8}{1 - a^1x^2 + a^2x^4 - a^3x^6 + a^4x^8} \cdots$$

Nach §. 81. müssen wir 1ten die Coeffizienten des Divisors mit entgegengesetzten Zeichen nehmen, dann gibt die Rekursionsformel in §. 84., wenn wir die Coeffizienten des Quotienten durch A^o, A^1, A^2, A^3, A^4 und so fort bezeichnen, die darüber gesetzten Zahlen als Indices blos betrachten:

1) $A^0 = 1$

$A^1 = a^1A^0 - b^1$

$A^2 = a^1A^1 - a^2A^0 + b^2$

$A^3 = a^1A^2 - a^2A^1 + a^3A^0 - b^3$

$A^4 = a^1A^3 - a^2A^2 + a^3A^1 - a^4A^0 + b^4$. etc.

Nun ist $b^1 = \frac{1}{1.2.3}$, $b^2 = \frac{1}{1.2.3.4.5}$;

$b^3 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$, $b^4 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$;

$a^1 = \frac{1}{1.2}$, $a^2 = \frac{1}{1.2.3.4}$, $a^3 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6}$,

$a^4 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}$; also ist:

$$A^1 = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} = \frac{3}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3} = \frac{2}{1.2.3}$$

$$A^2 = \frac{1}{1.2}.\frac{2}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4}.1 + \frac{1}{1.2.3.4.5}$$
$$= \frac{16}{1.2.3.4.5}.$$

$$A^3 = \frac{1}{1.2}.\frac{16}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{2}{1.2.3}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6}.1 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{272}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$A^4 = \frac{1}{1.2}.\frac{272}{1.2.3\ldots7} - \frac{1}{1.2.3.4}.\frac{16}{1.2.3.4.5}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6}.\frac{2}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3\ldots8}.1$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots9} = \frac{7936}{1.2.3.4\ldots9}.$$

Da nun $\operatorname{tang}\hat{z} = x\frac{(1 - b^1x^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + b^4x^8\ldots)}{(1 - a^1x^2 + a^2x^4 - a^3x^6 + a^4x^8\ldots)}$

$= x.(1 + A^1x^2 + A^2x^4 + A^3x^6 + A^4x^8, \ldots)$

so ist auch $\tan\hat{z} = x\left(1 + \frac{2x^2}{1.2.3} + \frac{16x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{272x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{7936x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \ldots\right)$

also $\tan\hat{z} = x + \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{16x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{272x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{272x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \ldots$

Auf gleiche Art fände man die Cotangente, welches jedoch überflüssig wäre, da die Cotangente das Umgekehrte der Tagente ist.

Selbst die Berechnung der Tangente mittelst einer Reihe ist nicht nothwendig, weil der berechnete Sinus eines Winkels dividirt werden kann durch den berechneten Cosinus desselben Winkels, um die Tangente desselben Winkels zu haben.

§. 148. Satz. Der Sinus eines negativen Winkels ist negativ, der Cosinus aber positiv.

Beweis. Fig. 5. Es ist $\frac{AB}{AC} = \sin x$; ist nun Winkel $x = y$, und y wegen der entgegengesetzten Lage von x der negative Winkel, weil er sich im entgegengesetzten Quadranten befindet, und x der positive Winkel, so ist $\frac{AB}{A} = \sin x$ positiv; aber $\frac{DB}{DC} = \sin - y$ ist negativ, weil DB eine entgegengesetzte Lage von AB hat, der Radius aber unverändert ist; also $-\frac{DB}{DC} = -\sin y$.

Ferner ist $\frac{BC}{AC} = \cos x$, und dieser Quotient ist wieder positiv; weil nun auch $\frac{BC}{CD} = \frac{BC}{AC} = \cos - y$ ist, so ist der Cosinus des negativen Winkels positiv.

IV. Abschnitt.

Zurückführung der Exponentialgrößen mit unmöglichen Exponenten auf trigonometrische Ausdrücke.

§. 149. Erklärung. Ausdrücke, welche die Ausziehung der Quadratwurzel oder überhaupt einer geraden Wurzel aus negativen Größen verlangen, werden unmögliche Ausdrücke genannt, weil sie den Grundbegriffen arithmetischer Operationen widerstreiten; denn $\sqrt{-a^2}$ fordert eine Größe, die wieder zum Quadrat erhoben $-a^2$ zum Vorschein brächte, welches, da ein Quadrat ein Produkt aus zwei identischen Faktoren ist, dem Grundbegriffe der Multiplikation „daß gleiche Zeichen der Faktoren ein positives Produkt geben" geradezu wiederspricht.

§. 150. Gleichwohl sind diese unmöglichen oder imaginären Größen ebenfalls den Regeln arithmetischer Operationen unterworfen, nur müssen die Resultate bedingungsweise ausgesprochen werden. Das Resultat aus $(\sqrt{-a})^2 = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ kann nicht $+a$ seyn, sondern muß $= -a$ gesetzt werden; denn das Quadrat von $(\sqrt{-a})$ muß von der Art seyn, daß die Wurzel daraus wieder $= \sqrt{-a}$ ist.

§. 151. Vermöge dieser Bemerkung und mittelst der trigonometrischen Größen, sind wir nun im Stande den Werth einer Potenz im natürlichen Systeme, dessen Basis nach §. 101. e ist, zu finden, wenn es eine Potenz mit einem unmöglichen Exponenten von der Gestalt $e^{x\sqrt{-1}}$ ist.

Denn wir können nach §. 99. diese Exponentialgröße in einer Exponentialreihe darstellen

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}$$

$$+ \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} \ldots + \frac{(x\sqrt{-1})^r}{1.2.3\ldots r}$$; daraus folgt

$$e^{x\sqrt{-1}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} \\ + \left(x.\sqrt{-1} - \frac{x^3.\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^5.\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} \right. \end{array} \right.$$

$$+ \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \ldots$$

$$- \frac{x^7.\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.6.7} \ldots$$

denn $(x.\sqrt{-1})^2 = x^2.(\sqrt{-1})^2 = -1.x^2$, weil

$(\sqrt{-1})^2 = -1$ §. 150.

$(x.\sqrt{-1})^3 = x^3.(\sqrt{-1}).(\sqrt{-1})^2 = -1.x^3.\sqrt{-1}$

$x.(\sqrt{-1})^4 = x^4.(\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})^2$

$= x^4. -1. -1 = x^4$

und so von allen folgenden Gliedern.

Nun kann x als eine beliebige ganze, gebrochene oder auch gemischte Zahl die Länge eines Bogens oder auch das Vielfache dieser Länge bedeuten, also einen Theil von π oder ein Vielfaches von π, wo $\pi = 3{,}1415\ldots$ ist, und demnach ist nach §. 142.

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}$$

$$+ \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \ldots \cos \hat{\alpha}$$

und $\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} \ldots\right).\sqrt{-1}$

$= \sin \hat{x}.\sqrt{-1}$. §. 145.

Es ist also auch $e^{x\sqrt{-1}} = \cos \hat{x} + \sin \hat{x}.\sqrt{-1}$, wo $\hat{x}$ den zum Bogen x gehörigen Winkel bedeutet. Da ferner der Cosinus eines negativen Winkels oder Bogens positiv, der Sinus aber desselben negativ ist, so ist auch $e^{-x.\sqrt{-1}} = \cos - \hat{x} + \sin - \hat{x}\sqrt{-1}$ oder $e^{-x.\sqrt{-1}} = \cos \hat{x} - \sin \hat{x}.\sqrt{-1}$.

Die imaginären Exponentialgrößen können demnach auf Sinus und Cosinus reeller Bögen oder Winkel zurückgeführt werden.

§. 150. Satz. Ist ein Bogen φ gegeben, so ist der Cosinus des n fachen Bogens, oder

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \frac{n.n-1}{1.2}.\cos^{n-2}\varphi.\sin^2\varphi + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}.$$
$$\cos^{n-4}\varphi.\sin^4\varphi - \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6}\cos^{n-6}\varphi.\sin^6\varphi \ldots$$

Beweis. Es ist $e^{\varphi.\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}$, und $e^{-\varphi.\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}$, also auch $(e^{\varphi.\sqrt{-1}})^n = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$, und eben so ist auch $(e^{-\varphi.\sqrt{-1}})^n = (\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$. Es ist aber nach §. 149. $e^{n\varphi.\sqrt{-1}} = \cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1}$, und eben so $e^{-n\varphi.\sqrt{-1}} = \cos n\varphi - \sin n\varphi.\sqrt{-1}$; also ist auch

I. $\cos n\varphi + \sin n\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$ und

II. $\cos n\varphi - \sin n\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$.

Wir erheben diese Binomien nach §. 45. wirklich zur n ten Potenz, wofür die Regeln ausführlich in §. 45. gegeben worden sind. Wir finden $(\text{Cos}\,\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$

$$= \text{Cos}^n\varphi + n.\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi.\sqrt{-1}$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}.\cos^{n-2}\varphi.(\sin\varphi.\sqrt{-1})^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\cos^{n-3}\varphi.(\sin\varphi.\sqrt{-1})^3$$
$$+ \frac{n.(n-1).(n-2).n-3}{1.2.3.4}.\cos^{n-4}\varphi.(\sin\varphi.\sqrt{-1})^4 \ldots \text{etc.}$$

oder $(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi$

$+ n.\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi.\sqrt{-1}$

$- \frac{n.n-1}{1.2}.\cos^{n-2}\varphi.\sin^2\varphi + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.$

$\cos^{n-3}\varphi.\sin^3\varphi.(\sqrt{-1})$

$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}.\cos^{n-4}\varphi.\sin^4\varphi\ldots\ldots$

Eben so ist: $(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos^n\varphi$

$- n.\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi.\sqrt{-1} + \frac{n.n-1}{1.2}.$

$\cos^{n-2}\varphi.(-\sin\varphi.\sqrt{-1})^2$

$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\cos^{n-3}\varphi.(-\sin\varphi.\sqrt{-1})^3$

$+ \frac{n.(n-1).(n-2).n-3}{1.2.3.4}.\cos^{n-4}\varphi.(-\sin\varphi.\sqrt{-1})^4\ldots$

ꝛc.

oder $(\cos\varphi - \sin\varphi.(\sqrt{-1})^n = \cos^n\varphi$

$- n.\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi.\sqrt{-1} - \frac{n.n-1}{1.2}\cos^{n-2}\varphi.\sin^2\varphi$

$- \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\cos^{n-3}\varphi.\sin^3\varphi.(\sqrt{-1})^3$

$+ \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}.\cos^{n-4}\varphi.\sin^4\varphi$

denn es ist $(-\sin\varphi.\sqrt{-1})^4 = (-\sin\varphi)^4.(\sqrt{-1})^4$

$= \sin^4\varphi. -1. -1 = \sin^4\varphi.1$

$(-\sin\varphi.\sqrt{-1})^3 = (-\sin\varphi)^3.(\sqrt{-1})^3$

$= \sin^3\varphi.(\sqrt{-1})^3$

Addiren wir nun I. und II., so ergibt sich $2.\cos n\varphi$

$= 2\cos^n\varphi - 2.\frac{n.n-1}{1.2}.\cos^{n-2}\varphi.\sin^2\varphi$

$+ 2.\frac{n.(n-1).(n-2).n-3}{1.2.3.4}.\cos^{n-4}\varphi.\sin^4\varphi\ldots$ etc.

endlich A) $\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n.n-1}{1.2}.\cos^{n-2}\varphi.\sin\varphi^2$

$+ \frac{n.(n-1).(n-2).n-3}{1.2.3.4} \times \cos^{n-4}\varphi.\sin^4\varphi \ldots$ etc.

Zusatz 1. Das vierte Glied dieser Reihe wäre

$- \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6}.\cos^{n-6}\varphi.\sin^6\varphi$;

denn es ist von $(\cos\varphi + \sin\varphi.(\sqrt{-1})^n$ das sechste Glied nach dem anfänglichen

$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6}.$

$\cos^{n-6}.(\sin\sqrt{-1})^6$

$= - \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6}.$

$\cos^{n-6}\varphi.\sin^6\varphi$, weil

$(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})^2.(\sqrt{-1})^2$

$= -1.-1.-1 = -1$,

eben so ist von $(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^n$ das sechste Glied nach dem anfänglichen

$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6}.\cos^{n-6}\varphi.(-\sin\varphi\sqrt{-1})^6$

und weil $(-\sin\varphi.\sqrt{-1})^6 = (-\sin\varphi)^6.(\sqrt{-1})^6$

$= +\sin^6\varphi.-1.-1.-1 = -\sin^6\varphi$

so ist das sechste Glied:

$- \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5}{1.2.3.4.5.6}.$

$\cos^{n-6}\varphi.\sin^6\varphi$; beide addirt und durch 2 dividirt geben

$- \frac{n.(n-1).(n-2).(n-8).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6}.$

$\cos^{n-6}\sin^6\varphi.$

Zusatz. 2. Ziehen wir aber die Gleichung II. von I. ab, so ergibt sich:

$2.\sin n\varphi.\sqrt{-1} = 2n\cos^{n-1}\varphi.\sqrt{-1}$

$+ \frac{2.n.n-1.n-2}{1.2.3}.\cos^{n-3}\varphi.\sin^3\varphi.(\sqrt{-1})^3$

$$+ \frac{2.\,n.\,(n-1).\,(n-2).\,(n-3).\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.$$
$$\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi.\,(\sqrt{-1})^5 \ldots\ldots$$

oder $\sin n\varphi.\,(\sqrt{-1}) = n.\,\cos^{n-1}\varphi.\,\sin\varphi\,\sqrt{-1}$

$$- \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}.\,\cos^{n-3}\varphi.\,\sin^3\varphi.\,\sqrt{-1}$$

$$+ \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\,\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi.\sqrt{-1}$$

endlich III. $\sin n\varphi = n.\,\cos^{n-1}\varphi.\,\sin\varphi$

$$- \frac{n.\,(n-1).\,n-2}{1.\,2.\,3}.\,\cos^{n-3}\varphi.\,\sin^3\varphi$$

$$+ \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.$$
$$\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi \ldots\ldots \quad (B$$

denn das fünfte Glied nach dem anfänglichen von $(\cos\varphi + \sin\varphi.\,\sqrt{-1})^n$ ist

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\,\cos^{n-5}\varphi.\,(\sin\varphi.\,\sqrt{-1})^5$$

$$= \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\,\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi.\sqrt{-1};$$

und von $(\cos\varphi - \sin\varphi.\,\sqrt{-1})^5$ ist es

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,5.\,5}.\,\cos^{n-5}\varphi.-\sin^5\varphi.\,1.\sqrt{-1}$$

$$= - \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.$$

$\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi.\,\sqrt{-1}$, und beim Abziehen erhält man $\frac{2.\,n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.$

$$\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi.\,\sqrt{-1}$$

und durch 2 und $\sqrt{-1}$ dividirt ergibt sich das dritte Glied

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\,\cos^{n-5}\varphi.\,\sin^5\varphi.$$

§. 151. In diesen beiden Gleichungen für das Vielfache eines Bogens:

$$\cos n\,\varphi = \cos^n \varphi - \frac{n.\,n-1}{1.\,2}.\cos^{n-2}\varphi.\sin^2\varphi$$
$$+\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\,2.\,3.\,4}.\cos^{n-4}\varphi.\sin^4\varphi$$
$$-\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}.\cos^{n-6}\varphi.\sin^6\varphi$$

und $\sin n\,\varphi = n.\cos^{n-1}\varphi.\sin\varphi - \frac{n.\,n-1.(n-2)}{1.\,2.\,3}.$

$$\cos^{n-3}\varphi.\sin^3\varphi$$
$$+\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\cos^{n-5}\varphi.\sin^5\varphi$$
$$-\frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3.\,n-4.\,n-5.\,n-6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}.$$
$$\cos^{n-7}\varphi.\sin^7\varphi$$

fällt alles Unmögliche hinweg, und es ergibt sich hier ein Beispiel, wie Rechnungen mit unmöglichen Ausdrücken oft reelle Resultate geben.

Zusatz. Setzen wir $n = 2$, so erhalten wir $\cos 2\,\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und eben so $\sin 2\,\varphi = \cos\varphi.\sin\varphi$, welches genau dieselben Formeln sind, die wir in §. 138. für das Doppelte eines Winkels oder Bogens gefunden haben.

§. 152. Ein anderes Beispiel, wie das Rechnen mit unmöglichen Ausdrücken mögliche Resultate gebe, mag nachfolgende Reihe seyn, in der wir aus der Tangente eines Winkels dir Länge des zugehörigen Bogens finden.

Um diese Reihe aufzustellen, sey wieder $e^{x\sqrt{-1}} = \cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1}$, und $e^{-z.\sqrt{-1}}\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1}$, wo z die zu suchende Länge eines Bogens, $\hat{z}$ den zugehörigen Winkel bedeutet.

Es ist nun

$$z.\sqrt{-1}.\log e = \log(\cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$$

eben so $-z.\sqrt{-1}.\log e = \log(\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$, weil nun $\log e = 1$ §. 115, so ist ferner

$$z.\sqrt{-1} = \log(\cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$$

$$-z.\sqrt{-1} = \log(\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1});$$

ferner ergibt sich $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}.\log(\cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{-1}}.\log(\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1}),$$

addiren wir beide Gleichungen, so erhalten wir auch

$$2z = \frac{1}{\sqrt{-1}}.\log(\cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-1}}.\log(\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$$

oder $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\log(\cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1})$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}.\log(\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1}).$$

Weil die Subtraktion der Logarithmen eine Division der ihnen zugehörigen Potenzen ist, so ist

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\log\left[\frac{\cos\hat{z} + \sin\hat{z}.\sqrt{-1}}{\cos\hat{z} - \sin\hat{z}.\sqrt{-1}}\right].$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos z$, so ist:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.\log\left[\frac{1 + \operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1}}\right].$$ Nun

ist nach §. 118. $\log\left[\frac{1 + \operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1}}\right]$

$$= 2\,[\operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1} + \tfrac{1}{3}.(\operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1})^3$$

$$+ \tfrac{1}{5}.(\operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1})^5 + \tfrac{1}{7}.(\operatorname{tang}\hat{z}.\sqrt{-1})^7 \ldots]$$

$$= 2\,[\mathrm{tang}\,\hat{z}.\sqrt{-1} + \tfrac{1}{3}.\,\mathrm{tang}^3\,\hat{z}. - 1.\sqrt{-1} + \tfrac{1}{5}.\,\mathrm{tang}^5\,\hat{z}. - 1. - 1.\sqrt{-1} + \tfrac{1}{7}.\,\mathrm{tang}^7\,\hat{z}. - 1. - 1. - 1.\sqrt{-1}\ldots]$$

$$= 2\,[\mathrm{tang}\,\hat{z} - \tfrac{1}{3}.\,\mathrm{tang}^3\,\hat{z} + \tfrac{1}{5}.\,\mathrm{tang}^5\,\hat{z} - \tfrac{1}{7}.\,\mathrm{tang}^7\,\hat{z}\ldots].\sqrt{-1}$$

also $z = \dfrac{2\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}.\,[\mathrm{tang}\,\hat{z} - \tfrac{1}{3}.\,\mathrm{tang}^3\,\hat{z} + \tfrac{1}{5}.\,\mathrm{tang}^5\,\hat{z} - \tfrac{1}{7}.\,\mathrm{tang}^7\,\hat{z}\ldots]$

oder $z = [\mathrm{tang}\,\hat{z} - \tfrac{1}{3}.\,\mathrm{tang}^3\,\hat{z} + \tfrac{1}{5}.\,\mathrm{tang}^5\,\hat{z} - \tfrac{1}{7}.\,\mathrm{tang}^7\,\hat{z}\ldots]$ G

§. 153. Es sey Winkel $\hat{z}$ gleich der Summe von zwei Winkeln $\hat{a} + \hat{b}$, welche zusammen 45° betragen, also $\hat{a} + \hat{b} = 45°$. Zu dem Winkel $\hat{a}$ gehöre die Bogenlänge m, zu dem Winkel $\hat{b}$ aber die Bogenlänge n.

Nach einem Satze, der bald bewiesen werden soll, ist $\mathrm{tang}\,(\hat{a} + \hat{b}) = \dfrac{\mathrm{tang}\,\hat{a} + \mathrm{tang}\,\hat{b}}{1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}.\,\mathrm{tang}\,\hat{b}}$; und da $\mathrm{tang}\,(\hat{a} + \hat{b}) = \mathrm{tang}\,45° = 1$ ist, wenn der Radius des Kreises $= 1$ gesetzt wird, wie auch bald bewiesen werden soll, so ist auch

$\dfrac{\mathrm{tang}\,\hat{a} + \mathrm{tang}\,\hat{b}}{1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}.\,\mathrm{tang}\,\hat{b}} = 1$ oder $\mathrm{tang}\,\hat{a} + \mathrm{tang}\,\hat{b} = 1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}.\,\mathrm{tang}\,\hat{b}$ und $\mathrm{tang}\,\hat{b} + \mathrm{tang}\,\hat{a}.\,\mathrm{tang}\,\hat{b} = 1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}$, daraus folgt ferner $\mathrm{tang}\,\hat{b}\,(1 + \mathrm{tang}\,\hat{a}) = 1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}$, endlich auch $\mathrm{tang}\,\hat{b} = \dfrac{1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}}{1 + \mathrm{tang}\,\hat{a}}$.

Setzen wir nun $\tan \hat{a} = \frac{1}{2}$, weil die Tangente eines Winkels, welcher kleiner ist als 45°, ein echter Bruch ist, wie wir uns überzeugen werden, und dadurch ist

$$\tan \hat{b} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Da nun Bogen $m = \tan \hat{a} - \frac{1}{3}.\tan^3 \hat{a}$

$$+ \frac{1}{5}.\tan^5 \hat{a} - \frac{1}{7}.\tan^7 \hat{a} \ldots.$$

und Bogen $n = \tan \hat{b} - \frac{1}{3}.\tan^3 \hat{b} + \frac{1}{5}.\tan^5 \hat{b}$

$$- \frac{1}{7}.\tan^7 \hat{b} \ldots.$$

nach der Reihe $\underbrace{\text{G.}}$, so ist auch

$$m + n = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{3^7} \ldots. \\ + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{2^7} \ldots. \end{array} \right\}$$

Nun gehört $m + n$ einem Winkel von 45° an, es ist also Bogen $m + n$ der achte Theil der Peripherie; und wenn wir für den Radius $= 1$ die halbe Peripherie durch π bezeichnen, so ist $m + n = \frac{\pi}{4}$; also ist endlich

$$\frac{\pi}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{8^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{3^7} \ldots.. \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{2^7} \ldots.. \end{array} \right] \text{ oder}$$

$$\pi = 4 \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}.\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{3^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{3^7} \ldots.. \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}.\frac{1}{2^5} - \frac{1}{7}.\frac{1}{2^7} \ldots.. \end{array} \right]$$

§. 154. Nun müssen noch die beiden im §. 153. erwähnten Sätze erwiesen werden, und zwar

1) Satz. $\tan(\hat{a} + \hat{b}) = \dfrac{\tan \hat{a} + \tan \hat{b}}{1 - \tan \hat{a}.\tan \hat{b}}$

$$\frac{\sin(\hat{a}+\hat{b})}{\cos(\hat{a}+\hat{b})} = \frac{\sin\hat{a}.\cos\hat{b} + \sin\hat{b}.\cos\hat{a}}{\mathrm{Cos}\,\hat{a}.\cos\hat{b} - \sin\hat{a}.\sin\hat{b}} \quad §. 138.$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\cos\hat{a}.\cos\hat{b}$, so ergibt sich,

$$\mathrm{tang}(\hat{a}+\hat{b}) = \frac{\mathrm{tang}\,\hat{a} + \mathrm{tang}\,\hat{b}}{1 - \mathrm{tang}\,\hat{a}.\,\mathrm{tang}\,\hat{b}}.$$

2. Es sey ABC ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck, in welchem also $AB = BC$, so ist $\frac{AB}{BC} = \mathrm{tang}\ 45°$, oder $\frac{AB}{BC} = \mathrm{tang}\ x$, denn Winkel $x = 45°$; und weil $AB = BC$, so ist $\frac{AB}{BC} = \mathrm{tang}\ 45°$, oder $1 = \mathrm{tang}\ 45°$. Wird nun mit BC aus dem Punkte C ein Kreis beschrieben, so ist BC der Radius und AB die Tangente; und setzen wir den Radius $BC = 1$, so ist die linearische Tangente $AB = 1$.

Ist ferner AB kleiner als BC, so muß auch Winkel x kleiner als m seyn, weil in jedem Triangel dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt und umgekehrt; es muß also Winkel $x < 45°$ und $m > 45°$, und $\frac{AB}{BC} = \mathrm{tang}\ x$ ein echter Bruch seyn, weil $BC > AB$ seyn soll.

V. Abschnitt.

Erstes Kapitel.

Evolutionen.

§. 155. Erklärung. Eine Anordnung gegebener Elemente für irgend einen Werth, so daß in den Ausdrücken für diesen Werth, welche durch die Anordnung der Elemente entstehen, alle niederen Werthe vor Augen liegen, heißt eine Involution.

Zusatz. Jeder niedere Werth wird durch einen rechten Winkel abgesondert.

§. 156. Erklärung. Ein jeder durch einen rechten Winkel abgesonderte Werth heißt eine Evolution, das Absondern selbst heißt evolviren. Sollten z. B. alle gut geordneten Zahlen, die sich mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 als Elemente schreiben lassen, involutorisch dargestellt werden, so daß die Ziffernsumme einer jeden Zahl = 4 ist, und daß die niederen Werthe, das ist die Zahlen zur Summe 3, 2 und 1 in der Involution enthalten sind, so gäbe nebenstehendes Schema das verlangte

```
| | 1 | 1 | 1 | 1 ,
| | 1 | 1 | 2
| | 1 | 3
| | 2   2
| 4
```

wo jeder Winkel eine Evolution ist, indem er die Zahlen einer niederen Summe darstellt.

§. 157. Erklärung. Eine Involution, welche regelmäßig das Höhere aus dem nächst niedrigen entwickelt, und diese Entwickelung, wie auch jedes einzelne Glied klar vor Augen legt, heißt vollständig.

Zusatz. In ihr muß also jeder Einzelne, was in dem Ganzen enthalten ist, ohne Mühe evolvirt werden können. Im andern Falle, wo diese Eigenschaften ihr nicht zukommen, heißt sie unvollständig.

§. 158. Aufgabe. Es ist eine Reihe von Zahlen A, B, C, D, E, F, von denen nur die erste bekannt ist, gegeben, welche in dem Verhältnisse untereinander stehen, daß die zweite aus der ersten dadurch entsteht, daß man die erste mit b multiplicirt, und eine Zahl c hinzuaddirt; daß übrigens jede n te Zahl gefunden wird, wenn man die (n — 1)te mit b multiplicirt und die (n—2)te zum Produkt addirt; es soll der Werth der Zahl F in einer vollständigen Involution dargestellt werden.

Auflösung. Man setze I in den ersten Winkel die bekannte Größe A, wie wir an nebenstehendem Schema sehen.

		B	C	D	E	
A	b	b	b	b	b	I
	c	b	b	b	b	
		A	b	b	b	
			Ab	b	b	
			c	b	b	
				Abb	b	
				cb	b	
				A	b	
					Abbb	
					cbb	
					Ab	
					Ab	

2) Neben A setze man den Faktor b, und darunter die zu addirende Größe c, so hat man den Werth B.

3) Neben den Werth B setze man den Faktor b, und darunter den ersten Werth A, so hat man den Werth C.

4) Neben C setze man wieder den Faktor b und darunter den ganzen Werth von B, so hat man den Werth von D.

5) Neben D setze man wieder den Faktor b, und darunter den ganzen Werth C, so hat man den Werth E.

6) Endlich setze man neben den Werth E wieder den Faktor b, und darunter den Werth D, so hat man F.

Beweis. Jeder folgende Werth, also auch der Werth von F ist regelmäßig aus dem nächst niedrigeren dadurch entstanden, daß man ihn mit dem gegebenen Faktor b multiplicirte und den nächst vorhergehenden Werth zum Produkte addirte; es ist also der Werth F aus A. b und c durch successives Aufstellen höherer Werthe entwickelt worden; auch ist jeder nächst niedrigere Werth deutlich vor Augen gelegt, also F durch eine vollständige Involution entwickelt worden.

Zusatz. Da jeder folgende Werth entsteht, wenn man den vorhergehenden mit dem Faktor b multiplicirt, und den nächst vorhergehenden hinzuaddirt, so ist, wenn wir den nten Werth mit N, den (n—1)ten mit $\overset{-1}{N}$ und den (n—2)ten mit $\overset{-2}{N}$ bezeichnen $N = b\overset{-1}{N} + \overset{-2}{N}$.

Zweites Kapitel.

Anwendung der Involutionen auf die zusammenhängenden Brüche.

§. 159. Eine Reihe von Quotienten, wo jeder Nenner eine vermischte Zahl ist, heißt ein zusammenhängender Bruch.

Ein solcher Bruch entsteht, wenn man Zähler und Nenner des Bruches durch den Zähler desselben oder durch den größten Divisor, der im Zähler genau enthalten ist, dividirt, und mit dem gebrochenen Reste wieder so verfährt: z. B. der Bruch $\frac{361}{1495}$ soll in einen zusammenhängenden Bruch verwandelt werden. Es ist:

1) $\dfrac{361:361}{361:1495} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{51}{361}}$

2) $\dfrac{51:51}{51:361} = \cfrac{1}{7 + \cfrac{4}{51}}$

3) $\dfrac{4:4}{4:51} = \cfrac{1}{12 + \cfrac{3}{4}}$

4) $\dfrac{3:3}{3:4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}$.

Demnach ist der Bruch

$$\frac{361}{1495} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}.$$

§. 160. Erklärung. Nimmt man von diesen zusammenhängenden Brüchen einen, zwei, oder drei vom Anfange an nach einander, und bringt man sie unter einerlei Nenner, so heißen die so gefundenen Werthe die Näherungswerthe des Kettenbruches.

Zusatz. Nimmt man von diesem zusammenhängenden Bruche das erste Glied $\frac{1}{4}$, so ist $\frac{1}{4} > \frac{361}{1495}$; der Bruch aus zwei Gliedern $\cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = \frac{7}{29}$ ist kleiner als $\frac{361}{1495}$, und so abwechselnd, wovon man sich überzeugen kann, wenn man je zwei Brüche unter einerlei Nenner bringt.

§. 161. Willkürlicher Satz. Einen zusammenhängenden Bruch, dessen Werth $= u$ seyn mag, kann man durch folgende Form darstellen:

$$u = \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{8 + \cfrac{9}{10 \text{ ꝛc.}}}}}}$$

so daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 die Indices (Zeiger) der Zähler und Nenner des zusammenhängenden Bruches sind. Reducirt man diese Brüche auf einfache und setzt den ersten $\frac{1}{2} = \frac{\mathfrak{A}}{A}$, den aus zwei Brüchen abgeleiteten $\frac{1.4}{2.4+3} = \frac{\mathfrak{B}}{B}$, den aus drei abgeleiteten $\frac{1.4.6+1.5}{(2.4+3)6+2.5} = \frac{\mathfrak{C}}{C}$, den aus vier Brüchen abgeleiteten $\frac{(1.4.6+1.5).8+1.4.7}{[(2.4+3)6+2.5]8+[2.4+3]7} = \frac{\mathfrak{D}}{D}$, so lassen sich die Näherungswerthe auch so darstellen

$$\frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{1}{2},\ \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{A.4}{A.4+3},\ \frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\mathfrak{B}6+\mathfrak{A}.5}{B.6+5A},$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\mathfrak{C}.8+\mathfrak{B}.7}{C.8+B.7}.$$

§. 162. Erläuterungssatz. Das Gesetz, nach welchem die folgenden Werthe dargestellt werden, ist leicht zu erkennen; es ist der folgende Näherungswerth $\frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\mathfrak{D}.10+\mathfrak{C}.9}{D.10+C.9}$, und nennen wir die Stellenzahl des darzustellenden Werthes n, so ist der nte Werth

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\overset{-1}{\mathfrak{N}}.2n+\overset{-2}{\mathfrak{N}}(2n-1)}{\overset{-1}{N}.2n+\overset{-1}{N}.(2n-1)}.$$

§. 162. Aufgabe. Den Zähler des nten Bruches durch eine vollständige Involution darzustellen.

Auflösung. Man schreibe zuerst $\mathfrak{B}$, neben an den Faktor 6, und darunter $\mathfrak{A}$. 5, so haben wir, wie in §. 158. gezeigt wurde, den Werth von dem Zähler des dritten Bruches, welcher wieder durch den Winkel $\mathfrak{C}\mathfrak{C}$ abgesondert wird. Neben diesen Werth schreibe man den Faktor 8 und darunter $\mathfrak{B}$. 7, so gibt dies den Werth des vierten Zählers. Neben diesen Werth setze man den Faktor 10, und darunter C. 9, oder weil C. 9 = B. 6. 9 + A. 5. 9, diesen ganzen Werth darunter, und man hat den Werth des Zählers E.

	C	D	E	F
B	6	8	10	12
A. 5		8	10	12
C				
B. 7			10	12
D				
B. 6 . 9				12
A. 5 . 9				12
E				
B. 6. 8				11
A. 5. 8				11
B. 7				11

2) Für die folgenden Werthe beobachte man dieses Verfahren: Man setze die doppelte Stellenzahl des in Rede stehenden Zählers neben den vorigen Werth, hier in unserm Falle neben den Werth E die Stellenzahl 2. 6, weil der in Rede stehende Zähler der sechste ist; darunter die doppelte Stellenzahl weniger 1 und zwar so oft, als es im vorhergehenden Werthe Endfaktoren gibt, die eine gerade Zahl sind, hier in unserm Falle dreimal, weil es drei Endfaktoren hat 10, 10, 10, die jeder eine gerade Zahl sind, vor diese ungerade Zahlen, von denen jede hier 2. 6 — 1 = 11 ist, setze man den ganzen nächst vorhergehenden Werth, hier in unserm Falle B. 6. 8, A. 4. 8, B. 7, wie es das Schema zeigt, also den Werth D, und so ergibt sich folgendes Schema für den n ten Zähler.

		C	D	E	F
B	6	8	10	12	.....2n
C	A. 5	8	10	12	.....2n
		B. 7	10	12	.....2n
D		B. 6 .	9	12	.....2n
		A. 5 .	9	12	.....2n
			B. 6. 8 .	11	.....2n
			A. 5. 8 .	11	.....2n
			B. 7 .	11	.....2n
F					⋮
					2n — 1
					2n — 1
					2n — 1
					⋮

Beweis. Jeder höhere Werth, also auch der gesuchte, wird so aus dem nächst niedrigeren bestimmt, daß zugleich alle niedrigere Werthe deutlich vor Augen liegen und ohne Mühe evolvirt werden können; der Werth des gesuchten Bruches ist also durch eine vollständige Involution entwickelt.

Zusatz 1. Da vermöge der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\,2n + \overset{-2}{\mathfrak{N}}.\,2n-1}{\overset{-1}{N}.\,2n + \overset{-2}{N}.\,2n-1}$$ für die Nenner dasselbe

gilt, so darf man in die im §. 162. für die Zähler entwickelten Werthe nur überall A und B statt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eintragen, um die Nenner zu haben.

Zusatz 2. Die Formen der in §. 162. entwickelten Werthe für die Zähler fangen entweder mit $\mathfrak{B}$ oder mit $\mathfrak{A}$ an. Bezeichnen wir die Summe der mit $\mathfrak{B}$ anfangenden Formen durch $\mathfrak{S}$, und die Summe der mit $\mathfrak{A}$ anfangenden durch S, so haben wir, weil beide zusammen den Werth irgend eines Zählers, z. B. des nten geben, folgenden Ausdruck für den Zähler des nten Werthes $\mathfrak{N} = \mathfrak{B}.\,\mathfrak{S}^{n} + \mathfrak{A}S^{n}$, und da für den Nen-

M

ner dasselbe gilt, so ist der Nenner des nten Werthes $N = B.\mathfrak{S}^n + A.S^n$, also der Werth des ganzen Bruches $\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{\mathfrak{B}.\mathfrak{S}^n + \mathfrak{A}.S^n}{B.\mathfrak{S}^n + A.S^n}$, wobei die Entwickelung bis zum nten Grade involutorisch geschehen muß.

Zusatz 3. Die Summe $\mathfrak{S}$ wird aus $\begin{array}{c|c|} \underline{6} & 8 \\ & 7 \end{array}$ und die Summe S aus $\begin{array}{c|c|c} \underline{5} & 8 & 10 \\ & & 9 \\ & 5 & \end{array}$ nach denselben Regeln wie in der Aufgabe §. 162. entwickelt; es ist der Aufgabe in §. 162. zu Folge

$$\mathfrak{S}^6 = \begin{array}{c|c|c|c|} 3 & 4 & & 5 \\ \underline{6} & 8 & 10 & 12 \\ & \underline{7} & 10 & 12 \\ & & 6\;\,9 & 12 \\ & & 6.\;8 & 11 \\ & & 7. & 11 \end{array} \quad \text{und } S^6 = \begin{array}{c|c|c|c|} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \underline{5} & 8 & 10 & 12 \\ & & 5\;\,9 & 12 \\ & & 5.\;8 & 11 \end{array}$$

oder man kann die ganze Involution für einen Werth entwickeln, und dann die Formen für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ herausheben.

Zusatz 4. Da $\mathfrak{B} = 1.4$ und $\mathfrak{A} = 1$; $B = 2.4 + 3$ und $A = 2$ ist, so ist auch $\frac{\mathfrak{N}}{N} = \frac{1.4\mathfrak{S}^n + 1.S^n}{(2.4+3).\mathfrak{S}^n + 2S^n}$.

§. 163. Aufgabe. Es soll der vierte Werth des zusammenhängenden Bruches

$$\frac{361}{1495} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

involutorisch bestimmt werden.

Auflösung. Es ist $\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{1.3\,\mathfrak{S}^4 + 1.\,S^4}{(2.4+3)\,\mathfrak{S}^4 + 2.\,S^4}$.

Nun ist $\mathfrak{S}^4 = \begin{array}{c|c|} 3 & 4 \\ \hline 6 & 8 \\ & 5 \end{array}$ und $S^4 = \begin{array}{c|c|} 3 & 4 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$, oder

$\mathfrak{S}^4 = 6.\,8 + 7$ und $S^4 = 5.\,8$, also ist

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{1.4.\,(6.8+7) + 1.5.8}{(2.4+3).(6.8+7) + 2.5.8}.$$

Setzt man über die Zähler und Nenner, so wie sie folgen, den Index

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1, & 4, & 1, & 7, & 1, & 12, & 1, & 1, & 1, & 3, \end{array}$$ so ist

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{1.\,7\,(12.\,1+1) + 1.\,1.\,1}{(4.\,7+1).\,(12.\,1+1) + 4.\,1.\,1}$$

$$= \frac{7.\,13+1}{29.\,13+4} = \frac{92}{381}.$$

§. 164. Aufgabe. Der sechste Werth des Bruches $\frac{100000}{102764}$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{36 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17}}}}}}}}$$

soll involutorisch gefunden werden.

Es ist $\frac{\mathfrak{F}}{F} = \frac{1.\,4\,\mathfrak{S}^6 + 1.\,S^6}{(2.\,4+3).\,\mathfrak{S}^6 + 2.\,S^6}$. Nun ist

$$\mathfrak{S}^6 = \begin{array}{c|c|c|c|} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ & 7 & 10 & 12 \\ & 6. & 9 & 12 \\ & 6. & 8 & 11 \\ & & 7. & 11 \end{array}, \quad S^6 = \begin{array}{c|c|c|c} 3 & 4 & 5 & \\ 5 & 8 & 10 & 12 \\ & 5. & 9 & 12 \\ & 5. & 8. & 11 \end{array}$$

also auch

$$\frac{\mathfrak{F}}{F} = \frac{1.4(.6.8.10.12+7.10.12+6.9.12+6.8.11+7.11) + 1.(5.8.10.12+5.9.12+5.8.11)}{(2.4+3)[6.8.10.12+7.10.12+6.9.12+6{,}8.11+7.11] + 2.[5.8.10.12+5.9.12+5.8.11].}$$

Nun sind die Zähler und Nenner nach der Ordnung mit ihrem Index

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1,	1,	1,	36,	1,	5,	1,	1,	1,	1,	1,	2,	1,	1,	1,	17;

also

$$\mathfrak{F} = 1.36\,[5.1.1.2+1.1.2+5.1.1.2+5.1.1+1.1] + 1.[1.1.1.2+1.1.2+1.1.1.2] \text{ oder}$$

$$\mathfrak{F} = 1.36\,[10+2+10+5+1]+[1.2+1.2+1.1]$$

$$F = 1.36\,[28]+5 = 36.28+5 = 1013$$

$$F = [1.36+1].\,28+1\,[5] = 37.28+5 = 1041,$$

also $\frac{\mathfrak{F}}{F} = \frac{1013}{1041}$.

Anmerkung 1. Jedoch soll für diese Entwickelung ein leichteres Verfahren nachgewiesen werden.

Anmerkung 2. Wir bemerken, daß die ungeraden Zahlen des Index gerade auf die Zähler, die geraden aber auf die Nenner der Brüche fallen; sind nun bei einem zusammenhängenden Bruche die Zähler durchaus $=1$, so dürfen wir nur in §. 161. überall da, wo in den Gleichungen für die Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{A}, \frac{\mathfrak{B}}{B}, \frac{\mathfrak{C}}{C}, \frac{\mathfrak{D}}{D}$ rc. die ungeraden Zahlen vorkommen, für dieselben 1 setzen, und so verwandeln sich die in §. 161. aufgestellten Gleichungen in folgende $\frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{1.4}{2.4+1},$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{1.4.6. + 1.1}{(2.4+1).6+2.1} = \frac{\mathfrak{B}.6.+\mathfrak{A}}{B.6+A},$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\mathfrak{C}.8+\mathfrak{B}}{C.8+B}.$$

Da nun $\frac{\mathfrak{A}}{A} = \frac{1}{2}$, $\frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{\mathfrak{A}.4}{A.4+1}$, $\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\mathfrak{B},6+\mathfrak{A}}{B.6+A}$, $\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\mathfrak{C}.8+\mathfrak{B}}{C.8+B}$, so spricht dieses eine Methode aus, jeden Werth eines zusammenhängenden Bruches auf folgende Art zu entwickeln:

Man multiplicire Zähler und Nenner des ersten Bruches mit dem Nenner des zweiten und addire zum Produkte des Nenners 1; denn dies lehrt deutlich der Ausdruck $\frac{\mathfrak{A}.4}{A.4+1} = \frac{1.4}{2.4+1}$; bei jedem folgenden Werthe multiplicire man Zähler und Nenner des schon bestimmten Bruches mit dem folgenden Nenner, addire zum Produkte des Zählers den Zähler, zum Produkte des Nenners den Nenner des vorhergehenden schon bestimmten Bruches.

Z. B. Bei dem Bruche $\frac{361}{2495}$

$$= \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

schreibe man die Nenner in einer horizontalen Reihe hin und führe unter dieselben einen Strich, wie das folgende Schema zeigt:

	4	7	12	1	3
0	1	7	85	92	361
1	4	29	352	281	1495.

Unter den ersten Nenner setze man den ersten Bruch $\frac{1}{4}$, und vor demselben $\frac{0}{1}$, weil zu dem Produkte 7×4 noch 1 addirt werden soll, so ist der zweite Werth $\frac{1 \times 7}{4 \times 7 + 1}$, der dritte Werth $\frac{7.12 + 1}{29.12 + 4}$, der vierte $\frac{1.85 + 7}{1.352 + 29}$ rc.

Aufgabe. Die Peripherie des Kreises verhält sich zum Durchmesser wie $\frac{10000000000}{31415926535}$

$$= \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{13 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3}}}}}}}}}}}}}$$

wie läßt sich dieses Verhältnuß durch kleinere darstellen?

Die Nenner sind folgende 3, 7, 15, 1, 292, 1, 6, 2, 13, 3, 1, 12, 3.

Nenner.

	3	7	15	1	292	1	6	2	13	3	
0	1	7	106	113	33102	33215	rc.				......
1	3	22	333	355	103993	104348	rc.				

Drittes Kapitel.

Involutorische Darstellung der Reihen und involutorische Entwickelung der Summenausdrücke für dieselben.

§. 164. Erklärung. Eine Reihe von Größen, in der jede zwei benachbarte Glieder eine gleiche Differenz haben, heißt eine arithmetische Reihe des ersten Ranges. Ihre allgemeine Form ist a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ .... $a + (n - 1)d$.

§. 165. Satz. Ist a das erste Glied, d die Differenz und n die Anzahl der Glieder, so ist die Summe $S = \frac{2an + n^2d - nd}{2}$ oder $S = [a + a + (n - 1)d]\frac{n}{2}$ d. h. gleich der halben Summe aus dem ersten und letzten Gliede, multiplicirt mit der Anzahl der Glieder.

Beweis. Man schreibe in den ersten Winkel a neben

1	2	3		
a	a	a	a	....
	d	d	d	....
		d	d	....
			d	....

an wieder a und darunter d, wo aber, was auch für die Zukunft gelten soll, die nebeneinander stehenden Größen nicht multiplicirt werden sollen, wie bei den continuirlichen Brüchen, sondern blos zu addiren sind. Dadurch erhält man die Summe von zwei Gliedern, neben an setze man zuerst a, und darunter d und d, und man hat die Summe von drei Gliedern, und so setze man die Arbeit fort bis zum nten Winkel, welcher auf diese Art die Summe von n Gliedern enthält.

Nun ist die Summe aller a in der ersten horizontalen Reihe, wenn es n Winkel gibt, $= a . n$.

Die Summe der zweiten horizontalen Reihe, wo es $(n - 1)$ Glieder gibt, ist $(n - 1)d$.

Die der dritten $(n-2d$ und so fort, bis in der letzten horizontalen Reihe, wo nur ein d steht, also die Summe aller Glieder

$$S = an + (n-1)d + (n-2)d + (n-3)d \ldots . d$$

oder $S = an + d[(n-1)+(n-2)+(n-3) \ldots . 1]$

aber $n-1) + (n-2).(n-3).(n-4) \ldots . 1$

$$= \frac{n.n-1}{1.2} \text{ §. 51. Zusatz,}$$

also auch $S = an + d\frac{(n.n-1)}{1.2} = \frac{2an + n^2d - dn}{1.2}$

oder $S = [a + a + (n-1)d]\frac{n}{2}$.

§. 166. Erklärung. Eine Reihe von Größen, in der die Differenzen von je zwei benachbarten Gliedern nicht gleich sind, sondern eine arithmetische Reihe des ersten Ranges geben, heißt eine arithmetische Reihe des ersten Ranges.

Eine Reihe von Größen, in der die Differenzen von je zwei benachbarten Gliedern eine arithmetische Reihe des zweiten Ranges geben, heißt eine arithmetische Reihe des dritten Ranges.

Eine Reihe von Größen, in der die Differenzen von je zwei benachbarten Gliedern eine arithmetische Reihe des $(r-1)$ten Ranges geben, heißt eine arithmetische Reihe des $r$ten Ranges.

§. 167. Satz. Die Summe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 .... n, welche eine Reihe des ersten Ranges geben, ist $S = \frac{n.(n+1)}{1.2} = \frac{n^2+n}{1.2}$.

Beweis. Die Differenz zwischen je zwei benachbarten Gliedern ist gleich, also bilden diese Glieder nach §. 166. eine Reihe des ersten Ranges, deren Summe $S = \frac{2an + n^2d - nd}{1.2}$ ist; nun ist hier $a = 1$, $d = 1$, also $S = \frac{n^2+n}{1.2} = \frac{n(n+1)}{1.2}$.

§. 168. Satz. Wenn man in einer Reihe des ersten Ranges zuerst das erste Glied nimmt, dann die Summe der zwei ersten, dann die Summe der drei ersten, so erhält man die Reihe a, $2a + d$, $3a + 3d$, $4a + bd$, $5a + 10d$...., welches eine Reihe des zweiten Ranges ist.

Beweis. Die ersten Differenzen zwischen je zwei benachbarten Gliedern geben eine Reihe des ersten Ranges, und erst die zweiten Differenzen sind gleich; also bilden die Glieder der aufgestellten Reihe eine Reihe des zweiten Ranges.

§. 169. Aufgabe. Das $n$te Glied dieser Reihe des zweiten Ranges involutorisch darzustellen.

Auflösung. Da die Reihe des zweiten Ranges dadurch entsteht, daß man aus der Reihe des ersten Ranges a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ .... $a + (n - 1)d$ zuerst das erste, dann die Summe der zwei ersten Glieder, dann die Summe der drei ersten und so fort nimmt nach §. 168, so setze man in den ersten Winkel das erste Glied a, neben an das zweite Glied $a + d$, so hat man im zweiten Winkel die Summe von zwei Gliedern; neben an setze man das dritte Glied $a + 2d = a + d + d$, so hat man im dritten Winkel die Summe von drei Gliedern, denn der folgende Winkel schließt immer die früheren mit ein, also hat man das dritte Glied zur Reihe des zweiten Ranges, und so fährt man bis zum $n$ten Winkel fort.

$$\begin{array}{c|c|c|}
a & a & a \\ \hline
 & d & d \\ \hline
 & & d \\ \hline
\end{array}$$

Nun ist die Summe aller a in der ersten horizontalen Reihe $n.a$; die Summe aller d in der zweiten horizontalen Reihe ist $d(n - 1)$, weil es da ein Glied weniger hat als in der ersten; die Summe aller d in der dritten horizontalen Reihe ist $d(n - 2)$, und so hat jede folgende horizontale Reihe ein Glied weniger bis zur letzten, die nur Ein Glied hat.

Bezeichnen wir also das $n$te Glied durch u, so ist $u = na + d[(n-1) + (n-2) + (n-3) \ldots\ldots + 1]$;

aber nach §. 51. Zusatz ist $[(n-1)+(n-2)+(n.3 \ldots +1]$ $= \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}$; also ist $u = na + d \frac{(n.\ n-1}{1.\ 2}$.

Beweis. Der $n$te Winkel enthält n Glieder aus der arithmetischen Reihe des ersten Ranges, also ist sein Inhalt das $n$te Glied von der Reihe des zweiten Ranges. Nun ist die Formel $na + d \frac{(n.\ n-1)}{1.\ 2}$ dieser Inhalt des $n$ten Winkels, also ist auch das $n$te Glied $u = na + d \frac{(n.\ n-1)}{1.\ 2.}$.

§. 170. Aufgabe. Die Summenformel für n Glieder dieser Reihe des zweiten Ranges involutorisch zu finden.

Auflösung. Man setze von der gegebenen Reihe des zweiten Ranges a, $2a+d$, $3a+3d$, $4a+6d \ldots$ $na + d \frac{(n.\ n-1)}{1.\ 2}$ das erste Glied a in den ersten Winkel, neben an setze man das Glied $2a+d$, so hat man in dem zweiten Winkel die Summe von zwei Gliedern; neben an setze man das dritte Glied $3a + 3d = 3a + 2d + d$, so hat man im dritten Winkel die Summe von drei Gliedern; daneben setze man das vierte Glied $4a + 6d = 4a + 3d + 2d + d$, so hat man im vierten Winkel die Summe von vier Gliedern, und so fahre man bis zum $n$ten Winkel fort.

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
a & 2a & 3a & 4 \\
 & d & 2d & 3d \\
 & & d & 2d \\
 & & & d
\end{array}$$

Nun ist die Summe aller a in der ersten horizontalen Reihe eine Reihe des ersten Ranges

$$= a\,(1 + 2 + 3 + 4 \ldots .\ n),$$

in der die Differenz $= 1$ ist, und deren Summe nach §. 167. $= a \frac{(n.\ n+1)}{1.\ 2}$ ist. Die Summe der zweiten Reihe, welche $(n-1)$ Glieder hat, ist auch eine Reihe des ersten Ranges, also ist ihre Summe $= \frac{n.\ (n-1)\,d}{1.\ 2}$.

Eben so ist die Summe aller Glieder in der dritten horizontalen Reihe, welche (n — 2) Glieder hat

$$= \frac{(n-1).(n-2).d}{1.2},$$

wenn man in der Formel $\frac{n.(n+1)}{1.2}$, $n-2$ statt n setzt. Jede dieser horizontalen Reihen hat um 1 Glied weniger, bis zur letzten, welche nur Ein Glied d hat; demnach ist die Summe aller Glieder

$$S = \frac{n.(n+1).a}{1.2} + d\left[\frac{n.(n-1)}{1.2} + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} \ldots + 1\right];$$ aber nach §. 51. Zusatz ist $\left[\frac{n.(n-1)}{1.2} + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}\right.$

$$\left. + \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} \ldots + 1\right] = \frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3},$$

wenn man überall $n+1$ statt n setzt in §. 51. Zusatz; demnach $S = \frac{n.(n+1).a}{1.2} + d\left[\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}\right]$.

Beweis. Der nte Winkel umfaßt die Summe von n Gliedern der Reihe des zweiten Ranges; nun ist der Ausdruck für den nten Winkel $= \frac{n.(n+1).a}{1.2}$

$+ d\left[\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}\right]$; also ist auch die Summe von n Gliedern dieser Reihe $S = \frac{n.(n+1).a}{1.2}$

$$+ d\left[\frac{n+1.n.n-1}{1.2.3}\right].$$

Zusatz 1. Setzen wir in §. 169. in der Formel $u = na + \frac{d.(n.n-1)}{1.2}$ $a = 1$, so ergibt sich die Reihe:

$1,\ 2+d,\ 3+3d,\ 4+6d,\ 5+10d \ldots n+d\frac{[n.(n-1)}{1.2}$,
welche die Reihe der Polygonalzahlen ist.

Denn 1tens für $d = 1$ erhalten wir die Reihe 1, 3, 6, 10, 15, 21 ...., welches die Reihe der Triangularzahlen ist, weil sich die Einheiten eines jeden Gliedes in ein gleichseitiges Dreieck zusammenordnen lassen; das nte Glied ist $u = \frac{n^2+n}{1.2}$.

2) Für $a = 2$ erhalten wir die Reihe 1, 4, 9, 16, 25, 36 .... n^2, welches die Reihe der Quadratzahlen ist, weil die Einheiten eines jeden Gliedes sich in Quadrate zusammenordnen lassen.

Für $d = 3$ erhalten wir die Reihe 1, 5, 12, 22, 35, 51 ...., welches die Reihe der Pentagonalzahlen ist, weil sich die Einheiten eines jeden Gliedes in regelmäßige Fünfecke zusammenordnen lassen.

Für $d = 4$ erhalten wir die Reihe 1, 6, 15, 28, 45, 66 ...., welches die Reihe der Hexagonalzahlen ist, weil sich die Einheiten eines jeden Gliedes in regelmäßige Sechsecke zusammenordnen lassen.

Zusatz 2. Setzen wir im §. 170. in der Formel für die Summe $s = \frac{n.(n+1).a}{1.2.}$

$$+ d.\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}\ a = 1,$$

so ergibt sich die Reihe:

$$1,\ 3+d,\ 6+4d,\ 10+10d+15+20d \ldots$$
$$\frac{n.n+1}{1.2} + d\,\frac{(n+1.n.n-1)}{1.2.3},$$

welches die Reihe der Pyramidalzahlen ist.

Für $d = 1$ erhalten wir die Reihe 1, 4, 10, 20, 35 ...., welches die Reihe der dreieckigen Pyramidalzahlen ist, weil sich die Einheiten eines jeden Gliedes in dreieckige Pyramiden zusammenordnen lassen, ihr n tes Glied ist $u = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{1.\,2.\,3} = \frac{(n+2).(n+1).n}{1.\,2.\,3}$.

Für $d = 2$ ergibt sich die Reihe 1, 5, 14, 30, 55..., welches die Reihe der viereckigen Pyramidalzahlen ist, deren n tes Glied

$$u = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{1.\,2.\,3}$$

$$= \frac{n.(n+1).(2n+1)}{1.\,2.\,3}$$

ꝛc.

Zusatz 3. Das n te Glied dieser allgemeinen Reihe der Pyramidalzahlen ist zugleich die Summenformel für jede Reihe der Polygonalzahlen.

§. 171. Aufgabe. Das erste Glied einer arithmetischen Reihe des zweiten Ranges sey A, jedes folgende entstehe dadurch, daß man zu A erst ein Glied a und zwar das erste, dann die Summe der zwei ersten, dann die Summe der drei ersten Glieder einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges addirt, nämlich von der Reihe $a, a+d, a+2d \ldots a+(n-1)d$, es soll das n te Glied für die Reihe des zweiten Ranges involutorisch gefunden werden.

Auflösung. Man setze zuerst A, und neben an das erste Glied a aus der Reihe des ersten Ranges, so erhält man im zweiten Winkel das zweite Glied der Reihe des zweiten Ranges; neben an setze man das dritte Glied $a+d$, so hat man im dritten Winkel das dritte Glied der Reihe des zweiten Ranges; das Verfahren ist wie im §. 169. 170. bis zum n ten Winkel ganz dasselbe.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
A & a & a & a & a \\
\hline
 & & d & d & d \\
\hline
 & & & d & d \\
\hline
 & & & & d \\
\hline
\end{array}$$

Die Summe der ersten horizontalen Reihe ist hier $A + a(n-1)$; der zweiten $d(n-2)$; der dritten $d(n-3)$ und so fort bis zur letzten horizontalen Reihe, die nur ein Glied d hat. Bezeichnen wir das letzte

Glied durch u, so ist $u = A + a(n-1) + d[(n-2) + (n-3) \ldots + 1)$; weil nun §. 51. Zusatz $[(n-2) + (n-3) + (n-4) \ldots + 1] = \frac{(n-1).(n-2)}{1.2}$; wenn man $n-1$ statt n dort setzt, so ist $u = A + a(n-1) + \frac{d.(n-1).(n-2)}{1.2}$.

Beweis. Der nte Winkel ist das nte Glied der Reihe des zweiten Ranges nach der Auflösung, nun ist der Inhalt des nten Winkels $= A + a(n-1) + \frac{d.(n-1).(n-2)}{1.2}$, also ist auch das nte Glied der Reihe des zweiten Ranges $u = A + a(n-1) + \frac{d(n-1).(n-2)}{1.2}$.

Zusatz. Setzen wir $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ rc., so erhalten wir die auf einander folgenden Glieder der Reihe

$$\begin{array}{l} A \\ A + a \\ A + 2a + d \\ A + 3a + 3d \\ A + 4a + 6d \\ A + 5a + 10d \\ \quad\text{rc.} \\ A + a(n-1) + \frac{d(n-1).(n-2)}{1.2}. \end{array}$$

§. 172. Aufgabe. Die Summe von n Gliedern dieser arithmetischen Reihe des zweiten Ranges zu finden.

Auflösung. Man setze in den ersten Winkel A, und neben an das zweite Glied $A + a$, so hat man im zweiten Winkel die Summe von zwei Gliedern; neben an setze man das dritte Glied $A + 2a + d$, so hat man im

A	A	A	A	A	...
	a	2a	3a	4a	...
		d	2d	3d	...
			d	2d	...
				d	...

dritten Winkel die Summe von drei Gliedern; neben an setze man das vierte Glied $A + 3a + 3d = A + 3a + 2d + d$, so hat man im vierten Winkel die Summe von vier Gliedern; neben an setze man das fünfte Glied $A + 4a + 6d = A + 4a + 3d + 2d + d$, so hat man die Summe von fünf Gliedern. Dies setze man bis zum $n$ten Winkel fort, welcher die Summe von n Gliedern enthält.

Nun ist die Summe der ersten horizontalen Reihe nA; die der zweiten Reihe $a(1 + 2 + 3 + 4 \ldots n - 1)$ ist $\frac{n.(n-1)a}{1.2}$ nach §. 167., weil hier $n - 1$ Glieder sind und man $n - 1$ für n setzen muß; die der dritten horizontalen Reihe ist $\frac{(n-1).(n-2).d}{1.2}$ und so fort bis zur letzten, welche nur aus d besteht. Demnach ist die Summe aller Glieder

$$S = nA + \frac{n.(n-1).a}{1.2} + d\left[\frac{(n-1).(n-2)}{1.2} + \frac{(n-2).(n-3).d}{1.2} \ldots + 1\right];$$

nun ist $\left[\frac{(n-1).(n-2)}{1.2} + \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} \ldots + 1\right]$

$$= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}, \text{ §. 51. Zusatz,}$$

demnach ist $S = nA + \frac{n.(n-1).a}{1.2} + \frac{d.n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$.

§. 173. Satz. Wenn man in jeder der zwei aufgestellten arithmetischen Reihen des zweiten Ranges $a,\ 2a + d,\ 3a + 3d,\ 4a + 6d \ldots na$

$$+ \frac{d.n.(n-1)}{1.2} \text{ §. 168.}$$

und $A,\ A + a,\ A + 2a + d,\ A + 3a + 3d \ldots A$

$$+ a(n-1) + \frac{d.(n-1).(n-2)}{1.2} \text{ §. 171. Zusatz}$$

zuerst ein Glied, und zwar das erste, dann die Summe der zwei ersten, dann die Summe der drei ersten nimmt, so erhält man von jeder eine arithmetische Reihe des dritten Ranges; das $n$te Glied des ersten ist nach

$$u = \frac{n.(r+1).a}{1.2} + \frac{d.(n+1).n.(n-1)}{1.2.3},$$

die Reihe selbst ist: a, $3a+d$, $6a+4d$, $10a+10d$, $15a+20d \ldots\ldots \frac{n.(n+1)a}{1.2} + \frac{d.(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}$.

Von der zweiten Reihe ist das $n$te Glied $u = nA + \frac{n.(n-1)a}{1.2} + \frac{d.n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$, und die Reihe selbst ist A, $2A+a$, $3A+3a+d$, $4A+6a+4d$, $5A+10a+10d \ldots\ldots nA + \frac{n.(n-1)a}{1.2}$

$$+ \frac{d.n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.$$

Beweis. Da hier das $n$te Glied aus der Summe von n Gliedern der Reihe des zweiten Ranges entsteht, so ist das $n$te Glied u den in §. 170. 172. aufgestellten Summenformeln gleich, auch sind es Reihen des dritten Ranges, weil die Differenzen der einzelnen Glieder eine Reihe des zweiten Ranges geben, also die dritten Differenzen erst gleich sind.

§. 174. Aufgabe. Für beide Reihen des dritten Ranges die Summenformeln zu finden.

Auflösung. Für die erste Reihe lassen sich folgende Winkel construiren:

a	3a	6a	10a	15a	....
	d	3d	6d	10d	....
		d	3d	6d	....
			d	3d	....
				d	....

Die Summe der ersten horizontalen Reihe ist die Summe der Triangularzahlen, von denen jede den Faktor a führt; eben dies ist die Summe aller Glieder in der zweiten horizontalen Reihe, von denen jede d zum Faktor hat, und so von allen übrigen horizontalen Reihen, nur daß jede folgende um ein Glied weniger und die letzte 1. d hat.

Nun ist die Summe aller Triangularzahlen nach §. 170. Zusatz 3. $\frac{(n+2).(n+1).n}{1.2.3}$; also ist

$$S = \frac{a.(n+2).(n+1).n}{1.2.3} + d\left[\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}\right.$$

$$\left.+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}+\frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3}\ldots+1\right].$$

Aber nach §. 51. Zusatz ist $\frac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3}$

$$+\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}+\frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3}\ldots+1$$

$= \frac{(n+2).(n+1).n.(n-1)}{1.2.3.4}$, wenn man im §. 51. Zusatz $n+2$ statt n setzt; demnach ist die Summe

$$S = \frac{a.(n+2).(n+1).n}{1.2.3} + \frac{d.(n+2).(n+1).n.(n-1)}{1.2.3.4}.$$

Auflösung II. Man construire für die zweite Reihe folgenden Winkel

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
A & 2A & 3A & 4A & 5A & \ldots\ldots \\
 & a & 3a & 6a & 10a & \ldots\ldots \\
 & & d & 3a & 6d & \ldots\ldots \\
 & & & d & 3d & \ldots\ldots \\
 & & & & d & \ldots\ldots
\end{array}$$

Die Summe der ersten horizontalen Reihe ist $\frac{n.(n+1)A.}{1.2}$ §. 167. Die Summe der zweiten horizontalen Reihe ist $\frac{(n+1).n.(n-1).a}{1.2.3}$; die Summe der dritten

$\frac{n.(n-1).(n-2)\,d}{1.\,2.\,3}$; die der vierten $\frac{(n-1).(n-2).(n-3)\,d}{1.\,2.\,3}$;

die der letzten d; demnach ist $S = \frac{n.\,(n+1)\,A}{1.\,2}$

$$+ \frac{(n+1).n.(n-1)\,a}{1.\,2.\,3} + d\left[\frac{n.\,(n-1).\,(n-2)}{1.\,2.\,3}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1).\,(n-2).\,(n-3)}{1.\,2.\,3} \ldots + 1\right].$$

Nun ist $\left[\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3} + \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\,2.\,3} \ldots + 1\right]$

$= \frac{(n+1).\,n.\,(n-1).\,(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4}$ §. 51. Zusatz; daher

ist endlich $S = \frac{n.\,n+1.\,A}{1.\,2} + \frac{(n+1).\,n.\,(n-1).\,a}{1.\,2.\,3}$

$$+ \frac{d.\,(n+1).\,n.\,(n-1).\,(n-2)}{1.\,2.\,3.\,4}.$$

§. 175. Satz. Wenn man die Glieder einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges zum Quadrat erhebt $(a)^2$, $(a+d)^2$, $(a+2d)^2 \ldots [a+(n-1)\,d]^2$, so bilden die Quadrate eine Reihe des zweiten Ranges.

Beweis. $(a+3d)^2 = a^2 + 6ad + 9d^2$
$(a+2d)^2 = a^2 + 4ad + 4d^2$
$(a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$
$(a)^2 = a^2$

Die Differenzen sind $2ad + 5d^2$
$2ad + 3d^2$
$2ad + d^2$

Die zweiten Differenzen sind $2d^2$ und $2d^2$, also gleich, und die Reihe nach §. 166. eine Reihe des zweiten Ranges.

Zusatz. Die Reihe selbst ist:
$a^2,\ a^2+2ad+d^2,\ a^2+4ad+4d^2,\ a^2+6ad+9d^2 \ldots$
$[a+(n-1)\,d]^2.$

§. 176. Aufgabe. Die Summenformel für diese Reihe des zweiten Ranges involutorisch zu finden.

Auflösung. Man construire folgende Winkel successiv bis zum n ten Winkel

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
a^2 & a^2 & a^2 & a^2 & a^2 & \ldots\ldots \\
 & 2ad & 4ad & 6ad & 8ad & \ldots\ldots \\
 & d^2 & 4d^2 & 9d^2 & 16d^2 & \ldots\ldots
\end{array}$$

Die Summe der ersten horizontalen Reihe ist na^2.

Die der zweiten ist eine Reihe des ersten Ranges, deren Differenz $= 2$ ist, und welche $(n-1)$ Glieder hat; die Summenformel ist nach §. 165. $\frac{2an + n^2d - dn}{2}$; also hier wo $a = 2$ und die Anzahl der Glieder $= (n-1)$, ist die Summe $4(n-1) + (n-1)^2 . 2 - 2(n-1)$ multiplicirt mit dem Faktor ad; also ist die Summe der zweiten horizontalen Reihe

$$[4n-1) + (n-1)^2 . 2 - 2(n-1)] . ad = ad . n . (n-1).$$

Die Summe der dritten Reihe ist die Summe der Quadratzahlen, nur daß hier $(n-1)$ Glieder sind; die Summe der Quadratzahlen ist nach §. 170. Zusatz 3. $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{1.2.3}$, hier aber $\frac{d^2[(n-1).n.(2n-1)]}{1.2.3}$; also ist die Summe $S = na^2 + ad.n.(n-1) + \frac{d^2.n.(n-1).(2n-1)}{1.2.3}$.

Zusatz. Ist $a = 1$, $d = 1$, so gibt die Reihe $a^2, (a+d)^2, (a+2d)^2, (a+3d)^2 \ldots [a+(n-1)d]^2$ folgende Zahlenreihe $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots n^2$, welche die Reihe der Quadratzahlen ist, deren Summe

$$S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^1}{6} \text{ ist.}$$

§. 177. Satz. Die Summe der Cuben der n ersten natürlichen Zahlen, wenn wir sie durch S bezeichnen, ist $S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$.

Beweis. Die Reihe dieser Cuben 1, 8, 27, 64, 125 ......

Nun ist

$$1 \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$1 + 8 = 9 = 3^2$$
$$1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$$
$$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$$

Die Summe von n Gliedern ist also gleich dem Quadrate der n ten Trigonalzahl. Es ist aber die n te Trigonalzahl $= \frac{n.(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{1}$ §. 170. Zusatz 1.; also

$$s = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

§. 178. **Erklärung.** Wenn man die auf einander folgenden Glieder einer arithmetischen Reihe von irgend einem höheren Range durch z, z', z'', z''', z^{IV} und so fort bezeichnet, so geben die Differenzen, wenn die Glieder zu einer Reihe des r ten Ranges gehörten, eine Reihe des $(r-1)$ten Ranges, deren Glieder durch Dz, Dz', Dz'', Dz''', und Dz^{IV} bezeichnet werden können, und welche die erste Differenzreihe genannt wird, wo das Zeichen D blos die Differenz bezeichnen soll; die Differenzen zwischen den Gliedern dieser letzten Reihe geben wieder eine Reihe des $(r-1)$ten Ranges und können durch $\overset{2}{D}z$, $\overset{2}{D}z'$, $\overset{2}{D}z''$, $\overset{2}{D}z'''$, $\overset{2}{D}z^{\mathrm{IV}}$ und so fort bezeichnet werden, bis man zuletzt eine Reihe bekommt, deren Glieder gleich sind und zur Differenz Null geben.

§. 179. **Erklärung.** Eine Reihe interpoliren oder durch Einschalten erweitern heißt zwischen den gegebenen Gliedern andere finden, welche mit den schon vorhandenen eine nach einem constanten Gesetze fortlaufende Reihe geben.

§. 180. **Aufgabe.** Es ist eine Reihe irgend eines Ranges gegeben von der Form z, z', z'', z''', z^{IV}, man soll zwischen zwei benachbarten Gliedern m Glieder einschalten; es ist ein allgemeiner Ausdruck für dasjenige Glied zu suchen, welches unter diesen m Gliedern das n te, z. B. unter 8 einzuschaltenden das dritte ist; also das $\frac{n}{m} = \frac{3}{8}$te.

Auflösung. Benennen wir das $\frac{n}{m}$te Glied mit z, so ist $Z = z + \frac{n}{m}.\, Dz - \frac{n.\,(m-n)}{2m^2}\overset{2}{D}z$

$$+ \frac{n.\,(m-n)}{1.\,2.\,3}\,\frac{(2m-n)}{m^3}.\,\overset{3}{D}z$$

$$- \frac{n\,(m-n).\,(2m-n).\,(3m-n)}{1.\,2.\,3.\,4}.\,\overset{4}{D}z \ldots.$$

Beweis. Es sey $Dz, Dz', Dz'', Dz''', Dz^{IV} \ldots.$ die erste, $\overset{2}{D}z, \overset{2}{D}z', \overset{2}{D}z'', \overset{2}{D}z''', \overset{2}{D}z^{IV}$ die zweite, $\overset{3}{D}z, \overset{3}{D}z', \overset{3}{D}z'', \overset{3}{D}z''', \overset{3}{D}z^{IV}$ die dritte Differenzreihe und so fort, so ist

$$\begin{array}{ll}
z' - z = Dz & Dz' - Dz = \overset{2}{D}z \\
z'' - z' = Dz' & Dz'' - Dz' = \overset{2}{D}z' \\
z''' - z'' = Dz'' & Dz''' - Dz'' = \overset{2}{D}z'' \\
z^{IV} - z''' = Dz''' & Dz^{IV} - Dz''' = \overset{2}{D}z''' \\
\overset{2}{D}z' - \overset{2}{D}z = \overset{3}{D}z & \overset{3}{D}z' - \overset{3}{D}z = \overset{4}{D}z \\
\overset{2}{D}z'' - \overset{2}{D}z' = \overset{3}{D}z' & \overset{3}{D}z'' - \overset{3}{D}z' = \overset{4}{D}z' \\
\overset{2}{D}z''' - \overset{2}{D}z'' = \overset{3}{D}z'' & \overset{3}{D}z''' - \overset{3}{D}z'' = \overset{4}{D}z'' \\
\overset{2}{D}z^{IV} - \overset{2}{D}z''' = \overset{3}{D}z''' \quad \text{etc.} &
\end{array}$$

so erhalten wir aus diesen Gleichungen durch Transposition

$z' = Dz + z.$ I.

$z'' = Dz' + z'$ oder $z'' = Dz' + Dz + z$; nun ist

$Dz' = Dz + \overset{2}{D}z$; also auch

$$z'' = z + 2\,Dz + \overset{2}{D}z \quad \text{II.}$$

$z''' = Dz'' + z''$, oder $z''' = Dz'' + z + 2Dz + D^2z$; nun ist $Dz'' = D^2z' + Dz'$; $Dz' = D^2z + Dz$, also $Dz'' = D^2z' + D^2z + Dz$, aber auch $D^2z' = D^2z + D^3z$; daher $Dz'' = 2D^2z + Dz + D^3z$; demnach ist $z''' = z + 3Dz + 3D^2z + D^3z$. III.

Eben so finden wir

$$z^{IV} = z + 4Dz + 6D^2z + 4D^3z + D^4z. \quad \text{IV.}$$

$$\text{und } z^{V} = z + 5Dz + 10D^2z + 10D^3z + 5D^4z + D^5z. \quad \text{V.}$$

Da die Coeffizienten dieser Reihe mit den Binomialcoeffizienten einerlei sind, so ist auch das rte Glied nach dem anfänglichen, welches wir durch Z^r bezeichnen wollen $Z^r = rDz + \frac{r.(r-1)}{1.2}D^2z$

$$+ \frac{r.(r-1).(r-2)}{1.2.3}D^3z + \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.2.3.4}D^4z \ldots + \frac{r.(r-1).(r-2)\ldots r-p+1}{1.2.3.4.5\ldots\ldots p}.D^pz,$$

wo p den Index des Coeffizienten in der Binomialreihe ausdrückt.

Da wir auf diese Art das rte Glied der Reihe $z, z', z'', z''', z^{IV} \ldots$ und so weiter erhalten haben, so dürfen wir nur $\frac{n}{m}$ für r setzen, und wir erhalten das $\frac{n}{m}$te Glied, welches zwischen zwei benachbarten einzuschalten ist, nämlich $Z^{\frac{n}{m}} = z + \frac{n}{m}Dz + \frac{\frac{n}{m}.\left(\frac{n}{m}-1\right)}{1.2}D^2z$

$$+\frac{\frac{n}{m}\cdot\left(\frac{n}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{m}-2\right)}{1.\,2.\,3}.\overset{3}{D}z$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\cdot\left(\frac{n}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{n}{m}-3\right)}{1.\,2.\,3.\,4}.\overset{4}{D}z\ \ldots\ldots$$

$$+\frac{\frac{n}{m}\cdot\left(\frac{n}{m}-1\right)\cdot\left(\frac{n}{m}-2\right)\cdot\left(\frac{n}{m}-3\right)\ldots\left(\frac{n}{m}p+1\right)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots\ldots\ldots r}\overset{p}{D}z$$

daraus folgt

$$Z^{\frac{n}{m}}=z+\frac{n}{m}Dz+\frac{n.\,(n-m)}{2m^2}\overset{2}{D}z$$

$$+\frac{n.\,(n-m).\,(n-2m)}{1.\,2.\,3.\,m^3}\overset{3}{D}z$$

$$+\frac{n.\,(n-m).\,(n-2m).\,(n-3m)\ldots(n-pm+m)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots p.\,m^p}\overset{p}{D}z$$

und weil $n\,(n-m)=-n\,(m-n)$

$$(+n-2m)=-1\,(2m-n)$$

ꝛc.

so ist auch

$$Z^{\frac{n}{m}}=z+\frac{n}{m}Dz-\frac{n\,(m-n)}{1.\,2m^2}\overset{2}{D}z$$

$$+\frac{n\,(m-n).\,(2m-n)}{1.\,2.\,3\,m^3}\overset{3}{D}z$$

$$-\frac{n\,(m-n).\,(2m-n).\,(3m-n)}{1.\,2.\,3.\,4\,m^4}\overset{4}{D}z\ \ldots\ldots$$

$$+\frac{n\,(m-n).\,(2m-n)\ldots.(pm-m-n)}{1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots p.\,m^p}\overset{p}{D}z.$$

Beispiel 1. Es sollen in der Reihe des ersten Ranges 3, 5, 7, 9, 11, 13 .... zwischen dem ersten und zweiten Gliede vier Glieder eingeschaltet werden, und darunter ist das dritte zu suchen.

Hier ist $m = 5$, denn das zweite Glied 5 ist das fünfte, $n = 3$ und $z = 2$, $Dz = 2$, $\overset{2}{D}z = 0$; denn die erste Differenz ist überall 2; die zweite Differenz ist $= 0$. Demnach ist $Z^{\frac{3}{5}} = 3 + \frac{3}{5} . 2 - \frac{3(5-3)}{1.2.5^2} . 0$

oder $Z^{\frac{3}{5}} = 3 + \frac{6}{5} = 4 + \frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}$.

Das zweite Glied wäre $Z^{\frac{2}{5}} = 3 + \frac{2}{5} . 2$

$$= 3 + \frac{4}{5} = 4\frac{1}{5}.$$

Die Reihe selbst also 3, $3\frac{2}{5}$, $3\frac{4}{5}$, $4\frac{1}{5}$, $4\frac{3}{5}$, $5, \ldots$

Zusatz. Diese Formel wird die allgemeine Interpolationsformel genannt.

§. 181. Satz. Die Formel $Z^r = z + rDz + \frac{r.(r-1)}{1.2} \overset{2}{D}z + \frac{r.(r-1).(r-2)}{1.2.3} \overset{3}{D}z \ldots\ldots$

$$\frac{r.(r-1).(r-2) \ldots (r-p+1)}{1.2.3.4 \ldots\ldots\ldots p} \overset{p}{D}z$$

läßt sich zum allgemeinen Gliede einer jeden arithmetischen Reihe eines höheren Ranges umschaffen, wenn man $n-1$ statt r setzt, und dieses allgemeine Glied ist dann

$$u = z + (n-1)Dz + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} \overset{2}{D}z$$
$$+ \frac{(n-1).(n-2).(n-3)}{2.2.3} \overset{3}{D}z$$
$$+ \frac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4} \overset{4}{D}z \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{(n-1).(n-2).(n-3) \ldots (n-p)}{1.2.3 \ldots\ldots\ldots p} \overset{p}{D}z.$$

Beweis. Der Index r bedeutet das $r$te Glied nach dem anfänglichen, wird das anfängliche Glied mit gerechnet, und nennen wir das $r$te nach dem anfänglichen das $n$te, so muß das $n$te r Glieder und das erste umfassen, also $n = r + 1$ oder $n - 1 = r$ seyn, und aus diesem Grunde muß man $n - 1$ statt r setzen, um das $n$te Glied, welches eben so hoch als das $r$te ist, durch diese Formel auszudrücken. Soll diese Formel das allgemeine Glied einer jeden Reihe eines höheren Ranges vorstellen, so muß sie für jeden Werth, welchen man der Größe n gibt, gelten; setzt man $n = 1$, so muß man das erste Glied der Reihe erhalten, und alle übrige Glieder müssen $= 0$ seyn; für $n = 2$ müssen wir das zweite Glied der Reihe erhalten, und so fort. Setzen wir nun $n = 1$, so erhalten wir $Z^1 = z + (1 - 1)\, Dz = z$. §. 180.

Für $n = 2$ ergibt sich $Z^2 = z + (2 - 1)\, Dz + \frac{(2-1).(2-2)}{1.2} \overset{2}{D}z$ oder $Z^2 = z + Dz$, welches §. 180. das zweite Glied war.

Für $n = 3$ ist $Z^3 = z + 2\,Dz + \overset{2}{D}z$, welches nach §. 180. das dritte Glied war rc. Diese Formel ist demnach geeignet, das $n$te Glied einer jeden Reihe höheren Ranges vorzustellen.

Beispiel I. Es soll das zwölfte Glied der Reihe des ersten Ranges 1 3 5 .... gesucht werden, hier $Dz = 3 - 1 = 2$, $n = 12$; demnach ist

$$Z^{12} = 1 + (12 - 1).\,2 = 23.$$

Beispiel II. Von der Reihe 4, 7, 12, 19, 28, 39 soll mittelst der Formel das sechste Glied 39 gefunden werden.

Hier ist $Dz = 7 - 4 = 3$; $Dz' = 12 - 7 = 5$, $Dz'' = 7$ und $\overset{2}{D}z = 5 - 3 = 2$, $\overset{2}{D}z = 7 - 5 = 2$, $\overset{3}{D}z = 2 - 2 = 0$ und $n = 6$; demnach ist

$$Z^6 = 4 + (6-1).\,3 + \frac{(6-1).(6-2).\,2}{1.\,2}$$

$$+ \frac{(6-1).(6-2).(6-3).\,0}{1.\,2.\,3}, \text{ also } Z^6 = 4 + 15 + 20 = 39.$$

Beispiel III. Von den Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10, 15 ...., deren $n$tes Glied $\frac{n(n+1)}{1.2}$ §. 170. Zusatz 1., soll das 30ste Glied gefunden werden.

Hier ist $n = 30$, $Dz = (3-1) = 2$, $Dz' = 6-3 = 3$, $Dz'' = 10-6 = 4$; $\overset{2}{D}z = 3-2 = 1$, $\overset{2}{D}z' = (4-3) = 1$ und $\overset{3}{D}z = 1-1 = 0$; demnach ist $Z^{30} = 1 + (30-1).2 + \frac{(30-1)(30-2).1}{1.2}$ $+ \frac{(30-1).(30-2).(30-3).0}{1.2.3}$ oder $Z^{30} = 1 + 58$ $+ \frac{29.28}{2} + 0$, oder $Z^{30} = 59 + 406 = 465$.

Dasselbe gibt die Formel $\frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{30 \times 31}{2} = 465$.

Anmerkung. Diese Formel macht alle frühere, welche für das $n$te Glied einer Reihe aufgestellt wurden, entbehrlich.

§. 182. **Aufgabe.** Es ist ein Ausdruck für die Summe von n Gliedern einer Reihe des $r$ten Ranges involutorisch zu finden.

Auflösung. Wir setzen aus §. 180. in den ersten Winkel z, und neben an den Werth des zweiten Gliedes $z + Dz$, wodurch wir im zweiten Winkel die Summe von zwei Gliedern z und z' erhalten. Neben diesen Werth schreiben wir das dritte Glied $z + 2Dz + \overset{2}{D}z$, wodurch wir im dritten Winkel die Summe von drei Gliedern z, z', z'', erhalten. Neben an setzen wir das vierte Glied $z + 3Dz + 3\overset{2}{D}z + \overset{3}{D}z$, wodurch wir im vierten

z	z	z	z	z	z	
	Dz	$2Dz$	$3Dz$	$4Dz$	$5Dz$	....
		$\overset{2}{D}z$	$3\overset{2}{D}z$	$6\overset{2}{D}z$	$10\overset{2}{D}z$	....
			$\overset{3}{D}z$	$4\overset{3}{D}z$	$10\overset{3}{D}z$	....
				$\overset{4}{D}z$	$5\overset{4}{D}z$	....
					$\overset{5}{D}z$	....

Winkel die Summe von vier Gliedern z, z′, z″, z‴ erhalten, und so verfahren wir bis zum n ten Winkel, welcher die Summe von n Gliedern enthält.

Die Summe der ersten horizontalen Reihe ist nz, und da $\overset{1}{{}^{n}\mathfrak{B}}$ nach §. 45. Zusatz, so ist $nz = \overset{1}{{}^{n}\mathfrak{B}}z$.

Die Summe der zweiten horizontalen Reihe ist die Summe der natürlichen Zahlen, und diese ist nach §. 167. $\frac{n.\,n-1}{1.\,2}$, wenn man da $n-1$ statt n setzt; also ist die Summe der zweiten horizontalen Reihe $\frac{n.\,n-1}{1.\,2}$ Dz $= \overset{2}{{}^{n}\mathfrak{B}}$Dz nach §. 45. Zusatz.

Die Summe der dritten horizontalen Reihe, welche $(n-2)$ Glieder hat, ist die Summe der Triangularzahlen, welche nach §. 170. Zusatz 3. $\frac{n\,(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3}$ ist, wenn man $n-2)$ für n setzt, und da $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\,2.\,3} = \overset{3}{{}^{n}\mathfrak{B}}$ §. 45. Zusatz, so ist die Summe der dritten horizontalen Reihe $= \overset{3}{{}^{n}\mathfrak{B}}\overset{2}{D}z$. Die Coeffizienten der Glieder sind demnach Binomialcoeffizienten der n ten Potenz. Wir erhalten demnach zur Summe $S = \overset{1}{{}^{n}\mathfrak{B}}z + \overset{2}{{}^{n}\mathfrak{B}}Dz + \overset{3}{{}^{n}\mathfrak{B}}\overset{2}{D}z + \overset{4}{{}^{n}\mathfrak{B}}\overset{3}{D}z \ldots + \overset{r}{{}^{n}\mathfrak{B}}\overset{r-1}{D}z$.

Beispiel. Es soll die Summe aller Glieder der Reihe 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38 gefunden werden. Die ersten Differenzen sind $Dz = 2$, $Dz' = 3$, $Dz'' = 4$; die zweiten Differenzen sind $\overset{2}{D}z = 1$, $\overset{2}{D}z' = 1$ und die der dritten $\overset{3}{D}z = 0$; also ist die Summe, weil hier $n = 8$ ist, $S = \frac{8}{1}.\,3 + \frac{8.\,7}{1.\,2}.\,2 + \frac{8.\,7.\,6}{1.\,2.\,3}.\,1 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\,0$, oder $S = 24 + 56 + 56 + 0 = 136$.

§. 183. Erläuterungssätze. Wir haben die Summe der natürlichen Zahlen aus der Reihe des ersten Ranges $= \frac{n^2 + n}{1.2}$; die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen, welche eine Reihe des zweiten Ranges gaben, fanden wir nach §. 176. Zusatz $= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Benennen wir die Coeffizienten, welche in diesen Formeln bei der Hauptgröße n stehen, mit allgemeinen Zeichen, im ersten Falle mit A und B, im andern mit A, B, C, so ist die Summe der natürlichen Zahlen $S = An^2 + Bn$, die Summe ihrer Quadrate $S = An^3 + Bn^2 + Cn$.

Die Summe der Cuben aller natürlichen Zahlen, welche eine Reihe des dritten Ranges geben, ist nach §. 177. $S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$ oder

$$S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + 0.\,n.$$

Bezeichnen wir die Coeffizienten der Hauptgröße n mit den allgemeinen Zeichen $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, $D = 0$, so ist wieder $S = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$.

Die Summe von n Gliedern irgend einer Reihe ist demnach ein Ausdruck, der nach abnehmenden Potenzen von n fortschreitet, und in dem der höchste Exponent der Hauptgröße um einen Grad höher ist als der Rang der Reihe.

Man kann nach diesen Bemerkungen die Summe von n Gliedern einer Reihe des r ten Ranges durch den Ausdruck $S = An^{r-1} + Bn^{r} + Cn^{r-1} + Dn^{r-2} + En^{r-3} + Fn^{r-4} \ldots + Kn$ darstellen. In diesem allgemeinen Ausdrucke für die Summe irgend einer Reihe hängt die Summe von der Anzahl der Glieder so ab, daß, wenn man $n = 1$ setzt, das erste Glied der Reihe, für $n = 2$ die Summe der zwei ersten Glieder, für

$n = 3$ die Summe der drei ersten Glieder dadurch hervorgeht; denn es sey die Summe von den Gliedern 1, 3, 6, 10, 15, 21 ... der Reihe des zweiten Ranges, welche die Reihe der Trigonalzahlen ist, mittelst dieses allgemeinen Summenausdruckes zu finden, so ist hier $r = 2$ zu setzen, weil es eine Reihe des zweiten Ranges ist, und es ist hier $S = An^3 + Bn^2 + Cn$. Setzen wir nun $n = 1$, so ist

$$1 = A + B + C$$

so ist $4 = 8A + 4B + 2C$; setzen wir aber $n = 2$,

so ist $10 = 27A + 9B + 3C$; setzen wir $n = 3$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{also}\quad 3 = 7A + 3B + C \\ \qquad\quad\; 6 = 19A + 5B + C \\ \hline \qquad\quad\; 3 = 12A + 2B \end{array}\right\} \text{durch Subtraktion.}$$

Ziehen wir das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten ab, so ist $2 = 6A + 2B$; diese Gleichung von $3 = 12A + 2B$ abgezogen, gibt endlich

$$1 = 6A, \quad \text{oder } \frac{1}{6} = A.$$

Weil $2 = 6A + 2B$, und $A = \frac{1}{6}$ ist, so ist $2 - 1 = 2B$, oder $\frac{1}{2} = B$; endlich auch, weil $A + B + C = 1$ ist, $C = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$, oder $C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; also ist die Summe $S = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ oder $S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$, gerade wie wir in §. 170. Zusatz 3. das nte Glied der Pyramidalzahlen, welches zugleich die Summe der Trigonalzahlen ist, gefunden haben.

Ist nun $An^{r+1} + Bn^{r} + Cn^{r-1} + Dn^{r-2} + En^{r-3} + Fn^{r-4} \dots + Kn$ die Summe von n Gliedern der

Reihe des $r$ten Ranges, so ist der Ausdruck $A(n-1)^{r+1} + B(n-1)^r + C(n-1)^{r-1} + D(n-1)^{r-2} + E(n-1)^{r-3} + F(n-1)^{r-4} \ldots K(n-1)$ die Summe von $(n-1)$ Gliedern dieser Reihe, also die Summe von den $(n-1)$ ersten Gliedern ohne dem letzten. Ziehen wir die Summe von $(n-1)$ Gliedern von der Summe von n Gliedern ab, so erhalten wir das $n$te oder letzte Glied der Reihe. Nach diesen Bemerkungen sind wir im Stande folgende Aufgabe aufzulösen.

§. 184. Aufgabe. Es ist ein Ausdruck für die Summe der $r$ten Potenzen aller natürlichen Zahlen, deren es n geben mag, zu finden.

Auflösung. Die $r$ten Potenzen aller natürlichen Zahlen bilden eine Reihe des $r$ten Ranges, so wie die zweiten Potenzen eine Reihe des zweiten, die dritten eine Reihe des dritten Ranges bilden; Die Summe für n Glieder ist demnach $S = An^{r+1} + Bn^r + Cn^{r-1} + Dn^{r-2} + En^{r-3} + Fn^{r-4} \ldots + Kn$; die Summe von $(n-1)$ Gliedern also $= A(n-1)^{r+1} + B(n-1)^r + C(n-1)^{r-1} + D(n-1)^{r-2} + E(n-1)^{r-3} + F(n-1)^{r-4} \ldots K(n-1)$. Die letzte Summe von der ersten abgezogen gibt das $n$te oder letzte Glied, welches n^r seyn muß, so wie das $n$te Glied der zweiten Potenzen n^2, der dritten Potenzen n^3 ist.

Demnach ist I.

$$An^{r+1} + Bn^r + Cn^{r-1} + Dn^{r-2} + En^{r-3} + Fn^{r-4} \ldots Kn - A(n-1)^{r+1} - B(n-1)^r - C(n-1)^{r-1} - D(n-1)^{r-2} - E(n-1)^{r-3} - F(n-1)^{r-4} \ldots - K(n-1) = n^r.$$

Nun bilden wir nach dem Binomialsatze des §. 45. jede Potenz des Binomiums $(n-1)$, und multipliciren die daraus hervorgehende Reihe mit dem zugehörigen

Coeffizienten und setzen alle jene Glieder, welche eine gleich hohe Potenz von n haben, unter einander; alle Potenzen aber von 1 sind wieder 1.

II.

Nun ist 1 $A(n-1)^{r+1} =$

$$-A\,[n^{r+1} + {}^{r+1}\overset{1}{\mathfrak{B}}n^{r}.-1 + {}^{r+1}\overset{2}{\mathfrak{B}}n^{r-1}.(-1)^2$$
$$+ {}^{r+1}\overset{3}{\mathfrak{B}}n^{r-2}.(-1)^3 \ldots + {}^{r+1}\overset{r+1}{\mathfrak{B}}.n^{r-r}.(-1)^{r+1}]$$

2) $-B\,[n-1]^{r} =$

$$-B\,[n^{r} + {}^{r}\overset{1}{\mathfrak{B}}n^{r-1}.-1 + {}^{r}\overset{2}{\mathfrak{B}}.n^{r-2}.(-1)^2$$
$$+ {}^{r}\overset{3}{\mathfrak{B}}.n^{r-3}.(-1)^3 \ldots {}^{r}\overset{r}{\mathfrak{B}}.n^{r-r}.(-1)^{r}]$$

3) $-C\,(n-1)^{r-1} =$

$$-C\,[n^{r-1} + {}^{r-1}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n^{r-2}.(-1) + {}^{r-1}\overset{2}{\mathfrak{B}}.n^{r-3}.(-1)^2$$
$$+ {}^{r-1}\overset{3}{\mathfrak{B}}n^{r-4}.(-1)^3 \ldots + {}^{r-1}\overset{r-1}{\mathfrak{B}}n^{r-r}.(-1)^{r-1}]$$

4) $-D\,(n-1)^{r-2} =$

$$-D\,[n^{r-2} + {}^{r-2}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n^{r-3}.(-1) + {}^{r-2}\overset{2}{\mathfrak{B}}n^{r-4}.(-1)^2$$
$$+ {}^{r-2}\overset{3}{\mathfrak{B}}.n^{r-5}.(-1)^3 + {}^{r-2}\overset{4}{\mathfrak{B}}n^{r-6}.(-1)^4 \ldots]$$

5) $-E\,(n-1)^{r-3} =$

$$-E\,[n^{r-3} + {}^{r-3}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n^{r-4}.(-1) + {}^{r-3}\overset{2}{\mathfrak{B}}.n^{r-5}(-1)^2$$
$$+ {}^{r-2}\overset{3}{\mathfrak{B}}.n^{r-6}.(-1)^3 + {}^{r-3}\overset{4}{\mathfrak{B}}.n^{r-7}.(-1)^4 \ldots]$$

6) $-F\,(n-1)^{r-4} =$

$$-F\,[n^{r-4} + {}^{r-4}\overset{1}{\mathfrak{B}}.n^{r-5}.(-1) + {}^{r-4}\overset{2}{\mathfrak{B}}.n^{r-6}.(-1)^2$$
$$+ {}^{r-4}\overset{3}{\mathfrak{B}}n^{r-7}.(-1)^3 + {}^{r-4}\overset{4}{\mathfrak{B}}.n^{r-8}.(-1)^4 \ldots]$$

ꝛc.

Entwickelt man diese Binomialcoeffizienten, multiplicirt jeden mit dem vor der Klammer stehenden Faktor und setzt die Glieder von gleich hohen Potenzen der Größe n unter einander, bringt die Gleichung I., nachdem man in ihr die entwickelten Binomialcoeffizienten gesetzt hat, auf Null, so ist

$$0 = \begin{array}{l} A.n^{r+1} \\ - A.n^{r+1} \end{array} \left.\begin{array}{l} + B \\ + A(r+1) \\ - B \\ - 1 \end{array}\right\} n^{r} \left.\begin{array}{l} + C \\ - A.\dfrac{r.(r+1)}{1.\ 2} \\ + Br \\ - C \end{array}\right\} n^{r-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} D \\ + A\dfrac{(r+1).r.(r-1)}{1.\ 2.\ 3} \\ - D \\ - B.\dfrac{r.(r-1)}{1.\ 2} \\ + C.(r-1) \end{array}\right\} n^{r-2} \left.\begin{array}{l} + E \\ - A\dfrac{(r+1).r.(r-1).(r-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \\ + B.\dfrac{r.(r-1).(r-2)}{1.\ 2.\ 3} \\ - C.\dfrac{(r-1).(r-2)}{1.\ 2} \\ D.(r-2) \\ - E. \end{array}\right\} n^{r-3}$$

$$\left.\begin{array}{l} F \\ - F \\ + A\dfrac{(r+1).r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \\ - B.\dfrac{r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \\ + C\dfrac{(r-1).(r-2).(r-3)}{1.\ 2.\ 3} \\ - D.\dfrac{(r-2).(r-3)}{1.\ 2} \\ + E(r-3) \end{array}\right\} n^{r-4}$$

$$\text{u.}$$

Daraus folgt nach §. 79.

1) $A.n^{r+1} + An^{r+1} = 0$, $A = A$,

2) $[B - B + A.(r+1) - 1]\, n^{r} = 0$, also

$$A.(r+1) = 1 \text{ oder } A = \frac{1}{r+1}.$$

3) $C - C - A. \frac{r.(r+1)}{1.2} + Br = 0$, also

$$Br = A. \frac{r.(r+1)}{1.2} B = \frac{r.(r+1)}{1.2.r.r+1} = \frac{1}{2}.$$

4) $D - D + A. \frac{(r+1).r.(r-1)}{1.2.3} - B. \frac{r.(r-1)}{1.2}$

$$+ C. (r-1) = 0$$

$$C(r-1) = \frac{1}{2}. \frac{r.(r-1)}{1.2} - \frac{1}{(r+1)}. \frac{(r+1).r.(r-1)}{1.2.3}$$

$$C = \frac{r}{4} - \frac{r}{6} = \frac{r}{12}.$$

5) $E - E - A. \frac{(r+1).r.(r-1).(r-2)}{1.2.3.4}$

$$+ B. \frac{r.(r-1).(r-2)}{1.2.3} - C. \frac{(r-1).(r-2)}{1.2}$$

$$+ D. (r-2) = 0$$

$$D.(r-2) = \frac{1}{r+1}. \frac{r+1.r.r-1.r-2}{1.2.3.4}$$

$$- \frac{1}{2}. \frac{r.(r-1).(r-2)}{1.2.3} + \frac{r}{12}. \frac{(r-1).(r-2)}{1.2}$$

$$D = \frac{r.(r-1)}{1.2.3.4} - \frac{r.(r-1)}{3.4} + \frac{r.(r-1)}{2.3.4} = 0.$$

6) $F - F + A. \frac{(r+1).r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.2.3.4.5}$

$$- B. \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.2.3.4} + C. \frac{(r-1).(r-2).(r-3)}{1.2.3}$$

$$- D. \frac{(r-2).(r-3)}{1.2} + E. (r-3) = 0.$$

$$E = - \frac{r+1}{r+1}. \frac{r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.2.3.4.5.\ \ r-3}$$

$$+\frac{1}{2}.\frac{r.(r-1).(r-2).(r-3)}{1.\,2.\,3.\,4.\,(r-3)}-\frac{r}{12}.\frac{(r-1).(r-2).(r-3)}{1.\,2.\,3\quad r-3}$$

$$+\,0.\,\frac{(r-2).\,(r-3)}{1.\,2.\,(r-3)}.$$

$$E=-\frac{r.(r-1).(r-2)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5)}+\frac{r.(r-1).(r-2)}{1.\,2.\,1.\,2.\,3.\,4}$$

$$-\frac{r.\,r-1.\,r-2}{12.\,1.\,2.\,3}.$$

$$E=-\frac{24.r.(r-1).(r-2)}{24.\,1.2.3.4.5}-\frac{2.4.5.r.r-1.r-2}{24.\,1.2.3.4.5}$$

$$+\frac{12.5.r.(r-1).(r-2)}{24.\,1.2.3.4.5}$$

$$E=\frac{(-24-40+60).r.(r-1).(r-2)}{24.\,1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

$$=\frac{-4}{24}.\frac{r.(r-1).(r-2)}{1.2.3.4.5}$$

also $E=\frac{-1}{6}.\frac{r.(r-1).(r-2)}{1.2.3.4.5}=-\frac{1}{30}.r.(r-1).(r-2).$

Eben so finden wir $F=0$,

$$G=\frac{1}{42}.\frac{r.(r-1).(r-2).(r-3).(r-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6},\ H=0\ \text{ꝛc.}$$

Es ist demnach:

$$S=\frac{1}{r+1}.n^{r+1}+\frac{1}{2}.n^{r}+\frac{r.n^{r-1}}{12}-$$

$$-\frac{1}{30}.\frac{n^{r-3}.r.(r-1).(r-2)}{1.\,2.\,3.\,4}$$

$$+\frac{1}{42}.\frac{r.(r-1).(r-2).(r-3).(r-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6}\dots\dots$$

Es sey $\frac{1}{6}=\mathfrak{A}$, $-\frac{1}{30}=\mathfrak{B}$, $+\frac{1}{42}\,\mathfrak{C}$, und die folgenden Coeffizienten mögen $\mathfrak{D}$, F, $\mathfrak{G}$ und so weiter heißen, so läßt sich nach dem bekannt gewordenen Gesetze die Formel noch fortsetzen. Es ist nämlich:

$$S = \frac{1}{r+1} \cdot n^{r+1} + \frac{1}{2} \cdot n^{r} + \mathfrak{A} \cdot \frac{r \cdot n^{r-1}}{1 \cdot 2}$$

$$+ \mathfrak{B} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot n^{r-3}$$

$$+ \mathfrak{C} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3) \cdot (r-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\, 5 \cdot 6} \cdot n^{r-5}$$

$$+ \mathfrak{D} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3) \cdot (r-4) \cdot (r-5) \cdot (r-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot n^{r-7}$$

$$+ \mathfrak{E} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot (r-3) \cdot (r-4) \cdot (r-5) \cdot (r-6) \cdot (r-7) \cdot (r-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \cdot n^{r-9} \ldots$$

Es sey nun, um D zu bestimmen, die Summe von 1 Gliede aus den 8ten Potenzen der natürlichen Zahlen zu suchen, so ist $n = 1$, $r = 8$; und demnach erhalten wir

$$1 = \frac{1}{8+1} \cdot 1^9 + \frac{1}{2} \cdot 1^8 + \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{2} \cdot 1^7 - \frac{1}{30} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1^5}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \frac{1}{42} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1^3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \mathfrak{D} \cdot 1;$$ also

ist $\mathfrak{D} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{7}{15} - \frac{14}{63}$

oder $\mathfrak{D} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{7}{15} - \frac{2}{9}$

$$\mathfrak{D} = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} - \frac{6}{9} - \frac{2}{9} - \frac{1}{2} + \frac{7}{15}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} + \frac{7}{15} = -\frac{15}{30} + \frac{14}{30} = -\frac{1}{30}$$

Suchen wir das erste Glied der 10ten Potenzen aller natürlichen Zahlen, so finden wir, weil $r = 10$, $n = 1$, $\mathfrak{E} = -\frac{5}{66}$.

Beispiel. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen, wenn n Glieder gegeben sind, ist mittelst dieser Formel, weil hier $r = 2$ ist,

$$S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot n}{2} + 0, \text{ also}$$

$$S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}, \text{ wie in §. 176. Zusatz.}$$

VI. Abschnitt.

Von den verschwindend kleinen und unnennbar großen Größen und ihrem Gebrauche bei Reihen.

Erstes Kapitel.

§. 185. Erklärung. Die Theilung einer als Einheit gedachten Größe kann in stäter Dauer fortgesetzt werden; immer ist jedoch nach unzählig vielen Theilungen der durch Theilung hervorgehende Theil eine Größe, die zwar dem Nichts sich nähert, niemals aber in ein wirkliches Nichts übergehen kann.

Jede Größe kann dadurch, daß sie um ihre eigene Quantität wächst, in stäter Vergrößerung begriffen seyn, und wie man der Theilung keine Grenzen bestimmen kann, eben so kann man auch die Vergrößerung nicht begrenzen; denn die Möglichkeit der Theilung und die Möglichkeit der Vergrößerung ist mit dem Begriffe der Größe innig verbunden.

Das fortdauernde Wachsen einer Größe mag durch das Zeichen ∞, die ununterbrochen fortgesetzte Theilung einer als Einheit gesetzten Größe durch das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ angedeutet werden. Es soll also der Ausdruck $\frac{1}{\infty}$ eine verschwindend kleine Größe, einen verschwindend kleinen Theil bedeuten, der Ausdruck aber ∞ eine unnennbar große Größe.

§. 186. Wenn der durch unnennbarfache Theilung hervorgegangene verschwindend kleine Theil $\frac{1}{\infty}$ unnennbarmal genommen wird, so muß die Einheit, aus welcher er durch Theilung hervorging, wieder erzeugt werden, denn wird ein Ganzes in eine gewisse Anzahl Theile getheilt und ein Theil so oftmal genommen, als die Theilung besagt, so ergibt sich wieder das Ganze: in Zeichen $\frac{1}{\infty} \cdot \infty = 1$.

§. 187. Eine verschwindend kleine Größe $\frac{1}{\infty}$ kann da, wo sie zu einer als Einheit gedachten Größe, welche diesen verschwindend kleinen Theil unzähligemal enthält, addirt werden soll, keinen Einfluß auf die Einheit haben und den Werth derselben fast gar nicht ändern, so daß man die Einheit in Verbindung mit einem solchen verschwindend kleinen Theile als unverändert ohne merklichen Fehler betrachten kann: in Zeichen $\frac{1}{\infty} + 1 = 1$.

§. 188. Satz. Jede als Einheit gesetzte Größe verschwindet in Rücksicht einer unnennbar großen Größe, insofern diese letztere aus der ersten hervorgegangen ist: in Zeichen $\infty + 1 = \infty$.

Beweis. Soll der Ausdruck richtig seyn, so müssen die beiden Größen gleich bleiben, wenn man sie durch Gleiches dividirt; also $\frac{\infty}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$, oder $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; nun ist nach §. 187. $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; also auch $\infty + 1 = \infty$.

§. 189. Erklärung. Eine Größe kann verschwindend klein seyn in Bezug auf diejenige, aus der sie durch Theilung entstanden ist; der millionte Theil einer Ruthe ist verschwindend klein gegen die Ruthe, aber er ist es nicht gegen den Zoll. Es ist daher wohl zu berücksichtigen, in welchem Falle eine verschwindend kleine

Größe, wenn sie zu einer andern addirt wird, außer Acht gelassen werden kann.

§. 190. Die verschwindend kleine Größe ist immer noch der Theilung fähig; denn was verschwindend klein ist in Bezug auf die eine Größe, ist es nicht in Bezug auf eine andere; es kann daher auch $\frac{1}{\infty}$ in stäter Dauer noch getheilt werden, und der daraus hervorgehende Theil ist $\frac{1}{\infty} : \infty = \frac{1}{\infty^2}$. Aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, ist es möglich, verschwindend kleine Größen vom verschiedenen Range in Rechnungen einzuführen.

§. 191. Satz. Das verschwindend Kleine im zweiten Range kann in Bezug auf das verschwindend Kleine im ersten Range weggelassen werden: in Zeichen

$$\frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}.$$

Beweis. Sind beide Ausdrücke gleich, so müssen sie es bleiben, wenn man Gleiches durch Gleiches multiplicirt; nun ist $\frac{1}{\infty^2} . \infty + \frac{1}{\infty} . \infty = \frac{1}{\infty} . \infty$ oder $\frac{1}{\infty} + 1 = 1^0$, nach §. 187., also auch

$$\frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty}.$$

§. 192. Auch eine unnennbar große Größe ist des Wachsthumes fähig, denn auch das unnennbar Große ist relativ. Unnennbar groß ist der Umfang der Erde, noch mehr die Erdbahn gegen die Länge eines Zolles; die Erdbahn selbst kann verschwindend klein gegen die Bahn anderer Gestirne seyn; darum ist es nicht widersprechend, unnennbare große Größen vom verschiedenen Range in die Rechnung einzuführen.

§. 193. Satz. Das unnennbar Große des ersten

Ranges kann in Bezug auf das unnennbar Große eines höheren Ranges verschwinden; in Zeichen:

$$\infty^2 + \infty = \infty^2.$$

Beweis. Sind beide Ausdrücke, so müssen sie es bleiben, wenn man sie durch Gleiches dividirt; nun ist $\frac{\infty^2}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty^2}{\infty}$, oder $\infty + 1 = \infty$; da nun nach §. 188. $\infty + 1 = \infty$ ist, so ist auch

$$\infty^2 + \infty = \infty^2.$$

Zweites Kapitel.

Anwendung dieser Ausdrücke.

§. 194. Die in §. 184. aufgestellte Summenformel: $S = \frac{1}{r+1} . n^{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{r . n^{r-1}}{12}$

$$- \frac{1}{30} . \frac{r . (r-1) . (r-2) . n^{r-3}}{1 . 2 . 3 . 4}$$

$$+ \frac{1}{42} . \frac{r . (r-1) . (r-2) . (r-3) . r-4) . n^{r-5}}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} \ldots$$

gibt für die Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen, welche des zweiten Ranges ist, und in welcher $r = 2$ gesetzt werden muß, den Ausdruck $S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

Für die Reihe der Cuben, welche des dritten Ranges ist, und in welcher $r = 3$ ist, erhalten wir $S = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$, wobei das Glied

$$\text{B.} \frac{3 . (3-1) . (3-2) . n^0}{1 . 2 . 3 . 4}$$

wegfällt, weil da die Reihe abbricht, wo die Anzahl der Glieder aufhört.

Für die Reihe der vierten Potenzen ist

$$S = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}.$$

Setzen wir $n = \infty$, das ist, die Anzahl der Glieder unnennbar groß, so ist

1) $S = \frac{\infty^3}{3} + \frac{\infty^2}{2} + \frac{\infty}{6} = \frac{\infty^3}{3}$ nach §. 193.

2) $S = \frac{\infty^4}{4} + \frac{\infty^3}{2} + \frac{\infty^2}{4} = \frac{\infty^4}{4}$ nach §. 193.

3) $S = \frac{\infty^5}{5} + \frac{\infty^4}{2} + \frac{\infty^3}{3} - \frac{\infty}{30} = \frac{\infty^5}{5}$ nach §. 193. ꝛc.

§. 195. Aufgabe. Es ist ein Ausdruck für die Summe einer unbegrenzt fortlaufenden Reihe von der Form $\frac{b}{c}, \frac{b}{cm}, \frac{b}{cm^2}, \frac{b}{cm^3}, \ldots \frac{b}{cm^{r-1}}$ zu finden, in welcher die Zähler constant sind, die Nenner aber in einer geometrischen Progression wachsen.

Auflösung. Bezeichnen wir diese Summe mit S, so ist $S = \frac{bm}{c(m-1)}$.

Beweis. Der Ausdruck für die Summe einer geometrischen Progression, in welcher das erste Glied $= a$, der Quotient aber, mit dem jedes vorhergehende Glied multiplicirt werden muß, um das nachfolgende zu haben $= e$ ist, wird durch $S = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$ dargestellt; nun ist hier in diesem Falle das erste Glied $a = \frac{b}{c}$, der Quotient $e = \frac{1}{m}$; daher ist $S = \frac{\frac{b}{c}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{m} - 1}$, oder es ist $S = \dfrac{\dfrac{b}{c}\left(\dfrac{1-m^n}{m^n}\right)}{\dfrac{1-m}{m}}$, oder auch

$$S = \frac{b}{c}.\left(\frac{1-m^n}{m^n}\right) \times \left(\frac{m}{1-m}\right);$$

daraus folgt $S = \dfrac{bm}{cm^n}.\dfrac{(1-m^n)}{(1-m)}$. Ist nun die Anzahl der Glieder unnennbar groß, also $n = \infty$, so ist $1-m^\infty = m^\infty$ nach §. 193, und $S = \dfrac{bm.-m^\infty}{cm^\infty.(1-m)}$ $= - \dfrac{bm.-m^\infty}{c(1-m).m^\infty}$, endlich $S = \dfrac{-bm}{c(1-m)}$, weil der Werth eines Bruches ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt, so ist auch $S = \dfrac{-bm.-1}{c.(1-m).-1}$, woraus

$S = \dfrac{bm}{c(m-1)}$ erfolgt.

Beispiel. Es ist die Summe der ohne Ende fortgehenden Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{n-1}}$, welche auch so ausgedrückt werden kann, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}.\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}.\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2}.\frac{1}{2^4} \ldots \frac{1}{2}.\frac{1}{2^{n-1}}$, zu suchen.

Hier ist $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, also $m = 2$; demnach ist $S = \frac{1}{2}.\frac{2}{(2-1)} = 1$.

Beispiel II. Von der Reihe $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32} \ldots -\frac{1}{2} . \frac{1}{(-2)^{n-1}}$ in der $a = \frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$ ist, erhalten wir $S = \frac{1}{2} . \frac{-2}{(-2-1)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$, weil hier $m = -2$ ist.

Beispiel III. Von der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128} \ldots \frac{1}{2} . \frac{1}{4^{n-1}}$ in der $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ und $m = 4$ ist, erhalten wir $S = \frac{1}{2} . \frac{4}{4-1} = \frac{2}{3}$.

Beispiel IV. Von der Reihe $\frac{3}{2} - \frac{6}{6}, \frac{12}{18}, \frac{24}{54}, \frac{48}{162} \ldots \frac{3}{2} . \left(-\frac{2}{3}\right)^{n\ 1}$, in der $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{m} = \frac{1}{-\frac{3}{2}}$, also $m = \frac{-3}{2}$ ist, erhalten wir $S = \frac{3}{2} . \frac{-\frac{3}{2}}{(-\frac{3}{2}-1)} = \frac{-\frac{9}{2}}{-\frac{10}{2}} = \frac{9}{10}$.

Beispiel V. Die Summe aller Dezimalstellen des ohne Ende fortlaufenden Dezimalbruches 0,11111 .... bei dem $\frac{b}{c} = \frac{1}{10}$ $\frac{1}{m} = \frac{1}{10}$, also $m = 10$ ist, gibt $S = \frac{1}{10} . \frac{10}{10-1} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$.

Beispiel VI. Die Summe aller Dezimalstellen des periodischen Dezimalbruches 0,5757 .... bei dem $\frac{b}{c} = \frac{57}{100}$, $\frac{1}{m} = \frac{1}{100}$, also $m = 100$ ist, gibt $S = \frac{57}{100} . \frac{100}{100-1} = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$.

§. 196. Aufgabe. Es ist ein Ausdruck für die Summe nachstehender Reihe ab, $(a+d)\,bq$, $(a+2d)\,bq^2$, $(a+3d)\,bq^3 \ldots\ldots [a+(n-1)\,dbq^{n-1}$ zu finden.

Auflösung. Bezeichnen wir diese Summe mit S, so ist $S = \frac{ab(q^n-1)+nbdq^n}{(q-1)} - \frac{bdq(q^n-1)}{(q-1)^2}$.

Beweis. Wir können diesen Ausdruck involutorisch finden. Wir schreiben in den ersten Winkel das erste Glied. Neben an das zweite Glied, so wie es das Schema zeigt; so hat man im zweiten Winkel die Summe von zwei Gliedern. Neben an schreibe man das dritte Glied, so hat man im dritten Winkel die Summe von drei Gliedern; setzt man dies zum $n$ten Winkel fort, so hat man in demselben die Summe von n Gliedern.

$$\begin{array}{c|c|c|c|l}
ab & abq & abq^2 & abq^3 & \ldots\ldots abq^{n-1} \\
\cline{1-1}
 & dbq & dbq^2 & dbq^3 & \ldots\ldots dbq^{n-1} \\
\cline{2-2}
 & & dbq^2 & dbq^3 & \ldots\ldots dbq^{n-1} \\
\cline{3-3}
 & & & dbq^3 & \ldots\ldots dbq^{n-1} \\
\cline{4-4}
 & & & & \qquad\vdots \\
 & & & & \qquad dbq^{n-1}
\end{array}$$

Nun ist die Summe der ersten horizontalen Reihe $ab\,(1+q+q^2+q^3\ldots\ldots q^{n-1})$, $S = ab\,\frac{(q^n-1)}{(q-1)}$.

Die Summe der zweiten horizontalen Reihe $dbq\,(1+q+q^2+q^3\ldots\ldots q^{n-2})$, ist $S = \frac{dbq^n - dbq}{q-1}$; denn nach der Formel einer geometrischen Progression, in welcher u das letzte Glied, e den Quotient, und a das erste Glied vorstellt, ist $S = \frac{ue - a}{e-1}$, in der eingeklammerten geometrischen Reihe ist $e = q$, $a = 1$ und $u = q^{n-2}$, also die Summe $\frac{q^{n-2}\cdot q - 1}{q-1}$; diese, mit

dem Faktor dbq multiplicirt, gibt $S = \frac{dbq(q^{n-2}.q-1)}{q-1}$
$= \frac{dbq^n - dbq}{q-1}$.

Die Summe der dritten horizontalen Reihe $dbq^2(1 + q + q^2 + q^3 \ldots q^{n-3}$ ist

$$S = \frac{dbq^2(q^{n-3}.q-1)}{q-1} = \frac{dbq^n - dbq^2}{q-1}.$$

Das Glied in der letzten horizontalen Reihe, welches dbq^{n-1} ist, kann ohne Aenderung des Werthes so ausgedrückt werden $\frac{dbq^{n-1}.(q-1)}{q-1} = \frac{dbq^n - dbq^{n-1}}{q-1}$, indem eine Größe an ihrem Werthe keine Aenderung erleidet, wenn sie durch eine Größe dividirt und multiplicirt wird.

Es ist demnach die Summe aller Glieder

$$S = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} \times \frac{(n-1).dbq^n}{q-1}$$
$$- \frac{dbq}{q-1}(1 + q + q^2 + q^3 \ldots q^{n-2});$$

aber $(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots q^{n-2})$

$$= \frac{1.(q^{n-2}.q-1)}{q-1} = \frac{q^{n-1}-1}{q-1},$$

wie früher bemerkt wurde; daher ist

$$S = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{ndbq^n}{q-1} - \frac{dbq^n}{q-1} - \frac{dbq(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2}$$

oder $S = \frac{ab(q^n-1)}{q-1} + \frac{ndbq^n}{q-1} - \frac{dbq^n.(q-1)}{(q-1)^2}$

$$- \frac{dbq^n + dbq}{(q-1)^2}$$

$$\text{oder } S = \frac{ab(q^n - 1)}{q-1} + \frac{ndbq^n}{q-1} - \frac{dbq^{n+1} + dbq^n}{(q-1)^2}$$
$$- \frac{dbq^n + dbq}{(q-1)^2}$$

$$\text{oder } S = \frac{ab(q^n - 1)}{q-1} + \frac{ndbq^n}{q-1} - \frac{dbq^{n+1} + dbq}{(q-1)^2}$$

$$\text{oder } S = \frac{ab(q^n - 1)}{q-1} + \frac{ndbq^n}{q-1} - \frac{dbq(q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

$$\text{oder } S = \frac{ab(q^n - 1) + ndbq^n}{q-1} - \frac{dbq(q^n - 1)}{(q-1)^2}.$$

Zusatz. Setzen wir $\frac{1}{b}$ für b, und $\frac{1}{q}$ für q, so erhält man statt der in §. 196. aufgestellten Reihe folgende:

$$\frac{a}{b},\ (a+d).\frac{1}{bq},\ (a+2d).\frac{1}{bq^2},\ (a+3d).\frac{1}{bq^3} \ldots,$$

ihre Summe geht aus der vorigen hervor und ist

$$S = \frac{\frac{a}{b}\left(\frac{1}{q^n} - 1\right) + nd.\frac{1}{b}.\frac{1}{q^n}}{\frac{1}{q} - 1} - \frac{d.\frac{1}{b}.\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q^n} - 1\right)}{\left(\frac{1}{q} - 1\right)^2}.$$

$$\text{oder } S = \frac{\frac{a}{b}\left(\frac{1-q^n}{q^n}\right)}{\frac{1-q}{q}} + \frac{\frac{nd}{bq^n}}{\frac{1-q}{q}} - \frac{\frac{d}{bq}\left(\frac{1-q^n}{q^n}\right)}{\left(\frac{1-q}{q}\right)^2} -$$

$$\text{oder } S = \frac{aq(1-q^n)}{bq^n(1-q)} + \frac{ndq}{bq^n(1-q)} - \frac{dq^2(1-q^n)}{bq.q^n(1-q)^2}$$

$$\text{oder } S = \frac{aq(1-q^n) + ndq}{bq^n(1-q} - \frac{dq(1-q^n)}{bq^n(1-q)^2}.$$

Ist nun die Anzahl der Glieder unnennbar groß, also $n = \infty$, so ist

$$S = \frac{aq. - q^{\infty} + ndq}{bq^{\infty}(1-q} - \frac{dq(-q^{\infty}}{bq^{\infty}(1-q)^2}, \text{ oder}$$

$$S = \frac{-aq}{b(1-q)} + \frac{ndq}{bq^{\infty}(1-q)} + \frac{dq}{b(1-q)^2};$$

nun ist nach §. 187. $\frac{-aq}{b(1-q)} + \frac{ndq}{bq^{\infty}(1-q)} = \frac{-aq}{b(1-q)}$

also ist $S = \frac{-aq}{b(1-q)} + \frac{dq}{b(1-q)^2}$; weil ferner

$\frac{-aq. -1}{b(1-q). -1} = \frac{aq}{-b+bq} = \frac{aq}{b(q-1)}$ ist, und $(1-q)^2 = 1 - 2q + q^2 = (q-1)^2$ ist, so ist zuletzt $S = \frac{aq}{b(q-1)} + \frac{dq}{b(q-1)^2}$, oder auch $S = \frac{aq(q-1)}{b(q-1)^2} + \frac{dq}{b(q-1)^2}$, wenn man beide Brüche auf gleichen Nenner bringt; ferner ist

$$S = \frac{aq.q - a.q + d.q}{b(q-1)^2}, \text{ endlich } S = \frac{(aq - a + d)q}{b(q-1)^2}.$$

Beispiel I. Von der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32} \ldots$, in welcher $a = 1$, $b = 2$, $d = 2$, $q = 2$ ist, erhalten wir $S = \frac{(1.2 - 1 + 2)2}{2(2-1)^2}$ oder $S = \frac{6}{2} = 3$.

Beispiel II. Von der Reihe $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243} \ldots$ in der $a = 1$, $b = 3$, $q = 3$ ist, erhalten wir $S = \frac{(1.3 - 1 + 1)3}{3(3-1)^2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Beispiel III. Von der Reihe $\frac{1}{2}, \frac{4}{6}, \frac{12}{18}, \frac{32}{54},$

$\frac{80}{162}$ .... in der $a = 1$, $b = 2$, $q = \frac{3}{2}$, $d = 1$ ist, erhalten wir $S = \frac{(1.\frac{3}{2} - 1 + 1).\frac{3}{2}}{2.(\frac{3}{2} - 1)^2} = \frac{9}{2}$.

Beispiel IV. Von dem Bruche
0,123456790123456790 1,
welches ein periodischer Decimalbruch ist, und bei dem $a = 1$, $b = 10$, $d = 1$, $q = 10$ ist, erhalten wir $S = \frac{(1.10 - 1 + 1)\,10}{10\,(10 - 1)^2}$ oder $S = \frac{100}{81.10} = \frac{10}{81}$.

§. 197. Aufgabe. Es ist ein Ausdruck für die Summe nachstehender Reihe:

$$\frac{a}{b(b+d)},\ \frac{a}{(b+d).(b+2d)},\ \frac{a}{(b+2d).(b+3d)}$$

$$\frac{a}{(b+3d).(b+4d)} \ldots \frac{a}{[b+(n-1)d].(b+nd)}$$

zu finden.

Auflösung. Bezeichnen wir diese Summe mit S, so ist $S = \frac{na}{n(b+nd)}$.

Beweis. Zuerst wollen wir vier Glieder addiren und zeigen, daß die Summe dieser vier Glieder der vorgelegten Summenformel entspricht, und dann wollen wir allgemein darthun, daß, wenn die Summe von n Gliedern mit dieser Formel übereinstimmt, auch die Summe von $(n+1)$ Gliedern mit ihr übereinstimme. Ist aber ein Beweis für n und $(n+1)$ Glieder gegeben, so ist er allgemein für alle Glieder. Zuerst kann sogleich gezeigt werden, daß die Summe der ersten vier Glieder mit der Summenformel übereinstimme, wenn wir $4 = n$ setzen in dem Ausdrucke $\frac{na}{b(b+nd)}$.

Zuerst bringen wir die ersten zwei Glieder $\frac{a}{b(b+d)}$,

$\frac{a}{(b+d).(b+2d)}$ auf einerlei Nenner und addiren diese beiden Glieder, wir erhalten $\frac{a(b+2d)+ab}{b(b+d).(b+2d)}$

$$= \frac{2ab+2ad}{b(b+d)(b+2d)} = \frac{2a(b+d)}{b(b+d)(b+2d)}$$

$$= \frac{2a}{b(b+2d)}.$$

Zu der Summe von zwei Gliedern $\frac{2a}{b(b+2d)}$ addiren wir das dritte $\frac{a}{(b+2d).(b+3d)}$, wir erhalten

$$\frac{2a(b+3d)+ab}{b(b+2d).b+3d} = \frac{3ab+6ad}{b(b+2d)(b+3d)}$$

$$= \frac{3a(b+2d)}{b(b+2d)(b+3d} = \frac{3a}{b(b+3d)}.$$

Zu der Summe von drei Gliedern addiren wir das vierte $\frac{a}{(b+3d).(b+4d)}$, und wir erhalten

$$\frac{3a(b+4d)+ab}{b(b+3d)(b+4d)} = \frac{4ab+12ad}{b(b+3d)(b+4d)}$$

$$= \frac{4a(b+3d)}{b(b+3d)(b+4d)} = \frac{4a}{b(b+4d)},$$

wo offenbar $\frac{na}{b(b+nd)}$ mit dem Ausdrucke $\frac{4a}{b(b+4d)}$ übereinstimmt, wenn man 4 für n setzt.

Nun sey zur Summe von n Gliedern das $(n+1)$te Glied zu addiren, so müssen wir die Summe von $(n+1)$ Gliedern, nämlich $\frac{a(n+1)}{b[b+(n+1)d]}$ erhalten. Es ist

$$\frac{na}{b(b+nd)} + \frac{a}{(b+nd).[b+(n+1)d]}$$

$$= \frac{na.[b+(n+1)d]+ab}{b(b+nd)[b+(n+1)d]} = \frac{nab+ab+nad(n+1)}{b(b+nd)[b+(n+1)d]}$$

$$= \frac{ab(n+1)+nad(n+1)}{b(b+nd)[b+(n+1)d]} = \frac{[ab+nad].\,n+1}{b(b+nd)\,[b+(n+1)d]}$$

$$= \frac{a\,(b+nd).\,n+1}{b\,(b+nd)\,[b+(n+1)\,d]} = \frac{a\,(n+1)}{b.\,[b+(n+1)\,d]},$$

welches in der That die Summe von $(n+1)$ Gliedern ist; das Ausgesagte ist demnach allgemein gültig und die Summenformel $S = \frac{na}{b\,(b+nd)}$ richtig.

§. 198. Ist nun $n = \infty$, das ist die Anzahl der Glieder unnennbar groß, so ist

$$S = \frac{\infty\, a}{b\,(b+\infty\, d)} = \frac{a\,\infty}{b^2+\infty\, bd} = \frac{a\,\infty}{\infty\, bd} = \frac{a}{bd}.$$

Beispiel I. Von der Reihe $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}\ldots$ in der $a = 1$, $b = 1$ und $d = 1$ ist, erhalten wir $S = \frac{1}{1.1} = 1$.

Beispiel II. Von der Reihe $\frac{1}{3.5}, \frac{1}{5.7}, \frac{1}{7.9}, \frac{1}{9.11}\ldots$ in der Reihe $a = 1$, $b = 3$, $d = 2$ ist, erhalten wir $S = \frac{1}{3.2} = \frac{1}{6}$.

P

Anhang.

Umkehrung der Reihen.

§. 199. Ist der Werth einer Größe durch eine Reihe dargestellt, welche nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreitet, so daß die Exponenten der Hauptgröße eine arithmetische Progression bilden, in Zeichen ist $y = Ax^{\alpha} + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{A}x^{\alpha+2\delta} \ldots + \overset{r}{A}x^{\alpha+r\delta}$, und wird nun verlangt, den Werth der Hauptgröße durch eine Reihe ähnlichen Baues, welche aber nach Potenzen von y fortschreitet, auszudrücken, so heißt der Inbegriff der Operationen, welche mit der vorgelegten Gleichung vorgenommen wird, um den Werth der Hauptgröße zu entwickeln, Umkehrung der Reihen.

§. 200. Da der Werth der Hauptgröße in dieser Reihe, deren Coeffizienten constante Größen sind, durch eine ähnliche Reihe ausgedrückt werden soll, so fingiren wir eine ähnliche Reihe, welche nach Potenzen von y fortschreitet, deren Coeffizienten aber noch völlig unbestimmt bleiben. Es sey $x = By^{a} + \overset{1}{B}y^{a+d} + \overset{2}{B}y^{a+2d} \ldots + \overset{r}{B}y^{a+rd}$. Dabei müssen wir nun zweierlei Dinge untersuchen; erstens wie die Exponenten der für jeden Fall zu fingirenden Reihe beschaffen seyn müssen; zweitens wie die unbestimmt angenommenen Coeffizienten der fingirten Reihe zu bestimmen sind.

§. 201. In der umzukehrenden Reihe erscheint die Hauptgröße, deren Werth durch eine fingirte Reihe vorgestellt wird, in verschiedenen Potenzen mit verschiedenen Coeffizienten; die fingirte Reihe muß demnach jedesmal nach dem polynomischen Lehrsatze zu derjenigen

Potenz erhoben werden, welche der Exponent der Hauptgröße besagt, und diese Potenz mit dem bei der Hauptgröße stehenden Faktor multiplicirt werden; so müßte man, um $\overset{1}{A}x^2$ durch die fingirte Reihe auszudrücken, dieselbe zur zweiten Potenz erheben und mit $\overset{1}{A}$ multipliciren. Alle Produkte, welche dadurch hervorgehen, müssen dann addirt werden, wobei allerdings nur jene Produkte sich addiren lassen, welche eine gleiche Potenz der neuen Hauptgröße y führen. Der gesammte aus diesen potenzirten Reihen hervorgehende Werth muß $= y$ seyn.

§. 202. Wir wollen die neue Reihe, welche durch Addiren aller potenzirten Reihen entsteht, die Totalreihe, jede Potenz der fingirten Reihe eine Partialreihe, die fingirte Reihe aber die Grundreihe nennen.

§. 203. Soll eine Vereinigung der Partialreihen möglich seyn, um die Totalreihe zu erzeugen, so muß das erste Glied der zweiten Partialreihe mit dem zweiten Gliede der ersten Partialreihe zu einer Summe sich vereinigen lassen; eben so auch das erste Glied der dritten Partialreihe mit dem dritten Gliede der ersten Partialreihe; überhaupt das erste Glied der $r$ten Partialreihe mit dem $r$ten Gliede der ersten Partialreihe; und da bloß jene Glieder addirt werden können, welche eine gleiche Potenz der Hauptgröße haben, so muß das erste Glied der $r$ten Partialreihe eine gleiche Potenz der neuen Hauptgröße mit dem $r$ten Gliede der ersten Partialreihe haben. Das erste Glied der $r$ten Partialreihe hat die Potenz $y^{\alpha a + r a \delta}$, wenn man die Grundreihe zur Potenz $(\alpha + r\delta)$ erhebt; denn diese Potenz kommt in dem $r$ten Glied der umzukehrenden Reihe vor; das $r$te Glied aber der ersten Partialreihe hat die Potenz $y^{a\alpha + rd}$, wovon man sich auf folgende Art überzeugen kann. Man erhebe die Grundreihe zur Potenz α und suche von ihr das dritte Glied nach dem anfänglichen, es sey $\alpha = 2$ und $r = 3$,

so ist $(By^a + \overset{1}{B}y^{a+d} + \overset{2}{B}y^{a+2d} + \overset{3}{B}y^{a+3d} \ldots.)$
$= B^2y^{2a} + 2B\overset{1}{B}y^{2a+d} + \overset{1}{B}{}^2y^{2a+2d} + 2\overset{1}{B}\overset{2}{B}y^{2a+3d}$
$+ \overset{1}{2}\overset{2}{B}By^{2a+2d} + 2B\overset{3}{B}y^{2a+3d} \ldots.$

Das dritte Glied also nach dem anfänglichen hat die Potenz y^{2a+3d}, und weil wir $2 = \alpha$ und $r = 3$ annahmen, so ist diese $r$te Potenz nach der anfänglichen $y_{\alpha a+rd}$. Da nun das $r$te Glied der ersten Partialreihe mit dem ersten der $r$ten Partialreihe sich vereinigen soll, und eine solche Addition eine gleiche Potenz der Hauptgröße fordert, so muß $y^{\alpha a+ra\delta} = y^{\alpha a+rd}$ seyn, und weil bei gleichen Potenzen von derselben Wurzel auch die Exponenten gleich seyn müssen, so muß $\alpha a + ar\delta = \alpha a + rd$, also auch $ar\delta = rd$, ferner $a\delta = d$ seyn.

§. 204. Das erste Glied der Totalreihe kann nur aus dem ersten Gliede der ersten Partialreihe bestehen, weil alle nachfolgende Partialreihen mit einer höheren Potenz in ihrem ersten Gliede anfangen, kein Glied also der folgenden Partialreihen sich mit dem ersten Gliede der ersten Partialreihe vereinigen läßt. Es besteht also das erste Glied der Totalreihe aus dem ersten Gliede der ersten Partialreihe und dem Faktor A; nun ist das erste Glied der ersten Partialreihe $B^\alpha y^{\alpha a}$, also das erste Glied der Totalreihe $AB^\alpha y^{\alpha a}$.

§. 205. Die ganze Totalreihe, deren erstes Glied $AB^\alpha y^{\alpha a}$ ist, muß $= y$ seyn, also ist auch die Totalreihe $- y = 0$.

§. 206. Wenn eine Reihe, die nach Potenzen einer Hauptgröße fortschreitet, von der Form $Ay^a + \overset{1}{A}y^{a+d} + \overset{2}{A}y^{a+2d} \ldots. \overset{r}{A}y^{a+rd} = 0$ ist, man mag was immer für einen Werth für y annehmen, und die Reihe mag eine bestimmte oder unbestimmte Anzahl von Gliedern haben, so muß jeder Coeffizient dieser Reihe

$= 0$ seyn. Denn dividiren wir beiderseits mit y^a, so ist $A + \overset{1}{A}y^d + Ay^{2d} \ldots\ldots + Ay^{rd} = 0$. Setzen wir nun $y = 0$, so folgt daraus $A = 0$; dividiren wir nun in der Reihe $\overset{1}{A}y^d + \overset{2}{A}y^{2d} \ldots\ldots + Ay^{rd} = 0$ mit y^d, so erhalten wir $\overset{1}{A} + \overset{2}{A}y^d \ldots\ldots + Ay^{(r-1)d} = 0$, und für $y = 0$ ist auch $\overset{1}{A} = 0$, und so fort auch $\overset{2}{A} = 0$ $\overset{3}{A} = 0 \ldots\ldots \overset{r}{A} = 0$.

§. 207. Weil nun die Totalreihe nach Potenzen von y fortschreitet, und wenn man y von ihr abzieht, Null geben soll, so entsteht daraus eine Reihe, welche mit $-y$ beginnt, deren zweites Glied $AB^{\alpha}y^{\alpha a}$ ist, und deren folgende Glieder nichts anders, als Glieder der Totalreihe sind; weil nun diese ganze Reihe $=$ Null seyn soll, so muß sie auch für jeden Werth von y gleich Null bleiben, und die Coeffizienten dieser Reihe müssen $=$ Null seyn. Nun hebt die Reihe mit $-1.y$ an, dessen Coeffizient -1 ist, der nicht $=$ Null seyn kann, und doch soll der Werth der Reihe Null seyn, und auch die Coeffizienten müssen gleich Null gesetzt werden. Es muß also noch ein Glied der Totalreihe geben, welches nicht $=$ Null ist, sondern mit $-y$ vereinigt Null gibt, also $= y$ ist; alle andere Glieder sind dann einzeln genommen $=$ Null.

§. 208. Nun kann sogleich erwiesen werden, daß kein anderes Glied als das erste der Totalreihe namentlich $AB^{\alpha}y^{\alpha a} = y$ sey; denn da nach §. 205. die Totalreihe $= y$ ist, und nur eins ihrer Glieder nach §. 207. $= y$ ist, die andern aber $=$ Null sind, so müßte das erste Glied der Totalreihe auch $=$ Null seyn, wenn ein anderes Glied derselben $= y$ wäre; die Totalreihe, welche nach Potenzen von y regelmäßig fortgeht, deren Coeffizienten also mit den Gliedern einer geometrischen Reihe multiplicirt sind, finge demnach mit Null an; aber eine geometrische Reihe, deren erstes Glied Null ist, ist eine Ungereimtheit; es kann also das erste Glied der Totalreihe nicht = Null, sondern es muß = y seyn, also $AB^{\alpha}y^{\alpha a} = y$.

§. 209. Nun soll $AB^{\alpha}y^{\alpha a} - x = 0$ seyn, und da nur Glieder, die eine gleiche Potenz der Hauptgröße haben, von einander abgezogen werden können, so muß $y^{a} = y$ seyn, und weil gleiche Potenzen von derselben Wurzel auch gleiche Exponenten haben, so ist $\alpha a = 1$, und $a = \frac{1}{\alpha}$. Setzt man nun Gleiches für Gleiches, so ist $AB^{\alpha}y^{\alpha.\frac{1}{\alpha}} = y$, oder $AB^{\alpha}y^{1} = y^{1}$; dividirt man beiderseits durch y, so ist $AB^{\alpha} = 1$, also auch $B^{\alpha} = \frac{1}{A}$, ferner $\sqrt[\alpha]{B^{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{\left(\frac{1}{A}\right)}$, endlich ist $B = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

§. 210. Da wir in §. 203. $d = a\delta$ fanden, und die Grundreihe $x = By^{a} + By^{a+d} + By^{a+2d} \ldots\ldots + By^{a+rd}$ angenommen wurde; da wir ferner $a = \frac{1}{\alpha}$ und $d = a\delta$, also $d = \frac{1.\delta}{\alpha}$ fanden, so ist $x = \frac{y^{\frac{1}{\alpha}}}{A^{\alpha}} + \overset{1}{B}x^{\frac{1+\delta}{\alpha}} + \overset{2}{B}y^{\frac{1+2\delta}{\alpha}} \ldots\ldots + \overset{r}{B}y^{\frac{1+r\delta}{\alpha}}$, und die Form, welche die Exponenten der fingirten Reihe haben müssen, ist demnach gefunden. Die Exponenten der zu fingirenden Reihe bilden also eine arithmetische Progression, deren erstes Glied 1, deren Differenz die Differenz der Exponenten in der umzukehrenden Reihe ist, und jeder Exponent wird durch den Exponenten des ersten Gliedes in der umzukehrenden Reihe dividirt.

§. 211. Die zweite Untersuchung betrifft die Bestimmung der unbestimmten Coeffizienten in der Totalreihe. Das erste Glied der Totalreihe bestand aus dem ersten Gliede der ersten Partialreihe, das zweite Glied der Totalreihe kann nur aus dem zweiten Gliede der ersten Partialreihe und aus dem ersten der zweiten Partialreihe zusammengesetzt seyn; es kommen also in dem zweiten Gliede der Totalreihe nur die zwei ersten Coeffizienten der Grundreihe B und $\overset{1}{B}$ vor, wie §. 203. zu ersehen ist, und da das zweite Glied der Totalreihe $=$ Null ist nach §. 208. und $B = \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist, auch die Faktoren aus der umzukehrenden Reihe, mit denen diese Coeffizienten B und $\overset{1}{B}$ multiplicirt werden, bekannt sind, so läßt sich daraus $\overset{1}{B}$ finden. Im dritten Gliede der Totalreihe kommen nur die drei ersten Coeffizienten der fingirten Reihe B, $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$ vor §. 203. Da nun auch das dritte Glied der Totalreihe $=$ Null ist, und B, $\overset{1}{B}$ bereits bekannt sind, so läßt sich $\overset{2}{B}$ finden, und so verhält es sich mit den übrigen Coeffizienten der Grundreihe.

§. 212. Da nun alle folgende Glieder der Totalreihe nach §. 208. gleich Null sind, in denen die unbestimmt angenommenen Coeffizienten der Grundreihe vorkommen, so ergeben sich so viele Gleichungen, als Glieder der Totalreihe sind, in denen jeder folgende Coeffizient der Grundreihe mit früher schon entwickelten und mit andern schon bekannten Faktoren vorkommt.

Auf diese Art ist die Möglichkeit, den Werth dieser unbestimmt angenommenen Coeffizienten zu finden, nachgewiesen.

Die Art, wie sie bestimmt werden, soll an Beispielen selbst gewiesen werden.

§. 213. Der am häufigsten dabei vorkommende Fall ist der, wo die Exponenten der Hauptgröße eine Reihe der natürlichen Zahlen bilden, von 1 angefangen. In diesem Falle hat die fingirte Reihe in ihren Exponenten dieselbe Form; in Zeichen: Ist $y = \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \overset{4}{A}x^4 \ldots\ldots \overset{r}{A}x^r$; so ist vermöge §. 210. auch die Grundreihe $x = \overset{1}{B}y + \overset{2}{B}y^2 + \overset{3}{B}y^3 \ldots\ldots \overset{r}{B}y^4$ anzunehmen.

Beispiel I. Es sey in der Gleichung $x = 3y - 6y^2 + 12y^3 - 24y^4 + 48y^3 \ldots\ldots + 3.\,2^{n-1}\,y^n$ die Größe y durch eine Reihe, welche nach Potenzen von x fortschreitet, zu bestimmen.

Die fingirte Reihe sey $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex \ldots\ldots Nx^n$, so ist:

$$\begin{array}{rcllll}
-x & = & -x & & & \\
3y & = & 3Ax & +\ 3Bx^2 & +\ 3Cx^3 & +\ 3Dx^4 \quad +\ 3Ex^5 \\
-\ 6y^3 & = & \ldots & -\ 6A^2x^2 & -\ 12ABx^3 & -\ 6B^2x^4 \quad -\ 12BCx^5 \\
 & & & & & -\ 12AC.x^4 \quad -\ 12ADx^5 \\
+\ 12y^3 & = & \ldots\ldots\ldots & & +\ 12A^3x^5 & +\ 36A^2Bx^4 \quad +\ 36B^2Ax^5 \\
 & & & & & \qquad\qquad\quad +\ 36A^2Cx^5 \\
-\ 24y^4 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & -\ 24A^4x^4 \quad -\ 96A^3Bx^5 \\
+\ 48y^5 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \qquad\qquad\quad +\ 48A^5.x^5
\end{array}$$

Nun ist die Reihe vor dem Gleichheitszeichen $= 0$; also auch die Summe aller Glieder hinter dem Gleichheitszeichen $= 0$. Dem zu Folge ist $-x + 3Ax = 0$ oder $-1 + 3A = 0$, und daraus folgt $A = \frac{1}{3}$; ferner ist $3\,Bx^2 - 6A^2x^2 = 0$, oder $3B - 6A^2 = 0$, oder $3B = 6A^2$, oder $3B = 6.\left(\frac{1}{3}\right)^2$; daraus folgt $B = \frac{2}{9}$.

Ferner ist $(3C - 12AB + 12A^3)\,x^3 = 0$, oder auch $3C - 12AB + 12A^3 = 0$, oder $3C = 12AB - 12A^3$, oder $3C = 12.\frac{1}{3}.\frac{2}{9} - 12.\left(\frac{1}{3}\right)^3$, oder $3C = \frac{24}{27} - \frac{12}{27}$ oder $C = \frac{4}{27} = \frac{(2)^2}{3^3}$.

Eben so ist auch $(3D - 6B^2 - 12AC + 36A^2B - 24A^4).\,x^4 = 0$, oder $\left[3D - 6.\left(\frac{2}{9}\right)^2 12.\frac{1}{3}.\frac{4}{27} + 36.\left(\frac{1}{3}\right)^2.\frac{2}{9} - 24\left(\frac{1}{3}\right)^4\right] = 0$, oder $\left[3D - \frac{24}{81} - \frac{48}{81} + \frac{72}{81} - \frac{24}{81}\right] = 0$, oder $3D - \frac{24}{81} = 0$, oder $3D = \frac{24}{81}$; daraus folgt $D = \frac{8}{81} = \frac{2^3}{3^4}$.

Ferner ist $(3E - 12BC - 12AD + 36B^2A + 36A^2C - 96A^3B + 48A^5)\,x^5 = 0$, also auch $\left[3E - 12.\frac{2}{9}.\frac{4}{27} - 12.\frac{1}{3}.\frac{8}{81} + 36.\frac{4}{81}.\frac{1}{3} + 36.\frac{1}{9}.\frac{4}{27} - 96.\frac{1}{27}.\frac{2}{9} + 48.\frac{1}{243}\right] = 0$, oder $\left[3E = - \frac{96}{243} - \frac{96}{243} + \frac{144}{243} + \frac{144}{243} - \frac{192}{243}\right.$

$+\frac{48}{243}\Big] = 0$, oder $\Big[3E - \frac{192}{243} - \frac{192}{243} + \frac{288}{243}$
$+\frac{48}{243}\Big] = 0$ $\Big[3E - \frac{384}{243} + \frac{336}{243}\Big] = 0$, oder
$3E - \frac{48}{243} = 0$, oder $3E = \frac{48}{243}$ und $E = \frac{16}{81.3}$,
$E = \frac{2^4}{3^5}$. Es ist also $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2^1}{3^2}$, $C = \frac{2^2}{3^3}$
$D = \frac{2^3}{3^4}$, $E = \frac{2^4}{3^5}$, und die Fortsetzung leicht zu erkennen, also $y = \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{3^2} + \frac{2^2x^3}{3^3} + \frac{2^3x^4}{3^4} + \frac{2^4\alpha 5}{3^5}\ldots\ldots$

§. 214. Wäre aber die Gleichung $y^n = Ax^\alpha + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} + \overset{2}{A}x^{\alpha+2\delta} \ldots\ldots + \overset{r}{A}x^{\alpha+r\delta}$ gegeben, und die der Größe r y^n gleichgesetzte Reihe umzukehren, so muß die Grundreihe folgende Gestalt annehmen $x = By^{\frac{1.n}{\alpha}} + By^{\frac{(1+\delta).n}{\alpha}} + By^{\frac{(1+2\delta).n}{\alpha}} \ldots\ldots + \overset{r}{B}y^{\frac{(1+r\delta).n}{\alpha}}$.

Denn für $y = Ax^\alpha + \overset{1}{A}x^{\alpha+\delta} \ldots\ldots + Ax^{\alpha+r\delta}$ ist die Grundreihe $x = By^{\frac{1}{\alpha}} + By^{\frac{(1+\delta)}{\alpha}} \ldots\ldots + By^{\frac{1+r}{\alpha}}$; es muß also für y^n jede Potenz von y in der Grundreihe zur n ten Potenz erhoben werden.

Beispiel. Wäre die Reihe $Z^3 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\ldots$ umzukehren, so wäre $\frac{1.n}{\alpha} = \frac{1.3}{2}$, $\frac{(1+\delta).n}{\alpha} = \frac{(1+1).3}{2} = 3$, $\frac{(1+2\delta).n}{\alpha} = \frac{(1+2).3}{2} = \frac{9}{2}$, und die Grundreihe $x = Az^{\frac{3}{2}} + Bz^3 + Cz^{\frac{9}{2}} + Dz^6 + Ez^{\frac{15}{2}} + Fz^9 \ldots\ldots$

Beispiel. Aus der Division des Bruches $\frac{2y}{1-y} = x$ entsteht $x = 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2y^4 + 2y^5 \ldots;$ es soll y durch Umkehrung gefunden werden.

Es ist hier die Grundreihe:

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots$$

Nun ist

$$\begin{array}{l} -x = -x \\ 2y = 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 \ldots\ldots \\ 2y^2 = \ldots\ldots + 2A^2x^2 + 4ABx^3 + 2B^2x^4 \ldots\ldots \\ 2y^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots + 2A^3x^3 + 6A^2Bx^4 \\ 2y^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2A^4x^4. \end{array}$$

Da die erste Seite der Gleichung $= 0$ ist, so ist ist es auch die zweite;

also $2\,Ax - x = 0$ oder $A = \frac{1}{2}$

$2\,Bx^2 + 2A^2x^2 = 0$, daraus folgt $B = -\frac{1}{4}$

$2C + 4AB + 2A^3 = 0$; daraus folgt $C = \frac{1}{8}$

$2D + 2B^2 + 6A^2B + 2A^4 = 0$; daraus folgt $D = -\frac{1}{16}$.

Demnach ist $y = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16} \ldots\ldots$

Beispiel. Die Gleichung $y = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{24} \ldots\ldots$

gibt $x = 39 + \frac{9y^2}{2} + \frac{27y^3}{4} + \frac{81y^4}{8} \ldots\ldots$

Anmerkung. Die Umkehrung der Reihen ist von der höchsten Wichtigkeit, weil die Kenntniß von dem Zusammenhange zweier Größen nur dann vollständig ist, wenn man jede von ihnen aus der andern ableiten kann. Ihre Anwendung bei Gleichungen von höheren Graden ist nicht ohne Nutzen.

Druckfehler,

die ich vor dem Gebrauche dieses Buches zu berichtigen bitte.

Seite.	Zeile von oben.	
7	7	lies um statt und
7	25	— wo — wie
11	9	— 36 — 3. 6
17	17, 26	lies n — 2
24	6	— §. 28
25	3	fehlt die Form abe
	13	lies $\frac{\overset{2}{\mathfrak{C}}\text{r}}{a\ldots n} = \frac{n.(n+1)}{1.\,2}$
31	1	ist $(1+\gamma)$ statt $(1+\gamma$ zu setzen
33	10	lies alle statt als
34	18	— Nr. 2. §. 37.
45	22	— r te statt erste
48	1	— ${}^{n}\overset{p}{\mathfrak{B}} = {}^{n}\overset{n+1}{\mathfrak{B}}$
	11	— um statt und
	21	— r. r + 1. statt r. r + 2.
49	5	am Ende lies $\frac{5.\,4.\,3.\,4}{1.\,2.\,3.\,4} + \frac{5.\,4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3,\,4}$
53	6	lies + 1 statt r
55	9	— ${}^{n}\overset{0}{\mathfrak{B}}$ statt ${}^{n}\overset{3}{\mathfrak{B}}$
56	9	am Ende setze man vor ${}^{6}\overset{2}{\mathfrak{B}}$ das Zeichen;
61	19	lies ${}^{\alpha+\beta}\overset{r-2}{\mathfrak{B}}(r-2)$
62	3	— $\frac{(\alpha+\beta-r+1)}{r}.\frac{(\alpha+\beta-r+2)}{r-1}$
83	13	— $\frac{1.\,2.\,3.\,4}{1.\,2.\,3}$ statt $\frac{1.\,5.\,3.\,4}{1.\,2.\,3}$
85	30	— x^{11} statt x^{7}
86	12	— $x^{7}. - \frac{x^{3}}{3}. - \frac{x^{3}}{3}$
87	9	lies $\frac{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,1.\,2.\,3.\,4}$
92	5	— 1. 2. 3. 4 statt 1. 2. 3. 3
	8	— $-\frac{13}{64}$ statt $-\frac{12}{64}$
97	23	— $S\left(\frac{uN}{m}.\,\overset{k}{f}.\,{}^{n}\overset{m-1}{\mathfrak{B}}a^{n-(m-1)}\right)$
	28	— 1|1. 2;

Seite.	Zeile von oben.	
109	11	lies $\overset{2}{b}x^2$ statt 2^2x^2
111	1	— $\overset{3}{A} =$ statt $\overset{3}{A} +$
112	28	— $1.3 =$ statt $1.2 =$
117	26	— $-1.a^2$ statt $-4a^2$
119	17	— $\overset{2}{A}$ statt $\overset{1}{A}$
122	5	— ${}^3A.\,{}^{r-3}A$
	16	— ${}^1A^r$
	17	— ${}^1A^r$ statt ${}^1A^4$
223	2	$(r-1).r$ statt $(r-2).r$
124	9	lies mit ihm statt mit ihnen.
131	16	— $\frac{z^r}{1.2.3\ldots r}$
132	2,5	— $\frac{x^3}{3}$
136	6	— $2.0{,}20273248$
142	7	— wichtigste.
	13, 19, 27	lies $(1+y)$
146	2	lies $\cot \hat{x}$
	12	— $\frac{AB}{AC}$
147	6	— $\frac{\cos x}{1} = \frac{HC}{\cos y}$
149	15	— $\cos z$ statt $\cos d$
150	20	— Fig. 3
153	20	— Hauptgröße.
157	5	— Fig. 4
159	4	— $\frac{7936x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}$
161	17	— $= \cos \hat{x}$ statt $\cos \alpha$
163	4	— $(\sqrt{-1})^3$
	18	— $-\sin^3 \varphi.(\sqrt{-1})^3$
166	16	-- $= 2\cos\varphi.\sin\varphi$
	23	— $e^{z.\sqrt{-1}}$
170	5	— Fig. 1
180	16	— 1.1.1]
	8	— $\mathfrak{F}$ statt F
184	6	— + statt ,
196	21	— $(r-2)$
200	2	— $z = 3$
208	3	von unten lies — statt +

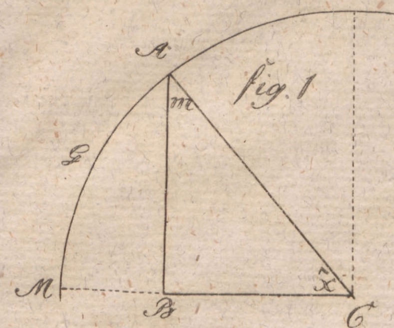

fig. 1

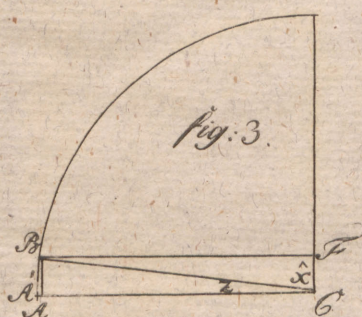

fig: 3.

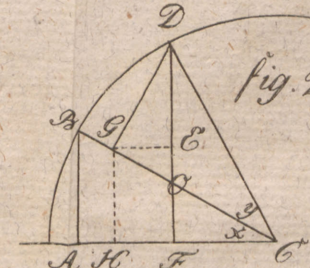

fig. 2

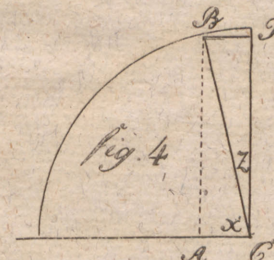

fig. 4

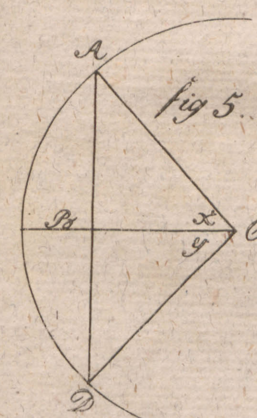

fig 5.