Lehrbuch

der

Elementar-Mathematik

zum

Gebrauch in den höheren Klassen

gelehrter Schulen

und

Anhängen und Anmerkungen

für solche, welche über die Grenzen des Schulunterrichts

hinausgehn wollen.

Von

Ernst Gottfried Fischer.

Zweiter Theil,

welcher die Elemente der Zahlen- und Buchstaben-

Rechnung enthält.

Berlin und Leipzig,

gedruckt und verlegt bey G. C. Nauck

1822.

Lehrbuch
der
Elementar-Mathematik
zum
Gebrauch in den oberen Klassen
gelehrter Schulen
nebst
Anhängen und Anmerkungen
für solche, welche über die Grenzen des Schulunterrichts
hinausgehn wollen.

Von
Ernst Gottfried Fischer.

Zweiter Theil,
welcher die Elemente der Zahlen- und Buchstaben-
Rechnung enthält.

Berlin und Leipzig,
gedruckt und verlegt bei G. C. Nauck.

1822.

Lehrbuch

der

Arithmetik

für Schulen.

Von

Ernst Gottfried Fischer.

Anfangsgründe der Zahlen- und Buchstaben-Rechnung.

Berlin und Leipzig,
gedruckt und verlegt bei G. C. Nauck.

1822.

Lehrbuch

der

Arithmetik

für Schulen.

Von

Ernst Gottfried Fischer.

Anfangsgründe der Zahlen- und Buchstaben-Rechnung.

Berlin und Leipzig,
gedruckt und verlegt bei G. C. Nauck.

1822.

Vorwort.

Ursprünglich beabsichtigte der Verfasser in diesem zweiten Theil, die Anfangsgründe der ganzen Arithmetik, bloß mit Ausschluß der Algebra vorzutragen. Aber nach Vollendung der ganzen Handschrift zeigte sich, daß dieser Theil eine unverhältnißmäßige Stärke gegen den ersten Theil erhalten würde; theils, weil die Arithmetik an sich weitläuftiger ist, als die Geometrie, theils und besonders, weil der Verfasser mehr Stoff zu Anhängen als in der Geometrie vorfand. Diese Anhänge sind zwar (wie schon im ersten Theil und in den Anmerkungen zu demselben bemerkt worden), nicht zum Vortrag in den Klassen, sondern zum eigenen Studium derer bestimmt, die Lust und Fähigkeit zur Mathematik haben: aber der Verfasser konnte sich nicht entschließen, sie wegzulassen, weil er den Zweck desselben für wichtig hält, und um die Dürftigkeit fast aller unserer Lehrbücher zu vermeiden. Hiedurch ist einige Abänderung in der Vertheilung des Inhalts veranlaßt worden. Dieser zweite Theil enthält vollständig die Anfangsgründe der Zahlenrechnung besonders in zehntheiligen Brüchen, bis einschließlich zur Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzeln; ferner die ganze Buchstabenrechnung bis einschließlich zu den Potenzen und Wurzeln eingliedriger Formeln. Dieses ist zusammen ein wohlbegränzter Umfang, dessen Durcharbeitung auf dem Berlinisch-Köllnischen Gymnasium für Klein- und Groß-Tertia bestimmt ist. Was noch rückständig bleibt, sind eigentlich Übergangsgegenstände zu den höhern Rechnungen; namentlich die Kombinationen, die allgemeine Binomial-Formel, die Progressionen, und Logarithmen. Diese sollen in Verbindung mit der Algebra den Inhalt des dritten Theils ausmachen. Wenn der Druck des zweiten Theils beendigt ist, sollen die dazu gehörigen Anmerkungen in einem abgesonderten Hefte sobald als möglich erscheinen, und dann der dritte Theil gedruckt werden.

Dieser zweite Theil ist nach demselben Plan, als der erste ausgearbeitet. Da sich der Verfasser hierüber in den Anmerkungen zum ersten Theil umständlich erklärt hat, so wird es hinreichend sein, hier noch folgendes kürzlich zu bemerken. Alle Abschnitte sind von mäßigem Umfang, und der Inhalt so gewählt und geordnet, daß man leicht in jeder Klasse für den Winter einige Abschnitte wird wählen können, die sich bequem an die im Sommer vorgetragenen Abschnitte der Geometrie anschließen. Auch findet sich bei jedem Paragraphen Stoff zu häuslicher Beschäftigung, und das Buch ist daher auf von Stunde zu Stunde fortlaufende schriftliche Arbeiten berechnet. Doch ist bei Weitem der größte Theil dieser Arbeiten so leicht, daß dadurch andern wichtigen Gegenständen nicht über die Gebühr Zeit entzogen wird. In der Arithmetik sind diese Arbeiten meistens noch leichter als in der Geometrie, indem sie sehr häufig bloß in der Ausführung eines andern Beispiels, statt des im Buche gebrauchten, bestehen. Aber für das Übungsheft bietet die Arithmetik noch mehr Stoff dar als die Geometrie. Vielleicht ist es nicht überflüssig, hier über eine zweckmäßige Behandlung der Übungshefte etwas zu sagen, ohne doch dadurch der Methode und Einsicht erfahrner Lehrer vorgreifen zu wollen. Gleich bei den ersten Abschnitten erfodern die Decimalbrüche viel Übung, wenn der Unterricht gedeihen soll. Es würde zu viel verlangt sein, wenn man bei einem Paragraphen, wo viele Übungsexempel im Buche verlangt werden, fodern wollte, daß diese bis zur nähsten Stunde fertig sein müßten. Der Verfasser hat gewöhnlich in solchen Fällen nur eine kleine Anzahl verlangt, aber seinen Schülern empfohlen, daß sie im Übungshefte leeren Raum lassen, und diesen gelegentlich, so wie sie eine halbe oder Viertelstunde übrig hätten, ausfüllen sollten. Ist es einmal gelungen den Schülern Lust einzuflößen, so erreicht man den Zweck sehr gut. Noch ist zu bemerken, daß der Verfasser selten seinen Schülern dergleichen Übungsaufgaben dictirt hat. Es ist offenbar eine Übung des Kopfes mehr, wenn sich der Schüler seine Aufgaben selbst erfindet; nur muß man nicht versäumen ihm dazu Anleitung zu geben. Der Verfasser hat dieses meistens dadurch zu bewirken gesucht, daß er, wenn ein Satz durch ein Beispiel an der Tafel zu erläutern war, dieses Beispiel nicht selbst wählte, sondern einen Schüler an die Tafel treten, und ein Exempel aufsetzen ließ, nachdem er ihm vorher die zu beobachtenden Bedingungen genau angegeben hatte. Man sieht leicht, daß hiebei viel Gelegenheit ist, die Urtheilskraft der Schüler, theils zu beobachten, theils zu üben und zu schärfen.

Die Art, wie der Verfasser die entgegengesetzten Größen vom siebenten Abschnitt an, bis zu Ende behandelt hat, empfiehlt er der besondern Aufmerksamkeit einsichtsvoller und unbefangener Beurtheiler. Sie ist die wirkliche Ausführung einer Idee, die der Verfasser in seiner Schrift „Über den Sinn der höhern Analysis" S. 180. nur angedeutet hatte.

Daß der Herr Verleger auch bei diesem Theil für gutes Papier und Druck rühmlichst gesorgt hat, liegt vor Augen; auch hat er den Preis dieses Theils so billig, als es nach den gegenwärtigen Verhältnissen möglich ist, angesetzt.

Auch bei dem Druck dieses Theils haben mich meine lieben Amtsgenossen, namentlich die Herren Oberlehrer August, Zelle, Dr. Bellermann, und Dr. G. E. Fischer, auf das freundschaftlichste unterstützt, wofür ich ihnen hier öffentlich zu danken mich verpflichtet fühle. Correctheit gehört zu den wesentlichen Eigenschaften eines guten Schulbuchs, und es ist in dieser Rücksicht kein Fleiß gespart worden. Der Anhang des sechsten Abschnitts „Von den Perioden der Decimalbrüche" ist eine sehr schätzbare Arbeit des Herrn August, dessen Versetzung an das Joachimsthalische Gymnasium unsere Lehranstalt sehr bedauert. Bei dieser Gelegenheit muß noch bemerkt werden, daß im ersten Theil der Anhang des dreizehnten Abschnitts, gleichfalls eine Arbeit des Herren August ist, welches in der Vorrede zu diesem Theile durch ein Versehen nicht angezeigt worden.

Berlin, im Februar 1822.

Der Verfasser.

Inhalt.

Anfangsgründe

der

Mathematischen Rechenkunst.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Begriffe und Sätze von den Zahlen, besonders von den zehntheiligen Brüchen.

A. Allgemeine Begriffe von ganzen und gebrochenen Zahlen.

§. 1. Grund-Begriffe.

Ein Ding nennt man eine Größe (quantum), oder legt ihm die Eigenschaft der Größe (quantitas) bei, in so fern sich dabei Vermehrung und Verminderung denken läßt.

Eine Größe, die aus mehreren gleichartigen zusammengesetzt ist, heißt ein Ganzes. Sind die Größen, woraus sie besteht, ungleich, so heißen sie Stücke, sind sie gleich, so heißen sie genaue Theile, oder schlechthin Theile. Im letztern Fall nennt man das Ganze ein Vielfaches von einem Theil.

Jeder dieser Begriffe ist im Hefte durch ein Beispiel zu erläutern.

§. 2. Grund-Begriffe.

Wenn man mehrere Größen, die entweder gleich sind, oder als gleich betrachtet werden können, weil sie sich unter eine gemeinsame Benennung oder Begriff bringen lassen, zusammen faßt, so ist ihre bloße **Menge** eine Größe, und diese nennt man eine **Zahl**. Fragt man nach der Zahl eines einzelnen Dinges, so heißt dieselbe **Eins**.

Man muß aber **Eins als Zahl**, und **Eins als Einheit** unterscheiden. Jedes einzelne gezählte Ding ist **die Zahl Eins; aber die allen gezählten Dingen zukommende gemeinschaftliche Benennung oder Begriff, ist die Einheit.**

Durch Beispiele ist hier zu erläutern:

1. Der Begriff der **Zahl**, und zwar einmal durch ein Beispiel gleicher Dinge, und dann durch ein Beispiel wirklich verschiedener Dinge, die sich aber unter eine gemeinsame Benennung bringen, und unter dieser Benennung als gleich betrachten lassen.
2. Der Begriff der **Einheit**, und ihr Unterschied von der **Zahl Eins**. Eins als Einheit, und als Zahl sind verschieden, wie ein Maaß, und eine gemessene Größe, die gerade so groß ist, als das Maaß; oder wie ein Begriff, und ein einzelner Gegenstand, auf welchen sich der Begriff anwenden läßt. Wer z. B. **Gebäude** zählt, für den ist der bloße Begriff eines Gebäudes die Einheit, jedes einzelne Haus aber ist eine gezählte Eins. Es kann nicht schwer sein andere ähnliche Beispiele (von Geld, Gewichten, Längen-Flächen-, Körpermaaßen, Zeiten ꝛc.) zur Erläuterung dieser Begriffe zu erfinden.

Anmerkung. Obgleich Eins als Einheit und als Zahl verschieden sind, so ist es doch nicht falsch, wenn man auch jedes einzelne gezählte Ding eine **Einheit** nennt, weil jedem der ganze Begriff der Einheit zukommen muß. Umgekehrt aber kann man nie die **Einheit als solche** eine Zahl, oder ein gezähltes Ding nennen.

§. 3. Zusatz.

Man kann jede Größe, folglich auch jeden Theil einer Größe, selbst jede zusammengefaßte Anzahl gleichartiger Größen als eine Einheit betrachten.

Dieses läßt sich zuerst deutlich machen durch das Beispiel solcher Arten von Größen, bei welchen mehrere Benennungen oder Einheiten üblich sind, als Gewichte, Zeiten, Längenmaaße, Geld u. s. f. Man wähle zur Erläuterung eine Einheit mittlerer Größe, so läßt sich zeigen, daß man gewisse Theile einer solchen Einheit, oder auch Vielfache derselben, wieder als Einheiten zu betrachten, und dieses durch eigene Benennungen derselben anzudeuten pflegt.

Zu besondern Zwecken kann man aber auch solche Größen, die im gemeinen Leben nicht als Einheiten betrachtet, und mit ganz eigenthümlichen Namen bezeichnet werden, doch als Einheiten betrachten; zu welchem Ende aber man ihnen doch immer irgend eine beliebige Benennung geben muß. Wenn Jemand z. B. für gut fände 7 Groschen als eine Einheit des Geldes zu betrachten, so könnte man 7 Gr. etwa einen Siebener nennen, und dann jede größere Geldsumme durch eine Anzahl solcher Siebener ausdrücken.

Der Paragraph ist im Hefte durch bestimmte, aber selbst gewählte Beispiele ähnlicher Art zu erläutern.

§. 4. Erklärung.

Wenn alle Größen einer gewissen Art durch Zahlen ausgedrückt werden sollen, so wird eine bestimmte Größe dieser Art als die Haupteinheit betrachtet.

Damit man aber sehr große Größen dieser Art nicht durch allzugroße Zahlen ausdrücken müsse, pflegt man eine gewisse Anzahl Haupteinheiten zusammen wieder als eine Einheit höherer Ordnung anzusehen. Oft wird ferner eine gewisse Anzahl solcher höhern Einheiten, als eine höhere Einheit zweiter Ordnung betrachtet, und auf eben die Art können Einheiten einer dritten Ordnung u. s. f. gemacht werden.

Um ferner auch solche Größen, die kleiner sind als die Haupteinheit, durch ganze Zahlen ausdrücken zu können, kann man einen bestimmten Theil der Haupteinheit, als eine Einheit von der ersten niedern Ordnung annehmen. Für Größen, die kleiner als diese sind, kann man wieder einen Theil dieser niedern Einheit für eine Einheit der zweiten niederen Ordnung annehmen, und dieses so weit fortsetzen, als man es für gut findet, oder als es üblich ist.

Wenn man auf diese Art eine Reihe von höheren und niedern Einheiten bildet, so nennt man die Anzahl von Einheiten einer jeden Ordnung, die auf die nähst höhere gehen, oder (was dasselbe sagt) die Anzahl der Theile, in welche man die Einheit einer Ordnung theilen muß, um die nähst niedrigere zu erhalten, die Eintheilungszahl der höheren Einheit.

Es kann nicht schwer sein, diese Erklärungen durch bestimmte Beispiele zu erläutern, wenn man dazu eine Art von Größen wählt, wobei sehr viele Benennungen üblich sind, wie z. B. bei Gewichten, desgleichen bei der Zeiteintheilung. Besonders hat man bei der letzten von Jahrtausenden herab bis zu Secunden eine zahlreiche Folge von Benennungen oder Einheiten. Wählt man nun von diesen irgend eine mittlere zur Haupteinheit, so wird man leicht Beispiele höherer oder niederer Einheiten von mehr als einer Ordnung, nebst der jeder Einheit zugehörigen Eintheilungszahl aufstellen können.

§. 5. Erklärung.

Wenn bei einer Art von Größen die Eintheilungszahlen der Einheiten entweder ganz ungleich, oder zwar gleich sind, aber doch im Aufsteigen zu höheren, und im Absteigen zu niederen Einheiten (wie bei den Längenmaaßen) nur bis zu einer bestimmten Ordnung fortgeführt werden, so heißt dieses eine *unregelmäßige Zählungsart.*

Werden hingegen von der Haupteinheit aus, nach einer unveränderlichen Eintheilungszahl, höhere und niedere Einheiten, ohne Ende fort gebildet, so ist das eine *regelmäßige Zählungsart*, oder ein *regelmäßiges Zahlensystem.*

Zur Erläuterung einer unregelmäßigen Zählungsart, kann jedes im vorigen Paragraphen angeführte Beispiel dienen.

Zur Erläuterung eines regelmäßigen Zahlensystems, kann bloß die *allgemeine Zählungsart* unbenannter, oder gleichbenannter Dinge angeführt werden, wovon sogleich im folgenden mit mehrerem die Rede sein wird. In dem Hefte ist daher bloß zu sagen, daß dieser Begriff in den folgenden Paragraphen näher erklärt werde.

§. 6. Erklärung.

Zum Ausdruck bestimmter Zahlen in einem regelmäßigen Zahlensystem, bedarf man zweierlei Arten von Zeichen; *hörbarer* und *sichtbarer.*

a) Die hörbaren nennt man *Zahlwörter*, und diese sind wieder von doppelter Art, Namen für die Einheiten jeder Ordnung, und Namen für jede Zahl, die kleiner ist als die Eintheilungszahl.

b) Die sichtbaren heißen Ziffern, und deren bedarf man gerade nur so viele, als die Eintheilungszahl beträgt, indem die verschiedenen Ordnungen der Einheiten dem Auge bloß durch die Stelle, wo eine Ziffer steht, bemerklich gemacht werden können.

Die bei allen Völkern üblichste allgemeine Zählungsart ist ein regelmäßiges Zahlensystem, dessen Eintheilungszahl Zehn ist. Daher nennt man es das zehntheilige oder dekadische Zahlensystem.

Bei dieser Art zu zählen liegt das Gesetz zum Grunde: Zehn Einheiten jeder Ordnung bilden allezeit eine Einheit der nähst höheren Ordnung.

Hier sollen im Hefte die bei uns üblichen hörbaren und sichtbaren Zahlzeichen so aufgeführt werden, daß man ihren Sinn und Ordnung leicht übersehen könne. Nach folgender Anleitung wird dieses nicht schwer sein.

a. Die Zahlwörter werden in der deutschen Sprache auf eine ziemlich regelmäßige Art gebildet.

Und was 1) die Benennungen der Einheiten betrifft, so heißt die Haupteinheit schlechthin Eins. Zehn Haupteinheiten machen eine Einheit der ersten höheren Ordnung, welche Zehn heißt, zehn Einheiten der ersten Ordnung bilden eine Einheit der zweiten Ordnung und heißen Hundert u. s. w. Um nun die Ordnung, nach welcher die Benennungen dieser höheren Einheiten auf einander folgen deutlich zu übersehen, bemerke man folgendes. Die drei Wörter Eins, Zehn, Hundert, kehren bei jeden drei folgenden Einheiten wieder, nur mit einem Zusatz: Ein-Tausend, Zehn-Tausend, Hundert-Tausend; Eine Million, u. s. w. Diese Wörter sind in Form einer Tabelle aufzuschreiben, und zwar bis zu der Einheit welche den Namen führt: Hundert-Tausend-Billion. Dann ist noch beizufügen, wie diese Benennungen, erforderlichen Falles, noch weiter fortgesetzt werden könnten.

Was nun 2) die Zahlwörter betrifft für Zahlen, die kleiner sind, als die Eintheilungszahl, so sind dieses die bekannten Wörter bis Neun. Diese sind mit Buchstaben aufzuschreiben, aber dabei das erste Zahlwort Null nicht zu vergessen.

b. Als Ziffern unsers Zahlensystems sind jetzt fast bei allen Völkern die bekannten zehn Figuren üblich, die man arabische Ziffern zu nennen pflegt, weil sie in den mittleren Jahrhunderten zuerst durch die Araber in Europa bekannt geworden sind. Der eigentliche Erfinder ist nicht bekannt. Wahrscheinlich stammen sie aus Indien. Sie sind übrigens eine der größten Erfindungen, die je ein menschlicher Kopf gemacht hat. Diese Ziffern sind im Hefte von 0 an bis 9 nach der Reihe aufzuschreiben.

Diese Ziffern können nun Einheiten jeder Ordnung bedeuten. Es ergiebt sich aber aus der bloßen Stelle zu welcher Ordnung jede Ziffer gehöre. Nämlich die letzte Ziffer rechter Hand zeigt Haupteinheiten, oder Einer an; die nähste linker Hand Zehner, oder Einheiten der ersten höheren Ordnung ꝛc. Dieses ist noch etwas weiter auszuführen, und an einer beliebigen fünf- oder sechsziffrigen Zahl deutlich zu machen.

Anmerkungen.

1. Da in der Folge von niederen Einheiten unseres Zahlensystems umständlicher geredet werden muß, so ist es hinreichend, hier bloß die höheren Einheiten zu erklären.

2. Bei den Benennungen der höheren Einheiten ist noch zu bemerken, daß jede aus einem doppelten Gesichtspunkt betrachtet werden kann: a) als Benennung einer höheren Einheit, und b) als ein Zahlwort, welches anzeigt, wie viele Haupteinheiten auf jede Einheit einer höheren Ordnung gehen.

3. Bei kleinen Zahlen unter Hundert, die am häufigsten vorkommen, finden in allen Sprachen kleine Unregelmäßigkeiten in den Zahlwörtern statt. Bei dem Vielfachen der Zehn sagt man bekanntlich Zwanzig statt Zwei-Zehner, Dreißig statt Drei-Zehner u. s. f. der Kürze wegen. Ferner wenn Einer und Zehner zusammen ausgesprochen werden, nennt

man die Einer früher als die Zehner (Einundzwanzig, Zweiundzwanzig u. s. w.), da man bei größeren Zahlen sonst immer die höheren Einheiten früher ausspricht.

4. Der Unterschied zwischen Zahlen und Ziffern wird wohl nach allem Bisherigen keiner Erläuterung bedürfen. Wem er nicht klar sein sollte, der frage sich nur ob die Römer andere Zahlen, oder andere Ziffern als wir gehabt haben.

§. 7. Erklärung.

Jede Menge von Haupteinheiten, folglich auch jede höhere Einheit, und jede Menge höherer Einheiten, heißt eine ganze Zahl.

Theilt man aber in Gedanken eine Haupteinheit in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und nimmt einen solchen Theil, oder eine ganz beliebige Anzahl derselben zusammen, so nennt man diese Vorstellung eine gebrochene Zahl, oder einen Bruch.

Zur Vorstellung eines Bruchs gehören also zwei Zahlen, die man bekanntlich Nenner und Zähler nennt. Auch ist bekannt, daß man einen Bruch ächt nennt, wenn er weniger Theile als die Einheit, unächt, wenn er eben so viele, oder noch mehr Theile enthält.

Auch die Art, wie ein Bruch sichtbar und hörbar bezeichnet wird, ist allgemein bekannt.

Die Begriffe Bruch, Nenner, Zähler, ächt, unächt, nebst der Bezeichnung der Brüche sind durch Beispiele zu erläutern.

Bei Zähler und Nenner ist noch die Frage zu beantworten, welcher von beiden früher gedacht, und welcher früher ausgesprochen werde.

§. 8. Zusatz.

Da man jeden Theil einer Einheit wieder als eine Einheit betrachten kann (§. 3.), so läßt sich jeder Bruch als eine ganze Zahl vorstellen, wenn man das, was der Nenner anzeigt, nicht durch Ziffern, sondern durch Buchstaben ausdrückt, d. h. man kann den Nenner als eine bloße Einheits-Benennung ansehen.

Auch umgekehrt kann man eine ganze Zahl, deren Einheiten von einer niedrigern Ordnung sind, jederzeit durch einen Bruch der Haupteinheit vorstellen.

Auch dieses ist durch ein Beispiel, wie folgendes, zu erläutern: $\frac{17}{20}$ ist einerlei mit 17 Zwanzigsteln. Im ersten Fall erscheint es als ein Bruch, im zweiten als eine ganze Zahl, deren Einheiten die Benennung Zwanzigstel haben.

Auch der zweite Theil des Satzes ist durch ein Beispiel zu erläutern, und zu zeigen, wie man z. B. Groschen als Brüche vom Thaler, Lothe als Brüche vom Pfund, Minuten als Brüche der Stunde, u. dgl. m. betrachten könne.

B. Von zehntheiligen, oder Decimalbrüchen.

§. 9. Erklärung.

Ein Bruch, dessen Nenner aus 1 und angehängten Nullen besteht, heißt ein zehntheiliger oder Decimalbruch.

Man schreibt aber diese Brüche nicht wie gemeine Brüche, sondern auf folgende Art:

Sollen an ganze Zahlen Decimalbrüche angehängt werden, so setzt man zuerst rechts neben die Ziffer der Haupteinheit ein Komma. Sind aber keine Ganzen da, so schreibt man eine Null, und neben diese das

Komma. Schreibt man nun neben das Komma noch mehrere Ziffern, so ist jede derselben der Zähler eines Decimalbruchs, dessen Nenner aber nicht geschrieben, sondern nur durch die Stelle, in welcher die Ziffer steht, bestimmt wird. Nämlich die erste Ziffer nach dem Komma hat den Nenner 10, die zweite 100, die dritte 1000 u. s. f., so daß also jeder Nenner eine höhere dekadische Einheit (§. 5.) ist.

Diese Erklärung ist mit besonderer Aufmerksamkeit durchzugehen, weil von ihrer richtigen Auffassung die deutliche Einsicht in alle Rechnungsarten abhängt.

Zur Erläuterung wähle man ein Beispiel von folgender Art. Man schreibe zuerst eine ganze Zahl von vier bis fünf Ziffern, setze neben die Einer ein Komma, und schreibe hinter dasselbe noch sechs bis sieben Ziffern. Es ist zweckmäßig, sowohl vor als hinter dem Komma, in eine und die andere Stelle auch eine Null zu setzen. Die Zahl sei z. B. folgende 3706,4008279. Von dieser Zahl soll nun der Werth jeder einzelnen Ziffer, von der höchsten anfangend bestimmt angegeben werden. Jede Ziffer zeigt nämlich eine gewisse Anzahl von höhern oder niedrigern Einheiten an. Die Benennung jeder Einheit aber, soll nicht durch Ziffern, sondern wörtlich ausgedrückt werden. In der obigen Zahl würde man also nicht anfangen müssen, die höchste Ziffer 3 bedeutet 3000, sondern: die höchste Ziffer 3 bedeutet 3 Tausende, die folgende 7 Hunderte, die nächste 0 Zehner, die folgende 6 Einer oder 6 Haupteinheiten. Dann folgen 4 Zehntel, 0 Hundertel, 0 Tausendtel, 8 Zehntausendtel, 2 Hunderttausendtel, 7 Milliontel, 9 Zehnmilliontel, u. dgl. m. Daß im Heft eine andere Zahl als die obige genommen werden müsse, versteht sich von selbst.

Zusatz. Wenn das Komma einmal seine bestimmte Stelle hat, so kann man an eine Zahl auf der linken oder rechten Seite so viele Nullen anhängen, als man will, ohne daß dadurch der Werth irgend einer Ziffer verändert wird.

Es ist ein Beispiel beizufügen.

§. 10. Erklärung.

Alle Ziffern, die links von den Einern stehen, zeigen höhere Einheiten an, die, welche rechts nach dem Komma folgen niedrigere. Setzt man nun über die Zehner 1, über die Hunderte 2, über die Tausende 3, u. s. f., desgleichen über die Zehntel 1, über die Hundertel 2, über die Tausendtel 3, u. s. f., so zeigen diese Zahlen an, von der wievielsten höheren oder niedrigern Ordnung jede Ziffer, oder vielmehr die Einheiten derselben sind. Solche Zahlen nun nennt man Stellenzahlen, oder Ordnungs-Zahlen.

Um die Stellenzahlen höherer und niederer Einheiten zu unterscheiden, kann man vor die Stellenzahlen höherer Einheiten das Zeichen +, vor die Stellenzahlen niederer Einheiten das Zeichen — setzen. (Diese Zeichen sind hier als ganz willkührliche anzusehen. In der Folge aber wird sich zeigen, daß sie noch einen besondern wissenschaftlichen Sinn haben.)

Für die Haupteinheit bleibt keine andere Stellenzahl übrig als 0; und dieses hat seinen richtigen Sinn. Denn sie gehört weder zu einer höheren, noch zu einer niedrigern Ordnung. Wollte man dieser Null ein Vorzeichen geben, so müßte man beide Zeichen ±

vorsetzen, um anzudeuten, daß sie nur der Anfangspunkt sowohl zu den höhern, als niedrigern Ordnungen sei.

Die im vorigen Paragraph gebrauchte Zahl würde zur Erläuterung des gegenwärtigen auf folgende Art geschrieben werden müssen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} +3 & +2 & +1 & \pm 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \\ 3 & 7 & 0 & 6, & 4 & 0 & 0 & 8 & 2 & 7 & 9 \end{array}$$

Diese Stellen- oder Ordnungszahlen zeigen nun an:

1. Zu der wievielsten höhern oder niedrigern Ordnung die Einheiten jeder Ziffer gehören. So gehört die 7 vor dem Komma zur zweiten höheren, die 7 nach dem Komma zur sechsten niedrigern Ordnung, u. dgl. m.
2. Sie zeigen an, in der wievielsten Stelle vor oder nach den Einern jede Ziffer stehe, z. B. 3 steht in der dritten Stelle vor den Einern, 8 in der vierten nach denselben.
3. Wenn man die Werthe der höheren und niedrigern Einheiten, nicht wörtlich, sondern durch Ziffern ausdrückt, so zeigen sie an, wie viele Nullen dazu nöthig sind. So ist der Werth von einer Einheit der 3 Eins mit drei Nullen oder 1000. Der Werth von einer Einheit der 2 ist ein Bruch, dessen Zähler 1, und dessen Nenner Eins mit fünf Nullen ist, also $\frac{1}{100000}$. Man sieht dieses deutlich ein, wenn man alle Ziffern von den Einern aus rechts und links nach der Reihe durchgeht, und so sind im Hefte bei dieser Nummer alle Ziffern der gewählten Zahl, nach der Reihe durchzugehen.
4. Wenn einzelne Einheiten durch Zeichen vorgestellt werden sollen, so wollen wir, weil dieselben allezeit entweder zehntheilige Vielfache, oder zehntheilige Theile von Zehn sind, dadurch andeuten, daß wir rechts oben neben 10 eine Stellenzahl mit + oder — setzen. Man wird also leicht angeben können, was der Sinn folgender Zeichen sei:

$$10^{+3};\ 10^{+2};\ 10^{+1};\ 10^{\pm 0};$$
$$10^{-1};\ 10^{-2};\ 10^{-3};\ \text{u. s. f.}$$

Auch diese Zeichen können hier als bloß willkührliche angesehen werden. In der Folge wird sich aber zeigen, daß auch sie noch einen besondern wissenschaftlichen Sinn haben.

§. 11. Zusatz.

Aus Vergleichung von §. 6, 9, 10 ergiebt sich, daß die Einheiten der zehntheiligen Bruchziffern unter keinem andern Gesetze stehen, als die Einheiten ganzer Ziffern: nämlich

eine Einheit jeder Ordnung ist zehnmal so groß als eine Einheit der nähst niedrigern Ordnung.

Hieraus läßt sich schon im Voraus schließen, daß die Rechnungen mit zehntheiligen Brüchen, in der Hauptsache, von den Rechnungen mit ganzen Zahlen, nicht sehr verschieden sein können.

Da das im Paragraph ausgesprochene Gesetz die eigentliche Grundlage aller Zahlenrechnungen ist, so ist es nöthig, dasselbe sehr genau aufzufassen. Zu dem Ende gehe man die in den beiden vorigen Paragraphen in dem Hefte gebrauchte Zahl (im Lehrbuch hatten wir die Zahl 3706,4008279) Ziffer vor Ziffer durch, indem man sowohl für die höhern als niedrigern Ordnungen von der Stelle der Haupteinheiten ausgeht. Es sollen aber in diesem Paragraph nicht die Werthe der Ziffern, sondern nur die Werthe der Einheiten verglichen werden. Wir setzen zur Erleichterung der schriftlichen Ausarbeitung den Anfang dieser Arbeit her, die im Hefte auf alle Stellen der gewählten Zahl fortzusetzen ist.

a. Die Einheiten der Ziffer (6), die auf der linken Seite des Komma steht, sind Haupteinheiten, oder Einer. Die Einheiten der nähsten Ziffer (0) sind 10 mal größer, also Zehn, oder Zehner. Die Einheiten der folgenden Ziffer (7) sind 10 mal größer als Zehner, also Hunderte u. s. f.

b. Auf der rechten Seite sind die Einheiten der ersten Ziffer (4) 10 mal kleiner als eine Haupteinheit, also Zehntel. Die der zweiten Stelle (0) sind 10 mal kleiner als Zehntel, also Hundertel. Die der dritten Stelle (0) sind 10 mal kleiner als Hundertel, also Tausendtel. u. s. f.

Im Hefte sind diese Erklärungen auf eine beliebige vielziffrige Zahl anzuwenden, und bis zu den äußersten Ziffern auf beiden Seiten fortzusetzen.

§. 12. Zusatz.

Wenn man daher die Stelle des Komma um 1, 2, 3 oder mehr Stellen verändert, so wird der Werth der ganzen Zahl dadurch bezüglich 10mal, 100mal, 1000mal größer oder kleiner, je nachdem man das Komma nach der rechten oder linken Hand fortrückt.

Rückt man nämlich das Komma um eine Stelle gegen die rechte Seite, so rückt jede Ziffer in die nähsthöhere Ordnung. Folglich werden ihre Einheiten, und daher auch der Werth einer jeden Ziffer 10mal größer. Rückt man das Komma noch um eine Stelle nach der rechten Seite, so ist jede Ziffer zwei Ordnungen höher gerückt, also 100mal größer geworden. u. s. f.

Wenn man z. B. in der Zahl 43,67 das Komma hinter die 6 rückt (436,7), so sind aus 4 Zehnern 4 Hunderte geworden; aus 3 Einern 3 Zehner; aus 6 Zehnteln 6 Einer; aus 7 Hunderteln 7 Zehntel. Man sieht leicht, wie diese Erläuterung ausfällt, wenn das Komma um zwei Stellen fortgerückt wird.

In dem Hefte ist eine ähnliche Erläuterung, aber an einer andern selbstgewählten Zahl zu geben. Auch ist das Komma um 1 und 2 Stellen nach der linken Seite zu rücken, und anzugeben, welche Veränderung dadurch in dem Werthe jeder Ziffer, und der ganzen Zahl vorgehe.

§. 13. Zusatz.

Steht einmal das Komma in einer Zahl fest, so hat jede Ziffer ihren unveränderlichen bestimmten Werth, und dieser wird nicht geändert, wenn man vor oder hinter den Ziffern irgend eine beliebige Anzahl von Nullen anhängt.

Soll daher die Stelle des Komma verändert werden, so kann man es um soviele Stellen, als man nur will, nach der rechten oder linken Seite fortrücken.

Eben dieses gilt auch von ganzen Zahlen. Denn obgleich in diesen gewöhnlich kein Komma gesetzt wird, so ist doch die Stelle des Komma da, und man kann es jederzeit setzen, und es dann, erforderlichen Falles, um so viele Stellen, als man will, nach der einen oder andern Seite fortrücken.

Jeder Theil dieses Satzes ist im Hefte durch ein Beispiel zu erläutern, wozu eine nähere Anleitung wohl nicht nöthig sein wird. Aber mündlich sind viele Beispiele durchzugehen, damit die Begriffe jedem geläufig werden.

§. 14. Zusatz.

Den Werth einer mehrziffrigen Zahl kann man jederzeit auf mehrere verschiedene Arten betrachten und aussprechen.

1. Man kann jede solche Zahl betrachten als eine Summe von lauter einziffrigen Zahlen, deren jede sich auf eine andere Einheit bezieht. Dann sind die Wörter Zehn, Hundert, Tausend ꝛc. desgleichen Zehntel, Hundertel, Tausendtel ꝛc. zu be-

trachten nicht als Zahlwörter, sondern als Einheits-Benennungen. So kann man sagen: 306,8 bedeute 3 Hunderte, 0 Zehner, 6 Einer und 8 Zehntel.

2. Auch kann man jede solche Zahl betrachten als eine Summe von lauter Einheiten der niedrigsten Ordnung. In diesem Fall sind die Wörter Zehn, Hundert, Tausend ꝛc. desgleichen Zehntel, Hundertel, Tausendtel ꝛc. nicht mehr Einheits-Benennungen, sondern Zahlwörter. So kann man sagen 306,8 bedeute 3068 Zehntel.

3. Wenn man an eine solche Zahl, ohne die Stelle des Komma zu verändern, Nullen anhängt, und dann alle Ziffern, wie bei Nr. 2. verbunden liest, als ob kein Komma da wäre, so kann man sie als eine Summe von Einheiten jeder beliebigen Ordnung (die noch niedriger ist, als die der niedrigsten geltenden Ziffer) betrachten. So kann man die schon bei Nr. 1. und 2. gebrauchte Zahl 306,8 schreiben 306,80, und lesen 30 680 Hundertel; oder schreiben 306,800, und lesen 306 800 Tausendtel ꝛc.

Im Hefte ist eine andere als die hier gebrauchte Zahl, nach allen drei Nummern durchzugehn, und bei Nr. 2. und 3. ist zu zeigen, wie die Richtigkeit dessen, was behauptet wird, mit früheren Sätzen zusammenhänge.

Anmerkung. Eigentlich verändert man im Grunde die Stelle des Komma, wenn man eine mehrziffrige Zahl nach Nr. 3. verbunden liest; ändert aber dagegen die Einheits-Benennung so, daß doch der Werth unverändert bleibt. So müßte man die Zahl 306,8 bei unveränderter Stellung des Komma verbunden lesen 306,8 Einer (d. i. 306 ganze

Einer, und 0,8 eines Einers). Liest man aber 3068 Zehntel so hat man im Grunde das Komma hinter die 8 gesetzt, wodurch die Zahl 10 mal größer wird. Indem man aber nun die Benennung Zehntel, nicht Einer hinzusetzt, so macht man sie wieder 10 mal kleiner, wodurch der Werth ungeändert bleibt. Liest man 30680 Hundertel, so hat man das Komma um 2 Stellen rechts fortgerückt, also die Zahl 100 mal größer gemacht; aber durch die Benennung Hundertel macht man sie wieder 100 mal kleiner.

Auf ähnliche Art kann man einer Zahl die Einheitsbenennung jeder beliebigen höheren Ordnung geben, wenn man das Komma links fortrückt. Die Zahl 306,8 verbunden gelesen, aber ohne die Stelle des Komma zu ändern, heißt 306,8 Einer. Setzt man das Komma zwischen 0 und 6, so hat man 30,68 Zehner (d. i. 30 ganze Zehner, und 68 Hundertel eines Zehners); Rückt man das Komma noch um eine Stelle weiter, so hat man 3,068 Hunderte (3 ganze Hunderte, und 0,068 des Hunderts), u. s. f.

Zusatz. Man sieht hieraus, wie man jede Zahl ohne Rechnung 10 mal, 100 mal, 1000 mal ꝛc. größer oder kleiner machen (d. h. mit 10, 100, 1000 ꝛc. multipliciren, oder dividiren) könne.

Auch dieses ist im Hefte durch ein Paar Beispiele zu erläutern.

§. 15. Erklärung.

Unter dem Ausdruck geltende Ziffern versteht man, wenn von einzelnen Ziffern die Rede ist, alle Ziffern, mit Ausschluß der einzigen 0.

Ist aber von mehrziffrigen Zahlen die Rede, so versteht man darunter alle Ziffern, die man zusammen nehmen muß, um die Zahl nach §. 14. verbunden zu lesen, auch wenn sich Nullen darunter befinden.

In den Zahlen 30,006, oder 207,041 werden alle Ziffern als geltende betrachtet, wenn man sie verbunden liest 30006 Tausendtel und 207041 Tausendtel.

Im Hefte sind zur Erläuterung andere Zahlen zu wählen.

Anmerkung. Wenn eine Zahl am Ende Nullen hat, so kann der Ausdruck geltende Ziffer zweideutig werden. Hat man z. B. die Zahl 2700 Einer vor sich so kann man sagen, sie habe vier geltende Ziffern, weil alle vier zur richtigen Aussprache zusammen genommen werden müssen. Da man aber die Zahl auch lesen kann 27 Hunderte, so kann man auch sagen, die Zahl habe nur zwei geltende Ziffern. In solchen Fällen ist es nöthig sich jederzeit bestimmt zu erklären, wie man den Ausdruck verstehe.

Auch bei zehntheiligen Brüchen findet diese Zweideutigkeit statt. Der Bruch 0,37 hat zwei geltende Ziffern, liest man ihn aber 0,370, so hat er drei, liest man ihn 0,3700, so hat er vier geltende Ziffern u. dgl. m.

Auch diese Anmerkung ist im Hefte, nur durch andere Beispiele, zu erläutern.

§. 16. Aufgabe.

Einen verbunden ausgesprochenen Decimalbruch zu schreiben.

Auflösung. Man schreibt zuerst die ganze verbunden ausgesprochene Zahl, als wenn es lauter Ganze oder Einer wären. Dann zeigt die hinzugefügte Einheits-Benennung, wo man das Komma zu setzen habe.

Soll man z. B. Dreihundert und neun Zehntausendtel schreiben, so bemerke man zuerst, welches die Einheits-Benennung sei. Die übrige Zahl (dreihundert und neun) schreibt man als ob es Einer wären, nämlich 309. Aber aus der Benennung Zehntausendtel folgt, daß die niedrigste Ziffer (9) in der vierten Stelle nach dem Komma stehen müsse, also muß man 0,0309 schreiben.

Es sind viele mündliche Übungen dieser Aufgabe zu machen. Im Heft ist ein selbstgewähltes Beispiel, dem obigen ähnlich, niederzuschreiben.

§. 17. Lehrsatz.

Der Werth einer Einheit von irgend einer Ordnung, ist größer als der Werth von noch so vielen Ziffern, welche rechter Hand auf die Stelle dieser Einheit folgen können.

Beweis. Man schreibe eine beliebige Anzahl von Neunen neben einander, also die größten Ziffern, die man setzen kann, und bringe das Komma in eine ganz beliebige Stelle vor, oder hinter, oder zwischen diesen Neunen an, z. B. 0,0099999; so wird man sich leicht überzeugen können, daß der Werth aller dieser Neunen noch nicht so groß ist, als der Werth einer einzigen 1, die man in der nähsten Stelle vor ihnen schriebe. In unserer Zahl ist die niedrigste 9 von der siebenten, die höchste von der dritten Bruchordnung, es ist also zu beweisen, daß 0,0099999 kleiner sei als eine Einheit der Ordnung — 2, oder kleiner als 0,01.

Man drücke 0,0099999 in Einheiten der siebenten Ordnung nach §. 14., und zwar, als eine ganze Zahl, indem man den Nenner der siebenten Ordnung als bloße Benennung betrachtet, so ist 0,0099999 = 99999 Zehnmilliontel. Man zähle hiezu 1 Zehnmilliontel, so erhält man 100000 Zehnmilliontel, oder 0,0100000, oder 0,01. Es ist also klar, daß man zu 0,0099999 noch etwas zulegen müsse, wenn es den Werth 0,01 erhalten soll, daß also alle diese Neunen zusammen weniger Werth haben, als 0,01.

Die Anzahl der Neunen hätte so groß sein können als man will, so ist doch klar, daß man dieselben Schlüsse hätte machen können. Noch vielmehr muß also der Satz seine Richtigkeit haben, wenn wir statt der Neunen kleinere Ziffern angesetzt hätten.

Es ist folglich ganz allgemein richtig, daß jede dekadische Einheit, sie sei von einer höhern, oder niedern Ordnung, oder von der Ordnung Null, größer ist als jede noch so große Menge von Ziffern, die nach der Stelle derselben auf der rechten Seite folgen können.

Dieser Beweis ist im Hefte nur mit Auswahl eines andern Beispiels auszuführen.

C. Vom Abkürzen der Decimalbrüche.

§. 18. Erklärung.

Wenn man von einem vielziffrigen Decimalbruch eine oder mehrere der niedrigsten Ziffern wegstreicht, so beträgt ihr Werth nach dem vorigen Paragraph weniger, als eine Einheit der niedrigsten Stelle, die man stehen läßt. Ist nun der Werth einer solchen Einheit eine unbedeutende Kleinigkeit, so ist noch vielmehr der Werth der weggestrichenen Ziffern unbedeutend. Wenn daher auch ein Decimalbruch in noch so vielen Ziffern gegeben ist, so kann man doch in den meisten damit zu machenden Rechnungen einen Theil der niedrigsten Ziffern ohne Nachtheil weglassen.

Dieses Wegstreichen entbehrlicher Bruchziffern wollen wir das Abkürzen der Decimalbrüche nennen.

Dieses Abkürzen ist ein Gegenstand, der große Aufmerksamkeit verdient, indem darin ein Mittel liegt, fast alle Arten von Rechnungen einfacher und kürzer zu machen, als es durch Anwendung aller der Vortheile möglich ist, die in der praktischen Rechenkunst gelehrt werden.

Wie weit man Decimalbrüche abkürzen dürfe, dieses hängt hauptsächlich von drei Umständen ab: 1) von der Größe der Haupteinheit, und 2) von dem Grad der Genauigkeit der bei der Abkürzung unmittelbar beabsichtigt wird, 3) von den Rechnungen, die mit einem abgekürzten Bruch vorgenommen werden sollen, und von dem Einfluß, den diese auf die Genauigkeit des letzten Ergebnisses haben. Für jetzt ist es hinreichend nur den ersten Umstand etwas genauer zu erörtern.

Wenn eine Geldsumme unter der Benennung Thaler durch Ganze, und eine Anzahl zehntheiliger Bruchziffern gegeben wäre, z. B. 23,593248, so kann man sich leicht überzeugen, daß man schon mit 2 Bruchziffern (23,59) ausreichen würde, wenn der Fehler kleiner sein soll als 1 Gr. Denn da 24 Gr. auf den Thaler gehen, so ist 0,01 Rthlr. kaum der vierte Theil eines Groschens. Setzt man aber noch eine dritte Bruchziffer hinzu (23,593), so ist der Fehler weit kleiner als 1 Pf., denn da auf den Thaler 288 Pf. gehen, so ist 0,001 Thlr. kaum der dritte Theil eines Pfennigs; aber $\frac{1}{3}$ Pf. ist etwas, was in wirklichem Gelde nicht einmal gezahlt werden kann; folglich der Fehler des Abkürzens ganz unerheblich. Behielte man aber auch noch die vierte Bruchziffer bei (23,5932), so würde der Fehler des Abkürzens kaum $\frac{1}{30}$ Pf. betragen. Man hat es also in seiner Gewalt den Fehler des Abkürzens so klein zu machen, als man es für gut findet, so daß also der eigentlichen Genauigkeit dadurch gar kein Eintrag geschieht. Es ist aber leicht einzusehen, daß man über jede andere benannte Haupteinheit ganz ähnliche Betrachtungen anstellen könne.

Es wird daher nicht schwer sein im Hefte folgende oder ähnliche vom Lehrer aufgegebenen Fragen richtig zu beantworten. Man schreibe sich eine beliebige Zahl mit etwa 7 Bruchziffern (als 3,5714323) auf, und überlege:

Wenn man dieser Zahl die Benennung Pfund giebt, wieweit darf man sie abkürzen, wenn der Fehler weniger als ein Loth, weniger als ein Quentchen, weniger als ein Achtel-Quentchen betragen sollte.

Man gebe der Zahl die Benennung einer Preußischen Meile (welche 2000 Ruthen, oder 24000 Fuß, oder 288000 Zoll enthält), und überlege, wie weit man die Zahl abkürzen dürfe, wenn der Fehler kleiner als eine Ruthe, kleiner als ein Fuß, kleiner als ein Zoll sein sollte.

Man gebe der Zahl die Benennung Jahr, und überlege wie weit man abkürzen könne, wenn der Fehler kleiner als ein Tag, kleiner als eine Stunde, kleiner als eine Minute, kleiner als eine Secunde sein soll;

u. dgl. m.

In Ansehung des zweiten und dritten Punktes, wovon es abhängig ist, wie weit man abkürzen dürfe, wird es genug sein, hier bloß folgendes zu bemerken.

Bei sehr vielen Rechnungen hat man nicht den Zweck, das Ergebniß derselben ganz genau zu erfahren, sondern nur ungefähr zu schätzen. Es versteht sich von selbst, daß man sich alsdann mit sehr wenigen Bruchziffern begnügen kann.

Was endlich den dritten Punkt betrifft, so wird in den folgenden Abschnitten bei jeder einzelnen Rechnungsart gezeigt werden, welchen Einfluß das Abkürzen der gegebenen Zahlen auf das Ergebniß der Rechnung habe. Hier mag ein einziges Beispiel zur Erläuterung dienen. Hätte man einen Decimalbruch mit der Benennung Thaler auf 3 Bruchstellen abgekürzt, so beträgt der unmittelbare Fehler, wie wir eben gesehen haben, kaum $\frac{1}{3}$ Pf., oder auf alle Fälle weniger als $\frac{1}{2}$ Pf. Sollte aber diese Zahl mit 54 multiplicirt werden, so würde sich auch der Fehler 54 mal vervielfältigen. Man könnte also jetzt nur sagen, daß er weniger betrage als 54 halbe, d. i. weniger als 27 ganze Pfennige. Ist ein solcher Fehler nach dem Zweck der Rechnung nicht zuläßig, so müßte man den gegebenen Bruch nicht auf 3, sondern auf mehr Stellen abkürzen. Nimmt man eine Ziffer mehr, so wird der Fehler 10 mal kleiner, nimmt man zwei Ziffern mehr, so wird er 100 mal kleiner. Man wird also leicht in jedem bestimmten Fall ausmitteln können, wie weit man im Abkürzen gehen müsse.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn man nach dem vorigen Paragraph bloß durch einfaches Wegstreichen der entbehrlichen Ziffern abkürzt, so beträgt der Fehler jederzeit weniger als eine ganze Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle.

Man kann aber das Abkürzen jederzeit so einrichten, daß der Fehler weniger beträgt als eine halbe Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle, wenn man folgende beiden Regeln beobachtet.

Beträgt das, was man wegläßt, weniger als fünf Einheiten der höchsten weggelassenen Stelle, so verrichtet man die Abkürzung, wie im vorigen Paragraph, ganz einfach durch bloßes Wegstreichen.

Beträgt aber das Weggestrichne mehr als fünf Einheiten der höchsten weggelassenen Stelle, so vermehre man die niedrigste beibehaltene Ziffer um 1. Dann ist zwar der abgekürzte Bruch etwas zu groß, aber der Fehler dennoch kleiner, als eine halbe Einheit der niedrigsten Stelle.

Beweis. Nach §. 6. und 11. ist jede dekadische Einheit so groß, als 10 Einheiten der nähstniedrigeren Ordnung. Folglich ist eine halbe Einheit jeder Ordnung so groß, als 5 Einheiten der nähstniedrigern Ordnung.

Ist also die höchste weggestrichene Ziffer kleiner als 5, so ist zwar der abgekürzte Bruch zu klein, oder der Fehler desselben ist kleiner als eine halbe Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle.

Ist aber die höchste weggelassene Ziffer größer als 5, oder ist sie gerade 5, aber es folgen noch andere geltende Ziffern nach ihr, so ist klar, daß das was man wegstreicht mehr sei, als eine halbe Einheit der niedrigsten beibehaltenen Ziffer. Vergrößert man aber diese Ziffer um 1, so ist das eben so viel, als legte man der Zahl 10 Einheiten der folgenden Stelle zu. Da aber die weggestrichenen Ziffern mehr als 5 Einheiten dieser Stelle betragen, so ist klar, daß zwar nun der abgekürzte Bruch etwas zu groß geworden ist, daß aber der Fehler wieder weniger als eine halbe Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle betrage.

Dieser Beweis, der hier bloß in allgemeinen Ausdrücken gegeben worden, soll im Hefte auf zwei bestimmte selbstgewählte Zahlen angewendet werden. Diese Zahlen können eine beliebige Anzahl von Ganzen mit 5 bis 6 Bruchziffern enthalten. Beide sollen auf 3 Bruchziffern abgekürzt werden. Die vierte Bruchziffer muß in der einen Zahl kleiner, in den andern größer als 5 sein. Alle übrigen Ziffern sind willkührlich. Man sieht leicht, daß die eine dieser Zahlen nach der ersten, die andere nach der zweiten Regel abgekürzt werden muß. Der Beweis, daß in beiden Fällen der durchs Abkürzen begangene Fehler kleiner ist, als 5 Einheiten der höchsten weggelassenen Stelle kann sehr anschaulich geführt werden, wenn man dem abgekürzten Bruch durch angehängte Nullen eben so viele Bruchstellen giebt, als die angenommene Zahl hatte, und dann durch Subtraction untersucht, um wieviel die abgekürzte Zahl von der angenommenen verschieden ist.

Anmerkungen.

1. Die zweite Regel findet Anwendung, wenn die höchste Ziffer, die man wegläßt, 5 ist, aber auf diese 5 noch andere geltende Ziffern folgen. Wollte man aber einen Decimalbruch auf drei Stellen abkürzen, der in der vierten auch eine 5 hätte, auf welche aber gar nichts, oder Nullen folgten (z. B. 3,784500000...), so fehlt man gerade um eine halbe Einheit der dritten Stelle, man mag die dritte Ziffer 4 ungeändert lassen, oder um 1 vergrößern. In diesem Fall ist eigentlich das zweckmäßigste nicht abzukürzen, weil man es auf diese Art mit einer völlig genauen Zahl zu thun hat.

2. Ist die niedrigste Ziffer die man beibehält 9, und soll diese nach der zweiten Regel um 1 vermehrt werden, so wird 10 aus 9, d. h. statt der Neun kommt eine Null, und die vorletzte Ziffer wird um 1 größer. Die Zahl 2,57968 auf 3 Bruchziffern abgekürzt, ist 2,580.

3. Obgleich §. 18. und 19. das Abkürzen nur auf Decimalbrüche beschränkt worden, so kann es doch mit demselben

Rechte auch auf ganze Zahlen angewendet werden. Denn wenn ich z. B. von der Zahl 317 die Einer und Zehner weglasse, und also bloß 300 behalte, so ist zwar 300 zu klein, aber der Fehler beträgt weniger, als eine halbe Einheit der 3. Eben so wenn ich 367 bis auf die höchste Ziffer abkürze, aber 4 statt 3 setze, so ist zwar 400 zu groß, aber der Fehler wieder kleiner, als eine halbe Einheit der höchsten Ziffer.

Im vierten Abschnitt wird sich Gelegenheit finden hievon Gebrauch zu machen.

D. Verwandlung der gemeinen Brüche in zehntheilige.

§. 20. Aufgabe.

Den Werth eines gemeinen Bruchs durch zehntheilige Brüche in einer vorgeschriebenen Anzahl von Bruchstellen auszudrücken, und zwar entweder, wenn es möglich ist, ganz genau, oder mit einem Fehler, der kleiner ist, als eine halbe Einheit der niedrigsten Stelle.

Obgleich die Auflösung dieser Aufgabe eine Division erfodert, wovon erst im vierten Abschnitt die Rede ist, so kann man doch derselben eine solche Wendung geben, daß man es dabei lediglich mit einer Division *ganzer* Zahlen zu thun hat, mit deren Regeln jeder aus den praktischen Rechenstunden bekannnt sein muß.

Auflösung. An die Ziffern des Zählers hängt man so viele Nullen, als man Bruchstellen haben will. Die so vergrößerte *ganze* Zahl dividirt man dann durch den Nenner auf die gewöhnliche Art. Endlich schneidet man von den ganzen Ziffern des Quotienten, so viele Bruchstellen ab, als man Nullen angehängt hat.

Ist bei der Division kein Rest geblieben, so ist der so gefundene Decimalbruch *genau* der Werth des gegebenen gemeinen Bruchs.

Ist aber ein Rest geblieben, so wird er ganz aus der Acht gelassen, wenn er kleiner ist als die Hälfte des Divisors. Ist er aber größer, so läßt man ihn zwar auch ganz aus der Acht, vergrößert aber die niedrigste Ziffer des Quotienten um 1. In beiden Fällen erhält man den Werth des gemeinen Bruchs, mit einem Fehler, der kleiner ist als eine halbe Einheit der niedrigsten Stelle.

Anwendung auf ein Beispiel. Gesetzt man sollte den Werth des gemeinen Bruchs $\frac{11}{239}$ so genau in Decimalbrüchen ausdrücken, als es in fünf Bruchstellen möglich ist, so hat man folgende Rechnung zu machen.

1100000 | 239
956 | 4602
1440
1434
600
478
122

$\frac{11}{239} = 0{,}04603$

An den Zähler 11 sind 5 Nullen angehängt, und dann ist die ganze Zahl 1100000 durch 239 dividirt worden. Der Quotient ist 4602 und es ist ein Rest 122 geblieben. Da dieser größer ist als die Hälfte von 239, so muß die letzte Ziffer 2 um 1 vergrößert werden. Und da 5 Nullen angehängt worden sind, so müssen im Quotient 5 Bruchstellen abgeschnitten werden. Dann ist der Werth von $\frac{11}{239}$ so genau als es in 5 Bruchstellen möglich ist $= 0{,}04603$. Und der Fehler, der durch die Abkürzung begangen worden, ist kleiner als eine halbe Einheit der fünften, oder als 5 Einheiten der sechsten Bruchstelle.

Im Hefte ist ein anderes selbstgewähltes Beispiel zu berechnen und dann der Beweis nach folgender Anleitung auszuarbeiten.

Beweis. Sollte der Werth von $\frac{1}{239}$ berechnet werden, so ist aus dem Begriff eines Bruchs (§. 7.) klar, daß nach dem zweihundert neun und dreißigsten Theil von 1 gefragt wird. Aber der Werth $\frac{11}{239}$ ist 11 mal so groß, als der Werth von $\frac{1}{239}$; und diesen wird man finden, wenn man den zweihundert neun und dreißigsten Theil, nicht von 1, sondern vor 11 sucht.

Dieser Werth soll aber in Decimalbrüchen bis zur fünften Stelle gefunden werden. Daher muß man den Werth des Zählers 11 nach §. 14. n. 3. in Einheiten der fünften Bruchstelle ausdrücken, welches durch Anhängung von 5 Nullen geschieht. Unser Zähler oder Dividendus ist also 1100000 Hunderttausendtel. Dieses (1100000) ist eine ganze Zahl, so fern man Hunderttausendtel nicht als einen Nenner, sondern nach §. 8. als eine bloße Benennung ihrer Einheit betrachtet. Von dieser Zahl findet man aber den zweihundert neun und dreißigsten Theil durch Division mit 239. Der vollständige Quotient ist zu Folge der obigen Rechnung $4602\frac{122}{239}$. Aber dieses sind nicht Ganze (Haupteinheiten), sondern, wie der Dividendus, Hunderttausendtel. Also ist auch der Bruch $\frac{122}{239}$ nicht ein Bruch der Haupteinheit, sondern einen Bruch von einem Hunderttausendtel. Da nun der Zähler dieses Bruchs größer ist, als die Hälfte des Nenners, so beträgt er mehr als ein halbes Hunderttausendtel. Ließe man also diesen Bruch weg, ohne 4602 um 1 zu vergrößern, so wäre der Fehler größer als ein halbes Hunderttausendtel; setzt man aber 4603, so setzt man nur $\frac{17}{239}$ zuviel, welches vielweniger als ein halbes Hunderttausendtel ist.

Soll nun endlich der Quotient nicht als Ganze (4603 Hunderttausendtel), sondern als ein Decimalbruch geschrieben werden, so muß die niedrigste Ziffer 3 in der 5ten Bruchstelle stehen (§. 16.). Man hat daher allerdings $\frac{11}{239} = 0{,}04603$. Dieser Werth ist zwar etwas größer als $\frac{11}{239}$, aber der Unterschied beträgt weniger als ein halbes Hunderttausendtel.

Wäre kein Rest geblieben, so ist klar, daß auch der Quotient ganz genau den zweihundert neun und dreißigsten Theil des Zählers vorgestellt hätte.

Dieser Beweis ist an dem Beispiel, welches jeder berechnet hat, mit den nöthigen Abänderungen zu wiederholen.

§. 21. Zusatz.

Es sollen hier noch einige Rechnungsvortheile, (hauptsächlich für das Übungsheft) erklärt werden, die man bei der Verwandlung gemeiner Brüche in zehntheilige anwenden kann.

a. Ein kleiner, aber in jedem Beispiel brauchbarer Vortheil besteht darin, daß sich die Form der Rechnung so abändern läßt, daß man dem Komma im Quotienten nicht erst am Ende der Rechnung, sondern gleich bei dem Anfang derselben seine richtige Stelle giebt. Wir wollen dieses an demselben Beispiel, das im vorigen Paragraph berechnet worden, erklären.

```
              |   239
  11,00000    | 0,04602
   9 56       |
   1 440      |
   1 434
      600
      478
      122
```

Nämlich man setzt vor der wirklichen Division ein Komma vor die angehängten Nullen, und dividirt dann, wie folgt, 239 in 11, nullmal: also setzt man im Quotient 0, und daneben ein Komma. Dann fährt man fort: 239 in 110 nullmal; also kommen 0 Zehntel in den Quotienten. Weiter sagt man: 239 in 1100, viermal; also kommen 4 Hundertel in den Quotienten die übrige Rechnung ist vollkommen wie vorher.

Daß diese ganze Rechnung Ziffer vor Ziffer mit der vorigen zusammenstimmt, und daß man auf diese Art gerade so viel Bruchziffern im Quotienten erhält, als man Nullen angehängt hat, fällt in die Augen.

b. Kein Fall kommt häufiger vor, als die Verwandlung solcher Brüche, deren Nenner kleiner als 13 ist. Bei solchen Brüchen ist die Rechnung äußerst leicht. Sollen z. B. $\frac{5}{7}$ in Decimalbrüche auf 6 Bruchstellen verwandelt werden, so zeigt die beistehende Rechnung welches die bequemste Form des Verfahrens sei.

```
   5,000000
7) 0,714286
```

In der letzten Stelle des Quotienten ist 6 statt 5 geschrieben, weil der letzte Rest 5 größer ist als der halbe Divisor 7. Wer übrigens nur etwas geübt im Rechnen ist, kann das Anhängen der Nullen, so wie die ganze Rechnung im Kopfe machen, und sogleich niederschreiben $\frac{5}{7} = 0,714286$.

Wer außer dem Vielfachen von 11 und 12, auch noch die von 15, 16 und 24 im Gedächtniß hat, kann mit Brüchen, welche diese Nenner haben, eben so rechnen.

c. Eben so leicht ist die Rechnung, wenn der Nenner des gegebenen Bruchs auf der linken Seite eine oder zwei geltende Ziffern hat, welche 12 nicht übersteigen, aber mit einer beliebigen Anzahl angehängter Nullen.

Gesetzt man solle $\frac{37}{1200}$ in zehntheilige Brüche verwandeln, so zerfälle man den Nenner in 100 mal 12, und dividire zuerst 37 durch 100, welches (§. 14. Zusatz) ohne Rechnung durch bloße Verrückung des Komma geschieht. Diese Division giebt 0,37.

$$\begin{array}{r} 0{,}37000 \\ \hline 12)\,0{,}03083 \end{array}$$

Soll nun der Decimalbruch 5 Bruchstellen erhalten, so hängt man noch 3 Nullen an, und dividirt 0,37000 durch 12.

Daß auch hier die ganze Rechnung im Kopfe gemacht werden könne, bedarf keiner besondern Anzeige.

d. Ist der Nenner eine zweiziffrige Zahl, aber größer als 12, so läßt sich doch die Rechnung sehr leicht machen, wenn sich der Nenner in zwei ganze Zahlen zerfällen läßt.

$$\begin{array}{r} 7{,}00000 \\ \hline 5)\,1{,}40000 \\ \hline 11)\,0{,}12727 \end{array}$$

Es sei $\frac{7}{55}$ in Decimalbrüche auf 5 Bruchstellen zu verwandeln, so zerfälle man 55 in 5 mal 11. Dividirt man dann zuerst 7 mit 5 angehängten Nullen durch 5, so erhält man 1,40000, und dieses ist der fünfte Theil von 7. Dividirt man dieses ferner durch 11, so ist der Quotient 0,12727. Man sieht aber leicht ein, daß wenn irgend etwas zuerst in 5 Theile, jedes Fünftel aber wieder in 11 Theile getheilt wird, das Ganze dadurch in 55 Theile getheilt sey. Folglich ist 0,12727 der Werth von $\frac{7}{55}$ so genau als sich sein Werth in 5 Bruchstellen ausdrücken läßt.

Allgemein betrachtet, ist es zwar einerlei, mit welchem Faktor man zuerst dividirt. Aber es ist in jedem Fall vortheilhaft mit dem zuerst zu dividiren, dessen Quotient sich am schnellsten finden laßt. Beobachtet man diese Ordnung so kann man meistens die ganze Rechnung im Kopfe machen. So ist im obigen Beispiel nichts leichter als die Division durch 5 im Kopfe zu machen. Hat man aber diese gemacht, so läßt sich auch die zweite Division im Kopfe machen. Es dient noch zur Erleichterung zu bemerken, daß es während der Rechnung gar nicht einmal nöthig ist, die bestimmte Anzahl von Nullen anzuhängen, sondern man hängt während der Rechnung eine Null nach der andern an, so wie es die Rechnung erfordert. Bei der Division von 7 durch 5 ist es genug zu sagen 5, in 7 einmal, und der Rest ist 2. Hängt man an diesen eine Null, so kann man weiter dividiren: 5 in 20 viermal, und es bleibt kein Rest, der Quotient ist also 1,4. Dieses 1,4 dividirt man dann durch 11 auf dieselbe Art.

e. Wenn an einem solchen zweiziffrigen Nenner Nullen hängen, so kann man die Rechnung auf ähnliche Art als bei (c) verrichten.

f. Es giebt auch viele Brüche, die sich durch eine bloße Multiplikation des Zählers und Nenners in Decimalbrüche verwandeln lassen. Dieses ist der Fall, wenn der Nenner eine Zahl ist, die in 10, oder 100, oder 1000 ꝛc. aufgeht. Ist z. B. der Nenner 5, so multiplicirt man Zähler und Nenner mit 2; ist er 20, so multiplicirt man mit 5; ist er 25, so multiplicirt man mit 4; ist er 50, so multiplicirt man mit 2; ist er 125 so multiplicirt man mit 8, u. s. f.

Alle Fälle die sich nicht nach den von (b) bis (f) erklärten Vortheilen berechnen lassen, müssen nach der bei (a) beschriebenen Form gerechnet werden.

g. Nach der bei (b) und (d) beschriebenen Art, lassen sich bei Zahlen welche mehrere Benennungen haben, die kleinern sehr leicht zuerst in gemeine, und dann in zehntheilige Brüche verwandeln. Wir setzen einige Beispiele her, die wohl keiner besondern Erläuterung bedürfen.

18 Gr. = $\frac{18}{24}$ Thlr. = $\frac{3}{4}$ Thlr. = 0,75 Thlr. (genau)
16 Gr. = $\frac{16}{24}$ Thlr. = $\frac{2}{3}$ Thlr. = 0,667 Thlr. (abgekürzt)
8 Gr. = $\frac{8}{24}$ Thlr. = $\frac{1}{3}$ Thlr. = 0,333 Thlr. (abgekürzt)
17 Gr. = $\frac{17}{24}$ Thlr. = 0,7083 Thlr. (abgekürzt)
u. dgl. m.

Kommen mehrere Benennungen vor, wie z. B. 13 Thlr. 9 Gr. 7 Pf., so verwandle man erst die Pfennige in Decimalbrüche des Groschens, auf zwei oder drei Stellen. Dann die Groschen durch Division mit 24 in Decimalbrüche des Thalers. Die bequemste Form zeigt die beistehende Rechnung. Zuerst sind 7 Pf. in $\frac{7}{12}$ Gr. und in 0,583.. Gr. verwandelt. Statt der 0 Ganzen sind in der zweiten Zeile die 9 Ganzen ge=

13 Thlr. 9 Gr. 7 Pf.
13 Thlr. 9,583 Gr.
13,3995 Thlr.

setzt. Dann sind 9,583 Gr. mit 24 dividirt worden. Der Quotient ist in vier Ziffern 0,3995.., wo nur statt der 0 Ganzen, in der dritten Zeile 13 Ganze gesetzt sind.

Anmerkung. Es ist schon im Paragraphen bemerkt worden, daß der Inhalt desselben mehr bestimmt ist, Stoff zu Rechnungen im Übungshefte, als zu Arbeiten im Haupthefte zu geben. Doch muß in diesem jeder einzelne Vortheil kurz angezeigt, und durch ein Beispiel erläutert werden. Zuletzt ist im Haupthefte noch folgende Arbeit zu machen, die auf den ersten Blick weitläuftiger aussieht, als sie wirklich ist. Es sollen nämlich in Form einer Tabelle alle Brüche, deren Nenner kleiner als 13 ist, in Decimalbrüche auf sieben Bruchstellen verwandelt werden. Diese Arbeit ist durchgängig leicht, weil sie ganz auf die oben bei b) beschriebene Art, durch bloße Kopfrechnung ausgeführt werden kann. Es ist aber auch die Arbeit von mäßigem Umfang, denn von manchen Nennern sind nur wenige Brüche zu berechnen, z. B. von den Zwölfteln, nur $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{12}$ und $\frac{11}{12}$, weil alle, welche dazwischen fehlen, schon früher unter kleineren Benennungen vorgekommen sind. Läßt man aber alle solche schon früher da gewesenen Brüche weg, so bleiben von $\frac{1}{2}$ an bis $\frac{11}{12}$ im Ganzen funfzig Brüche zu berechnen, unter welchen aber mehrere sind, deren Verwandlung in Decimalbrüche so gut als gar keine Rechnung ist. Dieses ist z. B. der Fall bei den Zehnteln, auch bei den Neunteln. Kurz, wer die Arbeit ernstlich angreift, wird finden, daß zu ihrer Ausführung kaum eine halbe Stunde nöthig ist.

Im Übungshefte sind gelegentlich recht viele Exempel aller Art zu rechnen. Durch Übung kommt man bald dahin, solche Verwandlungen leicht und schnell zu machen.

§. 22. Zusatz und Erklärung.

In der bei dem vorigen Paragraphen berechneten Tabelle, bestehen einige Brüche (z. B. die Drittel und Neuntel) aus lauter gleichen Ziffern. Bei den Elfteln kehren immer 2 Ziffern wieder. Bei den Siebenteln wird man leicht bemerken, daß, wenn man die Rechnung auf mehr als sechs Stellen fortsetzt, die 6 ersten Ziffern immer wiederkehren.

Dergleichen zurückkehrende Ziffern nennt man Perioden, und man nennt sie ein-, zwei-, drei- rc. ziffrig, nach der Anzahl der wiederkehrenden Ziffern. Eigentlich erhält jeder gemeine Bruch, der sich nicht genau durch zehntheilige Brüche ausdrücken läßt, dergleichen Perioden, nur fangen sie bei einigen nicht gleich mit der ersten Ziffer an.

Welche Brüche der vorigen Tabelle haben Perioden, und wievielziffrig ist jede? Bei welchen Brüchen fängt sich die Periode nicht in der ersten Stelle an?

Anmerkung. Der Anhang zum fünften Abschnitt enthält eine sehr vollständige und genaue Theorie von den Perioden der Decimalbrüche.

E. Übersicht der vornehmsten in der Arithmetik gebräuchlichen Zeichen.

§. 23. Erklärung.

Die sichtbaren Zeichen, deren man sich in der Arithmetik bedient, sind entweder Größen-Zeichen, oder Rechnungs-Zeichen, oder allgemeine Beziehungs-Zeichen.

Größen-Zeichen. Zu jeder Rechnung müssen gewisse Größen gegeben sein. Die Zeichen, wodurch man dieselben vorstellt, sind entweder bestimmte, oder unbestimmte. Bestimmte Zeichen sind Ziffern und Zahlen, wodurch jederzeit der Werth oder das Maaß einer Größe bestimmt angegeben wird. Als unbestimmte Größen-Zeichen braucht man die kleinen oder großen Buchstaben des lateinischen, auch wohl des griechischen Alphabets. Sie werden gebraucht, wenn man allgemein eine Regel, für eine gewisse Art von Rechnungen, nicht für ein einzelnes bestimmtes Exempel, ausdrücken will. Aber die Buchstaben haben für sich keine bestimmte Bedeutung, daher muß in jedem Fall ausdrücklich angezeigt werden, welche Art von Größen jeder Buchstabe bedeuten soll.

So wie man in Worten von einer zu machenden Rechnung bestimmt und unbestimmt reden kann, eben so in sichtbaren Zeichen. Wer z. B. sagt, zu einer gewissen Rechnung sei erfoderlich, daß die Zahlen 9 und 11 addirt ihre Summe aber durch 4 dividirt werde, der spricht bestimmt, und nur von einem einzelnen Exempel. Wer aber sagt, bei einem gewissen Rechnungsfall sind drei Zahlen gegeben, von welchen die erste und zweite addirt, die Summe derselben aber durch die dritte dividirt werden muß, der drückt sich unbestimmt aus, und redet nicht von einem einzelnen Exempel, sondern von einer Regel, nach welcher alle Exempel derselben Art zu rechnen sind. Anstatt der unbestimmten Ausdrücke, erste, zweite, dritte Zahl, ist es aber vortheilhaft, Buchstaben als unbestimmte Größenzeichen zu brauchen, und dieselbe Regel so auszusprechen: Es sind drei Zahlen, a, b und c gegeben, a und b sollen addirt und ihre Summe durch c dividirt werden.

Da die Zahlen als bestimmte Größenzeichen aus der praktischen Rechenkunst hinlänglich bekannt sind, so soll in dem Hefte nur der Begriff unbestimmter Größenzeichen auf ähnliche Art als hier erläutert werden. Zu dem Ende denke sich jeder eine ganz willkührliche Rechnung aus, die mit drei oder vier Zahlen gemacht werden soll, und drücke die Regel der Rechnung erst in unbestimmten Worten, dann auch in unbestimmten Größenzeichen aus.

§. 24. Erklärung.

Rechnungs-Zeichen. Wir beschränken uns hier auf die Zeichen, wodurch man andeutet, daß mit gegebenen Größen eine oder die andere der vier bekannten einfachen Rechnungsarten vorgenommen werden soll.

Die Addition und Subtraktion der Größen deutet man durch die Zeichen + (Plus) und — (Minus) an, und zwar auf folgende Art. Vor jeden Posten setzt man eines der beiden Zeichen. Sollen nun zwei Größen addirt werden, so setzt man vor beide einerlei Zeichen, es sei + oder —. Soll hingegen eine Größe von einer andern subtrahirt werden, so setzt man gewöhnlich vor den Minuendus +, vor den Subtrahendus —, doch ist es nicht unrichtig, auch vor den Minuendus — und vor dem Subtrahendus + zu setzen. Kurz Minuendus und Subtrahendus müssen verschiedene Zeichen haben. Der Kürze wegen läßt man vor der ersten Größe gewöhnlich das Zeichen + weg.

Diese Bezeichnung ist hier nur auf zwei Größen anzuwenden, denn wie die Zeichen zu brauchen sind, wenn mehr als zwei Größen addirt oder subtrahirt werden sollen, kann erst bei der Lehre von diesen Rechnungsarten deutlich gemacht werden.

Wenn z. B. zwei Größen a und b addirt werden sollen, so kann man dieses durch $+ a + b$, oder $a + b$, desgleichen durch $- a - b$ andeuten. Soll von einer Zahl m eine andere n subtrahirt werden, so schreibt man $+ m - n$ oder $m - n$, desgleichen auch $- m + n$.

Im Hefte ist eine ähnliche Erläuterung diesem Paragraphen beizufügen, nur sollen nicht unbestimmte Größenzeichen, sondern bestimmte Zahlen gebraucht werden. Bei der Addition soll die Summe wirklich berechnet, und vor dieselbe eben das Zeichen gesetzt werden, welches vor den Posten stand, damit man auch an der Summe sehen könne, welches Zeichen gebraucht worden. Eben so soll bei der Subtraktion der Unterschied der Zahlen wirklich berechnet werden, und dieser soll dasjenige Zeichen erhalten, welches die größere der beiden gegebenen Zahlen hatte.

Bei der Addition sind nur zwei Beispiele anzuführen, bei der Subtraktion aber vier. In den beiden erstern soll die erste Zahl, in den beiden letztern die zweite Zahl die größere sein. Denn bei dieser Bezeichnungsart ist es nicht nothwendig, daß der Minuendus vorangehe.

§. 25. Erklärung.

Für die Multiplication sind drei Bezeichnungsarten zu merken.

Wenn bestimmte Zahlen multiplicirt werden sollen, so setzt man zwischen sie einen Punkt (.) oder ein schiefes Kreuz (×). Bei unbestimmten Größenzeichen aber deutet man die Multiplication dadurch an, daß man die Buchstaben ohne Zeichen nebeneinander setzt. Ausgesprochen wird jede dieser Bezeichnungen durch die Sylbe mal.

Wenn 5 mit 9 multiplicirt werden soll, so schreibt man 5 . 9 oder 5 × 9, und liest es 5 mal 9. Wenn aber die unbestimmte Zahl p mit der unbestimmten q multiplicirt werden soll, so schreibt man pq und liest es p mal q.

Im Hefte ist dieselbe Erläuterung, nur mit andern Zahlen und Buchstaben aufzusetzen. Bei den Zahlen aber ist noch das wirkliche Produkt beizufügen.

Anmerkungen.

1. Bei Zahlen ist die letzte Bezeichnungsart nicht anwendbar, weil das bloße Nebeneinandersetzen von Ziffern im Grunde immer eine Addition anzeigt. Doch werden wir in der Folge (§. 27.) sehen, daß es in manchen Fällen auch bei Zahlen anwendbar ist.

2. Wenn Zahlen und Buchstaben in einem Produkt zusammen kommen, so setzt man die Zahlen allezeit voran, und nennt sie Coëfficienten, z. B. 7aab; $\frac{1}{3}$ac; u. dgl. m.

§ 26. Erklärung.

Für die Division hat man zwei Zeichen. Entweder verbindet man den Dividendus und Divisor durch einen Bruchstrich, wobei der Dividendus allezeit über dem Strich stehen muß. Oder man setzt ein Kolon zwischen beide, wobei aber einige den Dividendus andere den Divisor voransetzen; weswegen, wenn man dieses Zeichen braucht, ausdrücklich gesagt, oder anderweitig bekannt sein muß, welche Größe der Dividendus sei. Man liest das Divisionszeichen vermittelst der Präposition durch, wenn man den Dividendus zuerst ausspricht; vermittelst der Präposition in aber, wenn man den Divisor zuerst ausspricht.

Wenn a ein Dividendus, b ein Divisor ist, so wird der Quotient durch $\frac{a}{b}$ vorgestellt, und man liest dieses, a durch b, oder b in a. Eben der Quotient kann auch durch $a : b$ oder $b : a$ vorgestellt werden, wenn man ausdrücklich bemerkt, daß a der Dividendus sei.

In dem Hefte ist diese Erläuterung in bestimmten Zahlen zu geben. Auch können die Zahlen so gewählt werden, daß der Quotient eine ganze Zahl wird, und sich also bestimmt angeben läßt.

Anmerkungen.

1. Daß Bruch und Quotient einerlei Bezeichnung haben, kann (wie sich in der Folge zeigen wird) keine Irrung veranlassen, weil Bruch und Quotient keine wesentlich verschiedene Dinge sind.
2. Die erste Bezeichnung der Division ist um ihrer Unzweideutigkeit willen der andern vorzuziehen; obgleich bisweilen

Fälle vorkommen, wo es bequem ist auch die anderen zu brauchen.

§. 27. Erklärung.

Allgemeine Beziehungszeichen. Unter dieser Benennung verstehen wir solche Zeichen, welche weder Größen noch Rechnungen, sondern nur gewisse Beziehungen der Größen auf einander andeuten. Es gehören dahin:

a. Die Zeichen, wodurch man die **Gleichheit** oder **Ungleichheit** zweier Größen andeutet. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$; das Zeichen der Ungleichheit $<$ oder $>$, wo die Spitze des Winkels immer gegen die kleinere Größe gerichtet sein muß.

b. Wenn zwei oder mehrere mit $+$ und $-$ nebeneinander gestellte Größen als eine einzige betrachtet werden sollen, so schließt man sie entweder in **Klammern** ein, oder man macht einen **zusammenhängenden Strich** über sie.

Will man also andeuten,

a. daß die Summe zweier Zahlen a und b die Zahl c sei, so schreibt man $a + b = c$. Soll $a + b$ kleiner als eine Zahl d gedacht werden, so schreibt man $a + b < d$; soll es größer als e angenommen werden, so ist $a + b > e$.

b. Soll die Summe zweier Zahlen $a + b$ mit einer dritten multiplicirt werden, so schreibt man $(a + b)\,c$, oder $\overline{a + b}\,.\,c$.

Im Hefte ist a) und b) durch bestimmte Zahlen zu erläutern.

Anmerkungen.

1. Wenn ein Dividendus oder ein Divisor aus zwei oder mehreren Stücken besteht, so muß er als eine einzige Größe betrachtet werden, aber es ist dennoch nicht nöthig, ihn in

Klammern einzuschließen, weil beide durch den Divisionsstrich selbst schon hinlänglich abgesondert sind, z. B.

$$\frac{9+5}{9-7} = 7.$$

2. Wenn Zahlen in Klammern eingeschlossen sind, so kann man auch durch bloßes Danebensetzen eines Factors eine Multiplikation der ganzen eingeklammerten Größe andeuten: z. B. $3(7 - 2) = 15$.

§. 28. Erklärung.

Der Zweck aller dieser Zeichen ist, Regeln zusammengesetzter Rechnungen, d. h. solcher, bei welchen mehr als eine einfache Rechnung anzuwenden ist, durch sichtbare Zeichen kürzer und deutlicher, als es durch Worte möglich ist, auszudrücken.

Eine solche Zusammensetzung von Größenzeichen, Rechnungszeichen, und allgemeinen Beziehungs-Zeichen nennt man eine Formel.

Enthält sie keine andere Größenzeichen als Zahlen, so heißt sie eine Zahlen-Formel.

Enthält sie aber bloß Buchstaben, oder Buchstaben und Zahlen, so heißt sie eine Buchstaben-Formel.

Die einzelnen Zahlen, oder Buchstaben, aus welchen eine Formel zusammengesetzt ist, wollen wir Bestandtheile derselben nennen.

Um den Begriff einer Formel recht anschaulich zu machen, drücke man irgend eine willkührlich ersonnene Regel für eine zusammengesetzte Rechnung erst in Worten aus, dann versuche man sie in Zeichen zu übersetzen etwa nach folgendem Muster:

Es sind vier Zahlen 2, 7, 8, 9 gegeben; man soll 1) ein Produkt der ersten, zweiten und dritten, 2) der ersten, dritten und vierten bilden; es soll 3) die zweite erst mit sich selbst, dann mit der Summe der dritten und vierten multiplicirt, und das Produkt durch die vierte dividirt werden: die Stücke Nr. 1. und 2. sollen addirt, und Nr. 3. subtrahirt werden. Diese Regeln lassen sich nun durch folgende Zahlen-Formel darstellen:

$$2 \,.\, 7 \,.\, 8 + 2 \,.\, 8 \,.\, 9 - \frac{7 \,.\, 7\,(8+9)}{9}.$$

Man setze ferner statt der zweiten, dritten und vierten Zahl die unbestimmten Zeichen a, b, c, behalte aber die erste als Zahl bei, so erhält man folgende Buchstaben-Formel:

$$2ab + 2bc - \frac{aa\,(b+c)}{c}.$$

Die Zahlen-Formel enthält unmittelbar nur die Regel für ein einziges bestimmtes Exempel. In der Buchstaben-Formel aber kann man für a, b, c, welche Zahlen man will, setzen.

Es fällt in die Augen, daß der Ausdruck einer Regel durch eine Formel, kürzer, bestimmter und deutlicher ist, als der Ausdruck durch Worte.

In dem Hefte hat jeder eine ähnliche Rechnung zu erdenken, und diese dann durch eine Zahlen- und Buchstaben-Formel vorzustellen.

Anhang zum ersten Abschnitt.

Vorerinnerung. Wie in dem ersten Theile dieses Lehrbuchs, so finden sich auch in diesem zweiten Theile bei mehreren Abschnitten Anhänge, die nicht eigentlich zum Vortrag in der Klasse, sondern zum eigenen Studium denen bestimmt sind, welche in der Mathematik über die Grenzen dessen hinauszugehen wünschen, was in den Lehrstunden vorgetragen werden kann.

Von andern als zehntheiligen Zahlensystemen.

§. 1.

Offenbar haben unsere zehn Finger zu der zehntheiligen Zählungsart Veranlassung gegeben, auf welche sich die Zahlwörter fast in allen Sprachen, und gegenwärtig bei allen gebildeten Nationen auch die Ziffern beziehen.

Indessen giebt es nach den Berichten neuerer Reisenden im Innern von Afrika viele Völker, die nur bei den fünf Fingern einer Hand stehen geblieben sind, also nicht wie wir zehntheilig, sondern fünftheilig zählen. Nämlich sie zählen mit eigenen Zahlwörtern nur Null, Eins, Zwei, Drei und Vier. Fünf ist ihnen aber schon die erste höhere Einheit, (so wie bei uns Zehn), und sie sollen dieselbe in ihrer Sprache gewöhnlich Hand nennen. Dann zählen sie weiter: Hand und 1, und 2, und 3., und 4. Dann folgen zwei Hände; (d. i. nach unserer Sprache und Zählungsart zehn). Weiter zwei Hände und 1, und 2, und 3, und 4; dann folgen drei Hände (unsere 15). Ferner drei Hände und 1, und 2, und 3, und 4; dann vier Hände (unsere 20). Weiter vier Hände und 1, und 2, und 3, und 4. Dann folgen fünf Hände (unsere 25) welches bei ihnen schon eine Einheit der zweiten höheren Ordnung ist, (wie bei uns Hundert).

Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Art so weit, als man will, fortzählen könnte, wenn man außer den Zahlwörtern Null, Eins, Zwei, Drei, Vier, noch besondere Zahlwörter für alle höheren Einheiten hätte. Wenn man den Werth dieser fünftheiligen höheren Einheiten in unsern Ziffern ausdrückt, so würden besondere Zahlwörter nöthig sein für 5, 25, 125, 625, 3125 u. s. f., welches nach der Reihe die höheren Einheiten eines fünftheiligen Zahlensystems sind.

Um die Zahlen in diesem System mit Ziffern zu schreiben, würde man nur die fünf Figuren 0, 1, 2, 3, 4 brauchen. Dann würde die natürliche Zahlenreihe folgendermaßen zu schreiben sein: 0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44, 100, ꝛc. Die letzte dieser Zahlen ist nach unserm System 25.

§. 2.

Daß man statt Zehn und Fünf auch jede andere Zahl zur Grundzahl eines Zahlensystems machen könnte, ist leicht einzusehen; desgleichen, daß man in jedem gerade so viel Ziffern brauchen würde, als die Grundzahl Einheiten hat.

Man benennt die verschiedenen möglichen Zählungsarten, nach der Grundzahl, mit folgenden Wörtern griechischen Ursprungs. Grundzahl 2, Dyadik; Grundzahl 3, Triadik; Grundzahl 4, Tetradik; Grundzahl 5, Pentadik u. s. f. Unsere Zählungsart heißt also Dekadik.

§. 3.

Das einfachste aller möglichen Zahlensysteme würde die Dyadik sein. In dieser würden die höheren Einheiten folgende Werthe haben: die erste 2, die zweite 4, die dritte 8, die vierte 16, die fünfte 32, u. s. w. Für diese müßte man eigenthümliche Zahlwörter haben, außerdem aber keine weiter als Null und Eins.

Um in diesem System Zahlen zu schreiben, wären also nur zwei Ziffern 0 und 1 erfoderlich. Denn alle Einheiten höherer Ordnungen würden wie bei uns durch 1 in einer höhern Stelle vorgestellt. In diesem System wäre also die Haupteinheit wie bei uns 1; die erste höhere (also 2) wäre 10; die zweite höhere (also 4) 100; die dritte höhere (also 8) 1000; die vierte (also 16) 10000; u. s. f. Die natürliche Zahlenreihe bis 16 würde also auf folgende Art geschrieben werden: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000.

§. 4.

Es ist nicht schwer Zahlen aus einem System in das andere zu übersetzen, wenn man nur den Werth aller höheren Einheiten des Systems beachtet.

Fragte man z. B. was der Werth der dyadischen Zahl 10100111, nach unserer Zählungsart sei, so ist die erste linker Hand, oder

10 000 000	eine Einheit der 7ten Ordnung, also	128
100 000	= = = 5ten = =	32
100	= = = 2ten = =	4
10	= = = 1ten = =	2
1	= = = 0ten = =	1
10 100 111	ist also gleich	167

§. 5.

Auch umgekehrt ist es nicht schwer, eine dekadische Zahl in ein anderes System zu übersetzen.

Wollte man z. B. den Werth von 98 dyadisch ausdrücken, so ist die höhste dyadische Einheit die in 98 enthalten ist 64. Zieht man diese von 98 ab, so bleibt 34. Die höhste hierin enthaltene dyadische Einheit ist 32. Zieht man diese von 34 ab, so bleibt 2, welches die erste höhere Einheit in dem dyadischen System ist. Da man nun aus dem Vorhergehenden weiß, wie jede dieser dyadischen Einheiten geschrieben werde, so ist es leicht die ganze Zahl 98 dyadisch zu schreiben. Es ist nämlich:

$$\begin{array}{r} 98 \\ \underline{64} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 2 \end{array}$$

64	die	6te	höhere Einheit,	also	1 000 000
32	=	5te	=	= =	100 000
2	=	1te	=	= =	10
98			ist also gleich		1 100 010

§. 6.

Durch Ziffern läßt sich also jedes System viel leichter mit dem unsrigen vergleichen, als durch Worte, weil wir für die höheren Einheiten jedes andern Systems keine eigenthümlichen Zahlwörter haben. Besonders hat die Vergleichung durch Ziffern keine Schwierigkeit, wenn die Grundzahl des Systems kleiner als Zehn ist: denn alsdann können wir unsere Ziffern 0, 1, 2, 3 ꝛc. bis zur nähsten unter der Grundzahl brauchen. Ist hingegen die Grundzahl größer als Zehn, so sind auch mehr als zehn Figuren nöthig. Man müßte also so viele neue Ziffern erst ersinnen, als über Zehn nöthig sind. Wollte man z. B. ein zwölftheiliges Zahlensystem (Dodekadik) entwerfen, so müßte man zu unsern zehn Figuren, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 noch zwei hinzufügen, z. B. ⌋ und +, wovon das erste Zehn, das andere Elf bedeuten müßte. Dann würde man auf ähnliche Art, als oben §. 4. und 5., Zahlen aus dem dodekadischen Systeme in das dekadische, und umgekehrt übersetzen können. Der Werth der höhern Einheiten in einem zwölftheiligen System würde sein: die erste 12; die zweite 144; die dritte 1728; die vierte 20736, u. s. f. Wenn man aber solche dodekadische Zahlen aussprechen wollte, so müßte man ganz neue Zahlwörter für alle höhern Einheiten machen.

§. 7.

Man hat die Frage aufgeworfen: ob wohl unsere zehntheilige Zählungsart die beste sei, welche die Menschen hätten wählen können. Es ist eben nicht schwer einzusehen, daß eine zwölftheilige manche Vorzüge haben würde. Denn die Grundzahl 10 läßt sich nur durch 2 und 5 ohne Rest theilen, und die höheren Einheiten, außer diesen beiden Zahlen, nur noch durch Produkte derselben. Die Grundzahl Zwölfe hingegen ist selbst durch 2, 3, 4 und 6 theilbar, und die höheren Einheiten, (144, 1728 ꝛc.) haben eine noch viel größere Anzahl von Divisoren, mit welchen sie aufgehen. Obgleich dieses manche Vortheile haben würde, so kann es doch keinem nur irgend besonnenen Menschen einfallen, diese zwölftheilige Zählungsart einführen zu wollen, weil keine menschliche Macht vermögend ist, selbst nicht in tausend Jahren, die zehntheilige Zählungsart in den Köpfen aller Menschen zu vertilgen, und weil die Verwirrung, welche nothwendig aus der Einführung einer neuen Zählungsart entstehen würde, ein ohne allen Vergleich größeres Übel ist, als die Fortdauer der zehntheiligen Zählungsart, die gar nicht an sich schlecht oder fehlerhaft, sondern nur in unerheblichen Rücksichten unvollkommner als die zwölftheilige ist.

Zweiter Abschnitt.

Von der Addition und Subtraktion im Allgemeinen, und besonders mit zehntheiligen Brüchen.

A. Allgemeine Sätze von der Addition.

§. 1. Erklärung.

Zwei oder mehr Zahlen addiren, heißt, sie in eine einzige Zahl vereinigen.

Die Zahlen welche addirt werden, nennt man Posten oder Summanden. Was durch die Addition herauskommt, heißt die Summe, bisweilen auch Aggregat.

Die Bezeichnung der Addition ist schon I. 24. erklärt, und hier zu wiederholen.

Diese Kunstwörter und Zeichen sind im Hefte durch bestimmte Zahlen-Beispiele zu erläutern.

§. 2. Zusatz.

Wenn Zahlen addirt werden sollen, so müssen sie nicht bloß gleichartige Größen vorstellen, sondern auch völlig gleiche Einheiten haben. Die Summe ist aber jederzeit eine mit den Summanden gleichartige Größe, und hat dieselbe Einheit.

Bei diesem Paragraphen sind im Hefte folgende Fragen zu beantworten:

a. Ist es möglich zwei ungleichartige Größen wirklich zu einer einzigen Größe zu verbinden, d. h. zu addiren?

b. Können zwei Zahlen addirt werden, wenn sie zwar gleichartige Größen, aber nicht in einerlei Einheit ausgedrückt vorstellen?

c. Ist zu der Gleichheit der Einheiten, eine vollkommene Gleichheit aller einzelnen gezählten Dinge erfoderlich? Die Frage beantwortet sich aus I. 2.

d. Endlich soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß, wenn zwei Zahlen, die gleiche Einheiten haben, addirt werden, die Summe eine gleichartige Größe sei, und dieselben Einheiten habe.

Es ist nicht nur hinreichend, sondern zweckmäßig zu allen Beispielen nur kleine Zahlen zu wählen.

§. 3. Zusatz.

Da in dem Begriff einer Summe nichts weiter gedacht wird, als daß sie der vereinigte Inbegriff aller Posten sei, so ist klar, daß man a) jede Anzahl von Posten in beliebiger Ordnung addiren könne; b) daß man sie auch beliebig zerstückeln, und die Stücke in beliebiger Ordnung addiren könne.

In Zeichen läßt sich dieser Satz bequem auf folgende Art ausdrücken. Wenn A, B und C drei zu addirende Posten sind, so ist es einerlei in welcher Ordnung man sie addirt. Es ist daher:

$$A + B + C = A + C + B = B + A + C = B + C + A = C + A + B = C + B + A.$$

Oder wenn zwei Posten A und B gegeben, jeder aber in mehrere Stücke zerlegt wäre; z. B. A in a, b und c; B in d und e, so erhält man die richtige Summe A + B, wenn man die Stücke in jeder beliebigen Ordnung addirt. Es ist also:

$$A + B = a + b + c + d + e = a + e + c + d + b = \text{rc.}$$

Im Hefte ist sowohl a) als b) durch bestimmte Zahlen zu erläutern. Dann ist auch, was in den beiden letzten Absätzen des Paragraphen in allgemeinen Zeichen ausgedrückt ist, an bestimmten Zahlen-Beispielen deutlich zu machen.

Anmerkung. Beispiele, durch welche sich der Sinn dieser Formeln gleichsam handgreiflich machen läßt, sind leicht zu erdenken. Man stelle sich z. B. unter a, b, c rc. Geldstücke von verschiedenem Werthe in zwei Beutel A und B vertheilt vor. Wenn man sie herausnimmt, und einzeln in einen Beutel füllt, so kommt in diesen offenbar gleichviel, in welcher Ordnung man sie auch hineinthun mag.

B. Von der Addition zehntheiliger ganzer und gebrochener Zahlen.

§. 4. Zusatz.

Bei jeder Rechnungsart mit unsern zehntheiligen Ziffern, wird zum fertigen Rechnen erfodert, daß man einen gewissen nicht sehr großen Umfang von kleinen

Rechnungen dieser Art, nicht nur so mit dem Verstande begriffen habe, daß man das, was die Rechnungsart fodert, finden könne; sondern man muß sie so im Gedächtniß haben, daß man die Antwort, ohne erst nachzurechnen, geben kann.

Bei der Addition muß man die Summe jeder zwei einziffrigen Zahlen so im Gedächtniß haben, daß man sie in jedem Fall ohne erst nachzuzählen, angeben könne.

Im Hefte soll bei diesem Paragraphen gezeigt werden, wie Jemand der noch weiter gar nichts als zählen, d. h. zu jeder Zahl noch Eins hinzufügen könnte, alle diese Summen leicht würde finden können.

Diese Summen lassen sich am bequemsten in Form einer Tabelle, welche die Gestalt eines Vierecks hat, aufschreiben. Man schreibt nämlich in einer Reihe alle einziffrigen Zahlen von 0 bis 9. Dann zählt man zu jeder dieser Zahlen 1 hinzu, und schreibt die Summen unter die vorige Reihe. Ferner bildet man eine dritte Reihe dadurch, daß man zu jeder Zahl der zweiten Reihe 1 hinzuthut; eine vierte Reihe dadurch, daß man zu jeder Zahl der dritten 1 hinzuthut; und so ferner, bis man zehn Reihen hat, deren letzte sich, wie leicht einzusehn, mit 9 anfangen wird.

Eine solche Tabelle ist im Hefte reinlich und deutlich aufzuschreiben, so daß nicht nur jede einzelne Reihe recht gerade sei, sondern daß besonders auch alle unter einander gehörigen Zahlen recht gerade unter einander gesetzt werden.

Endlich soll gezeigt werden, wie man in dieser Tabelle jede Summe zweier gegebenen einziffrigen Zahlen aufsuchen müsse.

Anmerkungen. Der Zweck dieses Paragraphen ist nicht, daß der Schüler erst addiren lernen solle. Vielmehr wird vorausgesetzt, daß er es schon könne, weil er sonst gewiß bei diesem und allen übrigen Paragraphen sehr schlechte Arbeiten machen würde. Der Zweck ist vielmehr hier, den ersten Grund zu einer deutlichen wissenschaftlichen Erkenntniß der Rechnungsarten zu legen, welche erfodert, daß man besonders die allerersten und einfachsten Begriffe und Rechnungsarten recht deutlich auffasse.

§. 5. Zusatz.

Wie addirt man am vortheilhaftesten a) eine zweiziffrige, und eine einziffrige Zahl, b) eine ganze Reihe von einziffrigen Zahlen?

a. Die vortheilhafteste Art, eine zweiziffrige und einziffrige Zahl zu addiren, besteht nicht darin, daß man zu der zweiziffrigen die Einheiten der einziffrigen hinzuzählt: sondern man muß bloß die Einer der zweiziffrigen Zahl, mit der andern einziffrigen nach §. 4. addiren. Ist die Summe selbst einziffrig so sind die ungeänderten Zehner der andern Zahl beizufügen. Ist sie aber zweiziffrig, so nehmen die Zehner der zweiziffrigen Zahl um 1 zu.

Beide Arten zu rechnen sollen im Hefte auf bestimmte Zahlen angewendet, und der Vorzug der letzteren Art gezeigt werden.

b. Soll eine ganze Reihe einziffriger Zahlen addirt werden, so hat man nichts zu thun, als die bei a) gegebenen Regeln wiederholt anzuwenden. Es ist zu zeigen, wie?

Außerdem sind hier noch ein Paar Fragen zu beantworten:

c. Müssen die einziffrigen Zahlen die man nach b) addirt nothwendig Haupteinheiten sein, oder können es auch Einheiten einer und derselben beliebigen höhern, oder niedrigern Ordnung sein?

Auch dieses ist durch Beispiele zu erläutern.

d. Können zwei Ziffern addirt werden, wenn ihre Einheiten von verschiedenen Ordnungen sind?

Auch hier sind Beispiele nöthig.

§. 6. Aufgabe.

Eine beliebige Menge mehrziffriger Zahlen mit Decimalbrüchen zu addiren.

Anleitung zur schriftlichen Ausarbeitung. Die Rechnung geschieht im Wesentlichen völlig wie bei ganzen Zahlen, doch ist in Ansehung der zehntheiligen Brüche einiges Eigenthümliche zu bemerken.

Ist die Anzahl der Bruchziffern in den Posten ungleich, so thut man wohl, sie durch angehängte Nullen gleich zu machen, weil man sonst bei dem Aufsatze leicht gegen §. 2. verstoßen kann.

Bei der Rechnung selbst ist zu bemerken, daß man gerade so rechnen muß, als ob kein Komma da wäre. Kommt also z. B. in der Säule der Zehntel eine zweiziffrige Summe heraus, so muß man nur die Einer derselben unter die Zehntel setzen, die Zehner derselben aber zu den Haupteinheiten zuzählen.

In der Summe muß das Komma aber gerade unter die Kommata der Posten gesetzt werden.

Mit Rücksicht auf diese Erinnerung soll im Hefte ein selbstgewähltes Exempel von etwa 6 Posten, mit 4 bis 8 ziffrigen Zahlen vollständig durchgegangen und gezeigt werden, daß das Ergebniß der Rechnung nach allen bisherigen Sätzen die richtige Summe sei.

Wie diese Arbeit auszuführen sei, wollen wir hier an einem kleineren Beispiele deutlich machen.

Gesetzt man sollte 27,509 + 317,68 + 0,99563 + 7000,8 addiren, so muß es auf folgende Art geschehen.

27,50900
317,68000
0,99563
7000,80000
7346,98463

Aufsatz. Die Hauptsache bei dem Aufsatz ist, daß überall die Einheiten gleicher Ordnungen gerade unter einander gesetzt werden. Haben die Posten eine ungleiche Anzahl von Bruchziffern, so ist es zwar nicht nothwendig aber bequem, ihnen durch angehängte Nullen eine gleiche Anzahl von Bruchziffern zu geben.

Rechnung. Man rechnet völlig wie bei ganzen Zahlen; nämlich man fängt bei den Ziffern der niedrigsten Ordnung an, und zählt nach §. 5. alle Ziffern zusammen, die in einer Säule übereinanderstehen. In der fünften Bruchstelle findet sich nichts als 3, in der vierten nichts als 6 in die Summe zu setzen. In der dritten Stelle hat man 9 + 5

= 14 Tausendtel; da aber 10 Tausendtel = 1 Hundertel, so werden nur 4 Tausendtel in die Summe gesetzt, 1 Hundertel aber den Ziffern der zweiten Ordnung zugezählt. In dieser Ordnung hat man also $8 + 9 + 1 = 18$ Hundertel, von denen aber nur 8 in die Summe kommen; 10 Hundertel = 1 Zehntel aber wird den Ziffern der ersten Bruchstelle zugezählt. In dieser Stelle hat man also $5 + 6 + 9 + 8 + 1 = 29$ Zehntel. Von diesen kommen aber nur 9 in die Summe, da 20 Zehntel = 2 Haupteinheiten. In der Stelle der Einer hat man also $7 + 7 + 2 = 16$. Hievon kommen 6 in die Summe, 10 Einer oder 1 Zehner aber wird den Zehnern zugezählt. Man hat also $2 + 1 + 1 = 4$ Zehner, welche ganz in die Summe kommen. Dann sind noch 3 Hunderte und 7 Tausende in die Summe zu setzen.

Gerade auf diese Art ist in dem Hefte ein anderes selbstgewähltes Beispiel durchzugehen, wobei auch dieses zu beobachten ist, daß die Benennungen Zehntel, Hundertel, Tausendtel und Einer, Zehner, Hunderte rc. nicht mit Ziffern sondern mit Buchstaben zu schreiben sind, weil diese Wörter hier überall nur als Benennungen der verschiedenen Arten von Einheiten angesehen werden.

Wir fügen hier noch den Beweis hinzu, damit der Anfänger künftig bei ähnlichen Fällen ein Muster habe, wonach er seine Beweise einrichten kann. Hiebei bemerke man aber zuerst, daß bei dem wissenschaftlichen Vortrag der Mathematik ein Beweis nicht bloß die Richtigkeit der Sache deutlich machen, sondern daß er ganz bestimmt zeigen müsse, wie die Sache mit vorhergehenden Sätzen zusammenhänge, und aus denselben folge.

Beweis. Jede Ziffer eines Posten ist ein Stück desselben. Man darf aber nach §. 3. die Posten stückweise, und in beliebiger Ordnung zusammenzählen. Da ferner der Aufsatz so gemacht ist, daß die Kommata, oder genauer, in jeder Säule einerlei Einheiten über einander stehen, wie es nach §. 2. zur Möglichkeit einer Addition erfodert wird, so kann man die Ziffern jeder Säule nach §. 5. zusammenzählen. Die Summe dieser Ziffern besteht aber nach §. 2. aus eben solchen Einheiten als die ganze Säule. Ist daher diese Summe einziffrig, so muß sie ganz in die Summe gesetzt werden. Ist sie aber zweiziffrig, so sind nach I. 12. die Zehner derselben eben so viele Einheiten der nähst höheren Ordnung, und müssen also dieser zugezählt werden.

Anmerkung. Im Übungshefte sind bei diesem Paragraphen recht viele selbstgewählte Beispiele zu rechnen, und zwar nach dem hier beistehenden Muster.

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3} &= 0{,}6667 \\ 3\tfrac{1}{2} &= 3{,}5000 \\ 1\tfrac{7}{8} &= 1{,}8750 \\ \tfrac{3}{7} &= \underline{0{,}4286} \\ & \ 6{,}4703 \end{aligned}$$

Nämlich die Posten sollen zuerst in der Gestalt gemeiner Brüche aufgeschrieben, und diese nach I. 20. und 21. in zehntheilige Brüche auf 4 bis 5 Stellen verwandelt, und dann diese addirt werden. Es ist gar nicht zu viel, wenn nach und nach 30 bis 40 solcher Beispiele berechnet werden. Zuletzt soll noch ein Beispiel gerechnet werden, wo die Posten eine bestimmte Benennung z. B. Thaler, oder Pfund, oder Ruthen erhalten. Auch hier sollen die Posten zuerst in gemeinen Brüchen gegeben sein, die Rechnung aber doppelt gemacht werden, einmal nach der gemeinen Bruchrechnung, und dann in zehntheiligen Brüchen. Zuletzt sollen die in der Summe enthaltenen Brüche in die kleineren Benennungen (nämlich Groschen und Pfennige, oder Loth und Quentchen, oder in zwölftheilige Füße und Zolle) verwandelt werden. Folgendes Beispiel wird die Formen dieser Rechnung deutlich machen.

Die zu addirenden Posten mögen folgende sein:

$$14\tfrac{4}{5}\ \text{Thlr.} + 1\tfrac{7}{11}\ \text{Thlr.} + 5\tfrac{6}{7}\ \text{Thlr.} + \tfrac{11}{16}\ \text{Thlr.}$$

a) Addition nach der gemeinen Bruchrechnung.

	6160		
$14\frac{4}{5}$	(I) 1232	(II) 4928	
$1\frac{7}{11}$	560	3920	
$5\frac{6}{7}$	880	5280	
$\frac{11}{16}$	385	4235	6160
$22\frac{6043}{6160}$		18363	2 Thlr.
		12320	
		6043	

(III)	6043	6160
	145032	23 Gr.
	12320	
	21832	
	18480	
(IV)	3352	6160
	40224	$6\frac{3264}{6160}$ Pf.
	36960	
	3264	

Obgleich jeder aus den praktischen Rechenstunden wissen muß, wie eine solche Rechnung zu machen ist, so wollen wir doch um mehrerer Deutlichkeit willen einige Erläuteterung hinzufügen.

Zuerst muß der kleinste gemeinsame Nenner zu den Brüchen $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{6}{7}$ und $\frac{11}{16}$ gesucht werden. Er ist in diesem Exempel das Product der vier Nenner $5 . 11 . 7 . 16 = 6160$. Dieser Nenner ist wie gewöhnlich obenan gesetzt. Die Zahlen unter I kommen heraus durch Division der Zahl 6160 durch jeden Nenner. Mit diesen Zahlen sind die Zähler der Brüche multiplicirt. Dadurch erhält man die Zahlen unter II. Diese Zahlen sind bekanntlich Zähler, wozu 6160 als gemeinsamer Nenner gehört, und die so geschriebenen Brüche sind den gegebenen gleich. So ist $\frac{4928}{6160} = \frac{4}{5}$; $\frac{3920}{6160} = \frac{7}{11}$, u. s. w. Unter II sind nun diese Zähler addirt. Ihre Summe ist 18363. Diese Zahl ist also wieder ein Zähler, wozu der Nenner 6160 gehört. Da nun der Bruch $\frac{18363}{6160}$ ein unächter ist, so ist unten der Zähler durch den Nenner dividirt, wodurch man statt des unächten Bruchs, die gemischte Zahl $2\frac{6043}{6160}$ Thlr. erhält. Die 2 ganzen Thaler sind nun zu den übrigen Ganzen addirt, und so erhält man vorn unter den gegebenen Zahlen die Summe $22\frac{6043}{6160}$ Thaler.

Wären die gegebenen Zahlen unbenannt, so könnte man die Rechnung als beendigt ansehen; aber der Bruch $\frac{6043}{6160}$ kann nicht gezahlt werden, wenn man nicht seinen Werth in Gr. und Pf. ausrechnet. Daher ist der Zähler 6043 bei III mit 24 in Gr. verwandelt. Die Rechnung giebt 145032 Gr. Diese sind mit 6160 dividirt, und man erhält 23 Gr. nebst dem Rest 3352 Gr. bei IV. Diese Gr. mit 12 multiplicirt, verwandeln sich in 40224 Pf., und wenn man nun diese nochmals mit 6160 dividirt, so ist der Quotient 6 Pf. Da wir aber keine kleinere Münze als Pf. haben, so muß wegen des Restes eigentlich der Bruch $\frac{3264}{6160}$ angehängt werden. Da aber dieser Bruch größer ist, als $\frac{1}{2}$ Pf., so kann man ihn weglassen, und 7 Pf. statt 6 Pf. schreiben, wodurch ein Fehler begangen wird, der kleiner ist als ein halber Pf. Die Summe ist also in ganzen Zahlen:

22 Thlr. 23 Gr. 7 Pf.

b) Rechnung in zehntheiligen Brüchen.

Weit kürzer und leichter findet man aber dasselbe Resultat, wenn man die gegebenen gemeinen Brüche in zehntheilige (nach I. 20. 21.) verwandelt, wie folgende Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{rl} 14\frac{4}{5} = & 14{,}8000 \\ 1\frac{7}{11} = & 1{,}6364 - \\ 5\frac{6}{7} = & 5{,}8571 + \\ \frac{11}{16} = & 0{,}6875 \\ \hline & 22{,}9810 \text{ Thlr.} \\ \hline & 23{,}5440 \text{ Gr.} \\ \hline & 6{,}5280 \text{ Pf.} \end{array}$$

Die Hauptsumme dieser Rechnung ist also 22,9810 Thlr. Multiplicirt man bloß die Brüche dieser Summe mit 24, so ergiebt sich, daß ihr Werth 23,5440 Gr. sei. Multiplicirt man hier wieder bloß die Brüche mit 12, so beträgt ihr Werth 6,5280 Pf. Da nun der Bruch der Pfennige etwas größer ist als 0, 5 oder als $\frac{1}{2}$ Pf., so ist statt ihrer ein ganzer Pfennig zu setzen, und die Summe ist daher wie oben 22 Thlr. 23 Gr. 7 Pf.

Durch welche Rechnung man schneller, kürzer, leichter und sicherer zum Ziel komme, fällt in die Augen.

§. 7. Anmerkung und Aufgabe.

Da jeder abgekürzte Bruch einen kleinen Fehler enthält, so wird auch jedes Ergebniß einer mit solchen Brüchen gemachten Rechnung einen Fehler enthalten. Oft vergrößern sich die Fehler durch die Rechnung, bisweilen verkleinern sie sich auch. In jedem Fall ist man aber im Stande die Größe des Fehlers eines Rechnungs-Resultats zu schätzen, wenn man nur bestimmt weiß, wie weit man sich auf die Ziffern der gegebenen Zahlen verlassen kann. Es ist aber zu dieser Beurtheilung nichts weiter nöthig, als die gemachte Rechnung aufmerksam durchzugehen, und zu überlegen, welchen Einfluß es auf das Ergebniß haben würde, wenn man zu den gegebenen Zahlen noch eine Ziffer hinzufügte.

Wir wollen daher bei jeder Rechnungsart zeigen, wie diese Beurtheilung anzustellen sei. Zu dem Ende folge hier für die Addition folgende

Aufgabe. Zu bestimmen, wie weit man sich auf die Ziffern einer Summe verlassen könne, wenn die Posten abgekürzte Brüche sind.

a. Zuerst bemerke man, daß es zwar bei genauen Zahlen nichts schade, wenn die Posten eine ungleiche Anzahl von Bruchziffern enthalten. Wenn man aber bei abgekürzten Posten, dem einen nur drei, einem andern aber sieben Bruchziffern geben wollte, so begreift man leicht, daß die vier letzten Ziffern dieses Posten ganz unnütz wären, und in der Summe lauter falsche Ziffern geben würden. Rechnet man daher mit abgekürzten Zahlen, so muß man, wie in den oben gerechneten Exempeln geschehen ist, alle Posten auf gleichviele Bruchziffern abkürzen.

b. Wir wollen nun das letzte im sechsten Paragraphen berechnete Exempel betrachten, und untersuchen, wie weit wir uns auf die Ziffern der Summe 22,9810 verlassen können.

Von den gegebenen Posten läßt sich der Bruch des ersten und vierten in 4 Bruchstellen genau ausdrücken. Der zweite und dritte sind so abgekürzt, daß der Fehler derselben kleiner ist, als eine halbe Einheit der vierten, oder als fünf Einheiten der fünften Stelle, und zwar ist der zweite Posten etwas zu klein, der dritte etwas zu groß.

Um aber zu zeigen, wie man in jedem Falle die Untersuchung anzustellen habe, wollen wir annehmen

erstlich, daß alle vier Posten abgekürzt, und zwar entweder alle zu groß, oder alle zu klein wären, dann könnte der Fehler der Summe beinahe 4 mal 5 oder 20 Einheiten der fünften, oder 2 Einheiten der vierten Stelle betragen.

zweitens: erwägen wir aber, daß zwei Posten genau sind, so muß der Fehler der Summe kleiner seyn, als 2 mal 5 oder 10 Einheiten der fünften, d. i. kleiner als 1 Einheit der vierten Stelle sein.

drittens: überlegt man endlich, daß der zweite Posten zu klein, der dritte aber zu groß ist, so ist klar, daß sich diese Fehler zum Theil heben, da nun jeder Fehler einzeln weniger als 5 Einheiten der fünften Stelle beträgt, so ist deutlich, daß der Fehler der Summe vielleicht kaum 1 oder 2 Einheiten der fünften Stelle betrage. Ja wären die Fehler der beiden Posten gleich, so würden sie sich gänzlich heben, also die Summe genau sein.

Man sieht also, daß der Fehler einer Summe allerdings bisweilen größer, bisweilen aber auch kleiner als der Fehler der Posten sein, ja bisweilen in der Summe ganz verschwinden könne. Will man ein Beispiel der letztern Art haben, so addire man in Decimalbrüchen die Werthe von $\frac{5}{6}$ und von $\frac{1}{6}$.

Anmerkung. Wenn man die zu addirenden Decimalbrüche nicht selbst berechnet hat, sondern es sind anderweitig gegebene Posten, von denen man vielleicht nicht einmal weiß, ob sie genaue oder abgekürzte Brüche sind, so läßt sich auch kein sicheres Urtheil über die Summe fällen, und man kann höchstens vermuthen, daß die niedrigsten Ziffern unsicher sein dürften.

Weiß man aber bestimmt, daß die Brüche abgekürzt sind, daß aber der Fehler nirgends größer sei, als eine halbe Einheit der niedrigsten Stelle, so kann man wenigstens auf die beschriebene Art bestimmt beurtheilen, wie weit man sich auf die Ziffern der Summe verlassen könne.

Berechnet man aber die Decimalbrüche selbst, und kann man diese Berechnung auf so viele Bruchstellen fortsetzen, als man will, so hat man es jederzeit in seiner Gewalt, den Fehler einer Summe so klein zu machen, als man will. Bei einigem Nachdenken läßt sich nämlich bald entdecken, auf wie viele Bruchstellen man jeden Bruch berechnen müsse, wenn die Summe bis zu einer bestimmten Stelle fehlerfrei sein soll, und diese Überlegung kann und muß man anstellen, noch ehe man anfängt zu rechnen. Gesetzt, es würden 20 gemeine Brüche gegeben, welche in Decimalbrüche verwandelt, und so addirt werden sollten, daß der Fehler der Summe kleiner wäre, als eine halbe Einheit der fünften Stelle, so findet man leicht, daß man jeden Bruch auf sieben Bruchstellen abkürzen müsse. Denn gesetzt man kürzte sie nur auf fünfe ab, aber so, daß der Fehler kleiner wäre, als eine halbe Einheit der fünften Stelle, so könnte der Fehler der Summe, im schlimmsten Fall (wenn nämlich die abgekürzten Brüche entweder alle zu groß, oder alle zu klein wären), weil 20 Posten zu addiren sind, fast 20 halbe, oder 10 ganze Einheiten der fünften Stelle, also fast eine Einheit der vierten Stelle betragen. Kürzt man aber jeden Bruch auf sieben Stellen ab, so wird der Fehler der Summe noch keine volle Einheit der sechsten Stelle betragen, so daß man, wenn die Summe von 7 Ziffern auf 5 abgekürzt wird, völlig sicher sein kann, daß der Fehler keine halbe Einheit der fünften Stelle betrage.

Es wird sehr nützlich sein, wenn im Übungsheft ein größeres Beispiel dieser Art ausgeführt wird.

C. Allgemeine Sätze von der Subtraction.

§. 8. Erklärung.

Von einer Zahl A, eine andere B subtrahiren, heißt eine dritte C finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man sie zu B addirt, A herauskommt.

Die Zahl A, von welcher subtrahirt wird, heißt der Minuendus. Die Zahl B, welche man subtrahirt, heißt der **Subtrahendus**; und die Zahl C, welche gefunden wird, heißt der **Rest**, oder der **Unterschied**, oder die **Differenz** der Zahlen A und B.

Die **Bezeichnung** der Subtraction ist schon I. 24. erklärt worden, und hier nur zu wiederholen.

Es ist bei diesem Paragraphen nichts zu thun, als alle erklärten Kunstwörter, durch ein bestimmtes Beispiel in kleinen Zahlen zu erläutern.

§. 9. Zusatz.

Gewöhnlich wird die Subtraction erklärt, als ein **Abziehen** oder **Wegnehmen** des Subtrahendus vom Minuendus. Und diese Erklärung ist ganz richtig und brauchbar in jedem Falle, wo der Subtrahendus nicht größer ist, als der Minuendus. Denn wenn man vom Minuendus den Subtrahendus wegnimmt, so ist sichtbar, daß das Übrigbleibende den Minuendus herstellen wird, sobald man den Subtrahendus wieder zulegt. Da aber in der Buchstaben-Rechnung auch der Fall vorkommt, daß der Subtrahendus größer ist als der Minuendus, so läßt sich dann der Begriff des Wegnehmens nicht mehr anwenden, wohl aber, wie im siebenten Abschnitt gezeigt wird, die §. 1. gegebene Erklärung.

Im Hefte soll an einem bestimmten Zahlen-Beispiel gezeigt werden, daß die Erklärungen §. 1. und 2, einerlei Rest geben. Nach §. 1. muß man nämlich zum Subtrahendus so viele Einheiten **hinzuzählen**, bis der Minuendus heraus kommt. Nach §. 2. muß man vom Minuendus so viele Einheiten **abziehen**, bis der Subtrahendus herauskommt. Man darf nur den Minuendus durch eine Reihe von Punkten, und den Subtrahendus durch ein Stück dieser Reihe vorstellen, um es gleichsam handgreiflich zu machen, daß man auf beide Arten denselben Rest findet.

§. 10. Zusatz.

Addition und Subtraction sind entgegengesetzte Rechnungsarten. Eine hebt die andere auf, d. h.

wenn man zu der Zahl A eine andere B addirt, von der Summe (A + B) aber wieder B subtrahirt, so kommt wieder A heraus, oder in Zeichen $A + B - B = A$;

und umgekehrt: wenn man von A die Zahl B subtrahirt, zum Rest aber wieder B addirt, so kommt wieder A heraus; oder in Zeichen $A - B + B = A$.

Dieser Paragraph ist im Hefte zu wiederholen; nur sind statt der unbestimmten Zeichen A und B bestimmte Zahlen zu setzen.

§. 11. Zusatz.

Zwei Zahlen können nur subtrahirt werden, wenn sie nicht nur gleichartige Größen vorstellen, sondern auch völlig gleiche Einheiten haben. Der Rest aber ist wieder eine gleichartige Größe, und hat dieselben Einheiten.

Der Inhalt dieses Zusatzes ist durch bestimmte Beispiele zu erläutern, und zu zeigen a) daß zwei Zahlen, welche ungleichartige Größen vorstellen, eben so wenig subtrahirt, als addirt werden können; b) daß zwei Zahlen, die zwar gleichartige Größen, aber nicht in gleichen Einheiten vorstellen, auch nicht subtrahirt werden können; c) daß aber zwei Zahlen die völlig gleiche Einheiten haben, subtrahirt werden können, und daß dann der Rest keine anderen Einheiten als der Minuendus und Subtrahendus habe.

§. 12. Zusatz.

Wenn der Minuendus sowohl als der Subtrahendus aus mehreren Größen oder Stücken bestehen, so erhält man einerlei Rest, man mag den ganzen Subtrahendus vom ganzen Minuendus, oder die Stücke des Subtrahendus in beliebiger Ordnung von den Stücken des Minuendus subtrahiren.

Um den Sinn und die Richtigkeit dieses Satzes recht anschaulich zu machen, stelle man sich z. B. vor, daß in einem Kasten vier Geldbeutel A, B, C, D mit verschiedenen Summen lägen, und daß aus diesem drei Posten E, F und G herausgenommen werden sollten, so begreift ein Kind, daß im Kasten gleichviel Rest bleibt, man mag die Posten E, F und G herausnehmen, wie man will, wenn nur nicht mehr und nicht weniger, als die drei Posten E, F und G betragen, herausgenommen wird. Man kann z. B. die vier Beutel A, B, C, D zusammen schütten, d. h. addiren, eben so kann man die drei Posten E, F, G addiren, und nun ihren Betrag (E + F + G) von der ganzen Summe (A + B + C + D) wegnehmen; oder man kann die Posten E, F und G einzeln, und in beliebiger Ordnung aus den einzelnen Beuteln A, B, C, D und wieder, aus welchem Beutel man will, herausnehmen. Wird nur nicht mehr oder weniger, als E + F + G von A + B + C + D weggenommen, so ist klar, daß der Rest (A + B + C + D) — (E + F + G) immer derselbe sein wird.

Im Hefte ist diese Erläuterung zu wiederholen, nur sind statt A, B, C, D, E, F, G bestimmte Zahlen zu setzen. Auch ist es nicht eben nothwendig, Geld als Beispiel zu wählen.

D. Von der Subtraction zehntheiliger Brüche.

§. 13. Zusatz.

Bei der Subtraction muß man, um mit unsern Ziffern fertig rechnen zu können, vollkommen im Gedächtniß haben alle Subtractionsfälle, bei welchen der Subtrahendus und der Rest einziffrige Zahlen sind.

Was den Minuendus betrifft, so ergiebt sich aus der Regel von selbst, daß er um weniger als 10 den Subtrahendus übertreffen müsse.

Auch begreift man leicht, daß alle diese Fälle durch Addition aufgefunden, und aus der Tabelle §. 4. entnommen werden können.

Daß man alle Subtractionsfälle, welche der Satz fodert durch Addition finden könne, ergiebt sich unmittelbar aus unserer Erklärung der Subtraction §. 8. Dieses ist im Hefte deutlich zu machen, auch zu zeigen, wie man die Beantwortung jeder unserm Satze gemäßen Subtractionsfrage, in der bei §. 4. berechneten Tafel auffinden könne, so daß also für die Subtraction keine eigene Tabelle nöthig ist. Um dieses deutlich zu machen, beantworte man im Hefte ein Paar beliebige Fragen von folgender Art: wie muß man in der Tafel §. 4. den Rest aufsuchen, welcher bleibt, wenn 8 von 15 subtrahirt wird, u. dgl. m.

Anmerkung. Wer sich bei einer solchen Subtraction gewöhnt, den Rest durch Zurückzählen zu finden, wird nie fertig und sicher subtrahiren lernen. Wer aber die Tafel §. 4. im Kopfe hat, wird jede Subtraktionsfrage, von welcher im Paragraph die Rede ist, ohne sich lange besinnen zu dürfen, beantworten können.

§. 14. Zusatz.

Wenn man eine einziffrige Zahl von einer zwei- oder mehrziffrigen Zahl, (welche größer ist als der um 10 vermehrte Subtrahendus), subtrahiren soll, so muß man den einziffrigen Subtrahendus jederzeit bloß von der niedrigsten Ziffer des Minuendus nach

§. 13. subtrahiren. Ist aber diese Ziffer zu klein, so muß man bei der nähsthöhern Ziffer 1 borgen, wodurch die niedrigste Ziffer des Minuendus um 10 vergrößert wird, und dann die Subtraction vollzogen werden kann.

Im Hefte ist dieser Satz durch ein Paar bestimmte Beispiele zu erläutern.

Anmerkung. Wer sich an eine andere Art, solche Subtractionen zu verrichten, gewöhnt, wird nie schnell und sicher subtrahiren lernen.

§. 15. Aufgabe.

Von einer gegebenen Zahl eine andere kleinere zu subtrahiren, wenn eine oder beide mehrziffrig sind, und Decimalbrüche enthalten.

Die Rechnung ist auch hier in der Hauptsache wie bei ganzen Zahlen. Nur ist in Ansehung der Decimalbrüche zu merken: Ist die Anzahl der Decimalbrüche in beiden ungleich, so muß sie durch angehängte Nullen gleich gemacht, und dann der Subtrahendus so unter den Minuendus gesetzt werden, daß überall Ziffern gleicher Ordnung unter einander stehen.

Die Rechnung wird alsdann vollkommen wie bei ganzen Zahlen, und als ob kein Komma da wäre, gemacht. Im Reste muß aber das Komma, gerade unter die Kommata der beiden gegebenen Zahlen gesetzt werden.

Diese Regeln sollen auf folgende Art an einem Zahlen-Beispiel erläutert werden. Es soll 87,786534602 von 123,003207 subtrahirt werden.

$$\begin{array}{r} 123{,}003\ 207\ 000 \\ 87{,}786\ 534\ 602 \\ \hline 35{,}216\ 672\ 398 \end{array}$$

Aufsatz. Da der Subtrahendus 9 der Minuendus aber nur 6 Bruchziffern enthält, so müssen zuerst an den letzten drei Nullen angehängt, und dann beide gehörig unter einander gesetzt werden.

Rechnung. Die Rechnung wird wie bei ganzen Zahlen geführt, und bei der niedrigsten Ziffer angefangen. In der neunten Bruchordnung sollen zuerst 2 von 0 subtrahirt werden, da aber dieses nicht angeht, so muß man borgen; aber es findet sich erst in der sechsten Ordnung eine Ziffer (7) von der man 1 borgen kann. Es bleiben also nur 6 in der sechsten Ordnung. Die geborgte 1 aber enthält 10 Einheiten der siebenten Ordnung, von diesen läßt man in Gedanken 9 in der siebenten Ordnung stehen und borgt 1 an die achte Ordnung. Hier gilt es 10. Man läßt also wieder 9 in der achten Ordnung stehen, und borgt 1 an die neunte Ordnung, wo es 10 gilt. Jetzt kann man in der neunten Ordnung 2 von 10 subtrahiren, es bleibt 8; ferner in der achten Ordnung 0 von 9 bleibt 9; in der siebenten 6 von 9 bleibt 3; in der sechsten 4 von 6 bleibt 2. Jetzt sollte in der fünften Ordnung 3 von 0 subtrahirt werden. Man borgt daher von der in der vierten Ordnung stehenden 2 eine Einheit, und verwandelt sie in zehn Einheiten der fünften. Man kann also nun in dieser Ordnung subtrahiren, 3 von 10 bleibt 7. In der vierten Ordnung sollte nun 5 von 1 subtrahirt werden, also muß man wieder eine Einheit der dritten Stelle borgen, da diese 10 Einheiten der vierten beträgt, so hat man jetzt 5 zu subtrahiren von (10 + 1 =) 11; und es bleibt 6. In der dritten Ordnung sollte 6 von 2 subtrahirt werden, man muß also wieder borgen, findet aber nicht eher eine geltende Ziffer als in der Ordnung 0. Man borgt also eine Haupteinheit, d. i. 10 Zehntel, von diesem läßt man 9 in der ersten Ordnung, und die zehnte Einheit verwandelt man in 10 Einheiten der zweiten Ordnung. Von diesen bleiben 9 in dieser Ordnung, die zehnte aber wird in 10 Einheiten der dritten Ordnung verwandelt, und mit der in dieser Ordnung noch vorhandenen 2 verbunden. Man kann also nun in der dritten Stelle 6 von 12 abziehen; es bleibt 6; in der zweiten Stelle ist 8 von 9 zu subtrahiren; es bleibt 1. In der ersten Bruchstelle ist 7 von 9 zu subtrahiren; es bleibt 2. Jetzt kommt man an die Haupteinheiten, wo 7 von 2 nicht subtrahirt werden kann; also muß man einen Zehner, oder 10 Einer borgen, und 7 von 12 subtrahiren; es bleibt 5. In der Stelle der Zehner soll 8 von 1 subtrahirt werden.

Nimmt man hiezu das eine noch vorhandene Hundert, welches 10 Zehner enthält, so hat man 8 Zehner von 11 Zehnern zu subtrahiren, und es bleiben also 3 Zehner übrig.

Auf eben diese Art soll im Hefte ein anderes selbstgewähltes Exempel durchgegangen werden. Nur sind alle Ziffern mit Aufmerksamkeit so zu wählen, daß alle bei der Subtraction statt findenden Fälle dabei vorkommen. Nämlich 1) der Fall, wo eine kleine Ziffer von einer größern zu subtrahiren ist, 2) der Fall, wo eine größere von einer kleinern oder von Null zu subtrahiren ist, und bei der nächsten Ziffer geborgt werden kann; endlich 3) der Fall, wo man über eine oder mehrere Nullen wegborgen muß.

Beweis. Es muß gezeigt werden, wie diese Rechnung mit den vorher aufgestellten Sätzen zusammenhängt.

Nach §. 12. darf man den Subtrahendus stückweise von den Stücken des Minuendus abziehen. Dieses geschieht indem man jede Ziffer des Subtrahendus, von der darüber stehenden Ziffer des Minuendus abzieht. Ist diese aber zu klein, so vergrößert man sie durch eine geborgte Einheit der vorhergehenden Stelle, also um 10, wodurch die Subtraction möglich wird. Alle einzelnen Subtractionen geschehen übrigens richtig nach §. 13, und da man auf solche Art nach und nach alle Stücke des Subtrahendus von dem Minuendus subtrahirt, so muß die gefundene Zahl nach §. 12. der richtige Rest sein.

Anmerkung. Im Hauptheft ist es genug, ein Beispiel auf die angezeigte Art durchzugehen. In dem Übungsheft aber ist es nöthig, zur Übung eine Menge Exempel zu rechnen. Aber bei allen diesen Exempeln müssen der Minuendus und Subtrahendus zuerst in gemeinen Brüchen gegeben sein, und diese in zehntheilige verwandelt werden. Dabei sollen aber so viel als möglich alle Fälle erschöpft werden, die bei der Subtraction vorkommen. Z. B. ein Exempel, wo bloß der Minuendus, ein anderes, wo bloß der Subtrahendus Brüche hat. Ferner Exempel, wo beide Zahlen Brüche haben, u. dgl. m.

Endlich soll auch hier, wie bei der Addition, ein Exempel doppelt gerechnet werden; einmal nach der gemeinen Bruchrechnung, und dann auch in zehntheiligen Brüchen, um es auch hier anschaulich zu machen, daß man mit Decimalbrüchen leichter als mit gemeinen rechnet.

§. 16. Zusatz.

Wie weit man sich auf die Ziffern eines gefundenen Restes verlassen könne, ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen.

1. Ist der Minuendus abgekürzt, der Subtrahendus aber genau, so begreift man leicht, daß der Fehler des Restes dem Fehler des Minuendus genau gleich sei.

2. Ist umgekehrt der Minuendus genau, der Subtrahendus aber abgekürzt, so ist der Fehler des Restes zwar auch dem Fehler des Subtrahendus gleich, aber entgegengesetzt. Um soviel nämlich der Subtrahendus zu groß ist, um eben soviel ist der Rest zu klein, und umgekehrt.

3. Sind endlich beide gegebene Zahlen abgekürzt, so kommt es darauf an, ob beide zu groß, oder beide zu klein sind, oder ob eine zu groß, und die andere zu klein ist.

Sind beide zu groß, oder beide zu klein, so ist klar, daß sie sich beim Subtrahiren zum Theil einander aufheben. Ja, wenn der Fehler in beiden gleich groß ist, so heben sie sich gänzlich auf, und der Rest kann völlig fehlerfrei sein.

4. Ist aber die eine Zahl zu groß, die andere zu klein, so ist der Fehler des Restes so groß, als die Feh-

ler der beiden gegebenen Zahlen zusammen. Wäre also der Fehler jeder Zahl kleiner als eine halbe Einheit der letzten Stelle, so würde man vom Reste sagen müssen, sein Fehler sei kleiner als eine ganze Einheit der letzten Stelle.

Anmerkung. Man sieht also, daß die Subtraction auf alle Fälle nur geringe Fehler hervorbringt, und daß Nr. 4. der schlimmste, Nr. 3. aber der günstigste Fall ist. Werden aber die abgekürzten Brüche nicht gegeben, sondern kürzt man sie selbst ab, so hat man es jederzeit in seiner Gewalt, Nr. 4. zu vermeiden; und es ist also hier der Fall, wo es zweckmäßig ist, bisweilen die oben (I. 19.) gegebene Regel nicht zu beobachten.

Im Hefte müssen übrigens jeder der obigen vier Fälle durch bestimmte Beispiele deutlich gemacht werden.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Sätze von der Multiplication nebst den Regeln für die zehntheiligen Brüche.

A. Allgemeine Begriffe und Sätze von der Multiplication.

§. 1. Erklärung.

Man sagt eine Größe B entstehe aus einer andern gleichartigen A, wenn man B durch Vervielfältigung von A selbst, oder durch Theilung von A, oder durch Vervielfältigung eines genauen Theils von A in der Vorstellung hervorbringen kann. Vergleicht man auf diese Art zwei Größen A und B, so nennt man diese Vergleichung das **Verhältniß** der Größen A und B. Bezeichnet wird ein Verhältniß dadurch, daß man zwischen beide Größen ein **Kolon**, diejenige Größe aber voran setzt, aus welcher die andre entstehen soll. Diese Bezeichnung, A : B, liest man kurz A zu B.

Dieser für die ganze Mathematik wichtige Begriff ist im Hefte auf mehrere Beispiele anzuwenden. Es sollen nämlich zwei Zahlen A und B so gewählt werden,

a. daß B ein **Vielfaches** von A sei; wie z. B. A = 5; B = 35;
b. daß B ein **genauer Theil** von A sei, z. B. A = 45; B = 9;
c. daß B ein **Vielfaches eines Theiles** von A sei. Da jede größere ganze Zahl ein Vielfaches der Einheit ist, so kann der zu betrachtende Theil von A die Einheit sein: z. B. A = 17; B = 5.
d. In dem vorigen Fall kann aber auch oft ein anderer Theil von A als die Einheit, der zu betrachtende Theil sein z. B. A = 15; B = 9;
e. Endlich sollen noch im Hefte zwei **gleiche Verhältnisse** z. B 4 : 12 und 7 : 21 aufgeführt werden.

Im Hefte sollen statt der hier angeführten Zahlen, andere selbst gewählte gebraucht, auch in jedem Fall bestimmt in Worten ausgesprochen werden, wie B aus A entstehe.

§. 2. Zusatz und Erklärung.

Weiß man wie B aus A entsteht, so weiß man auch, wie A aus B entsteht: nämlich gerade auf die entgegengesetzte Art. Die Verhältnisse A : B und B : A heißen, eines das **umgekehrte** des andern.

Hier sollen im Hefte die fünf im vorigen Paragraphen gebrauchten Beispiele nochmals durchgegangen, und bei jedem bestimmt ausgesprochen werden, wie A aus B entstehe.

§. 3. Erklärung.

Eine Zahl A mit einer andern B multipliciren, heißt eine dritte C finden, die eben so aus A, wie B aus ihrer Einheit entsteht.

Von den Bestandtheilen der Multiplication, heißt die Zahl A der Multiplicandus, B der Multiplicator, C das Product (auch Factum).

Oft nennet man auch A und B, ohne sie zu unterscheiden Factoren.

Die Bezeichnung der Multiplication ist schon I. 25. erklärt worden, und hier nur zu wiederholen.

Aus obiger Erklärung folgt in Verbindung mit §. 1. und 2., daß sich bei jeder Multiplication die Einheit zum Multiplicator verhält, wie der Multiplicandus zum Product.

Alle diese Begriffe sind im Hefte durch Beispiele zu erläutern. Es ist aber fürs erste hinreichend, hiezu ganze, und nicht sehr große Zahlen zu brauchen. Auch ist zu zeigen, wie der letzte Theil des Satzes aus §. 1. und 2. folge.

§. 4. Zusatz.

Wie eine Multiplication zu verrichten sei, ob durch eine Vervielfältigung, oder durch eine Theilung, oder durch beides, hängt lediglich von der Beschaffenheit des Multiplicators, und seiner Vergleichung mit der Einheit, aber gar nicht von der Beschaffenheit des Multiplicandus, ab.

Es sind hiebei folgende Fragen zu beantworten: Wie entsteht der Multiplicator aus der Einheit;

a. wenn er eine ganze Zahl,

b. wenn er ein Bruch mit dem Zähler Eins,
c. wenn er ein Bruch mit einem größern Zähler ist?
Jede dieser Fragen ist bestimmt zu beantworten, und zu zeigen, wie in jedem dieser Fälle ein beliebig gewählter Multiplicandus zu multipliciren sei.

Anmerkung. Ein Beispiel, was unter c gehört, mag zeigen, wie die Ausarbeitung am zweckmäßigsten zu machen sei. Gesetzt der Multiplicator wäre $\frac{3}{4}$, so entsteht er aus der Einheit, wenn man sie in 4 Theile theilt, und einen solchen Theil 3 mal vervielfältigt. Wäre also der Multiplicandus 24, so ist sein vierter Theil 6, und dieser dreimal vervielfältigt, giebt 18. Diese Zahl ist also das gesuchte Product.

§. 5. Lehrsatz.

Die Factoren können ungleichartige Größen sein, d. h. verschiedene Benennungen oder Einheiten haben. Aber die Benennung des Products hängt lediglich vom Multiplicandus ab. Daher kann und muß der Multiplicator jederzeit als eine unbenannte Zahl betrachtet werden.

Beweis. Nach §. 3. soll das Product aus dem Multiplicandus entstehen, wie der Multiplicator aus seiner Einheit. Nun entsteht aber z. B. $\frac{3}{7}$ aus 1 immer auf dieselbe Art, nämlich indem ich den siebenten Theil von 1 3 mal vervielfältige. Und hierin ändert sich nichts, ich mag zu 1 und $\frac{3}{7}$ die Benennung Thlr. oder Gr. oder Pfund, oder was ich sonst will setzen, oder auch beides unbenannt lassen. Daher hat die Benennung des Multiplicators auf das Produkt keinen Einfluß.

Wäre nun der Multiplicandus 35 Pfund, so ist der siebente Theil hievon 5 Pfund, und dieser 3 mal vervielfältigt giebt 15 Pfund zum Product.

Es ist also sichtbar, daß das Product mit dem Multiplicandus gleichartig sei, d. h. es hat mit ihm einerlei Benennung oder Einheit.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen; nur sind dabei andere selbstgewählte Zahlen zu brauchen.

§. 6. Zusatz.

Da man nach I. 3. jede Größe, folglich auch jede Zahl als eine Einheit betrachten darf, so kann man jederzeit auch den Multiplicandus als eine Einheit betrachten: dann wird das Product durch dieselbe Zahl als der Multiplicator vorgestellt, nur ist nicht 1, sondern der Multiplicandus als seine Einheit zu betrachten.

Erläuterung. In dem Beispiel des vorigen Paragraphen war 35 Pfund der Multiplicandus. Nehme ich nun diesen für eine Einheit (zu welchem Zweck ich ihm, um mehrerer Deutlichkeit willen, den Namen Ein Fünfunddreißiger geben könnte), so sind 5 Pfund $\frac{1}{7}$ dieses Fünfunddreißigers, und das Product 15 Pfund, ist $\frac{3}{7}$ eben dieser Einheit. Also kann das Produkt unter derselben Zahl ($\frac{3}{7}$) als der Multiplicator vorgestellt werden, wenn man sich den Werth des Multiplicandus als Einheit denkt.

Diese Erläuterung ist im Hefte, wie hier, an dem im vorigen Paragraphen gebrauchten Beispiel zu wiederholen.

§. 7. Zusatz.

Wenn der Multiplicator eine ganze Zahl ist, so kann die Multiplication in jedem Falle, der Multiplicandus sei was man will, durch eine Addition verrichtet werden.

Erläuterung. Ist der Multiplicator eine ganze Zahl (z. B. 7), so muß der Multiplicandus im Product so vielmal enthalten sein, als im Multiplicator (7). Also wird man das richtige Product erhalten, wenn man den Multiplicandus so vielmal unter einander schreibt, als der Multiplicator

Einheiten hat, (bei den angenommenen Zahlen also siebenmal). Addirt man dann, so erhält man offenbar das richtige Product.

Diese Erläuterung soll im Hefte auf zwei Beispiele angewendet werden. In beiden sei der Multiplicator eine kleine ganze Zahl. Der Multiplicandus sei in dem ersten Beispiel eine beliebig große ganze Zahl, im zweiten sei er ein beliebiger Bruch. Sollte im zweiten Beispiel die Summe ein unächter Bruch werden, so ist es nicht nöthig auszurechnen, wie viele Ganze er enthält. Denn die Multiplication ist schon verrichtet, sobald man die Summe gefunden hat.

§. 8. Lehrsatz.

a. Wenn zwei ganze Zahlen multiplicirt werden sollen, so darf man jederzeit die beiden Factoren vertauschen, d. h. den Multiplicandus als Multiplicator, und umgekehrt betrachten.

b. Auch ist in diesem Fall das Product jederzeit ein genaues Vielfaches, sowohl vom Multiplicandus als Multiplicator.

c. Ist endlich der eigentliche Multiplicandus benannt, so muß man bei Vertauschung der beiden Factoren die Benennung mit vertauschen.

Beweis. Der Beweis läßt sich sehr leicht an zwei kleinen Zahlen führen, doch so, daß man deutlich einsieht, daß er auch bei den größesten Zahlen eben so geführt werden könnte.

a. Gesetzt also, es sollte bewiesen werden, daß 7 mit 5 multiplicirt dasselbe Product geben, als 5 mit 7 multiplicirt, oder daß 5 mal 7, und 7 mal 5 einerlei sei: so ist zunächst aus §. 7. klar, daß in beiden Fällen die Rechnung durch eine Addition verrichtet werden können. Man verrichte sie nun auf folgende Art:

```
A . . . . . . . B
  . . . . . . .
  . . . . . . .
  . . . . . . .
C . . . . . . . D
```

Um 7 fünfmal zu nehmen schreibe man 7 Punkte in eine Zeile AB, und setze solcher Zeilen 5 unter einander, so ist klar, daß man in dem Viereck ABCD fünfmal 7 Punkte also das Produkt von 7 mit 5 habe. Geht man aber in diesem Viereck von A nach C herab, so hat man in der Zeile AC 5 Punkte, und wenn man von AC gegen BD fortschreitet, so hat man siebenmal 5 Punkte: also giebt 5 mal 7, und 7 mal 5 einerlei.

b. Im vorigen Beispiel ist klar, daß das Product ABCD das Fünffache von 7, und das Siebenfache von 5 sei.

c. Um den dritten Theil des Satzes welcher die Benennung des Productes betrifft deutlich zu machen, setze man statt der Punkte in Gedanken eine beliebige Art von benannten Einheiten, z. B. Lothe: so hat man in der Reihe AB 7 Lothe, und diese im Viereck ABCD 5 mal. In der Reihe AC aber hat man 5 Lothe, und diese im Viereck ACBD 7 mal. Man mag also AB oder AC als Multiplicandus betrachten, so muß man ihm stets die Benennung Loth geben, und eben diese Benennung haben alle Einheiten des ganzen Products ABCD. Dagegen ist der Multiplicator in beiden Fällen als unbenannte Zahl zu betrachten, indem er nur anzeigt, wievielmal man den Multiplicandus zu nehmen habe.

Daß man für zwei beliebig große ganze Zahlen, den Beweis eben so führen könnte, fällt in die Augen, nur würde die Zeichnung des Vierecks zu weitläuftig werden.

In den Heften kann dieser Beweis an zwei andern etwas großen Zahlen wiederholt werden, aber ohne das Viereck wirklich zu zeichnen. Denn es ist hinreichend, wenn nur bestimmt beschrieben wird, wie es gezeichnet werden müßte.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn die Summe zweier Zahlen (A + B) durch eine dritte ganze Zahl (C) multiplicirt werden soll, so findet man das richtige Product, wenn man jeden der

Posten mit der dritten Zahl einzeln multiplicirt, und diese Theilproducte addirt.

In unbestimmten Größenzeichen läßt sich dieser Satz kurz so schreiben:

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Beweis. Es sei 19 + 17 mit 3 zu multipliciren, so ist zu beweisen, daß 3 (19 + 17) = 3 . 19 + 3 . 17, oder daß 3 . 36 = 3 . 19 + 3 . 17.

Da der Multiplicator 3 eine ganze Zahl ist, so kann die Rechnung, nach §. 7. durch eine Addition verrichtet werden. Man hat also:

$$\begin{array}{ccccc} 36 & = & 19 & + & 17 \\ 36 & = & 19 & + & 17 \\ 36 & = & 19 & + & 17 \\ \hline \end{array}$$

also $3 . 36 = 3 . 19 + 3 . 17$
oder $3\,(19 + 17) = 3 . 19 + 3 . 17.$

Dieser Beweis ist im Hefte mit andren selbstgewählten Zahlen zu wiederholen.

Anmerkung. In diesem und den folgenden Paragraphen ist ein Vortheil angewendet worden, der wohl zu merken ist. Er besteht darin, daß Rechnungen, die verlangt werden, nicht wirklich gemacht, sondern nur durch Zeichen angedeutet werden.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn die Differenz zweier Zahlen (A — B) durch eine dritte ganze Zahl (C) multiplicirt werden soll, so findet man das richtige Product, wenn man sowohl den Minuendus als den Subtrahendus durch die dritte Zahl multiplicirt, und dies letztere Theilproduct vom erstern subtrahirt

Oder in Zeichen:

$$(A - B)\,C = AC - BC.$$

Beweis. Es sei 23 — 12 mit 4 zu multipliciren, so ist zu beweisen, daß $4\,(23 - 12) = 4 \,.\, 23 - 4 \,.\, 12$ oder daß $4 \,.\, 11 = 4 \,.\, 23 - 4 \,.\, 12$.

Da der Multiplicator die ganze Zahl 4 ist, so hat man nach §. 7. zu addiren

$$\begin{array}{l} 11 = 23 - 12 \\ 11 = 23 - 12 \\ 11 = 23 - 12 \\ 11 = 23 - 12. \end{array}$$

Was auf der linken Seite des Gleichheitszeichens steht, ist augenscheinlich $4 \,.\, 11$. Auf der rechten Seite hat man 4 mal 23, wovon 4 mal 12 zu subtrahiren ist. Nach II. 12. erhält man also den richtigen Rest, wenn man $4 \,.\, 12$ von $4 \,.\, 23$ subtrahirt. Also ist

$$4 \,.\, 11 = 4 \,.\, 23 - 4 \,.\, 12.$$

Dieser Beweis ist im Hefte mit andren Zahlen zu wiederholen.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn zwei ganze Zahlen multiplicirt werden sollen, so darf man jederzeit einen der beiden Factoren in beliebige Stücke zerlegen, und jedes dieser Stücke einzeln mit dem andern Factor multipliciren. Die Summe aller dieser Theilproducte ist das ganze gesuchte Product.

Anleitung zum Beweise. Es sei 19 in die Stücke $4 + 7 + 8$ zertheilt, und mit 6 zu multipliciren, so ist zu beweisen, daß

$$6 \,.\, 19 = 6 \,.\, 4 + 6 \,.\, 7 + 6 \,.\, 8.$$

Da beide Factoren ganze Zahlen sind, so darf man jederzeit den zerstückelten Factor, nach §. 8. als Multiplicandus betrachten. Dann ist aber sichtbar, daß der Beweis auf ganz ähnliche Art, als §. 9. geführt werden könne.

Dieses ist im Heft an selbstgewählten Zahlen auszuführen.

§. 12. Lehrsatz.

Man darf auch beide Factoren beliebig zerstückeln: dann muß man aber alle Stücke des Multiplicandus mit jedem Stück des Multiplicators multipliciren, und alle diese Theilproducte addiren, um das vollständige Product der beiden Factoren zu erhalten.

Oder in Zeichen: wenn der Multiplicandus $M = A + B + C$, und der Multiplicator $m = D + E$ wäre, so ist

$$Mm = AD + BD + CD + AE + BE + CE.$$

Beweis. Es sei 19 mit 17 zu multipliciren, und man habe 19 in $12 + 4 + 3$, und 17 in $9 + 8$ zerstückelt, so ist zu beweisen, daß

$$19 . 17 = 9 . 12 + 9 . 4 + 9 . 3 + 8 . 12 + 8 . 4 + 8 . 3.$$

Man zerstückele zuerst bloß 17 in $9 + 8$, so ist, (nach §. 11.) $19 . 17 = 9 . 19 + 8 . 19$. Betrachtet man diese beiden Theilproducte einzeln, so hat man wieder (nach §. 11.):

$$9 . 19 = 9(12 + 4 + 3) = 9 . 12 + 9 . 4 + 9 . 3$$
$$8 . 19 = 8(12 + 4 + 3) = 8 . 12 + 8 . 4 + 8 . 3.$$

Addirt man diese beiden Zeilen, so erhält man

$$17 . 19 = 9 . 12 + 9 . 4 + 9 . 3 + 8 . 12 + 8 . 4 + 8 . 3;$$

wo sichtbar jedes Stück des einen Factors, mit jedem des andern multiplicirt ist.

Im Hefte ist dieser Beweis an zwei andern beliebig gewählten Zahlen zu wiederholen.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn in einem Product zweier ganzen Zahlen einer der Factoren beliebig vervielfältigt, oder getheilt wird, so wird dadurch auch das Product eben so vielmal im ersten Fall vervielfältigt, im andern getheilt.

Beweis. Man betrachte z. B. das Product $7 . 13$, und nehme an,

a. daß zuerst einer der Factoren, etwa 7, dreimal größer gemacht, also (3 . 7) mit 13 multiplicirt werde, so ist zu beweisen, daß dieses Produkt dreimal so groß als 7 . 13 sei, oder in Zeichen, daß

$$13\,(3 \,.\, 7) = 3\,(7 \,.\, 13).$$

Wenn man im ersten Product 13 für den Multiplicandus, also (3 . 7) für den Multiplicator nimmt, so entsteht nach §. 3. das Product 13 (3 . 7) aus dem Multiplicandus 13, wie der Multiplicator (3 . 7) aus 1. Es entsteht aber (3 . 7) aus 1, wenn man 1 erst siebenmal, und das Siebenfache dreimal nimmt. Also muß auch das Product 13 (3 . 7) aus 13 entstehen, wenn man 13 erst siebenmal nimmt, welches (7 . 13) giebt, und dieses Siebenfache dreimal so groß macht, welches 3 (7 . 13) ist. Folglich ist

$$13\,(3 \,.\, 7) = 3\,(7 \,.\, 13).$$

(Auf dieselbe Art hätte man aber auch erweisen können, daß 13 (3 . 7) = 7 (3 . 13).)

b. Man nehme nun an, daß in eben diesem Product 7 . 13 ein Factor, etwa 7, elfmal kleiner gemacht werde. Dieser 11 mal kleinere Factor kann vermittelst des Divisionszeichens (I. 2. 6.) durch $(\frac{7}{11})$ angedeutet werden, und es ist nun zu beweisen, daß das Product $(\frac{7}{11})$ 13, elfmal so klein sei, als 7 . 13, oder in Zeichen, daß

$$\left(\frac{7}{11}\right) 13 = \frac{7 \,.\, 13}{11}$$

Der Beweis ist dem vorigen ganz ähnlich. Nimmt man nämlich wieder in dem ersten Product 13 für den Multiplicandus, und $(\frac{7}{11})$ für den Multiplicator, so entsteht nach §. 3. das Prodnct $(\frac{7}{11})$ 13 aus dem Multiplicandus 13, wie der Multiplicator $(\frac{7}{11})$ aus 1. Aber $(\frac{7}{11})$ entsteht aus 1, wenn man erst 1 siebenmal, und dann von diesem Siebenfachen den elften Theil nimmt. Also entsteht auch das Product $(\frac{7}{11})$ 13 aus dem Multiplicandus 13, wenn man 13 erst siebenmal nimmt, welches 7 . 13 giebt, und hievon ist der elfte Theil zu nehmen, also $\frac{7 \,.\, 13}{11}$. Folglich ist

$$\left(\frac{7}{11}\right) 13 = \frac{7 \,.\, 13}{11}$$

[Man kann aber auch sagen, daß ($\frac{7}{11}$) aus 1 entstehe, wenn man erst von 1 den elften Theil, welcher $\frac{1}{11}$ ist, und diesen siebenfach nimmt, wodurch ($\frac{7}{11}$) entstehen. Also entsteht auch das Product ($\frac{7}{11}$) 13 aus 13, wenn man von 13 den elften Theil d. i. ($\frac{13}{11}$) siebenmal nimmt, welches ($\frac{13}{11}$) 7 giebt. Also ist auch ($\frac{7}{11}$) 13 = ($\frac{13}{11}$) 7.]

Dieser Beweis ist im Hefte, nur an andren Zahlen, als den hier gebrauchten, zu wiederholen.

§. 14. Zusatz.

Wenn man also in einem Producte den einen Factor beliebig vervielfältigt, den andern aber eben so vielmal kleiner macht, so bleibt das Product ungeändert.

Denn wenn man bloß den einen Factor vervielfältigte, so würde das Product nach §. 13. a. eben so vielmal größer werden. Verkleinert man aber auch eben so vielmal den andern Factor, so wird das Product, nach §. 13 b. wieder eben so vielmal kleiner: also bleibt seine Größe ungeändert.

Auch dieses ist an bestimmten Zahlen deutlich zu machen.

Anmerkungen.

1. Die Sätze §. 8. — 14. sind zwar hier bloß für ganze Zahlen bewiesen; im Verfolge wird sich aber zeigen, daß sie ganz allgemein gültig sind, die Factoren mögen beschaffen sein, wie sie wollen.
2. Auch ist noch zu bemerken, daß alle bisherige Sätze von §. 1. — 14. selbst von der Beschaffenheit unserer zehntheiligen Ziffern unabhängig sind. Die folgenden Paragraphen hingegen beziehen sich unmittelbar auf unsere zehntheilige Zählungsart.

B. Von der Multiplication zehntheiliger ganzer und gebrochener Zahlen.

§. 15. Aufgabe.

Das Product jeder zwei einziffrigen Zahlen durch bloße Addition zu finden.

Anleitung zur Auflösung. Man schreibe in eine Zeile die Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. bis 9. Dann addire man jede dieser Zahlen zu sich selbst, so erhält man das Doppelte derselben, welches in einer zweiten Zeile gerade unter jede Zahl der ersten Zeile zu setzen ist. Die dritte Zeile erhält man durch Addition der zweiten und ersten. Die vierte durch Addition der dritten und ersten Zeile, u. s. f.; nämlich jede folgende Zeile durch Addition der letzten und ersten. Diese Arbeit wird so lange fortgesetzt, bis man zu einer Zeile kommt, die sich mit 9 anfängt.

Im Hefte muß diese Arbeit

a. wirklich ausgeführt, und dabei ungefähr so wie vorher wörtlich beschrieben werden, wie jede Zeile entstanden ist.

b. Dann muß gezeigt werden, wie man in dieser Tafel, das Product jeder zwei einziffrigen Zahlen, und zwar doppelt aufsuchen könne.

Anmerkung. Diese Tafel (die man öfters auch die Pythagorische nennt, weil man glaubt, daß sie Pythagoras zuerst so geordnet habe,) enthält offenbar nichts anders, als das bekannte Einmaleins. Aber der Zweck ist hier nicht, daß der Anfänger das Einmaleins erst lernen solle; vielmehr erhält diese Tafel alle Producte welche der Lernende ganz fertig schon im Gedächtniß haben muß. Der Zweck ist hier sichtbar zu machen, wie die Muliplication mit der Addition zusammenhängt, um auf dieser Grundlage die Theorie der Multiplication in einem strengen Zusammenhange, weiter fortzuführen.

§. 16. Aufgabe.

Das Product zweier einzelnen Ziffern zu finden, welche aber von ganz beliebigen höhern oder niedrigern gleichen oder ungleichen Ordnungen sind.

Anleitung zur Auflösung. Das Allgemeine der Auflösung besteht darin, daß man zuerst das Product beider Ziffern, in der Pythagorischen Tafel (§. 15.) aufsucht als ob sie beide von der Ordnung 0 wären. Dann sind folgende drei Regeln zu beobachten.

a. Ist eine dieser Ziffern von der Ordnung 0, die andern aber von einer höheren oder niedrigern Ordnung, so sind die Ziffern des Productes von derselben höhern oder niedrigern Ordnung. Bedienen wir uns der I. 10. erklärten Zeichen, so ist z. B.

$$\overset{\pm 0}{5} \;.\; \overset{+3}{4} = \overset{+3}{20} \quad \text{desgleichen} \quad \overset{\pm 0}{4} \;.\; \overset{-7}{7} = \overset{-7}{28}.$$

b. Sind die Ziffern beide von einer höhern, oder beide von einer niedrigern Ordnung, so addirt man ihre Stellenzahlen (I. 4.). Die Summe zeigt die Ordnung der Einheiten des Productes;

$$\overset{+3}{2} \;.\; \overset{+3}{5} = \overset{+6}{10}; \quad \overset{-2}{4} \;.\; \overset{-3}{4} = \overset{-5}{16}.$$

c. Ist aber die eine Ziffer von einer höheren die andere von einer niedrigern Ordnung, so muß man die kleinere Stellenzahl von der größeren subtrahiren. Dann zeigt der Rest, zu welcher Ordnung die Einheiten des Productes gehören. Also z. B.

$$\overset{+7}{5} \;.\; \overset{-2}{3} = \overset{+5}{15}; \quad \overset{+4}{9} \;.\; \overset{-7}{2} = \overset{-3}{18}$$

Diese drei Regeln sind im Hefte auf andere Beispiele, als die obigen anzuwenden.

Anleitung zum Beweise. Nimmt man zuerst an, daß beide Ziffern von der Ordnung 0 wären, so erhält man aus §. 15. unmittelbar das richtige Product. Die Einheiten desselben sind aber von der Ordnung 0.

Versetzt man nun einen der Factoren in eine beliebige höhere oder niedrigere Ordnung, so ist aus I. 12. bekannt, wie vielmal sein Werth dadurch vergrößert oder verkleinert werde. Aus §. 13. aber ergiebt sich, wie vielmal dadurch der Werth des Productes vergrößert oder verkleinert wird. Und hieraus ergiebt sich nach I. 12. wieder die Ordnung des Products.

Sind beide Ziffern von einer andern als der 0ten Ordnung so muß man erst den einen, dann aber auch den andern in die gehörige Ordnung versetzen.

Nach diesen Erörterungen kann es nicht schwer sein, den Beweis für die drei Fälle a) b) c) einzeln auszuführen, und zwar an eben den Beispielen, die oben zur Erläuterung der Auflösung gebraucht worden.

Zusatz. Da man nach I. 14. n. 2. eine mehrziffrige Zahl verbunden lesen, und als aus lauter Einheiten der niedrigsten Ordnung bestehend betrachten kann, so gelten diese Regeln auch für mehrziffrige Zahlen, und es ist

z. B. $\overset{+6}{23} \;.\; \overset{-10}{11} = \overset{-4}{253}$ u. dgl. m.

§. 17. Aufgabe.

Eine mehrziffrige Zahl welche zehntheilige Brüche enthält, mit einer einziffrigen zu multipliciren, und zwar a) wenn diese von der Ordnung 0, b) wenn sie von einer höhern, c) wenn sie von einer niedrigeren Ordnung ist.

Auflösung und Beweis.

a. Gesetzt es soll 23,576 mit 8 multiplicirt werden, so macht man Aufsatz und Rechnung völlig wie bei ganzen Zahlen. Man sagt nämlich zuerst 8 mal 6 ist 48. Da aber 6 von der dritten Bruchordnung ist, so ist auch 48 von eben der Ordnung (§. 16.). Aber 48 Einheiten der dritten Bruchordnung enthalten 4 von der zweiten, und 8 von der dritten. Bloß die letztern werden also in das Product geschrieben, die 4 Hundertel aber im Sinn behalten. Dann fährt man fort 8 mal 7 ist 56. Da aber 7 von der zweiten Bruchordnung ist, so sind es auch diese 56. Zählt man die im Sinn behaltenen 4 dazu, so erhält man 60 Einheiten der zweiten d. i. 6 Einheiten der ersten Bruchordnung. In der zweite Bruchstelle des Products ist also nur 0 zu setzen.

$$\begin{array}{r} 23{,}576 \\ 8 \\ \hline 188{,}608 \end{array}$$

Auf diese Art ist in dem Hefte ein andres selbstgewähltes Exempel ganz vollständig bis zu den höchsten Ziffern durchzugehen. Daß ein kleineres Exempel hinreichend sei ist leicht einzusehen. Denn es kommt hiebei nicht sowohl auf das Rechnen selbst an, als auf die deutliche Einsicht in den ganzen innern Zusammenhaug der Rechnung.

b. Für den zweiten und dritten Fall kann man bei demselben Exempel bleiben; nur nehme man jetzt an, daß 23,576 nicht mit 8 Einern, sondern etwa mit 8 Einheiten der dritten höheren Ordnung, also mit 8000 multiplicirt werden sollten. Dann weiß man aus I. 12., wievielmal 8 Einheiten der dritten Ordnung größer sind, als 8 Einheiten der Ordnung 0, und hieraus ergiebt sich nach §. 13, um wievielmal dadurch das Product vergrößert werde. Aus I. 12. aber ergiebt sich, daß diese Vergrößerung bloß durch eine veränderte Stellung des Komma bewerkstelligt werden könne. Es ist also bestimmt anzugeben, welches nunmehr das Product sei.

c. Nimmt man endlich an, daß in demselben Exempel 8 von einer niedrigern z. B. von der vierten Ordnung, oder 0,0008 sei, so ergiebt sich die Stellung des Komma im Product durch ganz ähnliche Schlüsse, aus I. 12. und aus §. 13. dieses Abschnittes.

§. 18. Aufgabe.

Zwei mehrziffrige Zahlen zu multipliciren, wenn eine oder beide Decimalbrüche enthalten.

Auflösung. Gesetzt es soll 64,786 mit 3,74 multiplicirt werden, so macht man Aufsatz und Rechnung gerade so, als ob es ganze Zahlen, und als ob kein Komma da wäre. Zuletzt schneidet man im Product so viele Bruchstellen ab, als in den beiden gegebenen Factoren zusammen enthalten sind. Also in unserm Exempel fünf.

64,786	
3,74	
259144	A
453502.	B
194358..	C
242,29964	

Beweis. Wenn man zuerst die Kommata sowohl in den Factoren, als im Product wegdenkt, so läßt sich aus den vorhergehenden Sätzen beweisen, daß 24229964 das richtige Produkt der ganzen Zahlen 374 × 64786 sei.

Denn in der Zeile A ist 64786 richtig nach §. 17. mit 4 multiplicirt worden, und die niedrigste Ziffer dieser Zeile (4) muß Einer enthalten, weil die niedrigste Ziffer des Multiplicandus (6) und des Multiplicators (4) von der Ordnung 0 sind.

In der zweiten Zeile B ist der Multiplicandus nach §. 17. mit 7 multiplicirt worden. Da aber diese 7 nicht von der Ordnung 0, sondern von der ersten höheren Ordnung ist, so sind alle Ziffern dieser Zeile um eine Ordnung höher, als die Ziffern der ersten Zeile. Daher ist diese Zeile um eine Stelle gegen die linke Seite fortgerückt worden, und so enthält sie den Multiplicandus nicht 7 mal, sondern 70 mal.

In der dritten Zeile C ist endlich der Multiplicandus mit 3 nach §. 17. multiplicirt worden. Da aber 3 von der zweiten höhern Ordnung ist, so sind alle Ziffern dieser Zeile um zwei Stellen gegen die linke Seite fortgerückt worden. Sie enthält also den Multiplicandus 300 mal.

In der Zeile A ist also enthalten das Product von 4×64786; in der zweiten 70×64786; in der dritten 300×64786. Addirt man diese drei Zeilen, so erhält man nach §. 9. das vollständige Product von 374×64786.

Ist auf diese Art die Richtigkeit des Products für ganze Zahlen bewiesen, so ist es leicht auch die Regel für die Stellung des Komma zu beweisen.

Man setze zuerst bloß im Multiplicandus das Komma zwischen 4 und 7, so macht man den Multiplicandus tausendmal kleiner; folglich muß auch das Product tausendmal kleiner werden (§. 13.), d. h. man muß nach I. 12. drei Bruchstellen abschneiden, also ein Komma zwischen die beiden Neunen setzen.

Jetzt setze man auch im Multiplicator das Komma wieder zwischen 3 und 7, so macht man ihn hundertmal kleiner; also wird nach §. 13. das Product hundertmal kleiner, d. h. man muß das Komma noch um zwei Stellen gegen die Linke fortrücken; also zwischen die beiden Zweien setzen.

Diese ganze Auflösung nebst dem Beweis sollen im Hefte wiederholt werden, aber an einem andern selbstgewählten Beispiel.

Zusatz. Aus dem Beweise ist klar, daß man auch bei Decimalbrüchen die Factoren ohne Änderung des Products vertauschen könne. Ja die Vertauschung muß auch bei gemeinen Brüchen Statt finden, da man ihren Werth jederzeit in Decimalbrüchen ausdrücken kann. Ein genauerer Beweis des letztern folgt in dem Abschnitt von den Brüchen.

C. Bestimmung, wie weit die Ziffern eines Productes sicher sind, wenn die Factoren abgekürzte Brüche sind.

§. 19. Aufgabe.

Zu schätzen, wie weit sich die Unsicherheit der Ziffern in dem Product zweier abgekürzten Zahlen erstrecke.

Auflösung. Wie diese Prüfung anzustellen sei, wollen wir an folgendem Beispiel zeigen. Es sei 0,3572 mit 6,284 zu multipliciren. Beide Zahlen seien abgekürzt, aber der Fehler derselben kleiner als eine halbe Einheit der letzten, oder als 5 Einheiten der nähst niedrigern Stelle.

0,3	572.	
6,	284.	
	. . . . .	E
1	4 288 .	A
28	5 76 . .	B
71	4 4 . . .	C
2 143	2	D
2,244	6 448 .	

Die Rechnung ist völlig wie im vorigen Paragraphen gemacht, und bedarf daher keiner Erklärung.

Will man nun beurtheilen, wie weit die letzten Ziffern des Products falsch oder unsicher sind, so überlege man, was eine einzige im Multiplicandus, oder Multiplicator hinzugefügte Bruchziffer für Einfluß auf die Rechnung haben würde.

a. Setzte man im Multiplicandus eine fünfte Ziffer hinzu, so würde auch jede der Rechnungszeilen A, B, C, D um eine Ziffer länger geworden sein, und man übersieht also aus dem Anblick der Rechnung, daß die drei letzten Ziffern des Quotienten falsch sind.

Es läßt sich aber leicht allgemein, und ehe man die Rechnung gemacht hat, bestimmen, wie weit diese vom Multiplicandus herrührende Unsicherheit reiche. Denn nach §. 16. läßt sich allgemein bestimmen, zu welcher Ordnung der Punkt gehöre, der in der letzten Zeile D, neben der letzten Ziffer 2 steht. Denn eine Ziffer in dieser Stelle würde entstehn durch Multiplication der höhsten Ziffer des Multiplicators, mit einer an den Multiplicandus angehängten Ziffer. Jene ist in unserm Exempel von der Ordnung 0, diese würde von der fünften Bruchordnung, folglich würde auch ihr Product, (nach §. 16.) von der fünften Bruchordnung sein. Da nun das Product beider Zahlen acht Bruchstellen haben muß, so ist klar, daß die sechste, siebente und achte Ziffer falsch sind, und selbst die fünfte nicht ganz sicher ist, weil das Product zweier einzelnen Ziffern sehr oft zweiziffrig ist.

b. Nun überlege man ferner, was für Einfluß es haben würde, wenn man dem Multiplicator eine Bruchziffer der vierten Ordnung zusetzte. Hiedurch würde die Rechnung eine Zeile mehr, und zwar noch vor der Zeile A erhalten, wie durch eine Reihe von Punkten, hinter denen E steht, angedeutet ist. Die Unsicherheit, welche hieraus entspringt, reicht also im Product so weit, als diese Punkte reichen, nämlich bis zu den Ziffern der vierten Ordnung. Daher ist zwischen den Ziffern der dritten und vierten Ordnung ein Strich herabgezogen um die sichern und unsichern Ziffern abzusondern.

Es läßt sich aber auch für diese vom Multiplicator abstammende Unsicherheit leicht eine allgemeine Regel finden. Denn man sieht leicht, daß die höhsten Ziffern der Zeile E entstehen durch Multiplication der höhsten Ziffer des Multiplicandus, mit einer an den Multiplicator angehängten Ziffer. Jene ist in unserm Beispiel von der ersten, diese wieder von der vierten, also wird ihr Product nach §. 16. von der fünften Bruchordnung sein. Da aber das Product zweier Ziffern zweiziffrig sein kann, so erstreckt sich die vom Multiplicator herrührende Unsicherheit gleichfalls bis zur vierten Bruchordnung.

Man muß daher das Product auf drei Bruchstellen abkürzen (2,245), wenn man bloß die sichern Ziffern haben will.

Auf eben die Art wie hier ist im Hauptheft ein selbstgewähltes Exempel durchzugehen. Im Übungshefte aber sind mehrere Exempel zu rechnen, und nur bei jedem kurz zu bestimmen, wie weit die Ziffern sicher sind.

D. Multiplication von mehr als zwei Factoren.

§. 20. Lehrsatz.

Wenn man mehr als zwei ganze Zahlen multiplici ren soll, so ist es völlig einerlei, in welcher Ordnung man sie multiplicirt.

Beweis. Man beweise zuerst den Satz nur an drei ganzen Factoren, so läßt sich daraus ohne Schwierigkeit auch der Schluß auf vier und mehr Factoren machen. Wir wollen hier den Beweis in unbestimmten Größenzeichen ausführen. In dem Hefte sind statt derselben beliebige ganze Zahlen zu setzen.

a. Drei Factoren A, B, C, lassen sich nur in folgenden sechs verschiedenen Ordnungen mit einander multipliciren: 1) ABC; 2) ACB; 3) BAC; 4) BCA; 5) CAB; 6) CBA. Denn wenn A der erste Factor ist, so können B und C nur entweder in der Ordnung BC, oder CB damit verbunden werden. Eben so läßt sich zeigen, daß es nur zwei Ordnungen giebt in welchen B, desgleichen zwei Ordnungen in welchen C der erste Factor ist.

Daß nun diese 6 Ordnungen einerlei Product geben, läßt sich auf folgende Art beweisen.

Nach §. 13. (a). ist es einerlei, ob man das Product AB mit C multiplicirt, oder ob man erst den Factor A mit C, und dieses Product mit C multiplicirt; d. h. Nr. 1. und 2. sind gleich.

Da ferner nach §. 8. AB und BA einerlei ist, so ist Nr. 3. mit Nr. 1. einerlei. Und da man, statt das Product AB mit mit C zu multipliciren, auch den Factor B mit C nach §. 13. (a). und dieses Product mit A multipliciren kann, so ist auch Nr. 4. so groß, als die drei vorhergehenden.

Endlich kann man in Nr. 2. CA statt AC schreiben (§. 8.), also sind Nr. 5. und 2. einerlei, und eben so kann man in Nr. 4, CB statt BC setzen (§. 8.); also sind auch Nr. 4. und 6, und also überhaupt alle sechs Ordnungen gleich.

b. Kommt zu den drei Factoren A, B, C, noch ein vierter D hinzu, so betrachte man zuerst folgende vier Ordnungen der Factoren

1) ABCD; 2) ABDC; 3) ACDB; 4) BCDA;

die sich bloß dadurch unterscheiden, daß in der ersten D, in der zweiten C, in der dritten B, und in der vierten A das letzte Glied ist. In jeder dieser vier Ordnungen können nach a) die drei ersten Factoren in jeder beliebigen Ordnung multiplicirt werden, und geben also einerlei Product Es ist also nur zu zeigen, daß auch diese vier dasselbe Product geben.

Betrachtet man ABC als ein Product von zwei Factoren, von denen einer AB, der andere C ist, so folgt aus §. 13. (a), daß es einerlei ist, ob man erst den Factor AB mit D, und dieses Product ABD mit C multiplicirt, oder ob man das ganze Product ABC mit D multiplicirt; also geben alle zu Nr. 1. und 2. gehörigen Ordnungen einerlei Product.

Ferner findet sich unter den zu Nr. 1. gehörigen Ordnungen folgende: ACBD. Betrachtet man hier ACB als ein Product von zwei Factoren AC, und B, so läßt sich auf ganz ähnliche Art wie vorher beweisen, daß die Ordnung ACBD und ACDB einerlei geben; daß also alle unter Nr. 1. und 3. gehörigen Ordnungen gleich sind.

Endlich findet sich unter den zu Nr. 1. gehörigen Ordnungen auch folgende, BCAD. Betrachtet man nun hier BCA, als ein Product von zwei Factoren BC und A, so läßt sich wieder auf die nämliche Art zeigen, daß die Ordnungen BCAD, und BCDA einerlei geben, daß also alle unter Nr. 1.

und Nr. 4. gehörigen Ordnungen, folglich überhaupt alle möglichen Ordnungen der vier Factoren einerlei Product geben.

c. Es ist nun leicht einzusehen, daß, wenn zu den vier Factoren A, B, C, D, noch ein fünfter E käme, man die Richtigkeit des Satzes gerade so wie für vier Factoren beweisen könne. Auch ist klar, daß man durch dieselben Schlüsse von 5 auf 6, von 6 auf 7, u. s. w. Factoren übergehen könne, und daß daher der Satz von jeder beliebigen Anzahl von Factoren richtig sei.

Was im Hefte zu thun sei, ist gleich zu Anfang des Beweises gesagt worden.

§. 21. Zusatz.

Der vorige Lehrsatz bleibt richtig, wenn die Factoren aus Ganzen und Decimalbrüchen, oder aus bloßen Decimalbrüchen bestehen.

Der Grund ist leicht einzusehen. Man wähle drei oder vier Factoren mit Decimalbrüchen, lasse alle Kommata weg, und multiplicire sie als ganze Zahlen, so wird man nach dem vorigen Paragraphen im Product dieselben Ziffern erhalten, man mag sie, in welcher Ordnung man will, multipliciren.

Dann multiplicire man sie auch in derselben Ordnung, mit Beibehaltung der Kommata, nach §. 17, so ist sichtbar, daß man in dieser ganzen Rechnung, und besonders auch im Product nicht eine einzige Ziffer anders erhalte, als in der ersten Rechnung.

Was aber die Stellung des Komma im Producte betrifft, so kann man sich leicht aus §. 18. überzeugen, daß das Product in jedem Fall so viele Bruchziffern enthalten müsse, als alle Factoren zusammen haben, daß also auch die Stellung des Komma durch veränderte Ordnung der Rechnung nicht verändert werden könne.

Im Hefte ist dieser Beweis an einem wirklichen Beispiel von etwa drei oder vier drei- oder vierziffrigen Factoren vollständig auszuführen.

§. 22. Zusatz.

Zum Beschluß dieses Abschnittes bemerken wir noch zweierlei:

1. daß der Satz §. 20. auch von gemeinen Brüchen gültig sei. Im ersten Abschnitte ist gezeigt worden, daß der Werth jedes gemeinen Bruches in Decimal-Brüchen ausgedrückt werden könne. Multiplicirte man nun einerseits 2, 3 oder mehrere gemeine Brüche, anderseits aber ihre Werthe in Decimalbrüchen, so müßte man im letzten Fall ein Product von demselben Werthe als im ersten Fall erhalten. Da aber nach §. 21. bei Decimalbrüchen die Ordnung willkührlich ist, so muß sie es auch bei den gemeinen Brüchen sein. Einen noch deutlichern Beweis wird man im Abschnitt von den Brüchen (VI. 14, 2.) finden.

2. Auf ähnliche Art, als hier §. 21. und 22. läßt sich die Allgemeinheit mehrerer Sätze beweisen, die im Anfang dieses Abschnittes nur auf ganze Zahlen angewendet werden. Dahin gehören namentlich die Sätze von §. 9, bis 14.

Zur Übung mag der Versuch gemacht werden, die Allgemeinheit der beiden wichtigen Sätze §. 9. und 10. auf diese Art zu erweisen; wenigstens für zehntheilige Brüche.

Anmerkung. Wenn es die Zeit erlaubt, so ist der hier folgende Anhang in der Klasse durchzunehmen. Fehlt es an Zeit dazu, so muß keiner versäumen sich mit dem Inhalt desselben durch eigenen Fleiß bekannt zu machen.

Anhang zum dritten Abschnitt.

Von der umgekehrten, und von der abgekürzten Multiplication.

§. 1. Erklärung.

Bei der Multiplication fängt man gewöhnlich, wie §. 18. geschehen, mit der niedrigsten Ziffer des Multiplicandus zu rechnen an. Man kann aber eben so leicht mit der höchsten Ziffer anfangen, und dann bis zu den niedrigeren, von einer zur andern fortschreiten. Diese Ordnung ist es, was wir die umgekehrte Multiplication nennen wollen.

§. 2. Aufgabe.

Zwei Zahlen, welche Decimalbrüche enthalten, nach der umgekehrten Ordnung zu multipliciren; die Stellung des Komma aber nicht erst im Product, sondern gleich in der ersten Zeile der Rechnung zu bestimmen.

Auflösung. Gesetzt es sollen die abgekürzten Zahlen 23,5782 und 0,3748 mit einander in umgekehrter Ordnung multiplicirt werden, so rechnet man wie folgt:

23,578	2	
0,374	8	
7,073	46 . . .	A
1,650	474 . .	B
94	3128 .	C
18	86256	D
8,837	10936	

Man multiplicirt zuerst 23,5782 mit der höchsten Ziffer des Multiplicators 3, das Product giebt 707346 in der Zeile A. Um sogleich die Stelle des Komma zu bestimmen, überlege man nur von welcher Ordnung die höchste Ziffer des Multiplicators (3), und die niedrigste des Multiplicandus (2) sei. Jene ist in unserm Beispiel von der ersten, diese von der vierten Bruchordnung. Ihr Product (6) ist also noch §. 16. von der fünften Bruchordnung. Also sind in der ersten Zeile fünf Bruchziffern abzuschneiden.

Hierauf multiplicirt man mit 7; da aber diese Ziffer um eine Ordnung niedriger ist, als 3, so müssen auch alle Producte dieser Ziffer mit den Ziffern des Multiplicandus um eine Stelle niedriger werden, als in der ersten Zeile; d. h. die ganze Zeile muß um eine Stelle gegen die rechte Seite eingerückt werden.

Aus eben dem Grunde muß jede folgende Zeile eben so nach der rechten Seite eingerückt werden, und zuletzt addirt man wie bei der gewöhnlichen Ordnung alle Zeilen.

Diese Auflösung bedarf keines besondern Beweises. Denn multiplicirt man dieselben beiden Zahlen in der gewöhnlichen Ordnung, so fällt in die Augen, daß zwischen beiden Rechnungen gar kein weiterer Unterschied ist, als daß die vier Zeilen A, B, C, D bei beiden Rechnungen nur in umgekehrter Ordnung zu stehen kommen.

§. 3. Zusatz.

Die Unsicherheit des Productes kann völlig so, wie §. 19. beurtheilt werden, und zwar noch ehe man die Rechnung anfängt.

Gäbe man nämlich dem Multiplicandus noch eine Ziffer der fünften Ordnung, so würde diese mit der höhsten Ziffer des Multiplicators ein Product von der sechsten Ordnung geben, da aber dieses zweiziffrig sein kann, so fängt sich die Unsicherheit mit der fünften Bruchstelle an.

Setzte man aber zu dem Multiplicator noch eine Ziffer der fünften Ordnung: so gäbe diese mit der höhsten des Multiplicandus, die von der ersten höheren Ordnung ist, nach §. 16. ein Product von der vierten Bruchordnung, und da dieses zweiziffrig sein kann, so ist selbst die Ziffer der dritten Stelle nicht ganz sicher.

§. 4. Aufgabe.

Da nach dem vorigen Paragraphen die im zweiten Paragraphen ausgeführte Rechnung ungefähr zur Hälfte unnütz ist, indem alle hinter dem von oben herabgezogenen Strich befindlichen Ziffern des Productes falsch, und selbst die nähste vor dem Strich unsicher ist, so entsteht die Aufgabe:

Bei einer Multiplication abgekürzter Factoren die Rechnung so abzukürzen, daß die falschen Ziffern gänzlich wegbleiben.

Auflösung. Zuerst untersuche man wie in §. 3., wie viele sichre Ziffern das Product enthalten werde. Wir haben gesehen, daß dieses in dem §. 2. berechneten Exempel, nur drei Bruchziffern sind. Um aber die dritte Ziffer gewiß fehlerfrei zu erhalten, führe man die Rechnung in vier Ziffern auf folgende Art.

23,5782	
0,3748	
7,0735 ..	A
1,6505 ..	B
943 ..	C
188 ..	D
8,8371	

Man rechne nach §. 2. in umgekehrter Ordnung, und überlege ehe man anfängt, wie viele Bruchstellen man durch die Multiplication mit 3 in der ersten Zeile A erhalte. Dieses würden fünfe sein. Da wir aber die Rechnung nur in vier Stellen führen wollen, so lasse man die letzte Ziffer des Multiplicandus (2) ganz weg, und multiplicire nur von der vorletzten Ziffer an. Doch bemerke man wenigstens in Gedanken, was die letzte Ziffer geben würde, und ist dieses über 5, (3 . 2 = 6), so vermehre man das Product (3 . 8 = 24) um Eins, und schreibe also 5 in die letzte Stelle der Zeile A, die übrige Ausrechnung dieser Zeile wie §. 2. nur daß man nicht fünf sondern vier Bruchstellen abschneiden muß.

Jetzt folgt die zweite Ziffer des Multiplicators (7). Multiplicirt man diese mit dem ganzen Multiplicandus, so erhält man sechs Bruchstellen, also zwei zuviel. Man lasse also die beiden letzten Ziffern des Multiplicandus (82) weg, und multiplicire bloß das übrige (23,57) mit 7. Nur berechne man auch hier in Gedanken, was die höhste weggelassene Ziffer (8) geben würde (7 . 8 = 56), da aber 56 näher bei 60 als bei 50 ist, so behalte man 6 im Sinne, und zähle sie zu dem Product von 7 . 7 = 49, wodurch man 55 erhält, so daß in die letzte Stelle der Zeile B wieder 5 kommt, 5 aber in Gedanken behalten werden. Die übrige Berechnung der Zeile B ist wieder wie §. 2.

Man sieht leicht, daß man mit der dritten Ziffer des Multiplicators (4) nur 23,5, mit der vierten Ziffer (8) nur 23 zu multipliciren habe; daß man aber doch die höhste weggelassene Ziffer in Gedanken multipliciren müsse, um zu sehen, ob und um wieviel man die letzte Ziffer jeder Zeile zu vergrößern habe.

Auf diese Art erhält man die völlig sichern Ziffern ganz vollständig. In der hinzugefügten vierten Stelle erhält man gewöhnlich auch dieselbe Ziffer welche die vollständige Rechnung giebt, nur bisweilen 1 mehr, oder weniger. Um diese nicht völlig sichere Ziffer kann man endlich nach I. 14. das Product abkürzen.

§. 5. Zusatz.

Endlich wollen wir noch zum Beschluß dieses Anhanges einen Rechnungs-Vortheil erklären, welcher bei großen Multiplicationen nicht nur die Arbeit sehr erleichtert, sondern besonders auch gegen Rechnungsfehler sichert.

Man berechne zuerst von derjenigen Zahl die man als Multiplicandus betrachten will die Vielfachen bis zum Neunfachen, welches (auf ähnliche Art als §. 15.) durch bloße Additionen geschieht. Dann besteht die ganze Rechnung selbst, in einem bloßen Abschreiben und Addiren des Abgeschriebenen; man mag nun nach der gewöhnlichen Art, oder umgekehrt, oder abgekürzt rechnen. Folgendes Beispiel mag zur Erläuterung dienen.

Gesetzt man sollte die Zahlen 0,2730685 und 3,3724819 multipliciren, und das Product auf sieben Bruchziffern abkürzen, so ist die Rechnung folgende:

Tafel der Vielfachen.

1	03,3724819
2	06,7449638
3	10,1174457
4	13,4899276
5	16,8624095
6	20,2348914
7	23,6073733
8	26,9798552
9	30,3523371

Rechnung.

3,3724819	
0,2730685	
0,67449638	A
23607373	B
1011745	C
20235	D
2698	E
169	F
0,92091858	

oder auf 7 Ziffern abgekürzt 0,9209186.

Bei der Tafel der Vielfachen bemerke man, daß bei den Ein- und Zweifachen vorn eine Null zugesetzt worden, damit alle Vielfachen gleichviele Ziffern haben, welches das Einrücken bei der Multiplication erleichtert. Es ist sehr leicht alle Rechnungsfehler in einer solchen Tafel zu vermeiden, da man jede einzelne Zeile auf der Stelle auf mehr als eine Art schnell prüfen kann, z. B. durch wirkliche Multiplication der ersten Zeile, desgleichen durch Addition. So muß z. B. die siebente Zeile der Summe der dritten und vierten gleich sein. Die neunte Zeile und mit ihr die ganze Tafel kann man prüfen, wenn man zu ihr die erste addirt, wodurch man alle Ziffern der ersten Zeile wieder erhalten muß nur um eine Stelle gegen die linke Seite fort gerückt.

In Ansehung der Rechnuug bemerken wir folgendes. Die Zeile A ist die zweite der Tafel, weil die höhste Ziffer des Multiplicators 2 ist. Die Zeile B ist die siebente der Tafel, weil die zweite Ziffer des Multiplicators 7 ist, nur ist sie um eine Stelle nach der rechten Seite eingerückt, und am Ende um eine Ziffer abgekürzt. Die dritte Ziffer des Multiplicators ist 3, daher ist C die dritte Zeile der Tafel, wieder um eine Stelle eingerückt, und um zwei Ziffern abgekürzt. Hierauf folgt 0 im Multiplicator, welches keine Zeile giebt. Dann folgt 6, also ist D die sechste Zeile der Tafel, aber wegen der vorhergehenden 0 um zwei Stellen eingerückt, und am Ende um vier Ziffern abgekürzt. Die Zeile E enthält die vier höhsten Ziffern der achten, und F die drei höhsten Ziffern der fünften Zeile der Tafel.

Addirt man nun alle diese Zeilen, so erhält man das Product in acht Ziffern. Da aber nur 7 Ziffern verlangt wurden, so ist in der siebenten Stelle 6 statt 5 zu setzen. Doch ist in Ansehung dieser 6 zu merken, daß sie nur dann für ganz sicher zu halten ist, wenn die beiden Factoren nicht abgekürzte, sondern genaue Brüche sind. Sind sie aber abgekürzt, so fällt in die Augen, daß, wenn im Multiplicator noch die achte Bruchziffer aufgesetzt wäre, leicht zu der 6 noch 1, auch wohl 2 hätte hinzukommen können. Es sind also in der That nur die sechs ersten Ziffern (also 0,920919) als ganz sicher zu betrachten.

Anmerkung. Am wichtigsten wird der hier erklärte Vortheil, wenn man, wie oft bei mathematischen Rechnungen vorkommt, viele Multiplicationen zu machen hat, die einen Factor gemein haben. Diesen Factor muß man als den gemeinsamen Multiplicandus betrachten, und von ihm die Tafel der Vielfachen machen. In diesem Fall bleibt der Vortheil wichtig, selbst wenn die einzelnen Multiplicationen nicht groß wären.

Vierter Abschnitt.

Allgemeine Sätze von der Division, nebst den Regeln für die zehntheiligen Brüche.

A. Allgemeine Sätze und besondere Begriffe von der Division.

§. 1. Erklärung.

Eine Zahl A durch eine andere B dividiren, heißt eine dritte C finden, welche so beschaffen ist, daß sie mit B multiplicirt A giebt.

Von den Bestandtheilen einer Division nennt man A den Dividendus, B den Divisor, und C den Quotienten.

Die Bezeichnung der Division ist schon oben (I. 26.) erklärt worden, und hier nur zu wiederholen.

Noch ist zu bemerken, daß man ein Divisionszeichen kurz vermittelst der Wörter durch oder in liest, je nachdem man den Dividendus oder den Divisor zuerst ausspricht. Z. B. $\frac{60}{5}$, 60 durch 5, oder 5 in 60.

Diese Erklärungen sind im Hefte sämmtlich auf beliebig gewählte ganze Zahlen anzuwenden, und dadurch zu erläutern.

§. 2. Zusatz.

Aus dieser Erklärung der Division, ergeben sich in Verbindung mit den ersten Begriffen der Multiplication folgende Sätze.

a. Da der Quotient mit dem Divisor multiplicirt jederzeit den Dividendus giebt, so folgt, daß jedes Product zweier Größen, durch einen seiner Factoren dividirt, den andern Factor zum Quotienten geben müsse, d. h. in allgemeinen Zeichen: wenn $A = BC$ so ist $\frac{A}{B} = \frac{BC}{B} = C$; desgleichen $\frac{A}{C} = \frac{BC}{C} = B$.

b. Bei jeder Division können der Divisor und Quotient vertauscht werden; d. h. in Zeichen, wenn $\frac{A}{B} = C$, so ist umgekehrt auch $\frac{A}{C} = B$.

c. Multiplication und Division sind entgegengesetzte Rechnungsarten, deren eine die andere aufhebt. Multiplicirt man nämlich eine Zahl A mit einer andern B, und dividirt dann das Product AB durch B, so erhält man wieder die erste Zahl A, d. h. in Zeichen $\frac{AB}{B} = A$. Eben so, wenn man eine Zahl A durch eine andere B dividirt, und dann den Quotienten wieder mit B multiplicirt, so erhält man wieder die erste Zahl A, d. h. in Zeichen $\frac{A}{B} \times B = A$.

Diese Folgerungen sind im Hefte durch bestimmte Zahlenbeispiele zu erläutern, wobei es hinreichend ist, solche Beispiele zu wählen, worin A, B und C ganze Zahlen sind, obgleich alle diese Sätze auch ihre Richtigkeit behalten, wenn diese Zahlen zum Theil oder sämmtlich gebrochen sind.

§. 3. Lehrsatz.

Der Quotient entsteht in jedem Fall aus dem Dividendus, wie die Einheit aus dem Divisor. Oder mit andern Worten: Der Divisor verhält sich zur Einheit wie der Dividendus zum Quotienten. Oder in Zeichen: wenn A der Dividendus, B der Divisor, und C der Quotient ist, so verhält sich $B : 1 = A : C$.

Beweis. Wenn $\frac{A}{B} = C$, so ist nach §. 1. $A = BC$. Wendet man hierauf III. 3. an, und betrachtet B als Multiplicator, so verhält sich $1 : B = C : A$. Kehrt man aber nach III. 2. beide Verhältnisse um, so ergiebt sich

$$B : 1 = A : C,$$

also entsteht der Quotient (C) aus dem Dividendus (A) wie die Einheit aus dem Divisor (B).

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen, nur sind statt A, B, C, bestimmte Zahlen zu setzen.

§. 4. Zusatz.

Die Division besteht in gewissen Fällen aus einer Theilung des Dividendus, welches der erste besondere Begriff der Division ist.

Aber es giebt auch Fälle, wo die Division eine Vervielfältigung, oder auch eine Theilung und Vervielfältigung zugleich ist.

Dieser Zusatz läßt sich am kürzesten aus §. 3. ableiten, wenn man folgende drei Fälle unterscheidet.

a. Der Divisor kann eine ganze Zahl sein. Dann (aber auch nur in diesem Fall) kann die Division als eine Theilung vorgestellt werden; wie man leicht einsieht, wenn man überlegt ob Eins aus einer ganzen Zahl durch Theilung oder Vervielfältigung entstehe.

b. Der Divisor kann ein Bruch mit dem Zähler 1 sein. Dann läßt sich durch eine ähnliche Überlegung zeigen, daß die Division in einer Vervielfältigung des Dividendus bestehe.

c. Der Divisor kann endlich ein Bruch sein, dessen Zähler eine andere ganze Zahl als 1 ist. Dann muß man, um Eins aus demselben entstehen zu lassen, ihn erst in so viele Theile theilen, als der Zähler Einheiten hat, und einen solchen Theil so vielmal vervielfältigen, als der Nenner Einheiten hat. Eben dieses muß also auch mit dem Dividendus geschehen.

Diese drei Fälle sind im Hefte mit Anwendung auf bestimmte ganze Zahlen und Brüche durchzugehen; wobei nicht zu übersehen ist, daß die Beschaffenheit des Dividendus auf diese Schlüsse nicht den geringsten Einfluß hat. Es hängt also lediglich vom Divisor ab, ob die Division als Theilung, oder als Vervielfältigung, oder als beides zugleich angesehen werden könne.

§. 5. Zusatz.

a. In gewissen Fällen heißt dividiren auch, untersuchen wie vielmal der Divisor im Dividendus enthalten sei. Allein hiedurch wird nicht der ganze Begriff der Division erschöpft, und es läßt sich diese Erklärung besonders nur dann bequem anwenden, wenn der Divisor kleiner ist als der Dividendus.

b. In diesem Fall kann aber die Division durch eine bloße Subtraction verrichtet werden, indem man den Divisor so oft vom Dividendus abzieht, als es angeht, und zählt, wie vielmal man subtrahirt hat. Doch kann man nur dann auf diese Art den Quotienten vollständig finden, wenn der Dividendus ein genaues Vielfaches des Divisors ist. Bleibt aber nach der letzten Subtraction, die sich machen läßt, ein Rest, so kann erst in der Folge gezeigt werden, wie der Quotient vollständig zu schaffen sei.

Der Inhalt dieses Paragraphen ist durch selbstgewählte Beispiele ganzer Zahlen zu erläutern.

Man wähle also zuerst einen Dividendus (z. B. 60), der von dem Divisor (etwa 12), ein genaues Vielfaches ist. Untersuche ich nun, wie vielmal 12 von 60 subtrahirt werden kann, und finde, daß es gerade 5 mal angeht, so folgt, daß 12 in 60 5 mal enthalten sei, und dann ist es leicht aus §. 1. zu beweisen, daß 5 der Quotient von 60 durch 12 sei.

Sollte aber 67 durch 12 dividirt werden, so wird bei der letzten Subtraction der Rest 7 bleiben. Also erhält man den Quotienten auf diese Art nicht vollständig.

Im Hefte sind diese Erläuterungen nur an andern, als den hier gebrauchten Zahlen zu wiederholen.

Anmerkung. Wenn Jemand die Division erklärt a) durch Theilung einer Zahl, oder b) durch Untersuchung, wie vielmal eine Zahl in einer andern enthalten sei, so ist aus §. 3. und 4. klar, daß er nichts Unrichtiges sage, sondern nur eine unvollständige Erklärung gebe, die sich nicht auf alle bei der Division vorkommenden Fälle anwenden läßt. Wer aber das Rechnen gründlich, d. i. wissenschaftlich erlernen will, der muß es dahin zu bringen suchen, daß er jede zwei Zahlen, sie mögen beschaffen sein, wie sie wollen, eine durch die andere zu dividiren wisse. Hiezu ist aber durchaus nothwendig, daß man einen ganz vollständigen, und alle möglichen Fälle umfassenden Begriff von der Division im Kopfe habe. Es ist daher alle Aufmerksamkeit auf die Erklärung §. 1. zu verwenden, denn es wird sich in dem Verfolge zeigen, daß sich aus ihr die Regeln für jeden besondern Divisionsfall, ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

Hieraus folgt indessen nicht, daß man die obigen beschränkten Erklärungen a) und b) gar nicht in der Theorie brauchen könne: Denn da sie an sich richtig sind, so darf man sie überall anwenden, wo es die Umstände erlauben, ja man darf überall eine statt der andern setzen, ohne einen Irrthum besorgen zu dürfen. Wären z. B. 12 Ellen Tuch für 60 Thlr. gekauft, und es wollte Jemand den Preis von einer Elle ausrechnen, so fodert der Sinn der Frage, daß 60 in 12 Theile getheilt werde; statt dessen aber darf man, ohne einen Irrthum zu besorgen, sagen: ich will ausrechnen wievielmal 12 in 60 enthalten sei. Desgleichen, wenn 7 durch 12 dividirt werden soll, so kann man nicht eigentlich fragen, wie vielmal 12 in 7 enthalten sei, aber wohl kann ich verlangen, daß die Zahl 7 in 12 gleiche Theile getheilt, und bestimmt werden solle, wie groß ein solcher Theil sei.

Man kann also jeden dieser Begriffe beliebig brauchen, wo die Beschaffenheit der Zahlen ihn anzuwenden erlaubt.

B. Allgemeine Lehrsätze von der Division.

§. 6. Zusatz.

Wenn bei einer Division sowohl der Divisor als der Quotient ganze Zahlen sind, so ist auch der Dividendus eine ganze Zahl, und zwar ein Vielfaches sowohl vom Divisor, als vom Quotienten.

Dieses folgt unmittelbar aus §. 1, in Verbindung mit §. 2. b. und III. 8., und ist in dem Hefte aus diesen Paragraphen abzuleiten, und auf bestimmte Zahlen anzuwenden.

§. 7. Zusatz.

a. Bei einer Division können der Dividendus und Divisor benannte Zahlen sein; nur müssen sie alsdann gleiche Benennung, und jede nur eine haben. Der Quotient aber ist alsdann eigentlich eine unbenannte Zahl.

b. Es kann aber auch der Dividendus benannt, und der Divisor unbenannt sein; dann ist der Quotient benannt, und hat gleiche Benennung mit dem Dividendus.

Beides folgt aus §. 1. in Verbindung mit III. 5.

Es soll im Hefte zuerst gezeigt werden, wie dieses folge. Dann sollen zur Erläuterung einige Beispiele in ganzen Zahlen beigefügt werden.

Anmerkungen.

1. Im Satze ist gesagt, daß jeder Bestandtheil der Division nur eine Benennung haben müsse. Dieses ist nothwendig, so fern eine wirkliche Zahlenrechnung, und zwar nur eine gemacht werden soll.

Der Divisor muß zu dem Ende immer eine einzige ganze oder gebrochene Zahl sein, weil man sonst (nach §. 3.) nicht bestimmt würde angeben können, wie die Einheit aus ihm durch Theilung oder Vervielfältigung entsteht.

Der Dividendus kann zwar, wie wir in der Folge sehen werden, aus zwei oder mehr Stücken bestehen. Bringt man ihn aber nicht in eine einzige Zahl, so muß man eben so viele Divisionen machen, als er Stücke hat.

Dieses hier vorläufig; eine nähere Erörterung folgt unten §. 12.

2. So wie es bei der Multiplication Fälle giebt, wo beide Factoren benannt zu sein scheinen, so giebt es bei der Di-

vision Fälle, wo alle drei Zahlen als benannte erscheinen, oder wo der Dividendus und Divisor ganz verschiedene Benennungen haben. Untersucht man aber den Sinn solcher Fälle genauer, so kann man sich leicht überzeugen, daß die Abweichung von unserm Satze nur scheinbar ist.

Wenn z. B. 324 Zoll zu Fußen gemacht werden sollen, so muß man 324 durch 12 dividiren; und man findet 27 Fuß. Hier erscheint der Quotient mit einer andern Benennung als der Dividendus, und der Divisor als unbenannt. Der letztere hat indessen genau betrachtet auch die Benennung Zoll, und durch die Division erfährt man, daß 12 Zoll in 324 Zoll 27 mal enthalten sind. Also ganz dem ersten Theil unsers Satzes gemäß. Wenn man aber sagt der Quotient sei 27 Fuß, so rührt diese Benennung nicht von der Division her, sondern beruht bloß darauf, daß 12 Zoll den Namen Fuß führen. Diese Benennung gehört also dem Sinn des Exempels an, aber nicht der Division. Will dagegen Jemand den zwölften Theil von 324 Zollen wissen, so muß gerade wie vorher mit 12 dividirt werden, und der Quotient ist nun nicht 27 Fuß, sondern 27 Zoll, wie es nach dem zweiten Theil unsers Satzes sein muß.

Wenn 12 Centner mit 324 Thlr. bezahlt sind, und man will den Preis eines Centners wissen, so muß wieder 324 durch 12 dividirt werden, und die Antwort ist 27 Thlr. Man sieht aber leicht, daß hier die Benennung Centner gar nichts mit der Rechnung zu schaffen hat Denn sagt man in dem Exempel 12 Morgen Acker kosten 324 Thlr., was 1 Morgen? so ist die Rechnung und die Antwort vollkommen dieselbe. Also gehört auch hier die Benennung des Divisors nur zu der besondern Einkleidung des Exempels, hat aber auf die Rechnung keinen Einfluß.

3. Wer mit Verstand rechnen will, muß eigentlich die Betrachtung über die Benennungen vor der Rechnung anstellen, weil man öfters genöthigt ist, die Benennungen vor der Rechnung zu ändern.

Wollte z. B. Jemand ausrechnen, wie vielmal 7 Loth in 11 Pfunden enthalten sind, so ist klar, daß er erst die 11 Pfund in 352 Loth verwandeln müßte, ehe er dividiren kann.

Sollte ausgerechnet werden wie vielmal 3 Thlr. 8 Gr. in 57 Thlr. 20 Gr. enthalten sind, so muß jede Zahl erst unter eine einzige Benennung, und zwar beide unter dieselbe gebracht werden, u. dgl. m.

Ist man aber über die Benennungen im Klaren, dann darf man in der Rechnung selbst die Zahlen als unbenannte betrachten, weil die Benennungen auf die Größe des Quotienten keinen Einfluß haben.

§. 8. Lehrsatz.

a. So vielmal ein Dividendus vervielfältigt, oder verkleinert wird, eben so vielmal wird der Quotient im ersten Fall vervielfältigt, im andern verkleinert.

b. So vielmal dagegen ein Divisor vervielfältigt oder verkleinert wird, eben so vielmal wird der Quotient (in umgekehrter Ordnung), im ersten Fall verkleinert, im andern vervielfältigt.

Anleitung zum Beweise. Da nach §. 1. der Quotient mit dem Divisor multiplicirt in jedem Fall den Dividendus geben muß, so läßt sich der Beweis ganz allgemein, aus §. 13. und 14. des vorigen Abschnitts ableiten; nämlich a) aus §. 13., und b) aus §. 14.

Dieses ist im Hefte vollständig an einem selbstgewählten Beispiel, und wegen der Wichtigkeit des Satzes mit aller Aufmerksamkeit auszuführen.

§. 9. Zusätze.

a. Wenn man also einen Dividendus und Divisor gleichviel mal vervielfältigt, oder verkleinert, so bleibt der Quotient ungeändert.

b. Man erhält einerlei Quotienten, wenn man einen vervielfältigten Dividendus durch einen ungeänderten Divisor, oder wenn man den ungeänderten Dividendus, durch den eben so vielmal verkleinerten Divisor dividirt.

c. Und umgekehrt: Man erhält einerlei Quotienten, wenn man nur einen Theil des Dividendus durch den ungeänderten Divisor, oder wenn man den ungeänderten Dividendus durch den eben so vielmal vergrößerten Divisor dividirt.

Alle drei Zusätze folgen unmittelbar aus dem vorigen Paragraphen. Dieses soll an selbstgewählten Beispielen deutlich gemacht werden. Bei b) und c) aber ist noch bestimmt anzugeben, wie vielmal der so gefundene Quotient größer oder kleiner sei, als der Quotient des ungeänderten Dividendus durch den ungeänderten Divisor.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn die Summe zweier Zahlen durch eine dritte ganze Zahl dividirt werden soll, so besteht der Quotient aus den beiden Theilquotienten die man erhält, wenn man jede der beiden Zahlen durch den unzerstückelten Divisor dividirt.

Beweis. Gesetzt man sollte 42 + 30 durch 6 dividiren, so ist (nach §. 3.) der sechste Theil von 42 + 30 (d. i. von 72) zu bestimmen. Denkt man sich nun sowohl 42 als 30 in 6 gleiche Theile getheilt, und verbindet de.. ersten Theil von 42 mit dem ersten von 30, dann den zweiten Theil von 42 mit dem zweiten von 30 u. s. f., so ist sichtbar, daß man dadurch sechs gleiche Summen erhält, welche zusammen 42 + 30 oder 72 ausmachen.

Dieser Beweis ist im Hefte, nur mit andern selbstgewählten Zahlen, zu wiederholen.

Anmerkungen.

1. Man kann zwar noch anschaulicher den Beweis dieses Satzes aus dem andern besondern Begriff der Division (Untersuchen, wie vielmal eine Zahl in der andern enthalten sei) führen: denn man übersieht mit einem Blick, daß so oft 6 in 42 und in 30 einzeln enthalten ist, es eben so oft in 72 enthalten sein müsse. Beweist man es aber aus dem Begriff der Theilung, so ist der Beweis umfassender, denn es ist klar, daß der ganze Beweis noch gültig bleibe wenn man statt der ganzen Zahlen 42 und 30, zehntheilige oder gemeine Brüche, oder überhaupt irgend zwei gleichartige Größen gesetzt hätte.
2. Nennt man die beiden gegebenen Zahlen A und B, und den ganzen Divisor C, so läßt sich der Satz höhst einfach durch folgende Formel vorstellen

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

§. 11. Lehrsatz.

Wenn die Differenz zweier Zahlen durch eine dritte ganze Zahl dividirt wird, so besteht der Quotient aus der Differenz der beiden Theilquotienten, die man erhält, wenn man jede Zahl einzeln durch den unzerstückelten Divisor dividirt.

Anleitung zum Beweise. Der Beweis ist dem vorhergehenden so ähnlich, daß er sehr leicht nach dem Muster desselben an selbstgewählten Zahlen geführt werden kann. Der ganze Unterschied besteht darin, daß, da im vorigen Paragraphen die einzelnen Theile beider Zahlen addirt wurden, hier immer ein Theil der kleineren Zahl von einem Theil der größeren subtrahirt werden muß.

Anmerkungen.

1. Die erste Anmerkung des vorigen Paragraphen ist auch auf diesen anwendbar.

2. Wenn die gegebenen Zahlen A und B hießen, und A > B, C aber der ganze Divisor ist, so kann der Satz durch folgende Formel vorgestellt werden

$$\frac{A - B}{C} = \frac{A}{C} - \frac{B}{C}$$

§. 12. Lehrsatz.

a. Den Dividendus darf man jederzeit stückweise durch den unzerstückelten Divisor dividiren.

b. Dagegen darf der Divisor nie zerstückelt werden.

Anleitung zum Beweise.

a. Der erste Theil des Satzes ist, wie man leicht sieht, eine unmittelbare Folge aus §. 10. Denn unmittelbar aus diesem Satze ergiebt sich, daß man zuerst den Dividendus in zwei beliebige Stücke zerlegen, und das erste dividiren könne. Bei der Division des zweiten Stücks aber kann man wieder den Satz anwenden, und daher die Zerstückelung des Dividendus so weit fortsetzen, als man für gut findet.

b. Der zweite Theil ergiebt sich aus dem ersten, da jedes Stück immer durch den ganzen Divisor dividirt werden muß.

Anmerkung. In der Buchstabenrechnung wird zwar gelehrt werden, wie man auch durch einen aus mehreren Stücken bestehenden Divisor dividiren könne, aber bei Zahlenrechnungen ist immer der Divisor als ein ungetheiltes Ganzes zu betrachten.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn Dividendus und Divisor ganze Zahlen sind, so kann der Quotient jederzeit durch einen gemeinen Bruch vorgestellt werden, dessen Zähler der Dividendus und dessen Nenner der Divisor ist. Dieser Bruch ist also ächt, wenn der Dividendus kleiner ist als der Divisor, im entgegengesetzten Fall ist er unächt (I. 7.).

Beweis. Es sei z. B. 5 durch 11 zu dividiren, so ist zu beweisen, daß der gemeine Bruch $\frac{5}{11}$ den Quotienten richtig ausdrücke.

Wenn 5 durch 11 dividirt werden soll, so heißt dieses nach §. 3., es soll der elfte Theil von Fünfe ausgerechnet werden. Nun ist aber der elfte Theil von Eins $\frac{1}{11}$. Da aber 5 fünfmal so groß ist als 1, so muß auch der elfte Theil von 5 fünfmal so groß sein, als der elfte Theil von 1. Dieser elfte Theil kann also nichts anders sein, als fünfmal $\frac{1}{11}$, d. i. $\frac{5}{11}$.

Daß der Beweis eben so geführt werden könne, wenn der Dividendus größer ist als der Divisor, fällt in die Augen.

Im Hefte ist dieser Beweis zu wiederholen, nur dabei zwei andere beliebige ganze Zahlen als 5 und 11 zu wählen.

§. 14. Zusatz.

Hieraus ist klar, daß ein bloß angedeuteter Quotient und ein Bruch eigentlich einerlei sind, weswegen sie auch auf einerlei Art bezeichnet werden. Man kann daher einen solchen Ausdruck wie $\frac{5}{11}$ ganz beliebig als Bruch, oder als Quotienten vorstellen.

Den Ausdruck $\frac{5}{11}$ denkt man als Bruch, wenn man sagt er bedeute den elften Theil von Eins fünfmal genommen. (I. 7.)

Als Quotient denkt man ihn, wenn man sagt, der Ausdruck bedeute den elften Theil von Fünfe (§. 13).

Diese Erläuterung ist im Hefte an einem andern Beispiel zu wiederholen.

Anmerkung. Der Inhalt dieses Paragraphen ist sehr wichtig. Denn man begreift leicht, daß sich aus den meisten Sätzen, welche in diesem Abschnitt bewiesen werden, eben so viele Sätze für die Lehre von den Brüchen durch bloße Veränderung des Ausdrucks werden ableiten lassen. Es ist daher dem Anfänger zu empfehlen, daß er im Hefte folgende Sätze so auszudrücken suche, wie sie auf Brüche angewendet lauten müssen: §. 2. c. §. 8. §. 9. a. b. c. §. 10. §. 11.

§. 15. Lehrsatz.

Wenn der Dividendus größer ist als der Divisor, beides aber ganze Zahlen sind, so ist der Dividendus entweder ein Vielfaches des Divisors, oder er läßt sich in zwei Stücke theilen, wovon das erste ein Vielfaches des Divisors, das zweite aber kleiner als der Divisor ist; und in diesem Fall besteht der Quotient aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch.

Einen solchen Rest, der kleiner ist als der Divisor, nennt man schlechthin den Rest der Division.

Beweis. Wenn z. B. 37 durch 5 dividirt werden soll, so kann die Division nach §. 5. durch Subtraction verrichtet werden, indem man den Divisor so oft als es angeht, vom Dividendus abzieht.

Entweder bleibt nun nach allen Subtractionen kein Rest, wie, wenn man z. B. 5 von 35 abzieht, welches siebenmal angeht. Dann ist klar, daß der Dividendus 35 das Siebenfache von 5 sei.

Oder die Subtractionen gehen nicht auf, wie bei den zuerst angenommenen Zahlen, wo nach siebenmaliger Abziehung des Divisors, 2 übrig bleibt, so ist klar, daß dieser letzte Rest kleiner als der Divisor sein müsse, weil man diesen sonst noch abziehen könnte. Also läßt sich der Dividendus 37 in zwei Stücke theilen, wovon das erste 7 . 5 (oder 35), das andere aber 2 ist. Oder in Zeichen: $37 = 7 . 5 + 2$.

Wenn man also, statt 37, seine beiden Theile $5 . 7 + 2$ durch 5 (nach §. 10.) dividirt, so ist $\frac{5.7}{5} = 7$ (§. 2.), der zweite Theil 2 aber giebt nach §. 13. den Bruch $\frac{2}{5}$; also ist der ganze Quotient $7 + \frac{2}{5}$, folglich aus einer ganzen Zahl, und einem ächten Bruch zusammengesetzt.

§. 16. Zusatz.

In diesem Satze liegt in Verbindung mit einigen früheren Sätzen dieses Abschnitts der strenge Beweis verschiedener Regeln des Dividirens, und der Bruchrechnung, die in der praktischen Arithmetik entweder gar nicht, oder doch nicht in eigentlich wissenschaftlicher Form erwiesen werden. Dahin gehören folgende Sätze.

a. Wenn bei einer Division einer größeren ganzen Zahl durch eine kleinere die Rechnung nicht aufgeht, so muß der Quotient durch Anhängung eines Bruchs vollständig gemacht werden. Dieses beruht auf unserm Paragraphen in Verbindung mit §. 10. und §. 13.

b. Ferner ergiebt sich unmittelbar aus unserm Paragraphen die gewöhnliche Regel für die Proberechnung einer Division.

c. Aus Verbindung von §. 13. und 14. mit dem bei a) gesagten, ergiebt sich die Regel, wie man einen unächten Bruch in eine gemischte Zahl zu verwandeln habe.

d. Und hieraus folgt endlich in Verbindung mit b), wie man umgekehrt eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch verwandeln könne.

Jeder dieser Sätze ist im Hefte deutlich auszusprechen, und durch ein Beispiel zu erläutern.

C. Sätze, die sich auf unsere zehntheilige Zählungsart beziehen.

§. 17. Aufgabe.

Zu finden, wie oft eine einziffrige Zahl in einer andern, die kleiner als das Zehnfache von jener ist, enthalten sei; auch den etwa bleibenden Divisionsrest zu finden.

Diese Aufgabe umfasset alle diejenigen Divisionsfälle, deren Beantwortung jeder der dividiren will, nicht nur muß finden können, sondern die jeder, der fertig rechnen will, schon fertig im Gedächtniß haben muß. Es ist aber hier der Zweck dieser Aufgabe und der dazu erforderlichen Ausarbeitung im Hefte nicht, daß der Schüler die Auflösung erst lernen solle. Vielmehr wird vorausgesetzt, daß ihm die gefoderte Arbeit nicht nur bekannt, sondern geläufig sei. Der Zweck der zu machenden Ausarbeitung ist aber, daß er sich üben soll, das, was er schon begriffen hat, deutlich und in guter Ordnung niederzuschreiben, und besonders bestimmt zu zeigen, wie die Auflösung mit früheren Sätzen dieses und der vorigen Abschnitte zusammenhänge. Damit nun dieses auf eine zweckmäßige Art geschehe, so werden folgende Fragen zu beantworten sein.

a. Wie kann man wissen, ob der gegebene Dividendus kleiner sei als das Zehnfache des Divisors?

b. Ist man hierüber im Klaren, so fragt sich; aus welchen früheren Sätzen man wissen könne, wie vielmal der ganze Divisor im Dividendus enthalten sei?

c. Ferner ist zu sagen: wie man entdecke, ob, und welcher Rest bei der Division bleibe?

d. Endlich: da man alle Divisionsfälle, welche unter diese Aufgabe gehören im Gedächtniß haben soll, so ist noch zu zeigen, ob es nöthig sei, alle diese Fälle in eine eigene Tabelle zu bringen? oder ob dazu schon eine früher ausgearbeitete hinreiche?

Daß diese Fragen, nicht bloß in allgemeinen Ausdrücken, sondern in Beziehung auf eine bestimmte zum Grunde gelegte Frage (z. B. wie oft 8 in 61 enthalten, u. dgl. m.) zu beantworten sei, bedarf keiner Erinnerung.

Anmerkung. Die Aufgabe schließt solche Fälle nicht aus, wo der Dividendus kleiner als der Divisor, oder eben so groß, oder auch etwas größer, doch kleiner als das Zwiefache des Divisors ist. Im ersten Fall ist der ganze Theil des Quotienten Null, und der ganze Dividendus ist als Rest zu betrachten. Im zweiten Fall ist er Eins ohne Rest. Im dritten Eins mit einem Rest. Kurz, man muß bei jeder hieher gehörigen Frage jederzeit beantworten können, 1) wie viele Ganze der Quotient enthalte, und 2) wie groß der Rest sei.

§. 18. Aufgabe.

Zu einem mehrziffrigen Divisor, und einem Dividendus der kleiner ist als das Zehnfache des Divisors, den Quotienten zu finden, so weit sich dieser durch eine einzige Ziffer ausdrücken läßt, nebst dem Rest, der unter dieser Voraussetzung bleibt.

Auch bei dieser Aufgabe ist der Zweck nicht, daß der Schüler erst ihre Auflösung lernen solle, sondern nur daß er versuchen solle, die im Kopfe vorzunehmenden Arbeiten in guter Ordnung und deutlich zu beschreiben. Hiebei wird folgendes zu beobachten sein. Zuerst muß wieder gezeigt werden, nach welchem frühern Satze man wissen könne, daß der gegebene Dividendus kleiner sei, als das Zehnfache des Divisors. Dann ist zweierlei zu zeigen, nämlich a) wie man ohne eigentliches Probiren, und b) wie man kürzer, vermittelst eines regelmäßigen Probirens jede hieher gehörige Frage beantworten könne.

a. Wenn gar kein eigentliches Probiren statt finden soll, so sieht man leicht, daß man alle Vielfachen des Divisors ausrechnen müßte, bis man zu einem kommt, das größer ist als der Dividendus. Und es ist daher zu zeigen, wie diese

Vielfachen vom Einfachen bis zum Neunfachen, nach frühern Sätzen, aufs kürzeste, und zwar durch bloße Additionen gefunden werden können.

b. Ist zu zeigen, wie man durch ein gewisses abgemessenes Probiren, kürzer zum Ziel komme. Hiebei wird man sich bestimmt auf mehrere frühere Sätze beziehen müssen. Zuerst muß man nämlich den Divisor so abkürzen, daß nur seine höhste Ziffer allein übrig bleibt, und zwar kürzt man am besten so ab, daß der Fehler weniger beträgt als eine halbe Einheit der höhsten Ziffer. Dann kürzt man den Dividendus um eben so viele Ziffern ab, als man den Divisor abgekürzt hat. Hierauf wird sich zeigen lassen, daß vom Dividendus durch diese Abkürzung entweder nur eine oder zwei Ziffern übrig bleiben. Auch wird sich aus einem Satz des ersten Abschnitts zeigen lassen, daß die beiden so abgekürzten Zahlen nur ein kleines Stück ihres Werthes sind, und daß man daher berechtigt sei, zu vermuthen, daß der wahre Divisor im wahren Dividendus eben so oft enthalten sei, als der abgekürzte im abgekürzten. Wie oft aber der abgekürzte Divisor im abgekürzten Dividendus enthalten sei, ergiebt sich aus §. 17. Multiplicirt man nun den ganzen Divisor, mit der so gefundnen ganzen Ziffer des Quotienten, und vergleicht das Product mit dem ganzen Dividendus, so wird sich bald zeigen, ob der gefundene Quotient der rechte sei, oder ob man ihn um Eins zu vergrößern oder zu verkleinern habe.

Dieses ist nun mit Beifügung eines bestimmten Zahlenbeispiels auszuführen.

§. 19. Zusatz.

1. Wenn in einem Beispiel des vorhergehenden Paragraphen die niedrigsten Ziffern des Dividendus und Divisors von der Ordnung Null sind, so ist auch der einziffrige Quotient, nebst der niedrigsten Ziffer des Restes von der Ordnung Null.

2. Ist aber die niedrigste Ziffer im Dividendus von irgend einer höheren oder niedrigern Ordnung, im Divisor aber von der Ordnung Null, so ist auch der einziffrige Quotient und die niedrigste Ziffer des Restes von derselben Ordnung als im Dividendus.

Erläuterung. Es sei z. B. nach dem vorigen Paragraphen zu untersuchen, wie vielmal 85 in 367 enthalten sei, so findet man 4 mal, und wenn man 4 mal 85 = 340 von 367 subtrahirt, so bleibt der Rest 27.

1. Nun erinnere man sich zuerst aus I. 14. n. 2. daß man den Dividendus als 367 Einer, und den Divisor als 85 Einer lesen könne, daß also die Frage nur ist, wie vielmal 85 Einer in 367 Einern ganz enthalten sind. Der Quotient 4 ist also auch von keiner höhern oder niedrigern Ordnung, als von der Ordnung Null; uud wenn man 85 mit diesen 4 Einern multiplicirt, so ist das Product auch nichts anders als 340 Einer; und wenn man diese 340 Einer von 367 Einern subtrahirt, so kann der Rest auch nichts anders sein, als 27 Einer. Ist also Dividendus und Divisor von der Ordnung Null, so sind auch Quotient und Rest von dieser Ordnung.

2. Wäre dagegen 367 von der ersten höhern Ordnung, also 367 Zehner, 85 hingegen von der Ordnung Null, so darf man zwar auch nach §. 18. sagen 85 ist in 367 enthalten 4 mal. Da aber 367 Zehner 10 mal so groß sind, als 367 Einer, so muß auch 85 darin (nach §. 8.), 10 mal so oft, also eigentlich 40 mal enthalten sein, d. h. der Quotient 4 ist also nicht 4 Einer, sondern 4 Zehner, d. h. er ist von der ersten höheren Ordnung, und wenn man 85 Einer mit dieser 4 multiplicirt, so besteht das Product aus 340 Zehnern, und wenn man diese von 367 Zehnern subtrahirt, so besteht auch der Rest aus 27 Zehnern. Ist also der Dividendus von der ersten höhern Ordnung, der Divisor aber von der Ordnung Null, so sind Quotient und Rest auch von der ersten höhern Ordnung.

Man sieht leicht, daß, wenn der Dividendus von irgend einer andern höhern oder niedrigern Ordnung, der Divisor aber von der Ordnung Null wäre, man allezeit durch ganz ähn-Schlüsse würde deutlich machen können, daß Quotient und Rest von derselben Ordnung als der Dividendus sein würden.

Im Hefte ist eine ganz ähnliche Erläuterung niederzuschreiben, nur ist dazu ein andres Beispiel zu wählen, auch wohl statt der ersten höhern Ordnung eine andere beliebig höhere oder niedrigere zu setzen.

Anmerkung. Wer die Erläuterung (Nr 2.) recht aufmerksam durchgeht, dem könnte vielleicht die Bedenklichkeit einfallen, daß 85 Einer in 367 Zehnern (d. i. in 3670 Einern), öfter als 40 mal enthalten sey. Denn da der Rest 27 Zehner oder 270 Einer beträgt, so ist darin allerdings 85 noch dreimal, nebst dem Rest 15 enthalten. Man muß aber erwägen, daß in §. 18. ausdrücklich der Quotient nur in einer einzigen Ziffer verlangt wird. Daher kann der Quotient $\frac{367}{85}$ durch keine andere Zahl als durch 4 ausgedrückt werden, die Einheiten des Dividendus mögen sein, von welcher Ordnung man will.

§. 20. Aufgabe.

Jede beliebige Zahl, sie bestehe bloß aus Ganzen, oder aus Ganzen und zehntheiligen Brüchen, oder aus bloßen zehntheiligen Brüchen, durch eine mehrziffrige ganze Zahl, (oder durch eine beliebige Anzahl von Einern) zu dividiren, und den Quotienten entweder genau zu finden, oder, wenn dieses nicht möglich sein sollte, in einer vorgeschriebenen Anzahl von Bruchziffern, aber so, daß der Fehler kleiner ist, als eine halbe Einheit der niedrigsten Bruchstelle.

Auflösung. Wer mit der Division ganzer Zahlen hinlänglich bekannt ist, für den hat die Rechnung keine Schwierigkeit, wenn der Quotient in zehntheiligen Brüchen geschafft werden soll, oder wenn der Dividendus dergleichen Brüche enthält. Zur Erklärung dessen, was die Rechnung in solchen Fällen Eigenthümliches hat, wollen wir ein Beispiel wählen, wo der Dividendus viel kleiner ist, als der Divisor.

Es sei also die genaue Zahl 1, 3 durch 329 zu dividiren, der Quotient soll, wenn die Rechnung nicht aufgeht in 5 Bruchstellen geschafft werden mit einem Fehler, der kleiner ist, als eine halbe Einheit der fünften Stelle.

```
          1,300 | 329
   A ..    987  | 0,00395
          3130
   B ..   2961
           1690
   C ...   1645
   D .....   45
```

Zuerst muß man dem Dividendus, wenn er noch nicht so viele Bruchstellen enthält, als der Quotient enthalten soll, durch Anhängung von Nullen so viele geben. In unserm Beispiel sollten also 4 Nullen angehängt werden. Es ist indessen hinreichend, zu Anfang nur so viele anzuhängen, als erforderlich sind, eine wirkliche Division anzufangen. Die übrigen können im Laufe der Rechnung nachgeholt werden.

Die Rechnung selbst muß auf folgende Art angefangen werden. 329 in 1 nullmal; es ist also im Quotienten 0 zu setzen, und da der Dividendus 1 in der Stelle der Einer steht, so steht auch die 0 des Quotienten in derselben Stelle (§. 19.), und es muß also sogleich neben diese 0 das Komma gemacht werden. Darauf fährt man fort, als ob kein Komma da wäre; 329 in 13 nullmal; es sind also in dem Quotienten 0 Zehntel zu setzen. Dann fährt man fort: 329 in 130 wieder nullmal; also im Quotienten 0 Hundertel. Endlich 329 in 1300 dreimal; also im Quotienten 3 Tausendtel. Hierauf multiplicirt man 329 mit 3, welches 987 in der Zeile A giebt. Nach geschehener Subtraction hängt man an den Rest 313 eine 0, und dividirt vollkommen wie bei ganzen Zahlen weiter, bis man die erforderliche Anzahl von Bruchziffern im Quotienten hat, worauf dann die Rechnung abgebrochen wird.

Wäre zuletzt kein Rest geblieben, so wäre der Quotient genau. Bleibt aber ein Rest, und ist derselbe kleiner als die Hälfte des Divisors, so wird er weiter gar nicht in Betrachtung gezogen. Ereignet es sich aber bei einem Exempel, daß der Rest genau der Hälfte des Divisors gleich ist, so ist es am zweckmäßigsten noch eine Null anzuhängen, weil dann mit der nähsten Ziffer die Rechnung aufgehn, also der Quotient genau sein wird. Ist aber der Rest größer als die Hälfte des Divisors, so muß man die letzte Ziffer des Quotienten um 1 vergrößern.

Beobachtet man diese Regeln, so erhält man den Quotienten entweder genau, oder mit einem Fehler, der kleiner ist als eine halbe Einheit der letzten Stelle.

Beweis. Betrachtet man die während der Rechnung abgezogenen Zahlen A, B, C nach den Stellen, in welchen ihre Ziffern stehn, so sieht man leicht ein, daß ihre eigentlichen Werthe folgende sind: $A = 0{,}987$; $B = 0{,}2961$; $C = 0{,}01645$. Es ist aber A vom Dividendus 1,30000 abgezogen worden, und es blieb der Rest 0,31300. Von diesem Rest wurde B abgezogen, und der zweite Rest war 0,01690. Hievon wurde endlich die Zahl C abgezogen, und es blieb der Rest $D = 0{,}00045$. Hieraus ist klar, daß die Summe der vier Zahlen $A + B + C + D$ zusammen dem Dividendus gleich ist. Wir können diesen also auf folgende Art zerstückeln:

$$1{,}3 = 0{,}987 + 0{,}2961 + 0{,}01645 + 0{,}00045;$$

wo die drei ersten Stücke (als ganze Zahlen gelesen) genaue Vielfache des Divisors sind, und daher nach §. 18. einen genauen einziffrigen Quotienten geben. Nur das letzte Stück ist nicht theilbar durch den Divisor, aber kleiner als derselbe. Nach §. 12. hat man also:

$$\frac{1{,}3}{329} = \frac{0{,}987}{329} + \frac{0{,}2961}{329} + \frac{0{,}01645}{329} + \frac{0{,}00045}{329}.$$

Man betrachte nun die Theilquotienten auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens einzeln, und zwar zuerst mit Weglassung des Komma, dann nach dem wahren Werth eines jeden Dividendus, so hat man

$$\frac{987}{329} = 3, \text{ (§. 18.); also } \frac{0{,}987}{329} = 0{,}003 \text{ (§. 19.);}$$

$\frac{2961}{329} = 9$, (§. 18.); also $\frac{0,2961}{329} = 0,0009$ (§. 19.);

$\frac{1645}{329} = 5$, (§. 18.); also $\frac{0,01645}{329} = 0,00005$ (§. 19.).

Was endlich das letzte Stück betrifft, so ist mit Weglassung des Komma, der Quotient von 45 durch 329, nach §. 14. dem gemeinen Bruch, $\frac{45}{329}$ gleich: aber der Quotient von 0,00045 durch 329 ist nach §. 8. hunderttausend mal kleiner. Da nun $\frac{45}{329}$ kleiner ist, als die Hälfte von Eins, so ist $\frac{0,0045}{329}$ kleiner als die Hälfte von 0,00001. Läßt man also diesen letzten Theilquotienten ganz aus der Acht, so ist zwar der gefundene Quotient zu klein, aber der Fehler kleiner als eine halbe Einheit der fünften Bruchstelle, wie verlangt wurde.

Wäre dagegen in dem letzten Theilquotienten der Dividendus gerade nur die Hälfte des Divisors gewesen; wäre z. B. der Divisor 328, der letzte Rest aber 164 gewesen, so kann man in dem Quotienten $\frac{164}{328}$ ohne Ändrung seines Werthes, nach §. 8. a. beide Zahlen 164 mal kleiner machen, und man erhält dadurch genau $\frac{1}{2}$. Wäre nun aber die Ziffer des Dividendus von der fünften Bruchordnung, so würde der Quotient $\frac{0,00164}{328}$ genau einer halben Einheit der fünften Bruchordnung gleich sein. Aber eine halbe Einheit der fünften Ordnung beträgt genau 5 Einheiten der sechsten Ordnung. Hätte man also eine 0 angehängt und weiter dividirt, so müßte die Rechnung aufgegangen sein, und die sechste Bruchziffer des Quotienten wäre 5 gewesen.

Wäre endlich der letzte Rest größer als die Hälfte des Divisors gewesen, z. B. 245, so ist der Bruch $\frac{245}{329}$ größer als $\frac{1}{2}$; also der Quotient $\frac{0\ 00245}{329}$ größer als eine halbe Einheit der fünften Stelle. Ließe man also den letzten Theilquotienten ganz aus der Acht, so wäre der Quotient auch zu klein, und der Fehler zwar kleiner als eine ganze, aber doch größer als eine halbe Einheit der fünften, oder als 5 Einheiten der sechsten Stelle, vermehrt man aber die fünfte Bruchziffer um 1, so legt man zwar 10 Einheiten der sechsten Stelle zu, läßt aber dagegen den Werth von mehr als 5 Einheiten der sechsten Stelle weg. Also ist nun zwar der Quotient zu groß, aber der Fehler ist wieder kleiner, als 5 Einheiten der sechsten, oder eine halbe Einheit der fünften Stelle, wie verlangt wurde.

Anmerkung 1.

Bei diesem Paragraphen ist viel häusliche Ausarbeitung, und diese mit Nachdenken und Sorgfalt zu machen, weil es sonst nicht möglich ist zu deutlichen Begriffen über den innern Zusammenhang einer Divisions-Rechnung zu kommen. Es muß nämlich

a. im Haupthefte die ganze hier gegebene Auflösung nebst dem Beweise, nur an einem andern ähnlichen, aber selbstgewählten Beispiel wiederholt werden.

b. Im Übungshefte aber ist nach und nach eine große Menge Exempel zu rechnen, um die nöthige Geläufigkeit zu erlangen. Die Exempel müssen aber nicht auf's Gerathewohl, sondern mit Nachdenken gewählt werden, um nach und nach alle Fälle, die vorkommen können, durchzuarbeiten. Damit diese Übung möglichst vollständig werde, so bemerken wir hier folgendes. Der Divisor sei bei jedem Exempel mindestens eine zweiziffrige Zahl, aber es müssen auch einige Divisionen mit etwas großen Divisoren gemacht werden. Am meisten aber kommt es darauf an, die Dividenden von der mannigfaltigsten Art zu wählen. Wir wollen hier folgende Arten namhaft machen. Der Dividendus kann sein 1) Eins; 2) eine einzelne ganze Ziffer, 3) eine einzelne Ziffer einer höhern, 4) eine einzelne Ziffer einer niedrigern Ordnung. 5) Er kann eine mehrziffrige ganze Zahl und zwar größer als der Divisor, oder 6) kleiner als der Divisor sein; 7) er kann aus Ganzen und zehntheiligen Brüchen bestehen, und zwar können die Ganzen mehr als der Divisor, oder 8) weniger als derselbe betragen; er kann 9) aus bloßen zehntheiligen Brüchen von mehreren Ziffern bestehen, und zwar kann die höhste Ziffer Zehntel, oder sie kann 10) von einer niedrigern Ordnung sein, u. dgl. m.

Es ist zu empfehlen, daß einige dieser Exempel, gleich nach der Ausarbeitung im Hauptheft, gerechnet werden. Dann sind ein Paar Seiten im Übungsheft leer zu lassen, um sie nach und nach mit mehr Exempeln zu füllen.

Anmerkung 2.

Wer die Auflösung und den Beweis recht aufmerksam durchgearbeitet hat, der wird darin die nöthige Anleitung finden, jedes der oben erwähnten Exempel zu rechnen. Zu mehrerer Erleichterung bemerken wir hier noch folgendes.

Gleich bei dem ersten Anfang der Rechnung ist schon die Stelle bestimmt, welche das Komma im Quotienten einnehmen muß. Denn man muß zuerst in Gedanken den Divisor so weit unter den Dividendus rücken, bis die im Dividendus über ihm stehenden Ziffern, als eine einzige ganze Zahl gelesen zwar größer sind als der Divisor, aber doch kleiner, als das Zehnfache desselben. Sobald man diese Stellung des Divisors gefunden hat, weiß man auch, von welcher Ordnung die höhste Ziffer des Quotienten ist, nämlich (nach §. 19.) von eben der Ordnung, von welcher die niedrigste Ziffer des Dividendus ist, unter welcher die niedrigste des Divisors zu stehen kommt. Sobald man aber die Ordnung der höhsten des Quotienten kennt, so weiß man auch, wie viele Ziffern vor und nach dem Komma im Quotienten stehn müssen.

Überhaupt ist aber aus §. 19. klar, daß jede einzelne Ziffer des Quotienten von derselben Ordnung sei, als die niedrigste Ziffer des Dividendus, welche eben in Rechnung gezogen wird. Man kann daher die richtige Stellung des Komma im Quotienten (worauf bei allen Rechnungen mit Decimalbrüchen die größte Aufmerksamkeit zu wenden ist, da ein Fehler von einer einzigen Stelle das Resultat eine Rechnung zehnmal zu groß oder zu klein macht), man kann, sage ich, die richtige Stellung des Komma nicht verfehlen, wenn man es allezeit in dem Quotienten schreibt, sobald man die Einer des Dividendus in Rechnung gezogen hat. Auch beruht auf diesen Betrachtungen die Regel, daß, sobald nur die erste Stellung des Divisors unter dem Dividendus richtig gemacht ist, keine einzige von den folgenden Ziffern des Dividendus übersprungen werden dürfe. Denn wenn in einem Abschnitt der Rechnung nach Anhängung der richtigen Ziffer, auch eine kleinere Zahl als der Divisor unter dem Strich stände, so muß man, ehe man eine zweite

Ziffer anhängt, nie versäumen vorher 0 im Quotienten zu setzen.

Zusatz. Wenn der Divisor eine ganze Zahl ist, so ist die Anzahl der Bruchziffern im Quotienten allezeit so groß als die Anzahl der Bruchziffern im Dividendus, vorausgesetzt, daß man die etwa während der Rechnung angehängten Nullen mitzählt.

§. 21. Zusatz.

Da die Division bei Decimalbrüchen von der Division ganzer Zahlen im Wesentlichen gar nicht verschieden ist, so kann man sich dabei aller der Vortheile und Abkürzungen bedienen, welche bei der Rechnung mit ganzen Zahlen statt finden. Wir erwähnen deren hier nur zwei, nämlich die Division durch kleine, besonders einziffrige Zahlen, und die Division durch Zahlen die am Ende Nullen haben.

a. Ist der Divisor eine einzelne Ziffer, so muß die Rechnung in einer einzigen Zeile gemacht werden, weil sich alle Multiplicationen und Subtractionen im Kopfe machen lassen. Wer die Vielfachen von 11, 12, 24, vielleicht auch von 15 und 16, oder von andern zweiziffrigen Zahlen im Gedächtniß hat, kann mit diesen eben so rechnen.

b. Hat der Divisor am Ende Nullen, so lasse man diese Nullen weg, und rücke dafür das Komma im Dividendus vor dem Anfang der Rechnung um so viele Stellen nach der linken Seite, als man Nullen im Divisor weggelassen hat. Denn man sieht leicht ein, daß hiedurch Divisor und Dividendus gleichvielmal verkleinert werden, also nach §. 9. a. der Quotient ungeändert bleibt.

Beide Vortheile sind im Hauptheften an einem einzigen Beispiele wörtlich zu erläutern. Im Übungsheft aber sind von jeder Art mehrere Beispiele zu rechnen.

§. 22. Aufgabe.

Jede beliebige Zahl zu dividiren durch einen Divisor, welcher selbst zehntheilige Brüche enthält.

Anleitung zur Auflösung. Da nach §. 9. a. der Quotient ungeändert bleibt, wenn man den Dividendus und den Divisor gleichvielmal vergrößert oder verkleinert, so kann man jederzeit vor der Rechnung die Brüche aus dem Divisor wegschaffen, und dann wie §. 20. rechnen. Es ist hiezu nichts nöthig, als daß man zuerst im Divisor das Komma bis hinter die letzte Ziffer fortrückt, oder, welches dasselbe ist, es ganz wegläßt. Dann rückt man im Dividendus das Komma um eben so viele Ziffern, als im Divisor gegen die rechte Seite fort, so sind beide gleichvielmal vergrößert, also der Quotient ungeändert.

Dieses ist in dem Haupthefte an einem selbstgewählten Beispiel auszuführen, und wörtlich zu erläutern. Im Übungshefte aber sind mehrere Beispiele zu rechnen, theils solche, wo der Divisor aus Ganzen und Brüchen, theils solche, wo er aus bloßen Brüchen besteht. Auch sind dabei die in §. 20. Anm. 1. angegebenen Verschiedenheiten des Dividendus, wo nicht alle doch mehrere, zu berücksichtigen.

Zusatz. Da man vor der Rechnung in dem Dividendus so viele Bruchziffern vor das Komma rücken muß, als der Divisor enthält, so folgt aus §. 20. Zus., daß die Anzahl der Bruchziffern im Quotienten so groß sei, als die Anzahl aller in Rechnung gezogenen Bruchziffern des Dividendus, weniger die Bruchstellen des Divisors.

Wäre die Anzahl der Bruchstellen im Dividendus kleiner als im Divisor, so kann man sie allezeit durch angehängte Nullen größer machen.

D. Bestimmung, wie weit man sich auf die Ziffern eines Quotienten verlassen könne, wenn die gegebenen Zahlen abgekürzt sind.

§. 23. Aufgabe.

Zu bestimmen, wie weit man sich auf die Ziffern eines Quotienten verlassen könne, wenn der Dividendus eine abgekürzte, der Divisor aber eine ganze und genaue Zahl ist.

Wir wollen hier eine für die gewöhnlichen Fälle hinreichende Auflösung dieser Aufgabe geben, welche bestimmt zeigt, wie weit man sich auf die Ziffern des Quotienten verlassen könne. In dem zweiten Anhang zu diesem Abschnitt soll aber noch gezeigt werden, wie man die Größe der Unsicherheit genau bestimmen könne.

Auflösung. Es sei z. B. 2,387... der abgekürzte Dividendus. Er sei zu groß, aber der Fehler kleiner als eine halbe Einheit der dritten, oder als 5 Einheiten der vierten Stelle. Der Fehler ist also subtractiv. Der Divisor aber sei die ganze und genaue Zahl 687.

	P	687
A	.2,387	0,0034745
	2 061	
B	. . 326	0
	274	8
C	. . . 51	20
	48	09
D	 3	110
	2	748
E	. . . . .	3620
		3435
		185
	Q	

Man mache hinter der letzten richtigen Ziffer des Dividendus (7) einen Strich PQ von oben durch die ganze Rechnung herab, so begreift man sehr leicht, daß alle Ziffern, die auf der rechten Seite dieses Striches stehen, unrichtig sind, und daß selbst die Ziffern, welche auf der linken Seite unmittelbar vor dem Strich stehen, nicht ganz sicher sind, und desto unsichrer werden, je weiter man in der Rechnung von oben herabsteigt. Da indessen nach §. 18. und 19. die Richtigkeit jeder Ziffer eines Quotienten, fast einzig von der ersten, oder den beiden höhsten Ziffern der dividirten Zahlen abhängt, so sind die drei ersten geltenden Ziffern des Quotienten (347), die man durch Division der Zahlen A, B und C erhält, als richtig zu betrachten, obgleich die Zahlen B und C auf der rechten Seite schon falsche Ziffern enthalten. In der Zahl D aber ist schon die höhste Ziffer (3) nicht ganz sicher, folglich auch nicht die vierte geltende Ziffer des Quotienten (4). Dividirt man aber auch noch die Zahl E die aus lauter unrichtigen Ziffern besteht, so ist die dadurch erhaltene Ziffer des Quotienten (5), als entschieden unrichtig zu betrachten.

Diese Auflösung ist im Hefte an einem selbstgewählten Beispiel auszuführen.

Zusatz. Die Gränze der Unsicherheit des Quotienten ist in jedem Fall additiv oder subtractiv, je nachdem es der Fehler des Dividendus ist.

§. 24. Aufgabe.

Die Unsicherheit des Quotienten zu bestimmen, wenn der Dividendus eine genaue, der Divisor aber eine abgekürzte Zahl ist.

Auch hier wollen wir eine für das gewöhnliche Bedürfniß hinreichende Auflösung geben; im zweiten Anhang aber zeigen wie die Größe der Unsicherheit genau bestimmt werden könne.

Auflösung. Es sei 1 durch 3,78.. zu dividiren und die letzte Zahl sei abgekürzt, ihr additiver Fehler aber kleiner als 0,005.

P	378
B 100,0	0,2645
A 75 6	
C 24 4	0
22 6	8
D . . 1 7	20
1 5	12
E . . . 2	080
1	890
	190
Q	

In der beistehenden nach §. 22. geführten Rechnung ist hinter der letzten Ziffer der ersten subtrahirten Zahl A ein Strich durch die ganze Rechnung herabgezogen, und man sieht leicht, daß wegen der Abkürzung des Divisors 378 alle rechts von diesem Strich stehenden Ziffern unrichtig, die unmittelbar vor demselben stehenden nicht ganz sicher, die übrigen aber sicher sind. Da nun auch hier die Richtigkeit jeder Ziffer des Quotienten nur von der ersten oder den beiden ersten Ziffern jeder dividirten Zahl abhängt, so ist die erste geltende Ziffer des Quotienten (2) richtig, weil alle Zahlen der dividirten Zahl B richtig sind. Auch die folgende Ziffer 6 ist richtig, weil von der Zahl C nur die letzte Ziffer unsicher ist. Auch die dritte Ziffer (4) ist richtig, weil von der dividirten Zahl D noch die beiden höhsten Ziffern als sicher zu betrachten sind: denn die Unsicherheit der zweiten Ziffer 7 ist auf alle Fälle so klein, daß sie auf den Quotient keinen Einfluß hat. Dagegen ist die vierte Ziffer (5) ganz unsicher, da in der dividirten Zahl E nur die höhste Ziffer, die selbst nicht sicher ist, vor dem Striche steht. Wollte man nun die Division noch weiter fortsetzen, so wäre die Arbeit zwecklos, weil man lauter unrichtige Ziffern finden würde.

Diese Auflösung ist im Hefte an einem selbstgewählten Beispiel zu erklären.

Zusatz. Der Fehler des Divisors und Quotienten sind allezeit entgegengesetzt; wenn der eine additiv ist, so ist der andere subtractiv.

§. 25. Aufgabe.

Zu bestimmen, wie weit die Ziffern des Quotienten sicher sind, wenn sowohl der Dividendus als der Divisor abgekürzt ist.

Anleitung zur Auflösung. Sobald man den Aufsatz der Rechnung gemacht, und die erste geltende Ziffer des Quotienten gefunden, mit dieser den Divisor multiplicirt, und das Product richtig untergesetzt hat, betrachte man die beiden ersten Zeilen der Rechnung, so wird man sehen, wie weit sich in jeder die sichern Ziffern erstrecken. Reichten diese bis zu einer und derselben Stelle, so hat man hinter diesen den Gränzstrich der Unsicherheit zu machen. Reichten aber die sichern Ziffern in beiden Zahlen zu verschiedenen Stellen, so hat man den Sicherheitsstrich hinter derjenigen letzten Ziffer der ersten oder zweiten Zeile zu machen, die am weitesten nach der linken Seite liegt, sie sei im Dividendus, oder im Divisor. Die übrige Beurtheilung ist völlig, wie in den beiden vorigen Paragraphen. Diese Auflösung ist im Hefte an einem selbstgewählten Beispiel auszuführen, und zu erklären.

Zusatz. Man sieht leicht, daß es vortheilhaft ist, wenn die Fehler des Dividendus und Divisors gleichartig sind; beide additiv, oder beide subtractiv. Denn alsdann ist ihr Einfluß auf den Quotienten entgegengesetzt, und hebt sich also zum Theil. Hierauf muß man bei dem Abkürzen Rücksicht nehmen, und nicht immer auf's Gerathewohl nach I, 19. abkürzen.

E. Divisionen, wenn der Dividendus oder der Divisor, oder beide, aus Producten von mehreren Factoren bestehen.

§. 26. Lehrsatz.

Wenn ein Product zweier ganzen Zahlen, A und B durch eine dritte C dividirt werden soll, so ist es einerlei, ob man erst das Product AB ausrechnet, und dieses durch C dividirt, oder ob man erst einen der beiden Factoren, A oder B durch C dividirt, und den Quotienten mit dem andern Factor multiplicirt.

In Zeichen läßt sich dieser Satz kurz und deutlich durch folgende Formeln ausdrücken:

$$\frac{AB}{C} = \frac{A}{C} \times B = \frac{B}{C} \times A.$$

Beweis. Da im Satz ganze Zahlen angenommen sind, so ist die Multiplication eine Vervielfältigung, die Division eine Theilung (§. 3.).

Nach §. 8. a. wird der Quotient $\frac{A}{C}$, B mal vervielfältigt, wenn man den Dividendus (A), B mal vervielfältigt. Also ist

$$\frac{A \times B}{C} = \frac{A}{C} \times B.$$

Auf dieselbe Art läßt sich die Gleichheit der ersten und dritten Formel erweisen.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen, nur sind statt der unbestimmten Größenzeichen A, B, C, bestimmte ganze Zahlen zu setzen.

§. 27. Zusatz.

Der vorige Paragraph ist nicht nur für ganze Zahlen, sondern auch a) für zehntheilige, und b) selbst für gemeine Brüche gültig.

a. Um dieses deutlich zu machen, sei A eine Zahl mit 5, B mit 6, C mit 4 Bruchziffern. Man lösche alle Kommata weg, so hat man ganze Zahlen für welche der Satz erwiesen ist. Nun wollen wir annehmen, man multiplicire wirklich A mit B, und dividire das Product mit C, so begreift man leicht, daß, wenn die Rechnung mit Beibehaltung der Kommata geführt wird, der Quotient keine andern Ziffern erhalte, als wenn man mit den ganzen Zahlen rechnet. Auch läßt sich leicht die Stelle des Komma im Quotienten bestimmen. Denn wenn A 5, und B 6 Bruchstellen hat, so hat ihr Product deren 11 (III. 16.). Dividirt man aber dieses Product durch C, dem wir 4 Bruchziffern gegeben haben, so gehen von jenen 11 Bruchstellen (nach §. 22. Zusatz) 4 ab, es bleiben also 7.

Nun gehe man die Rechnung, welche durch die Formeln

$$\frac{A}{C} \,.\, B \text{ und } \frac{B}{C} \,.\, A$$

vorgeschrieben wird, auf dieselbe Art durch, so wird sich zeigen, daß das letzte Resultat keine andern Ziffern, und keine andere Anzahl von Bruchstellen enthalten könne, als wenn man nach der ersten Formel $\frac{AB}{C}$ rechnet.

Dieses ist im Hefte vollständig auszuführen, und für A, B, C sind drei- oder vierziffrige Zahlen zu setzen, in welchen die niedrigsten Ziffern etwa von der vierten, fünften oder sechsten Bruchordnung sind.

b. Ist aber der Satz von zehntheiligen Brüchen richtig, so muß er auch von gemeinen Brüchen gelten, da diese jederzeit entweder genau, oder mit einem so kleinen Fehler als verlangt wird, in zehntheilige verwandelt werden können.

§. 28. Lehrsatz.

Wenn eine ganze Zahl A durch ein Product zweier andern ganzen Zahlen B und C dividirt werden soll, so erhält man einerlei, man mag A durch das ganze Product BC, oder nur durch einen der beiden Factoren B oder C, den Quotienten aber durch den andern Factor dividiren.

Oder in Formeln:

$$\frac{A}{BC} = \frac{A}{B} : C = \frac{A}{C} : B.$$

Beweis. Nach §. 8. b. wird der Quotient $\frac{A}{B}$, C mal kleiner, wenn man den Divisor C mal so groß macht, d. h. wenn man nach der Formel $\frac{A}{BC}$ rechnet. Dividirt man aber denselben Quotienten $\frac{A}{B}$ selbst durch die ganze Zahl C so wird er auch C mal kleiner, also eben so groß als nach der ersten Rechnung. Man erhält also einerlei, ob man nach der Formel

$$\frac{A}{BC}, \text{ oder } \frac{A}{B} : C \text{ rechnet.}$$

Auf eben diese Art läßt sich erweisen, daß auch die erste und dritte Formel einerlei geben.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständiger, aber an bestimmten ganzen Zahlen auszuführen.

§. 29. Zusatz.

Der vorige Satz bleibt gültig a) von zehntheiligen b) von gemeinen Brüchen.

Der Beweis sowohl für a) als für b) ist dem oben §. 27. gegebenen so ähnlich, daß hier eine nähere Anleitung überflüssig ist. Im Hefte ist er aber an bestimmten Zahlen wirklich auszuführen.

§. 30. Zusatz.

Aus §. 26 — 29. folgt ganz allgemein, daß, wenn man ein Product mehrerer Zahlen durch ein Product von mehreren dividiren soll, man die Ordnung auf mannigfaltige Art abändern könne, wofern man nur beobachtet, daß nie ein Factor des Divisors mit einem Factor des Dividendus multiplicirt, oder ein Factor des Divisors durch einen Factor des Dividendus dividirt wird.

Hätte man z. B. im Dividendus sowohl als im Divisor die Factoren

$$\frac{ABC}{DEF},$$

so kann man nach III. 20 — 22. je zwei oder drei dieser Factoren in Klammern einschließen, und als eine Zahl betrachten, wodurch die hier erwiesenen Sätze §. 26 — 29. anwendbar werden. Z. B.

$$\frac{(AB)C}{(DEF)}, \text{ oder } \frac{(ABC)}{D(EF)} \text{ oder } \frac{(AC)B}{(DEF)} \text{ u. dgl. m.}$$

Dieses ist im Hefte durch bestimmte ganze Zahlen zu erläutern. Es ist zweckmäßig dazu kleine Zahlen zu wählen, und die Multiplicationen, die durch die Klammern bloß angedeutet werden, wirklich zu verrichten.

Erster Anhang zum vierten Abschnitt.

Vortheile bei großen Divisionen.

§. 1.

So wie es bei großen Multiplicationen (nach Anhang zu III. §. 5.) vortheilhaft ist, eine Tafel der Vielfachen des Multiplicandus zu berechnen, eben so kann man sich große Divisionen erleichtern, und gegen Rechnungsfehler sichern, wenn man auf dieselbe Art die Vielfachen des Divisors, bis zum Neunfachen, berechnet. Man sieht leicht, daß dann der größte Theil der Rechnung in einem bloßen Abschreiben der Zahlen dieser Tafel verbunden mit Subtractionen bestehe.

Folgendes Beispiel mag zur Erläuterung dienen. Gesetzt es soll 1 durch 65,789 dividirt werden, wobei wir jetzt beide Zahlen für genau annehmen wollen, so muß zuerst in beiden Zahlen das Komma nach §. 22. um 3 Stellen gegen die rechte Seite gerückt werden. Dann ist der Dividendus 1000 der Divisor aber 65789. Von diesem berechnet man nun zuerst die Vielfachen.

1	065789
2	131578
3	197367
4	263156
5	328945
6	394734
7	460523
8	526312
9	592101

```
    1 000,000 | 0,015200109..
A   . 657,89
    --------
      342 110
B   . 328 945
    ---------
       13 1650
C   . . 13 1578
    -----------
          72000
D . . . . . 65789
          -------
          621100
E . . . . . . 592101
          ----------
           28999  u. s. w.
```

Daß die Zahlen A, B, C, D, E nicht durch Multiplication gefunden, sondern aus der Tafel der Vielfachen abgeschrieben sind, desgleichen, daß die einzelnen Ziffern des Quotienten sich unmittelbar aus der Tabelle ergeben, fällt in die Augen.

§. 2.

Rechnet man mit abgekürzten Zahlen, so muß man zuerst nach §. 23 — 25. bestimmen, wie weit die Division mit Sicherheit fortgesetzt werden könne. Dann läßt sich auf ähnliche Art als bei der Multiplication die Rechnung so abkürzen, daß der ganze Theil der Rechnung wegfällt, welcher aus lauter unrichtigen Ziffern besteht.

Bei dieser abgekürzten Division ist es zwar nicht nothwendig, aber vortheilhaft, wie im vorigen Paragraphen eine Multiplicationstafel für den Divisor zu entwerfen; auch läßt sich so das zu beobachtende Verfahren am anschaulichsten erklären.

Der Dividendus sei 0,354444... (welches der Werth von $\frac{319}{900}$ in zehntheiligen Brüchen ist), dessen folgende Ziffern eine unendliche Menge von Vieren sind. Der Divisor sei 27,568 eine abgekürzte Zahl, deren folgende Ziffern nicht bekannt sind, und von deren Unsicherheit man bloß weiß, daß der Fehler kleiner sei, als eine Einheit der dritten Bruchstelle.

Es ist nun zuerst zu überlegen auf wie viel Ziffern die Division fortzusetzen sey. Obgleich der Dividendus auf jeden Fall bei der Rechnung einmal abgebrochen werden muß, so können wir ihn doch als genau betrachten, wenn wir während der Rechnung nicht Nullen, sondern Vieren an denselben anhängen, wodurch wir die von ihm herrührende Unsicherheit so weit hinausschieben können, als wir wollen, folglich auf jeden Fall weiter, als die vom Divisor herrührende.

Rücken wir in beiden Zahlen das Komma um drei Stellen gegen die rechte Seite, so erhalten wir den Dividendus 354,444... und den Divisor 27568. Versucht man, wie dieser Divisor untergesetzt werden müsse, um die Rechnung anfangen zu können, so sieht man leicht daß seine letzte Ziffer

(8) unter die Hundertel des Dividendus gesetzt werden műsse. Also kommt die erste geltende Ziffer des Quotienten in die zweite Bruchstelle. Aus §. 24. folgt daß der Quotient nicht mehr richtige Ziffern haben kőnne, als unser fűnfziffriger Divisor hat. Folglich ist die Division nicht weiter als bis zur sechsten Bruchstelle fortzusetzen, und selbst die letzte Ziffer ist nicht fűr ganz sicher zu halten. Entwirft man sich nun eine Multiplications-Tafel vom Divisor, so ist die Rechnung folgende.

1	027568
2	055136
3	082704
4	110272
5	137840
6	165408
7	192976
8	220544
9	248112

354,44 | 0,012857..
A 0275 68
78 76
B . 055 14
23 62
C . . 22 05
1 57
D . . . 1 38
19
E 19
0

Daß in der Multiplications-Tafel die ersten drei Zahlen vorn eine Null erhalten haben, sichert gegen Rechnungsfehler. Denn man darf, wenn alle Zahlen der Tafel gleich viele Ziffern haben, nur die Regel beobachten, in jedem folgenden Abschnitt der Rechnung, die Zahl der Multiplications-Tafel um eine Ziffer mehr abzukűrzen.

Auf diese Art erhält A 6 Ziffern, B nur 5, C nur 4, und so von Abschnitt zu Abschnitt weiter.

Zweiter Anhang zum vierten Abschnitt.

Grőße der Unsicherheit, wenn man mit abgekűrzten Zahlen dividirt.

§. 1. Aufgabe.

Die Grőße der Unsicherheit des Quotienten zu bestimmen, wenn der Dividendus eine abgekűrzte Zahl, der Divisor aber eine genaue ganze Zahl ist.

Auflösung. Der Divisor sei die genaue ganze Zahl 254, der Dividendus sei die abgekürzte Zahl 13,59297; der Fehler desselben sei subtractiv, betrage aber weniger als 0,000005.

Man formiere einen Quotienten dessen Dividendus 0,000 005 und dessen Divisor 254 ist, und verrichte die Division nach §. 20. nur so weit, daß man die höhste Ziffer des Quotienten kennt. Es ist wohl kaum nöthig zu erinnern, daß diese Rechnung jederzeit im Kopfe gemacht werden könne. In unserm Beispiel würde man den Quotienten 0,000 000 01, oder, wenn man auf die Größe des Restes Rücksicht nimmt, 0,000 000 02 finden. Diese Zahl ist die Gränze der Unsicherheit des Quotienten, und sie ist in unserm Fall subtractiv, weil die Fehler des Dividendus und Quotienten immer gleichartig sind (§. 23. Zus.).

Beweis. Man nehme an, der Fehler des Dividendus betrüge genau — 0,000 005, so wäre der genaue Dividendus 13,59297 — 0,000 005, und der vollständige Quotient nach §. 11.

$$\frac{13{,}59297}{254} - \frac{0{,}000\,005}{254}.$$

Das erste Stück dieser Formel ist der Quotient, den man durch die wirkliche Division der gegebenen Zahlen erhält, und das zweite Stück zeigt an, um wieviel dieser Quotient zu groß sein würde, wenn der Fehler des Dividendus wirklich die angenommene Größe hätte. Nun ist aber der Fehler des Dividendus kleiner, also ist auch das abzuziehende Stück kleiner, als $\frac{0{,}000\,005}{254}$

Folglich ist dieses Stück die gesuchte Gränze der Unsicherheit, und wenn man daher nur die höhste geltende Ziffer dieses Stücks ausrechnet, so weiß man bestimmt, wie weit die Division der gegebenen Zahlen den Quotienten richtig gebe.

§. 2. Aufgabe.

Die Größe der Unsicherheit zu bestimmen, wenn der Dividendus genau, der Divisor aber eine abgekürzte Zahl ist.

Auflösung und Beweis. Die Unsicherheit läßt sich in diesem Fall zwar nicht auf eine so einfache Art, als im vorigen Fall finden. Ist es indessen darum zu thun, die Gränze derselben genau zu kennen, so kann man jederzeit den Zweck auf folgende Art erreichen.

Gesetzt es sollte die genaue Zahl 3,75 durch die abgekürzte 0,72889 dividirt werden; der Fehler des Divisors aber sei subtractiv, und kleiner als 0,000005: so berechne man zuerst den Quotienten nach §. 22.

$$\frac{3,75}{0,72889} = \frac{375000}{72889}$$

und zwar um eine oder zwei Ziffern weiter als nach §. 24. die Ziffern sicher sind. Durch die wirkliche Division findet man 5,144809, und die vier ersten Bruchziffern zeigen sich nach §. 24. als sicher.

Nun nehme man an, der subtractive Fehler des Divisors betrage genau 0,000005, so wäre der wahre Quotient

$$\frac{3,75}{0,72889 - 0,000005} = \frac{3,75}{0,728885} = \frac{3750000}{728885}$$

Diese Division verrichte man wirklich, und auf eben so viele Bruchstellen, als die erste, so findet man: 5,144844.

Der Unterschied beider Quotienten ist 0,000036 oder beinah 0,00004. Dieses ist nun die verlangte Gränze der Unsicherheit, und sie ist additiv: denn da der gegebene Divisor 0,72889 zu groß angenommen war, so folgt aus §. 8. daß der Quotient 5,144809 kleiner sei als er sein sollte. Da nun der Fehler des Divisors nicht volle $-0,000005$ beträgt, so beträgt auch der Fehler des Quotienten nicht volle $+0,00004$. Diese Zahl ist also die Gränze der Unsicherheit. Der wahre Quotient ist also größer als 5,144809, aber kleiner als $5,144809 + 0,00004$, d. i. als 5,144849, und in dem gefundenen Quotienten sind nur die 4 höhsten Ziffern richtig.

§. 3. Zusatz.

Sind beide Zahlen abgekürzt, so lassen sich nach §. 1. und 2., zwei Gränzzahlen finden, zwischen denen der wahre Werth des Quotienten liegen muß.

Die eine Gränzzahl findet man, wenn man nach §. 1. die vom Dividendus herrührende Unsicherheit berechnet, und das Gefundene, je nachdem es additiv oder subtractiv ist, durch Addition oder Subtraction mit dem Quotienten verbindet.

Die andere Gränzzahl ist nichts anderes, als der nach §. 2. durch die zweite Division gefundene Quotient

Zur Erläuterung wollen wir das Beispiel des vorigen Paragraphen wählen, und annehmen, daß auch der Dividendus eine abgekürzte Zahl sei. Dieser Dividendus (3,75) sei zu groß; sein zu subtrahirender Fehler aber sei kleiner als 0,0001.

Die hieraus entspringende Unsicherheit ist nach §. 1.

$$-\frac{0{,}0001}{0{,}72889} \text{ oder } -\frac{10}{72889}.$$

Berechnet man diese Unsicherheit in sechs Bruchstellen, weil der Quotient (5,144809) so weit berechnet ist, so findet man — 0,000 137. Daher ist die erste Gränzzahl 5,144809 — 0,000137 = 5,144672.

Nimmt man die Unsicherheit des Divisors gerade so an, wie im vorigen Paragraphen so ist die zweite Gränzzahl, der im vorigen Paragraphen schon berechnete Quotient 5,144844.

Der wahre Werth des Quotienten muß zwischen diesen beiden Zahlen liegen, d. h. er muß größer als 5,144672, aber kleiner, als 5,144844 sein.

Da der Unterschied der beiden Gränzzahlen 0,000 172, oder fast 2 Einheiten der vierten Stelle beträgt, so ist klar, daß nur die 3 ersten Bruchziffern des Quotienten fehlerfrei sind. Nimmt man für die vierte 7 an, so ist diese unsicher, und von ihrem Fehler kann man nur sagen, daß er kleiner sei, als 2 Einheiten der vierten Stelle.

Anmerkung. Man hätte alle Divisionen bloß bis zur vierten Stelle führen können, weil man gleich anfänglich sieht, daß die Ziffern der vierten Stelle schon unsicher sind. Ja, wenn der Fehler des Divisors viel kleiner ist, als der des Dividendus, so hängt die Anzahl der fehlerfreien Ziffern des

Quotienten bloß vom Dividendus ab. Will man also nicht die Gränzen der Unsicherheit sehr genau bestimmen, sondern nur untersuchen, wie viele Ziffern des Quotienten fehlerfrei sind, so läßt sich die Arbeit beträchtlich abkürzen.

Fünfter Abschnitt.

Von einfachen und zusammengesetzten Zahlen.

A. Allgemeine Begriffe und Sätze.

§. 1. Erklärung.

Eine ganze Zahl heißt einfach, oder absolut einfach (auch eine Primzahl, Numerus primus), wenn sie sich durch keine andere ganze Zahl ohne Rest theilen läßt, als durch sich selbst, und durch 1.

Hat sie aber noch irgend einen andern Divisor der keinen Rest läßt, so heißt sie zusammengesetzt (Numerus compositus). Hat sie mehr als einen solchen Divisor, so ist einer darunter der größte, und diesen nennt man auch das größte Maaß der Zahl.

Diese Begriffe sind auf bestimmte Zahlenbeispiele anzuwenden.

§. 2. Zusatz.

Jede zusammengesetzte Zahl hat (außer sich selbst und 1) wenigstens zwei ganze Divisoren, die keinen

Rest lassen; doch sind diese bei einigen Zahlen gleich groß.

Es folgt dieses aus §. 1. in Verbindung mit IV. 6. Dieses ist im Hefte auszuführen, und zu zeigen, wie in jedem Fall der zweite Divisor gefunden werde, wenn einer gegeben ist. Auch ist ein Beispiel von zwei gleichen Divisoren beizufügen.

Anmerkung. Wenn in diesem Abschnitt von Zahlen schlechthin die Rede ist, so sind allezeit ganze zu verstehen; und wenn das Wort Divisor ohne Beisatz gebraucht wird, so ist allezeit eine ganze Zahl zu verstehen, die bei der Division keinen Rest läßt.

§. 3. Zusatz.

Wenn eine Zahl durch eine andere theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache der ersten durch die andere theilbar; oder, was dasselbe sagt, wenn von zwei Zahlen eine durch eine dritte theilbar ist, so ist auch das Product der beiden ersten durch die dritte theilbar.

Erläuterung. Jedes Vielfache von A läßt sich in lauter Stücke theilen, die sämmtlich A gleich sind. Da nun jedes dieser Stücke durch B theilbar ist, so ist auch jedes Vielfache von A durch B theilbar (IV. 12.).

Statt der unbestimmten Zeichen A und B sind im Hefte bestimmte Zahlen zu setzen; auch zu zeigen, daß der zweite Ausdruck des Satzes nichts anderes sage, als der erste.

Zusatz. Wenn man aus einem Product zweier Größen AB einen Factor wegstreicht, so wird das Product dadurch dividirt. Streicht man also beide Factoren weg, so bleibt nicht Null, sondern Eins. Denn jede Größe durch sich selbst dividirt, giebt 1 zum Quotienten.

Auch dieses ist durch Zahlenbeispiele zu erläutern.

§. 4. Erklärung.

Zwei Zahlen heißen relative Primzahlen, wenn es außer 1 keine ganze Zahl giebt, wodurch beide ohne Rest dividirt werden könnten.

Relativ einfach können sowohl zwei absolute Primzahlen, als auch zwei zusammengesetzte Zahlen sein. Von beiden Fällen sind Beispiele anzuführen.

Hieraus beantwortet sich die Frage sehr leicht: was das größte gemeinschaftliche Maaß zweier absoluten, oder relativen Primzahlen sei?

Anmerkung. Das lateinische Wort relativ bedeutet so viel als das deutsche bezüglich, oder in Beziehung auf ꝛc. Wenn man sagt: 16 und 21 sind relative Primzahlen, so heißt das: eine ist in Beziehung auf die andere einfach, weil sie außer 1 keinen Divisor mit ihr gemein hat.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn zwei Zahlen durch eine dritte theilbar sind, so ist auch a) die Summe der beiden ersten, b) die Differenz derselben, desgleichen c) die Summe und Differenz jeder zwei Vielfachen von ihnen, durch die dritte theilbar.

Beweis. Wenn die beiden Zahlen A und B durch eine dritte C theilbar sind, so ist sowohl A als B ein Vielfaches von C (IV. 6.). Wenn man daher

a. A und B addirt, so ist auch die Summe ein Vielfaches von C, also durch C theilbar.

b. Zieht man aber die kleinere, welche B sein mag, von der größern A ab, so subtrahirt man ein kleineres Vielfaches der C, von einem größern; daher muß der Rest entweder C selbst, oder ein Vielfaches von C, also durch C theilbar sein.

c. Da aber A und B Vielfache des C sind, so ist auch jedes Vielfache von A sowohl, als von B zugleich ein Vielfaches von C. Was daher unter a) und b) von den Zahlen A und B erwiesen worden, gilt auch von jeden zwei Vielfachen derselben.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen, nur sind statt der unbestimmten Zeichen A, B und C, bestimmte Zahlen zu brauchen.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn ein Dividendus und ein Divisor ein gemeinschaftliches Maaß haben, aber bei der Division einen Rest lassen, so ist auch dieser durch das gemeinschaftliche Maaß theilbar.

Beweis. Der Dividendus sei D, der Divisor d; bei der wirklichen Division erhalte man den Quotienten q, und es bleibe der Rest r übrig: so ist nach IV. 15. $D - dq = r$.

Nun sind d und q (so wie D und r) ganze Zahlen; also ist dq ein Vielfaches von d, und durch alle Zahlen theilbar, wodurch d theilbar ist (§. 3.).

Haben demnach D und d ein gemeinsames Maaß, so haben dasselbe auch D und dq, folglich ist nach §. 5. b. und c. auch r durch dieses Maaß theilbar.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen; nur sind statt D, d, q und r bestimmte Zahlen zu setzen.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn ein Divisor und ein Rest ein gemeinsames Maaß haben, so ist auch der Dividendus durch dasselbe theilbar.

Anleitung zum Beweise. Wenn die Buchstaben D, d, q, r die im vorigen Paragraphen angegebene Bedeutung behalten, so ist nach IV. 15. $D = dq + r$. Und hieraus folgt, auf ähnliche Art als im vorigen, aus §. 5. a. und c. daß wenn d und r ein gemeinsames Maaß haben, auch D durch dasselbe theilbar sei.

Dieses ist im Hefte anszuführen, und zwar wieder in bestimmten Zahlen.

§. 8. Aufgabe.

Das größte gemeinschaftliche Maaß zweier Zahlen zu finden.

Auflösung.

1. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere. Geht die Rechnung auf, so ist die kleinere selbst das gesuchte gemeinschaftliche Maaß; bleibt aber ein Rest, so dividire man
2. den vorigen Divisor durch diesen Rest. Bleibt hier kein Rest, so ist der Divisor der zweiten Rechnung das gesuchte größte Maaß: bleibt aber ein Rest, so dividire man
3. den Divisor der zweiten Rechnung durch den Rest derselben ꝛc.

Und in dieser Ordnung fahre man fort, so lange es angeht; kommt man auf eine Division welche aufgeht, so ist allezeit der dabei gebrauchte Divisor das gesuchte größte Maaß. Bleibt aber ein Rest, so muß man allezeit den Divisor der letzten Rechnung, durch den Rest derselben dividiren.

Da nun alle Reste ganze Zahlen sind, aber immer kleiner werden, so muß man, wenn die gegebenen Zahlen kein größeres gemeinsames Maaß als 1 haben, zuletzt auf eine Division kommen, welche den Rest 1 läßt. Machte man nun mit diesem Rest noch eine Division, so würde offenbar die Rechnung aufgehen.

Die Regel ist folglich ganz allgemein: daß derjenige Divisor mit welchem eine Rechnung aufgeht, das größte gemeinsame Maaß der beiden gegebenen Zahlen sei.

Beispiel.

Es sei das größte gemeinsame Maaß der Zahlen 3728 und 256 zu suchen, so hat man folgende Divisionen zu machen:

$$1)\ \begin{array}{r|l} & 256 \\ 3728 & 14. \\ 256 & \\ \hline 1168 & \\ 1024 & \\ \hline 144 & \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r|l} & 144 \\ 256 & 1. \\ 144 & \\ \hline 112 & \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r|l} & 112 \\ 144 & 1. \\ 112 & \\ \hline 32 & \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{r|l} & 32 \\ 112 & 3. \\ 96 & \\ \hline 16 & \end{array} \qquad 5)\ \begin{array}{r|l} & 16 \\ 32 & 2. \\ 32 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Da bei der fünften Division die Rechnung aufgeht, so ist der Divisor derselben 16, das größte gemeinsame Maaß der Zahlen 3728, und 256.

Dividirt man beide durch 16, so erhält man 233 und 16, welche weiter keinen Divisor (außer 1) gemein haben.

Beweis. Betrachtet man die erste Rechnung, so folgt aus §.6., daß, wenn 3728 und 256 einen Divisor gemein haben, der Rest 144 mit eben dem Divisor aufgehen müsse.

Aus der zweiten Rechnung folgt aber eben so, daß, wenn 256 und 144 einen Divisor gemein haben, eben dieser Divisor auch den Rest 112 dividiren müsse.

Durch denselben Schluß aber kann man sich überzeugen, daß das gemeinsame Maaß von 3728 und 256, auch die Reste der dritten und vierten Division (32 und 16) dividiren müsse.

Da nun bei der fünften Division 16 in 32 aufgeht, so ist klar, daß 16 ein gemeisamer Divisor zu 32, 112, 144, 256 und 3728 sei.

Daß es aber das größte gemeinsame Maaß der beiden zuletzt genannten Zahlen sei, ist eben so leicht zu erweisen. Denn hätten 3728 und 256 einen noch größern gemeinschaftlichen Divisor, so müßten eben den Divisor auch 144, 112, 32 und 16 haben. Da aber 32 und 16 keinen größern Divisor als 16 selbst haben können, so kann es auch für die übrigen genannten Zahlen kein größeres gemeinschaftliches Maaß geben.

Arbeit.

In dem Hefte ist die Auflösung und der Beweis an einem selbstgewählten Beispiel auszuführen. Und zwar wird es zweckmäßig sein, nicht wie hier im Lehrbuche geschehen ist, die Auflösung von dem Beweise zu trennen, sondern beides ungefähr auf folgende Art zu verbinden.

Wenn das größte gemeinsame Maaß zu 3728 und 256 gesucht wird, so dividire man zuerst die größere Zahl 3728 durch die kleinere 256, wie hier folgt. Nachdem die Rechnung niedergeschrieben ist, kann man fortfahren: Wäre die Rechnung aufgegangen, so wäre 256 selbst die gesuchte Zahl. Da aber ein Rest geblieben ist, so schließe man nach §. 6.

wenn 3728 und 256 ein gemeinsames Maaß haben, so muß dasselbe auch der Rest 144 haben, u. s. f.

Zusatz. Da zwei absolute oder relative Primzahlen das größte gemeinschaftliche Maaß 1 haben, 1 aber eine ganze Zahl ist, so haben jede zwei ganze Zahlen, auch eine ganze Zahl zum größten gemeinschaftlichen Maaß.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn zwei absolute oder relative Primzahlen, mit einer und derselben dritten Zahl multiplicirt, ganze Producte geben, so ist diese dritte Zahl selbst eine ganze Zahl.

Beweis. Wenn die relativen Primzahlen 9 und 16, mit einer dritten Zahl, welche m heiße, multiplicirt werden, und die Producte 9m und 16m ganze Zahlen sind, so ist zu beweisen, daß m selbst eine ganze Zahl sei.

Zu den gegebenen Zahlen (9 und 16) ist in jedem Fall 1 das größte gemeinschaftliche Maaß (§. 4.). Hieraus ist aber erweislich, daß zu 9m und 16m, wenn es ganze Zahlen sind, m das größte gemeinschaftliche Maaß, und eine ganze Zahl sei.

Denn da man nach I. 3. jede Größe, also auch m als eine Einheit, oder als bloße Benennung betrachten darf, nach IV. 15. aber Dividendus und Rest gleiche Benennung oder Einheit haben, so ist klar, daß, wenn zu den ganzen Zahlen 9m und 16m, nach §. 8. das größte gemeinschaftliche Maaß gesucht würde, alle Reste die Benennung m haben, also der letzte Rest 1 . m sein würde. Da aber bei einer nach §. 8. geführten Rechnung nothwendig alle Reste ganze Zahlen sind, so ist auch der letzte Rest 1 . m oder m eine ganze Zahl, welches zu erweisen war.

Der Beweis ist im Hefte, nur mit Annahme anderer Zahlen zu wiederholen.

§. 10. Aufgabe (Lehnsatz).

Einen Bruch ohne Veränderung seines Werthes, mit veränderten ganzen Zahlen so zu schreiben, daß der Nenner des veränderten Bruches, ein beliebiges Vielfaches von dem Nenner des gegebenen Bruches sei.

Anleitung zur Auflösung. Da nach IV. 14. jeder Bruch als ein Quotient betrachtet werden kann, nach IV. 9. aber ein Quotient ungeändert bleibt, wenn man den Dividendus und Divisor gleichvielmal vervielfältigt, so sieht man leicht, wie die Auflösung zu machen sei.

Dieses ist im Hefte an einem selbstgewählten bestimmten Beispiel vollständig auszuführen.

Anmerkung. Lehnsätze nennt man in der Mathematik solche Sätze, die man in einem Abschnitt, wohin sie dem Inhalt nach nicht gehören, als Hülfsätze braucht. Unsere Aufgabe gehört dem Inhalt nach in den Abschnitt von den Brüchen, wird aber hier als Hülfssatz zu dem folgenden Beweise gebraucht.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn eine ganze Zahl durch zwei absolute oder relative Primzahlen theilbar ist, so ist sie auch durch das Product derselben theilbar.

Beweis. Die Zahl 4264 ist durch 8, und durch 13 theilbar es ist also zu erweisen, daß sie auch durch $8 \cdot 13 = 104$ theilbar sei, oder mit andern Worten, daß der hundert und vierte Theil von 4264 eine ganze Zahl sei.

Da 4264 durch 8 theilbar ist, so ist $\frac{1}{8}$ von 4264 eine ganze Zahl. Eben so ist auch $\frac{1}{13}$ von 4264 eine ganze Zahl.

Aber $\frac{1}{8} = \frac{13}{104}$ (§. 10.); und $\frac{13}{104} = 13 \cdot \frac{1}{104}$ (I. 7.) . Eben so ist $\frac{1}{13} = \frac{8}{104}$ (§. 10.), und $\frac{8}{104} = 8 \cdot \frac{1}{104}$ (I. 7.).

Folglich ist 13 mal $\frac{1}{104}$ von 4264, eine ganze Zahl, und eben so 8 mal $\frac{1}{104}$ von 4264.

Setzt man nun $\frac{1}{104}$ von 4264 = m, so sind 13m und 8m ganze Zahlen; folglich ist nach §. 9. auch m eine ganze Zahl, d. h. der hundert und vierte Theil von 4264 ist eine ganze Zahl, also 4264 durch 104 theilbar.

Dieser Beweis ist im Hefte an einem andern selbstgewählten Beispiel zu wiederholen.

§. 12. Lehrsatz.

Das Product zweier Primzahlen läßt sich durch keine dritte von ihnen verschiedene Primzahl ohne Rest theilen. Eben so das Product zweier relativen Primzahlen durch keine, die im Vergleich mit beiden eine relative Primzahl ist.

Beweis. Es seien α und β zwei absolute oder relative Primzahlen, und ihr Product heiße n, also n = $\alpha\beta$. Es ist also zu beweisen, daß n durch keine Zahl theilbar sei, die gegen α und β eine Primzahl ist.

Man nehme an, n sei durch eine solche Zahl, die wir γ nennen wollen theilbar, so wäre $\frac{n}{\gamma}$ eine ganze Zahl, also müßte auch $\frac{\alpha\beta}{\gamma} = \frac{n}{\gamma}$ ganz sein. Nun dividire man beides durch α, d. h. weil α eine ganze Zahl, man mache beides α mal kleiner. Der Quotient $\frac{n}{\gamma}$ wird aber α mal kleiner, wenn man seinen Divisor α mal größer macht, (IV. 8. b.), welches $\frac{n}{\alpha\gamma}$ giebt. $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ aber wird α mal kleiner, wenn man den Dividendus α mal kleiner macht (IV. 8. a.). Dieses geschieht aber, wenn man das Product $\alpha\beta$ durch α dividirt, welches β zum Quotienten giebt (§. 3. Zus.). Es ist also $\frac{\beta}{\gamma}$, α mal kleiner als $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$. Hieraus folgt aber $\frac{n}{\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$.

Ist aber n theilbar sowohl durch α als durch γ, so ist es auch durch $\alpha\gamma$ theilbar, (§. 11.), also $\frac{n}{\alpha\gamma}$ eine ganze Zahl. Folglich müßte auch $\frac{\beta}{\gamma}$ eine ganze Zahl sein, welches unmöglich ist, da β und γ absolute oder relative Primzahlen sind.

Es ist also auch unmöglich, daß n oder $\alpha\beta$ durch γ theilbar sei.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen, nur sind statt der unbestimmten Größenzeichen, bestimmte, den Voraussetzungen gemäße Zahlen zu setzen.

§. 13. Zusatz.

Das Product zweier Primzahlen, ist gegen jede von ihnen verschiedene Primzahl, eine relative Primzahl.

Erläuterung. Wenn α, β und γ Primzahlen sind, so ist $\alpha\beta$ gegen γ eine relative Primzahl, denn nach §. 12. ist $\alpha\beta$ durch γ nicht theilbar, und da γ selbst eine Primzahl ist, also sich nur durch 1 und γ ohne Rest theilen läßt (§. 1.), so kann es mit $\alpha\beta$ kein anderes gemeinschaftliches Maaß als 1 haben.

Die Erläuterung ist an bestimmten Zahlen zu wiederholen.

§. 14. Zusatz.

Jedes Product von mehreren Primzahlen, läßt sich durch keine andere Primzahl ohne Rest dividiren.

Erläuterung. Wenn α, β, γ, δ ꝛc. Primzahlen sind, so läßt sich ihr Product $\alpha\beta\gamma\delta$... durch keine andere Primzahl ε dividiren. Denn nach §. 13. ist α gegen $\beta\gamma$, folglich auch gegen $\beta\gamma\delta$ u. s. f. eine relative Primzahl. Daher ist weder $\alpha\beta\gamma$, noch $\alpha\beta\gamma\delta$ u. s. f. durch ε theilbar.

Die Arbeit ist wie bei §. 13. zu machen.

B. Sätze, die sich auf die zehntheilige Zählungsart beziehen.

§. 15. Lehrsatz.

a) Wenn die niedrigste Ziffer einer Zahl mit Zweie aufgeht, so geht die ganze Zahl mit 2 auf. b) Wenn die beiden niedrigsten Ziffern mit Viere aufgehn, so ist die ganze Zahl durch 4 theilbar. c) Wenn die drei niedrigsten Ziffern mit Achte aufgehen, so ist die ganze Zahl durch 8 theilbar.

Obgleich diese Sätze nicht bloß von ganzen Zahlen, sondern auch von zehntheiligen Brüchen gültig sind, so wird es dennoch hinreichend sein, den Beweis bloß an ganzen Zahlen auszuführen; weil der Schluß auf Decimalbrüche äußerst leicht ist: denn aus dem vorigen Abschnitt ist klar, daß die Stellung des Komma gar keinen Einfluß darauf habe, ob die Division aufgeht oder nicht.

Beweis.

a. Da $10 = 2 . 5$ mit 2 aufgeht, so besteht eine Zahl, in der man in die Stelle der Einer eine Null setzt, jederzeit aus einem Vielfachen von 10, und ist daher durch 2 theilbar (§. 4.). Theilt man also eine Zahl, z. B. 3794 so in zwei Stücke, daß der zweite Theil bloß die letzte Ziffer ist, nämlich $3790 + 4$; so weiß man, daß das erste Stück (3790) in jedem Fall durch 2 theilbar sei. Je nachdem also das zweite Stück (4) durch 2 theilbar ist, oder nicht, wird auch die ganze Zahl (3794) durch 2 theilbar, oder nicht theilbar sein.

b. Da $100 = 10 . 10 = 2 . 5 . 2 . 5 = 2 . 2 . 5 . 5$ (III. 20.) $= 4 . 25$; so ist 100, und jedes Vielfaches von 100 durch 4 theilbar. Hat nun eine Zahl am Ende zwei Nullen, so ist sie ein Vielfaches von 100, also durch 4 theilbar. Man wird also den Beweis von b) auf ähnliche Art vollenden können, wenn man eine vorliegende Zahl so in 2 Stücke theilt, daß das zweite Stück aus den beiden letzten Ziffern besteht.

c. Da $1000 = 10 . 100 = 2 . 5 . 4 . 25 = 8 . 125$, so ist 1000 und jedes Vielfache von 1000 durch 8 theilbar. Die weitere Ausführung des Beweises ist den beiden vorhergehenden so ähnlich, daß es wohl keiner fernern Anweisung bedürfen wird.

Der Beweis von a) ist an einer andern selbstgewählten Zahl zu wiederholen. Die Beweise von b) und c) aber sind auf ähnliche Art vollständig auszuführen.

§. 16. Zusatz.

Die Kennzeichen der Divisoren 4 und 8 lassen sich abkürzen.

Sind nämlich bei den Kennzeichen der 4, die Zehner gerade, so kann man sie ganz aus der Acht lassen, und bloß zusehen, ob die Einer mit 4 aufgehen. Sind sie aber ungerade, so braucht man nur einen einzigen Zehner mit den Einern zu verbinden.

Bei den Kennzeichen der 8, findet dasselbe in Ansehung der Hunderte statt.

Der Grund hievon ist leicht einzusehen, wenn man erwägt, daß alle geraden Zehner für sich mit 4, alle geraden Hunderte mit 8 aufgehen.

Dieses ist nun bestimmter auszuführen, und durch selbstgewählte Zahlen zu erläutern.

§. 17. Zusatz.

Der Rest, welchen die letzte, oder die beiden letzten, oder die drei letzten Ziffern lassen; wenn sie bezugsweise durch 2, 4, und 8 dividirt werden, ist derselbe, welchen die ganzen Zahlen bei eben den Divisionen übrig lassen.

Dieser Zusatz ist bloß durch drei Beispiele zu erläutern.

§. 18. Lehrsatz.

Jede Zahl, die in der niedrigsten Stelle eine 5 oder eine 0 hat, ist durch 5 theilbar. Jede andere Zahl aber läßt bei der Division einen leicht vorherzubestimmenden Rest übrig.

Beweis. Theilt man wie §. 15. a. eine Zahl so in zwei Stücke, daß die niedrigste Ziffer allein das zweite Stück ausmacht, so läßt sich der Beweis auf ganz ähnliche Art, als §. 15. a. ausführen.

Im Hefte soll dieses bestimmt ausgeführt werden.

§. 19. Lehrsatz.

Mit 10 gehen nur solche Zahlen auf, in deren niedrigster Stelle eine Null steht. Findet sich in dieser Stelle eine andere Ziffer, so ist diese der Rest, der bei der Division bleibt.

Der sehr leichte Beweis läßt sich auf mehr als eine Art führen; am kürzesten aus I. 12.

§. 20. Lehrsatz.

Wenn man von einer Zahl so viel abzieht, als die Summe ihrer Ziffern beträgt, so ist der Rest in jedem Fall durch Neun und Drei theilbar.

Beweis. Jeder der nur zählen kann, weiß, daß in der natürlichen Zahlenreihe vor dem Werth jeder höheren dekadischen Einheit (also vor 10, 100, 1000 ꝛc.) die nähstvorhergehende Zahl mit lauter Neunen (9, 99, 999 ꝛc.) geschrieben wird. Eine solche Zahl aber ist jederzeit durch 9 theilbar, weil der Werth jeder Ziffer durch Neune theilbar ist. Da aber 9 selbst durch Dreie theilbar ist, so muß jede solche Zahl auch mit 3 aufgehen.

Zieht man also in irgend einer beliebigen Zahl von jeder dekadischen Einheit 1 ab, so muß von dem Werth jeder Ziffer ein Rest bleiben der durch 9 theilbar ist, zieht man aber auch von jedem Einer 1 ab, so bleibt von den Einern Null übrig. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Die Zahl 3756 besteht aus 3 Tausenden + 7 Hunderten + 5 Zehnern + 6 Einern. Nimmt man nun von jedem Tausend 1 ab, so bleibt 3 . 999. Nimmt man von jedem Hundert 1 weg, so bleibt 7 . 99. Nimmt man von jedem Zehner 1 weg, so bleibt 5 . 9. Zieht man endlich von jedem Einer 1 ab, so bleibt 0.

Zieht man also von der ganzen Zahl 3756 auf die beschriebene Art, 3 + 7 + 5 + 6 ab, so besteht der Rest aus den Stücken 3 . 999 + 7 . 99 + 6 . 9 + 0.

Da nun jedes dieser Stücke durch 9 und 3 theilbar ist (§. 3.), so ist auch ihre Summe durch 9 und 3 theilbar (IV. 12.).

Nun ist es aber einerlei, ob man die Stücke 3 + 7 + 5 + 6 einzeln, von den einzelnen Stücken der Zahl 3756, oder ob man ihre Summe 21, von der unzerstückelten Zahl 3756 subtrahirt (II. 12.), folglich muß 3756 — 21 eine durch 9 und 3 theilbare Zahl sein.

Der Beweis ist aber an einer andern beliebig gewählten Zahl zu wiederholen.

§. 21. Zusatz.

Also geht jede Zahl mit 9 oder mit 3 auf, je nachdem die Summe ihrer Ziffern mit 9 oder 3 aufgeht. Geht aber diese Summe nicht auf, so ist der Rest derselbe, der bei der Division der ganzen Zahl übrig bleibt.

Zur Erläuterung theile man die im vorigen Paragraphen gebrauchte Zahl in zwei Stücke, von denen das erste die Summe der Ziffern, das andere aber der Rest ist, welcher bleibt, wenn man diese Summe von der Zahl abzieht (z. B. 3756 = 21 + 3735), so ist das zweite Stück in jedem Fall nach §. 20. durch 9 und 3 theilbar. Es kommt also nur noch darauf an, ob das erste Stück durch 9 oder 3 theilbar ist.

Dieser Schluß ist im Hefte noch vollständiger, und zwar an der im vorigen Paragraphen gebrauchten Zahl auszuführen.

Zusatz. Wenn man prüfen will, ob eine Zahl mit 9 aufgehe, so darf man bei dem Zusammenzählen der Ziffern alle Neunen, und jede 2 oder 3 Ziffern, deren Summe 9 beträgt, weglassen.

Will man nur wissen, ob eine Zahl mit 3 aufgehe, so kann man auch alle Ziffern welche die Summe 6, 9 oder 12 geben weglassen.

Hierdurch wird die Anwendung dieser Kennzeichen sehr abgekürzt, welches an einigen Beispielen zu zeigen ist.

§. 22. Aufgabe.

Zu prüfen, ob eine Zahl mit 11 ohne Rest theilbar sei.

Auflösung. Die zu prüfende Zahl sei 9375. Man subtrahire die erste Ziffer linker Hand (9), von der folgenden (3), wenn diese nicht die kleinere ist. Wenn aber, wie in unserm Fall die erste Ziffer größer ist als die zweite, so vermindere man die erste um 1, und lege dafür der zweiten 10 zu. Man subtrahire also 8 von 13, so bleibt 5. Diesen Rest (5) subtrahire man auf dieselbe Art von der dritten Ziffer 7, so bleibt 2. Diesen Rest subtrahirt man endlich von der letzten Ziffer (5), so bleibt der Rest 3.

Wäre bei der letzten Subtraction kein Rest geblieben, so wäre die Zahl durch 11 theilbar. Bleibt aber, wie hier, ein Rest, so ist dieses derselbe, der bei der Division der ganzen Zahl durch 11 übrig bleibt.

Diese Auflösung ist

1. im Hefte auf eine andere ganz beliebige Zahl anzuwenden;
2. ist der Beweis hinzuzufügen. Es läßt sich aber die Richtigkeit dieser Auflösung sehr anschaulich machen, wenn man die bei der Auflösung gebrauchte Zahl, durch 11 ausführlich, wie in beistehender Rechnung dividirt. Vergleicht man dann die oben gemachten Subtractionen mit dieser Rechnung, so wird man leicht sehen, daß bei der ausführlichen Division gerade dieselben Subtractionen gemacht werden, die wir oben gemacht haben. So ist in dem ersten Abschnitte 8 von 13, im zweiten 5 von 7, im dritten 2 von 5 subtrahirt worden, und es mußte also derselbe Rest wie oben bleiben. — Der Grund hievon

$$\begin{array}{r|l} & 11 \\ 9375 & 852 \\ 88 & \\ \hline 57 & \\ 55 & \\ \hline 25 & \\ 22 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

liegt darin, daß jedes Vielfache von 11 bis zum Neunfachen, aus zwei gleichen Ziffern besteht.

In dieser Art ist der Beweis an dem in der Auflösung gebrauchten Beispiel auszuführen.

§. 23. Zusatz.

Eine Zahl ist durch 6 theilbar, wenn sie nach §. 15. und 21., sowohl durch 2, als durch 3 theilbar ist.

Sie geht mit 12 auf, wenn sie nach eben den Paragraphen sowohl durch 3 als durch 4 theilbar ist.

Man hat nur zu überlegen, ob 2 und 3, desgleichen 3 und 4 relative Primzahlen sind, dann ergiebt sich die Richtigkeit beider Sätze unmittelbar aus §. 11.

Dieses ist im Hefte bestimmter auszuführen, und auf bestimmte Zahlen anzuwenden.

Auch wird man leicht die Frage beantworten können: ob man schließen dürfe, daß eine Zahl durch 12 theilbar sei, wenn sie durch 2 und 6 theilbar ist?

§. 24. Anmerkung.

Wir haben im Vorhergehenden für folgende kleine Divisoren Kennzeichen, wonach sich leicht beurtheilen läßt, ob eine vorliegende Zahl durch sie theilbar sei.

Für 2, §. 15. a.; für 3, §. 21.; für 4, §. 15. b.; für 5, §. 18.; für 6, §. 23.; für 8, §. 15. c.; für 9, §. 21.; für 10, §. 19.; für 11, §. 22.; für 12, §. 23.

In dieser Reihe fehlt also nur noch die Zahl Sieben, für welche sich aber kein Kennzeichen angeben läßt, welches nicht eben so weitläuftig, oder noch weitläuftiger wäre als eine wirkliche Division. Da indessen jede Division durch eine einziffrige Zahl sehr leicht ist, so kann man immer schnell genug durch eine Division im Kopfe prüfen, ob eine Zahl mit 7 aufgehe.

Bei diesem Paragraphen sind bloß ein Paar sechs- oder siebenziffrige Zahlen aufzuschreiben, und mit 7 (nach IV. 20.), zu dividiren. Die eine soll mit 7 aufgehen, die andre nicht. Bei der letztern soll der Quotient durch Anhängung eines gemeinen Bruchs (nach IV. 15.), vollständig gemacht werden.

§. 25. Anmerkung.

Auf ähnliche Art als §. 23. für die zusammengesetzten Zahlen 6 und 12 Kennzeichen angegeben worden, lassen sich für mehrere größere Zahlen solcher Art Kennzeichen auffinden.

a. Wie würde man z. B. prüfen können ob eine Zahl mit 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 28 rc. aufgehe?

b. Auch würden sich durch ähnliche Betrachtungen als §. 15., für 16 oder 32, desgleichen nach Anleitung des achtzehnten Paragraphen für 25, 50 und 75, Kennzeichen erdenken lassen.

Die Frage a) ist im Hefte zu beantworten; b) wird zu gelegentlichem Nachdenken empfohlen.

Anmerkung. Die Bekanntschaft mit den §. 15. — 25. erklärten Kennzeichen, ist bei sehr vielen Rechnungen von großem Nutzen. Denn man begreift leicht, daß es sehr oft wichtig sei, zu wissen, durch was für Divisoren sich die Zahlen mit denen man rechnet, ohne Rest theilen lassen. Besonders wird bei dem vierten Paragraphen des folgenden Abschnitts gezeigt werden, wie sehr dadurch das sogenannte Heben der Brüche erleichtert wird.

C. Auffindung der einfachen und zusammengesetzten Divisoren jeder Zahl.

§. 26. Lehrsatz.

Jede zusammengesetzte Zahl ist ein Product von unveränderlichen einfachen Factoren.

Beweis.

a. Es sei die durch 2 theilbare Zahl 1260 gegeben. Dividirt man wirklich, so ist $\frac{1260}{2} = 630$; also $1260 = 2 . 630$ (IV. 1.). Wäre nun 630 eine einfache Zahl, so wäre das Product $2 . 630$ durch keine dritte einfache Zahl theilbar (§. 14.). Also bestände 1260, aus dem Product der unveränderlichen einfachen Factoren 2, und 630.

b. Aber 630 ist nochmals durch 2 theilbar, und $\frac{630}{2} = 315$, also $630 = 2 . 315$. Nun war aber nach a) $1260 = 2 . 630$, also ist auch $1260 = 2 . 2 . 315$. Wäre nun 315 einfach, so ist, wie unter der vorigen Nummer, (nach §. 14.) klar, daß 1260 aus dem Product der unveränderlichen einfachen Factoren 2, 2, und 315 bestände.

c. Es ist aber 315 nicht einfach, sondern durch 3 theilbar, und $\frac{315}{3} = 105$, und daher $315 = 3 . 105$. Da nun (nach b.) $1260 = 2 . 2 . 315$ war, so ist auch $1260 = 2 . 2 . 3 . 105$; und wenn 105 einfach wäre, so bestände 1260 aus dem Product der unveränderlichen einfachen Factoren 2, 2, 3 und 105.

d. Es ist leicht einzusehen, wie diese Schlüsse fortgesetzt werden können. Und da bei Fortsetzung der Arbeit die Dividenden, und folglich auch die Quotienten immer kleiner werden, so muß man nothwendig zuletzt auf eine Division kommen, deren Quotient eine einfache Zahl ist. Dann ist die gegebene Zahl in ihre sämmtlichen unveränderlichen einfachen Factoren zerlegt, und bewiesen, daß sie durch keine andere einfache Zahl theilbar sei.

Dieser Beweis ist im Hefte, aber mit Auswahl einer andern Zahl zu wiederholen. Aber obgleich an sich jede zusammengesetzte Zahl zum Beweis brauchbar ist, so ist es doch zweckmäßig, eine solche zu wählen, welche wenigstens 3 oder 4 einfache Factoren habe. Eine solche aber kann jeder leicht finden, wenn er 3 oder 4 einfache Zahlen mit einander multiplicirt.

§. 27. Zusatz.

Aus dem Beweis des vorigen Paragraphen läßt sich ohne Schwierigkeit die bequemste Methode, eine zusammengesetzte Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerfällen, ableiten.

Man muß nämlich zuerst mit den kleinsten Primzahlen (2, 3, 5 ꝛc.) anfangen und nach der Reihe versuchen, ob die Zahl durch eine derselben theilbar sei. Findet man einen Divisor, so muß man wirklich dividiren, und dann den erhaltenen Quotienten prüfen, ob er sich nochmals durch dieselbe, oder durch die nähst größere dividiren lasse. Findet man einen solchen Divisor, so verfährt man mit demselben vollkommen wie mit dem ersten, und man setzt dieses fort, bis man zu einem Quotienten kommt, von dessen Einfachheit man überzeugt ist.

Zur Erläuterung dieses Zusatzes wollen wir die im vorigen Paragraphen gebrauchte Zahl 1260 vollständig in ihre einfachen Factoren zerfällen. In der beistehenden Rechnung ist 1260 zuerst durch 2 dividirt. Der Quotient ist 630. Dieser ist nochmals mit 2 dividirt, und der zweite Quotient ist 315. Dieser läßt sich nicht mehr durch 2, aber wohl durch 3 dividiren. Der Quotient ist 105. Dieser nochmals durch 3 dividirt, giebt 35, welches nicht weiter durch 3, aber wohl durch die nähste Primzahl 5 dividirt werden kann. Die wirkliche Division giebt 7, welches selbst einfach ist. Daher hat man

	1260
2)	630
2)	315
3)	105
3)	35
5)	7

$$1260 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7.$$

In dem Hefte ist eine ganz ähnliche Erläuterung auszuarbeiten, aber dabei die im vorigen Paragraphen gebrauchte Zahl zum Grunde zu legen.

§. 28. Lehrsatz.

Jede Zahl unter 100 ist einfach, wenn sie durch keine einfache Zahl unter 10 theibar ist.

Anleitung zum Beweise. Zuerst sind hier die wenigen einfachen Zahlen, die kleiner als 10 sind aufzusuchen, und aufzuschreiben.

Ferner suche man irgend eine Zahl unter 100 auf, die sich durch keine dieser Zahlen ohne Rest dividiren läßt, welches bei Anwendung der oben erklärten Kennzeichen sehr leicht ist.

Hat man eine solche Zahl gefunden, so wird sich leicht deutlich machen lassen, daß wenn man sie durch irgend eine Zahl dividirt, die größer als 10 ist, der Quotient nothwendig kleiner als 10 sein müsse.

Ließe sich nun diese Zahl durch irgend einen Divisor über 10 ohne Rest dividiren, so müßte sie nothwendig auch einen Divisor unter 10 haben. Denn der Quotient dieser Division, der nach dem vorhergehenden kleiner als 10 sein muß, würde auch die Zahl ohne Rest dividiren. Da sie nun unter 10 keinen Divisor hat, so kann sie auch über 10 keinen haben. Folglich ist sie einfach.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständiger auszuführen.

§. 29. Zusatz.

Es ist also leicht, nicht nur alle einfachen Zahlen unter 100 aufzufinden, sondern auch nach §. 27. alle zusammengesetzten Zahlen bis hundert in ihre einfachen Factoren aufzulösen.

Es ist zur Fertigkeit im Rechnen, und zur möglichsten Abkürzung der Rechnungen sehr wichtig, daß man die einfachen Zahlen unter 100, und die einfachen Factoren der zusammengesetzten leicht auffinden könne. Daher soll bei diesem Paragraphen eine Tabelle berechnet werden in welcher alle Zahlen von 2 bis 100 aufgeführt, und bei den zusammengesetzten ihre einfachen Factoren angegeben werden.

Als ein Muster wie die Tabelle einzurichten sei, setzen wir den Anfang einer solchen hinzu.

2	11	20 = 2 . 2 . 5
3	12 = 2 . 2 . 3	21 = 3 . 7
4 = 2 . 2	13	22 = 2 . 11
5	14 = 2 . 7	23
6 = 2 . 3	15 = 3 . 5	24 = 2 . 2 . 2 . 3
7	16 = 2 . 2 . 2 . 2	25 = 5 . 5
8 = 2 . 2 . 2	17	26 = 2 . 13
9 = 3 . 3	18 = 2 . 3 . 3	27 = 3 . 3 . 3
10 = 2 . 5	19	28 = 2 . 2 . 7 ꝛc.

Die Ausführung ist leichter, als man auf den ersten Blick vermuthen wird.

Wenn man 1 nicht mitzählt, so finden sich unter hundert 25 Primzahlen.

§. 30. Lehrsatz.

Jede Zahl unter 10000 ist einfach, wenn sie durch keine Primzahl unter 100 theilbar ist.

Der Beweis ist dem von §. 28. so ähnlich, daß eine kurze Anleitung hinreichend sein wird. Da nämlich 10000 durch 100 dividirt, 100 zum Quotienten giebt, so läßt sich leicht zeigen, daß jede Zahl die kleiner als 10000 ist, durch eine Zahl über 100, dividirt, einen Quotienten geben muß, der kleiner als 100 ist. Hat also eine Zahl unter 10000, einen Divisor der größer als 100 ist, so muß sie auch einen haben, der kleiner als 100 ist. Hat sie also diesen nicht, so kann sie auch jenen nicht haben, und muß daher einfach sein.

Dieser Beweis ist nur im Hefte noch bestimmter und vollständiger auszuführen.

§. 31. Zusatz.

Hätte man eine vollständige Liste aller Primzahlen unter 10000, so würde es möglich sein, alle Zahlen unter 10000 . 10000 d. i. unter 100000000 zu prüfen, ob sie einfach, oder aus welchen einfachen Factoren sie zusammengesetzt sein. Mit einer Liste der einfachen Zahlen unter 100 Millionen, würde man ferner alle Zahlen bis zu 1000 Billionen prüfen können. Kurz es ist die Möglichkeit sichtbar, alle Zahlen, die einfach sind, aufzufinden, und jede zusammengesetzte in ihre einfachen Factoren aufzulösen.

§. 32. Zusatz.

Nach allem bisher vorgetragenen läßt sich die bequemste, und sicherste Ordnung angeben, nach welcher man die Untersuchung einer Zahl, welche 10000 nicht übersteigt, vorzunehmen habe.

Sie besteht darin, daß man versucht, ob die vorgelegte Zahl durch eine Primzahl unter 100 theilbar sei. Um keine zu verfehlen, muß man bei der kleinsten Primzahl 2 anfangen, und dann nach der Reihe mit allen übrigen fortfahren. Findet sich ein Divisor, welcher aufgeht, so muß man jederzeit versuchen, ob derselbe vielleicht noch einmal im Quotienten aufgehe.

Findet sich ein Divisor, so kommt man gewöhnlich bald zu Ende, weil man nun die fernere Prüfung nicht mehr mit der Zahl selbst, sondern mit dem viel kleineren Quotienten vornehmen kann.

Findet man aber keinen Divisor, so hat man doch selten nöthig, alle 25 Primzahlen unter 100 zu versuchen, sondern man bricht ab, sobald man auf eine Division kommt deren Quotient kleiner ist, als der Divisor.

Denn es ist durch ähnliche Schlüsse als §. 28. und 30. gemacht worden, erweislich, daß die Zahl keinen größern Divisor haben könne, weil sie sonst auch einen kleineren haben würde, der sich also bei den vorhergehenden Versuchen schon gezeigt haben müßte.

Zu mehrerer Deutlichkeit wollen wir zwei Beispiele hinzufügen.

1. Die zu prüfende Zahl sei 9776, so versucht man zuerst die kleinen Divisoren 2, 3, 5, 7, 11 nach den oben angegebenen Kennzeichen. Findet sich ein Divisor, wie hier 2, so muß man die weitere Prüfung nicht mit der Zahl 9776, sondern mit dem Quotienten 4888 fortsetzen, und hier wieder mit 2 anfangen. Unsere Zahl und deren Quotienten lassen sich auf diese Art viermal hinter einander mit 2 dividiren. Die vierte Division giebt den Quotienten 611, der nun weiter zu prüfen ist. Da er nicht durch 2 theilbar ist, so sind die folgenden einfachen Zahlen 3, 5, 7, 11 rc. zu versuchen. Es ist aber leicht zu übersehen, daß keine derselben aufgehe. Man muß also die nähste einfache Zahl 13 versuchen. Sie geht auf, und der Quotient ist die einfache Zahl 47; also hat man vollständig alle einfachen Factoren der Zahl 9776, nämlich

$$\begin{array}{r|r} & 9776 \\ 2) & 4888 \\ 2) & 2444 \\ 2) & 1222 \\ 2) & 611 \\ 13) & 47 \end{array}$$

$$9776 = 2 . 2 . 2 . 2 . 13 . 47.$$

Im Allgemeinen bemerke man noch folgendes. So oft man einen Divisor gefunden hat, der aufgeht, so muß man zwar immer versuchen, ob eben dieser Divisor vielleicht noch einmal aufgehe: aber nie hat man nöthig, einen kleineren Divisor nochmals zu versuchen.

2. Die zu prüfende Zahl sei 1567. Daß sie nicht durch 2, 3, 5, 7, 11 theilbar sei, übersieht man schnell. Es müssen also die folgenden Primzahlen 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 nach der Reihe versucht werden. Es findet sich unter diesen Zahlen kein Divisor, der letzte 41 aber giebt einen Quotienten, dessen ganzer Theil 38, also kleiner als 41 ist. Weiter hat man aber nicht nöthig zu gehen. Denn führe

man fort, so bekäme man immer größere Divisoren, also immer kleinere Quotienten. Sollte sich also noch ein größerer Divisor finden, so müßte es auch einen kleineren geben, der sich bei den vorhergehenden Divisionen schon gezeigt haben müßte. Da sich aber kein kleinerer gefunden hat, so ist es unmöglich, daß sich ein größerer finden sollte, und die Zahl ist also einfach.

Diese Erläuterung ist im Hefte an zwei andern Zahlen zu wiederholen. Bei einigem Nachdenken kann es nicht schwierig sein, zwei schickliche Zahlen zu wählen. Für Nr. 1. muß man eine Zahl wählen, von der man schon nach den Kennzeichen einen oder ein Paar Divisoren kennt. Für Nr. 2. muß man einige Zahlen aufsuchen, die bis 11 keinen Divisor haben. Unter mehreren solchen Zahlen, wird es nicht leicht fehlschlagen, eine wirklich einfache zu haben, und diese mag dann als Beispiel im Hefte gebraucht werden. Die übrigen vergeblich berechneten sind gut für das Übungsheft. Es ist zweckmäßig für das Hauptheft keine allzugroße Zahl (etwa zwischen 1000 und 2000) zu wählen.

Im Übungshefte aber sind recht viele solche Prüfungen mit ganz beliebigen Zahlen zu machen.

§. 33. Zusatz.

Zahlen über 10000, wenn sie kleine Divisoren haben, und Quotienten unter 10000 geben, können eben so in alle einfache Factoren zerlegt werden.

Im Hauptheft ein Beispiel; im Übungsheft mehrere.

§. 34. Aufgabe.

Alle ganze Divisoren einer Zahl, auch die zusammengesetzten aufzufinden.

Auflösung. Eine zusammengesetzte Zahl N ist nicht bloß durch ihre einfachen Factoren, sondern auch durch alle Producte von je zweien, oder je dreien, oder mehreren derselben, so viele sich ihrer machen lassen, (nach §. 11.) theilbar. Man muß daher zuerst nach §. 32. alle einfache Factoren der Zahl aufsuchen, und dann alle möglichen Producte von je zweien, dreien rc. derselben machen.

Nun seien α, β, γ einfache Zahlen, und $N = \alpha\alpha\beta\beta\gamma$, so giebt folgende Tabelle einen Überblick aller ganzen Zahlen, wodurch sie sich ohne Rest dividiren läßt.

I.	II.	III.	IV.	V.
α	$\alpha\alpha$	$\alpha\alpha\beta$	$\alpha\alpha\beta\beta$	$\alpha\alpha\beta\beta\gamma$
β	$\alpha\beta$	$\alpha\alpha\gamma$	$\alpha\alpha\beta\gamma$	
γ	$\alpha\gamma$	$\alpha\beta\beta$	$\alpha\beta\beta\gamma$	
	$\beta\beta$	$\alpha\beta\gamma$		
	$\beta\gamma$	$\beta\beta\gamma$		

In der Spalte I. stehen die einfachen Factoren selbst. In der Spalte II. alle möglichen Producte aus je zweien. In der Spalte III. die Producte aus je dreien, unter IV. aus je vieren, unter V. aus fünfen. Setzt man noch 1 hinzu, so würde eine solche Zahl 18 ganze Divisoren haben.

Die Verbindungen jeder Spalte müssen nicht aufs Gerathewohl, sondern in einer bestimmten Ordnung gemacht werden, um keine zu verfehlen. Sie müssen nämlich aus der nähst vorhergehenden mit Beobachtung folgender Regel gebildet werden. Die Spalte III. z. B. erhält man auf folgende Art. Die erste Verbindung unter II. ist $\alpha\alpha$. Behält man nun die sämmtlichen einfachen Factoren der Zahl $N = \alpha\alpha\beta\beta\gamma$ vor Augen, so sieht man leicht, daß man zu $\alpha\alpha$, nur noch β und γ setzen könne, welches $\alpha\alpha\beta$ und $\alpha\alpha\gamma$ giebt. Die zweite Verbindung unter II. ist $\alpha\beta$, und hieraus erhält man $\alpha\beta\beta$, und $\alpha\beta\gamma$. Die dritte Verbindung unter II., $\alpha\gamma$, kann keine Verbindung von dreien geben, weil auf γ (in $N = \alpha\alpha\beta\beta\gamma$) kein Factor folgt. Wollte man aber rückwärts gehen, und $\alpha\gamma$ mit α oder β verbinden, so sieht man leicht ein, daß man nur Verbindungen erhalten würde, die schon dagewesen sind. Die folgende Verbindung unter II., $\beta\beta$, giebt $\beta\beta\gamma$. Die letzte $\beta\gamma$ aber nichts. Verfährt man in dieser Ordnung, so erhält man sicher alle möglichen Verbindungen.

Diese Arbeit, deren Ordnung man am leichtesten in unbestimmten Zeichen übersieht, ist im Hefte an einer bestimmten Zahl zu vollziehen. Um auch hier die bequemste äußere Form der Rechnung bemerklich zu machen, wollen wir alle Factoren der Zahl 140 aufsuchen.

$$140 = 2.2.5.7.$$

	I.	II.	III.	IV.
140	2	2.2 = 4	2.2.5 = 20	2.2.5.7 = 140
2) 70	5	2.5 = 10	2.2.7 = 28	
2) 35	7	2.7 = 14	2.5.7 = 70	
5) 7		5.7 = 35		

Nimmt man also noch 1 hinzu, so sind die sämmtlichen ganzen Divisoren der Zahl 140, folgende zwölf:

1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140.

Im Übungshefte sind mehrere Zahlen auf diese Art durchzurechnen, besonders ist dieses in Ansehung der Zahlen 60 und 360 zu empfehlen.

Sechster Abschnitt.

Von den gemeinen Brüchen.

A. Allgemeine Sätze.

§. 1. Vorerinnerung.

In den vorhergehenden Abschnitten sind schon mehrere die gemeinen Brüche betreffende Erklärungen und Sätze vorgekommen, welche hier sorgfältig zu wiederholen sind. Ganz besonders gehören dahin I. 7. und 8., IV. 13., 14. und 15., und V. 10. Auch gehören hieher alle die Sätze des vierten Abschnitts, in welchen von den Eigenschaften eines Quotienten die Rede ist, als §. 1., §. 8 — 11.

Zur Beförderung dieser Wiederholung sollen bei diesem Paragraphen im Hefte einige Fragen beantwortet werden, welche leichte, und unmittelbare Folgerungen aus den angeführten Sätzen sind.

a. Die einfachste Art, einer ganzen Zahl die Gestalt eines Bruchs zu geben, besteht darin, daß man 1 als Nenner unter dieselbe setzt. Aber man kann den Werth einer ganzen Zahl auch durch Brüche mit andern Nennern ausdrücken. Es fragt sich also: 1) unter welchen Nennern man den Werth einer ganzen Zahl ausdrücken könne? und 2) wie die Rechnung zu machen sei, wenn der Nenner vorgeschrieben ist? Die Beantwortung ergiebt sich aus IV. 14. verglichen mit IV. 9. a.

b. Aus eben den Paragraphen ergiebt sich die Beantwortung der Fragen: 1) unter was für Nenner jeder andere Bruch, dessen Nenner nicht 1 ist, gebracht werden könne? 2) wie die Rechnung zu machen sei, wenn der Nenner des neuen Ausdrucks vorgeschrieben ist? (V. 10. oder auch IV. 9.)

c. Wie kann man einen unächten Bruch in eine gemischte Zahl verwandeln? (IV. 15.)

d. Wie verwandelt man eine gemischte Zahl in einen einzigen unächten Bruch? (Ergiebt sich aus c. in Verbindung mit IV. 15.)

e. Wie addirt und subtrahirt man Brüche von gleichen Nennern? (IV. 10. 11.)

f. Wie kann ein Bruch auf doppelte Art mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden? (IV. 8.) Sind beide Arten in jedem Falle gleich anwendbar?

g. Wie kann ein Bruch auf doppelte Art durch eine ganze Zahl dividirt werden? (IV. 8.) Sind beide Arten in jedem Falle gleich anwendbar?

h. Was kommt heraus, wenn man einen Bruch mit seinem eigenen Nenner multiplicirt? (Beantwortet sich aus g; oder aus IV. 2. c.)

i. Welches ist die kleinste ganze Zahl, womit eine gemischte multiplicirt werden muß, damit man ein ganzes Product erhalte. (Beantwortet sich aus h.).

§. 2. Erklärung.

Wenn in dem Zähler eines Bruches, oder in dem Nenner, oder in beiden ein Bruch enthalten ist, so nennt man das Ganze einen gebrochenen Bruch.

Es sind bloß einige Beispiele solcher Brüche aufzuschreiben.

§. 3. Aufgabe.

Einen gebrochenen Bruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln.

Anleitung zur Auflösung. Die Auflösung beruht darauf, daß der Werth eines Bruches, (so wie eines Quotienten, IV. 9.) ungeändert bleibt, wenn man die beiden Bestandtheile desselben mit einer und derselben Zahl multiplicirt; und diese kann nach §. 1. h. i. jederzeit so gewählt werden, daß der Bruch wegfällt. Man unterscheide aber bei der Auflösung die beiden Fälle, a) wenn nur ein Bruch da ist; es sei im Zähler oder Nenner, b) wenn deren zwei da sind.

a. Ist nur ein Bruch da, so multiplicirt man den Zähler und Nenner des ganzen Bruchs, mit dem Nenner des Theilbruchs, so muß nach §. 1. h. i. der Theilbruch wegfallen.

b. Sind im Zähler und Nenner solche Theilbrüche enthalten, so multiplicire man jeden Bestandtheil des ganzen Bruchs zweimal, nämlich einmal mit dem Nenner seines Theilbruchs, und die ganze Zahl, welche herauskommt, mit dem Nenner des andern Bestandtheils.

Beides ist an selbstgewählten Beispielen auszuführen.

Anmerkung. Da also solche gebrochene Brüche, die überhaupt nicht häufig vorkommen, jederzeit in gewöhnliche verwandelt werden können, so wollen wir sie in den folgenden Paragraphen dieses Abschnitts nicht weiter berücksichtigen.

§. 4. Aufgabe.

Zu untersuchen, ob ein Bruch in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sei, durch welche sein Werth dargestellt werden kann, und wenn er es nicht ist, ihn auf die kleinsten Zahlen zu bringen, welches man, einen Bruch heben, zu nennen pflegt.

Anleitung zur Auflösung. Die Hauptsache der Auflösung besteht darin, daß man untersucht, welches das größte gemeinschaftliche Maaß des Zählers und Nenners eines vorliegenden Bruches sei (V. 8.).

Ist dieses 1, so sind beide Zahlen absolute oder relative Primzahlen, und der Bruch ist schon in den kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Findet sich aber ein größeres gemeinschaftliches Maaß, so dividire man sowohl den Zähler, als den Nenner durch dasselbe; dann sind die Quotienten absolute oder relative Primzahlen, und der Bruch ist auf die kleinsten Zahlen gebracht.

Jedes ist an einem selbstgewählten Beispiel auszuführen.

Anmerkung. Die Untersuchung des größten gemeinschaftlichen Maaßes kann zwar in jedem Fall, nach V. 8. geschehen. Wer aber die im vorigen Abschnitt erklärten Kennzeichen kleiner Divisoren, und die Zerlegung der Zahlen in einfache Factoren begriffen hat, wird fast in jedem Fall viel kürzer zum Ziel kommen. Hiebei sind aber folgende Regeln zu beobachten.

a. Oft zeigen die Kennzeichen ganz unmittelbar den größten gemeinschaftlichen Divisor, wie in dem beistehenden Beispiel 9, wodurch der Bruch $\frac{18}{45}$ auf die kleinste Benennung $\frac{2}{5}$ gebracht wird.

$$\overbrace{\begin{array}{c|c} 18 & 2 \\ \hline 45 & 5 \end{array}}^{9}$$

b. Oder: die Kennzeichen entdecken zwar einen Divisor, aber man ist nicht sicher, daß es der größte sei. So fällt in die Augen, daß in dem beistehenden Exempel die Zahlen 195 und 455 den Divisor 5 gemein haben. Hebt man durch diesen, so hat man es bei der fernern Untersuchung, mit den kleineren

$$\begin{array}{ccc} & 5 & 13 \\ 195 & 39 & 3 \\ \hline 455 & 91 & 7 \end{array}$$

Zahlen 39 und 91 zu thun. Und wer die Tabelle V. 29. mit Aufmerksamkeit berechnet hat, wird leicht entdecken, daß diese Zahlen den Divisor 13 gemein haben, durch welchen der Bruch auf die kleinsten Zahlen $\frac{3}{7}$ gebracht wird.

c. Bisweilen entdeckt man nur an einer von beiden Zahlen Divisoren. Dann suche man alle einfachen Divisoren dieser Zahl auf, so weiß man, daß sich der Bruch entweder gar nicht, oder durch den einen oder andern dieser Divisoren müsse heben lassen, die man dann leicht probiren kann.

$$\begin{array}{r} 357 \\ 3)\overline{119} \\ 7)\overline{\ \ 17} \end{array}$$

$$\overbrace{\frac{357}{1241}\,\Big|\,\frac{21}{73}}^{17}$$

Es sei der Bruch $\frac{357}{1241}$ gegeben; so wird man zwar nicht leicht an dem Nenner 1241 einen Divisor entdecken. Dagegen aber sieht man leicht, daß der Zähler 357 durch 3 und 7 theilbar sei. Zerfället man ihn nun, nach V. 32. in seine einfachen Factoren, so findet man, $357 = 3 . 7 . 17$. Entweder läßt sich also unser Bruch gar nicht, oder nur durch 17 heben. Versucht man dieses, so ist 1241 wirklich durch 17 theilbar, und der gehobene Bruch $\frac{21}{73}$ ist unter seine kleinsten Zahlen gebracht, da der Nenner eine absolute Primzahl, also durch keinen Factor des Zählers theilbar ist.

d. Auch lassen sich bisweilen beide Zahlen leicht in ihre einfachen Factoren auflösen, und die Vergleichung derselben zeigt dann, ob sie ein gemeinschaftliches Maaß haben. In

$$\begin{array}{r} 147 \\ 3)\overline{\ 49} \\ 7)\overline{\ \ \ 7} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 275 \\ 5)\overline{\ 55} \\ 5)\overline{\ 11} \end{array}$$

dem Bruche $\frac{147}{275}$ lassen sich beide Bestandtheile desselben leicht zerfällen, und die beistehende Rechnung zeigt, daß $147 = 3 . 7 . 7$, und $275 = 5 . 5 . 11$. Da also beide Zahlen keinen einzigen einfachen Factor gemein haben, so sind sie relative Primzahlen, und der Bruch ist schon in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Die beiden letzten Methoden sind eigentlich ganz allgemein, und können in jedem Fall statt V. 8. gebraucht werden, wofern man nur eine von beiden Zahlen in alle ihre einfachen Factoren zerlegt. Auch ist diese Methode die kürzere, wenn die Zerlegung in einfache Factoren schnell von Statten geht, wie dieses fast immer der Fall ist, wenn die Zahlen des Bruchs höhstens vierziffrig sind. Bei sehr großen Zahlen aber ist die Auflösung V. 8. vorzuziehen.

Von allen diesen Arten einen Bruch zu heben, sind wenigstens im Übungshefte recht viele Beispiele zu rechnen.

§. 5. Zusatz und Erklärung.

Da nach §. 1. b. ein Bruch unter jeden Nenner gebracht werden kann, der ein Vielfaches seines Nenners, also durch seinen Nenner theilbar ist, so sieht man leicht ein, daß zwei oder mehrere Brüche unter einen und denselben gemeinsamen Nenner gebracht werden können, wenn dieser durch jeden Nenner der gegebenen Brüche theilbar ist.

Eine solche durch alle Nenner theilbare Zahl kann man aber nicht bloß durch Multiplication aller Nenner erhalten, sondern jedes Vielfache eines solchen Products muß auch durch alle Nenner theilbar sein (V. 3.). Man kann daher jede beliebige Menge von Brüchen, unter unzählige gemeinsame Nenner bringen.

Da aber alle diese Nenner ganze Zahlen sind, so muß nothwendig einer von ihnen der kleinste mögliche sein, und diesen wollen wir mit dem Namen kleinster Gemein-Nenner (oder General-Nenner) bezeichnen.

Ein solcher kleinster Gemein-Nenner ist also allezeit der kleinste Dividendus der sich zu den Nennern der gegebenen Brüche finden läßt. Wir werden aber in den nähsten Paragraphen sehen, daß nicht immer das Product aller Nenner dieser kleinste Dividendus ist.

Dieser Zusatz ist an einem Beispiel von zwei oder drei kleinen Brüchen zu erläutern. Wählte man z. B. die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{5}{12}$, so ist leicht zu zeigen, daß beide sich nicht nur unter den Nenner $96 = 8 . 12$, sondern auch unter jeden Nenner der ein Vielfaches von 96 ist, bringen lassen. Aber daß 96 nicht der kleinste Gemein-Nenner für sie sei, läßt sich an diesem einzelnen Beispiel leicht zeigen, da sich achtel und zwölftel, auch zu vier und zwanzigsteln machen lassen.

§. 6. Aufgabe.

Zu einer beliebigen Menge von Zahlen den kleinsten Dividendus in welchen sie ohne Rest aufgehen, zu finden.

Auflösung. Die gegebenen Zahlen mögen 12, 18, 45, 60 und 63 sein. Man schreibe diese Zahlen in eine Reihe. Dann dividire man sie, so fern es angeht, durch die einfachen Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 ꝛc. nach der Reihe, nämlich auf folgende Art. Zuerst sehe man zu, ob sich alle, oder einige, oder mindestens zweie dieser Zahlen durch 2 dividiren lassen. Was theilbar ist, dividire man wirklich, was nicht theilbar ist, setze man unverändert unter den Strich. Auf diese Art erhält man eine zweite Reihe von Zahlen 6, 9, 45, 30, 63. Mit dieser verfahre man völlig, wie mit der ersten. Man dividire nämlich durch 2, was theilbar ist, alle übrige Zahlen setze man ungeändert herunter. So fahre man fort, wenn es angeht, mit 2 zu dividiren, so lange noch zwei durch 2 theilbare Zahlen übrig sind. Wenn keine mehr vorhanden sind, so nehme man 3, dann 5, dann 7 ꝛc. und verfahre mit jeder vollkommen so, wie vorher mit 2. Diese Arbeit setze man so lange fort, bis man eine Zeile erhält, in welcher sich keine zwei Zahlen finden, die einen Divisor gemein hätten.

	12 .	18 .	45 .	60 .	63
2)	6 .	9 .	45 .	30 .	63
2)	3 .	9 .	45 .	15 .	63
3)	1 .	3 .	15 .	5 .	21
3)	1 .	1 .	5 .	5 .	7
5)	1 .	1 .	1 .	1 .	7

Dann ist das Product aller Divisoren und übrigen Quotienten der gesuchte kleinste Dividendus. In unserm Beispiel ist also

$$2 . 2 . 3 . 3 . 5 . 7 = 1260.$$

Beweis. Es ist zweierlei zu beweisen: a) daß die gefundene Zahl mit allen gegebenen aufgehe, und 2) daß es keinen kleinern gemeinsamen Dividendus für sie gebe.

a. Was das erste betrifft, so darf man nur die beschriebene Rechnung aufmerksam betrachten, um sich zu überzeugen, daß man nichts gethan, als jede gegebene Zahl in ihre einfachen Factoren zerlegt habe, und daß sich nothwendig die sämmtlichen Factoren jeder Zahl unter den Divisoren und Quotienten befinden. Vereinigt man also alle diese Divisoren zu einem einzigen Product, so muß dieses durch jede gegebene Zahl theilbar sein (V. 3.).

b. Daß aber dieses Product der kleinste Dividendus für die gegebenen Zahlen sei, ist eben so leicht zu erweisen. Denn ließe man einen einzigen dieser Factoren weg, so würde dadurch ein oder die andere der gegebenen Zahlen einen ihrer unveränderlichen Factoren (V. 26.) in dem Producte verlieren. Dann würde aber das Product nicht mehr durch einen solchen Nenner theilbar sein. Ließe man z. B. den ersten Divisor 2 weg, und behielte bloß $2 . 3 . 3 . 5 . 7 = 630$, so würde dieses Product weder durch 12 noch durch 60 theilbar sein, da $12 = 2 . 2 . 3$, und $60 = 2 . 2 . 3 . 5$.

Auflösung und Beweis sind im Hefte auf ähnliche Art, nur mit Auswahl anderer Zahlen zu wiederholen.

Anmerkung. Wären die gegebenen Zahlen sehr groß, so kann die Auflösung weitläuftig werden. Da aber im vorigen Abschnitt die Möglichkeit gezeigt worden, jede Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerlegen (V. 31.), so würde die Auflösung doch in keinem Fall unmöglich sein. Im Hefte würde es aber unzweckmäßig sein, sehr viele, und sehr große Zahlen zu wählen. Dagegen wird es von Nutzen sein, im Übungsheft, außer vielen Beispielen von kleineren Zahlen, auch ein Paar von ziemlich vielen kleinen, oder einigen ziemlich großen zu rechnen. Bei wirklichen Anwendungen kommt aber der Fall sehr selten vor, daß man große Zahlen auf diese Art behandeln müßte.

§. 7. Zusatz.

Wer sich mit dem Inhalt des vorigen Abschnitts, besonders mit den Kennzeichen kleiner Divisoren, hinreichend bekannt gemacht hat, der wird in den meisten Fällen einen kleinsten Dividendus noch kürzer als im vorigen Paragraphen und durch bloße Kopfrechnung finden.

a. Zu zwei Zahlen findet man nämlich den kleinsten Dividendus auf folgende Art. Sind es absolute oder relative Primzahlen, so ist ihr Product der gesuchte Dividendus. Haben sie aber einen oder mehrere Divisoren gemein, so dividirt man eine von beiden durch den größten gemeinschaftlichen Divisor, und multiplicirt nur den Quotienten mit der andern Zahl.

b. Sind mehr als zwei Zahlen gegeben, so sehe man zuerst, ob vielleicht eine derselben in einer anderen ganz aufgehe. In diesem Fall kann man die kleinere ganz bei Seite setzen. Dann sucht man zu zweien der übrigen den kleinsten Dividendus, wie oben. Diesen Dividendus verbindet man mit einer dritten Zahl, und sucht wieder wie bei a) den kleinsten Dividendus. Dann nimmt man diesen mit einer vierten Zahl zusammen, und wiederholt die Arbeit so oft, bis alle Zahlen in Betrachtung gezogen sind.

Wir wollen den Sinn dieses Zusatzes durch Beispiele erläutern.

a. Zu 5 und 6 giebt es keinen kleinern Dividendus als $30 = 5 . 6$. Zu 42 und 56 hingegen ist $168 = 3 . 56$ der kleinste Dividendus. Denn 42 und 56 lassen sich beide durch 14 theilen, und $\frac{42}{14} = 3$.

b. Zur Erläuterung des zweiten Theils wollen wir die im vorigen Paragraphen gebrauchten Zahlen 12, 18, 45, 60 und 63 wählen. Da 12 in 60 aufgeht, so hat man bloß 18, 45, 60 und 63 in Betrachtung zu ziehen. Denn, was mit 60 aufgeht, muß auch durch 12 theilbar sein. Zu 18 und 45 ist der kleinste Dividendus 90 = 2 . 45. Zu 90 und 60 findet man 180 = 90 . 2. Zu 180 und 63 endlich findet man 1260 = 180 . 7. Lauter Rechnungen die sich im Kopfe machen lassen.

Ähnliche Erläuterungen sind im Hefte, nur mit Auswahl anderer Beispiele, auszuarbeiten.

§. 8. Zusatz.

Hat man auf die in den beiden vorigen Paragraphen beschriebene Art, zu den Nennern gegebener Brüche den kleinsten Dividendus, d. h. (nach §. 5.) den kleinsten Gemein-Nenner gefunden, so ist es leicht nach §. 1. b. die gegebenen Brüche unter diesen Nenner zu bringen.

	1260	
$\frac{5}{12}$	105 ..	525
$\frac{7}{18}$	70 ..	490
$\frac{4}{45}$	28 ..	112
$\frac{17}{60}$	21 ..	357
$\frac{37}{63}$	20 ..	740

Bloß um die bequemste Form der Rechnung sichtbar zu machen, setzen wir die vollständige Berechnung von Brüchen mit Nennern aus den beiden vorhergehenden Paragraphen hinzu. Daß die Zahlen der letzten Spalte Zähler sind, zu denen der gemeinschaftliche Nenner 1260 gehört, bedarf kaum einer Erinnerung.

Im Haupthefte sind auf ähnliche Art die nach den beiden vorigen Paragraphen gewählten Brüche unter den gefundenen Gemein-Nenner zu bringen.

Im Übungshefte aber sind mehrere Beispiele zu rechnen, und dabei der kleinste Gemein-Nenner, theils nach §. 6., theils nach §. 7. aufzusuchen.

Dem aufmerksamen Rechner werden übrigens von selbst noch manche kleine Vortheile bei der Arbeit einfallen. So lassen sich oft die Zahlen der zweiten Spalte (105, 70 ꝛc.) bequemer als durch wirkliche Division finden. Z. B. Was giebt

1260 dividirt durch 63? Da 1260 = 2.2.3.3.5.7, und 63 = 3.3.7; so wird der Quotient bloß die Factoren 2.2.5 = 20 enthalten; u. dgl. m.

B. Addition der Brüche.

§. 9. Aufgabe.

Zwei oder mehrere gemeine Brüche zu addiren.

Bei der Auflösung sind die beiden Fälle zu unterscheiden, wenn die gegebenen Brüche gleiche oder ungleiche Nenner haben.

a. Sind alle Nenner gleich, so betrachte man sie, (nach I. 8.) als bloße Benennung, so ist deutlich, daß man bloß die Zähler addiren müsse. Die Summe kann keinen andern als den gemeinsamen Nenner bekommen. Auch läßt sich der Beweis, daß man bloß die Zähler addiren, den Nenner aber ungeändert lassen müsse, aus IV. 10. ableiten.

b. Hieraus ergiebt sich dann von selbst, in Verbindung mit §. 6. 7. 8. wie Brüche mit ungleichen Nennern zu behandeln sind.

Beides ist im Hefte durch bestimmte Beispiele deutlich zu machen.

Anmerkung 1.

Im Haupthefte ist es hinreichend, sowohl bei a) als b) Beispiele von nicht mehr als drei oder vier ächten Brüchen zu wählen. Denn es kommt hier mehr auf eine deutliche Beschreibung wie man rechnen müsse, als auf die Rechnung selbst an. Im Übungshefte hingegen sind mehrere, auch größere Beispiele, und nicht bloß mit ächten Brüchen, sondern auch mit gemischten Zahlen zu rechnen.

Anmerkung 2.

Die Summe mehrerer Brüche ist sehr oft ein unächter Bruch, auf welchen dann §. 1. c. und §. 4. angewendet werden kann. Nur gehört dieser Anhang der Rechnung nicht mit zum Wesen der Addition: denn diese ist vollendet, sobald man die Summe in Gestalt eines ächten, oder unächten Bruches gefunden hat.

C. Subtraction der Brüche.

§. 10. Aufgabe.

Einen kleineren Bruch von einem größeren zu subtrahiren.

Bei der Auflösung sind dieselben beiden Fälle als bei §. 9. zu unterscheiden.

a. Sind die Nenner gleich, so subtrahirt man den kleineren Zähler, vom größeren, und läßt den Nenner ungeändert. Der Beweis kann auf dieselbe doppelte Art, wie bei §. 9. geführt werden.

b. Haben die Brüche ungleiche Nenner, so ergiebt sich aus §. 6. 7. 8. was zu thun sei.

Beide Fälle sind im Hefte an bestimmten Beispielen durchzugehen.

§. 11. Zusatz.

Wenn der Minuendus eine gemischte Zahl ist, so kann der Fall vorkommen, daß der ihm anhängende Bruch kleiner ist, als der Bruch des Subtrahendus. Daß man in diesem Fall ein Ganzes des Minuendus mit dem Bruch desselben nach §. 1. d. vereinigen müsse, ist leicht einzusehen.

Dieser Fall ist durch ein Beispiel im Hauptheft zu erläutern. Im Übungsheft aber sind zu §. 10. und 11. mehrere Beispiele zu rechnen, und dabei ist Rücksicht zu nehmen, auf die verschiedenen Fälle welche vorkommen können. Nämlich Minuendus und Subtrahendus können beide bloße Brüche, es kann ferner der eine oder der andere eine ganze Zahl, endlich der eine oder der andere, oder beide gemischte Zahlen, und im letzten Falle der Bruch des Minuendus der größere, oder der kleinere sein.

D. Multiplication der Brüche.

§. 12. Aufgabe.

Irgend eine Zahl, sie sei ganz, oder gemischt, oder gebrochen, oder sie enthalte in den beiden letzten Fällen gemeine oder zehntheilige Brüche, sie habe endlich nur eine oder mehrere Benennungen, mit einem gemeinen Bruch zu multipliciren.

Auflösung. Da der Multiplicandus sein kann, was man will, so wollen wir ihn unbestimmt M nennen, der Multiplicator aber sei der bestimmte Bruch $\frac{5}{7}$. Die Rechnung selbst besteht nun darin, daß man entweder zuerst M durch den Nenner 7 dividirt, und den Quotienten ($\frac{M}{7}$), mit dem Zähler 5 multiplicirt, (also $\frac{M}{7}.5$); oder daß man umgekehrt erst M mit dem Zähler 5 multiplicirt, und das Product (5M) durch den Nenner 7 dividirt, (also $\frac{5M}{7}$).

Anleitung zum Beweise. Aus III. 3. weiß man, wie das Product aus dem Multiplicandus (M) entstehen müsse. Nun läßt sich aber die Entstehung eines Bruchs aus 1 doppelt erklären (I. 7. und IV. 14.). Wendet man dieses auf $\frac{5}{7}$ an, so ergiebt sich daraus ohne Schwierigkeit die obige doppelte Regel.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständig auszuführen, aber dabei ein anderer beliebiger Bruch als $\frac{5}{7}$ zu brauchen. M kann beibehalten werden.

Zu deutlicher Erläuterung sind aber im Haupthefte noch ein Paar Beispiele beizufügen, in welchen für M eine ganze Zahl gesetzt wird, und zwar einmal eine solche die durch den Nenner theilbar ist, und dann eine andere, die nicht theilbar ist. Hiebei ist noch zu zeigen, welche von beiden Regeln in jedem Fall die zweckmäßigste sei.

Im Übungsheft sind mehrere Beispiele zu rechnen, wobei auf die verschiedenen im Paragraphen angedeuteten Fälle, welche in Ansehung des Multiplicandus vorkommen können, Rücksicht zu nehmen ist. Doch können diejenigen Fälle, wo der Multiplicandus ein Bruch, oder aus ganzen und einem gemeinen Bruch gemischt ist, dem folgenden Paragraphen vorbehalten bleiben.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn ein Bruch mit einem Bruch multiplicirt werden soll, so hat man bloß Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner zu multipliciren.

Der Beweis läßt sich aus dem vorigen Paragraphen in Verbindung mit §. 1. f. g. ableiten. Man wähle zu dem Ende zwei beliebige Brüche, und betrachte welchen man will als den Multiplicandus, und überlege nun, wie nach dem vorigen Paragraphen die Rechnung verrichtet werden müsse, und wie jeder Theil der Rechnung nach I. f. g. verrichtet werden könne, so wird man leicht die Richtigkeit des Satzes einsehen.

Dieses ist im Hefte auszuführen.

§. 14. Zusätze.

1. Da man jeder ganzen Zahl nach §. 1. a. die Gestalt eines Bruches geben, jede gemischte Zahl aber, nach §. 1. d. in einen unächten Bruch verwandeln kann, so lassen sich in der That alle Multiplicationen zweier Zahlen, es mögen sich dabei ganze, gebrochene, oder gemischte befinden, nach der im Paragraphen gegebenen Regel rechnen.

2. Aus dieser Regel ergiebt sich ein noch strengerer Beweis, als der oben III. 22. gegebene, daß auch bei gemeinen Brüchen, und gemischten Zahlen die beiden Factoren vertauscht werden können.

3. Wenn sich bei zwei gegebenen Brüchen der Zähler des einen, gegen den Nenner des andern, ganz oder zum Theil heben läßt, so wird sich auch der Zäh-

ler und Nenner des Products durch eben die Zahl heben lassen. Es ist daher zweckmäßiger vor, als nach der Multiplication zu heben.

4. Wenn mehr als zwei Brüche multiplicirt werden sollen, so muß man alle Zähler und alle Nenner multipliciren. Finden sich unter den Zählern und Nennern Zahlen die sich ganz oder zum Theil heben lassen, so ist es auch hier vortheilhaft vor der Multiplication zu heben.

5. Wenn mehrere zu multiplicirende Zahlen zum Theil aus ganzen, zum Theil aus gemischten Zahlen, oder auch aus bloßen Brüchen bestehen, so kann man sie alle in der Gestalt von Brüchen schreiben, und dann wie bei Nr. 4. rechnen.

Im Hefte ist zu jedem der Zusätze 1, 3, 4 und 5 ein selbstgewähltes Beispiel zu geben. Der Beweis von Nr. 2. bedarf keiner Anleitung.

§. 15. Zusatz.

Aus allem bisher vorgetragenen, läßt sich der Grund von allen den Vortheilen, die in den praktischen Rechenbüchern bei der Multiplication der Brüche angegeben werden, streng erweisen. Wir wollen deren hier nur zweie erwähnen.

1. Wenn der Multiplicandus mehrere Benennungen enthält, so ist es nicht nöthig sie erst unter eine einzige zu bringen. Ist der Multiplicator ein Bruch so beruht der Beweis, theils auf III. 9., theils in IV. 10.

2. Wenn der Multiplicator ein Bruch ist, dessen Nenner sich leicht in Factoren zerlegen läßt, so kann

man ihn immer in kleine Brüche zerstückeln, besonders solche, deren Zähler 1 ist. Verrichtet man alsdann die Multiplication, mit einem dieser kleinen Brüche nach dem andern, und summirt zuletzt alle Theilproducte so erhält man das richtige ganze Product. Der Grund beruht auf III. 11. und 12.

Beide Zusätze sind im Hefte durch Beispiele zu erläutern. Wie ein Beispiel für Nr. 1. einzurichten sei, bedarf keiner Erläuterung. Für Nr. 2. mag folgendes als Muster dienen.

Es seien 13 Thlr. 8 Gr. $4\frac{1}{2}$ Pf. mit dem Bruch $\frac{13}{18}$ zu multipliciren, so kann man, da 18 mehrere kleine Divisoren hat, den Bruch $\frac{13}{18}$ auf folgende Art zerstückeln.

$$\frac{13}{18} = \frac{9}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}.$$

Dann läßt sich die Rechnung auf folgende Art machen.

	13 Thlr.		8 Gr.		$4\frac{1}{2}$ Pf.	
$\frac{1}{2}$)	6	=	16	=	$2\frac{1}{4}$	=
$\frac{1}{6}$)	2	=	5	=	$4\frac{3}{4}$	=
$\frac{1}{18}$)	—	=	17	=	$9\frac{7}{12}$	=
	9	=	15	=	$4\frac{7}{12}$	=

In der ersten Zeile unter dem Strich befindet sich die Hälfte des Multiplicandus. Da ferner $\frac{1}{6}$ der dritte Theil von $\frac{1}{2}$ ist, so kann man statt den Multiplicandus mit 6 zu dividiren, die erste Zeile unter dem Strich mit 3 dividiren. Eben so, da $\frac{1}{18}$ der dritte Theil von $\frac{1}{6}$ ist, so erhält man die dritte Zeile, wenn man die zweite mit 3 dividirt. Die Summe dieser drei Zeilen ist das gesuchte Product. Auf diese Art besteht die ganze Rechnung aus lauter kleinen, und leichten Divisionen.

Im Hefte ist ein anderes aber ähnliches Beispiel zur Erläuterung zu berechnen.

E. Division der Brüche.

§. 16. Erklärung.

Wenn man 1 durch irgend eine Zahl dividirt, so nennt man den Quotienten den umgekehrten Werth der Zahl.

So ist der umgekehrte Werth von acht, $\frac{1}{8}$, oder in zehntheiligen Brüchen 0,125.

Im Hefte ist ein anderes Beispiel anzuführen.

§. 17. Zusatz.

a. Das Product einer Zahl mit ihrem umgekehrten Werthe, ist jederzeit = 1.

b. Auch ist umgekehrt, wenn zwei Zahlen das Product 1 geben, die eine der umgekehrte Werth der andern.

c. Überhaupt aber ist der Begriff umgekehrter Werthe immer gegenseitig, d. h. wenn A der umgekehrte Werth von B ist, so ist auch B der umgekehrte Werth von A.

Dieses alles folgt aus §. 16. in Verbindung mit den ersten Begriffen von der Division: nämlich,

a. folgt aus §. 16. in Verbindung mit IV. 1.

b. folgt aus §. 16. in Verbindung mit IV. 1. und 2.

c. folgt aus §. 16. in Verbindung mit IV. 2. b.

Diese Schlüsse sind im Hefte an bestimmten Zahlen-Beispielen auszuführen; wobei es zweckmäßig sein wird, eine solche ganze Zahl zu wählen, deren umgekehrter Werth sich durch einen genauen Decimalbruch ausdrücken läßt. Wollte man nämlich den umgekehrten Werth einer ganzen Zahl z. B. 8 hier durch einen gemeinen Bruch $\frac{1}{8}$ ausdrücken, so würde der Doppelsinn des Zeichens $\frac{1}{8}$ (indem es einmal der Bruch ein Achtel, und dann auch der Quotient Eins durch Achte ist, IV. 14.) leicht einige Undeutlichkeit verursachen. Sagt man hingegen, der umgekehrte Werth von 8 sei 0,125 so fällt diese Undeutlichkeit weg, und die oben bei a) b) c) angeführten Sätze werden sich ohne Zweideutigkeit anwenden lassen.

§. 18. Zusatz.

Die kürzeste Art den umgekehrten Werth einer Zahl zu finden, besteht darin, daß man der Zahl, wenn sie nicht schon die Gestalt eines Bruches hat, diese Gestalt nach §. 1. a. oder d. giebt, und alsdann Zähler und Nenner vertauscht.

Erläuterung. Wenn man $\frac{8}{1}$ statt 8 schreibt, so ist der umkehrte Werth $\frac{1}{8}$.

Wenn man in dem Bruch $\frac{3}{8}$ Zähler und Nenner verwechselt, so ist $\frac{8}{3}$ der umgekehrte Werth von $\frac{3}{8}$.

Wenn man die gemischte Zahl $4\frac{2}{3}$ in den unächten Bruch $\frac{14}{3}$ verwandelt, so ist ihr umgekehrter Werth $\frac{3}{14}$.

Die Richtigkeit dieser Schlüsse beruhet in jedem Fall auf §. 17. b. in Verbindung mit §. 13. Denn es ist klar, daß zwei Brüche, von denen einer die Umkehrung des andern ist, jederzeit das Product 1 geben müssen, wenn man sie multiplicirt.

Diese Erläuterung ist im Hefte auszuführen, nur sind dazu andere Beispiele zu wählen, auch ist der Grund, von der Richtigkeit der Schlüsse, der hier zuletzt bloß allgemein angedeutet worden, bei jedem einzelnen Beispiele bestimmt hinzuzufügen.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn der Divisor ein Bruch ist, so kann die Division in jedem Fall dadurch verrichtet werden, daß man den Dividendus mit dem umgekehrten Werthe des Divisors multiplicirt.

Beweis. Es sei z. B. der Divisor $\frac{3}{4}$, der Dividendus mag 60 sein, so ist zu erweisen, daß $60 : \frac{3}{4} = 60 \cdot \frac{4}{3}$.

Wenn 60 durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so muß nach IV. 3. der Quotient aus 60 entstehn, wie 1 aus $\frac{3}{4}$. Aber Eins entsteht aus $\frac{3}{4}$, wenn man $\frac{3}{4}$ in drei Theile theilt, welches $\frac{1}{4}$ giebt, und einen solchen Theil viermal nimmt, welches $\frac{4}{4}$ oder 1 giebt. Der Quotient entsteht also aus 60, wenn man rc.

Wird aber 60 mit $\frac{4}{3}$ multiplicirt, so entsteht das Product aus 60, wie $\frac{4}{3}$ aus 1 (III. 3.). Aber $\frac{4}{3}$ entsteht aus 1 nach I. 7., wenn man 1 in drei Theile theilt, und einen solchen Theil viermal nimmt. Also muß man, wie vorher ꝛc.

Es ist also klar, daß man durch beide Rechnungen ein und dasselbe Ergebniß bekommt.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständig zu machen; aber es sind dazu andere Zahlen, als die hier gebrauchten, anzunehmen. Was den Dividendus betrifft, so kann dieser zwar von ganz beliebiger Beschaffenheit sein: aber um sich nicht bei dem Beweise in unnöthige Nebenbetrachtungen zu verwickeln, ist es zweckmäßig eine solche Zahl zu wählen, die sich durch den Nenner des Divisors ohne Rest dividiren läßt.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist wichtig, und daher wohl zu merken, weil er alle Fälle, welche bei der Division der Brüche vorkommen können, auf eine einzige Regel zurückführt, nach welcher jeder, der die Multiplication der Brüche gefaßt hat, auch jede Division ohne weitere Anleitung verrichten kann.

Es sind daher bei diesem Paragraphen im Übungsheft recht viele Beispiele zu rechnen, wobei alle Verschiedenheiten, die in Ansehung des Dividendus und Divisors vorkommen können, zu berücksichtigen sind. Der Dividendus kann sein 1) eine ganze Zahl, die mit dem Nenner des Divisors aufgeht, 2) eine ganze Zahl, die mit dem Nenner des Divisors nicht aufgeht, 3) er kann ein bloßer Bruch sein, 4) er kann eine gemischte Zahl sein, 5) er kann endlich aus mehreren Benennungen bestehen. Der Divisor aber ist entweder ein ächter Bruch, oder eine gemischte Zahl. Verbindet man beides, so giebt dieses schon Stoff zu 10 Exempeln. Wenn aber der Quotient keine ganze Zahl ist, so kann er entweder in gemeinen Brüchen, oder in zehntheiligen verlangt werden. Auch von dem letzten Falle sind einige Beispiele zu rechnen.

Endlich bemerken wir noch, daß vermittelst dieses Satzes überhaupt jede Division in eine Multiplication mit dem umgekehrten Werthe des Divisors verwandelt werden könne, was wohl zu merken, und durchzudenken ist.

§. 20. Zusatz.

Was oben IV. 26—30. aus andern Gründen erwiesen worden, daß, wenn Producte mehrerer Zahlen durch einander dividirt werden sollen, in der Ordnung der Rechnung mehrere Abänderungen statt finden, läßt sich aus dem vorigen Paragraphen kurz, anschaulich, und ganz allgemein erweisen.

Erläuterung. Man bilde zwei ganz beliebige Producte aus ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen, und gemischten Zahlen, und verbinde sie durch das Divisionszeichen z. B.

$$\frac{3 \cdot \frac{5}{7} \cdot 3\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{7}}{\frac{5}{9} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot 7}.$$

Dann bringe man jeden Factor in Gestalt eines Bruchs; also

$$\frac{\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{8}{7}}{\frac{5}{9} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{7}{1}}.$$

Endlich verwandle man die Division in eine Multiplication dadurch, daß man alle Divisoren umgekehrt schreibt, so hat man folgendes Product zu machen:

$$\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{7}.$$

Es ist klar, daß diese sieben Factoren in jede beliebige Ordnung gestellt werden können, ohne daß dadurch ihr Product verändert wird. Die Rechnung selbst kann nach §. 14. Nr. 4 und 5. gemacht werden.

Diese Erläuterung ist im Hefte an einem andern, als dem hier gewählten Beispiel zu wiederholen; auch ist die letzte, hier bloß angedeutete Rechnung wirklich auszuführen.

Anhang zum sechsten Abschnitt.

Über die Perioden bei Decimalbrüchen.

§. 1. Lehrsatz.

Jeder gemeine Bruch, dessen Nenner nur die Zahlen 2 und 5 zu einfachen Factoren hat, läßt sich ohne

Fehler in einen Decimalbruch verwandeln, der soviel Stellen nach dem Komma erhält, wie die Anzahl desjenigen Factors, den der Nenner am öftesten enthält, Einheiten hat.

Beweis. Es sei zunächst ein solcher Bruch mit dem Zähler 1 gegeben, z. B.

$$\frac{1}{400} = \frac{1}{2.2.2.2.5.5};$$

so ist zu zeigen: a) daß dieser ohne Fehler in einen Decimalbruch verwandelt werden kann, b) daß der Decimalbruch so viel Stellen erhält, als die Anzahl des Factors, der am öftesten im Nenner enthalten ist (hier 2), Einheiten hat (in unserm Falle 4).

Aus I. 20. ergiebt sich, daß der vorliegende Bruch in einen Decimalbruch ohne Fehler verwandelt werden kann, wenn der Nenner in einer Zahl aufgeht, die aus 1 mit einer Anzahl darauf folgender Nullen besteht; und daß der Decimalbruch soviel Ziffern nach dem Komma erhält, als Nullen an den Dividendus 1 angehängt worden. Es ist aber $10 = 2.5$; $100 = 10 \times 10 = 2.2.5.5$; $1000 = 10 \times 100 = 2.2.2.5.5.5$ u. s. w.; d. h. jede Zahl die aus 1 mit angehängten Nullen besteht, ist nur aus den einfachen Factoren 2 und 5 zusammengesetzt, und hat jeden so oft, als die Anzahl ihrer Nullen Einheiten hat. Demnach wird 10000 die kleinste aus 1 und lauter Nullen zusammengestellte Zahl sein, die durch den Nenner des vorliegenden Bruches $\frac{1}{400}$ ohne Rest theilbar ist; da $10000 = 2.2.2.2.5.5.5.5$ und $400 = 2.2.2.2.5.5$. Dadurch ist aber a) bewiesen und zugleich auch b), da die Anzahl der Nullen im Dividendus 1 die Anzahl der Bruchziffern bestimmt.

Hätte nun der Bruch einen andern Zähler außer 1, so ist deutlich, daß man diesen für den Zähler 1 gefundenen Decimalbruch mit demselben multipliciren müßte, um den Werth des Bruches in Decimalbrüchen zu erhalten. Dadurch wird aber die Stellenzahl nicht geändert (III. 16. Zus.), da der Multiplicator eine ganze Zahl ist, also als eine Summe von Einheiten der Ordnung Null betrachtet werden kann.

§. 2. Zusatz.

Jeder gemeine Bruch, dessen Nenner unter seinen einfachen Factoren noch andere zählt als 2 und 5, kann nicht vollständig in Decimalbrüchen ausgedrückt werden.

Wie dies aus dem Beweise des vorhergehenden Paragraphen verbunden mit V. 14. hervorgehe, ist leicht einzusehen.

§. 3. Lehrsatz.

Jeder Decimalbruch, den man für einen gemeinen Bruch erhält, dessen Nenner aus andern einfachen Factoren als 2 und 5 zusammengesetzt ist, enthält, wenn man die Rechnung gehörig fortsetzt, eine bestimmte Wiederkehr derselben Ziffern, welche man eine Periode nennt.

Beweis. Gesetzt es sollte der Bruch $\frac{5}{14} = \frac{5}{2 \cdot 7}$ nach I. 20. in einen Decimalbruch verwandelt werden; so ist aus §. 2. klar, daß die Rechnung nie aufgehen, sondern immer einen Rest lassen wird. Da nun jeder Rest, den ich bei Anhängung der folgenden Null erhalte, kleiner sein muß als der Divisor 14; die Anzahl der möglichen Reste aber unendlich groß ist; so fällt von selbst in die Augen, daß, wenn nicht früher, doch mindestens nach 13 Abzügen ein Rest bleiben muß, der schon früher vorgekommen ist; weil nur 13 Reste kleiner als 14 sein können. Dividirt man nun nach Anhängung einer Null mit 14 in diesen Rest, so muß im Quotienten (d. h. in dem gesuchten Decimalbruche) dieselbe Ziffer kommen, und derselbe Rest übrig bleiben, wie bei der früheren Division; woraus hervorgeht, daß auch alle übrigen Ziffern im Decimalbruche in derselben Ordnung wiederkehren werden.

Man mache sich diesen Beweis an der beigefügten Rechnung deutlich.

```
14: 5,0 | 0,35714285714285....
    4 2 |
    ----
      8 | 0
      7 | 0
     -------
      1 00
        98
      -----
         20
         14
        ----
         60
         56
        ----
          40
          28
         -----
          120
          112
          -----
            80
            70
          -----
           100
```

§. 4. Lehnsatz.

Wenn ein Bruch, dessen Nenner die Factoren 2 und 5 nicht hat, in einen Decimalbruch verwandelt wird, so erhält man lauter vollständige Perioden, d. h. die Ziffern von dem Komma an gerechnet kehren in derselben Folge wieder.

Beweis. Man verwandle den Bruch $\frac{22}{123}$ nach der gegebenen Regel so erhält man folgende Rechnung.

```
123: 22,0000000  | 0,17886 17886...
     12 3        |
     -----       |
A   . 9 70       |
      8 61       |
     ------      |
B   . 1 090
        984
       -----
C   .. 1060
        984
       -----
D   ... 760
        738
       -----
E   .... 22
```

Es läßt sich zeigen, daß unter allen Resten 22 der erste von den wiederkehrenden (§. 3.) sein wird; daß also die neue Periode, die dadurch im Quotienten entsteht, auch mit derjenigen Ziffer beginnen muß, welche die erste nach dem Komma ist.

Zuerst überzeuge man sich, daß 123 in keiner Zahl aufgehen kann, die ein Product von 10 mit einer kleineren Zahl als 123 ist; denn gesetzt $a < 123$, und

$$\frac{a \cdot 10}{123}$$

wäre eine ganze Zahl, so müßte es auch $\frac{a}{123}$ sein, da 123 und 10 keine Factoren gemein haben. Dies ist aber unmöglich, da 123 unmöglich in einer kleineren Zahl aufgehen kann.

Betrachtet man nun die vorliegende Division, so kann der erste Rest A entweder $= 22$ sein oder eine andere Zahl unter 123. Im ersten Falle ist offenbar die Periode einziffrig; denn es wird immer dieselbe Zahl als Rest erhalten werden.

Im zweiten Falle läßt sich zeigen, daß der bei fortgesetzter Division erhaltene neue Rest B nicht $=$ A sein kann. Denn da bei jeder Division, alle Subtrahenden Vielfache der Divisoren, also durch denselben theilbar sind, so ist im ersten Abschnitt unsers Exempels $220 - A$, im zweiten $970 - B$ durch 123 theilbar. Es ist aber $220 - A = 22 \cdot 10 - A$ und $970 - B = 97 \cdot 10 - B$, oder wenn $A = B$, $97 \cdot 10 - A$. Ist aber $22 \cdot 10 - A$ und $97 \cdot 10 - A$, durch 123 theilbar, so ist es auch ihr Unterschied $75 \cdot 10$ (V. 5.). Da nun aber $75 < 123$ wie es immer sein muß als Unterschied zweier Reste, von denen jeder an sich < 123, so kann auch 75×10, wie oben bewiesen worden, nicht durch 123 aufgehen. Es ist also der Rest B entweder $= 22$ oder eine von dem vorigen Reste A verschiedene Zahl unter 123 (in unserem Falle ist es 109). Auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß jeder der folgenden Reste C, D, E entweder 22 oder eine von den vorigen ganz verschiedene Zahl unter 123 sei; da nun nothwendig einmal einer der vorigen Reste wiederkehren muß, so folgt daraus daß keine andere, als die Zahl 22 der erste wiederkehrende Rest sein könne, woraus die Richtigkeit des Satzes sich ergiebt.

§. 5. Zusatz.

Jede Zahl, die eine relative Primzahl zu 10 ist, geht in irgend einer anderen Zahl auf, deren Ziffern sämmtlich Neunen sind.

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem vorhergehenden Paragraphen. Da nämlich ein solcher Divisor mit einem Dividendus, der aus 1 mit beliebig vielen angehängten Nullen besteht, nothwendig einmal den Rest 1 giebt; und man immer, wenn man 1 abzieht von einer Zahl, die aus 1 mit einer beliebigen Anzahl von Nullen besteht, eine Zahl erhält, die mit lauter Neunen geschrieben ist; so muß ein solcher Divisor auch nothwendig in einer Zahl aufgehn, die mit lauter Neunen geschrieben ist.

§. 6. Zusatz.

Wenn also der Nenner eines Bruches eine relative Primzahl zu 10 ist; so wird man die Stellenzahl seiner Periode erfahren, wenn man mit dem Nenner in eine Zahl mit lauter Neunen dividirt, bis die Rechnung aufgeht, und die Anzahl der Ziffern des Dividendus merkt.

Beweis. Da 7 erst in einer Zahl mit 6 Neunen aufgeht, so kann 7 auch erst den Rest 1 geben, wenn sechs Nullen an den Dividendus angehängt worden sind; d. h. der Bruch hat eine sechsziffrige Periode.

Folgende aus Klügels mathematischem Wörterbuche Th. I. S. 713. entlehnte Tabelle giebt die Periodenzahl (P.) jedes Bruchs für jeden Nenner (N.), der eine Primzahl unter 100 ist.

N.	P.	N.	P.	N.	P.	N.	P.	N.	P.	N.	P.
3	1	17	16	31	15	47	46	67	33	83	41
7	6	19	18	37	3	53	13	71	35	89	44
11	2	23	22	41	5	59	58	73	8	97	96
13	6	29	28	43	21	61	60	79	13		

§. 7. Zusatz.

Wenn der Nenner eines Bruches ein aus Primzahlen außer 2 und 5 zusammengesetzte Zahl ist; so findet man die Anzahl der Ziffern einer Periode des gleichgeltenden Decimalbruches, wenn man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividendus für die Periodenzahlen der einzelnen Factoren des Nenners sucht.

Beweis. Es sei mir der Bruch

$$\frac{1}{949} = \frac{1}{13 \, . \, 73}$$

gegeben. Um die Periodenzahl seiner Decimalstellen zu finden, muß ich eine Zahl finden, deren Ziffern sämmtlich Neunen sind und die durch 949 dividirt aufgeht. Jede Zahl aber, die durch 13 und 73 theilbar ist, ist auch durch 13 . 73 = 949 theilbar (V. 11.). Kennen wir nun die Periodenzahl für den Divisor 13, welche 6 ist, und für den Divisor 73, welche 8 ist; so schließen wir, daß für 949 die Periodenzahl 24 sein muß; denn eine Zahl die 24 Neunen zu Ziffern hat, muß durch 949 = 13 . 73 aufgehen; da 13 in jeden 6 Neunen, und 73 in jeden 8 Neunen derselben aufgeht.

§. 8. Zusatz.

Wenn der Nenner irgend eines Bruches in seine einfachen Divisoren zerlegt ist; so bestimmen diejenigen, welche nicht 2 und 5 sind, die Anzahl der Ziffern der Periode in dem gleichgeltenden Decimalbruch, die Factoren 2 und 5 aber bestimmen die Anzahl der unperiodischen Ziffern, die den Perioden vorangehen; und zwar ist diese immer so groß wie die Anzahl desjenigen dieser beiden Factoren, der am öftesten im Nenner enthalten ist.

Beweis. Es sei der Bruch $\frac{1}{477400}$ gegeben, der in einen Decimalbruch verwandelt werden soll. Da nun

$$\frac{1}{477400} = \frac{1}{2.2.2.5.5.7.11.31} = \frac{1}{2.2.2.5.5}$$

: 7.11.31, so wird man den verlangten Decimalbruch erhalten, wenn man zuerst

$$\frac{1}{2.2.2.5.5}$$

verwandelt, und den erhaltenen Bruch noch durch 7.11.31 dividirt. Aus §. 1. dieses Anhanges ergiebt sich, daß sich

$$\frac{1}{2.2.2.5.5}$$

vollständig in einen Decimalbruch verwandeln läßt, der drei Stellen nach dem Komma hat. Dividire ich nun diesen erhaltenen vollständigen Decimalbruch durch 7.11.31 so ist aus §. 2. dieses Anhangs vorauszusehen, daß die Rechnung nicht aufgehen wird, und daß von dem ersten Reste an, zu dem ich eine Null hinzufügen muß, um die folgenden Decimalstellen zu finden, Perioden eintreten werden, die durch die Factoren des Nenners 7.11.31 bestimmt werden. Da aber die Periodenzahl für 7 = 6, für 11 = 2 und für 31 = 15, so wird sie für 7.11.13 = 30 sein, der Bruch $\frac{1}{477400}$ erhält also nach drei unperiodischen Ziffern wiederkehrende Perioden von 30 Ziffern.

Anmerkung. Einen solchen Bruch wollen wir einen gemischten periodischen Bruch nennen.

§. 9. Aufgabe.

Einen gegebenen reinen periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Es sei der periodische Decimalbruch

0,571428 571428 5....

gegeben; man bilde einen gemeinen Bruch, dessen Zähler sämmtliche Ziffern der Periode, dessen Nenner aber eben so viel Neunen enthält; so ist dieser dem gegebenen Decimalbruche gleich, also

$$0{,}570428\ 5... = \tfrac{571428}{999999} = \tfrac{4}{7}.$$

Beweis. Wir nennen den gegebenen Decimalbruch der Kürze wegen s und multipliciren ihn mit einer Zahl, die aus 1 mit so viel Nullen besteht, als die Periode Ziffern hat; so ist

$$1000000 \,.\, s = 571428{,}571428\;571428\ldots$$

Ziehen wir hievon den zuerst gegebenen Decimalbruch ab; so erhalten wir

$$(1000000 - 1) \,.\, s = 571428 \text{ oder}$$

$$999999 \,.\, s = 571428; \text{ daraus folgt, daß}$$

$$s = \tfrac{571428}{999999}, \text{ was zu beweisen war.}$$

Daß der Beweis, der hier an einem Beispiele mit einer sechsziffrigen Periode geführt worden, allgemein gültig ist, bedarf keiner weiteren Ausführung.

§. 10. Aufgabe.

Einen gemischten periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Auflösung. Es sei der gemischte periodische Decimalbruch 0,017 857142 857142... in einen gemeinen Bruch zu verwandeln. Man nehme sämmtliche Ziffern des Bruchs bis zum Schlusse der ersten Periode und ziehe von diesen die unperiodischen Ziffern ab. Den Rest (17857142 — 17 =) 17857125 macht man zum Zähler des gesuchten gemeinen Bruches; zum Nenner aber eine Zahl, welche so viel Neunen enthält, als die Periode Ziffern und am Ende so viel Nullen enthält, als unperiodische Ziffern vorhanden sind, also ist der erhaltene Bruch $\frac{17857125}{999999000} = \frac{1}{56}$.

Beweis. Nennt man den gegebenen Decimalbruch s, so ist

$$1000000000\,s = 17857142{,}857142\ldots..$$

$$1000\,s = 17{,}857142\ldots..$$

Mithin, wenn man das letztere von dem erstern abzieht, ist

$$999999000\,s = 17857125$$

und auf beiden Seiten durch den Zahlenfactor von s dividirt

$$s = \tfrac{17857125}{999999000}.$$

Anmerkung. Auch die Allgemeinheit dieses Verfahrens bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

Siebenter Abschnitt.

Von der Buchstaben-Rechnung im Allgemeinen und von der Addition und Subtraction insbesondere.

A. Von entgegengesetzten Größen.

§. 1. Erklärung.

Zwei Größen sind gleichartig, wenn sie vermittelst einer und derselben Einheit durch Zahlen vorgestellt werden können. Ungleichartig heißen sie, wenn dieses nicht möglich ist.

Die Erklärung ist durch ein Paar Beispiele gleichartiger und ungleichartiger Größen zu erläutern.

§. 2. Erklärung.

Da sich jede begränzte oder endliche Reihe gleichartiger Größen, in zwei entgegengesetzten Richtungen (vorwärts oder rückwärts) abzählen läßt, so kann man in jeder unbegränzten Reihe gleichartiger Größen, von jedem Punkte aus, allezeit Stücke von beliebiger Größe in zwei entgegengesetzten Richtungen abzählen.

Zwei Stücke nun, die in einerlei Richtung (beide vorwärts, oder beide rückwärts) abgezählt sind, wollen wir gleichstimmige Größen, sind sie aber in entgegengesetzter Richtung abgezählt, entgegengesetzte Größen nennen.

Wenn wir bei einer Art von Größen auf diese entgegengesetzte Entstehung Rücksicht nehmen, was nicht nothwendig, aber jederzeit verstattet ist, so wollen wir sagen, daß wir den Begriff des Gegensatzes anwenden.

Wird aber bei irgend einer Größe auf die Richtung ihrer Entstehung gar nicht Rücksicht genommen, so nennt man sie eine absolute Größe.

Man zeichne im Hefte eine beliebige Reihe von Punkten, ungefähr in gleichen Zwischenräumen von einander, und so, daß man erfoderlichen Falles auf beiden Seiten noch mehr Punkte zusetzen könnte, um dadurch eine unbegränzte Reihe zählbarer Dinge anzudeuten. Nimmt man nun in dieser Reihe irgendwo einen Punkt A, so läßt sich leicht zeigen, daß man von da aus Stücke von beliebiger Größe nach beiden Seiten hin abzählen kann.

Setzt man nun über den Endpunkt eines abgezählten Stückes wieder einen Buchstaben, so wird es leicht sein anzugeben,

1. ein Paar gleichstimmige Stücke, die nach der rechten Seite hin,
2. ein Paar dergleichen, die nach der linken Seite hin,
3. ein Paar entgegengesetzte, deren eins nach der rechten, das andere nach der linken Seite hin abgezählt ist.

Anmerkung. Wenn man absolute Größen zählt, so muß man, wie Jedermann thut, mit Eins anfangen. Zählt man aber Größen, auf welche der Begriff des Gegensatzes angewendet werden soll; so muß man jederzeit mit Null zu zählen anfangen. Der Punkt nämlich, bei welchem man anfangen soll, gehört nicht mit zu den zu zählenden Dingen; er bezeichnet nur die Stelle von der ich ausgehen soll, und nur das, was rechts vor ihm, oder links hinter ihm liegt, ist das zu zählende. Beobachtet man dieses nicht, so kann man in Irrungen gerathen.

Man nehme in der oben gezeichneten Reihe, einen Punkt A, und schreibe über den fünften auf A rechter Hand folgenden

Punkt (A als Null gezählt) B; dann zähle man von B aus wieder rechts etwa sieben Punkte, indem man wieder B als Null zählt. Setzt man nun über den siebenten Punkt C, so hat man von A bis C (A nicht mitgezählt) ganz richtig $5 + 7 = 12$ Punkte. Zählte man dagegen A mit, so hätte man von A bis B 6 Punkte, und von B bis C (B wieder mitgezählt), 8 Punkte also von A bis C, $6 + 8 = 14$ Punkte, was falsch ist.

Um mehrerer Anschaulichkeit willen setzen wir ein Beispiel aus dem gemeinen Leben hinzu.

Wer sich in einem Hause eine Treppe hoch befindet, von wo also eine Treppe aufwärts, die andere abwärts geht, der muß, wenn er die Stufen aufwärts oder abwärts zählen will, den Boden, auf welchem er steht nicht mitzählen, oder was dasselbe sagt: er muß den Boden, auf dem er steht als Null zählen, wenn er richtig zählen will.

Oder: wenn Christus, wie kirchlich angenommen wird, am 24sten December eines Jahres, also innerhalb des Jahres gebohren ist, so ist dieses Jahr als ein untheilbares Ganzes gezählt weder ein Jahr nach, noch vor Christi Geburt, und es muß als das nullte gezählt werden. Erst das folgende ist das erste nach Chr. G. und das vorhergehende das erste vor Chr. G. u. dgl. m. Anders steht die Sache, wenn Jemand nicht Jahre, sondern Monate, oder gar Tage vor und nach Chr. G. zählen, also die Einheit des Zählens ändern wollte. Diejenige Eins, in welcher der Anfangspunkt des Zählens liegt, muß jederzeit als die nullte gezählt werden.

Man übersehe diese Art zu zählen nicht; sie hängt wesentlich mit dem Begriff des Gegensatzes zusammen. Noch bestimmter wird sich dieses weiter unten §. 21. ergeben.

§. 3. Zusatz.

Da jede Art von Größen durch Zahlen vorgestellt werden kann, so ist der Begriff des Gegensatzes auf alle Arten von Größen anwendbar. Und zwar ohne

Einschränkung, so fern bloß von Größen in der Vorstellung die Rede ist; hingegen mit mancherlei Beschränkungen, wenn wirklich gegebene Größen betrachtet werden.

Dieser Zusatz ist durch Beispiele zu erläutern, wozu man Geld, Gewichte, Maaße, Zeiten brauchen kann. In der Vorstellung kann man die Anzahl solcher Dinge so groß machen, als man will. Denkt man sich aber eine Anzahl solcher Dinge als wirklich gegeben, so kann man allerdings nur innerhalb ihrer äußersten Gränzen vor- und rückwärts schreiten.

§. 4. Erklärung.

Da entgegengesetzte Größen jederzeit gleichartige sind, folglich nur eine und dieselbe Einheit haben können, so ist man bei Anwendung des Begriffes vom Gegensatz genöthigt, der an sich absoluten Einheit eine der beiden entgegengesetzten Bestimmungen beizulegen. Welche? ist an sich ganz willkührlich; man wählt aber natürlich immer diejenige, die man als die Hauptklasse betrachtet, oder auch auf die man zuerst seine Aufmerksamkeit richtet.

Mit welcher Klasse man aber auch die Einheit gleichstimmig setzt, so heißt diese allezeit die positive, und die andere die negative Klasse.

Hieraus ist sichtbar, daß, wenn man einmal den Begriff des Gegensatzes anwendet, die Einheit nie anders als positiv sein kann; obgleich die gezählten Einsen eben sowohl positiv als negativ sein können.

Erläuterung. Die Einheit an sich ist eine absolute Größe, also eigentlich weder positiv noch negativ. Will man aber auf eine gewisse Art von Größen den Begriff des Gegensatzes anwenden, so tritt die Nothwendigkeit ein, jeder Größe dieser Art, und folglich auch der Einheit eine der beiden entgegengesetzten Bestimmungen beizulegen; und man darf dieses, weil dadurch in dem Werthe der Einheit nicht das geringste geändert wird. Wollte man sagen, die positiven Größen hätten eine positive, die negativen eine negative Einheit, so widerspricht dieses dem Begriff der Gleichartigkeit. Nur die Zahlen Eins sind in der einen Klasse positiv, in der andern negativ; die Einheit selbst aber, also das Maaß, oder der Werth jeder Zahl Eins, ist für alle dasselbe.

Wer seine Einnahme berechnen will, der kann entweder Einnahme und Ausgabe als zwei Arten absoluter Größen betrachten, und dann ist Ein Thaler Einnahme die Einheit für die Einahme, und Ein Thaler Ausgabe die Einheit für die Ausgabe. Wer aber beide als eine und dieselbe Art von Größen mit Anwendung des Gegensatzes betrachten will, der hat es, genau betrachtet, nicht mit Einnahme und Ausgabe zu thun, sondern mit positiver und negativer Einnahme für welche allerdings Ein Thaler Einnahme (d. h. + 1 Thl.) die gemeinsame Einheit ist. Alle Zahlen in der einen Klasse werden dieser Einheit gleichartig, in der andern ihr entgegesetzt gedacht.

Auf ähnliche Art, als hier im letzten Absatz, sind diese Begriffe im Hefte zu erläutern; nur mit eignen Worten, und mit einem andern Beispiel entgegengesetzter Größen.

§. 5. Grundsätze.

Aus dem bloßen Begriff entgegengesetzter Größen ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit folgender drei Sätze.

1. Wenn man zwei gleichstimmige Größen, sie mögen als positiv, oder als negativ betrachtet werden,

zu einer einzigen Größe verbindet, so erhält man jederzeit die absolute Summe beider Größen, nur mit demjenigen Vorzeichen, welches die Posten haben.

2. Wenn man dagegen zwei entgegengesetzte aber gleiche Größen mit einander verbindet, so hebt eine die andere gänzlich auf, oder ihre Summe ist $= 0$.

3. Sollen daher zwei entgegengesetzte aber ungleiche Größen verbunden werden, so erhält man allezeit den absoluten Unterschied beider, mit den Vorzeichen der größeren.

Jeder dieser Sätze ist durch Beispiele zu erläutern, welches keine Schwierigkeit haben wird, wenn man das, was in der Anmerkung §. 2. über das Zählen gesagt ist, vor Augen behält.

§. 6. Zusatz.

Es ist völlig einerlei, ob man die Vorzeichen als Additions- und Subtractions-Zeichen, oder ob man sie als Zeichen des Positiven und Negativen betrachtet.

Man kann daher diese beiden Vorstellungsarten in jedem Fall nach Belieben vertauschen.

Man stelle zwei beliebige Zahlen z. B. 5 und 4 mit allen Veränderungen zusammen, welche die Vorzeichen zulassen, nämlich $+5+4$; $-5-4$; $+5-4$; $-5+4$; und betrachte in jedem dieser vier Fälle, zuerst die Zahlen als absolute Größen und die Vorzeichen als Additions- und Subtractionszeichen nach Ab. I. 24.; dann betrachte man die Vorzeichen, als Andeutungen des Positiven und Negativen, und überlege, was man nach §. 5. durch Vereinigung beider Größen in eine erhalten würde, so fällt es in die Augen, daß zwischen beiden Vorstellungsarten gar kein wesentlicher Unterschied sei, und daß man also beide beliebig vertauschen könne.

Daß eben dieses auch von drei und mehren gleichartigen Größen gültig sei, ist leicht einzusehen.

Im Hefte ist die angedeutete Erläuterung vollständig auszuführen.

B. Erste Begriffe von Formeln.

§. 7. Erklärung.

Durch eine Verbindung von Größenzeichen und Rechnungszeichen kann die Regel nach welcher eine zusammengesetzte Rechnung zu führen ist, dem Auge kürzer und deutlicher dargelegt werden, als es durch Worte möglich ist. Einen solchen Ausdruck nennt man eine Formel.

Wenn die Größenzeichen bloße Zahlen sind, so heißt die Formel eine Zahlen-Formel. Sie giebt unmittelbar nur die Regel für ein einzelnes Exempel.

Kommen aber in einer Formel Buchstaben, als unbestimmte Größenzeichen, mit oder ohne Zahlen vor, so heißt sie eine Buchstaben-Formel, und eine solche drückt allezeit die Rechnungsregel, nicht für einen einzelnen Fall, sondern für eine ganze Klasse von Exempeln, aus.

Zur Erläuterung sind im Hefte eine beliebige Zahlen-Formel, und eine Buchstaben-Formel aufzuschreiben, und die Rechnungsregel, welche beide dem Auge sichtbar machen, sind in die Wortsprache zu übersetzen. Bei dieser Arbeit sind alle in der Formel vorkommende Größen als absolute zu betrachten, wodurch die Vorzeichen + und — bloße Additions- und Subtractionszeichen, in dem Abschn. I. §. 24. erklärten Sinne werden.

Anmerkung. Die Formeln sind in der That eine eigene Sprache, aber nicht für das Ohr, sondern für das Auge.

Sie hat sehr große Vorzüge vor der Wortsprache, so fern eine Rechnungsregel ausgedrückt werden soll, welche durch sie viel kürzer und deutlicher, als durch Worte ausgedrückt werden kann. Eine Sprache muß man aber erst lernen, ehe man sie mit Vortheil brauchen kann. Es ist indessen nichts leichter, als die Formel-Sprache zu lernen, denn es gehört dazu nichts weiter, als daß man den Sinn aller Größenzeichen und aller Rechnungszeichen richtig kenne. Übt man sich dann ein wenig im Übersetzen aus der Formel- in die Wort-Sprache, und umgekehrt, so wird man bald die großen Vortheile der Formel-Sprache gewahr. Bei diesem siebenten Paragraphen ist Veranlassung Formeln in Worte, und bei §. 8. Worte in Formeln zu übersetzen; und es sind mehre Übungen dieser Art für das Übungsheft zu empfehlen.

§. 8. Zusatz.

Wenn eine wörtlich ausgedrückte Regel in die Zeichensprache übersetzt werden soll, so muß man alle in der Regel vorkommende Größen als absolute betrachten, und daher die Vorzeichen als bloße Additions- und Subtractions-Zeichen ansehen. Ist aber die Formel fertig, so darf man den Begriff des Gegensatzes anwenden, und die Größen nachdem sie + oder — vor sich haben, als positiv oder negativ ansehen.

Hier bilde man zwei ganz beliebige Rechnungsregeln eine in Zahlen, die andere ganz oder zum Theil in unbestimmten Größen. Diese sollen erst wörtlich ausgesprochen, dann durch Formeln dargestellt werden.

§. 9. Erklärung.

Jedes Stück einer Formel, das mit den übrigen durch kein anderes Rechnungszeichen, als durch + oder — zusammenhängt, heißt ein **Glied** der Formel.

Man theilt daher die Formeln in ein- zwei- drei- rc. und mehrgliedrige ein, wofür man auch mononomische, binomische, trinomische rc. und polynomische zu sagen pflegt.

Die Erklärung ist im Hefte durch einige Beispiele an 1, 2, 3, 4 gliedrigen Formeln zu erläutern.

Anmerkung. Bei der Bestimmung der Glieder einer Formel ist der Sinn der Klammern und Divisionsstriche nicht zu übersehen. Eine eingliedrige Formel kann viel zusammengesetzter sein, als eine andere vielgliedrige. Die Formel

$$\frac{3a\,(b-x)\,(b+2x)}{a-2ax+xx}$$

ist viel zusammengesetzter als

$$a-bx+cxx$$

obgleich jene eingliedrig, und diese dreigliedrig ist.

§. 10. Erklärung.

Jedes Glied einer Formel besteht aus drei Bestandtheilen.

1. Die in dem Gliede enthaltenen Buchstaben wollen wir die Hauptgröße nennen.

Hiebei bemerke man, daß Größen, die in eine Klammer eingeschlossen sind, als ein einziger Buchstabe betrachtet werden müssen. Eben so Größen, die über oder unter einem Divisionsstrich stehen. Finden sich ferner in einem Glied gar keine Buchstaben, so kann man beliebig entweder die Zahl, oder ihre Einheit als Hauptgröße ansehen.

2. Ist das ganze Glied mit einem Zahlen-Factor multiplicirt, so heißt dieser der Coefficient des Gliedes.

Ist kein Zahlen-Faktor da, so ist 1 als Coëfficient zu betrachten. Besteht das Glied aus einer bloßen Zahl, so hat man die Wahl, ob man 1 als Coëfficient und die Zahl als Hauptgröße, oder umgekehrt ansehen will. Hat das Glied die Gestalt eines Quotienten, so ist der Coëfficient des Gliedes eigentlich auch ein Quotient, der aus den besondern Coëfficienten des Dividendus und Divisors zusammengesetzt ist.

3. Der dritte Bestandtheil ist das Vorzeichen + oder —, welcher anzeigt, ob das Glied zu der Klasse der positiven oder negativen Glieder gehört.

Wo kein Zeichen steht (welches aber nur bei einem Anfangsglied der Fall sein darf), da ist allezeit + zu ergänzen.

Noch bemerke man, daß ein Glied ein ganzes genannt wird, wenn es keinen Divisor enthält; ein gebrochnes, wenn es dergleichen enthält. Ein gebrochner Coëfficient macht ein Glied noch nicht zu einem gebrochnen, wenn er in Gestalt eines Bruches vorangesetzt wird, wohl aber, wenn man seinen Nenner als Divisor unter das ganze Glied setzt.

Alle Theile dieser Erklärungen sind durch Beispiele zu erläutern, und da auch eine bloße 1 ein Glied einer Formel sein kann (z. B. in der Formel $1 - 3ab + \frac{2}{3}aa$), so sind auch in diesem Gliede alle drei Bestandtheile nachzuweisen.

§. 11. Zusätze.

Im Allgemeinen bemerke man von den Formeln noch folgende drei Sätze.

1. Alle Glieder einer Formel stellen Größen vor, welche unter sich und mit der durch die ganze Formel vorgestellten Größe gleichartig sind.

2. Die Ordnung der Glieder ist im Allgemeinen ganz willkührlich.

3. Wenn man die Vorzeichen aller Glieder verändert, so bleibt der absolute Werth der Formel derselbe; nur wird er negativ, wenn er vorher positiv war, und umgekehrt.

Diese drei Sätze sind im Hefte durch einfache Beispiele, etwa Zahlenformeln von der Gestalt $5 - 9 + 3 - 2$ u. dgl. m. zu erläutern. Nimmt man an, daß der Werth einer solchen Formel eine bestimmte Art von Größen (Thaler, Pfunde, Jahre ꝛc.) anzeige, so wird sich der Sinn aller drei Sätze leicht daran deutlich machen lassen. Auch ist der Grund von allen drei Sätzen ausdrücklich hinzuzufügen. Er liegt bei Nr. 1. in II. 2. und 11.; bei Nr. 2. in II. 3. und 12.; bei Nr. 3. liegt er in den sechs ersten Paragraphen dieses Abschnitts.

Vorerinnerung zum Folgenden.

Wir kommen nun zu der Erklärung der einzelnen einfachen Rechnungsarten, die man, so wie sie hier vorgetragen werden müssen, die algebraischen oder allgemeinen nennt, zum Unterschied von den arithmetischen, die in den sechs ersten Abschnitten erklärt worden.

Es unterscheiden sich aber die algebraischen Rechnungsarten von den arithmetischen nicht etwa im Begriff, (denn dieser muß durch die ganze Mathematik hindurch bei jeder Rechnungsart unverändert bleiben); sondern 1) dadurch, daß man hier meistens nicht mit bestimmten Zahlen, sondern mit unbestimmten Größenzeichen rechnet; doch liegt auch darin noch nicht der wesentliche Unterschied, indem eine Rechnung mit bloßen Zahlen-Formeln eben sowohl eine algebraische Rechnung ist, als wenn man mit Buchstabenformeln rechnet. Der eigentliche und wesentliche Unterschied liegt nämlich 2) darin, daß man in der Zahlenrechnung alle Zahlen als absolute betrachtet, welches eben so viel ist, als ob man sie alle als gleichstimmige betrachtete. In der allgemeinen Rechenkunst hingegen wird verlangt, daß man auch entgegengesetzte Größen addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren solle, welches eigenthümliche Regeln erfodert.

C. Von der algebraischen Addition.

§. 12. Erklärung.

Addiren heißt in der Buchstaben-Rechnung eben so wie in der Zahlen-Rechnung, zwei oder mehr gleichartige Größen, die man Posten nennt, zu einer einzigen Größe, Summe genannt, verbinden (II. 1.); aber die Anwendung dieses Begriffes unterscheidet sich in beiden Rechnungen dadurch, daß in der Buchstaben-Rechnung gefodert wird, nicht bloß gleichstimmige, sondern auch entgegengesetzte Größen zu einer einzigen zu vereinigen, d. h. zu addiren.

Daher setzt man auch zu den Wörtern Addition und Summe noch das Beiwort algebraisch hinzu, wenn man sie scharf von eben den Begriffen in der Zahlen-Rechnung unterscheiden will.

Es wird keine Schwierigkeit haben, diese Begriffe nach Anleitung des Lehrers durch ein Paar Beispiele zu erläutern.

§. 13. Aufgabe.

Zwei mit Vorzeichen versehene Zahlen algebraisch zu addiren.

Obgleich die Auflösung so leicht ist, daß sie jeder bei einigem Nachdenken leicht selbst finden würde, so wollen wir sie doch vollständig hersetzen, weil es die erste in der Buchstabenrechnung ist.

Auflösung. Wenn beide Zahlen gleiche Vorzeichen haben, es sei Plus oder Minus, so addirt man sie arithmetisch, und giebt der Summe dasselbe Vorzeichen.

Haben aber beide Zahlen entgegengesetzte Vorzeichen, so subtrahirt man die kleinere von der größeren arithmetisch, und giebt der so erhaltenen Zahl, welche die algebraische Summe ist, das Vorzeichen der größern.

Der Beweis ergiebt sich, wie man leicht sieht, unmittelbar aus §. 5. Es ist daher nur nöthig, im Hefte zwei beliebige Zahlen zu wählen, ihnen alle mögliche Abänderungen der Vorzeichen zu geben, und dann in jedem Fall die Richtigkeit der Auflösung aus §. 5. zu zeigen.

Anmerkung. Obgleich der Begriff der Addition hier kein anderer ist, als in der Zahlenrechnung, so sieht man doch, daß hier bisweilen Summe heißt, was dort Unterschied genannt wurde.

§. 14. Zusatz.

Wenn mehr als zwei mit Vorzeichen versehene Zahlen algebraisch addirt werden sollen, und sie haben einerlei Vorzeichnung, so kann man die Zahlen in beliebiger Ordnung mit einander verbinden (II. 3.); haben sie aber verschiedene Vorzeichen, so kann man die negativen allezeit nach §. 6. als Größen betrachten, die subtrahirt werden sollen, und dann liegt die Berechtigung, sie in ganz beliebiger Ordnung mit einander zu verbinden, in II. 12. Indessen ist in den meisten Fällen eine von folgenden beiden Ordnungen vorzuziehen:

a. entweder addirt man zuerst die positiven Zahlen, so wie alle negativen, und nimmt endlich nach §. 13. die Summe beider;

b. oder: man addire die erste und zweite, zu ihrer Summe die dritte, zu dieser Summe die vierte, und so fort, bis alle Posten in Rechnung gezogen sind, alles nach §. 13.

Im Hauptheft ist ein selbstgewähltes Beispiel sowohl nach a), als nach b) zu rechnen, und die Rechnung wörtlich zu erklären. Im Übungshefte aber sind viele Beispiele zu rechnen, um die nöthige Fertigkeit zu erlangen. Dabei sind besonders alle Verschiedenheiten zu berücksichtigen, die in Ansehung der Zahlen vorkommen können. In einigen Beispielen mögen sie bloß ganze Zahlen sein; in andern zehntheilige Brüche; in einigen gemeine Brüche; auch wohl in einem Beispiel alle Arten vermischt.

§. 15. Aufgabe.

Zwei eingliedrige Buchstaben-Formeln zu addiren.

Auflösung. Man muß zwei Fälle einzeln betrachten. Die Hauptgrößen (§. 10.) beider Formeln sind entweder völlig gleich, oder sie sind es nicht.

a. Sind die Hauptgrößen völlig gleich, wie z. B. in den Formeln $+ 7ab - 16ab$, so addirt man nach §. 13. bloß die

Coëfficienten mit ihren Vorzeichen, und setzt neben ihre Summe die Hauptgröße unverändert. Die algebraische Summe der obigen Formeln ist also — 9ab.

b. Haben aber die Formeln ganz ungleiche, oder doch nicht völlig gleiche Hauptgrößen, so besteht die Addition bloß darin, daß man beide als eine zweigliedrige Formel unverändert neben einander schreibt. So ist die Summe von + 3ab und — 9abb, gleich 3ab — 9abb. Desgleichen die Summe von — 4a und + 7b ist — 4a + 7b, oder 7b — 4a.

Beweise.

a. Für den ersten Fall beruht der Beweis darauf, daß man nach I. 3. jede Größe, folglich auch ab, es bedeute was man wolle, als eine Einheit vorstellen kann. Addirt man aber + 7, und — 16 Einheiten nach §. 13., so kann die Summe nichts anders als — 9 Einheiten derselben Art (II. 2. und 11.), also — 9ab sein.

b. Im andern Fall haben beide Formeln ungleiche Einheiten. Es findet daher keine wirkliche Addition statt (II. 2. und 11.), sondern nur eine Andeutung, daß sie verbunden werden sollen, und dieses geschieht dadurch, daß man aus den zwei eingliedrigen Formeln, eine einzige zweigliedrige macht. Es darf aber keine Veränderung in einer dieser Formeln gemacht werden, weil nach dem Begriff der Addition (II. 1.) die Summe ein Inbegriff der unveränderten Posten sein muß.

Auflösung und Beweis sind im Hefte kurz, aber mit andern Beispielen zu wiederholen; auch sind noch einige Beispiele von a) und b) beizufügen.

§. 16. Zusatz.

Sollen mehrere eingliedrige Buchstaben-Formeln addirt werden, so sondert man zuerst alle diejenigen aus, welche gleiche Hauptgrößen haben. Diese addirt man nach §. 15. a. Finden sich keine Formeln mehr, die sich wirklich addiren lassen, so schreibt man alle gefundenen Summen nebst allen noch nicht addirten Gliedern nach §. 15. b. in eine einzige mehrgliedrige Formel zusammen.

Dieses ist im Hauptheft an einem Beispiel von sieben bis acht eingliedrigen Formeln zu erläutern, und das Verfahren wörtlich zu beschreiben. Im Übungsheft aber sind mehrere Beispiele zur Übung zu rechnen, und dabei alle Verschiedenheiten, die in Ansehung des Coefficienten vorkommen können (m. vergl. §. 14.), zu berücksichtigen.

§. 17. Aufgabe.

Zwei oder mehrere mehrgliedrige Formeln zu addiren.

Man sieht leicht ein, daß die Auflösung dieser Aufgabe in nichts anderem bestehen könne, als in einer wiederholten Anwendung von §. 15. und 16. Es ist daher hier nichts zu thun, als die schicklichste äußere Form der Rechnung anzugeben.

Gesetzt es wären folgende Posten zu addiren $(3aa - 3bb - 2ac) + (3ac - 5ab) + (4ac - aa + 4bc) + (2aa + 2ab + ac) + (7ac - 4bc - 4cc)$; so ist es am bequemsten, sie so unter einander zu setzen, daß diejenigen Glieder, welche gleiche Hauptgrößen haben, gerade unter einander zu stehen kommen; auch ist zu empfehlen, daß man in jeder Zeile die Glieder lexicographisch ordne. In den obigen Posten kommen sechs Hauptgrößen vor, welche in lexicographischer Ordnung folgende sind: aa, ab, ac, bb, bc, cc. Der Aufsatz und die Rechnung würden also folgende sein:

$$\begin{array}{rrrrrr}
3aa & & -\ 2ac & -\ 3bb & & \\
 & -\ 5ab & +\ 3ac & & & \\
-\ aa & & +\ 4ac & & +\ 4bc & \\
2aa & +\ 2ab & +\ ac & & & \\
 & & +\ 7ac & & -\ 4bc & -\ 4cc \\
\hline
4aa & -\ 3ab & +13ac & -\ 3bb & & -\ 4cc
\end{array}$$

Im Hauptheste ist ein anderes selbstgewähltes Exempel auf ähnliche Art als hier zu behandeln. Im Übungshefte ist eine beträchtliche Anzahl von Exempeln zu rechnen, wobei es nicht sowohl darauf ankommt, sehr große Exempel dieser Art zu rechnen, als mehrere kleinere mit Aufmerksamkeit durchzurechnen, und bei dem Aufsatz derselben die Verschiedenheiten zu berücksichtigen, die theils in Ansehung der Coëfficienten (§. 14.), theils selbst in Ansehung der Hauptgrößen vorkommen können (§. 7.).

Anmerkungen.

1. Zu den Übungen in der Buchstabenrechnung gehört noch eine besondere Arbeit, die bei keiner Rechnungsart zu vernachlässigen ist.

Soll die Buchstabenrechnung auf wirkliche Rechnungsfälle angewendet werden, d. h. soll eine Zahlenrechnung ausgeführt werden nicht nach einer durch Worte, sondern durch eine Formel vorgestellten Regel, so besteht die Arbeit darin, daß man zuerst in der Formel statt aller unbestimmten Größenzeichen bestimmte Zahlen setzt, und dann alle die Rechnungen, welche durch die Zeichen angedeutet werden, wirklich ausführt. Es ist daher nöthig bei jeder Rechnungsart, wenigstens ein Paar Exempel in dieser Art zu bearbeiten; sobald man sich durch mehrere Rechnungen einige Fertigkeit erworben hat. Um das dabei zu beobachtende Verfahren anschaulich zu machen, wollen wir hier ein Beispiel als Muster vollständig durchrechnen.

A		B		C		D
		$(a = 3;\ b = 2;\ c = 4)$				
$2ab - 3bc$	$=$	$2.3.2 - 3.2.4$	$=$	$12 - 24$	$=$	-12
$+ bc$	$=$	$+ 2.4$	$=$	$+ 8$	$=$	$+ 8$
$\frac{1}{2}ab + 4bc$	$=$	$\frac{1}{2}.3.2 + 4.2.4$	$=$	$3 + 32$	$=$	$+ 35$
$\frac{1}{3}ab$	$=$	$\frac{1}{3}.3.2$	$=$	2	$=$	$+ 2$
$\frac{17}{6}ab + 2bc$				E		$+ 45$
				F		$- 12$
				G		$+ 33$

Unter A sind vier Formeln addirt worden; ihre Summe ist $\frac{17}{6}ab + 2bc$. Unter B sind statt der Buchstaben a, b, c, bestimmte Zahlenwerthe gesetzt. Was also unter B steht, unterscheidet sich von der Rechnung unter A bloß dadurch, daß 3 statt a, 2 statt b, 4 statt c gesetzt ist. Unter C ist der Werth jedes Gliedes wirklich berechnet. So ist in der ersten Zeile $2.3.2 = 12$, und $-3.2.4 = -24$ u. s. f. Unter D endlich ist der Werth eines jeden unter A befindlichen Postens durch eine einzige Zahl vorgestellt. So ist z. B. in der ersten Zeile $2ab - 3bc = -12$, u. s. f. Endlich sind unter D noch die Werthe aller Posten algebraisch addirt, und zwar bei E die Summe der positiven, bei F der negativen Posten; endlich bei G die algebraische Summe aller Posten $= +33$.

Eben dieses muß also der Werth der unter A befindlichen Summe $\frac{17}{6}ab + 2bc$ sein, wenn man den Buchstaben die oben angezeigten Werthe giebt. Zu einer Probe ist also noch folgende Berechnung dieser Summe beizufügen. $\frac{17}{6}ab + 2bc = \frac{17}{6}.3.2 + 2.2.4 = 17 + 16 = +33$, wie neben G.

Wer Fertigkeit in der Anwendung der Buchstaben-Rechnung erhalten will, muß nicht versäumen, ein oder ein Paar Beispiele in dieser Art zu rechnen. Die Zahlenwerthe welche man den Buchstaben giebt, können ganz beliebig gewählt werden, und man muß nicht bloß bei ganzen Zahlen stehen bleiben, sondern man kann auch öfters gemeine und zehntheilige Brüche statt der Buchstaben setzen. Wir wollen diese Arbeit in der Folge eine Übersetzung aus der Buchstabensprache in die Zahlensprache nennen.

2. Da nach §. 11. die Ordnung der Glieder an sich ganz willkührlich ist, so hat man die Freiheit, sie in jedem Fall so zu stellen, wie es am bequemsten ist. Die lexicographische Anordnung der Hauptgrößen ist in den meisten Fällen zur Übersicht einer Formel am bequemsten. Sie besteht aber darin, daß man die Hauptgrößen so ordnet, wie man in einem Lexicon die Wörter zu ordnen pflegt: Man stellt nämlich zuerst diejenigen Hauptgrößen zusammen, die sich mit a anfangen, und ordnet diese unter einander so wie die Buchstaben im Alphabet auf einander folgen (aa, ab, ac). Dann folgen die Glieder, die sich mit b anfangen, eben so

geordnet (bb, bc); endlich folgt das Glied, dessen erster Buchstabe c ist (cc).

D. Von der algebraischen Subtraction.

§. 18. Erklärung.

Auch der Begriff der algebraischen Subtraction ist nicht verschieden von der oben (II. 8.) gegebenen. Auch werden hier die Wörter Minuendus, Subtrahendus, Rest oder Differenz gerade so wie dort gebraucht. Nur in der Anwendung dieser Begriffe entstehet hier ein Unterschied dadurch, daß die Buchstabenrechnung nicht nur gleichstimmige, sondern auch entgegengesetzte Größen zu subtrahiren fodert, desgleichen, daß hier die Größe des Minuendus und Subtrahendus gar nicht in Anschlag kommt, und eben so wohl kleineres von größerem, als umgekehrt subtrahirt werden muß; weswegen die Algebraische Subtraction von weit größerem Umfange in Ansehung ihrer Anwendbarkeit ist als die arithmetische.

Auch hier kann es nicht schwierig sein, diese Erklärungen durch ein Paar Beispiele zu erläutern. Zu dem Ende wähle man zwei beliebige entgegengesetzte Zahlen. Z. B. Es soll von $+3$ subtrahirt werden -5. Nach II. 8. heißt das: es soll eine Zahl gefunden werden die (nach §. 13.) zu -5 addirt, den Minuendus $+3$ gebe. Man sieht leicht, daß die gesuchte Zahl nichts anders als $+8$ sein kann. Denn $-5+8$ ist nach §. 13. $=+3$.

Statt dieses Beispiels wird sich leicht ein anderes erdenken lassen.

§. 19. Lehrsatz.

Der algebraische Unterschied zweier Größen wird in jedem Falle gefunden, wenn man zu dem unveränderten Minuendus das Entgegengesetzte des Subtrahendus algebraisch addirt.

Anleitung zum Beweis. Der Minuendus sei was man will, groß oder klein, positiv oder negativ, man nenne ihn A. Der Subtrahendus sei, wenn er positiv ist $+B$, wenn er negativ ist $-B$.

Nun überlege man, wie nach dem Lehrsatz $+B$ von A subtrahirt werden muß, so wird man eine Formel finden, die so beschaffen ist, daß, wenn man $+B$ zu derselben addirt, wieder A herauskommt. Also ist diese Formel die richtige Differenz (§. 18. vergl. mit II. 8.).

Völlig auf dieselbe Art verfahre man, wenn $-B$ von A subtrahirt werden soll.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständig auszuführen.

Anmerkungen.

a. Aus dem Lehrsatz erhellet, daß man für alle bei der Subtraction vorkommenden Fälle keiner andern Regel bedürfe, als derjenigen, welche dieser Lehrsatz enthält, indem die Rechnung dadurch allezeit in eine algebraische Addition verwandelt wird, deren Regeln §. 12 — 17. vollständig erklärt sind.

b. Wollte man die obigen vier Subtractionsfälle nicht wie oben bei Nr. 1 — 4. geschehen ist durch Worte, sondern durch Zeichen andeuten; so müßte man schreiben: 1) $+A-(+B)=A-B$; 2) $+A-(-B)=A+B$; 3) $-A-(+B)=-A-B$; 4) $-A-(-B)=-A+B$, wo das eingeklammerte Zeichen andeutet, ob der Subtrahendus positiv oder negativ sei, das Zeichen vor der Klammer aber ein einfaches Subtractionszeichen ist. Im dritten Fall könnte man statt $-A-B$, auch $-(A+B)$ und im vierten, statt $-A+B$, auch $-(A-B)$ schreiben. Beides nach II. 15.

c. Um sich den Unterschied der algebraischen Addition und Subtraction recht anschaulich zu machen, setze man die obigen vier Fälle nochmals in folgender Art auf

$+A$	$+A$	$-A$	$-A$
$+B$	$-B$	$+B$	$-B$

und schreibe unter jedes einmal die algebraische Summe beider Größen, und dann auch ihren algebraischen Unterschied.

§. 20. Zusatz.

Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich ohne weitere Anleitung, wie zwei mit Vorzeichen versehene Zahlen von einander zu subtrahiren sind.

Im Hauptheste sind acht Beispiele zu berechnen. In den vier ersten soll der Minuendus größer, in den vier letztern kleiner sein als der Subtrahendus. In den vier erstern sowohl als in den vier letztern sollen alle Veränderungen der Vorzeichen vorkommen, welche schon im vorigen Paragraphen erörtert sind.

Den Aufsatz mache man in folgender Form;

Minuendus	+ 17	+ 17	ꝛc.
Subtrahendus	+ 9	− 9	ꝛc.
Allg. Unterschied	+ 8	+ 26	ꝛc.

Im Übungshefte aber sind mehrere Beispiele zu rechnen, und dabei die oben §. 18. angezeigten Fälle zu berücksichtigen.

Anmerkung a.

Man muß sich gewöhnen, die Veränderung der Vorzeichen des Subtrahendus nicht auf dem Papier, sondern bloß im Kopfe zu machen. Man muß also, wenn + 9 von + 17 subtrahirt werden soll, das Zeichen von 9 nicht ausstreichen, und in − verwandeln, sondern man muß sich bloß des Lehrsatzes §. 19. erinnern, und im Kopfe sagen, + 9 von + 17 subtrahiren, ist eben so viel, als − 9 zu + 17 algebraisch addiren, und nach §. 13. giebt dieses + 8; u. dgl. m.

Anmerkung b.

Wenn man − von +, oder + von − subtrahiren soll, so besteht die algebraische Subtraction in einer arithmetischen Addition. Ehe die Begriffe von Gleichstimmigkeit und Gegensatz recht anschaulich und geläufig geworden sind, pflegt es sonderbar zu scheinen, daß man die arithmetische Summe den algebraischen Unterschied beider Größen nennt. Es ist indessen nicht schwer, durch allerlei Beispiele zu zeigen, daß dieser Sprachgebrauch ganz natürlich, und der Sache angemessen ist. Wenn man sich z. B. in dem ersten Geschoß eines Hauses befindet, so kann man die Anzahl der aufwärts führenden Treppenstufen als positiv, die der abwärts führenden als negativ ansehen. Steht nun ein Mensch auf der vierten Stufe aufwärts (+4), und ein anderer auf der dritten abwärts (—3), so steht der erste um 7 Stufen höher (+7), als der zweite. Stände der erste auf der neunten Stufe abwärts (—9), der zweite aber auf der fünften aufwärts (+5), so steht der erste um 14 Stufen niedriger (—14) als der zweite. u. dgl. m. Einer von beiden muß hiebei immer als der erste betrachtet werden; seine Stufenzahl ist der Minuendus.

Es kann nicht schwer sein, ähnliche Betrachtungen über Vermögen und Schuld, über Einnahme und Ausgabe, über Gewinn und Verlust, oder über andere entgegengesetzte Größen anzustellen; und es ist zu empfehlen, daß jeder in seinem Hefte einige dergleichen Beispiele, nach eigener Erfindung hinzusetze.

§. 21. Zusatz.

Da man nach der algebraischen Subtraction jede Zahl von jeder gleichartigen subtrahiren kann, ohne alle Rücksicht auf ihre beiderseitige Größe, so erhält dadurch der Begriff der **natürlichen Zahlenreihe** eine große Erweiterung. Zählt man nämlich rückwärts von einer beliebigen Zahl an, so geht sie durch Null ins Negative über, und schreitet auch auf dieser Seite ohne Ende fort.

Rückwärts erhält man die natürliche Zahlenreihe, wenn man von einer beliebigen positiven Zahl an, z. B. von +5 an, +1 subtrahirt, vom Reste wieder +1, und so ununterbrochen fort. Ist man bis zu +1 gekommen, so hört die Subtraction nicht auf; denn +1 von +1 subtrahirt giebt 0. Aber auch hier hört die Subtraction nicht auf, denn $+1$ von 0 subtrahirt, giebt -1; wird ferner hievon $+1$ subtrahirt, so erhält man -2, u. s. f. Auf diese Art ist im Hefte die natürliche Zahlenreihe, etwa von $+5$ an bis -4 fortzusetzen.

Hieraus wird klar, daß 0 der Übergang aus dem Positiven ins Negative ist, daher ist es zweckmäßig der Null beide Vorzeichen zu geben, und ± 0 zu schreiben. Schriebe man die Reihe umgekehrt mit der negativen Seite anfangend, so ist es zweckmäßig, auch die Vorzeichen der Null umzukehren, und ∓ 0 zu schreiben. Auch eine solche umgekehrte Reihe ist im Hefte aufzuschreiben.

Anmerkung. Aus diesem Paragraphen wird es erst vollständig klar, warum die Ordnungs- oder Stellenzahlen der dekadischen Einheiten nicht anders als oben I. 10. gelehrt worden, gezählt werden dürfen; warum die Haupteinheit die Stellenzahl 0 habe; und warum wir die Zahlen der höhern Ordnungen mit $+$, die der niedrigern mit $-$ bezeichnet haben. Denn in der That können die Stellenzahlen der höheren Ordnungen unter sich als gleichstimmig betrachtet werden, und eben so die Stellenzahlen der niedrigern Ordnungen unter sich. Vergleicht man aber Stellenzahlen einer höhern und einer niedrigern Ordnung, so kann man diese als entgegengesetzte Größen ansehen. Der vollständige Grund hievon liegt in III. 16., wo gezeigt wird, was die Stellenzahl des Products sei, wenn die Factoren von gleichstimmigen, oder von entgegengesetzten Ordnungen sind. Nur hüte man sich vor dem Mißverständniß, als ob die dekadischen höhern oder niedrigern Einheiten selbst entgegengesetzt wären. Nicht sie selbst, sondern nur ihre Stellenzahlen, sind entgegengesetzte Größen.

§. 22. Zusatz.

Nach dem bisher Vorgetragenen bedarf es keiner besondern Anleitung, wie zwei beliebige eingliedrige Buchstaben-Formeln zu subtrahiren sind.

Jn dem Haupthefte sind bei diesem Paragraphen zwölf Beispiele zu rechnen; in den vier ersten sollen der Minuendus und Subtrahendus gleiche Hauptgrößen haben, der Minuendus aber größer sein, als der Subtrahendus, die Vorzeichen aber sollen, wie in §. 19. auf alle Art abwechseln. Die vier folgenden sollen wie die vier ersten gemacht werden, nur soll der Minuendus kleiner sein als der Subtrahendus. Jn den vier letzten endlich sollen die Hauptgrößen beider Formeln ungleich sein, und es sollen nur die verschiedenen Fälle berücksichtigt werden, welche in Ansehung der Vorzeichen statt finden.

Jm Übungshefte sind mehrere vermischte Beispiele zu rechnen, und dabei die Verschiedenheiten zu berücksichtigen, welche sowohl in Ansehung der Hauptgrößen als der Coefficienten und der Vorzeichen statt finden können.

§. 23. Zusatz.

Auch wie zwei mehrgliedrige Formeln von einander zu subtrahiren sind, bedarf nach dem Bisherigen keiner besonderen Anleitung.

Jm Haupthefte ist ein Exempel nicht bloß zu rechnen, sondern nach Anleitung von §. 16. wörtlich zu beschreiben, wie der Aufsatz und die Rechnung zu machen sei.

Jm Übungsheft sind viele Beispiele, mit Rücksicht auf alle im vorigen Paragraphen erwähnten Umstände zu rechnen. Auch sind ein Paar Beispiele in Zahlen zu übersetzen (m. vergl. die Anm. zu §. 16.).

E. Ein Paar wichtige Lehrsätze.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn man zu der Summe zweier Größen die Differenz derselben Größen addirt, so kommt die größere (oder genauer: diejenige, welche in der Differenz als Minuendus betrachtet wird) doppelt heraus.

Es hat gar keine Schwierigkeit diesen Satz ohne Hülfe der Buchstabenrechnung, an zwei beliebig gewählten ungleichen Zahlen, oder auch vermittelst zweier ungleichen Linien zu beweisen; allein die Buchstabenrechnung gewährt ein eben so leichtes als höhst fruchtbares Mittel, auch viel schwerere Sätze zu beweisen: daher soll der Beweis hier durch Buchstabenrechnung geführt werden.

Die beiden Größen nenne man a und b, so kann ihre Summe durch $+a+b$, und ihre Differenz (wenn a der Minuendus ist) durch $+a-b$ vorgestellt werden. Addirt man nun diese beiden Formeln, nach §. 15. so erhält man die Summe $+2a$.

Dieses ist im Hefte durch die wirkliche Addition beider Formeln auszuführen, und dann wörtlich zu zeigen, daß das Resultat dieser Rechnung nichts anders sage, als was bewiesen werden sollte.

Damit man sich aber nicht verwöhne, mit Buchstaben bloß maschinenmäßig zu rechnen, so ist es allerdings nöthig, den Beweis auch ohne Buchstabenrechnung durch bloße Schlüsse zu führen.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn man $+a-b$, von $+a+b$ subtrahirt, so ist der Unterschied $+2b$.

Hier soll im Hefte

1. der Sinn dieses Lehrsatzes zuerst in Worten und Begriffen ausgesprochen werden,
2. soll die Richtigkeit des Satzes durch wirkliche Subtraction der Formel $+a-b$ von $+a+b$ nach §. 22. ausgeführt,
3. auch der Beweis durch Schlüsse versucht werden.

§. 26. Zusatz.

Aus §. 24. und 25. ist klar, daß, wenn mir Jemand zwei Größen x und z nicht einzeln, sondern statt dessen ihre Summe und ihre Differenz giebt, ich allezeit beide Größen leicht einzeln finden könne.

Denn addire ich zu dem Werth von $x + z$ den Werth von $x - z$, so erhalte ich x doppelt; subtrahire ich aber den Werth der Differenz $x - z$ von $x + z$, so erhalte ich z doppelt.

Es sei z. B. $x + z = 15$; $x - z = 9$; so ist $15 + 9 = 24$, also die größere Zahl 12. Subtrahire ich aber 9 von 15, so ist $15 - 9 = 6$, also die kleinere Zahl 3.

Man kann aber für die Summe und Differenz der gesuchten Zahlen annehmen, was man will, positive, negative Werthe, ganze oder gebrochne Zahlen, von welcher Größe man will; die algebraische Addition und Subtraction wird in jedem Fall die richtigen Werthe der Größen geben. Um sich in dieser Anwendung der Buchstabenrechnung zu üben, beantworte man im Hefte folgende oder ähnliche Fragen:

Was ist der Werth von x und von z?

a. wenn $x + z = 5$; $x - z = -8$

b. wenn $x + z = \frac{1}{2}$; $x - z = +7$

c. wenn $x + z = \frac{1}{3}$; $x - z = -\frac{1}{2}$

d. wenn $x + z = 0$; $x - z = +3$

e. wenn $x + z = -1$; $x - z = 0$ u. dgl. m.

Anmerkung. Die Buchstabenrechnung ist das allerwichtigste Hülfsmittel zu mathematischen Erfindungen. Wer aber dieses Hülfsmittel ganz in seine Gewalt bekommen will, der muß außer der Übung in den eigentlichen Rechnungsarten, noch die zwei schon oben §. 7. und 8. erörterten Übungen häufig anstellen. Die erste besteht darin, daß man einen durch Worte und Begriffe ausgedrückten Satz (wie im vier und zwanzigsten Paragraphen geschehen ist) in algebraische Zeichen übersetze. Die zweite ist, daß man umgekehrt einen in algebraischen Zeichen ausgedrückten Satz, (wie im fünf und zwanzigsten Paragraphen geschehen ist) in Worte und Begriffe übersetze. Zu diesen beiden Übungen bietet das Lehrbuch häufigen Stoff dar, auch oft an solchen Stellen, wo es nicht ausdrücklich gesagt ist.

F. Von dem Gebrauch der Klammern.

§. 27. Erklärung.

Was der Sinn einer Klammer oder eines Striches über mehreren Größen bedeute, ist schon I. 27. erklärt worden.

Hier ist aber in Ansehung der Vorzeichen noch folgendes zu merken.

Jedes Glied in einer Klammer muß sein eigenes Vorzeichen haben. Fehlt ein solches, so ist allezeit + zu ergänzen.

Außerdem aber muß auch noch die ganze Klammer außerhalb ein eigenthümliches Vorzeichen haben, welches anzeigt, ob der Inhalt der Klammer, zu dem übrigen Theil der Formel addirt oder von demselben subtrahirt werden soll. Auch wo dieses fehlt kann in jedem Fall + ergänzt werden.

Zuerst ist bei diesem Paragraphen die Bedeutung einer Klammer oder eines Bindungsstriches nach I. 27. zu wiederholen.

Dann ist auch dasjenige, was über die Vorzeichen gesagt worden, durch Beispiele zu erläutern; wobei wir zu vollständigerer Übersicht noch folgendes bemerken.

In jedem Fall kann und muß man auf zweierlei Vorzeichen bei einer Klammer achten, auf die Vorzeichen in derselben, und auf das äußere Vorzeichen der ganzen Klammer.

In der Klammer befinden sich in der Regel zwei oder mehr Glieder, von denen jedes sein eigenes Vorzeichen haben muß; nur pflegt man bei dem ersten Gliede, wenn es positiv ist, das Vorzeichen wegzulassen; aber nicht darf es wegbleiben, wenn dieses Glied negativ ist. Bisweilen schließt man auch wohl ein bloßes Product, oder einen

Quotienten in Klammern ein, um dem Auge bemerklich zu machen, daß man es als eine einzige einfache Größe betrachten solle. Z. B.

$$(4ab), \text{ oder } \left(\frac{2a}{3b}\right), \text{ oder } (-a).$$

Aber auch in solchem Falle kann man nach den Vorzeichen in der Klammer fragen, und man muß + ergänzen, wenn kein Zeichen dasteht.

Außer der Klammer muß aber auch allezeit ein Vorzeichen geschrieben, oder gedruckt werden, weil das eingeklammerte als eine eigene Größe betrachtet werden soll. Man pflegt aber auch hier das Zeichen + in zwei Fällen wegzulassen. Erstlich, wenn die eingeklammerte Größe ein bloßer Factor eines Gliedes ist, und noch andere Factoren vor sich hat. Zweitens, wenn die Klammer das erste Glied einer Formel ist.

Alles Gesagte ist durch Beispiele zu erläutern.

§. 28. Aufgabe.

Eine in einer Formel vorhandene Klammer wegzuschaffen; welches man eine Klammer lösen nennt.

Auflösung. Hat die Klammer das äußere Vorzeichen +, so ist nichts nöthig, als dieses Zeichen nebst der Klammer wegzulassen.

Hat sie aber das äußere Vorzeichen —, so läßt man zwar auch dieses Vorzeichen nebst der Klammer weg; aber jedes Vorzeichen in der Klammer muß dann in das entgegengesetzte verwandelt werden.

Anleitung zum Beweise. Eine Klammer wird gelöst, wenn man die Rechnung, die (nach §. 27.) durch das Vorzeichen angedeutet wird, wirklich vollzieht. Daher ergiebt sich aus §. 17., was man zu thun habe, wenn das Vorzeichen der Klammer + ist; aus §. 19., wenn es — ist.

Auflösung und Beweis sind im Hefte mit Hinzufügung wirklicher Beispiele auszuführen.

§. 29. Aufgabe.

Zwei oder mehrere Glieder einer Formel in Klammern einzuschließen.

Auflösung und Beweis. Die einzuschließenden Glieder können jederzeit auf doppelte Art eingeklammert werden, indem man zum äußern Vorzeichen nach Belieben + oder − wählen kann. Im ersten Fall sind die Vorzeichen der Glieder unverändert beizubehalten; im zweiten sind sie sämmtlich in die entgegengesetzten zu verwandeln.

Dieses ist im Hefte auf Beispiele anzuwenden, und zu zeigen, wie alles aus §. 28. folge.

Achter Abschnitt.

Von der algebraischen Multiplication und Division.

A. Von der algebraischen Multiplication.

§. 1. Erklärung.

Der Begriff der Multiplication, desgleichen die Bedeutung der Wörter, Multiplicandus, Multiplicator, Factor, Product, bleibt völlig wie oben Abschn. III. §. 3. Nur betrachtet man in der Zahlenrechnung die Factoren, und das Product als absolute Größen; in der Buchstabenrechnung giebt man ihnen Vorzeichen, auch rechnet man größtentheils mit unbestimmten Größenzeichen.

Die Bezeichnung der Multiplication ist schon oben (Abschn. I. §. 25.) erklärt, und im Vorhergehenden häufig gebraucht worden.

Im Hefte ist die Erklärung aller hier angedeuteten Gegenstände vollständig zu wiederholen.

§. 2. Lehrsatz.

Wenn man einen beliebig vorgezeichneten Multiplicandus

1. mit einem absoluten Multiplicator multiplicirt, so erhält man das absolute Product mit dem Vorzeichen des Multiplicandus;

2. dasselbe Product erhält man, wenn man dem Multiplicator das Vorzeichen + giebt;

3. das entgegengesetzte hingegen, wenn man ihm — giebt.

Beweis. Der Multiplicandus sei ± 12, der Multiplicator $\frac{2}{3}$, und zwar

1. als absolute Zahl; dann muß nach §. 1. das Product aus ± 12 entstehen, wie der absolute Bruch $\frac{2}{3}$ aus der absoluten 1. Man muß also ± 12 in drei Theile theilen, welches ± 4 giebt, und einen solchen Theil zweimal nehmen, wodurch man ± 8 erhält, d. i. das absolute Product von 12 und $\frac{2}{3}$ mit demselben Vorzeichen, welches 12 hat.
2. Setzt man den Multiplicator $+\frac{2}{3}$, so muß das Product aus ± 12 entstehen, wie $+\frac{2}{3}$ aus + 1, welches offenbar nichts anderes als vorher geben kann.
3. Setzt man aber den Multiplicator $-\frac{2}{3}$, so muß das Product aus ± 12 entstehen, wie $-\frac{2}{3}$ aus + 1 (VII. 4.). Es entsteht aber $-\frac{2}{3}$ aus + 1, indem man den dritten Theil der Einheit ($+\frac{1}{3}$), zweimal nimmt ($+\frac{2}{3}$), und dieses ins Entgegensetzte ($-\frac{2}{3}$) verwandelt. Theilt man nun eben so ± 12 in drei Theile, so erhält man ± 4; nimmt man dieses zweimal, so ergiebt sich ± 8; wird dieses ins Entgegen-

gesetzte verwandelt, so erhält man ∓ 8, d. h. das absolute Product von 12 und $\frac{2}{3}$ mit entgegengesetzter Vorzeichnung des Multiplicandus.

Dieser Beweis ist im Hefte mit eigenen Worten, und an einem selbstgewählten Beispiel auszuführen.

Zusatz.

1. Wenn beide Factoren Vorzeichen haben, so geben gleiche Zeichen im Product Plus, entgegengesetzte Minus.

2. Da nach Nr. 1. des Satzes ein absoluter und ein positiver Factor einerlei Product geben, der andere habe, welches Vorzeichen man will, so beruhet hierauf die Regel, daß man absoluten Größen allezeit + geben müsse, wenn sie ein Vorzeichen bekommen sollen.

Im Hefte ist zu zeigen, wie dieses aus dem Lehrsatz folge.

§. 3. Zusatz.

Wenn mehrere Factoren zu multipliciren sind, so ist

1. das Product positiv, wenn entweder alle Factoren positiv, oder die Anzahl der negativen gerade ist.

2. Das Product ist negativ, wenn die Anzahl der negativen Factoren ungerade ist.

In dem Hefte ist zu zeigen, wie dieses aus §. 2. folge; auch sind einige Zahlenbeispiele sowohl von positiven als negativen Producten beizufügen.

§. 4. Zusatz.

Die Sätze §. 2. und 3. gelten eben sowohl von bestimmten als unbestimmten Größenzeichen; nur daß bei den letzten die Multiplication nicht wirklich vollzogen, sondern nur durch Nebeneinandersetzen der Buchstaben angedeutet wird.

Da aber durch die Vorzeichen aller Factoren das Vorzeichen des Products bestimmt ist; so pflegt man in dem Ausdruck eines Products nicht den einzelnen Factoren, sondern nur dem ganzen Producte sein Vorzeichen zu geben, d. h. man betrachtet alle Factoren, als positive, oder, was eben so viel gilt, als absolute Größen, und bestimmt nur das ganze Product nach dem Begriff des Gegensatzes.

Man darf aber in jedem Falle das Vorzeichen des ganzen Products auch auf den Coefficienten, oder auf irgend einen einzelnen Factor beziehen, wenn man alle übrigen für positive oder absolute Größen nimmt.

Den ersten und zweiten Absatz dieses Paragraphen zu erläutern, wähle man zwei Beispiele mehrerer unbestimmten Factoren mit beliebigen Vorzeichen. In dem einen sei die Anzahl der negativen Factoren gerade, in dem andern ungerade. Ein Factor sei in beiden Beispielen eine bestimmte Zahl. Wie sind z. B. folgende beide Producte mit einem einzigen Vorzeichen auszudrücken?

1. $(-3)\,(+a)\,(-b)\,(-c)\,(+c)\,(-e)$.
2. $(+4)\,(+a)\,(-a)\,(-a)\,(-b)\,(+b)$.

Zur Erläuterung des letzten Absatzes wähle man ein beliebiges Product mit dem Vorzeichen Minus, z. B. $-5aabbc$, so wird sich leicht zeigen lassen, daß man immer das nämliche Product erhält, wenn man irgend einem der Factoren das Vorzeichen $-$ giebt, alle übrigen aber für positive oder absolute Größen annimmt. Denn nimmt man irgend einen Factor negativ, und betrachtet ihn als Multiplicandus, alle übrigen Factoren aber als absolute Multiplicatoren, so bekommt nach §. 2. Nr. 1. auch das Product das Vorzeichen $-$.

Man kann daher das Vorzeichen beliebig auf das ganze Product, oder auf einen Factor beziehen.

Dieses alles ist im Hefte ganz bestimmt auszuführen.

§. 5. Erklärung.

Wenn ein Factor öfter als einmal gesetzt werden soll, so setzt man ihn gewöhnlich nur einmal, deutet aber durch eine kleine rechts oben geschriebene Zahl an, wie vielmal er dasein sollte.

Ein solches Zeichen nennt man eine Potenz des Factors, und zwar die sovielste, als die gedachte Zahl anzeigt. Diese Zahl selbst aber nennt man den Exponenten der Potenz, und den Factor die Wurzelgröße derselben.

Die zweite Potenz pflegt man auch das Quadrat, die dritte den Cubus zu nennen. Ihre Wurzelgröße nennt man denn bezüglich Quadrat-Wurzel, und Cubik-Wurzel.

Diese Erklärungen sind zuerst durch ein Beispiel mit einer unbestimmten Wurzelgröße zu erläutern. Dann ist auch eine bestimmte Zahl als Wurzelgröße zu wählen, wo man den Werth jeder Potenz theils durch den Exponenten bloß andeuten, theils durch Multiplication wirklich berechnen kann.

Zusatz. Wenn zwei Potenzen von derselben Wurzelgröße multiplicirt werden sollen, so geschieht es durch bloße Addition ihrer Exponenten.

Auch dieses ist durch ein Beispiel zu erläutern, und zu zeigen, wie es aus der Erklärung folge.

§. 6. Aufgabe.

Zwei eingliedrige Buchstaben-Formeln zu multipliciren, in welchen keine Divisoren vorkommen.

Auflösung. Die Buchstaben beider Formeln schreibt man in beliebiger, am gewöhnlichsten in alphabetischer Ordnung, neben einander. Kommen Factoren mehr als einmal vor, so kann man nach §. 5. das Abkürzungszeichen brauchen. Die Coefficienten aber nebst den Vorzeichen multiplicirt man nach §. 2.

Sollte also z. B. $+ 3a^2bd$ mit $- 5acd$ multiplicirt werden, so ist das Product

$$- 15a^3bcd^2.$$

Beweis. Um den Grund von diesem Verfahren einzusehen, darf man nur erwägen, daß jeder Buchstabe so wie jeder Coefficient der gegebenen Formeln ein Factor ist, und daß man also in dem obigen Beispiel, mit Weglassung der Vorzeichen, das Product von folgenden Factoren vorstellig machen soll

$$3 . a . a . b . d . 5 . a . c . d.$$

Nun ist nach III. 20. bei der Multiplication mehrerer Factoren die Ordnung ganz beliebig; man darf sie daher auch so ordnen

$$3 . 5 . aaabcdd.$$

Da man aber in jeder der gegebenen Formeln ($+ 3a^2bd$ und $- 5acd$) die Vorzeichen nach §. 4. willkührlich auf die Coefficienten beziehen kann, so beziehe man sie auf die letztern, und betrachte alle übrigen als absolute oder positive Größen. Da nun $(+ 3) (- 5) = - 15$, so ist das ganze gesuchte Product

$$- 15aaabcdd \text{ oder } - 15a^3bcd^2.$$

Auflösung und Beweis sind im Hefte mit eigenen Worten, und an einem andern selbstgewählten Beispiel zu wiederholen.

Im Übungshefte aber sind viele Beispiele zu rechnen, besonders auch solche, wo die Coefficienten gemeine oder zehntheilige Brüche sind.

Anmerkung. Wenn in den folgenden Paragraphen, die von der Multiplication handeln, das Wort Formel vorkommt, so sind immer solche zu verstehen, in welchen kein Divisor vorkommt, weil von diesen erst nach der Division die Rede sein kann.

§. 7. Zusatz.

Wenn mehr als zwei eingliedrige Formeln zu multipliciren sind, so ergiebt sich aus §. 6. und 4., wie man zu rechnen habe.

Im Hauptheſte iſt die Regel der Rechnung beſtimmt auszuſprechen, und auf ein Beiſpiel anzuwenden.

Im Übungshefte ſind mehrere Beiſpiele zu rechnen, und dabei iſt alles am Ende des vorigen Paragraphen Erwähnte zu berückſichtigen.

§. 8. Aufgabe.

Eine mehrgliedrige Formel mit einer eingliedrigen zu multipliciren.

Auflösung. Es ſei $5a^2 - 3ab - 2ac + 7b^2$ mit $-4abc$ zu multipliciren, ſo macht man den Aufſatz auf ähnliche Art als bei der Zahlenrechnung; nur pflegt man den Multiplicator ($-4abc$) nicht unter das letzte Glied rechter Hand, ſondern unter das erſte linker Hand zu ſetzen. Auch fängt man die Rechnung nicht auf jener, ſondern auf dieſer an, wie folgt:

$$\begin{array}{l} \quad 5a^2 \quad - 3ab \quad - 2ac \quad + 7b^2 \\ -4abc \\ \hline -20a^3bc + 12a^2b^2c + 8a^2bc^2 - 28ab^3c. \end{array}$$

Die Rechnung ſelbſt beſteht darin, daß man nach der Reihe jedes einzelne Glied des Multiplicandus mit dem Multiplicator, nach §. 6., multiplicirt, und bedarf daher keiner näheren Auseinanderſetzung.

Beweis. Hätten alle Glieder des Multiplicandus einerlei Vorzeichen, ſo ergiebt ſich die Richtigkeit der Rechnung aus III. §. 9. und 11.

Haben ſie aber, wie in unſerm Beiſpiel verſchiedene Zeichen, ſo ſchließe man alle poſitiven Glieder in eine Klammer mit dem Vorzeichen +, alle negativen mit dem Vorzeichen −. Dann muß man nach Abſchn. III. §. 10. ſowohl jene, als diese Klammer mit $-4abc$ multipliciren. Löset man endlich in beiden Producten die Klammern nach VII. 28., und vergleicht dann alle Glieder mit der obigen Rechnung, so fällt in die Augen, daß man auf dem hier (im Beweise) beschriebenen Wege nichts anders finde, und finden könne, als die in der Auflösung gefundenen Glieder, nur in veränderter Ordnung.

In der Auflösung ist im Hefte ein anderes Beispiel zu wählen. Der Beweis aber ist vollständig auszuführen.

Im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen.

§. 9. Aufgabe.

Zwei mehrgliedrige Formeln mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Man muß jedes Glied des Multiplicandus, mit jedem Gliede des Multiplicators (nach §. 8.) multipliciren, und dann alle erhaltenen Theilproducte in eine einzige Formel summiren.

Gesetzt man sollte folgendes Product berechnen:
$(3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - b^3)\,(5a^2 - 2ab - 2b^2)$,
so hat man folgende Rechnung zu machen:

$$\begin{array}{llllll}
3a^3 & - 2a^2b & + 5ab^2 & - b^3 & & \\
5a^2 & - 2ab & - 2b^2 & & & \\
\hline
15a^5 & - 10a^4b & + 25a^3b^2 & - 5a^2b^3 & & \\
 & - 6a^4b & + 4a^3b^2 & - 10a^2b^3 & + 2ab^4 & \\
 & & - 6a^3b^2 & + 4a^2b^3 & - 10ab^4 & + 2b^5 \\
\hline
15a^5 & - 16a^4b & + 23a^3b^2 & - 11a^2b^3 & - 8ab^4 & + 2b^5
\end{array}$$

In der ersten Zeile unter dem Striche ist der ganze Multiplicandus nach §. 8. mit dem ersten Gliede des Multiplicators multiplicirt. In der zweiten Zeile ist er mit dem zweiten, und in der dritten Zeile mit dem dritten Gliede multiplicirt. Endlich sind in der letzten Zeile alle erhaltenen Theilproducte nach den Regeln der Addition (VII. 17.) summirt worden.

Beweis. Man setze $3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - b^3 = A$, so hat man das Product

$$(5a^2 - 2ab - 2b^2)\,A$$

zu berechnen. Dieses ist nach §. 8.

$$5a^2A - 2abA - 2b^2A.$$

Nun berechne man jedes dieser drei Glieder, indem man statt A wieder seinen Werth setzt, so fällt in die Augen, daß $5a^2A$ die erste Zeile unserer Rechnung, $-2abA$ die zweite Zeile, und $-2b^2A$ die dritte Zeile unserer Rechnung giebt.

Die Auflösung ist an einem andern Beispiel zu zeigen, und der Beweis vollständig auszuführen.

Im Übungshefte sind viele Beispiele zu rechnen, um Geläufigkeit in dieser Rechnungsart zu erhalten.

Anmerkungen.

1. Nicht immer findet bei der Summirung der Theilproducte eine wirkliche Zusammenziehung mehrerer Glieder in eines statt. Sie findet gar nicht statt, wenn die Hauptgrößen in beiden Formeln ganz verschieden sind, z. B. wenn man das Product

$$(2a - 3b + 2c)\,(4d - 5e)$$

berechnen soll. In diesem Fall ist es zwecklos, das Product erst zeilenweise zu schreiben, und dann zu summiren; denn man kann sogleich alle Theilproducte unter den Rechnungsstrich nach der Reihe neben einander setzen. Überhaupt ist auch das regelmäßige Einrücken der Zeilen bei der Buchstabenrechnung gar keine so nothwendige Sache, als bei der Zahlenrechnung. Die eigentliche Regel ist: man setzt diejenigen Theilproducte unter einander, welche gleiche Hauptgrößen haben, und sich daher wirklich vereinigen lassen. Sollte z. B. das Product

$$(2a + 3b - 2c)\,(a - 2c)$$

berechnet werden, so würde es zweckmäßig sein, die zweite Rechnungszeile um zwei Glieder einzurücken. Bei der Multiplication von

$$(5 - 3x^2 + 3x^3)\,(1 + x)$$

oder $(a - 2b + 3c)\,(a + 3b - 2c)$

ist es zwar schicklich, regelmäßig einzurücken, doch kommen nicht immer Glieder mit einerlei Hauptgrößen unter einander zu stehen, u. dgl. m.

2. Bei der Multiplication ist es besonders zu empfehlen, daß jeder in seinem Übungshefte ein Paar Beispiele in Zahlen berechne. Bei der Übersetzung einer Addition oder Subtraction in Zahlen (VII. 16 und 23.) konnten wir den Buchstaben keine andere als absolute Werthe (ohne Vorzeichen) beilegen. Gegenwärtig aber kann man den Buchstabenfactoren ganz beliebige positive oder negative Werthe geben, da aus §. 3. jederzeit bekannt ist, welches Vorzeichen der Werth des Productes erhalten müsse. Da durch Übungen dieser Art der Sinn und Zweck der Formeln, und überhaupt der ganzen Buchstabenrechnung anschaulicher wird, so wollen wir hier ein Beispiel als Muster vollständig durchgehen.

In dem beistehenden Exempel, setze man $a = +2$; $b = -\frac{1}{3}$, so läßt sich zuerst der Werth beider Factoren berechnen. Diese beiden Werthe mit einander multiplicirt müssen ein Product geben, das mit dem Werthe des durch die Buchstabenrechnung gefundenen Productes übereinstimmt, wodurch man beiläufig eine sichere Probe für die Rechnung erhält.

$$\begin{array}{llll} 3a^2 & -\frac{2}{3}b^2 & & \\ a & -3b & & \\ \hline 3a^3 & & -\frac{2}{3}ab^2 & \\ & -9a^2b & & +2b^3 \\ \hline 3a^3 & -9a^2b & -\frac{2}{3}ab^2 & +2b^3 \end{array}$$

Es ergiebt sich nun vermittelst der oben angenommenen Werthe folgendes.

Der Multiplicandus: $3a^2 - \frac{2}{3}b^2 = (+3)(+2)(+2) - (+\frac{2}{3})(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) = +12 - \frac{2}{27} = +11\frac{25}{27}$.

Der Multiplicator: $a - 3b = +2 - (+3)(-\frac{1}{3}) = +2 + 1 = +3$.

Multiplicirt man $(+11\frac{25}{27})(+3)$, so erhält man $+35\frac{7}{9}$. Eben dieses muß man erhalten, wenn man

das Product $3a^3 - 9a^2b - \frac{2}{3}ab^2 + 2b^3$ in Zahlen übersetzt. Man erhält

$(+3)(+2)(+2)(+2) - (+9)(+2)(+2)(-\frac{1}{3})$
$- (+\frac{2}{3})(+2)(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}) + (+2)(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})$

$= +24 + 12 - \frac{4}{27} - \frac{2}{27} = +36 - \frac{2}{9} = +35\frac{7}{9}$, wie vorher.

B. Von der algebraischen Division.

§. 10. Erklärung.

Der Begriff der Division ist hier kein anderer als der in der Zahlen-Rechnung (IV. 1.) erklärte; auch die Wörter Dividendus, Divisor, Quotient haben hier keine andere Bedeutung. Der Unterschied der arithmetischen und algebraischen Division besteht theils darin, daß man in der letztern größtentheils mit unbestimmten Größenzeichen rechnet, theils darin, daß überall der Begriff vom Gegensatze angewendet wird.

Auch die Bezeichnung der Division ist keine andere als die oben (I. 26.) erklärte.

Im Hefte sind alle hier angedeutete Erklärungen vollständig zu wiederholen, um sie bei den folgenden Paragraphen lebhaft im Gedächtniß zu haben.

§. 11. Aufgabe.

Eine mit einem Vorzeichen versehene Zahl durch eine andere solche Zahl zu dividiren.

Auflösung. Man verbindet den absoluten Werth beider Zahlen durch einen Bruchstrich, indem man den Dividendus über, den Divisor aber unter denselben setzt. Läßt sich die Division wirklich vollziehn, so kann es geschehen; doch kann man auch in jedem Fall die Bruchform beibehalten, und heben, was sich heben läßt. Der Quotient bekommt das Vorzeichen +, wenn beide Bestandtheile einerlei Vorzeichen, — wenn sie entgegengesetzte haben.

Der Beweis beruht, was die Zahlen selbst betrifft auf IV. 13. 14. Die Regel der Vorzeichen aber beruht auf §. 2.

dieses Abschnitts in Verbindung mit der Erklärung der Division (§. 10.). Der Beweis wird sich auf folgende Art ohne Schwierigkeit ausführen lassen. Es sei z. B. 56 durch 7 zu dividiren, so ist der absolute Quotient $\frac{56}{7} = 8$. Nun gebe man den Zahlen 56 und 7 Vorzeichen, nach allen dabei möglichen Veränderungen, schreibe aber den Quotienten ohne Vorzeichen daneben auf folgende Art:

$$\frac{+\,56}{+\,7} = 8;\quad \frac{-\,56}{-\,7} = 8;\quad \frac{+\,56}{-\,7} = 8;\quad \frac{-\,56}{+\,7} = 8.$$

Da nun nach dem Begriff der Division der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt den Dividendus geben muß, so wird man in jedem dieser vier Fälle nach §. 2. Zus. sehr leicht bestimmen können, welches Vorzeichen man in jedem Fall der 8 geben müsse, damit 56 in jedem Fall sein richtiges Zeichen erhalte.

Im Hefte ist die Auflösung sogleich auf ein Paar bestimmte Zahlen zu machen, wozu man solche wählen kann, deren Quotient eine ganze Zahl ist. Der Beweis ist dann auf die angedeutete Art vollständig auszuführen.

Anmerkung. Da in der Buchstabenrechnung überhaupt alle zu machende Rechnungen mehr durch Zeichen angedeutet, als wirklich vollzogen werden, so ist eine Division schon als vollbracht anzusehen, sobald man beide Bestandtheile in Form eines Bruches gehörig verbunden hat. Denn wenn man 56 durch 7 gehörig dividiren soll, so ist es eben so richtig zu sagen, der Quotient sei $\frac{56}{7}$ (sechsundfunfzig Siebentel), als er sei 8 Ganze. Daher darf man wirklich dividiren, wo es angeht, oder auch nach Belieben bei der Bruchform bleiben. Auch darf man bei der Bruchform (im Zähler und Nenner), wenn es angeht, gegen einander heben, z. B. $\frac{56}{35} = \frac{8}{5}$. Dagegen pflegt man in der Buchstabenrechnung selten die Division zu machen, wenn der Quotient die Gestalt einer gemischten Zahl erhält. Soll z. B. $-\,56$ durch $-\,35$ dividirt werden, so setzt man lieber den Quotienten $= +\,\frac{8}{5}$ als $+\,1\frac{3}{5}$, obgleich das letzte an sich eben so richtig ist als das erste.

§. 12. Aufgabe.

Eine eingliedrige Buchstaben-Formel, durch eine solche zu dividiren.

Auflösung.

1. Man verbinde zuerst den Dividendus und Divisor, wie im vorigen Paragraphen durch einen Bruchstrich, und gebe diesem Bruch nach der im vorigen Paragraphen erwiesenen Regel sein Vorzeichen; so ist das wesentliche der Division vollbracht. Es läßt aber in vielen Fällen ein solcher Quotient noch eine Abkürzung oder Vereinfachung zu.
2. Findet sich nämlich, daß Zähler und Nenner einen oder mehrere Buchstaben gemein haben, so kann man jederzeit gleiche Buchstaben (einen nämlich gegen einen) wegstreichen.
3. Haben die Coefficienten einen Factor gemein, so kann man sie durch denselben heben.
4. Ereignet es sich hiebei, daß im Zähler alles weggestrichen wird, so muß man im Zähler Eins, im Nenner aber das übrigbleibende setzen.
5. Bliebe endlich im Nenner nichts übrig, so fällt dieser ganz weg, und was im Zähler übrig bleibt ist eine ganze Formel.

Ehe wir den Grund dieser Regeln angeben, wird es dienlich sein, jeden erwähnten Fall in einem Beispiel darzulegen.

1) $\frac{-7abc^3}{-8de^2} = +\frac{7abc^3}{8de^2}$

2) $\frac{+14a^2b^2c}{+15a^3bc} = +\frac{14b}{15a}$

3) $\frac{-16a^2b}{+12ab^2} = -\frac{4a}{3b}$

4) $\frac{+5a}{-35ab} = -\frac{1}{7b}$

5) $\frac{-36a^2b^2}{-9ab} = +4ab.$

Diese Auflösung ist im Hefte mit eignen Worten nach allen fünf Fällen zu wiederholen; auch ist für jeden, wie hier, ein passendes Beispiel zu erdenken. Es wird aber schicklich sein, die Beispiele nicht wie hier von der Auflösung zu trennen, sondern jede Nummer sogleich auf ein beigefügtes Beispiel anzuwenden.

Was den Beweis betrifft, so erfodert dieser nichts weiter, als daß man sich nur deutlich bewußt werde, was man in jedem Falle thut

Nr. 1. erfodert keinen besondern Beweis, denn die Regel der Vorzeichen ist schon §. 12. bewiesen, und das Übrige besteht in einer bloßen Andeutung der Division, die in der Buchstabenrechnung allezeit einer wirklichen Rechnung gleich gilt.

Nr. 2. Das Wegstreichen eines Buchstaben ist in jedem Fall eine Rechnung. Was für eine? entdeckt sich leicht, wenn man erwägt, was für eine Rechnung durch die entgegengesetzte Arbeit, nämlich durch die Hinzufügung eines Buchstaben angedeutet werde. Das übrige beruhet auf IV. 9., oder VI. 4.

Nr. 3. 4. 5. beruht auf den eben erwähnten Sätzen; nur kommen bei Nr. 4. und 5. noch die Fragen vor, was der Quotient sei, wenn eine Größe durch sich selbst, oder wenn sie durch 1 dividirt wird.

Alles dieses ist im Hefte bestimmt auszuführen, und es dürfte am schicklichsten sein gleich bei jeder Nummer zu der Auflösung und dem Beispiel den Beweis hinzuzufügen.

Im Übungshefte sind zu jeder der fünf Nummern mehrere Beispiele zu rechnen.

§. 13. Aufgabe.

Eine mehrgliedrige Formel durch eine eingliedrige zu dividiren.

Man sieht leicht, daß jedes einzelne Glied des Dividendus durch den eingliedrigen Divisor nach §. 13. zu dividiren sei, und daß die Berechtigung dazu in IV. 10. und 11. liegt.

Im Hefte ist ein Beispiel, im Übungshefte sind mehrere zu rechnen.

§. 14. Aufgabe.

Eine mehrgliedrige Formel durch eine solche zu dividiren.

Vorerinnerung. Bei der Division mehrgliedriger Formeln muß man zu den ersten Übungen bloß solche Dividenden wählen, die im Vorhergehenden bei der Multiplication als Producte zweier mehrgliedrigen Formeln gefunden sind, und welche sich daher ohne Rest durch jeden der beiden Factoren müssen dividiren lassen. Der Grund ist, daß die Regeln der Division, wenn man nicht in unnöthige Weitläuftigkeiten gerathen will, eine gewisse regelmäßige Stellung und Anordnung der Glieder erfoderu, welche sich durch die Multiplication von selbst ergiebt. Daher kann man bei den angedeuteten Exempeln seine Aufmerksamkeit ungetheilt auf die eigentlichen Divisionsregeln richten. In den Anhängen zu diesem Abschnitt werden wir übrigens das, was über die Anordnung der Formeln zu bemerken ist, in hinlänglicher Vollständigkeit vortragen.

Auflösung. Wir wählen zum Dividendus das im neunten Paragraphen gefundene Product

$15a^5 - 16a^4b + 23a^3b^2 - 11a^2b^3 - 8ab^4 + 2b^5$

zum Divisor aber den Factor

$$3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - b^3.$$

Den Aufsatz und die Rechnung, welche mit einer Zahlen-Division viele Ähnlichkeit haben, zeigt folgendes Schema:

$$\begin{array}{llllllll|l}
 & & & & & & & & \text{B } 3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{A} & 15a^5 & -16a^4b & +23a^3b^2 & -11a^2b^3 & -8ab^4 & +2b^5 & & \left.\begin{array}{l} 5a^2 - \\ 2ab - 2b^2 \end{array}\right\} \text{C} \\
\text{D} & 15a^5 & -10a^4b & +25a^3b^2 & -5a^2b^3 & & & & \\
\cline{1-8}
\text{E} & \ldots & -6a^4b & -2a^3b^2 & -6a^2b^3 & -8ab^4 & +2b^5 & & \\
\text{F} & \ldots & -6a^4b & +4a^3b^2 & -10a^2b^3 & +2ab^4 & & & \\
\cline{1-8}
\text{G} & \ldots & \ldots & -6a^3b^2 & +4a^2b^3 & -10ab^4 & +2b^5 & & \\
\text{H} & \ldots & \ldots & -6a^3b^2 & +4a^2b^3 & -10ab^4 & +2b^5 & & \\
\cline{1-8}
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Bei A ist der Dividendus, und bei B der Divisor aufgesetzt. Der Quotient wird hinter den Dividendus bei C geschrieben. Die Rechnung selbst geschieht auf folgende Art.

Zuerst wird das erste Glied des Dividendus ($15a^5$) durch das erste des Divisors ($3a^3$) dividirt. Der Quotient ($5a^2$) ist das erste Glied des gesuchten Quotienten, und wird also hinter den Dividendus geschrieben. Hierauf multiplicirt man den ganzen Divisor, Glied vor Glied, mit dem eben gefundenen Gliede des Quotienten, und schreibt das Product in die Zeile D. Dieses Product wird dann vom Dividendus subtrahirt, und der Rest findet sich in der Zeile E.

Dieses ist der erste Abschnitt der Rechnung, und für alle folgende hat man nur die einzige Regel zu merken, daß mit dem jedesmaligen Rest des vorhergehenden Abschnitts ganz wörtlich das nämliche vorgenommen werden muß, was zuerst mit dem Dividendus gemacht worden.

Bleibt zuletzt kein Rest, so hat man den gesuchten Quotienten vollständig uud genau gefunden. Bleibt ein Rest, so soll im folgenden Paragraphen gezeigt werden, was man zu thun habe.

Es ist nöthig, daß der Schüler in seinem Hefte nicht bloß den ersten Abschnitt der Rechnung, sondern auch jeden folgenden durchgehe, und bestimmt anzeige, was in jedem geschehen ist: Ehe er sich aber an die schriftliche Beschreibung dieser Arbeit macht, ist nothwendig, daß er vorher viele Beispiele, sowohl in der Klasse als im Übungshefte gerechnet habe. Denn ehe man eine Sache deutlich und richtig beschreiben kann, muß man nothwendig erst die Sache selbst deutlich und richtig, bis zur Geläufigkeit aufgefaßt haben. Auch ist es zweckmäßig, den Beweis von der Auflösung zu trennen, und ihn nicht eher zu führen, als bis die Auflösung eingeübt ist.

Beweis für den Fall, wenn die Rechnung aufgeht. Man richte seine Aufmerksamkeit auf die Formeln D, F, H, welche während der Rechnung subtrahirt worden. Von diesen läßt sich zweierlei erweisen.

1. Die Summe dieser Formeln ist dem Dividendus gleich; oder in Zeichen: $D + G + H = A$. Es wurde nämlich zuerst D von A subtrahirt, und es blieb der Rest E. Von diesem wurde F subtrahirt, und es blieb der Rest G. Von diesem wurde endlich H subtrahirt, und es blieb Nichts. Also ist offenbar $D + G + H = A$.

2. Eben diese subtrahirten Formeln stellen zusammen das Product des Divisors und der gefundenen Formel dar; oder in Zeichen: $D + G + H = BC$. Denn D ist entstanden durch Multiplication von B mit dem ersten Gliede der gefundenen Formel ($5a^2$). F ist entstanden durch Multiplication von B mit dem zweiten Glied ($-2ab$) der gefundenen Formel. Endlich ist H entstanden durch Multiplication von B mit dem dritten Glied ($-2b^2$) der gefundenen Formel. Die drei Formeln $D + G + H$ enthalten folglich gerade das, was man erhält, wenn B als Multiplicandus, mit C als Multiplicator multiplicirt wird. D. h. es ist $D + G + H = BC$.

Nach Nr. 1. ist $D + G + H = A$; nach Nr. 2. ist $D + G + H = BC$. Aus beiden folgt

$$A = BC,$$

d. h. der Divisor B mit der gefundenen Formel C multiplicirt, giebt den Dividendus A; also ist C nach dem Begriff der Division (§. 10.) der richtige Quotient.

Anmerkung. In vielen Fällen ist es hinreichend die Division mehrgliedriger Formeln bloß anzudeuten, nicht wirklich auszuführen. So kann in dem Beispiel dieses Paragraphen der Quotient vorgestellt werden durch die gebrochene Formel:

$$\frac{15a^5 - 16a^4b + 23a^3b^2 - 11a^2b^3 - 8ab^4 + 2b^5}{3a^3 - 2a^2b + 5ab^2 - b^3}$$

Im Übungshefte versäume man nicht, ein oder ein Paar kleine Divisionsexempel in Zahlen zu übersetzen.

§. 15. Anmerkung.

Die im vorigen Paragraphen erwähnte Stellung und Anordnung der Glieder ist nicht schlechthin nothwendig, sondern dient nur die Rechnung kurz, einfach, und regelmäßig zu machen.

Man versetze die Glieder des Dividendus und des Divisors in dem Beispiel des vorigen Paragraphen beliebig, so wird man immer eine richtige Division machen können, wenn man nur die Regel beobachtet, nicht gerade das erste

Glied des Dividendus oder eines Restes durch das erste des Divisors zu dividiren, sondern irgend ein Glied im Dividendus oder einem Reste aufzusuchen, welches sich durch irgend ein Glied des Divisors vollständig dividiren läßt. Nur geht die Rechnung oft nicht auf, und man muß den Quotienten, durch Anhängung eines Bruchs, nach dem folgenden Paragraphen vollständig machen. Man erhält dann zwar einen richtigen Quotienten, aber in einer unbequemen Gestalt.

§. 16. Zusatz.

Wenn eine Division nicht aufgeht, d. h. wenn man auf einen Rest kommt, dessen erstes Glied durch das erste des Divisors dividirt, kein ganzes Glied zum Quotienten giebt, so kann man die Rechnung abbrechen, den Quotienten aber dadurch vollständig machen, daß man (auf ähnliche Art als bei Zahlen) ein gebrochenes Glied zu dem Quotienten hinzufügt, dessen Zähler der letzte Rest, und dessen Nenner der ganze Divisor ist.

Es sei z. B. $a^3 - 3ab^2 + b^3$ durch $a^2 - 1ab + 2b^2$ zu dividiren, so rechne man, wie folgt.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & & a^2 - 1ab + 2b^2 \\
\hline
 & a^3 - 3ab^2 + b^3 & a + b - \dfrac{4ab^2 + b^3}{a^2 - ab + 2b^2} \\
 & a^3 - a^2b + 2ab^2 & \\
\cline{1-2}
 & + a^2b - 5ab^2 + b^3 & \\
 & + a^2b - ab^2 + 2b^3 & \\
\cline{1-2}
\text{A} \ldots\ldots\ldots & -4ab^2 - b^3 & \\
\text{B} \ldots\ldots\ldots & -4ab^2 - b^3 & \\
\cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Wenn man das erste Glied des zweiten Restes ($-4abb$, Zeile A), durch das erste des Divisors ($+aa$) dividirt, so erhält man einen gebrochenen Quotienten

$$\left(-\frac{4bb}{a}\right).$$

Daher kann man die Rechnung hier abbrechen, und den Quotienten dadurch vollständig machen, daß man einen Bruch anhängt, dessen Zähler der letzte Rest, und dessen Nenner der ganze Divisor ist.

Daß auf diese Art der Quotient vollständig wird, läßt sich auf folgende Art beweisen. So wie man den Divisor, mit jedem der erstern Glieder des Quotienten multipliciren muß, so multiplicire man ihn auch mit dem angehängten gebrochenen Gliede. Man sieht leicht, daß diese Multiplication nichts geben könne als den Zähler ($-4ab^2 - b^3$). Setzt man diesen nun unter den letzten Rest (Zeile B), und subtrahirt, so geht die Rechnung auf, und man kann den Beweis vollkommmen wie im vorigen Paragraphen führen.

Die Erläuterung dieses Paragraphen ist im Hefte an einem andern selbstgewählten Beispiel zu geben. Um ein schickliches Exempel zu erhalten, nehme man (wie im vorigen Paragraphen) ein durch Multiplication gefundenes Product, ändere aber in demselben, oder in dem Factor, wodurch man dividiren will, einen einzigen Coefficienten, so wird die Rechnung nicht mehr aufgehen.

§. 17. Zusatz.

Anstatt die Division abzubrechen, wenn sich das erste Gliet des Restes nicht mehr ungebrochen durch das erste Glied des Divisors dividiren läßt, kann man die Rechnung jederzeit in gebrochnen Formeln fortsetzen. Nur setzt dieses Geläufigkeit in der Rechnung mit gebrochnen Formeln voraus. Auch geht die Rechnung in diesem Fall nie auf, und der Quotient erscheint in der Gestalt einer unendlichen Reihe. Bricht man indessen eine solche Reihe irgendwo beliebig ab, so kann man doch den Quotienten jederzeit vollständig machen, wenn man noch ein gebrochnes Glied nach der Regel des vorigen Paragraphen anhängt.

Doch giebt es einige Fälle, wo man durch fortgesetzte Division lauter ganze Glieder im Quotienten erhält, wenn nämlich das erste Glied des Divisors 1 ist.

Im Hefte ist ein Exempel der letzten Art zu rechnen. Zum Dividendus nehme man eine bloße Zahl, oder auch eine beliebige Formel, in der bloß a vorkommt, z. B. $+1$; $+5$; $+a$; $1+a$; $1-3a$; $a-2a^2$ u. dgl. m. Zum Divisor aber nehme man $1+a$; $1-a$; $1+2a$; $1-2a$ u. s. f. kurz eine Formel, deren erstes Glied 1 ist. Auch breche man die Reihe bei einem beliebigen Gliede ab, ergänze aber den Quotienten nach der Regel des vorigen Paragraphen.

C. Noch einige wichtige Sätze, besonders über die Zerlegung der Formeln in Factoren.

§. 18. Erklärung.

So wie es einfache nnd zusammengesetzte Zahlen giebt, eben so giebt es auch einfache und zusammengesetzte Formeln. Einfach sind solche, die (wie einfache Zahlen) durch nichts als durch 1 und durch sich selbst ohne Rest dividirt werden können. Zusammengesetzt sind die, welche sich durch eine andere Formel ohne Rest dividiren lassen.

Die Divisoren einer Formel gehen aber immer, wie bei Zahlen paarweise. Denn läßt sich eine Formel A durch eine anbere B ohne Rest dividiren, und giebt den Quotienten C, so ist $A = BC$, und A wird sich eben sowohl durch C als durch B ohne Rest dividiren lassen (IV. 2. b.). Doch können auch beide Divisoren gleich sein, und in so fern kann nur ein Divisor statt finden.

So oft sich daher irgend ein Divisor findet, durch welchen eine Formel aufgeht, so läßt sich diese jederzeit in zwei Factoren zerfällen.

Zur Erläuterung des ersten Absatzes dieses Paragraphen sind Beispiele anzuführen.

Zur Erläuterung des zweiten und dritten Absatzes, wähle man irgend ein durch Multiplication gefundenes Product, nebst einem Factor desselben. Dividirt man jenes durch diesen, so erhält man den zweiten Factor. Dividirt man z. B. $a^2 - ab - 6b^2$ durch $a + 2b$, so ist der Quotient $a - 3b$. Also ist

$$a^2 - ab - 6b^2 = (a + 2b)\,(a - 3b).$$

Im Hefte ist ein anderes Beispiel zu wählen.

§. 19. Aufgabe.

Eine Formel in zwei Factoren zu zerfällen, vorausgesetzt, daß ein oder mehrere einzelne Buchstaben, oder Zahlen-Factoren allen Gliedern gemein sind.

In der Formel $12a^3b - 28a^2b^2 + 24ab^3$ haben alle drei Hauptgrößen die Factoren ab, die Coefficienten aber den Factor 4 gemein. Also lassen sich alle Glieder durch $4ab$ ohne Rest dividiren, d. h. $4ab$ ist ein gemeinschaftlicher Factor der ganzen Formel. Man kann sie daher durch Division in zwei Factoren nach §. 18. zerfällen, wobei man beliebig dem Factor $4ab$ das Vorzeichen $+$ oder $-$ geben kann. Man kann daher immer die Zerfällungen auf doppelte Art machen, nämlich:

$$12a^3b - 8a^2b^2 + 24ab^3 = +4ab\,(3a^2 - 2ab + 6b^2)$$
$$\text{oder} = -4ab\,(-3a^2 + 2ab - 6b^2).$$

Im Haupthefte ist der Satz auf eine ähnliche Art zu erläutern, und es kann nicht schwer sein, zu diesem Zweck selbst eine schickliche Formel zusammen zu setzen.

Für das Übungsheft fügen wir noch einen kleinen Vorrath sehr einfacher, aber oft vorkommender Formeln hinzu, die sich auf diese Art leicht zerfällen lassen. Man wird aber diesen Vorrath leicht selbst vermehren können.

$a^2 - ab$; $3ab - 2b^2$; $6ab - 12ab^2$; $8ab^4 - 10ab^5$; $15a^2b^2c - 12a^3bc + 18ab^2c^2$; $65a^3 + 91a^2b$; $35ab + 105a^2b^2 - 175a^3b^3$; u. dgl. m.

§. 20. Lehrsatz.

Das Quadrat einer zweigliedrigen Formel besteht aus drei Gliedern; nämlich 1) aus dem Quadrat des ersten Gliedes; 2) aus dem doppelten Product beider Glieder; 3) aus dem Quadrat des zweiten Gliedes. Die beiden Quadrate sind in jedem Falle positiv; das doppelte Product beider Glieder aber ist positiv, wenn beide Glieder einerlei Vorzeichen, negativ dagegen, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Anleitung zum Beweise. Den einfachsten Ausdruck einer zweigliedrigen Formel erhält man, wenn man das eine Glied a, das andere b nennt. Was aber die Vorzeichen betrifft, so können diese auf vier Arten abwechseln, nämlich a) $+a+b$; b) $-a-b$; c) $+a-b$; d) $-a+b$. Man multiplicire jede dieser vier Formeln mit sich selbst, um sie ins Quadrat zu erheben. Dann darf man nur jedes der vier Producte in Worte und Begriffe übersetzen, um sich von der Richtigkeit unsers Satzes in jedem Falle zu überzeugen.

Außer der Ausführung dieses Beweises sind in dem Hauptheften ein Paar, im Übungshefte mehrere vollständige Quadrate von beliebigen zweigliedrigen Formeln zu machen, und zwar nicht durch Multiplication mit sich selbst, sondern dadurch, daß man die drei Glieder bildet, aus welchen nach unserm Satze das Quadrat besteht.

§. 21. Zusatz.

Ob eine eingliedrige Formel ein vollständiges Quadrat sei, ist leicht zu beurtheilen. Der Coefficient muß eine Zahl sein, die sich in zwei gleiche Factoren zerfällen läßt. Jeder Buchstabe aber muß zwei-, oder vier-, oder sechs mal rc. kurz eine gerade Anzahl von Malen vorkommen, oder mit andern Worten, er muß lauter Potenzen von geraden Exponenten enthalten.

Im Hefte sind einige Beispiele solcher eingliedrigen Quadrate zu bilden, und die Wurzeln derselben anzugeben.

§. 22. Zusatz.

Hieraus ergiebt sich leicht die Beantwortung folgender Fragen: a) Wie muß eine mehrgliedrige Formel beschaffen sein, wenn sie das vollständige Quadrat einer zweigliedrigen Formel sein soll? b) Wie kann man die Wurzel eines solchen Quadrats finden? c) Wie kann man also die gegebene Formel, wenn sie ein Quadrat ist, in zwei gleiche Factoren zerlegen?

Diese drei Fragen sind im Hefte wörtlich zu beantworten, und durch Beispiele zu erläutern.

a. Bei der ersten Frage ist anzugeben, aus wieviel Gliedern das Quadrat einer zweigliedrigen Formel bestehe, und wie jedes Glied in Ansehung der Hauptgrößen, der Coefficienten, und der Vorzeichen beschaffen sein müsse.

b. und c. Ist die erste Frage deutlich und richtig beantwortet, so ergiebt sich daraus die Beantwortung der zweiten und dritten Frage von selbst.

Im Übungshefte sind mehrere vollständige Quadrate nach §. 20. zu bilden, und nach §. 22. in zwei gleiche Factoren zu zerfällen.

Anmerkung. Wenn diejenigen Glieder, welche vollständige eingliedrige Quadrate sein müssen, ungleiche Vorzeichen haben, so ist die ganze Formel nie ein vollständiges Quadrat. Haben aber beide das Vorzeichen Minus so ist die Formel zwar in dieser Gestalt auch kein vollständiges Quadrat, schließt man sie aber in eine Klammer, mit dem Vorzeichen Minus ein (VII. 29.), so bekommen diese Glieder innerhalb der Klammer das Vorzeichen Plus, und die ganze Formel ist also ein vollständiges Quadrat, nur mit dem Vorzeichen Minus.

Auch dieses ist im Haupthefte durch ein Beispiel zu erläutern Im Übungshefte sind mehrere aufzusetzen.

§. 23. Lehrsatz.

Wenn man die Summe zweier Größen, und den Unterschied derselben mit einander multiplicirt, so ist das Product derselben jederzeit der Unterschied ihrer Quadrate.

Anleitung zum Beweise. Wenn man zwei beliebige gleichartige Größen a und b nennt, so ist es leicht ihre Summe sowohl, als ihren Unterschied durch zwei einfache Formeln vorzustellen. Die Summe ist nämlich entweder $+a+b$, oder $-a-b$; der Unterschied ist $+a-b$, oder $-a+b$. Man mag nun von den ersten beiden Formeln welche man will, mit einer der letzten beiden multipliciren, so wird sich in jedem Falle zeigen, daß das Product die Differenz der Quadrate sei. In dieser Differenz aber wird dasjenige Quadrat das Zeichen Plus haben, oder als Minuendus zu betrachten sein, dessen Wurzel in den multiplicirten Formeln einerlei Vorzeichen hat.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständig auszuführen, und es sind daher alle vier Multiplicationen zu machen, die mit den angegebenen Formeln gemacht werden können.

§. 24. Zusatz.

Folglich kann der Unterschied zweier Quadrate in jedem Fall in zwei Factoren zerlegt werden, wovon der eine die Summe, der andere die Differenz der Wurzeln ist.

Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich daß diese Zerfällung immer auf doppelte Art geschehen könne. Es ist indessen hinreichend sie nur auf eine Art zu machen, da man die zweite Zerfällung sehr leicht erhält, wenn man alle Vorzeichen in beiden Factoren verändert, wodurch im Product nichts geändert wird. So ist z. B. $4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b) = (-2a - 3b)(-2a + 3b)$; desgleichen $4a^6 - 1 = (2a^3 + 1)(2a^3 - 1) = (-2a^3 - 1)(-2a^3 + 1)$, u. dgl. m.

Im Hauptheſte sind ein Paar ähnliche Formeln aufzustellen; im Übungsheſte aber sind mehrere Beispiele anzuführen.

§. 25. Zusatz.

Auf eben diese Art lassen sich oft auch zwei viergliedrige Formeln zerfällen, wenn nämlich eins der beiden Quadrate ein vollständiges Quadrat von einer zweitheiligen Formel ist (§. 22.).

In der allgemeinen Formel $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ kann nämlich entweder a^2 oder b^2 ein aus drei Gliedern bestehendes Quadrat sein. Beides ist durch ein Beispiel von folgender Art zu erläutern.

a. In der Formel $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$ oder $(a^2 - 2ab + b^2) - c^2$ sind die drei ersten Glieder das vollständige Quadrat von $a - b$, also ist $a^2 - 2ab + b^2 - c^2 = (a - b + c)(a - b - c)$.

b. Wenn man in der Formel $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$ die drei letzten Glieder einklammert, also $a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$ schreibt, so ist klar, daß das Eingeklammerte das vollständige Quadrat von $b - c$, also die ganze Formel die Differenz zweier Quadrate sei. Die Wurzeln dieser Quadrate sind a und $b - c$. Ihre Summe ist $a + b - c$, ihre Differenz $a - (b - c) = a - b + c$. Folglich ist: $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = (a + b - c)(a - b + c)$.

Im Hauptheſte ist der Satz durch ein Paar andere ähnliche Beispiele zu erläutern. Im Übungsheſte aber sind mehrere Beispiele der Art auszuführen.

§. 26. Zusatz.

So wie man jede Zahl durch jede andere beliebige zerfällen kann, wenn man gebrochene Factoren nicht ausschließt, eben so kann jede Formel durch jede andere Formel zerfällt werden, wenn man jene durch diese dividirt, und den nach §. 16. vollständig gemachten Quotienten zum andern Factor annimmt.

So läßt sich z. B. $a^2 + b^2$ durch $a + b$ nicht ohne Rest dividiren. Dividirt man indessen, und bricht nach der zweiten Subtraction ab, so ist der Quotient

$$a - b + \frac{2bb}{a + b}; \text{ folglich ist}$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)\left(a - b + \frac{2bb}{a + b}\right).$$

Statt dieses Beispiels ist im Hefte ein andres ähnliches zu setzen.

§. 27. Anmerkung.

Die Zerfällung zusammengesetzter Formeln in ihre einfachen Factoren, und selbst die Beurtheilung, ob eine Formel zusammengesetzt oder einfach sei, ist viel schwieriger als die Zerfällung zusammengesetzter Zahlen in einfache. In dem gegenwärtigen Abschnitte muß es genügen, die wenigen hier erörterten Zerfällungen, welche leicht sind, aber häufig vorkommen, zu erlernen. Das Vollständigere hierüber muß aber der Algebra und Analysis vorbehalten bleiben.

Anhang zum achten Abschnitt.

Über die zweckmäßigste Anordnung und Stellung der Glieder bei der Division.

§. 1. Vorerinnerung.

Bei der Addition und Subtraction kommt wenig auf die Ordnung an, in welcher man die Glieder auf einander folgen läßt, wenn man nur in dem Aufsatz diejenigen Glieder unter einander setzt, welche dieselben Hauptgrößen haben.

Auch bei der Multiplication hat die Ordnung der Glieder weiter keinen Einfluß, als daß die Stellung derselben regelmäßig oder unregelmäßig wird, je nachdem man sie in den Factoren regelmäßig oder unregelmäßig gestellt hat.

Eine Division kann man zwar auch bei unregelmäßiger Stellung der Glieder richtig machen, wenn man dabei die Anmerkung des siebzehnten Paragraphen beobachtet; aber die Rechnung wird dadurch weitläuftiger und unordentlicher als nöthig. Aus dieser Ursache ist jedem, dem es um deutliche Begriffe und anschauliche Einsicht zu thun ist, zu empfehlen, daß er das, was in diesem Anhange über die Gestaltung der Formeln gesagt wird, für sich aufmerksam durchgehe.

§. 2. Erklärung.

Formeln von der Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{rc.}$$

oder in umgekehrter Ordnung

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

nennt man nach Potenzen von x geordnete Formeln. Die Buchstaben A, B, C rc. können bloße Zahlen, oder beliebig aus Zahlen und Buchstaben zusammengesetzte Formeln sein, nur dürfen sie kein x enthalten.

In solchen Formeln betrachtet man bloß x als die Hauptgröße, daher heißen alsdann die Factoren A, B, C ꝛc. Coefficienten, sie mögen zusammengesetzt sein, wie sie wollen.

Wenn folgende Glieder, $ax^3 - 2a^3 + bx - 2ab^2 - bx^2 + ax^2 + 2ax - b^3$, nach Potenzen von x geordnet werden, so geschieht die Zusammenziehung der Glieder nach VII. 29. und VIII. 19., und man erhält
$ax^3 + (a-b)x^2 + (2a+b)x - (2a^3 + 2ab^2 + b^3)$

Anmerkungen.

1. In der Algebra und Analysis ist nichts gewöhnlicher, als eine einzige Größe als Hauptgröße zu betrachten, und die Formeln nach derselben zu ordnen.
2. Der Fall, wo x als Divisor vorkommt, kann hier außer Acht gelassen werden, weil in der Algebra gezeigt wird, wie man jeden Divisor aus einer Formel wegschaffen könne.
3. Es ist nicht nothwendig, daß in einer so geordneten Formel die Potenzen von x in ununterbrochener Reihe auf einander folgen. So ist z. B. die Formel $a - 2bx - cx^3$ richtig geordnet, obgleich x^2 fehlt. Denn man kann ein solches Glied, wenn es nöthig wäre, allezeit mit den Coefficienten Null ergänzen; $a - 2bx + 0x^2 - cx^3$.

§. 3. Erklärung.

Man nennt eine Formel lexicographisch-geordnet, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt.

1. Alle Glieder müssen eine gleiche Anzahl von Buchstabenfactoren a, b, c ꝛc. enthalten, und diese müssen in jedem Gliede in der Ordnung stehen, wie die Buchstaben im Alphabet auf einander folgen.

2. Die Glieder selbst müssen in solche Ordnung gestellt sein, wie man die Wörter in einem Lexicon auf einander folgen läßt. Nämlich man stellt zuerst alle die Glieder zusammen, in welchen der erste Factor a ist, dann die worin er b ist, u. s. f. Alle Glieder in wel-

chen der erste Factor gleich ist, müssen unter sich nach dem zweiten geordnet sein; diejenigen in welchen die beiden ersten gleich sind, nach dem dritten u. s. f.

Einige Beispiele mögen dieses anschaulich machen. Vorläufig bemerken wir aber, daß Formeln, welche eine lexicographische Anordnung zulassen, oder erfodern, selten aus mehr als zwei oder drei Buchstaben bestehen, desgleichen, daß diese Buchstaben nirgends als Divisoren dasein müssen. Ferner lassen sich dergleichen Formeln, nach der Anzahl der Factoren die jedes Glied enthält eintheilen in Formeln des ersten, zweiten, dritten rc. Grades.

1. Formeln aus zwei Größen a und b.

Eine Formel des ersten Grades kann nur aus zwei Gliedern bestehen, deren Hauptgrößen a und b sind, mit beliebigen Coefficienten z. B. $3a - 2b$.

Eine Formel des zweiten Grades kann nur folgende drei Hauptgrößen in der hier geschriebenen Ordnung aa, ab, bb, mit beliebigen Coefficienten enthalten: z. B. $a^2 - 2ab + b^2$.

Eine Formel des dritten Grades enthält die Hauptgrößen aaa, aab, abb, bbb, z. B. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Eine Formel des vierten Grades enthält die Hauptgrößen aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb, z. B. $2a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 + 3ab^3 + 2b^4$
u. s. f.

2. Formeln aus drei Größen a, b, c.

Vom ersten Grade: $3a - 2b + c$.

Vom zweiten Grade: $a^2 - 2ab + 3ac - bb + 4bc - cc$.

Vom dritten Grade: $a^3 - 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 + 2abc + 4ac^2 - 2b^3 + 6b^2c - 4bc^2 + 3c^3$
u. s. f.

Anmerkungen.

1. Die lexicographische Anordnung unterscheidet sich von der nach Potenzen eigentlich dadurch, daß die zuletzt genannte nur nach einem einzigen Buchstaben, die erstere aber nach allen zugleich gemacht wird. Daher sind auch in den lexi-

cographischen Formeln die sämmtlichen Buchstabenfactoren jedes Gliedes als Hauptgrößen zu betrachten.

2. Obgleich die bestimmten Regeln, wonach jede Folge von lexicographischen Producten zu bilden ist, erst in der Combinationslehre vorgetragen werden können, so ist doch diese Arbeit, wenn nicht mehr als zwei oder drei Größen gegeben sind, so leicht, daß sie jeder ausführen kann, der nur weiß, wie die Buchstaben im Alphabet auf einander folgen.

3. Es ist nicht nothwendig, daß in einer geordneten Formel alle oben angegebenen Producte vorhanden sind, wenn nur sonst alle übrigen Bedingungen erfüllt sind. So sind z. B. folgende Formeln als richtig geordnete zu betrachten: $a^2 + 2ab$; $ab - b^3$; $a^3 - 3ab^2 - b^3$; $a^3 - b^3$; $a^4 + 2a^2b^2$; $a^4 + 3a^3b - b^4$ u. dgl. m.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn eine Formel lexicographisch geordnet ist, so ist sie zugleich nach fallenden Potenzen des ersten Factors geordnet.

Wenn man z. B. Producte von vier Factoren, aus den Buchstaben a, b, c ꝛc. in lexicographischer Ordnung bildet; so ist das erste Product aaaa, d. i. a^4. Dann folgen Producte, in welchen $aaa = a^3$, mit einem der folgenden Factoren, dann solche wo $aa = a^2$ mit zwei andern, ferner wo $a = a^1$ mit drei andern Factoren verbunden ist, endlich solche, die gar kein a enthalten. Zieht man also alle Glieder, welche gleiche Potenzen von a oder gar keine enthalten, jede Art in eins zusammen, so ist klar, daß die Formel nach fallenden Potenzen von a geordet sei.

In folgender aus Producten von a, b und c bestehenden Formel sind zuerst die Glieder die gleiche Potenzen von a enthalten, der Deutlichkeit willen nicht neben, sondern untereinander gesetzt.

$$\begin{array}{llllll}
+3a^4 & -2a^3b & +4a^2b^2 & +5ab^3 & -2b^4 \\
 & +3a^3c & -2a^2bc & -2ab^2c & -5b^3c \\
 & & +3a^2c^2 & -4abc^2 & +7b^2c^2 \\
 & & & -3ac^3 & -3bc^3 \\
 & & & & +c^4
\end{array}$$

Zieht man hier die unter einander stehenden Glieder zusammen, so erhält man ohne alle wesentliche Abänderung in der Folge der Glieder nachstehende Formel

$$3a^4 - (2b - 3c)a^3 + (4b^2 - 2bc + 3c^2)a^2$$
$$+ (5b^3 - 2b^2c - 4bc^2 - 3c^3)a$$
$$- (2b^4 + 5b^3c - 7b^2c^2 + 3bc^3 - c^4),$$

welche Formel offenbar nach fallenden Potenzen von a geordnet ist.

§. 5. Zusatz.

Sind in einer geordneten Formel nur zwei Größen a und b enthalten, so ist sie zugleich von selbst nach steigenden P-tenzen der zweiten Größe geordnet.

Man lasse aus der Formel des vorigen Paragraphen alle Glieweg, welche c enthalten; so bleibt übrig

$$3a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 + 5ab^3 - 2b^4,$$

welche sichtbar sowohl nach fallenden Potenzen von a, als nach steigenden von b geordnet ist.

Anmerkung. Man sieht hieraus, daß die lexicographische Anordnung die allgemeinere ist, und daß sie die nach Potenzen als eine besondere Art in sich schließt. Daher es bei allgemeinen Untersuchungen über die Gestalt der Formeln hinreichend ist, sich auf die lexicographische Ordnung zu beschränken.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn bei einer Multiplication beide Factoren Producte derselben Größen, wenn gleich in beiden Factoren in verschiedener Anzahl enthalten, und richtig lexicographisch geordnet sind, so erhält man das Product von selbst richtig lexicographisch geordnet.

Man darf nur zwei solche Factoren aufmerksam multipliciren, um die Richtigkeit des Satzes einzusehn.

$$\begin{array}{lllllll}
a^4 & -2a^3b & +3a^2b^2 & -5ab^3 & +2b^4 & & \\
a^2 & -2ab & +2b^2 & & & & \\
\hline
a^6 & -2a^5b & +3a^4b^2 & -5a^3b^3 & +2a^2b^4 & & \\
 & -2a^5b & +4a^4b^2 & -6a^3b^3 & +10a^2b^4 & -4ab^5 & \\
 & & +2a^4b^2 & -4a^3b^3 & +6a^2b^4 & -10ab^5 & +4b^6 \\
\hline
a^6 & -4a^5b & +9a^4b^2 & -15a^3b^3 & +18a^2b^4 & -14ab^5 & +4b^6
\end{array}$$

In diesem Beispiel enthält jedes Glied des Multiplicandus vier, des Multiplicators zwei Factoren, folglich muß jedes Theilproduct, und so auch jedes Glied des Gesammtproductes sechs, also gleichviele Factoren enthalten, welches die erste Bedingung einer richtigen lexicographischen Anordnung ist.

Betrachtet man ferner die einzelnen Zeilen der Rechnung, so wird man leicht wahrnehmen, daß jede nicht anders als lexicographisch geordnet sein kann; desgleichen, daß, wenn jede folgende Zeile um ein Glied weiter gegen die rechte Seite gerückt wird, immer Glieder mit gleichen Hauptgrößen unter einander zu stehen kommen.

Indem endlich diese Zeilen addirt werden, so kann in der Folge der Hauptgrößen keine Veränderung entstehen; also ist auch das Product richtig lexicographisch geordnet.

§. 7. Zusatz.

Unter allen Gliedern eines solchen Productes sind nur zwei, nämlich das erste, und das letzte, welche ein Theilproduct von zwei Gliedern der Factoren sind. Alle übrigen Glieder des Productes sind algebraische Summen von zwei oder mehreren solchen Theilproducten.

In dem Beispiele des vorigen Paragraphen ist das erste Glied a^6 das Product von a^4 und a^2; das letzte $4b^6$ ist das Product von $2b^4$ und $2b^2$.

Jedes andere Glied hingegen, z. B. das zweite $-4a^5b$ ist nicht bloß ein einzelnes Product solcher Art, sondern eine

Summme von den Theilproducten $-2a^5b$ und $-2a^5b$. Das folgende dritte Glied ist $9a^4b^2 = 3a^4b^2 + 4a^4b^2 + 2a^4b^2$ u. s. f.

Ändert man in einem oder beiden Factoren etwas in der Ordnung der Glieder, so wird dadurch auch die Ordnung im Product aufgehoben. Verändert man aber die Stelle des ersten, oder des letzten Gliedes in einem der Factoren, oder beiden, so behalten auch die beiden Glieder, welche einfache Theilproducte sind nicht die erste oder letzte Stelle, sondern kommen irgendwo in der Mitte des Products zu stehen. Doch wird dadurch das Product nicht falsch, und es ist daher bei der Multiplication zwar nicht schlechthin nothwendig, aber dennoch in jedem Falle rathsam, die Factoren zu ordnen. Anders verhält es sich hingegen bei der Division, wie der folgende Paragraph zeigt.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn man das durch eine Multiplication gefundene Product durch einen der beiden Factoren dividirt, so erhält man auch den Quotienten Glied vor Glied richtig geordnet, wenn die beiden gegebenen Formeln vorwärts oder rückwärts richtig und gleichförmig geordnet sind.

Beweis. Man betrachte die Multiplication §. 6., und nehme an, das Product solle durch den ersten Factor $a^4 - 2a^3b +$ rc. dividirt werden; so läßt sich zeigen, daß die Rechnung nur alsdann ungehindert und regelmäßig von Statten geht, wenn man den Dividendus und Divisor entweder gerade so wie dort, oder beide gerade in umgekehrter Ordnung aufstellt.

Wir betrachten beide zuerst in der Ordnung, in welcher sie §. 6. aufgestellt sind. Hier fällt leicht in die Augen, daß das erste Glied des Dividendus a^6 durch das erste a^4 des Divisors dividirt das erste Glied des andern Factors, nämlich a^2 geben müsse, weil a^6 das einfache Product von a^4

und a^2 ist. Wollte man dagegen irgend ein anderes Glied des Dividendus voranstellen, z. B. $9a^4b^2$, und dieses entweder durch a^4 oder durch irgend ein anderes Glied des Divisors dividiren, so ist klar, daß der Quotient kein Glied des andern Factors sein könne, weil $9a^4b^2$ eine Summe von drei Theilproducten ist. Bloß das letzte Glied des Dividendus $4b^6$ giebt durch das letzte $2b^4$ des Divisors dividirt das letzte des andern Factors $2b^2$, weil $4b^6$ ein einfaches Theilproduct ist. Aber diese Glieder kommen erst bei Betrachtung der umgekehrten Ordnung in nähere Erwägung.

Hat man nun a^6 durch a^4 dividirt, und so das erste Glied des Quotienten, oder des andern Factors gefunden, so schreiben die Regeln der Division vor, daß man mit a^2 den ganzen Divisor multiplicire, und das Product vom Dividendus abziehe. Betrachtet man nun wieder die Multiplication §. 6., so fällt in die Augen daß das Product von a^2 mit dem Divisor nichts anders sei, als die erste Zeile der Multiplicationsrechnung $a^6 - 2a^5b +$ ꝛc. Wird aber diese vom Product subtrahirt, so kann der Rest nichts anders sein, als die Summe der zweiten und dritten Multiplicationszeile. Dieser Rest wird also sein $- 2a^5b + 6a^4b^2 -$ ꝛc. und in denselben ist wieder das erste Glied $- 2a^5b$ ein einfaches Theilproduct, und zwar vom ersten Gliede des ersten, und vom zweiten Gliede des andern Factors. Die übrigen Glieder dieses Restes sind wieder (mit Ausnahme des letzten Gliedes) Summen von zwei Theilproducten, können also mit a^4 dividirt, kein richtiges Glied des andern Factors geben. Dividirt man aber $- 2a^5b$ durch a^4, so ist der Quotient $- 2ab$ das richtige zweite Glied des andern Factors.

Wird nun ferner der ganze Divisor mit $- 2ab$ multiplicirt, so ist das Product nichts anders als die zweite Zeile der Multiplicationsrechnung, und wird diese von dem vorhergehenden Reste abgezogen, so kann nichts übrig bleiben, als die dritte Zeile der Multiplicationsrechnung. In dieser ist aber das erste Glied wieder das einfache Theilproduct von dem ersten Gliede a^4 des ersten Factors und dem dritten $+ 2b^2$ des andern Factors. Dieses letzte wird also richtig gefunden, wenn man das erste Glied des Restes $+ 2a^4b^2$ durch a^4 dividirt. Der Quotient ist $+ 2b^2$, und wenn man mit diesem den ganzen Divisor multiplicirt, so kann nichts herauskommen, als die dritte Multiplicationszeile, von der wir so eben gesehen haben, daß sie dem letzten Reste gleich sei, weswegen bei der Subtraction alles aufgehen muß.

Schriebe man das Product und den ersten Factor in umgekehrter Ordnung, so ist leicht einzusehen, daß man dieselben Schlüsse machen könnte, nur würde man durch Multiplication des Divisors mit dem ersten Glied des Quotienten die dritte Multiplicationszeile erhalten, durch Multiplication des Divisors mit dem zweiten Gliede des Quotienten die zweite, und durch Multiplication des Divisors mit dem dritten Gliede des Quotienten die erste; aber alle drei in umgekehrter Ordnung.

Anmerkungen.

1. Wer hierüber völlig ins Klare kommen will, der muß sich die Mühe nicht verdrießen lassen, die hier bloß beschriebene Division auf einem besondern Blatte wirklich auszuführen, und sie bei Durcharbeitung dieses Beweises Zeile vor Zeile mit der Multiplication §. 6. zu vergleichen.
2. Wollte Jemand das Product (§. 6.) durch den andern Factor dividiren, so würde es zweckmäßig sein, erst die Multiplication noch einmal zu rechnen, und zwar so daß $a^2 - 2ab + 2b^2$ als Multiplicandus angesetzt würde.

§. 9. Zusatz.

Ist eine Formel, welche man dividiren soll, nicht durch eine wirkliche Multiplication entstanden, so muß doch nach dem bloßen Begriffe der Division (§. 10.) der Quotient eine Formel sein, welche mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus giebt. Soll daher dieser Quotient in der einfachsten und regelmäßigsten Gestalt gefunden werden, so muß man gerade so rechnen, als ob der Dividendus durch eine wirkliche Multiplication des Divisors und Quotienten entstanden wäre. Folglich muß man auch in diesem Falle den Dividendus und Divisor gleichmäßig ordnen, und man erhält alsdann den Quotienten eben so geordnet.

Um dieses recht anschaulich zu machen, darf man nur bei einer nicht aufgehenden Division (wo also der Dividendus durch keine wirkliche Multiplication gefunden ist), den Quotienten nach §. 16. des Abschnitts durch Anhängung eines Bruches, wie in beistehender Division geschehen ist, vollständig machen, und nach Anhängung des Bruches dieses gebrochene Glied des Quotienten

$$\frac{4bb}{a+b}$$

$$\begin{array}{lrl} & \underline{a + b} & \\ & a^2 - 3ab & \Big| \; a - 4b + \dfrac{4b^2}{a+b} \\ A\ldots & \underline{a^2 + ab} & \\ & -4ab & \\ B\ldots\ldots & \underline{-4ab - 4b^2} & \\ & +4b^2 & \\ C\ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{+4b^2} & \\ & 0 & \end{array}$$

mit dem ganzen Divisor $a + b$ multipliciren, wodurch der Nenner $a + b$ wegfällt, also der Zähler $+ 4bb$ zum Product erhalten wird. Setzt man nun dieses Product bei C unter den letzten Rest, so ist klar, daß auch jetzt die Rechnung aufgehen müsse.

Nach diesem Zusatze läßt sich die ganze Rechnung vollkommen so betrachten, als wäre der Dividendus durch eine wirkliche Multiplication entstanden, wobei $a + b$ als Multiplicandus,

$$a - 4b + \frac{4bb}{a+b}$$

aber als Multiplicator angesetzt worden. Denn bei A steht das Product von $a + b$ mit a; bei B das Product von $a + b$ mit $- 4b$; endlich bei C das Product von

$$a + b \text{ mit } + \frac{4bb}{a+b}.$$

§. 10. Zusatz.

Wenn man zwei Formeln mit einander multiplicirt, die keine regelmäßige Anordnung zulassen, so findet auch in dem Producte keine regelmäßige Ordnung Statt. Und wenn man ein solches Product wieder durch einen der Factoren dividirt, so bringt auch eine beliebige Änderung in der Stellung der Glieder keine Unrichtigkeit in den Quotienten.

Man multiplicire z. B. $a + b$ mit $c - d$, und dividire dann umgekehrt das Product durch einen der Factoren, so kann man die Glieder des Dividendus beliebig stellen, z. B. in der hier beistehenden Ordnung; nur muß man dann denjenigen Factor, durch welchen man dividiren will, z. B. $c - d$, so stellen, daß sich das erste Glied des Dividendus $- ad$ durch sein erstes Glied ohne Bruch dividiren läßt, also nicht $+ c - d$, sondern $- d + c$.

$$\begin{array}{l}
a + b \\
c - d \\
\hline
ac + bc - ad - bd
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll|l}
 & & & & & -d + c \\
\cline{6-6}
 & -ad & +bc & +ac & -bd & a + b \\
A.. & -ad & & +ac & & \\
\cline{1-5}
B \ldots\ldots & & +bc & & -bd & \\
C \ldots\ldots & & +bc & & -bd & \\
\cline{1-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Beim Multipliciren aber muß man die Glieder, die sich subtrahiren lassen, unter einander setzen. In der Zeile A muß daher $+ ac$ nicht unter $+ bc$ gesetzt werden. Ferner bei der Division des Restes B $(bc - bd)$ muß nicht das erste sondern das zweite Glied $- bd$ dividirt werden, weil nur dieses, nicht jenes, sich durch $- d$ ohne Bruchform dividiren läßt.

§. 11. Zusatz.

Endlich ist noch zu bemerken, daß, wenn man bei einer Division die gegebenen Formeln unregelmäßig ordnet, sonst aber die Regeln der Division richtig beobachtet, man eigentlich keinen unrichtigen Quotienten erhält, wenn man bei einem beliebigen Abschnitt der Rechnung abbricht, und dann den Quotienten durch Anhängung eines Bruches nach §. 16. des Abschnitts vollständig macht. Nur erhält man den Quotienten in einer unregelmäßigen, und zu ferneren Rechnungen oft unbequemen Gestalt. Ja selbst bei einer regelmäßigen Anordnung der Formeln kann man dennoch zuweilen den Quotienten in einer unbequemen Gestalt erhalten, wenn die Coefficienten so beschaffen sind, daß man im Quotienten gebrochne Glieder erhält.

Es sei z. B. der Dividendus $3ab - b^2 + a^2$ der Divisor $b - 2a$, so versuche man die Rechnung bei verschiedener Stellung der Glieder auszuführen.

1. Die regelmäßigste Division erhält man, wenn man b als die erste Größe, d. h. als diejenige, nach welcher die Glieder geordnet werden sollen, betrachtet. Dann ist der geordnete Dividendus $-b^2 + 3ab + a^2$, und dieser durch $b - 2a$ dividirt giebt den Quotienten

$$-b + a + \frac{3aa}{b - 2a}.$$

2. Nimmt man aber a für die erste Größe, so ist der Dividendus $a^2 + 3ab - b^2$, und der Divisor $-2a + b$. Dividirt man nun, so erhält man den Quotienten in der unbequemen Gestalt:

$$-\tfrac{1}{2}a - \tfrac{5}{4}b + \frac{\tfrac{1}{4}b^2}{-2a + b}$$

welches indessen keinen andern Werth hat, als der vorige Quotient.

3. Nimmt man den Dividendus in der Ordnung $3ab - b^2 + a^2$, den Divisor aber in der Ordnung $b - 2a$, und bricht nach der zweiten Subtraction ab, so erhält man zum Quotienten

$$3a - b + \frac{7aa - 2ab}{b - 2a},$$

welches wieder mit dem vorhergehenden einerlei ist.

Neunter Abschnitt.

Rechnung mit gebrochnen Formeln.

§. 1. Vorerinnerung.

Da gebrochne Formeln nichts anders sind als Quotienten, Quotient und Bruch aber nach IV. 14. gar nicht wesentlich verschieden sind, so darf man jede gebrochene Formel wie einen Bruch behandeln, und auf sie alles anwenden, was im vierten Abschnitt von Quotienten, und im sechsten von gemeinen Brüchen erwiesen ist. Es wird daher hier hinreichend sein, in diesem Abschnitte nur die Aufgaben auszusprechen, und auf die Sätze zurück zu weisen, aus denen sich die Auflösung ergiebt. In den Heften aber sind diese Auflösungen durchgängig auszuführen. Auch ist es nöthig, im Übungshefte bei jedem Paragraphen mehrere Beispiele zu rechnen.

Es wird übrigens für jeden von großem Nutzen sein, diesen Abschnitt recht aufmerksam durchzuarbeiten, indem durch den Gebrauch der Buchstaben die Sätze von den gemeinen Zahlenbrüchen eine Anschaulichkeit erhalten, die man ihnen durch Betrachtung bloßer Zahlen nicht geben kann. Denn jede Buchstaben-Formel gewährt den wichtigen Vortheil, daß man ihre Entstehung durch Betrachtung ihres Baues wahrnimmt, da man es hingegen einer bloßen Zahl niemals ansehen kann, wie sie entstanden ist.

§. 2. Aufgabe.

Eine gebrochene Formel $\frac{A}{B}$ mit einer ganzen C zu multipliciren.

Die Multiplication geschieht wie VI. 1. f. Die dort erwähnte zweite Art läßt sich aber nur anwenden, wenn in dem Nenner die ganze Formel als Factor enthalten ist, z. B. wenn $\frac{A}{BC}$ mit C multiplicirt werden soll, wobei man sich an VIII. 13. zu erinnern hat.

Haben die Formeln Vorzeichen, so wird das Vorzeichen des Products nach VIII. 4. bestimmt.

Im Übungshefte rechne man Beispiele von etwas zusammengesetzterer Art: z. B

$$\frac{5ab}{3cd} \times 3ac;$$

$$\text{oder } 5ab \times \frac{a-2b}{20ab};$$

$$\text{oder } 3ac \times \frac{2a-4b}{5bc}; \text{ u. dgl. m.}$$

§. 3. Aufgabe.

Eine gebrochene Formel $\frac{A}{B}$ durch eine ganze C zu dividiren.

Die Auflösung ergiebt sich aus VI. 1. g. Die zweite dort angegebene Auflösung findet aber nur Anwendung, wenn die ganze Formel als ein Factor im Zähler der gebrochnen enthalten ist, z. B. wenn $\frac{AC}{B}$ durch C dividirt werden sollte.

§. 4. Zusatz.

Wenn man also den Zähler und Nenner einer Bruchformel durch eine und dieselbe Größe multiplicirt, oder dividirt, so bleibt ihr Werth ungeändert.

Dieses folgt aus §. 2. und 3., welches zu zeigen ist.

Für das Übungsheft setzen wir einige Beispiele als Muster hinzu.

a. Multiplicationen des Zählers und Nenners;

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)c}{(a+b)c} = \frac{ac-bc}{ac+bc};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{aa+ab}{ab+bb};$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}; \text{ u. dgl. m.}$$

b. Divisionen des Zählers und Nenners:

$$\frac{3aab}{5abb} = \frac{3a}{5b}; \quad \frac{7aa-2ab}{4aa-3ab} = \frac{7a-2b}{4a-3b}$$

$$\frac{a^2-b^2}{4a(a+b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{4a(a+b)} = \frac{a-b}{4a}$$

$$\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2} = \frac{a-b}{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}; \text{ u. dgl. m.}$$

§. 5. Aufgabe.

Einer ganzen Formel die Gestalt eines Bruchs mit vorgeschriebenem Nenner zu geben.

Die Auflösung ergiebt sich aus VI. 1. a.

Muster für das Übungsheft.

a soll als Bruch den Nenner $2bc$ erhalten.

$a-b$ = = = = = $3c$ =

$a-b$ = = = = = a^2-b^2 =

$a+b$ = = = = = $a-2b$ =

u. dgl. m.

§. 6. Aufgabe.

Zwei Bruchformeln unter den einfachsten gemeinsamen Nenner zu bringen.

Anleitung zur Auflösung. Die Auflösung ist hier in den meisten Fällen einfacher und leichter als bei Zahlen, weil bei den Formeln gewöhnlich die Factoren des Nenners sichtbar vor Augen liegen, die man bei Zahlen erst aufsuchen muß. Man unterscheide übrigens bei der Auflösung zwei Fälle.

a. Wenn die Nenner der beiden Bruchformeln gar keinen Factor weder in den Coefficienten noch Buchstaben gemein haben. Z. B.

$$\frac{2aa}{3bc} \text{ und } \frac{5a}{7d}.$$

Dann ist der einfachste gemeinsame Nenner, das vollständige Product beider Nenner, also $21bcd$. Wie nun beide Brüche unter diesen Nenner zu bringen sind, ergiebt sich aus VI. 1. b. oder IV. 9.

b. Wenn die Nenner einige Zahlen- oder Buchstabenfactoren gemein haben z. B.

$$\frac{13a}{15bbc} \text{ und } \frac{4d}{9abc}.$$

Dann erhält man den einfachsten Gemeinnenner zu beiden, wenn man die Factoren, welche beide gemein haben (aber jeden nur einmal gesetzt), mit denen multiplicirt, die in beiden verschieden sind. Im obigen Beispiel haben die Nenner die Factoren $3bc$ gemein. Der erste Nenner $15bbc$ ist also $= 3bc \,.\, 5b$; der zweite $9abc = 3bc \,.\, 3a$. Man wird also den einfachsten Gemeinnenner erhalten, wenn man $3bc$ mit $5b$, und mit $3a$ multiplicirt. Er ist also $45abbc$ Beide Brüche werden wie bei a) unter diesen Nenner gebracht.

Diese Auflösung ist im Hefte vollständig auszuführen; auch sind im Übungshefte mehrere Exempel zu rechnen.

§. 7. Zusatz.

Auch mehr als zwei Bruchformeln lassen sich auf dieselbe Art unter einen gemeinschaftlichen Nenner bringen.

Man suche zuerst zu zwei Brüchen den einfachsten Gemeinnenner nach §. 6. Dann zu diesem und dem dritten Nenner eben so, und wenn noch mehr Brüche da sind, zu dem

Gemeinnenner von dreien, und dem vierten Nenner, einen neuen gemeinsamen Nenner; und so ferner.

Die Auflösung ist an drei oder vier Bruchformeln auszuführen. Sie ist ganz ähnlich der oben VI. 4. in der Anmerkung erklärten Auflösung derselben Aufgabe für Zahlenbrüche.

Im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen.

§. 8. Aufgabe.

Zwei oder mehrere Formeln, die entweder sämmtlich, oder zum Theil gebrochen sind, algebraisch zu addiren, oder zu subtrahiren.

Anleitung zur Auflösung. Die gebrochnen Formeln bringt man nach §. 6. oder 7. unter den einfachsten gemeinsamen Nenner, und sind ganze dabei, so werden auch diese nach §. 5. unter eben den Nenner gebracht. Sind alle Formeln auf diese Art unter einen einzigen Nenner gebracht, so sind wie bei Zahlenbrüchen bloß die Zähler zu addiren oder zu subtrahiren. Da aber diese Zähler sämmtlich ganze Formeln sind, so geschieht die Rechnung völlig nach den im siebenten Abschnitt vorgetragenen Regeln. Hat man auf solche Art ihre algebraische Summe oder Differenz gefunden, so setzt man unter sie als Zähler, den vorher gefundenen gemeinsamen Nenner.

Diese Auflösung ist an zwei Beispielen wirklich auszuführen, nämlich an einem Additionsexempel von drei oder vier Formeln, und an einem Subtractionsexempel von zweien.

Im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen.

§. 9. Aufgabe.

Zwei gebrochne Formeln mit einander zu multipliciren.

Die Rechnung ist wie bei Zahlenbrüchen (VI. 13). Dieses ist an einem Beispiel auszuführen, im Übungshefte aber sind mehrere Exempel zu rechnen.

§. 10. Aufgabe.

Eine Formel, sie sei ganz oder gebrochen, durch eine gebrochne zu dividiren.

Die Rechnung ist wie bei Zahlenbrüchen (VI. 19.). Auch dieses ist in einem Beispiel zu zeigen, und im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen.

Anhang zum neunten Abschnitt.

Von stätig gebrochnen, oder Kettenbrüchen.

§. 1. Erklärung.

Ein Bruch dessen Zähler 1 ist, dessen Nenner aber aus zwei Gliedern bestehet, wovon das erste eine beliebige ganze Zahl, das zweite aber wieder ein Bruch von derselben Form als das Ganze ist (nämlich ein Bruch dessen Zähler 1, und dessen Nenner eine ähnliche zweigliedrige Formel ist), so daß alle nach und nach folgende Nenner bis zum letzten von ähnlicher Form sind, der letzte selbst aber nur einen eingliedrigen Nenner hat, heißt ein **stätig gebrochner**, oder ein **continuirlicher**, oder kürzer: ein **Ketten-Bruch**.

Wenn die Buchstaben a, b, c, d, e, f beliebige ganze Zahlen bedeuten, so ist folgende die allgemeine Form eines Kettenbruchs:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\frac{1}{f}}}}}} \qquad \begin{array}{l} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}$$

nur daß die Anzahl der Nenner bald kleiner, bald größer sein kann.

Alles was unter dem Strich A steht wollen wir den ersten, was unter B steht den zweiten Nenner u. s. f. nennen Was unter dem Strich F steht ist der letzte Nenner.

Anmerkung. Die Hauptsache bei den Kettenbrüchen ist, daß jeder vorkommender Zähler 1 ist. Daher hat jeder gemeine Bruch, dessen Zähler 1 ist, wie $\frac{1}{17}$, schon an sich die Form eines Kettenbruchs. Wie man einem andern ächten Bruche die Gestalt eines Kettenbruchs geben könne, soll im folgenden Paragraphen gezeigt werden.

§. 2. Aufgabe.

Einen ächten Bruch, dessen Zähler größer als 1 ist, in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Der zu verwandelnde Bruch sei $\frac{41}{97}$. Man dividire Zähler und Nenner durch den Zähler. Geht der Nenner durch den Zähler auf (z. B. $\frac{7}{35} = \frac{1}{5}$), so ist der Bruch schon auf die verlangte Form gebracht. Geht er nicht auf, so theile man den Quotienten durch + in die Ganzen nebst dem zugehörigen ächten Bruche. Hätte dieser letzte den Zähler 1, so wäre die verlangte Form schon dargestellt, z. B.

$$(\text{z. B. } \frac{4}{13} = \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}).$$

In unserm obigen Beispiel aber giebt diese Rechnung

$$\frac{41}{97} = \frac{1}{2 + \frac{15}{41}}.$$

Mit diesem Bruch $\frac{15}{41}$ verfahre man gerade so, wie mit dem ersten: nämlich

$$\frac{15}{41} = \frac{1}{2 + \frac{11}{15}}$$

$$\text{also } \frac{41}{97} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{11}{15}}}$$

Man setze dieselbe Arbeit mit dem letzten Bruch ($\frac{11}{15}$) fort, so lange derselbe nicht den Zähler 1 hat. Er muß aber diesen bei Fortsetzung der Arbeit nothwendig erhalten; denn die Zähler der so zu behandelnden Brüche ($\frac{41}{97}$, $\frac{15}{41}$, $\frac{11}{15}$ rc.) werden immer kleiner; da sie aber doch ganze Zahlen bleiben, so muß man nothwendig einmal bei hinlänglicher Fortsetzung der Rechnung auf einen Bruch mit dem Zähler 1 kommen. Sobald man dahin gelangt, ist die verlangte Form dargestellt.

In unserm Beispiel findet man auf diese Art:

$$\frac{41}{97} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}}.$$

Beweis. Da man in dieser ganzen Rechnung nichts weiter that, als daß man den Dividendus und Divisor eines Quotienten gleichvielmal verkleinerte, so ist aus IV. 9. klar, daß dadurch in dem Werthe des ganzen Bruches nichts verändert worden sei.

§. 3. Zusatz.

Betrachtet man die gemachten Divisionen genauer, so zeigt sich bald, daß es keine andern sind, als die, welche man machen müßte, wenn man nach V. 8. den größten gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen finden wollte. Die hiezu erfoderlichen Divisionen würden folgende sein:

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
41 & 97 & 2 & & & \\
 & 82 & & & & \\
\hline
 & 15 & 41 & 2 & & \\
 & & 30 & & & \\
\hline
 & & 11 & 15 & 1 & \\
 & & & 11 & & \\
\hline
 & & & 4 & 11 & 2 \\
 & & & & 8 & \\
\hline
 & & & & 3 & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
3 & |\,4 & |\,1 & \\
 & |\,3 & | & \\
\cline{1-2}
 & 1 & |\,3 & |\,3 \\
 & & |\,3 & | \\
\cline{2-3}
 & & 0 & |
\end{array}$$

Man sieht leicht, daß die sämmtlichen Quotienten 2, 2, 1, 2, 1, 3 nichts anders sind, als die ersten Glieder der Nenner in dem obigen Kettenbruch.

Hieraus ergiebt sich eine andere meistens bequemere Art, einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln. Sollte z. B. $\frac{27}{32}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so rechne man zuerst nach V. 8. wie folgt

$$\begin{array}{rrrrrr}
27 & |\,32 & |\,1 & & & \\
 & |\,27 & | & & & \\
\cline{1-2}
 & 5 & |\,27 & |\,5 & & \\
 & & |\,25 & | & & \\
\cline{2-3}
 & & 2 & |\,5 & |\,2 & \\
 & & & |\,4 & | & \\
\cline{3-4}
 & & & 1 & |\,2 & |\,2 \\
 & & & & |\,2 & | \\
\cline{4-5}
 & & & & 0 & |
\end{array}$$

Aus den Quotienten 1, 5, 2, 2 ergiebt sich dann der Kettenbruch, nämlich

$$\frac{27}{32} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}.$$

§. 4. Zusatz.

Wäre der gemeine Bruch nicht in den kleinsten Zahlen gegeben, so hätte man durch die Divisionen, welche V. 8. vorschreibt, sein größtes gemeinschaftliches Maaß gefunden; aber man würde durch alle Divisionen keine andern Quotienten gefunden haben. Man erhält daher immer denselben Kettenbruch, der gemeine Bruch sei in den kleinsten Zahlen gegeben oder nicht; aber die Berechnung des Kettenbruchs wird kürzer, wenn der gemeine Bruch vorher unter seinen kleinsten Nenner gebracht wird.

§. 5. Aufgabe.

Eine Reihe von Brüchen zu finden, die sich dem Werthe eines gemeinen Bruchs schrittweise nähern, aber mit kleinern Zahlen, als dieser geschrieben sind.

Auflösung. Es sei wieder wie §. 2. der Bruch $\frac{41}{97}$ gegeben. Man mache die §. 3. angegebenen Divisionen, und verfahre mit den Quotienten 2, 2, 1, 2, 1, 3 nach folgender Vorschrift.

A	B	C
	1	0
2	0	1
2	1	2
1	2	5
2	3	7
1	8	19
3	11	26
	41	97

Zuerst setze man diese Quotienten nach der Reihe in einer Spalte A unter einander.

In einer zweiten Spalte B setze man oben, noch über den ersten Quotienten 1; unter 1 aber setze man 0.

Alle übrigen Zahlen dieser Spalte werden nach einer einzigen gemeinschaftlichen Regel gefunden, nämlich: Man erhält jede folgende Zahl dieser Spalte, wenn man einen Quotienten der ersten Spalte, mit der danebenstehenden Zahl der zweiten Spalte multiplicirt, und zu dem Product, die nähst höhere der zweiten Spalte addirt. So steht neben dem ersten Quotienten 2, in der zweiten Spalte 0, und über dieser 1; also muß man nach dieser Regel rechnen: 2 mal 0 ist 0, und 1 dazu ist 1. Also ist neben dem zweiten Quotienten 2 eine 1 zu setzen. Nun rechnet man weiter 2 mal 1 ist 2, und 0 dazu ist 2. Also kommt neben den dritten Quotienten 1 eine 2; und man rechnet weiter, 1 mal 2 ist 2, und 1 dazu ist 3; ferner 2 mal 3 ist 6, und 2 dazu ist 8; u. s. f., so wird zuletzt 41 herauskommen, welches der Zähler des gegebenen Bruches ist, wenn dieser in seinen kleinsten Zahlen gegeben war.

Auf ganz ähnliche Art wird eine dritte Spalte C berechnet, nur daß oben 0 und 1 geschrieben, wo in der zweiten Spalte umgekehrt 1 und 0 stand. Die folgenden Zahlen dieser Spalte werden völlig wie die der zweiten berechnet; so daß eine nähere Entwickelung überflüssig sein würde. Die letzte Zahl dieser Spalte ist allezeit der Nenner des gegebenen Bruches, wenn dieser in den kleinsten Zahlen gegeben war.

Läßt man nun aus den Spalten B und C, die oben stehenden Ziffern 0 und 1 weg, so sind die übrigen Zahlen der zweiten Spalte die Zähler, und die zugehörigen der dritten Spalte die Nenner von Brüchen, welche sich dem Werthe von $\frac{41}{97}$ schrittweise nähern, und abwechselnd größer und kleiner sind, als $\frac{41}{97}$; nämlich: $\frac{1}{2} > \frac{41}{97}$; $\frac{2}{5} < \frac{41}{97}$; $\frac{3}{7} > \frac{41}{97}$; $\frac{8}{19} < \frac{41}{97}$; $\frac{11}{26} > \frac{41}{97}$, endlich $\frac{41}{97} = \frac{41}{97}$.

Den Beweis dieses Satzes versparen wir auf den folgenden Paragraphen, empfehlen aber vorher noch einige Beispiele zur Übung zu rechnen.

§. 6. Beweis des vorigen Paragraphen.

Um dem Beweise völlige Allgemeinheit zu geben, wollen wir ihn nicht auf das Beispiel des vorigen Paragraphen einschränken, sondern denselben in allgemeinen Zeichen führen. Zu dem Ende sollen die Buchstaben a, B, c, D, e ꝛc. die Quotienten vorstellen, welche man durch die nach §. 3. angestellten Divisionen finden würde. Bildet man aus diesen Quotienten einen Kettenbruch so ist es folgender:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{e}}}}}.$$

Den zu führenden Beweis wollen wir in drei Theile theilen. 1) Wir wollen den Kettenbruch abkürzen, indem wir erst das ganze zweite Glied des ersten Nenners (§. 1.) dann das ganze zweite Glied, des zweiten, des dritten Nenners u. s. f. weglassen, und zeigen, daß man dadurch eine Reihe abgekürzter Kettenbrüche erhält, welche sich dem Werthe des ganzen nähern, aber abwechselnd größer, und kleiner sind. 2) Dann wollen wir aus dem angenommenen Quotienten nach §. 5. Näherungsbrüche bilden. Endlich werden wir 3) zeigen, daß diese Näherungsbrüche nichts anders sind, als die bei Nr. 1. gebildeten abgekürzten Kettenbrüche.

Erster Theil. Läßt man das zweite Glied des ersten Nenners weg, so erhält man den abgekürzten Bruch $\frac{1}{a}$, der zu groß ist, weil sein Nenner zu klein ist.

Läßt man das zweite Glied des zweiten Nenners weg, so ist der abgekürzte Bruch

$$\frac{1}{a + \frac{1}{B}}$$

in welchem $\frac{1}{B}$ zu groß, folglich das Ganze zu klein ist.

Fährt man auf diese Art fort von jedem folgenden Nenner das zweite Glied wegzulassen, so erhält man im Ganzen folgende Reihe von abgekürzten Brüchen:

$$\frac{1}{a};\quad \frac{1}{a + \frac{1}{B}};\quad \frac{1}{a + \frac{1}{B + \frac{1}{c}}};\quad \frac{1}{a + \frac{1}{B + \frac{1}{c + \frac{1}{D}}}};$$

$$\frac{1}{a + \frac{1}{B + \frac{1}{c + \frac{1}{D + \frac{1}{e}}}}}.$$

Und man kann sich sehr leicht überzeugen, daß sie vom ersten an, abwechselnd zu groß, und zu klein sind, aber sich dem wahren Werthe, den der letzte Bruch ohne Fehler ausdrückt immer mehr nähern, weil der ganze Nenner in jedem folgenden Bruche dem wahren Werthe des Nenners näher kommt als in dem vorhergehenden.

Zweiter Theil. Wir wollen nun auf die Quotienten a, B, c, D, e die im fünften Paragraphen beschriebene Rechnung anwenden, so ergiebt sich Folgendes:

	1 (Zähler)	0 (Nenner)
a	0	1
B	1	a
c	B	$aB + 1$
D	$Bc + 1$	$aBc + a + c$
e	$BcD + B + D$	$aBcD + aB + aD + cD + 1$
	$BcDe + Bc + Be + De + 1$	$aBcDe + aBc + aBe + aDe + cDe + a + c + e.$

Das Gesetz dieser Formeln ist nicht schwer zu entdecken, wenn man auf den Wechsel der großen und kleinen Buchstaben aufmerksam ist. Es würde daher keine Schwierigkeit haben, nach diesem bloßen Gesetz die Formeln in den beiden Spalten Zähler und Nenner weiter fortzusetzen, wenn man mehr als 5 Quotienten angenommen hätte.

Die Näherungsbrüche, die man aus dieser Tabelle erhält, sind folgende:

$$\frac{1}{a};\ \frac{B}{aB+1};\ \frac{Bc+1}{aBc+a+c};\ \frac{BcD+B+D}{aBcD+aB+aD+cD+1};$$

die beiden untersten Formeln endlich geben:

$$\frac{BcDe+Bc+Be+De+1}{aBcDe+aBc+aBe+aDe+cDe+a+c+e}.$$

Dritter Theil. Vergleicht man nun die im ersten und zweiten Theile gefundenen Brüche mit einander nach der Reihe, so kann man sich leicht überzeugen, daß die ersten, die zweiten, die dritten ꝛc. unter sich gleich sind.

a. Der erste Bruch ist in beiden Rechnungen derselbe, nämlich $\frac{1}{a}$.

b. Der zweite abgekürzte Kettenbruch war

$$\frac{1}{a + \frac{1}{B}}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit B, so erhält man

$$\frac{B}{aB + 1},$$

welches der zweite im zweiten Theil gefundene Bruch war.

c. Der dritte abgekürzte Bruch war

$$\frac{1}{a + \frac{1}{B + \frac{1}{c}}}.$$

Um diesen in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, verfahre man auf folgende Art. Das zweite Glied des Nenners, nämlich

$$\frac{1}{B + \frac{1}{c}}$$

ist mit dem bei b) betrachteten Bruche von gleicher Form. Um daher seinen Werth in der gewöhnlichen Form auszudrücken, darf man nur in der Formel

$$\frac{B}{aB + 1}$$

statt a und B, respective B und c setzen, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{a + \frac{1}{B + \frac{1}{c}}} = \frac{1}{a + \frac{c}{Bc + 1}}$$

und wenn man Zähler und Nenner mit $Bc + 1$ multiplicirt, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{a + \frac{c}{Bc + 1}} = \frac{Bc + 1}{aBc + a + c}$$

welches der dritte im zweiten Theile gefundene Näherungsbruch war.

d. Der vierte abgekürzte Kettenbruch war

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{D}}}}.$$

Vergleicht man hier das zweite Glied des Nenners

$$\cfrac{1}{B + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{D}}},$$

mit dem abgekurzten Bruch bei c), so ist klar, daß man nur in der bei c) gefundenen Formel

$$\frac{Bc + 1}{aBc + a + c}$$

statt a, B, c respectiv B, c, D zu setzen habe. Es ist daher

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{D}}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{cD + 1}{BcD + B + D}}$$

und wenn man hier Zähler und Nenner mit $BcD + B + D$ multiplicirt, so erhält man

$$\frac{BcD + B + D}{aBcD + aB + aD + cD + 1}$$

welches der vierte im zweiten Theile gefundene Näherungsbruch war.

e. Endlich war unser ganzer Kettenbruch

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{B + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{e}}}}}.$$

Vergleicht man auch hier das zweite Glied des Nenners mit d), so ergiebt sich, daß unser ganzer Bruch gleich sei:

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{cDe + c + e}{BcDe + Bc + Be + De + 1}}$$

woraus durch Multiplication mit

$$BcDe + Bc + Be + De + 1$$

der Werth des ganzen Bruches wie im zweiten Theile gefunden wird, nämlich

$$\frac{BcDe + Bc + Be + De + 1}{aBcDe + aBc + aBe + aDe + cDe + a + c + e}$$

Da nun im ersten Theil erwiesen worden, daß die abgekürzten Kettenbrüche sich dem Werthe des ganzen Kettenbruchs nach der Reihe näherten, aber abwechselnd größer und kleiner waren, so gilt eben dieses auch von den im zweiten Theile oder nach §. 5. gefundenen Brüchen.

Anmerkung. Der Beweis des dritten Theiles kann auch umgekehrt geführt werden. Verwandelt man nämlich die im zweiten Theil gefundenen Näherungsbrüche nach §. 2. oder 3. in Kettenbrüche, so findet man nichts anderes, als die im ersten Theil angegebenen abgekürzten Kettenbrüche.

§. 7. Anmerkung.

Die Kettenbrüche haben in der höhern Mathematik schon manchen wichtigeu Aufschluß gegeben, weswegen ihre Theorie hier wohl eine Stelle verdiente. Auch bei gemeinen arithmetischen Arbeiten leisten sie zuweilen nützliche Dienste, wenn man gemeine Brüche vor sich hat, die mit großen Zahlen geschrieben sind, wo man dann, wenn die Rechnung nicht absolute Genauigkeit fodert, statt eines solchen Bruches, vermittelst der vorgetragenen Theorie, Näherungsbrüche finden kann, die mit kleineren Zahlen geschrieben sind. Noch besser ist es indessen in den meisten Fällen, statt solcher großzahligen Brüche zehntheilige zu brauchen.

Zehnter Abschnitt.

Von Verhältnissen und Proportionen.

A. Von Verhältnissen.

§. 1. Erklärung.

Man betrachtet das Verhältniß zweier Zahlen A und B, wenn man sich vorstellt, daß B entstanden sei durch Multiplication von A und einer dritten Zahl C.

B heißt das Hinterglied, A das Vorderglied und C der Anzeiger des Verhältnisses.

Daß das Verhältniß zweier Zahlen betrachtet werden soll, wird durch ein dazwischen gesetztes Kolon angedeutet, z. B. A : B. Man liest dieses: A verhält sich zu B, oder noch kürzer A zu B.

Diese Begriffe sind im Hefte durch Beispiele in bestimmten Zahlen zu erläutern.

Anmerkungen.

1. Wenn man sich vorstellt B sei aus A durch Division entstanden, so betrachtet man auch das Verhältniß A : B. Da aber nach VI. 19. jede Division in eine Multiplication verwandelt werden kann, so ist es unnöthig die Division in der Erklärung zu erwähnen; auch wird die Theorie einfacher, wenn man es nur mit einer einzigen Rechnungsart zu thun hat.
2. Der Begriff des Verhältnisses ist hier etwas anders erklärt worden, als oben IV. 1., desgleichen in der Geometrie XI. 1. Man wird sich aber durch genauere Vergleichung leicht überzeugen können, daß der Unterschied nicht wesentlich ist.

3. Dieser ganz bestimmte Begriff eines Verhältnisses verdient seiner Wichtigkeit wegen die sorgfältigste Aufmerksamkeit. Und dieses um so mehr, da das Wort Verhältniß nicht nur im gemeinen Leben, sondern oft selbst in der Mathematik in einem viel unbestimmtern und weitern Sinn, von jeder Beziehung, oder Verbindung gebraucht wird, in der zwei Dinge mit einander stehen. Über dieses wird noch gewöhnlich in den mathematischen Lehrbüchern, von zwei Arten bestimmter Verhältnisse geredet, die man geometrische und arithmetische nennt. Die sogenannten geometrischen sind von den hier erklärten nicht verschieden. Arithmetisch aber nennt man das Verhältniß zweier Zahlen A und B, wenn man untersucht, wie B aus A dadurch entsteht, daß man zu A eine gewisse dritte Zahl C addirt. Der Verfasser ist der Meinung, daß sich von den arithmetischen Verhältnissen kein irgend bedeutender Gewinn für die Wissenschaft nachweisen lasse. Er hat sie daher aus diesem Lehrbuche ganz weggelassen, ist aber überzeugt, daß man dennoch deswegen nicht das allergeringste Wesentliche vermissen wird.

4. Endlich bemerken wir, daß wir auf alle bei einem Verhältniß vorkommende Zahlen (Vorderglied, Hinterglied und Anzeiger), den Begriff des Gegensatzes anfänglich nicht anwenden, sondern sie als absolute Zahlen betrachten wollen.

§. 2. Erklärung.

Wenn man zwei Zahlen A und B, einmal in der Ordnung A : B, und dann in umgekehrter Ordnung B : A zusammenstellt, so heißt eines dieser Verhältnisse das umgekehrte (oder das verkehrte) des andern.

Diese Erklärung ist im Hefte durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern; dann sind noch folgende Fragen zu beantworten: Haben umgekehrte Verhältnisse gleiche Anzeiger? Darf man sie gleiche Verhältnisse nennen?

§. 3. Zusatz.

Die drei Zahlen, welche bei der Betrachtung eines Verhältnisses vorkommen (Vorderglied, Hinterglied und Anzeiger), stehen in einem solchen Zusammenhange unter einander, daß, wenn zwei derselben gegeben sind, die dritte allezeit gefunden werden kann.

Wie viel Aufgaben entspringen hieraus? Wie lautet jede? Wie wird sie aufgelöst? — Die Beantwortung dieser Fragen ergiebt sich unmittelbar aus der Erklärung des Verhältnisses in Verbindung mit den ersten Begriffen vom Multipliciren und Dividiren.

Die Auflösung jeder Aufgabe ist theils in bestimmten Zahlen, theils in unbestimmten Zeichen auszuführen. Zum Behuf dieser letzten Auflösungsart benenne man die obigen drei Größen mit drei beliebigen Buchstaben, und zeige, wie der Werth einer jeden durch die beiden übrigen ausgedrückt werden könne.

Anmerkung. Wenn man das Hinterglied eines Verhältnisses nicht durch einen einzelnen Buchstaben bezeichnet, sondern es durch das Vorderglied und den Anzeiger ausdrückt, so erhält man eine allgemeine Bezeichnung eines Verhältnisses, die zur Führung vieler Beweise ungemein bequem, und daher besonders zu merken ist.

§. 4. Zusatz.

Für die Gleichheit zweier Verhältnisse ergeben sich aus dem bisherigen folgende einfache Kennzeichen. Zwei Verhältnisse sind gleich:

a. wenn sie gleiche Anzeiger haben;

b. wenn beide einem dritten gleich sind.

Das erste folgt unmittelbar ans dem Begriff des Verhältnisses. Denn wenn zwei Verhältnisse denselben Anzeiger haben, so ist die Entstehung des Hintergliedes aus dem Vordergliede gleich; und hierin besteht das Wesen des Verhältnisses.

Das zweite ergiebt sich unmittelbar aus dem ersten, und ist (eben so wie das erste selbst), durch ein bestimmtes Zahlenbeispiel zu erläutern.

§. 5. Zusatz.

Das Verhältniß von Eins zum Anzeiger, ist dem Verhältniß des Vordergliedes zum Hintergliede gleich.

Man drücke zuerst den Sinn des Satzes in allgemeinen Zeichen aus, so ergiebt sich die Richtigkeit aus §. 4. a.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn man beide Glieder eines Verhältnisses (A : B) durch eine und dieselbe dritte Zahl (n) multiplicirt, oder dividirt, so haben die Producte oder die Quotienten dasselbe Verhältniß als die gegebenen Zahlen.

Auch hier darf man nur den Inhalt des Satzes in allgemeinen Zeichen ausdrücken, so ergiebt sich die Richtigkeit aus §. 4.

Zusatz. Folglich haben die Gleichvielfachen zweier Größen, oder die gleichvielten Theile derselben, eben das Verhältniß, als die Größen selbst.

§. 7. Aufgabe.

Ein gegebenes Verhältniß, in welchem das Vorderglied oder das Hinterglied oder beide Bruchgestalt haben, durch zwei ganze Zahlen auszudrücken.

Anleitung zur Auflösung. Man übersieht leicht, daß vermittelst §. 6. ein und dasselbe Verhältniß auf unzählig viele Arten zum Theil durch ganze, zum Theil durch gebrochne Zahlen ausgedrückt werden könne. Aber nicht jeder solcher Ausdruck ist zur Betrachtung oder Rechnung bequem. So erhält man allezeit eine anschaulichere Vorstellung von einem Verhältniß, wenn es in ganzen möglichst kleinen Zahlen, als wenn es in Brüchen ausgedrückt ist. Nun ist aus VI. 1. h. i. bekannt, daß man zu jedem Bruch einen Multiplicator finden kann, wodurch man ein ganzes Product erhält. Ist also ein Verhältniß gegeben, in welchem Brüche vorkommen, so wird man aus §. 6. leicht beurtheilen, wie sie wegzuschaffen sind.

Dieses ist im Hefte an zwei Beispielen auszuführen, wo in dem einen nur ein Glied, im andern aber beide gebrochen, oder aus Ganzen und einem Bruche gemischt sind.

Im Übungshefte sind aber mehr Beispiele der Art zu rechnen.

§. 8. Aufgabe.

Ein in beliebigen Zahlen gegebenes Verhältniß so umzuändern, daß entweder das Vorderglied oder das Hinterglied Eins wird.

Anleitung zur Auflösung. Im vorigen Paragraphen mußte man multipliciren; hier dividiren. Wie? ergiebt sich sehr leicht, wenn man überlegt, wodurch man eine gegebene Zahl dividiren müsse, wenn der Quotient 1 werden soll.

Dieses ist im Hefte auszuführen, und auf zwei Beispiele anzuwenden, wo in dem ersten das Vorderglied, in dem andern das Hinterglied, die Größe 1 erhalten soll.

Anmerkung. Das Glied, welches nicht Eins werden soll, wird in den meisten Fällen die Gestalt eines Bruches oder einer gemischten Zahl erhalten. Dieses hindert nichts, denn ein solcher Ausdruck giebt doch eine sehr anschauliche und deutliche Vorstellung von der Größe eines Verhältnisses. Es ist aber zur Rechnung meistens bequem, dieses Glied nicht in gemeinen sondern in zehntheiligen Brüchen auszudrücken, wenn es gleich auf diese Art oft nicht ohne Fehler ausgedrückt werden kann. Aber auch dieses schadet weder der Deutlichkeit noch der Genauigkeit, weil im ersten

Abschnitt gezeigt worden, wie der Fehler des Abkürzens so klein gemacht werden kann, als man will.

Im Übungshefte sind daher mehrere Beispiele in dieser Art zu berechnen.

B. Von Proportionen.

§. 9. Erklärung.

Wenn man zwei gleiche Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen verbindet, so nennt man solche Zusammenstellung von vier Größen eine Proportion, und der Anzeiger jedes Verhältnisses heißt der Anzeiger der Proportion.

Nach dem bisher Vorgetragenen kann es nicht schwer sein, ein Paar gleiche Zahlenverhältnisse ausfindig zu machen, und durch Verbindung derselben den Begriff und die Bezeichnung einer Proportion anschaulich zu machen.

Außerdem ist es aber noch nöthig, eine Proportion in unbestimmten Zeichen darzustellen. Dieses kann zwar schon durch vier einzelne beliebige Buchstaben geschehen, die man nur richtig durch die Verhältnißzeichen und das Gleichheitzeichen verbinden muß; aber viel ausdrucksvoller geschieht es, wenn man das erste Glied, das dritte Glied, und den Anzeiger mit beliebigen Buchstaben bezeichnet, und dann das zweite und vierte Glied nach §. 3. Anm. ausdrückt.

§. 10. Zusatz.

In jeder Proportion kann man, ohne die Proportionalität aufzuheben,

1. die beiden Verhältnisse vertauschen;
2. die beiden Verhältnisse umkehren.

Das erste ergiebt sich unmittelbar aus dem Begriff einer Proportion §. 9.

Das zweite folgt eben daraus in Verbindung mit §. 2.

§. 11. Zusatz.

Aus jeden zwei gleichen Brüchen oder Quotienten kann man eine Proportion bilden.

Denn man kann jeden Bruch allezeit als den Anzeiger eines Verhältnisses betrachten, dessen Vorderglied der Nenner und dessen Hinterglied der Zähler ist (§. 3.); woraus sich leicht ergiebt, wie die Glieder der Proportion zu stellen sind.

Dieses ist im Hefte durch ein Beispiel zu erläutern.

§. 12. Lehrsatz.

In jeder Proportion ist das Product der äußeren Glieder dem Product der innern gleich.

Anleitung zum Beweise. Man bezeichne eine Proportion nach der §. 9. am Ende beschriebenen Art, in welcher Form sie offenbar ein Stellvertreter aller möglichen Proportionen ist. Man bilde alsdann das Product, sowohl des ersten und vierten, als des zweiten und dritten Gliedes, so fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz ist eben so wichtig, als sein Beweis leicht. Daher gehe man nicht zu flüchtig über ihn weg. Besonders empfiehlt der Verfasser den ganzen Beweis nochmals zu wiederholen, aber nicht in Zeichen, sondern in bloßen Worten und Begriffen. Nämlich aus §. 3. weiß man, daß das zweite sowohl, als das vierte Glied immer als ein Product von zwei Factoren betrachtet werden kann. Drückt man nun diese Factoren nicht durch Zeichen, sondern durch Worte aus, so kann man leicht sagen, was für Factoren das Product des ersten und vierten Gliedes, desgleichen das Product des zweiten und dritten enthalte; und hieraus ergiebt sich, daß jedes dieser Producte aus denselben drei Factoren bestehe.

§. 13. Lehrsatz.

Vier Zahlen bilden eine richtige Proportion, wenn das Product der äußeren Glieder, dem der inneren gleich ist.

Anleitung zum Beweise. Der Beweis dieses Lehrsatzes, der, wie man leicht sieht, die Umkehrung des vorhergehenden ist, läßt sich auf mehrere Arten führen; unter andern auf folgende.

Man nenne die vier Zahlen a, b, c, d. Nimmt man nun an, wie der Satz fodert, $ad = bc$, und dividirt diese beiden Producte durch das Product des ersten und dritten Gliedes also durch ac, so erhält man zwei gleiche Quotienten oder Brüche, aus welchen sich die Richtigkeit der Proportion, vermittelst §. 11. ableiten läßt.

Zusatz. Hieraus ergiebt sich, wie man aus zwei gleichen Producten Proportionen bilden könne, wenn jedes dieser Producte zwei Factoren enthält.

Man muß nämlich die Factoren des einen Products zu äußeren, und die des andern zu innern Gliedern machen; dann läßt sich unser Lehrsatz anwenden.

Da nichts leichter ist als zwei gleiche Producte zu bilden, (z. B. $6 . 8 = 4 . 12$, oder $1 . 48 = 3 . 16$ u. dgl. m.), so gewinnt man durch unsern Lehrsatz ein äußerst leichtes Mittel, eine Menge richtiger Proportionen zu bilden, wovon in diesem Abschnitte viele Anwendungen gemacht werden können.

Dieses ist im Hefte durch Beispiele zu erläutern, auch wird man bei einigem Nachdenken leicht ausfindig machen, wie viele richtige Proportionen sich aus zwei gleichen Producten auf diese Art machen lassen.

Anmerkung. Die Lehrsätze §. 12. und 13. sind wichtig, nicht bloß für diesen Abschnitt, sondern für den ganzen arithmetischen Theil der Mathematik.

§. 14. Aufgabe.

Das vierte Glied einer Proportion zu finden, wenn die drei ersten gegeben sind.

Auflösung. Man nenne die drei ersten Glieder a, b, c, und das gesuchte vierte x; so wird x gefunden, wenn man nach einer von folgenden Formeln rechnet:

$$x = \frac{bc}{a};\ \text{oder}\ x = \frac{b}{a}c;\ \text{oder}\ x = \frac{c}{a}b.$$

Der Sinn jeder dieser drei Regeln ist in Worten auszusprechen.

Anleitung zum Beweise ihrer Richtigkeit. Die gesuchte Größe x muß so bestimmt werden, daß $a : b = c : x$. Ist aber diese Proportion richtig, so ist nach §. 12. $ax = bc$. Dividirt man beiderseits durch a, so läßt sich leicht zeigen, daß man die erste Formel erhält.

Dann läßt sich aus IV. 26. zeigen, daß die zweite und dritte Formel nichts anders geben können als die erste; welches auszuführen ist.

Im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen, wobei man zu den drei ersten Gliedern, ganz beliebig, ganze Zahlen, Brüche, gemischte Zahlen anwenden kann. Wer gelernt hat, wie man mit Brüchen multipliciren und dividiren müsse, der wird mit jedem solchen Exempel leicht fertig werden: denn die in der Auflösung ausgedrückten Regeln gelten für alle mögliche Fälle.

Selbst bei Buchstabenformeln sind diese Regeln anwendbar, und der Verfasser empfiehlt im Übungsheft auch einige Beispiele dieser Art zu rechnen, räth aber nur sehr einfache Formeln, z. B.

$$a + b;\ a + ab;\ \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{c}\ \text{u. dgl. m.}$$

anzuwenden.

Anmerkung. Diese Aufgabe enthält die mathematische Theorie, der aus den praktischen Rechenstunden bekannten Regel de tri, bei welcher allezeit eine Proportion zum Grunde liegen muß.

§. 15. Zusatz.

In jeder Proportion darf man allezeit die innern Glieder (oder wenn man will auch die äußern) mit einander vertauschen.

Dieser sehr wichtige Satz ist eine unmittelbare Folge aus §. 12. und 13., und durch ein Beispiel zu erläutern.

§. 16. Zusatz.

Wenn die Glieder und Anzeiger von Verhältnissen und Proportionen nicht, wie bisher, als bloße (unbenannte) Zahlen betrachtet, sondern auf bestimmte Arten von Größen angewendet werden sollen, so ist folgendes zu bemerken.

1. Der Anzeiger ist in jedem Falle für eine unbenannte Zahl zu nehmen, da er nichts weiter anzeigt, als die Entstehungsart des Hintergliedes aus dem Vordergliede.

2. Giebt man aber dem Vorderglied eine beliebige Benennung, so erhält das Hinterglied dieselbe Benennung (III. 5.).

3. Giebt man zwei beliebigen Zahlen als Vordergliedern zweier Verhältnisse ganz beliebige ungleiche Benennungen, multiplicirt aber beide mit demselben Anzeiger, so erhält man zwei gleiche Verhältnisse, oder eine Proportion, wo die beiden ersten Glieder Größen von ganz anderer Art sind, als das dritte und vierte Glied.

4. Verwechselt man in einer solchen Proportion nach §. 15. die beiden innern Glieder, so kommen in

jedem der beiden Verhälnisse ungleichartige Größen zusammen, welches nach Nr. 2. nicht statt findet. Demohngeachtet ist die Vertauschung der innern Glieder auch in diesem Falle zulässig, wenn man entweder nur die Zahlen, nicht die Benennungen der innern Glieder vertauscht, oder, was noch einfacher ist, alle Glieder der Proportion als unbenannte Zahlen betrachtet. Denn in der That sind die Begriffe von Verhältniß und Proportion unmittelbar nur auf Zahlen anwendbar, auf andere Arten von Größen aber nur mittelbar, in so fern nämlich die Größen durch Zahlen vorgestellt werden.

Jeder dieser Sätze ist im Hefte durch ein bestimmtes Beispiel zu erläutern.

C. Veränderungen einer Proportion durch Umstellung der Glieder.

§. 17. Lehrsatz.

Vier proportionale Zahlen sind in acht Umstellungen proportional.

Anleitung zum Beweise. Die vier gegebenen proportionalen Zahlen seien a : b = c : d, so läßt sich zeigen, daß man jedes der vier Glieder in die letzte Stelle bringen kann.

In der gegebenen Proportion ist d in der letzten Stelle. Kehrt man beide Verhältnisse um (§. 10. n. 2.), so kommt c in die vierte Stelle. Vertauscht man in der gegebenen Proportion die beiden Verhältnisse (§. 10. n. 1.) so kommt b in die letzte Stelle. Wenn man endlich die Verhältnisse zugleich vertauscht und umkehrt (§. 10. n. 1. 2.), so kommt a in die letzte Stelle.

Auf diese Art hat man vier proportionale Stellungen. Da man aber in jeder derselben noch die mittlern Glieder vertauschen darf (§. 15.), so ist klar daß man acht proportionale Stellungen erhält.

Dieses ist im Hefte entweder an der obigen Buchstabenproportion, oder auch an einer bestimmten Zahlenproportion vollständig auszuführen.

D. Veränderungen durch Addition und Subtraction.

§. 18. Lehrsatz.

Bei jeder beliebigen Anzahl gleicher Verhältnisse verhält sich die Summe aller Vorderglieder, zur Summe der Hinterglieder, wie irgend eines der Vorglieder zu seinem Hintergliede.

Anleitung zum Beweise. Wenn die gegebenen Verhältnisse, wie vorausgesetzt wird, gleich sind, so haben sie alle denselben Anzeiger §. 2. Man bezeichne also diesen mit einem Buchstaben. Dann bezeichne man jedes Vorderglied mit einem eigenen Buchstaben, so lassen sich die sämmtlichen Hinterglieder nach §. 3. ausdrücken. Addirt man alsdann alle Vorderglieder und alle Hinterglieder, so fällt in die Augen (§. 3.), daß das Verhältniß der Summen denselben Anzeiger, als die einzelnen Verhältnisse habe.

Dieses ist im Hefte vollständig auszuführen.

§. 19. Zusatz.

In jeder Proportion verhält sich

1. die Summe des ersten und dritten Gliedes zur Summe des zweiten und vierten, wie das erste zum zweiten, oder wie das dritte zum vierten Glied; und

2. eben so verhält sich die Differenz des ersten und dritten Gliedes, zur Differenz des zweiten und vierten.

Man drücke eine Proportion allgemein dadurch aus, daß man den Anzeiger nebst den Vordergliedern der beiden Verhältnisse bezeichnet, und hiedurch die Hinterglieder ausdrückt, so fällt in die Augen

1. daß der erste Theil nichts als eine Anwendung von §. 18. auf zwei gleiche Verhältnisse sei, und
2. daß sich der Beweis des zweiten Theils gerade so, wie §. 18. führen lasse.

§. 20. Lehrsatz.

Mit jeder Proportion lassen sich durch Addition und Subtraction, noch folgende fünf Hauptveränderungen vornehmen.

1. Die Summe des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zum ersten Gliede, wie die Summe des dritten und vierten Gliedes zum dritten Gliede.

2. Die Summe des ersten und zweiten Gliedes zum zweiten Gliede, wie ꝛc.

3. Die Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten Gliede, wie ꝛc.

4. Die Differenz des ersten und zweiten Gliedes, zum zweiten Gliede, wie ꝛc.

5. Die Summe des ersten und zweiten Gliedes zur Differenz derselben Glieder, wie ꝛc.

Im Hefte sollen zuerst die im Buche abgebrochenen Sätze vollständig ausgesprochen werden, was sehr leicht ist, wenn man bemerkt, daß mit dem dritten, und vierten Gliede jederzeit das nämliche gemacht werden müsse, was mit dem ersten und zweiten gemacht wird.

Den Beweis führt man am füglichsten auf folgende Art. Man bezeichne die vier Glieder der gegebenen Proportion, mit vier einzelnen Buchstaben, als $a : b = c : d$, so weiß man aus §. 12., daß $ad = bc$.

Hierauf wende man einen der fünf Sätze auf diese Proportion an, und multiplicire in der so veränderten Proportion die äußern und die innern Glieder, so wird man finden, daß (unter der Voraussetzung $ad = bc$) auch diese Producte gleich sind; woraus die Richtigkeit der Proportion nach §. 13. folgt.

Bei §. 5. übersehe man die Vorzeichen nicht, welche die Glieder der Producte haben.

Anmerkung. Da jede der erwiesenen Proportionen in allen acht Umstellungen, die man nach §. 17. machen kann, richtig bleibt, so ist klar, daß vermittelst §. 17. und 19 aus einer einzigen Proportion, nicht weniger als 48 Proportionen (die Umstellungen der gegebenen mitgezählt) gemacht werden können.

Da es sehr nöthig ist sich in der Anwendung der Proportionslehre zu üben, so sollen im Übungshefte wenigstens aus einer Buchstaben- oder Zahlenproportion alle 48 Proportionen abgeleitet werden.

E. Veränderung der Glieder durch Multiplication und Division.

§. 21. Zusatz.

Wenn man in einer Proportion, entweder

1. das erste und zweite Glied, oder
2. das dritte und vierte, oder
3. das erste und dritte, oder
4. das zweite und vierte Glied, oder endlich
5. alle vier Glieder

durch eine und dieselbe Größe multiplicirt, oder dividirt, so erhält man jederzeit wieder eine richtige Proportion.

Alles dieses folgt unmittelbar aus früher erwiesenen Sätzen, welches im Hefte bestimmt nachzuweisen, und durch Beispiele zu erläutern ist.

Zu dem Ende bemerke man folgendes

Nr. 1. und 2. folgt unmittelbar aus §. 6. und 9.

Bei Nr. 3. und 4. vertausche man erst nach §. 15. die mittlern Glieder, dann wende man §. 6. an, und vertausche in der veränderten Proportion nochmals die mittleren Glieder.

Nr. 5. endlich folgt wieder unmittelbar aus §. 6. und 9.

Anmerkungen.

1. Da diese Sätze richtig bleiben, man mag, was für Zahlen man will, als Multiplicatoren oder Divisoren anwenden, so ist klar, daß aus einer einzigen Proportion eine unzählige Menge andrer gemacht werden kann. Ja, wenn man §. 15. 17. 20. und 21. zusammennimmt, so ist es möglich aus jeder Proportion, jede andere abzuleiten. Zur Übung ist daher zu empfehlen, daß man sich zwei ganz beliebige richtige Zahlenproportionen wähle, und im Übungshefte versuche, wie man vermittelst der angeführten Sätze eine aus der andern aufs kürzeste ableiten könne.

2. Wer den Satz (VI. 19. Anm.), daß jede Division in eine Multiplication verwandelt werden könne, recht sicher und deutlich gefaßt hat, der kann im Beweise die Division ganz unerwähnt lassen, und nur zu Ende in Ansehung der Division auf VI. 19. zurückweisen. Nur muß, wer von diesem Vortheil Gebrauch machen will, bereit sein, dem Lehrer auf der Stelle diese Verwandlung auf das vollständigste auseinander zu setzen.

F. Zusammensetzung der Verhältnisse und Proportionen.

§. 22. Erklärung.

Verhältnisse und Proportionen zusammensetzen heißt, die gleichvielten Glieder beider mit einander multipliciren, um daraus neue Verhältnisse und Proportionen zu bilden.

Diese Erklärung ist durch die Zusammensetzung zweier Verhältnisse und zweier Proportionen zu erläutern; wobei es hier noch unentschieden bleibt, von welcher Größe das zusammengesetzte Verhältniß, desgleichen ob die zusammengesetzte Proportion eine richtige sei.

§. 23. Lehrsatz.

Wenn zwei oder mehr beliebige Verhältnisse zusammengesetzt werden, so ist der Anzeiger des zusammengesetzten Verhältnisses das Product von den Anzeigern der gegebenen Verhältnisse.

Anleitung zum Beweise. Man bezeichne zwei oder mehrere Verhältnisse nach §. 3. durch das Vorderglied, und den Anzeiger, dann setze man die Verhältnisse in dem Sinne von §. 22. zusammen, und untersuche den Anzeiger des zusammengesetzten Verhältnisses nach §. 3., so fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

§. 24. Zusatz.

Wenn man zwei oder mehr beliebige Proportionen znsammensetzt, so bilden die vier Producte wieder eine richtige Proportion, deren Anzeiger das Product von den Anzeigern der gegebenen Proportionen ist.

Der Satz folgt so unmittelbar aus dem vorhergehenden in Verbindung mit §. 9., daß eine nähere Anleitung zum Beweise überflüssig sein würde.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn in einer ganz beliebigen Folge von Größen das Verhältniß jeder zwei auf einander folgenden durch beliebige Zahlen gegeben ist, so ist das Verhältniß der beiden äußersten zusammengesetzt aus den Verhältnissen jeder zwei auf einander folgenden.

Anfang des Beweises. Die gegebene Folge von Größen sei A, B, C, D, E. Es sei ferner gegeben das Verhältniß A : B = m : n; B : C = p : q; C : D = r : s; D : E = v : w, so ist zu beweisen daß A : E = mprv : nqsw. Man setze alle gegebenen Proportionen unter einander, wie folgt

$$\begin{aligned} A : B &= m : n \\ B : C &= p : q \\ C : D &= r : s \\ D : E &= v : w. \end{aligned}$$

Dann setze man diese Proportionen nach §. 22. zusammen, so wird sich die Richtigkeit der zu erweisenden Proportion ergeben, wenn man die beiden Vorderglieder durch die Factoren, die sie gemein haben, nach §. 21. n. 1. dividirt.

§. 26. Zusatz.

Wenn sich unter den Zahlen m, p, r, v eine oder die andere findet, welche sich gegen eine oder die andere der Zahlen n, q, s, w heben läßt, so kann dieses vor der Zusammensetzung geschehen, denn man sieht leicht ein, daß dadurch der Werth des zusammengesetzten Verhältnisses A : E oder mprv : nqsw nicht geändert wird.

Da die Zusammensetzung der Verhältnisse häufig vorkommt, so empfiehlt der Verfasser folgende Arbeit für das Übungsheft.

Man zeichne einige kurze Linien von übrigens ganz beliebig unregelmäßiger Folge nahe neben einander in senkrechter oder wagrechter Lage, und bezeichne sie mit den Buchstaben A, B, C ꝛc. Darauf vergleiche man A und B nach dem Augenmaaße, und suche ihr Verhältniß so genau wie möglich durch zwei ganze Zahlen m und n auszudrücken. Eben so verfahre man mit B und C, und überhaupt mit jeden zwei aufeinander folgenden Linien. Dann setze man die so erhaltenen Verhältnisse oder Proportionen in der Gestalt auf, wie es §. 25. geschehen ist, und setze sie mit Rücksicht auf §. 26. zusammen. Hat man so ein Paar Zahlen gefunden, die sich wie die erste und letzte Linie verhalten sollen, so vergleiche man diese Linien selbst wieder nach dem Augenmaaße, und sehe zu, ob das gefundene Verhältniß wenigstens einigermaßen mit der Rechnung stimmt. Eine genaue Übereinstimmung ist begreiflich nicht zu erwarten; aber in der mehrern oder mindern Übereinstimmung hat man ein Mittel, die Genauigkeit seines Augenmaaßes zu prüfen.

G. Von der umgekehrten Proportionalität.

§. 27. Erklärung.

Wenn zwei Größen C und D mit zwei andern A und B in dieser Ordnung proportional sind, so daß A : B = C : D, so sagt man die Größen C und D seien den Größen A und B *gerade proportional.*

Muß man aber das Verhältniß C : D umkehren (§. 2.), um es dem Verhältniß A : B gleich zu machen, so daß A : B = D : C, so sagt man, daß die Größen C und D gegen A und B *verkehrt* proportional sind.

Verkehrte Verhältnisse kommen selbst in der praktischen Rechenkunst häufig vor, und es beruhet darauf der Begriff der *verkehrten Regel de tri.* Sie entstehen, wenn zwei Arten von Größen in solcher Verbindung mit einander stehen, daß, wenn man die eine vergrößert, die andere *in demselben Verhältniß* kleiner wird: d. h. wenn man die eine zweimal, dreimal ꝛc. *größer* macht, die andere eben so vielmal *kleiner* wird. Hat man daher nur deutliche Begriffe von den Größen selbst und ihrem Zusammenhange, so kann man es leicht beurtheilen, ob sie *gerade* oder *verkehrt* proportional sind.

Zur Erläuterung mag folgendes Beispiel dienen. Wenn man ein Kapital verdoppelt, so verdoppelt sich auch bei ungeänderten Procenten der einjährige Zins; also stehen Kapital und Zinsen bei übrigens gleichen Umständen in geradem Verhältniß. Verdoppelt man aber wieder ein Kapital, so trägt es bei ungeänderten Procenten, schon in einem halben Jahre so viel Zinsen, als vorher in einem ganzen; also steht Kapital und Zeit, bei übrigens gleichen Umständen in verkehrtem Verhältniß.

In dem Hefte mag man dieses Beispiel, nur mit Hinzufügung bestimmter Zahlen für Kapital, Zins und Zeit, zur Erläuterung brauchen. Noch besser aber ist es, wenn durch Nachsinnen andere Arten von Größen ausfindig gemacht werden, wobei gerade und verkehrte Verhältnisse statt finden.

§. 28. Lehrsatz.

Wenn die Größen C und D, mit A und B verkehrt proportionirt sind, so sind ihre umgekehrten Werthe (VI. 16.) mit A und B gerade proportionirt.

Oder in Zeichen: Wenn $A : B = D : C$, so ist $A : B = \frac{1}{C} : \frac{1}{D}$.

Zum Beweise ist nichts weiter nöthig, als daß man das zweite Verhältniß der ersten Proportion durch das Product CD nach §. 6. dividirt.

Anmerkung. Man kann also jedes verkehrte Verhältniß in einem jeden Fall in ein gerades verwandeln. So wird z. B. in der Naturlehre gezeigt, daß die erleuchtende Kraft einer Lichtflamme mit der Entfernung abnehme, und zwar bestimmt in verkehrtem Verhältniß mit den Quadratzahlen der Entfernung. Denke ich mir also zwei Entfernungen, die sich wie $2:3$ verhalten (z. B. 8 Fuß und 12 Fuß), so verhält sich der Lichtstrom in diesen Entfernungen verkehrt wie $4:9$, also gerade wie $\frac{1}{4} : \frac{1}{9}$.

§. 29. Zusatz.

Bei den Anwendungen der Mathematik auf wirkliche Gegenstände, finden die Begriffe von geraden und verkehrten Verhältnissen sehr häufig Anwendung. Seltener in der reinen Mathematik. Um so sorgfältiger sind die Fälle zu bemerken, wo sie sich anwenden lassen. Dahin gehören folgende.

1. Ein Dividendus und Quotient, stehen bei ungeändertem Divisor in geradem Verhältniß. Der Divisor und Quotient, stehen bei ungeändertem Dividendus in verkehrtem Verhältniß.

2. Die Werthe zweier Brüche stehen bei gleichen Nennern in geradem Verhältniß der Zähler; bei gleichen Zählern hingegen in verkehrtem Verhältniß der Nenner.

3. Wenn zwei Brüche ungleiche Zähler und Nenner haben, so ist das Verhältniß ihrer Werthe zusammengesetzt aus dem geraden der Zähler, und dem verkehrten der Nenner.

Anleitung zum Beweise dieser drei Sätze.

1. Der erste Satz ergiebt sich aus IV. 8. verglichen mit §. 27. des gegenwärtigen Abschnitts.
2. Der zweite Satz ergiebt sich aus dem ersten in Verbindung mit IV. 14.
3. Der dritte Satz bedarf einer besondern Anleitung. Man wähle zwei beliebige Brüche in Zahlen oder Buchstaben, z. B. $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$, und drücke das zu untersuchende Verhältniß ihrer Werthe durch $x:y$ aus. Hierauf bilde man einen dritten Bruch, so daß er mit dem ersten einerlei Nenner, und mit dem zweiten einerlei Zähler habe, also $\frac{c}{b}$. Den Werth dieses Bruches nenne man z. Nach dieser Vor-

bereitung lassen sich die Verhältnisse $x:z$ und $z:y$ beide nach Nr. 2. ausdrücken. Setzt man nun diese Verhältnisse nach §. 22. zusammen, so ergiebt sich daraus das Verhältniß $x:y$ und die Richtigkeit des Satzes.

Dieses alles ist im Hefte auszuführen.

Anmerkung. Auch in der Geometrie findet sich Veranlassung zur Anwendung dieser Begriffe.

Wenn zwei Dreiecke oder Parallelogramme gleich groß sind, so verhalten sich ihre Höhen verkehrt wie die Grundlinien, u. dgl. m.

H. Von den Vorzeichen bei Verhältnissen und Proportionen.

§. 30. Anmerkung.

Wir haben in diesem ganzen Abschnitte (wie schon §. 1. Anm. 4. erinnert worden) die Glieder und Anzeiger der Verhältnisse und Proportionen als bloß absolute Zahlen betrachtet; aber es ist noch zu überlegen ob und auf welche Art man auch den Begriff des Gegensatzes auf diese Größen anwenden, also ihnen Vorzeichen geben dürfte.

Es ist leicht einzusehen, daß dieses jederzeit unbedenklich geschehen dürfe. Denn aus allem bisher Vorgetragenen, besonders aus §. 16., geht hervor, daß man die Glieder und Anzeiger der Verhältnisse und Proportionen jederzeit als bloße (unbenannte) Zahlen betrachten könne, ja im Grunde betrachten müsse. Aber bloße Zahlen sind nach VII. 1 — 6. die eigentlichste Art von Größen, wobei der Begriff des Gegensatzes Anwendung findet.

Da übrigens in der Buchstabenrechnung (VII. und VIII.) die Regeln der Vorzeichen für alle Rechnungsarten erklärt sind, auch gezeigt worden ist, daß die Begriffe der Rechnungsarten in der allgemeinen Rechenkunst keine andern sind, als die in der Zahlenrechnung, so folgt schon hieraus, daß man alle im Vorhergehenden mit absoluten Zahlen vorgenommenen Rechnungen, auch werde machen können, wenn man den jedesmal gegebenen Größen Vorzeichen giebt.

Die beiden ersten Absätze dieses Paragraphen bedürfen keiner schriftlichen Erläuterungen. Um aber den Sinn des letzten Absatzes einzusehen, wähle man nach §. 3. von den drei Zahlen, die bei einem Verhältniß vorkommen, zweie als gegeben, und versehe sie mit Vorzeichen, so fällt in die Augen, daß die dritte Zahl nicht nur ihrem absoluten Werthe nach, sondern auch den Vorzeichen nach völlig bestimmt sei.

Eben so wähle man nach §. 14. drei beliebige Zahlen als die drei ersten Glieder einer Proportion, und versehe sie mit beliebigen Vorzeichen, so ist klar, daß man auch auf diese drei Zahlen die Auflösung des vierzehnten Paragraphen anwenden könne, und daß dadurch auch das vierte Glied sein ganz bestimmtes Vorzeichen erhalte.

Es ist daher nur noch im folgenden Paragraphen zu zeigen, wie sich der Gebrauch der Vorzeichen bei Proportionen auf ein Paar ganz einfache Regeln zurückführen lasse.

§. 31. Lehrsatz.

Die richtige Anordnung der Vorzeichen hängt bei einer Proportion von folgenden zwei einfachen Regeln ab.

1. Wenn die Glieder des vorangehenden Verhältnisses gleiche Vorzeichen haben, es sei $+\,+$, oder $-\,-$, so müssen auch die Glieder des nachfolgenden gleiche Vorzeichen haben, es mögen nun dieselben wie

im vorangehenden Verhältniß, oder die entgegengesetzten sein.

2. Haben aber die Glieder des ersten Verhältnisses entgegengesetzte Vorzeichen, + —, oder — +, so müssen auch die des zweiten entgegengesetzte Vorzeichen haben, es sei nun in derselben Ordnung, als in dem vorangehenden, oder in entgegengesetzter.

Anleitung zum Beweise. Da nach §. 14. durch die drei ersten Glieder das vierte völlig bestimmt ist, so ist es nicht schwer zu übersehen, daß acht mögliche Fälle zu betrachten sind. Denn wenn

1. das erste Verhältniß gleiche Vorzeichen hat, so können diese + +, oder — — sein. In beiden Fällen kann aber das dritte Glied + oder — haben; welches also vier Fälle giebt.
2. Sind die Zeichen des ersten Verhältnisses entgegengesetzt, so kann es + — oder — + sein. In jedem dieser Fälle kann aber wieder das dritte Glied entweder + oder — haben, welches wieder vier Fälle giebt.

Man wähle daher für das Heft eine beliebige Zahlen-Proportion, und ordne die Vorzeichen der drei ersten Glieder nach den eben erörterten acht Fällen. Dann berechne man bei jedem nach §. 14. das vierte Glied mit Rücksicht auf die Vorzeichen, so wird sich die Richtigkeit der beiden obigen Regeln in jedem einzelnen Fall bestätigen.

Elfter Abschnitt.

Von Quadratzahlen, und Quadratwurzeln.

A. Erhebung aller Arten von Zahlen ins Quadrat.

§. 1. Erklärung.

Quadratzahl, Quadratwurzel, und Bezeichnung beider.

Diese Erklärungen sind schon oben VIII. 2. gegeben worden, und hier im Hefte nur ausdrücklich zu wiederholen.

§. 2. Zusatz.

Vermöge der Erklärung kann nicht nur jede Zahl sondern auch jede Formel durch Multiplication mit sich selbst ins Quadrat erhoben werden.

Wie ganze Zahlen ohne oder mit Decimalbrüchen, oder bloße Decimalbrüche ins Quadrat erhoben werden können, bedarf keiner besondern Erörterung. Nur bemerken wir vorläufig, daß in diesem Abschnitt eine ganz eigenthümliche Art, vielziffrige Zahlen zu quadriren gelehrt werden wird. Wie ächte und unächte Brüche zu quadriren sind, wird unten §. 10. gezeigt.

Hier sind also nur einige eingliedrige und zweigliedrige Formeln ins Quadrat zu erheben. Als Muster setzen wir folgende hinzu: a) eingliedrige $+3ab$; $-\frac{2}{3}a$, $+5a^2b$; $-ab^2c^3$; u. s. f. b) zweigliedrige $a+b$; $a-b$; $2a-\frac{1}{2}b$; $3aa-1$; u. dgl. m.

§. 3. Lehrsatz.

Das Quadrat einer vielgliedrigen (polynomischen) Formel läßt sich durch folgende Formel vorstellen.

$$
\begin{aligned}
(A+B+C+D+E+\text{ꝛc.})^2 = \quad & +A^2 \\
& +2AB+B^2 \\
& +2(A+B)C+C^2 \\
& +2(A+B+C)D+D^2 \\
& +2(A+B+C+D)E+E^2 \\
& +\ \text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

Wenn also eine vielgliedrige Größe ins Quadrat erhoben werden soll, so besteht dasselbe 1) aus dem Quadrat des ersten Stücks; 2) aus dem doppelten Product des ersten und zweiten Stücks nebst dem Quadrat des zweiten, u. s. f.

Dieser wörtliche Ausdruck des Satzes muß zuerst im Hefte vollständig niedergeschrieben werden, damit jedem der Sinn der Formel deutlich sei. Auch muß man suchen die Zusammensetzung eines Quadrats aus mehrern Stücken ins Gedächtniß zu fassen, welches wegen der Regelmäßigkeit, in welcher die Glieder auf einander folgen, nicht schwer ist.

Anleitung zum Beweise. Man erhebe ins Quadrat

1. $A + B$, nach VIII. 20. Es wird sich zeigen, daß das gefundene mit den zwei ersten Zeilen der zu erweisenden Formel übereinstimmt.
2. $(A + B) + C$, welches gleichfalls nach VIII. 20. geschieht, wenn man $(A + B)$ als ein Stück betrachtet. Das erste Glied dieses Quadrats ist $(A + B)^2$ dafür setze man das bei Nr. 1. gefundene. Was man so findet, stimmt mit den drei ersten Zeilen der zu erweisenden Formel.
3. $(A + B + C) + D$ wieder nach VIII. 20., indem man $(A + B + C)$ als ein Glied betrachtet. Das erste Glied dieses Quadrats ist $(A + B + C)^2$. Setzt man dafür das bei Nr. 2. gefundene, so erhält man die vier ersten Zeilen der zu erweisenden Formel.

Man sieht leicht wie diese Schlüsse weiter fortzusetzen sind, und daß man sie auf so viele Glieder, als man will, wird ausdehnen können.

§. 4. Zusatz.

Die Anzahl der Glieder, aus welchen das so entwickelte Quadrat besteht, ist um 1 kleiner als die doppelte Anzahl der Wurzeltheile.

Oder in Zeichen: wenn die Wurzel aus n Gliedern besteht, so enthält das Quadrat $2n - 1$ Glieder.

Man darf nur das im vorigen Paragraphen entwickelte polynomische Quadrat aufmerksam betrachten, um sich von der Richtigkeit zu überzeugen. Dieses ist im Hefte deutlich zu machen.

§. 5. Lehrsatz.

Wenn man sich unter den Theilen der Wurzel einzelne Ziffern vorstellt, wie sie in einer Zahl der Reihe nach auf einander folgen, und man nimmt jede derselben nur nach ihrem einfachen Namenwerthe, und bildet dann nach §. 3. das Quadrat, so läßt sich erweisen,

1. daß der erste Posten des Quadrats, als eine einzige Zahl gelesen, Einheiten von einer noch einmal so hohen Ordnung enthalte, als die höhste Ziffer der Wurzel,

2. daß jeder der übrigen Posten, als eine einzige Zahl gelesen, Einheiten von der nähst niedrigern Ordnung, als der nähst vorhergehenden Posten, enthalte.

Beweis. Wenn wir die im dritten Paragraphen gebrauchten Zeichen beibehalten, so sei z. B. A eine Ziffer der elften, B der zehnten, C der neunten höheren Ordnung u. s. f., so ist zu beweisen,

1. daß der höhste Posten des Quadrats, nämlich A^2 von der zwei und zwanzigsten Ordnung sei. Dieses ergiebt sich aber unmittelbar aus III. 16. 17.
2. daß jeder folgende Posten um eine Ordnung niedriger sei als der vorhergehende. Auch dieses ergiebt sich leicht aus III. 16. 17. Denn wenn A von der elften, B aber von der zehnten Ordnung ist, so ist AB und 2AB, als eine Zahl gelesen, von der ein und zwanzigsten Ordnung. Ferner ist B^2 von der zwanzigsten Ordnung, da B von der zehnten ist. In dem folgenden Gliede $2(A+B)C$ ist $A+B$ als eine Zahl gelesen, von derselben Ordnung als B, also von der zehnten (I. 14. n. 2.), C aber von der neunten, also das Product $2(A+B)C$ von der neunzehnten Ordnung, u. s. f. Man übersieht leicht, wie diese Schlüsse bis zum letzten Posten des Quadrats fortgesetzt werden können.

Dieser Beweis ist im Hefte vollständig auszuführen; aber es müssen den Ziffern der Wurzeln andere Ordnungen als hier beigelegt, auch wohl eine andere Anzahl von Wurzeltheilen (z. B. 4 oder 6) gewählt werden. Wer es vorzüglich gut machen will, versuche den Beweis in unbestimmten Zeichen zu führen, indem er annimmt A sei eine Ziffer der nten, B der (n — 1)ten, C der (n — 2)ten, D der (n — 3)ten Ordnung ꝛc. Denn ist es nicht schwer zu beweisen, daß der erste Posten des Quadrats von der 2nten, der zweite von der 2n — 1ten, der dritte von der 2n — 2ten Ordnung u. s. f. sei.

§. 6. Zusatz.

Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich eine Methode, das Quadrat einer mehrziffrigen Zahl, nicht durch Multiplication der Wurzel mit sich selbst, sondern durch eine ganz eigenthümliche Rechnung zu machen.

Es sei z. B. das Quadrat von 38568 zu machen, so macht man zuerst das Quadrat der höhsten Ziffer (3) also 9, welches der erste Posten A des Quadrats ist. Hierauf das doppelte Product der ersten und zweiten Ziffer 2 . 3 . 8 = 48, welches der zweite Posten B, und um eine Stelle gegen die rechte Seite einzurücken ist. Dann folgt das Quadrat von 8, also 64 (C). Weiter das doppelte Product der beiden ersten Ziffern als eine Zahl gelesen, mit der dritten, also 2 . 38 . 5 = 380 (D); dann das Quadrat von 5, also 25 (E), u. s. f. Jeder Posten ist um eine Stelle weiter gegen die rechte Seite einzurücken, und am Ende sind alle Posten zu addiren.

	38568
A	9
B	48
C	.64
D	.380
E	...25
F	..4620
G	36
H	...61696
I	64
	1487490624

Eine ähnliche Anwendung des Satzes ist in dem Haupthefte zu machen, nur ist dazu eine andere selbstgewählte Wurzel, die allenfalls nur vierziffrig sein kann, anzunehmen, die Rechnung aber ist bis zum letzten Posten zu beschreiben.

Im Übungshefte aber sind mehrere auch größere Beispiele zu rechnen, um Fertigkeit in der Rechnung zu erlangen. Denn obgleich diese Art zu rechnen in den meisten Fällen nicht kürzer ist, als die Multiplication der Wurzel mit sich selbst, so ist sie doch in wissenschaftlicher Rücksicht sehr wichtig. Besonders ist es nicht möglich, über die Regeln der Wurzelausziehung recht ins Klare zu kommen, wenn man nicht diese Erhebung ins Quadrat vollkommen kennt.

Anmerkung. Die hier erklärte Rechnung ist das erste Beispiel einer Potenzirung, als einer eigenen einfachen Rechnungsart.

§. 7. Zusatz.

Enthält die Wurzel Ganze und Decimalbrüche, so ergiebt sich während der Rechnung selbst die Stelle des Komma. Es muß nämlich hinter denjenigen Posten gesetzt werden, welcher das Quadrat der Einer enthält.

Wäre z. B. das Quadrat von 83,07 zu suchen so rechnet man wie mit ganzen Zahlen, aber nach dem Posten 9, der das Quadrat von 3 Einern ist, muß das Komma gesetzt werden. Doch kann man auch während der Rechnung das Komma ganz aus der Acht lassen, und erst nach Endigung der Rechnung im Quadrat doppelt so viele Brüche abschneiden, als die Wurzel enthält, wovon der Grund in III. 17. liegt. (Daß hier der vierte und fünfte Posten 0 sein muß, ist leicht einzusehen. Der vierte ist es, weil das doppelte Product von 0 und 83 nichts als 0 sein kann, der fünfte ist es, weil das Quadrat von 0, nichts als 0 sein kann.)

```
83,07
------
64
 48
  9,
   0
    0
 11,620
     49
----------
6900,6249
```

Im Hauptheft ist eine ähnliche Erläuterung an einem selbstgewählten Beispiel zu geben.

Im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen.

Anmerkung. Diese Rechnung setzt voraus, daß man das Quadrat jeder einziffrigen Zahl im Gedächtniß habe, welches aber schon aus dem Einmaleins bekannt ist.

§. 8. Zusatz.

Besteht die Wurzel aus bloßen zehntheiligen Brüchen, so ergiebt sich aus III. 16. sogleich, von welcher Ordnung das Quadrat der höhsten Wurzelziffer sei. Und hieraus ergiebt sich sogleich, wie viele Nullen man diesem ersten Posten vorsetzen müsse, um ihm seinen wahren Werth zu geben. Die Rechnung selbst ist völlig wie bei ganzen Zahlen.

$$\begin{array}{r} 0{,}047 \\ \hline 0{,}00\,16 \\ 56 \\ 49 \\ \hline 0{,}00\,2209 \end{array}$$

Es sei das Quadrat von 0,047 zu machen, so ist die erste geltende Wurzelziffer 4 von der zweiten, also ihr Quadrat 16 von der vierten Bruchordnung: also 0,0016. Man kann aber auch hier die Stellung des Komma bis zu Ende der Rechnung versparen, und gerade so rechnen, als ob man das Quadrat der ganzen Zahl 47 machen sollte. Dann schneidet man im Quadrat doppelt so viele Bruchziffern ab, als in der Wurzel sind.

Auch dieser Zusatz ist im Hauptheſte durch ein selbstgewähltes Beispiel auf ähnliche Art deutlich zu machen.

Im Übungsheft aber sind mehrere Beispiele dieser Art durchzurechnen.

§. 9. Lehrsatz.

Jedes Quadrat einer Zahl, die aus mehren geltenden Ziffern besteht, hat entweder doppelt so viele geltende Ziffern als die Wurzel, oder doppelt so viele weniger einer.

Oder in Zeichen: wenn die Wurzel n geltende Ziffern hat, so hat das Quadrat entweder 2n oder 2n — 1 geltende Ziffern.

Damit keine Dunkelheit über den Wortsinn dieses Satzes bleibe, ist es nöthig zuerst sich an die Erklärung des Ausdrucks **geltende Ziffern** I. 15. zu erinnern.

Beweis. Da wir in den vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, daß die Stellung des Komma auf die Rechnung selbst nicht den geringsten Einfluß habe, so ist es völlig hinreichend, den Beweis bloß auf ganze Zahlen zu beschränken.

Gesetzt es sollte das Quadrat einer siebenziffrigen Zahl gemacht werden, so ist zu beweisen, daß es entweder 13 oder 14 Ziffern haben müsse. Dieses läßt sich zwar ohne Schwierigkeit aus der im sechsten Paragraphen erklärten Rechnung ableiten; noch kürzer und einfacher wird aber der Beweis durch folgende Betrachtung.

Die kleinste siebenziffrige Zahl ist 1 mit 6 Nullen, also ihr Quadrat 1 mit 12 Nullen oder die kleinste dreizehnziffrige Zahl. Die kleinste achtziffrige aber ist 1 mit 7 Nullen, also ihr Quadrat 1 mit 14 Nullen oder die kleinste funfzehnziffrige Zahl. Jede andere siebenziffrige Zahl ist größer als 1 mit 6 Nullen, aber kleiner als 1 mit 7 Nullen. Folglich muß ihr Quadrat größer sein als die kleinste dreizehnziffrige Zahl, aber kleiner als die kleinste funfzehnziffrige, folglich muß es entweder 13 oder 14 Ziffern haben.

Dieser Beweis ist im Hefte, auf eine andere Anzahl von Wurzelziffern anzuwenden. Auch würde es nicht zu schwierig sein, wenn Jemand versuchen wollte den Beweis in allgemeinen Zeichen zu führen. Zu dem Ende müßte zuerst gefragt werden, aus was für, und aus wie vielen Ziffern die kleinste $n$ziffrige Zahl bestehe; desgleichen aus welchen und wie vielen Ziffern ihre Quadrate bestehen; dann würde sich finden, daß das Quadrat jeder andern $n$ziffrigen Zahl, entweder aus $2n-1$, oder aus $2n$ Ziffern bestehen müsse.

§. 10. Zusatz.

Wie ein gemeiner ächter oder unächter Bruch, oder eine gemischte Zahl ins Quadrat zu erheben sei, ergiebt sich unmittelbar aus §. 2. verglichen mit VI. 13.

Im Hefte ist wörtlich auszudrücken, und auf Beispiele anzuwenden, 1) wie ein Bruch, er sei ächt oder unächt, ins

Quadrat erhoben werde, 2) wie man zu rechnen habe, wenn eine gemischte Zahl ins Quadrat erhoben werden soll.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn sich der Zähler und Nenner eines ächten oder unächten Bruchs nicht heben läßt, also in den kleinsten Zahlen geschrieben ist, so läßt sich auch der Zähler und Nenner seines Quadrats nicht heben, und ist in den kleinsten Zahlen ausgedrückt.

Beweis. Der Bruch sei $\frac{a}{b}$, so ist sein Quadrat $\frac{aa}{bb}$. Läßt sich nun $\frac{a}{b}$ nicht heben, so sind a und b entweder absolute oder relative Primzahlen.

Sie seien zuerst absolute Primzahlen, so folgt aus V. 14., daß aa weder durch b noch durch bb theilbar sei.

Sie seien relative Primzahlen, so zerfälle man sie in ihre einfachen Factoren, und es sei etwa $a = \alpha\beta\gamma$, und $b = \delta\varepsilon$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}, \text{ und } \frac{aa}{bb} = \frac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{\delta\delta\varepsilon\varepsilon}.$$

Dann ist wieder aus V. 14. klar, daß der Zähler des Quadrats mit dem Nenner keinen gemeinsamen Divisor habe, also in den kleinsten Zahlen ausgedrückt sei.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen; nur sind statt der unbestimmten Zeichen bestimmte Zahlen zu wählen. Es ist klar, daß nun zwei Brüche gebraucht werden müssen, einer wo Zähler und Nenner absolute, und ein anderer, wo sie relative Primzahlen sind.

§. 12. Lehrsatz.

Wenn eine Wurzel größer als 1 ist, so ist das Quadrat größer als die Wurzel: nur das Quadrat von 1 ist der Wurzel gleich.

Je nachdem aber die Wurzel eine ganze oder gemischte Zahl ist, wird auch das Quadrat eine eben solche Zahl sein.

Anleitung zum Beweise.

1. Der erste Theil des Satzes ergiebt sich unmittelbar aus III. 3. wenn man annimmt, daß das Quadrat durch Multiplication gemacht werde.
2. Bei dem zweiten Theil des Satzes ist es wieder aus III. 3. unmittelbar klar, daß das Quadrat einer ganzen Zahl selbst eine ganze Zahl sein müsse.
3. Ist aber die Wurzel eine gemischte Zahl z. B.

$$a + \frac{b}{c},$$

und der Bruch $\frac{b}{c}$ in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, so richte man ihn (nach VI. 1. d.) ein. Dieses giebt

$$\frac{ac + b}{c}.$$

Betrachtet man diesen unächten Bruch (nach IV. 14.) als einen Quotienten, so sieht man leicht ein, daß $(ac + b)$ und c keinen gemeinsamen Divisor haben können. Denn hätten sie einen solchen so müßte nach V. 6., auch b und c diesen gemeinsamen Divisor haben, welches gegen die Voraussetzung ist. Es ist also der Bruch

$$\frac{ac + b}{c},$$

und folglich nach §. 11. auch sein Quadrat in den kleinsten Zahlen ausgedrückt. Dividirt man nun in dem Quadrat den Zähler durch den Nenner, so kann die Rechnung nicht aufgehen, und das Quadrat muß daher nothwendig eine gemischte Zahl sein.

Im Hefte ist Nr. 1. und 2. vollständiger auszuführen. Bei Nr. 3. aber ist statt der unbestimmten Zeichen ein bestimmtes Zahlenbeispiel anzunehmen.

Anmerkung. Sollte Jemandem die Anwendung von V. 6. bei Nr. 3. nicht deutlich sein, so erwäge man Folgendes. Nach dem Vorhergehenden hat man

$$\frac{ac + b}{c} = a + \frac{b}{c}.$$

Hier ist (ac + b) ein Dividendus, c ein Divisor, und b ein Rest der bei der Division bleibt.

§. 13. Lehrsatz.

Wenn eine Wurzel kleiner als 1 ist, so ist das Quadrat kleiner als die Wurzel, also in jedem Fall ein ächter Bruch.

Der Beweis ergiebt sich, wie bei Nr. 1. des vorigen Paragraphen unmittelbar aus III. 3. und ist im Hefte auszuführen.

Zusatz. Aus §. 12. und 13. folgt umgekehrt, daß, so wie eine Zahl größer oder kleiner als 1 ist, auch ihre Wurzel größer oder kleiner als 1 sei, aber in beiden Fällen dem Werthe von 1 näher liege als das Quadrat.

B. Von vollkommenen und unvollkommenen Quadrat-Zahlen.

§ 14. Erklärung.

Eine ganze Zahl nennt man eine vollkommene Quadratzahl, wenn die Wurzel derselben eine ganze Zahl ist.

Ein ächter oder unächter Bruch ist ein vollkommenes Quadrat, wenn in seiner kleinsten Benennung sowohl Zähler als Nenner vollkommene ganze Quadratzahlen sind.

Jede andere ganze oder gebrochene Zahl heißt eine unvollkommene Quadratzahl.

Jeder dieser Begriffe ist im Hefte durch ein Beispiel zu erläutern.

Anmerkung. Eine Tafel aller vollkommenen ganzen Quadratzahlen würde man also erhalten, wenn man von allen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 0, 1, 2, 3 rc. die Quadrate berechnet, und diese Arbeit, so weit man gut findet, fortsetzt.

Es ist nützlich, dem Hefte eine solche kleine Tafel beizufügen, etwa von $0^2 = 0$ bis $20^2 = 400$.

§. 15. Zusatz.

Wenn man eine vorliegende ganze Zahl nach V. 32. in ihre einfachen Factoren zerlegt, so kann man nicht nur entscheiden, ob die Zahl eine vollkommene Quadratzahl sei, sondern man kann auch, wenn sie eine solche ist, ihre Wurzel sehr leicht angeben.

Wenn eine ganze Zahl die einfachen Factoren α, α, β, γ rc. enthält, so muß ihr Quadrat die einfachen Factoren $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ rc. enthalten. In einer vollkommnen Quadratzahl müssen also die sämtlichen einfachen Factoren, jeder paarweise, enthalten sein. Kommt also irgend ein Factor nur einzeln, oder in einer ungeraden Zahl vor, so ist die Zahl eine unvollkommene Quadratzahl. Sind aber alle Factoren paarweise da, so kann man sie leicht in zwei gleiche Producte theilen, von denen jedes die Quadratwurzel der Zahl ist.

Dieses ist im Hefte an einem bestimmten Beispiel zu erläutern. Man wähle zuerst eine zusammengesetzte Zahl zur Wurzelgröße, berechne auf einem Nebenblatt ihr Quadrat entweder durch Multiplication, oder besser nach §. 6. Die so gefundene Zahl ist nun im Hefte als Beispiel zu brauchen. Sie muß also regelmäßig nach V. 32. in ihre einfachen Factoren zerlegt, und dann gezeigt werden, daß sie eine vollkommene Quadratzahl, und welches ihre Wurzel sei.

§. 16. Zusatz.

Aus §. 14. und 15. ergiebt sich, wie es möglich sei einen gemeinen ächten oder unächten Bruch, desgleichen einen zehntheiligen Bruch, oder eine aus Ganzen und zehntheiligen Brüchen bestehende Zahl zu prüfen, ob sie eine vollkommene Quadratzahl sei.

Dieses ist im Hefte zu erläutern 1) durch ein Beispiel von einem gemeinen ächten Bruch, 2) durch einen unächten Bruch oder gemischte Zahl, 3) durch einen Decimalbruch, 4) durch eine Zahl, die aus Ganzen und zehntheiligen Brüchen besteht.

Anmerkungen.

1. Wenn man einen zehntheiligen Bruch ins Quadrat erhebt, so enthält das Quadrat in jedem Falle doppelt so viele Bruchziffern als die Wurzel. Hat man daher eine ungerade Anzahl von Bruchziffern, so ist die Zahl in jedem Fall eine unvollkommene Quadratzahl, wenn gleich die ganze Zahl, welche nach Weglöschung des Komma bleibt, eine vollkommene Quadratzahl wäre.

2. Man bemerke hier noch ein Paar Kennzeichen, durch welche man zwar nicht in allen, aber doch in sehr vielen Fällen entscheiden kann, daß eine vorliegende Zahl eine unvollkommene Quadratzahl sei.

a. Jede ganze Zahl, die sich auf 2, 3, 7 oder 8 endet, ist eine unvollkommene Quadratzahl. Denn wenn man die Quadratzahlen aller einziffrigen Zahlen von 0 bis 9 durchgeht, so findet sich, daß sich keine auf die genannten vier Zahlen endet. Daher kann auch die letzte Ziffer einer vollkommenen ganzen Quadratzahl nie eine dieser vier Ziffern sein.

b. Ferner ist jede ganze Zahl eine unvollkommene Quadratzahl, wenn sie am Ende eine ungerade Anzahl von Nullen hat. Denn man begreift leicht, daß eine ganze Zahl, die am Ende Nullen hat, mit sich selbst multiplicirt, im Quadrat jederzeit eine gerade Anzahl von Nullen erhalte.

c. Endlich ist auch jede ganze Zahl eine unvollkommene Quadratzahl, wenn sie zwar am Ende eine gerade Anzahl von Nullen hat, die niedrigste geltende Ziffer aber eine der vier oben genannten ist. Denn man kann jede solche Zahl in zwei Factoren zerfällen, von denen der eine, aus 1 mit einer geraden Anzahl von Nullen besteht, also eine vollkommene Quadratzahl ist. Wenn nun der andere Factor, der aus den übrigen geltenden Ziffern besteht, nach Nr. 1. eine unvollkommene Quadratzahl ist, so ist auch die ganze Zahl eine solche.

d. Wenn eine Zahl aus Ganzen und zehntheiligen Brüchen besteht, und die Anzahl der Bruchziffern ist ungerade, so ist die Zahl eine unvollkommene Quadratzahl. Der Grund ist ein ähnlicher als Nr. 2. Denn schreibt man einen solchen Bruch in der Gestalt eines gemeinen Bruchs, so ist der Nenner nach Nr. b. eine unvollkommene Quadratzahl. Hängt man aber dem Zähler und Nenner eine Null an, so wird zwar der Nenner eine vollkommene, der Zähler aber in jedem Fall, nach Nr. 2. eine unvollkommene Quadratzahl.

e. Hat endlich eine solche Zahl zwar eine gerade Anzahl von Bruchziffern, aber die niedrigste Ziffer ist wieder 2, 3, 7 oder 8, so ist die Zahl eine unvollständige Quadratzahl, wie man leicht einsieht, wenn man die Zahl in Gestalt eines gemeinen Bruches schreibt, und mit Nr. a. vergleicht.

C. Ausziehung der Quadratwurzel aus vollkommenen Quadratzahlen.

§. 17. Aufgabe.

Aus einer vielziffrigen Zahl, die eine vollkommene ganze Quadratzahl ist, die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Es sei z. B. aus der §. 6. gefundenen vollkommenen Quadratzahl 1 487 490 624 die Wurzel zu ziehen, so hat man folgende Rechnung zu machen.

```
  √14|87|49|06|24 = 38568
A.  9|..|..|..|..
 6)  5 87
B.C. 5 44 .. .. ..
 76)   43 49
D.E. . 38 25 .. ..
 770)   5 24 06
F.G. . . 4 62 36 ..
 7712)   61 70 24
H.I. . . . 61 70 24
                0
```

Zuerst theilt man, von den Einern aus, die Zahl in Klassen von zwei Ziffern. So viele Klassen man erhält, so viele Ziffern hat die Wurzel (§. 9.), und aus eben so vielen Abschnitten besteht die Rechnung. Vor die gegebene Zahl kann man das Wurzelzeichen, hinter dieselbe das Gleichheitszeichen schreiben. Der erste dieser Abschnitte hat seine eigene Regel, die übrigen werden nach einer gemeinsamen Regel geführt.

1. Die Regel des ersten Abschnitts ist: unter den Quadraten aller einziffrigen Zahlen (§. 7. Anm.) wählt man das größeste (9), welches sich von der höhsten Klasse (14) abziehen läßt. Die Wurzel dieses Quadrats (3) ist die erste Ziffer der Wurzel, und wird hinter das Gleichheitszeichen gesetzt. Das Quadrat (9) selbst, wird von der höhsten Klasse (14) subtrahirt.

2. Die Regeln des zweiten Abschnitts gelten, Wort vor Wort, auch für die übrigen; nämlich:

   a. Zu dem Rest des vorigen Abschnitts (5), setzt man die nähste Klasse (87) herunter.

   b. Man verdoppelt den ganzen schon gefundenen Theil der Wurzel (3), und setzt das Product (6) vor die nach a) entstandene Zahl (587).

   c. Man untersucht (IV. 18.), wie oft die bei b) gefundene Zahl (6), in der bei a) gefundenen, doch mit Weglassung der letzten Ziffer, (also in 58) enthalten sei. Die so gefundene Ziffer (welche in unserer obigen Rechnung eigentlich 9 sein würde, wofür aber aus sogleich anzugebender Gründen 8 gesetzt wird,) ist die nähste Ziffer der Wurzel, also hinter das Gleichheitszeichen zu setzen.

   d. Diese eben gefundene Wurzelziffer (8) erhebt man ins Quadrat (64). Ist dieses einziffrig, so setzt man es ganz unter die letzte Ziffer (7) der bei a) entstandenen Zahl. Ist es aber zweiziffrig (wie 64), so setzt man nun die Einer (4) unter die gedachte Ziffer, und behält die Zehner (6) im Sinn.

   e. Den bei b) gebildeten Divisor (6) multiplicirt man hierauf mit der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (8), und zählt zu dem Product (48) die im Sinn behaltenen Zehner (6) hinzu. Den Ertrag (54) schreibt man vor die bei d) gefundene Ziffer, und subtrahirt die so entstandene Zahl (544), von der darüber stehenden (587); so ist die Rechnung des Abschnitts geendigt.

Hiebei ist nun noch folgendes zu bemerken. Da man die zweite und alle folgende Ziffern der Wurzel (nach c) eigentlich durch eine Division findet, so kann man, wie bei der gemeinen Zahlen-Division in vielen Fällen eine Ziffer um 1 zu groß finden. So ist schon oben bei c) bemerkt worden, daß in dem zweiten Abschnitt die Division $\frac{58}{6}$ eigentlich 9 giebt. Macht man aber mit dieser 9 die bei d) und e) vorgeschriebene Rechnung, so kommt unter 587 die Zahl 621 zu stehen, welche von 587 nicht subtrahirt werden kann. Dieses ist der Grund, warum man 8 statt 9 zur zweiten Wurzelziffer annehmen muß.

Man darf übrigens nur den dritten, und die folgenden Abschnitte aufmerksam durchgehen, um sich zu überzeugen, daß die bei a) b) c) d) e) gegebenen Regeln auf jeden Abschnitt passen, wenn man nur alles was in Klammern eingeschlossen ist, wegläßt.

Ist die gegebene Zahl wirklich eine vollkommene Quadratzahl, so muß die Rechnung im letzten Abschnitt aufgehen.

Beweis. Um nun deutlich einzusehen, daß man durch diese Rechnung die richtige Wurzel unfehlbar finde, hat man seine Aufmerksamkeit hauptsächlich auf die sämmtlichen subtrahirten, und in der Rechnung mit A, BC, DE, FG, HI bezeichneten Stücke zu richten, von denen sich zweierlei beweisen läßt; erstlich daß A + BC + DE + FG + HI zusammen der gegebenen Zahl (1 487 490 624) gleich sei; zweitens, daß eben diese Posten zusammen das vollständige Quadrat der gefundenen Zahl (38568) ausmachen.

1. Die Richtigkeit des ersteren fällt in die Augen, wenn man alle abgezogene Zahlen nach dem wahren Werthe betrachtet, der ihnen vermöge der Stellen, wo sie stehen, zukommt. Zu diesem Zweck darf man nur statt der Punkte, die um mehrerer Deutlichkeit willen hinter die Posten gesetzt sind, Nullen setzen. Dann fällt in die Augen, daß zuerst von der gegebenen Zahl der Posten A (der aus 9 mit 8 Nullen besteht, subtrahirt worden. Der Rest ist daher eigentlich 587 490 624, von welchem aber nur die drei ersten Ziffern zur Fortsetzung der Rechnung nöthig waren. Von diesem Rest ist ferner im zweiten Abschnitt BC subtrahirt worden,

und es blieb der Rest 43 490 624. Von diesem ist im dritten Abschnitt DE subtrahirt worden, wobei der Rest 5 240 624 blieb. Im vierten Abschnitt ist hievon FG abgezogen worden, und es blieb der Rest 617 024. Hievon ist endlich im fünften Abschnitt 617 024 abgezogen worden.

Geht also hier die Rechnung auf, so ist klar, daß die sämmtlichen abgezogenen Stücke zusammen so groß sind, als die Zahl von der man sie abgezogen hat, also daß

$$(A + BC + DE + FG + HI) = 1\,487\,490\,624.$$

2. Überlegt man ferner, wie jeder dieser abgezogenen Posten entstanden ist, und vergleicht dieses mit der umgekehrten Rechnung §. 6., so wird es leicht klar, daß eben diese Posten zusammen dem Quadrat der gefundenen Zahl 38 568 gleich sind. Zur Erleichterung der Vergleichung sind hier und §. 6. die übereinstimmenden Stücke mit denselben Buchstaben bezeichnet. Es ist aber nöthig die Posten einzeln, nach ihrer Entstehung, durchzugehen.

Der Posten A ist hier und §. 6. das Quadrat der höhsten Wurzelziffer 3, und enthält in beiden Rechnungen Einheiten der achten höhern Ordnung.

Der Posten BC besteht aus zwei Stücken. Zuerst wurde das Quadrat der zweiten Wurzelziffer (8) gemacht. Dieses ist also der Posten C des sechsten Paragraphen, und dieser ist hier, wie dort, um zwei Stellen rechts eingerückt. Nun ist zwar 64 nicht ausgeschrieben, da aber die Zehner (6) im Verfolg der Rechnung zugezählt worden, so ist in 544, allerdings 64 vollständig enthalten. Zieht man diese 6 von 54 wieder ab, so bleibt 48, welches gegen den Posten A gerechnet nur um eine Stelle gegen die rechte Seite eingerückt ist, also mit dem Posten B §. 6. völlig übereinstimmt. Dieser Posten (48) ist aber auch in der hiesigen Rechnung das doppelte Product der ersten und zweiten Wurzelziffer, wie man leicht begreift, wenn man auf seine Entstehung Acht hat. Er ist nämlich entstanden durch Multiplication der Zahl 6 mit 8; aber 6 war das doppelte der ersten Ziffer 3, also ist $6 . 8 = 2 . 3 . 8 = 48$ das doppelte Product der beiden Wurzelziffern.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich über den folgenden subtrahirten Posten DE anstellen. Er enthält zuerst das Quadrat 25 der dritten Wurzelziffer, übereinstimmend mit E §. 6. Nimmt man ferner von 382 die hinzugezählte 2 weg, so ist klar, daß der Rest 380 nichts anders ist, als der Posten D §. 6. Diese 380 aber sind durch Multiplication von 76 mit der dritten Wurzelziffer entstanden; aber 76 ist das Doppelte der beiden ersten Wurzelziffern 38; also ist $380 = 76 \cdot 5 = 2 \cdot 38 \cdot 5$, völlig wie §. 6.

Geht man auf dieselbe Art auch die übrigen subtrahirten Posten durch, so überzeugt man sich leicht, daß sie mit den §. 6. gefundenen völlig zusammentreffen, und zusammentreffen müssen, weil sie in beiden Rechnungen auf einerlei Art entstehen, nur daß hier immer zwei Posten in eine Zahl zusammengezogen sind. Hieraus ergiebt sich also, daß

$$A + BC + DE + FG + HI = 38568^2.$$

3. Vergleicht man nun das Ergebniß unserer Schlüsse bei Nr. 1. und 2, so ergiebt sich (nach dem Grundsatz: zwei Größen sind unter sich gleich, wenn sie einer dritten gleich sind), daß

$$1\,487\,490\,634 = 38568^2,$$

also daß umgekehrt

$$38568 = \sqrt{1\,487\,490\,624};$$

welches zu erweisen war.

In dem Hefte ist Auflösung und Beweis auf diejenige vollkommene Quadratzahl anzuwenden, die jeder bei §. 6. in seinem Hefte berechnet hat. Uebrigens ist alles auf ähnliche Art als hier durchzugehen.

Da aber jeder suchen muß in dieser wichtigen Rechnungsart Fertigkeit zu erlangen, so müssen aus allen bei §. 6. berechneten vollkommenen Quadratzahlen, hier wieder die Wurzeln im Übungshefte ausgezogen werden.

§. 18. Zusatz.

Wenn eine vorgelegte vollkommene Quadratzahl Ganze und zehntheilige Brüche enthält, so wird die

Rechnung völlig wie im vorigen Paragraphen geführt. Nur ist bei der Eintheilung der Klassen zu merken, daß man dieselbe nicht bei der niedrigsten Ziffer, sondern bei den Einern anfangen, und von da aus zu beiden Seiten fortsetzen müsse. In der Wurzel ist aber das Komma zu setzen, sobald man alle ganzen Ziffern der Quadratzahl in Rechnung gezogen hat.

Besteht aber die Quadratzahl aus bloßen zehntheiligen Brüchen, so muß wieder der erste Theilstrich bei der Stelle der Einer, also beim Komma gemacht, und dann die Theilung gegen die rechte Seite fortgesetzt werden. Folgt dann im Quadrat, (wie §. 8.) eine oder mehrere ganze Klassen von Nullen, so sind in der Wurzel zuerst gerade so viele einzelne Nullen zu schreiben, als im Quadrat Klassen von Nullen vorhanden sind, und hinter der ersten ist das Komma zu machen. Die übrige Rechnung wird völlig wie im vorigen Paragraphen gemacht.

Den Grund, warum der erste Theilstrich immer bei den Einern, oder in der Stelle des Komma gemacht werden muß, sieht man leicht ein, wenn man in einer nach §. 7. oder 8. geführte Rechnung in der Quadratzahl Theilstriche vom Komma aus macht, und diese aufwärts durch die ganze Rechnung verlängert. Man wird dann leicht wahrnehmen, daß so jede Quadratzahl einer Wurzelziffer ganz zwischen zwei Theilstriche zu stehen kommt, welches gleich bei dem ersten Abschnitt der Rechnung, so wie auch bei jedem folgenden nothwendig ist. Zwar würde man bei vollkommenen Quadratzahlen keinen Fehler begehen, wenn man die Theilung bei der niedrigsten Ziffer anfangen wollte, weil die Anzahl der Bruchziffern immer gerade ist, allein es ist wegen der Wurzelausziehung aus unvollkommenen Quadrat=

zahlen nöthig, daß man sich gleich vom Anfang an daran gewöhne, den ersten Theilstrich immer bei den Einern zu machen.

In dem Hefte sind bei diesem Paragraphen bloß die Wurzeln aus den bei §. 7. und 8. berechneten Quadratzahlen auszuziehen, und die Regeln für die Theilstriche und das Komma kurz anzugeben.

In dem Übungshefte aber sind auch aus allen zu diesen beiden Paragraphen berechneten Quadratzahlen die Wurzeln auszuziehen.

§. 19. Zusatz.

Wie aus einem ächten oder unächten gemeinen Bruch oder aus einer gemischten Zahl, wenn es vollkommene Quadratzahlen sind, die Wurzel zu ziehen sei, ergiebt sich unmittelbar aus §. 10.

Dieses ist im Hefte durch einige kleine Beispiele zu erörtern.

D. Wurzeln aus unvollkommenen Quadratzahlen.

§. 20. Aufgabe.

Die Wurzel aus einer ganzen Zahl, die keine vollkommene Quadratzahl ist zu ziehen, und zwar, wenn sie nicht genau gefunden werden kann, mit einem Fehler, der kleiner ist, als eine halbe Einheit einer beliebigen Bruchstelle.

Auflösung. Es sei z. B. aus der Zahl 43, welche eine unvollkommene Quadratzahl ist, da sie zwischen den vollkommenen Quadratzahlen von 6 und 7 liegt, die Wurzel zu ziehen, und zwar auf drei Bruchstellen, d. h. so genau, daß der Fehler weniger als eine halbe Einheit der dritten, oder als fünf Einheiten der vierten Bruchstelle beträgt, so ist die Rechnung in der Hauptsache völlig, wie §. 17., nur muß man vor dem Anfang der Rechnung, hinter die Einer ein Komma und einen Theilstrich machen, und dann so viele Nullen-Paare anhängen, als die Wurzel einzelne Bruchziffern erhalten soll. Die Rechnung selbst führt man nun völlig wie §. 17. Es wird aber hier in dem letzten Abschnitt allezeit ein Rest bleiben, so daß man also durch ferner angehängte Nullen-Paare die Rechnung weiter fortsetzen könnte. Es ist daher nicht schwer auszumitteln, wie groß die nächste Wurzelziffer sein würde, wenn man noch einen Abschnitt hinzufügen wollte. Findet sich nun, daß die nächste Ziffer unter 5 sein würde, so bleiben alle gefundenen Wurzelziffern ungeändert; würde sie aber 5 oder darüber sein, so vergrößere man die letzte gefundene Ziffer um 1. Im ersten Fall ist eigentlich die gefundene Wurzel zu klein, und im zweiten zu groß, aber in beiden Fällen beträgt doch der Fehler weniger als eine halbe Einheit der letzten Stelle.

	$\sqrt{43,\vert 00\vert 00\vert 00}$	$= 6,557$
A	36	
12)	7 00	
BC.	6 25	
130)	75 00	
DE..	65 25	
1310)	9 75 00	
FG...	9 17 49	
	57 51	

Beweis. Da bei der Rechnung ein Rest geblieben ist, und, wie sich in der Folge zeigen wird, nothwendig bleiben muß, so kann die gefundene Zahl 6,557 nicht die fehlerfreie Wurzel aus 43 sein. Es kann also auch nicht verlangt werden, zu beweisen, daß sie es sei; sondern nur, daß die $\sqrt{43}$ in drei Bruchstellen nicht genauer als durch die gefundene Zahl ausgedrückt werden könne. Dieser Beweis hat aber für jeden, der den siebzehnten Paragraphen aufmerksam durchgearbeitet hat, nicht die geringste Schwierigkeit.

Es läßt sich nämlich vollkommen wie §. 17. zeigen, daß die sämtlichen abgezogenen, und mit A, BC, DE, FG bezeichneten Stücke zusammen addirt das vollkommene Quadrat der gefundenen Zahl 6,557 sind. Da aber ein Rest (5751) geblieben ist, so ist dieses Quadrat kleiner als 43, folglich ist auch die gefundene Zahl $6,557 < \sqrt{43}$.

Vermehrt man aber die niedrigste Wurzelziffer (7) um 1, und berechnet nun die Zeile FG dieser Ziffer gemäß, so erhält man eine Zahl (104864), welche größer ist, als die darüberstehenden; aber dennoch bleibt es richtig, daß die Posten A + BC + DE + FG (wenn man für FG die eben gedachte Zahl setzt), zusammen das vollkommene Quadrat von 6,558 sind. Dieses Quadrat ist also größer als 43; folglich ist auch $6{,}558 > \sqrt{43}$.

Wenn also 6,557 kleiner, und 6,558 größer ist als $\sqrt{43}$, so ist klar, daß die verlangte Wurzel in der vorgeschriebenen Anzahl von Bruchziffern nicht genauer, als durch die gefnndene Zahl dargestellt werden könne.

Daß aber bei Beobachtung der in der Auflösung für die letzte Ziffer aufgestellten Regel der Fehler kleiner sei als eine halbe Einheit der letzten Stelle, ist aus der Regel selbst unmittelbar klar, wenn man nur überlegt, daß eine halbe Einheit der letzten Stelle in jedem Fall so viel als 5 Einheiten der nähst folgenden Stelle sei.

Auflösung und Beweis sind im Hefte an einem andern Beispiel zu wiederholen, wobei aber manches hier um mehrerer Deutlichkeit willen gesagte, wie leicht zu beurtheilen ist, wegfallen kann. Wer den Beweis von §. 17. richtig gefaßt hat, der hat nicht nöthig, hier diesen Beweis zu wiederholen. Doch thut man wohl an zwei oder drei Posten (A, BC und DE) zu zeigen, daß sie dieselben Posten sind, die man finden würde, wenn man von der gefundenen Wurzel nach §. 7. das Quadrat machen wollte. Wer diesen Theil des Beweises ganz weglassen will, muß wenigstens bereit sein, ihn, wenn er vom Lehrer aufgefodert wird, ohne Anstoß mündlich zu führen.

Im Übungshefte ist zu diesem Paragraphen eine beträchtliche Anzahl von Wurzelausziehungen zu rechnen. Da es unendlich mehr unvollkommene als vollkommene Quadratzahlen giebt, so muß der Anfänger sich bei diesem Paragraphen ganz besonders in dieser Rechnungsart üben, und einige Wurzelausziehungen auch auf 7 bis 8 oder noch mehr Bruchziffern fortsetzen. Übrigens ist es nöhig, in der Wahl der Beispiele eine gewisse Ordnung zu beobachten, um deutlich einzusehen, wie man in jedem Fall die Rechnung anzugreifen habe. Zu diesem Ende sind die Rechnungen unter folgende drei Abtheilungen zu bringen. Es sind in dem Übungshefte Wurzeln auszuziehen

a. aus einziffrigen und aus vielziffrigen ganzen Zahlen;

b. aus Zahlen die Ganze und zehntheilige Brüche enthalten;

c. aus bloßen zehntheiligen Brüchen.

Bei b) und c) ist der Anfang der Rechnung völlig, wie §. 18. zu machen.

§. 21. Zusatz.

Wenn aus gemeinen Brüchen, oder gemischten Zahlen, die unvollkommene Quadrate sind, die Wurzeln gezogen werden sollen, so kann man zwar in jedem Falle die gemeinen Brüche in Decimalbrüche verwandeln, und dann die Wurzel nach Anleitung des vorigen Paragraphen ausziehen; aber diese Rechnungsart ist nnr dann zu empfehlen, wenn sich die Verwandlung in Decimalbrüche leicht bewerkstelligen läßt, und die Periode des Decimalbruchs leicht zu übersehen ist. Denn man begreift leicht, daß man bei Fortsetzung der Rechnung nicht Paare von Nullen, sondern Ziffern der Periode anhängen müsse.

Erfodert aber die Verwandlung des gemeinen Bruchs in einen zehntheiligen eine beschwerliche Division, oder ist die Periode des Bruchs sehr vielziffrig, so ist es zweckmäßig auf eine andere Art zu rechnen, wobei folgende Fälle einzeln zu betrachten sind.

1. Wenn ein gemeiner Bruch im Zähler eine unvollkommene, im Nenner aber eine vollkommene Quadratzahl enthält (wie z. B. $\frac{5}{9}$, $\frac{11}{16}$ ꝛc.), so ziehe man die Wurzel bloß aus dem Zähler, und dividire die so berechnete Wurzel durch die Wurzel des Nenners.

2. Wenn Zähler und Nenner beide unvollkommene Quadratzahlen sind, so kann man doch jederzeit vor der Wurzelausziehung den Bruch in einen andern verwandeln, dessen Nenner eine vollkommene Quadratzahl ist, und dann wie bei Nr. 1. rechnen. Auf alle Fälle kann man diese Verwandlung dadurch bewerkstelligen, daß man Zähler und Nenner durch den Nenner multiplicirt (z. B. $\frac{5}{7} = \frac{35}{49}$). Aber in vielen Fällen kann man diesen Zweck durch Multiplication mit einer kleineren Zahl erreichen. (So darf man z. B. $\frac{7}{12}$ im Zähler und Nenner nur mit 3 multipliciren, um im Nenner eine vollkommene Quadratzahl zu erhalten). Man findet diese Zahl leicht, wenn man den Nenner in seine einfachen Factoren zerfället. (So ist z. B. $12 = 2 . 2 . 3$; da aber $2 . 2$ schon eine vollkommene Quadratzahl ist, so hat man nur noch den Factor 3 hinzuzufügen, um im Nenner eine vollkommene Quadratzahl zu erhalten).

3. Ist die aufgegebene Zahl eine gemischte, so hat der anhängende Bruch entweder eine vollkommene Quadratzahl zum Nenner, oder nicht. Im letzten Fall verwandle man ihn nach Nr. 2. in einen solchen. Ist dieses geschehen, so richte man den Bruch ein, und rechne dann wie bei Nr. 1.

Im Hauptheste ist jeder dieser Fälle durch ein oder ein Paar Beispiele zu erläutern, besonders Nr. 2. und 3; doch ist es nicht nothwendig, die Wurzeln hier wirklich auszuziehen, sondern nur anzuzeigen, wie man rechnen müßte.

Im Übungshefte hingegen sind von allen diesen Fällen einige Beispiele zu rechnen.

E. Erste Begriffe von irrationalen Zahlen, und incommensurabeln Größen.

§. 22. Lehrsatz.

Die Wurzel aus einer unvollkommenen ganzen Quadratzahl kann weder durch eine ganze, noch durch eine gemischte Zahl, und noch weniger durch einen ächten Bruch; also auch nicht durch zehntheilige Brüche, ohne Fehler ausgedrückt werden. Daher ist es auch unmöglich, daß eine solche Wurzelausziehung je aufgehen könne.

Anleitung zum Beweise. Er beruht auf sehr einfachen indirecten Schlüssen. Nimmt man nämlich an,

a. daß die Wurzel eine ganze Zahl sein könne, so ergiebt sich ein Widerspruch gegen §. 12.

b. Nimmt man an, sie könne eine gemischte Zahl sein, so entsteht ein Widerspruch wieder gegen §. 12.

c. daß sie aber kein ächter Bruch sein könne, folgt direct aus §. 12.

d. Aus a) und b) folgt direct, daß sie auch durch keine zehntheiligen Brüche ausgedrückt werden könne, weil man diese in jedem Fall als gemeine Brüche betrachten, und als solche schreiben kann.

Alles dieses ist im Hefte bestimmter und vollständiger auszuführen.

§. 23. Zusatz.

Eben dieses gilt auch von unvollkommenen Quadratzahlen, wenn sie Brüche sind, oder enthalten; die Brüche mögen zehntheilige, oder andere sein.

Um die Richtigkeit dieses Schlusses im Allgemeinen einzusehen, erwäge man

1. daß nach §. 21. jeder gemeine Bruch, oder gemischte Zahl, in Gestalt eines einzigen Bruches so ausgedrückt werden

könne, daß der Nenner eine vollkommene Quadratzahl ist. Zieht man dann aus dem Zähler die Wurzel, so kann die Rechnung nicht aufgehen (§. 22.). Soll also diese Wurzel, die eigentlich aus einer unendlichen Menge von Bruchziffern besteht, durch die Wurzel des Nenners dividirt werden, so ist klar, daß auch diese Rechnung nicht aufgehen könne.

2. Besteht aber die Zahl aus Ganzen und zehntheiligen Brüchen, oder bloß aus den letzten, so schreibe man sie in Gestalt eines gemeinen Bruchs, und hänge, wenn die Anzahl der Nullen im Nenner ungerade ist, an Zähler und Nenner eine Null an, so kann der Beweis wie bei Nr. 1. geführt werden.

Beides ist im Hefte durch Beispiele deutlich zu machen.

§. 24. Zusatz und Erklärung.

Es giebt also Größen, die durch keine Art von Zahlen ohne Fehler ausgedrückt werden können, oder, was dasselbe sagt, die durch keinen einzigen angebbaren Theil der Einheit ausgemessen werden können.

Soll indessen der Werth einer solchen Größe annäherungsweise durch Ziffern ausgedrückt werden, so nennt man solche Zahl eine Irrational-Zahl. Im Gegensatz hievon nennt man jede ganze oder gebrochene Zahl, welche den Werth einer Größe fehlerfrei ausdrückt, eine rationale Zahl.

Im Hefte ist der Inhalt dieses Paragraphen und sein Zusammenhang mit den beiden vorhergehenden kürzlich durch ein Beispiel zu erläutern.

Anmerkungen.

1. Die Quadratwurzeln aus unvollkommenen Quadratzahlen sind nicht die einzigen irrationalen Zahlen. Wir werden in der Folge mehrere andere Arten derselben kennen lernen. Aber da schon in der natürlichen Zahlenreihe weit mehr unvollkommene als vollkommene Quadratzahlen enthalten sind,

so ist klar, daß es schon weit mehr irrationale als rationale Quadratwurzeln giebt.

2. Man verwechsle die irrationalen Zahlen nicht mit solchen zehntheiligen Brüchen, die durch eine ohne Ende fortlaufende Division entstehen. Diese lassen sich nur in Decimaltheilen der Einheit nicht ohne Fehler ausdrücken, aber in Gestalt eines gemeinen Bruchs ist ihr Werth fehlerfrei also rational ausgedrückt. So ist z. B. $\frac{5}{7}$ ein rationaler Ausdruck, denn er zeigt eine Größe an, die durch den siebenten Theil der Einheit vollkommen ausgemessen wird. Will man aber den Werth eben dieser Größe durch Decimaltheile der Einheit ausmessen, so kann es nur näherungsweise geschehen. Dagegen ist z. B. $\sqrt{2}$ irrational, weil ihr Werth weder durch Decimaltheile der Einheit, noch durch irgend einen andern Theil derselben ohne Fehler ausgedrückt werden kann.

§. 25. Zusatz und Erklärung.

Es können also zwei gleichartige Größen A und B so beschaffen sein, daß die eine B durch keinen einzigen angebbaren Theil der andern ausgemessen werden kann.

Solche Größen nennt man incommensurable Größen.

Im Gegensatz hievon heißen zwei gleichartige Größen commensurabel, wenn eine durch irgend einen Theil der anderen ausgemessen werden kann.

Daß beide Begriffe gegenseitig sind, d. h. daß auch A gegen B commensurabel oder incommensurabel ist, je nachdem es B gegen A ist, läßt sich leicht einsehen.

Welches sind im vorigen Paragraphen die beiden gleichartigen Größen, deren eine gegen die andere incommensurabel ist? Sind zwei Brüche gegen einander commensurabel oder incommensurabel?

Wie läßt sich die Gegenseitigkeit beider Begriffe deutlich machen?

§. 26. Anmerkung.

Auf ähnliche Art als in diesem Abschnitt die Berechnung der Quadratzahlen und Quadratwurzeln gelehrt worden, lassen sich auch höhere Potenzen und Wurzeln berechnen. Man kann nämlich A + B, durch bloße wiederholte Multiplicationen zu jeder höheren Potenz erheben, und daraus auf ähnliche Art als §. 3. eine Formel für jede höhere Potenz einer vielgliedrigen Formel A + B + C + D ꝛc. ableiten. Über eine solche Formel lassen sich ähnliche Betrachtungen als §. 4. und 5. anstellen, und daraus auf ähnliche Art als §. 6. eine Regel ableiten, jede vielziffrige Zahl durch eine einzige Rechnung zu jeder höhern Potenz zu erheben.

So wie nun §. 17. aus der Erhebung ins Quadrat umgekehrt die Regeln zur Berechnung der Quadratwurzeln abgeleitet worden, so ist es möglich, aus jeder höheren Potenzrechnung Regeln für die höheren Wurzelausziehungen zu entwickeln.

Um dieses Verfahren anschaulicher zu machen, ist in dem ersten Anhange zu diesem Abschnitt die Anwendung auf Potenzen und Wurzeln des dritten Grades gemacht worden.

Aber dieses Verfahren nimmt mit jedem Grade an Weitläuftigkeit so zu, daß die Mathematiker allen ihren Scharfsinn aufgeboten haben, um zur Berechnung höherer

Potenzen und Wurzeln kürzere Wege ausfindig zu machen. Diese Bemühungen haben den erwünschtesten Erfolg gehabt, indem man durch Erfindung der Logarithmen (deren Theorie aber erst im dritten Theil vorgetragen werden kann,) diese Rechnungen auf weit einfachere Regeln zurückgebracht hat, als man vor dieser Erfindung erwarten durfte.

Daher ist es hinreichend, nur die Berechnung der Quadratzahlen und Quadratwurzeln hier recht fleißig zu üben. Doch ist es jedem, der seine mathematischen Kenntnisse über die Gränzen des Schulunterrichts erweitern will, sehr zu empfehlen, daß er auch den ersten Anhang dieses Abschnitts sorgfältig durchstudire, weil ihm dadurch die ganze Lehre von Potenzen und Wurzeln viel klarer werden wird.

So wie dieser Abschnitt eine höhere Fortsetzung der Zahlenrechnung enthält, nämlich die ersten Elemente der fünften und sechsten einfachen Rechnungsart (Potenzirung, und Wurzelausziehung), so wird der folgende Abschnitt eine Fortsetzung der Buchstabenrechnung enthalten, wobei wir aber nicht genöthigt sein werden, bei den Potenzen und Wurzeln des zweiten Grades stehen zu bleiben, da die Buchstabenrechnung in den meisten Fällen ihren Zweck schon erreicht, wenn sie die zu machenden Rechnungen nur andeutet, nicht wirklich ausführt.

Daß die Berechnung höherer Wurzeln an sich möglich sei, läßt sich noch auf eine andere Art, als im Paragraphen geschehen ist, deutlich machen, indem man zeigt, wie man sie wirklich, obgleich durch eine sehr weitläuftige und indirecte Rechnung, so genau, als es verlangt wird, finden könnte.

Gesetzt es wollte Jemand die $\sqrt[7]{93{,}57}$ berechnen, so könnte er zuerst die siebenten Potenzen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ꝛc. berechnen. Da nun $1^7 = 1$ und $2^7 = 128$, so ist klar, daß die verlangte Wurzel zwischen 1 und 2 liegt. Nun müßte man die siebenten Potenzen von 1,1; 1,2; 1,3 ꝛc. bis 2,0 soweit berechnen, bis man zwei Potenzen fände von denen die eine kleiner, die andere größer als 93,57 wäre. Gesetzt man fände, daß die siebente Potenz von 1,9 kleiner, von 2,0 aber größer sei als 93,52, so müßte man ferner die siebenten Potenzen von 1,91; 1,92; 1,93 bis 2,00 machen, bis man wieder zwei Potenzen fände, zwischen denen 93,57 liegt. Gesetzt dies wären die siebenten Potenzen von 1,91 und 1,92, so weiß man daß

$$\sqrt[7]{93{,}57} = 1{,}91\ldots,$$

wenn sie nicht genauer als in Hunderteln verlangt würde. Wollte man sie noch in Tausendteln haben, so müßte man ferner die siebenten Potenzen von 1,911; 1,912; 1,913... bis 2,000 berechnen, bis man wieder zwei Potenzen fände zwischen denen 93,57 liegt. Wären dieses die siebenten Potenzen von 1,912, und 1,913, so hätte man in drei Bruchziffern

$$\sqrt[7]{93{,}57} = 1{,}912\ldots$$

Die Möglichkeit, aber auch die ungeheure Weitläuftigkeit einer solchen Rechnung fällt in die Augen. In acht Bruchziffern ist

$$\sqrt[7]{93{,}57} = 1{,}91245004.$$

Erster Anhang zum elften Abschnitt.

Von Kubik-Zahlen und Kubik-Wurzeln.

A. Allgemeine Begriffe und Sätze, nebst Erhebung einer Zahl zur dritten Potenz.

§. 1. Erklärung.

Ein Product von drei gleichen Factoren, heißt der **Knbus**, oder die **Kubikzahl** oder die **dritte**

Potenz eines solchen Factors. Ihre Bezeichnung geschieht durch den Exponenten 3.

Und wenn man sich irgend eine Zahl als ein Product von drei gleichen Factoren vorstellt, so heißt ein solcher Factor die Kubikwurzel oder die Wurzel der dritten Ordnung von solcher Zahl. Sie wird bezeichnet durch die vorgesetzte $\sqrt[3]{}$.

So ist $3 . 3 . 3 = 3^3 = 27$ der Kubus von 3, desgleichen $a^2 a^2 a^2 = a^6$ der Kubus von a^2 u. dgl. m.

Die $\sqrt[3]{125}$ ist $= 5$, weil $5^3 = 125$; eben so ist a die dritte Wurzel aus a^3, weil $aaa = a^3$, u. dgl. m.

§. 2. Lehrsatz.

Der Kubus einer zweitheiligen Größe bestehet:

a. aus dem Kubus des ersten Theils;

b. aus dem dreifachen Quadrat des ersten Theils, multiplicirt mit dem zweiten;

c. aus dem dreifachen ersten Theil multiplicirt mit dem Quadrat des zweiten;

d. aus dem Kubus des zweiten Theils.

Anleitung zum Beweis. Wenn man eine zweitheilige Größe durch $A + B$ vorstellt, so ist ihr Quadrat $(A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$ (VIII. 20.). Man erhält also ihren Kubus $(A + B)(A + B)(A + B)$, wenn man dieses Quadrat nochmals mit $A + B$ multiplicirt. Wird diese Multiplication regelmäßig verrichtet, so besteht der Kubus aus vier Gliedern von solcher Beschaffenheit, wie sie der Satz fodert.

§. 3. Lehrsatz.

Der Kubus einer vieltheiligen Größe

$$N = A + B + C + D + \text{ꝛc.}$$

besteht aus folgenden Stücken:

$$
\begin{array}{llr}
N^3 = & A^3 & (I) \\
& + 3A^2B & (II) \\
& + 3AB^2 & (III) \\
& + \quad B^3 & (IV) \\
& + 3(A+B)^2C & (V) \\
& + 3(A+B)C^2 & (VI) \\
& + \qquad\qquad C^3 & (VII) \\
& + 3(A+B+C)^2D & (VIII) \\
& + 3(A+B+C)D^2 & (IX) \\
& + \qquad\qquad\qquad D^3 & (X) \\
& + \quad \text{2c.} \quad \text{2c.} & \text{2c.}
\end{array}
$$

Das Gesetz, nach welchem die Glieder auf einander folgen, ist leicht zu übersehen.

Anleitung zum Beweise.

1. Die Glieder (I) bis (IV) enthalten nach §. 2. den Kubus von $A + B$, also $(A + B)^3$.
2. Die Glieder von (I) bis (VII) enthalten den Kubus von $A + B + C$, wie man leicht einsieht, wenn man die beiden ersten Glieder durch Einklammerung in eins zusammenzieht, und dann nach §. 2. den Kubus von $(A+B)+C$ macht.
3. Die Glieder (I) bis (X) enthalten den Kubus von $A + B + C + D$, und man überzeugt sich davon, wenn man von $(A + B + C) + D$ nach §. 2. den Kubus macht.

Es ist aber klar, daß man eben so leicht diese Schlüsse, als die obige Formel, auf so viele Glieder, als man will, fortsetzen könne.

§. 4. Zusatz.

Wenn man die im vorigen Paragraphen gebrauchten Buchstaben A, B, C, D, 2c. als Ziffern von auf einander folgenden Ordnungen betrachtet, so ist in dem

Kubus, jedes nachfolgende Glied um eine Ordnung niedriger als das nähstvorhergehende. Das erste Glied aber ist von einer dreimal höhern Ordnung als die höhste Wurzelziffer.

Es sei z. B. A eine Ziffer von der fünften, B von der vierten, C von der dritten ꝛc. höheren Ordnung, so läßt sich nach III. 16. leicht bestimmen, von welcher Ordnung jedes Glied des im vorigen Paragraphen entwickelten Kubus sei.

a. Das erste Glied A^3 ist von der funfzehnten Ordnung, wenn A von der fünften ist.

b. Im zweiten Gliede 3AAB, ist AA und 3AA von der zehnten Ordnung, und da B von der vierten ist, so ist 3AAB von der vierzehnten Ordnung.

c. Im dritten Gliede 3ABB, ist A und 3A von der fünften, B von der vierten, also 3ABB von der $(5+4+4)$ ten d. i. von der dreizehnten Ordnung.

d. Das vierte Glied B^3, ist von der $(4 + 4 + 4)$ ten d. i. von der zwölften Ordnung.

e. In dem fünften Gliede $3(A + B)^2C$, ist $A + B$ als eine einzige Zahl betrachtet von derselben Ordnung als B (I. 14.), also von der vierten und C von der dritten; also das ganze Glied von der $(4 + 4 + 3)$ ten, d. i. von der elften Ordnung.

Man sieht leicht, wie diese Schlüsse so weit, als man will, fortgesetzt werden können, wenn man nur bemerkt, daß jede mehrziffrige Zahl, wie $(A + B)$, $(A + B + C)$ ꝛc., wenn man sie als eine einzige Zahl liest, immer aus lauter Einheiten der niedrigsten Ordnung besteht.

§. 5. Zusatz.

Aus §. 3. und 4. ergiebt sich, daß man den Kubus einer mehrziffrigen Zahl (auf ähnliche Art als das Quadrat §. 6. des Abschnitts), unmittelbar durch eine einzige Rechnung finden könne, indem man jede Ziffer der Zahl als ein Stück der Größe betrachtet, und dann nach §. 3. alle Glieder des Kubus bildet. Man kann aber dabei von dem wahren Werth jeder Ziffer absehen, und sie so behandeln, als ob ihre Einheiten Einer wären, wenn man nur jedes nachfolgende Glied des Kubus nach §. 4. um eine Stelle weiter gegen die rechte Seite einrückt.

Soll z. B. von 5483 der Kubus gemacht werden, so setze man $A = 5$, $B = 4$, $C = 8$, $D = 3$, und rechne nun nach §. 3. und 4. wie folgt

A^3	=	125			
$3A^2B$	=	30	0		
$3AB^2$	=	2	40		
B^3	=		64		
$3(A+B)^2C$	=	6	998	4	
$3(A+B)C^2$	=		103	68	
C^3	=			512	
$3(A+B+C)^2D$	=		270	273	6
$3(A+B+C)D^2$	=			147	96
D^3	=				27
$(A+B+C+D)^3$	=	164	837	013	587

Anmerkung. Diese unmittelbare Ausrechnung einer dritten Potenz ist zwar nicht kürzer, als wenn man die gegebene Zahl erst mit sich selbst, und dann das Quadrat nochmals mit der gegebenen Zahl multiplicirt, besonders, da man die meisten Glieder des Kubus erst auf einem besondern Blatte berechnen muß. Indessen rechnet man doch auf diese Art gewöhnlich richtiger, weil man genöthigt ist, mit mehr Aufmerksamkeit zu rechnen, als bei dem bloßen Multipliciren. Auch ist diese Rechnungsart wichtig nicht eines practischen Nutzens wegen, sondern in wissenschaftlicher Rücksicht, weil es ohne dieselbe nicht möglich ist, eine deutliche Einsicht in die Regeln der Kubikwurzel-Ausziehung zu erhalten.

§. 6. Zusatz.

Enthält die gegebene Zahl zehntheilige Brüche, so kann man den Kubus derselben auf die nämliche Art berechnen, nur muß man am Ende im Kubus dreimal so viele Bruchstellen abschneiden, als die gegebene Zahl enthält.

Wäre z. B. der Kubus von 0,05483 auszurechnen, wo die geltenden Ziffern (5483) mit den im vorigen Paragraphen berechneten einerlei sind, so ist die Rechnung vollkommen wie im vorigen Paragraphen; nur müssen im Kubus funfzehn Bruchstellen abgeschnitten werden. Er wird also 0,000 164 837 013 587 sein.

Den Grund sieht man leicht ein, wenn man sich vorstellt, daß der Kubus nicht durch die beschriebene Kubik-Rechnung, sondern durch bloße Multiplication gefunden wäre.

Anmerkung. Statt die Stelle des Komma erst am Ende der Rechnung zu bestimmen, kann man sie leicht während der Rechnung, und schon bei dem ersten Gliede des Kubus bestimmen. In der obigen Zahl 0,05483 ist die höhste Ziffer von der Ordnung -2, also ihr Kubus 125 von der -6ten Ordnung, also $= 0{,}000\,125$, u. s. f.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn die gegebene Zahl n geltende Ziffern enthält, so besteht ihr Kubus entweder aus $3n - 2$, oder aus $3n - 1$, oder aus $3n$ Ziffern.

Beweis. Da aus dem vorigen Paragraphen klar ist, daß die Stellung des Komma in der Wurzelgröße auf die Anzahl der geltenden Ziffern des Kubus keinen Einfluß hat, so können wir, ohne Nachtheil für die Allgemeinheit des Beweises annehmen, daß die gegebene Zahl eine ganze, und ihre niedrigste Ziffer von der Ordnung 0 sei.

Hat nun diese Zahl n Ziffern, so ist ihre höhste Ziffer von der Ordnung $n - 1$. Sie ist folglich größer als eine Einheit der (n — 1)ten Ordnung, aber kleiner als eine Einheit der nten Ordnung. Ihr Kubus muß daher größer sein, als eine Einheit der (3n — 3)ten, aber kleiner als eine Einheit der 3nten Ordnung.

Nun wird eine Einheit der (3n — 3)ten Ordnung geschrieben mit einer 1, auf welche 3n — 3 Nullen folgen. Diese Zahl enthält also 3n — 2 Ziffern, und dieses ist die geringste Anzahl von Ziffern, welche der Kubus einer nziffrigen Zahl haben kann.

Eine Einheit der 3nten Ordnung aber wird geschrieben mit einer 1, auf welche 3n Nullen folgen. Sie besteht also aus (3n + 1) Ziffern, ist aber die kleinste aus (3n + 1) Ziffern bestehende Zahl. Folglich kann der Kubus einer nziffrigen Zahl nie aus (3n + 1) Ziffern bestehen, sondern er kann nur 3n oder mindestens, wie vorher erwiesen worden, 3n — 2 Ziffern haben.

§. 8. Erklärung.

Eine ganze Zahl heißt eine vollkommene Kubikzahl, wenn ihre Kubikwurzel eine ganze Zahl ist.

Ein ächter oder unächter Bruch heißt eine vollkommene Kubikzahl, wenn sowohl der Zähler als Nenner vollkommene ganze Kubikzahlen sind.

Eine Zahl endlich welche Decimalbrüche enthält heißt eine vollkommene Kubikzahl, wenn die Anzahl der Bruchziffern mit 3 aufgeht, und nach Weglöschung des Komma eine vollkommene ganze Kubikzahl übrig bleibt.

Alle übrigen Zahlen heißen unvollständige Kubikzahlen.

Eine Tafel der vollkommenen ganzen Kubikzahlen würde man erhalten, wenn man die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe (0, 1, 2, 3 ꝛc.) bis zu einer beliebigen Zahl in die dritte Potenz erhebt.

Die zehn ersten dieser vollkommenen Kubikzahlen (von $0^3 = 0$, bis $9^3 = 729$) muß man bei allen Kubik- und Kubikwurzel-Rechnungen im Gedächtniß haben, oder wenigstens leicht finden können.

§. 9. Lehrsatz.

Je nachdem eine Zahl größer oder kleiner als 1 ist, ist auch ihr Kubus größer oder kleiner als die gegebene Zahl, folglich noch vielmehr größer oder kleiner als 1.

Hieraus folgt umgekehrt, daß, je nachdem eine vorgelegte Zahl größer oder kleiner als 1 ist, auch ihre Kubikwurzel kleiner oder größer als die gegebene Zahl sei, der Einheit aber näher liege, als die gegebene Zahl.

Anleitung zum Beweise. Der Beweis des ersten Theils folgt unmittelbar aus der Erklärung der Multiplication (III. 3.). Denn je nachdem der Multiplicator größer als 1 ist, muß auch das Product größer oder kleiner als der Multiplicandus sein. Stellt man sich also vor, daß eine Kubikzahl durch bloße Multiplication berechnet werde, so fällt die Richtigkeit des Satzes in die Augen.

Der zweite Theil des Satzes aber ist eine unmittelbare Folge aus dem ersten.

§. 10. Lehrsatz.

Wenn Zähler und Nenner eines ächten oder unächten Bruches relative Primzahlen sind, so sind auch der Zähler und Nenner seiner dritten Potenz relative Primzahlen.

Beweis. In dem Bruche $\frac{a}{b}$ mögen Zähler und Nenner relative Primzahlen sein, so sind beide entweder selbst absolute Primzahlen, und dann ist aus V. 14. klar, daß der Zähler der dritten Potenz

$$\frac{aaa}{bbb}$$

nicht durch b, also auch nicht durch bb, oder bbb aufgehen könne, daß also aaa, und bbb relative Primzahlen sind.

Wären aber a und b an sich zusammengesetzte Zahlen, die nur keinen Factor gemein haben, z. B. $a = \alpha\beta$; $b = \gamma\delta$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einfache Zahlen bedeuten, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} \text{ also } \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{\alpha\alpha\alpha\beta\beta\beta}{\gamma\gamma\gamma\delta\delta\delta},$$

und dann ist, wie vorher aus V. 12—14. klar, daß der Zähler und Nenner dieses letzten Bruches relative Primzahlen sind.

B. Ausziehung der Kubikwurzeln.

§. 11. Aufgabe.

Aus einer vollkommenen ganzen Kubikzahl die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Als Beispiel mag die §. 5. gefundene vollkommene Kubikzahl dienen, mit welcher folgende Rechnung vorzunehmen ist.

$$\begin{array}{rl}
 & \text{ABCD} \\
\sqrt[3]{164|837|013|587} & = 5483 \\
125 \;\; \ldots\ldots\ldots & = A^3 \\
75)\; 39\,837 & \\
\left\{\begin{array}{r} 300 \\ 240 \\ 64 \end{array}\right\} \ldots\ldots & \begin{array}{l} = 3A^2B \\ = 3AB^2 \\ = B^3 \end{array} \\
32\,464 & \\
8748)\; 7\,373\,013 & \\
\left\{\begin{array}{r} 69984 \\ 10368 \\ 512 \end{array}\right\} \ldots\ldots & \begin{array}{l} = 3(A+B)^2C \\ = 3(A+B)C^2 \\ = C^3 \end{array} \\
7\,102\,592 & \\
900912)\; 270\,421\,587 & \\
\left\{\begin{array}{r} 2702736 \\ 14796 \\ 27 \end{array}\right\} \ldots & \begin{array}{l} = 3(A+B+C)^2D \\ = 3(A+B+C)D^2 \\ = D^3 \end{array} \\
270\,421\,587 & \\
0 &
\end{array}$$

Die Rechnung ist auf folgende Art gemacht. Zuerst ist die gegebene Zahl in Klassen von drei Ziffern getheilt worden, wobei zu bemerken, daß der erste Theilstrich immer rechts neben den Einern gedacht werden muß. Ist die gegebene Zahl eine vollkommene Kubikzahl so ergiebt sich aus §. 7., daß die Wurzel so viele Ziffern haben werde, als man Klassen von drei Ziffern erhalten hat.

Die Rechnung selbst besteht aus so vielen Abschnitten als Klassen da sind. Der erste hat seine eigene Regel, die übrigen folgen alle einer gemeinsamen Regel.

Die Regel der ersten Klasse ist folgende. Man sucht die größte vollkommene Kubikzahl, welche sich abziehen läßt. Dieses ist in unserm Fall die Kubikzahl von 5, nämlich 125, und man sieht leicht, daß dieses in jedem Fall der Kubus einer einziffrigen Zahl sein werde, da die höhste Klasse nie mehr als drei Ziffern enthalten kann. Die Wurzel (5) dieses Kubus (125) ist die erste Wurzelziffer, und wird hinter das Gleichheitszeichen gesetzt. Den Kubus (125) aber zieht man von der höhsten Klasse (164) ab, und fügt zu dem Rest (39) die ganze folgende Klasse (837). Hiemit ist der erste Abschnitt der Rechnung geendigt. Bei den übrigen Abschnitten sind folgende Regeln zu beobachten, welche wörtlich auf jeden Abschnitt passen.

1. Von dem schon gefundenen Theil der Wurzel (5), wird das Quadrat (25) gemacht, und dieses mit 3 multiplicirt. Das Product (75) schreibt man als Divisor vor den Rest des vorhergehenden Abschnitts, und untersucht, wie vielmal dieser Divisor (75) in der nebenstehenden Zahl (39837), mit Ausschluß der beiden letzten Ziffern, (also in 398) enthalten sei. Der Quotient ist die zweite Ziffer der Wurzel, und wird also hinter die erste geschrieben.

(In unserm Beispiel ist eigentlich 75 in 398 fünfmal ent- enthalten, und man kommt öfters in den Fall, daß man durch die Division eine zu große Ziffer findet; aber der Erfolg der Rechnung offenbart allezeit diesen Fehler; wie wir zeigen werden. In unserm Beispiel ist nur 4 als die zweite Wurzelziffer zu setzen.)

2. Nachdem die neue Wurzelziffer (4) gefunden ist, multiplicirt man sie mit dem Divisor (75), das Product (300) setzt man unter die dividirte Zahl (398).
3. Man multiplicirt den vorher gefundenen Theil der Wurzel (4) mit 3, das Product (12) aber multiplicirt man mit dem Quadrat (16) der neuen Wurzelziffer (4). Das Product (240) schreibt man unter die bei Nr. 2. gefundene Zahl (300), rückt sie aber um eine Stelle weiter gegen die rechte Seite.
4. Man bildet den Kubus (64) der zuletzt gefundenen Wurzelziffer (4), und setzt ihn unter die bei Nr. 3. gefundene Zahl (240), rückt ihn aber noch um eine Stelle weiter gegen die rechte Seite.
5. Man addirt die drei bei Nr. 2, 3, 4 gefundenen Zahlen, so wie sie unter einander gesetzt sind, und zieht ihre Summe (32464) von der bei dem vorhergehenden Abschnitt übriggebliebenen Zahl (39864) ab. Zu dem Rest (7373) fügt man die ganze folgende Klasse (013), so ist der Abschnitt geendigt.

Anmerkungen.

1. Ob man bei der Division (Nr. 1.) eine zu große Wurzelziffer gefunden habe, zeigt sich erst bei (Nr. 5.); wenn sich nämlich die Summe der drei Zahlen (Nr. 2, 3, 4.), von der bei dem vorhergehenden Abschnitt gebliebenen Zahl nicht abziehen läßt. Man macht also in diesem Fall das erstemal den ganzen Abschnitt umsonst; eine Unbequemlichkeit, die nicht zu vermeiden ist.
2. Wenn man in den obigen Regeln (Nr. 1. bis 5.) die eingeklammerten Zahlen wegläßt, so passen sie wörtlich auf jeden folgenden Abschnitt.
3. Ist die gegebene Zahl in der That eine vollkommene Kubikzahl, so muß im letzten Abschnitt kein Rest bleiben.

Beweis. Man bezeichne die einzelnen Ziffern der Wurzel mit A, B, C, D, und vergleiche dann die Rechnung mit der §. 5. geführten. Zur Erleichterung dieser Vergleichung sind rechter Hand neben der Wurzelausziehung die Formeln A^3, $3A^2B$, $3AB^2$ ꝛc. gesetzt. Geht man nun alle in den sämmtlichen Abschnitten subtrahirte Posten durch, so zeigt die Vergleichung mit §. 5. deutlich, daß sie zusammen die vollkommene Kubikzahl von der gefundenen Zahl (5483) enthalten Da aber nach allen Subtractionen kein Rest geblieben ist, so müssen eben diese subtrahirten Posten zusammen der gegebenen Zahl (164 837 013 587) gleich sein. Nennen wir also, zur Abkürzung, die Summe aller subtrahirten Posten S, so wissen wir

1) daß $S = 5483^3$,

2) daß $S = 164\,837\,013\,587$.

Hieraus folgt

$$164\,837\,013\,587 = 5483^3$$

$$\text{also } 5483 = \sqrt[3]{164\,837\,013\,587};$$

welches zu erweisen war.

Anmerkungen.

1. Eine genauere Vergleichung von §. 5. und §. 11. läßt ohne Schwierigkeit wahrnehmen, durch was für Schlüsse der erste Erfinder der Kubikwurzelausziehung auf die Entdeckung der obigen Regeln gekommen sei.

2. Wenn man bei dem Anfang eines neuen Abschnitts der Rechnung den ganzen schon gefundenen Theil der Wurzel a und die in diesem Abschnitt zu findende Ziffer b nennt, so sind die beiden ersten abzuziehenden Stücke $3a^2b + 3ab^2 = 3ab\,(a+b)$. Rechnet man nach der letztern Formel so giebt dieses einige Abkürzung der Rechnung.

§. 12. Lehrsatz.

Die Kubikwurzel einer unvollkommenen ganzen Kubikzahl ist irrational.

Beweis. Da die Reihe der vollkommenen Kubikzahlen (§. 8. Erläut.) ins Unendliche wächst, so muß jede unvollkommene Kubikzahl ihrer Größe nach zwischen zwei auf einander folgende Glieder solcher Reihe fallen, folglich ihre Wurzel zwischen zwei auf einander folgende Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Wäre also die Wurzel rational so müßte sie eine gemischte Zahl sein. Wäre in dieser der anhängende Bruch in den kleinsten Zahlen geschrieben, und man verwandelte das Ganze in einen einzigen unächten Bruch, so sind der Zähler und Nenner desselben, nach dem Beweise von §. 12. des Abschnittes relative Primzahlen. Erhöbe man nun diesen Bruch zur dritten Potenz, so würden nach §. 10. dieses Anhanges auch Zähler und Nenner dieser Potenz gleichfalls relative Primzahlen sein. Dividirte man nun den Zähler durch den Nenner, so könnte die Rechnung nicht aufgehen, und der Quotient, d. h. die dritte Potenz der fraglichen Wurzel wäre eine gemischte Zahl, welches der Voraussetzung widerspricht, indem im Satz ausdrücklich eine unvollkommene ganze Kubikzahl angenommen ist.

Es kann also die Wurzel durch keinen einzigen genauen Theil der Einheit ohne Fehler dargestellt und ausgemessen werden. Sie ist also der Einheit incommensurabel, und die Wurzel selbst irrational.

§. 13. Aufgabe.

Aus einer unvollkommenen ganzen Kubikzahl die Wurzel so genau auszuziehen, daß der Fehler weniger beträgt, als die halbe Einheit einer beliebigen Bruchstelle.

Auflösung. Es sei aus der Zahl 3 die Kubikwurzel nur so weit auszuziehen, daß der Fehler kleiner sei, als eine halbe Einheit der dritten Bruchstelle; so ist folgende Rechnung zu machen.

$\sqrt[3]{3,000} = 1,442$

```
       1
   3) 2 000
       1 2
        48
         64
      1 744
 588)  256000
        2352
         672
          64
       241984
```

Man zieht die Wurzel völlig so aus, wie bei einer vollkommenen Kubikzahl, hängt aber an den Rest, der als Folge des vorigen Paragraphen nothwendig bleiben muß, eine Klasse von drei Nullen an, und setzt dann die Rechnung regelmäßig nach §. 11. fort. Dieses wiederholt man so lange bis man die vorgesetzte Anzahl von Bruch-

$$\begin{array}{r} 241984 \\ \hline 62208)\ 14016000 \\ 124416 \\ 1728 \\ 8 \\ \hline 12458888 \\ \hline 1557112 \end{array}$$

ziffern erhalten hat. Dann überschlägt man noch, wie groß die nähste Wurzelziffer sein würde. Ist diese 5 oder darüber, so vermehrt man die letzte Bruchziffer um 1, sonst läßt man sie ungeändert. In beiden Fällen ist der Fehler kleiner als eine halbe Einheit der letzten Bruchstelle.

In unserm obigen Beispiel ist die bloß nach §. 11. geführte Rechnung schon mit dem ersten Abschnitt zu Ende, weil die gegebene Zahl einziffrig ist. Daher sind sogleich an den Rest (2) drei Nullen angehängt, dann nach §. 11. fortgerechnet, und dieses in drei Abschnitten wiederholt worden. Die so gefundenen Wurzelziffern sind 1,442. Rechnet man noch eine Stelle weiter, so findet man die vierte Wurzelziffer 2. Daher ist hier nichts zu ändern, wäre aber die vierte Ziffer 5 oder darüber gewesen, so hätte man in der dritten Stelle 3 statt 2 setzen müssen.

Beweis. Es sind in unserm Beispiel nach und nach zehn Posten subtrahirt worden, und man kann sich vollkommen wie §. 11. überzeugen, daß diese zusammen den Kubus der gefundenen Wurzel ausmachen, oder daß die zehn subtrahirten Posten zusammen $= 1{,}442^3$ sind. Da sie aber nach und nach von 3 subtrahirt, einen Rest (1557112 oder nach seinem wahren Werth 0,001557112) gelassen haben, so ist klar, $1{,}442^3 < 3$, folglich auch

$$1{,}442 < \sqrt[3]{3}.$$

Aber man begreift auch leicht, daß die $\sqrt[3]{3}$ in drei Bruchziffern nicht genauer gefunden werden könne. Denn setzte man in der letzten Stelle 3 statt 2, und berechnete in dem letzten Abschnitt der Rechnung die drei zu subtrahirenden Posten dieser Zahl gemäß, so würde ihre Summe größer sein, als die im vorletzten Abschnitt gebliebene Zahl (14016000). Aber dennoch würden auch jetzt die sämmtlichen subtrahirten und zu subtrahirenden Posten den genauen Kubus von 1,443 enthalten haben. Also ist $1{,}443^3 > 3$, folglich auch

$$1{,}443 > \sqrt[3]{3}.$$

In drei Bruchziffern kann also die $\sqrt[3]{3}$ nicht anders als 1,442 gefunden werden.

Da aber die vierte Ziffer (2) kleiner ist als 5 Einheiten der vierten, oder eine halbe Einheit der dritten Stelle, so beträgt der Fehler der Wurzel weniger, als eine halbe Einheit der dritten Stelle. Hätte sich hingegen die vierte Ziffer 5 oder noch größer gefunden, so würde durch Zusetzung einer Einheit der dritten Stelle zwar die Wurzel zu groß geworden sein, aber der Fehler würde doch weniger als 5 Einheiten der vierten, d. i. als eine halbe Einheit der dritten Stelle betragen.

§. 14. Zusatz.

Über die Ausziehung der Kubikwurzeln aus andern als unvollkommenen ganzen Kubikzahlen, wird es hinreichend sein, folgendes zu bemerken, was jedem, der alles vorhergehende gefaßt hat, ohne umständliche Erläuterungen deutlich sein wird.

a. Wenn die gegebene Zahl Decimalbrüche enthält, oder bloß aus solchen besteht, so rechnet man völlig wie im vorigen Paragraphen. Nur muß man sich vor dem Anfange der Rechnung hüten, den ersten Theilstrich wo anders als bei dem Komma zu machen. Sollte z. B. aus 3728,0591 die Kubikwurzel gezogen werden, so müßte man die Abtheilung in Klassen auf folgende Art machen.

3|728,|059|100.

b. Soll aus einem Bruch, dessen Zähler und Nenner vollkommene Kubikzahlen sind, die Wurzel gezogen werden, so muß man aus beiden die Wurzel ziehen. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{729}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{4}{9}.$$

c. Soll die Kubikwurzel aus einem Bruch gezogen werden, dessen Zähler eine unvollkommene, der Nenner aber eine vollkommene Kubikzahl ist, so zieht man aus dem Zähler die Wurzel nach §. 13; aus dem Nenner aber, wenn sie nicht unmittelbar bekannt ist, nach §. 11. Dann dividirt man die erste durch die letzte. Ist z. B. die Kubikwurzel aus $\frac{3}{8}$ zu ziehen, so hat man

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{1{,}442\ldots}{2} = 0{,}721\ldots$$

d. Ist aber der Nenner eines Bruchs eine unvollkommene Kubikzahl (der Zähler sei vollkommen oder unvollkommen) so verwandelt man entweder den Bruch in Decimalbrüche, wenn es schnell angeht, oder die Periode desselben leicht zu übersehen ist. (Sollte z. B. aus $\frac{7}{11}$ die Kubikwurzel gezogen werden, so hat man $\frac{7}{11} = 0{,}63\,63\,63\ldots$ und man kann aus dem letzten die Wurzel nach §. 13. ausziehen). Oder man zerfällt den Nenner in seine einfachen Factoren, und sieht zu, was für Factoren man zusetzen müße, um ihn in eine vollkommene Kubikzahl zu verwandeln. Mit diesen Factoren multiplicirt man dann Zähler und Nenner, so kann die Wurzelausziehung nach c) verrichtet werden. (Sollte z. B. aus $2\frac{17}{48}$ die Kubikwurzel gezogen werden so richte man zuerst den Bruch ein. Man erhält $\frac{113}{48}$. Darauf zerfälle man 48 in seine einfachen Factoren, nämlich $48 = 2^4 3$. Um 2^4 in einen vollkommenen Kubus zu verwandeln, muß es mit $2^2 = 4$ multiplicirt werden. Aber 3 wird durch Multiplication mit 3^2 ein vollständiger Kubus. Man müßte also Zähler und Nenner von $\frac{113}{48}$ mit $2^2 3^2 = 36$ multipliciren. Indessen ist es hinreichend diese Multiplication nur im Zähler wirklich zu machen, im Nenner aber bloß anzudeuten. Auf diese Art erhält man

$$\frac{113}{48} = \frac{4068}{2^6 3^3};$$

also

$$\sqrt[3]{\frac{113}{48}} = \frac{\sqrt[3]{4068}}{2^2 3} = \frac{\sqrt[3]{4068}}{12}.$$

Man ziehe also aus 4068 nach §. 13. die Wurzel, und dividire sie durch 12.).

Zweiter Anhang zum elften Abschnitt.

Zusätze zu der Ausziehung der Quadratwurzeln.

A. Wie weit man sich auf die Ziffern einer berechneten Quadratwurzel verlassen könne.

§. 1. Lehrsatz.

1. Ist die gegebene Zahl fehlerfrei, so ist jede Ziffer der Wurzel richtig, wie weit man auch die Rechnung fortsetzen mag.

2. Ist aber die gegebene Zahl abgebrochen, so findet man eben so viel richtige Bruchziffern der Wurzel, als die gegebene Zahl enthält.

3. In beiden Fällen kann aber die letzte Hälfte der Bruchziffern bloß durch gemeine Division gefunden werden, wenn man denjenigen Rest welcher bleibt, nachdem man alle gegebenen Ziffern in Rechnung gezogen hat, durch das Doppelte der bis dahin gefundenen Wurzel dividirt.

Beweis.

1. Der erste Theil des Satzes ist unmittelbar deutlich, und bedarf keines Beweises.

2. Da bei der Wurzelausziehung immer zwei Bruchziffern zu einer Klasse vereinigt werden müssen, also die Anzahl der gegebenen Bruchziffern gerade sein muß, so nehmen wir an, die gegebene Zahl enthalte $2n$ Bruchziffern. Ist nun richtig abgebrochen, so weiß man, daß der Fehler, den wir z nennen wollen, kleiner sei, als eine Einheit der $2n$ten Bruchstelle, also

$$z < 10^{-2n}$$

(I. 10.). Da aber jede Klasse nur eine Ziffer der Wurzel giebt, so ist klar, daß wenn man die Wurzelausziehung so weit fortgesetzt hat, daß alle gegebene Ziffern in Rechnung gezogen sind, man nur n Bruchziffern der Wurzel gefunden haben wird; aber es ist unmittelbar deutlich, daß alle diese Ziffern vollkommen richtig sein werden, und daß also der noch fehlende Theil der Wurzel, den wir x nennen wollen, kleiner sei, als eine Einheit der nten Bruchstelle, oder

$$x < 10^{-n}.$$

Nun wollen wir den bis zur nten Bruchziffer gefundenen Theil der Wurzel a nennen, so ist die ganze Wurzel $a + x$, und ihr Quadrat $a^2 + 2ax + x^2$.

Die gegebene Zahl aber kann man jederzeit in zwei Stücke theilen, wovon das erste das Quadrat des schon gefundenen Theils der Wurzel also a^2 ist. Dieser Theil besteht aus der Summe aller während der Rechnung abgezogenen Stücke. Der zweite Theil ist der Rest, welcher bleibt, nachdem alle gegebenen Ziffern in Rechnung gezogen sind. Dieser Rest heiße r, so ist die gegebene Zahl $a^2 + r$.

Ist nun diese Zahl abgebrochen, so muß noch das oben benannte z hinzugefügt werden, um den vollständigen Werth der gegebenen Zahl in Zeichen vorzustellen. Dieser ist also $a^2 + r + z$. Da nun dieser dem vollständigen Quadrat der vollständigen Wurzel gleich sein muß, so haben wir

$$a^2 + r + z = a^2 + 2ax + x^2.$$

Hier fällt zuerst a^2 auf beiden Seiten weg, und es bleibt also

$$r + z = 2ax + x^2.$$

Wenn nun irgend eine Rechnung in einer bestimmten Anzahl von Bruchstellen geführt werden soll, so kann man nicht nur, sondern man muß (wenn man consequent bleiben will), jede Größe $= 0$ setzen, welche kleiner ist, als eine Einheit der letzten bestimmten Bruchstelle. Nehmen wir also an, daß die Wurzelausziehung bis zu der 2nten Bruchstelle fortgesetzt werden sollte, so müssen wir jede Größe $= 0$ setzen die kleiner ist, als eine Einheit der 2nten Stelle. Nun ist aber nach der obengemachten Annahme

$$z < 10^{-2n},$$

also $z = 0$ zu setzen. Ferner ist

$$x < 10^{-n}$$

also

$$x^2 < 10^{-2n}$$

folglich auch $x^2 = 0$; und so behalten wir bloß

$$r = 2ax; \text{ folglich } x = \frac{r}{2a},$$

und diese Formel ist streng richtig, sofern nicht mehr als $2n$ Bruchstellen gesucht werden. Da aber r und $2a$ gegebene Größen sind, so ist klar, daß der noch folgende Theil x der Wurzel, bis zu der $2n$ten Bruchstelle richtig gefunden werden könne.

Aber eben diese Formel

$$x = \frac{r}{2a}$$

zeigt, daß dazu keine Wurzelausziehung nöthig sei, sondern nur die Division des letzten Restes r durch $2a$, d. i. durch das Doppelte der bis zur $n$ten Bruchziffer gefundenen Wurzel.

Aber es ist leicht einzusehen, daß unsere bei Nr. 2. gemachten Schlüsse nicht bloß gültig sind, wenn die gegebene Zahl abgebrochen, sondern auch, wenn sie genau ist. Denn in diesem Fall ist z nicht bloß in Bezug auf die $2n$te Bruchstelle, sondern absolut $= 0$.

Man sieht also, daß der hier sich zeigende Rechnungsvortheil bei jeder Wurzelausziehung ohne Ausnahme gültig ist, indem man jederzeit nur die Hälfte der verlangten Bruchziffern durch wirkliche Wurzelausziehung zu berechnen braucht, die letzte Hälfte aber allezeit durch bloße Division gefunden werden kann.

B. Continuirliche Ausziehung von Quadratwurzeln.

§. 2. Erklärung.

Wenn man aus einer beliebigen Zahl die Quadratwurzel, aus dieser wieder die Wurzel, und so fort aus jeder gefundenen von Neuem die Wurzel auszieht, so nennt man diese wiederholte Arbeit, eine continuirliche Wurzelausziehung.

Es werden in den Anhängen zu mehreren der folgenden Abschnitte öfters Fälle vorkommen, wo es nöthig ist, den endlichen Erfolg einer continuirlichen Wurzelausziehung genau zu kennen. In den Abschnitten selbst werden wir uns begnügen, aus dem Zusatz bei §. 13. dieses Abschnitts die Folge zu ziehen, daß man in jedem Fall durch continuirliche Wurzelausziehung der Einheit desto näher komme, je öfter man die Wurzelausziehung wiederholt, und daß man daher durch hinlängliche Fortsetzung der Rechnung zu Wurzeln gelangen könne, die von der Einheit um weniger, als eine beliebige dekadische Brucheinheit verschieden sind. Diese Folgerung ist auch in sich so klar, daß sie für jeden befriedigend sein kann, der gerade nicht den Zweck hat, in die innersten Tiefen der Mathematik einzudringen. Dagegen ist eine genauere Zergliederung dieser Folgerung, und eine Zurückführung auf vollkommen evidente Sätze, Bedürfniß für jeden, der die Mathematik mit Vorliebe treibt, und die Strenge ihrer Schlüsse, so weit als nur möglich ist, zu verfolgen strebt. Wir wollen daher hier eine solche Zergliederung hinzufügen, die man hoffentlich vollkommen befriedigend finden wird.

§. 3. Grundsatz.

Wenn zwei gleichartige Größen A und a gegeben sind, von denen die erste A beliebig groß die andere a beliebig klein ist, so ist es in jedem Fall möglich ein Vielfaches von a zu finden, das größer ist als A.

Der Grund liegt unmittelbar im Begriff der Zahl, nach welchem man jede Größe 1, 2, 3 rc. mal setzen, und in dieser Vervielfältigung schlechthin ohne Gränzen fortschreiten kann.

§. 4. Zusatz.

Wenn man also wieder zwei gleichartige Größen A und a annimmt, die erste beliebig groß, die andere beliebig klein, und man setzt zu a nach und nach die Größen b, c, d, e ꝛc. hinzu, von denen die erste auch beliebig klein, jede folgende aber (um so wenig als man will) größer wie die vorhergehende ist, so muß man nach einer Anzahl solcher Additionen um so schneller zu einem solchen Aggregat gelangen, das größer ist als A, je schneller die Größen b, c, d ꝛe. wachsen.

Denn da es nach §. 3. schon ein Vielfaches von b giebt, das größer ist als A, so muß es um so mehr ein Aggregat der Größen a, b, c, d, e ꝛc. geben, welches größer als A ist, da von c an, alle Theile größer sind als b.

§. 5. Zusatz.

Wenn man daher zu einer beliebig kleinen Größe a, einen beliebig kleinen, aber bestimmt den nten Theil derselben hinzusetzt; zur Summe wieder den nten Theil dieser Summe; zu der zweiten Summe wieder den nten Theil derselben; und so continuirlich fort, so muß man nothwendig einmal zu einer Summe kommen, die größer ist, als irgend eine gegebene Größe A.

Denn da jede folgende Summe größer ist, als die vorhergehende, so ist auch der nte Theil jeder folgenden Summe größer als der nte Theil der vorhergehenden. Jeder neue Theil, der hinzufügt wird, ist also größer als der vorhergehende, und man muß daher nach §. 4. nothwendig einmal zu einer Summe kommen die größer ist als A, wie groß auch A sein mag.

§. 6. Zusatz.

Hieraus folgt aber umgekehrt, daß wenn man von einer beliebig großen Größe B, einen beliebig kleinen n ten Theil wegnimmt, vom Rest wieder den n ten Theil des Restes, vom zweiten Rest wieder den n ten Theil desselben, und so continuirlich fort von jedem Rest seinen n ten Theil, so muß man nach einer gewissen Anzahl von Subtractionen nothwendig einmal zu einem Rest gelangen, der kleiner ist, als irgend eine noch so kleine gegebene Größe a.

Da man von einer beliebig kleinen Größe a anfangend durch continuirliche Hinzulegung eines bestimmten Theils nach §. 5. zu jeder noch so großen Summe B gelangen kann, so muß man, wenn man solchen Weg rückwärts macht, und von der beliebig großen B continuirlich einen bestimmten Theil abzieht, nothwendig zuletzt über jede Gränze der Kleinheit hinauskommen.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn eine Zahl a, die um **so wenig als man will größer als Eins ist**, durch wiederholte Multiplicationen, von der ersten zur zweiten, dritten, vierten ꝛc. Potenz erhoben wird (VIII. 2.), so kann man nach einer gewissen Anzahl solcher Multiplicationen jederzeit zu einer Potenz gelangen, welche größer ist, als irgend eine beliebige Größe A.

Beweis. Da a um eine beliebige Kleinigkeit 1 übertreffen soll, so setze man

$$a = 1 + \frac{1}{n},$$

wo man sich unter n eine beliebig große Zahl vorstellen kann. Multiplicirt man nun a mit

$$1 + \frac{1}{n},$$

so ist das Product

$$a + \frac{1}{n} a$$

(III. 9.), und dieses ist also um den $n$ten Theil von a größer als a. Da aber a und

$$1 + \frac{1}{n}$$

einerlei ist, so ist dieses Product die zweite Potenz von a, oder a^2, und es ist also $a^2 > a$. Man multiplicire ferner a^2 mit

$$1 + \frac{1}{n},$$

so ist das Product

$$a^2 + \frac{1}{n} a^2 = a^3.$$

Es ist also wieder $a^3 > a^2$ und zwar um

$$\frac{1}{n} a^2.$$

Da nun $a^2 > a$ war, so ist auch

$$\frac{1}{n} a^2 > \frac{1}{n} a$$

Also ist der Überschuß der dritten Potenz über die zweite größer als der Überschuß der zweiten über die erste.

Erhebt man auf die nämliche Art die dritte Potenz schrittweise zur vierten, fünften, sechsten rc. so ergiebt sich, daß der Unterschied jeder zwei auf einander folgenden Potenzen größer ist, als der Unterschied der beiden nächstvorhergehender.

Erhebt man also a durch wiederholte Multiplicationen zu Potenzen, so erhalten dieselben mit jedem Schritt einen größern Zuwachs. Wird also nur die Arbeit oft genug wiederholt, so muß man vermöge §. 5. nothwendig einmal zu einer Potenz von a gelangen, die größer ist, als irgend eine gegebene Größe A.

§. 8. Zusatz.

Weit schneller wird man also zu einem solchen Resultat gelangen können, wenn man die Größe a erst mit sich selbst multiplicirt, dann dieses Quadrat wieder nicht mit a, sondern mit sich selbst, also mit einem größern Factor, das nunmehrige Product wieder mit sich selbst multiplicirt, kurz wenn man a continuirlich ins Quadrat erhebt.

Man sieht nämlich leicht, daß durch eine solche continuirliche Erhebung ins Quadrat viele Potenzen, die man durch continuirliche Multipliaation erhält, übersprungen werden. Denn $aa = a^2$; $a^2a^2 = a^4$; $a^4a^4 = a^8$ u. s. f.

§. 9. Zusatz.

Da also eine Größe $1 + \frac{1}{n}$ die von Eins so wenig, als man will, verschieden ist, durch continuirliche Erhebung ins Quadrat, jede gegebene Größe übersteigen kann, so folgt, daß wenn man mit einer beliebig großen Zahl A die umgekehrte Arbeit vornimmt, nämlich continuirlich Quadratwurzeln auszieht, man mit jedem Schritt nicht nur der Einheit näher kommen, sondern nach hinlänglich oftmaliger Wiederholung zu einer Wurzel gelangen könne, die von 1 um weniger als irgend eine gegebene Kleinigkeit, z. B. um weniger als eine beliebige dekadische Bruchеinheit verschieden ist.

Um sich den Sinn, und den Erfolg dieser Arbeit recht anschaulich zu machen, wähle man eine beliebig große Zahl, und ziehe aus derselben continuirliche Wurzeln. Man wird finden, daß man sehr bald zu Wurzeln kommt, die vor dem Komma 1 haben, also der Einheit schon nahe sind. Fährt man fort, so erhält man Wurzeln die nach dem Komma 1, 2, 3, 4 ꝛc. Nullen haben, also Eins um weniger als 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ꝛc. übertreffen. Vor der Rechnung vergleiche man aber noch den folgenden Paragraphen.

§. 10. Zusatz.

Was oben §. 1. erwiesen worden, bietet bei einer solchen continuirlichen Wurzelausziehung wichtige Vortheile dar. Denn gesetzt, man wollte aus 10 continuirliche Wurzeln in 12 Bruchziffern ziehn, und dieses so lange, bis man zu einer Wurzel käme, die um keine Brucheinheit der neunten Ordnung größer als Eins wäre; so kann man

1. bei jeder Wurzelausziehung die letzten sechs Bruchziffern durch bloße Division berechnen;

2. wenn man so weit gekommen ist, daß man sechs Nullen hinter dem Komma hat, so ist die Arbeit so gut wie beendigt: denn die folgenden Wurzelausziehungen bestehen lediglich darin, daß man die Bruchziffern von der siebenten bis zwölften Stelle continuirlich durch 2 dividirt.

Ist man nämlich so weit gekommen, daß man n Nullen hinter dem Komma hat, und man nennt den Betrag der noch zu suchenden n Ziffern x, so ist die gesuchte Wurzel $1 + x$ also ihr Quadrat (d. h. die Zahl, aus der man eben die Wurzel auszieht) $1 + 2x + x^2$. Da aber

$$x < 10^{-n}, \text{ so ist}$$

$$x^2 < 10^{-2n};$$

also, so fern man nicht weiter als auf 2n Bruchziffern rechnen will, $x^2 = 0$. Also ist die Zahl aus der man die Wurzel auszieht $1 + 2x$, und ihre Wurzel ist $1 + x$, und man findet diese also, wenn man das, was die Zahl, mit der man eben beschäftigt ist, über 1 enthält ($2x$, nämlich die sechs letzten Ziffern), mit 2 dividirt.

§. 11. Lehrsatz.

Wenn man eine Größe a, die um etwas beliebig Geringes kleiner als Eins ist, durch wiederholte Multiplicationen von der ersten zur zweiten, dritten, vierten rc. Potenz erhebt, so ist jede Potenz kleiner als die vorhergehenden, und nach hinlänglich oftmaliger Wiederholung solcher Multiplicationen kann man jederzeit zu einer Potenz gelangen, die kleiner ist, als irgend eine noch so kleine gegebene Größe.

Beweis. Da a kleiner sein soll, als 1, so setzen wir

$$a = 1 - \frac{1}{n},$$

wo man sich unter n irgend eine beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, vorstellen kann.

Multiplicirt man nun a mit

$$1 - \frac{1}{n},$$

so ist das Product

$$a - \frac{1}{n} a;$$

aber dieses Product ist $= a^2$, weil a und

$$1 - \frac{1}{n}$$

einerlei ist. Es ist also klar, daß a^2 um

$$\frac{1}{n} a$$

kleiner ist als a. Man multiplicire ferner a^2 mit

$$1 - \frac{1}{n},$$

so erhält man

$$a^2 - \frac{1}{n} a^2 = a^3.$$

Es ist also a^3 um

$$\frac{1}{n} a^2$$

kleiner als a^2. Eben so ergiebt sich, daß a^4 um

$$\frac{1}{n} a^3$$

kleiner sei als a^3, und überhaupt daß jede Potenz um $\frac{1}{n}$ der vorhergehenden kleiner sei als diese.

Da also von jeder Potenz continuirlich gleichvielste Theile abgezogen werden, so muß man nach §. 6. nothwendig einmal zu einer Potenz kommen, die kleiner ist, als irgend eine gegebene noch so kleine Größe.

§. 12. Zusatz.

Noch schneller wird man also zu einem solchen Resultat gelangen, wenn man die gegebene Größe a continuirlich ins Quadrat erhebt.

Man vergleiche die bei §. 8. gegebene Erläuterung.

§. 13. Zusatz.

Da also jede Größe $a = 1 - \frac{1}{n}$ die von der Einheit noch so wenig verschieden ist, nicht nur in jeder Potenz kleiner wird, als in der vorhergehenden, sondern auch durch continuirliche Erhöhung ins Quadrat, unter jede Gränze der Kleinheit herabsinkt, so folgt, daß, wenn man umgekehrt aus einer beliebig kleinen Größe a continuirlich Quadratwurzeln zieht, jede folgende größer als die vorhergehende sein wird, daß aber 1 die Gränze sei, der sie sich continuirlich nähern, und welcher sie so nahe gebracht werden können, daß ihr Unterschied von Eins kleiner wird, als irgend eine gegebene Größe, und namentlich, als irgend eine dekadische Bruchenheit.

Auch hier ist es zweckmäßig sich den Sinn und Erfolg dieser Arbeit durch eine wirkliche Rechnung anschaulich zu machen. Man wähle zu dem Ende einen beliebig kleinen Decimalbruch (z. B. 0,003 oder 0,047, oder was man sonst will), und ziehe daraus continuirlich Quadratwurzeln, so wird es sichtbar werden, daß und warum die Wurzeln immer größer werden. Auch wird es anschaulich werden, daß sie nie bis zu der Größe 1 gelangen können. Jede Wurzel wird sich mit 0 Ganzen anfangen; die Bruchziffern aber werden immer zunehmen. Nach einigen Wurzelausziehungen wird sich die Wurzel mit 0,9; weiterhin mit 0,99; noch weiter mit 0,999 rc. anfangen d. h. die Wurzeln werden um weniger als 0,1: 0,01; 0,001 rc. von der Einheit abweichen. Vor der Rechnung ist aber noch der folgende Paragraph durchzugehen.

§. 14. Zusatz.

Auch bei dieser Rechnung bietet das, was §. 1. erwiesen worden, ähnliche Rechnungsvortheile dar. Denn

1. kann man die letzte Hälfte der Bruchziffern durch bloße Division finden, und

2. wenn man so weit gekommen ist, daß die erste Hälfte der Bruchziffern mit Neunen gefüllt ist, so findet man die letzte Hälfte der Ziffern für die nächste Wurzel, wenn man eine Einheit der letzten Neun zu den folgenden Ziffern hinzunimmt, und denn durch 2 dividirt. Wäre z. B. aus 0,9999 3612 die Wurzel zu ziehen, so hat man, um die vier letzten Ziffern der Wurzel zu finden, nur 13 612 durch 2 zu dividiren. Sie ist also 0,9999 6806.

Der letzte Theil dieses Zusatzes bedarf einer nähern Erörterung.

Wenn eine continuirliche Wurzelausziehung durchgehends in $2n$ Bruchziffern geführt werden soll, z aber eine Größe bedeutet die kleiner ist als eine Einheit der $n$ten Ordnung, so ist $(1 - z)^2 = 1 - 2z$. Denn obgleich zu $1 - 2z$ noch $+ z^2$ hinzukommen sollte, so ist doch z^2 kleiner als eine Einheit der $2n$ten Ordnung, und muß also $= 0$ gesetzt werden, so fern die Rechnung in nicht mehr als 2n Ziffern geführt werden soll. Hieraus folgt aber umgekehrt, daß unter den gemachten Voraussetzungen $\sqrt{(1-2z)} = 1-z$.

Soll man also die Wurzel aus einer Zahl ziehen, die vor dem Komma eine Null, nach demselben aber 2n Ziffern hat, von denen die erste Hälfte bloß aus Neunen, die letzte aber aus beliebigen Ziffern besteht, so ist solche Zahl kleiner als Eins, aber der Unterschied ist kleiner als eine Einheit der nten Bruchordnung. Sie ist also so beschaffen, daß man die Wurzel aus derselben nach der eben entwickelten leichten Regel ausziehen kann. Zu dem Ende müßte man eigentlich folgende Rechnung machen. Man müßte die Zahl von 1 subtrahiren, um den Werth von 2z zu finden; diesen Werth müßte man durch 2 dividiren, um den Werth von z zu erhalten. Endlich müßte man diesen Werth wieder von 1 abziehen, so würde man die Wurzel 1 — z in einer einzigen Zahl haben. Zu mehrerer Deutlichkeit zeigt die folgende Rechnung, wie nach dieser Regel aus der im Paragraphen angegebenen Zahl die Wurzel gezogen werden müßte.

$$\begin{array}{rl} & 1{,}0000\;0000 \\ 1-2z = & \underline{0{,}9999\;3612} \\ 2z = & 0{,}0000\;6388 \\ z = & 0{,}0000\;3194 \\ & \underline{1{,}0000\;0000} \\ 1-z = & 1{,}9999\;6806 \end{array}$$

Man kann aber die hiebei vorkommende doppelte Subtraction ersparen, wenn man so rechnet, wie oben im Paragraphen geschehen ist; und es muß hier noch gezeigt werden, daß man auf diese Art kein anderes Resultat, als nach der eben erwiesenen Regel erhalten könne.

Bestehen also die ersten n Bruchziffern aus lauter Neunen, so ist ihr Werth = 1 — einer Einheit der nten Stelle. Läßt man aber von der letzten Neune noch eine Einheit weg, um sie der n + 1ten Ziffer zuzulegen, so ist der erste Theil der Zahl = 1 — 2 Einheiten der nten Stelle, d. i.

$$1 - 2 \,.\, 10^{-n}.$$

Das zweite Stück der Zahl aber, welches aus den letzten n Ziffern mit Einschluß einer Einheit der nten Stelle besteht, wollen wir x nennen. Unsere ganze Zahl ist also

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + x$$

In dieser Form verrichte man nun die Wurzelausziehung nach der oben erwiesenen Regel, nach welcher $1 - z$ die Wurzel war, wenn das Quadrat $1 - 2z$ war. Man setze also

$$1 - 2z = 1 - 2 \cdot 10^{-n} + x$$

$$\text{also } 2z = 2 \cdot 10^{-n} - x$$

$$z = 10^{-n} - \frac{x}{2}$$

$$1 - z = 1 - 10^{-n} + \frac{x}{2}$$

Es ist aber

$$1 - 10^{-n}$$

eine Zahl die vor dem Komma 0, und nach demselben n Neunen hat, und $\frac{x}{2}$ ist die Hälfte der übrigen n Ziffern, nachdem man zu diesen eine Einheit der nten Stelle hinzugefügt hat.

Mit Beobachtung dieser Vortheile ist eine continuirliche Wurzelausziehung eine wohl ausführbare Sache, wenn man die Wurzelausziehugen auf nicht mehr als etwa acht Bruchziffern treibt. Wählt man dann eine Zahl (etwa unter 100), so wird man nach einer mäßigen Anzahl von Wurzelausziehungen zu Zahlen gelangen, die vor dem Komma 0, und nach demselben vier Neunen haben, worauf die fernere Wurzelausziehung nach der hier entwickelten Regel sehr schnell so weit fortgesetzt werden kann, bis man zu einer Wurzel kommt, die nach dem Komma lauter Neunen hat, also dem Werthe von 1 so nahe kommt, als es in acht Bruchziffern möglich ist.

Zwölfter Abschnitt.

Von Potenzen und Wurzeln im Allgemeinen.

A. Potenzerhebung eingliedriger Formeln, und Wurzelausziehung aus derselben.

§. 1. Erklärung.

Obgleich die Begriffe von Potenzen und Wurzeln schon oben (VIII. 3.) erklärt worden, so ist es doch nothwendig, sie hier noch schärfer zu bestimmen, da sie hier der eigentliche Gegenstand der Betrachtung, nicht wie dort, bloße Nebenbegriffe sind.

1. Ein Product der Einheit, mit einer beliebigen Anzahl gleicher Faktoren, nennt man eine Potenz eines solchen Factors. Die Anzahl der Factoren heißt der Grad oder die Ordnung der Potenz. Daß eine Potenz gemacht werden solle, deutet man dadurch an, daß man neben die gegebene Größe, die man die Wurzelgröße nennt, rechts oben eine Zahl schreibt, welche den Grad der Potenz anzeigt. Solche Zahl heißt der Exponent der Potenz. Hiebei wird also die Wurzelgröße als gegeben, die Potenz hingegen, als gesucht betrachtet.

2. Betrachtet man hingegen eine gegebene Größe als eine Potenz eines gewissen Grades, so nennt man den Factor dessen Potenz sie sein soll, eine Wurzel des so vielsten Grades, als Factoren angenommen sind. Daß eine Wurzel gesucht werden solle deutet man da-

durch an, daß man vor die gegebene Größe das Zeichen $\sqrt{\ }$, und über dasselbe eine Zahl setzt, welche anzeigt, in wieviele gleiche Factoren man die Größe zerfället denken soll. Eine solche Zahl heißt der Wurzel-Exponent.

3. Bei beiden Bezeichnungen merke man noch, daß sich sowohl Potenz-Exponenten, als Wurzel-Zeichen immer nur auf die Größe beziehen, neben welcher sie unmittelbar stehen. Soll daher ein solches Zeichen sich auf ein Product, oder auf einen Quotienten, oder auf eine mehrgliedrige Formel beziehen, so muß dieselbe in Klammern eingeschlossen, und der Exponent oder das Wurzelzeichen außerhalb der Klammer gesetzt werden.

Im Hefte ist jede dieser drei Nummern durch Beispiele zu erläutern, entweder in allgemeinen Zeichen, oder in bestimmten Zahlen, oder in beiden zugleich.

Anmerkungen.

1. Der Potenz-Exponent 1 wird selten, der Wurzel-Exponent 1 nie gebraucht; aber es ist leicht einzusehen, was der Sinn von beiden sein würde.
2. Der Wurzel-Exponent 2 wird in der Regel nicht geschrieben.
3. Die zweite und dritte Potenz nennt man auch Quadrat und Kubus, und ihre Wurzeln Quadrat- und Kubik-Wurzeln.
4. Eine Größe, die unter einem Exponenten oder Wurzelzeichen steht, nennt man die Wurzelgröße. Bei der Art von Potenzen, die hier erklärt worden, fällt die Bedeutung der Wörter Wurzel und Wurzelgröße zusammen. Späterhin (§. 21. ff.) trennen sie sich.
5. Wir werden anfänglich die Exponenten, Potenzen und Wurzeln bloß als absolute Größen betrachten, ohne den Begriff des Gegensatzes auf sie anzuwenden.

§. 2. Zusatz.

Die Potenzirung einer Größe kann verrichtet werden,

1. durch bloße Hinzufügung eines Exponenten;

2. durch ausdrückliches Nebeneinanderschreiben aller Factoren;

3. bei Zahlen auch durch wirkliche Multiplication.

Jede Nummer ist im Hefte durch Beispiele zu erläutern.

Anmerkung. Im vorigen Abschnitt ist gezeigt worden, wie man Quadratzahlen (und im Anhange, wie man Kubikzahlen) auf eine eigenthümliche Art berechnen könne. Im Abschnitt von den Logarithmen wird eine allgemeinere sehr leichte Methode erklärt werden, jede Potenz irgend einer Zahl durch eine einzige Rechnung zu finden.

§. 3. Zusatz.

Eine Wurzelausziehung kann man verrichten,

1. durch Vorsetzung des gehörigen Wurzelzeichens;

2. im vorigen Abschnitt ist gezeigt worden, wie man Wurzeln des zweiten Grades (und im Anhang, wie man Wurzeln des dritten Grades) ausziehen könne. Erst im Abschnitt von den Logarithmen kann gezeigt werden, wie man aus jeder Zahl Wurzeln jeder Ordnung ausziehen könne.

Im Hefte ist bloß Nr. 1. durch Beispiele zu erläutern.

Zusätze.

1. Potenzerhebung und Wurzelausziehung sind entgegengesetzte Rechnungen, deren eine die andere aufhebt. Soll daher eine Wurzel zu der sovielten Potenz erhoben werden, als ihr Exponent anzeigt, so fällt das Wurzelzeichen weg. Und soll umgekehrt aus einer Potenz die

Wurzel der sovielten Ordnung gezogen werden, als der Exponent anzeigt, so fällt dieser weg. Beides läßt sich kurz und deutlich in Zeichen so ausdrücken:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;\ \sqrt[n]{(a^n)} = a.$$

2. Da die Erhebung einer absoluten Größe zu irgend einer Potenz, nur einen einzigen Zahlenwerth dieser Potenz geben kann, so hat auch umgekehrt jede Wurzel einer absoluten Zahl nur einen einzigen absoluten Zahlenwerth.

Anmerkung. Daß man hier aus Zahlen noch nicht Wurzeln höherer Ordnungen ausziehen kann, hält den Fortgang der Buchstabenrechnung nicht auf, weil in derselben die bloße Andeutung einer Rechnung durch Zeichen, schon für die Rechnung selbst gilt.

§. 4. Grundsatz.

1. Wenn gleiche Größen zu Potenzen desselben Grades erhoben werden, so sind auch diese gleich.

2. Und umgekehrt: wenn aus zwei gleichen Größen Wurzeln derselben Ordnung gezogen werden, so sind die absoluten Werthe dieser Wurzeln gleich.

Es kann nicht schwer sein, ein Paar dem Werthe nach gleiche, aber der Form nach verschiedene Ausdrücke zu finden, durch die man beide Sätze erläutern kann.

Daß Nr. 2. eine unmittelbare Folge aus Nr. 1. ist, sieht man leicht ein. (Siehe §. 3. Zus.)

§. 5. Lehrsatz.

Wenn ein Product von zwei (oder mehreren) Factoren zu einer Potenz erhoben werden soll, so ist es einerlei, ob man erst multiplicirt, und dann das ganze

Product zu der verlangten Potenz erhebt; oder ob man erst jeden Factor einzeln zu eben der Potenz erhebt, und dann alle diese Potenzen mit einander multiplicirt.

Oder in Zeichen: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Anleitung zum Beweise. Man setze in den Formeln $(ab) = a \cdot b$, für n irgend eine bestimmte (kleine) Zahl, und erhebe jede nach §. 2. n. 2. zur n ten Potenz, so zeigt sich daß beide Formeln einerlei Werth haben.

Bei der Ausführung dieses Beweises, kann man beliebig für die Wurzelgrößen unbestimmte Zeichen (wie a und b) beibehalten, oder auch bestimmte Zahlen setzen.

Auch ist ein Beispiel von mehr als zwei Factoren beizufügen.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn aus einem Product von zwei (oder mehreren) Factoren eine Wurzel gezogen werden soll, so ist es einerlei, ob man erst diese Größen multiplicirt und aus dem Product die Wurzel zieht; oder ob man umgekehrt erst aus jedem Factor die Wurzel zieht, und dann diese Wurzeln zusammen multiplicirt.

Oder in Zeichen: $\sqrt[n]{(ab)} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Anleitung zum Beweise. Man erhebe beide Formeln nach §. 3. zur n ten Potenz, so fällt die Gleichheit beider Formeln nach §. 4. n. 1. in die Augen.

Bei der Ausführung dieses Beweises, kann man wieder beliebig für die Wurzelgrößen unbestimmte Zeichen beibehalten, oder bestimmte Zahlen setzen.

Auch ist ein Beispiel von mehr als zwei Factoren beizufügen.

§. 7. Zusatz.

1. Wenn daher aus einem Product eine Wurzel gezogen werden soll, und es findet sich unter den Factoren

einer (oder mehrere), aus welchen sich (nach §. 3. Zus.) die Wurzel wirklich ausziehen läßt, so kann man solche Wurzeln vor das Wurzelzeichen setzen.

Oder in Zeichen:

Statt $\sqrt[n]{a^n b}$ kann man setzen $a\sqrt[n]{b}$.

2. Und umgekehrt, wenn ein Product aus Factoren besteht die zum Theil kein Wurzelzeichen haben, zum Theil unter einem Wurzelzeichen stehen, so kann man die ersten zu derselben Potenz erheben, welche der Wurzelexponent anzeigt, und hinter das Wurzelzeichen setzen.

Oder in Zeichen:

Statt $a\sqrt[n]{b}$, kann man jederzeit setzen $\sqrt[n]{a^n b}$.

Beides ist im Hefte durch Beispiele zu erläutern; wobei besonders Zahlenbeispiele folgender Art zu empfehlen sind.

Zu Nr. 1.

$\sqrt{28} = \sqrt{(4.7)} = 2\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{(8.3)} = 2\sqrt{3}$ rc.

Zu Nr. 2.

$4\sqrt{5} = \sqrt{(16.5)} = \sqrt{80}$; $3\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(27.4)} = \sqrt[3]{108}$ rc.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn ein Quotient oder Bruch zu einer Potenz erhoben werden soll, so ist es einerlei, ob man erst wirklich dividirt, und dann den Quotienten in die verlangte Potenz erhebt, oder ob man umgekehrt erst beide Bestandtheile des Bruchs zu der verlangten Potenz erhebt, und dann diese Potenzen dividirt.

Oder in Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Anleitung zum Beweise. Man setze in den Formeln für n eine beliebige (kleine) Zahl, und verrichte auf beiden Seiten die dadurch angedeutete Potenzirung nach §. 2. n. 2., so wird die Gleichheit beider Formeln sichtbar.

§. 9. Lehrsatz.

Wenn aus einem Quotienten oder Bruch eine Wurzel gezogen werden soll, so ist es einerlei ob man erst wirklich dividirt, und aus dem Quotienten die Wurzel zieht, oder ob man umgekehrt erst aus jedem Bestandtheile des Bruches die verlangte Wurzel zieht, und hernach diese Wurzeln dividirt.

Oder in Zeichen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Anleitung zum Beweise. Man erhebe beide Formeln nach §. 3. Zus. 1. zur nten Potenz, so erhält man Ausdrücke, aus deren Gleichheit man nach §. 4. auf die Gleichheit der gegebenen schließen kann.

§. 10. Zusatz.

In dem Vorhergehenden ist eine vollständige Anweisung enthalten, wie man jede Potenz, desgleichen die Wurzel jeder Ordnung von jeder eingliedrigen Formel darstellen könne.

Eingliedrige Formeln sind entweder Producte von Hauptgrößen und Coefficienten, oder Quotienten solcher Größen, und in beiden Fällen ergiebt sich aus den vorhergehenden Sätzen, wie man sie potenziren, oder aus ihnen Wurzeln ziehen müsse. Es ist nöthig, diese Arbeit zu üben. Daher sind im Haupthefte einige wenige Beispiele zur Erläuterung im Übungshefte aber eine größere Menge zur Erlangung der nöthigen Fertigkeit, zu rechnen.

Da hier alle Größen nur nach ihrem absoluten Werthe betrachtet werden (§. 1. Anm. 5.), so giebt man den eingliedrigen Formeln am besten gar kein Vorzeichen, oder +.

B. Von der absoluten Größe der Potenzen und Wurzeln.

§. 11. Lehnsätze.

1. Ein Product von zwei oder mehreren Factoren, die sämmtlich größer als Eins sind, ist größer als jeder Factor, und überhaupt desto größer, je größer die Factoren sind.

2. Ein Product von Factoren hingegen, die sämmtlich kleiner als Eins sind, ist kleiner als jeder Factor, und überhaupt desto kleiner, je kleiner die Factoren sind.

Der Beweis beider Sätze ergiebt sich leicht aus dem bloßen Begriffe der Multiplication (III. 3.). Um ihn auszuführen nehme man zuerst nur zwei Factoren an, wobei man beliebig unbestimmte Zeichen, oder bestimmte Zahlen brauchen kann. Der Schluß auf drei oder mehrere Factoren ist dann leicht.

Anmerkungen. Dem Inhalt nach gehören diese Sätze in den dritten Abschnitt. Deswegen werden sie hier unter dem Namen Lehnsätze (entlehnte Sätze) aufgeführt.

§. 12. a. Zusatz.

Alle Potenzen, und alle Wurzeln von Eins, sind gleich Eins.

Die Richtigkeit ergiebt sich aus III. 3.

§. 12. b. Zusatz.

Von Zahlen, welche größer als Eins sind, bemerke man folgende beiden Sätze:

1. Jede Potenz derselben ist größer als die Zahl und überhaupt desto größer, je größer der Exponent, oder die Zahl ist.

2. Jede Wurzel einer solchen Zahl, ist kleiner als die Zahl, aber größer als Eins. Es kommt aber die Wurzel der Einheit desto näher, je größer der Wurzel-Exponent ist, oder je näher die Zahl selbst der Einheit kommt.

Nr. 1. ergiebt sich aus §. 11. n. 1. Denn ist eine Zahl größer als 1, so besteht jede Potenz derselben aus Factoren die größer als 1 sind. Dieses ist durch Beispiele zu erläutern.

Nr. 2. ist eine unmittelbare Folge aus Nr. 1. Denn wenn durch Potenzirung einer Zahl die > 1 eine noch größere Zahl erhalten wird, so ist klar, daß die Wurzel jeder größern Zahl zwischen der Zahl und der Einheit liegen müsse. Auch dieses ist durch Beispiele deutlich zu machen.

Anmerkung. Sehr anschaulich wird der Sinn beider Sätze, wenn man sich vorstellt, daß eine Zahl, die um noch so wenig größer als 1 ist, (z. B. 1,000001) schrittweise zur zweiten, dritten, vierten ꝛc. Potenz erhoben würde. Es ist klar daß jede folgende Potenz größer ist als die vorhergehende (z. B. bei der obigen Zahl, um 1 Milliontel der vorhergehenden), und daß die Zunahme mit jedem Schritt größer wird. Da man nun in Gedanken die Potenzirung ohne Ende fortsetzen kann, so können die Potenzen auch nach und nach jede Gränze übersteigen.

Zieht man dagegen aus einer noch so großen Zahl in Gedanken nach der Reihe Wurzeln der zweiten, dritten, vierten ꝛc. Ordnung, so liegt jede folgende Wurzel der Einheit näher, als die vorhergehende, und würden die Wurzelausziehungen weit genug fortgesetzt, so würde man der Einheit so nahe kommen können, als man will.

§. 12. c. Zusatz.

Von Zahlen, welche kleiner als Eins sind, bemerke man folgende beiden Sätze:

1. Jede Potenz derselben ist noch kleiner als die Zahl, und überhaupt desto kleiner, je höher die Potenz oder je kleiner schon die Zahl an sich ist.

2. Jede Wurzel einer solchen Zahl aber, ist größer als die Zahl, aber kleiner als Eins. Es kommt aber eine solche Wurzel der Einheit desto näher je höher der Wurzelexponent ist, oder je näher schon die Zahl an sich der Einheit kommt.

Der erste Theil folgt unmittelbar aus §. 11. n. 2. Denn jede Potenz einer solchen Zahl ist allezeit das Product von Factoren, die kleiner als 1 sind. Dieses ist durch Beispiele zu erläutern.

Der zweite Theil ist eine unmittelbare Folge des ersten. Denn wenn sich eine solche Zahl durch Potenzirung in Ansehung der Kleinheit weiter von Eins entfernt als die Zahl, so muß umgekehrt die Wurzel immer zwischen der Zahl und der Einheit liegen. Und da sich eine Potenz desto weiter von der Einheit entfernt, je höher der Exponent ist, so muß umgekehrt eine Wurzel sich der Einheit um so mehr nähern, je höher der Wurzelexponent ist.

Anmerkungen.

1. Durch ähnliche Erläuterungen als in der Anmerkung zu §. 12. b. können auch diese Sätze der Anschaulichkeit näher gebracht werden.

2. Aus §. 12. b. n. 2. und §. 12. c. n. 2., ergiebt sich, daß sich alle Wurzeln dem Werthe 1 ohne Ende nähern, je größer man den Wurzelexponenten macht, die Wurzelgröße sei größer oder kleiner als 1.

C. Von den einfachen Rechnungsarten mit potenzirten Größen.

§. 13. Anmerkung.

Die Addition und Subtraction potenzirter Größen hat keine besondern Regeln, sondern muß in jedem Fall nach den allgemeinen Regeln der Buchstabenrechnung verrichtet werden.

Demohngeachtet ist es nützlich, sich in der Anwendung der allgemeinen Regeln auf potenzirte Größen zu üben, wobei die verschiedenen Fälle, welche nach VII. 15. und 22. bei der Addition und Subtraction eingliedriger Formeln vorkommen können, zu berücksichtigen sind.

Nach allen diesen Fällen sind im Hefte Beispiele zu rechnen. Auch sind einige Zerfällungen mehrgliedriger Formeln durch potenzirte Factoren beizufügen. (M. s. die Beispielsammlung von Meier Hirsch. 2te Ausgabe S. 23. ff.)

§. 14. Aufgabe.

Zwei potenzirte Größen zu multipliciren.

Auflösung.

1. Haben sie ungleiche Wurzelgrößen, so geschieht die Multiplication nach den allgemeinen Regeln VIII. 6. 7.
2. Haben sie aber gleiche Wurzelgrößen, so ist das Product eine Potenz derselben Wurzelgröße, und ihr Exponent ist die Summe von den Exponenten der Factoren. Oder in allgemeinen Zeichen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Nr. 1. ist bloß durch ein Beispiel zu erläutern.

Nr. 2. bedarf eines Beweises, der nach folgender Anleitung keine Schwierigkeit hat. Statt m und und n setze man beliebige (kleine) ganze Zahlen, und verrichte dann die Potenzirung, welche jeder dieser Exponenten vorschreibt nach §. 2. n. 2.; die Multiplication beider Potenzen aber nach den allgemeinen Multiplicationsregeln, so wird die Richtigkeit der Auflösung leicht in die Augen fallen.

Im Übungshefte sind viele Beispiele von mehr als zwei potenzirten Factoren, vermischt mit unpotenzirten und Coefficienten zu rechnen.

§. 15. Zusatz.

Wenn man den Exponenten einer Potenz beliebig zerstückelt, so kann die Potenz selbst in eben so viele

Factoren zerfället werden, deren jeder eine Potenz derselben Wurzelgröße ist, und eins der Stücke des Exponenten zum Exponenten hat.

Oder in Zeichen: Wenn $m = p + q + r$, so ist

$$a^m = a^{p+q+r} = a^p \,.\, a^q \,.\, a^r.$$

Im Hefte ist zu zeigen, wie dieses aus §. 14. folge; im Übungshefte sind aber mehrere Beispiele zu rechnen.

§. 16. Aufgabe.

Eine potenzirte Größe durch eine solche zu dividiren.

Auflösung.

1. Haben beide Bestandtheile ungleiche Wurzelgrößen, so geschieht die Rechnung nach den allgemeinen Divisionsregeln VIII. 12.
2. Haben sie aber gleiche Wurzelgrößen, so folgt aus §. 14. (mit Rücksicht auf IV. 1.), daß der Quotient eine Potenz derselben Wurzelgröße sei, deren Exponent gefunden wird, wenn man von dem Exponenten des Dividendus den des Divisors abzieht. Oder in allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Da aber die Exponenten in diesem Abschnitt als absolute Zahlen betrachtet werden, so läßt sich diese Auflösung geradezu nur dann anwenden, wenn n nicht größer ist als m, sei es m gleich oder kleiner. Ist aber $n > m$, so ist der Quotient auszudrücken durch:

$$\frac{1}{a^{n-m}}.$$

Arbeit.

Nr. 1. bedarf keines Beweises, sondern nur eines Beispiels.

Bei Nr. 2. ist zu zeigen, wie die Hauptregel:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

aus §. 14. folge. Dann ist zu zeigen, wie man wirklich rechnen müsse, je nachdem $m > n$, oder $m = n$, oder $m < n$.

Im Übungshefte sind viele Beispiele zu rechnen, wobei Dividendus und Divisor Producte von mehreren potenzirten und unpotenzirten Größen, nebst Coefficienten sind.

Anmerkung. Wenn die Exponenten gleich sind, so giebt die Anwendung der Hauptregel

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n - n} = a^0.$$

Es kann also auch Null ein Exponent sein, und der Werth von a^0 ist jederzeit 1; was auch a bedeute.

§. 17. Aufgabe.

Eine potenzirte Größe nochmals zu potenziren, d. h. zu einer höheren Potenz zu erheben.

Auflösung. Die verlangte Potenz ist eine Potenz derselben Wurzelgröße; ihr Exponent aber wird durch Multiplication der beiden gegebenen Exponenten gefunden. Oder in allgemeinen Zeichen

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Anleitung zum Beweise. Man setze statt n irgend eine (kleine) ganze Zahl, und verrichte die durch diesen Exponenten gefoderte Potenzirung nach §. 2. n. 2. Die so erhaltenen gleichen Factoren multiplicire man nach §. 14., so wird die Richtigkeit der Auflösung anschaulich sein.

Im Übungshefte sind mehrere Beispiele zu rechnen, besonders auch solche, wo Producte oder Quotienten von potenzirten Größen, zu einer Potenz erhoben werden sollen, z. B.

$$(3ab^2c^3)^4; \text{ oder } \left(\frac{2a^2b}{3cd^2}\right)^3, \text{ u. dgl. m.}$$

Zusatz. Soll also irgend eine Größe zweimal hinter einander potenzirt werden, so ist es einerlei, welche Potenzirung man zuerst macht. Oder in Zeichen:

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}.$$

Folglich sind die Klammern in dergleichen Ausdrücken willkührlich und entbehrlich.

Ist durch ein Beispiel, wo m und n bestimmte Zahlen sind, zu erläutern.

§. 18. Aufgabe.

Aus einer potenzirten Größe eine **Wurzel von einer bestimmten Ordnung auszuziehen.**

Auflösung. Wenn eine potenzirte Größe von Neuem zur $n$ten Potenz erhoben werden soll, so muß man ihren Exponenten nach §. 17. $n$mal größer machen. Daraus folgt, daß wenn man umgekehrt aus einer potenzirten Größe eine Wurzel der $n$ten Ordnung ziehen soll, ihr Exponent $n$mal kleiner gemacht, d. h. durch n dividirt werden müsse. Man hat also:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Diese Auflösung ist eigentlich allgemein richtig. Da aber der Quotient $\frac{m}{n}$, wenn man m und n beliebig wählt, sehr häufig ein ächter oder unächter Bruch sein wird, so ist hier diese Auflösung bloß auf den Fall zu beschränken, wenn m durch n theilbar ist (wozu auch der Fall $m = n$ gehört); in allen übrigen Fällen muß man sich für jetzt begnügen, was geschehen soll, bloß anzudeuten; d. h. die bloße Formel

$$\sqrt[n]{a^m}$$

muß schon als Auflösung gelten; bis wir im weiteren Fortgange sehen werden, was der Sinn eines gebrochnen Exponenten sei (§. 21. ff.).

Im Hefte ist alles dieses noch bestimmter auszuführen, und durch drei Beispiele zu erläutern. Zuerst 1) eins, wo n in m aufgeht; 2) wo $m = n$; 3) eins, wo m durch n nicht theilbar ist.

§. 19. Lehrsatz.

Wenn eine Größe zu einer Pötenz erhoben, und aus dieser eine Wurzel gezogen werden soll, so erhält man einerlei, in welcher Ordnung man diese beiden Arbeiten verrichtet.

Oder in Zeichen:

$$\sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Beweis. Man setze

$$\sqrt[n]{a} = x;\ \text{so ist}\ a = x^n$$

(§. 4. und §. 2. Zus.), also

$$a^m = x^{nm}$$

(§. 4. und §. 17.). Bringt man nun diese Werthe in die zu erweisende Formel, so hat man auf der einen Seite

$$\sqrt[n]{(a^m)} = \sqrt[n]{x^{nm}} = x^m$$

(§. 18.); auf der andern aber unmittelbar

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = x^m;\ \text{also}\ \sqrt[n]{(a^m)} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen, nur sind für m und n bestimmte Zahlen zu setzen.

Zusatz. Also sind die Klammern in obigen Formeln entbehrlich, und man darf auf jeden Fall bloß schreiben:

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

§. 20. Anmerkung.

In allen Fällen, wo man eine mit Potenzen vorzunehmende Rechnung (nach §. 14. bis 19.) nicht bloß andeutet, wird die Rechnung allezeit bloß an den Exponenten vollzogen, die Wurzelgröße aber bleibt ungeändert. Aber die Beziehung ist merkwürdig, in welcher die für die Potenz gefoderte Rechnung mit der an den Exponenten zu verrichtenden steht.

Im Hefte soll daher nach der Ordnung der angezeigten Paragraphen gesagt werden, welche Rechnugsart mit den Exponenten vorzunehmen ist, wenn Potenzen multiplicirt, dividirt, potenzirt, oder aus einer Potenz eine Wurzel gezogen werden soll.

D. Potenzen mit gebrochnen Exponenten.

§ 21. Erklärung.

Wenn man sich vorstellt, daß eine gegebene Wurzelgröße A, in eine beliebige Anzahl gleicher Factoren zerfällt sei, und man verbindet von solchen Factoren irgend eine beliebige kleine oder große Anzahl zu einem einzigen Product, so nennt man solches Product auch eine Potenz der Wurzelgröße A, und zwar eine Bruchpotenz, indem der Exponent, wodurch eine solche Potenz angedeutet wird, ein Bruch ist, dessen Nenner anzeigt, wieviele Factoren in der Wurzelgröße angenommen, der Zähler aber, wieviele derselben zu einem Product verbunden werden.

Denkt man sich also eine Wurzelgröße A in n Factoren zerfällt, und m derselben zu einem Product verbunden, so wird die dadurch entstandene Bruchpotenz durch

$$A^{\frac{m}{n}}$$

vorgestellt.

Die Wörter Wurzelgröße, und Wurzel bedeuten daher nun nicht mehr einerlei. Wurzelgröße heißt jede Größe, neben welcher ein Exponent steht; Wurzel hingegen behält seine bisherige Bedeutung und heißt einer von den gleichen Factoren einer Potenz. In der Formel

$$A^{\frac{m}{n}}$$

ist A die Wurzelgröße; einer von den n Factoren der A ist die $n$te Wurzel aus A; und ein Product von m solchen Wurzeln, oder

$$A^{\frac{m}{n}}$$

ist eine Bruch-Potenz von A.

Das Wort Bruch in Bruch-Potenz bezieht sich lediglich auf die Beschaffenheit des Exponenten (nicht der Wurzelgröße). Im Gegensatz davon, nennt man jede Potenz, deren Exponent eine ganze Zahl ist, eine ganze Potenz, wo sich also das Wort ganz wieder bloß auf den Exponenten bezieht.

Diese Erklärung ist im Hefte sehr sorgfältig durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, und wir wollen daher zeigen, wie ein zweckmäßiges Beispiel hiezu zu wählen sei.

Man erhebe eine kleine Zahl nach §. 2. n. 3. zu mehrern ganzen Potenzen. So ist z. B. $3^1 = 3$; $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; $3^7 = 2187$, u. s. w. Nimmt man nun eine dieser Zahlen, z. B. 243 für eine Wurzelgröße an, so hat man eine Zahl die schon in eine Anzahl gleicher Factoren getheilt ist, nämlich $243 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3$. Daher kann nun jede ganze Potenz von 3 als eine Bruchpotenz von 243 vorgestellt werden. Soll nur einer dieser Factoren genommen werden, so ist $3 = 243^{\frac{1}{5}}$; soll man zwei verbinden, so ist $3 . 3$ oder $3^2 = 243^{\frac{2}{5}}$, u. s. f. Sollen alle fünfe verbunden werden, so ist $3 . 3 . 3 . 3 . 3$ oder $3^5 = 243^{\frac{5}{5}}$. Sollen noch mehr als fünf Factoren verbunden werden, so wird der Exponent ein unächter Bruch; z. B. $3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^7 = 2187 = 243^{\frac{7}{5}}$.

Im Hefte ist auf ähnliche Art eine andere zweckmäßige Wurzelgröße zu berechnen.

§. 22. Zusatz.

Jede Wurzel einer Größe A, läßt sich allezeit in der Gestalt einer Bruch-Potenz darstellen, deren

Exponent den Zähler 1 hat, der Nenner aber anzeigt, die wievielste Wurzel gesucht wird.

Wenn von der Wurzelgröße A die $n$te Wurzel gesucht wird, so muß man A in n Factoren zerfällen, aber nur einen derselben nehmen (§. 1.). Dieses giebt aber (nach §. 21.)

$$A^{\frac{1}{n}}.$$

Also ist

$$\sqrt[n]{A} = A^{\frac{1}{n}}.$$

Dieses ist im Hefte für einen bestimmten Zahlen-Exponenten auszuführen, und dann noch zu zeigen, wie Wurzeln der zweiten, dritten, vierten ꝛc. Ordnung als Bruch-Potenzen vorzustellen sind.

Anmerkung. Diese Art Wurzeln zu bezeichnen, ist vortheilhaft und wichtig, indem man dadurch der unbequemen Rechnung mit Wurzelzeichen, wenn man will, gänzlich ausweichen kann.

§. 23. Zusatz.

Vermittelst des Wurzelzeichens läßt sich aber wieder jede Bruchpotenz

$$A^{\frac{m}{n}}$$

in der Gestalt einer ganzen Potenz darstellen, wenn man die Verbindung des Wurzelzeichens mit A in Klammern einschließt, und dieses als Wurzelgröße betrachtet.

Nämlich: $A^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{A}\right)^m$

Auch umgekehrt kann man jeder ganzen Potenz, sobald man will, die Gestalt einer Bruchpotenz geben. Hat nämlich die Wurzelgröße die Gestalt

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)$$

so darf man nur die vorige Formel umgekehrt anwenden.

Nämlich: $\left(\sqrt[n]{A}\right)^m = A^{\frac{m}{n}}$.

Hat aber A kein Wurzelzeichen bei sich, so kann man sie als eine Bruchpotenz vorstellen, deren Exponent den Nenner 1 hat.

Nämlich: $A^m = A^{\frac{m}{1}}$.

Dieses alles ergiebt sich so leicht und unmittelbar aus dem Vorhergehenden, daß es keine Schwierigkeit haben kann, jeden Theil des Satzes durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern.

Anmerkung. Es ergiebt sich hieraus, daß es möglich sein würde, allen Rechnungen mit Bruchpotenzen auszuweichen. Aber es würde nicht vortheilhaft sein. Denn wenn man bei irgend einer Rechnung, wo Bruchpotenzen vorkommen, dieselben in ganze Potenzen verwandelt, und dann nach den im Vorhergehenden gegebenen Regeln rechnet, so zeigt sich am Ende, daß man auf einem Umwege nichts anders erhält, als was man gefunden hätte, wenn man die für ganze Potenzen erwiesenen Regeln, geradezu auf gebrochne Exponenten angewendet hätte.

Eine vollständigere Ausführung hievon soll dem folg. Abschnitt vobrehalten bleiben. Nur folgender Satz mag hier genügen.

§. 24. Zusatz.

Durch die Einführung von Bruchpotenzen fällt bei der Wurzelausziehung aus einer potenzirten Größe, die im achtzehnten Paragraphen gemachte Einschränkung weg, daß der Potenzexponent durch den Wurzelexponent theilbar sein müsse.

Dieses folgt so unmittelbar aus dem Vorhergehenden, daß es kaum einer nähern Erörterung bedarf. Doch sind zur Erläuterung zwei Beispiele mit bestimmten Zahlenexponenten aufzuführen, wo in dem einen der Potenzexponent durch den Wurzelexponenten theilbar ist, in dem andern nicht. Dann wird sich leicht deutlich machen lassen, daß in beiden Fällen die Wurzelausziehung durch Division der Exponenten vollzogen werde.

E. Potenzen mit negativen Exponenten.

§. 25. Erklärung.

Wenn man von dem umgekehrten Werthe einer Wurzelgröße A, also von $\frac{1}{A}$, eine Potenz bildet, so nennt man auch diese eine Potenz von A selbst. Dabei ist folgende Bezeichnungsart zu beobachten. Macht man von $\frac{1}{A}$ die nte Potenz, und will diese nur als eine Potenz von $\frac{1}{A}$ betrachten, so bezeichnet man sie auf die gewöhnliche Art, nämlich

$$\left(\frac{1}{A}\right)^n$$

Soll aber eben dieser Werth als eine Potenz der Wurzelgröße A betrachtet und bezeichnet werden, so setzt man zu der Wurzelgröße A denselben Exponenten n, aber diesen mit dem Vorzeichen Minus. Es ist folglich

$$A^{-n} = \left(\frac{1}{A}\right)^n.$$

In dergleichen Ausdrücken A^{-n} kann n jeden beliebigen ganzen oder gebrochnen Werth haben.

Potenzen dieser Art nennt man negative Potenzen. Der Ausdruck negativ bezieht sich also bloß auf den Exponenten, nicht auf die Wurzelgröße, noch auf die Potenz selbst.

Es ist hier, wie überall, nöthig, die erklärten Begriffe recht scharf aufzufassen. Wir wollen daher dieselben durch ein bestimmtes Beispiel erläutern. Als Potenzen der Wurzelgröße 64 betrachtet man nicht nur alle Potenzen von 64 selbst, sondern auch alle Potenzen von dem umgekehrten Werthe dieser Zahl, also von $\frac{1}{64}$. Nur muß man in dem letzten Fall zu der Wurzelgröße 64 einen negativen Exponenten setzen. Will man also z. B. die dritte Potenz von $\frac{1}{69}$, als eine Potenz der Zahl 64 betrachten und bezeichnen, so muß man schreiben 64^{-3}. Es ist folglich

$$64^{-3} = (\tfrac{1}{64})^3 \text{ oder } (\tfrac{1}{64})^{+3}$$

Zur Übung und Erläuterung des Begriffes kann man im Hefte folgende negative Potenzen von 8 erklären, und ihre Werthe berechnen.

$$8^{-2};\ 8^{-3};\ 8^{-\frac{1}{3}};\ 8^{-\frac{2}{3}},$$

statt 8 kann man auch mit Beibehaltung derselben Exponenten eine andere Zahl wählen, deren Kubikwurzel sich ohne Rechnung finden läßt, z. B. 27, 64, 125, u. dgl. m.

Auch wird man leicht erklären können, was der Sinn folgender Formeln sei.

$$(\tfrac{1}{5})^{-3};\ (\tfrac{1}{2})^{-4};\ (\tfrac{2}{3})^{-2};\ 0{,}01^{-2} \text{ ꝛc.}$$

Endlich wird man auch leicht begreifen, was der Exponent -1 bedeute, z. B.

$$5^{-1};\ (\tfrac{1}{8})^{-1};\ (\tfrac{5}{9})^{-1} \text{ ꝛc.}$$

Anmerkung. Bei jedem Potenzausdrucke, z. B. a^n kommen eigentlich drei Größen in Betrachtung: 1) der Exponent n; 2) die Wurzelgröße a; und 3) die Potenz selbst a^n. Wir haben bisher alle drei nur als absolute Größen betrachtet; in diesem Paragraphen wird der Begriff des Gegensatzes zuerst nur auf Exponenten angewendet, während die beiden andern noch als absolute Größen betrachtet werden. Daß das Zeichen Minus hiebei von seiner ursprünglichen Bedeutung nicht wesentlich abweiche, wird sich in der Folge zeigen.

Im Gegensatz negativer Exponenten sind die bisher betrachteten als positiv anzusehen. Indessen pflegt man das Vorzeichen + vor einem Exponenten selten ausdrücklich zu schreiben.

§. 26. Zusatz.

Eine Potenz mit negativem Exponenten, ist auch gleich dem umgekehrten Werthe derselben Potenz mit positivem Exponenten. Oder in Zeichen:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Nach §. 25. ist

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Man erhebe den Bruch $\frac{1}{a}$ nach §. 8. zur $n$ten Potenz, so sieht man die Richtigkeit des Satzes leicht ein.

§. 27. Zusatz.

Man kann also leicht jede negative Potenz in Gestalt einer positiven darstellen, und zwar auf zweierlei Art, nach §. 25. und 26.

Auch umgekehrt kann man jede positive Potenz unter der Gestalt einer negativen darstellen, und auch dieses auf doppelte Art.

Beides ist durch Beispiele zu erläutern.

Anmerkung. Aus diesem Paragraphen ergiebt sich, daß man auch der Rechnung mit negativen Exponenten jederzeit würde ausweichen können. Aber es würde dieses eben so wenig vortheilhaft sein, als wenn man gebrochnen Exponenten ausweichen wollte: denn es läßt sich zeigen, daß alle für positive Exponenten erwiesene Rechnungsregeln auch für negative gültig sind; wie dieses im folgenden Abschnitt umständlicher gezeigt werden soll. Hier mag es genug sein, folgenden Satz beizufügen, durch welchen der Gebrauch der Vorzeichen + und − bei Exponenten gerechtfertiget wird.

§. 28. Zusatz.

Durch die Einführung negativer Potenzen erhält die Divisionsregel §. 16. unbeschränkte Gültigkeit, der

Exponent des Divisors sei kleiner, oder eben so groß, oder größer als der des Divisors.

Beweis. Nach §. 16. ist

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

Aber so lange m und n als absolute Zahlen betrachtet werden, kann die Subtraction $m - n$ nur dann wirklich vollzogen werden, wenn n nicht größer als m ist. Wird hingegen der Gebrauch positiver und negativer Exponenten zugelassen, so kann man $m - n$ als eine algebraische Differenz von m und n betrachten, die sich in jedem Fall finden läßt, man mag m und n bestimmen wie man will.

Um nun anschaulich zu machen, daß man durch dieses Verfahren den richtigen Quotienten erhalte, auch wenn der Exponent des Divisors der größere ist, nehme man zum Dividendus eine beliebige Potenz a^m; zum Divisor aber eine andere beliebige nur höhere Potenz, die sich allgemein durch a^{m+n} vorstellen läßt. Wendet man hierauf die Divisionsregel des sechszehnten Paragraphen an, so erhält man

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-m-n} = a^{-n}.$$

Und daß dieses der richtige Quotient sei, ergiebt sich durch folgende Schlüsse:

$$\frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^n} \text{ (§. 15.)} = \frac{1}{a^n} \text{ (IV. 8, 9.)}$$

$$= a^{-n} \text{ (§. 26.)}.$$

Es kann nicht schwierig sein, diesen Beweis in bestimmten Zahlen zu wiederholen.

Anmerkung. Um den Zusammenhang positiver und negativer Exponenten noch deutlicher einzusehen, erhebe man eine beliebige Zahl zur dritten oder vierten Potenz (z. B. $3^4 = 81$). Dividirt man hier beides ($3^4 = 81$) durch die Wurzelgröße (3), so wird der Exponent (4), nach §. 16. um 1 verkleinert. Dividirt man nun die so erhaltene (dritte Potenz $3^3 = 27$), wieder mit 3, und setzt diese Divisionen stätig fort, so erhält man auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nach der Reihe die Potenzen $3^4, 3^3, 3^2, 3^1, 3^0; 3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}$ rc. und wenn man die Zahlenwerthe der letztern, von 3^{-1} an, mit §. 25. oder 26. vergleicht, so wird man deutlich einsehen, daß sie mit der hier gegebenen Erklärung negativer Potenzen vollkommen und nothwendig übereinstimmen.

Auch diese Erläuterung ist im Hefte in Form einer Tabelle, nur mit den nöthigen wörtlichen Erklärungen auszuführen.

F. Allgemeine Beurtheilung des absoluten Werthes, jeder Art von Potenzen.

§. 29. Aufgabe.

Zu beurtheilen, ob der absolute Werth irgend einer gebrochnen oder negativen Potenz größer oder kleiner als die in Zahlen gegebene Wurzelgröße, desgleichen ob er größer oder kleiner als 1 sei.

Auflösung. Wie dieses bei ganzen und positiven Potenzen zu beurtheilen sei, ist schon §. 12. b. c. erklärt worden. Da aber nach §. 23. jede Bruchpotenz, und nach §. 27. jede negative Potenz, in der Gestalt einer ganzen und positiven Potenz vorgestellt werden kann, so wird man nach §. 12. b. c. auch den absoluten Werth jeder andern Art von Potenzen beurtheilen können.

Ein Beispiel mag zur Erläuterung dienen. Die zu untersuchende Potenz sei

$$3^{-\frac{7}{5}}.$$

Es ist aber

$$3^{-\frac{7}{5}} = (\tfrac{1}{3})^{\frac{7}{5}} \text{ (§. 27.)} = (\sqrt[5]{\tfrac{1}{3}})^7 \text{ (§. 23.)}.$$

Nun ist $\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$, größer als $\frac{1}{3}$, aber kleiner als 1 (§. 12. c. n. 2.). Erhebt man diesen Werth zu ganzen Potenzen, so werden diese immer kleiner (§. 12. c. n. 1.). Erhöbe man

$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{3}}$$

zur fünften Potenz, so wäre ihr Werth $\frac{1}{3}$ (§. 3. Zus. 1.). Da aber

$$\sqrt[5]{\tfrac{1}{3}}$$

zu einer höhern als der fünften Potenz erhoben werden soll, so wird ihr absoluter Werth kleiner sein als $\frac{1}{3}$, oder als der umgekehrte Werth von 3.

Im Hefte sind einige selbstgewählte Beispiele von Potenzen durchzugehen. Namentlich a) ein Beispiel mit einem negativen ganzen Exponenten; b) mit einem gebrochnen positiven; c) mit einem gebrochnen negativen Exponenten. Zur Wurzelgröße kann man beliebig eine ganze Zahl, oder einen Bruch wählen.

Anhang zum zwölften Abschnitt.

Von Potenzen mit irrationalen Exponenten.

§. 1. Erklärung.

Selbst irrationale Zahlen, z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ rc. können Exponenten einer Potenz sein, und wir wollen solche eine **irrationale Potenz** nennen, wo sich also das Wort irrational lediglich auf den Exponenten bezieht.

Es kann erst in einem spätern Abschnitt gezeigt werden, wie der Zahlenwerth einer solchen Potenz z. B.

$$5^{\sqrt{2}} \text{ oder } 7^{-\sqrt{3}} \text{ rc.}$$

berechnet werden könne; aber wohl ist es möglich, und nöthig, mit einem solchen Zeichen einen bestimmten Begriff zu verbinden. Dieser Zweck wird aber schon, wenn auch nur annäherungsweise, erreicht, wenn man den Werth eines solchen Exponenten auf eine gewisse Anzahl Bruchstellen berechnet, und in der Gestalt eines gemeinen Bruchs zu der Wurzelgröße setzt, und dann den Begriff des Zeichens nach §. 21. oder 25. bestimmt.

So ist z. B. $\sqrt{2} = 1{,}4142... = \frac{14142}{10000}$; folglich ist annäherungsweise

$$5^{\sqrt{2}} = 5^{\frac{14142}{10000}}$$

d. h. es nähert sich dem Werthe der 10000sten Wurzel aus 5, zur 14142sten Potenz erhoben.

Daß hier Wurzeln und Potenzen von so hohen Graden vorkommen, schadet der Deutlichkeit des Begriffes nicht, da man nach dem Vorhergehenden bestimmt weiß, was man sich unter jeder bestimmten Wurzel- oder Potenzordnung zu denken habe.

Wir werden indessen im folgenden Paragraphen noch eine andere Ansicht des Begriffes darlegen.

§. 2. Lehrsatz.

Jede irrationale Potenz kann betrachtet werden als ein Product von unendlich vielen Factoren, dessen Werth aber eine bestimmte endliche Größe hat.

Jeder Factor dieses Products ist eine Potenz derselben Wurzelgröße. Die Exponenten aber sind die unendlich vielen Stücke, in welche sich der irrationale Exponent zerstückeln läßt. Eine solche Zerstückelung kann man zwar auf unendlich vielerlei Art machen, aber die einfachste besteht darin, daß man jede einzelne dekadische Ziffer des irrationalen Exponenten, nach ihrem wahren Werth gelesen zu einem Exponenten macht.

Man wende diesen Satz auf $a^{\sqrt{2}}$ an, so hat man

$$\sqrt{2} = 1 + \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{100} + \tfrac{4}{1000} + \tfrac{2}{10000} + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

also

$$a^{\sqrt{2}} = a^{1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \text{ꝛc. ꝛc.}}$$

Hieraus folgt aber nach §. 15.

$$a^{\sqrt{2}} = a^{1} \,.\, a^{\frac{4}{10}} \,.\, a^{\frac{1}{100}} \,.\, a^{\frac{4}{1000}} \,.\, a^{\frac{2}{10000}} \,.\, \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Da nun die Ziffern der $\sqrt{2}$ ohne Ende fortlaufen, so ist auch die Anzahl dieser Factoren unendlich.

Betrachtet man aber diese Factoren nach der Reihe, so ist klar, daß sie sich der Einheit ohne Ende nähern, die Wurzelgröße a sei größer oder kleiner als Eins (§. 12. c. Anm. 2.). Und zwar nähert sich jeder folgende Factor der Einheit um Vieles mehr als der nähstvorhergehende, weil der Nenner des Wurzel-Exponenten bei jedem folgenden Factor zehnmal größer wird.

Könnte man nun die Werthe dieser Factoren wirklich berechnen, so würde man bald zu Factoren kommen, die von der Einheit um weniger, als eine sehr niedrige dekadische Einheit abweichen.

Multiplicirt man aber irgend eine Zahl mit einem Multiplicator, der wenig von Eins verschieden ist, so wird auch nach dem Begriff der Multiplication (III. 3.) das Product nur wenig von dem Multiplicandus verschieden sein.

Hätte man also die Werthe einer beträchtlichen Anzahl dieser Factoren wirklich berechnet vor sich, und man finge an, sie nach der Reihe mit einander zu multipliciren, so würden zwar die erstern Producte beträchtlich von einander abweichen; aber je weiter man fortrechnete, desto kleiner würde die Änderung der Producte sein. Und wenn man die Rechnung in einer bestimmten Anzahl von Bruchstellen (z. B. in 20) führte, so würde man endlich zu Factoren kommen, die so wenig von Eins verschieden wären, daß die Multiplication mit denselben, auf die letzte (zwanzigste) Bruchstelle keinen Einfluß hätte, also nun die Rechnung ohne Fehler abgebrochen werden könnte, da die folgenden Factoren von Eins noch viel weniger abweichen.

Hieraus ist klar, daß das ganze Product in einer bestimmten Anzahl von (20) Bruchstellen, seine ganz bestimmte und unveränderliche Größe habe. Da man aber die Anzahl der Bruchstellen so groß, als man will, annehmen kann, ohne daß dadurch in den gemachten Schlüssen das Mindeste verändert wird, so ist klar, daß das ganze Product aller unendlich vielen Factoren einen einzigen, ganz bestimmten und unveränderlichen Werth habe.

Dreizehnter Abschnitt.

Fortsetzung der Lehre von Potenzen und Wurzeln.

A. Von den Vorzeichen der Potenzen und Wurzelgrößen.

§. 1. Erklärung.

Außer den Exponenten können auch die Potenzen selbst und ihre Wurzelgrößen Vorzeichen haben, worüber Folgendes zu bemerken.

Ein Vorzeichen vor einem potenzirten Ausdruck bezieht sich allezeit auf den ganzen Ausdruck, nicht auf die Wurzelgröße, vor der es unmittelbar steht.

Eine Wurzelgröße hat in der Regel kein eigenthümliches Vorzeichen, sondern wird als absolut, oder positiv betrachtet. Will man ihr aber das Vorzeichen — geben, (denn + braucht man nie ausdrücklich zu schreiben), so muß sie sammt dem Zeichen in Klammern eingeschlossen, und der Exponent außer der Klammer gesetzt werden. Braucht man statt des Exponenten ein Wurzelzeichen, so ist die Klammer nicht nöthig.

Diese Erklärungen sind im Hefte durch Beispiele zu erläutern, und dabei alle Fälle durchzugehen, die man erhält, wenn man zugleich der Potenz und der Wurzelgröße ein Vorzeichen giebt. Der Exponent aber kann überall positiv angenommen werden.

Es läßt sich aber jedes Beispiel aus einem doppelten Gesichtspunkt betrachten. Denn

1. kann man die Formel als gegeben betrachten, und nach ihrem Sinn fragen, z. B. was ist der Sinn der Formel $+(-3)^2$? ꝛc.

2. oder man betrachtet den Sinn als gegeben, und will ihn durch eine Formel darstellen; z. B. wie muß man die dritte Potenz von -4 schreiben, wenn die Potenz selbst negativ genommen werden soll? ꝛc.

Anmerkung. Man unterscheide sorgfältig, wo sich ein Vorzeichen auf eine Wurzelgröße (d. h. auf die Größe die unter einem Exponenten, oder einem Wurzelzeichen steht), bezieht, oder auf den Werth des ganzen potenzirten Ausdrucks. Unterscheidet man beide Fälle nicht deutlich, so kann man oft in Verwirrung und Dunkelheiten fallen.

§. 2. Lehrsatz.

Das Vorzeichen eines Exponenten hat in keinem Fall einen Einfluß auf das Vorzeichen der Potenz oder der Wurzelgröße.

Beweis. Nach XII. §. 25. Zus. zeigt das Vorzeichen $+$ vor einem Exponenten an, daß man von der Wurzelgröße selbst, und $-$, daß man von ihrem umgekehrten Werthe eine Potenz machen soll. Aus dem Begriff eines umgekehrten Werthes (VI. 16.) ergiebt sich aber, daß eine Größe und ihr umgekehrter Werth, jederzeit einerlei Vorzeichen haben. Folglich kann das Vorzeichen des Exponenten, weder auf das Vorzeichen der Wurzelgröße, noch der Potenz einen Einfluß haben.

Im Hefte kann es hinreichend sein, dieses bloß durch ein Paar Beispiele zu erläutern, und z. B. zu zeigen, daß das Vorzeichen von $+3^5$, oder von -3^5 nicht geändert wird, wenn man dem Exponenten das Vorzeichen $-$ giebt.

Anmerkung. Man übersehe nicht, daß der Satz bloß von dem Vorzeichen des Exponenten, nicht überhaupt von der Beschaffenheit desselben redet. Denn wir werden in der Folge (§. 3—5.) sehen, daß der Umstand, ob die Zahlen, womit der Exponent geschrieben wird, gerade oder ungerade sind, allerdings einen Einfluß auf das Vorzeichen der Potenz habe.

§. 3. Lehrsatz.

1. Jede ganze Potenz einer positiven Größe ist positiv.

2. Von einer negativen Größe hingegen sind alle geraden Potenzen positiv; alle ungeraden negativ.

Da ganze Potenzen allezeit durch Multiplication berechnet werden können (XII. 2. und 3.), so ist leicht einzusehen, wie sich beide Theile des Satzes aus den Regeln für die Vorzeichen bei der Multiplication (VIII. 4. 5.) erweisen lassen.

Zusatz. Besonders bemerke man, daß jede Potenz von $+1$ in allen Graden $+1$ ist; die ganzen Potenzen von -1 hingegen sind in allen geraden Ordnungen $+1$, in allen ungeraden -1.

§. 4. Zusatz.

So lange man die Wurzelgrößen, wie im vorigen Abschnitt als absolute Größen betrachtet, hat jede Größe in jeder Potenz- oder Wurzelordnung einen einzigen bestimmten Werth. Wendet man aber den Begriff des Gegensatzes auf eine Wurzelgröße an, so hat zwar jede Größe zu einer ganzen Potenz erhoben nur einen einzigen möglichen Werth; in Ansehung der Wurzeln aber ist folgendes zu merken.

1. Jede positive Größe hat in jeder geraden Wurzelordnung, zwei gleiche aber entgegenge-

setzte Wurzeln; in jeder ungeraden Ordnung aber hat sie eine einzige positive Wurzel.

2. Eine negative Größe hingegen hat in jeder ungeraden Ordnung eine einzige negative Wurzel; in einer geraden Ordnung aber ist es unmöglich eine nach dem Gegensatz bestimmte Zahl anzugeben, die man als ihre Wurzel betrachten könnte.

Man sieht leicht, wie dieses alles unmittelbar aus dem vorhergehenden Paragraphen folge. Es ist daher nur an vier Beispielen zu zeigen, wie jeder Theil des Satzes mit §. 3. zusammenhänge. Daß man dazu am bequemsten vollständige Potenzzahlen zu wählen habe, bedarf kaum einer Erinnerung.

§. 5. Erklärung.

Wenn man mit einer negativen Größe ein gerades Wurzelzeichen, (oder einen entsprechenden gebrochenen Exponenten) verbindet, so nennt man diese Verbindung eine imaginäre Formel, weil sich weder eine positive noch negative Größe angeben läßt, die einem solchen Ausdruck entspräche.

Zur Erläuterung ist im Hefte ein Beispiel einer imaginären Formel anzuführen. Man wähle dazu eine vollständige Potenzzahl einer geraden Ordnung (z. B. $81 = 3^4$), und geben derselben das negative Vorzeichen (-81), so wird sich leicht zeigen lassen, daß, ob sich gleich die absolute Wurzel der Zahl angeben läßt

$$(\sqrt[4]{81} = 3),$$

es doch nicht möglich ist eine mit einem Vorzeichen versehene Zahl anzugeben, welche man als die Wurzel derselben

$$(\text{als } \sqrt[4]{-81})$$

betrachten könnte.

Anmerkungen.

1. Es ist schicklicher solche Ausdrücke, die eigentlich gar nichts mögliches bedeuten, imaginäre Formeln, als, wie gewöhnlich, imaginäre oder unmögliche Größen zu nennen.

2. Man braucht bei imaginären Formeln gewöhnlicher das Wurzelzeichen, als gebrochne Exponenten

$$(\text{lieber } \sqrt[4]{-81}, \text{ als } (-81)^{\frac{1}{4}});$$

obgleich eins so richtig und unzweideutig als das andere ist.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn man zwei gleiche imaginäre Formeln, deren eine aber das Vorzeichen +, die andere — hat, zu der so vielsten Potenz erhebt, als das Wurzelzeichen andeutet, so erhält man einerlei Potenz, und zwar eine reelle Größe, nämlich die negative Wurzelgröße selbst.

Oder in Zeichen:

$$\left(\pm \sqrt[2n]{-a}\right)^{2n} = -a.$$

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folge aus §. 5. in Verbindung mit XII. §. 3 Zus. 1. Denn obgleich das Zeichen

$$\sqrt[2n]{-a}$$

an sich ganz inhaltleer ist, so ist doch klar, daß, wenn einmal verlangt wird, es solle die $2n$te Wurzel aus $-a$ gezogen, und dann eben diese Wurzel wieder zur $2n$ten Potenz erhoben werden, man durch die zweite Operation die erste wieder aufhebt, und also nothwendig $-a$ herauskommen muß.

Daß aber dieses richtig bleibe, man mag + oder — vor das Wurzelzeichen setzen, läßt sich so zeigen. Man schiebe hinter dem ersten Vorzeichen den Coefficienten 1 ein, wodurch nichts geändert wird, und schreibe

$$(\pm 1)(\sqrt[2n]{-a}).$$

Erhebt man dieses (nach XII. 5.) zur $2n$ ten Potenz, so erhält man

$$(\pm 1)^{2n} (-a).$$

Aber

$$(\pm 1)^{2n} = +1$$

(§. 3. Zus.). Also ist die $2n$te Potenz $= (+1)(-a) = -a$.

Dieser Beweis ist im Hefte zu wiederholen, aber statt n und a sind bestimmte Zahlen zu brauchen.

Zusatz. Man kann die imaginären Formeln, als wirkliche Wurzeln einer negativen Größe betrachten, und damit eben so sicher und richtig rechnen, als mit Formeln die etwas mögliches bedeuten.

Dem zufolge läßt sich der zweite Theil des vierten Paragraphen auch so ausdrücken: Jede negative Größe hat in jeder geraden Ordnung zwei gleiche und entgegengesetzte Wurzeln, die aber imaginär sind; in jeder ungeraden Ordnung aber hat sie nur eine mögliche Wurzel.

Anmerkung. Die Rechnungen mit imaginären Formeln, sind viel wichtiger, und fruchtbarer, als hier deutlich gemacht werden kann.

§. 7. Erklärung.

Die verschiedenen Wurzeln, welche eine und dieselbe Größe, in einer und derselben Ordnung haben kann, wollen wir die verschiedenen Formen der Wurzel nennen.

So hat z. B. $+16$ Quadratwurzeln von zwei Formen, nämlich $+4$, und -4. Eben so hat -16 Wurzeln von zwei Formen $+\sqrt{-16}$, und $-\sqrt{-16}$.

Im Hefte ist der Zusatz durch andere Beispiele zu erläutern.

Zusatz. Der zweite Theil des Grundsatzes XII. 4. bedarf, wenn er auf Größen, die ein Vorzeichen haben, angewendet werden soll, eines Zusatzes; nämlich: Wenn zwei Größen gleich sind, so sind auch die gleichvielsten Wurzeln derselben gleich, so fern sie einerlei Form haben.

Wenn $a = b$, so darf man wohl folgern $+\sqrt{a} = +\sqrt{b}$ aber nicht $+\sqrt{a} = -\sqrt{b}$. Das Positive kann dem Negativen nicht gleich gesetzt werden.

Anmerkung. Außer den hier erklärten Formen der Wurzeln giebt es deren noch viel mehrere, worüber das vollständigere erst in der Algebra, und in der Analysis vorgetragen werden kann. Vorläufig, aber bloß, historisch bemerke man, indessen Folgendes. So wie jede Größe zwei Quadratwurzeln hat, so läßt sich zeigen, daß sie drei Kubikwurzeln, vier Wurzeln der vierten Ordnung ꝛc. und überhaupt so viele Wurzeln habe, als der Wurzelexponent Einheiten hat. Nur sind die meisten dieser Wurzeln imaginäre Formeln. Denn eine positive Größe hat in jeder ungeraden Ordnung nur eine wirkliche Wurzel, in jeder geraden aber deren zwei. Eine negative Größe hingegen hat nur in jeder ungeraden Ordnung eine einzige wirkliche Wurzel, alle übrigen Wurzeln sind imaginär. Dieses alles gilt aber nur, in so fern man auf die unter einem Wurzelzeichen stehende Größe den Begriff des Gegensatzes anwendet. Sonst bleibt es richtig, daß jede Potenz und jede Wurzel einer absoluten Größe allezeit einen wirklichen absoluten Werth habe, nnd zwar nur einen.

§. 8. Erklärung.

Jede Zahl oder Formel, aus welcher sich die Wurzel einer gewissen Ordnung ohne Hülfe eines Wurzelzeichens oder gebrochnen Exponenten fehlerfrei darstellen läßt, heißt eine vollständige Potenz dieser Ordnung.

So ist schon im elften Abschnitt §. 14 — 16. erklärt worden, was vollständige Quadratzahlen sind. Hier bemerken wir noch, daß jede potenzirte Formel, deren Exponent durch 2 theilbar ist, ein vollständiges Quadrat, oder eine vollständige Potenz der zweiten Ordnung ist.

Z. B. $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{a^4}$, $\sqrt{a^6}$, ꝛc. desgleichen

$\sqrt{a^{2n}}$, $\sqrt{a^{4n}}$, $\sqrt{a^{6n}}$ ꝛc.

Statt dieser Beispiele sind im Hefte vollständige Potenzen der dritten, vierten, fünften oder irgend einer andern beliebigen Ordnung, und zwar theils in Zahlen, theils in einfachen Formeln, zur Erläuterung aufzuführen.

Auch sind noch ein Paar Beispiele von vollständigen Potenzen einer unbestimmten (n ten) Ordnung aufzuführen, wobei die Wurzelgröße theils eine bestimmte Zahl, theils ein Buchstabe sein kann.

§. 9. Erklärung.

Jede Zahl oder Formel hingegen, aus welcher sich die Wurzel einer gewissen Ordnung nicht fehlerfrei ohne Wurzelzeichen, oder gebrochne Exponenten darstellen läßt, heißt eine unvollständige Potenz dieser Ordnung.

Die durch ein Wurzelzeichen oder gebrochnen Exponenten vorgestellte Wurzel einer solchen Größe aber heißt sowohl in der Zahlen- als Buchstaben-Rechnung eine irrationale Größe. Im Gegensatz davon heißt jede Formel rational, so fern sie nichts Irrationales enthält.

So ist im elften Abschnitt a. a. O. gezeigt worden, was unvollständige Quadratzahlen sind. Beispiele von unvollständigen Potenzen der zweiten Ordnung in Formeln sind

a^1, a^3, a^5, a^7 ꝛc.

desgleichen

a^m, a^{m+n} ꝛc. auch a^{2n+1}, a^{2n+3} u. s. f.

so fern Wurzeln aus derselben uns durch das Wurzelzeichen vorgestellt werden können.

Beispiele irrationaler Quadratzahlen sind im elften Abschnitt gegeben. Beispiele irrationaler Formeln der zweiten Ordnung ergeben sich aus dem Vorigen

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}; \sqrt{a^5} = a^{\frac{5}{2}}; \sqrt{a^7} = a^{\frac{7}{2}} \text{ ꝛc.}$$

$$\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}; \sqrt{a^{m+n}} = a^{\frac{m+n}{2}} \text{ ꝛc.}$$

$$\sqrt{a^{2n+1}} = a^{n+\frac{1}{2}}; \sqrt{a^{2n-1}} = a^{n-\frac{1}{2}} \text{ u. s. f.}$$

Im Hefte sind ähnliche Beispiele von derselben höhern Ordnung aufzustellen, die im vorigen Paragraphen gewählt worden, sowohl in Zahlen, als Formeln.

Auch ein Paar Beispiele von unvollständigen Potenzen und irrationalen Ausdrücken einer unbestimmten $n$ten Ordnung; wobei als Wurzelgröße theils Zahlen, theils Buchstaben anzuwenden sind.

Anmerkung. Eine irrationale Formel z. B. $\sqrt{x}$ kann für bestimmte Zahlenwerthe rationale Werthe erhalten: aber so lange der Werth von x unbestimmt bleibt, ist sie als Formel irrational. Dagegen ist $\sqrt{a^{2n}}$ rational, weil man dafür a^n setzen kann.

B. Anwendung der Potenzen und Wurzeln auf Verhältnisse und Proportionen.

§. 10. Erklärung.

Ein Verhältniß heißt irrational, wenn der Anzeiger desselben irrational ist.

Zur Erläuterung sind theils in Zahlen, theils in Buchstaben, Beispiele irrationaler Verhältnisse aufzuführen.

In Zahlen sind z. B. folgende Verhältnisse irrational

$3 : 4\sqrt{2}$; der Anzeiger ist $\frac{4}{3}\sqrt{2}$.

$5\sqrt{2} : 10$; der Anzeiger ist $\frac{10}{5\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

$2\sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{5}$; = = = $\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

$\sqrt{3} : \sqrt{15}$; = = = $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}$.

u. dgl. m.

Im Hefte sind andere Beispiele von ähnlicher Art aufzuführen.

Irrationale Buchstabenverhältnisse sind folgende:

$a : b\sqrt{c}$; der Anzeiger ist $\frac{b\sqrt{c}}{a} = \frac{b}{a}\sqrt{c}$.

$a\sqrt{b} : c$; = = = $\frac{c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{ab}$.

$a\sqrt{b} : c\sqrt{d}$; = = = $\frac{c\sqrt{d}}{a\sqrt{b}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{d}{b}}$

$\sqrt{ab} : \sqrt{ac}$; = = = $\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{ac}{ab}} = \sqrt{\frac{c}{b}}$.

u. dgl. m.

Auch hier sind andere Beispiele von ähnlicher Art zu erfinden.

§. 11. Zusatz.

Wenn beide Glieder eines Verhältnisses irrational sind, so kann das Verhältniß eben sowohl rational, als irrational sein.

Rational ist ein solches Verhältniß, wenn dieselbe Irrationalität in beiden Gliedern als Factor enthalten ist. So ist das Verhältniß $14\sqrt{3} : 7\sqrt{3}$ rational; denn der Anzeiger ist $\frac{1}{2}$.

Irrational ist aber ein solches Verhältniß, wenn verschiedene Irrationalitäten Factoren beider Glieder sind. So ist z. B. $14\sqrt{3} : 7\sqrt{2}$ irrational, der Anzeiger ist

$$\frac{7\sqrt{3}}{14\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1,5}.$$

Im Hefte sind diese Sätze durch andere Beispiele zu erläutern. Im Übungshefte aber sind viele Beispiele der letztern Art durchzugehen, und bei jeder der einfachste Ausdruck des Anzeigers auf ähnliche Art, als hier geschehen ist, aufzusuchen.

§. 12. Erklärung.

Wenn in einer Proportion das zweite und dritte Glied gleich sind, so nennt man dieselbe eine stätige Proportion. Sie besteht also nun aus drei Größen von denen die zweite das mittlere Proportionalglied heißt.

Da man nach X. 14. zu jeden drei gegebenen Größen das vierte Proportionalglied finden kann, so kann es keine Schwierigkeit haben, ein Beispiel zur Erläuterung dieser Erklärung zu erfinden.

§. 13. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Größen das mittlere Proportionalglied zu finden.

Auflösung und Beweis. Die gegebenen Größen seien a und b, das gesucht mittlere Glied x, so soll $a : x = x : b$ sein. Daraus folgt (X. 12.) $x^2 = ab$. Also (nach XII. 4. n. 2.) $x = \sqrt{ab}$.

Im Hefte ist die durch diese Formel ausgedrückte Regel in Worte zu übersetzen. Dann sind zwei Zahlenbeispiele beizufügen. a) Zuerst wähle man a und b so, daß ab eine vollständige Quadratzahl, also das mittlere Glied eine bestimmte fehlerfreie Zahl wird; b) Dann wähle man für a und b zwei beliebige Zahlen, deren Product eine unvollständige Quadratzahl ist; aus welcher folglich die Wurzel nach XI. 20. ausgezogen werden muß. Diese Ausziehung ist wirklich auf 4 bis 6 Bruchziffern zu machen, und dann die verlangte Proportion vollständig aufzuschreiben.

§. 14. Lehrsatz.

1. Wenn man alle Glieder irgend einer Proportion zu Potenzen derselben Ordnung erhebt, so

bilden diese eine richtige Proportion, deren Anzeiger die eben sovielte Potenz vom Anzeiger der gegebenen ist.

2. Umgekehrt: Wenn man aus allen Gliedern einer Proportion Wurzeln derselben Ordnung zieht, so bilden die absoluten Werthe derselben wieder eine richtige Proportion, deren Anzeiger die eben sovielte Wurzel vom Anzeiger der gegebenen ist.

Anleitung zum Beweise. Der Beweis kann auf mehr als eine Art geführt werden, am bequemsten auf folgende.

1. Die gegebene Proportion sei $a : b = c : d$. Man erhebe alle vier Glieder zu einer beliebigen ($n$ten) Potenz, so wird sich durch Anwendung von Abschn. X. §. 12. 13 und 3., die Richtigkeit des ersten Theils leicht zeigen lassen.
2. Wenn man aus allen Gliedern derselben Proportion, Wurzeln eines und desselben ($n$ten) Grades (nach XII. §. 3. n. 1.) auszieht, so kann man aus dem bei n. 1. angeführten Paragraphen, in Verbindung mit Abschn. XII. §. 6. und 4., den Beweis des zweiten Theils auf ähnliche Art führen.

Sowohl der erste als zweite Theil sind im Hefte vollständig auszuführen, entweder in allgemeinen Zeichen, oder in bestimmten Zahlen.

§. 15. Lehrsatz.

1. In einer stätigen Proportion verhält sich das erste zum letzten Glied, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweiten; also

2. umgekehrt: das erste zum zweiten, wie die Quadratwurzel des ersten zur Quadratwurzel des letzten.

Anleitung zum Beweise.

1. Wenn $a : b = b : c$ die gegebene Proportion ist, so sind folgende beide Proportionen richtig

$$a : b = a : b$$
$$b : c = a : b$$

Man setze diese Proportionen nach X. 22. zusammen, so ergiebt sich die Richtigkeit des ersten Theils.

2. Der zweite Theil läßt sich unmittelbar aus dem ersten ableiten, wenn man aus allen Gliedern der nach n. 1. gefundenen Proportion nach §. 14. n. 2. Quadratwurzeln zieht.

Beides ist im Hefte auszuführen.

§. 16. Erklärung.

Wenn die Glieder eines Verhältnisses oder einer Proportion zu Potenzen erhoben werden, so nennen dieses die alten Mathematiker, und viele der neuern, **Erhöhung eines Verhältnisses**, und wenn Wurzeln ausgezogen werden **Erniedrigung desselben**. Ausdrücke die entbehrlich, aber doch bisweilen für Deutlichkeit und Kürze bequem sind.

Es kann nicht schwer sein im Hefte bestimmt zu sagen, was ein zwei- drei- viermal rc. erhöhtes oder erniedrigtes Verhältniß sei, und es durch Beispiele zu erläutern.

C. Allgemeingültigkeit der im zwölften Abschnitt für ganze und positive Exponenten erwiesene Rechnungsregeln.

§. 17. Anmerkung.

Es ist zuerst nöthig, die vier Hauptregeln, welche im zwölften Abschnitt bloß für ganze und positive Exponenten erwiesen worden, hier bestimmt ins Gedächtniß zurückzurufen: nämlich

1. die Multiplicationsregel, XII. 14.
2. die Divisionsregel, XII. 16 und 28.
3. die Potenzirungsregel, XII. 17.
4. die Wurzelansziehungsregel, XII. 18 und 24.

Hier soll nun gezeigt werden, daß eben diese Regeln für alle Arten von Exponenten gültig sind.

Es ist zweckmäßig, diese Regeln hier im Hefte in bestimmten Worten auszusprechen, und dabei besonders die §. 24. und 28. erwiesenen Erweiterungen der Divisions- and Wurzelregel zu berücksichtigen.

§. 18. Lehrsatz.

Der absolute Werth einer Bruchpotenz bleibt ungeändert, wenn man den Zähler und Nenner des Exponenten mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Beweis. Man wähle zwei gleiche Brüche z. B. $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$, von denen der zweite aus dem ersten durch Multiplication, der erste aus dem zweiten durch Division mit 2 entsteht. Es ist zu beweisen, daß sie als Exponenten zu derselben Wurzelgröße gesetzt einerlei Werth geben; daß also

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}}.$$

Man zerfälle in Gedanken die Wurzelgröße a in so viele gleiche Factoren, als der größere Nenner (6) andeutet. Nennt man einen solchen Factor x, so ist $a = xxxxxx$ und die zweite Formel ($a^{\frac{4}{6}}$) verlangt, daß man vier solcher Factoren verbinden solle; also ist $a^{\frac{4}{6}} = xxxx$ oder x^4.

Die erste Formel ($a^{\frac{2}{3}}$) aber verlangt, daß man a nur in drei Factoren theilen solle. Dieses ist aber leicht, nachdem man es in sechs getheilt hat: nämlich $a = (xx)\,(xx)\,(xx)$. Die erste Formel verlangt aber, daß man von diesen drei Factoren zwei verbinden solle; also ist $a^{\frac{2}{3}} = (xx)\,(xx)$, welches nichts anders als x^4 ist.

Also ist $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}}$.

Dieser Beweis ist im Hefte nur mit Annahme zweier andern gleichen Brüche zu wiederholen.

Anmerkungen. Man könnte leicht diesen Beweis für überflüssig halten, und meinen, daß man geradezu schließen dürfe: da $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, so muß auch $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}}$ sein. Erwägt man aber, daß die gebrochnen Exponenten $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ nicht schlechthin Zahlen, sondern Rechnungszeichen sind, deren jedes andere Rechnungen vorschreibt so ist es allerdings nöthig zu beweisen, daß diese verschiedenen Rechnungsoperationen nichts verschiedenes geben. Nachdem dieser Beweis geführt ist, darf man aber alle für Brüche erwiesene Rechnungsregeln der Addition und Subtraction auch auf gebrochne Exponenten anwenden.

§. 19. Lehrsatz.

Die Multiplicationsregel XII. 14. ist für alle Arten von Exponenten gültig.

Vorerinnerung. Im Allgemeinen bemerke man über den Gang des Beweises in diesem und den folgenden Paragraphen folgendes. Man nimmt Potenzen mit gebrochnen Exponenten an, und giebt den Exponenten, je nachdem es der Satz fodert die Vorzeichen + oder —. Hierauf giebt man den Formeln, nach XII. 23. und 27. die Gestalt ganzer und positiver Potenzen, so läßt sich die verlangte Rechnung nach den im zwölften Abschnitt erwiesenen Regeln verrichten. Dem so gefundenen Ergebniß giebt man wieder die Gestalt gebrochner, oder negativer Exponenten, so zeigt sich, daß man nichts anders erhält, als wenn man unmittelbar die für ganze und positive Exponenten erwiesenen Regeln angewendet hätte. Wer diesen Gang der Beweise im Allgemeinen richtig auffaßt, der wird nicht leicht bei der Ausführung im Einzelnen Schwierigkeit finden. Wir kommen nunmehr zu dem allgemeinen

Beweis der Multiplicationsregel. Man gebe derselben Wurzelgröße a zwei beliebige gebrochene Exponenten, z. B.

$$\frac{m}{n} \text{ und } \frac{r}{s},$$

so ist zu beweisen, daß in jedem Fall

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}},$$

und daß dieses richtig bleibe, man mag den Exponenten + oder — zum Vorzeichen geben, wenn man nur unter

$$\frac{m}{n} + \frac{r}{s}$$

eine algebraische Addition versteht.

Der Vorzeichen wegen sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. wenn beide Exponenten positiv sind. Man bringe nach §. 18. beider Brüche, unter denselben Nenner ns, so hat man

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} \cdot a^{\frac{rn}{ns}}.$$

Man gebe weiter diesen Potenzen nach XII. 23. die Gestalt ganzer und positiver Potenzen, so hat man

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms} \cdot \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{nr}.$$

Multiplicirt man diese ferner nach XII. 14., so ergiebt sich

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms + nr}.$$

Verwandelt man diese Formel wieder in eine Bruchpotenz, nach XII. 23., so erhält man

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms + nr}{ns}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}},$$

welches zu erweisen war.

2. Man gebe dem einen Exponenten + dem andern —; so ist zu beweisen, daß

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}},$$

wo der letzte Exponenent

$$\frac{m}{n} - \frac{r}{s}$$

die algebraische Summe der Exponenten

$$+\frac{m}{n} \text{ und } -\frac{r}{s} \text{ ist.}$$

Der Beweis ist dem vorigen ganz ähnlich, und kann daher hier abgekürzt werden. Nämlich

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} \text{ (XII. 26.)}$$

$$= \frac{a^{\frac{ms}{ns}}}{a^{\frac{nr}{ns}}} \text{ (§. 18.)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms}}{\left(\sqrt[ns]{a}\right)^{nr}} \text{ (XII. 23.)}$$

$$= \left(\sqrt[ns]{a}\right)^{ms - nr} \text{ (XII. 16 und 23.)}$$

$$= a^{\frac{ms - nr}{ns}} \text{ (XII. 23.);}$$

also

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}.$$

3. Man gebe beiden Exponenten das Vorzeichen —, so ist zu erweisen, daß

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{r}{s}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)}.$$

Zuerst ist

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}}} \text{ (XII. 27.)}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}} \text{ (n. 1. dieses §.)}$$

$$= a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)} \text{ (XII. 27.)}$$

In dem Hefte wiederhole man diese Beweise, setze aber für m, n, r, s bestimmte Zahlen.

§. 20. Zusatz.

Auch die Divisionsregel XII. 16 und 28. gilt für alle Arten von Exponenten.

Da nach VI. 19. Anm. jede Division vorgestellt werden kann als eine Multiplication mit dem umgekehrten Werthe des Divisors, so ist kein besonderer Beweis dieses Satzes nöthig. Es ist nämlich in jedem Fall

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot a^{-n};$$

die Exponenten mögen beschaffen sein, wie man will. Aber

$$a^m \cdot a^{-n}$$

ist nach dem vorigen Paragraphen

$$= a^{m-n}$$

also in jedem Fall

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

d. h. der Exponent des Quotienten ($m - n$) wird gefunden, wenn man vom Exponenten des Dividendus (m) den Exponenten des Divisors (n) algebraisch subtrahirt.

Im Hefte mag es hinreichen, diese Schlüsse an einem einzelnen Beispiel zu wiederholen, indem man für m und n beliebige ganze Zahlen oder Brüche setzt.

§. 21. Lehrsatz.

Die Regel der Potenzerhebung einer potenzirten Größe XII. 17. gilt für alle Arten von Exponenten.

Beweis. Nach XII. 17. ist

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

wenn m und n ganze und positive Zahlen sind. Es ist also zu beweisen, daß der Satz richtig bleibe, wenn man den Exponenten m und n beliebige gebrochne, positive oder negative Werthe giebt. Der Vorzeichen wegen sind vier Fälle zu betrachten.

1. Wenn beide Exponenten positiv sind, so ist zu beweisen, daß

$$\left(a^{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{mn}{rs}}.$$

Man zerfälle in Gedanken die Wurzelgröße a in rs gleiche Factoren, und nenne einen solchen Factor x, so ist

$$\sqrt[rs]{a} = x.$$

Zerfället man aber diese rs gleiche Factoren wieder in r gleiche Factoren, so ist einer derselben x^s, also

$$\sqrt[r]{a} = x^s.$$

Nunmehr läßt sich leicht zeigen, daß die verschiedenen Rechnungsordnungen, welche die beiden Zeichen

$$\left(a^{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} \text{ und } a^{\frac{mr}{ns}}$$

vorschreiben, zu einerlei Ergebniß führen.

Was die letzte Formel betrifft, so ist

$$a^{\frac{mn}{rs}} = \left(\sqrt[rs]{a}\right)^{mn} = x^{mn}.$$

In Ansehung der ersten Formel haben wir

$$\left(a^{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} = \left(\left(\sqrt[r]{a}\right)^{m}\right)^{\frac{n}{s}} = \left(\left(x^{s}\right)^{m}\right)^{\frac{n}{s}} = \left(x^{sm}\right)^{\frac{n}{s}}$$

(XII. 17.). Aber der Exponent

$$\frac{n}{s}$$

fodert, daß aus der Größe

$$x^{sm}$$

zuerst die Wurzel der $s$ten Ordnung gezogen werde (XII. 23.). Es ist aber

$$\sqrt[s]{a^{sm}} = x^{\frac{sm}{s}} = x^{m}$$

(XII. 18.); und dieses soll zur $n$ten Potenz erhoben werden welches x^{mn} giebt (XII. 17.). Es ist also auch

$$\left(a^{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} = x^{mn}$$

und daher auch

$$\left(a^{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{mn}{rs}}.$$

2. Wenn der innere Exponent positiv, und der äußere negativ ist, so ist zu erweisen, daß

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}} = a^{-\frac{mn}{rs}}.$$

Es ist aber

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{r}{s}} = \frac{1}{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}}} \text{ (XII. 27.)} = \frac{1}{a^{\frac{mn}{rs}}} \text{ (n. 1.)}$$

$$= a^{-\frac{mn}{rs}} \text{ (XII. 27.)}.$$

3. Ist der innere Exponent negativ und der äußere positiv, so ist zu beweisen, daß

$$\left(a^{-\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} = a^{-\frac{mn}{rs}}.$$

Es ist nämlich

$$\left(a^{-\frac{m}{r}}\right)^{\frac{n}{s}} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} \text{ (XII. 23.)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{mn}{rs}} \text{ (n. 1.)}$$

$$= a^{-\frac{mn}{rs}} \text{ (XII. 23.)}.$$

4. Sind beide Exponenten negativ, so ist zu beweisen, daß

$$\left(a^{-\frac{m}{r}}\right)^{-\frac{n}{s}} = a^{+\frac{mn}{rs}}.$$

Es ist nämlich

$$\left(a^{-\frac{m}{r}}\right)^{-\frac{n}{s}} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{-\frac{n}{s}} \text{ (XII. 23.)}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{mn}{rs}} \text{ (n. 2.)} = a^{+\frac{mn}{rs}} \text{ (XII. 23.)}.$$

Im Hefte sind statt m, r, n, s bestimmte kleine Zahlen zu setzen.

§. 22. Zusatz.

Für die Wurzelausziehung aus einer potenzirten Größe (XII. 18. und 24.) ist kein besonderer Beweis nöthig, weil jede Wurzelausziehung allezeit als eine Potenzerhebung zu einem gebrochnen Exponenten betrachtet werden kann (XII. 22.).

Nach XII. 18. und 24. ist allezeit

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

wenn m und n ganze und positive Zahlen sind. Setzte man nun statt m einen Bruch, etwa

$$\frac{m}{r},$$

so ist

$$\sqrt[n]{\left(a^{\frac{m}{r}}\right)} = \left(a^{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{rn}}$$

(§. 21.). Dieser Exponent

$$\frac{m}{rn}$$

ist aber der Quotient, den man erhält, wenn der Bruch

$$\frac{m}{r}$$

durch n dividirt wird. Also wird jede Wurzelausziehung verrichtet, wenn man den Potenzexponenten, durch den Wurzelexponenten dividirt.

Auch diese Schlüsse sind mit bestimmten Zahlenexponenten zu wiederholen.

Anmerkung. Es ist ungewöhnlich zu Wurzelexponenten andere als ganze Zahlen zu brauchen. Daher war es nicht nöthig, für n einen Bruch zu setzen.

§. 23. Erklärung.

Nimmt man alles zusammen, was in diesem und dem vorigen Abschnitt vorgetragen worden, so läßt sich nunmehr ohne Schwierigkeit erklären, was eine Potenz im weitesten Sinne des Wortes sei.

Wenn man eine vorliegende Wurzelgröße A, in irgend eine Anzahl n gleicher Factoren zerfället denkt, so nennt man nicht nur jede ganze Potenz eines solchen Factors selbst, sondern auch jede ganze Potenz seines umgekehrten Werthes eine Potenz von A. Der Exponent derselben ist im Allgemeinen ein Bruch, dessen Nenner n anzeigt, in wieviele Factoren A zerfället sei, und der Zähler m, wieviele solche Factoren oder deren umgekehrte Werthe in ein Product zu verbinden sind. Werden die Factoren selbst verbunden, so ist der Exponent positiv, werden ihre umgekehrten Werthe verbunden, negativ.

Jede Potenz von A kann also allgemein durch das Zeichen

$$A^{\pm\frac{m}{n}}$$

vorgestellet werden.

Im Hefte ist zu zeigen, daß diese Erklärung wirklich alle Arten von Potenzen umfasse. Es sollen daher folgende Fragen beantwortet werden.

1. Wie müssen die Werthe von m und n beschaffen sein, wenn

$$A^{\pm\frac{m}{n}}$$

eine ganze positive oder negative Potenz von A vorstellen soll? Und welches ist die einfachste Art, dieses zu bewerkstelligen? (VI. 1. a.)

2. Was ist der Sinn der Zeichen

$$A^{+\frac{m}{n}} \text{ oder } A^{\frac{m}{n}}, \text{ und } A^{-\frac{m}{n}},$$

wenn man für m und n beliebige ganze Zahlen setzt?

Anmerkung. Bei n. 1. kann es anstößig scheinen zu sagen, daß A in einen Factor zerfället werden müsse. Allein der Ausdruck ist ganz richtig; denn jede ganze Zahl, also auch 1, kann anzeigen, wie viele Factoren man setzt. Wird nun ein einziger Factor (also A selbst) gesetzt, so ist + 1 der andere zugehörige Factor (XII. 1.).

§. 24. Zusatz.

1. Die Abschnitte XII. und XIII. enthalten vollständig alles, was man wissen muß, um mit eingliedrigen Formeln, welche potenzirte Größen enthalten, alle einfachen Rechnungsarten, mit Einschluß der Potenzirung und Wurzelausziehung auszuführen.

2. Aber auch zu allen Rechnungen mit mehrgliedrigen Formeln, in welchen potenzirte Größen vorkommen, sind die vorgetragenen Sätze völlig hinreichend, wofern nur nicht höhere Rechnungen, als Addition, Subtraction, Multiplication und Division gefodert werden. Wie man mehrgliedrige Formeln potenziren, oder Wurzeln aus denselben ziehen müsse, dazu kann erst im Folgenden Anleitung gegeben werden.

Da es bei allen Rechnungen nothwendig ist, daß man nicht nur die Regeln verstehe, sondern auch, daß man sich in ihrer Anwendung Fertigkeit erwerbe, so ist hier der Ort, wo im Übungshefte sehr viele Beispiele nach der Ordnung der einfachen Rechnungsarten zu rechnen sind. Bei jeder Rechnungsart zuerst einige Beispiele von eingliedrigen dann mehrere von mehrgliedrigen Formeln. Nur bei der Potenzirung und Wurzelausziehung muß man sich bloß auf eingliedrige Formeln beschränken. Wer diese beiden Abschnitte mit dem nöthigen Fleiße durchgearbeitet hat, dem kann es nicht schwer werden sich zweckmäßige Übungsbeispiele selbst zu erfinden, wodurch er eine doppelte Übung des Nachdenkens hat. Wer aber damit nicht glaubt fertig werden zu können, der kann einen hinlänglichen Vorrath von Exempeln in der Beispielsammlung des Herrn Meier Hirsch (zweite Ausgabe von 1811 S. 43 — 58) finden.

Es wird nicht überflüssig sein, hiebei noch zwei Vortheile der Rechnung in Erinnerung zu bringen: 1) daß man vor der Rechnung alle Divisoren wegschaffen könne, indem man sie in Factoren mit negativen Exponenten verwandelt; 2) daß man auch alle Wurzelzeichen vermeiden, und statt derselben gebrochne Exponenten brauchen könne. Durch Beobachtung dieser Vortheile gewinnt man bei allen Rechnungen einen einfachen gleichförmigen Gang.

Doch ist zu empfehlen, daß man auch einige Beispiele absichtlich so rechne, daß man Divisoren und Wurzelzeichen nicht wegschafft, indem die vorgetragene Theorie alles enthält, was man wissen muß, um mit Formeln auch in dieser Gestalt zu rechnen.