Biblioteka
U.M.K.
Toruń
89084

Diophantus

von Alexandria

arithmetische Aufgaben

nebst dessen Schrift

über die

Polygon-Zahlen.

Aus dem Griechischen übersetzt und mit Anmerkungen begleitet

von

Otto Schulz,

Professor am Berlinisch-Cölnischen Gymnasium zum grauen Kloster.

Berlin, 1822.

In der Schlesingerschen Buch- und Musikhandlung.



5921

89084

II

Vorbericht.

Das Werk des Diophantus, welches ich zunächst den Freunden der Mathematik in einer deutschen Bearbeitung übergebe, gehört unstreitig zu den schätzbarsten Ueberresten des griechischen Alterthums. Schon als ein Denkmal von dem Zustande der Wissenschaften unter den Griechen müßte es für den Alterthumsforscher einen geschichtlichen Werth haben; aber selbst von der wissenschaftlichen Seite betrachtet, verspricht es dem Mathematiker eine reiche Ausbeute von sinnreichen Methoden zur Auflösung eben so sinnreicher Aufgaben aus der unbestimmten Analytik. Es müßte daher befremden, daß ein Werk von solcher Bedeutung in

neuerer Zeit so wenig beachtet worden ist, wenn nicht die Seltenheit des griechischen Textes, die ziemlich allgemeine Abneigung, ich weiß nicht, ob der Philologen gegen mathematische Studien, oder der Mathematiker gegen philologische, und endlich der bloß kaufmännische Sinn der mehresten Buchhändler die auffallende Erscheinung vollständig erklärten. Der Verfasser, der seit einer Reihe von Jahren sich mit dem Studium der griechischen Mathematiker beschäftigt hat, und gern das Seinige dazu beitragen möchte, die wissenschaftlichen Schätze des griechischen Alterthums wieder ans Licht zu ziehen, und auch für den Nichtkenner der griechischen Sprache zugänglich zu machen, glaubt daher keine undankbare Wahl getroffen zu haben, indem er von der eben vollendeten Bearbeitung des Apollonius über die Kegelschnitte, zu welcher sich für jetzt kein Verleger fand, zu der Bearbeitung eines Werkes überging, das nicht bloß durch eine höchst sinnreiche Methode, sondern eben so sehr durch seinen Inhalt, den mathematischen Leser anzuziehen geeignet ist.

Ueber die Lebensumstände des Diophantus wissen wir so wenig, daß wir nicht ein Mal sein Zeitalter mit völliger Sicherheit angeben können, sondern uns begnügen müssen mit der Feststellung zweier sehr weiten Gränzen, innerhalb deren sein Leben und Wirken fallen muß. Diophantus erwähnt in seiner Schrift über die Polygonzahlen (§. VIII. S. 329 dieser Uebersetzung) einer von Hypsikles aufgestellten Erklärung dieser Zahlen; nun ist aber kein anderer Mathematiker dieses Namens bekannt, als der Verfasser der kleinen Schrift über die regelmäßigen Körper, welche man, wegen der Aehnlichkeit des Inhalts, den Elementen des Euklides als ein vierzehntes und funfzehntes Buch einverleibt hat. In der Vorrede zu dieser Schrift erwähnt Hypsikles einer Schrift des Apollonius über das Verhältniß eines in dieselbe Kugel beschriebenen Dodekaeders und Ikosaeders, zu deren Ergänzung und Berichtigung eben seine Arbeit bestimmt sei. Von der Schrift des Apollonius, und einer späteren berichtigten Ausgabe derselben sagt Hypsikles, sie sei überall zu haben,

und man darf daher nicht zweifeln, daß Hypsikles bedeutend jünger als Apollonius sei. Da der letztere nach dem Zeugniß seines Erklärers Eutocius unter dem Ptolemäus Evergetes, also etwa 200 Jahre vor Christi Geburt gelebt hat, so hat man allen Grund, den jüngeren Diophantus in eine viel spätere Zeit zu setzen.

Die zweite Gränze für das Zeitalter des Diophantus will man durch das Leben einer vermeintlichen Erklärerinn seiner Werke feststellen. Hypatia, die eben so gelehrte als unglückliche Tochter des Theon von Alexandria hat nach dem Zeugniß des Suidas einen Commentar zu einem Werke des Diophantus geschrieben. Die Unglückliche endigte nach der übereinstimmenden Erzählung mehrer kirchlichen Schriftsteller, unter anderen auch des Sokrates (Hist. Eccles. L. V. cap. 15.) in einem von feindseligen Priestern erregten Aufstande, unter dem zehnten Consulat des Honorius und dem siebenten des Theodosius, d. i. im Jahre 415 der christlichen Zeitrechnung, so daß Diophantus in dem Zeitraum

zwischen 200 vor Christo bis 400 nach Christo gelebt haben muß.

Ich darf es aber nicht übergehen, daß bei der letzteren Nachricht höchst wahrscheinlich eine Verwechselung zweier gleichnamigen Personen obwaltet. Nach der wahrscheinlichen Lesart beim Suidas *) hat Hypatia nicht einen Com-

*) Suidas hat einen eigenen Artikel über das Leben der Hypatia. Es heißt darin: Ὑπατία ἡ Θέωνος τοῦ Γεωμέτρου θυγάτης, τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου, καὶ αὐτὴ φιλόσοφος, καὶ πολλοῖς γνώριμος. γυνὴ Ἰσιδώρου, τοῦ φιλοσόφου. ἤκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας Ἀρκαδίου. ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διοφάντην, τὸν ἀστρονομικόν. Κανόνα εἰς τὰ κωνικά. Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Daß die Interpunction dieser Stelle unrichtig sei, fällt in die Augen. In Ludolph Küsters Ausgabe des Suidas wird vorgeschlagen: ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διοφάντου ἀστρονομικὸν κανόνα. εἰς τὰ κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. Ist diese Interpunction richtig, so hat Hypatia nicht über das berühmte arithmetische Werk unseres Diophantus, sondern über die astronomischen Tafeln eines gleichnamigen Verfassers geschrieben; denn wenn Suidas denselben auch Διοφάντης nennt, nicht Διόφαντος, so wird doch in den Epigrammen des Lucillius ein

mentar zum Diophantus überhaupt, sondern zu einem astronomischen Werke desselben — εἰς Διοφάντου ἀστρονομικὸν κανόνα — geschrieben, und es ist sehr die Frage, ob jener Astronom mit unserem Arithmetiker dieselbe Person sei. Wenigstens ist der Name Diophantus kein ganz seltener, wie schon Fabricius in seiner Bibliotheca Graeca (Vol. V. S. 641. Edit. Harles.) durch die Aufzählung mehrer Diophanti beweis't, und nirgend findet sich eine Spur,

---

Astrologe Diophantus erwähnt, und der Name Διοφάντης findet sich sonst nirgend, wiewohl ich darum nicht behaupten möchte, daß die Form Διοφάντης ungriechisch sei, da es schon der Συκοφάντης widerlegen könnte.

Andere interpungiren indeß: ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον. ἀστρονομικὸν κανόνα. κ. τ. λ. so daß unsere Hypatia außer dem Commentar über den Diophantus und Apollonius Kegelschnitte ein eigenes Werk geschrieben haben müßte, welches ihr auch mehre Litteratoren, unter anderen Heilbronner Hist. Matheseos universae p. 376. und Montucla Hist. des Mathématiques Tom. I. p. 326. wirklich beilegen.

daß das Alterthum in unserem Diophantus einen großen Astronomen gesehen habe; als Arithmetiker dagegen stand er den Alten so hoch, daß Johannes von Jerusalem in dem Leben des Johannes von Damaskus sagen konnte, er sei in der Geometrie so bewandert gewesen wie Euklides, in der Arithmetik wie Pythago- und — Diophantus!

Alle diese Umstände übersehend, und nur froh, irgend ein gleichzeitiges testimonium de Diophanto aufzutreiben, hat man kein Bedenken getragen, einige in Brunck's Analectis Veterum Poetarum P. II., 517. sqq. enthaltene Epigramme eines Lucillius, der zur Zeit des Nero gelebt haben soll, auf unseren Diophantus zu beziehen, und da Lucillius von seinem Diophantus wie von einem Zeitgenossen redet, ihn unter die Regierung des Nero zu setzen. Aber man vergißt, daß Lucillius seinen Diophantus ausdrücklich Diophantus den Astrologen, nicht Diophantus den Arithmetiker nennt, und daß ihm die winzige Gestalt und der astrologische Aberglaube des guten Mannes gerade so zur Zielscheibe seines Witzes

dienen muß, wie einem neueren Epigrammatiker Wahls lange Nase. Man höre nur, wie der Spötter Lucillius dem armen Astrologen und nebenbei seinem Arzte Hermogenes mitspielt:

I.

Aus Atomen bestehe die Welt, so lehrt' Epikurus,
Kleineres meinte er wohl, gäb' es o Alkimos nicht.
Aus Diophanten hätt' er gesagt, dafern Diophantus
Mit ihm lebte, der viel kleiner ist, als ein Atom.
Oder auch so: aus Atomen besteht das übrige Weltall,
Aus Diophanten besteht wiederum jedes Atom.

II.

Als Diophantus der Winzige sich zu erhängen beschlossen,
Nahm er ein Spinnegeweb', schnürte die Kehle sich zu.

III.

Als Diophantus den Arzt Hermogenes neulich im Traum sah,
Schützt' ihn kein Amulet, schlafend empfing er den Tod!

IV.

Zu Hermogenes sprach dem Arzt Diophantus der Sternwart,
Nur neun Monden noch sei er zu leben bestimmt.
Lachend erwiederte der: was doch neun Monden besagen,
Grüble du aus, ich selbst gebe dir kurzen Bescheid.
Sprach's und berührt' ihn bloß mit der Hand, und seht — Diophantus,
Während er Andere schreckt, zappelte selber sich todt.

Schwerlich können die Späße über das seltsame Ende dieses lächerlichkleinen und abergläubischen Diophantus, denen doch wohl irgend eine Thatsache zum Grunde liegen muß, auf unseren Diophantus bezogen werden; denn unter den arithmetischen Räthseln in der grie-

chischen Anthologie, welche man größtentheils dem Metrodorus beilegt, und von denen der Anhang zum fünften Buche einige nachzubilden versucht, befindet sich ein Epigramm, das letzte in dem erwähnten Anhang, das ohne allen Zweifel auf unseren Diophantus geht, indem es ihn als einen großen Arithmetiker bezeichnet, und welches das Alter desselben, nebst einigen Umständen seines Lebens in einem algebraischen Räthsel angiebt. Nach diesem unzweideutigen und wahren testimonio de Diophanto hat derselbe das hohe Alter von 84 Jahren erreicht, und ist also vermuthlich doch eines natürlichen Todes gestorben; man kann daher schwerlich geneigt sein, den Astrologen Diophantus, der sich bald an dem Faden eines Spinnegewebes aufhängt, bald aus einer abentheuerlichen Furcht vor dem Arzte Hermogenes eines unfreiwilligen Todes stirbt, mit dem Diophantus für eine Person zu halten, der um seiner mathematischen Kenntnisse willen in dem ganzen Alterthum so hoch geschätzt wurde, und nach einem unverdächtigen Zeugniß ein so hohes Alter erreicht hat.

Unter diesen Umständen wäre es doppelt angenehm, wenn sich aus seinen Schriften irgend eine Angabe entnehmen ließe, aus der man sein Zeitalter bestimmen könnte; aber eine solche Angabe findet sich nicht, denn der Dionysius, welchem er seine Schrift zugeeignet hat, ist, wiewohl ihn Diophantus τιμιώτατε anredet, dem berühmten Namen zum Trotz, dennoch eine völlig unbekannte Person. Bombelli's Annahme, Diophantus habe unter dem Kaiser Antoninus Pius gelebt, ist eine bloße Vermuthung, die nichts weiter für sich hat, als daß sie den übrigen Umständen nicht geradezu widerspricht, und am ersten möchte man sich daher bei der Angabe des Abulpharagius beruhigen, der ihn (Historia Dynast. S. 141. des arabischen Textes. S. 89. der lateinischen Uebersetzung von Eduard Pococke. Oxford 1663.) zu einem Zeitgenossen des Kaisers Julianus Apostata macht.

Nachdem Abulpharagius nämlich mehre zur Zeit des Julianus lebende Philosophen angeführt hat, fährt er nach Pococke's Uebersetzung

a. a. O. fort: ex iis etiam *Diophantes* (sic), cujus liber A, B, *) quem Algebram vocat, celebris est, in quem si immiserit se lector, Oceanum hoc in genere reperiet. Man darf hierbei allerdings die Frage aufwerfen, welche Gewähr der ziemlich späte Armenier — er lebte in der Mitte des dreizehnten Jahrhunderts — für seine Angabe gehabt habe, und Colebrooke äußert sogar die Vermuthung, sie gründe sich vielleicht bloß auf eine Stelle im Suidas, der einen nicht näher bezeichneten Diophantus als Lehrer des Rhetor Libanius, eines Zeitgenossen des Kaiser Julianus Apo-

*) Im Arabischen steht: sein Buch Ab-kismet über Al-Dschebr und Al-Mokabala ist berühmt. Al-Dschebr und Al-Mokabala d. i. Zusammensetzung und Vergleichung ist bei den Arabern die gewöhnliche Benennung der Algebra. Kismet heißt Theilung, aber Ab-kismet giebt keinen Sinn, so wenig wie A, B, was Pococke dafür gesetzt hat. Vermuthlich soll es den Titel des Werkes anzeigen, und ist am Ende gar eine Verstümmelung des griechischen Wortes Arithmetik. Ich verdanke diese Bemerkungen der Güte des Herrn Professor Ideler.

stata anführe. Es ist aber nicht abzusehen, warum Suidas gerade der einzige Gewährsmann unseres Geschichtschreibers sein soll, da er S. 222. der angeführten Uebersetzung eines von Mohammed Al Buzjani abgefaßten Commentars über den Diophantus erwähnt, und also höchst wahrscheinlich aus anderen Quellen geschöpft hat. In jedem Falle aber wird Abulpharagius Angabe durch Suidas Zeugniß noch bekräftigt, denn gerade der Umstand, daß Suidas jenen Diophantus nicht näher bezeichnet, scheint laut dafür zu sprechen, daß der berühmte Mathematiker dieses Namens gemeint sei, man müßte denn aus dem wohl bekannten: Mathematicis non licet esse disertis den Schluß ziehen, ein Redner könne unmöglich Schüler eines Mathematikers gewesen sein, ein Schluß, gegen welchen sich im Ernste freilich nichts einwenden läßt.

So wie über dem Leben des Diophantus, so schwebt auch über dem Schicksal seiner Werke noch manches Dunkel, das vielleicht niemals aufgehellt werden wird. Sein großes arithmetisches Werk bestand, wie er am

Schluß der Einleitung sagt, aus dreizehn Büchern, aber nur sechs derselben sind in den fünf bekannten Handschriften vorhanden, wenn man nicht etwa die kleine, noch dazu nicht vollständige Schrift über die Polygonzahlen als ein siebentes ansehen will, eine Annahme, für welche zwar die Aehnlichkeit des Inhalts spricht, welche aber die ganz verschiedenartige Behandlung des Stoffes gegen sich hat. Auch die sechs Bücher, welche wir gegenwärtig besitzen, haben schwerlich ihre ursprüngliche Gestalt behalten. Die Auflösung vermischter quadratischer Gleichungen, welche Diophantus zu geben verspricht, findet sich nirgend, und wird doch bei den Aufgaben der drei letzten Bücher schon als bekannt vorausgesetzt, und Aufgaben, welche ihrem Inhalte nach in ein früheres Buch gehörten, kommen zuweilen noch in einem späteren Buche vor, oder werden, wie die ersten Aufgaben des zweiten Buches, mit ganz unwesentlichen Veränderungen zwei Mal vorgetragen. Oft hat man daher vermuthet, unser Diophantus sei ein von einem flüchtigen Arbeiter, einem sogenannten Dilettanten, angefer-

gefertigten Auszug aus einem größeren Werke; allein für einen solchen Auszug ist immer noch zu viel Plan in der Folge und Anordnung der Sätze, und was im Einzelnen auffällt, läßt sich sehr wohl daraus erklären, daß der Abschreiber mehre Codices vor sich hatte, von denen der eine oder der andere eine spätere Ueberarbeitung, vielleicht sogar von der Hand des ursprünglichen Verfassers war. Spätere, berichtigte Ausgaben desselben Werkes waren auch bei den Alten nichts Seltenes, und wenn sich das nicht schon durch die Natur der Sache rechtfertigte, so könnte man das ausdrückliche Zeugniß des Apollonius anführen, der von dem vorhin angeführten kleineren, so wie von seinem berühmten Werk über die Kegelschnitte, eine neue und verbesserte Ausgabe veranstaltete, und dadurch selbst veranlaßte, daß sich von demselben Satze oft zwei ganz unähnliche Beweise vorfinden.

Der Umstand, daß eine der drei vaticanischen Handschriften den Inhalt der ersten sechs Bücher in deren sieben vertheilt, hat übrigens auch die entgegengesetzte Vermuthung

veranlaßt, daß wir in unseren sechs Büchern vielleicht einen weit größeren Theil des Ganzen besitzen mögen, als es den Anschein hat; aber diese Annahme, für welche sich sonst noch Manches anführen ließe, stimmt weder mit dem Zeugniß des Regiomontanus, der eine Handschrift von allen dreizehn Büchern gesehen zu haben versichert, noch mit Bachets bestimmter Angabe, der Cardinal Perron habe eine Handschrift von allen dreizehn Büchern besessen, und sie seinem Landsmanne Wilhelm Gosselin, der einen Commentar zum Diophantus schreiben wollte, überlassen, Gosselin aber sei an der Pest gestorben, und alle Nachfrage nach der Handschrift, die der Cardinal für jeden Preis wieder einlösen wollte, vergeblich geblieben. Wären Regiomontanus und Bachets Angaben richtig, so dürfte man noch nicht die Hoffnung aufgeben, irgendwo in Italien oder Frankreich eine vollständige Handschrift des Diophantus aufzutreiben, was ein um so willkommmerer Fund sein würde, da die bekannten Handschriften in allen ihren Fehlern so genau übereinstimmen, daß sie als Abschriften desselben

Codex im Grunde nur für einen einzigen zu rechnen sind.

Diejenigen, welche in unseren sechs Büchern gern einen vollständigen oder doch beinahe vollständigen Diophantus haben möchten, legen ein großes Gewicht darauf, daß Diophantus mit dem sechsten Buch sich an die algebraische Behandlung geometrischer Aufgaben macht, so daß man den eigentlich arithmetischen Theil des Werkes mit dem fünften Buch als abgeschlossen ansehen muß. Vielleicht aber fehlen gerade von dem letzten halb geometrischen Theile des Werkes mehre Bücher; gewiß aber ist zwischen dem ersten und zweiten Buche, von welchem nur die ersten Aufgaben zu trennen sind, eine bedeutende Lücke. Das erste Buch enthält fast durchgängig bestimmte Aufgaben des ersten Grades, und zuletzt einige Aufgaben, welche auf eine reine quadratische Gleichung führen. Ohne Zweifel folgte hierauf die in der Einleitung versprochene Auflösung der vermischten Gleichungen des zweiten Grades, nebst Aufgaben, welche als Beispiele gelten konnten, so daß die fünf Bücher, welche

sich mit der unbestimmten Analytik beschäftigen, als ein viel später folgender Theil des Ganzen anzusehen sind.

Auch das darf ich hier nicht unberührt lassen, daß Diophantus an verschiedenen Stellen, z. B. bei der dritten und vierten Aufgabe des fünften Buches, gewisse arithmetische Sätze unter dem Namen Porismen *) anführt, und

*) Montucla (Hist. des Mathématiques Tom. I. S. 318) erwähnt, daß Theon in seinem Commentar zum fünften Buche des Almageſt noch ein anderes Werk des Diophantus anführe. Théon (Comment. in Alm. L. V.) cite un autre ouvrage de cet Analiste, où il était question de la pratique de l'Arithmétique. Je soupçonnerois, que c'était là, qu'il expliquait plus au long les règles de sa nouvelle Arithmétique, sur quoi il ne s'était pas assez étendu au commencement de ses questions. Vermuthlich iſt auch hier die Rede von den Porismen, denn ich habe das Citat in der Baseler Ausgabe des Almageſt nicht auffinden können. Wer seine Angaben durch Citate belegen will, sollte die kleine Mühe nicht scheuen, dem Leser durch eine genauere Angabe die große und verdrießliche Mühe des vergeblichen Suchens zu ersparen.

zwar so, als müsse der Leser dieselben kennen. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß diese Porismen eine eigene Schrift unseres Diophantus waren, welche vorzüglich die Zusammensetzung der Zahlen aus gewissen Bestandtheilen zu ihrem Gegenstande hatte. Könnte man diese Schrift gar als einen Bestandtheil des großen in dreizehn Büchern abgefaßten arithmetischen Werkes ansehen, so wäre es sehr erklärbar, daß gerade dieser Theil, der den bloßen Liebhaber weniger anzog, verloren ging. Da indeß Diophantus ausdrücklich sagt, sein Werk behandele arithmetische Probleme, so hat wenigstens die letztere Annahme nur einen geringen Grad von Wahrscheinlichkeit. Dagegen ist es sehr glaublich, daß Diophantus in den verlorenen Büchern noch ganz neue Methoden zur Auflösung von unbestimmten Aufgaben entwickelt hat. In unseren sechs Büchern beschränkt er sich mehrentheils auf sogenannte doppelte Gleichungen, d. h. er zeigt, wie man für die unbekannte Größe einen Werth finden solle, der in zwei verschiedene Formeln gesetzt, beide zugleich zu Quadraten macht. Nun

läßt sich aber auch die Aufgabe stellen, den Werth einer veränderlichen Größe x so zu bestimmen, daß drei oder mehre Formeln zugleich Quadrate werden, wenn man für x einen bestimmten Zahlenwerth setzt, und vermuthlich war die Auflösung solcher dreifachen Gleichungen ein Hauptgegenstand der verlorenen Bücher; denn daß sie sich mit Gleichungen des dritten Grades beschäftigt haben sollten, ist nicht wahrscheinlich, da Diophantus nur die allereinfachsten Fälle zu kennen scheint, wo man aus einer kubischen Gleichung einen rationalen Werth für die unbekannte Größe herleiten kann.

Der Umstand, daß Diophantus der erste, und man kann hinzusetzen, der einzige Schriftsteller von Belang über die allgemeine Arithmetik ist, hat wohl die erste Veranlassung gegeben, daß man ihn für den eigentlichen Erfinder der Algebra oder doch desjenigen Theils derselben, mit welchem sein Werk sich hauptsächlich beschäftigt, der unbestimmten Analytik, gemacht hat, und diese Meinung ist so allgemein geworden, daß man die unbestimmte Ana-

lytik oft auch diophantische Analysis, und unbestimmte Aufgaben überhaupt diophantische nennt. Es ist aber nichts als Mißverständniß eines flüchtigen Lesers, wenn man hinzusetzt, Diophantus eigne sich selbst die Erfindung der Analysis zu, denn in der Zueignung an seinen Dionysius sagt er nichts weiter, als daß die Auflösung arithmetischer Probleme, die jener zu lernen wünschte, und von der er also doch schon im Allgemeinen gehört haben mußte, ihm nur darum schwierig scheine, weil sie ihm noch nicht bekannt sei, daß aber des Schülers Eifer und des Lehrers Darstellung (ἀπόδειξις) alle Schwierigkeiten leicht überwinden werde. Gerade dasselbe, dächte ich, könnte noch jetzt sagen, wer einem wißbegierigen Schüler eine faßliche Anweisung zur Integralrechnung widmete, ohne daß man ihn darum beschuldigen könnte, sich selbst die Erfindung dieses Theiles der Analysis angeeignet zu haben. Die ganze Art, wie Diophantus den Algorithmus allgemein bezeichneter Größe vorträgt, und die allgemeinen Regeln für die Auflösung der Gleichungen mehr

voraussetzt als entwickelt, zeigen deutlich genug, daß er nicht eine neue, auch unter den Gelehrten wenig bekannte Theorie vortragen wollte, sondern daß er sich bloß das Verdienst einer faßlichen Darstellung eines noch wenig bearbeiteten, und daher auch wenig bekannten Gegenstandes beilegt.

Die Frage, ob zwischen der Algebra der Indier und der Griechen irgend ein näherer Zusammenhang Statt finde, ist in neuerer Zeit mehrmals zu Sprache gekommen. Die geschichtlichen Gründe für oder wider diese Behauptung zu prüfen, liegt für jetzt wenigstens außer meinem Bereich, und nur so viel darf ich sagen, daß die Annahme, als hätten die Indier unsern Diophantus, oder dieser indische Schriftsteller benutzt, für mich nicht die mindeste innere Wahrscheinlichkeit hat, seitdem ich durch Colebrooke's Uebersetzung einiger algebraischen Schriften der Hindus *) diese nä-

*) Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara. Translated by Henry Thomas Colebrooke. Esq. London 1817.

her habe kennen gelernt. Nirgend findet sich eine Uebereinstimmung in der Bezeichnung der Größen, nirgend eine Aehnlichkeit in der ganzen Behandlung des Gegenstandes. Der Grieche bezeichnet die unbekannte Größe schlechthin durch ἀριθμὸς, und wenn in derselben Aufgabe auch mehre unbekannte Größen vorkommen, so weiß er mit dem einzigen Zeichen für diese unbekannte Größe und deren Potenzen so geschickt

---

Das Werk enthält außer einer Abhandlung über die Geschichte der Algebra unter den verschiedenen Völkern zwei Abhandlungen Lílávatí und Vija-Ganíta, welche eine Einleitung zu einem großen astronomischen Werke des Bháscara Achárya ausmachten; ferner zwei kleine Schriften, Ganítád'haya und Cuttacád'hyaya von Brahmegupta, welche das 12. und 18. Kapitel eines ähnlichen Lehrbuches der Astronomie ausmachten. Bháscara schrieb, nach Colebrooke's Untersuchung, um das Jahr 1150, Brahmegupta zu Ende des sechsten oder zu Anfang des siebenten Jahrhunderts der christlichen Zeitrechnung, beide benutzten aber frühere Schriften. Colebrooke theilt in den Anmerkungen manche Erklärungen späterer indischer Commentatoren mit.

umzugehen, daß er mit dem einzigen Zeichen ausreicht; der Indier nennt seine unbekannte Größe yávat - távat d. i. tantum quantum, so viel als es sein mag, und wenn mehre unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, so bezeichnet er sie durch die Namen der verschiedenen Farben, Schwarz, Gelb, Roth, Blau u. s. w. so daß Farbe und unbekannte Größe ihm gleichbedeutend ist.

Der Grieche hat für jede Potenz ein besonderes Zeichen, ς', δ^υ, u. s. w., der Indier bezeichnet die erste Potenz der unbekannten Größe durch ya, die zweite durch ya v; der Grieche bezeichnet bestimmte Zahlen durch μ^ο, eine Abkürzung für μονὰς, der Indier durch ru als Abkürzung für rúpa Form, Gestalt; der Grieche bezeichnet unser Minus durch eine eigene Abkürzung für λεῖψις, der Indier zeigt bloß durch einen über den Coefficienten gesetzten Punkt an, wenn eine Größe negativ zu nehmen ist, so daß z. B. $4x^2 - 9x - 4$ bei ihm geschrieben wird: ya v 4 ya 9 ru 4; der Grieche giebt jede Aufgabe rein und ohne geschmückte Einkleidung in Fabel und Geschichte, und richtet

seine ganze Aufmerksamkeit auf die Entwickelung eines zweckmäßigen Ansatzes, den er, wo der Verfolg ihn als unzweckmäßig darstellt, durch sinnreiche Sonderung des Allgemeinen von dem Besondern zu berichtigen weiß, über die allgemeinen Regeln geht er dabei leicht weg, und überläßt es dem Leser, aus dem einzelnen Falle sich die allgemeine Methode zu entwickeln; der Indier dagegen faßt alles in scharf bestimmte Regeln, und bringt sie, dem Gedächtniß zu einer Hülfe, in Fußlange versus memoriales, und erläutert dann die Regel durch wenige Beispiele, denen eine witzige, oft spielende Einkleidung nicht fehlen darf. Kurz das Werk des Griechen ist eine Anleitung, den Gegenstand selbst zu durchdenken, die Schriften der Indier dagegen sind ganz darauf eingerichtet, den Schüler zum fertigen Rechnen und zur mechanischen Anwendung einer oft nirgend bewiesenen Regel abzurichten, und wenn es nicht zu läugnen ist, daß die Indier in Hinsicht auf die allgemeinen Methoden der unbestimmten Analytik weiter gekommen sind, als Diophantus, so wird doch das Werk des Griechen in

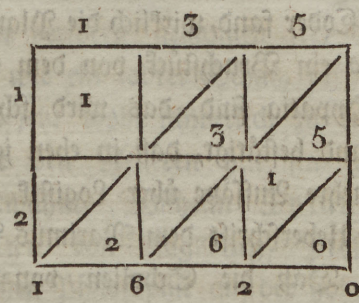
Hinsicht auf die eigenthümliche und lehrreiche Darstellung immer einen ganz entschiedenen Vorzug behaupten.

Nach dieser Vergleichung des indischen Werkes mit dem griechischen wird man auf die zufällige Aehnlichkeit einzelner Aufgaben kein großes Gewicht legen, und es überhaupt wohl nicht unwahrscheinlich finden, daß man unter dem griechischen, wie unter dem indischen Himmel, sich mit Speculationen beschäftigte, die ohne unmittelbare Anwendbarkeit πρὸς τὰ ἄλφιτα, des freien und denkenden Menschen nur desto würdiger sind, und daß man hier wie dort auf verschiedenen Wegen dasselbe fand. Verschweigen darf ich aber nicht, worauf manche ein großes Gewicht legen möchten, daß Bombelli, ein gründlicher Mathematiker, aber gewiß ein sehr flüchtiger Leser des Geschichtlichen, geradezu behauptet, Diophantus führe zuweilen indische Schriftsteller an. In dem ganzen Diophantus findet sich aber von solchen Anführungen nicht eine Spur, und wenn Bombelli nicht etwa, einem bloßen Vorurtheil zur Liebe, was er nirgend gelesen hatte, gelesen zu

haben behauptet hat, so kann ihn nur eine Stelle in den Scholien zum IX. Absatz der Einleitung getäuscht haben, wo es nach Xylanders Uebersetzung heißt: Ut ostendatur, quo pacto penuria (i. e. λεῖψις) in penuriam ducta, copiam (i. e. ὕπαρξιν); in copiam ducta, penuriam procreet, non *Indicam* hic multiplicandi rationem, quae inversum *Graecanici* moris ordinem sequitur, sed nostram tenebimus. In wiefern die indische Art zu multipliciren der griechischen entgegengesetzt sei, ergiebt sich aus dem Verfolg. Der Scholiast will das Quadrat von 5—x machen, und sagt, er wolle erst +5 mit +5, dann —x mit +5, hierauf +5 mit —x und endlich —x mit —x multipliciren, d. h. er will zuerst das höchste Stück des Multiplicandus durch das höchste Stück des Multiplicators multipliciren, und in der Ordnung von dem Höhern zum Niedrigern fortschreiten; ist also die indische Art zu multipliciren der griechischen entgegengesetzt, so ist sie einerlei mit der noch jetzt gewöhnlichen Art zu multipliciren, wo man mit den niedrigsten Stücken beider Factoren den An-

fang macht. Daß es sich bei den Indiern wirklich so verhalte, sehen wir auch aus dem zweiten Kapitel der Lilavati (Seite 6 und 7 bei Colebrooke), nur daß die Indier nicht immer dieselbe Ordnung beobachteten, und die Partial-Producte bald in dieser, bald in einer anderen Ordnung berechneten. In den Anmerkungen zur Lilavati werden verschiedene Methoden gezeigt, die Multiplication von 135.12 zu bewerkstelligen, die ich hier ohne weitere Erläuterung mittheile, da sie von selbst sich erklären, wenn man nur daran denkt, daß in IV. der Factor 12 in 8.4, in V. aber in die Differenz 20—8 zerstückelt ist.

I.



II. 12 12 12
1 3 5
12 60
36
1620

III. 135 135
1 2
270
135
1620

IV. 135 8 1080
135 4 540
1620

V. 135 20 2700
135 8 1080
1620

Unter den Bearbeitern des Diophantus stellt man gewöhnlich die vorhin erwähnte Hypatia voran, ich habe aber schon gezeigt, wie mißlich es um diese ganze Annahme steht. Zu den beiden ersten Büchern hat der bekannte Sammler der griechischen Anthologie, der Mönch Maximus Planudes Scholien geschrieben, welche Xylander in einer lateinischen Uebersetzung mittheilt, denn daß die Scholien, welche Xylander

bei seinem Codex fand, wirklich die Planudischen, nicht etwa ein Bruchstück von dem Commentar der Hypatia sind, das wird schon durch den Umstand bestätigt, daß in eben jenem Codex sich mehre Aufsätze über Logistik befanden, welche die Ueberschrift dem Maximus Planudes zueignet. Daß die Scholien von geringem Werthe sind, hat Xylander selber angemerkt, und eben das ist ihm ein Beweis, daß sie nicht ein Werk der klugen Hypatia sein können; dennoch enthalten sie im Einzelnen manche gute Bemerkung, die den spätern Auslegern entgangen war, nur daß Xylanders Uebersetzung oft eine Rückübersetzung ins Griechische nothwendig macht. Dem größeren Theile nach enthalten die Scholien aber wirklich nichts, als bloße Umschreibungen des Textes, oder geometrische Beweise für arithmetische Sätze, die man viel leichter durch Rechnung mit allgemein bezeichneten Größen beweis't. Von dem Commentar, welchen, nach Abulpharagius Angabe, Mohammed Al Buzjani über den Diophantus geschrieben hat, ist schon vorher beiläufig die Rede gewesen; ob derselbe, wie so viele andere Werke

der

der Araber verloren gegangen sei, oder noch irgendwo, wie ein todter Schatz, vergraben liege, ist für jetzt wohl schwerlich zu entscheiden.

Unter den Neueren hat sich zuerst der vorhin erwähnte Wilhelm Xylander oder Holzmann von Augsburg, Professor der aristotelischen Philosophie auf der hohen Schule zu Heidelberg um den Diophantus verdient gemacht. Er machte, wie er selbst erzählt, im Jahre 1571 eine Reise nach Wittenberg, wo er viel mit zweien zu ihrer Zeit berühmten Mathematikern, D. Sebastian Theodorich, und M. Wolfgang Schuler verkehrte. Unter andern gaben sie ihm einige Seiten eines griechischen Diophantus zu lesen, und nannten ihm auch den Eigenthümer des Codex, *Andreas Dudicius* Sbardellatus, hoc tempore Imperatoris Romanorum apud Polonos Orator. Vor seiner Abreise schrieb sich Xylander eine Aufgabe des Diophantus ab, sich auf der Reise damit zu unterhalten; er zeigte die Auflösung derselben dem berühmten Arzte *Simon Simonius* von Lucca, der damals auf der hohen Schule zu Leipzig lehrte, und beide schrieben

an Dudicius, der den Codex sogleich übersandte, und Xylander zur Ausarbeitung einer lateinischen Uebersetzung dringend aufforderte. Diese Uebersetzung erschien im Jahre 1575 unter dem Titel: *Diophanti* Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex, quorum primi duo adjecta habent Scholia Maximi (ut conjectura est) Planudis. Item liber de numeris polygonis seu multiangulis. Opus incomparabile, verae Arithmeticae Logisticae perfectionem continens, paucis adhuc visum. A Guil. *Xylandro* Augustano incredibili labore latine redditum et Commentariis explanatum, inque lucem editum ad Illustriss. Principem *Ludovicum* Vuirtembergensem. *Basileae* per Eusebium Episcopium et Nicolai Fr. haeredes. 1575. fol. 152. Wie unvollkommen Xylanders Arbeit auch ausfiel, wie oft er auch den rechten Sinn verfehlte, und wie oft auch seine Anmerkungen den Leser, der sich Rathes erholen will, im Stiche lassen, so gut war doch die Aufnahme, welche sein Buch bei den Gelehrten damaliger Zeit fand; denn in der That ging den Ma-

thematikern durch die Erscheinung dieses Werkes ein neues Licht auf, und es ist mir sehr wahrscheinlich, daß er viel dazu beigetragen hat, die allgemeine Arithmetik zu ihrer nachmaligen Höhe zu erheben. Auch der Fürst Ludwig zu Wirtemberg belohnte Xylanders Bemühung auf eine wahrhaft fürstliche Weise, denn wenn Heilbronner nicht ein bedeutendes aus seiner Tasche zugelegt hat, so schenkte er dem Verfasser für seine Uebersetzung die baare Summe von 500 Rthlrn, und rechtfertigte so die Bemerkung, mit der Xylander, einen Vers des Virgilius parodirend, seine Zueignung anfängt:

Offerimus numeros; numeri sunt Principe digni.

Beinahe 50 Jahre später erschien die erste griechische Ausgabe von Claudius Caspar Bachet, Herrn von Meziriac, u. s. w. der, aufgemuntert durch das Beispiel seines Freundes und Verwandten Antonius Faber, seinem eigentlichen Fache, der Rechtsgelehrsamkeit, untreu ward, und sich ganz auf das Studium der Mathematik und der alten Litteratur legte,

und um als Mitglied der französischen Akademie desto ungestörter seiner Neigung folgen zu dürfen, nie ein öffentliches Amt annehmen wollte. Die erste Ausgabe des Diophantus, welche Kästner (Geschichte der Mathematik Theil III. S. 152) ausführlich beschreibt, führt den Titel: *Diophanti* Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum Graece et Latine editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati. Auctore *Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco Sebusiano* V. Cl. Lutetiae Paris. sumptibus Sebastiani Cramoisy. 1691 fol. S. 451. und 60. Der Titel der neueren Ausgabe, welche bei meiner Uebersetzung zum Grunde liegt, ist: *Diophanti* Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum Commentariis C. G. *Bacheti* V. Cl. et observationibus D. P. *de Fermat* Senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae analyticae inventum novum, collectum ex variis ejusdem de Fermat epistolis. Tolosae excudebat Bernardus Bosc. 1670. Die Herausgabe besorgte

Samuel Fermat *), der Sohn des berühmten Parlementsrathes zu Toulouse, und eines der ausgezeichnetsten Mathematikers seiner Zeit; das Werk wird in einer eignen Zuschrift D. (omino) Joanni Baptistae *Colberto*, dem berühmten französischen Minister, zugeeignet.

Bachet hat bei seiner Arbeit zwar Xylanders Uebersetzung benutzt, was er aber aus eigenen Mitteln für seinen Autor gethan hat, wird zu jeder Zeit eine rühmliche Erwähnung verdienen. Seine Uebersetzung schließt sich genau der Urschrift an, ohne darum, wie Xylanders, oft unverständlich, oft unlateinisch zu werden, und die jeder Aufgabe beigefügten Er-

*) Jöcher nennt dessen Bruder Johann Franciscus Fermat als Herausgeber; die Zueignung an Colbert ist aber S. Fermat unterzeichnet, und die Abkürzung doch wohl Samuel zu lesen. Jöcher redet übrigens auch von den Randbemerkungen Fermats, wie von einem eigenen Werke: Observationes in Diophantum, von welchen der Sohn eine neue Ausgabe besorgt habe; was offenbar auf einem bloßen Mißverständniß beruht.

läuterungen zeigen, wie tief er in den Geist des griechischen Mathematikers eingedrungen war. Die drei Libri Porismatum, welche er vorausschickt, geben Beweise für mancherlei Lehrsätze, die bei den diophantischen Aufgaben gebraucht werden, und waren von großer Wichtigkeit zum Verständniß des Diophantus zu einer Zeit, wo Beweise arithmetischer Sätze durch allgemeine Größenzeichen noch wenig bekannt waren, und auch der Anhang, der die Lehre von den Polygonzahlen weiter fortführt, ist ein neuer Beweis seines glücklichen Scharfsinns. Für die kritische Berichtigung des Textes konnte Bachet wenig thun, da er nur einen einzigen Codex, der jetzt in Paris verwahrt wird, und die Lesarten einer vatikanischen Handschrift vor sich hatte. Glücklicherweise hat die Kritik bei mathematischen Schriften ein viel leichteres Feld zu bearbeiten, als bei Schriften anderes Inhalts, und wenn bei diesen der Philologe sich abmüht, aus einzelnen Vermuthungen eine Lesart verdächtig zu machen, oder eine verdächtig gemachte als ächt darzustellen, so kann bei mathematischen Schrif-

ten fast mit völliger Gewißheit bestimmt werden, was unächt, oder was ächt sei. Wo im Grundtext zuweilen etwas fehlte, da hat es Bachet eingeschaltet, aber durch Klammern [ ] von dem Text des Diophantus gesondert, und wo eine Stelle offenbar etwas Unrichtiges enthält, wofür sich das Richtige nicht sogleich von selbst ergab, da hat er die verderbte Stelle durch einen Stern* bezeichnet. Wo ich bei meiner Uebersetzung ähnliche offenbar verderbte Stellen fand, habe ich das nämliche Zeichen beibehalten, und mich in den Anmerkungen darüber näher erklärt.

Was die neuere Ausgabe vor der älteren auszeichnet, sind vorzüglich die kurzen aber sinnreichen Randbemerkungen Fermats, vorzüglich zu den vier letzten Büchern, welche er seinem Exemplar der Bachetschen Ausgabe beigefügt hatte, und welche der Sohn bei der neuen Ausgabe des Bachetschen Diophantus gehörigen Ortes einschalten ließ. Da die Bemerkungen meist nur kurze Andeutungen enthalten, und oft eine frühere Bemerkung durch ein spätere berichtigt und aufgehoben wird, so wäre es ganz unzweckmäßig gewesen,

sie vollständig mitzutheilen, vielmehr habe ich sowohl Fermats als Bachets Bemerkungen als ein Gemeingut benutzt, so weit es mir rathsam schien. Außer diesen Randbemerkungen enthält diese Ausgabe noch einen besondern Aufsatz: Doctrinae analyticae inventum novum, collectum a R. P. *Jacobo de Billy* S. J. Sacerdote, ex variis epistolis, quas ad eum diversis temporibus misit D. P. de *Fermat* Senator Tolosanus. Das Werk behandelt vorzüglich die Auflösung der doppelten und dreifachen Gleichungen, welche letztere Diophantus in den uns übrigen Büchern gar nicht berücksichtigt hat, auch zeigt der letzte Theil des Aufsatzes, daß Fermat über die negativen Wurzeln bereits richtigere Vorstellungen hatten, als bis dahin unter den Mathematikern im Umlauf waren.

Was sonst noch in älterer Zeit für die Bearbeitung des Diophantus geschehen ist, beschränkt sich entweder auf unvollständige Auszüge, dergleichen schon mehre Schriftsteller über die Algebra z. B. Bombelli, bei Gelegenheit mitgetheilt hatten, oder auf Arbeiten, welche das

größere Publikum niemals hat kennen gelernt. In den Oeuvres mathématiques, de *Simon Stevin*, augmentées par *Albert Girard* à Leyde 1634. fol. ist eine Uebersetzung der vier ersten Bücher von *Stevin* selbst, und der beiden letzten Bücher von *Girard* enthalten. Die Uebersetzung ist aber nicht nach dem griechischen Text, sondern nach Xylanders lateinischer Uebersetzung gemacht, und sollte nicht sowohl Diophantus eigenthümliche Methode, als die darin enthaltenen Sachen mittheilen. In Guilielmi *Oughtredi* Opusculis mathematicis. Oxoniae 1677. sind nach Heilbronners Angabe gleichfalls drei Bücher des Diophantus übersetzt, ich habe dies Buch aber eben so wenig erhalten können, als die eben daselbst angeführte Schrift des vorhin erwähnten Jesuiten Billy: Diophantus redivivus. Nach Scheibels Angabe im eilften Stück seiner Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniß ist der vollständige Titel der älteren Ausgabe: Jac. de Billy Diophantus redivivus, in quo *per rationes Euclideas* efficiuntur Problemata, quae ille rationibus *algebraicis* eno-

davit. Paris. 1660. 4; Der Titel einer neuern Ausgabe: Jac. de Billy Diophantus redivivus, sive Enodatio Problematum, Triangulum rectangulum spectantia. Lugd. 1670. 8. maj. Den Titel der ersten Ausgabe hat Scheibel seiner Angabe nach aus Hendrich in Pandectis Brandenburgicis pag. 576., den Titel der letzteren aus dem Catalogus Bibliopolii *Waltheri*. Dresd. pag. 52 entnommen, beide Werke also nicht selbst gesehen. Nach den angegebenen Titeln scheint es aber nicht, als ob das zweite Werk eine neue Ausgabe, sondern vielmehr eine weitere Ausführung des ersteren sei, in jedem Falle aber ist es nicht sowohl als ein Commentar zu unserem Diophantus, sondern als ein dem Verfasser eigenthümliches Werk anzusehen, und ich habe es um so weniger bei meiner Arbeit vermißt, da es auf die Methode des Diophantus gar keine Rücksicht zu nehmen scheint.

Noch erwähnen die Litteratoren, daß sich in der Bibliothek eines Carl von Montchall eine Bearbeitung des Diophantus von dem berühmten Mathematiker Joseph Auria

von Neapel (vermuthlich doch nur handschriftlich) befunden habe, welche den Titel führte: *Diophanti* libri sex, cum scholiis graecis Maximi Planudae, atque liber de numeris polygonis, collati cum Vaticanis codicibus, et latine versi a *Josepho Auria;* auch führt man des Engländers Johann Pell ungedruckte Erläuterungen des Diophantus an, von welchen Vossius mit besonderer Hochachtung spreche. Was es mit dem Werke des Joseph Auria für eine Bewandniß habe, muß man, da das Buch sich nirgend gefunden hat, dahingestellt sein lassen, was aber Pells ungedruckten Commentar betrifft, so ist das vermuthlich eine bloße Mißdeutung dessen, was Vossius de universae Matheseos natura cap. 10. §. 2. darüber gesagt hat. Johann Pell war nämlich, ehe er an die Ritteracademie zu Breda versetzt wurde, Professor der Mathematik zu Amsterdam, und hielt dort Vorlesung über den Diophantus, welchen auch Vossius mit großem Vergnügen beiwohnte, und was dieser von einem Commentar seines Collegen über unseren Diophantus sagt, sieht

mehr einer Aufforderung zu einem solchen Unternehmen, als einer geschichtlichen Nachricht von der Vollendung desselben ähnlich.

Die großen Entdeckungen in der Analysis, welche gegen das Ende des siebzehnten Jahrhunderts gemacht wurden, lenkten die Aufmerksamkeit immer mehr von den Werken der griechischen Mathematiker ab, und öffentliche Vorlesungen über die Schriften derselben wurden selten und immer seltener, bis sie zuletzt völlig eingingen; auch verminderte sich, wie sehr natürlich war, die Zahl derer, welche die von den Neueren weit überflügelten Griechen noch einiger Aufmerksamkeit würdigten. Daher hat sich in dem vorigen achtzehnten Jahrhundert weder ein Herausgeber noch ein Uebersetzer des Diophantus gefunden, wiewohl manche geringhaltige Schrift, selbst aus der späteren Zeit des griechischen Alterthums, wieder ans Licht gezogen wurde.

Nur ganz zufällig, nämlich durch eine Anmerkung in Herrn Schmeißers Orthodidaktik der Mathematik (S. 33.), habe ich vor Kurzem erfahren, daß Herr Hofrath Kausler

sich im Auftrage der Kaiserlich-Russischen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg mit einer Bearbeitung des Diophantus beschäftigt hat. Ich lasse die Stelle hier abdrucken *),

*) Die mechanische, geistlose Behandlung der Algebra ist ins besondere von Herrn Hofrath Kausler stark gerügt worden. In der Vorrede zu seiner Ausgabe des Uflakerschen Exempelbuchs beginnt er so: „Seit mehreren Jahren arbeitete ich für die Russisch-Kaiserliche Akademie der Wissenschaften Diophants unsterbliches Werk über die Arithmetik aus, und fand darin einen solchen Schatz von den feinsten, scharfsinnigsten algebraischen Auflösungen, daß mir die mechanische, geistlose Methode der neuen Algebra mit jedem Tage mehr ekelte.“ u. s. w. Schm.

Wie hoch mir auch Diophantus zu stehen scheint, so möchte ich doch nicht unterschreiben, was Herr Kausler bei dieser Gelegenheit zum Nachtheil der neuern Algebra sagt. Die eigentliche Auflösung einer Gleichung, wie jeder Rechnungsfrage, ist und bleibt, wie bei uns so auch bei den Alten, ein bloß mechanisches Geschäft, und nur die Entwickelung der Gleichung oder die Begründung der Regel für jenes mechanische Rechnen ist ein Geschäft des Ver-

weil ich nicht habe erfahren können, welche Bewandniß es mit dieser Ausarbeitung des Diophantus hat, von der wenigstens in dem größeren Publikum nichts bekannt ist, und welche eine bloß für die Petersburgische Akademie bestimmte Privatschrift zu sein scheint.

Ein erfreulicheres Schicksal hat Diophantus kleine Schrift über die Polygonzahlen gehabt, welche in einem gründlichen Kenner der alten Sprachen wie der Mathematik, dem Herrn Stadtrath Poselger vor wenigen Jahren einen Uebersetzer gefunden hat *). Eben dieser Umstand bestimmte mich Anfangs, das Buch über die Polygonzahlen von meiner Bearbeitung auszuschließen, und ich wurde in diesem

---

standes und des Scharfsinns. Ich dächte, man könne die Vorzüge der Alten anerkennen und rühmen, ohne darum den Neueren das tiefere Eindringen in die Theorie streitig zu machen, und ohne sie auf eine ungerechte Weise herabzusetzen. Schulz.

*) Diophantus von Alexandrien über die Polygonzahlen. Uebersetzt, mit Zusätzen von Friedrich Theodor Poselger. Leipzig bei C. Salfeld 1810.

Vorsatz nur wankend gemacht durch die Ueberlegung, daß sich die kleine Schrift bald vereinzeln könne, und daß es dem Leser doch erwünscht sein werde, alles was wir vom Diophantus besitzen, beisammen zu haben. Um so bereitwilliger nahm ich das gütige Anerbieten meines verehrten Freundes an, seine Uebersetzung und die schätzbaren Zusätze, mit welchen er sie ausgestattet hat, wieder abdrucken zu lassen, und dadurch den Werth meines Buches bedeutend zu erhöhen. Auf meinen Wunsch hat Herr Poselger diese Ausgabe noch mit einigen Bemerkungen über den von Diophantus beobachteten Gang der Beweise bereichert, welche dem Leser, der nicht schon anderweitig mit der Methode der Alten bekannt ist, die Mühe des Verstehens außerordentlich erleichtern werden. Ich selbst habe nur einige allgemeine Bemerkungen über die Art, wie die Alten arithmetische Gegenstände zu behandeln pflegten, vorangeschickt, denen ich die in der Anmerkung *)

*) Die Griechen unterscheiden zwei große Zweige der Zahlenwissenschaft, Arithmetik und Logi-

enthaltene Erörterung des Begriffs der Arithmetik, wie ihn nämlich die Griechen gefaßt haben, sogleich hätte beifügen sollen.

Ueber meine eigene Arbeit darf ich aus mehr als einem Grunde kurz sein. Bei der Uebersetzung ging meine Absicht dahin, den

---

stik, worüber die Hauptstelle in Platons Gorgias §. 13. pag. 16, 17. bei Heindorf steht, und schon von Schneider in seinem Wörterbuche citirt wird. Aus Platons Worten folgert nun Schneider, Arithmetik sei die theoretische Rechenkunst, Logistik die praktische, wogegen Andere sagen, Arithmetik umfasse die sogenannten vier Species, Logistik aber sei die Lehre von den Verhältnissen, also wenig mehr, als was der neuere Sprachgebrauch die Regel de Tri nennt. Beides ist unrichtig, und widerspricht sogar Platons eigenen Worten. Die Arithmetik ist nach Platon: τῶν περὶ τὸ ἄρτιόν τε καὶ περιττὸν γνῶσις, ὅσα ἂν ἑκάτερα τυγχάνῃ ὄντα, oder die Wissenschaft von den Eigenschaften des Geraden und Ungeraden, wie groß es eben auch sein mag. Die Logistik dagegen περὶ τὸ αὐτὸ ἔχει τό τε ἄρτιον καὶ περιττόν, διαφέρει δὲ τοσοῦτον, ὅτι, καὶ πρὸς ἄυτὰ καὶ πρὸς ἄλληλα πῶς ἔχει πλήθους, ἐπισκοπεῖ τὸ περιττὸν καὶ τὸ ἄρτιον ἡ λογιστική, d. h. ihr Gegenstand

Sinn

Sinn und die Methode des Griechen treu wiederzugeben, ohne mich im Einzelnen an Wort und Buchstaben ängstlich zu binden. Mit einer Uebersetzung, deren höchstes Ziel das verbum verbo reddere ist, konnte bei einer Schrift dieser Art Niemanden gedient

ist ebenfalls Gerade und Ungerade, mit einem Worte die Zahl, sie unterscheidet sich aber von der Arithmetik dadurch, daß sie untersucht, wie Gerade und Ungerade sich zu sich selbst, und eines zu dem anderen, in Rücksicht auf Menge oder Vielheit verhält. Offenbar ist also Arithmetik die Theorie der Zahlen und ihrer Eigenschaften überhaupt, sie betrachtet, wie Diophantus es ausdrückt, τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς φύσιν τε καὶ δύναμιν, und alle allgemeinen Untersuchungen über einfache und zusammengesetzte Zahlen, über Potenzen und Wurzeln, rationale und irrationale Zahlen, ferner über die Zusammensetzung der Zahlen aus gewissen Bestandtheilen oder nach gewissen Gesetzen, welche die Alten durch die aus der Geometrie entlehnten Benennungen: Flächenzahl, Körperzahl, Polygonzahl zu bezeichnen pflegen, gehören in das Gebiet der Arithmetik im engeren Sinne, die Logistik dagegen hat die eigentliche Rechenkunst, die theoreti-

sein; eben so wenig mit einer sogenannten Verneuerung, die nach Gutdünken einschaltet und wegläßt, oder wenigstens dem Geschmack der Neueren gemäß verändert. Nur in einer Art habe ich mir, und vielleicht mit Unrecht, einen Zusatz erlaubt, indem ich nämlich die

---

sche wie die praktische zu ihrem Gegenstande, sie lehrt aus dem Zahlenwerthe der gegebenen Größen durch Schlüsse (λογίσμους) den Zahlenwerth (τὸ πλῆθος) der gesuchten Zahlen bestimmen, oder mit einem Worte rechnen (λογίζεσθαι), daher zu Athen die Geheimen Ober-Rechnungs-Räthe nicht Ἀριθμητικοί sondern Λογισταί genannt wurden. Daß in der angezogenen Stelle bei Platon das ὅσα ἂν ἑκάτερα τυγχάνῃ ὄντα und das ποῦ ἔχει πλήθους den eigentlichen Gegensatz bilden, ist gar nicht zu verkennen, und so stimmt Platons beiläufige Erklärung vollkommen mit der hier gegebenen Begriffsbestimmung.

In späterer Zeit hat man angefangen, die Rechnung mit allgemeinen Zeichen Logistik zu nennen, weil man hier nicht auf den wahren Werth der allgemein bezeichneten Größen, sondern nur auf ihren Zusammenhang, oder ihr Verhältniß zu anderen Größen sieht. In neueren Zeiten ist es sogar Sitte geworden, beide Haupttheile der Zahlenwissenschaft

Endgleichung, aus welcher der Werth der unbekannten Größe bestimmt werden soll, mehrentheils als eine vollständige Gleichung aufgeführt habe, da Diophantus sich in der Regel damit begnügt, die eine Seite der Gleichung zu entwickeln, und dann bloß hinzuzufügen: dies sei dem Ausdrucke gleich, welcher bei mir die rechte Seite der Gleichung bildet.

Vielleicht erscheint es Manchem, bei dem ersten Anblick wenigstens, als eine Moderniſirung, daß ich bei dem allgemeinen Ausdruck für die unbekannten Größen mich der neueren Zeichen: x, x^2, — und + bedient habe. Wer indeß aus Diophantus Einleitung sieht, daß er für die unbekannte Größe und deren Potenzen ebenfalls allgemeine Zeichen, nur sehr

durch einander zu mischen, oder eigentlich aus der Arithmetik in engeren Sinne nur dasjenige mitzunehmen, was für die Logistik von praktischer Wichtigkeit ist, und erst Legendre in seiner Théorie des Nombres und Gauß in seinen disquisitionibus arithmeticis haben den wesentlichen Unterschied beider Wissenschaften wieder geltend gemacht.

unbequeme, für unser Minus aber ein umgekehrtes und verstümmeltes ψ gebraucht, der wird es nicht tadeln, daß ich griechische Zeichen durch deutsche oder deutsch gewordene übersetzte, er müßte es denn auch tadelhaft finden, daß ich statt der griechischen Zahlbuchstaben mich unserer jetzt gewöhnlichen Ziffern bedient habe. Das Zeichen + haben die Griechen freilich gar nicht, sondern sie bezeichnen die Verbindung der Glieder einer Formel durch bloßes Nebeneinanderstellen, die Weglassung dieses Zeichens aber würde in der Uebersetzung Mißverständnisse ohne Ende hervorgebracht haben.

Die Anmerkungen haben den Zweck, theils den mathematischen Sprachgebrauch zu erläutern, theils einzelne im Text nur angedeutete Schlüsse zu entwickeln, theils endlich von den diophantischen Aufgaben allgemeine Auflösungen zu geben.

In einem Anhang zu den Anmerkungen wollte ich die verschiedenen allgemeinen Methoden, deren sich Diophantus bedient, noch ein Mal zusammenstellen, und mit den in neuerer Zeit erfundenen Methoden der unbestimm-

ten Analytik vergleichen, ich sah aber bald, daß dieser Anhang zu einem kleinen Buche anwachsen müßte, und mehr Zeit erfordern würde, als mir für jetzt zur Ausarbeitung vergönnt war. Aus diesem Grunde behielt ich auch das beinahe vollendete Verzeichniß der im Diophantus vorkommenden mathematischen Ausdrücke, über welche in den Wörterbüchern selten etwas Befriedigendes gefunden wird, lieber ganz zurück, um so mehr, da es in einer Ausgabe des griechischen Textes wohl einen schicklichern Platz finden möchte. Dazu kam, daß mich während der Arbeit ein langwieriges Augenübel überfiel, und den Druck des Werkes auf mehre Monate unterbrach. Der billige Leser wird mir daher nicht eben vorrechnen, wie viel ich bei dieser Gelegenheit noch hätte geben sollen, sondern lieber freundlich annehmen, was ich in meiner Lage und nach meinen Kräften zu geben im Stande war.

Berlin am 23. März 1822.

Schulz.

Diophantus

von Alexandria

arithmetische Aufgaben.

Einleitung.

Ich sehe, mein theuerster Dionysius, mit welchem Eifer du die Auflösung der arithmetischen Aufgaben zu erlernen wünschest; ich habe daher versucht, das Verfahren wissenschaftlich darzustellen, indem ich mit der eigentlichen Grundlage desselben anfange, nämlich mit einer Entwickelung der eigenthümlichen Natur und Beschaffenheit der Zahlen. Die Sache scheint vielleicht etwas schwierig, da sie noch gar nicht bekannt ist, und Anfänger haben immer wenig Hoffnung eines glücklichen Fortgangs; aber dein Eifer und meine Darstellung wird dir alles recht faßlich machen, denn man lernt schnell, wenn Eifer und Unterweisung zusammenkommt.

I.

Du weißt unter andern, daß eine jede Zahl aus einer gewissen Menge von Einheiten besteht,

und daraus ist klar, daß ihr Werth ohne Ende zunehmen kann. Unter den Zahlen giebt es aber:

1) Quadratzahlen, welche entstehen, wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, und diese Zahl wird die Seite oder die Wurzel der Quadratzahl genannt.

2) Würfel- oder Kubikzahlen, welche entstehen, wenn man eine Quadratzahl mit ihrer Wurzel multiplicirt.

3) Biquadratzahlen, welche entstehen, wenn man Quadratzahlen mit sich selbst multiplicirt.

4) Quadrato-Kubikzahlen, welche entstehen, wenn man Quadratzahlen und Kubikzahlen von derselben Wurzel mit einander multiplicirt.

5) Kubo-Kubikzahlen, welche entstehen, wenn man Kubikzahlen mit sich selbst multiplicirt.

Wenn man nun auf die Summe, oder auf den Unterschied, auf das Produkt, oder auf das Verhältniß dieser Zahlen, entweder aller oder nur etlicher, gegen ihre Wurzeln sieht, so lassen sich sehr viele arithmetische Aufgaben bilden, welche

auf dem Wege, den ich dir zeigen werde, sich auflösen lassen.

II.

Eine Quadratzahl wird im Griechischen δύναμις genannt und durch δ mit dem Merkmal υ bezeichnet, also δ^{υ}.

Der Kubus, welcher durch Multiplication des Quadrats mit seiner Wurzel entsteht, wird durch κ mit dem Merkmal υ bezeichnet, also κ^{υ}.

Das Biquadrat, welches durch Multiplication des Quadrats mit sich selber entsteht, wird durch ein doppeltes δ mit dem Merkmal υ bezeichnet, also $\delta\delta^{\upsilon}$.

Die Quadrato-Kubikzahl, welche entsteht, wenn man das Quadrat und den Kubus derselben Wurzel multiplicirt, wird durch δκ mit dem Merkmal υ bezeichnet, also $\delta\kappa^{\upsilon}$.

Die Kubo-Kubikzahl, welche entsteht, wenn man die Kubikzahl mit sich selbst multiplicirt, wird durch ein doppeltes κ mit dem Merkmal υ bezeichnet, also durch $\kappa\kappa^{\upsilon}$.

Eine Zahl aber, welche keine der hier erwähnten Eigenschaften hat, sondern bloß eine unbe-

kannte Anzahl von Einheiten enthält, wird schlechthin die Zahl genannt und durch ς bezeichnet.

Endlich giebt es noch ein beständiges Zeichen für bestimmte Zahlen, nämlich die Einheit, und ihr Zeichen ist μ mit dem Merkmal o, also μ°.

III.

So wie aliquote Theile der Zahlen überhaupt nach ihrem Nenner benannt werden, z. B. der dritte Theil ein Drittel, der vierte ein Viertel, so werden auch aliquote Theile, deren Nenner die hier erwähnten allgemeinen Ausdrücke sind, von diesem Nenner benannt.

Ein Bruch, dessen Nenner die unbekannte Zahl ist, heißt ein Bruch der unbekannten Zahl oder auch ein einfacher Bruch; ein Bruch, dessen Nenner das Quadrat der unbekannten Zahl ist, heißt ein quadratischer Bruch; ein Bruch, dessen Nenner der Kubus der unbekannten Zahl ist, heißt ein kubischer Bruch; ein Bruch, dessen Nenner das Biquadrat ist, heißt ein biquadratischer Bruch; ein Bruch, dessen Nenner die Quadrato-Kubikzahl ist, heißt ein

quadrato-kubischer Bruch; ein Bruch, dessen Nenner die Kubo-Kubikzahl ist, heißt ein kubo-kubischer Bruch.

Um einen solchen Bruch zu schreiben, werden wir neben den Zähler das Zeichen des Nenners setzen, durch einen Strich aber die Bruchform andeuten.

IV.

Nachdem ich dir also die Benennung aller einzelnen Zahlen angegeben habe, will ich zur Multiplication derselben übergehen. Diese wird dir aber vollkommen deutlich sein, da sie beinahe durch die bloße Benennung schon vorher erklärt ist.

Wenn man also die unbekannte Zahl mit sich selbst multiplicirt, so erhält man das Quadrat derselben; wenn man sie mit dem Quadrat multiplicirt, so erhält man den Kubus; wenn man sie mit dem Kubus multiplicirt, so erhält man die Quadrato-Kubikzahl, und wenn man sie mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, so erhält man die Kubo-Kubikzahl.

Wenn man ferner das Quadrat der unbekannten Größe mit sich selbst multiplicirt, so er-

hält man das Biquadrat; wenn man es mit dem Kubus multiplicirt, so erhält man die Quadrato-Kubikzahl, und wenn man es mit dem Biquadrat multiplicirt, so erhält man die Kubo-Kubikzahl.

Wenn man endlich den Kubus mit sich selbst multiplicirt, so erhält man ebenfalls die Kubo-Kubikzahl.

V.

Wenn man irgend eine dieser Zahlen mit einem gleichnamigen Bruche multiplicirt, so erhält man eine bestimmte Zahl zum Produkte.

VI.

Da bestimmte Zahlen bei allen Rechnungen wieder bestimmte Zahlen geben, so wird das Produkt einer bestimmten Zahl und eines allgemeinen Ausdrucks wieder ein Ausdruck derselben Art sein.

VII.

Wenn man Brüche, deren Nenner allgemeine Ausdrücke sind, mit einander multiplicirt, so ist der Nenner des Produktes dem Produkt der allgemeinen Ausdrücke gleich.

Wenn man z. B. einen einfachen Bruch mit einem Bruch derselben Art multiplicirt, so er-

hält man einen quadratischen Bruch; wenn man ihn mit einem quadratischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen kubischen Bruch; wenn man ihn mit einem kubischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen biquadratischen Bruch; wenn man ihn mit einem biquadratischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen quadrato-kubischen Bruch; wenn man ihn endlich mit einem quadrato-kubischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen kubo-kubischen Bruch; so daß also der Nenner des Produktes alle Mal mit dem Produkt der Nenner einerlei ist.

Wenn man einen quadratischen Bruch mit einem einfachen Bruch multiplicirt, so erhält man einen kubischen Bruch; wenn man ihn mit einem quadratischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen biquadratischen Bruch; wenn man ihn mit einem kubischen Bruche multiplicirt, so erhält man einen quadrato-kubischen Bruch, und wenn man ihn mit einem biquadratischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen kubo-kubischen Bruch.

Wenn man einen kubischen Bruch mit einem einfachen Bruch multiplicirt, so erhält man einen biquadratischen Bruch; wenn man ihn mit

einem quadratischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen quadrato-kubischen Bruch, und wenn man ihn mit einem kubischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen kubo-kubischen Bruch.

Wenn man einen biquadratischen Bruch mit einem einfachen Bruch multiplicirt, so erhält man einen quadrato-kubischen Bruch, und wenn man ihn mit einem quadratischen Bruch multiplicirt, so erhält man einen kubo-kubischen Bruch.

Wenn man endlich einen quadrato-kubischen Bruch mit einem einfachen Bruche multiplicirt, so erhält man ebenfalls einen kubo-kubischen Bruch.

VIII.

Dagegen giebt ein einfacher Bruch, mit dem Quadrat multiplicirt, die unbekannte Zahl; mit dem Kubus multiplicirt, das Quadrat; mit dem Biquadrat multiplicirt, den Kubus; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, das Biquadrat; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, die Quadrato-Kubikzahl.

Ein quadratischer Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen einfachen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, die unbekannte Zahl;

mit dem Biquadrat multiplicirt, das Quadrat; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, den Kubus; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, das Biquadrat.

Ein kubischer Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen quadratischen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen einfachen Bruch; mit dem Biquadrat multiplicirt, die unbekannte Zahl; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, das Quadrat; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, den Kubus.

Ein biquadratischer Bruch, mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen kubischen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen quadratischen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, einen einfachen Bruch; mit der Quadrato-Kubikzahl multiplicirt, die unbekannte Zahl; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, das Quadrat.

Ein quadrato-kubischer Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen biquadratischen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen kubischen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, einen quadratischen Bruch; mit dem Biquadrat multiplicirt, einen einfachen Bruch; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, die unbekannte Zahl.

Ein kubo-kubischer Bruch mit der unbekannten Zahl multiplicirt, giebt einen quadrato-kubischen Bruch; mit dem Quadrat multiplicirt, einen biquadratischen Bruch; mit dem Kubus multiplicirt, einen kubischen Bruch; mit dem Biquadrat multiplicirt, einen quadratischen Bruch; mit der Kubo-Kubikzahl multiplicirt, einen einfachen Bruch.

IX.

Eine negative Zahl mit einer negativen Zahl multiplicirt, giebt eine positive Zahl; eine negative Zahl mit einer positiven Zahl multiplicirt, giebt eine negative Zahl. Das Zeichen einer negativen Zahl ist ein verstümmeltes und umgekehrtes ψ, nämlich ⅂.

X.

Nachdem ich dir nun die Multiplication der allgemeinen Ausdrücke gezeigt habe, so wird dir die Division derselben keine Schwierigkeit machen. Es ist aber sehr zweckmäßig, ehe man sich an die Auflösung der Aufgaben macht, sich in der Addition, Subtraction und Multiplication dieser Ausdrücke zu üben; besonders wie man eine Reihe

positiver und negativer Ausdrücke mit ungleichen Zahlen-Factoren zu andern allgemeinen Ausdrücken, die entweder bloß positiv sind, oder aus positiven und negativen Gliedern bestehen, addiren muß; ferner, wie man von einer Reihe positiver und negativer Zahlen andre abzieht, die entweder bloß positiv sind, oder auch aus positiven und negativen Gliedern bestehen.

XI.

Wenn man nun bei einer Aufgabe auf eine Gleichung kommt, die zwar aus den nämlichen allgemeinen Ausdrücken besteht, jedoch so, daß die Coefficienten an beiden Seiten ungleich sind, so muß man Gleiches von Gleichem abziehen, bis man eine Gleichung zwischen zwei eingliedrigen Ausdrücken erhält.

Wenn auf der einen oder auf beiden Seiten negative oder fehlende Größen vorkommen, so muß man diese fehlenden Größen an beiden Seiten addiren, bis man an beiden Seiten positive Größen erhält, und hierauf wieder Gleiches von Gleichem abziehen, bis man an jeder Seite nur einen Ausdruck behält. Diese Kunstgriffe muß man nun

auf den bei einer Aufgabe gemachten Ansatz, wenn es möglich ist, so lange anwenden, bis man eine Gleichung zwischen zwei eingliedrigen Ausdrücken erhält; in der Folge aber will ich dir zeigen, wie man die Aufgabe löset, wenn zuletzt ein zweigliedriger Ausdruck einem eingliedrigen gleich wird. Jetzt aber wollen wir uns zu den Aufgaben selber wenden, da wir an dem von den allgemeinen Zahlausdrücken hergenommenen Stoff ein weites Feld haben, arithmetische Aufgaben zu bilden. Da aber bei der großen Masse der Zahlen der Anfänger nur langsam fortschreitet, und überdies das Erlernte leicht vergißt, so habe ich es für zweckmäßig gehalten, diejenigen Aufgaben, welche sich zu einer nähern Entwickelung eignen, und vorzüglich die ersten Elementaraufgaben, gehörig zu erklären, und dabei von den einfachsten zu den verwickeltern fortzuschreiten. Denn so wird es dem Anfänger faßlich werden, und das Verfahren wird sich seinem Gedächtnisse einprägen, da die ganze Behandlung der Aufgaben dreizehn Bücher umfaßt.

Erstes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Zahlen theilen, deren Unterschied gleichfalls gegeben ist.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 100, der gegebene Unterschied aber 40, man soll die beiden Zahlen suchen.

Man setze die kleinere der beiden Zahlen $= x$, so ist die größere $= x + 40$ und die Summe beider $= 2x + 40$. Die gegebene Zahl aber war 100, folglich wird

$$2x + 40 = 100.$$

Zieht man nun Gleiches von Gleichem ab, nämlich an beiden Seiten 40, so bleibt $2x = 60$, und es wird $x = 30$.

Setzen wir diesen Werth von x in die allgemeinen Ausdrücke für die gesuchten Zahlen, so ist die kleinere 30, und die größere 70, und der Beweis fällt sogleich in die Augen.

II. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in einem vorgeschriebenen Verhältnisse theilen.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 60; diese soll so getheilt werden, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so wird die größere $= 3x$, also das Dreifache der kleineren sein. Die Summe beider Zahlen soll 60 sein, diese Summe ist aber auch $= 4x$, folglich wird

$$4x = 60 \text{ und } x = 15.$$

Die kleinere der beiden Zahlen ist also 15, die größere 45.

III. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beschaffenheit theilen, daß die eine um eine vorgeschriebene Zahl größer ist, als ein bestimmtes Vielfaches der anderen.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, die Zahl 80 in zwei andere zu theilen, und zwar so, daß die größere um 4 größer sei, als das Dreifache der kleineren.

Man

Man setze die kleinere Zahl $= x$, und die größere $= 3x + 4$; so wird die größere um 4 größer sein, als das Dreifache der kleineren. Die Summe dieser beiden Zahlen soll 80 sein; diese Summe ist aber auch $4x + 4$, also ist

$$4x + 4 = 80.$$

Nun ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$4x = 76 \text{ und } x = 19.$$

Die kleinere Zahl ist also 19, und die größere 61; wenn ich nämlich zu dem Dreifachen der kleineren Zahl die 4 Einheiten addire, die ich vorhin von 80 abzog. Diese zog ich nämlich ab, um zu finden, wie groß x sei, ich addire sie aber nachher wieder zu der größeren Zahl, nachdem ich den Werth von x berechnet habe.

IV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen suchen, die ein gegebenes Verhältniß und einen gegebenen Unterschied haben.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die größere Zahl das Fünffache der kleineren, der Unterschied beider aber 20 sein solle.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere

5x. Der Unterschied der beiden Zahlen soll 20 sein, dieser Unterschied ist aber auch 4x; daher ist

$$4x = 20 \text{ und } x = 5.$$

Die kleinere Zahl ist also 5, und die größere 25. Die größere ist also wirklich das Fünffache der kleineren, und der Unterschied beider ist 20.

V. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beschaffenheit theilen, daß, wenn man von jeder einen vorgeschriebenen, jedoch nicht den nämlichen, aliquoten Theil nimmt, diese Theile eine vorgeschriebene Summe geben.

Diese Summe muß aber zwischen denjenigen Zahlen liegen, welche man erhält, wenn man von der zuerst gegebenen Zahl die vorgeschriebenen Theile nimmt.

Auflösung.

Es werde also verlangt, die Zahl 100 in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu theilen, daß der dritte Theil der ersten und der fünfte Theil der zweiten zusammengenommen = 30 sei.

Ich setze den fünften Theil der zweiten Zahl = x, so wird die zweite Zahl selber 5x sein. Der dritte Theil

der ersten Zahl wird nun $30-x$, und die erste Zahl selber $90-3x$ sein.

Ferner soll die Summe beider Zahlen $=100$ sein, diese Summe ist aber auch $90+2x$, folglich wird

$$90+2x=100.$$

Hierauf ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$2x=10 \text{ und } x=5.$$

Wir hatten den fünften Theil der zweiten Zahl $=x$ gesetzt, dieser ist also $=5$, und die zweite Zahl selbst 25. Der dritte Theil der ersten Zahl war $30-x$, dieser ist also 25, und die erste Zahl selbst 75. Auch giebt der dritte Theil der ersten und der fünfte Theil der zweiten Zahl wirklich die vorgeschriebene Summe 30.

VI. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beschaffenheit theilen, daß ein bestimmter Theil der ersten um eine vorgeschriebene Zahl größer sei, als ein bestimmter Theil der zweiten.

Diese vorgeschriebene Zahl muß aber kleiner sein als die Zahl, welche herauskommt, wenn man von der zuerst gegebenen Zahl den sovielten Theil nimmt, als man von der größeren der gefundenen Zahlen nehmen soll.

Auflösung.

Es werde also verlangt, 100 in zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu theilen, daß der vierte Theil der ersten um 20 größer sei, als der sechste Theil der zweiten.

Ich setze den sechsten Theil der zweiten Zahl $= x$, so ist die zweite Zahl selber $= 6x$, der vierte Theil der ersten $= x + 20$ und die erste Zahl selber $= 4x + 80$.

Nun soll die Summe der beiden gesuchten Zahlen $= 100$ sein, diese Summe ist aber auch $10x + 80$, folglich ist

$$10x + 80 = 100.$$

Nun ziehe ich Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$10x = 20 \text{ und } x = 2.$$

Wir haben den sechsten Theil der zweiten Zahl $= x$ gesetzt, die zweite Zahl ist also 12. Den vierten Theil der ersten Zahl hatten wir $= x + 20$ gesetzt; dieser ist also 22, und die erste Zahl selber 88.

Hier ist also der vierte Theil der ersten Zahl um 20 größer als der sechste Theil der zweiten Zahl, und beide Zahlen geben zusammen die vorgeschriebene Zahl 100.

VII. Aufgabe.

Man soll von einer und derselben Zahl zwei gegebene Zahlen abziehen, und beide Reste sollen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Auflösung.

Es werde also verlangt, daß man von einer und derselben Zahl das eine Mal 100, das andere Mal 20 abziehe, und daß der größere Rest das Dreifache des kleineren sei.

Man setze die gesuchte Zahl $= x$; wenn ich davon 100 abziehe, so bleibt $x - 100$, und wenn ich davon 20 abziehe, so bleibt $x - 20$. Nun soll der größere Rest das Dreifache des kleineren, folglich der kleinere Rest, drei Mal genommen, dem größeren Reste gleich sei. Der kleinere Rest, drei Mal genommen, ist aber $3x - 300$, folglich wird

$$3x - 300 = x - 20.$$

Nun addire man an beiden Seiten die fehlenden Größen, so erhält man

$$3x = x + 280.$$

Hierauf ziehe man Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$2x = 280 \text{ und } x = 140.$$

Die gesuchte Zahl habe ich $= x$ gesetzt, diese Zahl ist also 140. Ziehe ich davon 100 ab, so bleibt 40; ziehe ich aber 20 ab, so bleibt 120; und der größere Rest ist offenbar das Dreifache des kleineren.

VIII. Aufgabe.

Man soll zu zwei gegebenen Zahlen die nämliche Zahl addiren, und beide Summen sollen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Dies vorgeschriebene Verhältniß muß aber kleiner sein, als das Verhältniß der größeren gegebenen Zahl zu der kleineren.

Auflösung.

Es werde also verlangt, daß man zu 100 und zu 20 die nämliche Zahl addire, und daß die größere Summe das Dreifache der kleineren sei.

Man setze die unbekannte Zahl, welche zu beiden gegebenen Zahlen addirt werden soll, $= x$. Wenn ich dazu 100 addire, so ist die Summe $x + 100$, und wenn ich dazu 20 addire, so ist die Summe $x + 20$. Nun soll die größere Summe das Dreifache der kleineren, also die kleinere Summe, drei Mal genommen, der größeren Summe gleich sein. Die kleinere Summe, drei Mal genommen, ist aber $3x + 60$, folglich ist

$$3x + 60 = x + 100.$$

Man ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$2x = 40, \text{ also } x = 20.$$

Wir haben die gesuchte Zahl $= x$ gesetzt; diese Zahl ist also 20. Addirt man dieselbe zu 100, so ist die

Summe 120; addirt man sie aber zu 20, so ist die Summe 40, und die größere Summe ist das Dreifache der kleineren.

IX. Aufgabe.

Man soll von zwei gegebenen Zahlen die nämliche Zahl abziehen, und die Reste sollen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Dies vorgeschriebene Verhältniß muß aber größer sein, als das Verhältniß, welches die größere der gegebenen Zahlen zu der kleineren hat.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß man von 20 und von 100 die nämliche Zahl abziehen, und daß der größere Rest das Sechsfache des kleineren sein solle.

Man setze die unbekannte Zahl, welche von beiden gegebenen abgezogen werden soll, $= x$. Zieht man diese von 100 ab, so ist der Rest $100 - x$, zieht man sie aber von 20 ab, so ist der Rest $20 - x$. Nun soll der größere Rest das Sechsfache des kleineren, also der kleinere Rest, sechs Mal genommen, dem größeren Reste gleich sein. Der kleinere Rest, sechs Mal genommen, ist aber $120 - 6x$, folglich wird

$$120 - 6x = 100 - x.$$

Nun addire man an beiden Seiten die fehlenden Größen und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$5x = 20, \text{ folglich } x = 4.$$

Wir hatten die abzuziehende Zahl = x gesetzt, diese Zahl ist also 4. Zieht man diese von 100 ab, so bleiben 96; zieht man sie aber von 20 ab, so bleiben 16, und der größere Rest ist das Sechsfache des kleineren.

X. Aufgabe.

Es sind zwei ungleiche Zahlen gegeben, man soll zu der kleineren eine Zahl addiren, und von der größeren eben diese Zahl abziehen, und jene Summe soll zu diesem Reste ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß man zu 20 eine Zahl addire, und eben diese Zahl von 100 subtrahire, und daß alsdann die größere Zahl das Vierfache der kleineren sei.

Man setze die unbekannte Zahl, die man das eine Mal addiren, das andre Mal subtrahiren soll, = x. Addire ich diese zu 20, so ist die Summe $x + 20$; ziehe ich sie aber von 100 ab, so ist der Rest $100 - x$. Nun soll jene Summe das Vierfache dieses Restes, also der Rest, vier Mal genommen, jener Summe gleich sein. Der Rest, vier Mal genommen, ist aber $400 - 4x$, folglich ist

$$400 - 4x = x + 20.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$5x = 380 \text{ und } x = 76.$$

Wir hatten die gesuchte Zahl $= x$ gesetzt, diese Zahl ist also 76. Addirt man diese zu 20, so ist die Summe 96; subtrahirt man sie aber von 100, so ist der Rest 24 und jene Summe ist also das Vierfache dieses Restes.

XI. Aufgabe.

Es sind zwei Zahlen gegeben, man soll die eine derselben zu einer gewissen Zahl addiren, die andere aber von eben dieser Zahl subtrahiren, und die dadurch entstehenden Zahlen sollen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Auflösung.

Es werde also verlangt, daß man 20 zu einer gewissen Zahl addire und 100 von eben dieser Zahl abziehe, und daß alsdann die größere der entstandenen Zahlen das Dreifache der kleineren sei.

Die gesuchte Zahl heiße x; wenn wir zu dieser 20 addiren, so kommt $x + 20$, wenn wir 100 von ihr subtrahiren, so kommt $x - 100$. Nun soll die größere dieser Zahlen das Dreifache der kleineren, also die kleinere Zahl, drei Mal genommen, der größeren gleich sein. Die

kleinere Zahl, drei Mal genommen, ist aber $3x-300$, und es wird folglich

$$3x-300=x+20.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$2x=320, \text{ folglich } x=160.$$

Die größere Zahl wird also 180, die kleinere 60, und die größere ist das Dreifache der kleineren.

XII. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl auf eine doppelte Weise in zwei andere zerstückeln, und zwar so, daß die Zahlen aus der ersten Zerstückelung zu den Zahlen aus der zweiten Zerstückelung ein vorgeschriebenes Verhältniß haben.

Auflösung.

Es werde also verlangt, die Zahl 100 auf doppelte Weise in zwei andere zu zerstückeln, und zwar so, daß die größere Zahl aus der ersten Zerstückelung doppelt so groß sei als die kleinere Zahl aus der zweiten Zerstückelung, hingegen die größere Zahl aus der zweiten Zerstückelung drei Mal so groß, als die kleinere Zahl aus der ersten Zerstückelung.

Man setze die kleinere Zahl aus der zweiten Zerstückelung $=x$, so ist die größere Zahl aus der ersten Zer-

stückelung $2x$. Dann wird aber die kleinere Zahl aus der ersten Zerstückelung $100-2x$ sein, und weil das Dreifache derselben mit der größeren Zahl aus der zweiten Zerstückelung gleich sein soll, so ist diese letztere Zahl $300-6x$.

Nun sollen aber beide Zahlen aus der zweiten Zerstückelung zusammen genommen 100 geben; sie geben aber auch $300-5x$, folglich ist

$$300-5x = 100 \text{ und } x = 40.$$

Die größere Zahl aus der ersten Zerstückelung war $2x$, und wird also $= 80$. Die kleinere Zahl aus derselben Zerstückelung war $100-2x$, und wird also $= 20$.

Die größere Zahl aus der zweiten Zerstückelung war $300-6x$, und wird also $= 60$; die kleinere Zahl aus eben dieser Zerstückelung setzten wir $= x$, und diese wird also $= 40$. Die Richtigkeit der Auflösung fällt übrigens in die Augen.

XIII. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl auf dreifache Art in zwei andere zerstückeln, und zwar so daß eine Zahl aus der ersten Zerstückelung zu einer Zahl aus der zweiten Zerstückelung, ferner die andere Zahl aus der zweiten Zerstückelung zu einer Zahl aus der dritten Zerstückelung und endlich die andere Zahl aus der dritten Zerstückelung zu der

anderen Zahl aus der ersten Zerstückelung ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde also verlangt, die Zahl 100 auf dreifache Weise zu zerstückeln, und zwar so, daß die größere Zahl aus der ersten Zerstückelung drei Mal so groß sei, als die kleinere Zahl aus der zweiten, ferner die größere Zahl aus der zweiten Zerstückelung zwei Mal so groß, als die kleinere Zahl aus der dritten, und endlich die größere Zahl aus der dritten Zerstückelung vier Mal so groß, als die kleinere Zahl aus der ersten.

Man setze die kleinere Zahl aus der dritten Zerstückelung $= x$, so ist die größere Zahl aus der zweiten Zerstückelung $2x$, und weil die ganze Zahl $= 100$, so ist die kleinere Zahl aus der zweiten Zerstückelung $100 - 2x$. Diese Zahl, drei Mal genommen, giebt ferner die größere Zahl aus der ersten Zerstückelung, und diese wird also $300 - 6x$, die kleinere Zahl aus eben dieser Zerstückelung aber $6x - 200$ sein. Diese Zahl, vier Mal genommen, giebt endlich die größere Zahl aus der dritten Zerstückelung und diese wird also $24x - 800$.

Nun müssen die beiden Zahlen aus der dritten Zerstückelung zusammen genommen 100 geben, sie geben aber auch $25x - 800$, daher ist

$$25x - 800 = 100 \text{ und } x = 36.$$

Die kleinere Zahl aus der dritten Zerstückelung ist also 36, die größere 64, die kleinere Zahl aus der ersten Zerstückelung 16, die größere 84, die kleinere Zahl endlich aus der zweiten Zerstückelung ist 28, die größere 72, und es fällt in die Augen, daß diese Zahlen der Aufgabe wirklich genügen.

XIV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt zu ihrer Summe ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Es muß aber die Menge von Einheiten, welche man für eine der gesuchten Zahlen annimmt, größer sein, als der Exponent des vorgeschriebenen Verhältnisses.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß das Produkt der beiden Zahlen drei Mal so groß sein soll, als ihre Summe.

Man setze die eine der gesuchten Zahlen $= x$, die andere aber sei, nach der hinzugefügten Bedingung, größer als 3, also etwa $= 12$, so wird das Produkt dieser Zahlen $12x$ und ihre Summe $= x + 12$.

Nun soll die kleinere Zahl, drei Mal genommen, der größeren gleich werden, es ist daher

$$3x + 36 = 12x, \text{ folglich } x = 4.$$

Die kleinere Zahl ist also 4, und die größere 12, und diese Zahlen genügen den Bedingungen der Aufgabe.

XV. Aufgabe.

Man sucht zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß, wenn jede von der andern eine vorgeschriebene Menge von Einheiten erhält, die Summe zu dem Reste in beiden Fällen ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die erste Zahl, wenn sie von der zweiten 30 Einheiten erhält, doppelt so groß als der Rest sei; die zweite aber, wenn sie von der ersten 50 Einheiten erhält, drei Mal so groß, als der Rest werde.

Man setze die zweite Zahl $= x + 30$, weil sie 30 Einheiten abgeben soll; so wird die erste Zahl $= 2x - 30$ sein, damit, wenn sie von der zweiten 30 erhält, die erste doppelt so groß als die zweite werde.

Nun soll auch die zweite Zahl, wenn sie von der ersten 50 erhält, drei Mal so groß, als der Rest der ersten Zahl sein. Wenn man aber von der ersten Zahl 50 abzieht, so bleibt $2x - 80$, und wenn man zu der zweiten 50 hinzulegt, so kommt $x + 80$. Endlich soll $x + 80$ drei Mal so groß sein, als $2x - 80$, also ist

$$x + 80 = 6x - 240 \text{ und } x = 65.$$

Die erste Zahl ist also 98, die zweite 94, und diese beiden Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XVI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß je zwei derselben eine vorgeschriebene Summe geben.

Es muß aber die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer sei, als jede von ihnen einzeln genommen.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der ersten und zweiten = 20, die Summe der zweiten und dritten = 30, die Summe der ersten und dritten = 40 sei.

Man setze die Summe der drei Zahlen = x. Nun soll die Summe der ersten und zweiten = 20 sein, ziehe ich also 20 von x ab, so erhalte ich die dritte = x—20. Auf eben diese Weise aber finde ich die erste Zahl = x—30 und die zweite = x—40. Endlich soll die Summe der drei Zahlen = x sein; diese Summe ist aber auch 3x—90, also wird

$$3x - 90 = x \text{ und } x = 45.$$

Die erste Zahl ist also 15, die zweite 5, die dritte 25, und der Beweis fällt in die Augen.

XVII. Aufgabe.

Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß je drei derselben, zusammen genommen, eine vorgeschriebene Summe geben.

Es muß aber das Drittel von der Summe der vier gegebenen Zahlen größer sein, als jede derselben einzeln genommen.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die Summe der ersten und der beiden folgenden 20, die Summe der zweiten und der beiden folgenden 22, die Summe der dritten und der beiden folgenden 24, die Summe der vierten und der beiden folgenden 27 sein solle.

Man setze die Summe der vier Zahlen $= x$. Ziehe ich davon die Summe der drei ersten oder 20 ab, so erhalte ich die vierte $= x - 20$. Auf gleiche Weise findet man aber die erste $= x - 22$, die zweite $= x - 24$ und die dritte $= x - 27$.

Nun soll die Summe dieser Zahlen $= x$ sein; diese Summe ist aber auch $= 4x - 93$. Man hat also

$$4x - 93 = x \text{ und } x = 31.$$

In unserem Falle ist also die erste Zahl 9, die zweite 7, dritte 4, die vierte 11, und diese Zahlen leisten der Aufgabe Genüge.

XVIII.

XVIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von je zweien um eine vorgeschriebene Zahl größer sei, als die dritte.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der ersten und zweiten Zahl um 20 größer sei, als die dritte; die Summe der zweiten und dritten um 30 größer als die erste; die Summe der ersten und dritten um 40 größer als die zweite.

Man setze die Summe aller drei Zahlen $= 2x$. Da nun die Summe der ersten und zweiten um 20 größer sein soll, als die dritte, so lege man an beiden Seiten die dritte hinzu, so wird die Summe aller drei Zahlen aus dem Unterschiede 20, und der dritten Zahl, zwei Mal genommen, bestehen müssen. Zieht man nun von der Summe der drei Zahlen, oder von $2x$, den Unterschied 20 ab, so erhält man das Doppelte der dritten Zahl $= 2x - 20$, die dritte Zahl selbst ist also $x - 10$. Auf gleiche Weise findet man ferner die erste Zahl $= x - 15$, und die zweite Zahl $= x - 20$.

Nun soll die Summe aller drei Zahlen $2x$ sein; diese Summe ist aber auch $3x - 45$. Man hat also die Gleichung

$$3x - 45 = 2x, \text{ folglich } x = 45.$$

Die erste Zahl ist also 30, die zweite 25, die dritte 35.

XIX.

Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe.

Da die Summe der ersten und zweiten Zahl um 20 größer sein soll, als die dritte, so setze man die dritte $= x$; so wird die Summe der ersten und zweiten Zahl $= x + 20$ sein.

Da ferner die Summe der zweiten und dritten um 30 größer sein soll, als die erste, so setze man die zweite der halben Summe von $20 + 30$ gleich, also $= 25$.

Nun war die Summe der ersten und zweiten Zahl $= x + 20$, die zweite selbst aber ist 25, die erste Zahl muß also dem Rest $x - 5$ gleich sein.

Endlich soll die Summe der ersten und dritten um 40 größer sein, als die zweite, aber die Summe der ersten und dritten Zahl ist $2x - 5$, und es ist also

$$2x - 5 = 25 + 40 = 65.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, so wird

$$2x = 70, \text{ folglich } x = 35.$$

Die erste Zahl haben wir $= x - 5$ gesetzt, diese Zahl wird also 30, die zweite setzten wir $= 25$, die dritte $= x$, und diese ist also 35.

XX. Aufgabe.

Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von je dreien um eine vorgeschriebene Zahl größer wird, als die vierte.

Jede der gegebenen Zahlen muß aber kleiner sein, als die halbe Summe der vier Zahlen.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der ersten und der beiden folgenden Zahlen um 20 größer sei als die vierte; die Summe der zweiten und der beiden folgenden um 30 größer als die erste; die Summe der dritten und der beiden folgenden Zahlen um 40 größer als die zweite; die Summe der vierten und der beiden folgenden Zahlen um 50 größer als die dritte.

Man setze die Summe der vier Zahlen $= 2x$. Nun sollen die drei ersten Zahlen um 20 größer sein als die vierte; aber um so viel die drei ersten größer sind, als die vierte Zahl, um eben so viel müssen alle vier Zahlen größer sein, als das Doppelte der vierten. Alle vier Zahlen zusammen genommen sind $= 2x$, und diese sind also um 20 größer, als das Doppelte der vierten Zahl; daher ist das Doppelte der vierten Zahl $= 2x - 20$, und die vierte Zahl selber $= x - 10$.

Aus ähnlichen Gründen aber wird die erste Zahl $= x-15$, die zweite $= x-20$, die dritte $= x-25$.

Nun sollen alle vier Zahlen zusammen genommen, $= 2x$ sein, sie sind aber auch $= 4x-70$, also ist

$$4x-70 = 2x, \text{ folglich } x = 35.$$

Die erste Zahl wird also 20, die zweite 15, die dritte 10, die vierte 25, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XXI.

Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe.

Da die drei ersten Zahlen um 20 größer sein sollen, als die vierte, so setze man die vierte Zahl $= x$; so wird die Summe der drei ersten $= x+20$ sein.

Da die zweite nebst den beiden folgenden um 30 größer sein soll, als die erste, so setze man die Summe der zweiten und dritten der halben Summe der Unterschiede $20+30$ gleich, also $= 25$.

Da nun die Summe der drei ersten Zahlen $= x+20$, die Summe der zweiten und dritten aber $= 25$ ist, so wird die erste Zahl $= x-5$ sein.

Die zweite Zahl nebst den beiden folgenden soll um 30 größer sein, als die erste, die dritte aber nebst den beiden folgenden um 40 größer, als die zweite; daher ist die Summe der dritten und vierten Zahl 35, und die dritte Zahl wird $35-x$.

Die Summe der zweiten und dritten Zahl war 25, die dritte Zahl aber ist 35—x, also ist die zweite Zahl = x—10.

Endlich soll die Summe der vierten und der beiden folgenden Zahlen um 50 größer sein, als die dritte. Die Summe der vierten und der beiden folgenden Zahlen ist aber 3x—15, und die dritte Zahl 35—x, also muß 3x—15 um 50 größer sein als 35—x, und man hat also die Gleichung

$3x-15 = 35-x+50$, folglich $x = 25$.

Die erste Zahl war = x—5 gesetzt, diese Zahl ist also 20, die zweite 15, die dritte 10, die vierte 25.

XXII. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in drei andere von der Beschaffenheit theilen, daß jede der beiden äußersten, um die mittelste vermehrt, zu der andern ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde also verlangt, die Zahl 100 in drei andere von der Beschaffenheit zu theilen, daß die Summe der beiden ersten das Dreifache der dritten, und die Summe der beiden letzten das Vierfache der ersten sei.

Man setze die dritte Zahl = x. Da nun die Summe der beiden ersten das Dreifache der dritten sein soll,

so wird diese Summe $3x$, alle drei Zahlen also $= 4x$ sein. Es ist also

$$4x = 100, \text{ folglich } x = 25.$$

Wir haben die dritte Zahl $= x$ gesetzt, folglich ist die dritte Zahl $= 25$. Dagegen haben wir die Summe der ersten und zweiten Zahl $= 3x$ gesetzt, und diese ist daher $= 75$.

Da nun die Summe der zweiten und dritten Zahl das Vierfache der ersten sein soll, so setze man nunmehr die erste $= x$; alsdann wird die Summe der zweiten und dritten $4x$, und die Summe aller drei Zahlen $5x$ sein. Es ist daher auch

$$5x = 100, \text{ folglich } x = 20.$$

Die erste Zahl ist also 20, die dritte 25, und der Rest, nämlich 55, ist die zweite Zahl, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die größte um einen vorgeschriebenen Theil der kleinsten größer sei, als die mittelste, die mittelste dagegen um einen vorgeschriebenen Theil der größten größer sei, als die kleinste, die kleinste endlich um eine gegebene Zahl größer sei, als ein vorgeschriebener Theil der mittelsten Zahl.

Der Theil der größten Zahl, um welchen die mittelste Zahl größer sein soll, als die kleinste, muß aber von der Beschaffenheit sein, daß, wenn man den Nenner dieses Theiles mit dem Ueberschuß der mittelsten Zahl über die kleinste multiplicirt, die unbekannte Größe in dem Produkte öfter enthalten sei, als in der mittelsten Zahl.

Auflösung.

Es werde also verlangt, daß die größte Zahl um ein Drittel der kleinsten größer sei, als die mittelste, die mittelste Zahl um ein Drittheil der größten größer als die kleinste, und die kleinste Zahl endlich um 10 größer, als ein Drittel der mittelsten.

Man setze die kleinste Zahl $= x + 10$, weil sie um 10 größer sein soll, als ein Drittel der mittelsten Zahl, die mittelste Zahl wird nun $3x$ sein, und so wird die kleinste ein Drittel der mittelsten Zahl und außerdem 10 Einheiten enthalten. Oder auch so: Man setze die mittelste Zahl $= 3x$, und da die kleinste um 10 größer sein soll, als ein Drittel der mittelsten, so wird die kleinste Zahl $= x + 10$ sein.

Es soll ferner die mittelste Zahl um ein Drittel der größten Zahl größer sein, als die kleinste, aber der Ueberschuß der mittelsten Zahl über die kleinste ist $2x - 10$. Dies ist also ein Drittel der größten Zahl, und die größte Zahl selber ist $= 6x - 30$.

Nun soll aber auch die größte Zahl um ein Drittel der kleinsten größer sein, als die mittelste; der Ueberschuß der größten Zahl über die mittelste ist aber $3x-30$. Dies ist also ein Drittel der kleinsten Zahl, und die kleinste Zahl ist also $=9x-90$. Die kleinste Zahl war aber auch $=x+10$, also ist

$$9x-90=x+10 \text{ und } x=12\frac{1}{2}.$$

Daher ist die größte Zahl $22\frac{1}{2}$, die mittelste $37\frac{1}{2}$, die größte aber 45, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XXIV.

Eine andere Auflösung der nämlichen Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die größeste um einen vorgeschriebenen Theil der kleinsten größer sei, als die mittelste, die mittelste um einen vorgeschriebenen Theil der größten größer, als die kleinste, die kleinste endlich um eine gegebene Zahl größer, als ein vorgeschriebener Theil der mittelsten.

Der Theil der größten Zahl, um welchen die mittelste Zahl größer sein soll, als die kleinste, muß aber so beschaffen sein, daß wenn man ihn zu der kleinsten Zahl addirt, die unbekannte Größe

in dieser Summe nicht so oft vorkommt, als in dem Ausdrucke, den man Anfangs für die mittelste Zahl setzt.

Auflösung.

Man setze die kleinste Zahl wieder $= x + 10$, weil sie um 10 größer sein soll, als ein Drittel der mittelsten. Nun wird die mittelste Zahl $3x$ sein müssen, damit die kleinste Zahl um 10 größer sei, als ein Drittel der mittelsten.

Da nun die größte Zahl um den dritten Theil der kleinsten größer sein soll, als die mittelste, so lege man zu der mittelsten Zahl den dritten Theil der kleinsten hinzu, so erhält man die größte Zahl $= 3x + \frac{x+10}{3}$ oder $3\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$.

Ferner soll die mittelste Zahl der kleinsten und einem Drittel der größten gleich sein. Aber die kleinste Zahl und das Drittel der größten betragen zusammen $2\frac{1}{9}x + 11\frac{1}{9}$. Also ist

$$3x = 2\frac{1}{9}x + 11\frac{1}{9}.$$

Nun ziehe man Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$\frac{8}{9}x = 11\frac{1}{9}.$$

Man multiplicire an beiden Seiten mit 9, so wird

$$8x = 100 \text{ und } x = 12\frac{1}{2},$$

und die Richtigkeit der Auflösung erhellet wie im Vorigen.

XXV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn jede an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Theil ihres Werthes abgiebt, die Zahlen zuletzt unter einander gleich werden.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die erste Zahl an die zweite ein Drittel, die zweite an die dritte ein Viertel, und die dritte an die erste ein Fünftel ihres Werthes abgeben, und die Zahlen dadurch einander gleich werden sollen.

Man drücke die erste Zahl durch x mit einem durch 3 theilbaren Coefficienten aus, weil sie ein Drittel ihres Werthes abgeben soll. Die erste Zahl sei also $= 3x$.

Die zweite Zahl setze man irgend einer durch 4 theilbaren Zahl gleich, da sie ein Viertel ihres Werthes abgeben soll; sie sei also $= 4$.

Wenn nun die zweite Zahl empfängt und abgiebt, was die Aufgabe vorschreibt, so wird sie $= x + 3$, daher muß auch die erste Zahl, wenn sie das Vorgeschriebene gegeben und empfangen hat, $= x + 3$ werden. Nachdem sie aber $\frac{1}{3}$ ihres Werthes oder x abgegeben hat, so wird sie dadurch $= x + 3$, daß sie $3 - x$ erhält, folglich

ist $3-x$ der fünfte Theil der dritten Zahl, und die dritte Zahl selber $= 15-5x$.

Endlich muß auch die dritte Zahl, wenn sie an die erste ein Fünftel ihres Werthes abgiebt, und dagegen ein Viertel der zweiten Zahl erhält, $= x+3$ werden. Wenn sie aber ein Fünftel ihres Werthes oder $3-x$ abgiebt, so bleibt $12-4x$, und wenn sie ein Viertel von dem Werthe der zweiten Zahl, oder 1 erhält, so wird sie $13-4x$; also ist

$$13-4x = x+3 \text{ und } x = 2.$$

Die erste Zahl ist also 6, die zweite 4, die dritte 5, und es ist klar, daß diese Zahlen der Aufgabe genügen.

XXVI. Aufgabe.

Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn jede an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Theil ihres Werthes abgiebt, die Zahlen zuletzt unter einander gleich werden.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die erste an die zweite ein Drittel, die zweite an die dritte ein Viertel, die dritte an die vierte ein Fünftel, die vierte an die erste ein Sechstel ihres Werthes abgeben, und daß die

dadurch entstehenden Zahlen einander gleich werden sollen.

Man drücke die erste Zahl durch x und einen durch 3 theilbaren Coefficienten aus, weil sie ein Drittel ihres Werthes abgeben soll, sie sei also z. B. $= 3x$. Für die zweite Zahl nehme man eine durch 4 theilbare Zahl an, da sie ein Viertel ihres Werthes abgeben soll, sie sei also z. B. $= 4$.

Wenn nun die zweite Zahl ein Viertel ihres Werthes oder 1 abgiebt, und dagegen ein Drittel der ersten oder x erhält, so wird sie zuletzt $= x + 3$. Daher muß auch die erste Zahl, wenn sie ein Drittel oder x abgiebt, und ein Sechstel der vierten Zahl erhält, $= x + 3$ werden. Wenn sie aber x abgiebt, so bleibt $2x$, und dies soll sich in $x + 3$ verwandeln, wenn noch ein Sechstel der vierten Zahl hinzukommt; das Sechstel der vierten Zahl ist also $3 - x$, und die vierte Zahl selber $= 18 - 6x$.

Es soll ferner die vierte Zahl ein Sechstel ihres Werthes abgeben, und ein Fünftel der dritten Zahl erhalten, und dadurch $= x + 3$ werden. Wenn sie aber ein Sechstel ihres Werthes oder $3 - x$ abgiebt, so bleibt noch $15 - 5x$. Dieser Rest soll also dadurch $x + 3$ werden, daß ein Fünftel der dritten Zahl hinzukommt; er wird aber $x + 3$, wenn $6x - 12$ hinzukommt; also ist $6x - 12$ ein Fünftel der dritten Zahl, und die dritte Zahl selber $= 30x - 60$.

Endlich soll auch die dritte Zahl, wenn sie ein Fünf-

tel ihres Werthes abgiebt und ein Viertel der zweiten Zahl erhält, $= x + 3$ werden. Wenn sie aber ein Fünftel ihres Werthes oder $6x - 12$ abgiebt, so behält sie $24x - 48$, und wenn sie ein Viertel der zweiten Zahl oder x erhält, so wird sie $24x - 47$, also ist

$$24x - 47 = x + 3, \text{ folglich } x = \frac{50}{23}.$$

Die erste Zahl wird also $\frac{150}{23}$, die zweite $\frac{92}{23}$, die dritte $\frac{120}{23}$, die vierte $\frac{114}{23}$. Man werfe aber den gemeinschaftlichen Nenner weg, so wird die erste Zahl 150, die zweite 92, die dritte 120, die vierte 114.

XXVII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn jede einen vorgeschriebenen Theil von der Summe der beiden übrigen erhält, die Zahlen unter einander gleich werden.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß die erste von der Summe der beiden übrigen ein Drittel, die zweite von der Summe der beiden übrigen ein Viertel, die dritte von der Summe der beiden übrigen ein Fünftel erhalten, und daß die Zahlen dadurch einander gleich werden sollen.

Man setze die erste Zahl $= x$, für die Summe der beiden übrigen, welche ein Drittel ihres Werthes abge-

ben sollen, nehme man der Bequemlichkeit wegen, eine beliebige, durch 3 theilbare Zahl an; diese Summe sei also = 3. Dann wird die Summe aller drei Zahlen = x + 3, die erste aber, wenn sie ein Drittel von dem Werth der beiden übrigen erhält, wird = x + 1; daher muß auch die zweite, wenn sie von dem Werth der beiden übrigen ein Viertel erhält, = x + 1 werden.

Man multiplicire alles mit 4, so ist das Vierfache der zweiten Zahl und die Summe der beiden übrigen eben so groß, als das Dreifache der zweiten und die Summe aller drei Zahlen; also ist das Dreifache der zweiten und die Summe aller drei Zahlen = 4x + 4. Zieht man hiervon die Summe der drei Zahlen oder x + 3 ab, so bleibt 3x + 1, und dies ist das Dreifache der zweiten Zahl, die zweite Zahl selbst ist also $x + \frac{1}{3}$.

Ferner soll die dritte Zahl, wenn sie von der Summe der beiden übrigen ein Fünftel erhält, = x + 3 werden. Man multiplicire alles mit 5, so erhält man durch ähnliche Schlüsse, wie vorher, die dritte Zahl $= x + \frac{1}{2}$.

Endlich soll die Summe der drei Zahlen = x + 3 sein, diese Summe aber ist auch $3x + \frac{5}{6}$, also wird

$$3x + \frac{5}{6} = x + 3, \text{ folglich } x = \frac{13}{12}.$$

Die erste Zahl wird also, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner wegläßt, 13, die zweite 17, die dritte 19.

XXVIII. Aufgabe.

Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn jede von der Summe der übrigen einen vorgeschriebenen Theil erhält, die Zahlen unter einander gleich werden.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die erste ein Drittel, die zweite ein Viertel, die dritte ein Fünftel, die vierte ein Sechstel von der Summe der übrigen Zahlen erhalten, und dadurch alle vier Zahlen zuletzt einander gleich werden sollen.

Man setze die erste Zahl $= x$, und da die Summe der übrigen ein Drittel abgeben soll, so nehme man dafür, der Bequemlichkeit wegen, eine durch 3 theilbare Zahl an, z. B. 3. Wenn nun die erste von der Summe der übrigen ein Drittel erhält, so wird sie $= x + 1$. Daher muß die zweite, wenn sie von der Summe der übrigen ein Viertel erhält, ebenfalls $= x + 1$ werden.

Man multiplicire, wie in der vorigen Aufgabe, alles mit 4, so findet man durch ein ganz ähnliches Verfahren die zweite Zahl $= x + \frac{1}{3}$, die dritte $= x + \frac{1}{2}$, die vierte $= x + \frac{3}{5}$.

Nun soll die Summe aller vier Zahlen $= x + 3$

sein; die Summe der drei Zahlen ist aber auch $4x + \frac{43}{30}$, also ist

$$4x + \frac{43}{30} = x + 3 \text{ und } x = \frac{47}{90}.$$

Die erste Zahl wird also 47, die zweite 77, die dritte 92, die vierte 101, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XXIX. Aufgabe.

Man soll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man die gegebenen Zahlen mit der gesuchten Zahl multiplicirt, das eine Produkt ein Quadrat, das andere aber die Wurzel dieses Quadrates wird.

Auflösung.

Die gegebenen Zahlen mögen 200 und 5 sein. Die gesuchte Zahl aber setze man $= x$, so ist das eine Produkt $200x$, das andere $5x$. Nun soll aber das eine Produkt, nämlich $200x$, ein Quadrat, das andere aber, nämlich $5x$, die Wurzel dieses Quadrats sein. Wenn ich aber $5x$ ins Quadrat erhebe, so erhalte ich $25x^2$, folglich ist

$$25x^2 = 200x.$$

Man dividire an beiden Seiten durch die unbekannte Größe, so erhält man

$$25x = 200, \text{ folglich } x = 8,$$

und diese Zahl leistet, was die Aufgabe vorschreibt.

XXX.

XXX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl ihre Summe als ihr Produkt einer gegebenen Zahl gleich wird.

Die gegebenen Zahlen müssen aber so beschaffen sein, daß ein Quadrat übrig bleibt, wenn man das Produkt der beiden Zahlen von dem Quadrat ihrer halben Summe abzieht.

Dies kann man aber durch ein besonderes Verfahren bewirken.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der beiden Zahlen 20, ihr Produkt aber 96 sei.

Man setze den Unterschied der beiden Zahlen $= 2x$, die Summe derselben soll nach der Annahme 20 sein. Wenn ich die Summe hälfte, so ist jeder Theil $= 10$, und wenn ich nun den halben Unterschied der Zahlen, nämlich x, von der einen Hälfte subtrahire, und ihn zu der anderen Hälfte wieder addire, so wird die Summe der dadurch entstandenen Zahlen noch immer $= 20$, und ihr Unterschied $= 2x$ sein.

Man setze also die größere Zahl $= 10 + x$, und die kleinere $= 10 - x$, so wird die Summe 20, und der Unterschied $2x$ betragen. Nun soll aber auch das Produkt der beiden Zahlen 96 sein, dies Produkt ist aber auch $100 - x^2$, folglich wird

$$96 = 100 - x^2 \text{ und } x = 2.$$

Die größere Zahl ist also 12, die kleinere 8.

XXXI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Summe der Zahlen, als die Summe ihrer Quadrate einer gegebenen Zahl gleich wird.

Die gegebenen Zahlen müssen aber so beschaffen sein, daß ein Quadrat übrig bleibt, wenn man das Quadrat ihrer Summe von der doppelten Summe ihrer Quadrate abzieht. Dies kann man aber auch durch ein besonderes Verfahren bewirken.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Zahlen $= 20$, die Summe ihrer Quadrate $= 208$ sei.

Man setze den Unterschied der gesuchten Zahlen $= 2x$, die größere $= x + 10$, die kleinere $= 10 - x$, so wird ihre Summe 20, und ihr Unterschied $2x$ sein.

Nun soll die Summe ihrer Quadrate = 208 sein, aber die Summe ihrer Quadrate ist auch $2x^2 + 200$, daher wird

$$2x^2 + 200 = 208 \text{ und } x = 2.$$

Die größere Zahl ist also 12, die kleinere 8, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Summe derselben, als der Unterschied ihrer Quadrate einer gegebenen Zahl gleich wird.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Zahlen 20, der Unterschied ihrer Quadrate hingegen 80 sei.

Man setze den Unterschied der beiden Zahlen $= 2x$, so ist, wie vorher, die größere der Zahlen $= 10 + x$, die kleinere $= 10 - x$, und die Summe dieser beiden Zahlen bleibt 20, und ihr Unterschied $2x$.

Nun soll der Unterschied zwischen den Quadraten dieser beiden Zahlen = 80 sein, dieser Unterschied ist aber auch $= 40x$; daher ist

$$40x = 80, \text{ folglich } x = 2.$$

XXXIII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl ihre Differenz als ihr Produkt einer gegebenen Zahl gleich wird.

Das vierfache Produkt und das Quadrat der Differenz müssen aber, zusammen genommen, wieder ein Quadrat geben. Dies kann man aber durch ein besonderes Verfahren bewirken.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die Differenz der beiden Zahlen = 4, das Produkt aber = 96 werde.

Man setze die Summe der Zahlen = 2x, und da ihre Differenz = 4 sein soll, so ist die größere = x + 2, und die kleinere = x — 2, denn diese beiden Zahlen geben zur Summe 2x, und zur Differenz 4. Nun soll ferner das Produkt beider Zahlen 96 sein, dies Produkt ist aber auch = $x^2 - 4$, folglich ist

$$x^2 - 4 = 96, \text{ also } x = 10.$$

Die größere Zahl ist also wieder 12, die kleinere 8, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XXXIV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich in einem

gegebenen Verhältniß stehen, und außerdem die Summe ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen selbst ein gegebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Summe ihrer Quadrate das Fünffache von der Summe der Zahlen sein.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so wird die größere $= 3x$ sein. Nun soll aber auch die Summe ihrer Quadrate das Fünffache von der Summe der Zahlen sein. Die Summe der Quadrate ist aber $= 10x^2$, und die Summe der Zahlen selber $= 4x$, daher ist $10x^2$ das Fünffache von $4x$, oder es ist

$$10x^2 = 20x \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl ist also 2, und die größere 6.

XXXV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich in einem gegebenen Verhältniß stehen, und außerdem die Summe ihrer Quadrate zu der Differenz dieser Zahlen ein gegebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und die Summe ihrer Quadrate das Zehnfache von der Differenz beider Zahlen sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= 3x$. Außerdem soll die Summe ihrer Quadrate das Zehnfache von der Differenz dieser Zahlen sein. Die Summe der Quadrate ist aber $10x^2$, und die Differenz der Zahlen selber ist $2x$. Daher ist $10x^2$ das Zehnfache von $2x$, aber $20x$ ist auch das Zehnfache von $2x$, daher ist

$$10x^2 = 20x,$$

Man dividire an beiden Seiten durch x, so wird

$$10x = 20, \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl ist also wie in der vorigen Aufgabe 2, die größere 6, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXVI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen selbst in einem vorgeschriebenen Verhältniß stehen, und außerdem der Unterschied ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und der Unterschied ihrer Quadrate das Sechsfache von der Summe der Zahlen sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= 3x$. Außerdem soll der Unterschied der Quadrate das Sechsfache von der Summe der Zahlen sein. Aber der Unterschied der Quadrate ist $8x^2$, und die Summe der Zahlen $4x$. Folglich ist $8x^2$ das Sechsfache von $4x$, oder es ist

$$8x^2 = 24x \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl ist also 3, und die größere 9.

XXXVII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich in einem gegebenen Verhältniß stehen, und außerdem der Unterschied ihrer Quadrate zu dem Unterschied der Zahlen selbst ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und der Unterschied ihrer Quadrate das Zwölffache von dem Unterschiede der Zahlen sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= 3x$. Außerdem aber soll der Unterschied ihrer Quadrate das Zwölffache von dem Unterschiede der Zahlen selber sein. Der Unterschied der Quadrate ist aber $8x^2$, und der Unterschied der Zahlen $2x$. Daher ist $8x^2$ das Zwölffache von $2x$, oder

$$8x^2 = 24x \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl ist also, wie in der vorigen Aufgabe 3, die größere 9, und der Beweis fällt in die Augen.

Zusatz.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man auch zwei Zahlen, die unter sich ein gegebenes Verhältniß haben, und deren Produkt entweder zu ihrer Summe, oder zu ihrem Unterschiede ein gegebenes Verhältniß hat.

XXXVIII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich in einem vorgeschriebenen Verhältniß stehen, und außerdem das Quadrat der kleineren zu der größeren Zahl ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren Zahl das Sechsfache der größeren sein solle.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= 3x$. Außerdem soll das Quadrat der kleineren Zahl das Sechsfache der größeren Zahl sein. Das Quadrat der kleineren Zahl ist aber x^2, und dies soll das Sechsfache von $3x$ sein. Daher ist

$$x^2 = 18x \text{ und } x = 18.$$

Die kleinere Zahl ist also 18, die größere 54.

XXXIX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich, und außerdem das Quadrat der kleineren zu der kleineren Zahl selbst, ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren das Sechsfache eben dieser Zahl sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= 3x$. Nun soll das Quadrat der kleineren Zahl das Sechsfache von eben dieser Zahl sein. Daher ist x^2 das Sechsfache von x, oder es ist

$$x^2 = 6x, \text{ folglich } x = 6.$$

Die kleinere Zahl ist also 6, die größere 18.

XL. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich, und außerdem das Quadrat der kleineren Zahl zu der Summe von beiden, ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und das Quadrat der kleineren Zahl das Doppelte von der Summe beider Zahlen sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 3x$. Nun soll das Quadrat der kleineren das Doppelte von der Summe beider Zahlen sein. Aber das Quadrat der kleineren Zahl ist x^2, und die Summe beider Zahlen ist $4x$, daher ist x^2 das Doppelte von $4x$, oder

$$x^2 = 8x, \text{ folglich } x = 8.$$

Die kleinere Zahl ist also 8, die größere 24, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XLI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen unter sich, und außerdem das Quadrat der kleineren zu dem Unter-

schiede der beiden Zahlen, ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren, und außerdem das Quadrat der kleineren das Sechsfache von dem Unterschiede der Zahlen sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 3x$. Nun soll das Quadrat der kleineren das Sechsfache von dem Unterschiede beider Zahlen sein, also ist x^2 das Sechsfache von $2x$, oder

$$x^2 = 12x, \text{ folglich } x = 12.$$

Die kleinere Zahl ist also 12, die größere 36, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

XLII. Zusatz.

Durch ein ganz ähnliches Verfahren findet man auch zwei Zahlen, welche unter sich in einem vorgeschriebenen Verhältnisse stehen, und außerdem die Eigenschaft haben, daß das Quadrat der größeren, entweder zu der kleineren, oder zu der größeren Zahl, oder auch zu der Summe von beiden, ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

XLIII. Aufgabe.

Man soll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man die Summe von je zweien mit der dritten Zahl multiplicirt, die Produkte, der Reihe nach, gleiche Unterschiede haben.

Auflösung.

Es sind z. B. die Zahlen 3 und 5 gegeben, zu diesen soll man eine dritte Zahl von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man die Summe von je zweien mit der dritten multiplicirt, die Produkte der Reihe nach gleiche Unterschiede haben.

Man setze die gesuchte Zahl $= x$. Addirt man diese zu der gegebenen Zahl 5, so erhält man $x + 5$, und multiplicirt man dies mit der anderen gegebenen Zahl oder mit 3, so wird das Produkt $3x + 15$.

Addirt man aber x zu 3, so erhält man $x + 3$, und multiplicirt man dies mit 5, so erhält man $5x + 15$.

Addirt man endlich 3 und 5, so erhält man 8, und multiplicirt man diese Summe mit x, so erhält man $8x$.

Nun ist klar, daß $3x + 15$ nicht das größeste der drei Produkte sein kann, denn $5x + 15$ ist ohne Zweifel größer. Daher ist $3x + 15$, entweder das kleinste, oder

das mittelste der drei Produkte; $5x+15$ ist entweder das größeste oder das mittelste; aber $8x$ kann das größeste, das mittelste und das kleinste der drei Produkte sein, weil der Werth von x noch nicht bekannt ist.

Man nehme zuerst an, daß $5x+15$ das größeste, $3x+15$ das kleinste, folglich $8x$ das mittelste der drei Produkte sei. Wenn nun die drei Zahlen gleiche Unterschiede haben (oder eine arithmetische Reihe bilden), so ist die Summe der größten und der kleinsten das Doppelte der mittelsten, die Summe der größten und kleinsten ist aber $8x+30$, folglich ist

$$8x+30 = 16x \text{ und } x = \frac{15}{4}.$$

Die gesuchte Zahl ist in diesem Falle also $\frac{15}{4}$, und leistet wirklich, was die Aufgabe verlangt.

Nunmehr sei $5x+15$ das größte, $3x+15$ das mittelste, folglich $8x$ das kleinste der drei Produkte. Wenn aber drei Zahlen der Reihe nach gleiche Unterschiede haben, so ist der Unterschied der größten und mittelsten dem Unterschiede der mittelsten und der kleinsten gleich. Der Unterschied der größten und mittelsten Zahl ist in unserem Falle $2x$, der Unterschied der mittelsten und der kleinsten ist $15-5x$, also ist

$$2x = 15-5x, \text{ folglich } x = \frac{15}{7}.$$

Die gesuchte Zahl ist also in diesem Falle $\frac{15}{7}$, und diese Zahl leistet, was die Aufgabe verlangt.

Endlich sei $8x$ das größte, $5x+15$ das mittelste, $3x+15$ das kleinste der drei Produkte. Nun ist wieder die Summe der größten und der kleinsten Zahl dem Doppelten der mittelsten Zahl gleich. Aber die Summe der kleinsten und größten Zahl ist $11x+15$, und dies ist das Doppelte der mittelsten Zahl, oder das Doppelte von $5x+15$. Daher ist

$$11x+15 = 10x+30, \text{ und } x = 15.$$

Die gesuchte Zahl ist in diesem Falle also 15, und diese Zahl leistet, was die Aufgabe vorschreibt.

Zweites Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe derselben zu der Summe ihrer Quadrate ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Zahlen ein Zehntel von der Summe ihrer Quadrate sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, und die größere $= 2x$, so ist die Summe der Zahlen $= 3x$, und die Summe ihrer Quadrate $= 5x^2$. Nun soll $3x$ ein Zehntel von $5x^2$ sein, folglich ist

$$5x^2 = 30x \text{ und } x = 6.$$

Die kleinere Zahl ist also 6, und die größere 12.

II. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied derselben zu dem Unterschied ihrer Quadrate ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß der Unterschied der Zahlen ein Sechstel von dem Unterschiede ihrer Quadrate sein solle.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, so ist der Unterschied der Zahlen ebenfalls $= x$, und der Unterschied ihrer Quadrate $= 3x^2$. Nun soll aber x ein Sechstel von $3x^2$ sein, folglich ist

$$3x^2 = 6x \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl ist also 2, und die größere 4.

III. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt derselben zu ihrer Summe, oder zu ihrem Unterschiede ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auf-

Auflösung.

Es sei zuerst vorgeschrieben, daß das Produkt der gesuchten Zahlen das Sechsfache von ihrer Summe sein solle.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, auch kann man die Zahlen so ausdrücken, daß sie jedes vorgeschriebene Verhältniß haben. Das Produkt der beiden Zahlen wird also $2x^2$, ihre Summe dagegen $3x$ sein. Da nun $2x^2$ das Sechsfache von $3x$ sein soll, so hat man die Gleichung

$$2x^2 = 18x, \text{ und } x = 9.$$

Die kleinere Zahl ist also 9, die größere 18.

Wäre aber vorgeschrieben, daß das Produkt beider Zahlen das Sechsfache ihres Unterschiedes sein solle, so wäre das Produkt der Zahlen wieder $= 2x^2$, der Unterschied der Zahlen $= x$, folglich wäre

$$2x^2 = 6x, \text{ und } x = 3.$$

Die kleinere Zahl ist also 3, die größere 6.

IV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe ihrer Quadrate zu dem Unterschiede der Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die Summe der Quadrate das Zehnfache von dem Unterschiede der Zahlen sein solle.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, so ist die Summe ihrer Quadrate $= 5x^2$, ihr Unterschied aber ist ebenfalls $= x$. Nun soll $5x^2$ das Zehnfache von x sein, folglich ist

$$5x^2 = 10x, \text{ und } x = 2.$$

Die kleinere Zahl ist also 2, die größere 4, und diese Zahlen leisten der Aufgabe Genüge.

V. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied ihrer Quadrate zu der Summe der Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß der Unterschied der Quadrate das Sechsfache von der Summe der Zahlen sei.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 2x$, so ist der Unterschied ihrer Quadrate $= 3x^2$, und die

Summe der Zahlen $= 3x$. Nun soll $3x^2$ das Sechsfache von $3x$ sein, daher ist

$$3x^2 = 18x, \text{ und } x = 6.$$

Die kleinere Zahl ist also 6, die größere 12, und der Beweis fällt in die Augen.

VI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Zahlen selbst einen vorgeschriebenen Unterschied haben, und der Unterschied ihrer Quadrate um eine bestimmte Zahl größer sei, als der Unterschied der Zahlen selber.

Es muß aber das Quadrat des Unterschiedes der Zahlen kleiner sein, als die Summe dieses Unterschiedes und derjenigen Zahl, um welche der Unterschied der Quadrate größer sein soll, als der Unterschied der Zahlen.

Auflösung.

Es werde also verlangt, daß der Unterschied der Zahlen $= 2$, der Unterschied ihrer Quadrate aber um 20 größer sein solle.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= x + 2$, und der Unterschied ihrer Quadrate $= 4x + 4$.

Dieser Unterschied soll nun um 20 größer sein als 2, daher ist

$$4x+4=22, \text{ und } x=4\tfrac{1}{2}.$$

Die kleinere Zahl ist also $4\frac{1}{2}$, die größere $6\frac{1}{2}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

VII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied ihrer Quadrate um eine gegebene Zahl größer sei, als ein vorgeschriebenes Vielfaches von dem Unterschiede der Zahlen.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß der Unterschied der Quadrate um 10 größer sei, als der dreifache Unterschied der Zahlen selbst. Das Quadrat des Unterschiedes muß aber kleiner sein, als die Summe der Zahl 10 und des dreifachen Unterschiedes der Zahlen.

Man setze den Unterschied der Zahlen $=2$, und die kleinere Zahl $=x$, so wird die größere $=x+2$ sein. Nun soll der Unterschied der Quadrate d. i. $4x+4$ um 10 größer sein, als der dreifache Unterschied der Zahlen selber. Man hat also die Gleichung

$$4x+4=3.2+10, \text{ und } x=3.$$

Die kleinere Zahl ist also 3, die größere 5, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe verlangt.

VIII. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Quadratzahl in zwei andere Quadratzahlen theilen.

Auflösung.

Man soll z. B. 16 in zwei Quadratzahlen theilen.

Man setze die eine der gesuchten Zahlen $= x^2$, so soll auch $16 - x^2$ eine Quadratzahl sein. Als Wurzel dieser Quadratzahl sehe man irgend ein Vielfaches von x, weniger der Wurzel des gegebenen Quadrates an, z. B. $2x - 4$. Davon ist das Quadrat $4x^2 - 16x + 16$, und nun setze man

$$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$5x^2 = 16x, \text{ und } x = \frac{16}{5}.$$

Die eine Zahl ist also $\frac{256}{25}$, und die andre $\frac{144}{25}$. Die Summe beider ist $\frac{400}{25}$, oder 16, und beide sind, wie verlangt wurde, Quadratzahlen.

IX.

Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe.

Es sei wieder 16 in zwei Quadratzahlen zu theilen.

Man setze die Wurzel des einen Quadrates $= x$, für die Wurzel des anderen Quadrats nehme man ein beliebiges Vielfaches von x, ziehe aber die Wurzel des gegebenen Quadrats davon ab, diese Wurzel sei also $2x - 4$. Die beiden Quadrate sind also x^2, und $4x^2 - 16x + 16$, und beide zusammen sollen 16 zur Summe geben; es ist also

$$5x^2 - 16x + 16 = 16, \text{ und } x = \frac{16}{5}.$$

Die Wurzel des ersten Quadrats ist also $\frac{16}{5}$, das Quadrat selbst $\frac{256}{25}$, die Wurzel des andern Quadrats ist $\frac{12}{5}$, und das Quadrat selbst $\frac{144}{25}$. Der Beweis fällt in die Augen.

X. Aufgabe.

Man soll eine Zahl, welche schon an sich die Summe von zwei Quadraten ist, noch in zwei andere Quadrate theilen.

Auflösung.

Man soll z. B. die Zahl 13, welche die Summe der Quadrate 4 und 9 ist, in zwei andere Quadrate theilen.

Man nehme die Wurzeln der beiden Quadrate 4 und 9, aus welchen die gegebene Zahl besteht, also in unserem Falle die Zahlen 2 und 3. Nun setze man die Wurzel des einen gesuchten Quadrats $= x + 2$, für die Wurzel des anderen Quadrats nehme man ein Vielfaches von x, und ziehe davon die Wurzel des andern Quadrats, nämlich 3, ab, diese Wurzel sei also $2x - 3$. Die verlangten Quadrate sind also $x^2 + 4x + 4$, und $4x^2 - 12x + 9$, und beide zusammen sollen $= 13$ sein. Man hat also die Gleichung

$$5x^2 - 8x + 13 = 13, \text{ und } x = \frac{8}{5}.$$

Die Wurzel des ersten Quadrats haben wir $= x + 2$ gesetzt, diese ist also $\frac{18}{5}$; die Wurzel des zweiten Quadrats haben wir $= 2x - 3$ gesetzt, diese Wurzel wird also $\frac{1}{5}$. Das erste Quadrat ist also $\frac{324}{25}$, das zweite $\frac{1}{25}$. Die Summe von beiden ist aber $\frac{325}{25}$, oder 13.

XI. Aufgabe.

Man soll zwei Quadrate suchen, deren Unterschied einer vorgeschriebenen Zahl gleich ist.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß der Unterschied der Quadrate 60 sein solle.

Man setze die Wurzel des einen Quadrats $= x$, die Wurzel des andern $= x +$ einer beliebigen Zahl, deren Quadrat aber nicht größer, als der gegebene Unterschied 60 sein darf, denn so wird man eine Gleichung zwischen zwei einfachen Ausdrücken erhalten.

Die Wurzel des zweiten Quadrats sei also $x+3$, folglich ist das eine Quadrat $= x^2$, das andere $= x^2+6x+9$, und der Unterschied beider Quadrate $= 6x+9$. Man hat also die Gleichung

$$6x+9 = 60, \text{ und } x = 8\tfrac{1}{2}.$$

Die Wurzel des kleineren Quadrats ist also $8\frac{1}{2}$, die Wurzel des größeren $11\frac{1}{2}$, die Quadrate selbst aber sind $72\frac{1}{4}$ und $132\frac{1}{4}$, und es fällt in die Augen, daß diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XII. Aufgabe.

Man soll zu zwei gegebenen Zahlen eine dritte von der Beschaffenheit addiren, daß beide Summen Quadrate werden.

Auflösung.

Die gegebene Zahlen mögen 2 und 3 sein.

Man setze die Zahl, die man zu beiden addiren muß, $= x$, so soll sowohl $x+2$, als $x+3$ ein Quadrat sein. Diesen Fall nennt man aber die doppelte Gleichung, und man löset dieselbe auf folgende Art:

> Man nimmt den Unterschied der beiden Quadrate, und zerfällt dieselben in zwei Factoren, z. B. hier in 4 und $\frac{1}{4}$. Der halbe Unterschied dieser Factoren, ins Quadrat erhoben, giebt das kleinere, die halbe Summe ins Quadrat erhoben, giebt das größere der beiden Quadrate.

In unserem Falle ist das Quadrat des halben Unterschiedes der Factoren $= \frac{225}{64}$, und dies ist dem kleineren Quadrat gleich, folglich ist

$$x+2 = \frac{225}{64}, \text{ und } x = \frac{97}{64}.$$

Das Quadrat der halben Summe ist aber $\frac{289}{64}$, und dies ist gleich dem größeren Quadrat, folglich ist

$$x+3 = \frac{289}{64}, \text{ und } x = \frac{97}{64}.$$

Die Zahl, welche man zu beiden gegebenen Zahlen addiren muß, ist also $\frac{97}{64}$, und diese Zahl leistet offenbar, was die Aufgabe vorschreibt.

Wenn man aber nicht die doppelte Gleichung gebrauchen will, so muß man so verfahren. Man soll zu 2 und zu 3 einerlei Zahl addiren, und beide Summen sollen Quadrate sein.

Ich suche zuerst eine Zahl, welche um 2 oder um 3 vermehrt, ein Quadrat wird. Diese Eigenschaft hat aber jedes Quadrat, wenn ich 2 oder 3 davon abziehe. Man nehme z. B. x^2-2, so ist klar, daß, wenn man 2 dazu addirt, die Summe ein Quadrat wird; wenn man aber 3 addirt, so erhält man x^2+1, und dies soll auch ein Quadrat sein.

Ich bilde also ein Quadrat von x weniger so viel Einheiten, daß aus dem allgemeinen Ausdruck für das Quadrat der Werth von x^2 größer wird, als die vorhin abgezogenen Einheiten, hier also größer als 2, denn auf diese Weise erhält man eine Gleichung zwischen zwei einfachen Ausdrücken.

Ich bilde also ein Quadrat von $x-4$, so wird das Quadrat $x^2-8x+16$, und ich nehme an, dies sei $=x^2+1$. Nun addire ich an beiden Seiten die fehlende Größe, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$8x=15, \text{ und } x=\frac{15}{8}.$$

Die Zahl, welche man addiren muß, oder x^2-2 wird also auch auf diesem Wege $=\frac{97}{64}$.

XIII. Aufgabe.

Man soll von zwei gegebenen Zahlen eine und dieselbe Zahl abziehen, und beide Reste sollen Quadrate werden.

Auflösung.

Man soll z. B. von 9 und von 21 eine und dieselbe Zahl abziehen, und beide Reste sollen Quadrate werden.

Ich ziehe von einer der gegebenen Zahlen ein beliebiges Quadrat ab, und den Rest sehe ich als die gesuchte Zahl an, denn, wenn ich diesen Rest von der gegebenen Zahl abziehe, so bleibt gewiß ein Quadrat übrig. Ich ziehe z. B. x^2 von 9 ab, so wird der Rest $9-x^2$, [und wenn ich $9-x^2$ für die gesuchte Zahl annehme, so fällt in die Augen, daß 9 weniger $9-x^2$ wieder ein Quadrat zum Reste giebt.]

Wenn ich aber $9-x^2$ von 21 abziehe, so soll der Rest ebenfalls ein Quadrat sein, dieser Rest ist aber x^2+12, und x soll so bestimmt werden, daß auch x^2+12 ein Quadrat werde.

Zu diesem Ende mache ich das Quadrat von x weniger so vielen Einheiten, daß ihr Quadrat größer, als 12 wird, denn so erhält man zuletzt wieder eine Glei-

chung zwischen zwei einfachen Ausdrücken. Ich mache also das Quadrat von $x-4$, so wird

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 + 12.$$

Man ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$8x = 4, \text{ und } x = \frac{4}{8}.$$

Die Zahl 9 ist $= \frac{72}{8}$ oder $\frac{576}{64}$; zieht man davon $x^2 = \frac{16}{64}$ ab, so ist der Rest $\frac{560}{64}$ die gesuchte Zahl, und dieser Rest leistet was die Aufgabe verlangt.

XIV. Aufgabe.

Man soll zwei gegebene Zahlen von einer und derselben Zahl abziehen, und beide Reste sollen Quadrate sein.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß man von einer gewissen Zahl das eine Mal 6, und das andere Mal 7 abziehen, und daß beide Reste Quadrate sein sollen.

Man setze die gesuchte Zahl $= x$. Ziehe ich davon 6 ab, so bleibt $x-6$, ziehe ich aber 7 davon ab, so bleibt $x-7$, und beide Reste sollen Quadrate sein.

Hier hat man aber wieder den Fall der doppelten Gleichung, und da der Unterschied der gegebenen Zahlen

oder 1 ein Produkt von 2 und $\frac{1}{2}$ ist, so wird $x = \frac{121}{16}$, und diese Zahl leistet, was die Aufgabe verlangt.

Wenn man aber nicht die doppelte Gleichung gebrauchen will, so muß man die Zahl auf folgende Art suchen. Wir suchen zuerst eine Zahl, welche um 6 vermindert, ein Quadrat giebt. Diese Eigenschaft hat aber jedes Quadrat, wenn man noch 6 zu demselben hinzulegt. Die gesuchte Zahl sei also $x^2 + 6$, und wenn man von dieser Zahl 6 abzieht, so fällt es in die Augen, daß der Rest ein Quadrat ist.

Nun soll man aber auch 7 von der gesuchten Zahl $x^2 + 6$ abziehen, und der Rest $x^2 - 1$ soll ebenfalls ein Quadrat sein. Als Wurzel desselben betrachte ich $x - 2$, so wird

$$x^2 - 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = \frac{5}{4}.$$

Die gesuchte Zahl ist also wieder $\frac{121}{16}$, und diese Zahl leistet, was die Aufgabe vorschreibt.

XV. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und dazu ein Quadrat von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe dieses Quadrats und jedwedes Stückes wieder ein Quadrat wird.

Auflösung.

Wenn 20 die gegebene Zahl ist, so nehme man zwei Zahlen, deren Quadrate zusammen genommen kleiner als 20 sind, z. B. 2 und 3. Legt man zu jeder von beiden Zahlen x hinzu, so ist $(x+2)^2 = x^2+4x+4$, und $(x+3)^2 = x^2+6x+9$.

Ziehe ich von diesen beiden Ausdrücken x^2 ab, welches gewiß ein Quadrat ist, so habe ich die beiden gesuchten Stücke, denn wenn ich zu den Resten wieder x^2 hinzulege, so erhalte ich gewiß zwei Quadrate.

Die Reste sind aber $4x+4$, und $6x+9$, und die Summe derselben soll $= 20$ sein. Es ist also

$$10x+13 = 20, \text{ und } x = \frac{7}{10}.$$

Das eine Stück ist also $\frac{68}{10}$, das zweite $\frac{132}{10}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XVI. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und ein Quadrat von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied dieses Quadrats und jedwedes Stückes wieder ein Quadrat wird.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei wiederum 20. Als Wurzel des gesuchten Quadrats nehme man $x+$ einer Anzahl von Einheiten, deren Quadrat kleiner als 20 ist, diese Wurzel sei z. B. $x+2$, und das Quadrat also x^2+4x+4. Wenn ich hiervon $4x+4$ abziehe, so ist klar, daß der Rest ein Quadrat sei. Wenn ich aber $2x+3$ abziehe, so bleibt ebenfalls ein Quadrat übrig, nämlich x^2+2x+1.

Daher setze ich das eine Stück $=4x+4$, das andere Stück $=2x+3$, und das gesuchte Quadrat $=x^2+4x+4$, denn nun wird der Rest in jedem Falle ein Quadrat, ich mag das eine oder das andere Stück davon abziehen.

Nun muß die Summe beider Stücke der gegebenen Zahl gleich sein, die Summe beider Stücke ist aber $6x+7$, folglich ist

$$6x+7=20.$$

Man ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$x=\frac{13}{6}.$$

Das erste Stück wird also $\frac{76}{6}$, das zweite $\frac{44}{6}$, und das gesuchte Quadrat $\frac{625}{36}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XVII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen suchen, welche ein vorgeschriebenes Verhältniß haben, und zu einem gegebenen Quadrat addirt, wieder ein Quadrat zur Summe geben.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß die größere Zahl das Dreifache der kleineren sein, und daß beide ein Quadrat geben sollen, wenn man die Quadratzahl 9 dazu addirt.

Wenn ich von irgend einem Quadrat, dessen Wurzel aus x mit einem beliebigen Coefficienten und aus 3 Einheiten besteht, die Zahl 9 abziehe, so wird der Rest die eine der gesuchten Zahlen sein. Die kleinere Zahl sei also x^2+6x, folglich die größere $3x^2+18x$. Diese Zahl soll nun auch ein Quadrat werden, wenn ich 9 dazu addire. Die Summe ist aber $3x^2+18x+9$, und diese soll ein Quadrat sein.

Ich setze die Wurzel dieses Quadrats $= 2x-3$, so wird $x = 30$. Die kleinere Zahl ist also 1080, die größere 3240, und wenn man zu beiden 9 addirt, so leisten sie, was die Aufgabe vorschreibt.

XVIII.

XVIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sie unter einander gleich werden, wenn jede an die folgende einen vorgeschriebenen aliquoten Theil, und außerdem eine vorgeschriebene Zahl abgiebt.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die erste an die zweite ein Fünftel ihres Werthes und außerdem 6, die zweite an die dritte ein Sechstel ihres Werthes und außerdem 7, die dritte an die erste ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgeben solle.

Man setze die erste Zahl $= 5x$, und die zweite $= 6x$. Wenn nun die zweite von der ersten $x + 6$ erhält, so wird sie $= 7x + 6$, und wenn sie an die dritte ein Sechstel ihres ursprünglichen Werthes, nämlich x, und außerdem 7 abgiebt, so wird sie $= 6x - 1$.

Nun müssen also die übrigen Zahlen, wenn sie das Vorgeschriebene erhalten und abgegeben haben, gleichfalls $= 6x - 1$ werden. Wenn aber die erste ein Fünftel ihres Werthes und außerdem 6 abgiebt, so bleibt $4x - 6$. Sie soll aber dadurch $6x - 1$ werden, daß sie von der dritten ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 erhält. Aber aus $4x - 6$ wird $6x - 1$, wenn $2x + 5$ hin-

zukommt. Daher ist $2x+5$ um 8 größer, als der siebente Theil der dritten Zahl. Ziehe ich also 8 von $2x+5$ ab, so ist der Rest $2x-3$ der siebente Theil der dritten Zahl, und die dritte Zahl selber ist $= 14x-21$.

Wenn endlich diese dritte Zahl von der zweiten ein Sechstel ihres Werthes und außerdem 7 erhält, und an die erste ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgiebt, so soll sie auch $= 6x-1$ werden. Wenn sie aber ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgiebt, so bleibt $12x-26$, und wenn sie ein Sechstel der zweiten Zahl $+7$ erhält, so wird sie $13x-19$. Also ist

$$13x-19 = 6x-1, \text{ folglich } x = \frac{18}{7}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{90}{7}$, die zweite $\frac{108}{7}$, die dritte $\frac{105}{7}$.

XIX. Aufgabe.

* Man soll eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beschaffenheit theilen, daß sie unter einander gleich werden, wenn jede an die nächstfolgende einen vorgeschriebenen Theil ihres Werthes und außerdem eine vorgeschriebene Zahl abgiebt.

Auflösung.

Man soll z. B. die Zahl 80 in drei andere Zahlen theilen, und von diesen soll die erste an die zweite ein

Fünftel ihres Werthes und außerdem 6, die zweite an die dritte ein Sechstel ihres Werthes und außerdem 7, die dritte an die erste ein Siebentel ihres Werthes und außerdem 8 abgeben, und dadurch sollen alle drei Zahlen unter einander gleich werden. *

Man setze die erste Zahl $= 5x$, die zweite $= 12$. Wenn nun die zweite Zahl von der ersten ein Fünftel und außerdem 6 erhält, so wird sie $= x + 18$; wenn sie aber ein Sechstel ihres anfänglichen Werthes und außerdem 7 an die dritte abgiebt, so wird sie $= x + 9$; daher müssen die beiden übrigen Zahlen, wenn sie das Vorgeschriebene gegeben und empfangen haben, ebenfalls $= x + 9$ werden.

Wenn aber die erste Zahl ein Fünftel ihres Werthes und außerdem 6 abgiebt, so bleibt $4x - 6$. Sie soll nun dadurch $= x + 9$ werden, daß sie ein Siebentel der dritten Zahl und außerdem 8 erhält, sie wird aber dadurch $x + 9$, daß sie $15 - 3x$ erhält. Daher ist $15 - 3x$ um 8 größer als der siebente Theil der dritten Zahl, und wenn ich 8 von $15 - 3x$ abziehe, so ist der Rest oder $7 - 3x$ der siebente Theil der dritten Zahl, und die dritte Zahl selbst $= 49 - 21x$.

Nun soll auch diese dritte Zahl, wenn sie von der mittelsten ein Sechstel ihres ursprünglichen Werthes und außerdem 6 erhält, und dagegen an die erste ein Siebentel ihres eigenen Werthes und außerdem 8 abgiebt, $= x + 9$ werden. Wenn sie aber das Vorgeschriebene

abgegeben und erhalten hat, so wird sie $= 43 - 18x$. Daher ist

$$x + 9 = 43 - 18x, \text{ und } x = \frac{34}{19}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{170}{19}$, die zweite $\frac{228}{19}$, die dritte $\frac{217}{19}$.

XX. Aufgabe.

Man soll drei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied des größten und mittelsten zu dem Unterschiede des mittelsten und des kleinsten ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß der erste Unterschied das Dreifache des zweiten Unterschiedes sein solle.

Man setze das kleinste der drei Quadrate $= x^2$, das zweite $= x^2 + 2x + 1$, von der Wurzel $x + 1$, so wird das dritte $= x^2 + 8x + 4$ sein.

Damit nun $= x^2 + 8x + 4$ ein Quadrat werde, so mache ich das Quadrat von x (damit ich x^2 erhalte) und von so vielen Einheiten, daß die übrigen Theile dieses Quadrats, nämlich das doppelte Produkt und die Einheiten nicht beide zugleich größer werden, als $8x$ und 4, sondern daß das eine größer, und das andere kleiner wird, [als das entsprechende Stück in der gegebenen Formel].

Ich mache also das Quadrat von $x+3$; das Quadrat selbst ist also x^2+6x+9, und nun setze ich

$$x^2+8x+4=x^2+6x+9,$$

so wird $x=2\frac{1}{2}$. Das größte Quadrat wird also $30\frac{1}{4}$, das mittelste $12\frac{1}{4}$, das kleinste $6\frac{1}{4}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die andere Zahl dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $=x$, die zweite $=2x+1$, damit das Quadrat der ersten Zahl und die zweite gewiß ein Quadrat zu ihrer Summe geben.

Nun soll aber auch das Quadrat der zweiten und die erste Zahl ein Quadrat zur Summe geben. Das Quadrat der zweiten Zahl und die erste Zahl geben aber zur Summe $4x^2+5x+1$, und dies soll ein Quadrat sein. Ich mache das Quadrat von $2x-2$, so wird

$$4x^2+5x+1=4x^2-8x+4,$$

also $x=\frac{3}{13}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{3}{13}$, die zweite $\frac{19}{13}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die andere Zahl davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

Man setze die kleinere Zahl $= x$ und einer beliebigen Anzahl von Einheiten, z. B. $= x + 1$; die größere Zahl setze man gleich dem Quadrat der kleineren, weniger x^2, damit, wenn man die größere von dem Quadrat der kleineren abzieht, der Rest gewiß ein Quadrat werde. Da nun das Quadrat der kleineren Zahl $= x^2 + 2x + 1$, so sei die größere $= 2x + 1$, und nun fällt es in die Augen, daß die größere Zahl, von dem Quadrat der kleineren abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reste läßt.

Nun soll aber auch das Quadrat der größeren, oder $4x^2 + 4x + 1$, nach Abzug der kleineren Zahl ein Quadrat sein. Der Rest aber ist $4x^2 + 3x$, und dieser soll also ein Quadrat sein. Ich nehme $3x$ als Wurzel dieses Quadrats an, so wird

$$9x^2 = 4x^2 + 3x, \text{ also } x = \frac{3}{5}.$$

Die kleinere Zahl ist also $\frac{8}{5}$, die größere $\frac{11}{5}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXIII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

Auflösung.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= x+1$, damit das Quadrat der kleineren, nämlich x^2, zu der Summe beider Zahlen oder zu $2x+1$ addirt, gewiß ein Quadrat zur Summe gebe.

Nun soll auch das Quadrat der größeren, zur Summe beider Zahlen addirt, ein Quadrat geben. Aber das Quadrat der größeren zur Summe beider Zahlen addirt, giebt x^2+4x+2, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Ich sehe $x-2$ als die Wurzel dieses Quadrats an, so ist

$$x^2+4x+2 = x^2-4x+4,$$

folglich wird $x = \frac{2}{8}$.

Die kleinere Zahl ist also $\frac{2}{8}$, die größere $\frac{10}{8}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXIV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden, wenn man die Summe beider Zahlen davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

Man setze die kleinere Zahl $= x$, die größere $= x+1$, damit das Quadrat der größeren, um die Summe der Zahlen vermindert, gewiß ein Quadrat bleibe.

Nun soll aber auch das Quadrat der kleineren, um die Summe der Zahlen vermindert, ein Quadrat geben, also $x^2 - 2x - 1$ soll ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $= x - 3$, so wird

$$x^2 - 2x - 1 = x^2 - 6x + 9, \text{ und } x = 2\tfrac{1}{2}.$$

Die kleinere Zahl ist also $2\frac{1}{2}$, die größere $3\frac{1}{2}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die eine oder die andere Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Da x^2, sowohl wenn man $3x^2$, als wenn man $8x^2$ dazu addirt, wieder ein Quadrat wird, so setze ich die eine Zahl $= 3x^2$, die andere Zahl $= 8x^2$, das Quadrat der Summe dieser Zahlen aber setze ich $= x^2$, denn so giebt die Summe der Zahlen, zu einer jeden dieser Zahlen addirt, gewiß ein Quadrat.

Die Summe der Zahlen macht aber $11x^2$, und das Quadrat der Summe ist also $= 121x^4$, das Quadrat der Summe ist aber auch $= x^2$, folglich ist

$$121x^4 = x^2.$$

Nun müssen auch die Wurzeln beider Zahlen gleich sein, folglich ist

$$11x^2 = x.$$

Man dividire alles durch die unbekannte Größe x, so wird

$$11x = 1, \text{ und } x = \frac{1}{11}.$$

Die kleinere Zahl ist also $\frac{3}{121}$, die größere $\frac{8}{121}$, das Quadrat der Summe aber ist $\frac{121}{14641}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXVI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch

dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die eine oder die andere Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Ich nehme zuerst ein beliebiges Quadrat, und ziehe von demselben zwei Zahlen ab, die ich so wähle, daß beide Reste Quadrate sind. Ich nehme z. B. 16, denn wenn ich davon das eine Mal 12, das andere Mal 7 abziehe, so bleibt in beiden Fällen ein Quadrat zum Reste.

Nun drücke ich die gesuchten Zahlen durch x^2 aus, die eine setze ich $= 12x^2$, die andere $= 7x^2$, und das Quadrat der Summe $= 16x^2$, denn so wird der Rest gewiß ein Quadrat sein, wenn ich eine der Zahlen von dem Quadrat ihrer Summe abziehe.

Nun soll das Quadrat der Summe, oder das Quadrat von $19x^2 = 16x^2$ sein, folglich müssen auch die Wurzeln dieser Zahlen gleich sein. Es ist also

$$19x^2 = 4x, \text{ und } x = \frac{4}{19}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{192}{361}$, die zweite $\frac{112}{361}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXVII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt derselben, wenn man die

eine oder die andere von beiden Zahl dazu addirt, in beiden Fällen ein Quadrat zur Summe giebt, die Summe der Wurzeln aber einer vorgeschriebenen Zahl gleich wird.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß die Summe beider Wurzeln $= 6$ sein solle.

Wenn man zwei Zahlen hat, wovon die eine das Vierfache der anderen weniger 1 ist, so giebt das Produkt dieser Zahlen, zu der kleineren Zahl addirt, alle Mal ein Quadrat zur Summe. Ich setze daher die kleinere Zahl $= x$, die größere $= 4x - 1$, denn nun trifft es zu, daß das Produkt der beiden Zahlen, wenn man die kleinere Zahl dazu addirt, ein Quadrat wird.

Nun soll aber auch eben dies Produkt, wenn man die größere Zahl oder $4x - 1$ dazu addirt, ein Quadrat werden, und die Wurzel dieses Quadrats soll 6 weniger der Wurzel des kleineren Quadrates, oder $6 - 2x$ sein, damit, der Aufgabe gemäß, die Summe der Wurzeln $= 6$ sei. Aber das Produkt der beiden Zahlen, zu der größern addirt, giebt $4x^2 + 3x - 1$, das Quadrat von $6 - 2x$ aber ist $4x^2 - 24x + 36$. Es ist also

$$4x^2 + 3x - 1 = 4x^2 - 24x + 36, \text{ und } x = \frac{37}{27}.$$

Die kleinere Zahl hatten wir $= x$ gesetzt, und diese Zahl ist also $\frac{37}{27}$, die größere hatten wir $= 4x - 1$ ge-

setzt, diese wird also $\frac{121}{27}$, und so werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

XXVIII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt, wenn man die eine oder die andere Zahl davon abzieht, in beiden Fällen ein Quadrat zum Reste läßt, die Summe der Wurzeln aber einer gegebenen Zahl gleich wird.

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß die Summe der Wurzeln $= 5$ sei.

Wenn man zwei Zahlen hat, deren eine um 1 größer ist, als das Vierfache der andern, so wird ihr Produkt gewiß ein Quadrat werden, wenn man die kleinere Zahl davon abzieht. Ich setze also die größere Zahl $= 4x + 1$, und die kleinere $= x$, so giebt ihr Produkt, wenn man die kleinere Zahl davon abzieht, zum Reste $4x^2$, und dies ist ein Quadrat, dessen Wurzel $2x$ ist.

Nun soll aber eben dies Produkt, auch wenn man die größere Zahl davon abzieht, ein Quadrat werden, und die Summe der Wurzeln soll die vorgeschriebene Zahl 5 sein. Aber wenn man von dem Produkt der bei-

den Zahlen die größere abzieht, so erhält man $4x^2-3x-1$, und dies soll das Quadrat von der Wurzel $5-2x$ sein. Es ist also

$$4x^2-3x-1=4x^2-20x+25, \text{ und } x=\frac{26}{17}.$$

Die kleinere Zahl ist also $\frac{26}{17}$, die größere $\frac{121}{17}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXIX. Aufgabe.

Man soll zwei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man die eine oder die andere der beiden Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Wenn ich die eine Zahl $=x^2$, die andere $=1$ setze, so ist ihr Produkt ebenfalls $=x^2$, also eine Quadratzahl. Dieses Produkt soll aber auch dann noch eine Quadratzahl sein, wenn man die eine oder die andere der beiden Zahlen dazu addirt. Wir müssen also zuerst ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 1 dazu addirt.

Zu diesem Ende setze man das Quadrat, welches das Produkt beider Zahlen sein soll, $=x^2$. Addirt man dazu 1, so erhält man x^2+1, und diese Zahl soll ein

Quadrat sein. Ich setze die Wurzel dieses Quadrats $= x-2$, so wird

$$x^2+1=x^2-4x+4, \text{ und } x=\frac{3}{4}.$$

Das eine Quadrat ist also $\frac{9}{16}$, das zweite $\frac{16}{16}$, und nun trifft es zu, daß das Produkt derselben, um 1 vermehrt, ein Quadrat wird.

Nun soll aber dasselbe Produkt, wenn man die andere Zahl dazu addirt, ebenfalls ein Quadrat werden, und da dies Produkt $\frac{9}{16}$ ist, so drücke man die gesuchte Zahl durch x^2 aus; es soll also $\frac{9}{16}x^2+\frac{9}{16}$, oder wenn man alles durch 16 multiplicirt, $9x^2+9$, ein Quadrat sein; man setze daher die Wurzel $= 3x-4$, und das Quadrat selbst $= 9x^2-24x+16$. Man hat also

$$9x^2+9=9x^2-24x+16, \text{ und } x=\frac{7}{24}.$$

Das erste der gesuchten Quadrate ist also $\frac{324}{576}$, das zweite $\frac{49}{576}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXX. Aufgabe.

Man soll zwei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt auch dann noch ein

Quadrat bleibt, wenn man das eine oder das andere der beiden Quadrate davon abzieht.

Auflösung.

Wenn ich das eine Quadrat $= x^2$, und das andere $= 1$ setze, so ist ihr Produkt $= x^2$, und nun soll $x^2 - 1$ ein Quadrat sein; x^2 aber ist an sich schon ein Quadrat, wir müssen daher zuerst ein Quadrat suchen, welches um 1 vermindert wieder ein Quadrat wird. Ein solches Quadrat ist aber $\frac{25}{16}$, denn wenn man von diesem 1 oder $\frac{16}{16}$ abzieht, so bleibt die Quadratzahl $\frac{9}{16}$.

Ich setze also das eine der gesuchten Quadrate $= x^2$, das andere $= \frac{25}{16}$, denn wenn ich nun von dem Produkte beider x^2 abziehe, so bleibt das Quadrat $\frac{9}{16}x^2$ übrig. Nun soll aber auch eben dies Produkt, wenn ich $\frac{25}{16}$ davon abziehe, noch immer ein Quadrat bleiben. Aber wenn ich von dem Produkte $\frac{25}{16}$ abziehe, so bleibt $\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{16}$, und dies soll ein Quadrat sein. Man multiplicire alles mit 16, und dividire darauf durch 25, so kommt $x^2 - 1$, und diese Zahl soll ein Quadrat sein. Ich nehme $x - 4$ als Wurzel an, so wird

$$x^2 - 1 = x^2 - 8x + 16, \text{ und } x = \frac{17}{8}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{289}{64}$, die zweite $\frac{100}{64}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, man mag die Summe der Zahlen dazu addiren, oder davon abziehen.

Auflösung.

Da die Summe zweier beliebigen Quadrate alle Mal ein Quadrat wird, wenn man das doppelte Produkt der Wurzeln davon abzieht oder dazu addirt, so nehme ich zwei beliebige Zahlen, z. B. 2 und 3, und nun ist Folgendes klar: wenn ich zu der Summe ihrer Quadrate das doppelte Produkt der beiden Zahlen addire, so erhalte ich das Quadrat 25, und wenn ich von der Summe ihrer Quadrate das doppelte Produkt der Zahlen abziehe, so erhalte ich das Quadrat 1.

Daher setze ich das Produkt der beiden Zahlen $= 13x^2$, und zwar die eine $= x$, die andere $= 13x$, denn diese beiden Factoren geben $13x^2$ zum Produkte. Aber $13x^2$ wird ein Quadrat, ich mag $12x^2$ dazu addiren oder eben diese Größe davon abziehen, daher setze ich die

Summe

Summe beider Zahlen $= 12x^2$. Aber die Summe beider Zahlen ist auch $= 14x^2$, daher ist

$$12x^2 = 14x, \text{ und } x = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}.$$

Die erste Zahl war $= x$, diese ist also $\frac{7}{6}$, die zweite Zahl war $= 13x$, diese wird also $\frac{91}{6}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß nicht nur ihre Summe ein Quadrat ist, sondern daß auch ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man die Summe derselben dazu addirt, oder davon abzieht.

Auflösung.

Wenn man zwei Zahlen hat, deren eine das Doppelte der anderen ist, so ist nicht bloß das doppelte Produkt derselben ein Quadrat, sondern die Summe ihrer Quadrate wird auch ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt davon abzieht, oder dazu addirt.

Wir nehmen also die Zahlen 4 und 2, so ist klar, daß ihr doppeltes Produkt 16 eine Quadratzahl ist, und daß die Summe ihrer Quadrate, nämlich 20, wenn man das doppelte Produkt dazu addirt, oder davon abzieht.

in dem einen Falle die Quadratzahl 36, in dem anderen die Quadratzahl 4 giebt.

Man drücke nun die gesuchten Zahlen durch das Quadrat der unbekannten Größe aus. Das Produkt der beiden Zahlen sei $= 20x^2$, und die Summe derselben $= 16x^2$, die eine Zahl selber sei $= 2x$, die andere $= 10x$. Nun ist die Summe der Zahlen das eine Mal $= 12x$, und dann auch der Annahme nach $= 16x^2$. Man hat also die Gleichung

$$16x^2 = 12x, \text{ und } x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Die eine Zahl ist also $\frac{6}{4}$, die andere $\frac{30}{4}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die nächstfolgende Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $= x$. Wenn aber eine Zahl das Doppelte einer andern $+1$ ist, so giebt das Quadrat der kleineren, mit der größeren Zahl zusammen genommen, wieder ein Quadrat zur Summe. Daher setze man die zweite Zahl um 1 größer, als das Doppelte der er-

sten, also $= 2x + 1$, die dritte Zahl aber setze man um 1 größer, als das Doppelte der zweiten, also $= 4x + 3$, und nun trifft es schon zu, daß das Quadrat der ersten, mit der zweiten Zahl zusammen genommen, ein Quadrat, nämlich $x^2 + 2x + 1$ zur Summe giebt; ferner, daß das Quadrat der zweiten mit der dritten Zahl zusammen genommen, auch ein Quadrat giebt, nämlich $4x^2 + 8x + 4$.

Nun soll auch das Quadrat der dritten mit der ersten Zahl zusammen genommen, ein Quadrat zur Summe geben. Aber das Quadrat der dritten Zahl mit der ersten Zahl zusammen genommen, giebt $16x^2 + 25x + 9$, und diese Formel soll ein Quadrat sein. Ich nehme $4x - 4$ als Wurzel an, so wird

$$16x^2 + 25x + 9 = 16x^2 - 32x + 16, \text{ und } x = \frac{7}{57}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{7}{57}$, die zweite $\frac{71}{57}$, die dritte $\frac{199}{57}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXIV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die nächstfolgende Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Wenn eine Zahl das Doppelte der anderen weniger 1 ist, so giebt das Quadrat der kleineren Zahl, wenn man die größere davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste. Ich setze daher die erste Zahl $= x+1$, die zweite $= 2x+1$, die dritte $= 4x+1$, und nun treffen schon zwei Bedingungen zu, nämlich, wenn man von dem Quadrat der ersten die zweite Zahl abzieht, oder von dem Quadrat der zweiten die dritte Zahl abzieht, so wird der Rest in beiden Fällen ein Quadrat.

Nun soll aber auch das Quadrat der dritten, wenn man die erste Zahl davon abzieht, ein Quadrat zum Reste lassen. Das Quadrat der dritten Zahl, weniger die erste, ist $= 16x^2+7x$, und diese Formel soll auch ein Quadrat sein. Ich sehe $5x$ als die Wurzel dieses Quadrats an, so wird

$$25x^2 = 16x^2+7x, \text{ und } x = \frac{7}{9}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{16}{9}$, die zweite $\frac{23}{9}$, die dritte $\frac{37}{9}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden auch

dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Wenn man eine aus zwei Factoren bestehende Zahl hat, und den kleineren Factor von dem größeren abzieht, die Hälfte des Restes ins Quadrat erhebt, und die zuerst genommene Zahl dazu addirt, so wird die Summe alle Mal ein Quadrat sein.

Ich setze daher die Summe der drei Zahlen einem gewissen Vielfachen von x^2 gleich, welches auf drei Arten in zwei Factoren zerfällt werden kann, z. B. $= 12x^2$, denn 12 hat die Factoren 1×12, 2×6, und 3×4. Nun ziehe ich den kleineren Factor von dem größeren ab, nehme von dem Rest die Hälfte, und setze die erste Zahl $= 5\frac{1}{2}$, die zweite $= 2$, die dritte $= \frac{1}{2}$, und aus dem angeführten Satze ist klar, daß die Quadrate dieser Zahlen, wenn man 12 dazu addirt, wieder Quadrate werden, nämlich $12\frac{1}{2}$, 16 und $42\frac{1}{4}$.

Nun drücke ich die drei Zahlen durch die obigen Coefficienten, und durch eine unbekannte Größe aus, die erste Zahl sei also $= 5\frac{1}{2}x$, die zweite $= 2x$, die

dritte $= \frac{1}{2}x$. Die Summe aller dieser Zahlen soll $12x^2$ sein, sie ist aber auch $= 8x$, folglich ist

$$12x^2 = 8x, \text{ und } x = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{22}{6}$, die zweite $\frac{8}{6}$, die dritte $\frac{2}{6}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXXVI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat einer jeden auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Ich nehme, gerade wie in der vorigen Aufgabe, eine Zahl, welche sich auf drei Arten in Factoren zerfällen läßt. Diese Zahl sei wiederum 12. Nun addire ich die zusammen gehörigen Factoren, und nehme die Hälfte der Summe, und setze die erste Zahl $= 6\frac{1}{2}x$, die zweite $= 4x$, die dritte $= 3\frac{1}{2}x$, und diese Zahlen haben die Eigenschaft, daß ihre Quadrate, wenn man $12x^2$ davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste geben.

Nun setze ich die Summe der Quadrate $= 12x^2$, diese Summe ist aber auch $= 14x$, man hat also die Gleichung

$$12x^2 = 14x, \text{ und } x = \frac{7}{6}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{45\frac{1}{2}}{6}$ oder $\frac{91}{12}$, die zweite $\frac{28}{6}$, die dritte $\frac{24\frac{1}{2}}{6}$ oder $\frac{49}{12}$.

Drittes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe derselben ein Quadrat wird, wenn man das Quadrat jedweder Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Man nehme zwei Quadrate, das eine von der Wurzel x, das andere von der Wurzel 2x, so ist die Summe ihrer Quadrate $= 5x^2$. Ich setze nun die Summe der drei Zahlen $= 5x^2$, die erste der gesuchten Zahlen $= x$, die zweite $= 2x$, wodurch bereits zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

Da wir hier die Zahl 5 haben, welche die Summe der beiden Quadratzahlen 1 und 4 ist, so theile man

diese Zahl noch ein Mal, durch das oben erläuterte Verfahren, in zwei andere Quadrate, nämlich in $\frac{4}{25}$ und $\frac{121}{25}$. Nun setze ich die dritte Zahl der Wurzel eines dieser Quadrate gleich, z. B. $= \frac{2}{5}x$, denn das Quadrat dieser Zahl, von der Summe aller drei Zahlen abgezogen, läßt ebenfalls ein Quadrat nämlich $\frac{121}{25}x^2$ zum Reste.

Nun soll die Summe der drei Zahlen $= 5x^2$ sein, diese Summe aber ist auch $= 3\frac{2}{5}x$, daher ist

$$5x^2 = \frac{17}{5}x, \text{ und } x = \frac{17}{25} = \frac{85}{125}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{85}{125}$, die zweite $\frac{170}{125}$, die dritte $\frac{34}{125}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

II. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwede Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Man setze das Quadrat der Summe aller drei Zahlen $= x^2$, die erste derselben $= 3x^2$, die zweite $= 8x^2$,

die dritte $= 15x^2$, damit das Quadrat der Summe, oder x^2 auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man jedwede dieser drei Zahlen dazu addirt, im ersten Falle nämlich $4x^2$, im zweiten $9x^2$, im dritten $16x^2$.

Nun muß aber auch die Summe der drei Zahlen der Wurzel von dem Quadrat ihrer Summe, d. h. der unbekannten Zahl x, gleich sein. Aber die Summe der drei Zahlen ist $26x^2$, daher ist

$$26x^2 = x, \text{ und } x = \frac{1}{26}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{3}{676}$, die zweite $\frac{8}{676}$, die dritte $\frac{15}{676}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

III. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen $= 4x$, also das Quadrat der Summe $= 16x^2$. Dieser Ausdruck bleibt ein Quadrat, man mag $7x^2$, oder $12x^2$, oder

$15x^2$ davon abziehen. Daher setze ich die erste Zahl $= 7x^2$, die zweite $= 12x^2$, die dritte $= 15x^2$.

Nun muß die Summe dieser drei Zahlen der Summe der drei gesuchten Zahlen gleich sein. Die Summe der drei gesuchten Zahlen ist $= 4x$ gesetzt worden, die Summe der hier angenommenen drei Zahlen ist aber $34x^2$. Daher ist

$$34x^2 = 4x,\ x = \frac{2}{17},\ x^2 = \frac{4}{289}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{28}{289}$, die zweite $\frac{48}{289}$, die dritte $\frac{60}{289}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

IV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat ihrer Summe von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen $= x$, also das Quadrat ihrer Summe $= x^2$, die drei Zahlen aber setze man der Reihe nach $2x^2$, $5x^2$, $10x^2$, denn so bleibt immer ein Quadrat übrig, wenn man das Quadrat der Summe oder x^2 von einer dieser Zahlen abzieht. Und da das Quadrat der Summe eine rationale

Zahl zur Wurzel hat, so ist klar, daß diese Wurzel mit der Summe der drei angenommenen Zahlen gleich sein muß. Die Summe der drei Zahlen ist $= x$, sie ist aber auch $= 17x^2$, daher ist

$$17x^2 = x, \quad x = \frac{1}{17}, \quad x^2 = \frac{1}{289}.$$

Daher ist die erste Zahl $\frac{2}{289}$, die zweite $\frac{5}{289}$, die dritte $\frac{10}{289}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

V. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen suchen, deren Summe ein Quadrat ist, und welche die Eigenschaft haben, daß die Summe von je zweien um eine Quadratzahl größer ist, als die dritte.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen, welche ein Quadrat sein soll, $= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, und die Summe der ersten und der zweiten möge um 1 größer sein, als die dritte, die dritte Zahl ist also $= \frac{1}{2}x^2 + x$, denn auf diese Weise wird die Summe der ersten und zweiten Zahl um 1 größer werden, als die dritte. Die Summe der zweiten und dritten Zahl soll ebenfalls um eine Quadratzahl größer sein, als die erste, z. B. um

x^2; daher ist die erste Zahl $= x + \frac{1}{2}$; der Rest aber ist die zweite Zahl, und diese ist also $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Endlich soll auch die Summe der ersten und dritten Zahl um eine Quadratzahl größer sein, als die zweite. Aber der Ueberschuß der ersten und dritten Zahl über die zweite ist $2x$, und dieser Ueberschuß soll ein Quadrat sein. Man setze also

$$2x = 16, \text{ so wird } x = 8.$$

Die erste Zahl ist also $8\frac{1}{2}$, die zweite $32\frac{1}{2}$, und die dritte 40, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

VI.

Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe.

Ich suche zuerst drei Quadratzahlen, deren Summe auch ein Quadrat ist. Wenn ich aber die Quadratzahlen 4 und 9 addire, und nun frage, welches Quadrat, um 13 vermehrt, wieder ein Quadrat giebt, so finde ich 36, denn die Summe dieser drei Zahlen giebt wieder ein Quadrat 49.

Nunmehr beruht die Auflösung darauf, daß wir drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von je zweien um eine gegebene Zahl größer sei, als die dritte, nämlich in unserem Falle muß die Summe

der ersten und zweiten um 4 größer sein, als die dritte, die Summe der zweiten und dritten um 9 größer als die erste, und die Summe der ersten und dritten um 36 größer als die zweite.

Wie diese Aufgabe zu lösen sei, ist oben gezeigt worden, und man erhält für die erste Zahl 20, für die zweite $9\frac{1}{2}$, für die dritte $22\frac{1}{2}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

VII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Summe von allen dreien als die Summe von je zweien ein Quadrat sei.

Auflösung.

Man setze die Summe von allen drei Zahlen, weil dieselbe ein Quadrat sein soll, $= x^2 + 2x + 1$, auch sei die Summe der ersten und der zweiten Zahl $= x^2$, so wird die dritte $= 2x + 1$.

Die Summe der zweiten und der dritten Zahl setze man $= x^2 - 2x + 1$, von der Wurzel $x - 1$. Wenn nun die Summe von allen drei Zahlen $= x^2 + 2x + 1$ sein soll, so wird die erste Zahl $= 4x$ sein müssen. Die Summe der ersten und zweiten haben wir $= x^2$ gesetzt, folglich muß die zweite Zahl $= x^2 - 4x$ sein.

Nun soll auch die Summe der ersten und der dritten Zahl, d. i. $6x+1$ ein Quadrat sein. Man setze daher

$$6x+1=121, \text{ so wird } x=20.$$

Die erste Zahl ist also 80, die zweite 320, die dritte 41, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

VIII.

Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe.

Man setze die Summe der drei Zahlen $=x^2+2x+1$, und die Summe der ersten und zweiten $=x^2$, so ist die dritte Zahl gleich dem Reste $2x+1$.

Es sei ferner die Summe der zweiten und dritten Zahl $=x^2-2x+1$, und da die dritte $2x+1$ war, so ziehe man diese von der vorigen Summe ab, um die zweite zu erhalten, die zweite Zahl wird also $=x^2-4x$.

Die Summe der ersten und der dritten Zahl war $=x^2$, die zweite aber $=x^2-4x$, folglich ist die erste Zahl $=4x$.

Nun giebt die Summe aller drei Zahlen wirklich die angenommene Quadratzahl x^2+2x+1, auch ist die Summe der ersten und zweiten, ferner die Summe der zweiten und der dritten Zahl wirklich eine Quadratzahl. Es soll aber auch die Summe der ersten und der dritten Zahl, d. i. $6x+1$ ein Quadrat sein.

Man setze also $6x+1=36$, so ist $x=\frac{35}{6}$, daher wird die erste Zahl $\frac{140}{6}=\frac{840}{36}$, die zweite $\frac{385}{36}$, die dritte $\frac{456}{36}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

IX. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen suchen, deren Unterschiede der Reihe nach gleich sind, und welche zugleich die Beschaffenheit haben, daß die Summe von je zweien ein Quadrat ist.

Auflösung.

Ich suche zuerst drei Quadratzahlen, deren Unterschiede der Reihe nach gleich sind, und deren halbe Summe größer ist, als jedes der drei Quadrate einzeln genommen.

Ich setze also das erste Quadrat $=x^2$, das zweite $=x^2+2x+1$; der Unterschied beider ist $=2x+1$, wenn ich aber $2x+1$ zu dem zweiten Quadrat addire, so wird das dritte $=x^2+4x+2$. Diesen Ausdruck setze man einem Quadrat von der Wurzel $x-8$ gleich, so wird

$$x^2+4x+2=x^2-16x+64, \text{ und } x=\frac{62}{20}=\frac{31}{10}.$$

Das

Das erste der drei Quadrate ist also 961, das zweite 1681, das dritte 2401, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt; denn es sind drei Quadrate, deren Unterschiede der Reihe nach gleich sind, und die halbe Summe derselben ist größer, als jedes derselben einzeln genommen.

Nun komme ich wieder zu der ursprünglichen Aufgabe, nämlich drei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß ihre Unterschiede der Reihe nach gleich, die Summe von je zweien aber ein Quadrat ist. Ich suche nämlich zuerst drei Quadrate, deren Unterschiede der Reihe nach gleich sind; dies ist aber so eben gezeigt worden, und das erste der gesuchten Quadrate war 961, das zweite 1681, das dritte 2401. Nun müssen wir aber sehen, auf welche Weise die Summe der ersten und der zweiten Zahl, die wir suchen, = 961, die Summe der zweiten und dritten = 2401, die Summe der ersten und dritten = 1681 werde; denn wegen der gleichen Unterschiede muß man die Ordnung umkehren, und die Summe der ersten und dritten = 1681 setzen.

Man setze die Summe der drei Zahlen = x; ziehe ich davon die Summe der ersten und zweiten Zahl, nämlich 961 ab, so ist die dritte Zahl = x — 961; ziehe ich von x die Summe der zweiten und dritten Zahl, nämlich 2401 ab, so habe ich die erste Zahl = x — 2401; ziehe ich endlich von x die Summe der ersten und dritten Zahl, nämlich 1681 ab, so habe ich die zweite Zahl = x — 1681.

Nun soll die Summe aller drei Zahlen $= x$ sein, das heißt

$$3x - 4043 = x, \text{ folglich wird } x = 2521\tfrac{1}{2},$$

und so ist das Verlangte geschehen.

X. Aufgabe.

Man soll zu einer gegebenen Zahl drei andere von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Summe von je zweien, als auch die Summe von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 3, die Summe der beiden ersten Zahlen, welche man sucht, sei $= x^2 + 4x + 1$, damit sie ein Quadrat werde, sobald man 3 dazu addirt; die Summe der beiden folgenden Zahlen sei $= x^2 + 6x + 6$, die Summe von aller dreien aber $= x^2 + 8x + 13$, damit auch diese Ausdrücke Quadrate werden, sobald man 3 dazu addirt.

Da nun die Summe der drei Zahlen $= x^2 + 8x + 13$, die Summe der beiden ersten aber $= x^2 + 4x + 1$ ist, so giebt der Rest die dritte Zahl $= 4x + 12$.

Ferner, da die Summe aller drei Zahlen $= x^2 + 8x + 13$, die Summe der zweiten und dritten aber $= x^2 + 6x + 6$ ist, so giebt der Rest die erste Zahl $= 2x + 7$.

Die Summe der ersten und zweiten Zahl ist $= x^2 + 4x + 1$, zieht man davon die erste Zahl oder $2x + 7$ ab, so erhält man die zweite Zahl $= x^2 + 2x - 6$.

Nun soll auch die Summe der ersten und dritten Zahl, wenn man 3 dazu addirt, ein Quadrat werden. Wenn man aber zu der Summe der ersten und dritten Zahl 3 addirt, so erhält man $6x + 22$, und dies soll ein Quadrat sein. Man setze also

$$6x + 22 = 100,$$

so wird $x = 13$.

Die erste Zahl ist also 33, die zweite 189, die dritte 64, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XI. Aufgabe.

Man soll zu einer gegebenen Zahl drei andere von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Summe von je zweien, als die Summe von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei wiederum 3, die Summe der beiden ersten gesuchten Zahlen sei $= x^2 + 3$, damit dieser Ausdruck ein Quadrat werde, wenn man 3 davon abzieht; ferner sei die Summe der zweiten und dritten Zahl $= x^2 + 2x + 4$, und die Summe aller drei Zahlen

$= x^2 + 4x + 7$, damit auch diese Ausdrücke Quadrate werden, wenn man 3 davon abzieht.

Da nun die Summe der drei Zahlen $= x^2 + 4x + 7$, die Summe der ersten und zweiten Zahl aber $= x^2 + 3$ ist, so giebt der Rest die dritte Zahl $= 4x + 4$.

Da ferner die Summe der zweiten und der dritten Zahl $= x^2 + 2x + 4$, die dritte Zahl aber $= 4x + 4$ ist, so giebt der Rest die zweite Zahl $= x^2 - 2x$.

Da endlich die Summe der ersten und zweiten Zahl $= x^2 + 3$, die zweite aber $= x^2 - 2x$ ist, so wird die erste Zahl $= 2x + 3$.

Nun soll auch die Summe der zweiten und dritten Zahl, wenn man 3 davon abzieht, ein Quadrat werden; wenn man aber von der Summe der zweiten und dritten Zahl 3 abzieht, so erhält man $6x + 4$, und dies soll ein Quadrat sein. Man setze also

$$6x + 4 = 64, \text{ so wird } x = 10.$$

Die erste Zahl ist also 23, die zweite 80, die dritte 44, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man eine gegebene Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 12. Es wird zuerst verlangt, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl, wenn man 12 dazu addirt, ein Quadrat werde; ich ziehe daher von einem beliebigen Quadrat die gegebene Zahl 12 ab, und erhalte dadurch das Produkt der ersten und zweiten Zahl. Ich nehme z. B. 25; ziehe ich davon 12 ab, so habe ich das Produkt der ersten und zweiten Zahl, nämlich 13. Die erste Zahl sei also 13, die zweite 1. Man mache diese Zahlen aber zu Coefficienten einer unbekannten Größe, jedoch so, daß ihr Produkt 13 sei; die erste Zahl sei also $= 13x$, und die zweite $= \frac{1}{x}$.

Wenn ich nun von einem anderen Quadrate 12 abziehe, so habe ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Ich ziehe z. B. 12 von dem Quadrat 16 ab, so ist 4 das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Man drücke die beiden Factoren wieder vermittelst der unbekannten Größe aus, jedoch so, daß ihr Produkt 4 wird. Die zweite Zahl war aber $= \frac{1}{x}$, folglich muß die dritte $= 4x$ sein.

Nun soll auch das Produkt der ersten und der dritten Zahl, wenn man 12 dazu addirt, ein Quadrat werden; aber das Produkt der ersten und dritten Zahl ist $52x^2$, folglich soll $52x^2 + 12$ ein Quadrat sein. Wenn nun die Zahl 13, oder der Coefficient der ersten Zahl

ein Quadrat wäre, so wäre die Gleichung ganz leicht; da dies aber nicht der Fall ist, so muß ich zuerst zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat sei, und außerdem jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man 12 dazu addirt. Wenn ich aber für die gesuchten Zahlen ein Paar Quadratzahlen suche, so wird ihr Produkt gewiß ein Quadrat sein. Es ist also nur nöthig, zwei Quadratzahlen zu suchen, deren jede wieder ein Quadrat wird, wenn man 12 dazu addirt. Dies ist aber leicht, und es hat wie gesagt, keine Schwierigkeit die Gleichung aufzulösen. Das eine Quadrat ist nämlich 4, das andere $\frac{1}{4}$, denn beide geben ein Quadrat, wenn man 12 dazu addirt.

Nachdem wir dies gefunden haben, so kehre ich wieder zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setze die erste Zahl $= 4x$, die zweite $= \frac{1}{x}$, die dritte $= \frac{1}{4}x$.

Nun soll aber das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man 12 dazu addirt, auch ein Quadrat sein, aber das Produkt der ersten und dritten Zahl ist x^2, folglich soll $x^2 + 12$ ein Quadrat sein. Ich nehme $x+3$ als die Wurzel dieses Quadrats an, so wird

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 12, \text{ und } x = \frac{3}{6}.$$

Und so ist das Verlangte geschehen.

XIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien wieder ein Quadrat wird, wenn man eine gegebene Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 10. Es wird zuerst verlangt, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, wenn man 10 davon abzieht; wir addiren daher zu irgend einem Quadrate die Zahl 10, und erhalten dadurch das Produkt der ersten und zweiten Zahl. Man nehme z. B. das Quadrat 4, so ist das Produkt der ersten und zweiten Zahl 14. Die erste Zahl sei also 14, die zweite 1. Man mache diese Zahlen wieder zu Coefficienten einer unbekannten Größe, jedoch so, daß ihr Produkt 14 sei; die erste Zahl sei also $= 14x$, die zweite $= \frac{1}{x}$.

Wenn ich nun zu einem anderen Quadrate ebenfalls 10 addire, so habe ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Man nehme das Quadrat 9, so ist das Produkt der zweiten und dritten Zahl $= 19$; da nun die zweite Zahl $\frac{1}{x}$ war, so muß die dritte $= 19x$ sein.

Nun soll auch das Produkt der ersten und dritten Zahl ein Quadrat werden, wenn man 10 davon abzieht; diese Rechnung giebt aber $266x^2 - 10$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Daher muß ich aus den bei der vorigen Aufgabe angeführten Gründen erst zwei Quadrate suchen, deren jedes wieder ein Quadrat wird, wenn man 10 davon abzieht. Dies ist aber ganz leicht, denn man darf nur untersuchen, welches Quadrat auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 10 davon abzieht.

Wenn ich aber zu einer beliebigen Zahl 1 addire, die Hälfte der Summe ins Quadrat erhebe und von dem so entstandenen Quadrate die zuerst genommene Zahl abziehe, so ist der Rest wieder ein Quadrat. Ich addire also 1 zu 10, die Hälfte der Summe oder $5\frac{1}{2}$ erhebe ich ins Quadrat, dies giebt $30\frac{1}{4}$, davon ziehe ich 10 ab, so erhalte ich $20\frac{1}{4}$, ein Quadrat, dessen Wurzel $4\frac{1}{2}$ ist.

Ich setze also die erste Zahl $= 30\frac{1}{4}$, die dritte $= x^2$. Nun soll also auch $x^2 - 10$ ein Quadrat sein; ich sehe $x - 2$ als die Wurzel dieses Quadrats an, so wird

$$x^2 - 10 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Die dritte Zahl also, welche ich $= x^2$ gesetzt hatte, wird $\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$; die erste aber ist $= 30\frac{1}{4}$, und beide las-

sen, ein Quadrat zum Reste, wenn man 10 davon abzieht.

Nun komme ich wieder auf die ursprüngliche Aufgabe, und setze die erste Zahl $= 30\frac{1}{4}x$, die zweite $= \frac{1}{x}$, die dritte $= 12\frac{1}{4}x$. Es soll also noch das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man 10 davon abzieht, ein Quadrat werden. Dies Produkt ist aber $370\frac{1}{2} \times \frac{1}{16}x^2$ oder $\frac{5929}{16}x^2$, also soll $\frac{5929}{16}x^2$ ein Quadrat werden, wenn man 10 davon abzieht. Damit aber die Brüche weggeschafft werden, so multiplicire ich diese Zahl mit der Quadratzahl 16, so muß auch $5929x^2 - 160$ ein Quadrat sein. Ich setze daher

$$5929x^2 - 160 = (77x - 2)^2 = 5929x^2 - 308x + 4,$$

so wird $x = \frac{41}{77}$.

Die erste Zahl hatten wir $= 30\frac{1}{4}x$ gesetzt, diese ist also $\frac{1240\frac{1}{4}}{77}$, die zweite hatten wir $= \frac{1}{x}$ gesetzt, diese ist also $\frac{77}{41}$, die dritte Zahl hatten wir $= 12\frac{1}{4}x$ gesetzt, diese ist also $\frac{502\frac{1}{4}}{77}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XIV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien wieder ein Quadrat wird, wenn man die dritte dazu addirt.

Auflösung.

Wir verlangen zuerst, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, wenn man die dritte dazu addirt. Wenn wir also ein beliebiges Quadrat nehmen, und ein Stück desselben als die dritte Zahl, den Rest aber als das Produkt der ersten und zweiten Zahl ansehen, so erfüllen wir schon eine von den Bedingungen der Aufgabe. Man mache also das Quadrat von $x+3 = x^2+6x+9$, und sehe 9 als die dritte Zahl, x^2+6x als das Produkt der ersten und zweiten Zahl an; man setze daher die erste Zahl $= x$, so ist die zweite $= x+6$.

Nun soll aber auch das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man die erste Zahl dazu addirt, d. i. $10x+54$ ein Quadrat werden, und eben so soll das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn die zweite dazu kommt, d. i. $10x+6$ ein Quadrat sein, und wir haben also hier die doppelte Gleichung.

Der Unterschied der beiden Zahlen ist nämlich 48. Man muß also zwei Quadrate suchen, deren Unterschied 48 ist; das ist aber leicht und kann auf unzählige Arten geschehen. Das kleinere wird z. B. 16, das größere 64. Welches von beiden Quadraten wir nun zum Ansatz der Gleichung gebrauchen, so finden wir denselben Werth für x. Denn wenn wir sagen, das größere Quadrat ist = 64, oder

$$10x + 54 = 64,$$

so finden wir den Werth von $x = 1$. Und wenn wir sagen, das kleinere Quadrat ist = 16, oder

$$10x + 6 = 16,$$

so finden wir den Werth von x ebenfalls = 1.

Die erste gesuchte Zahl ist also 1, die zweite 7, die dritte 9, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die dritte Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl = x, die zweite = x + 4, so ist ihr Produkt = $x^2 + 4x$. Dies Produkt soll ein

Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl davon abzieht; man setze also die dritte Zahl $= 4x$, so ist eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Nun soll aber auch das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man die erste davon abzieht, und das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man die zweite davon abzieht, ein Quadrat werden. Aber wenn man von dem Produkt der zweiten und dritten Zahl die erste abzieht, so erhält man $4x^2 + 15x$, und dies soll ein Quadrat sein, und wenn man von dem Produkt der ersten und dritten Zahl die zweite abzieht, so erhält man $4x^2 - x - 4$, und dies soll auch ein Quadrat sein.

Wir haben hier also wieder den Fall der doppelten Gleichung. Der Unterschied der beiden Zahlen ist $16x + 4$; diesen Unterschied zerfälle ich in die beiden Factoren, 4 und $4x + 1$. Nun setze ich entweder das Quadrat der halben Summe dieser Faktoren der größeren Zahl gleich, oder das Quadrat ihres halben Unterschiedes der kleineren Zahl gleich, und ich finde in beiden Fällen $x = \frac{25}{20}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{25}{20}$, die zweite $\frac{105}{20}$, die dritte $\frac{100}{20}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XVI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt aus je zweien ein

Quadrat wird, wenn man das Quadrat der dritten dazu addirt.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $= x$, die zweite $= 4x + 4$, die dritte $= 1$, damit sogleich zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Nun soll aber auch das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man das Quadrat der zweiten Zahl dazu addirt, ein Quadrat werden. Aber wenn man zu dem Produkt der ersten und dritten Zahl das Quadrat der zweiten addirt, so erhält man $16x^2 + 33x + 16$, und dies soll ein Quadrat werden. Ich setze die Wurzel $= 4x - 5$, so wird

$$16x^2 + 33x + 16 = 16x^2 - 40x + 25, \text{ und } x = \frac{9}{73}.$$

Die erste Zahl ist also 9, die zweite 328, die dritte 73.

XVII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Wenn man zu dem Produkt zweier auf einander folgenden Quadrate die Summe von beiden hinzulegt,

so wird die Summe wieder ein Quadrat; daher setze man die erste Zahl $=4$, die zweite $=9$, damit das Quadrat, welches aus der Multiplication beider entsteht, nämlich 36, auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn die Summe beider dazu kommt.

Nun soll aber auch das Produkt der zweiten und dritten, imgleichen das Produkt der ersten und dritten ein Quadrat werden, wenn man die Summe der beiden multiplicirten Zahlen dazu addirt. Man setze also die dritte Zahl $=x$, so wird das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man die Summe von beiden dazu legt, $=10x+9$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Wenn aber zu dem Produkte der ersten und dritten Zahl die Summe beider hinzukommt, so erhält man $5x+4$, und dieser Ausdruck soll auch ein Quadrat sein.

Hier läßt sich wieder die doppelte Gleichung anwenden. Der Unterschied der beiden Ausdrücke ist $5x+5$; diesen zerfälle ich in zwei Factoren, nämlich $x+1$ und 5. Und nun setze man, wie wir im zweiten Buche gezeigt haben, entweder das Quadrat der halben Summe dieser Faktoren dem größeren Quadrate gleich, oder das Quadrat ihres halben Unterschiedes dem kleineren Quadrate gleich, und man erhält $x=28$.

Die erste Zahl ist also 4, die zweite 9, die dritte 28, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XVIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $=x$, die zweite $=3$. Addirt man nun zu ihrem Produkt die Summe von beiden, so erhält man $4x+3$. Dies soll ein Quadrat sein; man setze also

$$4x+3=25, \text{ so wird } x=5\tfrac{1}{2}.$$

Die erste Zahl ist also $5\frac{1}{2}$, und die zweite 3, und so ist eine Bedingung der Aufgabe bereits erfüllt. Denn wenn man zu dem Produkt dieser beiden Zahlen noch die Summe derselben addirt, so erhält man das Quadrat 25.

Nun soll aber auch das Produkt der zweiten und dritten, imgleichen das Produkt der ersten und dritten Zahl ein Quadrat werden, wenn man die Summe von beiden dazu addirt. Man setze nunmehr die dritte Zahl $=x$; und wenn man nun zu dem Produkt der zweiten und dritten Zahl die Summe beider addirt, so erhält

man wieder $4x+3$; und wenn man zu dem Produkt der ersten und dritten die Summe beider addirt, so erhält man $6\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}$, und diese beiden Ausdrücke sollen Quadrate sein.

Da aber in beiden Ausdrücken die Coefficienten von x, und die bestimmten Zahlen (3 und $5\frac{1}{2}$) unter einander ungleich sind, und sich auch nicht wie ein Paar Quadratzahlen gegen einander verhalten, so ist der ganze Ansatz unzweckmäßig, und es kommt jetzt darauf an, zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man noch die Summe von beiden dazulegt, und außerdem die um 1 vergrößerten Zahlen sich wie zwei Quadratzahlen gegen einander verhalten.

Wenn eine Zahl das Vierfache der anderen um 3 übersteigt, so verhalten sich die um 1 vergrößerten Zahlen wie zwei Quadrate zu einander. Daher setze ich die eine Zahl $=x$, die andere $=4x+3$. Wenn ich nun zu dem Produkt dieser Zahlen die Summe von beiden addire, so soll ein Quadrat herauskommen; wenn ich aber zu dem Produkt dieser Zahlen die Summe beider addire, so erhalte ich $4x^2+8x+3$, und dies soll also ein Quadrat sein. Ich nehme $2x-3$, als Wurzel an, so ist

$$4x^2+8x+3=4x^2-12x+9, \text{ und } x=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}.$$

Die

Die erste Zahl ist also $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$ oder $4\frac{1}{5}$, und nun ist eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Es soll aber auch das Produkt der zweiten und dritten, imgleichen das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man die Summe von beiden dazu addirt, ein Quadrat werden. Ich setze nunmehr die dritte Zahl $= x$, die zweite aber war $4\frac{1}{5}$, wenn ich also zu dem Produkte dieser Zahlen ihre Summe addire, so erhalte ich $5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$, und diese Zahl soll ein Quadrat sein, z. B. $= 25$.

Da die dritte Zahl $= x$, und die erste $= \frac{3}{10}$, so wird das Produkt beider, wenn noch die Summe derselben dazukommt, $= \frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$, und dieser Ausdruck soll auch ein Quadrat sein, z. B. $= 100$.

Nunmehr multiplicire ich $5\frac{1}{5}x + 4\frac{1}{5}$ mit 25, so muß auch das Produkt $130x + 105$ ein Quadrat sein, eben so multiplicire ich $\frac{13}{10}x + \frac{3}{10}$ mit 100, so muß auch das Produkt $130x + 30$ ein Quadrat sein. Der Unterschied beider Ausdrücke ist 75, und nun findet wieder die doppelte Gleichung Statt, aus welcher man $x = \frac{7}{10}$ erhält.

Die dritte Zahl ist also $\frac{7}{10}$, die erste $\frac{3}{10}$, die zweite $\frac{42}{10}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XIX. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Wenn ich, wie in der vorigen Aufgabe, die erste Zahl $=x$ setze, für die zweite aber eine beliebige Zahl nehme, so komme ich wieder auf eine unauflösbare Schwierigkeit. Damit ich nun für x solche Coefficienten bekomme, welche sich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten, so kommt es zuerst darauf an, zwei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man die Summe beider davon abzieht, beide Zahlen aber, um 1 vermindert, sich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten.

Wenn eine Zahl das Vierfache der anderen weniger 3 ist, so verhalten sich die um 1 verminderten Zahlen wie zwei Quadrate zu einander. Denn wenn man von beiden Zahlen 1 abzieht, so sind die abgezogenen Stücke

bei der einen 1, bei der anderen 4. Wenn man aber von zwei Zahlen, die sich wie 1:4 verhalten, zwei Zahlen abzieht, welche sich auch wie 1:4 verhalten, so ist klar, daß auch die Reste in dem Verhältniß 1:4 stehen müssen, und sich folglich wie zwei Quadrate zu einander verhalten.

Ich setze daher die erste Zahl $= x+1$, die zweite $= 4x+1$, und wenn man nun von dem Produkte beider Zahlen die Summe derselben abzieht, so erhält man $4x^2-1$. Die Wurzel dieser Zahl setze ich $= 2x-2$, so wird

$$4x^2-1 = 4x^2-8x+4, \text{ und } x = \frac{5}{8}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{13}{8}$, die zweite $\frac{28}{8}$, und dadurch ist eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Da ich nun die erste Zahl $\frac{13}{8}$, und die zweite $\frac{28}{8}$ bereits kenne, so setze ich nunmehr die dritte $= x$, das Produkt der zweiten und dritten ist also $3\frac{1}{2}x$, und wenn ich davon die Summe beider, nämlich $x+3\frac{1}{2}$ abziehe, so bleibt $2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}$, und dies soll ein Quadrat z. B. $= 4$ sein. Das Produkt der ersten und dritten Zahl ist $\frac{13}{8}x$, und wenn ich davon die Summe beider oder $x+\frac{13}{8}$ abziehe, so bleibt $\frac{5}{8}x-\frac{13}{8}$, und dies soll auch ein Quadrat, z. B. $= 16$ sein.

Nun multiplicire ich $\frac{5}{8}x-\frac{13}{8}$ mit 16, so muß auch $10x-26$ ein Quadrat sein, und eben so multiplicire ich $2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}$ mit 4, so muß auch $10x-14$ ein Quadrat sein. Der Unterschied dieser beiden Quadrate ist 12, welcher aus den Faktoren 2 und 6 entsteht. Nun ist das Quadrat der halben Summe $=16$, und das ist dem größeren Quadrate gleich, also wird

$$10x-14=16, \text{ und } x=3.$$

Daher ist die dritte Zahl $=3$ oder $\frac{24}{8}$, die erste Zahl aber war $\frac{13}{8}$, und die zweite $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{28}{8}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, man mag nun jede der beiden Zahlen einzeln, oder die Summe von beiden dazu addiren.

Auflösung.

Man setze die eine Zahl $=x$, die andere $=4x-1$, denn wenn eine Zahl das Vierfache der andern weniger 1 ist, so wird ihr Produkt ein Quadrat, wenn man die kleinere dazu addirt. Nun sind aber noch zwei Bedingungen zu erfüllen, nämlich, daß das Produkt dieser

Zahlen ein Quadrat werde, sowohl wenn man die größere Zahl, als wenn man die Summe beider dazu addirt. Wenn man aber zu dem Produkt dieser beiden Zahlen die größere von beiden addirt, so erhält man $4x^2+3x-1$, und wenn man zu eben diesem Produkt die Summe beider Zahlen addirt, so erhält man $4x^2+4x-1$, und beides soll ein Quadrat sein.

Hier kann man wieder die doppelte Gleichung anwenden. Der Unterschied beider Zahlen ist x, und dieser hat die Factoren $\frac{1}{4}$ und $4x$, und so erhält man $x=\frac{65}{224}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{65}{224}$, die zweite $\frac{36}{224}$, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

XXI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, man mag nun jede der beiden Zahlen einzeln, oder die Summe beider davon abziehen.

Auflösung.

Man setze die eine Zahl $=x+1$, die andere $=4x$, denn wenn eine Zahl das Vierfache der anderen weniger 4 ist, so wird ihr Produkt ein Quadrat, wenn man die größere Zahl davon abzieht.

Nun soll aber das Produkt dieser beiden Zahlen auch dann noch ein Quadrat werden, wenn man entweder die kleinere Zahl oder die Summe beider davon abzieht. Wenn man aber von diesem Produkte die kleinere Zahl abzieht, so erhält man $4x^2+3x-1$, und wenn man von diesem Produkte die Summe beider Zahlen abzieht, so erhält man $4x^2-x-1$, und beide Ausdrücke sollen Quadrate sein. Der Unterschied dieser Ausdrücke ist $4x$, als Factoren dieses Unterschiedes nehme ich $4x$ und 1, so wird $x=1\frac{1}{4}$.

Die erste Zahl ist also $2\frac{1}{4}$, die zweite 5, und der Beweis fällt in die Augen.

XXII. Aufgabe.

Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat ihrer Summe auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man jedwede der Zahlen entweder dazu addirt oder davon abzieht.

Auflösung.

Da in jedem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das doppelte Produkt der Katheten davon abzieht oder dazu addirt, so suche ich zuerst vier rechtwinklige

Dreiecke, deren Hypotenusen einander gleich sind, das heißt, ich theile ein Quadrat auf vier verschiedene Arten in zwei andere Quadrate, und wir haben bereits gelernt, wie man ein Quadrat auf unzählige Arten in zwei andere Quadrate theilen könne.

Wir nehmen also zwei rechtwinklige Dreiecke in den kleinsten Zahlen, das eine werde durch die Zahlen 3, 4 und 5, das andere durch die Zahlen 5, 12 und 13 vorgestellt. Nun multiplicire man jedes dieser Dreiecke mit der Hypotenuse des anderen, so wird das erste durch die Zahlen 39, 52 und 65, das zweite durch die Zahlen 25, 60 und 65 vorgestellt, und beide Dreiecke sind rechtwinklig, und haben gleiche Hypotenusen.

Die Zahl 65 theilt sich von selbst auf zweierlei Art in zwei Quadrate, nämlich zuerst in 16 und 49, und dann wieder in 64 und 1, welches seinen Grund darin hat, daß 65 aus der Multiplication der Faktoren 5 und 13 entstanden ist, deren jeder die Summe von zwei Quadraten ist. Nun nehme ich die Wurzeln der Quadrate 49 und 16, nämlich 7 und 4, und bilde aus diesen Zahlen ein rechtwinkliges Dreieck, welches also durch die Zahlen 33, 56 und 65 vorgestellt wird. Ich nehme ferner die Wurzeln der Quadrate 64 und 1, nämlich 8 und 1, und bilde aus diesen Zahlen wieder ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten also 16, 63 und 65 sind, und nunmehr habe ich vier rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenusen einander gleich sind.

Nunmehr komme ich auf die ursprüngliche Aufgabe zurück, und setze die Summe aller vier Zahlen $= 65x$, jede der Zahlen setze ich $= x^2$ mit einem Coefficienten, welcher die vierfache Fläche des Dreiecks ausdrückt, die erste Zahl also $= 4056x^2$, die zweite $= 3000x^2$, die dritte $= 3696x^2$, und die vierte endlich $= 2016x^2$. Die Summe dieser vier Zahlen ist $12768x^2$, folglich wird

$$12768x^2 = 65x, \text{ und } x = \frac{65}{12768}.$$

Die erste Zahl ist also 17136600, die zweite 12675000, die dritte 15615600, die vierte 8517600, jede mit dem Nenner 163021824.

XXIII. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes Stück der gegebenen Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 10. Man setze das gesuchte Quadrat $= x^2 + 2x + 1$, welches die Eigenschaft hat, daß es ein Quadrat bleibt, sowohl wenn man $2x + 1$, als wenn man $4x$ davon abzieht.

Ich setze daher das eine Stück der Zahl $10 = 2x + 1$, das andere $= 4x$. Die Summe dieser Stücke muß aber der gegebenen Zahl gleich sein, also ist

$$6x + 1 = 10, \text{ und } x = 1\frac{1}{2}.$$

Das erste Stück ist also $=4$, das zweite $=6$, das gesuchte Quadrat aber ist $=6\frac{1}{4}$.

XXIV. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Stücke theilen, und dazu ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes der beiden Stücke dazu addirt.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 20; das gesuchte Quadrat setze man $=x^2+2x+1$. Nun mag man zu diesem Quadrate $2x+3$, oder $4x+8$ addiren, so wird die Summe in jedwedem Falle wieder ein Quadrat.

Daher setze ich das erste Stück der gegebenen Zahl $=2x+3$, das zweite $=4x+8$, die Summe beider ist $6x+11$, also wird

$$6x+11=20, \text{ und } x=\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}.$$

Das erste Stück ist also 6, das zweite 14, das gesuchte Quadrat aber ist $6\frac{1}{4}$, und der Beweis fällt in die Augen.

Viertes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei Kubikzahlen theilen, deren Wurzeln eine vorgeschriebene Summe geben.

Auflösung.

Man soll z. B. 370 in zwei Kubikzahlen theilen, und die Summe beider Wurzeln soll $= 10$ sein.

Man setze die Wurzel der ersten Kubikzahl $= x + 5$, wo 5 die halbe Summe der Wurzeln ist, so ist die Wurzel der andern Kubikzahl $= 5 - x$, die Summe der Kubikzahlen aber ist $= 30x^2 + 250$. Diese Summe muß der gegebenen Zahl gleich sein, also ist

$$30x^2 + 250 = 370, \text{ und } x = 2.$$

Die Wurzel der ersten Kubikzahl ist also 7, die der zweiten 3, die Kubikzahlen selbst sind 343 und 27.

II. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Zahlen selbst als die Cubi derselben einen vorgeschriebenen Unterschied haben.

Auflösung.

Der vorgeschriebene Unterschied der Zahlen sei 6, der Unterschied ihrer Cubi 504.

Man setze wieder die Wurzel des größeren Cubus $= x + 3$, die Wurzel des kleineren $= x - 3$, so ist ihr Unterschied wirklich $= 6$. Nun soll aber auch der Unterschied ihrer Cubi $= 504$ sein, der Unterschied der Cubi ist aber $18x^2 + 54$. Es ist also

$$18x^2 + 54 = 504, \text{ und } x = 5.$$

Die Wurzel des größeren Cubus ist also 8, die des kleineren 2, die Cubi selbst sind 512 und 8, und der Beweis fällt in die Augen.

III. Aufgabe.

Man soll ein Quadrat und dessen Wurzel mit einerlei Zahl multipliciren, und dadurch die Quadratwurzel zu einer Kubikzahl, das Quadrat aber zu deren Kubikwurzel machen.

Auflösung.

Man setze das Quadrat $= x^2$, seine Wurzel also $= x$, die Zahl womit man beide multipliciren muß, sei irgend eine bestimmte Kubikzahl durch x dividirt z. B. $\frac{8}{x}$. Multipliciren wir diese Zahl mit x^2, so erhalten wir $8x$, multipliciren wir sie aber mit x, so erhalten wir 8. Nun soll aber $8x$ die Kubikwurzel von 8 sein, also ist

$$8x = \sqrt[3]{8} = 2, \text{ und } x = \frac{1}{4}.$$

Das gesuchte Quadrat ist also $\frac{1}{16}$, die Wurzel desselben $\frac{1}{4}$, und die Zahl womit man beide multipliciren muß, ist 32, denn wenn $x = \frac{1}{4}$, so ist $\frac{1}{x} = 4$, und der Beweis fällt in die Augen.

IV. Aufgabe.

Man soll zu einem Quadrat und zu dessen Wurzel dieselbe Zahl addiren, und die entstandenen Zahlen sollen die nämliche Eigenschaft behalten.

Auflösung.

Das gesuchte Quadrat sei $= x^2$, also die Wurzel $= x$, die Zahl aber, welche man zu beiden addiren muß, sei $= x^2$ mit einem solchen Coefficienten, daß sie zu x^2

addirt, wieder ein Quadrat giebt, z. B. $3x^2$. Addirt man nun diese Zahl zu x^2, so erhält man das Quadrat $4x^2$, addirt man sie aber zu x, so erhält man $3x^2+x$. Diese Summe soll nun der Wurzel von $4x^2$, d. i. der Zahl $2x$ gleich sein; es ist also

$$3x^2+x=2x, \text{ und } x=\frac{1}{3}.$$

Das gesuchte Quadrat ist also $\frac{1}{9}$, seine Wurzel $\frac{1}{3}$, und die Zahl die man zu beiden addiren muß, $=\frac{3}{9}$.

V. Aufgabe.

Man soll zu einem Quadrat und zu seiner Wurzel dieselbe Zahl addiren, und die entstandenen Zahlen sollen verwechselt die vorige Eigenschaft haben.

Auflösung.

Das Quadrat sei $=x^2$, die Wurzel also $=x$, die Zahl aber, welche man addiren muß, damit die vorige Wurzel ein Quadrat werde, sei x^2 mit einem quadratischen Coefficienten, weniger der vorigen Wurzel, also z. B., $=4x^2-x$. Addire ich diese Zahl zu dem Quadrat, so erhalte ich $5x^2-x$, dies setze ich $=2x$, d. i. = der Wurzel des aus der vorigen Addition erhaltenen Quadrats. Man hat also

$$5x^2-x=2x, \text{ und } x=\frac{3}{5}.$$

Das gesuchte Quadrat ist also $\frac{9}{25}$, seine Wurzel $= \frac{3}{5}$, und die Zahl die man addiren muß, ist $\frac{21}{25}$.

VI. Aufgabe.

Man soll zu einem Cubus und zu einem Quadrat ein anderes Quadrat addiren, und beide Summen sollen die vorige Eigenschaft behalten.

Auflösung.

Man setze den Cubus $= x^3$, das Quadrat aber $= x^2$ mit einem Coefficienten, der ebenfalls ein Quadrat ist, z. B. $= 9x^2$. Da wir nun verlangen, daß ein gewisses Quadrat, wenn $9x^2$ dazu addirt wird, wieder ein Quadrat werde, so nehme man zwei Zahlen, welche 9 zu ihrem Produkte haben, z. B. 9 und 1. Wenn ich nun 1 von 9 abziehe, und die Hälfte des Restes ins Quadrat erhebe, so erhalte ich 16, und diese Zahl wird wieder ein Quadrat, wenn ich 9 dazu addire.

Ich setze also das Quadrat, welches zu beiden addirt werden soll, $= 16x^2$. Wenn ich diese Zahl zu $9x^2$ addire, so entsteht gewiß wieder ein Quadrat, wenn ich sie aber zu x^3 addire, so erhalte ich $x^3 + 16x^2$, und dieser Ausdruck soll ein Cubus sein. Ich setze also

$$x^3 + 16x^2 = 8x^3, \text{ so wird } x = \frac{16}{7}.$$

Der gesuchte Cubus ist also $\frac{4096}{343}$, das gesuchte Quadrat $\frac{2304}{49}$, das Quadrat aber, welches man zu beiden addiren muß, ist $\frac{4096}{49}$.

VII. Aufgabe.

Man soll zu einem Cubus und zu einem Quadrat eine andere Quadratzahl addiren, und beide Summen sollen verwechselt die vorige Eigenschaft haben.

Auflösung.

Wir wollen den Cubus die erste Zahl, das Quadrat die zweite Zahl, dasjenige Quadrat aber, welches man zu beiden addiren muß, die dritte Zahl nennen.

Da nun das Quadrat, welches man addiren muß, oder die dritte Zahl, mit dem ersten Quadrat oder der zweiten Zahl zusammen genommen einen Cubus geben soll, so nehme ich an, die Summe beider gebe die erste Zahl, so daß also die erste Zahl die zweite um die dritte Zahl, also um ein Quadrat übersteigt; denn die dritte Zahl soll ja ein Quadrat sein.

Wenn man nun zwei beliebige Zahlen nimmt, und zu der Summe ihrer Quadrate das doppelte Produkt beider addirt, so entsteht alle Mal ein Quadrat. Ich muß also zwei beliebige Zahlen nehmen, und die Summe

ihrer Quadrate als die erste Zahl ansehen; denn die erste Zahl soll zweien Quadraten, dem gesuchten und dem, welches nachher addirt wird, oder der zweiten und dritten Zahl gleich sein; das doppelte Produkt beider Zahlen muß ich aber als die dritte Zahl ansehen.

Aber die dritte Zahl soll ein Quadrat sein, d. h. das doppelte Produkt der beiden gewählten Zahlen muß ein Quadrat sein. Man setze also die eine Zahl $= x$, die zweite $= 2x$, damit ihr doppeltes Produkt ein Quadrat werde. Nun nehme ich die Summe ihrer Quadrate, und setze die erste Zahl $= 5x^2$, die dritte setze ich dem doppelten Produkt der beiden zuerst gewählten Zahlen gleich, oder $= 4x^2$, daher wird die zweite Zahl $= x^2$, weil sie der Unterschied der ersten und dritten Zahl sein soll. Nun soll die erste Zahl ein Cubus sein, ich setze daher

$$5x^2 = x^3, \text{ so wird } x = 5.$$

Der Cubus, oder die erste Zahl ist also 125, das Quadrat, oder die zweite Zahl ist 25, das Quadrat aber, welches man addiren muß, oder die dritte Zahl ist 100, und der Beweis fällt in die Augen.

VIII.

Eine andere Auflösung der vorigen Aufgabe.

Man nenne den Cubus die erste, das Quadrat die zweite, das Quadrat welches man addiren muß, die dritte Zahl.

Da

Da die Summe der beiden Quadrate, welche wir die dritte und die zweite Zahl genannt haben, ein Cubus sein soll, so sei diese Summe der ersten Zahl gleich. Da aber die Summe der ersten und der dritten Zahl ebenfalls ein Quadrat sein soll, so kommt es zuerst darauf an, zwei Quadratzahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß ihre Summe, um eine der Zahlen selbst vergrößert, wieder ein Quadrat sei; dann aber muß man zwei Quadrate, dasjenige nämlich, welches man zu der zweiten Zahl addiren soll, und die zweite Zahl selbst, so bestimmen, daß ihre Summe ein Cubus, oder der ersten Zahl gleich wird.

Man nehme also zwei Quadrate, x^2 und 4; wenn man nun zu der Summe beider noch das erste addirt, so erhält man $2x^2+4$, und dies soll ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $= 2x-2$, so wird

$$2x^2+4=4x^2-8x+4, \text{ und } x=4.$$

Das eine der vorläufig gesuchten Quadrate ist also 4, das andere 16.

Nunmehr setze ich das Quadrat, welches addirt werden soll, $=16x^2$, die zweite Zahl aber $=4x^2$, folglich wird die erste Zahl $=20x^2$, weil sie die Summe der zweiten und dritten Zahl sein soll. Endlich setze man

$$20x^2=x^3, \text{ so wird } x=20.$$

Die erste Zahl ist also 8000, die zweite 1600, das Quadrat, welches man addiren muß, ist 6400. Die Aufgabe läßt aber unzählige Auflösungen zu.

IX. Aufgabe.

Man soll zu einem Cubus und zu dessen Wurzel dieselbe Zahl addiren, und beide sollen die nämliche Eigenschaft behalten.

Auflösung.

Die Zahl, welche man addiren muß, sei $=x$, die Wurzel des gesuchten Cubus ein beliebiges Vielfaches von x, z. B. $=2x$, der Cubus selbst also $=8x^3$. Wenn man nun x zu $2x$ addirt, so erhält man $3x$, wenn man es aber zu $8x^3$ addirt, so erhält man $8x^3+x$. Nun ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$27x^3 = 8x^3 + x.$$

Man ziehe an beiden Seiten $8x^3$ ab, so bleibt

$$19x^3 = x,$$

und dividire beide Seiten durch x, so wird

$$19x^2 = 1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl, und wenn nun auch der Coefficient von x^2, nämlich 19 ein Quadrat wäre, so wäre die Gleichung aufgelöst. Aber die $19x^3$ entstehen, indem man $8x^3$ von $27x^3$ abzieht; $27x^3$ ist der Cubus von $3x$, und $8x^3$ ist der Cubus von $2x$, die $19x^3$ sind also aus dem Ueberschuß des Cubi von $3x$ über den Cubus von $2x$ entstanden. Aber $2x$ ist eine bei dem Ansatz beliebig gewählte Größe, der Coefficient

3 aber ist entstanden, indem man zu dem beliebig gewählten Coefficienten von 2x noch 1 addirte.

Es kommt also darauf an, zwei um 1 verschiedene Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß der Unterschied ihrer Cubi eine Quadratzahl sei. Man setze die eine dieser Zahlen $= x$, die andere $= x + 1$, so ist der Unterschied ihrer Cubi $3x^2 + 3x + 1$. Man setze daher

$$3x^2 + 3x + 1 = (1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2,$$

so wird $x = 7$, und die eine der vorläufig gesuchten Zahlen ist 7, die andere 8.

Nun kehre ich zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setze die Zahl, welche man addiren muß $= x$, die Wurzel des gesuchten Cubi $= 7x$, den Cubus selbst also $= 343x^3$. Wenn ich nun zu beiden x addire, so erhalte ich dort $8x$, und hier $343x^3 + x$. Nun soll aber diese letztere Zahl ein Cubus, und $8x$ deren Kubikwurzel sein. Man hat also die Gleichung

$$512x^3 = 343x^3 + x, \text{ und } x = \frac{1}{13}.$$

Der gesuchte Cubus ist also $\frac{343}{2197}$, seine Wurzel $\frac{7}{13}$, die Zahl, die man zu beiden addiren muß, $\frac{1}{13}$.

X. Aufgabe.

Man soll zu einem Cubus und zu dessen Wurzel dieselbe Zahl addiren, und beide Summen sollen verwechselt die vorige Eigenschaft haben.

Auflösung.

Der gesuchte Cubus sei x^3, mit einem beliebigen kubischen Coefficienten z. B. $8x^3$, die Kubikwurzel sei also $=2x$. Die Zahl, welche man zu beiden addiren muß, sei wieder x^3 mit einem anderen kubischen Coefficienten, weniger der Wurzel des vorigen Cubus, z. B. $27x^3 - 2x$. Addirt man diese Zahl zu $2x$, so erhält man $27x^3$, und dies ist der Cubus von $3x$, addirt man sie aber zu $8x^3$, so erhält man $35x^3 - 2x$. Dies soll nun die Kubikwurzel der vorher erhaltenen $27x^3$, oder $=3x$ sein. Man erhält also die Gleichung

$$35x^3 - 2x = 3x, \text{ d. i. } 35x^3 = 5x,$$

oder, wenn man alles durch x dividirt,

$$35x^2 = 5.$$

Hier findet nun keine Auflösung in rationalen Zahlen Statt, weil sich die beiden Seiten der Gleichung nicht wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Aber der Coefficient von $35x^2$ ist die Summe zweier Cubi, 27 und 8; die Zahl 5 aber ist die Summe ihrer Wurzeln; es kommt also zuvörderst darauf an, zwei Kubikzahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß ihre Summe und die Summe ihrer Wurzeln sich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten.

Man setze die Summe der Wurzeln einer beliebigen Zahl gleich z. B. $=2$; die Wurzel des ersten Cubus sei $=x$, die des zweiten also $=2-x$, so ist die

Summe der Cubi $= 6x^2 - 12x + 8$. Nun soll die Summe der Cubi zu der Summe der Wurzeln d. i. zu 2 sich wie ein Quadrat zu einem andern verhalten. Aber 2 ist das Doppelte eines Quadrats, daher muß auch $6x^2 - 12x + 8$ das Doppelte eines Quadrats, die Hälfte also oder $3x^2 - 6x + 4$ ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $= 2 - 4x$, so wird $x = \frac{10}{13}$. Die eine Wurzel ist also $\frac{10}{13}$, die andere $\frac{16}{13}$. Nun schaffe ich die Brüche weg, und nehme von beiden Zahlen die Hälfte, so werden 5 und 8 die gesuchten Wurzeln sein.

Nunmehr komme ich wieder auf die ursprüngliche Aufgabe zurück, und setze die Wurzel des gesuchten Cubi $= 5x$, den Cubus also $= 125x^3$. Die Zahl, die man addiren muß, setze ich gleich dem Cubus von $8x$, weniger der Wurzel des vorigen Cubus, also $= 512x^3 - 5x$. Wenn ich diese Zahl zu $5x$ addire, so erhalte ich einen Cubus, wenn ich sie aber zu $125x^3$ addire, so erhalte ich $637x^3 - 5x$. Dies soll nun die Kubikwurzel von $512x^3$ sein; also ist

$$637x^3 - 5x = 8x, \text{ folglich } x = \frac{1}{7}.$$

Der gesuchte Cubus ist also $\frac{125}{343}$, seine Wurzel $\frac{5}{7}$, die Zahl, die man zu beiden addiren muß, ist $\frac{267}{343}$.

XI. Aufgabe.

Man soll zwei Kubikzahlen suchen, deren Summe der Summe ihrer Wurzeln gleich ist.

Auflösung.

Man drücke die Kubikwurzeln durch die unbekannte Zahl x aus, die eine sei $= 2x$, die andere $= 3x$; so ist die Summe der Cubi $= 35x^3$, und dies soll der Summe der Wurzeln, d. i. der Zahl $5x$ gleich sein. Wenn man nun beides durch x dividirt, so hat man $35x^2 = 5$, und man erhält für x keinen rationalen Werth.

Aber der Coefficient von $35x^2$ ist die Summe zweier Cubi, nämlich 8 und 27, und 5 ist die Summe ihrer Wurzeln. Daher kommt es zuerst darauf an: zwei Kubikzahlen zu finden, deren Summe, durch die Summe ihrer Wurzeln dividirt, zum Quotienten ein Quadrat giebt. Diese Aufgabe ist aber schon gelöst worden, und die Wurzeln dieser Cubi sind 8 und 5.

Nunmehr kehre ich zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setze die Wurzeln der gesuchten Cubi $8x$ und $5x$, so wird die Summe der Cubi $= 637x^3$, und dies soll der Summe der Wurzeln oder der Zahl $13x$ gleich sein. Man hat also

$$637x^3 = 13x, \text{ und } x = \frac{1}{7}.$$

Die Wurzel des ersten Cubi ist also $\frac{5}{7}$, die des zweiten $\frac{8}{7}$, die Cubi selbst aber sind $\frac{125}{343}$ und $\frac{512}{343}$.

XII. Aufgabe.

Man soll zwei Kubikzahlen suchen, deren Unterschied dem Unterschiede ihrer Wurzeln gleich ist.

Auflösung.

Wenn die Wurzeln der gesuchten Cubi $2x$ und $3x$ sind, so ist der Unterschied der Cubi $= 19x^3$, der Unterschied der Wurzeln aber ist x, folglich wird $19x^3 = x$, und auch hier findet keine Auflösung in rationalen Zahlen Statt, weil sich die beiden Ausdrücke nicht wie zwei Quadrate gegen einander verhalten.

Es kommt also darauf an, zwei Kubikzahlen zu suchen, deren Unterschied zu dem Unterschiede ihrer Wurzeln sich wie zwei Quadratzahlen verhalten. Die Wurzeln dieser Cubi mögen x und $x+1$ sein, damit auch der Unterschied der Wurzeln ein Quadrat nämlich 1 sei. Wenn aber die eine Wurzel x, die andere $x+1$ ist, so ist der Unterschied der Wurzeln 1, aber der Unterschied der Kubikzahlen selbst ist $3x^2+3x+1$. Nun soll sich $3x^2+3x+1$ zu der Zahl 1, oder zu dem Unterschiede der Wurzeln wie ein Quadrat zu einem anderen verhalten; daher muß das Produkt beider Zahlen ein Quadrat sein. Das Produkte beider Zahlen ist aber $3x^2+3x+1$, und dies soll ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $= 1-2x$, so ist

$$4x^2-4x+1 = 3x^2+3x+1 \text{ und } x = 7.$$

Die gesuchten Cubi sind also 343 und 512, und ihre Wurzeln sind 7 und 8.

Nunmehr kehre ich zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setze die Wurzeln der gesuchten Cubi $7x$

und $8x$; der Unterschied der Wurzeln ist also x, der Unterschied ihrer Cubi aber $169x^3$. Man hat daher die Gleichung

$$169x^3 = x, \text{ und } x = \frac{1}{13}.$$

Die Wurzeln der gesuchten Cubi sind also $\frac{7}{13}$ und $\frac{8}{13}$.

XIII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Cubus der größeren und die kleinere Zahl zusammen genommen so groß sind, als der Cubus der kleineren und die größere Zahl zusammen genommen.

Auflösung.

Die kleinere Zahl sei $2x$, die größere $3x$. Wenn man nun zu dem Cubus der größeren Zahl die kleinere hinzulegt, so erhält man $27x^3 + 2x$, und wenn man zu dem Cubus der kleineren Zahl die größere hinzulegt, so erhält man $8x^3 + 3x$. Daher wird

$$27x^3 + 2x = 8x^3 + 3x.$$

Wenn man alles durch x dividirt, so erhält man $19x^2 = 1$, und man findet für x keinen rationalen Werth.

Aber der Coefficient von $19x^2$ ist der Unterschied zweier Cubi, und 1 ist der Unterschied ihrer Wurzeln.

Es kommt also zunächst darauf an, zwei Kubikzahlen zu finden, deren Unterschied zu dem Unterschiede ihrer Wurzeln sich wie zwei Quadratzahlen verhalten. Diese Aufgabe ist aber schon gelöst worden, und die Wurzeln der gesuchten Cubi sind 7 und 8.

Nunmehr komme ich auf die ursprüngliche Aufgabe zurück, und setze die eine Zahl $= 7x$, die andere $= 8x$, so wird

$$343x^3 + 8x = 512x^3 + 7x \text{ und } x = \frac{1}{15}.$$

Die eine der gesuchten Zahlen ist also $\frac{7}{15}$, die andere $\frac{8}{15}$ und der Beweis fällt in die Augen.

XIV. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß jede der Zahlen für sich, ferner die Summe und der Unterschied von beiden ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Auflösung.

Wenn ich von irgend einem Quadrat 1 abziehe, so habe ich die erste Zahl. Ich mache also das Quadrat von 1 und x mit einem beliebigen Coefficienten z. B. von $3x + 1$, das Quadrat ist also $9x^2 + 6x + 1$, davon ziehe ich 1 ab, und setze die erste Zahl $= 9x^2 + 6x$.

Da ferner die Summe von beiden, um 1 vergrößert, ein Quadrat werden, und auch die um 1 vergrö-

ßerte zweite Zahl ein Quadrat sein soll, so kommt es zuerst darauf an, ein Quadrat zu suchen, welches zu $9x^2+6x$ addirt wieder ein Quadrat zur Summe giebt. Ich nehme zwei Zahlen, deren Produkt $9x^2+6x$ ist, z. B. $9x+6$ und x. Der Unterschied dieser Zahlen ist $8x+6$, und die Hälfte davon $4x+3$, das Quadrat davon $16x^2+24x+9$; davon ziehe ich 1 ab, und setze die zweite Zahl $=16x^2+24x+8$. Die erste Zahl aber war $9x^2+6x$, und jetzt wird jede der Zahlen für sich, und außerdem noch ihre Summe ein Quadrat werden, sobald man noch 1 dazu addirt.

Nun soll aber auch der Unterschied der beiden Zahlen, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden, d. h. $7x^2+18x+9$ soll ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $=3-3x$, so wird $x=18$.

Die erste Zahl ist also 3024, die zweite 5624, und der Beweis fällt in die Augen.

XV. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen suchen, deren Summe der Summe ihrer Unterschiede gleich sei.

Auflösung.

Die Aufgabe verlangt, daß der Unterschied der größten und mittelsten, der mittelsten und kleinsten, und der größten und kleinsten Zahl der Summe von al-

len drei Zahlen gleich sei. Aber die drei Unterschiede zusammen genommen sind dem doppelten Unterschiede der größten und kleinsten Zahl gleich, und daher ist der doppelte Unterschied der größten und kleinsten Zahl der Summe aller drei Zahlen gleich.

Man setze das kleinste der drei gesuchten Quadrate $= 1$, das größte $= x^2 + 2x + 1$. Nun ist der doppelte Unterschied der größten und kleinsten Zahl $= 2x^2 + 4x$, daher ist auch die Summe der drei Quadrate $= 2x^2 + 4x$; zwei davon sind aber zusammen genommen $= x^2 + 2x + 2$, also ist das dritte $= x^2 + 2x - 2$, und dieser Ausdruck soll also ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $= x - 4$, so wird $x = \frac{9}{5}$.

Die größte Zahl ist also $\frac{196}{25}$, die mittelste $\frac{121}{25}$, die kleinste 1, und wenn man alles mit 25 multiplicirt, so wird die erste Zahl 196, die zweite 121, die dritte 25.

XVI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von je zweien, mit der dritten multiplicirt, eine vorgeschriebene Zahl zum Produkt gebe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die Summe der ersten und zweiten Zahl, mit der dritten multiplicirt,

das Produkt 35, die Summe der zweiten und dritten, mit der ersten multiplicirt, das Produkt 27, die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Produkt 32 gebe.

Man setze die dritte Zahl $= x$, so ist die Summe der ersten und zweiten $= \frac{35}{x}$. Die erste Zahl sei $\frac{10}{x}$, so ist die zweite $\frac{25}{x}$. Nun sind aber noch zwei Bedingungen zu erfüllen, nämlich daß die Summe der zweiten und dritten, mit der ersten multiplicirt, das Produkt 27, und die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Produkt 32 gebe. Aber die Summe der zweiten und dritten, mit der ersten multiplicirt, giebt zum Produkt $10 + \frac{250}{x^2}$, folglich ist $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, giebt zum Produkt $25 + \frac{250}{x^2}$, folglich ist $25 + \frac{250}{x^2} = 32$. Aber es ist, wie wir gesehn haben, auch $10 + \frac{250}{x^2} = 27$. Nun ist der Unterschied $32 - 27 = 5$, und der Unterschied $25 + \frac{250}{x^2} - (10 + \frac{250}{x^2})$ sollte daher ebenfalls $= 5$, sein. Aber die 25 kommen von dem Ausdruck für die zweite Zahl, die 10 von dem Ausdruck für die erste Zahl her, und wir müssen also diese Zahlen so wählen, daß ihr Unterschied 5 sei. Die erste und zweite Zahl an sich sind aber nicht willkührlich, sondern ihre Summe soll 35 sein. Ich muß also 35 in zwei

Zahlen theilen, deren Unterschied 5 ist; die eine dieser Zahlen ist 15, die andere 20.

Nunmehr setze ich die erste Zahl $= \frac{15}{x}$, die zweite $= \frac{20}{x}$. Nun giebt die Summe der zweiten und dritten, mit der ersten multiplicirt, das Produkt $15 + \frac{300}{x^2} = 27$, und die Summe der ersten und dritten, mit der zweiten multiplicirt, das Produkt $20 + \frac{300}{x^2} = 32$. Nehme ich nun die Gleichung

$$15 + \frac{300}{x^2} = 27, \text{ so wird } x = 5.$$

Die erste Zahl ist also 3, die zweite 4, die dritte 5.

XVII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von allen dreien ein Quadrat sei, und außerdem das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die nächstfolgende Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Man setze die mittelste Zahl $= x$ mit einem beliebigen Coefficienten, z. B. $= 4x$, und da nun verlangt wird, daß das Quadrat der ersten, wenn noch die mittelste Zahl dazukommt, wieder ein Quadrat werden soll,

so muß ich zuerst ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 4x dazu addirt. Ich nehme zwei Zahlen, deren Produkt 4x ist z. B. 2x und 2, und wenn ich nun den halben Unterschied der Factoren für die erste Zahl annehme, so wird die erste Zahl = x — 1, und dadurch ist schon die eine Bedingung erfüllt, daß das Quadrat der ersten auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die zweite Zahl dazu addirt.

Es soll aber auch das Quadrat der zweiten oder $16x^2$, wenn noch die dritte Zahl dazukommt, ein Quadrat werden. Wenn ich also von irgend einem Quadrat $16x^2$ abziehe, so erhalte ich die dritte Zahl. Ich mache ein Quadrat von 1 und der Wurzel von $16x^2$, also von $4x + 1$; das Quadrat selbst ist $16x^2 + 8x + 1$; ziehe ich davon also $16x^2$ ab, so ist der Rest $8x + 1$ die dritte Zahl.

Nun soll auch noch die Summe aller drei Zahlen ein Quadrat sein, die Summe der drei Zahlen ist aber $13x$, und diese Zahl soll also ein Quadrat sein. Man setze also $13x = x^2$ mit einem quadratischen Coefficienten, z. B. $13x = 169x^2$, so wird $x = 13x^2$, und nunmehr wird die erste Zahl $= 13x^2 - 1$, die zweite $= 52x^2$, die dritte $= 104x^2 + 1$, und jetzt sind drei Bedingungen der Aufgabe in unbestimmten Ausdrücken erfüllt.

Endlich soll das Quadrat der dritten Zahl nämlich $10816x^4 + 208x^2 + 1$ ein Quadrat werden, wenn man die erste Zahl oder $13x^2 - 1$ dazu addirt. Diese

Summe aber wird $= 10816x^4 + 221x^2$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Man dividire alles durch x^2, so muß auch der Quotient $10816x^2 + 221$ ein Quadrat sein. Die Wurzel sei $= 104x + 1$, so wird $x = \frac{55}{52}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{36621}{2704}$, die zweite $\frac{157300}{2704}$, die dritte $\frac{317304}{2704}$.

XVIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihre Summe ein Quadrat sei, und außerdem das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die zunächst folgende Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Man setze wieder die mittelste Zahl $= 4x$. Da nun das Quadrat der ersten auch dann noch ein Quadrat bleiben soll, wenn man die zweite davon abzieht, so muß ich zuerst ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man $4x$ davon abzieht. Ich suche zuerst zwei Zahlen, deren Produkt $4x$ ist, z. B. $2x$ und 2. Nun nehme ich die halbe Summe der Faktoren, und setze die erste Zahl $= x + 1$, so ist die eine Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Es soll ferner das Quadrat der zweiten Zahl oder $16x^2$ auch dann noch ein Quadrat bleiben, wenn man die dritte Zahl davon abzieht. Ich ziehe also von $16x^2$ irgend ein Quadrat ab, so giebt der Rest mir die dritte Zahl. Ich nehme z. B. das Quadrat von $4x-1$ d. i. $16x^2-8x+1$, dies ziehe ich von $16x^2$ ab, so wird die dritte Zahl $=8x-1$, und nun sind zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Ferner soll die Summe der drei Zahlen oder $13x$ ein Quadrat sein. Ich setze also $13x=169x^2$, so wird $x=13x^2$, und daher verwandelt sich die erste Zahl in $13x^2+1$ die zweite in $52x^2$, die dritte in $104x^2-1$, und nun sind in allgemeinen Ausdrücken bereits drei Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Endlich soll auch das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erste davon abzieht, ein Quadrat sein. Aber wenn man von dem Quadrat der dritten Zahl die erste abzieht, so erhält man $10816x^4-221x^2$, und dies soll ein Quadrat sein. Man dividire alles durch x^2, so muß auch der Quotient $10816x^2-221$ ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $=4x-1$, so wird $x=\frac{111}{104}$.

Die erste Zahl wird also $\frac{170989}{10816}$, die zweite $\frac{640692}{10816}$, die dritte $\frac{1270568}{10816}$.

XIX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Cubus der ersten und die zweite wieder einen Cubus, das Quadrat der zweiten und die erste wieder ein Quadrat zu ihrer Summe haben.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $= x$, so muß die zweite eine bestimmte Kubikzahl weniger x^3 z. B. $8 - x^3$ sein; wenn nun zu dem Cubus der ersten die zweite Zahl addirt wird, so ist die Summe wieder ein Cubus.

Nun soll auch das Quadrat der zweiten und die erste Zahl wieder ein Quadrat zu ihrer Summe geben. Aber wenn man zu dem Quadrat der zweiten Zahl die erste addirt, so erhält man $x^6 - 16x^3 + x + 64$, und diese Zahl soll ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $= x^3 + 8$, so hat man die Gleichung

$$x^6 - 16x^3 + x + 64 = x^6 + 16x^3 + 64.$$

Wenn man nun an beiden Seiten die fehlenden Größen addirt, und Gleiches von Gleichem abzieht, so erhält man $32x^3 = x$, und wenn man durch x dividirt, $32x^2 = 1$.

Nun ist 1 eine Quadratzahl, wäre also auch $32x^2$ eine Quadratzahl, so könnte die Gleichung gelöst werden. Aber die $32x^2$ sind aus dem Doppelten von $16x^3$

entstanden; die $16x^3$ selbst sind das doppelte Produkt von 8 und x^3, also ist $32x^2$ aus dem Vierfachen der Zahl 8 entstanden. Es kommt also darauf an, statt der Zahl 8 einen Cubus zu suchen, dessen Vierfaches ein Quadrat ist. Dieser Cubus sei $= x^3$, das Vierfache desselben $= 4x^3$, und diese Zahl soll ein Quadrat sein. Es sei also $4x^3 = 16x^2$, so wird $x = 4$, und der gesuchte Cubus 64.

Nunmehr setze ich die zweite Zahl $64 - x^3$, und nun soll das Quadrat der zweiten Zahl und die erste zusammen genommen wieder ein Quadrat geben. Wenn man aber zu dem Quadrat der zweiten Zahl die erste addirt, so erhält man $x^6 - 128x^3 + x + 4096$, und dies soll ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $= x^3 + 64$, so wird

$$x^6 - 128x^3 + x + 4096 = x^6 + 128x^3 + 4096.$$

Hieraus findet man $256x^3 = x$, und $x = \frac{1}{16}$. Die erste Zahl ist also $\frac{1}{16}$, die zweite $\frac{262143}{4096}$.

XX. Aufgabe.

Man soll in allgemeinen Ausdrücken drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Auflösung.

Zuerst soll das Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat werden, wenn man noch 1 dazu addirt; wenn ich also von irgend einem Quadrat 1 abziehe, so habe ich das Produkt der ersten und zweiten Zahl. Ich mache also das Quadrat von x mit einem beliebigen Coefficienten und 1, z. B. von $x+1$. Das Quadrat ist x^2+2x+1; davon ziehe ich 1 ab, so ist der Rest x^2+2x das Produkt der ersten und zweiten Zahl. Die zweite Zahl selber sei $=x$, so ist die erste Zahl $=x+2$.

Es soll ferner das Produkt der zweiten und dritten Zahl ein Quadrat werden, wenn man 1 dazu addirt; wenn ich also wieder von einem beliebigen Quadrate 1 abziehe, so habe ich das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Ich mache das Quadrat von $3x+1$, dieses wird $9x^2+6x+1$, und wenn ich davon 1 abziehe, so ist der Rest $9x^2+6x$ das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Die zweite Zahl war aber $=x$, folglich wird die dritte Zahl $=9x+6$ sein.

Da endlich das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden soll, so muß $9x^2+24x+13$ ein Quadrat sein. Das Glied, worin x^2 vorkommt, ist bereits ein Quadrat, wenn nun auch die bestimmte Zahl 13 ein Quadrat, und $24x$ das doppelte Produkt aus der Wurzel von x^2 und von 13 wäre,

so wären die drei Bedingungen bereits in unbestimmten Zahlen erfüllt.

Aber die 13 entstehen, indem ich 2 mit 6 multiplicire, und 1 dazu addire; die 2 entsteht ferner, indem ich das Produkt $x \times 1$ verdoppele, und die 6 entsteht, indem ich das Produkt $3x \times 1$ verdoppele. Ich will also, daß der doppelte Coefficient von x in der einen Wurzel, mit dem doppelten Coefficienten von x in der anderen multiplicirt, ein Produkt gebe, das um 1 vermehrt, ein Quadrat wird. Aber das Produkt der verdoppelten Coefficienten ist das vierfache Produkt der Coefficienten selber, und ich will also, daß dies Vierfache um 1 vermehrt ein Quadrat werde.

Aber wenn man das vierfache Produkt zweier beliebigen Zahlen nimmt, und dazu das Quadrat ihres Unterschiedes addirt, so erhält man alle Mal ein Quadrat. Wenn ich also das Quadrat des Unterschiedes = 1 setze, so wird das vierfache Produkt gewiß ein Quadrat werden, wenn man noch 1 dazu addirt. Aber wenn das Quadrat des Unterschiedes 1 ist, so ist der Unterschied selbst ebenfalls 1, und wir müssen daher die Quadrate so bilden, daß die Coefficienten von x um 1 verschieden sind, nämlich von $x+1$ und $2x+1$.

Das Quadrat von $x+1$ ist $= x+2x+1$, zieht man davon 1 ab, so bleibt x^2+2x, daher muß das Produkt der ersten und zweiten Zahl x^2+2x sein. Man setze die zweite Zahl $= x$, so wird die erste $= x+2$.

Das Quadrat von $2x+1$ ist $4x^2+4x+1$; zieht man davon 1 ab, so bleibt $4x^2+4x$, also muß das Produkt der zweiten und dritten Zahl $=4x^2+4x$ sein. Aber die zweite Zahl war x, folglich ist die dritte Zahl $=4x+4$.

Und so ist in unbestimmten Ausdrücken die Aufgabe gelöst, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt, wobei man für x jeden beliebigen Zahlenwerth setzen kann; denn das heißt eben eine Aufgabe in unbestimmten Ausdrücken oder in allgemeinen Zahlen lösen, wenn der allgemeine Ausdruck für eine Zahl (ὑπόστασις) so beschaffen ist, daß, welchen bestimmten Werth man auch für die unbekannte Größe annehmen und dem allgemeinen Ausdruck anpassen mag, die Bedingungen der Aufgabe doch immer erfüllt werden.

XXI. Aufgabe.

Man soll vier Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man noch 1 dazu addirt.

Auflösung.

Zuerst soll das Produkt der ersten und zweiten Zahl, wenn ich 1 dazu addire, ein Quadrat werden; wenn ich also von einem beliebigen Quadrat 1 abziehe, so wird

der Rest das Produkt der ersten und zweiten Zahl sein. Ich mache das Quadrat von $x+1$, dies giebt x^2+2x+1, davon ziehe ich 1 ab, so bleibt x^2+2x als das Produkt der ersten und zweiten Zahl. Ich setze die erste Zahl $=x$, so wird die zweite $=x+2$ sein.

Es soll ferner das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn ich 1 dazu addire, ein Quadrat sein. Ich mache das Quadrat von $2x+1$, wobei ich, wegen der in der vorigen Aufgabe angestellten Betrachtung, den Coefficienten von x um 1 größer nehme; von dem Quadrat $4x^2+4x+1$ ziehe ich 1 ab, und nehme den Rest $4x^2+4x$ für das Produkt der ersten und dritten Zahl. Da nun die erste Zahl $=x$ war, so wird die dritte $=4x+4$ sein.

Es soll ferner das Produkt der ersten und vierten Zahl, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden. Ich mache daher das Quadrat von $3x+1$, wobei ich den Coefficienten von x wieder um 1 größer nehme, von dem Quadrat $9x^2+6x+1$ ziehe ich 1 ab, und nehme den Rest $9x^2+6x$ für das Produkt der ersten und vierten Zahl. Da nun die erste Zahl $=x$ war, so ist die vierte $=9x+6$.

Nun trifft es schon zu, daß das Produkt der dritten und vierten Zahl, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat wird. Aber wenn man zu dem Produkt der zweiten und dritten Zahl noch 1 addirt, so erhält man

$9x^2+24x+13$, und dies soll auch ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $=3x-4$, so wird $x=\frac{1}{16}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{1}{16}$, die zweite $\frac{33}{16}$, die dritte $\frac{68}{16}$, die vierte $\frac{195}{16}$.

XXII. Aufgabe.

Man soll drei proportionale Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied von je zweien ein Quadrat wird.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $=x$, die mittelste $=x+4$, damit der Unterschied ein Quadrat sei; die dritte Zahl aber sei $=x+13$, damit auch der Unterschied der zweiten und dritten ein Quadrat sei. Wenn nun der Unterschied der größten und kleinsten auch ein Quadrat wäre, so würde schon in allgemeinen Ausdrücken dem Theil der Aufgabe genügt, welcher verlangt, daß der Unterschied von je zweien der gesuchten Zahlen ein Quadrat sei.

Aber der Unterschied der größten und kleinsten Zahl ist 13, die Zahl 13 aber ist die Summe zweier Quadrate, 4 und 9. Ich muß also zuerst zwei Quadrate suchen, deren Summe wieder ein Quadrat wird; dies erreicht man aber sehr leicht, wenn man die Seiten eines

rechtwinkligen Dreiecks nimmt, und solche Zahlen sind z. B. 9 und 16.

Ich setze daher die erste Zahl $= x$, die zweite $= x+9$, die dritte $= x+16$, so ist der Unterschied von je zweien ein Quadrat.

Nun ist noch übrig, daß die drei Zahlen proportional sein sollen. Wenn aber drei Zahlen proportional sind, so ist das Produkt der beiden äußeren dem Quadrat der mittelsten gleich; das Produkt der beiden äußeren ist $= x^2+25x$, und das Quadrat der mittelsten $= x^2+18x+81$, folglich ist

$$x^2+25x = x^2+18x+81, \text{ und } x = \frac{81}{7}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{81}{7}$, die zweite $\frac{144}{7}$, die dritte $\frac{256}{7}$.

XXIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die körperliche Zahl, welche sie bilden, oder das Produkt von allen dreien ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Man setze das Produkt der drei Zahlen $= x^2+2x$, und die erste Zahl sei 1, so wird das Produkt der drei

Zahlen ein Quadrat, wenn man die erste dazu addirt. Nun soll das Produkt der drei Zahlen auch ein Quadrat werden, wenn man die zweite dazu addirt; wenn ich also von einem beliebigen Quadrate das Produkt x^2+2x abziehe, so habe ich die zweite Zahl. Ich mache das Quadrat von $x+3$, und wenn ich davon x^2+2x abziehe, so bleibt $4x+9$, ich setze also die zweite Zahl $=4x+9$.

Da nun das Produkt der drei Zahlen $=x^2+2x$, das Produkt der ersten und zweiten aber $4x+9$ sein soll, so erhalte ich die dritte Zahl, wenn ich x^2+2x durch $4x+9$ dividire. Diese Division ist nicht möglich; damit sie aber möglich werde, muß man es dahin bringen, daß sich verhalte $x^2:4x=2x:9$, oder verwechselt $x^2:2x=4x:9$. Nun ist x^2, wenn wir bloß auf den Coefficienten sehen, die Hälfte von $2x$, und wenn also $4x$ auch die Hälfte von 9 wäre, so ließe sich die Division bewerkstelligen.

Die $4x$ sind entstanden, indem ich $2x$ von $6x$ abzog, $6x$ aber ist das doppelte Produkt von x und der Zahl 3, oder der Coefficient 6 ist das Doppelte der Zahl 3; die 9 aber ist das Quadrat der Zahl 3. Es kommt also darauf an, statt der Zahl 3 eine andere von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Doppelte derselben, wenn man 2 davon abzieht, die Hälfte von ihrem Quadrate sei. Die gesuchte Zahl sei x; wenn man nun

von dem Doppelten derselben 2 abzieht, so hat man $2x-2$, ihr Quadrat aber ist x^2; wir setzen also

$$2x-2=\frac{1}{2}x^2, \text{ oder } 4x-4=x^2,$$

und es wird $x=2$.

Nunmehr kehre ich zu der ursprünglichen Aufgabe zurück. Wir hatten die erste Zahl $=1$, das Produkt aller drei Zahlen $=x^2+2x$ gesetzt. Nun soll das Produkt der drei Zahlen auch dann ein Quadrat werden, wenn man die zweite Zahl dazu addirt; wenn ich also von irgend einem Quadrate x^2+2x abziehe, so habe ich die zweite Zahl. Ich mache daher das Quadrat von x und einer Zahl, die so beschaffen ist, daß ihr Doppeltes weniger 2 die Hälfte ihres Quadrates sei; wir haben aber schon gezeigt, daß 2 diese Eigenschaft habe. Ich mache also das Quadrat von $x+2$, dies giebt x^2+4x+4; davon ziehe ich das Produkt der drei Zahlen nämlich x^2+2x ab, so ist die zweite Zahl $=2x+4$.

Wenn ich nun das Produkt der drei Zahlen durch das Produkt der ersten und zweiten oder durch $2x+4$ dividire, so erhalte ich die dritte Zahl $=\frac{1}{2}x$.

Endlich soll das Produkt der drei Zahlen auch dann noch ein Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl dazu addirt. Aber wenn man die dritte Zahl zu dem Produkte aller drei Zahlen addirt, so erhält

man $x^2 + 2\frac{1}{2}x$, und dies soll ein Quadrat sein. Man setze

$$x^2 + 2\frac{1}{2}x = 4x^2, \text{ so wird } x = \frac{5}{6}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{6}{6}$, die zweite $\frac{3\frac{1}{2}}{6}$, die dritte $\frac{2\frac{1}{2}}{6} = \frac{5}{12}$.

XXIV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl $= x$, das Produkt aller drei Zahlen $= x^2 + x$, so wird dies Produkt ein Quadrat, wenn man die erste der drei Zahlen davon abzieht. Wenn aber $x^2 + x$ das Produkt der drei Zahlen, und x die erste dieser Zahlen ist, so ist $x + 1$ das Produkt der zweiten und dritten Zahl. Die zweite Zahl sei 1, so ist die dritte Zahl $= x + 1$.

Nun soll das Produkt der drei Zahlen auch noch ein Quadrat bleiben, so wohl, wenn man die zweite als wenn man die dritte davon abzieht. Zieht man die zweite Zahl ab, so soll $x^2 + x - 1$ ein Quadrat sein, zieht man aber die dritte Zahl ab, so soll $x^2 - 1$ ein Quadrat sein. Hier findet also wieder die doppelte

Gleichung Statt. Ich nehme den Unterschied beider Zahlen, welcher x ist, und suche zwei Zahlen, welche x zu ihrem Produkte haben, nämlich die Faktoren $\frac{1}{2}$ und $2x$, von denen der letztere die doppelte Wurzel von x^2 ist. Hieraus setzt man die Gleichung an, wie schon früher gezeigt ist, und es wird $x = \frac{17}{8}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{17}{8}$, die zweite 1, die dritte $\frac{25}{8}$.

XXV. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in zwei andere von der Beschaffenheit theilen, daß ihr Produkt der Unterschied zwischen einem Cubus und seiner Wurzel werde.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 6, die erste der gesuchten Zahlen $= x$, die zweite also $= 6 - x$. Das Produkt dieser Zahlen soll der Unterschied eines Cubus und seiner Wurzel sein; dies Produkt ist aber $6x - x^2$, und dies soll dadurch entstehen, daß man von einem Cubus die Wurzel desselben abzieht.

Ich mache den Cubus von x mit beliebigem Coefficienten, weniger 1, z. B. von $2x - 1$. Wenn ich von

dem Cubus dieser Zahl seine Wurzel abziehe, so erhalte ich $8x^3 - 12x^2 + 4x$, und dies giebt die Gleichung

$$8x^3 - 12x^2 + 4x = 6x - x^2.$$

Wenn nun x an beiden Seiten gleiche Coefficienten hätte, so bliebe an der einen Seite der Gleichung nur der Cubus, an der andern Seite nur das Quadrat der unbekannten Größe, und der Werth x von ließe sich in rationalen Zahlen finden.]

Aber die $4x$ entstehen, indem man $2x$ von $3 \times 2x$ abzieht; wenn man aber $2x$ von $3 \times 2x$ abzieht, so bleibt $2 \times 2x$. Die Zahl 6 aber ist eine in der Aufgabe vorgeschriebene Zahl. Ich muß also statt $2x$ eine andere Zahl suchen, deren doppelter Coefficient 6 ist, und eine solche Zahl ist $3x$.

Damit also $6x - x^2$ der Unterschied eines Cubi und seiner Wurzel werde, setze ich die Wurzel des Cubi $= 3x - 1$. Wenn ich nun von dem Cubus dieser Zahl die Wurzel selbst wieder abziehe, so erhalte ich $27x^3 - 27x^2 + 6x$; dies giebt die Gleichung

$$27x^3 - 27x^2 + 6x = 6x - x^2, \text{ und } x = \frac{26}{27}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{26}{27}$, die zweite $\frac{136}{27}$.

XXVI. Aufgabe.

Man soll eine vorgeschriebene Zahl in drei andere Zahlen von der Beschaffenheit theilen, daß

das Produkt aus allen dreien eine Kubikzahl wird, welche die Summe der Unterschiede zwischen je zweien zu ihrer Wurzel hat.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 4, und da das Produkt von allen dreien eine Kubikzahl sein soll, so sei $4 = 8x^3$, also die Kubikwurzel $= 2x$. Nun ist der Unterschied der ersten und zweiten, der zweiten und dritten und der ersten und dritten Zahl, dem doppelten Unterschiede zwischen der ersten und dritten gleich, d. h. wenn man drei ungleiche Zahlen hat, so ist die Summe der Unterschiede zwischen je zweien dem doppelten Unterschiede der beiden äußersten gleich. Nun haben wir bei dem Ansatz die Wurzel des Cubus $= 2x$ genommen, daher muß $2x$ die Summe der Unterschiede, und der Unterschied der ersten und dritten Zahl $= x$ sein. Man setze für die erste Zahl x mit einem beliebigen Coefficienten z. B. $2x$, so ist die dritte Zahl $= 3x$, und da das Produkt aus allen drei Zahlen $= 8x^3$ sein soll, das Produkt der ersten und dritten aber $= 6x^2$ ist, so muß die zweite Zahl $= 1\frac{1}{3}x$ sein.

Wäre nun die zweite Zahl kleiner als die dritte und größer als die erste Zahl, so wäre die Aufgabe gelöst. Aber der Coefficient der zweiten Zahl entstand, indem wir 8 durch das Produkt der ersten und dritten Zahl

dividirten. Die erste und dritte Zahl sind aber nicht willkührlich gewählt, sondern ihr Unterschied mußte 1 sein. Es kommt also darauf an, daß wir zwei um 1 verschiedene Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man 8 durch das Produkt beider dividirt, der Quotient kleiner werde als die größere, aber größer als die kleinere der beiden Zahlen.

Ich setze also die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= x + 1$, und wenn ich nun 8 durch das Produkt beider oder durch $x^2 + x$ dividire, so ist der zwischen beiden liegende Quotient $\frac{8}{x^2 + x}$. Dieser Quotient soll also größer als x, aber kleiner als $x + 1$ sein. Da nun der Unterschied der ersten und zweiten Zahl kleiner sein muß als 1, so wird die zweite Zahl, wenn man 1 dazu addirt, größer als die erste Zahl sein. Wenn man aber zu der zweiten Zahl 1 addirt, diese 1 aber in einen Bruch von dem Nenner $x^2 + x$ verwandelt, so erhält man $\frac{x^2 + x + 8}{x^2 + x}$. Diese Zahl ist also größer als $x + 1$, und wenn man beides mit dem Nenner $x^2 + x$ multiplicirt, so wird $x^2 + x + 8$ größer als $x^3 + 2x^2 + x$.

Endlich ziehe man Gleiches von Gleichem ab, so findet man, daß 8 größer sein muß als $x^3 + x^2$.

Jetzt mache ich einen Cubus, in welchem $x^3 + x^2$ vorkommt, die Wurzel desselben wird also $= x + \frac{1}{3}$ sein. Nun ist 8 größer als $x^3 + x^2$, eben so ist auch der

Cubus von $x+\frac{1}{3}$ größer als x^3+x^2. Wenn wir also die Wurzeln 2 und $x+\frac{1}{3}$ gleich setzen, so wird $x=\frac{5}{3}$.

Die erste Zahl wird also $\frac{8}{3}$, die zweite $\frac{9}{5}$, die dritte $\frac{5}{3}$ sein, und wenn man alles mit 15 multiplicirt, so ist die erste Zahl 40, die zweite 27, die dritte 25, denn durch die Multiplication schafft man die Brüche weg, und die gefundenen Zahlen haben die Eigenschaft, daß das Produkt aus allen dreien eine Kubikzahl ist, welche die Summe sämmtlicher Unterschiede zu ihrer Wurzel hat.

Nunmehr setze ich die erste Zahl $=40x$, die zweite $=27x$, die dritte $=25x$, so ist das Produkt aller drei Zahlen gewiß eine Kubikzahl, und die Summe aller Unterschiede ist die Wurzel derselben. Nun soll aber auch die Summe der drei Zahlen der gegebenen Zahl 4 gleich sein, also ist

$$92x=4, \text{ und } x=\frac{1}{23}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{40}{23}$, die zweite $\frac{27}{23}$, die dritte $\frac{25}{23}$.

XXVII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, wenn man jedwede der beiden Zahlen dazu addirt.

Auf-

Auflösung.

Ich setze die erste Zahl $= x$ mit irgend einem kubischen Coefficienten z. B. $= 8x$, die zweite Zahl aber setze ich $= x^2 - 1$, so wird die eine der beiden Bedingungen erfüllt, denn das Produkt beider Zahlen wird ein Cubus, wenn man die erste der beiden Zahlen dazu addirt.

Nun soll eben dieses Produkt auch dann noch ein Cubus werden, wenn man die zweite Zahl dazu addirt. Wenn man aber zu diesem Produkte die zweite Zahl addirt, so erhält man $8x^3 + x^2 - 8x - 1$, und dieser Ausdruck soll ein Cubus sein. Ich nehme $2x - 1$ als die Wurzel an, so wird

$$8x^3 + x^2 - 8x - 1 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1,$$

$$\text{und } x = \frac{14}{13}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{112}{13}$, die zweite $\frac{27}{169}$.

XXVIII. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, wenn man jedwede der beiden Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Man setze die erste Zahl, wie in der vorigen Aufgabe, $= 8x$, die zweite $= x^2 + 1$, so wird das Produkt beider eine Kubikzahl, wenn man die erste der beiden Zahlen davon abzieht. Aber wenn man von dem Produkte beider Zahlen die zweite Zahl abzieht, so erhält man $8x^3 + 8x - x^2 - 1$, und dies soll ebenfalls ein Cubus sein.

Da dies unmöglich ist, so setze ich die erste Zahl wieder $= x$ mit irgend einem kubischen Coefficienten, und addire dazu 1, die erste Zahl sei also $= 8x + 1$, die zweite $= x^2$, so wird das Produkt beider ein Cubus, wenn man die zweite Zahl davon abzieht; wenn man aber von eben diesem Produkte die erste Zahl abzieht, so erhält man $8x^3 + x^2 - 8x - 1$, und dies soll ein Cubus sein. Ich setze die Wurzel $= 2x - 1$, so wird $x = \frac{14}{13}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{125}{13}$, die zweite $\frac{196}{169}$.

XXIX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, man mag die Summe der Zahlen dazu addiren, oder davon abziehen.

Auflösung.

Wenn man zu dem Produkt beider Zahlen die Summe derselben addirt, so soll man eine Kubikzahl erhalten, diese Kubikzahl sei 64; und wenn man von dem Produkt beider Zahlen die Summe derselben abzieht, so soll wieder eine Kubikzahl entstehen, diese Kubikzahl sei 8. Nun ist die doppelte Summe der Zahlen dem Unterschiede dieser Kubikzahlen gleich, oder $=56$, die Summe der Zahlen also $=28$. Wenn aber das Produkt beider Zahlen und ihre Summe zusammen genommen 64 giebt, so muß das Produkt beider Zahlen 36 sein. Es kommt also darauf an, zwei Zahlen zu suchen, deren Summe 28, und deren Produkt 36 ist. Man setze die größere der beiden Zahlen $=x+14$, so ist die kleinere $14-x$, und nun soll das Produkt beider Zahlen, nämlich $196-x^2=36$ sein, und man erhält also $x^2=160$.

Wäre nun 160 ein Quadrat, so wäre die Aufgabe gelöst. Aber 160 ist der Rest, wenn man 36 von 196 abzieht, 196 ist das Quadrat von 14, und 14 die Hälfte von 28; daher ist 196 das Quadrat der Hälfte von 28. Die Zahl 28 ist die Hälfte von 56, und daher ist 14 der vierte Theil von 56. Ferner ist 56 der Unterschied der Kubikzahlen 64 und 8, 36 aber die Hälfte von der Summe beider Cubi. Es kommt also darauf an, zwei Kubikzahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man den vierten Theil ihres Unterschiedes ins Quadrat erhebt, und von diesem Qua-

drat die halbe Summe der beiden Kubikzahlen abzieht, der Rest ein Quadrat wird.

Man setze die Wurzel des größern Cubus $= x+1$, die des kleinern $= x-1$, der größere Cubus ist also x^3+3x^2+3x+1, der kleinere $x^3+3x-3x^2-1$, der vierte Theil von dem Unterschiede dieser Cubi $1\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$, und das Quadrat davon $2\frac{1}{4}x^4+1\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$. Zieht man davon die halbe Summe der Cubi, nämlich x^3+3x ab, so bleibt $2\frac{1}{4}x^4+1\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}-x^3-3x$, und dies soll ein Quadrat sein. Um die Brüche wegzuschaffen, multiplicire man den ganzen Ausdruck mit 4, so erhält man $9x^4+6x^2+1-4x^3-12x$, und dieser Ausdruck muß auch ein Quadrat sein. Man nehme $3x^2+1-6x$ als Wurzel an, so ist das Quadrat selbst $9x^4+42x^2+1-36x^3-12x$. Man hat also die Gleichung

$$9x^4+6x^2+1-4x^3-12x = 9x^4+42x^2+1-36x^3-12x.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$32x^3 = 36x^2 \text{ und } x = \frac{9}{8}.$$

Nun hatte ich die Wurzel des ersten Cubus $= x+1$, die des zweiten $= x-1$ gesetzt, jene ist also $\frac{17}{8}$, diese $\frac{1}{8}$, und die Cubi selbst sind $\frac{4913}{512}$ und $\frac{1}{512}$.

Nunmehr komme ich wieder auf die ursprüngliche Aufgabe, und untersuche, wie man zwei Zahlen von der Beschaffenheit findet, daß ihr Produkt $\frac{4913}{512}$ macht, wenn man die Summe derselben dazu addirt, $\frac{1}{512}$ dagegen, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht. Da nun das Produkt dieser Zahlen $\frac{4913}{512}$ giebt, wenn man die Summe der Zahlen dazu addirt, $\frac{1}{512}$ dagegen, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht, so ist der Unterschied dieser Cubi, nämlich $\frac{4912}{512}$ die doppelte Summe der Zahlen, die Summe selbst also $\frac{2456}{512}$. Das Produkt und die Summe der Zahlen zusammen genommen giebt $\frac{4913}{512}$, die Summe ist, wie wir gefunden haben $\frac{2456}{512}$, also ist das Produkt der beiden Zahlen $\frac{2457}{512}$. Das fernere Verfahren ist zwar schon in dem ersten Buche gezeigt worden, wir wollen es aber noch in Beziehung auf die vorliegende Aufgabe entwickeln. Man setze die erste Zahl $= x$ und der Hälfte derjenigen Zahl, welche die Summe beider Zahlen ausdrückt, also $= x + \frac{1228}{512}$, so ist die andere Zahl $\frac{1228}{512} - x$; die Summe dieser beiden Ausdrücke ist wirklich $= \frac{1228}{512}$, ihr Produkt aber ist $\frac{1507984}{262144} - x^2$. Man hat also die Gleichung

$$\frac{1507984}{262144} - x^2 = \frac{2456}{512}.$$

Man multiplicire beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner 262144, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so wird

$$262144x^2 = 250000, \text{ und } x = \frac{500}{512}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{1728}{512}$, die zweite $\frac{728}{512}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XXX. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Cubus wird, man mag die Summe der Zahlen dazu addiren oder davon abziehen.

Auflösung.

Bei dieser Aufgabe wendet man folgenden Satz an: wenn man ein Quadrat in zwei Stücke theilt, nämlich in die Wurzel und den Rest, so wird das Produkt dieser Zahlen immer ein Cubus, wenn man die Summe der beiden Zahlen dazu addirt. Man nehme also ein Quadrat $= x^2$, und theile es in seine Wurzel und den Rest, also in x und $x^2 - x$, so wird das Produkt beider Zahlen, wenn man die Summe beider dazu addirt, eine Kubikzahl geben.

Nun soll eben dieses Produkt, wenn man die Summe der Zahlen davon abzieht, ebenfalls eine Kubikzahl geben, man erhält durch diese Rechnung aber $x^3 - 2x^2$,

und dies soll ein Cubus sein, der kleiner als x^3 sein muß. Ich mache den Cubus von $\frac{1}{2}x$, dieser ist $\frac{1}{8}x^3$, und setze

$$x^3 - 2x^2 = \frac{1}{8}x^3,$$

oder, wenn ich alles mit 8 multiplicire,

$$8x^3 - 16x^2 = x^3, \text{ also } x = \frac{16}{7}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{16}{7}$, die zweite $\frac{144}{49}$.

XXXI. Aufgabe.

Man soll vier Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe der Zahlen und die Summe ihrer Wurzeln zusammen genommen eine vorgeschriebene Zahl gebe.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 12. Wenn man zu einem Quadrat noch seine Wurzel und $\frac{1}{4}$ addirt, so erhält man alle Mal ein Quadrat, und wenn man von der Wurzel desselben $\frac{1}{2}$ abzieht, so erhält man die Wurzel des ersten Quadrats. Die vier gesuchten Quadrate und ihre Wurzeln zusammen genommen geben 12, wenn man aber zu jedem dieser Quadrate noch außer-

dem $\frac{1}{4}$ addirt, so geben sie die Summe von vier Quadraten. Wenn man aber zu 12 noch vier Mal $\frac{1}{4}$ oder im Ganzen 1 hinzulegt, so erhält man 13. Ich muß also 13 in vier Quadrate theilen, und wenn ich dann von der Wurzel eines jeden Quadrats $\frac{1}{2}$ abziehe, so habe ich die Wurzeln der vier gesuchten Quadrate.

Die Zahl 13 besteht aus zwei Quadraten 4 und 9, jedes derselben theile ich wieder in zwei Quadrate, das erste in $\frac{64}{25}$ und $\frac{36}{25}$, das zweite in $\frac{144}{25}$ und $\frac{81}{25}$. Nun nehme ich die Wurzel jedes dieser Quadrate, nämlich $\frac{8}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$ und $\frac{9}{5}$, und ziehe von jeder $\frac{1}{2}$ ab, so erhalte ich die Wurzeln der gesuchten Quadrate $\frac{11}{10}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{10}$, $\frac{13}{10}$. Die gesuchten Quadrate selbst sind also $\frac{121}{100}$, $\frac{49}{100}$, $\frac{361}{100}$ und $\frac{169}{100}$.

XXXII. Aufgabe.

Man soll vier Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied zwischen der Summe dieser Quadrate und der Summe ihrer Wurzeln eine vorgeschriebene Zahl gebe.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 4, und nun verlange ich, daß die Unterschiede zwischen dem ersten Quadrat und dessen Wurzel, dem zweiten Quadrat und dessen Wurzel, ferner zwischen dem dritten und vierten Quadrat und deren Wurzel, zusammen genommen die Zahl 4 geben. Wenn man aber von einem Quadrat dessen Wurzel abzieht, und $\frac{1}{4}$ dazu addirt, so erhält man wieder ein Quadrat, und wenn man zu der Wurzel desselben $\frac{1}{2}$ addirt, so erhält man die Wurzel des ersten Quadrats. Wenn man also von den vier gesuchten Quadraten ihre Wurzeln abzieht, und vier Mal $\frac{1}{4}$ oder 1 dazu addirt, so erhält man die Summe von vier Quadraten. Wenn man aber von den gesuchten Quadraten ihre Wurzeln abzieht, so ist die Summe der Unterschiede 4, und wenn man 1 dazu addirt, so erhält man 5.

Es kommt also darauf an, die Zahl 5 in vier Quadrate zu theilen, und wenn ich zu den Wurzeln der einzelnen Quadrate $\frac{1}{2}$ addire, so erhalte ich die Wurzeln der gesuchten Quadrate. Die Zahl 5 besteht aber aus den vier Quadraten $\frac{9}{25}, \frac{16}{25}, \frac{36}{25}, \frac{64}{25}$. Nun nehme ich die Wurzeln dieser Quadrate $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$, und ad-

dire zu jeder Wurzel $\frac{1}{2}$, so finde ich die Wurzeln der gesuchten Quadrate $\frac{11}{10}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{17}{10}$, $\frac{21}{10}$; die gesuchten Quadrate sind also $\frac{121}{100}$, $\frac{169}{100}$, $\frac{289}{100}$ und $\frac{441}{100}$.

XXXIII. Aufgabe.

Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück eine gegebene Zahl addiren, und das Produkt beider soll ein Quadrat sein.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß man 1 in zwei Stücke theilen, zu dem einen Stücke 3, zu dem anderen 5 addiren, und daß das Produkt der so entstandenen Zahlen ein Quadrat werden solle.

Man setze das erste Stück $= x$, so ist das zweite $= 1 - x$; wenn ich nun zu dem ersten Stücke 3 addire, so kommt $x + 3$, und wenn ich zu dem zweiten 5 addire, so kommt $6 - x$; das Produkt dieser beiden Zahlen aber ist $3x + 18 - x^2$, und da dies ein Quadrat sein soll, so setze man

$$3x + 18 - x^2 = 4x^2.$$

Nun addire man an beiden Seiten die fehlenden Größen, so wird

$$3x + 18 = 5x^2,$$

und es findet keine Auflösung in rationalen Zahlen Statt.

Aber $5x^2$ hat zum Coefficienten eine um 1 vergrößerte Quadratzahl; diese muß also, mit 18 multiplicirt, und um das Quadrat des halben Coefficienten von $3x$ oder um $2\frac{1}{4}$ vergrößert, ein Quadrat geben. Ich muß daher statt der Zahl 4 ein Quadrat suchen, welches, um 1 vergrößert, dann mit 18 multiplicirt, und um $2\frac{1}{4}$ vergrößert, wieder ein Quadrat wird. Dies Quadrat sei $= x^2$. Wenn man dazu 1 addirt, dann mit 18 multiplicirt, und $2\frac{1}{4}$ dazu addirt, so erhält man $18x^2 + 20\frac{1}{4}$, und dies soll ein Quadrat sein. Man multiplicire aber mit 4, so muß auch $72x^2 + 81$ ein Quadrat sein. Ich nehme $8x + 9$ als Wurzel dieses Quadrats an, so wird $x = 18$, und das gesuchte Quadrat 324.

Nunmehr komme ich wieder auf die ursprüngliche Aufgabe, und setze

$$3x + 18 - x^2 = 324x^2,$$

so wird $x = \frac{78}{325} = \frac{6}{25}$. Die erste Zahl ist also $\frac{6}{25}$, die zweite $\frac{19}{25}$.

XXXIV. Aufgabe.

Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück eine vorgeschriebene Zahl addiren, und das Produkt der dadurch entstehenden Zahlen soll ein Quadrat sein.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß man die Zahl 1 in zwei Stücke theile, zu dem einen 3, zu dem anderen 5 addire, und daß das Produkt der so entstandenen Zahlen ein Quadrat sein solle.

Man setze die erste Zahl $= x - 3$, weil man nachher 3 zu derselben addiren soll, so wird die zweite Zahl $4 - x$ sein. Addire ich nun zu der ersten Zahl 3, so erhalte ich x^2, addire ich aber zu der zweiten 5, so erhalte ich $9 - x$, und das Produkt beider Zahlen wird $= 9x - x^2$. Da dies ein Quadrat sein soll, so setze man

$$9x - x^2 = 4x^2, \text{ so wird } x = \frac{9}{5}.$$

Wenn ich diesen Werth von x in die allgemeinen Ausdrücke für beide Stücke von 1 setzen will, so kann ich 3 nicht von x abziehen; sondern der Werth von x muß größer als 3 und kleiner als 4 sein. Nun erhält man den Werth von x, wenn man 9 durch 5 dividirt, wo der Divisor ein um 1 vergrößertes Quadrat ist. Wenn aber 9, durch das um 1 vergrößerte Quadrat dividirt, einen Quotienten geben soll, der größer als 3 ist, so muß der Divisor kleiner als 3 sein. Der Divisor ist ein um 1 vergrößertes Quadrat, folglich muß das um 1 vergrößerte Quadrat kleiner als 3, und wenn man also 1 davon abzieht, so muß das Quadrat selbst kleiner als 2 sein.

Da wir ferner verlangen, daß der Quotient kleiner als 4 sei, so muß der Divisor größer als $2\frac{1}{4}$ sein. Der Divisor ist aber ein um 1 vergrößertes Quadrat, folglich muß das um 1 vergrößerte Quadrat größer als $2\frac{1}{4}$, und wenn man 1 abzieht, so muß das Quadrat selbst größer als $1\frac{1}{4}$ sei. Wir haben aber schon gezeigt, daß es kleiner als 2 sein müsse, und es kommt also darauf an, daß ich ein Quadrat suche, welches größer als $1\frac{1}{4}$, und kleiner als 2 ist. Ich verwandele beide Zahlen in Brüche, deren Nenner ein Quadrat z. B. 64 ist, und erhalte $\frac{80}{64}$ und $\frac{128}{64}$; nun ist die Sache leicht, denn es ist z. B. $\frac{100}{64}$ oder $\frac{25}{16}$ ein Quadrat von der verlangten Beschaffenheit.

Jetzt kehre ich zu der ursprünglichen Aufgabe zurück; ich suchte nämlich, wie $9x - x^2$ ein Quadrat werden könne. Ich setze es dem vorhin gefundenen Quadrat gleich, also ist

$$\frac{25}{16}x^2 = 9x - x^2, \text{ und } x = \frac{144}{25}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{21}{41}$, die zweite $\frac{20}{41}$.

XXXV. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in drei Zahlen von der Beschaffenheit theilen, daß das Produkt

der ersten und zweiten ein Quadrat wird, man mag die dritte Zahl davon abziehen oder dazu addiren.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 6; nun setze man die dritte der gesuchten Zahlen $= x$, für die zweite nehme man eine beliebige Zahl, welche kleiner als 6 ist, z. B. 2, so ist die dritte Zahl $= 4 - x$. Nun sind noch zwei Bedingungen übrig, nämlich, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, sowohl wenn man die dritte Zahl dazu addirt, als wenn man die dritte Zahl davon abzieht.

Hier hat man nun wieder die doppelte Gleichung, denn sowohl $8 - x$, als $8 - 3x$ soll ein Quadrat sein. Die Gleichung läßt sich aber nicht auflösen, weil die Coefficienten von x sich nicht wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Aber der Coefficient von x ist um 1 kleiner als die willkührlich angenommene Zahl 2, und der Coefficient von $3x$ ist um 1 größer als eben diese Zahl 2. Es kommt also darauf an, statt der Zahl 2 eine andere Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß die um 1 größere Zahl zu der um 1 kleineren Zahl sich wie ein Quadrat zu einem anderen verhalte.

Ich setze die gesuchte Zahl $= x$, die um 1 größere ist also $x + 1$, und die um 1 kleinere ist $x - 1$, und nun sollen sich diese beiden Zahlen wie zwei Quadrate, z. B.

wie 4:1 verhalten. Wenn ich $x-1$ mit 4 multiplicire, so ist das Produkt $4x-4$, und wenn ich $x+1$ mit 1 multiplicire, so ist das Produkt $x+1$. Wenn nun die beiden Zahlen $x+1$ und $x-1$ sich wie die beiden Quadrate oder wie 4:1 verhalten, so ist

$$4x-4=x+1, \text{ und } x=\frac{5}{3}.$$

Ich setze nunmehr die zweite Zahl $=\frac{5}{3}$, die dritte aber ist $=x$, folglich die erste $=\frac{13}{3}-x$. Nun müssen wir noch die beiden Bedingungen erfüllen, nämlich daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat wird, man mag die dritte dazu addiren, oder davon abziehen. Wenn man aber zu dem Produkt der beiden ersten Zahlen die dritte addirt, so erhält man $\frac{65}{9}-\frac{2}{3}x$, und dies soll ein Quadrat sein; wenn man aber von eben diesem Produkte die dritte Zahl abzieht, so erhält man $\frac{65}{9}-\frac{8}{3}x$, und dies soll auch ein Quadrat sein. Man multiplicire beide Ausdrücke mit 9, so müssen $65-6x$ und $65-24x$ Quadrate sein. Ich multiplicire die erste Gleichung mit 4, damit in beiden x gleiche Coefficienten erhält, so sollen $260-24x$ und $65-24x$ Quadrate sein. Ich nehme nun den Unterschied beider Quadrate, dieser ist 195; diesen Unterschied zerfälle ich in die beiden Faktoren 15 und 13. Das Quadrat des halben Unterschiedes setze ich dem kleineren Ausdruck gleich, so wird $x=\frac{8}{3}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{5}{3}$, die zweite $\frac{5}{3}$, die dritte $\frac{8}{3}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XXXVI. Aufgabe.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn die eine von der anderen denselben aliquoten Theil, oder dieselben aliquoten Theile erhält, die Summe zu dem Rest in beiden Fällen ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß die erste Zahl, wenn sie von der zweiten einen oder mehre aliquote Theile erhält, das Dreifache des Restes, die zweite aber, wenn sie von der ersten denselben aliquoten Theil oder dieselben aliquoten Theile erhält, das Fünffache des Restes werde.

Man setze die zweite Zahl $= x + 1$, der aliquote Theil aber, oder die aliquoten Theile, die sie abgeben soll, mögen 1 sein, so ist die erste Zahl $= 3x - 1$, denn auf diese Weise wird die erste Zahl das Dreifache der zweiten, nachdem sie von der zweiten einen oder mehre aliquote Theile, deren Werth $= 1$ ist, erhalten hat.

Nun soll aber auch die zweite Zahl das Fünffache von dem Reste der ersten Zahl werden, wenn sie von dieser

dieser denselben aliquoten Theil oder dieselben aliquoten Theile erhalten hat. Die Summe beider Zahlen ist $4x$, nun soll die zweite etwas erhalten, was die erste abgiebt, und dann soll die Summe das Fünffache des Restes sein; eben diese Summe und der Rest müssen daher noch immer $= 4x$ sein, wir werden also den Rest der ersten Zahl erhalten, wenn wir das Sechstel von $4x$ oder $\frac{2}{3}x$ nehmen. Wenn wir also $\frac{2}{3}x$ von $3x-1$ abziehen, so erhalten wir den aliquoten Theil oder die aliquoten Theile, welche die erste Zahl abgiebt. Wenn wir aber diese Subtraction vollziehen, so erhalten wir $\frac{7}{3}x-1$, und dies ist der aliquote Theil oder die aliquoten Theile, welche die erste Zahl an die zweite abgiebt, denn wenn die zweite Zahl von der ersten $\frac{7}{3}x-1$ erhält, so wird sie das Fünffache von dem Reste der ersten Zahl.

Nun müssen wir noch untersuchen, ob $\frac{7}{3}x-1$ derselbe aliquote Theil oder dieselben aliquoten Theile von $3x-1$ sind, welcher 1 von $x+1$ ist. Wenn man dies aber bewirken will, so muß man das Produkt der Faktoren $(\frac{7}{3}x-1)\times(x+1)$ und das Produkt $(3x-1)\times 1$ einander gleich setzen, d. h. man muß jede der beiden Zahlen mit dem aliquoten Theil der andern multipliciren. Auf diese Weise erhält man aber

$$\frac{7}{3}x^2+\frac{4}{3}x-1=3x-1, \text{ und } x=\frac{5}{7}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{8}{7}$, die zweite $\frac{12}{7}$; nun sollte 1 der aliquote Theil der zweiten Zahl sein, wir wollen also suchen, was für ein Theil von der zweiten Zahl 1 sein werde; sie ist $\frac{7}{12}$. Nun multiplicire ich beide Zahlen mit 7, so wird die erste Zahl 8, und die zweite 12, und die aliquoten Theile sollen $\frac{7}{12}$ von jeder Zahl betragen. Da aber die erste Zahl sich nicht durch 12 ohne Rest theilen läßt, so multiplicire ich beide Zahlen nochmals mit 3, damit ich nicht Brüche erhalte, und nun wird die erste Zahl 24, die zweite 36, die aliquoten Theile aber, oder $\frac{7}{12}$ der ersten sind 14, $\frac{7}{12}$ der zweiten aber 21, und der Beweis fällt in die Augen.

XXXVII. Aufgabe.

Man soll in unbestimmten Ausdrücken zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt und die Summe beider Zahlen zusammen genommen eine vorgeschriebene Zahl geben.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 8. Man setze die erste der gesuchten Zahlen $= x$, die zweite sei 3, so giebt das

Produkt mit der Summe beider zusammen genommen $4x+3$. Man hat also die Gleichung

$$4x+3=8, \text{ und } x=\frac{5}{4}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{5}{4}$, die zweite 3. Nunmehr überlege ich, woher x den Werth $\frac{5}{4}$ erhalten hat; offenbar dadurch, daß ich 5 durch 4 dividirt habe. Aber 5 ist der Rest, wenn ich 3 von 8 abziehe, und 4 ist die um 1 vergrößerte zweite Zahl. Wenn ich also die zweite Zahl willkührlich nehme, sie von 8 abziehe, und den Rest durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, so erhalte ich die erste. Z. B. die zweite Zahl sei $x-1$; ich ziehe sie von 8 ab, so bleibt $9-x$, den Rest dividire ich durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl, oder durch x, so wird die erste Zahl $\frac{9-x}{x}$, und so ist die Aufgabe in unbestimmten Ausdrücken gelöst, denn das Produkt beider Zahlen mit der Summe derselben zusammen genommen, giebt 8. Eine Aufgabe heißt aber in unbestimmten Ausdrücken gelöst, wenn man für x jeden beliebigen Zahlenwerth setzen kann.

XXXVIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Produkte von je zweien, wenn noch die Summe der beiden Zahlen dazu kommt,

vorgeschriebenen Zahlen gleich werden. Die gegebenen Zahlen müssen aber um 1 verkleinerte Quadratzahlen sein.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl nebst der Summe beider die Zahl 8, das Produkt der zweiten und dritten nebst der Summe beider die Zahl 15, endlich das Produkt der ersten und zweiten nebst der Summe beider die Zahl 24 geben solle.

Zuerst soll das Produkt der ersten und zweiten Zahl nebst der Summe beider die Zahl 8 geben; wenn ich nun die zweite Zahl ganz beliebig wähle, sie von 8 abziehe und den Rest durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, so habe ich die erste Zahl. Die zweite Zahl sei $x-1$, wenn ich diese von 8 abziehe und den Rest durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl dividire, so wird die erste Zahl $= \frac{9}{x} - 1$.

Es soll ferner das Produkt der zweiten und dritten nebst der Summe beider die Zahl 15 geben. Ich ziehe also wieder $x-1$ von 15 ab, und dividire den Rest durch die um 1 vergrößerte zweite Zahl oder durch x, so erhalte ich $\frac{16}{x} - 1$, und das ist die dritte Zahl.

Endlich soll auch das Produkt der ersten und drit-

ten nebst der Summe beider die Zahl 24 geben, es giebt aber $\frac{144}{x^2} - 1$; man hat also die Gleichung

$$\frac{144}{x^2} - 1 = 24, \text{ und } x = \frac{12}{5}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{33}{12}$, die zweite $\frac{7}{5}$, die dritte $\frac{63}{12}$, und wenn man alle drei Zahlen auf denselben Nenner bringt, so wird die erste $\frac{165}{60}$, die zweite $\frac{84}{60}$, die dritte $\frac{240}{60}$.

XXXIX. Aufgabe.

Man soll einen allgemeinen Ausdruck für zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt einer vorgeschriebenen Zahl gleich wird, wenn man die Summe der beiden Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 8. Man setze die erste Zahl $= x$, die zweite $= 3$; wenn man nun von dem Produkt dieser Zahlen die Summe derselben abzieht, so erhält man $2x - 3$. Es ist also

$$2x - 3 = 8, \text{ und } x = 5\frac{1}{2}.$$

Die erste Zahl ist also $5\frac{1}{2}$, die zweite 3. Nun überlege ich wieder, wie x den Werth $5\frac{1}{2}$ erhalten hat;

offenbar, indem ich 11 durch 2 dividirte. Aber 11 ist die Summe der gegebenen und der zweiten Zahl, und der Coefficient von 2x ist die um 1 verminderte zweite Zahl. Wenn ich also die zweite Zahl beliebig wähle, dazu die gegebene Zahl addire, und die Summe durch die um 1 verminderte zweite Zahl dividire, so erhalte ich die erste Zahl.

Die zweite Zahl sei $= x+1$, dazu addire ich 8, so erhalte ich $x+9$; diese Summe dividire ich durch die um 1 verminderte zweite Zahl oder durch x, so wird die erste Zahl $= 1+\frac{9}{x}$, und so ist die Aufgabe in allgemeinen Ausdrücken gelöst, denn das Produkt beider Zahlen giebt 8, wenn ich die Summe beider Zahlen davon abziehe.

XL. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien einer vorgeschriebenen Zahl gleich wird, wenn man die Summe der beiden Zahlen davon abzieht. Die vorgeschriebenen Zahlen müssen aber um 1 verminderte Quadratzahlen sein.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß das Produkt der ersten und zweiten die Zahl 8, das Produkt der zweiten

und dritten die Zahl 15, das Produkt der ersten und dritten die Zahl 24 gebe, wenn man in jedem Falle die Summe der beiden Faktoren davon abzieht.

Zuerst soll das Produkt der ersten und zweiten die Zahl 8 geben, wenn man die Summe beider davon abzieht. Wenn ich die zweite Zahl beliebig wähle, dazu die vorgeschriebene Zahl 8 addire, und die Summe durch die um 1 verminderte zweite Zahl dividire, so habe ich nach dem vorhergehenden Lehnsatz die erste Zahl. Die zweite Zahl sei also $= x + 1$, dazu addire ich 8; dies giebt $x + 9$. Diese Summe dividire ich durch die um 1 verminderte zweite Zahl oder durch x, so erhalte ich $1 + \frac{9}{x}$, und dies ist die erste Zahl. Auf dieselbe Art finde ich aber die dritte Zahl $= 1 + \frac{16}{x}$, und so sind bereits zwei Bedingungen erfüllt.

Nun soll auch noch das Produkt der ersten und dritten die Zahl 24 geben, wenn man die Summe der beiden Faktoren davon abzieht. Man erhält also die Gleichung

$$\frac{144}{x^2} - 1 = 24, \text{ und } x = \frac{12}{5}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{57}{12}$, die zweite $\frac{17}{5}$, die dritte $\frac{92}{12}$; will man aber überall gleiche Nenner haben, so verwandele man den Nenner in 60; dann wird die erste Zahl $\frac{285}{60}$, die zweite $\frac{204}{60}$, die dritte $\frac{460}{60}$ sein.

XLI. Aufgabe.

Man soll einen allgemeinen Ausdruck für zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt zu ihrer Summe ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß das Produkt das Dreifache der Summe sein solle. Man setze die erste Zahl $= x$, die zweite sei $= 5$, so ist ihr Produkt $5x$, und dies soll das Dreifache von $x + 5$ sein, daher ist

$$5x = 3x + 15, \text{ und } x = 7\tfrac{1}{2}.$$

Nun überlege ich, wie x den Werth $7\frac{1}{2}$ erhalten hat, nämlich dadurch, daß ich 15 durch 2 dividirte. Aber 15 ist ein Vielfaches der zweiten Zahl, und steht zu dieser in dem vorgeschriebenen Verhältniß. Dagegen ist 2 der Unterschied der zweiten Zahl und des Exponenten des Verhältnisses. Wenn wir also die zweite Zahl beliebig wählen, sie mit dem Exponenten des vorgeschriebenen Verhältnisses multipliciren, und das Produkt mit dem Unterschiede zwischen der zweiten Zahl und dem gegebenen Exponenten dividiren, so erhalten wir die erste Zahl. Die zweite Zahl sei z. B. $= x$, diese multiplicire ich mit dem Exponenten des Verhältnisses, giebt $3x$.

Wenn ich dies nun durch den Unterschied zwischen der zweiten Zahl und dem gegebenen Exponenten oder mit $x-3$ dividire, so wird die erste Zahl $=\frac{3x}{x-3}$.

XLII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien zu der Summe derselben ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß das Produkt der ersten und zweiten das Dreifache, das Produkt der zweiten und dritten das Vierfache, das Produkt der ersten und dritten das Fünffache von der Summe der jedesmaligen Faktoren sein solle.

Man setze die zweite Zahl $=x$, so ist die erste nach dem vorhergehenden Lehnsatz $=\frac{3x}{x-3}$, die dritte aber nach eben diesem Verfahren $=\frac{4x}{x-4}$. Nun soll auch das Produkt der ersten und dritten das Fünffache von der Summe beider sein. Aber das Produkt der ersten und dritten ist $\frac{12x^2}{x^2-7x+12}$, die Summe beider Zahlen aber ist $\frac{7x^2-24x}{x^2-7x+12}$. Diese Summe findet man so.

Man soll zwei Brüche addiren, nämlich $\frac{3x}{x-3}$ und $\frac{4x}{x-4}$, man multiplicirt daher beide Zahlen mit den verwechselten Nennern, nämlich $3x$ mit dem Nenner des andern Bruches oder mit $x-4$, und $4x$ mit dem Nenner des andern Bruchs oder mit $x-3$, und so entsteht die Summe $7x^2-24$, welche das Produkt beider Nenner oder $x^2-7x+12$ zu ihrem Nenner hat. Das Produkt der ersten und dritten Zahl war $\frac{12x^2}{x^2-7x+12}$, also ist $\frac{12x^2}{x^2-7x+12}$ das Fünffache der Summe, folglich ist die fünffache Summe dem Produkte gleich, oder

$$\frac{35x^2-120x}{x^2-7x+12}=\frac{12x^2}{x^2-7x+12}.$$

Man multiplicire beide Seiten der Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Nenner $x^2-7x+12$, so erhält man

$$35x^2-120x=12x^2, \text{ und } x=\frac{120}{23}.$$

Die erste Zahl war $\frac{3x}{x-3}$, die zweite x, die dritte $\frac{4x}{x-4}$, und der Werth von x ist $\frac{120}{23}$. Setzt man diesen Werth in den Zähler der ersten Zahl oder in $3x$, so erhält man $\frac{360}{23}$, setzt man ihn aber in den Nenner $x-3$, so erhält man $\frac{51}{23}$, die erste Zahl wird also $\frac{360}{51}$; die zweite Zahl bleibt aber $\frac{120}{23}$, denn sie hat keinen Nenner den man erst berechnen müßte; aber die dritte wird wie

die erste berechnet. Denn man setze den Werth $\frac{120}{23}$ in den Zähler $4x$, so erhält man $\frac{480}{23}$, auf gleiche Weise setze man ihn in den Nenner $x-4$, so wird derselbe $\frac{28}{23}$, und die dritte Zahl selbst $\frac{480}{28}$. Der Beweis aber fällt in die Augen.

XLIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien zu der Summe aller drei Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß habe.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß das Produkt der ersten und zweiten das Dreifache, das Produkt der zweiten und dritten das Vierfache, das Produkt der ersten und dritten das Fünffache von der Summe aller drei Zahlen sei.

Da das Produkt von je zweien zu der Summe aller drei Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben soll, so suche ich zuerst drei Zahlen von der Beschaffenheit, daß das Produkt von je zweien zu einer willkührlich gewählten Zahl das vorgeschriebene Verhältniß hat; diese willkührliche Zahl sei 5. Da nun das Produkt der

ersten und zweiten Zahl das Dreifache der willkührlichen Zahl 5 sein soll, so ist das Produkt der ersten und zweiten Zahl 15; die zweite Zahl sei nun $=x$, so ist die erste $=\frac{15}{x}$. Da ferner das Produkt der zweiten und dritten das Vierfache von 5 sein soll, so ist das Produkt der zweiten und dritten Zahl 20, die zweite Zahl aber war $=x$, folglich ist die dritte $=\frac{20}{x}$. Nun soll auch noch das Produkt der ersten und dritten oder $\frac{300}{x^2}$ das Fünffache von 5 sein, folglich wird $25x^2 = 300$.

Wenn nun die beiden Ausdrücke sich wie zwei Quadrate gegen einander verhielten, so wäre die Aufgabe gelöst. Aber 300 ist das Produkt von 15 und 20, 15 ist aber das Dreifache von 5, und 20 das Vierfache eben dieser Zahl 5. Wir verlangen also, daß, wenn man das Dreifache und das Vierfache der Zahl 5 mit einander multiplicirt, dies Produkt zu dem Fünffachen der Zahl 5 sich wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalte. Aber die Zahl 5 ist willkührlich gewählt, es kommt also darauf an, eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Produkt ihres Dreifachen und Vierfachen sich zu dem Fünffachen eben dieser Zahl wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalte. Die gesuchte Zahl sei $=x$, das Dreifache und Vierfache derselben mit einander multiplicirt, giebt $12x^2$, dies soll sich also zu dem Fünffachen derselben Zahl wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalten, oder $12x^2$ soll zu $5x$ sich wie ein Quadrat zu einem

Quadrat verhalten. Wenn ich also die eine Zahl mit der andern multiplicire, so muß das Produkt ein Quadrat sein, also muß $60x^3$ ein Quadrat sein. Es sei also

$$60x^3 = 900x^2, \text{ also } x = 15.$$

Die gesuchte Zahl ist also 15, und diese setze ich jetzt statt der willkührlichen Zahl 5. Nun ist das Produkt der ersten und zweiten Zahl 45, die zweite Zahl war $= x$, folglich ist die erste $= \frac{45}{x}$, und auf dieselbe Weise findet man die dritte $= \frac{60}{x}$. Nun soll auch das Produkt der ersten und dritten d. i. $\frac{2700}{x^2}$ das Fünffache von 15 sein. Es ist also

$$\frac{2700}{x^2} = 75, \text{ und } x = 6.$$

Die erste Zahl ist also $7\frac{1}{2}$, die zweite 6, die dritte 10, und wenn nun die Summe dieser drei Zahlen 15 wäre, so wäre die ganze Aufgabe gelöst.

Ich setze nun die Summe der drei gesuchten Zahlen $= 15x^2$, die drei gesuchten Zahlen selbst drücke ich durch x aus, und gebe ihnen die vorhin gefundenen Zahlen zu Coefficienten, die erste sei also $= 7\frac{1}{2}x$, die zweite $= 6x$, die dritte $= 10x$. Nun soll die Summe der drei Zahlen $15x^2$ sein, sie ist aber auch $23\frac{1}{2}x$, daher hat man die Gleichung

$$15x^2 = 23\frac{1}{2}x, \text{ und } x = \frac{47}{30}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{35^{2}\frac{1}{2}}{30}$, die zweite $\frac{282}{30}$, die dritte $\frac{470}{30}$.

XLIV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt aus ihrer Summe in die erste eine dreieckige Zahl, das Produkt der Summe in die zweite Zahl ein Quadrat, das Produkt der Summe in die dritte Zahl einen Cubus gebe.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen $= x^2$, die erste aber sei ein quadratischer Bruch, dessen Zähler eine dreieckige Zahl ist, z. B. $\frac{6}{x^2}$, die zweite sei ein quadratischer Bruch, dessen Zähler eine Quadratzahl ist, z. B. $\frac{4}{x^2}$, die dritte endlich sei ein quadratischer Bruch, dessen Zähler eine Kubikzahl ist z. B. $\frac{8}{x^2}$. Multiplicirt man nun x^2 mit der ersten Zahl, so erhält man 6, und dies ist eine dreieckige Zahl, multiplicirt man x^2 mit der zweiten, so erhält man 4, und dies ist eine Quadratzahl, und multiplicirt man endlich x^2 mit der dritten, so erhält man 8, und dies ist eine Kubikzahl.

Nun soll aber auch die Summe der drei Zahlen $= x^2$ sein, aber die Summe der drei Zahlen ist $\frac{18}{x^2}$, man hat also die Gleichung

$$x^2 = \frac{18}{x^2}, \text{ oder } x^4 = 18,$$

wenn man nämlich beide Seiten mit x^2 multiplicirt. Daher muß 18 eine Biquadratzahl sein. Aber 18 ist die Summe einer dreieckigen Zahl, einer Quadratzahl, und einer Kubikzahl. Man muß also eine Biquadratzahl suchen, oder eine Quadratzahl, deren Wurzel wieder eine Quadratzahl ist, und diese Biquadratzahl muß man in eine dreieckige Zahl, eine Quadratzahl und eine Kubikzahl zerstückeln. Die gesuchte Biquadratzahl sei $= x^4$, die Quadratzahl aber $x^4 - 2x^2 + 1$; ziehe ich diese von x^4 ab, so bleibt $2x^2 - 1$. Diesen Rest muß ich wieder in eine dreieckige Zahl und eine Kubikzahl theilen; die Kubikzahl sei 8, so bleibt als dreieckige Zahl $2x^2 - 9$. Wenn man eine dreieckige Zahl mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt, so erhält man ein Quadrat, folglich muß $16x^2 - 71$ ein Quadrat sein. Ich nehme $4x - 1$ als Wurzel an, so wird

$$16x^2 - 71 = 16x^2 - 8x + 1, \text{ und } x = 9.$$

Die dreieckige Zahl ist also 153, die Quadratzahl 6400, die Kubikzahl 8.

Nunmehr komme ich wieder auf die ursprüngliche Aufgabe zurück, und setze das Quadrat, welches die Summe aller drei Zahlen sein soll, $= x^2$, die erste

$= \frac{153}{x^2}$, um durch die Multiplication mit x^2 eine dreieckige Zahl zu erhalten, die zweite $= \frac{6400}{x^2}$ um eine Quadratzahl zu erhalten, die dritte $= \frac{8}{x^2}$, um eine Kubikzahl zu erhalten, denn wenn ich nun die drei Zahlen mit x^2 multiplicire, so wird die erste eine dreieckige Zahl, die zweite ein Quadrat, die dritte ein Cubus. Die Summe der drei Zahlen soll $= x^2$ sein, die Summe aber ist $\frac{6561}{x^2}$, es ist also

$$x^2 = \frac{6561}{x^2},$$

oder, wenn man alles mit x^2 multiplicirt,

$$x^4 = 6561, \text{ also } x = 9.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{153}{81}$, die zweite $\frac{6400}{81}$, die dritte $\frac{8}{81}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XLV. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied der größten und mittelsten zu dem Unterschiede der mittelsten und der kleinsten ein vorgeschriebenes Verhältniß habe, außerdem aber die Summe von je zweien eine Quadratzahl sei.

Auflö-

Auflösung.

Es werde z. B. verlangt, daß der Unterschied der größten und der mittelsten Zahl das Dreifache von dem Unterschiede der mittelsten und der kleinsten sei.

Da die Summe der mittelsten und der kleinsten Zahl ein Quadrat sein soll, so sei dieselbe $=4$. Nun muß die mittelsteZahl größer als 2 sein; sie sei daher $=x+2$, folglich die kleinste $=2-x$. Da der Unterschied der größten und der mittelsten Zahl das Dreifache des Unterschiedes zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl sein soll, dieser letztere Unterschied aber $=2x$ ist, so ist der Unterschied der größten und der mittelsten Zahl $=6x$, und daher die größte Zahl selber $=7x+2$.

Nun sind noch zwei Bedingungen übrig, nämlich daß die Summe der größten und der mittelsten, und die Summe der größten und der kleinsten Zahl ein Quadrat sei. Hier habe ich also wieder die doppelte Gleichung, denn es soll sowohl $8x+4$, als $6x+4$ ein Quadrat sein; die Auflösung der Gleichung ist aber sehr leicht, da die bestimmte Zahl (4) in beiden Ausdrücken eine Quadratzahl ist. Ich nehme zwei Zahlen deren Produkt $=2x$ ist, so wie dies bekanntlich bei der Auflösung der doppelten Gleichung immer geschehen muß. Diese Zahlen mögen $\frac{x}{2}$ und 4 sein, so wird $x = 112$.

Wenn ich aber diesen Werth für x in die obigen allgemeinen Ausdrücke der drei gesuchten Zahlen setzen

will, so kann ich x, d. i. 112 von 2 nicht abziehen. Ich muß also die Rechnung so anlegen, daß x kleiner als 2 wird; dann wird aber auch $6x+4$ kleiner als 16, denn wenn ich 6 mit 2 multiplicire und 4 dazu addire, so erhalte ich 16. Nun sollen $8x+4$ und $6x+4$ zwei Quadrate werden, aber 4 ist auch ein Quadrat, nämlich von 2, also habe ich drei Quadrate, $8x+4$, $6x+4$ und 4, und der Unterschied des größten und des mittelsten ist ein Drittel von dem Unterschiede des mittelsten und des kleinsten. Es kommt jetzt also darauf an, drei Quadrate von der Beschaffenheit zu suchen, daß der Unterschied des größten und mittelsten ein Drittel sei von dem Unterschiede des mittelsten und des kleinsten, jedoch so, daß das kleinste dieser Quadrate 4, das mittelste kleiner als 16 sei.

Ich setze also das kleinste der drei Quadrate $=4$, und die Wurzel des mittelsten $=x+2$, also das mittelste selbst $=x^2+4x+4$. Da nun der Unterschied des größten und des mittelsten ein Drittel von dem Unterschiede des mittelsten und des kleinsten sein soll, der Unterschied des mittelsten und des kleinsten aber x^2+4x ist, so muß der Unterschied des größten und des mittelsten $\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ sein. Das mittelste Quadrat ist aber x^2+4x+4, folglich ist das größte $1\frac{1}{3}x^2+5\frac{1}{3}x+4$, und dieser Ausdruck muß also ein Quadrat sein. Ich multiplicire alles mit 9, so muß auch $12x^2+48x+36$,

und, wenn ich mit 4 dividire, auch $3x^2+12x+9$ ein Quadrat sein. Aber das mittelste Quadrat sollte kleiner als 16 sein, folglich muß seine Wurzel kleiner als 4 sein. Diese Wurzel war $x+2$, also muß $x+2$ kleiner als 4, und wenn ich von beiden Zahlen 2 abziehe, so muß x kleiner als 2 sein.

Wenn ich nun $3x^2+12x+9$ zu einem Quadrat machen soll, so mache ich ein Quadrat von 3 weniger einem Vielfachen von x, und nun erhalte ich den Werth von x, indem ich eine gewisse Zahl mit 6 multiplicire, dazu 12, nämlich den Coefficienten von 12x in obigem Quadrat addire, und die Summe durch den Unterschied zwischen dem Quadrat jener noch nicht bestimmten Zahl und dem Coefficienten von $3x^2$ dividire. Es kommt also darauf an, eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man sie mit 6 multiplicirt, zu dem Produkte 12 addirt, und die Summe durch ihr Quadrat weniger 3 dividirt, der Quotient kleiner als 2 wird.

Die gesuchte Zahl sei $=x$. Wenn ich diese mit 6 multiplicire, und zu dem Produkt 12 addire, so erhalte ich $6x+12$. Wenn ich aber von dem Quadrat der gesuchten Zahl 3 abziehe, so erhalte ich x^2-3; es soll also $6x+12$ durch x^2-3 dividirt werden, und der Quotient soll kleiner als 2 sein. Wenn ich aber 2 durch 1 dividire, so wird der Quotient 2, daher muß $6x+12$ zu x^2-3 ein kleineres Verhältniß haben als 2 zu 1, und die Produkte der gleichnamigen Glieder sind daher

ungleich, vielmehr ist das Produkt $(6x+12) \times 1$ kleiner als das Produkt $(x^2-3) \times 2$, d. h. $6x+12$ ist kleiner als $2x^2-6$. Man addire noch die fehlenden Größen, so findet man, daß $2x^2$ größer als $6x+18$ sein muß.

Um nun hier eine Vergleichung anzustellen, so erhebe ich den halben Coefficienten von x ins Quadrat, und erhalte 9. Nun multipliciren wir den Coefficienten von x^2 mit der bestimmten Zahl 18, giebt 36; dazu addiren wir 9, giebt 45, und davon ist die Wurzel nicht kleiner als 7. Dazu addiren wir den halben Coefficienten von x, und dividiren durch den Coefficienten von x^2, so finden wir, daß x nicht kleiner sein darf als 5.

Wir müssen also $3-5x$ als Wurzel von $3x^2+12x+9$ ansehen, so wird

$$3x^2+12x+9 = 9-30x+25x^2, \text{ und } x = \frac{42}{22} = \frac{21}{11}.$$

Nun war die Wurzel des zweiten Quadrats $= x+2$, diese Wurzel wird also $\frac{43}{11}$, und das Quadrat selbst $\frac{1849}{121}$ sein.

Nun komme ich wieder auf die frühere Aufgabe, und setze die Quadratzahl $\frac{1849}{121} = 6x+4$, und wenn ich jetzt alles mit 121 multiplicire, so wird $x = \frac{1365}{726}$. Diesen Werth für x setze ich in den für die ursprüngliche Aufgabe gemachten Ansatz. Wir haben nämlich die mittelste Zahl $= x+2$, die kleinste $2-x$, die größte $= 7x+2$ gesetzt; die größte Zahl ist also $\frac{11007}{726}$, die zweite $\frac{2817}{726}$,

die kleinste oder die dritte $\frac{87}{726}$. Hier ist nun der Nenner keine Quadratzahl, wohl aber der sechste Theil des Nenners, nämlich 121. Wir wollen daher alles mit 6 dividiren, so wird die erste Zahl $\frac{1834\frac{1}{2}}{121}$, die zweite $\frac{469\frac{1}{2}}{121}$, die dritte $\frac{14\frac{1}{2}}{121}$. Will man aber für den Zähler eine ganze Zahl haben, so daß der Bruch $\frac{1}{2}$ weggeschafft wird, so multiplicire man alles mit 4, so wird die erste Zahl $\frac{7338}{484}$, die zweite $\frac{1878}{484}$, die dritte $\frac{58}{484}$, und der Beweis fällt in die Augen.

XLVI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied zwischen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der kleinsten zu dem Unterschiede zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl ein vorgeschriebenes Verhältniß habe, außerdem aber die Summe von je zweien ein Quadrat sei.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß der Unterschied zwischen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der mittelsten Zahl das Dreifache des Unterschiedes zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl sei.

Da die Summe der größten und der mittelsten Zahl ein Quadrat sein soll, so sei dieselbe $= 16x^2$; dann ist aber die größte Zahl größer als $8x^2$, und diese sei daher $= 8x^2 + 2$. Da die Summe der größten und der mittelsten Zahl größer als die Summe der größten und der kleinsten sein muß, die Summe der größten und mittelsten aber $16x^2$ beträgt, so wird die Summe der größten und kleinsten Zahl kleiner als $16x^2$, aber größer als $8x^2$ sein. Die Summe der größten und kleinsten sei also $= 9x^2$. Die Summe der größten und der mittelsten Zahl war $16x^2$, die größte Zahl aber $= 8x^2 + 2$, die mittelste wird also $= 8x^2 - 2$, und die dritte oder kleinste Zahl $= x^2 - 2$ sein.

Nun soll der Unterschied zwischen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der mittelsten drei Mal so groß sein, als der Unterschied zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl. Der Unterschied zwischen dem Quadrat der größten und dem Quadrat der kleinsten ist $64x^2$, aber der Unterschied der mittelsten und der kleinsten Zahl ist $7x^2$, und das Dreifache davon $21x^2$. Die $64x^2$ entstehen dadurch, daß man $32x^2$ zwei Mal nimmt. Es kommt also darauf an, eine Zahl zu finden, welche mit 32 multiplicirt 21 gebe; eine solche Zahl ist aber $\frac{21}{32}$. Ich setze daher die erste Zahl $= 8x + \frac{21}{32}$, die mittelste $= 8x - \frac{21}{32}$, die dritte Zahl $= x^2 - \frac{21}{32}$, und jetzt ist nur noch eine Bedingung zu erfüllen, nämlich daß die

Summe der mittelsten und der kleinsten Zahl ein Quadrat sei. Diese Summe ist aber $9x^2 - \frac{42}{32}$; davon sei $3x - 6$ die Wurzel, so wird $x = \frac{597}{576}$.

Die erste Zahl ist also $\frac{3069000}{331776}$, die zweite $\frac{2633544}{331776}$, die dritte $\frac{138681}{331776}$.

Fünftes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen suchen, welche eine geometrische Reihe bilden, und außerdem so beschaffen sind, daß jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 12; eine geometrische Reihe bilden aber drei Zahlen, wenn das Produkt der beiden äußersten die mittelste zu seiner Quadratwurzel hat.

Ich suche daher zuvörderst ein Quadrat, welches ein Quadrat zum Reste läßt, wenn man 12 davon abzieht. Dies ist aber ganz leicht, und man findet, daß $42\frac{1}{4}$ ein solches Quadrat ist.

Ich setze daher das eine der äußersten Glieder $= 42\frac{1}{4}$, das andere $= x^2$, so wird das mittelste Glied

$= 6\frac{1}{2}x$ sein. Nun sollen auch die beiden anderen Glieder, x^2 und $6\frac{1}{2}x$, eine Quadratzahl zum Reste lassen, wenn man 12 davon abzieht, d. h. $x^2 - 12$ und $6\frac{1}{2}x - 12$, sollen Quadrate sein.

Der Unterschied dieser beiden Zahlen ist $x^2 - 6\frac{1}{2}x$; dieser Unterschied hat die Faktoren x und $x - 6\frac{1}{2}$. Wenn man den halben Unterschied dieser Faktoren ins Quadrat erhebt, so erhält man $\frac{169}{16}$, und dies ist dem kleineren Quadrate gleich. Man hat also

$$6\frac{1}{2}x - 12 = \frac{169}{16}, \text{ und } x = \frac{361}{164}.$$

Die erste Zahl ist also $42\frac{1}{4}$, die zweite $\frac{2346\frac{1}{2}}{104} = \frac{150321}{10816}$, die dritte $\frac{150221}{10816}$.

II. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen suchen, welche eine geometrische Reihe bilden, und außerdem so beschaffen sind, daß jede von ihnen ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 20. Nun suche ich wieder ein Quadrat, welches ein Quadrat zur Summe

giebt, wenn man 20 dazu addirt, und finde 16. Ich setze also das eine der äußeren Glieder $=16$, das andere $=x^2$, folglich das mittelste $=4x$.

Nach dem, was bei der vorigen Aufgabe gesagt wurde, sollen nun $4x+20$ und x^2+20 zwei Quadrate sein. Der Unterschied der beiden Ausdrücke ist x^2-4x; dieser hat die Faktoren x und $x-4$. Wenn ich den halben Unterschied dieser Faktoren ins Quadrat erhebe, so erhalte ich 4, und dies sollte dem kleineren der beiden Quadrate gleich sein, also $4=4x+20$. Dies ist aber ungereimt, denn die Zahl 4 darf nicht kleiner als 20 sein. Aber die Zahl 4 ist ein Viertel von 16, und 16 ist hier nicht eine beliebig gewählte Zahl, sondern sie ist ein Quadrat, welches, um 20 vermehrt, wieder ein Quadrat wird.

Wir müssen daher ein Quadrat suchen, dessen vierter Theil größer als 20 ist, und welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 20 dazu addirt. Dies Quadrat muß also größer als 80 sein, aber 81 ist ein Quadrat, welches größer als 80 ist. Wenn wir also die Wurzel des gesuchten Quadrats $=x+9$ setzen, so ist das Quadrat selbst $=x^2+18x+81$; dies soll also auch dann noch ein Quadrat sein, wenn man 20 dazu addirt, d. h. $x^2+18x+101$ soll ein Quadrat sein. Ich sehe $x-11$ als die Wurzel dieses Quadrats an, so ist das Quadrat selbst $x^2-22x+121$, folglich wird

$$x^2+18x+101=x^2-22x+121, \text{ und } x=\frac{1}{2}.$$

Nun hatten wir die Wurzel des gesuchten Quadrats $= x + 9$ gesetzt, also ist das gesuchte Quadrat selbst $90\frac{1}{4}$.

Nunmehr kehre ich zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setze die erste Zahl $= 90\frac{1}{4}$, die dritte $= x^2$, folglich die mittelste $= 9\frac{1}{2}x$, und nun ist die Aufgabe zu lösen, auf welche Art $x^2 + 20$ und $9\frac{1}{2}x + 20$ zwei Quadrate werden.

Der halbe Unterschied ins Quadrat erhoben, giebt $\frac{361}{16}$, und dies ist dem kleineren Quadrate gleich, also wird

$$9\frac{1}{2}x + 20 = \frac{361}{16}, \text{ und } x = \frac{41}{152}.$$

Die erste Zahl ist also $90\frac{1}{4}$, die zweite $\frac{389\frac{1}{2}}{152}$, die dritte $\frac{1681}{23104}$.

III. Aufgabe.

Man soll zu einer gegebenen Zahl drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die Zahlen selbst, als das Produkt aus je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 5. Nun haben wir in den Porismen den Satz gehabt:

Wenn man zwei Zahlen hat, und nicht nur jede dieser Zahlen für sich, sondern auch das Produkt beider ein Quadrat wird, wenn man die nämliche vorgeschriebene Zahl dazu addirt, so sind sie von zwei unmittelbar auf einander folgenden Quadraten entstanden.

Ich nehme also zwei Quadrate dieser Art, das eine von der Wurzel $x+3$, das andere von der Wurzel $x+4$, so wird das eine Quadrat $=x^2+6x+9$, das andere $=x^2+8x+16$.

Ich ziehe von beiden Quadraten die Zahl 5 ab, und setze die erste der gesuchten Zahlen $=x^2+6x+4$, die zweite $=x^2+8x+11$, die dritte aber setze ich der doppelten Summe beider, weniger 1, gleich, d. i. ich setze sie $=4x^2+28x+29$.

Nun soll auch diese letztere Zahl, wenn noch 5 dazu kommt, ein Quadrat werden, d. h. $4x^2+28x+34$ soll ein Quadrat sein. Ich nehme $2x-6$ als Wurzel dieses Quadrats an, so wird

$$4x^2+28x+34=4x^2-24x+36, \text{ und } x=\frac{1}{26}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{2861}{676}$, die zweite $\frac{7645}{676}$, die dritte $\frac{20336}{676}$.

IV. Aufgabe.

Man soll zu einer gegebenen Zahl drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl die

Zahlen selbst, als das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 6. Ich nehme wieder zwei auf einander folgende Quadrate, nämlich x^2 und x^2+2x+1, addire zu diesen die gegebene Zahl, und setze nun die erste der gesuchten Zahlen $=x^2+6$, die zweite $=x^2+2x+7$, die dritte Zahl aber etze ich der Summe beider, weniger 1, gleich, d. h. $=4x^2+4x+25$.

Nun ist nur noch erforderlich, daß auch die letztere Zahl, wenn man 6 davon abzieht, oder daß $4x^2+4x+19$ ein Quadrat sei. Ich nehme $2x-6$ als Wurzel an, so ist

$$4x^2+4x+19=4x^2-24x+36, \text{ und } x=\frac{17}{28}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{4993}{784}$, die zweite $\frac{6729}{784}$, die dritte $\frac{22660}{784}$.

V. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, man mag die Summe von beiden oder auch das dritte Quadrat dazu addiren.

Auflösung.

In den Porismen haben wir wieder folgenden Satz:

Wenn man zu zwei auf einander folgenden Quadraten noch eine dritte Zahl sucht, welche um 2 größer ist, als die doppelte Summe beider, so hat man drei Zahlen von der Beschaffenheit, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, man mag die Summe der beiden in einander multiplicirten Zahlen oder auch die dritte Zahl dazu addiren.

Daher setze ich das erste der gesuchten Quadrate $= x^2 + 2x + 1$, das zweite $= x^2 + 4x + 4$, und das dritte $= 4x^2 + 12x + 12$. Nun ist nur noch das Eine übrig, daß man auch die dritte Zahl, $4x^2 + 12x + 12$, oder auch den vierten Theil dieser Zahl, $x^2 + 3x + 3$, zu einem Quadrat mache. Ich nehme $x - 3$ als Wurzel dieses Quadrats an, so ist das Quadrat selbst $= x^2 - 6x + 9$, es ist also

$$x^2 + 3x + 3 = x^2 - 6x + 9, \text{ und } x = \frac{2}{3}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{25}{9}$, die zweite $\frac{64}{9}$, die dritte $\frac{196}{9}$.

VI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß jegliche derselben ein Quadrat wird, wenn man die Zahl 2 davon abzieht, das

Produkt von je zweien aber ein Quadrat wird, man mag nun die Summe der beiden Faktoren, oder die dritte Zahl davon abziehen.

Auflösung.

Wenn man zu den in der vorigen Aufgabe gefundenen Zahlen noch 2 addirt, so leisten die dadurch entstandenen Zahlen, was die Aufgabe vorschreibt. Hieraus entsteht aber folgende Auflösung.

Wir setzen die eine der gesuchten Zahlen $= x^2 + 2$, die zweite $= x^2 + 2x + 3$, die dritte $= 4x^2 + 4x + 6$, so leisten diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabe Genüge.

Nun soll aber auch $4x^2 + 4x + 4$, also auch der vierte Theil davon, nämlich $x^2 + x + 1$ ein Quadrat sein. Wenn wir die Wurzel dieses Quadrats durch die Differenz $x - 2$ ausdrücken, so ist das Quadrat selbst $x^2 - 4x + 4$, also wird

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = \frac{3}{5}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{59}{25}$, die zweite $\frac{114}{25}$, die dritte $\frac{246}{25}$, und der Beweis fällt in die Augen.

VII.

Lehnsatz für die folgenden Aufgaben.

Man soll zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt ein Quadrat wird,

wenn man die Summe ihrer Quadrate dazu addirt.

Auflösung.

Die erste Zahl sei $= x$, für die zweite setze man eine beliebige Zahl, z. B. 1, so ist ihr Produkt $= x$, die Summe ihrer Quadrate $= x^2 + 1$, und wenn man dazu x addirt, so erhält man $x^2 + x + 1$, und dies soll ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $= x - 2$, so ist

$$x^2 + x + 1 = x^2 - 4x + 4, \text{ und } x = \frac{3}{5}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{3}{5}$, die zweite $\frac{5}{5}$, und wenn man den gemeinschaftlichen Nenner 5 wegwirft, so wird die erste Zahl 3, und die zweite Zahl 5, und diese Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt; denn das Produkt derselben, mit der Summe ihrer Quadrate zusammen genommen, wird wieder ein Quadrat. Mit welcher Zahl man aber auch 3 und 5 multipliciren mag, so leisten die dadurch entstehenden Zahlen doch immer was die Aufgabe vorschreibt.

VIII. Aufgabe.

Man soll drei rechtwinklige Dreiecke suchen, deren Flächen einander gleich sind.

Auflösung.

Zuerst muß man zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt und die Summe ihrer Quadrate

drate zusammen genommen, wieder ein Quadrat wird. Dies ist aber in der vorigen Aufgabe gezeigt worden, und die gesuchten Zahlen sind 3 und 5. Das Produkt dieser Zahlen, mit der Summe ihrer Quadrate zusammen genommen, giebt ein neues Quadrat, dessen Wurzel die Zahl 7 ist. Nun bilde ich drei rechtwinklige Dreiecke, jedes aus zwei Zahlen, das erste nämlich von den Zahlen 7 und 3; das zweite von den Zahlen 7 und 5; und das dritte von 7 und der Summe der gefundenen Zahlen, also von 7 und 8; die Dreiecke lassen sich also durch folgende Zahlen vorstellen, das erste durch die Zahlen 40, 42, 58; das zweite durch die Zahlen 24, 70, 74; und das dritte durch die Zahlen 15, 112, 113. Diese Dreiecke sind rechtwinklig, und haben eine gleiche Fläche, welche durch die Zahl 840 vorgestellt werden kann.

IX. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat jedweder auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man die Summe der drei Zahlen dazu addirt oder davon abzieht.

Auflösung.

Man verlangt zuerst, daß das Quadrat der ersten Zahl auch dann noch ein Quadrat bleibe, wenn man die Summe aller drei Zahlen dazu addirt oder davon abzieht.

In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt aber das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat, wenn man den vierfachen Flächeninhalt dazu addirt, oder davon abzieht. Die drei gesuchten Zahlen müssen also die Hypotenusen von drei rechtwinkligen Dreiecken, die Summe der drei Zahlen aber muß der vierfache Flächeninhalt derjenigen Dreiecke sein, deren Hypotenusen durch die drei Zahlen ausgedrückt werden.

Es kommt also darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke zu suchen, deren Flächeninhalt gleich ist; diese Aufgabe haben wir aber schon gelöst, und die verlangten Dreiecke werden durch die Zahlen 40, 42 und 58; 24, 70 und 74; 15, 112 und 113 vorgestellt.

Jetzt kehre ich zu der eigentlichen Aufgabe zurück, und drücke die gesuchten Zahlen durch eine unbekannte Größe aus, gebe ihnen aber die vorher berechneten Hypotenusen zu Coefficienten, die erste ist also $= 58x$, die zweite $= 74x$, die dritte endlich $= 113x$; die Summe der drei Zahlen drücke ich durch x^2 und die vierfache Fläche der vorhin berechneten Dreiecke, also durch die Zahl $3360x^2$ aus. Daher wird

$$3360x^2 = 245x, \text{ und } x = \frac{7}{96}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{406}{96}$, die zweite $\frac{518}{96}$, die dritte $\frac{791}{96}$.

X. Aufgabe.

Wenn drei Quadrate gegeben sind, so ist es ist immer möglich, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß je zwei derselben diese Quadrate zu ihrem Produkte geben.

Auflösung.

Wenn 4, 9 und 16 die gegebenen Quadrate sind, und man setzt die eine der gesuchten Zahlen $= x$, so ist von den beiden übrigen die eine $= \frac{4}{x}$, die andere $= \frac{9}{x}$, und es ist nur noch erforderlich, daß das Produkt der zweiten und dritten $= 16$ sei. Dieses Produkt ist aber $\frac{36}{x^2}$; man hat also die Gleichung

$$16 = \frac{36}{x^2}, \text{ und } x = 1\frac{1}{2}.$$

Die erste Zahl ist also $1\frac{1}{2}$, die zweite $2\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2\frac{2}{3}$, die dritte aber ist 6.

Aber wir wollen auch das ganze Verfahren zeigen. Wir fanden $\frac{36}{x^2} = 16$; wenn man nun alles mit x^2 multiplicirt, so erhält man $16x^2 = 36$, und $x^2 = \frac{36}{16}$, und daraus ist die Wurzel $\frac{6}{4}$. Aber 6 entsteht, indem man die Wurzeln von 4 und 9, oder die Wurzeln des ersten und

zweiten Quadrats in einander multiplicirt, der Nenner 4 ist aber die Wurzel des dritten Quadrates, 16.

Wenn dir also die Aufgabe vorgelegt wird, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß die Produkte von je zweien vorgeschriebene Quadrate geben, z. B. die Quadrate 4, 9 und 16, so nimm das Produkt aus den Wurzeln von 4 und 9, dieses wird 6; dies Produkt dividire durch die Wurzel des dritten Quadrats, so wird $x = \frac{6}{4}$; darauf dividire das Quadrat 4 durch $\frac{6}{4}$, dies giebt $\frac{16}{6}$, und endlich dividire das Quadrat 9 durch $\frac{6}{4}$, dies giebt 6. Die erste Zahl ist also $\frac{6}{4}$, die zweite $\frac{16}{6}$, die dritte 6.

XI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien ein Quadrat wird, man mag die Summe der drei Zahlen davon abziehen oder dazu addiren.

Auflösung.

Wir suchen zuerst wieder drei rechtwinklige Dreiecke, deren Flächen einander gleich sind, darauf nehmen wir die Quadrate der Hypotenusen, nämlich 3364, 5476 und 12769. Wenn wir diese haben, so suchen wir, wie vorher gezeigt worden, drei Zahlen von der Art, daß die

Produkte von je zweien gegebenen Quadraten, nämlich den eben angegebenen, gleich werden. Wir nehmen aber gerade diese Quadrate, weil sie (nach IX.) so beschaffen sind, daß sie auch dann noch Quadrate bleiben, wenn man 3360 dazu addirt oder davon abzieht. Aber 3360 ist die vierfache Fläche jedes einzelnen Dreieckes. Daher drücke ich nun die drei Zahlen durch x mit folgenden Coefficienten aus, die erste nämlich wird $= \frac{4292}{113}x$, die zweite $\frac{4181}{29}x$, die dritte $\frac{3177}{37}x$, denn wenn ich je zwei dieser Coefficienten multiplicire, so erhalte ich die obigen Quadrate. Nun muß ich die Summe dieser drei Zahlen und $3360x^2$ gleich setzen, und damit alle Brüche gleiche Nenner erhalten, so drücken wir sie alle durch den Nenner 121249 aus, so wird die erste Zahl $\frac{4605316}{121249}x$, die zweite $\frac{1748761}{121249}x$, die dritte $\frac{10738729}{121249}x$, und die Summe von allen dreien $\frac{32824806}{121249}x$, und diese ist $= 3360x^2$. Nun multiplicire ich alles mit dem Nenner 121249, so wird

$$32824806x = 407396640x^2, \text{ und } x = \frac{32824806}{407396640}.$$

XII. Aufgabe.

Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stück dieselbe vorgeschriebene Zahl addiren, und diese Summen sollen Quadrate werden.

Diese vorgeschriebene Zahl darf aber weder ungerade sein, noch das Doppelte dieser Zahl, wenn man 1 dazu addirt, von einer Primzahl gemessen werden.

Auflösung.

Es sei also vorgeschrieben, daß man zu jedem der beiden Stücke die Zahl 6 addiren, und es dadurch zu einem Quadrat machen solle.

Da wir die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, zu jedem Stücke die Zahl 6 addiren, und es dadurch zu einen Quadrat machen sollen, so ist die Summe der dadurch entstehenden Quadrate 13. Es kommt also darauf an, die Zahl 13 in zwei Quadrate zu theilen, deren jedes größer als 6 ist; wenn ich also die Zahl 13 in zwei Quadrate theile, deren Unterschied kleiner als 1 ist, so habe ich die Aufgabe gelöst.

Ich nehme die Hälfte von 13, d. i. $6\frac{1}{2}$, und untersuche, was für einen Bruch ich zu $6\frac{1}{2}$ addiren kann, damit die Summe ein Quadrat sei. Ich multiplicire alles mit 4, und untersuche jetzt, was für einen quadratischen Bruch ich zu 26 addiren kann, damit die Summe ein Quadrat werde. Der quadratische Bruch, welchen ich suche, sei $= \frac{1}{x^2}$, so soll $26 + \frac{1}{x^2}$, oder wenn ich alles mit x^2 multiplicire, $26x^2 + 1$ ein Quadrat sein. Ich

setze die Wurzel dieses Ausdrucks $= 5x + 1$, so wird $x = 10$, also $x^2 = 100$, und der quadratische Bruch $= \frac{1}{100}$. Der Bruch also, welchen ich zu 26 addiren muß, ist $\frac{1}{100}$, und der Bruch, welchen ich zu $6\frac{1}{2}$ addiren muß, ist $\frac{1}{400}$, und dadurch erhalte ich ein Quadrat von der Wurzel $\frac{51}{20}$.

Ich muß also die Theilung der Zahl 13 in zwei Quadrate so einrichten, daß die Wurzel jedes Quadrats sich der Zahl $\frac{51}{20}$ möglichst nähert. Und nun untersuche ich, welche Zahl ich von 3 abziehen, und zu 2 addiren muß, damit dieselbe Zahl, nämlich $\frac{51}{20}$ herauskomme. Ich nehme also zwei Quadrate, das eine von der Wurzel $11x + 2$, das andere von der Wurzel $3 - 9x$, und setze die Summe beider Quadrate

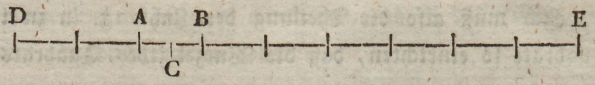
$$202x^2 - 10x + 13 = 13, \text{ so wird } x = \frac{5}{101}.$$

Die Wurzel des einen Quadrats ist also $\frac{257}{101}$, die des zweiten $\frac{258}{101}$, und wenn ich von jedem dieser Quadrate die Zahl 6 abziehe, so ist das eine Stück der Zahl $1 = \frac{5358}{10201}$, das andere $= \frac{4843}{10201}$, und es ist klar, daß jedwedes Stück, wenn man 6 dazu addirt, wieder ein Quadrat wird.

XIII. Aufgabe.

Man soll die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, und zu jedem Stück eine andere, aber vorgeschriebene, Zahl addiren, und beide Summen sollen dadurch Quadrate werden.

Auflösung.



Es sei z. B. vorgeschrieben, daß man die Zahl 1 in zwei Stücke theilen, und zu dem einen Stück die Zahl 2, zu dem anderen die Zahl 6 addiren, und daß in beiden Fällen die Summe ein Quadrat werden solle.

Man nehme eine Einheit z. B. AB, und nehme an, sie sei in C der Aufgabe gemäß getheilt; darauf lege man zu dem Stücke AC zwei Einheiten = AD, und zu dem Stücke BC sechs Einheiten = BE, so ist sowohl DC als EC ein Quadrat. Da aber AB = 1, und die Summe AD + BE = 8, so ist die ganze DE = 9, und diese soll man also in zwei Quadrate, nämlich DC und CE theilen. Da aber das eine dieser Quadrate, nämlich DC, größer als 2 oder als AD, und auch kleiner als 3 oder als BD ist, so kommt es darauf an, die Quadratzahl 9 in zwei andere Quadrate CD und CE zu theilen, jedoch so, daß das eine derselben, nämlich DC, größer als 2 und kleiner als 3 werde; denn hat man DC

gefunden, so darf man nur AD = 2 davon abziehen, um AC zu haben. Nun erwäge man ferner, daß AB = 1 ist, deßhalb wird auch das Stück BC und der Punkt C gegeben sein, in welchem man die Einheit theilen muß.

Jetzt wollen wir aber den ganzen Gang des Verfahrens darstellen. Das eine der gesuchten Quadrate, und zwar dasjenige, welches zwischen 2 und 3 fällen soll, sei $= x^2$, so wird das andere $= 9 - x^2$ sein. Diesen Ausdruck zu einem Quadrat zu machen, ist ganz leicht, aber man muß es so einrichten, daß x^2 zwischen 2 und 3 fällt. Wir nehmen zwei Quadrate, das eine etwas größer als 2, das andre etwas kleiner als 3 z. B. $\frac{289}{144}$ und $\frac{361}{144}$. Wenn wir die Rechnung nun so anlegen, daß x^2 zwischen diese beiden Quadrate fällt, so ist die Aufgabe gelöst. Dann muß aber auch die Wurzel von x^2, d. i. x, größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{29}{12}$ werden; man muß also, wenn man $9 - x^2$ zu einem Quadrat macht, darauf Rücksicht nehmen, daß x größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{29}{12}$ werden soll.

Wenn wir aber $9 - x^2$ zu einem Quadrat machen sollen, so nehmen wir 3 weniger einem gewissen Vielfachen von x als Wurzel an, und wir finden daß x entsteht, indem man eine gewisse Zahl sechs Mal nimmt, und dieses Sechsfache durch das um 1 vergrößerte Quadrat derselben Zahl dividirt. Ich muß also zuerst eine

Zahl suchen, welche sechs Mal genommen und durch ihr um 1 vergrößertes Quadrat dividirt, einen Quotienten giebt, der größer als $\frac{17}{12}$, und kleiner als $\frac{29}{12}$ ist.

Die gesuchte Zahl sei $= x$; nun soll also der Quotient $\frac{6x}{x^2+1}$ größer als $\frac{17}{12}$, und kleiner als $\frac{19}{12}$ werden; aber 17 dividirt durch 12 giebt auch den Quotienten $\frac{17}{12}$, daher muß das Verhältniß $6x : x^2+1$ größer sein, als $17 : 12$, folglich auch das Produkt von $6x$ und 12, d. i. $72x$, größer sein, als das Produkt von x^2+1 und 17, d. i. größer als $17x^2+17$.

Man erhebe den halben Coefficienten von x ins Quadrat, dies giebt 1296; davon ziehe man das Produkt der bestimmten Zahl 17 und des Coefficienten von x^2, also 289 ab, so bleibt 1007; davon ist die Quadratwurzel nicht größer als 31; dazu addire man den halben Coefficienten von x, so erhält man die gesuchte Zahl nicht größer als 67; endlich dividire man mit dem Coefficienten von x^2, so wird x nicht größer als $\frac{67}{17}$.

Auf gleiche Weise finden wir, daß das Verhältniß $6x : x^2+1$ kleiner sein muß als $19 : 12$, und wir finden daraus, daß x nicht kleiner als $\frac{66}{19}$ sein darf; wir haben aber auch gefunden, daß x nicht größer als $\frac{67}{17}$ sein darf. Man setze also $x = 3\frac{1}{2}$. Nun mache ich das

Quadrat von $3-3\frac{1}{2}x$, so erhalte ich $12\frac{1}{4}x^2-21x+9$. Daher ist

$$12\frac{1}{4}x^2-21x+9=9-x^2.$$

Hieraus findet man $x=\frac{84}{55}$, und $x^2=\frac{7056}{2809}$; ziehen wir davon 2 ab, so ist das eine Stück der Zahl $1=\frac{1438}{2809}$, das andere $=\frac{1371}{2809}$, und so wird geleistet, was die Aufgabe vorschreibt.

XIV. Aufgabe.

Man soll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stück dieselbe vorgeschriebene Zahl addiren, und alle drei Stücke sollen dadurch Quadrate werden. Die gegebene Zahl darf aber weder 2, noch aus derjenigen Reihe sein, welche man erhält, wenn man 2 zu einem Vielfachen der Zahl 8 addirt.

Auflösung.

Es sei z. B. vorgeschrieben, daß man 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stücke die Zahl 3 addiren, und dadurch alle drei Stücke zu Quadraten machen solle.

Hier muß man wieder die Zahl 10 in drei Quadrate theilen, und zwar so, daß jedes derselben größer als 3 wird; wenn ich also die Zahl 10 vermittelst Annäherung an ein gewisses Quadrat in drei Quadrate

theile, so läßt sich bewirken, daß jedes derselben größer als 3 wird, und wenn ich von jedem dieser drei Quadrate die Zahl 3 abziehe, so kann ich dadurch die drei Stücke erhalten, in welche die Zahl 1 getheilt werden muß.

Wir nehmen also ein Drittel von 10, d. i. $3\frac{1}{3}$, und untersuchen, was für einen quadratischen Bruch man zu $3\frac{1}{3}$ addiren muß, damit die Summe ein Quadrat werde. Man multiplicire alles mit 9, so soll man zu 30 einen quadratischen Bruch von der Beschaffenheit addiren, daß die Summe ein Quadrat wird. Dieser quadratische Bruch sei $=\frac{1}{x^2}$; nun multiplicire man alles mit x^2, so soll $30x^2+1$ ein Quadrat sein. Die Wurzel sei $5x+1$, so ist

$$30x^2+1=25x^2+10x+1.$$

Daraus findet man $x=2$, $x^2=4$ und $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}$. Wenn man also zu 30 den Bruch $\frac{1}{4}$ addiren muß, so muß man zu $3\frac{1}{2}$ den Bruch $\frac{1}{36}$ addiren, und erhält dadurch das Quadrat $\frac{121}{36}$. Man muß also 10 in drei Quadrate von der Art theilen, daß sich die Wurzel eines jeden der Zahl $\frac{11}{6}$ nähert. Aber 10 besteht aus zwei Quadraten 9 und 1; wir theilen daher 1 in die beiden Quadrate $\frac{9}{25}$ und $\frac{16}{25}$, so daß nun 10 aus den drei Quadraten 9,

$\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$ besteht. Man muß also die Wurzel jedes dieser Quadrate der Zahl $\frac{11}{6}$ nahe zu bringen suchen. Diese Wurzeln sind aber 3, $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{5}$; man multiplicire alles mit 30, so werden die Wurzeln 90, 24 und 18, die Zahl $\frac{11}{6}$ aber wird 55. Man muß also jede Wurzel der Zahl 55 nahe zu bringen suchen. Man setze die Wurzel des einen $= 3 - 35x$, die des andern $= 31x + \frac{4}{5}$, die des dritten endlich $37x + \frac{3}{5}$. Die Summe der Quadrate wird also $3555x^2 - 116x + 10$. Nun setze man

$$3555x^2 - 116x + 10 = 10,$$

so wird $x = \frac{116}{3555}$. Dadurch sind nun die Wurzeln der Quadrate gegeben, folglich auch die Quadrate selbst, und das Uebrige ist für sich selbst klar.

XV. Aufgabe.

Man soll die Zahl 1 in drei Stücke theilen, zu jedem Stück eine andere, aber vorgeschriebene, Zahl addiren, und jedes der drei Stücke dadurch zu einem Quadrate machen.

Auflösung.

Wenn 2, 3 und 4 die vorgeschriebenen Zahlen sind, so kommt es darauf an, die Zahl 10 in drei Quadrate

von der Beschaffenheit zu theilen, daß das erste größer als 2, das zweite größer als 3, das dritte größer als 4 sei. Wenn wir also die Zahl 1 hälften, und zu jeder gegebenen Zahl $\frac{1}{2}$ addiren, so müssen wir drei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß das erste größer als 2 aber kleiner als $2\frac{1}{2}$, das zweite größer als 3 aber kleiner als $3\frac{1}{2}$, das dritte größer als 4 aber kleiner als $4\frac{1}{2}$ wird. Es kommt also alles darauf an, daß ich mit der Zahl 10, welche aus zwei Quadraten besteht, eine Untereintheilung in zwei Quadrate von der Beschaffenheit vornehme, daß das eine größer als 2 und kleiner als $2\frac{1}{2}$ sei. Wenn wir dann von diesem Quadrat die gegebene Zahl 2 abziehen, so finden wir eines der gesuchten Stücke. Ferner theilen wir das andere Quadrat, woraus 10 besteht, in zwei Quadrate von der Beschaffenheit, daß das eine derselben größer als 3 aber kleiner als $3\frac{1}{2}$ wird, und wenn man von diesem Quadrat 3 abzieht, so findet man wieder eine der gesuchten Zahlen; auf dieselbe Weise aber kann man auch die dritte gesuchte Zahl finden.

XVI. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in drei Stücke von der Beschaffenheit theilen, daß die Summe von je zweien ein Quadrat wird.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 10. Nun sollen die drei gesuchten Zahlen so beschaffen sein, daß die Summe der größten und mittelsten, ferner die Summe der mittelsten und kleinsten, und endlich die Summe der größten und kleinsten ein Quadrat wird. Wenn man also die drei Zahlen doppelt nimmt, so machen sie drei Quadrate, deren jedes kleiner als 10 ist; wenn man aber die drei gesuchten Zahlen doppelt nimmt, so erhält man 20. Man muß also 20 in drei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 ist. Aber die Zahl 20 besteht aus zwei Quadraten 16 und 4. Wenn wir also 4 als eines der gesuchten Quadrate ansehen, so muß man noch 16 in zwei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 ist. Wir haben aber schon gelernt, wie man ein gegebenes Quadrat in zwei Quadrate theilen kann, daß jedes derselben größer als 6 und kleiner als 10 sei. Man theile also 16 auf diese Art ein, so ist 20 in drei Quadrate getheilt, deren jedes kleiner als 10 ist.

Wenn wir nun jedes dieser Quadrate von 10 abziehen, so werden die Reste die Beschaffenheit haben, daß je zwei derselben ein Quadrat zur Summe geben.

XVII. Aufgabe.

Man soll eine gegebene Zahl in vier andere von der Beschaffenheit theilen, daß die Summe von je dreien ein Quadrat wird.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 10. Die Aufgabe verlangt, daß die Summe der ersten Zahl und der beiden folgenden ein Quadrat sei, ferner daß die Summe der zweiten und der beiden folgenden, die Summe der dritten und der beiden folgenden, und endlich die Summe der vierten und der beiden folgenden dieselbe Eigenschaft habe. Die dreifache Summe der vier Zahlen besteht also aus vier Quadraten; diese dreifache Summe ist aber 30; daher muß ich 30 in vier Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 ist. Dies bewerkstelligt man aber so.

Ich mache den Ansatz so, daß sich jedes der vier Quadrate dem Werth $\frac{30}{4}=7\frac{1}{2}$ möglichst nähert, und wenn ich nun jedes der vier Quadrate von 10 abziehe, so erhalte ich die gesuchten Zahlen.

Wenn ich aber darauf achte, daß 30 die Summe der Quadrate 16, 9, 4 und 1 ist, so nehme ich sogleich 4 und 9 als zwei der gesuchten Quadrate an, da jedes derselben kleiner als 10 ist. Nun ist noch übrig, daß wir 17 in zwei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 ist. Wenn wir aber 17, nach dem früher gezeigten Verfahren, in zwei Quadrate theilen, deren jedes größer als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 ist, so werden beide Quadrate kleiner als 10 sein. Wenn wir also auch diese beiden Quadrate von 10 abziehen, so erhalten wir die

beiden

beiden noch fehlenden Zahlen; denn zwei derselben haben wir bereits gefunden, nämlich 6 und 1, und so ist die ganze Aufgabe gelöst.

XVIII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Cubus ihrer Summe auch dann noch ein Cubus bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen $= x$, von den gesuchten Zahlen aber sei die erste $= 7x^3$, die zweite $= 26x^3$, die dritte $= 63x^3$, so erreicht man, daß der Cubus der Summe, wenn man jedwede Zahl dazu addirt, wieder ein Cubus wird.

Nun muß aber auch die Summe der drei Zahlen $= x$ sein, die Summe der drei Zahlen ist aber $96x^3$, also hat man die Gleichung

$$96x^3 = x,$$

oder, wenn man beide Seiten durch x dividirt,

$$96x^2 = 1.$$

Hier ist nun 1 eine Quadratzahl, und wenn auch 96 eine Quadratzahl wäre, so wäre die Auflösung gefunden. Ich untersuche also, woher 96 entstanden ist; es ist offenbar die Summe von drei Zahlen, deren jede,

um 1 vermehrt, einen Cubus giebt. Es kommt jetzt also darauf an, drei Zahlen von der Art zu finden, daß jede derselben, um 1 vermehrt, eine Kubikzahl, die Summe von allen dreien aber ein Quadrat wird.

Man setze die Wurzel des ersten Cubus $= x + 1$, die des zweiten $= 2 - x$, die Wurzel des dritten $= 2$, so ist der erste Cubus $= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, der zweite $= -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$, und der dritte $= 8$. Nun ziehe ich von jedem dieser drei Cubi 1 ab, und setze die erste Zahl $= x^3 + 3x^2 + 3x$, die zweite $= -x^3 + 6x^2 - 12x + 7$, die dritte $= 7$. Nun soll die Summe dieser drei Zahlen, d. i. $9x^2 - 9x + 14$ ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel desselben $= 3x - 4$, so wird $x = \frac{2}{15}$, und die erste der gesuchten Zahlen ist also $\frac{1538}{3375}$, die zweite $\frac{18077}{3375}$, und die dritte Zahl 7.

Nun kehre ich zu der eigentlichen Aufgabe zurück, und setze die erste der gesuchten Zahlen $= \frac{1538}{3375} x^3$, die zweite $= \frac{18077}{3375} x^3$, und die dritte $= 7x^3$; die Summe der drei Zahlen setze ich wieder $= x$, so wird

$$\frac{43740}{3375} x^3 = x, \text{ oder } 43740 x^3 = 3375 x.$$

Man nehme von beiden Seiten den 15ten Theil, und dividire durch x, so wird

$$2916 x^2 = 225, \text{ und } x = \frac{15}{54}.$$

Diesen Werth setze man in die obigen Ausdrücke für die gesuchten Zahlen, so ist die Aufgabe gelöst.

XIX. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß der Cubus ihrer Summe auch dann noch ein Cubus bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht.

Auflösung.

Man setze wieder die Summe der drei Zahlen $= x$, die drei Zahlen selbst aber mögen der Reihe nach $\frac{7}{8}x^3$, $\frac{26}{27}x^3$, und $\frac{63}{64}x^3$ sein. Jetzt ist nur noch erforderlich, daß die Summe der drei Zahlen $= x$ sei. Man hat also die Gleichung

$$\frac{4877}{1728}x^3 = x,$$

oder, wenn man beide Seiten durch x dividirt,

$$\frac{4877}{1728}x^2 = 1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl, daher sollte auch der Coefficient von x^2, d. i. $\frac{4877}{1728}$ ein Quadrat sein. Wie ist aber dieser Coefficient entstanden? Wir haben von der Zahl 3 drei Kubikzahlen abgezogen, deren jede kleiner als 1 ist. Es kommt also darauf an, drei Kubikzahlen von der Beschaffenheit zu suchen, daß jede für sich kleiner als 1 ist, die Summe derselben aber, von 3 abgezogen, eine Quadratzahl zum Reste läßt.

Es soll jede der drei Kubikzahlen kleiner als 1 sein, wenn wir es daher so einrichten, daß die Summe von allen dreien kleiner als 1 ist, so wird um so gewisser jede für sich genommen kleiner als 1 sein; das Quadrat aber, welches zum Reste bleibt, wird größer als 2 sein. Man setze also das übrig bleibende Quadrat $= 2\frac{1}{4}$, so muß man $\frac{3}{4}$ in drei Kubikzahlen theilen, und zwar, indem man statt $\frac{3}{4}$ einen anderen Bruch setzt, der eine Kubikzahl zu seinem Nenner hat. Man wähle 216 zum Nenner, so muß man den Zähler 162 in drei Kubikzahlen theilen. Aber 162 besteht aus der Kubikzahl 125, und aus dem Unterschiede der Kubikzahlen 64 und 27. In den Porismen haben wir aber den Satz, daß der Unterschied zweier Cubi auch alle Mal die Summe von zwei Kubikzahlen sei.

Wir kehren also wieder zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, nehmen die drei gefundenen Kubikzahlen, ziehen jede von 1 ab, und nehmen den Rest für die Coefficienten der gesuchten Zahlen, auch setzen wir die Summe der drei Zahlen $= x$. Durch diesen Ansatz bewirken wir schon, daß der Cubus der Summe auch dann noch eine Kubikzahl bleibt, wenn man jedwede der drei Zahlen davon abzieht. Nun soll aber auch die Summe der drei Zahlen $= x$ sein, die Summe der drei Zahlen ist aber $= 2\frac{1}{4}x^3$. Man hat also die Gleichung

$$2\frac{1}{4}x^3 = x, \text{ und } x = \frac{8}{3}.$$

Diesen Werth für x setze man in die allgemeinen Ausdrücke für die gesuchten Zahlen.

XX. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß jedwede auch dann noch ein Cubus bleibt, wenn man den Cubus ihrer Summe davon abzieht.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen $= x$, die Zahlen selbst aber mögen der Reihe nach x^3, $9x^3$, $28x^3$ sein. Nun ist nur noch erforderlich, daß die Summe dieser drei Zahlen $= x$ sei. Diese Summe ist aber auch $= 39x^3$, man hat also die Gleichung

$$39x^3 = x,$$

oder, wenn man beide Seiten durch x dividirt,

$$39x^2 = 1.$$

Wäre nun der Coefficient von x^2 auch eine Quadratzahl, so wäre die Aufgabe gelöst. Aber der Coefficient 39 ist die um 3 vermehrte Summe von drei Kubikzahlen. Man muß also drei Kubikzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihre Summe, wenn man 3 dazu addirt, ein Quadrat wird. Man setze die Wurzel des ersten $= x$, die des zweiten $= 3 - x$, für die Wurzel des dritten nehme man eine beliebige Zahl, z. B. 1.

Nun wird die Summe der drei Cubi $= 9x^2 - 27x + 28$, dazu addire man 3, so soll $9x^2 - 27x + 31$ ein Quadrat sein. Man nehme $3x - 7$ als die Quadratwurzel an, so wird $x = \frac{6}{5}$, und dies ist die Wurzel des ersten Cubus, die des zweiten ist $\frac{9}{5}$, die des dritten aber 1. Zu dem Cubus dieser Zahlen addire ich 1, und indem ich nun zu der ursprünglichen Aufgabe zurück kehre, drücke ich die drei gesuchten Zahlen durch x^3 und die eben berechneten Coefficienten aus. Nun soll die Summe der drei Zahlen $= x$ sein, diese Summe ist aber $11\frac{14}{25}x^3$. Man hat also die Gleichung

$$11\frac{14}{25}x^3 = x, \text{ und } x = \frac{5}{17}.$$

Diesen Werth setze man in die obigen Ausdrücke.

XXI. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen suchen, deren Summe ein Quadrat ist, und welche außerdem die Beschaffenheit haben, daß der Cubus ihrer Summe ein Quadrat wird, wenn man jedwede der drei Zahlen dazu addirt.

Auflösung.

Man setze die Summe der drei Zahlen, damit sie ein Quadrat sei, $= x^2$, und von den gesuchten Zahlen sei die erste $= 3x^6$, die zweite $8x^6$, die dritte $15x^6$,

so erreicht man schon, daß der Cubus der Summe, wenn man jedwede Zahl dazu addirt, ein Quadrat wird. Nun soll aber auch die Summe der drei Zahlen $= x^2$ sein, aber diese Summe ist auch $26x^6$, also wird

$$26x^6 = x^2,$$

oder, wenn man an beiden Seiten durch x^2 dividirt,

$$26x^4 = 1.$$

Nun ist 1 eine Quadratzahl, deren Wurzel wieder eine Quadratzahl ist, oder ein Biquadrat, daher muß auch $26x^4$ ein Biquadrat sein. Aber der Coefficient von x^4 ist die Summe dreier Zahlen, deren jede, um 1 vermehrt, ein Quadrat giebt. Man muß daher drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß jede, um 1 vermehrt, ein Quadrat wird, die Summe von allen dreien aber ein Biquadrat ist. Man setze die eine der gesuchten Zahlen $= x^4 - 2x^2$, die zweite $= x^2 + 2x$, und die dritte $= x^2 - 2x$, denn jede von diesen drei Zahlen wird ein Quadrat, wenn man 1 dazu addirt, und außerdem ist die Summe der drei Zahlen ein Biquadrat, folglich ist die Aufgabe in allgemeinen Ausdrücken schon gelöst. Nun setze man für x die Zahl 3, so ist die erste der gesuchten Zahlen 63, die zweite 15, die dritte 3.

Nunmehr kehren wir wieder zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setzen die Summe der drei Zahlen wieder $= x^2$, von den gesuchten Zahlen aber sei die erste $= 63x^6$, die zweite $15x^6$, die dritte $3x^6$. Nun muß

auch die Summe der drei Zahlen $= x^2$ sein. Man hat also

$$81x^6 = x^2, \text{ und } x = \frac{1}{3}.$$

Das Uebrige ist von selbst klar.

XXII. Aufgabe.

Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihre Summe einer vorgeschriebenen Zahl gleich wird, der Cubus der Summe aber, wenn man jede der drei Zahlen einzeln davon abzieht, ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

* Hier kommt es wieder dahin, daß man die Zahl 2 wie vorhin zerstückeln muß. Ferner ist der Cubus von $2 = 8$; daher muß man jede der drei Zahlen von 8 abziehen, und die Reste müssen Quadrate sein. Man muß also 22 in drei Quadrate theilen, deren jedes größer als 6 ist, und wenn wir jedes derselben von 8 abziehen, so finden wir die drei gesuchten Zahlen. Wir haben aber schon vorher gezeigt, wie man 22 in drei Quadrate theilen muß, deren jedes größer als 6 ist.

XXIII. Aufgabe.

Man soll einen gegebenen Bruch in drei Brüche von der Beschaffenheit theilen, daß sie

Quadrate werden, wenn man den Cubus ihrer Summe davon abzieht.

Auflösung.

Der gegebene Bruch sei $\frac{1}{4}$, und man soll denselben so theilen, wie es in der Aufgabe vorgeschrieben worden; es muß also jeder einzelne Bruch, wenn man $\frac{1}{64}$ davon abzieht, ein Quadrat zum Reste lassen. Wenn man also von der Summe der drei Zahlen $\frac{3}{64}$ abzieht, so ist der Rest noch immer die Summe von drei Quadraten, und wenn ich zu jedem dieser Quadrate $\frac{1}{64}$ addire, so finde ich jede der drei gesuchten Zahlen. Dies ist aber ganz leicht, denn es kommt nur darauf an, den Rest $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate zu theilen, was gar keine Schwierigkeit hat.

XXIV. Aufgabe.

Man soll drei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von allen dreien auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedwedes der drei gesuchten Quadrate dazu addirt.

Auflösung.

Das Quadrat, welches aus der Multiplication der drei gesuchten Quadrate entstehen soll, sei $= x^2$, und nun suchen wir zuerst drei Quadrate, deren jedes wieder ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt. Dies kann man aber vermittelst jedes rechtwinkligen Dreiecks bewirken. Ich nehme drei rechtwinklige Dreiecke, und dividire das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der anderen, so finde ich die drei Quadrate; das erste nämlich wird $= \frac{9}{16}x^2$, das zweite $= \frac{25}{144}x^2$, das dritte $= \frac{64}{225}x^2$, denn jedes dieser Quadrate wird wieder ein Quadrat, so bald man noch x^2 dazu addirt.

Nun wird noch verlangt, daß das Produkt jener drei Quadrate $= x^2$ sei; dies Produkt ist aber $\frac{14400}{518400}x^6$. Man hat also

$$\frac{14400}{518400}x^6 = x^2,$$

und wenn man alles auf gleiche Benennung bringt, und durch x^2 dividirt, so wird

$$\frac{14400}{518400}x^4 = 1.$$

Nun setze man die Wurzeln beider Ausdrücke gleich, so wird

$$\frac{120}{720}x^2 = 1.$$

Hier ist nun 1 eine Quadratzahl, und wenn also auch $\frac{120}{720}x^2$ eine Quadratzahl wäre, so wäre die Aufgabe gelöst. Dies ist aber nicht der Fall, und es kommt also darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu finden, daß das Produkt ihrer Lothe mit dem Produkt ihrer Grundlinien multiplicirt, ein Quadrat wird. Dies Quadrat wird also das Produkt aus den Katheten eines dieser Dreiecke zum Faktor haben, und wenn wir daher alles durch das Produkt aus den Katheten des einen dieser Dreiecks dividiren, so erhalten wir ein Produkt, welches das Produkt aus den Katheten des zweiten Dreiecks, und das Produkt aus den Katheten des dritten zu seinen Faktoren hat. Wenn wir also das eine dieser Dreiecke durch die Zahlen 3, 4 und 5 ausdrücken, so kommt es darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Produkt aus den Katheten des einen Dreiecks von dem Produkt der Katheten des anderen irgend ein Zwölffaches, also auch die Fläche des einen von der Fläche des anderen ein Zwölffaches sei. Wenn sie aber ein Zwölffaches sein muß, so darf sie auch ein Dreifaches sein, und die Auflösung ist ganz leicht. Das eine Dreieck ist nämlich 9, 40, 41, das andere 8, 15, 17.

Nachdem wir also die rechtwinkligen Dreiecke gefunden haben, so kehren wir zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setzen das eine der drei gesuchten Quadrate $= \frac{9}{16}x^2$, das andere $= \frac{64}{225}x^2$, das dritte $= \frac{81}{1600}x^2$, und

wenn wir das Produkt dieser drei Zahlen $= x^2$ setzen, so erhalten wir den Werth von x in rationalen Zahlen. Diesen Werth setze man in die obigen allgemeinen Ausdrücke.

XXV. Aufgabe.

Man soll drei Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von allen dreien auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man jedes der drei Quadrate davon abzieht.

Auflösung.

Das Produkt der drei gesuchten Quadrate sei $= x^2$, und nun entnehme man die Coefficienten der drei gesuchten Quadrate wieder von rechtwinkligen Dreiecken, der eine sei $\frac{16}{25}$, der zweite $\frac{25}{169}$, der dritte $\frac{64}{289}$. Ich verbinde sie mit der Hauptgröße x^2, so giebt x^2, wenn man jedwede der drei gesuchten Zahlen davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste.

Nun soll aber das Produkt der drei Zahlen $= x^2$ sein, dies Produkt ist aber auch $= \frac{25600}{1221025} x^6$; man hat also die Gleichung

$$\frac{25600}{1221025} x^6 = x^2,$$

und, wenn man alles durch x^2 dividirt, so wird

$$\frac{25600}{1221025} x^4 = 1.$$

Nun ist 1 ein Quadrat, welches zu seiner Wurzel wieder ein Quadrat hat; es sollte also auch $\frac{25600}{1221025} x^4$ ein Quadrat sein, welches ein Quadrat zu seiner Wurzel hat. Es kommt also wieder darauf an, drei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu finden, daß das Produkt der Lothe mit dem Produkt der Hypotenusen multiplicirt ein Quadrat gebe, welches ein Quadrat zu seiner Wurzel hat.

Wenn ich nun alles durch das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuse eines dieser Dreiecke dividire, so erhalte ich ein Produkt, welches das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuse des zweiten Dreiecks und das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuse des dritten rechtwinkligen Dreiecks zu seinen Faktoren hat. Das eine rechtwinklige Dreieck sei 3, 4, 5, so kommt es darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuse des einen 20 Mal größer sei, als das Produkt aus dem Loth und der Hypotenuse des anderen. Wenn es aber 20 Mal größer sein muß, so darf es auch 5 Mal größer sein.

Dies ist aber ganz leicht. Das größere Dreieck ist nämlich 5, 12, 13; das kleinere 3, 4, 5. Aus diesen beiden Dreiecken muß man also zwei andere Dreiecke ableiten, welche die erforderte Eigenschaft haben. — — — — — Nachdem wir diese Dreiecke in den kleinsten Zahlen gefunden haben, so kehren wir zu der ursprüng-

lichen Aufgabe zurück, und setzen das Produkt der drei gesuchten Quadrate $= x^2$, von den drei gesuchten Quadraten aber setzen wir das erste $= \frac{16}{25}x^2$, das zweite $= \frac{576}{625}x^2$, das dritte $= \frac{14400}{28561}x^2$.

Jetzt ist nur noch erforderlich, daß man das Produkt der drei Zahlen $= x^2$, also auch die Wurzeln von beiden einander gleich setze, so findet man $x = \frac{65}{48}$.

Diesen Werth setze man in die obigen allgemeinen Ausdrücke.

XXVI. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß ihr Produkt, von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

Man setze das Produkt der drei Zahlen $= x^2$, die Coefficienten der Zahlen selbst entnehme man wieder von beliebigen rechtwinkligen Dreiecken. Aber auch hier kommt es wieder dahin, daß man rechtwinklige Dreiecke von der Beschaffenheit, wie in der vorigen Aufgabe, suchen muß.

Wenn wir also die nämlichen Dreiecke beibehalten, so setze ich das eine der gesuchten Quadrate $= \frac{25}{16}x^2$,

das zweite $= \frac{625}{576}x^2$, das dritte $\frac{28561}{14400}x^2$, und nun läßt das Produkt der drei Zahlen von jedweder Zahl abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reste. Nun ist noch erforderlich, daß man das Produkt der drei Zahlen $= x^2$ setze, daraus aber findet man $x = \frac{48}{65}$.

XXVII. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien, wenn man 1 dazu addirt, wieder ein Quadrat wird.

Auflösung.

Ich verlange zuerst, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl ein Quadrat werde, wenn man 1 dazu addirt. Man multiplicire alles mit der dritten Zahl, welche auch ein Quadrat ist; also muß das Produkt der ersten und zweiten Zahl mit der dritten multiplicirt, d. h. das Produkt aller drei Zahlen ein Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl, und eben so auch, wenn man die erste oder zweite Zahl dazu addirt. Diese Aufgabe haben wir aber schon vorher gelöst, und die dort gefundenen Zahlen leisten auch, was die gegenwärtige Aufgabe vorschreibt.

XXVIII. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien, wenn man 1 davon abzieht, wieder ein Quadrat wird.

Auflösung.

Man multiplicire alles mit der dritten Zahl, so muß das Produkt der ersten und zweiten Zahl, mit der dritten multiplicirt, d. h. das Produkt aus allen drei Zahlen ein Quadrat werden, wenn man die dritte Zahl davon abzieht, und eben dies Produkt muß auch ein Quadrat werden, wenn man die zweite oder die erste Zahl davon abzieht. Diese Aufgabe haben wir aber schon vorher gelöst, und die dort gefundenen Zahlen leisten auch, was die gegenwärtige Aufgabe vorschreibt.

XXIX. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt von je zweien, wenn man es von 1 abzieht, ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

Wir verlangen hier wieder, daß das Produkt von je zweien, wenn man es von 1 abzieht, ein Quadrat werde.

werde. Wenn wir nun alles mit der dritten Zahl multipliciren, so kommt es wieder dahin, daß wir drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen müssen, daß das Produkt von allen dreien, von jedweder Zahl abgezogen, ein Quadrat zum Reste läßt. Diese Aufgabe haben wir aber schon vorher gelöst.

XXX. Aufgabe.

Man soll zu einer gegebenen Zahl drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 15, und das eine der gesuchten Quadrate sei 9. Man muß also noch zwei andere Quadrate suchen, deren jedes mit der Zahl 24, und deren Summe mit der Zahl 15 zusammen genommen ein Quadrat macht. Man suche also zuerst zwei Quadrate, deren jedes mit der Zahl 24 ein Quadrat macht. Wir nehmen also Zahlen, welche Faktoren der Zahl 24, und zugleich Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind. Der eine Faktor von 24 sei $= \frac{4}{x}$, so ist der zugehörige Faktor $= 6x$; die Hälfte des einen Faktors ist $= \frac{2}{x}$, die Hälfte des anderen $= 3x$. Ferner sei ein Faktor

von $24 = \frac{3}{x}$, so ist der zugehörige Faktor $= 8x$, und die Hälfte des einen $= \frac{3}{2x}$, die Hälfte des anderen $= 4x$. Nun sei die Wurzel des einen Quadrats $= 3x - \frac{2}{x}$, die Wurzel des anderen $= 4x - \frac{3}{2x}$, denn so wird jedes der beiden Quadrate mit der Zahl 24 wieder ein Quadrat bilden.

Nun ist noch die Bedingung übrig, daß auch die Summe der beiden Quadrate mit der Zahl 15 wieder ein Quadrat geben soll. Diese Rechnung aber giebt $\frac{64}{x^2} + 25x^2 - 9$, oder $\frac{25}{4x^2} + 25x^2 - 9$, und dieser Ausdruck muß also ein Quadrat sein. Man setze

$$\frac{25}{4x^2} + 25x^2 - 9 = 25x^2,$$

so wird $x = \frac{5}{6}$, und diesen Werth setze man in die allgemeinen Ausdrücke.

XXXI. Aufgabe.

Man soll zu einer gegebenen Zahl drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe von je zweien ein Quadrat wird, wenn man die gegebene Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 13, und das eine der gesuchten Quadrate sei 25. Man muß also zwei andere

Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß jedes derselben mit der Zahl 12 wieder ein Quadrat wird, die Summe von beiden aber ein Quadrat zum Reste läßt, wenn man die Zahl 13 davon abzieht.

Wir nehmen hier wieder die Faktoren der Zahl 12, die sich durch die Division mit 3 und 4 ergeben, und die Wurzel des ersten Quadrats wird $= \frac{3x}{2} - \frac{2}{x}$, die Wurzel des anderen $= 2x - \frac{3}{2x}$, und nun geben beide Quadrate, wenn man 12 dazu addirt, wieder ein Quadrat zur Summe.

Nun ist noch erforderlich, daß die Summe beider, wenn man 13 davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste läßt. Die Rechnung giebt aber $\frac{25}{4x^2} + \frac{25x^2}{4} - 25$, also muß dieser Ausdruck ein Quadrat sein. Man setze

$$\frac{25}{4x^2} + \frac{25x^2}{4} - 25 = \frac{25}{4x^2},$$

so wird $x = 2$. Diesen Werth setze man in die allgemeinen Ausdrücke.

XXXII. Aufgabe.

Man soll drei Quadratzahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe ihrer Quadrate wieder ein Quadrat wird.

Auflösung.

Man setze die erste der gesuchten Zahlen $= x^2$, die zweite $= 4$, die dritte $= 9$, so wird die Summe ihrer Quadrate $= x^4 + 97$. Dies setze man einem Quadrat von der Wurzel $x^2 - 10$ gleich, so wird

$$20x^2 = 3.$$

Wenn nun durch Multiplication beider Ausdrücke ein Quadrat entstände, so wäre die Aufgabe gelöst. Es kommt also darauf an, zwei Quadrate und zu diesen eine dritte Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Quadrat dieser Zahl, wenn man die Quadrate der beiden gesuchten Quadratzahlen davon abzieht, einen Rest lasse, der sich zu dem Doppelten der anfänglich genommenen Zahl wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhalte.

Man setze also das eine der gesuchten Quadrate $= x^2$, das zweite $= 4$, und nehme dazu willkührlich eine dritte Zahl $= x^2 + 4$. Wenn man nun von dem Quadrat dieser willkührlichen Zahl die Quadrate der beiden Quadratzahlen abzieht, so ist der Rest $= 8x^2$. Dieser Rest soll nun zu dem Doppelten der willkührlichen Zahl $2x^2 + 8$ sich wie ein Quadrat zu einem Quadrate verhalten.

Man dividire beide Ausdrücke durch 2, so soll auch $4x^2$ zu $x^2 + 4$ sich wie ein Quadrat zu einem Quadrate verhalten. Nun ist $4x^2$ ein Quadrat, daher muß auch $x^2 + 4$ ein Quadrat sein.

Die Wurzel dieses Quadrats sei $= x+1$, so wird $x = 1\frac{1}{2}$; also ist das eine der gesuchten Quadrate $= 2\frac{1}{4}$, das andere $= 4$, die willkührlich genommene Zahl aber $= \frac{5}{4}$. Man multiplicire aber alles mit 4, so ist das eine Quadrat $= 9$, das andere $= 16$, und die willkührliche Zahl $= 25$.

Jetzt kommen wir wieder auf die ursprüngliche Aufgabe, und setzen die eine der gesuchten Quadratzahlen $= x^2$, die zweite $= 9$, die dritte $= 16$, so ist die Summe ihrer Quadrate $= x^4 + 337$. Nun nehme man $x^2 - 25$ als Wurzel dieses Quadrates an, so wird $x = \frac{12}{5}$. Das Uebrige ist für sich selbst klar.

XXXIII. Aufgabe.

Zweierlei Wein, acht Drachmen das Maaß, und schlechtern zu fünf nur,
Mischte der gütige Herr seinen Bedienten zum Fest.
Was er als Preis für beides bezahlt, war eine Quadratzahl,
Legst du zu dem Quadrat aber noch Sechzig hinzu,
Siehe so hast du ein zweites Quadrat; nun merke, die Wurzel

Zeigt dir wie viel Maaß jener im Ganzen gekauft.
Und nun sage mir an, wie viel des besseren Weines,
Und wieviel zu fünf, wurde zusammen gemischt?

Auflösung.

Der Sinn dieses Epigramms ist folgender. Es hat Jemand zwei Fässer Wein gekauft; von dem einen kostet das Maaß acht Drachmen, von dem andern nur fünf. Der Preis für beide zusammen genommen ist eine Quadratzahl, und wenn man zu dieser Zahl noch 60 addirt, so erhält man wieder ein Quadrat, und die Wurzel des letztern zeigt, wie viel Maaß in beiden Fässern waren. Nun soll man angeben, wie viel Maaß zu acht, und wie viel Maaß zu fünf Drachmen gekauft worden sind.

Man setze die Zahl der gekauften Maaße $= x$, so ist der Preis $= x^2 - 60$. Es soll aber $x^2 - 60$ eine Quadratzahl sein, und als Wurzel desselben muß man x weniger einer beliebigen Zahl annehmen. Es besteht aber $x^2 - 60$ aus zwei Zahlen, nämlich dem Preise des Weines zu 8, und des Weines zu 5 Drachmen, und ein Fünftel des letzteren Preises zeigt die Zahl der Maaße zu 5 Drachmen an, und ein Achtel des ersteren Preises zeigt die Zahl der Maaße zu 8 Drachmen an;

aber die Zahl der sämmtlichen Maaße ist $= x$. Man muß also $x^2 - 60$ in zwei Zahlen von der Beschaffenheit theilen, daß ein Fünftel der einen und ein Achtel der anderen $= x$ sei. Dies ist aber nicht möglich, wenn nicht x größer als $\frac{x^2-60}{8}$, und kleiner als $\frac{x^2-60}{5}$, also $x^2 - 60$ größer als $5x$, und kleiner dagegen als $8x$ wird. Da nun $x^2 - 60$ größer als $5x$ ist, so addire man an beiden Seiten 60, so wird x^2 größer als $5x + 60$, und x^2 ist $= 5x$ und einer Zahl die kleiner als 60 ist. Daher muß x größer oder wenigstens nicht kleiner als 11 sein. Da ferner $x^2 - 60$ kleiner als $8x$ ist, so addire man an beiden Seiten 60, so wird $x^2 = 8x$ und einer Zahl, welche kleiner als 60 ist, daher darf x nicht größer als 12 werden. Wir haben aber auch gezeigt, daß es nicht kleiner als 11 werden dürfe, also muß der Werth von x größer als 11, und kleiner als 12 sein.

Wenn wir aber $x^2 - 60$ zu einem Quadrat machen wollen, so müssen wir x weniger einer gewissen Zahl als Wurzel ansehen, und wir erhalten den Werth von x, indem wir eine gewisse Zahl ins Quadrat erheben, dazu 60 addiren, und die Summe durch das Doppelte der noch nicht bestimmten Zahl dividiren. Es kommt also darauf an: eine Zahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn zu ihrem Quadrate noch 60 addirt und die Summe durch das Doppelte der Zahl dividirt wird, der Quotient größer als 11 und kleiner als 12 werde. Wir wollen diese Zahl $= x$ setzen, so soll $\frac{x^2+60}{2x}$ größer

als 11, aber auch kleiner als 12 sein. Daher muß x^2+60 größer als $22x$, und $22x$ so groß als x^2 und eine gewisse Zahl sein, welche kleiner als 60 ist, und daher darf x nicht kleiner als 19 sein. Es soll aber auch der Quotient $\frac{x^2+60}{2x}$ kleiner als 12 sein, daher ist x^2+60 kleiner als $24x$, und $24x$ ist so groß als x^2 und eine gewisse Zahl, die größer als 60 ist; daher muß x kleiner als 21 sein. Wir haben aber auch gesehn, daß es größer als 19 sein müsse. Wenn wir also x^2-60 zu einem Quadrat machen wollen, so müssen wir die Wurzel $= x-20$ setzen, und so findet man $x = 11\frac{1}{2}$, folglich $x^2 = 132\frac{1}{4}$; davon ziehe ich 60 ab, so bleibt $72\frac{1}{4}$. Man muß also $72\frac{1}{4}$ in zwei Zahlen von der Beschaffenheit theilen, daß ein Fünftel der ersteren und ein Achtel der letzteren $= 11\frac{1}{2}$ wird. Nun sei das Fünftel der ersteren $= x$, so ist das Achtel der letzteren $11\frac{1}{2}-x$. Daraus findet man die Zahlen selbst, die eine $= 5x$, die andere $= 92-8x$, und die Summe beider soll $72\frac{1}{4}$ sein; folglich ist

$$92-3x = 72\frac{1}{4}, \text{ und } x = \frac{72}{12}.$$

Die Zahl der Maaße, deren jedes fünf Drachmen kostete, ist also $\frac{79}{12}$, die Zahl der Maaße zu acht Drachmen ist $\frac{57}{12}$, und das Uebrige ist für sich klar.

Anhang zum fünften Buch.

I.

Edler Pythagoras, sage mir an, wie viele der Jünger
Zählt Dein Haus, die dem Dienst sich weihn der unsterblichen Götter?
Sagen will ich es Dir, o Polykrates! Siehe die Hälfte
Weiht sich der herrlichen Mathematik, ein Viertel erforschet
Eifrig die Tiefen der ewgen Natur; ein Siebentel übt noch
Schweigend die Kraft des Gemüths und horcht der sinnigen Rede;
Dann der Jungfrau'n drei, doch herrlich vor allen Theano;
So viel führ ich der Jünger zum Born der ewigen Wahrheit.

II.

Sage den Stand der Planeten mir an und der übrigen Sterne,
Ob zu glücklicher Zeit gestern die Gattinn gebar.
Tag noch war's, zwei Siebentel nimm der verflossenen Frühzeit,
Sechs Mal gleichviel Zeit weilete Helios noch.

III.

Cypris redete jüngst den Sohn mit tröstendem Wort an:
Sprich, mein Sohn, was trauert Dein Herz? Und jener erwiedert:
Haben die Musen mir nicht die Aepfel geraubt, herstürmend,
Diese von hier, und jene von dort, vom Helikon kam ich.
Klio nahm sich ein Fünftel zuerst, ein Zwölftel Euterpe,
Dann noch ein Achtel entriß mir scherzend die lose Thalia,
Nur ein Zwanzigstel nahm Melpomene, aber ein Viertel

Fiel Terpsichoren zu, und ein Siebentel nahm sich Erato.
Dreißig eignete sich Polyhymnia zu, die Bescheidne,
Hundert und Zwanzig Urania gar, Kalliope endlich
Ging drei hundert Aepfel im Schooß hohnlachend von dannen.
Und nun komm ich zurück, ein armer geplünderter Pilger,
Funfzig blieben mir noch. Wie viel doch hatt' ich zu Anfang?

IV.

Trugen die Grazien jüngst Fruchtkörbe mit goldenen Aepfeln,
Jegliche trug gleichviel. Da begegneten ihnen die Musen,
Neun, und wünschten sich Obst, und die gütigen Grazien theilten
Gleich viel jeglicher mit. Gleich viel dann hatten die Zwölfe.
Sage, wie viel sie vertheilt, um gleich viel alle zu haben.

V.

Nimm von der Schaale Gewicht ein Drittel zuerst und ein Viertel,
Sinniger Künstler, und dann füge das Zwölftel hinzu.
Bring' ins Feuer das Gold, und hast du es richtig getroffen,
Ziehst du die Masse zurück, wiegt sie ein richtiges Pfund.

VI.

A. Der zweiten und der dritten Drittheil wieg' ich auf.
B. Die dritte und der ersten Drittheil steckt in mir.
C. Zehn Pfund in mir und dann der ersten Drittheil noch.

VII.

Die tausend Stater, welche mir mein Fleiß erwarb,
Vertheil' ich unter meine beiden Söhne so:

Von des rechten Sohnes Erbtheil sei ein Fünftel schon
Um zwanzig größer als des Bastards vierter Theil.

VIII.

Sechs Pfund schwer, sechs Schaalen von Gold verehrete Krösus,
Aber ein einziges Loth steckte in jeglicher mehr.

IX.

Warum droheſt Du mir mit Schlägen wegen der Nüsse?
Haben die artigen Mädchen sie doch, o Mutter, getheilet.
Zwei Mal nahm ein Siebentel weg die holde Meliſſe,
Titane hat ein Zwölftel erlangt. Das Sechstel und Drittel
Haben Astyoche schäkernd getheilt und die loſe Philinne.
Zwanzig eignete Thetis sich zu, zwölf andere Thisbe,

Lachend zeigte mir Glauka die Hand, drin waren der Nüsse
Eilf an der Zahl, da behielt ich für mich die einzige Nuß hier.

X.

Kind, wie hast Du die Aepfel verthan? Ein Sechstel hat Jno,
Semelen schenkt' ich selbst willig ein Achtel davon.
Raubt mir Autonoe drauf ein Viertel; die lose Agave
Reißet den Schooß mir auf, nimmt sich ein Fünftel und flieht.
Dir selbst hob ich die zehn hier auf. Nun aber ich selber,
Cypris bezeuget es mir, habe den einzigen nur.

XI.

Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter;
Und die Eselin seufzete schwer, da sagte das Söhnlein:

Mutter, was klagst und stöhnest Du doch wie ein jammerndes Mägdlein;
Gieb ein Pfund mir ab, so trag ich doppelte Bürde,
Nimmst Du es aber von mir, gleich viel dann haben wir beide.
Rechne mir aus, wenn du kannst, mein Bester, wie viel sie getragen.

XII.

Wir beide hier, wir wiegen grade zwanzig Pfund,
Ich Zethus und Amphion, aber nimmst du nur
Von mir ein Drittel und von dem den vierten Theil,
So hast du sechs, so viel als unsre Mutter wiegt.

XIII.

A. Zehn Pfund gieb mir, so hab' ich dreifach deine Zahl.
B. Gieb du so viel, fünf Mal hab' ich die Deinige.

XIV.

Ha Polyphem der Cyclop! Wie kunstreich steht er in Erz da!
Aug' und Hand und Mund, alles ist sinnig geformt.
Denn inwendig versteckt sind künstlich geordnete Röhren,
Und aus jeglicher quillt kühlendes Wasser empor;
Doch nicht ordnungslos. Drei Tage strömet die Rechte,
Bis sie das Becken allein, hoch bis zum Rande gefüllt.
Ein Tag gnüget dem Aug' allein, zwei Fünftel dem Munde.
Sage doch, wie viel Zeit brauchen sie alle zugleich?

XV.

A. Zwei Pfund gieb mir, so trag ich doppelt Deine Last.
B. Gieb Du so viel, und vierfach hab ich Deine dann.

XVI.

XVII.

Wie doch kühlenden Trank die Drei, die Göttlichen, spenden,
Zwei Flußgötter und dort Bromios heilige Kraft.
Doch nicht Jeglicher gießt gleich stark; den einzigen Tag nur
Braucht der gewaltige Nil, bis er das Becken gefüllt;
Also entquillt es der Brust. Drei Tage strömet der Thyrsus,
Bis er das Becken allein perlenden Weines gefüllt.
Zwei gebrauchet dein Horn, Achelous! aber zugleich jetzt
Fließt, und in kürzerer Zeit füllet das Becken mir an.

XVIII.

Sage wie viel Seemeilen die Fahrt noch währet, so fragt' einst
Ein Seefahrender Mann auf Adrias tobenden Fluthen.

Und der Schiffsherr sprach — von Kreta's Felsengestade,
Bis zum sicheren Port am sicilischen Berge Pelorum,
Zählt man der Tausende sechs, und was des Weges noch übrig,
Sind vier Fünftel der Fahrt, die vollendet hinter uns daliegt.

XIX.

Geht denn Gewalt vor Recht? uns Beiden ließ ja der Vater
Fünf Talente zurück; aber wie theilet man sie!
Wenn vier Eilftel der Bruder verschenkt, so bleibt er noch immer
Fünfmal reicher als ich. Schläfst Du, o waltender Zeus?

XX.

Wachet ihr Mädchen doch auf! denn von drei Achteln der Stunden,
Welche der Tag noch währt, habt ihr ein Fünftel versäumt.

XXI.

Wie Du o Weib die Noth doch verhehlst? Sie aber, sie lastet
Schwer auf Dir, und legt quälende Mühe Dir auf.
Ein Pfund spannest Du sonst tagtäglich, die ältere Tochter
Spann ein Drittheil noch über das tägliche Pfund.
Nur ein halb Pfund spann die jüngere Tochter, und jetzund
Giebt ein einziges Pfund allen das kärgliche Mahl.

XXII.

Duldest Du denn, o ewiger Zeus, der thessalischen Weiber
Unfug, wie sie den Glanz der milden Selene verdunkeln?
Selber sah ich es jüngst mit Graun; noch war es zum Morgen
Doppelt so viel als zwei Sechstel der Nacht und ein Siebentel austrug.

XXIII.

A. Sage die Stunde mir an, Diodor, sternkundiger Künstler,
Seit vom Aufgang Helios Strahl den hohen Gnomon traf?
B. Vier Mal noch drei Fünftel des eben vollendeten Weges
Sind zurück, dann tauchet er sich ins westliche Meer ein.

XXIV.

Hier dies Grabmal deckt Diophantus sterbliche Hülle,
Und in des Trefflichen Kunst zeigt es sein Alter Dir an.
Knabe zu sein gewährt ihm der Gott ein Sechstel des Lebens,
Und ein Zwölftel der Zeit ward er ein Jüngling genannt.
Noch ein Siebentel schwand, da fand er des Lebens Gefährtinn,
Und vier Jahre darauf ward ihm ein liebliches Kind.

Halb nur hatte der Sohn des Vaters Alter vollendet,
Als ihn plötzlich der Tod seinem Erzeuger entriß.
Noch vier Jahre betrauert' er ihn in schmerzlichem Kummer.
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht!

Sechstes Buch der Aufgaben.

I. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Hypotenuse eine Kubikzahl wird, wenn man jedwede der beiden Katheten davon abzieht.

Auflösung.

Das gesuchte Dreieck sei aus zwei Zahlen gebildet, die eine dieser Zahlen sei x, die andere 3, so ist die Hypotenuse $= x^2 + 9$, das Loth $= 6x$, und die Grundlinie $= x^2 - 9$. Zieht man nun die eine der Katheten, nämlich $x^2 - 9$, von der Hypotenuse ab, so erhält man 18, aber diese Zahl ist keine Kubikzahl.

Wie ist aber die Zahl 18 entstanden? Sie ist das doppelte Quadrat der Zahl 3. Es kommt also darauf an, eine Zahl zu finden, deren doppeltes Quadrat eine

Kubikzahl wird. Die gesuchte Zahl sei x, so soll $2x^2$ eine Kubikzahl sein. Man setze

$$2x^2 = x^3, \text{ so wird } x = 2.$$

Nunmehr bilde ich das gesuchte Dreieck, nicht wie zuerst von den Zahlen x und 3, sondern von x und 2, so wird die Hypotenuse $= x^2 + 4$, das Loth $= 4x$, die Grundlinie $= x^2 - 4$, und nun wird die Hypotenuse eine Kubikzahl, wenn man Grundlinie davon abzieht.

Nun soll aber auch eine Kubikzahl herauskommen, wenn man das Loth 4x von der Hypotenuse abzieht, also der Rest $x^2 - 4x + 4$ soll eine Kubikzahl sein. Dieser Rest ist auch das Quadrat von $x - 2$. Wenn wir also $x - 2$ einer Kubikzahl gleich setzen, so ist die Aufgabe gelöst. Es sei also

$$x - 2 = 8, \text{ so wird } x = 10.$$

Das gesuchte Dreieck wird also von den Zahlen 10 und 2 gebildet, seine Hypotenuse wird 104, das Loth 40, die Grundlinie 96, und die Auflösung leistet, was verlangt wurde.

II. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Hypotenuse eine Kubikzahl wird, wenn man jedwede der beiden Katheten dazu addirt.

Auflösung.

Wenn wir das gesuchte Dreieck, wie in der vorigen Aufgabe, von zwei Zahlen bilden, so müssen wir wieder ein Quadrat suchen, dessen Doppeltes eine Kubikzahl wird; diese Eigenschaft hat aber das Quadrat der Zahl 2. Wir bilden also das gesuchte Dreieck von den Zahlen x und 2, so wird, wie vorher, die Hypotenuse $= x^2 + 4$, die eine Kathete $= 4x$, die andere $= 4 - x^2$.

Nun soll die Hypotenuse aber auch eine Kubikzahl werden, wenn man die erste Kathete dazu addirt; auch muß, wenn wir den Werth für x berechnet haben, und diesen in die obigen Ausdrücke setzen, x^2 kleiner als 4, folglich x kleiner als 2 werden. Wir müssen also einen Cubus suchen, der kleiner als 4, aber größer als 2 ist; ein solcher Cubus ist aber $\frac{27}{8}$. Daher setze man

$$x + 2 = \frac{27}{8}, \text{ so wird } x = \frac{11}{8}.$$

Die Hypotenuse ist also $\frac{377}{64}$, die eine Kathete $\frac{135}{64}$, die andere $\frac{352}{64}$.

III. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die durch eine

Zahl ausgedrückte Fläche desselben ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl dazu addirt.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 5. Man nehme an, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$ und $5x$; so wird die Fläche, wenn man 5 dazu addirt $= 6x^2 + 5$. Dies soll ein Quadrat sein; man setze also $6x^2 + 5 = 9x^2$, und ziehe Gleiches von Gleichem ab, so bleibt $3x^2 = 5$.

Nun müßten sich diese beiden Ausdrücke an sich, und eben so auch ihre Coefficienten, wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Es kommt also darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und dazu ein Quadrat von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man die Fläche des Dreiecks von dem Quadrate abzieht, der Rest der fünfte Theil eines Quadrats sei, weil nämlich 5 die gegebene Zahl ist.

Man bilde also ein Dreieck von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$, so wird die Fläche desselben $x^2 - \frac{1}{x^2}$. Die Wurzel des gesuchten Quadrats sei $= x$, und einem Bruche mit dem Nenner x, und mit einem Zähler, welcher doppelt so groß als die gegebene Zahl ist, also $= x + \frac{10}{x}$, das Quadrat wird also $= x^2 + \frac{100}{x^2} + 20$, und wenn man davon die

Fläche des Dreiecks nämlich $x^2 - \frac{1}{x^2}$ abzieht, so bleibt $\frac{101}{x^2} + 20$. Dies multiplicire man mit 5, so soll $\frac{505}{x^2} + 100$ ein Quadrat sein. Man multiplicire ferner mit x^2, so muß auch $100x^2 + 505$ ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel $= 10x + 5$, so wird

$100x^2 + 505 = +100x^2 + 100x + 25$, und $x = \frac{24}{5}$.

Das gesuchte Dreieck muß also von den Zahlen $\frac{24}{5}$ und $\frac{5}{24}$ gebildet werden, und die Wurzel des gesuchten Quadrats muß $\frac{413}{60}$ sein.

Wenn ich also in der ursprünglichen Aufgabe das gesuchte Dreieck durch x und die hier berechneten Coefficienten ausdrücke, und die um 5 vergrößerte Fläche des Dreiecks $= \frac{170569}{3600}x^2$ setze, so ist alles Uebrige von selbst klar.

IV. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl davon abzieht.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 6, und man nehme wieder an, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, und habe die Seiten 3x, 4x und 5x. Nun soll nach

den Bedingungen der Aufgabe $6x^2-6$ ein Quadrat sein; man setze also $6x^2-6=4x^2$, so kommt es wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und ein Quadrat von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man das Quadrat von der Fläche des Dreiecks abzieht, der Rest, sechs Mal genommen, ein Quadrat wird.

Man bilde also das Dreieck von x und $\frac{1}{x}$, die Wurzel des gesuchten Quadrates sei x weniger einem einfachen Bruch, der die Hälfte der gegebenen Zahl zu seinem Zähler hat, also $=x-\frac{3}{x}$. Das Quadrat wird also $=x^2+\frac{9}{x^2}-6$, und wenn wir dieses von der Fläche des Dreiecks oder von $x^2-\frac{1}{x^2}$ abziehn, so bleibt $6-\frac{10}{x^2}$. Wenn man diesen Rest sechs Mal nimmt, und dann alles mit x^2 multiplicirt, so soll $36x^2-60$ ein Quadrat sein. Die Wurzel desselben sei $6x-2$, so wird

$$36x^2-60=36x^2-24x+4, \text{ also } x=\frac{8}{3}.$$

Das Dreieck wird also von den Zahlen $\frac{8}{3}$ und $\frac{3}{8}$ gebildet, und die Wurzel des gesuchten Quadrats ist $\frac{37}{24}$. Wenn ich nun hieraus die Seiten des Dreiecks gefunden habe, so multiplicire ich (um die ursprüngliche Aufgabe zu lösen) alle Seiten mit x, und wenn ich jetzt den vorigen Gang der Auflösung beibehalte, so finde ich für x einen rationalen Werth.

V. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben, von einer vorgeschriebenen Zahl abgezogen, ein Quadrat zum Reste läßt.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 10, und man nehme zuerst wieder 3x, 4x und 5x als die Seiten des gesuchten Dreiecks an. Nun soll $10-6x^2$ ein Quadrat sein, und wenn ich diesen Ausdruck einem Produkt aus x^2 und einem quadratischen Coefficienten gleich setze, so kommt es wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck und eine Quadratzahl von der Beschaffenheit zu suchen, daß die Summe dieser Quadratzahl und der Fläche des Dreiecks der zehnte Theil eines Quadrats sei.

Man bilde dies Dreieck von x und $\frac{1}{x}$, und die Wurzel des gesuchten Quadrats sei $\frac{1}{x}+5x$, so wird die Summe des Quadrats und der Fläche des Dreiecks $=26x^2+10$. Dies multiplicire man mit 10, so soll $260x^2+100$, folglich auch der vierte Theil dieses Ausdrucks d. i. $65x^2+25$ ein Quadrat sein. Ich setze die Wurzel desselben $=5+8x$, so wird

$$65x^2+25=25+80x+64x^2, \text{ also } x=80.$$

Hieraus finden wir aber das gesuchte Dreieck, durch das im Vorigen erläuterte Verfahren.

VI. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe der Fläche und der einen Kathete einer gegebenen Zahl gleich wird.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 7; man nehme wieder an, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$, so erhält man die Gleichung

$$6x^2 + 3x = 7.$$

Wenn man nun den halben Coefficienten von x ins Quadrat erhebt, und dazu das Produkt der Zahl 7 und des Coefficienten von x^2 addirt, so müßte die Summe ein Quadrat sein. Dies trifft aber nicht zu. Man muß also zuerst ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat von der Hälfte der einen Kathete, mit der siebenfachen Fläche des Dreiecks zusammen genommen, ein Quadrat giebt.

Die eine Kathete sei $= x$, die andere $= 1$, so soll $3\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, und, wenn man mit 4 multiplicirt, $14x + 1$ ein Quadrat sein. Damit aber das rechtwinklige Dreieck sich in rationalen Zahlen ausdrücken lasse, o muß auch

x^2+1 ein Quadrat sein. Der Unterschied der beiden Ausdrücke ist x^2-14x; dieser Unterschied hat aber die Factoren x und $x-14$. Den halben Unterschied dieser Factoren erhebe ich ins Quadrat, so erhalte ich 49, dies setze ich dem kleineren Quadrate gleich, so wird $x=\frac{24}{7}$. Diesen Werth setze man in die obigen allgemeinen Ausdrücke.

Ich setze also die eine Kathete $=\frac{24}{7}$, die andere $=1$, und wenn ich diese Zahlen zuerst durch 7, und dann durch x multiplicire, so wird die eine Kathete $=24x$, die andere $=7x$, und die Hypotenuse $=25x$. Wenn man nun zu der Fläche die zweite Kathete addirt, so erhält man die Gleichung

$$84x^2+7x=7, \text{ also } x=\frac{1}{4}.$$

Die Seiten des gesuchten Dreiecks sind also 6, $\frac{7}{4}$ und $\frac{25}{4}$.

VII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die eine der Katheten davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 7. Nehmen wir an, daß das Dreieck seiner Gestalt nach gegeben sei, so kommt es

zuletzt wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Quadrat von der Hälfte der einen Kathete und die siebenfache Fläche des Dreiecks zusammen genommen, ein Quadrat zu ihrer Summe geben. Ein solches Dreieck haben wir bereits gefunden, und seine Seiten sind 7, 24, 25. Ich drücke also die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x und die eben berechneten Coefficienten aus. Wenn man nun von der Fläche des Dreiecks die eine Kathete abzieht, so erhält man $84x^2 - 7x$; dies giebt die Gleichung

$$84x^2 - 7x = 7, \text{ und } x = \frac{1}{3}.$$

Diesen Werth von x setze man in die obigen Ausdrücke.

VIII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben, mit der Summe der Kathete zusammen genommen, eine vorgeschriebene Zahl giebt.

Auflösung.

Die vorgeschriebene Zahl sei 6. Man nehme wieder an, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, so kommt es wieder darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu finden, daß das Quadrat von

der halben Summe der Katheten, mit der sechsfachen Fläche zusammen genommen, ein Quadrat gebe.

Man setze wieder die eine Kathete $= x$, die andere $= 1$, so soll $\frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{4}$, also auch das Vierfache dieses Ausdrucks, d. i. $x^2 + 7x + 1$ ein Quadrat sein. Aber $x^2 + 1$ muß auch ein Quadrat sein; der Unterschied dieser beiden Ausdrücke ist $14x$, und dieser hat die Factoren $2x$ und 7. Der halbe Unterschied dieser Faktoren ins Quadrat erhoben, giebt

$$x^2 - 7x + 12\frac{1}{4} = x^2 + 1, \text{ also } x = \frac{45}{28}.$$

Das Dreieck hat also die Seiten $\frac{45}{28}$, 1, und $\frac{53}{28}$. Nun multiplicire man alles mit 28, so werden die Seiten des gesuchten Dreiecks $45x$, $28x$, $53x$. Wenn man nun zu der Fläche dieses Dreiecks beide Katheten addirt, so erhält man $630x^2 + 73x$, und man hat die Gleichung

$$630x^2 + 73x = 6.$$

Hieraus ergiebt sich für x ein rationaler Werth, den man in die obigen Ausdrücke für die drei Seiten setzen kann.

IX. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben

selben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die Summe der beiden Katheten davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 6. Nehmen wir wieder an, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, so kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Quadrat von der halben Summe der Katheten, mit der sechsfachen Fläche zusammen genommen, ein Quadrat gebe. Diese Aufgabe haben wir aber schon gelöst, und das gesuchte Dreieck hat die Seiten 28, 45, 53.

Ich drücke also die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x und die eben berechneten Coefficienten aus, so wird zuletzt

$$630x^2 - 73x = 6.$$

Hieraus findet man $x = \frac{6}{35}$, und diesen Werth setze man in den allgemeinen Ausdruck für die Seiten des gesuchten Dreiecks.

X. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn

man die Hypotenuse und die eine der Katheten dazu addirt.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 4. Man nehme wieder ein der Gestalt nach gegebenes Dreieck, so kommt es darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu suchen, daß die halbe Summe der Hypotenuse und der einen Kathete, ins Quadrat erhoben, und zu der vierfachen Fläche des Dreiecks addirt, ein Quadrat giebt.

Man bilde dies Dreieck von dem Zahlen x und $x+1$, so wird das Quadrat von der halben Summe der Hypotenuse und der einen Kathete $= x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, die vierfache Fläche des Dreiecks aber ist $= 8x^3+12x^2+4x$. Man soll also den Ausdruck $x^4+12x^3+18x^2+8x+1$ zu einem Quadrat machen. Man setze die Wurzel desselben $= x^2+6x-1$, so wird $x = \frac{5}{4}$, und das Dreieck wird also von den Zahlen $\frac{5}{4}$ und $\frac{9}{4}$, oder wenn man beides mit 4 multiplicirt, von den Zahlen 5 und 9 gebildet. Nun nehme ich ein demselben ähnliches Dreieck in den kleinsten Zahlen, und setze die Seiten des gesuchten Dreiecks $28x$, $45x$, $53x$. Wenn man zu der Fläche dieses Dreiecks die Hypotenuse und die eine Kathete addirt, so erhält man $630x^2+81x$. Dies giebt die Gleichung

$$630x^2+81x = 4.$$

Hieraus erhält man $x = \frac{4}{105}$, und diesen Werth setze man in den allgemeinen Ausdruck für die Seiten des Dreiecks.

XI. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben einer gegebenen Zahl gleich wird, wenn man die Hypotenuse und die eine Kathete davon abzieht.

Auflösung.

Die gegebene Zahl sei 4. Wenn wir hier wieder annehmen, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, so sind wir wieder genöthigt, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu suchen, daß die vierfache Fläche desselben, mit dem Quadrat von der halben Summe der Hypotenuse und der einen Kathete zusammen genommen, ein Quadrat wird. Wir haben aber gezeigt, daß ein Dreieck, dessen Seiten 28, 45, 53 sind, dieser Forderung genüge.

Wir drücken also die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x und die eben berechneten Coefficienten aus, so erhält man die Gleichung

$$630x^2 - 81x = 4.$$

Hieraus findet man $x = \frac{1}{6}$, und durch diesen Werth drücke man nunmehr die Seiten des gesuchten Dreiecks aus.

XII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß 1) der Unterschied der Katheten 2) die größere Kathete selbst, und 3) die Fläche des Dreiecks mit der kleineren Kathete zusammen genommen, ein Quadrat werde.

Auflösung.

Man bilde ein Dreieck von zwei Zahlen, und nehme an, daß das doppelte Produkt derselben die größere Kathete sei. Man muß also zwei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß so wohl ihr doppeltes Produkt, als der Ueberschuß des doppelten Produktes über den Unterschied ihrer Quadrate ein Quadrat sei. Diese Eigenschaft haben aber jede zwei Zahlen, wenn die größere das Doppelte der kleineren ist. Ich bilde also ein Dreieck von den Zahlen x und 2x, so sind die beiden ersten Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Nun wird aber noch verlangt, daß die Fläche des Dreiecks, mit der kleineren Kathete zusammen genommen, ebenfalls ein Quadrat werde. Es soll also $6x^4+3x^2$, oder wenn man alles durch x^2 dividirt, $6x^2+3$ ein Quadrat sein. Wir suchen also irgend eine Zahl von der Art, daß ihr sechsfaches Quadrat, wenn man 3 dazu addirt, wieder ein Qua-

drat wird. Diese Eigenschaft hat aber 1, und außerdem unendlich viele andere Zahlen. Man kann also das gesuchte Dreieck von den Zahlen 1 und 2 bilden.

XIII. Lehnsatz.

Wenn zwei Zahlen gegeben sind, deren Summe ein Quadrat ist, so kann man unendlich viele Quadratzahlen von der Beschaffenheit finden, daß, wenn man sie mit der einen gegebenen Zahl multiplicirt, und das Produkt zu der anderen gegebenen Zahl addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird.

Es mögen z. B. 3 und 6 die gegebenen Zahlen sein, und man soll eine Quadratzahl von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man dieselbe mit 3 multiplicirt, und zu dem Produkte 6 addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Das gesuchte Quadrat sei z. B. x^2+2x+1, so soll $3x^2+6x+9$ ein Quadrat sein; dies kann man aber auf unzählige Weise erreichen, weil die bestimmte Zahl 9 ein Quadrat ist.

Man setze also die Wurzel $= 3-3x$, so wird $x = 4$, und die Wurzel des gesuchten Quadrats ist also 5. Auf eben diese Weise aber kann man noch unzählige Quadrate von der verlangten Eigenschaft finden.

XIV. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben ein Quadrat wird, wenn man jedwede Kathete dazu addirt.

Auflösung.

Man nehme an, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, und habe die Seiten $5x$, $12x$ und $13x$, so soll zuerst $30x^2 + 12x$ ein Quadrat sein. Man setze also

$$30x^2 + 12x = 36x^2, \text{ so wird } x = 2.$$

Nun sollte für eben diesen Werth von x auch $30x^2 + 5x$ ein Quadrat sein; aber das trifft nicht zu, und wir müssen daher ein Quadrat von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man 30 davon abzieht, mit dem Rest die Zahl 12 dividirt, das Quadrat des Quotienten mit 30 multiplicirt, und die fünffache Wurzel dazu addirt, wiederum ein Quadrat herauskomme.

Das gesuchte Quadrat sei $= x^2$; wenn wir davon 30 abziehen, und 12 durch den Rest dividiren, so erhalten wir $\frac{12}{x^2 - 30}$. Davon ist das Quadrat $\frac{144}{x^4 - 60x^2 + 900}$. Dies multiplicire man mit 30, und addire das Fünffache der Wurzel dazu, so erhält man $\frac{60x^2 + 2520}{x^4 - 60x^2 + 900}$. Hier ist nun der Nenner ein Quadrat, daher muß auch

der Zähler $60x^2 + 2520$ ein Quadrat sein, d. h. ein gewisses Quadrat, mit 60 multiplicirt, und um die Zahl 2520 vermehrt, soll wieder ein Quadrat geben.

Wenn wir nun das Dreieck so gebildet hätten, daß $60 + 2520$ ein Quadrat wäre, so wäre die Aufgabe gelöst. Aber 60 entsteht, indem wir die beiden Katheten in einander multipliciren, und 2520 ist das Produkt aus der größeren Kathete, dem Unterschied beider Katheten, und der Fläche des Dreiecks. Es kommt also darauf an, ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit zu suchen, daß das Produkt der beiden Katheten ein Quadrat wird, wenn man das Produkt der größeren Kathete, des Unterschiedes beider Katheten, und der Fläche des Dreiecks dazu addirt. Wenn wir nun für die größere Kathete irgend eine Quadratzahl nehmen, und die obigen Produkte durch diese Zahl dividiren, so haben wir nur dahin zu sehen, daß die kleinere Kathete mit dem Produkt aus der Fläche des Dreiecks und dem Unterschiede der Katheten wieder ein Quadrat gebe, und dann kommt es darauf an, zu zwei gegebenen Zahlen, nämlich zu der Fläche und der kleineren Kathete, ein Quadrat von der Beschaffenheit zu suchen, daß, wenn man es mit der einen gegebenen Zahlen multiplicirt, und die andere gegebene Zahl dazu addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Diese Aufgabe aber ist als Lehnsatz schon da gewesen, und das verlangte Dreieck hat die Seiten 3, 4, 5. Ich drücke nun die Seiten des gesuchten Dreiecks durch x und die eben gefundenen Coefficienten aus, so soll

$6x^2 + 4x$, und zugleich $6x^2 + 3x$ ein Quadrat werden. Wenn ich hier die größere Gleichung auflöse, so erhalte ich $x = \frac{4}{x^2 - 6}$, also ist das Quadrat $\frac{16}{x^4 - 12x + 36}$. Wenn man also zu dem sechsfachen Quadrat noch $3x$ addirt, so erhält man $\frac{12x^2 + 24}{x^4 - 12x + 36}$, daher muß $12x^2 + 24$ ein Quadrat werden, und es kommt also darauf an, ein Quadrat zu finden, welches mit der kleineren gegebenen Zahl multiplicirt, und zu der größeren addirt, wieder ein Quadrat giebt. Ein solches Quadrat ist aber 25; daher ist $x^2 = 25$, und $x = 5$. Wenn wir also $6x^2 + 4$ zu einem Quadrat machen wollen, so setzen wir

$$6x^2 + 4x = 25x^2.$$

Hieraus findet man $x = \frac{4}{19}$, und die Seiten des gesuchten Dreiecks sind $\frac{12}{19}$, $\frac{16}{19}$, $\frac{20}{19}$.

XV. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben ein Quadrat wird, wenn man eine der Katheten davon abzieht.

Auflösung.

Wenn wir, wie im Vorigen annehmen, daß das Dreieck seiner Gestalt nach gegeben sei, so kommt es wieder dahin, daß wir ein Dreieck suchen müssen, wel-

ches dem Dreieck 3, 4, 5 ähnlich ist. Man setze also die Seiten des gesuchten Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$, so soll $6x^2 - 4x$ ein Quadrat sein. Wenn wir nun dies Quadrat kleiner als $6x^2$ nehmen, so wird x ein Bruch, dessen Zähler 4, und dessen Nenner der Ueberschuß der Zahl 6 über den Coefficienten des gewählten Quadrats ist. Und wenn wir das hier zu wählende Quadrat $= x^2$ setzen, so muß nicht nur x die eben angegebene Eigengenschaft haben, sondern es muß auch $6x^2 - 3x$ ein Quadrat werden. Nimmt man nun x^2 oder das Quadrat von $\frac{4}{6-x^2}$ sechs Mal, so erhält man $\frac{96}{x^4 - 12x^2 + 36}$, das Dreifache der Wurzel aber ist $\frac{12}{6-x^2} = \frac{72-12x^2}{x^4-12x^2+36}$, und wenn wir diesen Bruch von dem vorigen abziehen, so bleibt $\frac{12x^2+24}{x^4-12x+24}$. Hier ist nun der Nenner ein Quadrat, daher muß man auch den Zähler $12x^2 + 24$ zu einem Quadrate machen, und dies geschieht, wenn $x = 1$ ist. Ich setze daher

$$6x^2 - 4x = x^2,$$

so wird $x = \frac{4}{5}$, und die Seiten des gesuchten Dreiecks sind $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$, und 4.

Will man aber für x^2 nicht die Zahl 1 gebrauchen, so nehme man $x + 1$ als die Wurzel des gesuchten Quadrats an. Wenn man nun zu dem Dreifachen des Quadrats noch 6 addirt, so erhält man $3x^2 + 6x + 9$, und dies soll ein Quadrat werden. Dies ist aber ganz

leicht, und man findet, daß x nicht größer als $\frac{13}{9}$, aber die Wurzel des gesuchten Quadrats d. i. x+1 nicht größer als $\frac{22}{9}$ sein kann. Wenn man das so erhaltene Quadrat von der Zahl 6 abzieht, so erhält man für x ebenfalls einen rationalen Werth.

XVI. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben ein Quadrat wird, so wohl wenn man die Hypotenuse, als wenn man die eine Kathete davon abzieht.

Auflösung.

Das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, und habe die Seiten 3x, 4x und 5x; nun soll man also wieder $6x^2-5x$, und $6x^2-3x$ zu einem Quadrat machen. Wenn ich nun $6x^2-3x$ zu einem Quadrat mache, so wird $x = \frac{3}{6-x^2}$, und wenn man x auf diese Weise gefunden hat, so wird $6x^2 = \frac{54}{x^4-12x^2+36}$, und $5x = \frac{15}{6-x^2} = \frac{90-15x^2}{x^4-12x^2+36}$, und wenn ich den letzteren Bruch von dem ersteren abziehe, so soll der Rest $\frac{15x^2-36}{x^4-12x^2+36}$ auch ein Quadrat sein. Der Nen-

ner ist schon ein Quadrat, daher muß man auch $15x^2 - 36$ zu einem Quadrat machen. Aber das ist unmöglich, weil 15 nicht aus zwei Quadraten besteht. Darum aber ist die ursprüngliche Aufgabe noch nicht unmöglich, sondern man muß nur das zum Grunde gelegte Dreieck näher bestimmen.

Die $15x^2$ sind dadurch entstanden, daß wir ein anderes Quadrat, das aber kleiner war, als die Fläche des Dreiecks, mit dem Produkt der Hypotenuse und der einen Kathete multiplicirt haben. Aber die Zahl -36 ist das Produkt aus der Fläche, der einen Kathete, und dem Unterschied der Hypotenuse und eben dieser Kathete. Es kommt also darauf an, daß wir zuerst ein rechtwinkliges Dreieck und ein Quadrat suchen, welches kleiner als die Fläche des Dreiecks ist, übrigens aber die Beschaffenheit hat, daß, wenn man das Quadrat mit dem Produkt aus der Hypotenuse und der einen Kathete multiplicirt, und das Produkt aus der Fläche, der einen Kathete, und dem Unterschied der Hypotenuse und dieser Kathete abzieht, der Rest alsdann ein Quadrat wird.* — — — — — — aus dem doppelten Produkt derselben entstanden sei, und alles durch das Produkt der Hypotenuse und der genannten Kathete dividiren, so finden wir das gesuchte Quadrat, wenn wir die Hälfte der Kathete mit dem Unterschied der Hypotenuse und der Kathete multipliciren.*

Wenn wir also annehmen, daß die Zahlen, von welchen das Dreieck gebildet wird, ähnliche Flächenzah-

len sind, so werden wir dadurch die Aufgabe lösen. Man bilde also das Dreieck von den Zahlen 4 und 1; das Quadrat aber, damit es kleiner sei als die Fläche des Dreiecks, sei 36. Nun bilde ich das Dreieck, und nehme $8x$, $15x$, $17x$ als die Seiten desselben an; wenn ich nun von der Fläche dieses Dreiecks die kleinere Kathete abziehe, so bleibt $60x^2 - 8x$. Nun setze ich

$$60x^2 - 8x = 36x^2, \text{ so wird } x = \frac{1}{3}.$$

Das gesuchte Dreieck hat also die Seiten $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{17}{3}$.

XVII. Lehnsatz.

Wenn man von zwei gegebenen Zahlen die eine mit einem Quadrat multiplicirt, die andere aber von dem Produkte abzieht, und der Rest alsdann ein Quadrat wird, so läßt sich auch noch eine andere und größere Quadratzahl finden, welche das Nämliche leistet.

Es sind z. B. die Zahlen 3 und 11 und das Quadrat der Zahl 5 gegeben; wenn ich dies Quadrat mit der Zahl 3 multiplicire, und von dem Produkt die Zahl 11 subtrahire, so erhalte ich das Quadrat der Zahl 8; nun soll man ein anderes Quadrat finden, welches größer als 25 ist, und noch das Nämliche leistet.

Man setze die Wurzel des gesuchten Quadrats $= x + 5$, so ist das Quadrat selbst $x^2 + 10x + 25$. Wenn man dies mit 3 multiplicirt, und 11 davon abzieht, so hat man $3x^2 + 30x + 64$, und dies soll ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel desselben $= 8 - 2x$, so wird

$$3x^2 + 30x + 64 = 64 - 32x + 4x^2, \text{ und } x = 62.$$

Die Wurzel des gesuchten Quadrats ist also 67, und das Quadrat selbst 4489, und dieses Quadrat leistet, was verlangt wird.

XVIII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Fläche desselben ein Quadrat wird, man mag die Hypotenuse oder die eine der Katheten dazu addiren.

Auflösung.

Wenn wir annehmen, das Dreieck sei seiner Gestalt nach gegeben, so kommt es wieder dahin, daß wir die Verhältnisse der Seiten näher bestimmen, und hierauf ein Dreieck und ein Quadrat suchen müssen, welches größer als die Fläche des Dreiecks, übrigens aber so beschaffen ist, daß, wenn man das Quadrat mit dem Produkt der Hypotenuse und der einen Kathete multiplicirt, und hierauf das Produkt aus der Fläche des Dreiecks, der einen Kathete, und dem Unterschied zwischen der

Hypotenuse und der genannten Kathete davon abzieht, der Rest wieder ein Quadrat wird.

Man bilde also das Dreieck von den Zahlen 4 und 1, und das Quadrat sei 36; aber dies Quadrat ist nicht größer als die Fläche des Dreiecks. Wir haben nun zwei Zahlen, nämlich das Produkt der Hypotenuse in die eine Kathete, $=136$; und das Produkt aus der Fläche, der einen Kathete, und dem Unterschied der Hypotenuse und eben dieser Kathete, $=4320$. Wenn wir nun ein gewisses Quadrat, nämlich 36, mit 136 multipliciren, und von dem Produkte 4320 abziehen, so erhalten wir wieder ein Quadrat; wir suchen aber ein Quadrat, welches eben diese Eigenschaft hat, jedoch größer als 36 ist. Wir setzen dies Quadrat $=x^2+12x+36$, und wenn wir nun ganz das Verfahren in der vorigen Aufgabe beibehalten, so werden wir unzählige Quadrate finden, welche dieser Bedingung genügen; eines dieser Quadrate aber wird 676 sein.

Ich nehme also an, das Dreieck habe die Seiten $8x$, $15x$, $17x$, so wird

$$60x^2+8x=676x^2 \text{ und } x=\frac{1}{77}.$$

XIX. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man die spitzen Winkel desselben hälftet, die hälftende Linie sich durch eine Rational-Zahl ausdrücken läßt.

Auflösung.

Man setze die den Winkel hälftende Linie $= 5x$, den einen Abschnitt der Grundlinie aber $= 3x$, so wird die eine Kathete $= 4x$ sein. Man nehme aber für die Grundlinie irgend eine bestimmte, durch 3 theilbare Zahl an, z. B. 3, daher wird der zweite Abschnitt der Grundlinie $= 3 - 3x$ sein. Da nun der Winkel gehälftet ist, die Kathete aber sich zu dem einen Abschnitt der Grundlinie wie 4:3 verhält, so wird auch die Hypotenuse sich zu dem anderen Abschnitt der Grundlinie wie 4:3 verhalten, und da wir den zweiten Abschnitt der Grundlinie $= 3 - 3x$ gesetzt haben, so wird die Hypotenuse $= 4 - 4x$ sein. Nun ist nur noch erforderlich, daß man das Quadrat der Hypotenuse oder $16x^2 - 32x + 16$ dem Quadrat der beiden Katheten $16x^2 + 9$ gleich setze. Aus der Gleichung

$$16x^2 - 32x + 16 = 16x^2 + 9$$

ergiebt sich $x = \frac{7}{32}$, und das Uebrige ist für sich selbst klar. Wenn ich aber alles mit 32 multiplicire, so wird das Loth 28, die Grundlinie 96, die Hypotenuse 100, und die den Winkel hälftende Linie 35.

XX. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe der

Fläche und der Hypotenuse eine Quadratzahl, der Umfang aber eine Kubikzahl wird.

Auflösung.

Man setze die Fläche des Dreiecks $= x$, für die Hypotenuse aber setze man irgend eine bestimmte Quadratzahl weniger x, z. B. $16 - x$. Wenn nun x die Fläche des Dreiecks ist, so ist das Produkt der beiden Katheten $= 2x$, und dies hat die Faktoren x und 2. Wenn ich nun die eine Kathete $= 2$ setze, so ist die andere $= x$, und der Umfang des Dreiecks ist $= 18$, also keine Kubikzahl.

Aber 18 ist die Summe eines Quadrats und der Zahl 2; ich muß also ein Quadrat suchen, welches, um die Zahl 2 vergrößert, eine Kubikzahl wird, so daß also die Kubikzahl um 2 größer sein muß, als die Quadratzahl. Man setze die Wurzel des Quadrats $= x + 1$, und die Wurzel des Cubus $= x - 1$, so ist die Quadratzahl $= x^2 + 2x + 1$, und die Kubikzahl $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Nun soll die Kubikzahl um 2 größer sein, als die Quadratzahl. Ich addire also zu der Quadratzahl 2, so ist

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3.$$

Hieraus findet man $x = 4$; also ist die Wurzel des Quadrats $= 5$, die Wurzel des Cubus $= 3$, das Quadrat selbst aber ist 25, und der Cubus 27.

Nun mache ich den Ansatz für das rechtwinklige Dreieck anders; ich setze nämlich die Fläche desselben,

wie

wie vorher, $= x$, die Hypotenuse $= 25 - x$, die Grundlinie aber bleibt $= 2$, und das Loth $= x$. Jetzt ist nur noch erforderlich, daß man das Quadrat der Hypotenuse den Quadraten beider Kathete zusammen genommen gleich setze, daher wird

$$x^2 - 50x + 625 = x^2 + 4.$$

Hieraus erhält man $x = \frac{621}{50}$, und wenn man diesen Werth in die allgemeinen Ausdrücke setzt, so werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

XXI. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe der Fläche und der Hypotenuse eine Kubikzahl, der Umfang desselben aber eine Quadratzahl wird.

Auflösung.

Wenn wir, eben so wie in der vorigen Aufgabe, die Fläche des Dreiecks $= x$ setzen, für die Hypotenuse aber irgend eine Kubikzahl weniger x annehmen, so kommt es zuletzt dahin, daß wir eine Kubikzahl suchen müssen, welche, um 2 vermehrt, ein Quadrat wird.

Man setze die Wurzel der Kubikzahl $= x - 1$, so wird der Cubus, wenn man noch 2 dazu addirt, $= x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, und dieser Ausdruck soll ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $= \frac{3}{2}x + 1$, so wird

$x = \frac{21}{4}$. Die Wurzel des Cubus ist also $\frac{17}{4}$, und der Cubus selbst $\frac{4913}{64}$.

Nun setze ich die Fläche $= x$, die Hypotenuse $= \frac{4913}{64}x$, die Grundlinie war 2, das Loth $= x$, und wenn wir jetzt das Quadrat der Hypotenuse und die Quadrate der beiden Katheten gleich setzen, so erhalten wir für x einen rationalen Werth.

XXII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe der Fläche und der einen Kathete eine Quadratzahl, der Umfang aber eine Kubikzahl sei.

Auflösung.

Man nehme an, das Dreieck werde von einer unbestimmten Zahl und von der um 1 größeren, z. B. von x und $x+1$ gebildet, so ist das Loth $= 2x+1$, die Grundlinie $= 2x^2+2x$, die Hypotenuse $= 2x^2+2x+1$. Nun soll der Umfang dieses Dreiecks eine Kubikzahl, und die Summe seiner Fläche und der einen Kathete eine Quadratzahl sein. Der Umfang wird aber $= 4x^2+6x+2$. Diese Zahl ist nun zusammengesetzt, denn sie ist das Produkt der Faktoren $4x+2$ und $x+1$. Wenn wir

also jede Seite durch $x+1$ dividiren, so wird der Umfang $=4x+2$, und das soll eine Kubikzahl sein.

Ferner soll die Summe der Fläche und der einen Kathete ein Quadrat sein. Die Fläche wird aber $=\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+2x+1}$, und die eine Kathete $=\frac{2x+1}{x+1}$. Wenn man diese beiden Ausdrücke auf gleiche Nenner bringt, so wird die Summe beider $=\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$, und wenn wir mit dem Nenner wirklich dividiren, so erhalten wir $2x+1$, so daß also die Summe, die wir zu einem Quadrat machen sollen, $=2x+1$ wird.

Nun sollten wir aber auch $4x+2$ zu einem Cubus machen; es kommt also darauf an, eine Kubikzahl zu finden, die das Doppelte einer Quadratzahl ist. Solche Zahlen aber sind 8 und 4; ich setze daher

$$4x+2=8, \text{ so wird } x=1\tfrac{1}{2}.$$

Das gesuchte rechtwinklige Dreieck hat also die Seiten $\frac{8}{5}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{17}{5}$.

XXIII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe seiner Fläche und der einen Kathete eine Kubikzahl, der Umfang aber eine Quadratzahl sei.

Wenn wir wieder den nämlichen Gang, wie in der vorigen Aufgabe, nehmen, so kommt es zuletzt dahin, daß wir $4x+2$ zu einem Quadrat, und $2x+1$ zu einem Cubus machen müssen. Man muß also eine Quadratzahl suchen, welche das Doppelte einer Kubikzahl ist. Solche Zahlen sind aber 16 und 8. Wir setzen daher

$$4x+2=16, \text{ so wird } x=3\tfrac{1}{2}.$$

Die Seiten des gesuchten Dreiecks sind also $\frac{16}{9}$, $\frac{63}{9}$, $\frac{65}{9}$.

XXIV. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß der Umfang eine Quadratzahl, die Summe des Umfangs und der Fläche aber eine Kubikzahl wird.

Auflösung.

Man bilde ein rechtwinkliges Dreieck von den Zahlen x und 1, so wird die eine Kathete $=2x$, die andere $=x^2-1$, die Hypotenuse aber $=x^2+1$, und man soll $2x^2+2x$ zu einem Quadrat, x^3+2x^2+x aber zu einem Cubus machen. Nun ist es ganz leicht, $2x^2+2x$ zu einem Quadrat zu machen, und man findet den erforderlichen Werth von x, wenn man 2 durch ein um 2 vermindertes Quadrat dividirt. Aber die für x gefundene Zahl muß so beschaffen sein, daß, wenn man ihren Cubus, ihr doppeltes Quadrat und

die Zahl selbst zusammen addirt, die Summe eine Kubikzahl wird. Nun war nach dem Vorigen $x = \frac{2}{x^2-2}$; der Cubus wird also $= \frac{8}{(x^2-2)^3}$, das doppelte Quadrat $= \frac{8}{(x^2-2)^2}$, die Zahl selbst aber ist $= \frac{2}{x^2-2}$, und wenn ich alles auf gleichen Nenner bringe, so kommt $\frac{2x^4}{(x^2-2)^3}$. Der Nenner ist also eine Kubikzahl, daher muß man nur noch den Zähler $2x^4$, oder wenn man durch x^3 dividirt, $2x$ zu einer Kubikzahl machen. Wenn wir also $2x$ irgend einer bestimmten Kubikzahl gleich setzen, so wird x die Hälfte dieser Kubikzahl. Man setze $2x = 8$, so wird $x = 4$, und davon ist das Quadrat $= 16$.

Ich setze also das gesuchte Quadrat $= 16x^2$, so wird

$$2x^2 + 2x = 16x^2.$$

Hieraus findet man $x = \frac{1}{7}$, $x^2 = \frac{1}{49}$, und davon soll man 1 abziehen, weil die eine Kathete $= x^2 - 1$ ist. Es kommt also darauf an, einen Cubus von der Beschaffenheit zu suchen, daß der vierte Theil seines Quadrats größer als 2, aber kleiner als 4 sei. Wenn wir diesen Cubus durch x^3 bezeichnen, so soll $\frac{1}{4}x^6$ größer als 2 und kleiner als 4, also x^6 größer als 8 und kleiner als 16 sein. Eine Kubokubikzahl dieser Art ist $\frac{729}{64}$, folglich der Cubus $\frac{27}{8}$. Ich setze also $2x = \frac{27}{8}$, so wird $x = \frac{27}{16}$, und $x^2 = \frac{729}{256}$, und wenn wir nun 2

durch $x^2 - 2$ dividiren, so finden wir $x = \frac{512}{217}$, und von dem Quadrat dieser Zahl läßt die Zahl 1 sich abziehen.

XXV. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß der Umfang eine Kubikzahl, die Summe des Umfangs und der Fläche aber eine Quadratzahl sei.

Auflösung.

Zuerst muß man hier folgende Aufgabe lösen: es sind zwei Zahlen gegeben, und man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß der Umfang desselben der einen, und die Fläche desselben der anderen gegebenen Zahl gleich werde.

Die gegebenen Zahlen mögen 12 und 7 sein, und es werde verlangt, daß der Umfang des gesuchten Dreiecks $= 12$, seine Fläche $= 7$ werde. In diesem Dreieck ist das Produkt der beiden Katheten $= 14$; wenn wir also die eine Kathete $= \frac{1}{x}$ setzen, so wird die andere $= 14x$ sein. Der Umfang ist aber $= 12$, daher muß die Hypotenuse $= 12 - 14x - \frac{1}{x}$ sein. Nun

ist noch übrig, daß man das Quadrat der Hypotenuse den Quadraten der beiden Katheten gleich setze, d. h.

$$\frac{1}{x^2} + 196x^2 - 336x - \frac{24}{x} + 172 = 196x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Man addire an beiden Seiten die fehlenden Größen, ziehe Gleiches von Gleichem ab, und multiplicire alles mit x, so erhält man

$$336x^2 + 24 = 172x.$$

Diese Gleichung aber läßt sich nicht auflösen, wenn nicht das Quadrat des halben Coefficienten von x, nachdem man das Produkt der 24 Einheiten und des Coefficienten von x^2 davon abgezogen hat, ein Quadrat wird. Nun ist 172 aus dem Quadrat des Umfangs und der vierfachen Fläche des Dreiecks entstanden, das Produkt der 24 Einheiten in den Coefficienten von x^2 ist ein Produkt aus dem achtfachen Quadrat des Umfangs in die Fläche des Dreiecks. Wenn nun die gegebenen Zahlen, 12 und 7, so beschaffen wären, wie es nach der angestellten Betrachtung erforderlich ist, so könnte man die Aufgabe lösen.

Man setze die Fläche des Dreiecks = x, für den Umfang aber nehme man eine Zahl, welche zu gleicher Zeit eine Kubikzahl und eine Quadratzahl ist, nämlich 64, und um nun das Dreieck zu bestimmen, muß man die halbe Summe von dem Quadrat der Zahl 64 und von 4x ins Quadrat erheben, davon das achtfache Produkt des Umfangs und der Zahl x abziehen, und den Rest zu einem Quadrat machen. Durch diese Rechnung

erhält man aber $4x^2-24576x+4194304$; davon ist der vierte Theil $=x^2-6144x+1048576$, und diesen Ausdruck muß man zu einem Quadrat machen. Aber $x+64$ soll ebenfalls ein Quadrat sein; man mache daher in beiden Ausdrücken die bestimmten Zahlen (64 und 1048576) einander gleich, nehme dann den Unterschied der beiden Formeln, zerfälle diesen in Faktoren, und das Uebrige ist dann für sich klar.

XXVI. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß das Quadrat der Hypotenuse die Summe eines andern Quadrats und seiner Wurzel, durch eine der Katheten aber dividirt, die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel sei.

Auflösung.

Man setze die eine Kathete $=x$, die andere $=x^2$, so ist das Quadrat der Hypotenuse die Summe eines Quadrats und seiner Wurzel, und wenn man es durch eine der Katheten oder durch x dividirt, so ist es die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel. Es ist also nur das Eine übrig, daß x^4+x^2, oder, wenn man alles durch x^2 dividirt, daß x^2+1 ein Quadrat sei. Man setze die Wurzel $=x-2$, so wird

$$x^2+1=x^2-4x+4, \text{ also } x=\frac{3}{4}.$$

Das Uebrige ist für sich selbst klar.

XXVII. Aufgabe.

Man soll ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suchen, daß die eine Kathete eine Kubikzahl, die zweite der Unterschied einer Kubikzahl und ihrer Wurzel, die Hypotenuse endlich die Summe einer Kubikzahl und ihrer Wurzel sei.

Auflösung.

Man setze die Hypotenuse $= x^3 + x$, die eine Kathete $= x^3 - x$, so wird die andere Kathete $= 2x^2$ sein. Es ist also nur noch erforderlich, daß man $2x^2$ zu einem Cubus mache. Man setze

$$2x^2 = x^3, \text{ so wird } x = 2.$$

Das Dreieck wird also die Seiten 6, 8, 10 haben.

Diophantus

von Alexandria

über die Polygonzahlen.

Erster Satz.

Jede der mit Eins zunehmenden Zahlen, von der Drei ab, ist eine Polygonzahl, die erste von der Eins angerechnet, und hat so viel Ecken als Einheiten.

Ihre Seite ist die der Eins nächste Zahl, die Zwei. Die Drei ist ein Dreieck, die Vier ein Viereck, die Fünf ein Fünfeck und so fort.

Wie aber bekanntlich die Quadratzahlen aus der Vervielfältigung einer Zahl durch sich selbst entstehen, so wird gezeigt, daß jede Polygonzahl, vervielfältigt durch eine Zahl nach dem Verhältniß ihrer Ecken, und zugesetzt zu einer mit der Anzahl der Ecken im Verhältniß stehenden Quadratzahl, eine Quadratzahl werde.

Dies wollen wir beweisen und zeigen, wie aus gegebner Seite die dazu gehörige Polygonzahl, und wie aus dieser jene gefunden werde.

Zuerst aber wollen wir die dahin führenden Voraussetzungen erweisen.

Zweiter Satz.

E..... A..... B.. D... G

Wenn drei Zahlen von gleichem Unterschiede sind, so ist das achtfache Produkt der größten und mittlern, zugesetzt zu dem Quadrat der kleinsten, eine Quadratzahl, deren Seite gleich ist der Summe der größten und doppelten mittlern.

Beweis.

Drei Zahlen AB, BG, BD sein von gleichem Unterschiede. Zu zeigen, daß achtmal das Produkt von AB in BG, zugezählt zu dem Quadrat von BD eine Quadratzahl mache, deren Seite gleich sei der Summe von AB und zweimal BG.

Da AB gleich ist dem BG zugesetzt zu DG, so zerlegt sich das achtfache Produkt von AB in BG, in das achtfache Quadrat von BG und in das achtfache Produkt von DG in BG; ferner zerfällt jeder dieser Ausdrücke in zwei Hälften, die Hälfte des ersten ist das vierfache Produkt von AB in BG, die Hälfte des zweiten ist das vierfache Quadrat von BG, zugesetzt zu dem vierfachen Produkt von DG in BG. Das Vierfache von DG in BG mit dem Quadrat von BD ist gleich

dem Quadrat von AB *). Suchen wir also, wie das Quadrat von AB und das vierfache Produkt von AB in BG, zugesetzt zu dem vierfachen Quadrat von BG, eine Quadratzahl gebe?

Setzen wir nun AE gleich dem BG, so vertauschen wir das vierfache Produkt von AB in BG gegen das vierfache von AB in AE. Dies, zugesetzt zu dem vierfachen Quadrat von BG (das ist von AE) giebt das vierfache Produkt von AE in EB. Hiezu das Quadrat von AB gesetzt, so ergiebt sich die Summe, gleich dem Quadrat von BE und EA als einer einzigen Linie **). BE und EA sind aber gleich AB und dem doppelten AE, d. i. dem doppelten BG, welches zu zeigen war.

Dritter Satz.

B. A.. G.. D.. E

Wenn so viel Zahlen, als man will, von gleichem Unterschiede sind, so ist der Unterschied der größten und kleinsten gleich dem zweier nächsten, vervielfacht durch die um Eins verkleinerte Anzahl aller gegebnen.

Beweis.

Es sein die Zahlen BA, BG, BD, BE, so viel man deren will, von gleichem Unterschiede. Zu zeigen, daß

*) Euklid. II. 8.

**) Euklid. II. 8.

der Unterschied von BE und BA das Vielfache ist des Unterschiedes DE durch die um Eins verkleinerte Anzahl von BA, BG, BD, BE.

Da BA, BG, BD, BE von gleichem Unterschiede sind, so sind AG, GD, DE einander gleich. AE ist also das Vielfache von AG durch die Anzahl von AG, GD, DE. Diese Anzahl aber ist um Eins kleiner als die von BA, BG, BD, BE. Also ist AE das Vielfache von AG durch die um Eins verkleinerte Anzahl von BA, BG, BD, BE.

AE ist der Unterschied der größten und kleinsten, AG der Unterschied zweier nächsten.

Vierter Satz.

Wenn so viel Zahlen, als man will, von gleichem Unterschiede sind, so machen die größte und kleinste zusammen, vervielfacht durch die Anzahl der gegebenen, die doppelte Summe der gegebnen.

Beweis.

A. B. C. D. E. F. G

H. L. M. K... G

Es sein die Zahlen, so viel als man will, AB, AC, AD, AE, AF, AG, von gleichem Unterschiede. Zu zeigen, daß die Summe von AB und AG, vervielfacht durch die Anzahl der gegebenen, eine Zahl mache, welche gleich sei der doppelten Summe dieser gegebenen.

Ihre

Ihre Anzahl ist entweder paar, oder unpaar.

Sie sei zuerst paar, und so viel ihrer sind, so viel Einheiten enthalte HG. Also wird HG eine Paarzahl sein. Man halbtheile sie bei K, und zerlege HK in die Einheiten bei L, M. Da nun AG über AE um so viel Einheiten überschießt, als AD über AB, so wird die Summe von AG und AB gleich der von AE und AD. Die Summe von AG und AB ist gleich dem Produkte derselben in die Einheit HL. So wird auch die Summe von AE und AD gleich sein dem Produkte der Summe von AG und AB in die Einheit LM. Aus den nämlichen Gründen ist auch die Summe von AF und AC gleich dem Produkt der Summe von AG und AB in die Einheit MK. So wird also die Summe von AG, AB, AE, AD, AF, AC gleich sein dem Produkt der Summe von AG und AB in HK. Das Doppelte dieses Produkts ist das der Summe von AG und AB in HG. So ist also die doppelte Summe von AB, AC, AD, AE, AF, AG das Produkt von AG und AB in HG, das ist, in die Anzahl der gegebenen; welches zu zeigen war.

Fünfter Satz.

A. B. C. D. E. F

G. M. L. K . . H

Unter eben diesen Annahmen sei die Anzahl von AB, AC, AD, AE, AF unpaar, und GH enthalte so viel Einheiten, als Zahlen gegeben sind. Unpaar ist

also auch GH. Man nehme also in ihr die Einheit GM, halbtheile MH bei K und zerlege MK bei L in ihre Einheiten. Wenn nun AF von AD um gleichviel unterschieden ist, als AD von AB, so ist die Summe von AF und AB das Doppelte von AD, das ist, des Produkts von AD in LK. Eben so ist die Summe von AE und AC das Doppelte des Produkts von AD in ML. So ist also die Summe von AF, AB, AE, AC das Doppelte von AD in MK. Hievon das Doppelte ist MH. So ist mithin die Summe von AF, AB, AE, AC gleich dem Produkte von AD in MH. AD ist aber auch gleich dem Produkte von AD in GM. Die Summe von AB, AC, AD, AE, AF, ist also gleich dem Produkte von AD in GH. Das Produkt der Summe von AF, AB in GH ist aber doppelt das von AD in GH. Folglich ist auch die Summe der gegebenen Zahlen doppelt genommen gleich dem Produkte der Summe von AF, AB in GH, d. i., in die Anzahl der gegebnen; welches zu zeigen war.

Sechster Satz.

Wenn von der Einheit ab, so viel Zahlen als man will, von gleichem Unterschiede sind, so giebt die Summe, vervielfältigt durch das achtfache des Unterschiedes zweier nächsten, und zugezählt zu dem Quadrate dieses um zwei Einheiten verkleinerten Unterschiedes, ein Quadrat, dessen

um Zwei verkürzte Seite sein wird das Produkt des Unterschiedes zweier nächsten in eine Zahl, welche, Eins hinzugezählt, das Doppelte ist der Anzahl aller gegebnen, die Einheit mitgerechnet.

Beweis.

A. K.. N... BG..... DE. L..... Z
H. M — X — T

Von der Einheit ab setze man die Zahlen AB, GD, EZ. Ich sage, das angegebne werde erfolgen.

Denn es enthalte HT so viel Einheiten, als Zahlen, die Einheit mitgerechnet, gegeben sind. Und da der Unterschied der Zahl EZ von der Einheit ein Produkt ist des Unterschiedes der Zahl AB von der Einheit in eine um die Einheit kleinere Zahl als HT *), so setzen wir die Einheiten AK, EL, HM und erhalten LZ, als ein Produkt von KB in MT. Wir setzen die Zwei KN, und es fragt sich nun: ob die Summe der gegebnen, vervielfältigt durch acht KB (den Unterschied zweier nächsten), und zugezählt zu dem Quadrate von NB, ein Quadrat gebe, dessen Seite, um Zwei verkürzt, das Produkt ist des Unterschiedes KB in die Summe von HT, TM?

Da nun die Summe gleich ist dem halben Produkt der Summe EZ, EL in HT **), dies aber sich zerlegt

*) Diophantus III.

**) Diophantus IV.

in das Produkt von LZ in HT und das von dem doppelten EL in HT (das ist, das doppelte HT), so ist wieder die Summe gleich dem halben Produkt von LZ in HT, und dem einfachen HT.

Es ist aber gezeigt, daß LZ gleich ist dem Produkt von KB in MT *). Also ist die Summe gleich der halben körperlichen Zahl KB in MT in HT und dem einfachen HT. Wenn wir daher MT halbtheilen bei X, so erhalten wir die Summe gleich der körperlichen Zahl von KB in MX in HT und dem einfachen HT. Nun ist die Frage: ob dies beides, vervielfältigt durch acht KB und zugezählt zu dem Quadrate von NB, ein Quadrat gebe?

Es giebt aber die körperliche Zahl von KB in MX in HT, vervielfältigt durch KB ein Produkt von MX in HT in das Quadrat von KB. Also giebt die körperliche Zahl von KB in MX in HT, vervielfältigt durch acht KB, ein Produkt von MX in HT in acht Quadrate von KB, oder ein achtfaches Produkt von MX in HT in das Quadrat von KB, oder ein vierfaches Produkt von MT in HT in das Quadrat von KB. Die Frage ist also: ob dies vierfache Produkt zugezählt zu dem Produkt von HT in acht KB und dem Quadrate von NB ein Quadrat gebe?

Das vierfache Produkt von HM in KB ist gleich dem doppelten von KN in KB, welches, zugezählt zu

*) Diophantus III.

dem Quadrate von NB, die Summe der Quadrate von KB und KN giebt *). Also fragt sich weiter:

A . K . . N . . . BG . . . . . DE . L . . . . . Z

H . M — X — T

ob das vierfache Produkt von MT in TH in das Quadrat von KB, zugezählt zu den Quadraten von KB und KN und dem vierfachen Produkt der Summe von HT und TM in KB, ein Quadrat gebe?

Das Quadrat von KB geht über in das Produkt dieses Quadrats in das von HM. Dies Produkt zugezählt zu dem vierfachen Produkt von MT in TH in das Quadrat von KB macht das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB. Nun ist also die Frage: ob auch das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB zugezählt zu dem Quadrat von KN und dem vierfachen Produkt der Summe von HT und TM in KB eine Quadratzahl gebe?

A . K . . N . . . B — R

Setzen wir aber die Zahl NR gleich dem Produkt der Summe von HT und TM in KB, so wird auch das Quadrat von NR gleich dem Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB, wie im nächsten Satze gezeigt werden soll.

Die Frage ist: ob das Quadrat von NR, zugezählt zu dem Quadrat von KN und dem vierfachen Produkt

*) Euklid. II. 4.

der Summe von HT und TM in KB eine Quadratzahl gebe?

Das vierfache Produkt aber der Summe von HT und TM in KB ist gleich dem vierfachen NR, weil NR dem einfachen Produkt der Summe von HT und TM in KB gleich gesetzt ist. Vier NR sind gleich dem doppelten Produkt von KN in NR — weil KN als Zwei gesetzt ist. — Die Frage ist also: ob die Summe der Quadrate von NR und KN und das doppelte Produkt von KN in NR eine Quadratzahl mache?

Sie machen aber das Quadrat von KR *), dessen Seite KR, um Zwei, nämlich KN, verkürzt, die Zahl NR macht, welche ein Produkt ist des Unterschiedes KB in die Summe HT und TM, die, Eins hinzugezählt, das Doppelte der vorgelegten Zahlenreihe ist.

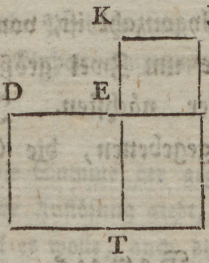
Siebenter Satz.

A sei gleich der Summe von HT und TM, B gleich KB, C dem Produkt der Summe von HT und TM in KB.

Ich sage, daß auch das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM, das ist, des Quadrats von A, in das Quadrat von KB, das ist das von B, gleich ist dem Quadrat von C.

*) Euklid. II. 4.

Beweis.



Man ziehe den Zahlen A, B, gleiche Linien DE, EZ, beschreibe über ihnen die Quadrate A, B, das ist DT, EL, und vollende das Complement TZ.

Wie also DE zu EZ sich verhält, so DT zu TZ; wie DE zu EK, so TZ zu EL *). Also ist TZ die mittlere Proportionale zwischen den Quadraten DT, EL. Das Produkt dieser beiden Quadrate in einander ist also gleich dem Quadrate des Complements TZ **). Nun ist DT gleich dem Quadrat der Summe von HT und TM, und EL dem von KB, und TZ gleich NR. Folglich ist das Produkt des Quadrats der Summe von HT und TM in das Quadrat von KB gleich dem Quadrat von NR.

Achter Satz.

Unter den nämlichen Annahmen sagen wir, daß, wenn Zahlen, so viel man will, von der

*) Euklid. VI. 1.

**) Euklid. VII. 19.

Einheit ab, von gleichem Unterschiede sind, die Summe eine Polygonzahl ist, von so viel Ecken, als die Zahl, die um Zwei größer ist, als der Unterschied zweier nächsten. Ihre Seite ist die Anzahl der gegebenen, die Einheit mit gerechnet.

Beweis.

O. A. K.. N... B — RG — DE. L — Z
H. M — X — T

Denn wir haben gezeigt, daß die Summe aller gegebenen Zahlen, vervielfältigt durch acht KB, und zugezählt zu dem Quadrat von NB, das Quadrat von KR gebe *). Setzen wir nun die Einheit AO, so erhalten wir KO zur Zwei. Auch KN ist eine Zwei. Also haben NB, KB, OB, gleiche Unterschiede: also macht das achtfache Produkt der größten OB in die mittlere KB, zugesetzt zu dem Quadrat der kleinsten NB, ein Quadrat, welches zur Seite hat die Summe der größten OB und doppelten mittlern KB **). Daher OB vervielfältigt durch acht KB und zugezählt zu dem Quadrate von NB gleich ist dem Quadrat der Summe von OB und zweier KB. Die Seite dieses Qua-

*) Diophantus VI.

**) Diophantus II.

drats um Zwei, nämlich KO, verkürzt, ist gleich dreien KB. Dies ist ein Produkt von KB in Drei. Die Drei aber, die Einheit hinzugerechnet, ist das doppelte der Zwei.

Wenn also die Summe der gegebenen Zahlen mit der Einheit dieselbe Auflösung giebt, als OB; OB aber, es sei welche Zahl es wolle, auch die erste Polygonzahl von Eins ab ist — weil OA Eins und AB die zweite Zahl ist — so ist auch die Summe der gegebenen Zahlen eine Polygonzahl von gleichviel Ecken, als OB, und zwar von so viel Ecken, als die Zahl Einheiten enthält, die um die Zwei OK, größer ist, als ihr Unterschied KB. Sie hat die Seite HT, welches, Eins hinzugerechnet, die Anzahl der gegebenen ist.

Es ist also erwiesen, was von Hypsikles in der Definition gesagt wird: daß, wenn Zahlen, so viel als man will, von der Einheit ab von gleichem Unterschiede sind, und dieser die Einheit ist, ihre Summe eine Trigonzahl ist, wenn ihr Unterschied Zwei, die Summe eine Tetragonzahl; bei dem Unterschiede Drei eine Pentagonzahl ist; die Anzahl ihrer Ecken um zwei größer als ihr Unterschied, die Seite aber die Menge der gegebenen Zahlen ist, die Einheit hinzugerechnet. Wenn sie nun Trigonzahlen sind, — wenn die Einheit der Unterschied ist, — so werden ihre Seiten die größten der

gegebenen Zahlen sein, und das Produkt der größten unter den gegebenen in die um Eins größere Zahl wird das Doppelte der bestimmten Trigonzahl sein.

Und da OB eine Polygonzahl ist, die so viel Ecken hat, als Einheiten und achtmal vervielfältigt durch eine um Zwei kleinere Zahl, das ist durch KB, und zugezählt zu dem Quadrat von einer um Vier kleineren Zahl, das ist von NB, eine Quadratzahl ist, so wird dies die Definition der Polygonzahlen sein:

Daß jede Polygonzahl, achtmal vervielfältigt durch eine um Zwei kleinere Zahl als die Anzahl ihrer Ecken, und zugezählt zu dem Quadrat von einer um Vier kleineren Zahl als die Anzahl ihrer Ecken, eine Quadratzahl gebe.

Nach so erwiesener Definition des Hypsikles von diesen Polygonzahlen, bleibt zu zeigen übrig, wie aus gegebner Seite die dazu gehörige Polygonzahl gefunden werde?

Denn wenn wir die Seite einer gegebenen Polygonzahl HT und die Anzahl ihrer Ecken haben, so ist uns auch KB gegeben. Also werden wir auch das Produkt haben der Summe von HT und TM in KB, welches gleich ist der Zahl NR. Und da KN die Zwei ist,

wird auch KR gegeben sein, also auch das Quadrat von KR, und wenn wir hiervon das Quadrat von NB abziehen, welches gegeben ist, werden wir den Ueberrest gegeben haben, welcher das Produkt ist der gesuchten Polygonzahl in das achtfache KB. Also ist die gesuchte Polygonzahl gefunden. Auf ähnliche Weise werden wir aus der gegebenen Polygonzahl deren Seite HT finden; welches zu zeigen war.

Neunter Satz.

Was wir methodisch gesucht haben, wollen wir nun denen, die es in kurzem zu vernehmen wünschen, mehr praktisch vortragen.

Wir nehmen die Seite der Polygonzahl doppelt, ziehen davon die Einheit ab; den Rest vervielfältigen wir durch die um Zwei verkürzte Zahl der Ecken; zu dem Produkte wird Zwei gezählt und die Summe quadrirt; von dem Quadrat ziehen wir ab das Quadrat der um Vier verkleinerten Anzahl der Ecken; den Rest theilen wir durch das Achtfache der um Zwei verkürzten Anzahl der Ecken: so werden wir die Polygonzahl finden.

Ist diese gegeben, so finden wir deren Seite auf folgende Art:

Wir vervielfältigen sie durch das Achtfache der um Zwei verkürzten Anzahl der Ecken; zum Produkt zählen wir das Quadrat der um Vier verkürzten Anzahl der Ecken: so werden wir eine Quadratzahl erhalten, wenn die gegebene wirklich eine Polygonzahl war. Von der Seite dieses Quadrats ziehen wir zwei ab; den Rest theilen wir durch die um Zwei verkleinerte Anzahl der Winkel, setzen die Einheit hinzu und nehmen von der Summe die Hälfte: so werden wir die Seite der gesuchten Quadratzahl erhalten.

Zehnter Satz.

Wenn eine Zahl gegeben ist, finden, auf wie viel Arten sie eine Polygonzahl sein könne?

Beweis.

A. T — B — E . . D . . G — K
Z — H

Die gegebene Zahl sei AB, die Anzahl ihrer Ecken BG. Man nehme in BG die Zwei DG und die Vier EG. Da nun AB als Polygonzahl so viel Ecken hat, als BG Einheiten, so macht das achtfache Produkt von AB in BD mit dem Quadrat von BE eine Quadratzahl. Die Seite derselben sei ZH. Also ist das Qua-

drat von ZH gleich dem achtfachen Produkt von AB in BD zugezählt zu dem Quadrat von BE. Man nehme in AB die Einheit AT, und zerlege das achtfache Produkt von AB in BD in das Vierfache von AT in BD und in das Vierfache von der Summe AB und TB in BD. Man setze der vierfachen Summe von AB und TB gleich DK, und verwandle das vierfache Produkt der Summe von AB und TB in BD, in das Produkt von DK in BD, und das vierfache von AT in BD in das doppelte von DE in BD — denn DE ist zwei. — Das Quadrat von ZH wird also gleich sein dem Produkt von DK in BD zugezählt zu dem doppelten von DE in BD und dem Quadrate von BE. Aber dem doppelten Produkt von DE in BD zugezählt zu dem Quadrate von BE ist gleich die Summe der Quadrate von BD und DE *). Also ist auch

A. T — B — E . . D . . G — L — K
Z — H

das Quadrat von ZH gleich dem Produkt von DK in BD zugezählt zu den Quadraten von BD und DE. Dem Produkte von DK in BD zugezählt zu dem Quadrate von BD ist gleich das Produkt von BK in BD. Also ist das Quadrat von ZH gleich dem Produkt von BK in BD zugezählt zu dem Quadrate von DE. Und

*) Euklid. II. 7.

da DK — das Vierfache der Summe von AB und BT — größer ist als das Vierfache von AT, das heißt, größer als Vier, wovon DG die Zwei ist, so ist auch der Rest GK größer als die Zwei DG. Der Halbtheilungspunkt von DK wird also zwischen G und K fallen. Er sei L. Das Quadrat von BL ist gleich dem Produkt von BK in BD zugezählt zu dem Quadrate von DL *). Wird daher DK in L gehalbtheilt und DB zugesetzt, und ist das Quadrat von BL gleich dem Produkt von BK in BD zugezählt zu dem Quadrate von DL, so ist das Quadrat von BL um das Produkt von BK in BD größer als das Quadrat von DL, und das Quadrat von ZH gleich dem Unterschiede der Quadrate von BL und von DL, zugezählt zu dem Quadrate von DE.

Man setze auf beiden Seiten das Quadrat von BL hinzu, so sind die Quadrate von ZH und von DL, zusammengenommen, gleich denen von BL und von DE, zusammengenommen. Wenn aber zwei Zahlen zweien andern gleich sind, so sind es auch bei ihrer Vertauschung die Unterschiede, also der Unterschied der Quadrate von DL und von DE gleich dem der Quadrate von BL und von ZH. Und da DE gleich ist DG, und GL anliegt, so ist das Produkt von EL in GL, zugezählt zu dem Quadrate von DG, gleich dem Quadrate

*) Euklid. II. 6.

von DL *). Also ist der Unterschied der Quadrate von DL und von DG, das heißt, von DL und von DE, oder das Produkt von EL in GL, gleich dem Unterschiede der Quadrate von BL und von ZH. Man mache ZM gleich BL, weil BL größer ist als ZH, indem gezeigt ist, daß die Quadrate von ZH und von DL gleich sind denen von BL und von DE, und das Quadrat von DL größer ist, als das von DE — da es größer ist, als das von DG — mithin das von BL größer als das von ZH.

A. T — B — E . . D . . G — L —— K
Z —— H — N — M

Man setze also ZM gleich BL, so wird der Unterschied der Quadrate von ZM und ZH gleich sein dem Produkt von EL in GL. Da nun DK das Vierfache der Summe von AB und TB; DK aber in L gehalbtheilet ist, so ist DL das doppelte der Summe von AB und TB. Nun ist DG das doppelte von AT, mithin der Rest GL das Vierfache von TB, also TB der vierte Theil von GL. Allein AT ist, als Einheit, auch der vierte Theil von EG, der Vier; folglich AB der vierte Theil von EL. Es ist aber gezeigt, daß auch TB der vierte Theil ist von GL, mithin ist das Produkt von AB in TB der sechzehnte Theil des Produkts von EL in GL. Dies Produkt ist also sechzehnmal so groß,

*) Euklid. II. 7.

als das von AB in TB. Auch ist gezeigt, daß das Produkt von EL in GL gleich ist dem Unterschiede der Quadrate von ZM und von ZH, das heißt dem Quadrate von MH und dem doppelten Produkt von ZH in MH. Folglich ist das sechzehnfache Produkt von AB in TB gleich dem Quadrate von MH, zugezählt zu dem doppelten Produkt von ZH in MH. Also ist HM eine Paarzahl. Man halbtheile sie in N. —

Anmerkungen.

Anmerkungen zur Einleitung.

I. II.

Durch die in der Einleitung erklärten Abkürzungen ζ^{α}, δ^{υ}, κ^{υ} u. s. w. werden beim Diophantus nur die Potenzen der unbekannten Größe bezeichnet, alle bekannten Zahlen, auch wenn sie Potenzen anderer Zahlen sind, werden durch die gewöhnlichen Zahlbuchstaben mit dem Zeichen μ^{o} ausgedrückt; daher sagt Diophantus, das beständige Zeichen für eine bestimmte Zahl sei die Einheit oder das eben erwähnte Zeichen.

Jedes der hier erklärten Zeichen, so wie der dadurch bezeichnete Begriff heißt nun bei Diophantus ein εἶδος, lat. species, oder ein allgemeiner Ausdruck für eine Zahl, weil es nicht den Zahlenwerth, sondern nur die Form oder die Gestalt der gesuchten Zahlen vorstellt. Hieraus erklärt es sich, weßhalb die älteren Mathematiker die Rechnung mit allgemein bezeichneten Größen Algorithmus speciosus genannt haben.

In der Uebersetzung hat sich der Verfasser nicht der hier festgesetzten Zeichen bedient, sondern die unbe-

kannte Größe und deren Potenzen durch x, x^2, x^3 bezeichnet, und das Zeichen μο oder Einheiten für bestimmte Zahlen, als völlig überflüssig, weggelassen. Da es dem Uebersetzer vorzüglich nur darauf ankam, die Methode der Alten streng wieder zu geben, so wird man ihm diese Vertauschung der unbequemen griechischen Zeichen mit den bequemeren und bekannteren Zeichen der neueren Algebra, wohl nicht als Untreue anrechnen. Den Freunden des Alterthums wird es hinreichen, die Bezeichnungsart der Alten aus dieser Einleitung geschichtlich kennen zu lernen; die Beibehaltung derselben durch das ganze Buch würde es aber für denjenigen, der den Diophantus um der Sachen willen zu lesen wünscht, beinahe unlesbar gemacht haben.

III.

Da sich die Benennungen ἀριθμοστὸν für $\frac{1}{x}$, δυναμοστὸν für $\frac{1}{x^2}$ u. s. w. nicht durch ähnlich gebildete Wörter wie ein Drittel oder ein Viertel übersetzen lassen, so blieb dem Uebersetzer nur die Wahl zwischen einer ermüdenden Umschreibung, oder den von ihm gewählten Benennungen: einfacher Bruch, quadratischer Bruch, kubischer Bruch. Die Ausstellungen, welche sich gegen diese Uebersetzung machen lassen möchten, würden auch jede andere Uebersetzung z. B. durch Bruchgröße, Bruchquadrat, Bruchkubus

u. s. w. treffen, und ohne eine nähere Erklärung würden diese eben so wenig verständlich sein, als die in der Uebersetzung gewählten Ausdrücke.

Die letzte Stelle dieses Satzes bezieht sich auf die Art, wie man im Griechischen Brüche schreibt. Neben den Zähler wird nämlich der Nenner mit kleinerer Schrift gesetzt, und durch einen kleinen gewundenen Strich angedeutet, daß er nicht als eine gewöhnliche Zahl, sondern als der Nenner eines Bruchs zu lesen sei. So schreibt man z. B. $\overline{\alpha\gamma}$ für $\frac{1}{3}$, $\overline{\delta\xi}$ für $\frac{4}{7}$, $\overline{\zeta\kappa\delta}$ für $\frac{7}{24}$. Diophantus will also sagen, daß man auch die allgemeinen Ausdrücke wie ς, δ^{υ}, χ^{υ} u. s. w. als Nenner eines Bruches gebrauchen könne, und giebt an, wie man einen solchen Bruch benenne, und wie man ihn bezeichne. Die Brüche $\frac{1}{2x^2}$ und $\frac{2}{3x^3}$ werden hiernach also durch $\overline{\alpha\delta\upsilon\beta}$ und durch $\overline{\beta\kappa\upsilon\gamma}$ bezeichnet werden.

V.

Dieser Satz, so wie er im Griechischen ausgedrückt ist, scheint eigentlich bloß zu sagen, daß jeder Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, 1 gebe, oder daß z. B. $3\times\frac{1}{3}$ oder $5\times\frac{1}{5}=1$ sei. So richtig dies aber an sich ist, so liegt doch die gewöhnliche Zahlenrechnung ganz

außer dem Zweck, welchen Diophantus in dieser Einleitung sich vorgesetzt hat, nämlich die Regeln für alle Rechnungen mit allgemein bezeichneten Größen (εἴδη) vorzutragen. Der Sinn des Satzes ist also: wenn man irgend ein εἶδος wie x^2 mit einem Bruche multiplicirt, der eben dieses εἶδος zu seinem Nenner hat, so erhalte man eine Einheit oder Einheiten d. i. eine bestimmte Zahl zum Produkte. So ist $x^2 \times \frac{1}{x^2} = 1$, $x^2 \times \frac{3}{x^2} = 3$, $x^3 \times \frac{5}{x^3} = 5$ u. s. w. Daß dies wirklich der wahre Sinn dieses Satzes sei, wird durch eine Vergleichung dieses und des achten Satzes recht einleuchtend. Dort zeigt Diophantus, was herauskomme, wenn man einen der in III. beschriebenen Brüche mit einem allgemeinen Ausdruck multiplicire, übergeht aber den Fall, wenn man einen solchen Bruch mit seinem Nenner multiplicirt, weil dieser Fall hier hinlänglich erklärt war.

Daß μονὰς nicht immer die Einheit in dem wissenschaftlichen Sinne des Worts, oder wenigstens die Zahl 1 bedeute, sondern daß es überhaupt eine bestimmte Zahl im Gegensatz eines sogenannten εἶδος anzeige, ist aus II. vollkommen deutlich; man bemerke aber noch, daß Diophantus von Ausdrücken wie $3x^2$, $3x^4$, $3x^5$ u. s. w. zu sagen pflegt, sie seien μοναδικῶς, oder in Beziehung auf die bestimmten Coefficienten einander gleich.

VI.

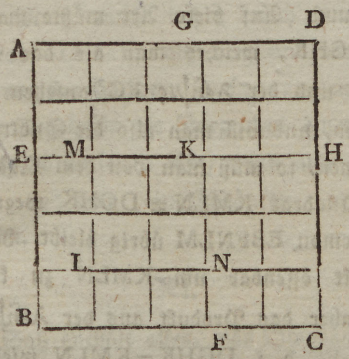
Der Satz lautet im Griechischen wörtlich: da die Einheit etwas Unveränderliches und Bleibendes ist, so ist jeder mit ihr multiplicirte Ausdruck (εἶδος) wieder der nämliche Ausdruck, und diese Worte scheinen bloß zu sagen, daß der Faktor 1 ein Produkt nicht verändere. Da aber μονὰς überhaupt eine bestimmte Zahl bedeutet, so sollen die Worte unstreitig nichts Anderes sagen, als was die Uebersetzung ausdrückt, daß nämlich jedes Produkt bestimmter Zahlen wieder eine bestimmte Zahl sei, und daß daher ein Produkt einer bestimmten Zahl und eines allgemeinen Ausdrucks wieder ein Ausdruck derselben Art sein müsse. So ist z. B. $3x^2 \times 5 = 15x^2$, $x^3 \times 4 = 4x^3$, und in dem Produkte bleibt also immer derjenige allgemeine Ausdruck, der bereits in einem der Faktoren enthalten war.

Damit der Leser nicht gleich einen der ersten Sätze unrichtig auffasse, hielt der Uebersetzer eine Umschreibung desselben für nothwendig, glaubte aber auch die wörtliche Uebersetzung mittheilen zu müssen, da aus der unrichtigen Auslegung dieser und ähnlicher Stellen vielleicht Theons seltsame Erklärung der Einheit entstanden ist, nach welcher sie das Feste und Bleibende der Zahl ist, welches auch dann noch bleibt, wenn die Zahl selbst durch Verkleinerung ganz aufgehoben wird.

IX.

Diophantus nennt eine negative Zahl λεῖψις d. i. eine fehlende Größe, oder eine Größe, welche man subtrahiren soll, eine positive Zahl aber nennt er ὕπαρξις d. i. eine wirklich vorhandene, die einen wirklichen bestimmten Werth hat. Schon diese Benennungen zeigen, daß Diophantus beide nur in dem eingeschränkten arithmetischen Sinne kennt, und wenn der Uebersetzer dafür zuweilen die neueren Ausdrücke positiv und negativ setzte, so geschah es bloß, um mögliche Mißverständnisse zu verhüten. Obgleich Diophantus die negativen Größen in den Rechnungen selbst vielfältig gebraucht, so läßt er doch für die gesuchte Größe nie einen negativen Werth zu, und mehre Einschränkungen, welche er seinen Aufgaben beifügt, haben ihren Grund bloß in der stillschweigenden Voraussetzung, daß die gesuchte Größe einen positiven und rationalen Werth haben solle.

Diophantus selbst giebt für die hier ausgesprochene Regel keinen Beweis, sondern stellt sie als einen anderwärts bewiesenen Lehnsatz auf. Der Scholiast versucht diesen Beweis durch eine geometrische Construction zu führen, und wir wollen hier das Wesentliche desselben mittheilen. Er bemerkt zuvörderst, daß eine λεῖψις nie als etwas für sich bestehendes, sondern immer in Verbindung mit einer ὕπαρξις gedacht werden muß.



Man denke sich also zwei gleiche auf einander winkelrechte Linien AB und BC, deren jede = 5, und theile diese Linien in E und F dergestalt, daß EB = BF = 3, also EA = FC = 2 sei. Vollendet man das Quadrat EBFK so ist klar, daß es 9 Flächen-Einheiten enthalten muß; man kann sich aber vorstellen daß dies Quadrat auf folgende Weise entstanden sei. Man hat zuerst die beiden ὑπάρξεις AB und AC multiplicirt, dies gab das Quadrat ABCD, welches 25 Flächen-Einheiten enthält, man hat hierauf die λεῖψις AE mit der ὕπαρξις BC multiplicirt, dies giebt das Rechteck AEHI = 10, welches man von dem vorigen Quadrat abziehen, oder als eine λεῖψις betrachten muß, so daß das Rechteck BEHC = 15 als Rest bleibt. Man hat ferner die ὕπαρξις AB mit der λεῖψις FC multiplicirt, und dies giebt das Rechteck FCDG, = 10, welches man von dem vorigen Reste abziehen, also abermals als eine λεῖψις

betrachten muß. Auf diese Art müßte man aber das Quadrat DGHK, welches man als das Produkt der λεῖψις AE und der λεῖψις FC ansehen kann, zwei Mal abziehen, und will man also die Subtraction wirklich vornehmen, so muß man von dem Quadrat EBFK noch das Quadrat KMLN = DGHK wegnehmen, so daß der Gnomon EBFNLM übrig bleibt. Nun ist aber das Produkt offenbar um KMLN zu klein, und man muß daher das Produkt aus der λεῖψις AE in d e λεῖψις FC d. i. DGHK = KMLN wieder addiren, oder man muß dies Produkt als eine ὕπαρξις betrachten. Hier sind aber alle bei der Multiplication mögliche Fälle vorgekommen. Man hat eine ὕπαρξις mit einer ὕπαρξις, dann eine λεῖψις mit einer ὕπαρξις und umgekehrt ein ὕπαρξις mit einer λεῖψις, und endlich eine λεῖψις mit einer λεῖψις multiplicirt, und in dem ersten und vierten Falle eine ὕπαρξις, in dem zweiten und dritten eine λεῖψις erhalten.

Wendet man diesen Beweis auf ein beliebiges Zahlenbeispiel an, so gewinnt er nicht nur an Deutlichkeit, sondern möchte auch dem gewöhnlichen Beweise dieser Regel weder an Strenge noch Klarheit nachstehen. Soll man z. B. 9—4 mit 7—3 multipliciren, so kann man zuerst 9—4 mit 7 multipliciren, und es läßt sich leicht zeigen, daß das Produkt 9.7—4.7 sein müsse. Dies Produkt ist aber offenbar zu groß, weil man den Multiplicator um 3 Einheiten zu groß angenom-

men hat. Man muß daher noch das Produkt $3 \times (9-4) = 27-12$ davon abziehen, und das Hauptprodukt besteht aus den Gliedern $+63-28-27+12$, woraus sich die Regel für die Vorzeichen eines Produktes ganz befriedigend herleiten läßt, wenn man gleich negative Größe in dem eingeschränkten arithmetischen Sinne nimmt.

XI.

Dieser Satz enthält alles, was Diophantus im Allgemeinen über die Behandlung oder eigentlich nur über die Einrichtung der Gleichungen vorträgt, denn die Regeln der Auflösung selbst werden in der Folge nur an einzelnen Beispielen entwickelt. Das ganze erste Buch enthält bloß einfache und reine quadratische Aufgaben, erstere häufig von der Form $Ax^n = Bx^{n-1}$, welche sich aber vermittelst der Division durch x^{n-1} auf die allgemeine Form aller einfachen Aufgaben $Ax = B$ bringen lassen, ein Verfahren, welches die späteren Mathematiker ὑποβιβασμὸς oder Erniedrigung nennen.

Nach Diophantus Absicht sollen die hier folgenden Aufgaben dem Anfänger als eine Einleitung zu der unbestimmten Analytik dienen, welche man mit Recht als den wichtigsten Theil des ganzen Werkes ansieht; wir haben diese Einleitung aber nicht mehr vollständig übrig, denn Diophantus verspricht in der Folge zu zeigen, wie man eine Gleichung auflösen könne, wenn zuletzt

ein zweigliediger Ausdruck einem eingliedigen gleich bleibe, wodurch er zunächst die vermischten quadratischen Gleichungen bezeichnen will. Die Regel der Auflösung wird nun nirgends vollständig vorgetragen, in dem vierten, fünften und sechsten Buche wird sie aber als bekannt vorausgesetzt, und man darf nicht zweifeln, daß sie sich in der Einleitung zu einem der verloren gegangenen Bücher, welches vermuthlich eine Sammlung von vermischten Gleichungen des zweiten Grades enthielt, befunden habe. Die Regel, nach welcher Diophantus solche Gleichungen auflöst, weicht in einigen Stücken von der jetzt üblichen ab, und es wird zweckmäßig sein, sich sein Verfahren bekannt zu machen, damit man die häufig vorkommenden Anwendungen, sogleich verstehe. Wenn nämlich eine vermischte quadratische Gleichung auf die Form

$$ax^2 + bx = c$$

gebracht worden ist, muß man die bekannte Größe c mit dem Coefficienten von x^2 oder mit a multipliciren, dazu das Quadrat des halben Coefficienten von x oder $\frac{1}{4}b^2$ addiren, aus der Summe die Quadratwurzel ziehen, von dieser Wurzel den halben Coefficienten von x, also $\frac{1}{2}b$, abziehen, und den Rest durch den Coefficienten von x^2 dividiren, oder es wird

$$x = \frac{-\frac{1}{2}b + \sqrt{(ac + \frac{1}{4}b^2)}}{a} = -\frac{b}{2a} + \frac{+\sqrt{(ac + \frac{1}{4}b^2)}}{a}.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel zu beweisen, ist nur erforderlich, daß man die Gleichung $ax^2+bx=c$ nach der gewöhnlichen und als richtig bewiesenen Formel auflöse, und dann zeige, daß beide Formeln einerlei Werth geben. Behandelt man die Gleichung $ax^2+bx=c$ nach den bekannten Regeln, so verwandelt sie sich zuerst in $x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a}$, und man erhält

$$x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Da in den für x gefundenen Werthen die beiden ersten Glieder gleich sind, so ist nur noch zu zeigen, daß

$$\frac{\sqrt{ac+\frac{1}{4}b^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)}.$$

Die Gleichheit beider Formeln fällt aber in die Augen, denn wenn man in der ersteren den Divisor a wegläßt, oder, was einerlei ist, die Formel mit a multiplicirt, so muß man, um den vorigen Werth wieder zu erhalten, die Größen hinter dem Wurzelzeichen mit a^2 dividiren, und es ist also

$$\frac{\sqrt{ac+\frac{1}{4}b^2}}{a}=\sqrt{\left(\frac{ac}{a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}\right)},$$

woraus sich die Gleichheit beider Formeln für x, also auch die Richtigkeit der diophantischen Regel ergiebt.

Uebrigens bedarf es kaum der Erinnerung, daß auch bei Diophantus $\frac{b}{2a}$ positiv wird, wenn bx negativ war, und daß ac sowohl positiv als negativ sein kann, je

nachdem c positiv oder negativ ist. Die Formel kann also auch geschrieben werden

$$x = \pm\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ac)}}{a}.$$

Die Quadratwurzel wird bei Diophantus aber alle Mal als positiv angesehen, weil er die negativen Wurzeln einer Potenz noch nicht kennt, ein Begriff, über welchen selbst Vieta und Harriot in seiner Praxis artis analyticae (1631) noch nicht völlig im Reinen waren, und den erst Cartesius richtiger entwickelt hat.

Anmerkungen zum ersten Buche.

I.

Diese Aufgabe wird in den neueren Lehrbüchern gewöhnlich so ausgedrückt: aus der gegebenen Summe und Differenz zweier Zahlen diese Zahlen selber zu finden. Bezeichnet man die größere der beiden Zahlen durch x, die kleinere durch y, die gegebene Summe durch s, die gegebene Differenz durch d, so hat man zwei Gleichungen, nämlich

$$1)\ x+y=s.\quad 2)\ x-y=d,$$

und daraus nach bekannten Regeln

$$x=\frac{s+d}{2}\text{ und }y=\frac{s-d}{2}.$$

Das Verfahren, durch welches Diophantus die Aufgabe löst, ist von dem hier angedeuteten etwas verschieden, da nur eine unbekannte Größe in der Rechnung gebraucht wird. Prüft man aber die Auflösung des Diophantus näher, und überlegt, was in der Rechnung wesentlich oder bloß zufällig ist, so ergiebt sich daraus die nämliche Regel, welche wir durch die obigen Formeln ange-

deutet haben, und Diophantus wendet daher in der Folge diese Regel in bestimmter Beziehung auf die hier gegebene Auflösung an. Die Kunst, eine Rechnungsregel durch Zeichen darzustellen, kannten die Alten freilich nicht, dagegen wußten sie sehr wohl aus einer, an einem bestimmten Beispiele durchgeführten Rechnung eine allgemeine Regel herzuleiten, indem sie den ganzen Gang der Rechnung verfolgten, und dabei das Wesentliche und Zufällige von einander sonderten. Auf diese Art wußten sie sich den Gebrauch der Buchstabenrechnung und allgemeiner Formeln zu ersetzen, und wenn gleich dadurch das Verfahren schwieriger und umständlicher wird, so muß man doch auch zugeben, daß es für den Verstand übender sein müsse, als der Gebrauch allgemeiner Formeln.

Die Worte, welche ich hier durch eine Umschreibung gegeben habe: setzen wir diesen Werth von x in die allgemeinen Ausdrücke für die gesuchten Zahlen, lauten im Griechischen: ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. Wir wollen hierbei ein für alle Mal bemerken, daß ὑπόστασις eigentlich der in allgemeinen Zeichen ausgedrückte Werth einer Größe, oder der bei einer Aufgabe gemachte Ansatz sei. Folgte z. B. aus den Bedingungen einer Aufgabe, daß die eine der gesuchten Größen durch $2x-5$, die andere durch $\frac{1}{2}x+2$ sich ausdrücken lasse, so heißen diese allgemeinen Ausdrücke die ὑποστάσεις der Aufgabe. Um die Aufgabe zu lösen, ist also nur erforderlich, daß man den

den Zahlenwerth von x berechne, und diesen statt x in die obigen Formeln setze. Diese Rechnung ist es nun, welche Diophantus immer mit den Worten ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις bezeichnet.

Diophantus beschließt die gegebene Auflösung in der Regel mit der Bemerkung, der Beweis falle in die Augen, oder auch, die gefundenen Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt, und in einzelnen Fällen wird dies auch wohl durch eine Probe dargethan. Für manchen Leser möchte daher die Bemerkung nicht überflüssig sein, daß von analytischen Auflösungen, wie diese, ein Beweis gar nicht gefordert werden kann, da jeder Schritt der Auflösung entweder durch allgemein bekannte oder ausdrücklich vorangeschickte Lehnsätze gerechtfertigt wird.

II.

Um die Aufgabe allgemein zu lösen, nehme man an, die Zahl a solle in dem Verhältniß n:m, oder was einerlei ist, in dem Verhältniß $1:\frac{m}{n}$ getheilt werden.

Setzt man nun das eine der gesuchten Stücke $=x$, so ist das andere $=\frac{m}{n}x$, und die Summe beider $=x+\frac{m}{n}x$ $=\frac{n+m}{n}x$. Da die Summe beider Stücke auch $=a$ sein muß, so hat man die Gleichung

$$\frac{n+m}{n}x=a, \text{ folglich } x=\frac{an}{n+m}.$$

III.

Nimmt man dagegen an, die Zahl a solle so getheilt werden, daß der eine Theil ein bestimmtes Vielfaches der andern um eine gegebene Zahl p übersteigt, so setze man die kleinere Zahl = x, so wird die größere = mx + p, die Summe beider aber = (m + 1)x + p sein. Hieraus hat man aber

$$(m+1)x+p=a, \text{ und } x=\frac{a-p}{m+1}.$$

Die Aufgabe lautet im Griechischen eigentlich: eine gegebene Zahl in einem vorgeschriebenen Verhältniß und Ueberschuß zu theilen (ἐν λόγῳ καὶ ὑπεροχῇ τοῖς δοθεῖσιν). Dieser Ausdruck könnte leicht so verstanden werden, als sollten die Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß und eine vorgeschriebene Differenz haben, ein Fall der in der vierten Aufgabe wirklich vorkommt. Um jedes Mißverständniß zu verhüten, wählte der Uebersetzer einen andern Ausdruck, zu dessen Rechtfertigung folgende Bemerkung hinreichen wird. So oft Diophantus zwischen zwei Zahlen ein bestimmtes Verhältniß annimmt, so drückt er die eine Zahl als ein Vielfaches der anderen aus, d. h. er nimmt alle Mal ein Verhältniß an, in welchem das erste Glied 1, das zweite irgend eine ganze Zahl ist, und bei Diophantus ist es also einerlei, ob man sagt: eine Zahl habe gegen die andere ein vorgeschriebenes Verhältniß, oder die eine Zahl sei ein bestimmtes Vielfaches der an-

deren. Wenn Diophantus also sagt, eine Zahl habe gegen die andere ein bestimmtes Verhältniß mit Ueberschuß, so heißt das: sie solle um eine bestimmte Zahl größer sein, als ein bestimmtes Vielfaches der anderen.

IV.

Die Aufgabe sei allgemein: zwei Zahlen zu suchen, die sich wie n:m, oder wie $1:\frac{m}{n}$ verhalten, und deren Unterschied $= d$ sei.

Setzt man die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $\frac{m}{n}x$. Der Unterschied beider ist $\frac{m}{n}x - x = \frac{m-n}{n}x$, und da eben dieser Unterschied $= d$ sein soll, so hat man

$$\frac{m-n}{n}x = d, \text{ folglich } x = \frac{dn}{m-n}.$$

V.

Um die Aufgabe allgemein zu lösen, setze man die gegebene Zahl $= a$, und nehme an, sie solle in zwei Zahlen von der Beschaffenheit getheilt werden, daß $\frac{1}{m}$ der ersten und $\frac{1}{n}$ der zweiten zusammen genommen die vorgeschriebene Zahl s gebe, wobei wir $n > m$ annehmen wollen.

Man setze $\frac{1}{n}$ der zweiten Zahl $= x$, so ist die zweite Zahl selbst $= nx$, und $\frac{1}{m}$ der ersten Zahl $= s - x$,

folglich die erste Zahl selbst $= m(s-x) = ms-mx$. Da die Summe beider Zahlen $= a$ sein muß, so hat man die Gleichung

$$nx-mx+ms = a, \text{ und } x = \frac{a-ms}{n-m}.$$

Aus dieser Formel läßt sich der Grund der beiden von Diophantus angeführten Einschränkungen leicht übersehen. Zuerst soll man von den beiden gesuchten Zahlen mit den nämlichen aliquoten Theil nehmen, welches geschehen würde, wenn $n = m$ wäre; denn es ist klar, daß in diesem Falle s nothwendig $\frac{a}{n} = \frac{a}{m}$ sein müßte, und also nicht mehr willkührlich bestimmt werden könnte. Zweitens soll s zwischen den Grenzen $\frac{a}{n}$ und $\frac{a}{m}$ enthalten, nämlich in unserem Falle größer als $\frac{a}{n}$, und kleiner als $\frac{a}{m}$ sein. Denn wäre $s = \frac{a}{m}$, folglich $ms = a$, so würde $a-ms = o$, und wäre $s > \frac{a}{m}$, folglich $ms > a$, so würde $a-ms$ negativ sein; in dem ersten Falle würde aber $x = o$, in dem zweiten gar negativ werden; es ist aber schon oben bemerkt worden, daß Diophantus alle negative Werthe ausschließt, und alle Mal positive Werthe sucht.

Wäre ferner $s = \frac{a}{n}$, also $ns = a$, so verwandelte sich unsere Formel in folgende

$$x = \frac{ns-ms}{n-m}.$$

Hieraus findet man aber $x = s$, folglich würde $\frac{1}{m}$ der ersten Zahl $= o$ werden.

VI.

Die Aufgabe sei allgemein folgende: Man soll die Zahl a in zwei andere Zahlen von der Beschaffenheit zerstücken, daß $\frac{1}{n}$ der ersten um die Zahl d größer sei als $\frac{1}{m}$ der zweiten.

Man setze $\frac{1}{m}$ der zweiten Zahl $= x$, so ist zweite Zahl $= mx$, und $\frac{1}{n}$ der ersten Zahl $= x + d$, folglich die erste Zahl selbst $= nx + nd$, die Summe beider gesuchten Zahlen ist also $= mx + nx + nd$, und da eben diese Summe auch $= a$ sein soll, so hat man die Gleichung

$$mx + nx + nd = a, \text{ und } x = \frac{a - nd}{m + n}.$$

Die der Aufgabe beigefügte Einschränkung sagt eigentlich, daß d kleiner sein müsse als $\frac{a}{n}$, wovon der Grund aus der Formel deutlich einzusehen ist. Denn wäre $d = \frac{a}{n}$, folglich $dn = a$, so würde $a - nd$, also auch $x = o$; wäre aber $d > \frac{a}{n}$, folglich $nd > a$, so würde $a - nd$, also auch x selbst, negativ werden.

VII.

Die größere der gegebenen Zahlen sei a, die kleinere b, die gesuchte = x, so wird der größere Rest = x—b, der kleinere = x—a. Soll nun der kleinere Rest sich zu dem größeren verhalten, wie n:m oder wie 1:$\frac{m}{n}$, so hat man die Proportion

$$x-a:x-b=1:\frac{m}{n}.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{m(x-a)}{n}=x-b, \text{ und } x=\frac{am-bm}{m-n}.$$

VIII.

Die gesuchte Zahl heiße wiederum x, die größere der gegebenen Zahlen sei a, die kleinere b, folglich die größere Summe = x+a, die kleinere Summe = x+b. Ist nun vorgeschrieben, daß die größere Summe zu der kleineren sich verhalten solle, wie m:n, so hat man die Proportion

$$x+a:x+b=m:n$$

Daraus folgt aber

$$mx+bm=nx+an, \text{ und } x=\frac{an-bn}{m-n}.$$

Die Bedingung, welche Diophantus dieser Aufgabe beifügt, sagt eigentlich, daß das Verhältniß m:n kleiner als das Verhältniß a:b sein müsse, und aus der Formel übersieht man leicht den Grund dieser Bedingung.

Wäre nämlich $m:n = a:b$, folglich $an = bm$, so würde $an - bm = o$, und wäre $m:n > a:b$, folglich bm größer als an, so würde $an - bm$ negativ, also in beiden Fällen die Auflösung, welche positive Zahlen verlangt, unmöglich.

Um Mißverständnisse zu verhüten, bemerke man, daß die Alten die Größe eines Verhältnisses anders bestimmen als die Neueren. Wir beurtheilen nämlich die Größe eines Verhältnisses nach dem Exponenten, oder dem Quotienten des Hintergliedes durch das Vorderglied, und ein Verhältniß ist also um so größer, je größer das Hinterglied in Vergleichung mit dem Vordergliede ist. Aus der Erklärung bei Euklides V, 7. folgt aber, daß bei den Alten ein Verhältniß um desto größer heißt, je größer das Vorderglied in Vergleichung mit seinem Hintergliede ist. Das Verhältniß $A:B$ ist nämlich größer als $C:D$, wenn nA zwar größer als mB, aber nC nicht größer als mD ist. Wollte man also das Verhältniß $C:D$ dem Verhältnisse $A:B$ gleich machen, so müßte man entweder C vergrößern, oder D verkleinern, woraus sich die Richtigkeit der obigen Bemerkung von selbst ergiebt.

In dem vorliegendem Falle ist das Verhältniß $a:b = 100:20 = 5:1$, das Verhältniß der größeren Summe zur kleineren aber soll $3:1$ sein. In dem Sinne der Alten ist nun das Verhältniß $3:1$ kleiner als das Verhältniß $5:1$, in dem Sinne der Neueren würde aber das

Verhältniß 3:1 größer als 5:1 sein, da jenes den Exponenten $\frac{1}{3}$, dieses den Exponenten $\frac{1}{5}$ hat.

IX.

Bezeichnet man wieder die größere der gegebenen Zahlen durch a, die kleinere durch b, die gesuchte Zahl durch x, so ist a—x der größere, b—x der kleinere Rest. Soll nun der größere Rest sich zu dem kleineren Reste wie m:n verhalten, so hat man die Proportion

$$a-x:b-x=m:n, \text{ und } x=\frac{bm-an}{m-n}.$$

Die Bedingung verlangt, daß m:n größer als a:b sei, denn wäre m:n=a:b folglich an=bm, so würde bm—am=o, wäre aber m:n<a:b, folglich bm kleiner als an, so würde bm—an negativ werden.

X.

Die gesuchte Zahl heiße x, diejenige zu welcher man x addiren soll, heiße a, diejenige von der man x subtrahiren soll b, so ist die Summe =a+x, und der Rest =b—x. Soll nun die Summe a+x n Mal so groß sein als der Rest b—x, so hat man die Gleichung

$$a+x=bn-nx, \text{ und } x=\frac{bn-a}{n+1}.$$

Diophantus drückt sich bei der Auflösung dieser Aufgabe so aus, als ob die Summe a+x nothwendig größer sein müsse als der Rest b—x, denn wo die

Uebersetzung bestimmt die Summe oder den Rest nennt, da sagt Diophantus bloß die größere oder die kleinere Zahl, bestimmt aber dessen ungeachtet, daß die kleinere Zahl vier Mal genommen $=400-4x$ sei. Wenn der Uebersetzer, um jedem Mißverständniß vorzubeugen, einen bestimmteren Ausdruck wählte, so glaubt er doch, daß Diophantus mit dem unbestimmten Ausdruck eben beide Fälle umfassen wollte, und wirklich ist die Auflösung nicht wesentlich verschieden, man mag die Summe oder den Rest als die größere Zahl ansehen. Denn gesetzt der Rest $b-x$ solle n Mal größer sein, als die Summe $a+x$, so hat man die Gleichung

$$n(a+x) = bx, \text{ also } x = \frac{b-an}{n+1}.$$

Die beiden für x gefundenen Formeln zeigen noch, daß der Exponent n nicht jede beliebige Größe haben kann; soll nämlich die Summe die größere Zahl sein, so muß bn größer als a sein; soll aber der Rest die größere Zahl sein, so muß an kleiner als b sein, weil man sonst für x einen negativen Werth erhält.

XI.

Die gesuchte Zahl heiße wiederum x, die gegebene Zahl, welche man dazu addiren soll, sei a, die welche man subtrahiren soll b, folglich wird die Summe $=x+a$, der Rest $=x-b$. Soll nun jene Summe n Mal größer sein als dieser Rest, so hat man die Gleichung

$$n(x-b) = x+a, \text{ und } x = \frac{a+bn}{n-1}.$$

Da Diophantus für n immer eine ganze Zahl nimmt, so konnte er den Fall nicht berücksichtigen, wenn der Rest größer sein soll, als die Summe. Denn gesetzt der Rest solle n Mal größer sein als die Summe, so hätte man die Gleichung

$$n(x+a) = x-b, \text{ folglich } x = -\frac{an+b}{n-1}.$$

XII. XIII.

Um die Auflösung der zwölften Aufgabe allgemein vorzustellen, bezeichne man die Zahl, die man zerstückeln soll, durch a, den kleineren Theil aus der zweiten Zerstückelung durch x. Soll nun der größere Theil aus der ersten Zerstückelung n Mal so groß sein, als der zweite Theil aus der zweiten Zerstückelung, so ist der größere Theil aus der ersten Zerstückelung $= nx$, und der kleinere $= a-nx$. Soll ferner der größere Theil aus der zweiten Zerstückelung m Mal so groß sein, als der kleinere aus der ersten Zerstückelung, so wird derselbe $= am-mnx$. Nun muß die Summe der beiden Stücke $am-mnx+x$ der gegebenen Zahl a gleich sein. Man hat also die Gleichung

$$am-mnx+x = a, \text{ und } x = \frac{(m-1)a}{mn-1}.$$

In unserem Falle ist $m-1=2$, also $(m-1)a=200$, ferner ist $mn-1=5$, also $x=\frac{200}{5}=40$.

Die Auflösung der XIII Aufgabe läßt sich auf dieselbe Art allgemein vorstellen.

XIV.

Diese Aufgabe ist, so wie Diophantus sie ausdrückt, eine unbestimmte; denn man sucht zwei unbekannte Größen, die wir allgemein durch x und y bezeichnen wollen, man hat aber zur Auflösung nur eine einzige Gleichung,

$$3(x+y) = xy.$$

Diophantus nimmt nun für eine der unbekannten Größen die bestimmte Zahl 12 an, und berechnet daraus die andere. Dadurch wird aber die ganze Aufgabe verändert, und sie sollte nunmehr auf folgende Art ausgedrückt werden:

es ist eine bestimmte Zahl a gegeben, man soll eine andere Zahl x von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt beider n Mal so groß wird als ihre Summe.

Aus diesen Bedingungen ergiebt sich die Gleichung

$$n(a+x) = ax, \text{ und } x = \frac{an}{a-n}.$$

Aus dieser Formel übersieht man zugleich den Sinn und den Grund der Einschränkung, welche Diophantus der Aufgabe beifügt. Zur Auflösung der unbestimmten Aufgabe ist nämlich erforderlich, daß man für die eine der gesuchten Zahlen eine bestimmte Zahl a wähle; nimmt man diese aber kleiner als den Exponenten n des vorgeschriebenen Verhältnisses, so wird der Nenner a—n, und dadurch x selbst, negativ.

XV.

Was die erste der gesuchten Zahlen von der zweiten erhalten soll, sei $= a$, was die zweite von der ersten erhalten soll $= b$; ferner sei vorgeschrieben, daß die erste Zahl n Mal, und die zweite Zahl m Mal so groß werde als der Rest, nachdem jene a, und diese b, von der andern erhalten hat. Man setze die zweite Zahl $= x + a$, die erste $= nx - a$, so ist bereits die erste Bedingung der Aufgabe erfüllt, denn wenn man nun von der zweiten die Größe a wegnimmt, und sie zu der ersten hinzulegt, so wird jene x und diese nx, wie die Aufgabe vorschreibt.

Zieht man aber von der ersten Zahl die Größe b ab, und legt eben diese Größe der zweiten Zahl zu, so wird jene $= nx - (a + b)$, und diese $= x + (a + b)$. Die letztere Zahl soll aber nach dieser Veränderung m Mal so groß als die erstere sein, man hat daher die Gleichung

$$mnx - m(a + b) = x + (a + b),$$

und daraus findet man, nach einigen leichten Veränderungen,

$$x = \frac{(m + 1)(a + b)}{mn - 1}.$$

In unserer Aufgabe ist $a = 30$, $b = 50$, $n = 2$, $m = 3$, daher wird $a + b = 80$, $m + 1 = 4$ also $(m + 1)(a + b) = 320$; ferner ist $mn - 1 = 5$, also $x = \frac{320}{5} = 64$.

Hieraus findet man die erste Zahl oder $nx-a=98$, die zweite Zahl oder $x+a=94$.

XVI.

Die Summe der ersten und zweiten Zahl sei $=a$, die Summe der zweiten und dritten $=b$, die Summe der ersten und dritten $=c$, die unbekannte Summe der drei gesuchten Zahlen aber sei $=s$. Nun ist die dritte Zahl $=s-a$, die zweite $=s-c$, die erste $=s-b$, und die Summe aller drei Zahlen wird daher auch $3s-(a+b+c)$. Man hat also die Gleichung

$$3s-(a+b+c)=s, \text{ also } s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Hat man nach dieser Formel die Summe der drei Zahlen oder s berechnet, so finden sich die Zahlen $s-a$, $s-b$, $s-c$ durch bloße Subtraction. Auch zeigt die Formel, warum die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer sein muß, als jede derselben einzeln genommen. Denn wäre eine derselbe $=\frac{a+b+c}{2}$, so wäre sie eben darum auch $=s$, d. i. der Summe von allen dreien gleich, und die Summe der beiden übrigen müßte $=0$ sein, was nur möglich wäre, wenn beide einander gleich, aber entgegengesetzt wären.

Uebrigens läßt sich dies Verfahren auf so viele Zahlen ausdehnen, als man will.

XVII.

Wie diese Auflösung sich ganz allgemein machen lasse, fällt in die Augen. Man setze nämlich statt der Zahlen 20, 22, 24, 27 der Reihe nach die Buchstaben a, b, c, d, und bezeichne die unbekannte Summe der vier gesuchten Zahlen durch s, so erhält man für die gesuchten Zahlen die allgemeinen Ausdrücke s—a, s—b, s—c, s—d, und es ergiebt sich wie vorher die Gleichung

$$4s-(a+b+c+d)=s, \text{ also } s=\frac{a+b+c+d}{3}.$$

Hat man nach dieser Formel den Werth von s gefunden, so ergiebt sich der Werth der vier gesuchten Zahlen wieder durch bloße Subtraction, auch zeigt die Formel deutlich an, warum das Drittel von der Summe der vier gegebenen Zahlen kleiner sein muß, als jede dieser Zahlen einzeln genommen. Denn wäre eine dieser Zahlen $=\frac{a+b+c+d}{3}$, so wäre sie auch $=s$, d. h. der Summe der vier gesuchten Zahlen gleich, die Summe der drei übrigen müßte daher $=0$ sein, was nicht anders geschehen kann, als wenn wenigstens eine derselben negativ ist.

XVIII.

Um den Schluß, durch welchen Diophantus die dritte Zahl findet, deutlich einzusehen, bezeichne man die

drei gesuchten Zahlen der Reihe nach durch die Buchstaben A, B und C. Nach der Annahme ist

$$A+B-C=20, \text{ oder } A+B=C+20.$$

Addirt man also an beiden Seiten die Zahl C, so erhält man

$$A+B+C=2C+20.$$

Das heißt bei Diophantus: die Summe der drei Zahlen besteht aus der Differenz 20 und dem Doppelten der dritten Zahl. Wird also die Summe der drei Zahlen durch $2x$ bezeichnet, so ist

$$2C+20=2x, \text{ also } C=x-10.$$

Aus den Bedingungen hat man ferner

$$B+C=A+30.$$

Addirt man an beiden Seiten A, so erhält man

$$A+B+C=2A+30.$$

Setzt man statt $A+B+C$ wiederum $2x$ so wird

$$2A+30=2x, \text{ folglich } A=x-15.$$

Aus den Bedingungen folgt endlich

$$A+C=B+40, \text{ oder } A+B+C=2B+40.$$

Setzt man $A+B+C=2x$, so wird

$$2B+40=2x, \text{ folglich } B=x-20.$$

XIX.

In dieser Auflösung findet Diophantus die zweite Zahl $=25$ durch folgenden Schluß.

Man bezeichne die gesuchten Zahlen wieder der Reihe nach durch A, B, C, die gegebenen Unterschiede 20, 30, 40 durch D, d, δ, so ist

1. $A+B=C+D$
2. $B+C=A+d$
3. $A+C=B+\delta$

Addirt man nun die erste und zweite Gleichung, und zieht an beiden Seiten A+C ab, so erhält man

$$2B=D+d, \text{ also } B=\frac{D+d}{2}=\frac{20+30}{2}=25.$$

Addirt man die erste und dritte Gleichung, und zieht an beiden Seiten B+C ab, so erhält man

$$2A=D+\delta, \text{ also } A=\frac{D+\delta}{2}=\frac{20+40}{2}=30.$$

Addirt man endlich die zweite und dritte Gleichung, und zieht an beiden Seiten A+B ab, so erhält man

$$2C=d+\delta, \text{ also } C=\frac{d+\delta}{2}=\frac{30+40}{2}=35,$$

und man sieht hieraus, daß Diophantus nicht bloß die zweite, sondern alle drei Zahlen durch den von ihm angewandten Schluß hätte finden können, ohne irgend eine unbekannte Größe in die Rechnung einzuführen.

XX.

Man bezeichne die gesuchten Zahlen der Reihe nach durch A, B, C, E, die gegebenen Unterschiede durch D, d, Δ, δ. Nun hat man aus den Bedingungen der Aufgabe

1. A+

1. $A+B+C=E+D.$
2. $B+C+E=A+d.$
3. $C+E+A=B+\Delta.$
4. $E+A+B=C+\delta.$

Wenn man nun in der ersten Gleichung an beiden Seiten E addirt, so erhält man

$$A+B+C+E=2E+D,$$

und diese Gleichung sagt dasselbe, was Diophantus mit Worten ausdrückt. In der ersten Gleichung ist nämlich D der Ueberschuß der drei ersten Zahlen über die vierte, in der abgeleiteten Gleichung aber ist D der Ueberschuß aller vier Zahlen über das Doppelte der vierten. Setzt man nun die Summe der vier Zahlen $=2x$, so hat man

$$2x=2E+D, \text{ also } E=x-\tfrac{1}{2}D.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, wenn man an beiden Seiten A addirt,

$$2x=2A+d, \text{ also } A=x-\tfrac{1}{2}d.$$

Aus der dritten Gleichung folgt, wenn man an beiden Seiten B addirt,

$$2x=2B+\Delta, \text{ also } B=x-\tfrac{1}{2}\Delta.$$

Aus der vierten Gleichung endlich folgt, wenn man zu beiden Seiten C addirt,

$$2x=2C+\delta, \text{ also } C=x-\tfrac{1}{2}\delta.$$

Addirt man die für A, B, C, E gefundenen Werthe, so findet man ihre Summe

$$= 4x - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}\delta = 4x - \frac{D+d+\Delta+\delta}{2},$$

und da eben diese Summe $= 2x$ sein soll, so hat man

$$4x - \frac{D+d+\Delta+\delta}{2} = 2x$$

folglich $x = \frac{D+d+\Delta+\delta}{4}$.

Man findet also die halbe Summe der gesuchten Zahlen, wenn man die Summe der gegebenen Unterschiede durch 4 dividirt, daraus aber erhält man die Zahlen selbst durch die bloße Subtration der halben Unterschiede.

Aus den gefundenen Formeln ergiebt sich auch der Grund der beigefügten Bedingung, nach der jede der gegebenen Zahlen kleiner sein muß, als die halbe Summe derselben. Denn gesetzt es wäre eine dieser Zahlen z. B. D der halben Summe aller vier Zahlen gleich, also

$$D = \frac{D+d+\Delta+\delta}{2},$$

so wäre auch

$$\frac{1}{2}D = \frac{D+d+\Delta+\delta}{4} = x.$$

Daher würde $E = x - \frac{1}{2}D = o$. Setzte man D größer als die halbe Summe aller vier Zahlen, so würde $\frac{1}{2}D$ größer als x, folglich E sogar negativ werden.

XXI.

Um den Schluß durch welchen Diophantus die Summe der zweiten und dritten Zahl, imgleichen die

Summe der dritten und vierten Zahl findet, deutlich einzusehen, bezeichne man die vier gesuchten Größen wieder durch A, B, C, E, die gegebenen Unterschiede aber durch D, d, Δ, δ, wie in der vorigen Aufgabe. Nun hat man

1. $A+B+C=E+D.$
2. $B+C+E=A+d.$
3. $C+E+A=B+\Delta.$
4. $E+A+B=C+\delta.$

Wenn man nun die beiden ersten Gleichungen addirt, und an beiden Seiten A+E abzieht, so erhält man

5. $2B+2C=D+d$, also $B+C=\frac{D+d}{2}$.

Wenn man aber die dritte und vierte Gleichung addirt, und an beiden Seiten B+C abzieht so erhält man

6. $2A+2E=\Delta+\delta$, also $A+E=\frac{\Delta+\delta}{2}$,

und man sieht, daß man auf eben diese Art die Summe von je zweien dieser Zahlen berechnen konnte. Indeß ergiebt sich aus den vier Gleichungen folgende ganz einfache Auflösung.

Man addire in der ersten Gleichung zu beiden Seiten E, in der zweiten A, in der dritten B, in der vierten C, so erhält man an der linken Seite alle Mal die Summe der vier größen A+B+C+E, welche wir der Kürze wegen durch s bezeichnen wollen. Die obigen vier Gleichungen verwandeln sich also in folgende:

7. $s = 2E + D$.

8. $s = 2A + d$.

9. $s = 2B + \Delta$.

10. $s = 2C + \delta$.

Addirt man die letzten vier Gleichungen, so erhält man

11. $4s = 2A + 2B + 2C + 2E + D + d + \Delta + \delta$.

Nun ist aber (nach 6) $2A + 2E = \Delta + \delta$, und (nach 5) $2B + 2C = D + d$, folglich verwandelt sich die letzte Gleichung in diese

12. $4s = 2D + 2d + 2\Delta + 2\delta$,

und es wird $s = \frac{D + d + \Delta + \delta}{2}$.

Hieraus findet man also sehr leicht die Summe der vier gegebenen Zahlen, und die einzelnen Zahlen ergeben sich nun durch einen aus den Gleichungen 7. 8. 9. 10. leicht abzuleitenden Schluß. Es ist nämlich

$$A = \frac{s - d}{2},\ B = \frac{s - \Delta}{2};$$

$$C = \frac{s - \delta}{2},\ E = \frac{s - D}{2}.$$

XXII.

Die gegebene Zahl heiße a, die dritte der gesuchten Zahlen sei $= x$, so ist die Summe der beiden ersten $= a - x$. Nun verlangt die Aufgabe, daß die Summe der beiden ersten Zahlen 3 Mal, oder allgemein ausge-

drückt, n Mal größer sein soll als die dritte; hieraus erhält man die Gleichung

$$nx = a - x, \text{ folglich } x = \frac{a}{n+1}.$$

Durch diese Formel erhält man die dritte Zahl, und erfährt zugleich die Summe der ersten und zweiten. Auf dieselbe Weise aber, wie man die dritte Zahl findet, kann auch die erste gefunden werden. Denn setzt man die erste Zahl $= z$, so ist die Summe der beiden letzten $= a - z$, und wenn diese m Mal größer sein soll als die erste, so hat man die Gleichung

$$mz = a - z, \text{ folglich } z = \frac{a}{m+1}$$

eine Formel, die mit der vorigen dem Wesentlichen nach ganz übereinstimmt.

Da beide Zahlen x und z auf dieselbe Weise, jede aber durch ein besonders Verfahren gefunden werden, so bezeichnet Diophantus jede derselben durch ς oder das Zeichen für die unbekannte Größe. In der Folge, wo zum Behuf der eigentlichen Aufgabe eine oder mehre vorläufige Aufgaben zu lösen sind, bezeichnet ς oder x oft ganz verschiedene Größen, was aber bei einiger Aufmerksamkeit gar keine Verwirrung veranlassen kann, da man jeden Theil der Auflösung als ein besonderes Verfahren betrachten muß.

XXIII.

Um für die Auflösung eine allgemeine Regel zu haben, wollen wir die Bedingungen der Aufgabe in folgender Art ausdrücken:

1) die größte Zahl soll um $\frac{1}{p}$ der kleinsten Zahl größer sein als die mittelste,

2) die mittelste Zahl soll um $\frac{1}{m}$ der größten Zahl größer sein als die kleinste,

3) die kleinste Zahl soll um a größer sein, als $\frac{1}{n}$ der mittelsten Zahl.

Man setze die mittelste Zahl $=nx$, so ist die kleinste, zufolge der dritten Bedingung, $=x+a$, der Unterschied beider aber ist $nx-x-a=(n-1)x-a$. Dieser Unterschied ist, nach der zweiten Bedingung, $\frac{1}{m}$ der größesten Zahl, also ist die größte Zahl selbst $=m(n-1)x-am$. Der Unterschied der größesten und der mittelsten Zahl wird daher $=(mn-m-n)x-am$, dieser Unterschied ist aber, nach der ersten Bedingung, $\frac{1}{p}$ der kleinsten Zahl, folglich die kleinste Zahl selber $=(pmn-pm-pn)x-amp$, und da eben diese Zahl auch $=x+a$ war, so hat man die Gleichung

$$(pmn-pm-pn)x-amp=x+a$$

folglich wird $x=\frac{(pm+1)a}{pmn-(pm+pn+1)}$.

Da Diophantus die drei Nenner p, m und n sämmtlich gleich setzt, so verwandelt sich diese Formel in die einfachere

$$x = \frac{(n^2+1)a}{n^3-(2n^2+1)}.$$

In dem gegebenen Falle ist $n=3$ und $a=10$, also ist $n^2+1=3\times3+1=10$, und $(n^2+1)a=100$; $n^3=27$, $2n^2+1=19$, $n^3-(2n^2+1)=8$, folglich $x=\frac{100}{8}=12\frac{1}{2}$, wie im Texte.

Man setze aber

$$p=4,\ m=6,\ n=5,\ a=12,$$

so ist $pm+1=25$, $(pm+1)a=25.12=300$, $pmn=120$, $pm+pn+1=24+20+1=45$, folglich wird der Nenner $pmn-(pm+pn+1)=120-45=75$, also $x=\frac{300}{75}=4$. Nun wird die kleinste Zahl $x+a=16$, die mittelste $nx=20$, die größeste $m(n-1)x-am=24.4-12.6=24$, und diese drei Zahlen leisten ebenfalls, was die Aufgabe vorschreibt.

Die der Aufgabe beigefügte Bedingung sagt eigentlich, der Nenner m müsse so beschaffen sein, daß, wenn man ihn mit dem Unterschiede der mittelsten und der kleinsten Zahl, also mit $(n-1)x-a$ multiplicirt, die Größe x in dem Produkte öfter enthalten sei, als in der mittelsten Zahl nx, d. h. $m(n-1)$ soll größer als n, also auch mn größer als $m+n$ sein, welches alle Mal geschieht, wenn man für die eine Zahl wenigstens 3,

für die andere wenigstens 2 setzt, denn wenn beide Zahlen $=2$ sind, so ist $mn=m+n$.

Bachet tadelt den Ausdruck dieser Bedingung, weil man aus demselben nicht eher über die Möglichkeit der Aufgabe urtheilen könne, als bis man mit der Auflösung zu Stande sei; wenn man aber bedenkt, daß πλῆθος ἀριθμῶν immer den Coefficienten der unbekannten Größe bezeichnet, so sieht man leicht, daß die von Diophantus aufgestellte Bedingung wirklich nichts anderes sagt, als was er nach Bachets Meinung hätte sagen sollen.

Ueber den Grund der aufgestellten Bedingung kann man sich sehr leicht täuschen, wenn man dieselbe nämlich bloß aus den allgemeinen Ausdrücken für die 3 ungleichen Zahlen ableiten will, wie es Diophantus wirklich gethan zu haben scheint. Man kann nämlich sagen, $m(n-1)x-am$ soll die größeste Zahl sein; ist nun $m(n-1)x$ gleich oder kleiner als nx, so wird, wenn man am abzieht, die größeste Zahl kleiner werden als die mittelste. Aber dann wäre die Bedingung offenbar unvollständig, und es ließe sich recht wohl denken, daß $m(n-1)x$ größer als nx, und dessen ungeachtet der Rest $m(n-1)x-am$ kleiner als nx sei; auch wäre dann zu überlegen, daß nx größer als $x+a$ sein muß, was nicht für jeden Werth von n, x und a zutreffen kann, sondern nur, wenn x größer als $\frac{a}{n-1}$ ist.

Die Bedingung gründet sich aber auf einen anderen Umstand. Da für x ein positiver Werth gesucht wird, so muß in der für x gefundenen Formel auch der Nenner einen positiven Werth haben, folglich $pmn > pm + pn + 1$, oder wenn man durch p dividirt, $mn > m + n + \frac{1}{p}$ sein. Hieraus folgt: das Produkt mn muß größer sein, als die Summe m+n, und zwar um mehr als um den Bruch $\frac{1}{p}$; es war aber nicht nöthig, die letztere Bestimmung mit aufzunehmen, denn da m und n ganze Zahlen sein sollen, so wird mn—(m+n) immer eine ganze Zahl, also mindestens = 1 sein. Ist also mn überhaupt größer als m+n, so wird der Ueberschuß nothwendig größer als $\frac{1}{p}$ sein.

Um sich aber zu überzeugen, daß x+a nothwendig die kleinste, nx die mittelste, m(n—1)x—am die größte der drei Zahlen werde, wie man auch a und p bestimmen mag, so setze man in die obigen Ausdrücke den für x gefundenen Werth, so wird

$$\text{I. } x + a = \frac{apn(m-1)}{pmn-(pm+pn+1)}.$$

$$\text{II. } nx = \frac{an(pm+1)}{pmn-(pm+pn+1)}.$$

$$\text{III. } m(n-1)x-am = \frac{amn(p+1)}{pmn-(pm+pm+1)}$$

Da nun alle drei Größen denselben Nenner haben, so ist bloß zu zeigen, daß der Zähler des ersten Aus-

drucks kleiner sei, als der Zähler des zweiten, und dieser wieder kleiner, als der Zähler des dritten. Es ist aber

$$apn(m-1) = apnm - apn$$
$$an(pm+1) = apnm + an$$
$$amn(p+1) = apnm + amn.$$

Alle drei Zähler haben das gemeinschaftliche Glied apnm, in dem ersten wird aber von dem gemeinschaftlichen Gliede das Produkt apn abgezogen, in dem zweiten das Produkt an, in dem dritten das Produkt amn, welches nothwendig größer als an ist, dazu addirt, folglich ist in jedem Falle der erste Zähler der kleinste, der zweite der mittelste, der dritte der größte von allen.

Noch ist zu bemerken, daß a ein Factor für alle drei Größen wird; erhält man also Brüche für die gesuchten Zahlen, so kann man sie mit ihrem gemeinschaftlichen Nenner multipliciren, um ganze Zahlen zu erhalten, denn das ist eben so viel, als hätte man a so oft vergrößert, als der Nenner anzeigt. Auch ergiebt sich daraus noch: wenn man drei Zahlen hat, welche der Aufgabe genügen, so kann man sie mit jeder beliebigen Zahl dividiren oder multipliciren, und dadurch immer neue Zahlen von der verlangten Eigenschaft finden.

XXIV.

Wenn man die Buchstaben a, p, m, n in der vorhin angegebenen Bedeutung behält, so setze man die

kleinste Zahl $= x + a$, folglich die mittelste $= nx$. Nun soll die größte Zahl die mittelste um $\frac{1}{p}$ der kleinsten Zahl übersteigen, und wird daher $= nx + \frac{x+a}{p}$. Die mittelste Zahl soll aber die kleinste um $\frac{1}{m}$ der größesten Zahl übersteigen, und wird daher $= x + a + \frac{nx}{m} + \frac{x+a}{mp}$. Man hat also einen doppelten Ausdruck für die mittelste Zahl; dieser giebt die Gleichung

$$nx = x + a + \frac{nx}{m} + \frac{x+a}{mp},$$

woraus wie vorher folgt

$$x = \frac{(pm+1)a}{pmn - (pn+pm+1)}.$$

Die der Aufgabe beigefügte Bedingung sagt eigentlich: der mte Theil der größesten Zahl d. i. $\frac{nx}{m} + \frac{x+a}{pm}$ müsse von der Art sein, daß, wenn man ihn zu $x+a$ addirt, die unbekannte Größe darin nicht so oft vorkomme, als in dem Ausdrück für die mittelste Zahl nx. Dies scheint Diophantus aus folgender Betrachtung gefolgert zu haben. Sowohl nx, als die Summe $\frac{nx}{m} + \frac{x+a}{mp} + x + a$ ist ein Ausdruck für die mittelste Zahl; käme nun in dem letzteren Ausdruck x eben so oft oder öfter als in nx vor, so könnten beide Ausdrücke nicht gleich sein, weil der letztere außer den unbekannten Größen noch die bekannten Glieder $a + \frac{a}{mp}$ enthält.

Wenn man die Bedingung aber näher zergliedert, so ist sie einerlei mit der bei der vorigen Aufgabe aufgestellten, und läßt sich gerade so wie diese begründen. Ist nämlich

$$\frac{n}{m}x \quad \frac{x}{pm} + x < nx$$

so folgt

1. $\frac{n}{m} + \frac{1}{pm} + 1 < n$,

2. $n + \frac{1}{p} + m < mn$,

und dies ist einerlei mit der Bedingung in der vorigen Aufgabe. Die dort gemachten allgemeinen Bemerkungen gelten also auch hier.

XXV.

Um die Auflösung ganz allgemein zu machen, wollen wir annehmen, daß die erste Zahl $\frac{1}{m}$, die zweite $\frac{1}{n}$, die dritte $\frac{1}{p}$ ihres Werthes abgeben solle.

Man setze die erste Zahl $= mx$, damit sie sich ohne Rest durch m dividiren lasse, und aus gleichem Grunde setze man die zweite Zahl $= an$, wo a eine beliebig gewählte Zahl ist. Giebt nun die zweite Zahl $\frac{1}{n}$ ihres Werthes d. i. a an die folgende Zahl ab, und erhält dagegen $\frac{1}{m}$ von dem Werth der ersten Zahl, d. i. x, so verwandelt sie sich zuletzt in $x + (n-1)a$.

Eben diesen Werth soll auch die erste Zahl erhalten, wenn sie $\frac{1}{m}$ des eigenen Werthes abgegeben, und dagegen $\frac{1}{p}$ von dem Werthe der dritten Zahl erhalten hat. Wenn sie aber $\frac{1}{m}$ ihres eigenen Werthes oder x abgiebt, so wird sie $=(m-1)x$, und um den vorgeschriebenen Werth zu erhalten muß man $(n-1)a-(m-2)x$ hinzulegen. Dieser Ausdruck muß also $\frac{1}{p}$ der dritten Zahl, und die dritte Zahl selber $=p(n-1)a-p(m-2)x$ sein.

Zieht man von der dritten Zahl $\frac{1}{p}$ ihres Werthes oder $(n-1)a-(m-2)x$ ab, so wird sie $=p(n-1)a-(n-1)a-p(m-2)x+(m-2)x$. Kommt zu diesem Reste noch $\frac{1}{n}$ der zweiten Zahl oder a hinzu, so soll auch diese Zahl den Werth $x+(n-1)a$ erhalten, und man hat daher folgende Gleichung

$$p(n-1)a-(n-1)a+a-p(m-2)x=x+(n-1)a$$

oder, wenn man die Gleichung gehörig ordnet, und die Glieder zusammenzieht,

$$(p-2)(n-1)a+a=(p-1)(m-2)x+x$$

und daraus findet man

$$x=\frac{(p-2)(n-1)a+a}{(p-1)(m-2)+1}.$$

Setzt man, wie Diophantus gethan hat, $a=1$, so wird

$$x=\frac{(p-2)(n-1)+1}{(p-1)(m-2)+1}.$$

Da $m=3$, $n=4$, $p=5$ so wird, $(p-2)(n-1)+1=10$, $(p-1)(m-2)+1=5$, also $x=2$. Der Umstand, daß man den für x gefundenen Werth noch mit einer beliebigen Zahl a multipliciren darf, ist in doppelter Hinsicht zu beachten. Denn fände man für x einen Bruch, so ist es erlaubt, den Nenner desselben wegzulassen, denn dies ist eben so viel, als hätte man die Zahl a diesem Nenner gleich gesetzt, und Diophantus läßt daher unter ähnlichen Umständen, oft ohne es ausdrücklich zu bemerken, den Nenner der gefundenen Zahlen fort. Außerdem geht daraus hervor, daß man für x unzählige Werthe finden könne, und die Aufgabe daher unbestimmt sei, sie wird aber völlig bestimmt, so bald man die Bedingung hinzufügt, daß die Zahlen zuletzt eine bestimmte Summe z. B. 10 geben sollen, oder daß $x+(n-1)a$ einen bestimmten Werth haben soll. Unter dieser Voraussetzung erhält man folgende Auflösung.

Die erste Zahl sei $=3x$; giebt diese nun $\frac{1}{3}$ ihres Werthes ab, so wird sie $2x$. Nun soll sie aber von der dritten so viel erhalten, daß sie $=10$ wird, sie muß also $10-2x$ erhalten. Was aber die dritte Zahl abgiebt, soll $\frac{1}{5}$ ihres eigenen Werthes sein, also ist die dritte Zahl $=50-10x$.

Wenn die dritte Zahl ein Fünftel ihres Werthes abgiebt, so wird sie $=40-8x$; sie soll aber von der zweiten so viel erhalten, daß sie $=10$ wird, d. i. sie

muß $8x-30$ erhalten. Was aber die zweite Zahl abgiebt, soll ein Viertel ihres Werthes sein, also ist die zweite Zahl selbst $=32x-120$.

Endlich soll auch die zweite Zahl, wenn sie ein Viertel ihres Werthes abgiebt, und ein Drittel von dem Werthe der ersten Zahl erhält, $=10$ werden. Zieht man von der zweiten Zahl $(32x-120)$ ein Viertel ihres Werthes d. i. $8x-30$ ab, so bleibt $24x-90$, und addirt man dazu das Drittel der ersten Zahl oder x, so wird sie $=25x-90$; man hat also die Gleichung

$$25x-90=10, \text{ also } x=\frac{100}{25}=4.$$

Die erste Zahl ist also 12, die zweite 8, die dritte 10.

XXVI.

Die Auflösung dieser Aufgabe läßt sich gerade so wie die vorige allgemein vorstellen. Die allgemeinen Bemerkungen, welche wir bei jener machten, finden auch bei dieser ihre volle Anwendung.

XXVII.

Um den Schluß, durch welchen Diophantus die zweite und dritte Zahl findet, deutlich einzusehen, bezeichne man die drei gesuchten Zahlen durch x, y, z. Setzt man nun $y+z=3$, folglich die Summe der drei Zahlen $=x+3$, so findet man, daß die erste Zahl $=x+1$ wird,

sobald sie ein Drittel von der Summe $y+z$ erhält, daher muß auch die zweite Zahl $y=x+1$ werden, wenn sie von der Summe der beiden übrigen $x+z$ ein Viertel erhält, oder es ist

$$y+\frac{x+z}{4}=x+1.$$

Multiplicirt man nun beide Seiten mit 4, so erhält man

$$4y+x+z=4x+4.$$

Statt $4y+x+z$ kann man aber auch setzen $3y+x+y+z$, d. h. man kann dafür das Dreifache der zweiten Zahl und die Summe aller drei Zahlen setzen, wie Diophantus diese Vertauschung in Worten ausdrückt. Daher erhält man also

$$3y+x+y+z=4x+4.$$

Zieht man nun von der einen Seite $x+y+z$, und von der anderen $x+3$, also an beiden Seiten Gleiches, nämlich die Summe der drei Zahlen ab, so wird

$$3y=3x+1, \text{ und } y=x+\frac{1}{3}.$$

Durch dasselbe Verfahren findet Diophantus noch einen allgemeinen Ausdruck für die dritte Zahl. Nach der Aufgabe soll nämlich

$$z+\frac{x+y}{5}=x+1$$

werden. Man multiplicire mit 5, so erhält man

$$5z+x+y=5x+5.$$

Zieht

Zieht man nun an der linken Seite $x+y+z$, an der rechten $x+3$ ab, so erhält man

$$4z = 4x+2, \text{ also } z = x+\frac{1}{2}.$$

Um die Auflösung allgemein vorzustellen, nehme man an, daß die erste Zahl $\frac{1}{m}$, die zweite $\frac{1}{n}$, die dritte $\frac{1}{p}$ von der Summe der beiden übrigen erhalten solle.

Man setze vorläufig die erste Zahl $=x$, die zweite $=y$, die dritte $=z$, nehme aber an, daß die Summe $y+z$ einer durch m theilbaren Zahl z. B. am gleich sei, so wird die Summe der Zahlen $x+am$ sein, und die erste Zahl wird, wenn sie $\frac{1}{m}$ von der Summe der beiden übrigen erhalten hat, $=x+a$ werden.

Wenn die zweite Zahl $\frac{1}{n}$ von dem Werthe der ersten und dritten erhält, so soll auch sie $=x+a$ werden, man hat also die Gleichung

$$y+\frac{x+z}{n} = x+a,$$

und, wenn man mit n multiplicirt,

$$ny+x+z = nx+an$$

oder, nach dem von Diophantus angeführten Satze,

$$(n-1)y+x+y+z = nx+an.$$

Nun ziehe man an der linken Seite $x+y+z$, und an der rechten Seite $x+am$ ab, so wird

$$(n-1)y = (n-1)x+(n-m)a$$

folglich $y = x+\frac{n-m}{n-1}a$.

Die dritte Zahl z soll $\frac{x+y}{p}$ erhalten, und dadurch $=x+a$ werden. Man hat also die Gleichung

$$z+\frac{x+y}{p}=x+a.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit p, so wird

$$pz+x+y=px+ap,$$

und, nach dem von Diophantus angeführten Satze,

$$(p-1)z+x+y+z=px+ap,$$

Zieht man wiederum an der linken Seite $x+y+z$, und an der rechten Seite $x+am$ ab, so wird

$$(p-1)z=(p-1)x+(p-m)a$$

folglich $z=x+\frac{p-m}{p-1}a.$

Die Summe der drei Zahlen ist also

$$x+x+\frac{n-m}{n-1}a+x+\frac{p-m}{p-1}a=3x+\frac{n-m}{n-1}a+\frac{p-m}{p-1}a.$$

Da eben diese Summe auch $x+am$ sein soll, so hat man die Gleichung

$$3x+\frac{n-m}{n-1}a+\frac{p-m}{p-2}a=x+am,$$

und daraus findet sich

$$x=\frac{am}{2}-\frac{n-m}{2(n-1)}a-\frac{p-m}{2(p-1)}a.$$

In unserem Falle ist

$$\frac{am}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{n-m}{2(n-1)}a=\frac{1}{6},\ \frac{p-m}{2(p-1)}a=\frac{1}{4}.$$

Zieht man die Summe der beiden letzten Stücke $= \frac{5}{12}$ von dem ersten Stücke $\frac{3}{2} = \frac{18}{12}$ ab, so wird $x = \frac{13}{12}$, wie bei Diophantus.

Da man die Zahl a ganz beliebig wählen darf, so ist es klar, daß es für x unzählige Werthe giebt, und daß es in jedem Falle erlaubt sei, den Nenner des für x erhaltenen Bruches $\frac{13}{12}$ wegzuwerfen, denn dies ist eben so viel, als hätte man die Zahl a 12 Mal größer genommen als Anfangs. Uebrigens wird auch diese Aufgabe völlig bestimmt, sobald man für $x+am$ einen bestimmten Werth fordert.

XXVIII.

Um das Verfahren allgemein darzustellen, nehme man an, daß die erste Zahl $\frac{1}{m}$, die zweite $\frac{1}{n}$, die dritte $\frac{1}{p}$, die vierte $\frac{1}{r}$, von der Summe der drei übrigen erhalten solle.

Man bezeichne die vier Zahlen vorläufig durch x, y, z, v, setze aber zugleich $y+z+v=am$, so ist die Summe der vier Zahlen $=x+am$, und die erste Zahl verwandelt sich in $x+a$, wenn sie $\frac{1}{m}$ von der Summe der drei übrigen Zahlen erhalten hat.

Daher ist auch

$$y + \frac{x+z+v}{n} = x + a,$$

und man findet durch dasselbe Verfahren, welches in der vorigen Aufgabe angewendet wurde,

$$y = x + \frac{n-m}{n-1}a.$$

$$z = x + \frac{p-m}{p-1}a$$

$$v = x + \frac{r-m}{r-1}a.$$

Die Summe der vier Zahlen ist also

$$4x + \frac{n-m}{n-1}a + \frac{p-m}{p-1}a + \frac{r-m}{r-1}a,$$

und da eben diese Summe auch $x+am$ sein soll, so hat man die Gleichung

$$4x + \frac{n-m}{n-1}a + \frac{p-m}{p-1}a + \frac{r-m}{r-1}a = x + am$$

und daraus findet man

$$x = \frac{am}{3} - \frac{n-m}{3(n-1)}a - \frac{p-m}{3(p-1)}a - \frac{r-m}{3(r-1)}a.$$

Wenn man die beiden Formeln vergleicht, welche das Verfahren in der vorigen und in dieser Aufgabe allgemein vorstellen, so sieht man leicht, daß beide nach einem sehr einfachen und in die Augen fallenden Gesetze gebildet sind, und daß sich das Verfahren auf so viele Zahlen ausdehnen läßt, als man immer will. Käme nämlich noch die fünfte Zahl t hinzu, welche

von der Summe der übrigen $\frac{1}{s}$ erhalten sollte, so würde man für y, z und v die vorigen Werthe, für t aber den Werth $x + \frac{s-m}{s-1}a$ finden, und es würde zuletzt

$$x = \frac{am}{4} - \frac{n-m}{4(n-1)}a - \frac{p-m}{4(p-1)}a - \frac{r-m}{4(r-1)}a - \frac{s-m}{4(s-1)}.$$

XXIX.

Diophantus nimmt bei der Auflösung stillschweigend an, daß $200x$ das Quadrat, $5x$ aber die Wurzel dieses Quadrats sein solle, ungeachtet dies in der Aufgabe selber nicht ausdrücklich gesagt ist. Daher kann man auch den Fall berücksichtigen, daß $5x$ ein Quadrat, und $200x$ die Wurzel dieses Quadrats werden soll. Hier wird also

$$5x = (200x)^2 = 40000x^2$$

und es würde $x = \frac{5}{40000} = \frac{1}{8000}$.

Um die Auflösung allgemein vorzustellen, heiße die Zahl deren Produkt ein Quadrat werden soll a, diejenige aber, deren Produkt die Wurzel dieses Quadrates sein soll, heiße b, die gesuchte Zahl heiße wie vorhin x. Nun soll das Produkt ax das Quadrat von bx sein, man hat also

$$ax = (bx)^2 = b^2x^2,$$

daraus aber findet man $x = \frac{a}{b^2}$.

XXX. — XXXIII.

Die Worte, welche ich hier, wie in der XXXI. und XXXIII. Aufgabe übersetzt habe: dies läßt sich aber durch ein besonderes Verfahren bewirken, lauten im Griechischen: ἐστὶ δὲ τοῦτο πλασματικόν. Dies wird von Xylander, welcher den Scholiasten unrecht verstand, übersetzt: hoc autem est aliunde effictum. Der Scholiast bemerkt nämlich die Bedingung gründe sich auf den Satz Eukl. II. 5, und Xylander scheint also sagen zu wollen: diese Bedingung sei eigentlich aus einem anderen Theile der Mathematik entlehnt, oder einem fremden Satze nachgebildet, was doch weder die Meinung des Verfassers noch des Scholiasten sein kann.

Bachet, welcher zwar Xylanders aliunde effictum tadelt, scheint doch die Worte des Scholiasten nicht näher geprüft zu haben. Seine Meinung ist, πλασματικὸν gehe auf die ganze Aufgabe, und sie werde deßhalb so genannt, weil man daraus die so genannten zusammengesetzten Regeln, oder die Regeln für die Auflösung vermischter quadratischer Gleichungen ableiten (plasmare) könne. Diese Meinung hat aber Alles wider sich. Zuerst muß man bezweifeln, daß daß Adjectivum πλασματικὸν diese Bedeutung haben könne, wenigstens spricht weder die Bedeutung von πλάσσω, noch das von Schneider angeführte πλασματικῶς

bei Eustathius ad Iliad. 1. p. 71, 37 dafür. Was aber Bachets Meinung ganz widerlegt, ist der Umstand, daß Diophantus die drei Aufgaben, bei welchen diese Bemerkung sich findet, nicht als vermischte, sondern als reine quadratische Gleichungen behandelt, wiewohl sie bei dem gewöhnlichen Ansatz mit zwei unbekannten Größen auf eine vermischte quadratische Gleichung führen. Daß die Regeln zur Auflösung einer solchen Gleichung sonst nirgend vorgetragen werden, kann jener Meinung auch nicht zur Stütze dienen, denn man muß annehmen, daß sie in der Einleitung zu einem der späteren Bücher enthalten waren, deren Verlust wir zu bedauern haben. Der Scholiast hat unstreitig den richtigen Sinn getroffen, wenn er nach Xylanders Uebersetzung sagt: hujusmodi conditiones non quosdam numeros habent obnoxios, quosdam secus, sed omnes in universum numeri iis devinciuntur, neque ulli sunt, in quos eae non competant, d. i. was hier zur Möglichkeit der Auflösung erfordert wird, ist nicht etwa eine Beschaffenheit, die nur gewissen Zahlen eigenthümlich wäre, wie in den folgenden Büchern zuweilen eine Bedingung sich auf die eigenthümliche Beschaffenheit gewisser Zahlen gründet, sondern man kann die Zahlen alle Mal so bestimmen oder bilden (πλάσσειν), daß der Bedingung Genüge geschieht. Dies ergiebt sich noch deutlicher, wenn man die Aufgabe allgemein löst, und dann die hier ausgesprochene Bedingung näher betrachtet.

Es sei die Summe der beiden Zahlen $= s$, ihr Produkt p, den Unterschied der beiden Zahlen setze man $= 2x$, so kann man nach einem bekannten Satze (I. 1) die erste Zahl durch $\frac{1}{2}s + x$, die zweite durch $\frac{1}{2}s - x$ ausdrücken. Dann ist aber das Produkt beider Zahlen $= \frac{1}{4}s^2 - x^2$, und man erhält die Gleichung

$$\frac{1}{4}s^2 - x^2 = p, \text{ folglich } x = \sqrt{\left(\frac{1}{4}s^2 - p\right)}.$$

Die Formel zeigt, daß $\frac{1}{4}s^2$ oder das Quadrat der halben Summe **größer** sein muß als p, wenn $\sqrt{\left(\frac{1}{4}s^2 - p\right)}$ nicht eine unmögliche Größe werden soll, und daß $\frac{1}{4}s^2 - p$ ein **Quadrat** sein muß, wenn man für x einen rationalen Werth verlangt. Nun ist es aber ganz leicht, die Zahlen s und p so zu bestimmen, daß $\frac{1}{4}s^2 - p$ ein Quadrat wird; denn man nehme z. B. p ganz willkührlich, so läßt sich nach den im zweiten Buche vorkommenden Regeln immer ein Werth von s angeben, der so beschaffen ist, daß die Formel $\frac{1}{4}s^2 - p$ ein Quadrat wird. Man nehme z. B. $\frac{1}{2}s - a$ als Wurzel dieses Quadrates an, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{4}s^2 - p = \frac{1}{4}s^2 - as + a^2,$$

und daraus findet man $s = \frac{a^2+p}{a}$, wo man a ganz willkührlich nehmen kann. Von dem Verfahren, durch welches wir hier die Formel $\frac{1}{4}s^2 - p$ zu einem Quadrat machen, oder eigentlich von der Entstehung eines Quadrates aus einer nach gewissen Regeln gebildeten Wurzel, gebraucht Diophantus fast immer den Ausdruck πλάσσειν τετράγωνον, und so ist klar, wie er hier sagen konnte, die angegebene Bedingung sei ein πλασματικὸν, oder etwas, das διὰ τοῦ πλάσσειν τετράγωνον erreicht werden könne.

Daß es mit der XXXI und XXXIII Aufgabe, in welchen eben dieser Zusatz vorkommt, sich eben so verhält, geht aus der allgemeinen Auflösung dieser Aufgaben deutlich hervor.

In der XXXI. Aufgabe sei z. B. die Summe der Zahlen $= s$, die Summe ihrer Quadrate $= S$, den Unterschied der Zahlen setze man wie vorher $= 2x$, so ist die größere der beiden Zahlen $= \frac{1}{2}s + x$, die kleinere $= \frac{1}{2}s - x$, das Quadrat der ersten $= \frac{1}{4}s^2 + sx + x^2$, das Quadrat der letzteren $= \frac{1}{4}s^2 - sx + x^2$, also die Summe der Quadrate $= \frac{1}{2}s^2 + 2x^2$. Da nun eben diese Summe auch S sein soll, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{2}s^2 + 2x^2 = S, \text{ folglich } x = \sqrt{\frac{2S - s^2}{4}}.$$

Diese Formel zeigt zuerst, daß $2S$ oder die doppelte Summe der Quadrate größer sein muß als s^2, oder als das Quadrat der Summe, weil sonst x eine unmögliche Größe wird; sie zeigt ferner, daß $\frac{2S-s^2}{4}$ ein Quadrat sein müsse, wenn man für x einen rationalen Werth verlangt und man sieht endlich, daß, um dieser Bedingung zu genügen, man nur den Zähler $2S-s^2$, durch das vorhin angedeutete Verfahren, zu einem Quadrat zu machen hat.

Bei der XVXIII. Aufgabe sei der Unterschied der Zahlen $= d$, ihr Produkt $= p$, die Summe der Zahlen setze man $= 2x$, also die größere Zahl $= x + \frac{1}{2}d$, und die kleinere $= x - \frac{1}{2}d$. Nun ist das Produkt beider $= x^2 - \frac{1}{4}d^2$, und man hat also die Gleichung

$$x^2 - \frac{1}{4}d^2 = p, \text{ folglich } x = \sqrt{\left(p + \frac{1}{4}d^2\right)}$$

Man übersieht sogleich, daß $p + \frac{1}{4}d^2$, folglich auch $4p + d$ ein Quadrat sein muß, wenn man für x einen rationalen Werth sucht; die Formel $p + \frac{1}{4}d^2$ oder auch $4p + d^2$ läßt sich aber immer zu einem Quadrate machen, wenn man p ganz beliebig wählt, und d durch das obige Verfahren bestimmt.

Es scheint, als ob durch diese Formel Bachets Meinung, als solle man aus diesen Aufgaben die so

genannten zusammengesetzten Regeln für die Auflösung vermischter quadratischer Gleichung ableiten, völlig widerlegt, und die Meinung des Uebersetzers hinlänglich gerechtfertigt werde.

Man vergleiche noch, was Kästner im dritten Bande seiner Geschichte der Math. S. 157 ff. über diese Stelle gesagt hat. Daß Bachets Erklärung nicht genüge, und daß das πλασματικόν nicht auf die Aufgabe, sondern auf die ihr beigefügte Bedingung gehe, hat Kästner wohl gefühlt, doch wagt er keine bestimmtere Erklärung, wie er denn überhaupt den Diophantus selbst nicht mit Aufmerksamkeit gelesen zu haben scheint. Zum Beweise kann die von ihm gemachte ganz falsche Bemerkung dienen, Diophantus setze für die unbekannte Größe die Zahl Eins, ein Irrthum der aus einer flüchtigen Ansicht der IX. Aufgabe des ersten Buches entstanden ist, wo es heißt: τετάχθω ὁ ἀφαιρούμενος ἀφ' ἑκατέρου ἀριθμοῦ, ἀριθμὸς εἷς.

XXXII. — XXXXIV.

Die hier folgenden Aufgaben haben überall keine Schwierigkeit, und es wird in jedem Falle sehr leicht sein, die Auflösung, welche Diophantus an einem einzelnen Beispiel ausführt, durch allgemeine Zeichen darzustellen.

XXXXIII.

Man bezeichne die kleinere der gegebenen Zahlen durch a, die größere durch b, die gesuchte Zahl durch x, so sind die drei Produkte aus der Summe je zweier in die dritte folgende:

1. $(a+x)b = ab+bx$
2. $(b+x)a = ab+ax$
3. $(a+b)x = ax+bx$.

Da nun b der Annahme nach größer als a ist, so ist das erste Produkt nothwendig größer als das zweite, und es sind daher in Rücksicht auf die Größe der drei Produkte noch folgende drei Fälle möglich:

1) $(a+x)b$ ist das größeste, $(a+b)x$ das mittelste $(b+x)a$ das kleinste der drei Produkte,
2) $(a+x)b$ ist wiederum das größeste, $(b+x)a$ das mittelste, $(a+b)x$ das kleinste,
3) $(a+b)x$ ist das größeste, $(a+x)b$ das mittelste, $(b+x)a$ das kleinste der drei Produkte.

Für jeden dieser drei Fälle kann man die Auflösung aus dem Satze herleiten, daß, wenn drei Zahlen eine arithmetische Reihe bilden, die Summe der beiden äußersten Glieder so groß ist, als das mittelste doppelt genommen, wiewohl Diophantus im zweiten Falle die Auflösung unmittelbar aus der Gleichheit der Unterschiede ableitet.

In dem ersten Falle ist die Summe der beiden äußersten Glieder $= (a+b)x+2ab$, und das mittelste

Glied doppelt genommen $= 2(a+b)x$. Man hat also die Gleichung

$$(a+b)x+2ab = 2(a+b)x, \text{ und } x = \frac{2ab}{a+b}.$$

In dem zweiten Falle ist die Summe der äußersten Glieder $= 2bx+ax+ab$, und das mittelste Glied doppelt genommen $= 2ax+2ab$. Man hat also die Gleichung

$$2bx+ax+ab = 2ax+2ab, \text{ und } x = \frac{ab}{2b-a}.$$

In dem dritten Falle endlich ist die Summe der äußersten Glieder $= 2ax+bx+ab$, und das mittelste Glied doppelt genommen $= 2bx+2ab$. Man hat also die Gleichung

$$2ax+bx+ab = 2bx+2ab, \text{ und } x = \frac{ab}{2a-b}.$$

Aus den drei Formeln für x übersieht man, daß der erste und dritte Fall Statt finden kann, die gegebenen Zahlen mögen beschaffen sein, wie sie wollen, daß der zweite aber nur dann möglich ist, wenn die größere Zahl kleiner ist, als das Doppelte der kleineren, weil sonst x einen negativen Werth erhält.

Anmerkungen zum zweiten Buche.

I. — V.

Die erste Aufgabe des zweiten Buches unterscheidet sich von der vier und dreißigsten Aufgabe des ersten Buches nur dadurch, daß hier diejenige Bedingung wegfällt, nach welcher die beiden gesuchten Zahlen ein vorgeschriebenes Verhältniß haben sollen. Eben diese Beziehung findet auch zwischen der zweiten Aufgabe des zweiten und der sieben und dreißigsten Aufgabe des ersten Buches, ferner zwischen der vierten und fünften Aufgabe des zweiten und der XXXV. und XXXVI. Aufgabe des ersten Buches Statt. Da Diophantus aber statt des vorgeschriebenen Verhältnisses ein willkührlich gewähltes nehmen muß, um beide Zahlen auszudrücken, und bei der dritten Aufgabe ausdrücklich bemerkt, man könne den beiden gesuchten Zahlen jedes vorgeschriebene Verhältniß geben, so fällt aller wesentliche Unterschied zwischen diesen und den bezeichneten Aufgaben des ersten Buches ganz weg, und man darf

nicht zweifeln, daß diese Aufgaben Ueberarbeitungen von späterer Hand sind, dergleichen sich im Apollonius mehre nachweisen lassen, und daß der Herausgeber der Diophantischen Aufgaben sie mit Unrecht an diesen Platz gestellt hat.

VI.

Die Aufgabe konnte einfacher ausgedrückt werden: Es ist der Unterschied zweier Zahlen, und der Unterschied ihrer Quadrate gegeben, man soll diese Zahlen selber finden. Nennt man den Unterschied der Zahlen d, den Unterschied ihrer Quadrate D, so kann man die kleinere Zahl durch x, die größere durch $x+d$, folglich den Unterschied ihrer Quadrate durch $2dx+d^2$ bezeichnen. Dies giebt die Gleichung

$$2dx + d^2 = D, \text{ und } x = \frac{D-d^2}{2d},$$

woraus sich der Grund der hinzugefügten Einschränkung von selbst ergiebt.

VII.

Ueber den Sinn der Aufgabe, welche im Griechischen leicht falsch verstanden werden kann, beziehe ich mich bloß auf die Bemerkung zu I, 3. Setzt man die gegebene Zahl $10 = a$, den Exponenten $3 = n$, und den Unterschied der Zahlen, der an sich willkührlich ist, $= d$, so verlangt die Aufgabe, daß der Unterschied zwischen

den Quadraten beider Zahlen $= nd + a$ sein solle. Nennt man nun die kleinere Zahl x, die größere $x + d$, folglich den Unterschied ihrer Quadrate $2dx + d^2$, so hat man die Gleichung

$$2dx + d^2 = nd + a, \text{ und } x = \frac{(nd + a) - d^2}{2d}.$$

Da man d beliebig wählen darf, so giebt es unendlich viele Werthe für x; dagegen erhält x nur einen bestimmten Werth, wenn d eine vorgeschriebene Zahl ist. Die Formel zeigt übrigens, daß d^2 kleiner sein muß, als $nd + a$, wenn man für x einen positiven Werth verlangt.

VIII. IX.

Wenn man das gegebene Quadrat durch a^2 bezeichnet, und x^2 als das eine der gesuchten Quadrate annimmt, so kommt es darauf an, für x einen Werth von der Beschaffenheit zu suchen, daß die Formel $a^2 - x^2$ ein Quadrat wird. Dies läßt sich aber in jedem Falle leicht bewirken, denn man nehme $nx - a$ als Wurzel der gegebenen Formel an, so hat man die Gleichung

$$n^2x^2 - 2anx + a^2 = a^2 - x^2, \text{ und } x = \frac{2an}{n^2 + 1}.$$

Da man hier n ganz beliebig wählen darf, so giebt es unzählige Werthe von x, welche der Aufgabe genügen. Es sei z. B. $a^2 = 36$, $n = 4$, so wird $2an = 48$, $n^2 + 1 = 17$, folglich $x = \frac{48}{17}$. Diese Zahl ist also die

Wur-

Wurzel des einen Quadrates, und das Quadrat selbst $\frac{2304}{289}$, das andre Quadrat soll $= a^2 - x^2$ sein, man findet es also, wenn man $\frac{2304}{289}$ von 36 abzieht $= \frac{8100}{289}$.

Hätte man dagegen $n = 2$ gesetzt, so wäre $2an = 24$, $n^2 + 1 = 5$, also $x = \frac{24}{5}$, woraus man das erste Quadrat $= \frac{576}{25}$, das andere $= \frac{900}{25}$ findet.

Die zweite Auflösung in IX. beruht auf denselben Gründen, wie die erste, und führt, wenn man sie allgemein ausdrückt, auf die nämliche Formel. Denn wenn man die Wurzel des einen Quadrats $= x$, die des andern $= nx - a$ setzt, so erhält man die Gleichung

$$x^2 + n^2x^2 - 2anx + a^2 = a^2, \text{ also } x = \frac{2an}{n^2 + 1}.$$

Aus dem Verfahren ergiebt sich aber, daß ein Ausdruck von der Form $n^2x^2 \pm a$ sich in jedem Falle zu einem Quadrat machen lasse.

X.

Wenn eine Zahl A die Summe zweier Quadrate, oder wenn $A = a^2 + b^2$ ist, so kann man diese Zahl auf unendlich viele Arten noch in zwei andere Quadrate theilen, indem man die eine Wurzel $= x \pm a$, die andere $= nx \pm b$ setzt, wobei nur das zu bemerken ist, daß man zwar in beiden Wurzeln das Zeichen —, aber nicht

in beiden Wurzeln das Zeichen + setzen darf. Es sei nämlich die eine der gesuchten Wurzeln $= x + a$, die andere $= nx - b$, so ist die Summe der beiden gesuchten Quadrate $(n^2+1)x^2 + (2a - 2bn)x + a^2 + b^2$, und da eben diese Summe auch $= A$ sein muß, so hat man die Gleichung

$$(n^2+1)x^2 + (2a - 2bn)x + a^2 + b^2 = A.$$

Zieht man nun an der linken Seite $a^2 + b^2$, und an der rechten Seite A, also an beiden Seiten Gleiches ab, so wird

$$(n^2+1)x^2 + (2a - 2bn)x = 0, \text{ folglich } x = \frac{2bn - 2a}{n^2+1},$$

und wenn man diesen für x gefundenen Werth in die Wurzeln $x + a$ und $nx - b$ setzt, so erhält man zwei Zahlen, deren Quadrate der gegebenen Zahl A gleich sind. Nimmt man dagegen $x - a$ als die erste, und $nx + b$ als die zweite gesuchte Wurzel an, so erhält man die Gleichung

$$(n^2+1)x^2 + (2bn - 2a)x + a^2 + b^2 = A$$

und daraus findet man $x = \frac{2a - 2bn}{n^2+1}$.

In beiden Fällen darf man n zwar willkührlich wählen, nur muß bn in dem ersteren Falle größer, und im letzteren Falle kleiner als a sein, wenn man für x einen positiven Werth verlangt. Dieser Unbequemlichkeit geht man ganz aus dem Wege, wenn man die erste Wurzel $= x - a$, die zweite $= nx - b$ setzt, denn dadurch

erhält man $x = \frac{2a+2bn}{n^2+1}$, und man kann in diesem Falle die Zahl n vollkommen willkührlich wählen, und A so oft als es verlangt wird in zwei andere Quadrate theilen. Wollte man aber die eine Wurzel $= x+a$, die andere $= nx+b$ setzen, so würde $x = -\frac{2a+2bn}{n^2+1}$, also in jedem Falle negativ werden.

Da man nach II. 9. jedes der gefundenen Quadrate immer von Neuem in zwei Quadrate theilen kann, so läßt sich jede Zahl von der Form a^2+b^2 in so viel Quadrate theilen, als es verlangt wird. Ist aber A die Summe dreier Quadrate, oder ist $A = a^2+b^2+c^2$, so kann man sogleich drei Wurzeln von der Form $x \pm a$, $nx \pm b$, $mx \pm c$ annehmen, wobei in Rücksicht der Vorzeichen, und in Rücksicht der Zahl n ganz ähnliche Einschränkungen zu beobachten sind. Setzt man die erste Wurzel $= x-a$, die zweite $nx-b$, die dritte $mx-c$, so ist die Summe der gesuchten Quadrate

$$(m^2+n^2+1)x^2-(2cm+2bn+2a)x+a^2+b^2+c^2,$$

und da eben diese Summe auch $= A$ sein soll, so hat man die Gleichung

$$(m^2+n^2+1)x^2-(2cm+2bn+2a)x+a^2+b^2+c^2 = A,$$

und hieraus findet man

$$x = \frac{2(cm+bn+a)}{m^2+n^2+1}.$$

Man nehme z. B. die Zahl 14, welche die Summe der drei Quadrate 1, 4 und 9 ist, und setze $m=2$, und $n=3$, so ist

$$2(cm+bn+a) = 2(6+6+1) = 26,$$
$$m^2+n^2+1 = 4+9+1 = 14,$$

folglich wird $x=\frac{13}{7}$; die erste Wurzel $x-a$ ist also $\frac{6}{7}$, die zweite $nx-b=\frac{25}{7}$, die dritte $mx-c=\frac{5}{7}$, die Summe der drei Quadrate aber ist $\frac{686}{49}=14$.

XI.

Wenn der vorgeschriebene Unterschied der beiden gesuchten Quadrate allgemein durch d bezeichnet, und die eine der gesuchten Wurzeln $=x$, die andere $=x+a$ gesetzt wird, so ist der Unterschied der beiden Quadrate $=2ax+a^2$, da sich x^2 gegen x^2 aufhebt. Das Letztere will Diophantus durch die Worte anzeigen ἑνὸς εἴδους ἐνὶ εἴδει ἴσου καταλειπομένου u. s. w. was nichts anderes sagen will, als bei dem angegebenen Verfahren erhalte man eine Gleichung zwischen zwei einfachen Ausdrücken. Man hat nämlich die Gleichung

$$2ax+a^2 = d, \text{ folglich } x=\frac{d-a^2}{2a}.$$

Diese Formel zeigt, daß man a zwar willkührlich wählen, also für x unzählige Werthe angeben kann, daß aber a^2 alle Mal kleiner als d sein müsse, wonach der

etwas unbestimmte Ausdruck im Diophantus, a^2 dürfe nicht größer als d sein, zu berichtigen ist, denn man sieht leicht, daß $x=0$ wird, so bald $a^2=d$ ist. Diesen Fall berücksichtigt Diophantus aber nicht, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat $=60$ ist, und der Verf. würde diese Bemerkung sogar für überflüssig gehalten haben, wenn nicht Bachet den von Diophantus gebrauchten Ausdruck als ungenau getadelt hätte.

Eine beinahe noch einfachere Auflösung dieser Aufgabe findet man vermittelst des Verfahrens, von welchem in der folgenden Anmerkung näher die Rede sein wird. Man zerfälle nämlich die gegebene Differenz in zwei Factoren z. B. 30×2. Die halbe Summe dieser Factoren, d. i. 16 sehe man als die Wurzel des größeren, die halbe Differenz der Factoren oder 14 als die Wurzel des kleineren Quadrats an, so erhält man die Quadrate 256 und 196, deren Differenz die gegebene Zahl 60 ist.

Den Beweis dieser Regel kann man auf mancherlei Art, unter anderen auch aus dem Satz Euklid. II, 5 ableiten, welcher im Grunde einerlei ist mit dem arithmetischen Satze, daß die Differenz zweier Quadrate sich alle Mal in zwei Factoren zerfällen lasse, von welchen der eine die Summe, der andere aber die Differenz der beiden Wurzeln ist. Man bezeichne also die gegebene Differenz allgemein durch d, das größere der beiden Quadrate durch x^2, das kleinere durch z^2, so hat man

$$d=x^2-z^2=(x+z)\times(x-z).$$

Es kommt also darauf an, daß man d in zwei Factoren zerfälle, und den größeren $= x + z$, den kleineren $= x - z$ setze. Ist nun $d = ab$, so setze man

$$a = x + z, \text{ und } b = x - z.$$

Nun wird nach einem bekannten Satze

$$\frac{a+b}{2} = x \text{ und } \frac{a-b}{2} = z,$$

folglich

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = x^2, \text{ und } \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = z^2.$$

Noch anschaulicher wird die Richtigkeit der gegebenen Regel durch folgende Betrachtung. Wenn $d = a.b$, so ist die halbe Summe der Factoren $\frac{a+b}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$, die halbe Differenz der Factoren $\frac{a-b}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$; zieht man das letztere Quadrat von dem ersteren ab, so erhält man $\frac{4ab}{4} = ab = d$, d. h. man findet durch das angegebene Verfahren zwei Quadrate, welche die vorgeschriebene Differenz d haben.

Bei der Anwendung dieser Regel auf die vorliegende Aufgabe ist es an sich ganz willkührlich, auf welche Art man die gegebenen Factoren zerfällt, wenn indeß die gesuchten Quadrate ganze Zahlen sein sollen, so ist erforderlich, daß a und b ganze Zahlen, und beide

entweder zugleich gerade, oder beide zugleich ungerade Zahlen sind, denn nur in diesem Falle wird $\frac{a+b}{2}$ eine ganze Zahl sein.

XII.

Wir wollen hier zuerst die zweite Auflösung allgemein vorstellen. Es sind die Zahlen a und b gegeben, man soll für x einen Werth von der Beschaffenheit suchen, daß sowohl $x+a$ als $x+b$ ein Quadrat wird.

Die Zahl z^2-a hat gewiß die Eigenschaft, daß, wenn man a dazu addirt, die Summe ein Quadrat wird, und z^2-a läßt sich ohne alle Schwierigkeit finden, indem man a von einem beliebigen Quadrate abzieht. Nun soll aber auch z^2-a+b ein Quadrat werden, und dies läßt sich durch das Verfahren II. 8. alle Mal bewirken. Man sehe nämlich $z-c$ als die Wurzel der obigen Formel an, so hat man die Gleichung

$$z^2-a+b=z^2-2cz+c^2,$$

und hieraus findet sich

$$z=\frac{c^2+a-b}{2c}=\frac{c^2-(b-a)}{2c}.$$

In unserem Falle ist $a=2$, $b=3$, $c=4$, also $z=\frac{16+2-3}{8}=\frac{15}{8}$. Nimmt man nun $x=z^2-a$, so wird $x=\frac{225}{64}-2=\frac{97}{64}$, und nun ist $x+a=\frac{225}{64}$, $x+b=\frac{289}{64}$, also beide Ausdrücke sind jetzt Quadrate.

Bei diesem Verfahren darf zwar die Zahl c beliebig gewählt werden, aber in jedem Falle so, daß c^2 größer als b—a, und z^2 größer als a wird, weil man sonst für die Zahl z^2—a einen negativen Werth erhält. Dies Letztere ist ganz offenbar der Sinn der Worte ὥστε τὴν τῆς δυνάμεως ὑπόστασιν ὑπερβάλλειν αὐτὰς τὰς προεκτεθειμένας τῆς λείψεως μονάδας, denn Diophantus selbst bemerkt, daß αἱ τῆς λείψεως μονάδες eben die Zahl —2 in der durch z^2—2 bezeichneten Zahl sind, und daß ὑπόστασις der in allgemeinen Zeichen ausgedrückte Werth einer Größe, also hier $\left(\frac{c^2+a-b}{2c}\right)^2$ sei, ist schon früher bemerkt worden.

Wie man c so bestimmen könne, daß z^2 größer als 2 wird, übergeht Diophantus hier ganz, weil dazu die Auflösung einer vermischten quadratischen Gleichung erforderlich ist, welche vermuthlich erst in einem der späteren Bücher vorgetragen wurde. In der Folge, besonders im fünften Buche, wird dies Verfahren mehrmals angewendet werden, und wir verschieben bis dahin die umständliche Erläuterung desselben. Hier mag es hinreichen ein Verfahren anzugeben, vermittelst dessen man der hier berührten Schwierigkeit ganz aus dem Wege geht.

Man mache das Quadrat von x+2, wobei die Zahl 2 so gewählt werden muß, daß ihr Quadrat größer ist, als die größere der beiden gegebenen Zahlen, also hier größer als 3. Von dem dadurch erhaltenen Quadrat x^2+4x+4 ziehe man die größere der gegebenen Zahlen

also 3 ab, und sehe den Rest x^2+4x+1 als die gesuchte Zahl an. Dieser Rest hat nun gewiß die Eigenschaft, daß er zu der Zahl 3 addirt, ein Quadrat giebt; es soll aber auch die Summe dieser und der kleineren gegebenen Zahl 2, also x^2+4x+3 ein Quadrat sein. Als Wurzel dieser Formel sehe man $x-3$ an, wobei die Zahl 3 so zu wählen ist, daß ihr Quadrat größer, als das dritte Glied der obigen Formel, also größer als 3 wird. Dies giebt die Gleichung

$$x^2+4x+3 = x^2-6x+9, \text{ und } x = \frac{3}{5}.$$

Die Zahl, die man zu beiden gegebenen Zahlen addiren muß, war allgemein ausgedrückt $= x^2+4x+1$, also in wirklichen Zahlen $= \frac{9}{25}+\frac{60}{25}+\frac{25}{25} = \frac{94}{25}$. Addirt man dazu $2 = \frac{50}{25}$, so erhält man $\frac{144}{25}$, und addirt man dazu $3 = \frac{75}{25}$, so erhält man $\frac{169}{25}$, also wird die Summe in beiden Formeln ein Quadrat, und die gefundene Zahl leistet was die Aufgabe vorschreibt.

Bei dem bisher beschriebenen Verfahren kommt es nur darauf an die Formel z^2-a+b zu einem Quadrat zu machen; bei dem Verfahren aber, welches Diophantus zuerst entwickelt, soll man unmittelbar einen Werth für x bestimmen, der so beschaffen ist, daß sowohl $x+a$ als $x+b$ ein Quadrat wird. Wenn man aber den Werth einer veränderlichen Größe so bestimmen soll, daß dadurch zwei Formeln zugleich Quadrate werden, so

nennt Diophantus so wohl die Aufgabe selbst als das Verfahren der Auflösung διπλοϊσότης oder doppelte Gleichung.

Man setze nämlich

1. $x + a = y^2$.

2. $x + b = z^2$.

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$a - b = y^2 - z^2,$$

und es kommt also bei der Auflösung zunächst darauf an, zwei Quadrate zu finden, deren Differenz $= a - b$ ist. Wie dies geschehen könne, ist in der Anmerkung zu der vorigen Aufgabe gezeigt, und es ergiebt sich hieraus für die Auflösung der doppelten Gleichung im Allgemeinen folgende Regel. Man suche den Unterschied der beiden gegebenen Formeln, welche man zu Quadraten machen soll, zerfälle diesen Unterschied in zwei Factoren, und erhebe darauf die halbe Summe oder die halbe Differenz dieser beiden Factoren ins Quadrat; endlich setze man entweder das Quadrat der halben Summe der größeren, oder das Quadrat der halben Differenz der kleineren Formel gleich, so erhält man in beiden Fällen denselben Werth für x. Ist nämlich y^2 das Quadrat der halben Summe, und z^2 das Quadrat der halben Differenz, so folgt aus der obigen Gleichung

1. $x = y^2 - a$ und 2. $x = z^2 - b$.

Daß man auf diesem Wege zwei Quadrate erhalte, welche um die Größe $a - b$ verschieden sind, ist in der

Anmerkung zur vorigen Aufgabe bereits gezeigt, daß man aber aus beiden Gleichungen denselben Werth für x erhält, läßt sich leicht übersehen. Denn da nach dem Ansatz

$$a - b = y^2 - z^2,$$

so ist auch

$$y^2 - a = z^2 - b,$$

also sind beide für x berechnete Werthe einander gleich.

Bei der Anwendung dieser Regel auf die vorliegende Aufgabe ist aber die Zerfällung des Unterschiedes beider Formeln nicht willkührlich, wie in der vorhergehenden, sondern es kommt dabei sehr auf die Beschaffenheit der gegebenen Formel an, und wir wollen daher die wichtigsten Fälle, in welchen sich die doppelte Gleichung anwenden läßt, hier näher entwickeln.

1) Der einfachste Fall ist unstreitig der vorliegende, wo die eine Formel die Form $nx+a$, die andere die ähnliche Form $mx+b$ hat, und hier ist bei der Zerfällung der Factoren nur das Eine zu beobachten, daß das Quadrat der halben Summe größer als a, das Quadrat der halben Differenz größer als b sein muß. In dem gegenwärtigen Falle konnte die Differenz $a-b=1$ zwar auf unendlich viele Arten zerfällt werden, und man würde alle Mal zwei um $a-b$ oder um 1 verschiedene Quadrate erhalten haben, aber zur Auflösung dieser doppelten Gleichung sind nur diejenigen Factoren brauchbar, welche die oben angegebene Eigenschaft haben. Daher kann

ten z. B. die Factoren 2 und $\frac{1}{2}$, oder 3 und $\frac{1}{3}$ hier nicht gebraucht werden, weil die Summe jener nur $\frac{25}{4}$, die Summe dieser aber nur $\frac{100}{4}$ zum Quadrat giebt.

2) Der zweite Fall ist, wenn die beiden Formeln die Form n^2x^2+mx+a haben, z. B. wenn die eine Formel $4x^2+20x+8$, die andere $4x^2+4x+8$ ist. In diesem Falle muß man den Unterschied der beiden Formeln $16x+16$ so zerfällen, daß in der halben Summe ein Glied nx, also in der ganzen Summe ein Glied $2nx$ vorkomme. Zerfällt man also $16x+16$ in die Factoren 4 und $4x+3$, so wird diese Bedingung erfüllt. Die halbe Summe der Factoren wird nunmehr $2x+4$, und das Quadrat davon $4x^2+16x+16$. Man erhält also die Gleichung

$$4x^2+20x+8 = 4x^2+16x+16, \text{ und } x = 2.$$

Aus der bloßen Betrachtung der Rechnung ergiebt sich, daß die Auflösung nur dadurch möglich wird, daß an beiden Seiten der Gleichung die Glieder $4x^2$ sich gegen einander haben, woraus sich die Nothwendigkeit der für die Zerfällung aufgestellten Regel ergiebt.

3) Der dritte Fall ist, wenn beide Formeln die Form nx^2+mx+a^2 haben, z. B. wenn die eine $x^2-8x+16$ die andere $3x^2+48x+64$ wäre. In diesem Falle muß man zuerst die beiden Formeln so verwandeln, daß die Quadrate 16 und 64 einander gleich werden, welches

man erreicht, wenn man diejenige Formel in welchen das kleinere Quadrat vorkommt, durch den Quotienten $\frac{64}{16}=4$ multiplicirt; denn da dieser Quotient nothwendig ein Quadrat ist, so ist es einerlei ob man die gegebene, oder die durch Multiplication entstandene Formel zu einem Quadrate macht. Durch die Multiplication mit 4 verwandelt sich aber die erste Formel in diese $=4x^2-32x+64$. Zieht man also die zweite Formel davon ab, so erhält man die Differenz x^2+16x, und diese muß so zerfällt werden, daß in der halben Summe der Factoren $\sqrt{64}$ also in der ganzen Summe $2\sqrt{64}$ vorkommt. Man setze also $x^2+16x=x\times(x+16)$ so wird diese Bedingung erfüllt, die halbe Summe der Factoren wird $=x+8$, und man hat die Gleichung

$$4x^2-32x+64=x^2+16x+64.$$

Man findet hier also $x=16$ und übersieht leicht, daß die Auflösung nur dadurch möglich wird, daß an beiden Seiten der Gleichung die Quadrate 64 sich gegen einander heben, daher sowohl die Vorbereitung der Formel als die vorgeschriebene Zerfällung zur Auflösung wesentlich nothwendig waren. Da die Auflösung der doppelten Gleichung ein so wesentlicher Theil der Diophantischen Analysis ist, so wird es sehr zweckmäßig sein, sich in der Auflösung ähnlicher Beispiele zu üben, dergleichen man nach den obigen Mustern leicht bilden kann. Man habe z. B. die beiden Formeln $8x+4$ und $6x+4$, so ist die Diffe-

renz 2x, diese zerfälle man aus dem bei 3. angegebenen Grunde in die Factoren $\frac{1}{2}x$ und 4, so ist die halbe Summe der Factoren $\frac{1}{4}x+2$, und die halbe Differenz $\frac{1}{4}x-2$, und dies giebt die beiden Gleichungen

1. $8x+4=\frac{1}{16}x^2+x+4.$

2. $6x+4=\frac{1}{16}x^2-x+4.$

Aus beiden findet man $x=112$, und die erste Formel $8x+4$ wird $=900$, die zweite $6x+4=676$.

XIII.

Diese Auflösung ist der zweiten in der vorigen Aufgabe nachgebildet. Wenn man nämlich $a-x$ und $b-x$ zu einem Quadrat machen soll, so nehme man $x=a-z^2$, so ist durch den Ansatz bereits eine von den Bedingungen der Aufgabe erreicht; es kommt also nur noch darauf an, daß auch $b-(a-z^2)=z^2+b-a$ ein Quadrat sei. Man sehe $z-c$ als Wurzel dieser Formel an, so erhält man

$$z^2+b-a=z^2-2cz+c^2$$

und $x=\frac{c^2+a-b}{2c}=\frac{c^2-(b-a)}{2c}$.

Die hier gefundene Formel unterscheidet sich von der in XII. gefundenen nur durch das Vorzeichen, und zeigt, daß c ganz willkührlich gewählt werden kann, wenn nur c^2 größer als $b-a$ ist. Eine zweite Bedin-

gung, welche man der Aufgabe beifügen muß, ist diese, daß z^2 kleiner sein muß als a, weil sonst x einen negativen Werth erhält.

Uebrigens fällt es in die Augen, daß diese Aufgabe auch vermittelst der doppelten Gleichung aufgelöst werden kann.

Denn man setze

$$b - x = y^2; \quad a - x = z^2,$$

so erhält man durch Subtraction

$$b - a = y^2 - z^2,$$

und es kommt nur darauf an, b—a so zu zerfällen, daß das Quadrat von der halben Summe der Factoren kleiner als b, und das Quadrat von der halben Differenz der Factoren kleiner als a wird. In unserem Falle ist $b = 21$, $a = 9$, folglich $b - a = 12 = 2 \times 6$; also die halbe Summe der Factoren 4, und die halbe Differenz derselben 2. Setzt man nun $4^2 = y^2$, und $2^2 = z^2$, so verwandeln sich die obigen Gleichungen in folgende

1. $21 - x = 16$ folglich $x = 5$.

2. $9 - x = 4$ folglich $x = 5$.

XIV.

Auch diese Aufgabe unterscheidet sich von den beiden vorigen nur durch die Vorzeichen. Behalten die Buchstaben a, b, c und z ihre vorige Bedeutung, so findet man

$$z = \frac{c^2 + (b - a)}{2c}.$$

Die Auflösung vermittelst der doppelten Gleichung ist nur angedeutet, da für Fälle dieser Art das Verfahren hinreichend erläutert ist. Der Unterschied der beiden Formeln $x-6$ und $x-7$ ist 1, und diesen zerfällt Diophantus in die Factoren 2 und $\frac{1}{2}$, so daß die halbe Summe der Factoren $\frac{5}{4}$, die halbe Differenz $\frac{3}{4}$ wird. Dies giebt die beiden Gleichungen

$$x-6=\frac{25}{16}, \text{ und } x-7=\frac{9}{16}.$$

Hieraus ergiebt sich $x=\frac{121}{16}$, also $x-6=\frac{25}{16}$, und $x-7=\frac{9}{16}$.

XV.

Wenn die gegebene Zahl a heißt, so nehme man zwei beliebige Zahlen b und c, von der Beschaffenheit daß b^2+c^2 kleiner als a sei. Man mache hierauf

$$(x+b)^2=x^2+2bx+b^2,$$
$$(x+c)^2=x^2+2cx+c^2,$$

und nehme an, x^2 sei dasjenige Quadrat, welches man zu den beiden gesuchten Stücken addiren muß, $(x+b)^2$ und $(x+c)^2$ aber die beiden Quadrate, welche entstehen, wenn man x^2 zu den Stücken der gegebenen Zahl addirt hat. Daher sind die gesuchten Stücke selbst

$2bx+b^2$

$2bx+b^2$ und $2cx+c^2$, und da beide zusammen $=a$ sein sollen, so hat man die Gleichung

$$2bx+2cx+b^2+c^2=a,$$

und daraus $x=\frac{a-(b^2+c^2)}{2(b+c)}$.

Aus der Formel sieht man, daß b und c ganz beliebig gewählt werden können, wenn nur b^2+c^2 kleiner als die gegebene Zahl a bleibt.

XVI.

Die zu theilende Zahl heiße a, die Wurzel des gesuchten Quadrates sei $x+b$, das Quadrat selbst also $x^2+2bx+b^2$, wobei man b zwar willkührlich, jedoch so wählen muß, daß b^2 kleiner als a wird. Zieht man von diesem Quadrate $2bx+b^2$ ab, so ist der Rest x^2, zieht man aber $(2b-2)x+(b^2-1)$ ab, so bleibt x^2+2x+1, und beide Reste sind also Quadrate. Wenn man also das eine Stück $=2bx+b^2$, das andere $=(2b-2)x+(b^2-1)$ setzt, so werden durch diesen Ansatz beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und es kommt nur darauf an, x so zu bestimmen, daß beide Stücke der gegebenen Zahl gleich werden.

Man setze also die Summe der Stücke $=a$, so hat man die Gleichung

$$(4b-2)x+2b^2-1=a,$$

folglich $x=\frac{a+1-2b^2}{4b-2}$.

Die Einschränkung, welche Diophantus für die Wahl der Wurzel b vorschreibt, wird durch die Formel nicht gerechtfertigt, und müßte vielmehr so ausgedrückt werden: die Zahl b muß so gewählt werden, daß ihr doppeltes Quadrat kleiner ist, als die um 1 vergrößerte Zahl, welche man theilen soll. Indeß ist die gegebene Formel nicht ganz allgemein, da sie zwischen den beiden gesuchten Stücken ein bestimmtes Verhältniß voraussetzt, und die Bedingung kann nur dann als nothwendig angesehen werden, wenn man annimmt, daß das eine durch Subtraction entstandene Quadrat $= x^2 + 2x + 1$ werden solle. Man könnte indeß das zweite Stück der Zahl a dadurch bestimmen, daß man irgend ein Quadrat von der Form $x \pm c$ bildet, welches kleiner als $(x+b)^2$ ist, dieses von $x^2 + 2bx + b^2$ abzieht, und den Rest für das zweite Stück annimmt.

Daß die Bedingung, wie sie Diophantus ausdrückt, nicht hinreiche, um negative Werthe von x zu vermeiden, läßt sich leicht durch ein Beispiel darthun. Man setze z. B. $x+4$ für die Wurzel des gesuchten Quadrats, das Quadrat also $= x^2 + 8x + 16$, so ist die von Diophantus vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Nun setze man das eine der gesuchten Stücke $= 8x + 16$, das andere $= 6x + 15$, so wird der Rest $= x^2 + 2x + 1$, also ebenfalls ein Quadrat. Da die beiden Stücke $= 20$ sein müssen, so hat man die Gleichung

$$14x + 31 = 20, \text{ also } x = -\frac{11}{14}.$$

XVII.

Die gegebene Quadratzahl sei $= a^2$, der Exponent des vorgeschriebenen Verhältnisses $= n$. Nun setze man die kleinere Zahl $= (x+a)^2 - a^2 = x^2 + 2ax$, so wird die eine Bedingung der Aufgabe schon durch den bloßen Ansatz erreicht, und es ist nur noch erforderlich, daß auch das Produkt der kleineren Zahl und des Exponenten n, d. i. $nx^2 + 2anx$ ein Quadrat werde, wenn man a^2 dazu addirt. Man nehme also $mx - a$ als die Wurzel dieser Summe an, so hat man

$$m^2x^2 - 2amx + a^2 = nx^2 + 2anx + a^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber nach einigen leichten Veränderungen

$$x = \frac{2a(n+m)}{m^2 - n}.$$

Aus der Formel sieht man, daß die an sich beliebige Zahl m doch so gewählt werden muß, daß ihr Quadrat größer als der Exponent des vorgeschriebenen Verhältnisses wird.

XVIII.

Diese Aufgabe unterscheidet sich von der XXIII. Aufgabe des ersten Buches nur dadurch, daß jede der gesuchten Zahlen außer einem aliquoten Theile ihres Werthes noch eine bestimmte Zahl an die nächstfolgende abgeben solle, es scheint daher, als ob sie durch ein Versehen des Sammlers an einen unrechten Ort gestellt worden ist.

Die allgemeinen Bemerkungen zu I. 25. wird man sehr leicht auf diese Aufgabe anwenden können.

XIX.

Man wird leicht bemerken, daß wir in diesem Satze bloß eine etwas veränderte Auflösung der vorigen Aufgabe haben, dergleichen Diophantus öfters zu geben pflegt. Unstreitig liegt hierbei ein Versehen des Anordners oder vielleicht bloß des Abschreibers der Diophantischen Schrift zum Grunde, der zu der XIX. Aufgabe eine Auflösung abschrieb, welche bloß die Ueberschrift ἀλλῶς haben sollte, und dagegen die zu der Aufgabe gehörige Auflösung ganz wegließ. Um hierauf aufmerksam zu machen, habe ich sowohl den Satz als die ἔνδεσις desselben mit einem Stern bezeichnet.

Die Auflösung der Aufgabe selbst hat nicht die mindeste Schwierigkeit, wenn man den Gang der vorigen Auflösung beibehält. Die dritte Zahl sei $= 7x$, damit sie sich ohne Rest durch 7 theilen lasse. Wenn diese Zahl nun $\frac{1}{7}$ ihres Werthes $+8$ an die erste abgiebt, so wird sie $= 6x - 8$, sie soll aber nach der Aufgabe $= \frac{80}{3}$ werden, und muß daher von der zweiten Zahl $\frac{80}{3} - (6x - 8)$ d. i. $\frac{104}{3} - 6x$ erhalten. Was die zweite Zahl abgiebt, ist 7 mehr als ein Sechstel ihres Wer-

thes, zieht man also 7 von $\frac{104}{3} - 6x$ ab, so ist der Rest $\frac{83}{3} - 6x$ der sechste Theil der zweiten Zahl, und die zweite Zahl selbst ist $166 - 36x$. Wenn die zweite Zahl aber $\frac{104}{3} - 6x$ abgiebt, so wird sie $\frac{394}{3} - 30x$, und da sie zuletzt $= \frac{80}{3}$ werden soll, so muß sie von der ersten Zahl $\frac{80}{3} - \left(\frac{394}{3} - 30x\right)$ d. i. $30x - \frac{314}{3}$ erhalten. Was die erste Zahl abgiebt, soll aber 6 mehr als ein Fünftel ihres Werthes sein, also ist $30x - \frac{332}{3}$ der fünfte Theil der ersten Zahl, und die erste Zahl selbst $150x - \frac{1660}{3}$. Die Summe aller drei Zahlen ist also $= 121x - \frac{1162}{3}$, und da eben diese Summe auch 80 sein soll, so hat man

$$121x - \frac{1162}{3} = 80,$$

woraus sich zuerst x, und dann die Zahlen selber leicht berechnen lassen.

XXI.

Den allgemeinen Ausdruck für das größte Quadrat findet Diophantus durch folgende Betrachtung. Der Unterschied des kleinsten und mittelsten Quadrats ist $2x + 1$, der Unterschied des mittelsten und größten soll

aber 3 Mal so groß, also $= 6x + 6$ sein; addirt man dies zu dem mittelsten Quadrat, so erhält man $x^2 + 8x + 4$.

Um über die Bedingung, welche bei der Wahl der Wurzel beobachtet werden soll, sicherer zu urtheilen, sei das größte Quadrat $= x^2 + ax + b$, die Wurzel desselben $= x + c$, so hat man die Gleichung

$$x^2 + ax + b = x^2 + 2cx + c^2, \text{ also } x = \frac{c^2 - b}{a - 2c}.$$

Die Formel zeigt, daß c^2 größer sein muß als b, dagegen a größer als 2c, wenn x nicht einen negativen Werth erhalten soll. Diese Bedingung drückt Diophantus mit Worten aus, wobei das Wort Einheiten immer die bestimmten Zahlen c^2 und b bezeichnet, welche den einen Theil von dem Quadrate beider zweitheiligen Größen ausmachen.

In dem vorliegenden Falle mußte also c^2 größer als 4, aber 2c kleiner als 8 sein, und daher war 2 zu klein und 4 zu groß, als daß man es für c hätte setzen können. In ganzen Zahlen konnte daher c nur den Werth 3 erhalten.

Die Wurzel mußte nothwendig ein Glied x enthalten, damit sich in der Gleichung x^2 gegen x^2 aufhebe, sie konnte aber $= x - c$ gesetzt werden, in welchem Falle man

$$x = \frac{c^2 - b}{a + 2c}.$$

erhält. Dadurch wird die Bedingung für c einfacher, denn man kann für c jede Zahl setzen, deren Quadrat größer als b ist.

Die gefundenen Zahlen haben sämmtlich den Nenner 4, welchen man aber wegwerfen kann, da es in jedem Falle erlaubt ist, die gefundenen Zahlen mit einer beliebigen Quadratzahl zu multipliciren. Sind nämlich die Zahlen a^2, b^2, c^2 so beschaffen, wie es die Bedingung verlangt, so ist

$$a^2 - b^2 = b^2 - c^2,$$

daher aber ist auch, wenn n eine beliebige Zahl bedeutet,

$$a^2n - b^2n = b^2n - c^2n,$$

sollen aber die auf diese Weise entstandenen Zahlen wieder Quadrate sein, so muß n nothwendig eine Quadratzahl sein.

XXI. — XXII.

In diesen Aufgaben zeigt Diophantus zuerst einen sehr vortheilhaften Kunstgriff zur zweckmäßigen Einrichtung des Ansatzes; wenn nämlich die gesuchten Zahlen zwei oder mehre Bedingungen zugleich erfüllen sollen, so wählt er den allgemeinen Ausdruck für diese Zahlen so, daß sie durch ihre bloße Form alle Bedingungen bis auf eine erfüllen, wo denn die letzte durch den für x gesetzten Zahlenwerth erfüllt werden muß.

Was bei der Wahl der Wurzeln zu beobachten ist, damit x nicht unmögliche oder negative Werthe erhalte, ist im Vorigen schon gezeigt, und wird sich ohne Schwierigkeit angeben lassen, wenn man die Diophantische Auflösung durch allgemeine Zeichen vorstellt.

XXIII. — XXIV.

Das Verfahren, durch welches Diophantus diese beiden Aufgaben löst, kann dadurch leicht zu einer falschen Anwendung verleiten, daß er zwei nur um 1 verschiedene Zahlen gewählt hat. Wir wollen daher die Art, wie der Ansatz in der ersten Aufgabe gefunden wird, allgemein vorstellen, woraus sich das Verfahren selbst ohne Zweideutigkeit beurtheilen läßt.

Man setze die erste Zahl $=x$, und mache das Quadrat von $x+a = x^2+2ax+a^2$, wo a eine ganz beliebige Zahl ist. Nun nehme man an, $2ax+a^2$ sei die Summe der Zahlen, folglich $(2a-1)x+a^2$ die zweite Zahl, so ist die erste Bedingung durch den bloßen Ansatz erfüllt. Nun soll auch das Quadrat der zweiten Zahl mit der Summe der Zahlen zusammen genommen ein Quadrat geben. Diese Summe wird aber

$$(2a-1)^2x^2+2a^2(2a-1)x+2ax+a^4+a^2.$$

Setzt man die Wurzel $=(2a-1)x-b$, so erhält man

$$x = \frac{b^2-(a^2+1)a^2}{2(a^2+b)(2a-1)+2a}.$$

Setzt man, wie Diophantus gethan hat, $a=1$, so wird

$$x = \frac{b^2-2}{2b+2}.$$

Bei der letzten Auflösung muß b^2 größer als 2, bei der allgemeinen Auflösung aber größer als $(a^2+1)a^2$ sein.

XXV.

Setzt man die erste Zahl $=(a^2-1)x^2$, die zweite $=(b^2-1)x^2$, und das Quadrat der Summe beider Zahlen $=x^2$, so werden durch den bloßen Ansatz beide Bedingungen erfüllt, und es kommt bloß darauf an, den Werth von x zu bestimmen.

Nun ist aber die Summe beider Zahlen ein Mal $=x$, weil x^2 das Quadrat dieser Summe sein soll, und dann auch $=(a^2+b^2-2)x^2$. Man hat also

$$(a^2+b^2-2)x^2 = x, \text{ und } x = \frac{1}{a^2+b^2-2}.$$

Durch dies Verfahren erhält man für x alle Mal einen Bruch mit dem Zähler 1, man kann aber die Aufgabe noch allgemeiner so auflösen. Die erste Zahl sei $(a^2-c^2)x^2$, die zweite $(b^2-c^2)x^2$, die Summe der Zahlen $=cx$, so werden ebenfalls beide Bedingungen durch den Ansatz erreicht, und man findet

$$x = \frac{c}{a^2+b^2-2c^2}.$$

XXVI.

Man nehme ein beliebiges Quadrat z. B. $a^2+2ab+b^2$, und ziehe davon das eine Mal $2ab+b^2$, das andere Mal a^2+2ab ab, so sind die Reste a^2 und b^2 gewiß Quadrate. Die hier abgezogenen Zahlen mache man zu Coefficienten von x^2, denn das ist beim Diophantus *τάσσειν τοὺς ἀρίθμους ἐν δυνάμει*, so ist die eine

Zahl $(2ab+b^2)x^2$, die andere $(a^2+2ab)x^2$. Setzt man nun das Quadrat ihrer Summe $=(a^2+2ab+b^2)x^2$, also die Summe $=(a+b)x$, so sind alle Bedingungen erfüllt. Den Werth von x findet man aber sehr leicht, da man für die Summe einen doppelten Ausdruck hat; es ist nämlich

$(a^2+b^2+4ab)x^2=(a+b)x$, also $x=\frac{a+b}{a^2+b^2+4ab}$,

und man darf a und b ganz beliebig wählen.

XXVII.

Der Satz, von welchem Diophantus ausgeht, gilt nicht bloß für die Zahl 4, sondern für jede Quadratzahl. Man setze die kleinere Zahl $=x$, die größere $=a^2x-1$, so ist das Produkt beider a^2x-x, und wenn man die kleinere Zahl dazu addirt, so erhält man a^2x^2 oder das Quadrat von ax.

Hiernach läßt sich die Auflösung allgemeiner vorstellen. Die kleinere Zahl sei $=x$, die größere $=a^2x-1$, so ist die erste Bedingung durch den bloßen Ansatz erreicht. Nun soll aber das Produkt beider Zahlen auch dann noch ein Quadrat werden, wenn man die größere Zahl dazu addirt, d. h. $a^2x^2+(a^2-1)x-1$ soll ein Quadrat sein.

Nach dem Vorigen findet man sehr leicht einen Werth für x, durch welchen die obige Formel ein Quadrat wird. Die Summe beider Wurzeln soll aber eine bestimmte Zahl sein, die wir durch b bezeichnen wollen.

Da nun das erste Quadrat ax zur Wurzel hat, so muß das zweite $b-ax$ zur Wurzel haben, es ist also

$$a^2x^2+(a^2-1)x-1=a^2x^2-2abx+b^2,$$

folglich wird $x=\frac{b^2+1}{a^2+2ab+1}$.

XXVIII.

Da der von Diophantus angeführte Satz wieder für jedes Quadrat gilt, so setze man die kleinere Zahl $=x$, die größere $=a^2x+1$, so ist das Produkt beider $=a^2x^2+x$, und wenn man hiervon die kleinere Zahl abzieht, so erhält man das Quadrat a^2x^2, dessen Wurzel ax ist.

Die zweite Bedingung verlangt aber, daß auch $a^2x^2+x-a^2x-1$ ein Quadrat sei, und wenn wir b in der Bedeutung beibehalten, die es in der vorigen Aufgabe hatte, so ist

$$a^2x^2-(a^2-1)x-1=(b-ax)^2=a^2x^2-2abx+b^2,$$

folglich wird $x=\frac{b^2+1}{2ab-(a^2-1)}$.

XXIX.

Da das Verfahren, durch welches Diophantus den ursprünglichen Ansatz berichtigt, in der Folge so oft gebraucht wird, so ist es zweckmäßig dasselbe hier ein für alle Mal zu erläutern. Wenn Diophantus eine Aufgabe lösen will, welche mehre Bedingungen enthält, so wählt

er für die gesuchten Größen solche Ausdrücke, welche durch ihre bloße Form wenigstens eine oder mehre der aufgestellten Bedingungen erfüllen. In dem gegenwärtigen Falle sollen zuerst beide gesuchte Zahlen Quadratzahlen sein, und Diophantus setzt daher die eine $=x^2$, die andere $=1$, wodurch die erste Bedingung bereits erfüllt wird. Nun soll aber das Produkt dieser beiden Zahlen d. i. x^2 auch dann noch ein Quadrat bleiben, wenn man jedwede der beiden Zahlen dazu addirt, d. h. es soll sowohl $2x^2$ als x^2+1 ein Quadrat sein. Nun kann aber $2x^2$ nie ein Quadrat werden, weil der Coefficient 2 kein Quadrat ist, und die Auflösung würde unmöglich sein, wenn man den anfänglich gewählten Ansatz beibehalten wollte.

Man überlege daher, auf welche Weise $2x^2$ entstanden ist. Offenbar dadurch, daß man x^2 mit der Quadratzahl 1 multiplicirt, und zu dem Producte den einen Factor x^2 addirt hat. Man muß also statt 1 eine andere Quadratzahl von der Beschaffenheit wählen, daß, wenn man dieselbe mit x^2 multiplicirt, und x^2 dazu addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Nennen wir diese statt 1 zu wählende Quadratzahl z^2, so soll also $z^2x^2+x^2=(z^2+1)x^2$ ein Quadrat sein. Dies ist aber nur möglich, wenn z^2+1 ein Quadrat ist, und wir müssen also in einer vorläufigen Aufgabe ein Quadrat suchen, welches um 1 vermehrt ein Quadrat wird.

Diese hier ausgeführten Schlüsse hat Diophantus nicht ausführlich dargelegt, und bloß dadurch entsteht

eine Art von Dunkelheit in der sonst so klaren Darstellung unseres Verfassers. Eine andere Dunkelheit kann dadurch entstehen, daß Diophantus in der vorläufigen Aufgabe das gesuchte Quadrat, welches er für 1 setzen will, ebenfalls durch δύναμις μία bezeichnet, man muß aber diese vorläufige Aufgabe, welche bloß zur Berichtigung des ursprünglichen Ansatzes dienen soll, von der eigentlichen Hauptaufgabe wohl unterscheiden.

Behalten wir für das Quadrat, welches statt 1 gesetzt werden soll, das allgemeine Zeichen z^2 bei, so läßt sich z^2+1 leicht zu einem Quadrat machen, denn setzt man

$$z^2+1=(z-2)^2=z^2+4z+4,$$

so erhält man $z=\frac{3}{4}$, also $z^2=\frac{9}{16}$.

Nunmehr kehrt Diophantus zu der ursprünglichen Aufgabe zurück, und setzt die eine gesuchte Zahl, wie vorher, $=x^2$, die andere $=\frac{9}{16}$, und durch diesen Ansatz werden zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt, denn zuerst sind die beiden gesuchten Zahlen Quadrate, und wenn man zu dem Produkt derselben, $\frac{9}{16}x^2$, den einen Factor $x^2=\frac{16}{16}x^2$ addirt, so erhält man die Quadratzahl $\frac{25}{16}x^2$. Es ist also nur noch die eine Bedingung zu erfüllen, nach welcher auch $\frac{9}{16}x^2+\frac{9}{16}$ ein Quadrat sein soll. Dies wird aber der Fall sein, wenn $9x^2+9$ ein Quadrat ist, da jedes Quadrat durch ein anderes Qua-

drat multiplicirt oder dividirt, wieder ein Quadrat giebt. Man setze daher

$$9x^2 + 9 = (3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16,$$

woraus man für x den Werth $\frac{7}{24}$, und $x^2 = \frac{49}{576}$ erhält.

Die eine der gesuchten Zahlen ist also $\frac{9}{16}$, wofür man $\frac{324}{576}$ schreiben kann, die andere $\frac{49}{576}$. Das Product dieser beiden Zahlen ist $\frac{441}{9216}$; addirt man dazu die erste Zahl $\frac{324}{576} = \frac{5184}{9216}$, so erhält man $\frac{5625}{9216}$, wovon $\frac{75}{96}$ die Quadratwurzel ist; addirt man aber zu dem Producte die zweite Zahl $\frac{49}{576} = \frac{784}{9216}$, so erhält man $\frac{1225}{9216}$, wovon die Wurzel $\frac{35}{96}$ ist, so daß also die gefundenen Zahlen leisten, was die Aufgabe vorschreibt.

Die vorläufige Aufgabe, welche hier zu lösen war, läßt sich übrigens noch allgemeiner fassen, als Diophantus sie ausdrückt, nämlich in folgender Art:

es ist ein Quadrat gegeben, und man soll ein anderes Quadrat von der Beschaffenheit suchen, daß das Product beider auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man das gegebene Quadrat dazu addirt.

Das gegebene Quadrat heiße a^2, das gesuchte aber sei z^2, nun ist das Product beider a^2z^2, und die Formel $a^2z^2 + a^2$ soll wieder ein Quadrat sein. Man setze die Wurzel $= az - b$, so hat man die Gleichung

$$a^2z^2 + a^2 = a^2z^2 - 2abz + b^2, \text{ und } z = \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

Es sei z. B. $a^2 = 4$, und $b^2 = 9$, so wird $z = \frac{5}{12}$, und $z^2 = \frac{25}{144}$. Daher wird $a^2 z^2 + a^2 = \frac{100}{144} + \frac{576}{144} = \frac{676}{144}$, ein Quadrat, dessen Wurzel $\frac{26}{12}$ oder $2\frac{1}{6}$ ist.

Vermittelst dieser vorläufigen Aufgabe läßt sich nun auch die Hauptaufgabe viel allgemeiner lösen. Denn man nehme zwei beliebige Quadrate a^2 und b^2, von welchen a^2 das kleinere sei, und setze die eine der gesuchten Zahlen $= a^2x^2$, die andere $= \left(\frac{b^2 - a^2}{2ab}\right)^2$, so ist aus dem Vorigen klar, daß das Produkt beider Zahlen oder $\frac{b^4 - 2a^2b^2 + a^4}{4a^2b^2} \cdot a^2x^2$ auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man a^2x^2 dazu addirt. Es ist also nur noch die eine Bedingung zu erfüllen, daß auch $\frac{b^4 - 2a^2b^2 + a^4}{4a^2b^2} \cdot a^2x^2 + \frac{b^2 - a^2}{2ab}$ ein Quadrat werde. Dies geschieht aber, sobald man $\frac{b^2 + a^2}{2b}x - c$ als die Wurzel der obigen Formel ansieht.

XXX.

Das Verfahren, durch welches Diophantus den Ansatz berichtigt, beruht ganz auf den in der vorigen Anmerkung entwickelten Gründen. Denn wenn man zuerst die eine Zahl $= x^2$, die andere $= 1$ setzt, so ist das Produkt beider $= x^2$, und nun soll sowohl $x^2 - 1$ als $x^2 - x^2$

ein Quadrat sein. Dies zeigt aber deutlich, daß der gewählte Ansatz nicht zweckmäßig ist, denn x^2-1 ist an sich kein Quadrat, wie doch nach dem Gange in der vorigen Aufgabe bezweckt wurde, und die Differenz x^2-x^2 wird $=0$, ein Fall auf welchen Diophantus nie Rücksicht nimmt. Daher muß man statt 1 ein anderes Quadrat setzen, und dieses muß man so wählen, daß, wenn man es mit x^2 multiplicirt, und von dem Produkte x^2 abzieht, der Rest noch immer ein Quadrat bleibt. Bezeichnen wir dies Quadrat durch z^2, so soll also $z^2x^2-x^2=(z^2-1)x^2$ ein Quadrat sein. Dies ist nur möglich, wenn z^2-1 ein Quadrat ist, und so haben wir also vorläufig ein Quadrat zu suchen, welches, um 1 vermindert, noch immer ein Quadrat bleibt. Man setze also

$$z^2-1=(z-2)^2=z^2-4z+4,$$

so wird $z=\frac{5}{4}$ also $z^2=\frac{25}{16}$.

Nunmehr wird der ursprüngliche Ansatz dahin geändert, daß die eine Zahl $=x^2$, die andere $=\frac{25}{16}$ gesetzt wird, denn so werden zwei Bedingungen der Aufgabe auf ein Mal erfüllt. Die gesuchten Zahlen sind nämlich Quadrate, und wenn man von ihrem Produkt $\frac{25}{16}x^2$, die erste Zahl oder x^2 abzieht, so wird der Rest $\frac{9}{16}x^2$ ebenfalls ein Quadrat, und es ist nur noch die eine

Be-

Bedingung zu erfüllen, nach welcher $\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{16}$ ein Quadrat werden soll.

Der übrige Theil der Auflösung ist in dem Text der Uebersetzung selbst deutlich enthalten. In dem Text des Diophantus findet sich zuletzt eine kleine Verwirrung; es wird nämlich nicht erwähnt, daß die Formel $\frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{16}$, nachdem sie durch 16 multiplicirt ist, auch noch durch 25 dividirt werden muß, dessen ungeachtet nennt Diophantus der Formel $x^2 - 1$ als diejenige, welche man zu einem Quadrat machen soll, und setzt dann wieder $x^2 - 8x + 16 = 25x^2 - 25$, als wäre diese Division nicht geschehen. Ich habe kein Bedenken getragen, die von Bachet vorgeschlagene Aenderung des Textes sogleich in die Uebersetzung aufzunehmen, weil hier offenbar eine auf Rechnung des Sammlers kommende Verwirrung obwaltet.

Dem Anfänger, welcher mit dem oft nur angedeuteten Gang des Diophantus noch nicht recht bekannt ist, empfehle ich, die Gründe, weßhalb vorläufig ein Quadrat gesucht werden muß, welches um 1 vermindert, noch ein Quadrat bleibt, sich recht deutlich zu machen. Offenbar soll dieses Quadrat statt des ganz unzweckmäßig gewählten Quadrates 1 gesetzt werden; aber so wie Diophantus die Auflösung verträgt, kann man zu der irrigen Annahme verleitet werden, als solle $x^2 - 1$ zu einem Quadrat gemacht werden, um einen Theil der Hauptaufgabe zu lö-

sen, da es doch bloß auf die Berichtigung des Ansatzes abgesehen ist.

XXXI.

Der Lehnsatz, auf welchen sich Diophantus beruft, spricht bloß den bekannten Satz aus, daß sowohl $a^2+2ab+b^2$ als $a^2-2ab+b^2$ ein Quadrat sei. Hierauf gründet sich aber folgende allgemeine Auflösung der Aufgabe.

Man setze die eine Zahl $=x$, die andere $=(a^2+b^2)x$. Ist nun die Summe der Zahlen $=2abx^2$, so wird das Produkt derselben $=(a^2+2ab+b^2)x^2$, wenn man die Summe der Zahlen dazu addirt, und $=(a^2-2ab+b^2)x^2$, wenn man die Summe der beiden Zahlen davon abzieht, also in beiden Fällen ein vollständiges Quadrat. Da nun die Summe der Zahlen das eine Mal $2abx^2$, und dann wieder $(a^2+b^2+1)x$ ist, so hat man die Gleichung

$$2abx^2=(a^2+b^2+1)x, \text{ und } x=\frac{a^2+b^2+1}{2ab},$$

wo man a und b vollkommen willkührlich wählen kann. Man setze z. B. $a=5$ und $b=3$, so ist $a^2+b^2+1=25+9+1=35$, $2ab=30$, also $x=\frac{35}{30}=\frac{7}{6}$.

Die eine der gesuchten Zahlen ist also $\frac{7}{6}$, die andere aber $(a^2+b^2)x=(25+9)\frac{7}{6}=\frac{238}{6}$. Das Produkt

dieser Zahlen ist $\frac{1666}{36}$, die Summe $\frac{245}{6}$ oder $\frac{1470}{36}$. Addirt man also die Summe zu dem Produkte, so erhält man $\frac{3136}{36}$, ein Quadrat dessen Wurzel $\frac{56}{6}$ ist; zieht man aber die Summe der Zahlen von ihrem Produkte ab, so erhält man $\frac{196}{36}$, ein Quadrat dessen Wurzel $\frac{14}{6}$ ist.

XXXII.

Der Lehnsatz, auf welchen sich Diophantus bezieht, ist auch ohne den kunstgerechten Beweis, den man auf den Begriff ähnlicher Flächenzahlen und auf Euklides IX. 1. gründen kann, vollkommen einleuchtend. Denn zwei Zahlen, deren eine das Doppelte der anderen ist, lassen sich ganz allgemein durch a und 2a vorstellen, das doppelte Produkt derselben ist also 2.2.a.a, welches nothwendig ein Quadrat ist.

Der Satz ist aber noch in größerer Ausdehnung richtig, denn wenn sich zwei Zahlen wie 1:m verhalten, also durch a und ma vorgestellt werden können, so ist das m fache Produkt derselben m.m.a^2, also auch eine Quadratzahl, weil es jeden Factor in einer geraden Anzahl enthält.

Der zweite Theil des Lehnsatzes ist mit dem in XXXI. angeführten Satze einerlei.

XXXIII.

Der Lehnsatz sagt bloß, daß $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ sei, und man sieht leicht, warum Diophantus die eine Zahl $=x$, die andere $=2x+1$ setzt.

Will man andere, als die hier berechneten Zahlen haben, so kann man entweder die Wurzel $x-4$ mit einer anderen vertauschen, oder auch den ganzen Ansatz verändern. Setzt man z. B. die erste Zahl $=ax$, so wird die zweite $=2ax+1$; im Uebrigen kann man ganz, wie in der Aufgabe selbst, verfahren.

XXXIV.

So wie x^2+2x+1 das Quadrat von $x+1$ ist, so ist x^2-2x+1 das Quadrat von $x-1$. Nun ist aber $x^2-2x+1 = x^2-(2x-1)$. Ist nun die kleinere Zahl $=x$, die größere $=2x-1$, so sagt die obige Formel dasselbe, was Diophantus mit Worten ausdrückt.

XXXV.

Der von Diophantus angeführte Satz läßt sich auf folgende Art ganz allgemein beweisen. Es habe die Zahl ab die beiden Factoren a und b, von welchen a der größere sein mag. Man ziehe den kleineren Factor von dem größeren ab, und die Hälfte des Restes, $\frac{a-b}{2}$

erhebe man ins Quadrat, so erhält man $\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$. Addirt man dazu die erste Zahl ab, wofür man auch $\frac{4ab}{4}$ schreiben kann, so verwandelt sich die vorige Formel in diese $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$, welche das Quadrat von $\frac{a+b}{2}$ ist.

Man könnte also statt 12 jede andere Zahl nehmen, welche sich auf dreifache Art in zwei Factoren zerfällen läßt. So hat z. B. 48 die Factoren 2×24, 4×12, 6×8, und man findet nach dem angeführten Satze die Quadratzahlen $11^2+48=169$, $4^2+48=64$, $1^2+48=49$. Man setze also die erste Zahl $=11x$, die zweite $=4x$, die dritte $=x$, die Summe der Zahlen $=48x^2$. Da diese Summe auch $=16x$ ist, so hat man die Gleichung

$$48x^2=16x, \text{ und } x=\frac{1}{3}.$$

Die erste Zahl ist also $\frac{11}{3}$, die zweite $\frac{4}{3}$, die dritte $\frac{1}{3}$.

XXXVI.

Die Gründe, auf denen der Ansatz beruht, sind fast die nämlichen, welche in der vorigen Aufgabe entwickelt wurden, daher Diophantus sie nicht umständlicher aus einander setzt. Wenn nämlich eine Zahl ab die beiden Factoren a und b hat, so giebt die halbe Summe der Factoren, oder $\frac{a+b}{2}$, ins Quadrat erhoben, $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$.

Zieht man davon $ab = \frac{4ab}{4}$ ab, so erhält man $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}$, welches das Quadrat von $\frac{a-b}{2}$ ist.

Uebrigens läßt sich diese, wie die vorige Aufgabe, auf so viele Zahlen ausdehnen, als irgend verlangt wird, wenn man die gewählte Zahl so viele Male in zwei Factoren zerfällt, als Zahlen gesucht werden.

Anmerkungen zum dritten Buche.

I. — IV.

Der Kunstgriff, durch welchen Diophantus einen zweckmäßigen Ansatz findet, ist so einfach, daß man nur nöthig hat, ihn bei einer dieser Aufgaben sich deutlich zu machen, um ihn sogleich auf die folgenden Aufgaben anwenden zu können.

Um für die erste Aufgabe einen zweckmäßigen Ansatz zu erhalten, nehme man eine Zahl, welche wie die Zahl 5 die Summe zweier Quadrate ist, und welche allgemein durch a^2+b^2 vorgestellt werden kann. Diese Zahl theile man nach II, 10 von Neuem in zwei Quadrate, und eines derselben sei c^2. Hierauf setze man die erste Zahl $=ax$, die zweite $=bx$, die dritte $=cx$, die Summe der drei Zahlen aber sei $=(a^2+b^2)x^2$, so werden, wie man sogleich übersieht, alle drei Bedingungen auf ein Mal erfüllt, denn wenn man die Quadrate der drei Zahlen von der Summe derselben einzeln abzieht, so sind die Reste a^2x^2, b^2x^2, $(a^2+b^2-c^2)x^2$,

also in jedem Falle Quadrate, da man durch ein besonders Verfahren c so bestimmt hat, daß $a^2+b^2-c^2$ ein Quadrat wird. Nun hat man einen doppelten Ausdruck für die Summe der Zahlen, und daraus die Gleichung $(a^2+b^2)x^2=(a+b+c)x$, folglich $x=\frac{a+b+c}{a^2+b^2}$.

V — VI.

In der ersten Auflösung findet Diophantus die dritte und erste Zahl nach dem in der Anmerkung zu I, 18 erläuterten Satze: wenn man den Ueberschuß der beiden ersten Zahlen über die dritte von der Summe aller drei Zahlen abzieht, so erhält man das Doppelte der dritten. In unserem Falle soll das Quadrat x^2+2x+1 die Summe aller drei Zahlen, 1 aber der Ueberschuß dieser Summe über die beiden ersten Zahlen sein, daher ist x^2+2x das Doppelte der dritten Zahl, also die dritte Zahl selbst $\frac{1}{2}x+x$. Wenn ferner x^2 der Ueberschuß der Summe aller drei Zahlen über die Summe der zweiten und dritten ist, so ist der Rest $2x+1$ das Doppelte der ersten Zahl, also die erste Zahl $x+\frac{1}{2}$, und man erhält die zweite Zahl durch bloße Subtraction $=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$.

Die zweite Auflösung beruht ganz auf zwei früheren Aufgaben. Man sucht zuerst drei Quadratzahlen, deren Summe ein Quadrat ist. Zu diesem Ende nimmt

man zwei willkührliche Quadratzahlen z. B. 4 und 9, deren Summe = 13, und sucht nun nach II, 11 zwei Quadrate, deren Unterschied 13 ist, und findet 36 und 49. Da nun die Summe 36+9+4 wieder ein Quadrat ist, so kommt es nur darauf an, die drei Zahlen so zu bestimmen, daß 4, 36, 9 der Unterschied zwischen der Summe von je zweien und der dritten Zahl werden. Wenn wir die drei gesuchten Zahlen der Reihe nach A, B, C nennen, und $D=4$, $\delta=9$, $d=36$ setzen, so wird nach den früher entwickelten Formeln

$$A = \frac{D+\delta}{2} = \frac{4+9}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

$$B = \frac{D+d}{2} = \frac{4+36}{2} = 20.$$

$$C = \frac{d+\delta}{2} = 9+36 = 22\frac{1}{2}.$$

Uebrigens ist leicht einzusehen, daß sich dies Verfahren auf so viele Zahlen, als man immer will, ausdehnen läßt.

VII — VIII.

Man setze die Summe der drei Zahlen $=(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$, die Summe der ersten und zweiten Zahl $=x^2$, die Summe der zweiten und dritten aber $=(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$, so sind bereits drei Bedingungen erfüllt. Aus diesem Ansatz folgt aber, daß die erste Zahl $=4ax$, die zweite $=x^2-4ax$, die dritte endlich $=2ax+a^2$ sei. Um die Summe der ersten und

dritten Zahl, d. i. $6ax+a^2$ auch zu einem Quadrat zu machen, setze man

$$6ax+a^2=b^2, \text{ so wird } x=\frac{a^2-b^2}{6a}.$$

Die Zahlen a und b können hier zwar willkührlich gewählt werden, doch muß a^2 größer als b^2 sein, auch der ganze Ansatz so eingerichtet werden, daß x^2 größer als $4ax$ wird, weil man sonst für die zweite Zahl einen negativen Werth erhält. Auf welche Weise aber b zu bestimmen sei, damit auch diese Bedingung erfüllt werde, dies wird erst in der Folge gezeigt werden.

Die zweite Auflösung ist von der ersten im Wesentlichen gar nicht verschieden.

IX.

Man bezeichne die drei Quadrate, welche Diophantus in der vorläufigen Aufgabe gesucht hat, und welche eine zunehmende arithmetische Reihe bilden, der Folge nach durch a^2, b^2, c^2, so kommt es darauf an, drei Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der ersten und zweiten $=a^2$, die Summe der zweiten und dritten $=c^2$, die Summe der ersten und dritten $=b^2$ sei; denn da die drei gesuchten Zahlen auch eine zunehmende arithmetische Reihe bilden sollen, in einer solchen Reihe aber die Summe des zweiten und dritten Gliedes nothwendig größer ist, als die Summe des ersten und dritten, so kann c^2, als das größte der drei Quadrate, nur die Summe des zweiten und dritten Gliedes

sein, oder man muß, wie Diophantus sich darüber ausdrückt, die Ordnung umkehren.

Setzt man nun die Summe der Zahlen $=x$, so ist die erste Zahl $=x-c^2$, die zweite $=x-b^2$, die dritte $=x-a^2$, und man hat die Gleichung

$$3x-(a^2+b^2+c^2)=x, \text{ also } x=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Aus der Formel ergiebt sich, daß und warum die halbe Summe der drei Quadrate, wenn sie zur Auflösung brauchbar sein sollen, größer sein muß, als jedes derselben einzeln genommen. Denn wäre z. B. $a^2>\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ d. i. größer als x, so würde die dritte Zahl $x-a^2$ einen negativen Werth erhalten.

Von den gefundenen Zahlen beweis't Diophantus zwar nicht, daß sie eine arithmetische Reihe bilden, es ist aber aus ihrer Entstehungsart vollkommen klar. Denn wenn z. B. drei Zahlen A, B und C so beschaffen sind, daß die Summen von je zweien eine arithmetische Reihe bilden, so wird von den Zahlen selbst das Nämliche gelten. Aus der Annahme folgt nämlich

$$C+B-(C+A)=(C+A)-(B+A)$$

Vollzieht man aber die angedeutete Rechnung, so erhält man

$$B-A=C-B, \text{ oder } C-B=B-A.$$

Wie man die drei Quadrate so bestimmen könne, daß jedes derselben kleiner sei als die halbe Summe derselben, hat Diophantus nicht berührt. Eben diese Be-

dingung läßt sich aber auch so ausdrücken: die Summe von je zweien muß größer sein als das dritte. Wenn nun die drei Zahlen eine zunehmende arithmetische Reihe bilden, folglich durch a, a+d, a+2d vorgestellt werden können, so ist klar, daß die Summe des zweiten und dritten Gliedes 2a+3d alle Mal größer sei, als das erste, und die Summe des ersten und dritten Gliedes 2a+2d alle Mal größer als das zweite, oder als a+d; man hat also nur dahin zu sehen, daß die Summe des ersten und zweiten Gliedes größer sei, als das dritte Glied, d. h. 2a+d muß größer sein als a+2d, oder in Beziehung auf den Ansatz im Diophantus: x^2 muß größer sein als 2x+1. Daher darf x in ganzen Zahlen nicht kleiner sein als 3, und es fragt sich also, wie muß man die Wurzel von x^2+4x+2 bestimmen, damit x mindestens =3 werde.

Ungeachtet diese Untersuchung beim Diophantus erst später vorkommt, so wollen wir hier schon das Wesentliche derselben zeigen. Man überlege zuerst, durch was für eine Rechnung x gefunden wird. Man setzt x^2+4x+2 dem Quadrat einer Zahl gleich, welche sich allgemein durch x—n vorstellen läßt. Daraus erhält man

$$x^2+4x+2=x^2-2nx+n^2,$$

folglich wird $x=\frac{n^2-2}{2n+4}$, und diese Formel zeigt die Entstehungsart von x an. Man muß also die Zahl n so wählen, daß $\frac{n^2-2}{2n+4}$ nicht kleiner als 3, folglich

n^2-2 nicht kleiner als $6n+12$, oder n^2-6n nicht kleiner als 14 wird. Man betrachte $n^2-6n=14$ als eine vermischte quadratische Gleichung, so findet man $n=3+\sqrt{14}$. Die Zahl n muß also größer als $3+\sqrt{14}$, also in ganzen Zahlen mindestens $=8$ sein, und deßhalb setzt Diophantus die gesuchte Wurzel $=x-8$.

X — XI.

Das in der vorigen Anmerkung erklärte Verfahren kann man sogleich auf diese beiden Aufgaben anwenden.

Um in der X. Aufgabe die Formel $6x+22$ zu einem Quadrat zu machen, setzt man dieselbe irgend einem Quadrat gleich, das wir durch n^2 bezeichnen wollen, und welches, wie man sogleich sieht, größer als 22 sein muß. Nun wird $x=\frac{n^2-22}{6}$. Die zweite Zahl aber ist x^2+2x-6, daher muß x^2+2x d. i. $\frac{n^4-38n^2+352}{36}$ größer als 6, oder n^4-38n^2 größer als -156 sein. Diese biquadratische Gleichung läßt sich wie eine quadratische behandeln, und man findet $n^2>19+\sqrt{205}$. Ist daher n^2 eine ganze Zahl, so muß sie größer als 34, also mindestens $=36$ sein.

In der folgenden XI. Aufgabe setzt man $6x+4=n^2$, so wird $x=\frac{n^2-4}{6}$. Nun ist die zweite Zahl $=x^2-2x$, also ist $x^2>2x$ d. h. $\frac{n^4-8n^2+16}{36}>\frac{12n^2-48}{36}$, oder $n^4-20n^2>-60$. Behandelt man diesen Ausdruck

wie eine vermischte quadratische Gleichung, so wird $n^2 > 10 + \sqrt{40}$. Wenn also n^2 eine ganze Zahl sein soll, so ist sie größer als 16, und man kann daher für n^2 alle Quadrate setzen von 25 an.

XII.

Der ursprüngliche Ansatz führt darauf, daß $52x^2 + 12$ ein Quadrat sein soll, welches auf dem gewöhnlichen Wege bewirkt werden könnte, wenn der Coefficient $52 = 13.4$ ein Quadrat wäre. Es war daher nicht zweckmäßig die Zahlen 13 und 4 zu Coefficienten der ersten und dritten Zahl zu wählen, denn dadurch erreicht man nur die eine Bedingung, daß jeder Coefficient um 12 vermehrt, ein Quadrat wird, aber nicht die zweite, daß nämlich ihr Produkt auch ein Quadrat sei. Diese letzte Bedingung wird aber gewiß erreicht, wenn man für diese Coefficienten ein Paar Quadratzahlen nimmt, deren jede auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man 12 dazu addirt. Auf dem bekannten Wege findet Diophantus, daß 4 und $\frac{1}{4}$ die verlangte Eigenschaft haben, und berichtigt hiernach den ursprünglichen Ansatz.

Die beiden Quadrate 4 und $\frac{1}{4}$ zu finden, sucht Diophantus zwei Mal hinter einander zwei Quadrate, deren Unterschied 12 ist. Man setze das eine $= x^2$, das zweite $= x^2 + 6x + 9$, so hat man $x^2 + 12 = x^2 + 6x + 9$, folglich $x = \frac{1}{2}$, und die beiden Quadrate sind also $\frac{1}{4}$

und $\frac{49}{4}$, deren Unterschied wirklich $=12$ ist. Hierauf setze man wieder das eine Quadrat $=x^2$, das zweite $=x^2+4x+4$, so wird $x^2+12=x^2+4x+4$, also $x=2$, und die beiden Quadrate sind nunmehr 4 und 16, deren Unterschied abermals 12 ist.

Der berichtigte Ansatz führt wieder darauf, daß x^2+12 ein Quadrat sein solle, und Diophantus setzt daher $x^2+12=(x+3)^2$. Eben dieses Ansatzes hatte er sich aber auch bedient, um den Coefficienten $\frac{1}{4}$ zu bestimmen, daher wird x abermals $=\frac{1}{2}$, und wir bekommen für zwei Zahlen den nämlichen Werth, nämlich 2. Dies konnte vermieden werden, wenn Diophantus für x^2+12 eine andere Wurzel wählte z. B. $x-5$. Denn nun wurde $x^2+12=x^2-10x+25$, und $x=\frac{13}{12}$. Auch sieht man, daß statt der Coefficienten 4 und $\frac{1}{4}$ unendlich viele andere auf dem gewöhnlichen Wege gefunden werden konnten.

XIII.

Der ursprüngliche Ansatz führt darauf, daß $266x^2-10$ ein Quadrat werden soll, was nicht möglich ist, weil $266=14.19$ kein Quadrat ist. Die beiden Zahlen 14 und 19 haben also nur eine Eigenschaft, wodurch sie zu Coefficienten der ersten und zweiten Zahl brauchbar werden, nämlich die, daß sie ein Quadrat zum Reste lassen,

wenn man 10 davon abzieht; es fehlt ihnen aber die gleichfalls nothwendige Eigenschaft, daß ihr Produkt ein Quadrat sei; aber beide Bedingungen werden erfüllt, wenn man zu Coefficienten der ersten und dritten Zahl zwei Quadrate sucht, die auch dann noch Quadrate bleiben, wenn man 10 davon abzieht.

Diese beiden Quadrate konnten vermittelst des oft erwähnten Verfahrens gefunden werden. Diophantus findet aber das erste vermittelst eines Lehnsatzes, der sich leicht durch eine Formel beweisen läßt. Wenn man nämlich $\frac{a+1}{2}$ in's Quadrat erhebt, so erhält man $\frac{a^2+2a+1}{4}$; zieht man davon $a=\frac{4a}{4}$ ab, so ist der Rest $\frac{a^2-2a+1}{4}$ ebenfalls ein Quadrat. Da hier $a=10$ ist, so findet Diophantus durch das angedeutete Verfahren die Quadrate $\frac{121}{4}$ und $\frac{81}{4}$, und bestimmt $\frac{121}{4}$ oder $30\frac{1}{4}$ zum Coefficienten der ersten Zahl. Den Coefficienten der dritten Zahl setzt er aber $=x^2$. Nun soll x^2-10 ein Quadrat sein; man setze daher $x^2-10=(x-2)^2$, so wird $x=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$.

Nach dieser Berichtigung des Ansatzes hat es keine Schwierigkeit, die Hauptaufgabe zu lösen. Ist nämlich die erste Zahl $\frac{121}{4}x$, die zweite $\frac{1}{x}$, die dritte $\frac{49}{4}x$, so wird das Produkt der ersten und zweiten Zahl $\frac{121}{4}$, das

Pro-

Produkt der zweiten und dritten Zahl $\frac{49}{4}$, also in beiden Fällen ein Quadrat, welches, um die Zahl 10 vermindert, noch immer ein Quadrat bleibt. Das Produkt der ersten und dritten Zahl wird $\frac{121.49}{4.4}x^2$, und da dieser Coefficient ein Quadrat ist, so hat es keine Schwierigkeit die Zahl $\frac{121.49}{4.4}x^2 - 10$, oder was einerlei ist, $121.49x^2 - 160$ zu einem Quadrat zu machen.

XIV.

Man soll hier einen Werth von x finden, für welchen sowohl $10x+54$ als $10x+6$ ein Quadrat wird, d. h. wir haben hier die doppelte Gleichung. Diophantus zerfällt den Unterschied der beiden Formeln d. i. die Zahl 48 in die Factoren 4 und 12; das Quadrat von der halben Summe dieser Factoren ist 64, das Quadrat ihrer halben Differenz 16. Man hat also nach II, 10 zwei Gleichungen.

1. $10x+54=64$; 2. $10x+6=16$,

und aus beiden findet man $x=1$.

Statt des Quadrates x^2+6x+9 konnte jedes andere gewählt werden.

XV.

Die Auflösung der doppelten Gleichung geschieht auf folgende Art. Der Unterschied der beiden Formeln,

welche Quadrate werden sollen, ist $16x+4$, und dieser ist in die Factoren $4x+1$ und 4 zerfällt worden.

Die halbe Summe der Factoren ist $\frac{4x+5}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{16x^2+40x+25}{4} = 4x^2+10x+\frac{25}{4}$; diesen Ausdruck setze man dem größeren Quadrate gleich, so erhält man

$$4x^2+15x = 4x^2+10x+\frac{25}{4}, \text{ und } x = \frac{25}{20}.$$

Diese Gleichung würde sich aber gar nicht auflösen lassen, wenn nicht $4x^2$ sich gegen $4x^2 = \frac{16x^2}{4}$ aufhöbe. Man bemerke daher folgendes: Bei dem Ausdruck für die zweite Zahl $(x+4)$ ist die Zahl 4 zwar willkührlich, aber sie muß nothwendig ein Quadrat sein, damit in dem Produkte der zweiten und dritten Zahl, ferner in dem Produkte der ersten und dritten Zahl, x^2 eine Quadratzahl zu ihrem Coefficient erhalte, und auch der Coefficient von x in dem Reste $16x+4$ eine Quadratzahl sei. Ferner muß man diesen Rest so zerfällen, daß in der Summe der Factoren die doppelte Wurzel des in den beiden Producten enthaltenen Quadrats vorkommt. In unserem Falle erhalten beide Produkte das Quadrat $4x^2$, folglich muß man $16x+3$ so zerfällen, daß in der Summe beider Factoren $4x$ vorkommt, den nur auf diesem Wege wird auch in dem Quadrat der halben Summe, oder des halben Unterschiedes der Factoren $4x^2$ vorkommen, und beide Quadrate sich gegen einander heben.

Um die Sache noch deutlicher einzusehen, wähle man ein anderes Beispiel. Die erste Zahl sei x, die zweite x+9, die dritte 9x. Nun ist das Produkt der beiden ersten x^2+9x; zieht man davon die dritte Zahl 9x ab, so bleibt x^2, und eine Bedingung ist also bereits erfüllt. Das Produkt der zweiten und dritten Zahl ist $9x^2+81x$, folglich soll $9x^2+81x-x=9x^2+80x$ ein Quadrat sein. Das Produkt der ersten und dritten Zahl ist $9x^2$, folglich soll auch $9x^2-x-9$ ein Quadrat sein. Der Unterschied beider Ausdrücke aber ist $81x+9$.

Dadurch daß man die zweite Zahl $=x+9$ setzte, hat man also schon den Vortheil erreicht, daß in den beiden Quadraten der Coefficient von $9x^2$, in dem Reste aber der Coefficient von 81x Quadratzahlen sind; aber man würde die doppelte Gleichung nicht auflösen können, wenn nicht in dem Quadrat, welches man dem vorliegenden Ausdruck gleich setzen will, ebenfalls $9x^2$ vorkäme. Man kann daher den Rest $81x+9$ nicht willkührlich z. B. in $9x+1$ und in 9 zerfällen, sondern da $9x^2$ zu seiner Wurzel 3x hat, so muß man die Zerfällung so einrichten, daß in der Summe und in der Differenz der Factoren 6x vorkomme, d. h. man muß $81x^2+9$ in die Factoren $6x+\frac{2}{3}$ und $13\frac{1}{2}$ zerfällen.

Denn nun wird die Summe der Factoren $\frac{6x+14\frac{2}{3}}{2}$, das Quadrat also $(36x^2+170x+\frac{7225}{36}):4$ oder

$9x^2+\frac{170}{4}x+\frac{7225}{9}$; die halbe Differenz der Factoren ist $\frac{6x-12\frac{5}{6}}{2}$, das Quadrat davon $\left(36x^2-154x+\frac{5929}{36}\right):4$, oder $9x^2-\frac{154}{4}x+\frac{5929}{9}$. Man hat also die Gleichungen

1. $9x^2+\frac{170}{4}x+\frac{7225}{9}=9x^2+80x.$

2. $9x^2-\frac{154}{4}x+\frac{5929}{9}=9x^2-x-9,$

so daß sich in beiden Gleichungen $9x^2$ heben läßt.

XVI.

Man setze die erste Zahl $=\frac{1}{4}ax$, die zweite $=ax+b$, die dritte $=\frac{1}{4}b^2$, so werden alle Mal zwei Bedingungen erfüllt, welchen Werth man für a und b auch setzen mag.

Die gefundenen Zahlen sind eigentlich $\frac{9}{73}$, $\frac{328}{73}$ und 1, es ist aber erlaubt diese Zahlen mit 73 zu multipliciren oder zu dividiren, denn das ist eben so viel, als hätte man a oder b, 73 Mal größer genommen. Daher konnte man noch die Bedingung hinzufügen, daß die drei Zahlen eine vorgeschriebene Summe haben sollte. In diesem Falle müßte man die erste Zahl $=9x$, die zweite $=328x$, die dritte $=73x$, die Summe der drei Zahlen aber, d. i. $(328+73+9)x$ der vorgeschriebenen Summe gleich setzen.

XVII.

Der Lehnsatz, aus welchem Diophantus den Ansatz herleitet, läßt sich leicht durch eine Formel beweisen. Da a und a+1 zwei auf einander folgende Zahlen sind, so sind a^2 und a^2+2a+1 zwei auf einander folgende Quadrate. Man addire zu dem Produkte beider ihre Summe, so erhält man $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$, also das Quadrat von a^2+a+1.

Die beiden Formeln, die man zu Quadraten machen soll, sind $10x+9$ und $5x+4$; der Unterschied beider ist $5x+5$. Diesen zerfälle man in die Factoren 5 und $x+1$, so ist die halbe Differenz der Factoren $\frac{1}{2}x-2$, und man erhält daraus

$$5x+4=\frac{1}{4}x^2-2x+4.$$

Die Auflösung wird aber nur dadurch möglich, daß sich an beiden Seiten die bestimmte Zahl 4 hebt, wodurch die Gleichung in eine einfache verwandelt wird, und dies mußte bei der Zerfällung des Unterschiedes $5x+5$ berücksichtigt werden.

Wenn man nämlich die erste Zahl $=a^2$, die zweite $=a^2+2a+1$, die dritte $=x$ setzt, so muß man x so bestimmen, daß sowohl $(a^2+2a+2)x+a^2+2a+1$, als a^2x+x+a^2 ein Quadrat wird. Der Unterschied beider Formeln hat also immer die Form $(2a+1)x+2a+1$, und diesen muß man immer in zwei Factoren von der Form $2a+1$ und $x+1$ zerfällen, denn nun wird die

halbe Differenz $\frac{1}{2}x-a$, die halbe Summe $\frac{1}{2}x+a+1$. Man erhält also

$$\frac{1}{4}x^2-ax+a^2=a^2x+x+a^2.$$

folglich $x=4(a^2+a+1)$, oder wenn $a^2=4$, $x=4.7=28$.

XVIII. — XIX.

Wenn man die erste Zahl $=5\frac{1}{2}$, die zweite $=3$, die dritte aber $=x$ setzt, so kommt es dahin, daß man die Formeln $6\frac{1}{1}x+5\frac{1}{2}$ und $4x+3$ zu Quadraten machen soll. Dies wäre nun vermittelst der doppelten Gleichung sehr leicht zu erreichen, wenn entweder die Coefficienten von x in beiden Formeln gleich wären, denn in diesem Falle wäre der Unterschied beider Formeln die bestimmte Zahl $2\frac{1}{2}$, oder auch wenn in beiden Formeln die bestimmten Zahlen $5\frac{1}{2}$ und 3 einander gleich wären, denn in diesem Falle wäre der Unterschied beider Formeln $=2\frac{1}{2}x$.

Die vorläufig gesuchten Zahlen $5\frac{1}{2}$ und 3 haben daher zwar eine Eigenschaft, durch welche sie der Aufgabe genügen, nämlich die, daß ihr Produkt und ihre Summe zusammen genommen ein Quadrat giebe; die Aufgabe verlangt aber auch, daß sowohl $5\frac{1}{1}x+x+5\frac{1}{2}$ $=\left(5\frac{1}{2}+1\right)x+5\frac{1}{2}$ als $3x+x+3=(3+1)x+1$ ein Quadrat werde. Da die beiden ersten Zahlen $5\frac{1}{2}$ und 3

einander ungleich sind, und sein mußten, so kann die doppelte Gleichung nicht auf dem bisher betrachteten Wege gelöst werden; wohl aber wird die Auflösung möglich, wenn sich die Coefficienten von x d. h. $5\frac{1}{2}+1$ und $3+1$, oder die um 1 vergrößerte erste und zweite Zahl, wie zwei Quadrate verhalten, oder was einerlei ist, wenn ihr Produkt ein Quadrat ist. Man muß also statt $5\frac{1}{2}$ und 3 zwei Zahlen suchen, welche außer der früher angeführten, auch noch die letztere Eigenschaft haben.

Wenn man die eine Zahl $=x$, die andere $=4x+3$ setzt, so ist klar, daß der letzten Bedingung Genüge geschieht, denn die Zahlen $x+1$ und $4x+4$ verhalten sich offenbar, wie die Quadratzahlen 1 und 4; diese Bedingung wird aber jedes Mal erreicht, wenn man die eine Zahl $=x$, die andere $=x+(a^2-1)$ setzt. Diophantus berechnet aus dem gemachten Ansatz, daß die eine Zahl $\frac{3}{10}$, die andere $=4\frac{1}{5}$ sein müsse, wofür wir der leichtern Uebersicht wegen, die allgemeinen Zeichen a und b setzen wollen.

Setzt man nun die dritte Zahl $=x$, so soll man sowohl $ax+x+a=(a+1)x+a$, als auch $bx+x+b=(b+1)x+b$ zu einem Quadrat machen. Wenn man aber jeder dieser Formeln durch irgend ein Quadrat multiplicirt oder dividirt, und die dadurch entstandene Formel zu einem Quadrat macht, so wird offenbar auch die ursprüngliche Formel ein Quadrat. Man nehme daher

zwei Quadrate, welche sich wie 1:4 verhalten z. B. 25 und 100, oder allgemein c^2 und $4c^2$, und multiplicire die Formel, in welcher x den kleineren Coefficienten hat, mit $4c^2$, die zweite, in welcher x den größeren Coefficienten $(b+1)$ hat, mit c^2, so werden in beiden die Coefficienten von x, nämlich $c^2(b+1)$ und $4c^2(a+1)$ einander gleich, da $b+1$ der Annahme nach $=4.(a+1)$ ist. Nimmt man also die Differenz der beiden Formeln, so heben sich die Glieder, worin x vorkommt, und die Differenz wird eine bestimmte Zahl, in dem vorliegenden Falle 75. Zerfällt man diesen Unterschied in 25×3, so ist die halbe Summe der Factoren $=14$, die halbe Differenz $=11$, man hat also in bestimmten Zahlen die beiden Gleichungen

1. $130x+105=196$, 2. $130x+30=121$.

Aus beiden aber folgt $x=\frac{91}{130}=\frac{7}{10}$.

Der Gang in der XIX. Aufgabe ist dem in der vorigen völlig gleich, und hat überall keine Schwierigkeit, wenn man die Gründe der vorigen Auflösung eingesehen hat.

XX. — XXI.

In dieser Aufgabe soll man die Formeln $4x^2+3x-1$ und $4x^2+4x-1$ zu Quadraten machen. Diophantus zerfällt den Unterschied der Formeln, oder x, in die Factoren $4x$ und . Diese Zerfällung ist keinesweges willkührlich, denn da beide Formeln ein Glied $4x^2$

enthalten, so mußte der eine Factor nothwendig $4x$ sein, damit in der halben Summe oder Differenz der Factoren ein Glied $2x$, also in dem Quadrat der halben Summe oder Differenz ein Glied $4x^2$ vorkomme. Die halbe Summe der Factoren wird übrigens $2x+\frac{1}{8}$, die halbe Differenz $2x-\frac{1}{8}$, man erhält also die beiden Gleichungen

1. $4x^2+3x-1=\left(2x-\frac{1}{8}\right)^2=4x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{64}$.

2. $4x^2+4x-1=\left(2x+\frac{1}{8}\right)^2=4x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{64}$.

und aus beiden ergiebt sich $x=\frac{65}{224}$.

Auch bei der XXI. Aufgabe ist für die Zerfällung des Restes $4x$ die vorhin erläuterte Regel zu beobachten.

XXII.

Zur Auflösung dieser sehr schönen Aufgabe bedient sich Diophantus zum ersten Male des rechtwinkligen Dreiecks. Auflösungen dieser Art kommen im fünften Buche mehre vor, und es scheint, daß die gegenwärtige Aufgabe durch den Sammler an einen unrechten Platz gestellt worden ist. Wir wollen die verschiedenen Punkte, welche hier zu erläutern sind, einzeln durchgehen.

1) In jedem rechtwinkligen Dreieck bleibt das Quadrat der Hypotenuse auch dann noch ein Quadrat, wenn man das doppelte Produkt der Katheten dazu addirt,

oder davon abzieht. Wenn nämlich die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Zahlen a und b ausgedrückt werden, so ist das Quadrat der Hypotenuse $=a^2+b^2$, das doppelte Produkt der Katheten $=2ab$, nun ist aber sowohl $a^2+2ab+b^2$ als $a^2+-2ab+b^2$ das vollständige Quadrat einer zweitheiligen Größe, also der Satz als richtig bewiesen.

2) Um vier rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Hypotenuse zu erhalten, konnte Diophantus, wie er selbst angiebt, ein beliebiges Quadrat als das Quadrat der Hypotenuse ansehen, und dieses nach den früher entwickelten Regeln auf vier verschiedene Arten in zwei Quadrate theilen, und die Wurzeln dieser Quadrate als die Katheten der Dreiecke ansehen. Da dies Verfahren aber in der Regel auf Brüche führt, so wählt Diophantus ein anderes höchst sinnreiches Verfahren, um vier rechtwinklige Dreiecke zu erhalten, deren Hypotenusen gleich sind, und deren Seiten sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen.

3) Wenn die Seiten eines Dreiecks durch die Zahlen 3, 4 und 5, oder durch die Zahlen 5, 12 und 13 vorgestellt werden können, so sind beide Dreiecke rechtwinklig, weil $3^2+4^2=5^2$, und $5^2+12^2=13^2$ ist. Multiplicirt man nun die Seiten des ersten Dreiecks mit 13, die des zweiten mit 5 so ist unmittelbar deutlich, daß die Hypotenuse in beiden gleich werden muß, die neuen Dreiecke aber, deren eines durch die Zahlen 39, 52, 65, das andere durch die Zahlen 25, 60, 65

vorgestellt wird, den vorigen ähnlich, also wie diese rechtwinklig sind.

4) Die Zahl 65 gewährt nun die Bequemlichkeit, daß sie sich ohne alle Rechnung auf doppelte Art in zwei Quadrate, zuerst nämlich in 16 und 49 und dann in 64 und 1 theilen läßt, und aus den Wurzeln dieser Quadrate bildet Diophantus die beiden noch fehlenden Dreiecke. Wenn man aber aus zwei Zahlen z. B. 4 und 7 ein Dreieck bilden soll, so heißt das: man soll die Summe ihrer Quadrate als Hypotenuse, die Differenz ihrer Quadrate als die eine, das doppelte Produkt derselben als die zweite Kathete ansehen. Aus den Zahlen 4 und 7 erhält man also die Hypotenuse $=4^2+7^2=65$, die eine Kathete $7^2-4^2=33$, die zweite Kathete $=2\times4\times7=56$. Aus den Zahlen 8 und 1 erhält man aber die Hypotenuse $8^2+1^2=65$, die eine Kathete $=8^2-1^2=63$, und die andere Kathete $=2\times8.\times1=16$, und es ist unmittelbar aus dem ganzen Verfahren klar, daß auch diese beiden letzten Dreiecke nothwendig 65 zu ihrer Hypotenuse erhalten mußten.

5) Nach diesen vorläufigen Rechnungen muß, in Beziehung auf den zu Anfang angeführten Lehnsatz, der Ansatz so gemacht werden, daß die Summe der vier Zahlen $65x$ wird, jede einzelne Zahl aber das doppelte Produkt zweier Katheten, oder was einerlei ist, die vierfache Fläche des Dreiecks zu ihrem Coefficienten erhält, denn auf diese Weise werden alle vier Bedingungen der Aufgabe auf ein Mal erreicht.

6) Ueber die Zahl 65 bemerkt Diophantus noch, sie lasse sich deßhalb auf doppelte Weise in zwei Quadrate zerlegen, weil jeder von den Factoren 5 und 13 selbst schon die Summe zweier Quadrate sei. Von diesem Satz kann man folgenden allgemeinen Beweis geben.

Man multiplicire die Summe zweier Quadrate a^2+b^2 mit der Summe zweier anderen Quadrate c^2+d^2, so erhält man $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$, und es ist zu zeigen, daß sich dieses Produkt auf doppelte Art in zwei Quadrate in ganzen Zahlen zerstückeln lasse. Man ziehe aus den einzelnen Gliedern die Wurzel, und mache das Quadrat von der Summe zweier, jedoch so, daß in der Summe keine der Größe a, b, c und d zwei Mal vorkommt, hierauf mache man auch das Quadrat von der Differenz der beiden übrigen, und addire beide Quadrate, so erhält man das vorige Produkt wieder. Durch dies Verfahren wird also das obige Produkt in zwei Quadrate zerstückelt, und das Verfahren läßt sich zwei Mal auf verschiedene Weise wiederholen. Bezeichnen wir nämlich das Produkt der Kürze wegen durch P, so ist

1. $P = (ac+bd)^2-(bc-ad)^2 = a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$.

2. $P = (bc+ad)^2-(ac-bd)^2 = a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$.

Diese beiden Formeln zeigen nicht nur die Richtigkeit der Behauptung, sondern sie geben auch an, auf welche Weise eine Zahl von der vorausgesetzten Beschaffenheit in zwei Quadrate in ganzen Zahlen zerstückelt

werden müsse. Daß man nicht eine dritte oder vierte Zerstückelung, z. B. $(ac+ad)^2-(bc-bd)^2$ vornehmen könne, sieht man daraus, daß sich in diesem Falle die doppelten Produkte nicht gegen einander aufheben.

XXIII. — XXIV.

Von beiden Aufgaben haben wir schon im zweiten Buche (15 und 16) eine Auflösung gehabt, und es ist wohl nur ein Versehen des Sammlers, daß diese Aufgaben hier wiederholt werden.

Anmerkungen zum vierten Buche.

I. II.

In der ersten Aufgabe sei die gegebene Zahl, d. i. die Summe der gesuchten Cubi $= S$, die Summe ihrer Wurzeln aber $= s$. Setzt man nun den halben Unterschied beider Wurzeln $= x$, so ist die größere $= x + \frac{1}{2}s$, die kleinere $= \frac{1}{2}s - x$. Die Summe beider Cubi ist daher $3sx^2 + \frac{1}{4}s^3$, daher wird

$$3sx^2 + \frac{1}{4}s^3 = S, \text{ und } x = \sqrt{\frac{S - \frac{1}{4}s^3}{3s}}.$$

In der zweiten Aufgabe sei der vorgeschriebene Unterschied der Cubi $= D$, der vorgeschriebene Unterschied ihrer Wurzeln $= d$. Setzt man nun die halbe Summe der beiden Wurzeln $= x$, so ist die größere $= x + \frac{1}{2}d$, die kleinere $= x - \frac{1}{2}d$; daraus aber findet man den Unterschied der Cubi

$$3dx^2 + \frac{1}{4}d^3 = D, \text{ und } x = \sqrt{\frac{D - \frac{1}{4}d^3}{3d}}.$$

Bachet schaltet hier noch folgende verwandte Aufgaben ein:

1. Man sucht zwei Kubikzahlen deren Summe dem Unterschiede zweier gegebenen Kubikzahlen gleich ist, oder: man soll die Differenz zweier Kubikzahlen wieder in zwei Kubikzahlen theilen.
2. Man sucht zwei Kubikzahlen, deren Differenz der Summe zweier gegebenen Kubikzahlen gleich ist.
3. Man sucht zwei Kubikzahlen, deren Differenz der Differenz zweier gegebenen Kubikzahlen gleich ist.
4. Man sucht zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß sowohl die Summe ihrer Cubi als ihr Produkt zweien gegebenen Zahlen gleich wird.
5. Man sucht zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß die Differenz ihrer Cubi und ihr Produkt zweien gegebenen Zahlen gleich wird.

Die Auflösungen, welche Bachet von diesen Aufgaben mittheilt, sind zwar nicht allgemein, aber ganz im Geist des Diophanthus, und da die erste derselben bei der XIX. Aufgabe des fünften Buches als Lehnsatz gebraucht wird, so will ich hier eine allgemeine Auflösung derselben mittheilen, aus welcher zugleich hervorgeht, wie auch die zweite und dritte Aufgabe zu lösen ist.

Wenn die gegebenen Kubikzahlen allgemein durch a^3 und b^3 bezeichnet werden, so kommt es darauf an, zwei Kubikzahlen zu finden, deren Summe $= a^3 - b^3$ sei. Man setze die Wurzel der einen $= a - x$, die Wur-

zel der zweiten $= nx - b$, wo n zuerst noch unbestimmt bleiben mag. Nun ist die Summe beider Cubi

$= (n^3 - 1)x^3 - (3bn^2 - 3a)x^2 + (3b^2n - 3a^2)x + a^3 - b^3$.

Setzt man diese Summe der Differenz $a^3 - b^3$ gleich, und zieht an beiden Seiten $a^3 - b^3$ ab, so wird

$(n^3 - 1)x^3 - (3bn^2 - 3a)x^2 + (3b^2n - 3a^2)x = 0$.

Diese kubische Gleichung läßt sich durch die Division mit x^2 in eine einfache verwandeln, wenn man vorher n so bestimmt hat, daß das dritte Glied ganz verschwindet, oder daß $3b^2n - 3a^2 = 0$ wird, welches geschieht, wenn $b^2n = a^2$, also $n = \frac{a^2}{b^2}$ wird. Unter dieser Voraussetzung wird nämlich

$$x = \frac{3(bn^2 - a)}{n^3 - 1}.$$

Da n alle Mal größer als 1 ist, so erhält x alle Mal einen positiven Werth; soll aber der Werth von x für unseren Zweck brauchbar sein, so muß auch

1. nx größer als b,
2. a größer als x

sein, weil man sonst für die Wurzeln $nx - b$ und $a - x$ einen negativen Werth erhalten würde. Um zu prüfen, ob und unter welchen Umständen die beiden obigen Bedingungen Statt finden werden, so setze man für n den Werth $\frac{a^2}{b^2}$, so wird $x = \frac{3b^3a^4 - 3ab^6}{a^6 - b^6}$. Nimmt man nun an, daß nx größer als b sei, so ist auch

$$\frac{3b^3a^6 - 3a^3b^6}{a^6b^2 - b^8} > b.$$

Man

Man multiplicire an beiden Seiten mit $a^6b^2-b^8$, und dividire durch b^3, so wird

$$3a^6-3a^3b^3>a^3-b^3.$$

Man dividire endlich durch a^3-b^3, so wird

$$3a^3>a^3+b^3.$$

Da das Letztere alle Mal der Fall ist, wenn nur, wie wir vorausgesetzt haben, $a>b$ ist, so ist auch nx alle Mal größer als b, und $nx-b$ alle Mal positiv.

Um die zweite Bedingung zu prüfen, nehme man wieder an, es sei a größer als x, d. h.

$$a>\frac{3b^3a^4-3ab^6}{a^6-b^6}.$$

Man multiplicire beide Seiten durch a^6-b^6, und dividire durch a, so wird

$$a^6-b^6>3b^3a^3-3b^6.$$

Man dividire ferner durch a^3-b^3, so wird

$$a^3+b^3>3b^3, \text{ oder } a^3>2b^3.$$

Da das Letztere nicht nothwendig der Fall ist, so fügt Bachet der Aufgabe die Bedingung bei, daß die größere Kubikzahl größer sein müsse als das Doppelte der kleinern.

Fermat zeigt aber auf eine höchst sinnreiche Art, daß man diese Bedingung umgehen könne. Wenn z. B. 64 und 125 die gegebenen Cubi sind, so ist der größere zwar kleiner, als das Doppelte des kleineren; man kann aber nach der dritten Bachetschen Aufgabe ein Paar

Kubikzahlen suchen, deren Differenz der Differenz 125 — 64 gleich ist, und welche so beschaffen sind, daß die größere von beiden größer ist, als das Doppelte der kleineren, und wir wollen diese durch c^3 und d^3 bezeichnen.

Nun kann man nach der ersten Aufgabe zwei Kubikzahlen suchen, deren Summe $= c^3 - d^3$, weil bei diesen die verlangte Bedingung zutrifft. Hat man aber zwei Kubikzahlen, deren Differenz $= c^3 - d^3$, so ist ihre Differenz auch 125 — 64, weil nach dem Verfahren $125 - 64 = c^3 - d^3$ sein soll, und man kann also die Differenz der Kubikzahlen 125 und 64 wirklich in zwei Kubikzahlen theilen, ungeachtet die gegebenen Zahlen nicht der oben entwickelten Bedingung genügen.

Für die vierte und fünfte der Bachetschen Aufgaben läßt sich sehr leicht eine allgemeine Auflösung angeben. Sucht man z. B. zwei Zahlen z und x von der Beschaffenheit, daß das Produkt derselben $= p$, die Summe ihrer Cubi aber $= s$ wird, so hat man folgende zwei Gleichungen

$$1.\ zx = p. \quad 2.\ x^3 + z^3 = s.$$

Aus beiden folgt aber die bestimmte Gleichung

$$s - z^3 = \frac{p^3}{z^3}$$

oder, wenn man die Gleichung gehörig einrichtet,

$$z^6 - sz^3 = -p^3.$$

Betrachtet man in dieser Gleichung z^3 als die gesuchte Größe, so läßt sie sich ganz wie eine ver-

mischte quadratische Gleichung behandeln, und man findet

$$1.\ z^3 = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}s^2 - p^3\right)}$$

$$2.\ x^3 = s - z^3.$$

IV — V.

Man setze das gesuchte Quadrat $= x^2$, also die Wurzel desselben $= x$; die Zahl aber, die man zu beiden addiren muß, sei $= (n^2-1)x^2$. Addirt man diese Zahl zu x^2, so erhält man zur Summe n^2x^2, und eine Bedingung der Aufgabe ist also bereits erfüllt.

Nun soll aber $(n^2-1)x^2+x$ die Wurzel von n^2x^2 sein, folglich wird

$$(n^2-1)x^2 + x = nx, \text{ also } x = \frac{n-1}{n^2-1}.$$

In der V. Aufgabe sei das gesuchte Quadrat wiederum $= x^2$, also die zugehörige Wurzel $= x$; die Zahl aber, die man zu beiden addiren muß, sei $= n^2x^2 - x$, so wird die eine Bedingung der Aufgabe durch den bloßen Ansatz erfüllt, da die Summe der Wurzel x und der Zahl $n^2x^2 - x = n^2x^2$ wird. Nun soll aber auch $x^2 + n^2x^2 - x = (n^2+1)x^2 - x$ die Wurzel von n^2x^2 sein. Man setze daher

$$(n^2+1)x^2 - x = nx, \text{ so wird } x = \frac{n+1}{n^2+1},$$

eine Formel, welche sich von der vorigen bloß durch die Vorzeichnung unterscheidet.

VI.

Der Coefficient des Quadrats, welches zu den beiden anderen Zahlen addirt werden soll, muß gleich beim Ansatz so gewählt werden, daß die Summe dieses Coefficienten und des Coefficienten in dem andern Quadrat (9) wieder eine Quaratzahl wird. Dies bewirkt Diophantus, indem er nach II. 11 ein Quadrat sucht, welches, zu 9 addirt, wieder ein Quadrat zur Summe giebt.

VII.

Die ganze Auflösung beruht darauf, daß man zwei Zahlen suche, deren doppeltes Produkt ein Quadrat ist z. B. x und $\frac{1}{2}a^2x$. Nun ist die Summe ihrer Quadrate $=\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2$, das doppelte Produkt $=a^2x^2$; man setze also die erste Zahl $=\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2$, die dritte $=a^2x^2$ so wird die zweite

$$=\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2-a^2x^2=\left(\frac{a^4-4a^2+4}{4}\right)x^2,$$

und diese Zahlen leisten schon durch ihre bloße Form einer Bedingung der Aufgabe Genüge. Nun soll aber die erste Zahl auch noch ein Cubus sein, man setze daher

$$\left(\frac{1}{4}a^4+1\right)x^2=x^3, \text{ so wird } x=\frac{1}{4}a^4+1.$$

VIII.

Die vorläufige Aufgabe verlangt, zwei Quadrate von der Beschaffenheit zu suchen, daß die Summe bei-

der, um eines von beiden vermehrt, wieder ein Quadrat wird, d. h. wenn man das eine $= a^2$, das andere $= x^2$ setzt, so soll $2x^2 + a^2$ wieder ein Quadrat sein. Setzt man

$$2x^2 + a^2 = (2x - a)^2 = 4x^2 - 4ax + a^2$$

so wird $x = 2a$, und $x^2 = 4a^2$

Wenn man also zwei Quadrate wählt, welche sich wie 1 : 4 verhalten, so haben diese immer die verlangte Eigenschaft, und nunmehr sind wir im Stande, die Coefficienten in der Hauptaufgabe so zu bestimmen, daß eine Bedingung durch den bloßen Ansatz erfüllt wird.

Man setzt nämlich die dritte Zahl $= 4a^2x^2$, die zweite $= a^2x^2$, die erste also, als die Summe von beiden, $= 5a^2x^2$. Da diese Zahl ein Cubus sein soll, so setze man

$$5a^2x^2 = x^3, \text{ so wird } x = 5a^2,$$

und nunmehr können wir den Zahlenwerth von $5a^2x^2$, a^2x^2, $4a^2x^2$ leicht berechnen. Da man die Zahl a vollkommen willkührlich nehmen darf, so ist die Zahl der Auflösungen unendlich.

IX.

Die vorläufige Aufgabe, welche hier zu lösen ist, kann allgemein so ausgedrückt werden:

> man soll zwei Kubikzahlen suchen, deren Differenz ein Quadrat ist, und deren Wurzeln ebenfalls um ein Quadrat verschieden sind.

Man setze die Wurzel des ersten Cubi $= x$, die des zweiten $= x + a^2$, so ist die Differenz der Cubi

$= 3a^2x^2 + 3a^4x + a^6$. Da diese Differenz ein Quadrat sein soll, so setze man

$3a^2x^2 + 3a^4x + a^6 = (2ax - a^3)^2 = 4a^2x^2 - 4a^4x + a^6$,

wodurch man $x = 7a^2$ findet. Die eine Zahl ist also $7a^2$, die andere $8a^2$, d. h. wenn man von einem beliebigen Quadrat das Siebenfache und das Achtfache nimmt, so haben die Cubi dieser Zahlen die verlangte Eigenschaft. Es sei z. B. $a^2 = 4$, so ist $7a^2 = 28$, und $8a^2 = 32$. Nun ist $32^3 = 32768$, $28^3 = 21952$, folglich der Unterschied beider Cubi $10816 = 104^2$, die Differenz der Wurzeln ist aber 4, und es werden also beide Bedingungen erfüllt.

X.

Um die vorläufige Aufgabe allgemein zu lösen, setze man die Summe der Wurzeln $= a$, die eine Wurzel $= x$, folglich die andere $= a - x$. Nun ist die Summe beider Cubi $= 3ax^2 - 3a^2x + a^3$, und die Aufgabe verlangt, daß a und $3ax^2 - 3a^2x + a^3$, oder, was einerlei ist, 1 und $3x^2 - 3ax + a^2$ sich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten. Da nun 1 ein Quadrat ist, so muß auch $3x^2 - 3ax + a^2$ ein Quadrat sein; die Wurzel dieses Quadrats muß aber in jedem Falle ein Glied a enthalten, damit in dem Quadrat a^2 vorkomme; man setze also die Wurzel $= a - bx$, so wird

$$a^2 - 2abx + b^2x^2 = 3x^2 - 3ax + a^2,$$

und $x = \frac{2ab - 3a}{b^2 - 3}$

Hiernach kann man beide Coefficienten leicht so

bestimmen, daß sie der vorläufigen Bedingung genügen. Diophantus multiplicirt die gefundenen Zahlen noch mit 13 und dividirt sie dann mit 2, um ganze und möglichst kleine Zahlen zu haben; Beides ist erlaubt, da es das Verhältniß der beiden Zahlen zu einander nicht ändert.

XI.

Aus der Gleichung $637x^3 = 13x$ folgt zunächst, wenn man durch x dividirt, $637x^2 = 13$, also $x^2 = \frac{13}{637}$. Nun läßt sich Zähler und Nenner durch 13 dividiren, folglich wird $x^2 = \frac{1}{49}$, und $x = \frac{1}{7}$. Diese Auflösung wäre in rationalen Zahlen nicht möglich, wenn nicht $637 : 13$ ein Quadrat zum Quotienten gäbe. Daher sieht man, weßhalb die Coefficienten 8 und 5 so bestimmt werden mußten, daß die Summe der Cubi 637 durch die Summe der Wurzeln oder durch 13 dividirt, ein Quadrat zum Quotienten giebt.

Diese vorläufige Aufgabe ist aber bei der vorigen Aufgabe schon gelöst worden, denn dort suchten wir zwei Cubi, die sich wie zwei Quadrate gegeneinander verhalten, d. h. sie mußten entweder selbst Quadrate oder durch Multiplication zweier Quadrate mit derselben ganzen oder gebrochenen Zahl entstanden sein. Nun ist aber klar, daß, wenn man zwei Quadrate oder Gleichvielfache zweier Quadrate durch einander dividirt, der Quotient alle Mal ein Quadrat sein müsse, und daß daher die vorläufige

Aufgabe bei der X. und XI. Aufgabe nur im Ausdruck verschieden sei.

XIII.

Diophantus findet hier dieselben Zahlen, welche er bei der XII. Aufgabe gefunden hat. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß zwei Zahlen, welche den Forderungen der XII. Aufgabe genügen, auch den Forderungen der gegenwärtigen Aufgabe genügen müssen. Denn man nenne die beiden Cubi x^3 und z^3, ihre Wurzeln also x und z; wenn nun, wie die XI. Aufgabe verlangt, der Unterschied der Cubi dem Unterschiede der Wurzeln gleich ist, so hat man

$$x^3 - z^3 = x - z,$$

d. h. die vier Zahlen bilden eine sogenannte arithmetische Proportion; in einer solchen Proportion ist aber die Summe der beiden äußeren Glieder der Summe der beiden mittleren Glieder gleich, also $x^3 + z = z^3 + x$, und das ist die Forderung der gegenwärtigen Aufgabe.

XIV.

Nachdem die erste Zahl $= 9x^2 + 6x$ gesetzt war, durfte die zweite nicht mehr willkührlich genommen, sondern sie mußte so bestimmt werden, daß die Summe der ersten und zweiten, um 1 vermehrt, ein Quadrat wird. Zu dem Ende sucht Diophantus (nach II, 11) ein Quadrat, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn

man $9x^2+6$ dazu addirt, und findet, daß $16x^2+24x+9$ dieser Forderung genüge; denn wirklich ist die Summe $25x^2+30x+9$ das Quadrat von $5x+3$. Wird nun die zweite Zahl $=16x^2+24x+8$ gesetzt, so werden durch den bloßen Ansatz drei Bedingungen erfüllt, und die vierte durch den für x berechneten Zahlenwerth ebenfalls erreicht.

XV.

Wenn man die drei Quadrate der Reihe nach durch A, B, C bezeichnet, so soll die Summe von A—B, A—C, B—C $=A+B+C$ sein. Eben diese Summe ist aber auch $=2A-2C=2(A-C)$ d. h. sie ist dem doppelten Unterschiede des größten und des kleinsten Quadrates gleich. Durch diese Betrachtung findet Diophantus für die mittelste Zahl den allgemeinen Ausdruck x^2+2x-2, welcher von selbst einen kleineren Werth giebt als x^2+2x+1. Da eben dieser Ausdruck aber größer als 1, folglich x^2+2x größer als 3 sein soll, so übersieht man sogleich, daß auch x größer als 1 werden muß.

XVI.

Wenn der zuerst gewählte Ansatz zweckmäßig sein soll, so müssen die allgemeinen Ausdrücke für das zweite und dritte Produkt, $25+\frac{250}{x^2}$ und $10+\frac{250}{x^2}$, nothwendig

dieselbe Differenz geben, wie die bestimmten Zahlen 32 und 27, denen diese Produkte gleich werden sollen; weil man sonst für x nicht denselben Werth erhalten würde. Daher muß man in den allgemeinen Formeln die Zahlen 25 und 10 anders bestimmen, und zu diesem Ende den allgemeinen Ausdruck für die erste und zweite Zahl, $\frac{10}{x}$ und $\frac{25}{x}$, anders wählen.

Der berichtigte Ansatz führt auf zwei Gleichungen, welche beide denselben Werth für x geben, denn man erhält

1. $15 + \frac{300}{x^2} = 27.$	1. $20 + \frac{300}{x^2} = 32$
2. $15x^2 + 300 = 27x^2$	2. $20x^2 + 300 = 32x^2$
3. $300 = 12x^2$	3. $300 = 12x^2$

$$4.\ x = \sqrt{\frac{300}{12}} = \sqrt{25} = 5.$$

Man übersieht leicht, daß in der letzten Formel die Zahl 300 das Produkt der beiden Stücke ist, in welche man die Zahl 35 getheilt hat, 12 aber der Unterschied zwischen dem größern Stück und der gegebenen Zahl 32; da nun die Theilung der Zahl 35 nicht gleichgültig ist, sondern der Unterschied der beiden Stücke dem Unterschiede der beiden andern gegebenen Zahlen gleich sein muß, so hat man es nicht immer in seiner Gewalt, daß $\frac{300}{12}$ ein Quadrat werde, was doch erforderlich ist, wenn x einen rationalen Werth erhalten soll.

XVII.

Die mittelste Zahl kann ganz beliebig $= ax$ gesetzt werden, es ist aber zweckmäßig, sie so zu wählen, daß sie sich bequem in zwei Factoren zerfällen läßt.

Um nämlich die erste Zahl zu finden, muß man ein Quadrat suchen, welches auch dann noch ein Quadrat bleibt, wenn man ax dazu addirt. Ein solches Quadrat findet man aber nach II. 11, wenn man ax in zwei Factoren zerfällt, und die halbe Differenz dieser Factoren ins Quadrat erhebt; daher kann man die halbe Differenz dieser Factoren als die erste Zahl ansehen. Wenn $a=bc$, so läßt sich ax in die Factoren bx und c zerfällen, und die erste Zahl ist $=\frac{bx-c}{2}$, und nun ist die erste Bedingung bereits erfüllt. Denn das Quadrat der ersten Zahl oder

$$\left(\frac{bx-c}{2}\right)^2 \text{ ist } = \tfrac{1}{4}b^2x^2 - \tfrac{1}{2}bcx + \tfrac{1}{4}b^2,$$

addirt man dazu die zweite Zahl $ax=bcx$, so erhält man $\frac{1}{4}b^2x^2+\frac{1}{2}bcx+\frac{1}{4}c^2=(\frac{1}{2}bx+\frac{1}{2}c)^2$.

Da das Quadrat der zweiten Zahl auch dann noch ein Quadrat bleiben soll, wenn man die dritte Zahl dazu addirt, so darf man nur das Quadrat der zweiten Zahl $a^2x^2=b^2c^2x^2$ von einem beliebigen Quadrat abziehen, und den Rest als die dritte Zahl ansehen. Um aber für die dritte Zahl einen einfacheren Ausdruck zu erhalten, nimmt man das Quadrat einer zweitheiligen

Größe, deren erster Theil $ax = bcx$, und deren zweiter $= 1$ ist, so erhält man für die dritte Zahl $2bcx + 1$.

Nun würde die Summe der drei Zahlen

$$(3bc + \tfrac{1}{2}b)\,x - \tfrac{1}{2}c + 1$$

sein. Damit man diesen Ausdruck leicht in ein Quadrat verwandeln könne, macht Diophantus den Ansatz so, daß $-\frac{1}{2}c$ und $+1$ sich gegenseitig heben, und als Summe der drei Zahlen ein Vielfaches von x übrig bleibt. Dies bewirkt er auf folgende Art: er zerfällt ax oder bcx so, daß der Factor c das Doppelte eines Quadrats, also $\frac{1}{2}c$ ein Quadrat wird, wie das bei der Zerfällung von $4x$ in $2x$ und 2 wirklich der Fall ist, und auch der Fall sein würde, wenn er $4x$ in $\frac{1}{2}x$ und 8 zerfällt hätte. Bei der Bestimmung desjenigen Binomii, durch welches die dritte Zahl bestimmt wird, in unserem Falle $4x + 1$ oder allgemein $bcx + 1$, nimmt man also als ersten Theil die zweite Zahl bcx, als zweiten Theil aber $\sqrt{\frac{1}{2}c}$, so wird die dritte Zahl nothwendig ein Glied $+\frac{1}{2}c$ enthalten, und die Summe der drei Zahlen wird bloß ein Vielfaches von x sein.

Die Gleichung $13x = 169x^2$ soll noch nicht den eigentlichen Werth von x bestimmen, sondern sie soll nur dazu dienen, die Ausdrücke für die drei Zahlen so zu verwandeln, daß sie, ohne für x einen bestimmten Werth festzusetzen, oder ἐν τῷ ἀορίστῳ drei Bedingungen der Aufgabe erfüllen, da sie bisher deren nur zwei erfüllten. Daher wird aus dieser Gleichung nicht gefolgert $x = \frac{13}{169}$,

sondern $x = 13x^2$, oder es wird in die obigen Ausdrücke $13x^2$ statt x gesetzt, denn dadurch werden drei Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Es ist nämlich

1. $(13x^2-1)^2+54x^2 = 169x^2+26x+1 = (13x^2+1)^2$
2. $(54x^2)^2+104x^2+1 = (54x^2+1)^2$
3. $(13x^2-1)+54x^2+104x^2+1 = 169x^2 = (13x)^2$

Die letzte Bedingung ist nun, daß auch $(104x^2+1)^2+13x^2-1 = 10816x^4+221x^2$, also auch $10816x^2+221$ ein Quadrat sein soll. Man setzt daher

$$10816x^2+221 = (104x+1)^2.$$

Eine viel einfachere Auflösung deutet Fermat an. Man setze die erste Zahl $= x$, die zweite $= 2x+1$, die dritte $= 4x+3$, so wird das Quadrat der ersten und zweiten Zahl gewiß wieder ein Quadrat, wenn man die folgende Zahl dazu addirt. Nun soll aber auch die Summe der drei Zahlen, und das Quadrat der dritten Zahl, wenn man die erste Zahl dazu addirt, wieder ein Quadrat werden, d. h. es soll sowohl $7x+4$, als

$$16x^2+25x+9$$

ein Quadrat werden. Beides erreicht man durch das Verfahren der doppelten Gleichung.

XX.

Daß bei der Prüfung, wie die Zahl 13 entstanden sei, nur von den Coefficienten von x die Rede sei, fällt

in die Augen, und der Verf. trug daher kein Bedenken, dies in die Uebersetzung aufzunehmen.

Der Beweis des Lehnsatzes, auf welchen sich Diophantus bezieht, ergiebt sich von selbst, sobald man den Satz in allgemeinen Zeichen darstellt. Wenn nämlich a und b zwei beliebige Zahlen sind, so soll $4ab+(a-b)^2$ wieder ein Quadrat sein; vollzieht man aber die Rechnung, so erhält man $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Der darauf gegründete Schluß, daß, wenn man statt 13 oder 12+1 ein Quadrat erhalten will, man die beiden Quadrate nicht willkührlich bilden könne, sondern daß die Coefficienten von x um 1 verschieden sein müssen, ist an sich einleuchtend genug dargestellt, daß aber auf diese Weise das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man noch 1 dazu addirt, ein Quadrat werden müsse, läßt sich aus einer allgemeinen Formel leicht übersehen.

Man nehme das Quadrat von

$$nx+1=n^2x^2+2nx+1,$$

und sehe n^2x+2n als die erste, x als die zweite Zahl an, so wird die erste Bedingung der Aufgabe erfüllt. Man mache ferner das Quadrat von

$$(n+1)x+1=(n+1)^2x^2+2(n+1)x+1$$

und sehe $(n+1)^2x^2+2(n+1)x$ als das Produkt der zweiten und dritten Zahl an. Da nun die zweite Zahl x war, so muß die dritte $=(n+1)^2x+2(n+1)$ sein, und so wird auch die zweite Bedingung der Aufgabe erfüllt.

Nun soll aber auch das Produkt der ersten und

dritten Zahl, wenn man noch 1 dazu addirt, ein Quadrat werden, oder folgender Ausdruck

$$(n+1)^2n^2x^2+2(n+1)n^2x+2n(n+1)^2x+4n(n+1)+1$$

soll ein Quadrat sein. Nun übersieht man leicht, daß das erste Glied ein Quadrat, und $(n+1)nx$ dessen Wurzel ist, die beiden letzten Glieder

$$4n(n+1)+1=4n^2+4n+1$$

sind das Quadrat von $2n+1$, und es kommt jetzt bloß darauf an, ob die beiden mittleren Glieder

$$2(n+1)n^2x+2n(n+1)^2x$$

das doppelte Produkt beider Wurzeln sind, oder ob mit Weglassung der Größe x

$$2(n+1)n^2+2n(n+1)^2=2.(n+1)n\times(2n+1)$$

sein werde; da aber beide Ausdrücke, wenn man die Rechnung vollzieht, $=4n^3+6n^2+2n$ werden, so ist der obige ganze Ausdruck ein Quadrat, und die hier gewählten Zahlen leisten was die Aufgabe vorschreibt.

XXI.

Daß das Produkt der dritten und vierten Zahl, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat wird, ist nicht Zufall, sondern da die Coefficienten von x in den Wurzeln $x+1$, $2x+1$, und $3x+1$ immer um 1 wachsen, so folgt aus der vorigen Aufgabe, daß das Produkt der zweiten und dritten, so wie das Produkt der dritten und vierten, wenn man 1 dazu addirt, ein Quadrat werden müsse.

XXIII.

Aus den Betrachtungen, durch welche Diophantus seinen ursprünglichen Ansatz berichtigt, ergiebt sich folgende allgemeine Regel.

1. Man nehme das Quadrat eines beliebigen Binomii von der Form $x+a$, und sehe x^2+2ax als das Produkt aller drei Zahlen, a^2 als die erste gesuchte Zahl an.
2. Man mache hierauf das Quadrat von
$$x+2a = x^2+4ax+4a^2,$$
und ziehe davon x^2+2ax ab, und sehe den Rest $2ax+4a^2$ als die zweite gesuchte Zahl an, so werden durch die Form der Zahlen bereits zwei Bedingungen erfüllt. Man erhält aber auf diese Weise auch
3. für die dritte Zahl einen einfachen und zweckmäßigen Ausdruck, denn da das Produkt der drei Zahlen $= x^2+2ax$, das Produkt der ersten und zweiten aber $2a^3x+4a^4$ ist, so wird die dritte Zahl
$$= \frac{x^2+2ax}{2a^3x+4a^4} = \frac{x}{2a^3},$$
und es kommt nur darauf an, die Formel
$$x^2+2ax+\frac{x}{2a^3}$$
zu einem Quadrat zu machen, was gar keine Schwierigkeit hat, da das erste Glied ein vollständiges Quadrat ist. Man setze z. B.
$x^2+2ax+\frac{x}{2a^3} = n^2x^2$, so wird $x = \frac{2a+1}{(n^2-1)2a^3}$.

XXV.

XXV.

Wenn die gegebene Zahl $=a$, ihr erster Theil $=x$, der zweite Theil also $=a-x$ ist, so soll das Produkt a^2-ax der Unterschied eines Cubi und seiner Wurzel werden. Die sinnreiche Betrachtung, welche Diophantus hierüber anstellt, zeigt deutlich, daß man $\frac{1}{2}ax-1$ als die Wurzel des Cubi ansehen müsse, um eine einfache Auflösung in rationalen Zahlen zu erhalten.

XXVI.

Zuvörderst wollen wir hier folgenden Satz beweisen; wenn drei Zahlen so beschaffen sind, daß das Produkt von allen dreien eine Kubikzahl ist, und die Summe der Unterschiede von je zweien zu ihrer Wurzel hat, so hat jedes Vielfache dieser Zahlen dieselbe Eigenschaft. Es mögen a, b und c drei ihrer Größe nach geordnete Zahlen sein, welche die vorausgesetzte Eigenschaft haben, so ist zu zeigen, daß auch ad, bd und cd dieselbe Eigenschaft haben. Da nach dem von Diophantus angeführten Satze $(a-b)+(a-c)+(b-c)=2a-2c$ ist, so kann man die Voraussetzung so ausdrücken: es ist $abc=(2a-2c)^3$, oder in dem Produkte abc soll der Factor $2a-2c$ drei Mal enthalten sein. Wenn man nun auch ad, bd und cd multiplicirt, so erhält man $abcd^3$, $=abc\times d^3$ In abc ist nach der Voraussetzung der Factor $2a-2c$ drei

Mal enthalten, und außerdem kommt darin der Factor d drei Mal vor, wenn aber in einer Zahl jeder Factor drei Mal vorkommt, so ist sie eine Kubikzahl, und das Produkt der Factoren ist die Wurzel desselben, daher hat $abcd^3$ zu seiner Wurzel $(2a-2c)d=$. Eben diese Zahl ist aber auch die Summe der Unterschiede der Zahlen ad, bd und cd, weil

$$(ad-bd)+(ad-cd)+(bd-cd)=2ad-2cd=(2a-2c)d.$$

Wenn man also drei Brüche von der hier angegebenen Eigenschaft hat z. B. $\frac{8}{3}$, $\frac{9}{5}$ und $\frac{5}{3}$, so kann man statt derselben sogleich drei ganze Zahlen 40, 27 und 25 erhalten, welche dieselbe Eigenschaft haben, auch kann man statt dieser wieder drei Zahlen suchen, welche noch immer die nämliche Eigenschaft behalten, und eine vorgeschriebene Summe z. B. 4 geben, denn die Frage ist nur: mit welcher Zahl x muß man die drei Zahlen 40, 27 und 25 multipliciren, damit ihre Summe $=4$ werde?

Hiernach wird der letzte Theil der Auflösung keine Schwierigkeit mehr haben, auch sieht man wohl, daß es bei dem Ansatz lediglich auf die Coefficienten ankommt. Diophantus setzt nun zuerst das Produkt der drei Zahlen $=8x^3$, also die Summe der drei Unterschiede $=2x$; daraus folgt, daß der Unterschied der ersten und dritten Zahl $=x$ sein müsse. Die erste und dritte Zahl müssen also einen um 1 verschiedenen Coefficienten haben, und

man kann die erste $=2x$, die dritte $=3x$ setzen, und hieraus folgt, daß die zweite $\frac{8x^3}{6x^2}=\frac{8}{6}x$ sein müsse. Diese drei Zahlen haben wirklich die verlangte Eigenschaft, daß ihr Produkt $=8x^3=(2x)^3$ ist, und es kommt nur darauf an, ob auch $2x$ wirklich die Summe der Unterschiede zwischen je zweien der gefundenen Zahlen sein wird. Dies ist zwar der Fall, aber der Unterschied zwischen der zweiten und dritten Zahl, $1\frac{1}{3}x-2x$, ist negativ, da er nach der Voraussetzung positiv sein soll, indem man annimmt, daß die drei Zahlen ihrer Größe nach geordnet sind, die zweite also zwischen der ersten und dritten in der Mitte liegt.

In dem Ansatz müssen daher die Coefficienten, welche vorher 2 und 3 waren, geändert, und durch den veränderten Ansatz bewirkt werden, daß der Coefficient der zweiten Zahl, welcher vorhin $\frac{8}{6}$ war, kleiner als der Coefficient der dritten und größer als der Coefficient der ersten wird. Da die Coefficienten der ersten und dritten Zahl um 1 verschieden sein sollen, so setzt Diophantus den kleineren $=x$, den größeren $=x+1$, und aus der Betrachtung, daß der vorige Coefficient $\frac{8}{6}=\frac{8}{2.3}$ war, folgt nun, daß man x so bestimmen müsse, daß

$$\frac{8}{(x+1)x}=\frac{8}{x^2+x}$$

größer wird als x und kleiner als $x+1$.

Diophantus macht nun folgenden Schluß. Der Unterschied des größten und kleinsten Coefficienten ist 1, und dies ist die halbe Summe sämmtlicher Unterschiede. Daher muß der Unterschied der dritten und zweiten, mit dem Unterschied der ersten und zweiten Zahl zusammengenommen, ebenfalls $=1$, ein jeder dieser Unterschiede aber für sich genommen kleiner als 1 sein. Legt man also zu der zweiten Zahl noch 1 hinzu, so muß diese größer werden als die dritte Zahl, oder

$$\frac{8}{x^2+x}+1=\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$$

muß größer als $x+1$ sein.

[Man bemerke hierbei nur, daß Diophantus diejenige Zahl, die er sonst die erste genannt hat, zuweilen die dritte nennt, und überhaupt bei dem Ansatz die Zahlen so ordnet, wie sie zunehmen, nachher aber so wie sie abnehmen. Dies ist zwar kein wesentlicher Fehler, denn es kommt bloß darauf an, daß die zweite Zahl zwischen den beiden übrigen in der Mitte liege, und die erste und dritte Zahl können ihre Stelle beliebig verwechseln. Der Verfasser glaubte dies aber bemerken zu müssen, um einem möglichen Mißverständnisse vorzubeugen.]

Wenn nun $\frac{x^2+x+8}{x^2+x}$ größer als $x+1$ sein soll, so folgt, daß 8 größer als x^3+x^2 sein müsse. Diophantus macht daher einen Cubus, in welchem die Glieder x^3+x^2 vorkommen, und die einfache Betrachtung, aus

welchen Theilen der Cubus einer zweitheiligen Größe $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ alle Mal bestehen müsse, ergiebt, daß der Cubus von $x+\frac{1}{3}$ die beiden Glieder x^3+x^2 enthalten werde. Daher setzt Diophantus

$$8=\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}.$$

und nun ist klar, daß 8 größer wird als x^3+x^2. Aus der obigen Gleichung folgt aber auch

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{27}\right)}$$

oder, wenn man die Rechnung vollzieht

$$2=x+\frac{1}{3}, \text{ folglich } x=\frac{5}{3}.$$

Wenn man also in die allgemeinen Ausdrücke für die beiden Coefficienten, (x und x+1) statt der Zahl x den Werth $\frac{5}{3}$ setzt, so erhält man die Zahlen $\frac{5}{3}$ und $\frac{8}{3}$, und nun muß man wieder so verfahren, wie im Anfange der Auflösung geschehen ist. Es sei nämlich das Produkt der Zahlen $=8x^3$, die kleinste Zahl $=\frac{5}{3}x$, die größte $=\frac{8}{3}x$, so ist das Produkt der größten und kleinsten Zahl $=\frac{40}{9}x^2$, und die zweite Zahl wird gefunden, wenn man das Produkt aller drei Zahlen durch das Produkt der ersten und dritten dividirt, sie ist also

$$8x^3:\frac{40}{9}x^2=\frac{9}{5}x.$$

Diese Rechnung vollzieht Diophantus nicht, sondern er

setzt sogleich den Werth von $x = \frac{5}{3}$ in die drei allgemeinen Ausdrücke für die gefundenen Coefficienten, und findet also $x = \frac{5}{3}$, $\frac{8}{x^2+x} = \frac{9}{5}$ und $x+1 = \frac{8}{3}$.

Daß der Coefficient $\frac{9}{5}$ kleiner wird als $\frac{8}{3}$, ist eine unmittelbare Folge des ganzen Verfahrens, daß er aber auch größer werden solle als $\frac{5}{3}$, darauf scheint Diophantus keine Rücksicht genommen zu haben, und Bachet tadelt dies als einen wesentlichen Mangel der Auflösung. Es ist diesem strengen Tadler seines Vorgängers Xylander hier aber ein menschlicher Irrthum begegnet, denn aus dem Verfahren des Diophantus folgt allerdings, daß $\frac{9}{5}$ größer werden müsse, als $\frac{5}{3}$ oder x, obgleich es nicht ausdrücklich bemerkt wird. Der Coefficient der zweiten Zahl hat nämlich die Form $\frac{8}{x^2+x}$, der Coefficient der ersten Zahl die Form x; nun soll $\frac{8}{x^2+x}$ größer als x, oder wenn man alles mit x^2+x multiplicirt, 8 größer als x^3+x^2 sein. Dies wird aber dadurch erreicht, daß man $8 = \left(x+\frac{1}{3}\right)^3$ setzt, und der Schluß, durch welchen Bachet zeigen will, $\frac{8}{x^2+x}$ könne kleiner als x sein, beruht auf einer irrigen Annahme.

XXVII. — XXVIII.

Der Ansatz in XXVII. führt darauf, daß

$$8x^3 + x^2 - 8x - 1$$

ein Cubus sein soll, und dies erreicht man sehr leicht, wenn man $2x-1$ als die Wurzel der obigen Formel ansieht.

In der folgenden Aufgabe ahmt Diophantus den Ansatz in der vorigen Aufgabe nach, und dies führt darauf, daß $8x^3+8x-x^2-1$ ein Cubus sein solle. Die Wurzel hätte offenbar $2x-1$ sein müssen, damit an beiden Seiten $8x^3$ und -1 sich gegen einander heben. Dies führt aber zuletzt auf den Ausdruck $11x^2+2x=0$, eine Gleichung, welche für x einen negativen Werth geben würde.

Daher wird der ursprüngliche Ansatz als unzweckmäßig verworfen, und dagegen die erste Zahl $=a^3x+1$, die zweite $=x^2$ gesetzt. Nunmehr ist

$$(a^3x+1)x^2 - x^2 = a^3x^3,$$

also ist die erste Bedingung bereits erfüllt, und es kommt bloß darauf an, daß auch

$$(a^3x+1)x^2 - (a^3x+1) = a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1$$

ein Cubus sei. Man setze die Wurzel $=ax-1$, so wird

$$a^3x^3 + x^2 - a^3x - 1 = a^3x^3 - 3a^2x^2 + 3ax - 1$$

folglich $x = \frac{a^3+3a}{3a^2+1}$.

XXIX. — XXX.

Wenn man die gesuchten Zahlen allgemein durch x und z bezeichnet, so soll sowohl $zx+x+z$, als $zx-(x+z)$ ein Cubus sein. Man setze daher

$$1.\ zx+x+z=a^3.$$

$$2.\ zx-x-z=b^3.$$

Zieht man nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$2x+2z=2(x+z)=a^3-b^3,$$

d. h. der Unterschied der beiden Cubi, für welche Diophantus zuerst ganz willkührlich 64 und 8 setzt, ist der doppelten Summe der gesuchten Zahlen gleich, und die Summe der Zahlen selbst ist $\frac{a^3-b^3}{2}$; man kann daher, wenn a und b gegeben sind, nicht nur die Summe der Zahlen, sondern auch das Produkt derselben leicht berechnen.

Nunmehr kommt es darauf an, aus der gegebenen Summe und dem gegebenen Produkt der Zahlen diese Zahlen selbst zu bestimmen. Diese Aufgabe ist aber in XXX. des ersten Buches bereits gelöst, und dabei gezeigt worden, daß eine Auflösung in rationalen Zahlen nur dann möglich ist, wenn der Unterschied zwischen dem Produkt der gesuchten Zahlen und dem Quadrate ihrer halben Summe wieder ein Quadrat ist. Diese Einschränkung wird hier auf die Aufgabe angewendet, und der ursprüngliche Ansatz so geändert, daß der Be-

dingung Genüge geschieht. Diophantus drückt diese Bedingung etwas anders aus, indem er auf die Entstehungsart der Summe und des Produkts der gesuchten Zahlen Rücksicht nimmt, und man sieht hier an einem Beispiel, durch was für Betrachtungen über den Gang der Rechnung die Alten den Mangel allgemeiner Größenzeichen sich zu ersetzen wußten.

Den bei der XXX. Aufgabe angewendeten Lehnsatz kann man leicht durch eine allgemeine Formel beweisen. Man zerstückele x^2 in x und x^2-x, so ist das Produkt beider Stücke $=x^3-x^2$, addirt man dazu die Stücke x^2-x und x, so erhält man x^3, also in jedem Falle eine Kubikzahl.

XXXI.

Der Lehnsatz, aus welchem Diophantus den Ansatz herleitet, ist an sich selbst einleuchtend, da $x^2+x+\frac{1}{4}$ das vollständige Quadrat von $x+\frac{1}{2}$ ist. Da aber

$$x^2+ax+\frac{1}{4}a^2$$

das vollständige Quadrat von $x+\frac{1}{2}a$ ist, so kann man den Lehnsatz noch allgemeiner so ausdrücken: wenn man zu einem Quadrat ein Vielfaches seiner Wurzel und den vierten Theil von dem Quadrate der ganzen Zahl addirt, mit welchem man die Wurzel multiplicirt hat, so ist die Summe in jedem Falle wieder ein Quadrat.

Da jede Zahl die Summe von höchstens vier Quadraten ist, so ist die Auflösung allgemein möglich, die gegebene Zahl sei welche sie wolle. Man vergleiche übrigens Fermats Anmerkung zu dieser Aufgabe, und Légendre Théorie des Nombres S. 182. ff.

XXXIII.

Der Ansatz führt auf die vermischte quadratische Gleichung $5x^2 - 3x = 18$, und aus den Betrachtung über diese Gleichung lernen wir die Auflösung kennen, deren sich Diophantus bedient, und welche ich in den Anmerkungen zur Einleitung S. 348 ff. näher entwickelt habe. Aus jener Formel geht hervor, daß in dem vorliegenden Falle $5.18 + \frac{9}{4}$ ein Quadrat sein müßte, wenn x einen rationalen Werth erhalten soll. Da nun 5 der um 1 vergrößerte Coefficient von $4x^2$ ist, so muß statt 4 eine andere Quadratzahl z^2 von der Beschaffenheit gesucht werden, daß $(z^2+1)18 + \frac{9}{4}$ ein Quadrat wird. Dies führt darauf, daß man vorläufig $72z^2 + 81$, oder, da Diophantus nur ein Zeichen für die unbekannte Größe hat, $72x^2 + 81$ zu einem Quadrat machen muß.

Bei der Auflösung dieser Aufgabe würde eine neue Schwierigkeit entstehen, wenn nicht 81 schon ein Quadrat wäre. Es läßt sich aber zeigen, daß $18 + \frac{9}{4}$, folglig auch 81 nicht zufällig ein Quadrat wird. Die Zahl 18 ist hier nämlich ein Produkt von 3.6, die Zahl 3

ist aber dadurch entstanden, daß wir 3 von 6 abgezogen haben, daher ist $\frac{9}{4}$ das Quadrat von $\frac{3}{2}$, oder das Quadrat des halben Unterschiedes der vorhin multiplicirten Zahlen 3 und 6. Diophantus aber zeigt bei einer andern Gelegenheit, daß man immer ein Quadrat erhalte, wenn man zu dem Produkt zweier Zahlen das Quadrat ihres halben Unterschiedes addirt.

XXXVI.

Wenn man die erste Zahl $= 3x - 1$, die zweite $= x + 1$ setzt, und 1 zugleich für denjenigen aliquoten Theil annimmt, welchen die zweite Zahl an die erste abgeben soll, so ist eine Bedingung bereits erfüllt.

Um den Schluß, durch welchen Diophantus den aliquoten Theil bestimmt, den die erste Zahl an die zweite abgiebt, deutlich einzusehen, bezeichne man den von der ersten Zahl bleibenden Rest durch R, so soll die zweite Zahl $= 5R$ werden. Die Summe beider Zahlen ist also $6R$, und da eben diese Summe auch $4x$ beträgt, so ist $6R = 4x$, folglich $R = \frac{2}{3}x$. Da die erste Zahl anfangs $3x - 1$ war, und sich jetzt in $\frac{2}{3}x$ verwandelt hat, so muß sie $3x - 1 - \frac{2}{3}x = \frac{7}{3}x - 1$ an die zweite abgegeben haben.

Nunmehr kann man beide Bedingungen als erfüllt ansehen, wenn anders $\frac{7}{3}x - 1$ derselbe aliquote Theil

oder derselbe Bruch von $3x-1$ d. i. von der ersten Zahl ist, welcher 1 von $x+1$ d. i. von der zweiten Zahl war. Dies kann man aber dadurch bewirken, daß man den Werth von x durch die Gleichung

$$\left(\frac{7}{3}x-1\right)\times(x+1)=(3x-1)\times 1$$

bestimmt, d. h. wenn man jede der beiden Zahlen durch den aliquoten Theil der andern multiplicirt, und beide Produkte einander gleich setzt. Der Satz, welcher hierbei zum Grunde liegt, ist für sich klar, sobald man ihn durch allgemeine Zeichen darstellt. Man nehme zwei beliebige Zahlen a und b, so werden $\frac{n}{m}.a$ und $\frac{n}{m}.b$ gleiche aliquote Theile von a und b vorstellen können, und es ist

$$a\times\frac{n}{m}.b=b\times\frac{n}{m}.a=\frac{abn}{m}.$$

Setzt man nun

$$a.x=b.z,$$

so wird man auch umgekehrt schließen können, daß $x=\frac{n}{m}b$, und $z=\frac{n}{m}a$, d. h. daß x derselbe Bruch von b sei, welcher z von a ist.

Aus der Gleichung findet man, daß die erste Zahl $=\frac{8}{7}$, die zweite $=\frac{12}{7}$ sei, und daß jede $\frac{7}{12}$ ihres Werthes an die andere abgeben müsse, und hiermit konnte die Auflösung als beendigt angesehen werden; um aber die Brüche zu vermeiden, multiplicirt Diophantus die gefundenen Zahlen erst mit 7, und erhält nun die gan-

zen Zahlen 8 und 12. Da sich aber $\frac{7}{12}$ von 8 nur durch einen Bruch ausdrücken läßt, so multiplicirt er beide Zahlen nochmals mit 3, und erhält nun die Zahlen 24 und 36, welche sich beide durch 12 ohne Rest dividiren lassen.

XXXVII.

Man setze die gegebene Zahl $8=s$, die erste Zahl $=x$, die zweite $=a$, so hat man nach der Aufgabe

$$(a+1)x+a=s, \text{ also } x=\frac{s-a}{a+1}.$$

Diese Formel sagt dasselbe, was Diophantus in Worten ausspricht; es ist aber bemerkenswerth, wie die Alten, durch die einfache Betrachtung dessen, was bei einer Zahlenrechnung wesentlich oder zufällig ist, sich den Gebrauch allgemeiner Formeln zu ersetzen wußten.

XXXVIII.

Man sieht leicht, warum Diophantus die Einschränkung macht, daß jede der drei vorgeschriebenen Zahlen 8, 15, 24 ein um 1 vermindertes Quadrat sein müsse. Es ist nämlich aus Betrachtung der Gleichung $144=24x^2$ klar, daß die Auflösung nur dann in rationalen Zahlen möglich ist, wenn $\frac{144}{25}$ ein Quadrat ist.

Aus einer allgemeinen Auflösung der Aufgabe geht aber hervor, daß zwar durch die hier aufgestellte

Bedingung $\frac{144}{25}$ nothwendig ein Quadrat werden müsse, daß man aber, um diesen Zweck zu erreichen, die Bedingung weiter fassen könne. Es wird nämlich verlangt, daß das Produkt der ersten und zweiten Zahl nebst deren Summe die Zahl a, das Produkt der zweiten und dritten Zahl nebst deren Summe die Zahl b, das Produkt der ersten und dritten Zahl nebst deren Summe die Zahl c geben sollen. Man setze die zweite Zahl $x-1$, so ist die erste Zahl, nach der vorigen Aufgabe, $=\frac{a+1}{x}-1$, die dritte Zahl aber $\frac{b+1}{x}-1$, und dadurch werden schon zwei Bedingungen der Aufgabe erfüllt, welchen Werth auch x haben mag. Nun soll aber auch das Produkt der ersten und dritten Zahl nebst deren Summe die Zahl c geben, und daraus entsteht zunächst die Gleichung

$$c = \frac{(a+1)(b+1)}{x^2} - 1$$

und hieraus wieder

$$(c+1)x^2 = (a+1)(b+1), \text{ also } x^2 = \sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}}.$$

Man erhält also für x einen rationalen Werth, wenn der Quotient $\frac{(a+1)(b+1)}{c+1}$ ein Quadrat ist; dies ist nun immer der Fall, wenn $a+1$, $b+1$ und $c+1$ für sich genommen Quadrate sind, es wird aber auch dann schon der Fall sein, wenn nur $c+1$ und $(a+1)\times(b+1)$ sich wie zwei Quadrate gegen einander verhalten, und

die Bedingung konnte daher so ausgedrückt werden: die gegebenen Zahlen müssen so beschaffen sein, daß wenn man jede um 1 vermehrt, das Produkt aus je zweien sich zu der dritten wie ein Quadrat zu einem andern verhält.

Bachet erläutert dies noch durch folgendes Beispiel. Es sei $a=11$, $b=19$, $c=14$, so ist nur die hier angegebene, aber nicht die von Diophantus vorgeschriebene Bedingung erfüllt. Nun ist

$(a+1)\times(b+1)=12\times 20=240$, und $c+1=15$,

folglich $x=\sqrt{\frac{240}{15}}=\sqrt{16}=4$.

XLI.

Aus der Formel erhellet, daß man die zweite Zahl alle Mal größer annehmen muß, als den Exponenten des vorgeschriebenen Verhältnisses, wenn man für die erste Zahl einen positiven Werth verlangt.

XLIII.

Der erste Ansatz führt auf die Gleichung $25x^2=300$, welche für x nur dann einen rationalen Werth geben würde, wenn $\frac{300}{25}$ ein Quadrat wäre. Diophantus überlegt daher, auf welche Art die Zahlen 300 und 25 entstanden sind; setzt man nämlich statt der willkührlichen Zahl 5 das allgemeine Zeichen z, so ergiebt sich, daß

$300 = 3z.4z = 12z^2$, 25 aber $= 5z$ sei, und hieraus findet er, daß, wenn man statt 5 die Zahl 15 setzt, man für x einen rationalen Werth erhält, und daß 6, $7\frac{1}{2}$ und 10 drei Zahlen von der Beschaffenheit sind, daß das Produkt von je zweien zu der Zahl 15 das vorgeschriebene Verhältniß hat. Nach der Aufgabe soll aber dies Produkte nicht zu der willkührlichen Zahl 15, sondern zu der Summe der Zahlen das vorgeschriebene Verhältniß haben, und dies bewirkt Diophantus vermittelst folgendes Satzes:

Wenn drei Zahlen a, b und c so beschaffen sind, daß das Produkt von je zweien zu einer dritten Zahl s ein vorgeschriebenes Verhältniß hat, und man multiplicirt die Zahlen a, b, c mit einer beliebigen Zahl x, die Zahl s aber mit x^2, so wird auch jetzt noch das Produkt aus je zweien zu der Zahl sx^2 dasselbe Verhältniß haben. Ist nämlich $ab = ns$, so ist offenbar $ax.bx = nsx^2$, und um daher die Hauptbedingung der Aufgabe zu lösen, ist die Frage bloß diese: Mit welcher Zahl x muß man die Zahlen 6, $7\frac{1}{2}$ und 10, oder allgemein a, b, c multipliciren, damit $(a+b+c)x = sx^2$ sei, woraus sich $x = \frac{a+b+c}{s}$ ergiebt.

Setzt man die Summe der drei Zahlen $= x^2$, die erste Zahl $= \frac{6}{x^2}$, die zweite $= \frac{4}{x^2}$, die dritte $= \frac{8}{x^2}$, so

wer-

werden durch die bloße Form der Zahlen alle Bedingungen der

XLIV. Aufgabe

erfüllt. Um aber den Zahlenwerth von x zu finden, hat man die Gleichung $x^4 = 18$, welche nur dann einen rationalen Werth geben würde, wenn 18 eine Biquadratzahl wäre. Da 18 die Summe der drei Zahlen 6, 4 und 8 ist, so muß man statt dieser Zahlen drei andere wählen, deren Summe ein Biquadrat ist, und zwar soll die erste eine dreieckige, die zweite eine Quadratzahl, die dritte eine Kubikzahl sein.

Setzt man die Summe der drei Zahlen $= x^4$, die Quadratzahl $= x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$, die Kubikzahl aber $= 8$, so muß der Rest $2x^2 - 9$ die gesuchte dreieckige Zahl sein. Bekanntlich läßt sich jede dreieckige Zahl durch die Formel $\frac{n(n+1)}{2}$ oder $\frac{n^2+n}{2}$ vorstellen, wenn n die Seite oder die Wurzel der dreieckigen Zahl bedeutet. Ist nun a eine gegebene dreieckige Zahl, deren Wurzel gesucht wird, so hat man die Gleichung

$$\frac{n^2+n}{2} = a,$$

und man erhält $n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(8a+1)}$. Wenn also a wirklich eine dreieckige Zahl ist, so muß $\sqrt{(8a+1)}$ einen rationalen Werth haben, d. h. $8a+1$ muß eine Quadratzahl sein. In unserem Falle ist $a = 2x^2 - 9$,

hieraus folgt also, daß $8(2x^2-9)+1=16x^4-71$ ein Quadrat sein müsse, und daraus ergiebt sich, daß man statt der Zahlen 6, 4 und 8, die Zahlen 153, 6400 und 8 setzen müsse.

XLV.

Diese sinnreiche Auflösung wird durch verschiedene Zwischenbetrachtungen, welche sie herbeiführt, etwas verwickelt, wir wollen daher das ganze Verfahren noch ein Mal kurz darstellen, und dabei die von Diophantus nur kurz berührten Punkte näher erläutern.

Wenn man die kleinste Zahl $=2-x$, die mittelste $=x+2$, die größte $=7x+2$ setzt, so sind durch diesen Ansatz bereits zwei Bedingungen erfüllt; es ist nämlich

1) der Unterschied der größten und mittelsten Zahl das Dreifache von dem Unterschiede der mittelsten und der kleinsten Zahl; auch ist
2) die Summe der mittelsten und der kleinsten Zahl ein Quadrat, nämlich 4.

Es sind also noch die beiden Bedingungen übrig, daß auch die Summe der größten und mittelsten Zahl, d. i. $8x+4$, und die Summe der größten und der kleinsten Zahl d. i. $6x+4$ ein Quadrat sei. Da in beiden Formeln die bestimmten Zahlen sich gegeneinander heben, und der Unterschied beider Formeln $=2x$ wird, so läßt sich die doppelte Gleichung hier sehr bequem anwenden, und man findet $x=112$. Nun würde aber die kleinste

Zahl 2—x einen negativen Werth erhalten, und man muß also die Auflösung so einrichten, daß x kleiner als 2, folglich 6x+4 kleiner als 16 wird.

Zu diesem Ende verwirft Diophantus den allgemeinen Ausdruck für die drei Quadrate nicht ganz, weil derselbe bereits einer Hauptbedingung, das Verhältniß der Unterschiede betreffend, Genüge leistet; es ist nämlich der Unterschied des größten und mittelsten (2x) ein Drittheil von dem Unterschiede des mittelsten und des kleinsten (6x), weil die drei Zahlen selbst so bestimmt worden sind, daß der Unterschied der größten und der mittelsten das Dreifache war von dem Unterschiede der mittelsten und der kleinsten.

Um nun der Bedingung, daß x kleiner werden soll als 2, ebenfalls zu genügen, will Diophantus den Werth für x durch folgendes Verfahren bestimmen. Er behält das Quadrat 4, oder das kleinste der drei Quadrate bei, und will dazu noch zwei andere Quadrate von der Beschaffenheit suchen, daß der Unterschied des größten und des mittelsten ein Drittheil sei von dem Unterschiede des mittelsten und des kleinsten, und hierauf entweder das größere der beiden neuen Quadrate dem Quadrat 8x+4, oder das kleinere der beiden neuen Quadrate dem Quadrat 6x+4 gleich setzen; eine Auflösung der doppelten Gleichung, welche bis dahin noch nicht gebraucht worden ist.

Um sich aber zu überzeugen, daß man auf diesem Wege aus beiden Gleichungen denselben Werth für x er-

halte, setze man der Kürze wegen $8x+4=A$, $6x+4=B$, $4=C$, so ist nach der vorigen Betrachtung

$$A-B=\frac{1}{3}(B-C).$$

Nun suche man zu dem Quadrat C noch zwei Quadrate D und E von der Beschaffenheit, daß

$$D-E=\frac{1}{3}(E-C).$$

Setzt man nun $B=E$, so wird offenbar auch $A=D$ sein. Es ist nämlich $\frac{1}{3}(B-C)=\frac{1}{3}(E-C)$, folglich $A-B=D-E$, und da hier die Subtrahendi und die Reste gleich sind, so müssen auch die Minuendi A und D einander gleich sein.

Um die Quadrate, welche wir hier durch D und E bezeichnet haben, zu finden, setzt Diophantus die Wurzel von $E=x+2$, also $E=x^2+4x+4$, und findet, daß $D=\frac{1}{3}x^2+5\frac{1}{3}x+4$ sein müsse, und daß man daher $3x^2+12x+9$ zu einem Quadrat machen müsse. Die Wurzel dieses Quadrats muß nun die Form $3-nx$ haben, damit sich 9 gegen 9 hebe; aber n darf nicht willkührlich genommen werden, wenn x nicht die vorgeschriebene Grenze übersteigen soll. Diophantus überlegt daher, durch welche Rechnung x gefunden wird, um darnach den Coefficienten n bestimmen zu können. Setzt man nämlich

$$3x^2+12x+9=(3-nx)^2=n^2x^2-6nx+9,$$

so wird $x=\frac{6n+12}{n^2-3}$.

Man muß daher n so wählen, daß $\frac{6n+12}{n^2-3}$ kleiner als 2, folglich $6n+12$ kleiner als $2n^2-6$, also $2n^2$ größer als $6n+18$ wird.

Betrachtet man die Formel $2n^2=6n+18$ als eine vermischte quadratische Gleichung, und löst dieselbe nach Diophantus Regel für diese Gleichungen auf, so wird $n=\frac{\sqrt{(9+2.18)}+3}{2}$.

Nun ist $\sqrt{(9+2.18)}=\sqrt{45}$ offenbar kleiner als 7, folglich $\sqrt{45}+3$ kleiner als 10, und n wird etwas kleiner als 5. Diophantus schließt aber, n dürfe nicht kleiner als 5 sein, und die Richtigkeit dieses Schlusses erhellet so. Wenn man $2n^2=6n+18$, oder $2n^2-6n=18$ setzt, so ist n um ein Weniges kleiner als 5; nun soll aber $2n^2-6n$ größer als 18 sein, daher muß man für n einen etwas größeren Werth nehmen, als die eben geführte Rechnung gab, und dies geschieht wenn man $n=5$ setzt, oder irgend eine größere Zahl dafür nimmt, so daß also 5 wirklich die kleinste ganze Zahl ist, welche für n gesetzt werden kann.

Setzt man nun

$$3x^2+12x+9=(3-5x)^2=9-30x+25x^2,$$

so wird $x=\frac{21}{11}$, und das Quadrat E, welches dem Quadrat $6x+4$ gleich gesetzt werden sollte, wird $=\frac{1849}{121}$, das Quadrat D, welches dem Quadrat $8x+4$ gleich gesetzt

werden sollte, wird $\frac{2304}{121}$. Man hat also die beiden Gleichungen

$$1.\ 8x+4=\frac{2304}{121};\quad 2.\ 6x+4=\frac{1849}{121}.$$

Aus der ersten ergiebt sich $x=\frac{1365}{726}$; aus der zweiten $x=\frac{1820}{968}$; beide Werthe für x sind aber einander gleich, indem sie in kleineren Zahlen ausgedrückt $=\frac{455}{242}$ sind. Setzt man endlich diesen Werth für x in die drei Formeln $7x+2$, $x+2$, $2-x$, so hat man drei Zahlen von der verlangten Beschaffenheit.

XLVI.

Durch Betrachtungen, welche in dem Texte deutlich entwickelt werden, findet Diophantus, daß man die größte Zahl $=8x^2+2$ setzen könne, und daß alsdann die mittelste Zahl $=8x^2-2$, die dritte oder kleinste endlich $=x^2-2$ sein müsse. Nun ist das Quadrat der größten Zahl $=64x^4+32x^2+4$, das Quadrat der mittelsten aber $=64x^4-32x^2+4$, also der Unterschied beider $=64x^2$. Dieser Unterschied soll nun das Dreifache von dem Unterschiede zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl sein, d. h. $64x^2=3.7x^2$.

Da diese Gleichung nicht Statt finden kann, so kommt es darauf an zu überlegen, auf welche Weise dieselbe entstanden ist, woraus sich ergiebt, daß statt der willkührlichen Zahl 2 in dem allgemeinen Ausdruck für

die drei gesuchten Zahlen eine andere zu setzen sei. Nennt man diese Zahl vorläufig n, d. h. setzt man die erste Zahl $=8x^2+n$, die zweite $=8x^2-n$, die dritte $=x^2-n$, so wird der Unterschied des größten und mittelsten Quadrates $=32.nx^2$, und da der Unterschied zwischen der mittelsten und der kleinsten Zahl $7x^2$ ist, so muß man n so wählen, daß $32.nx^2=3.7.x^2$, also auch $32n=3.7$ wird, d. h. man muß $n=\frac{21}{32}$ setzen.

Anmerkungen zum fünften Buche.

III. — IV.

Es ist aus dem griechischen Texte nicht ganz klar, aber doch sehr wahrscheinlich, daß die Porismen eine besondere Schrift des Diophantus waren, in welchen besonders die Form der Zahlen und ihre Zusammensetzung aus gewissen Bestandtheilen erörtert wurde. Aus eben dieser Schrift sind vermuthlich auch diejenigen Sätze entlehnt, welche in den früheren Büchern angeführt wurden, da sie ihrem Inhalte nach mit diesem sehr nahe verwandt sind. Ueber den eigentlichen Begriff eines Porisma habe ich mich in einer kleinen Abhandlung über die geometrische Analysis der Griechen, in des Herrn Professors Fischer Anmerkungen zu seinem Lehrbuche der Geometrie ausführlicher erklärt, und ich finde, daß auch die hier als Porismen aufgestellten Sätze ganz dem dort entwickelten Begriff entsprechen. Man kann und muß den Satz nämlich so stellen: man hat zwei Zahlen von der Beschaffenheit, daß sowohl

jede derselben für sich, als das Produkt beider ein Quadrat wird, wenn man eine vorgeschriebene Zahl dazu addirt, und man soll erforschen, auf welche Art diese Zahlen entstanden sind, oder aus was für Bestandtheilen sie sich zusammen setzen lassen. Sehr anziehend müßte es sein, das in den Porismen gebrauchte Verfahren der Erforschung, insofern es arithmetische Fragen betraf, näher zu kennen, leider findet sich bei Diophantus davon keine Spur mehr, unstreitig aber würden wir von der allgemeinen Arithmetik der Griechen dadurch eine andere Vorstellung bekommen, als man sich jetzt davon zu bilden geneigt ist.

Die Art, wie Diophantus aus zwei auf einander folgenden Quadraten seinen Ansatz herleitet, ist von ihm selbst deutlich beschrieben worden. Man nehme zwei Quadrate deren Wurzeln um 1 verschieden sind, z. B. a^2 und a^2+2a+1, und ziehe von jedem die vorgeschriebene Zahl b ab, so ist von selbst klar, daß die Reste a^2-b und $a^2+2a+1-b$ Quadrate werden müssen, wenn man die Zahl b dazu addirt. Setzt man nun die dritte Zahl der doppelten Summe der ersten und zweiten weniger 1 gleich, oder

$$=2(a^2-b+a^2+2a+1-b)-1=4a^2+4a-4b+1,$$

so haben diese Zahl die Eigenschaften, daß die Produkte aus je zweien Quadrate werden, wenn man die Zahl b dazu addirt. Es ist nämlich das Produkt der ersten und zweiten Zahl, wenn man b dazu addirt,

$$a^4+2a^3+a^2-2a^2b-2ab+b^2=(a^2+a-b)^2.$$

Es ist ferner das Produkt der ersten und dritten Zahl, wenn man b dazu addirt

$4a^4+4a^3+a^2-8a^2b-4ab+4b^2=(2a^2+a-2b)^2$,

und endlich ist das Produkt der zweiten und dritten Zahl, wenn man b dazu addirt,

$4a^4+12a^3+13a^2+6a-8a^2b-12ab$
$-4b+4b^2+1=(2a^2+3a+1-2b)^2$

Es bleibt daher nur noch die eine Bedingung übrig, nämlich daß auch die dritte Zahl, wenn man b dazu addirt, ein Quadrat werde, und diese Bedingung läßt sich sehr leicht erfüllen, wenn man $2x-6$ als die gesuchte Wurzel ansieht.

Auf ähnliche Art kann man sich auch überzeugen, daß in der vierten Aufgabe die drei Zahlen,

x^2+6, x^2+2x+7 und $4x^2+4x+28$

durch ihre bloße Form alle Bedingungen der Aufgabe bis auf eine erfüllen, welche wieder auf dem bekannten Wege erreicht wird.

V.

Den Lehnsatz, auf welchen sich Diophantus bezieht, kann man auf folgende Art leicht beweisen.

Man nehme zwei auf einander folgende Quadrate, d. h. solche, deren Wurzeln um 1 verschieden sind, nämlich

$(x+1)^2=x^2+2x+1$, und $(x+2)^2=x^2+4x+4$,

und dazu nehme man als dritte Zahl $4x^2+12x+12$,

d. h. die doppelte Summe beider +2, so haben diese drei Zahlen die behauptete Eigenschaft.

Das Produkt der beiden ersten Zahlen ist nämlich

$$x^4+6x^3+13x^2+12x+4.$$

Addirt man dazu die Summe der beiden ersten Zahlen, so erhält man

$$x^4+6x^3+15x^2+18x+9=(x^2+3x+3)^2.$$

Addirt man aber die dritte Zahl, so erhält man

$$x^4+6x^3+17x^2+24x+16=(x^2+3x+4)^2.$$

Das Produkt der ersten und der dritten Zahl ist

$$4x^4+20x^3+40x^2+36x+12.$$

Addirt man dazu die Summe der ersten und der dritten Zahl, so erhält man

$$4x^4+20x^3+45x^2+50x+25=(2x^2+5x+5)^2.$$

Addirt man aber die zweite Zahl, so erhält man

$$4x^4+20x^3+41x^2+40x+16=(2x^2+5x+4)^2.$$

Das Produkt der zweiten und dritten Zahl endlich ist

$$4x^4+28x^3+76x^2+96x+48.$$

Addirt man dazu die Summe der beiden Zahlen, so erhält man

$$4x^4+28x^3+81x^2+112x+64=(2x^2+7x+8)^2.$$

Addirt man aber die erste Zahl, so erhält man

$$4x^4+28x^3+77x^2+98x+49=(2x^2+7x+7)^2.$$

Durch den gewählten Ansatz sind also alle Bedingungen der Aufgabe wirklich erfüllt, bis auf die eine, daß auch $4x^2+12x+12$ ein Quadrat sein soll.

VI.

Diophantus bemerkt zuerst, daß, wenn man zu den in der vorigen Aufgabe gefundenen Zahlen noch 2 addirt, diese Zahlen der Aufgabe genügen, eine Behauptung die sich sogleich als richtig beweis't, wenn man mit drei Zahlen von der vorgeschriebenen Form die angegebene Rechnung vornimmt.

Um jedoch nicht die Zahlen aus der vorigen Aufgabe beizubehalten, ändert Diophantus den Ansatz insofern, als er für die beiden auf einander folgenden Quadrate, welche in der vorigen Aufgabe x^2+2x+1 und x^2+4x+4 waren, jetzt zwei andere Quadrate von der nämlichen Beschaffenheit, nämlich x^2 und x^2+2x+1 annimmt, woraus er für den gegenwärtigen Zweck die Zahlen x^2+2, x^2+2x+3 und $4x^2+4x+6$ herleitet. Da die Zahl $4x^2+4x+4$ noch nicht durch ihre bloße Form ein Quadrat ist, so muß sie auf dem gewöhnlichen Wege zu einem Quadrat gemacht werden.

VII.

Wenn zwei Zahlen a und b die Eigenschaft haben, daß ihr Produkt und die Summe ihrer Quadrate zusammengenommen wieder ein Quadrat geben, so hat auch jedes Vielfache dieser Zahlen z. B. an und bn dieselbe Eigenschaft, d. h. wenn $ab+a^2+b^2$ ein Quadrat ist, so wird $abn^2+a^2n^2+b^2n^2$ ebenfalls ein Quadrat

sein. Der Ausdruck läßt sich nämlich in die Factoren n^2 und $ab+a^2+b^2$ zerfällen, und da der erste nach der Construction, der zweite nach der Annahme ein Quadrat ist, so ist auch die ganze Formel ein Quadrat. Daher war Diophantus berechtigt, die Zahlen $\frac{3}{5}$ und 1 mit einer beliebigen Zahl zu multipliciren, und es werden daher nicht bloß die Zahlen 3 und 5, sondern jedes Vielfache dieser Zahlen der Aufgabe Genüge leisten.

VIII.

Was es heiße, ein rechtwinkliges Dreieck werde von zwei Zahlen gebildet, ist schon in der Anmerkung zu der XXII. Aufgabe des dritten Buches bemerkt worden. Wenn man nämlich ein Dreieck aus den Zahlen a und b bildet, so sieht man die Zahl a^2+b^2 als die Hypotenuse, a^2-b^2 als die eine, und die Zahl $2ab$ als die andere Kathete an, wobei es gewöhnlich ist, diejenige Kathete, welche durch die Zahl a^2-b^2 vorgestellt wird, die Grundlinie, diejenige Kathete, welche durch $2ab$ vorgestellt wird, das Loth zu nennen.

Daß ein Dreieck, dessen Seiten durch die Zahlen a^2+b^2, a^2-b^2 und $2ab$ vorgestellt werden können, nothwendig rechtwinklig sein müsse, ist leicht zu übersehen, denn das Quadrat der Grundlinie wird $a^4-2a^2b^2+b^4$, das Quadrat des Loths wird $4a^2b^2$, also ist das Quadrat beider Katheten $=a^4+2a^2b^2+b^4$, und eben so groß ist auch das Quadrat der dritten Seite, weil

$(a^2+b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4$. Es folgt also (aus Eukl. I. 48), daß ein so gebildetes Dreieck rechtwinklig sein müsse.

Stellt man das Verfahren, wodurch Diophantus drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt sucht, allgemein vor, so ist

das erste von den Zahlen $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ und a,

das zweite von den Zahlen $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ und b,

das dritte von den Zahlen $\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ und $(a+b)$

gebildet, und nun läßt sich leicht zeigen, daß alle diese Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben müssen.

In dem ersten Dreieck ist nämlich die Hypotenuse $= 2a^2+b^2+ab$, die Grundlinie $= b^2+ab$, das Loth $= 2a\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, folglich wird der Flächeninhalt $= (b^2+ab)a\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, oder wenn man $\sqrt{(a^2+b^2+ab)} = r$ setzt, $= (a^2b+ab^2)r$.

In dem zweiten Dreieck ferner ist die Hypotenuse $= a^2+2b^2+ab$, die Grundlinie $= a^2+ab$, das Loth endlich $= 2b\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, folglich wird der Flächeninhalt $= (a^2+ab)b\sqrt{(a^2+b^2+ab)} = (a^2b+ab^2)r$.

In dem dritten Dreieck endlich ist die Hypotenuse $= 2a^2+2b^2+3ab$, die Grundlinie $= ab$, und das Loth $= 2(a+b)\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$, folglich wird der Flächeninhalt $= ab(a+b)\times\sqrt{(a^2+b^2+ab)} = (a^2b+ab^2)r$.

IX.

Wenn a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, so ist das Quadrat der Hypotenuse

$= a^2 + b^2$, der vierfache Flächeninhalt $= 2ab$, folglich erhält man alle Mal ein Quadrat, man mag die vierfache Fläche zu dem Quadrat der Hypotenuse addiren, oder dieselbe davon abziehen.

Die Zahlen 58, 74, 113 sind nun Hypotenusen von drei verschiedenen Dreiecken, deren Fläche $= 3360$ ist, folglich werden die Quadrate der genannten Zahlen auch dann noch Quadrate bleiben, wenn man 3360 dazu addirt, oder davon abzieht. Wäre nun 3360 auch die Summe der drei Zahlen 58, 74, 113, so wäre die Aufgabe bereits gelöst. Um auch diese Bedingung zu erfüllen, multiplicire man die Seiten der drei gesuchten Dreiecke mit einer unbekannten Zahl x, so werden die dadurch entstehenden Dreiecke noch immer die vorige Eigenschaft behalten, die Hypotenusen aber werden $58x$, $74x$, $113x$, und der Flächeninhalt $= 3360x^2$ sein. Die Frage ist also nur: wie groß muß x sein, damit $58x + 74x + 113x = 3360x^2$ werde?

X.

Der erste Theil des Satzes hat bloß die Absicht, die Möglichkeit der Auflösung im Allgemeinen zu zeigen, und sie für einen bestimmten Fall wirklich auszuführen, der zweite Theil soll zeigen, wie man aus diesem Verfahren eine allgemeine Regel der Auflösung entwickeln könne, ἵνα καὶ ἐν μεθόδῳ κείμενον ᾖ. Zu diesem Ende überlegt Diophantus, durch welche Rech-

nung die einzelnen Zahlen entstanden sind, und was in dieser Rechnung bloß zufällig oder wesentlich sei, und erhält auf diese Weise dasselbe Ergebniß, welches man durch Rechnung in allgemeinen Zeichen findet.

Man nenne die drei gegebenen Quadrate a^2, b^2, c^2; setzt man nun die erste der gesuchten Zahlen $= x$, die zweite $= \frac{a^2}{x}$, die dritte $= \frac{b^2}{x}$, so sind bereits zwei Bedingungen erfüllt, denn das Produkt der ersten und zweiten ist a^2, das Produkt der ersten und dritten ist b^2; es ist also nur noch zu bewirken, daß das Produkt der zweiten und dritten oder $\frac{a^2 b^2}{x^2} = c^2$ sei. Man nehme beide Ausdrücke als gleich an, so ist

$$c^2 x^2 = a^2 b^2;\ x^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2},\ x = \frac{ab}{c},$$

eine Formel, welche die von Diophantus ausgesprochene Regel in allgemeinen Zeichen ausdrückt. Entwickelt man den Werth der beiden übrigen Zahlen, so wird die erste $= a^2 : \frac{ab}{c} = \frac{ac}{b}$, und die zweite $= b^2 : \frac{ab}{c} = \frac{bc}{b}$, so daß also die Allgemeinheit der Regel einleuchtet.

XI.

Die Anwendung des für x gefundenen Werthes fehlt bei Diophantus ganz, auch sind die angegebenen Zahlen in dem griechischen Texte durch unregelmäßige Brüche ausgedrückt, in welche sich augenscheinlich manche Fehler eingeschlichen haben. Bachet giebt für x den

durch

durch kleinere Zahlen ausgedrückten Werth $\frac{781543}{9699920}$, und berechnet hieraus die erste Zahl $= \frac{838595639}{27402274}$, die zweite $\frac{3267631283}{281297680}$, die dritte $= \frac{2561116411}{358897040}$, überläßt aber die Prüfung der Zahlen demjenigen, der mehr Lust und Muße als er dazu habe. Da dies bei dem Verfasser dieser Uebersetzung nicht der Fall ist, so beschränkt er sich bloß auf folgende Bemerkungen, welche die Richtigkeit des Verfahrens zeigen werden.

Diophantus hat in der VIII. Aufgabe gezeigt, wie man drei rechtwinklige Dreiecke von gleichem Flächeninhalt finden könne, und wir wissen, daß folgende Dreiecke dieser Forderung genügen:

I. 40, 42, 58.

II. 24, 70, 74.

III. 15, 112, 113.

Nennen wir nun die gemeinschaftliche Fläche dieser Dreiecke f, die Hypotenusen aber der Reihe nach a, b, c, so wissen wir aus IX. daß $a^2 \pm 4f$, $b^2 \pm 4f$ und $c^2 \pm 4f$ alle Mal ein Quadrat sei, und wenn wir also drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Produkte von je zweien a^2, b^2 und c^2 geben, ihre Summe aber $= 4f$ wird, so ist die gegenwärtige Aufgabe gelöst. Das erste hat gar keine Schwierigkeit, denn wir wissen aus der Anmerkung zur X. Aufgabe, daß die Zahlen $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$ die verlangte Eigenschaft haben. Damit nun

$4f$ aber auch der Summe der drei Zahlen gleich werde, so multiplicirt Diophantus diese Zahlen mit x, und dies ist eben so viel, als hätte er die Hypotenusen selbst, und überhaupt alle Seiten der obigen Dreiecke mit x multiplicirt, wodurch bloß ihre Größe, aber keineswegs ihre übrigen Eigenschaften geändert werden. Daher verwandelt sich die gemeinschaftliche Fläche dieser Dreiecke in fx^2; es ist also nur noch die Frage, wie groß muß x sein, damit

$$\frac{ab}{c}x+\frac{ac}{b}x+\frac{bc}{a}x=4fx^2$$

werde, und man findet

$$x=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4abcf}.$$

XII.

Wenn man die beiden Stücke, in welche die Zahl 1 getheilt werden soll, allgemein durch y und z bezeichnet, so verlangt die Aufgabe, daß sowohl $y+6$ als $z+6$ ein Quadrat, also $12+y+z=13$ die Summe zweier Quadrate sein soll, deren jedes größer als 6 und kleiner als 7, oder, wie Diophantus nachher dieselbe Bedingung ausdrückt, deren Differenz kleiner als 1 ist. Denn wenn diese Quadrate gefunden sind, so ist nur noch erforderlich, von jedem Quadrat die Zahl 6 abzuziehen, um sogleich die Werthe von y und z zu haben.

Um nun 13 in zwei Quadrate von der verlangten Eigenschaft zu theilen, wählt Diophantus folgenden Weg. Er nimmt die Hälfte der Zahl $13=6\frac{1}{2}$, und

sucht zuerst ein Quadrat, welches dieser Zahl möglichst nahe kommt, d. h. er sucht einen möglichst kleinen Bruch, der zu der Zahl $6\frac{1}{2}$ addirt, diese Zahl zu einem Quadrate macht. Um den Bruch wegzuschaffen, multiplicirt er $6\frac{1}{2}$ mit der Quadratzahl 4, und sucht einen quadratischen Bruch d. i. ein Bruch von der Form $\frac{1}{x^2}$, der so beschaffen ist, daß $26+\frac{1}{x^2}$, folglich auch der vierte Theil dieser Zahl, d. i. $6\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}$ ein Quadrat wird. Um $26+\frac{1}{x^2}$ desto leichter zu einem Quadrat zu machen, multiplicire man diesen Ausdruck mit x^2, und mache $26x^2+1$ zu einem Quadrat, was gar keine Schwierigkeit hat, da das letzte Glied 1 ein Quadrat ist. Die Wurzel wird nun die Form $nx+1$ haben müssen, und n könnte ganz beliebig gewählt werden, wenn nicht gefordert werden müßte, daß $\frac{1}{x^2}$ ein eigentlicher Bruch, also x größer als 1 sei. Wir wollen indeß die Betrachtung, wie n zu wählen sei, für jetzt noch übergehen, um darüber am Ende dieser Anmerkung ausführlicher zu reden.

Diophantus setzt $n=5$, d. h. er setzt $26x^2+1=(5x+1)^2=25x^2+10x+1$, und findet aus diesem Ansatz $x=10$, also $\frac{1}{x}=\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{100}$, folglich wird $26+\frac{1}{x^2}=\frac{2601}{100}$. Diese Zahl ist nun das Quadrat von $\frac{51}{10}$, und es ist klar, daß auch der vierte Theil dieser Zahl

d. i. $6\frac{1}{2}+\frac{1}{4x^2}=\frac{2601}{400}$ ein Quadrat, und nur um $\frac{1}{400}$ größer als $6\frac{1}{2}$ sein werde.

Nunmehr kommt es darauf an, die Zahl 13 in zwei Quadrate zu theilen, deren jedes sich der Zahl $\frac{2601}{400}$ möglichst nähert, oder auch, deren Wurzeln der Zahl $\frac{51}{20}$ möglichst nahe kommen. Da 13 die Summe zweier Quadrate, 4 und 9 ist, so werden die Wurzeln der gesuchten Quadrate die Form $2+nx$ und $3-mx$ haben müssen. Wollte man nun, daß beide Wurzeln genau den Werth $\frac{51}{20}$ erhalten, so müßte man $nx=\frac{11}{20}$, und $mx=\frac{9}{20}$ setzen, wie man leicht findet, wenn man 2 von $\frac{51}{20}$, und $\frac{51}{20}$ von 3 abzieht.

Man setze jetzt die eine Wurzel $2+nx$, die andere $3-9x$, so haben beide Wurzeln noch den gleichen Werth $\frac{51}{20}$, so lange $x=\frac{1}{20}$ ist. Unter dieser Voraussetzung werden aber die Quadrate dieser Wurzeln gleich, nämlich beide $=\frac{2601}{400}$, also die Summe von beiden $=\frac{2601}{200}=13\frac{1}{200}$ sein. Man setze aber die Summe beider Quadrate, d. h. $202x^2-10x+13=13$, so ist klar, daß man für x einen etwas kleineren Werth als $\frac{1}{20}$ erhalten müsse, und nun wird die Wurzel $2+nx$ etwas kleiner, die Wurzel $3-mx$ etwas größer als $\frac{51}{20}$ sein, und die Zahl 13 ist also in

zwei Quadrate getheilt, deren jedes dem Quadrat $\frac{2601}{400}$ nahe kommt, also wenig größer oder kleiner als $6\frac{1}{2}$ ist.

Diese sinnreiche Methode, zwei Quadrate der halben Summe beider, also auch eines dem andern möglichst nahe zu bringen, nennt Diophantus im Folgenden τὴν τῆς παρισότητος ἀγώγην, das Verfahren der Beinahegleichheit oder der Annäherung an einen vorgeschriebenen Werth, und wir werden in der Folge sehen, daß es sich auf drei und überhaupt so viele Quadrate, als man immer will, anwenden läßt.

Wir sahen vorhin, daß, wenn man $26x^2+1$ zu einem Quadrat macht, die Wurzel $nx+1$ so zu bestimmen sei, daß x größer als 1 wird, und es entsteht daher die Frage, wie die Zahl n zu wählen sei. Man überlege zuerst, wie man Werth von x findet; setzt man aber

$$26x^2+1=(nx+1)^2$$

so wird $x=\frac{2n}{26-n^2}$, und wir sehen also schon, daß n^2 nicht größer als 26, also n in ganzen Zahlen höchstens $=5$ sein kann. Nun soll aber auch

$$\frac{2n}{26-n^2}>1, \text{ folglich } n^2+2n>26$$

sein, und wenn man diesen Ausdruck als eine vermischte quadratische Gleichung behandelt, so findet man $n=\sqrt{27}-1=4,19$. Dieser Werth ist aber noch zu klein, da man, um den obigen Ausdruck in eine

wirkliche Gleichung zu verwandeln für 26 eine etwas größere Zahl setzen müßte. Um daher sicher zu gehen, muß man n in ganzen Zahlen mindestens =5 setzen, so daß also die Wurzel weder größer noch kleiner werden konnte, als $5x+1$, insofern man für n eine ganze Zahl setzen will.

Bezeichnet man die in der Aufgabe vorgeschriebene Zahl 6 durch a, so kommt alles darauf an, die Zahl $2a+1$ in zwei Quadrate zu theilen, und die Aufgabe ist daher nur zu lösen, wenn $2a+1$ entweder selbst ein Quadrat, oder die Summe zweier Quadrate ist. Diophantus fügt daher dieser Aufgabe eine Bedingung bei, welche im griechischen Texte wörtlich lautet:

δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἀριθμὸν μονάδα ἃ μείζονα [ἔχῃ μέρος τέταρτον], ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Es ist kaum möglich, in die zweite Hälfte des Satzes, so wie sie im Texte steht, einen Sinn zu bringen. Man werfe aber die Worte μέρος τέταρτον, als ein Glossem eines Abschreibers, aus dem Texte, und lese ἔχειν statt ἔχῃ, ὅς statt ἢ und τινός statt des abgekürzten του, so ist die Uebersetzung wörtlich: die gegebene Zahl muß weder eine ungerade sein, noch das Doppelte derselben eine um 1 größere Zahl haben, welche von einer Primzahl gemessen wird, d. h. a muß eine Zahl von der Form 2n, also $2a+1$ von der Form $4n+1$, und zugleich eine Primzahl sein. Die letztere Bedingung hätte allerdings viel kürzer

ausgedrückt werden können, aber der Verfasser hatte ein Mal die erste Bedingung durch eine Verneinung ausgedrückt, und wurde dadurch veranlaßt, auch die zweite auf dieselbe Weise auszudrücken. Wie das μέρος τέταρτον in dem Text gekommen sei, ist leicht zu erklären, denn da die gegebene Zahl eine gerade sein soll, so muß das Doppelte derselben durch 4 theilbar sein, oder μέρος τέταρτον ἔχειν; dies bemerkte ein Leser bei den Worten ὁ διπλασίων αὐτοῦ, und ein Abschreiber, der das Ganze nicht faßte, nahm es in den Text auf.

Daß die Bedingung, so wie sie hier entwickelt ist, vortrefflich zu der Aufgabe paßt, ist leicht zu übersehen. Denn gesetzt die gegebene Zahl a wäre ungerade oder von der Form $2n+1$, so wäre $2a+1$ von der Form $4n+3$, oder $4n-1$. Es läßt sich aber beweisen, daß eine Zahl von dieser Form nie die Summe zweier Quadrate sein kann.

Denn in Rücksicht auf den Divisor 4 können alle Zahlen unter einer von folgenden 4 Formen vorgestellt werden: $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, die Quadrate davon sind $16n^2$, $16n^2+8n+1$, $16n^2+16n+4$, $16n^2+24n+9$. Vergleicht man diese Quadrate in Rücksicht auf den Divisor 4, so sind die geraden Quadrate alle von der Form $4n$, die ungeraden von der Form $4n+1$, und es kann kein Quadrat von der Form $4n+2$ und $4n+3$ geben. Sollte nun die ungerade Zahl $2a+1$ die Summe zweier Quadrate sein, so müßte das eine derselben gerade, also von der Form $4n$, das zweite ungerade, also

von der Form $4n+1$ sein, also wird auch die Summe derselben alle Mal die Form $4n+1$ haben, und eine Zahl von der Form $4n+3$ kann nie die Summe zweier Quadrate sein. Allein hiedurch hätte Diophantus bloß gewisse für seinen Zweck unbrauchbare Zahlen ausgeschlossen, aber die Bedingung ist auch so gefaßt, daß alle unbrauchbaren Zahlen dadurch ausgeschlossen sind. Euler beweis't nämlich in den Denkschriften der Petersburger Academie den von Fermat bereits behaupteten Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier Quadrate sei. Man vergleiche Wallisii Opp. Tom. II. p. 858. und die Comment. Nov. Acad. Petrop. Tom. IV. Tom. VI. p. 221., vorzüglich aber Tom. VIII. p. 125.

XIII.

Bei der Auflösung der Aufgabe kommt es bloß darauf an, die Zahl 9 in zwei Quadrate zu theilen, und zwar so, daß das eine, welches hier allgemein durch x^2 bezeichnet wird, zwischen 2 und 3 fällt, was geschehen wird, wenn x^2 größer als $\frac{289}{144}$ und kleiner als $\frac{361}{144}$, folglich x größer als $\frac{17}{12}$ und kleiner als $\frac{19}{12}$ wird. Den Werth von x erhält man aber auf folgende Weise. Man betrachtet eine Zahl von der Form $3-nx$ als die Wurzel des zweiten Quadrates $9-x^2$, und erhält

$$9-x^2 = 9-6nx+n^2x^2, \text{ folglich } x = \frac{6n}{n^2+1}$$

daher muß

$$\frac{6n}{n^2+1} > \frac{17}{12} \text{ oder } 17n^2-72n < -17$$

sein. Man betrachte den letzteren Ausdruck als eine vermischte quadratische Gleichung, und löse dieselbe nach der in der Einleitung gegebenen Regel auf, so muß man zuerst den halben Coefficienten von n d. i. 36 zum Quadrat erheben, giebt 1296; dazu muß man das Produkt der bestimmten Zahl —17 und des Coefficienten von x^2, welcher ebenfalls 17 ist, addiren, oder, da das Produkt in diesem Falle negativ ist, subtrahiren. Aus dem Reste 1007 muß man nun die Quadratwurzel ziehen, und diese ist 31, 7.... Aber diese Wurzel ist offenbar zu groß, denn um die obige Formel in eine wirkliche Gleichung zu verwandeln, müßte man statt —17 eine noch kleinere Zahl setzen, wodurch also die Wurzel kleiner wird; daher sagt Diophantus, die Wurzel von 1007 sei nicht größer, oder vielmehr sie dürfe in ganzen Zahlen nicht größer als 31 werden, wenn man der Bedingung genügen will. Um endlich n zu finden, muß man zu $\sqrt{1007}$ noch den halben Coefficienten von x, d. i. 36 addiren, und die Summe mit dem Coefficienten von x^2, d. i. durch 17 dividiren, so daß man aus dieser Betrachtung $\frac{67}{17}$ als die eine Grenze der Zahl n findet.

Eine zweite Bedingung war aber, daß

$$\frac{6n}{n^2+1} < \frac{19}{12} \text{ oder } 19n^2 - 72n > -19$$

sein müsse. Betrachtet man diesen Ausdruck wieder als eine vermischte quadratische Gleichung, so wird

$$n = \frac{\sqrt{(1296 - 19 \cdot 19)} + 36}{19} = \frac{30,5 + 36}{19} = \frac{66,5}{19}.$$

Nun ist aber $\sqrt{(1296 - 19.19)}$ offenbar zu klein, denn um den obigen Ausdruck in eine Gleichung zu verwandeln, müßte man statt -19 eine etwas größere Zahl setzen, wodurch die Wurzel etwas größer würde. Man findet also, wenn man von der Wurzel $0,5$ wegläßt, die Zahl $\frac{66}{19}$ als die zweite Grenze für n. Nun liegt die Zahl $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ zwischen beiden Grenzen, und wenn man daher $n = \frac{7}{2}$ setzt, so wird die vorgeschriebene Bedingung erfüllt.

Man bemerke hierbei, daß Diophantus, bei Ausmittelung der Grenzen für eine Zahl, die Quadratwurzeln immer nur in ganzen Zahlen berechnet, und die Brüche wegläßt, alle Mal aber, wie auch hier, unter solchen Umständen, daß dadurch die Grenzen noch enger zusammengezogen werden, also um so weniger ein Fehler entstehen kann. Denn man übersieht leicht, daß in dem gegenwärtigen Falle n noch um eine Kleinigkeit größer als $\frac{67}{17}$, und auch noch um einen kleinen Bruch kleiner als $\frac{66}{19}$ sein darf.

XIV.

In dieser Auflösung bedarf nur das Verfahren einer nähern Erläuterung, wodurch Diophantus statt der drei Quadrate 9, $\frac{16}{25}$ und $\frac{9}{25}$, aus welchen die Zahl 10 besteht, drei andere Quadrate findet, welche sich dem

Werth $\frac{121}{36}$, deren Wurzeln sich also dem Werth $\frac{11}{6}$ nähern. Um die Brüche auf gleiche Nenner zu bringen, multiplicirt und dividirt Diophantus die drei Wurzeln und die Zahl, der sich alle drei möglichst nähern sollen, durch 30, und es entsteht also die Frage, wie ist es anzustellen, damit man statt der Wurzeln $\frac{90}{30}$, $\frac{24}{30}$ und $\frac{18}{30}$ drei andere finde, die sich dem Werthe $\frac{55}{30}$ möglichst nähern. (In dem griechischen Texte ist der gemeinschaftliche Nenner, wie öfters, weggelassen.) Die drei gesuchten Wurzeln müssen die Form $\frac{90}{30} - mx$, $\frac{24}{30} + nx$, $\frac{18}{30} + px$ haben, und sollten diese Wurzeln den Werth $\frac{55}{30}$ erhalten, so müßte $mx = \frac{35}{30}$, $nx = \frac{31}{30}$, $px = \frac{37}{30}$ sein. Setzt man nun die drei gesuchten Wurzeln $3 - 35x$, $\frac{4}{3} + 31x$, und $\frac{3}{5} + 37x$ so werden alle drei Wurzeln genau den Werth $\frac{55}{30}$ oder $\frac{11}{6}$ erhalten, so lange $x = \frac{1}{30}$, oder dem Nenner des Bruches gleich ist, dem sich die beiden Wurzeln nähern sollen. Dann müßte aber auch die Summe der drei Quadrate dem dreifachen Quadrat von $\frac{11}{6}$ oder der Zahl $\frac{121}{12} = 10\frac{1}{12}$ gleich sein. Setzt man aber die Summe der drei Quadrate der Zahl 10 gleich, so ist klar, daß x einen etwas kleineren Werth erhalten muß,

und die erste Wurzel $3-35x$ wird etwas größer, die beiden andern Wurzeln aber, $\frac{4}{5}+31x$ und $\frac{3}{5}+31x$ werden etwas kleiner als $\frac{11}{6}$ werden, alle drei aber diesem Werthe sich bis auf eine Kleinigkeit nähern.

Die Möglichkeit der Auflösung beruht auch hier darauf, daß, wenn a die gegebene Zahl bezeichnet, $3a+1$ sich in drei Quadrate zerstückeln lasse, also entweder ein Quadrat, oder die Summe von zwei oder drei Quadraten sei. Hierauf bezieht sich auch die der Aufgabe beigefügte Bedingung. Wäre nämlich a eine Zahl aus der angegebenen Reihe, so könnte sie allgemein durch $2+8n$ vorgestellt werden, folglich würde $3a+1=24n+7$, also eine Zahl von der Form $8n+7$ sein. Nun wird, unter andern in Legendre Théorie des nombres S. 336 bewiesen, daß jede ungerade Zahl, mit Ausnahme der Zahlen von der Form $8n+7$, die Summe von drei Quadraten sei, und Diophantus mußte daher die Zahlen von dieser Form nothwendig ausschließen. Daß diese Bedingung aber hinreichend sei, läßt sich leicht übersehen. Die Zahl $3a+1$ ist entweder ungerade oder gerade, ersteres wenn a eine gerade, letzteres wenn a eine ungerade Zahl ist. Wenn nun $3a+1$ ungerade, und nicht zugleich von der Form $8n+7$ ist, so läßt sie sich nach dem angeführten Satze bei Legendre gewiß in drei Quadrate theilen. Ist aber $3a+1$ eine gerade Zahl, so muß a selbst eine ungerade Zahl, also von der Form

$2n+1$ sein, wo n eine ungerade Zahl bedeutet. Daher wird $3^a+1 = 6n+4$, also das Doppelte einer Zahl von der Form $3n+2$, d. h. einer ungeraden Zahl. Nun wird aber bei Legendre a. a. O. bewiesen, daß jede Zahl, welche das Doppelte einer ungeraden Zahl ist, ebenfalls die Summe von drei Quadraten sei. Es ist also einleuchtend, daß die Zahl 3^a+1, insofern sie nicht in die bezeichnete Reihe gehört, sich jedes Mal in drei Quadrate zerstückeln lasse, und eben so einleuchtend ist es, daß Diophantus sowohl diesen, als den von Euler bewiesenen Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n+1$ die Summe zweier Quadrate sei, genau gekannt haben müsse. Wer Eulers scharfsinnigen, aber auch sehr umständlichen Beweis dieses Satzes gelesen hat, den muß es mit der höchsten Bewunderung erfüllen, wenn er sieht, wie weit es Diophantus in der Theorie der Zahlen gebracht hat, ohne die Erleichterung, welche der Gebrauch der Ziffern und der Buchstabenrechnung den Neuern gewährt.

XV. XVI. XVII.

Die Auflösung der drei folgenden Aufgaben ist im Texte zwar nur angedeutet, aber doch der Gang so vollständig bezeichnet, daß die Ausführung der Rechnung keine Schwierigkeit haben kann. Doch wird bei XV. vorausgesetzt, das die um 1 vermehrte Summe der drei gegebenen Zahlen, bei XVI. aber, daß das Doppelte

der gegebenen Zahl die Summe von drei Quadratzahlen sei. Bei der XVII. Aufgabe kommt es darauf an, die Zahl 30 in vier Quadrate zu theilen, da aber jede Zahl die Summe von höchstens vier Quadratzahlen ist, so kann man jede Zahl in jedem Falle in vier Quadrate zerstückeln.

Bei der XVII. Aufgabe ist ein offenbarer Fehler des Textes auch in die Uebersetzung übergegangen; es heißt nämlich, man müsse 17 in zwei Quadrate theilen, deren jedes kleiner als 10 ist, und dies könne man dadurch erreichen, daß man 17 in zwei Quadrate theile, deren jedes größer als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 sei. Daß dies nicht möglich sei, fällt in die Augen; es ist dafür zu setzen, deren eines größer als $8\frac{1}{2}$ und kleiner als 10 ist, und hiernach ist auch der griechische Text zu berichtigen. Dadurch verschwindet auch die unangenehme Tautologie in der folgenden Zeile. Uebrigens könnte man die Theilung der Zahl 17 auch so bestimmen: man muß 17 in zwei Quadrate theilen, deren jedes sich dem Werth $8\frac{1}{2}$ möglichst nähert.

XVIII.

Wenn man die Summe der drei Zahlen $= x$, die Zahlen selbst $(m^3 - 1)x^3$, $(n^3 - 1)x^3$ und $(p^3 - 1)x^3$ setzt, so sind alle Bedingungen der Aufgaben erfüllt.

Aus diesem Ansatz ergiebt sich aber

$$(m^3+n^3+p^3-3)x^3=x,$$

also $x=\sqrt{\frac{1}{m^3+n^3+p^3-3}}$.

Soll also x einen rationalen Werth erhalten, so muß $m^3+p^3+p^3-3$ eine Quadratzahl sein.

Um nun m, n und p so zu bestimmen, daß die obige Bedingung erfüllt wird, setzt Diophantus $m=x+1$, $n=2-x$, $p=2$. Bei der Wahl dieses Ansatzes sind besonders zwei Stücke zu berücksichtigen;

1. die Wurzeln müssen so gewählt werden, daß in der Summe ihrer Cubi die Glieder, worin x^3 vorkommt, sich gegeneinander heben. Daher enthält die eine Wurzel $+x$, die zweite $-x$, und in der dritten kommt gar kein x vor.
2. Die Wurzeln müssen auch so gewählt werden, daß in der Summe der Cubi x^2 einen quadratischen Coefficienten erhält, damit sich die Summe leicht zu einem Quadrat machen lasse. Nun ist dieser Coefficient $3.1+3.2=3(1+2)$, daher mußten die Zahlen 1 und 2 in der ersten und zweiten Wurzel so gewählt werden, daß ihre dreifache Summe ein Quadrat wird.

Wenn man endlich die Formel $9x^2-9x+14$ zu einem Quadrat machen soll, so muß man die Wurzel so wählen, daß x kleiner als 2 wird, weil sonst die zweite Zahl $2-x$ negativ werden würde. Die gesuchte Wurzel muß aber die Form $3x-n$ haben, und es ist schon

öfters gezeigt worden, wie man n zu wählen habe, damit x die vorgeschriebene Grenze nicht übersteige.

Endlich sieht man, daß sich dies Verfahren auf so viele Zahlen, als man will, ausdehnen läßt.

XIX.

Um die Aufgabe in allgemeinen Ausdrücken zu lösen, ist bloß erforderlich, daß man die Summe der Zahlen durch x, die Zahlen selbst durch $\frac{m^3-1}{m^3}x^3$, $\frac{n^3-1}{n^3}x^3$, $\frac{p^3-1}{p^3}x^3$ ausdrücke; um aber für x einen rationalen Werth zu erhalten, muß die Summe der obigen Coefficienten eine Quadratzahl sein. Nun ist die Summe dieser Coefficienten auch

$$1-\frac{1}{m^3}+1-\frac{1}{n^3}+1-\frac{1}{p^3}=3-\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{p^3}\right).$$

Man muß also drei Kubikzahlen suchen, deren jede kleiner als 1 ist, und welche so beschaffen sind, daß, wenn man die Summe derselben von 3 abzieht, der Rest ein Quadrat wird.

Damit jede der drei Kubikzahlen kleiner als 1 sei, nimmt Diophantus an, die Summe von allen dreien solle kleiner als 1 sein; er theilt daher 3 in das Quadrat $\frac{9}{4}$, und den Rest $\frac{3}{4}$, und bestimmt, daß $\frac{3}{4}$ die Summe der drei Kubikzahlen sein soll. Man muß also $\frac{3}{4}$ in drei Kubikzahlen theilen, was man leichter bewirkt,

wenn

wenn man statt $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{162}{216}$ setzt. Denn da nunmehr der Nenner eine Kubikzahl ist, so kommt es bloß darauf an, den Zähler 162 in drei Kubikzahlen zu theilen. Diophantus bemerkt, daß 162 aus dem Cubus 125 und der Zahl 37 bestehe, welche die Differenz der Kubikzahlen 64 und 27 sei; eine solche Differenz aber lasse sich, nach einem bloß im Allgemeinen angeführten Porisma, immer in zwei Kubikzahlen zerstückeln.

Dadurch ist nun die Möglichkeit und der Gang der Auflösung für diesen bestimmten Fall deutlich angegeben, denn man nehme an, $\frac{27}{216}$ sei in zwei Kubikzahlen, c^3 und d^3, zerstückelt, so setze man die drei gesuchten Zahlen $\left(1-\frac{125}{216}\right)x^3$, $(1-c^3)x^3$, $(1-d^3)x^3$, und die Summe der Zahlen $=x$. Da nun die Summe der Coefficienten $=\frac{9}{4}$ werden muß, so ergiebt sich

$$\frac{9}{4}x^3 = x, \text{ also } x = \frac{2}{3},$$

wofür in der Uebersetzung durch einen Druckfehler $\frac{8}{3}$ gesetzt ist. Nimmt man nun c und d als bekannt an, so darf man nur den eben berechneten Werth von x in die obigen Ausdrücke setzen, um die Aufgabe zu lösen.

Bachet findet bei dieser Auflösung noch mancherlei Schwierigkeiten, und hält es für einen bloßen Zufall, daß sich die Zahl 3 in eine Quadratzahl und drei Ku-

bikzahlen, deren jede kleiner als 1 ist, zerstückeln lasse. Fermat deutet aber folgende wissenschaftliche Auflösung dieser Aufgabe an.

Man setze das gesuchte Quadrat

$$= (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

und ziehe dasselbe von der Zahl 3 ab, so kommt es darauf an, den Rest $2x+2-x^2$ in drei Kubikzahlen, deren jede kleiner als 1 ist, zu zerstückeln, und diese Kubikzahlen muß man so bilden, daß die Summe derselben eine Gleichung von der Form $Ax^n = Bx^{n-1}$ giebt. Man setze die erste der drei Kubikzahlen

$$= \left(1 - \frac{1}{3}x\right)^3 = 1 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{27}x^3.$$

Man mache hierauf den Cubus von $1+x = 1+3x+3x^2+x^3$, die Summe beider Cubi ist $2+2x+\frac{10}{3}x^2+\frac{26}{27}x^3$, zieht man diese Summe von der Summe der drei gesuchten Kubikzahlen ab, so wird die dritte Kubikzahl

$$= -\frac{7}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3.$$

Setzt man die Wurzel derselben $= -nx$, oder

$$-\frac{7}{3}x^2 - \frac{26}{27}x^3 = -n^3x^3,$$

so erhält man für x einen rationalen Werth. Da die dritte Kubikzahl aber negativ ist, so hat man den Ausdruck $2x+2-x^2$ in eine Kubikzahl und in die Differenz zweier anderen Kubikzahlen zerstückelt. Diese Differenz aber läßt sich nach dem von Diophantus angeführten Porisma, oder nach der Anmerkung zur II. Aufgabe

dieses Buchs wieder in zwei Kubikzahlen zerstückeln. Dies ist die secunda operatio, von welcher Fermat redet, und welche hier um so weniger zu entbehren ist, da der Cubus $(1+x)^3$ größer als 1, also für unseren Zweck nicht zu gebrauchen ist.

XX.

Bei der Auflösung der Hülfsaufgabe sind folgende Punkte zu beachten.

1. Wenn die eine Wurzel $=x$ gesetzt wird, so muß die andere nothwendig die Form $n-x$ haben, damit $+x^3$ gegen $-x^3$ sich hebe.
2. Setzt man die dritte Wurzel $=a$, so soll zuletzt $3nx^2-3n^2x+n^3+a^3$ zu einem Quadrat gemacht werden, und damit dies gewiß geschehen könne, muß $3n$ ein Quadrat sein; diesen Umstand muß man also bei der Wahl von n sogleich berücksichtigen.
3. Die Wurzel des obigen Ausdrucks muß die Form $mx-p$ haben, wo $m=\sqrt{3n}$ sein muß. Aber die Zahl p ist nicht willkührlich, sondern sie muß innerhalb gewisser Grenzen gewählt werden. Denn da die eine Wurzel $n-x$ sein soll, so muß x nothwendig kleiner als n werden. Will man für unseren bestimmten Fall diese Grenzen angeben, so setze man erst allgemein

$$9x^2-27x+31=(3x-p)^2=9x^2-6px+p^2,$$

also $x=\frac{p^2-31}{6p-27}$, und aus der Bedingung $\frac{p^2-31}{6p-27}<3$

folgt $p^2-31<18p-81$. Behandelt man diese Formel wie eine vermischte quadratische Gleichung, in welcher p die unbekannte Größe ist, so findet man, daß p nicht größer sein kann als 14, 5, aber doch größer sein müsse als $\sqrt{31}$, so daß man für p alle ganzen Zahlen von 6 bis 14 setzen kann.

Uebrigens läßt sich eben diese Auflösung anwenden, wenn man vier und mehre Zahlen von der hier angegebenen Beschaffenheit suchen soll.

XXI.

Da $x=\frac{1}{3}$, so wird $x^6=\frac{1}{729}$, und hieraus findet man die erste Zahl $=\frac{63}{729}$, die zweite $=\frac{15}{729}$, die dritte $\frac{3}{729}$; die Summe von allen dreien ist die Quadratzahl $\frac{81}{729}$ oder in kleineren Zahlen $\frac{1}{9}$. Addirt man nun den Cubus der Summe, d. i. $\frac{1}{729}$ zu den einzelnen Zahlen, so erhält man die Quadratzahlen $\frac{64}{729}$, $\frac{16}{729}$ und $\frac{4}{729}$.

XXII.

Die hier angedeutete Auflösung der Aufgabe ist, so wie sie daliegt, kaum zu verstehen; es geht aber aus den Beziehungen deutlich hervor, daß eine frühere Aufgabe verloren gegangen sein muß. Eine Verglei-

chung der Bedingungen in der XXI. XXII. und XXIII. Aufgabe führt sogar auf die Vermuthung, daß nicht eine, sondern drei Aufgaben zwischen der XXI. und der gegenwärtigen fehlen.

Das Gemeinschaftliche dieser Aufgaben ist, daß man drei Zahlen x, y, z sucht, deren Summe $=s$ eine gewisse Eigenschaft haben soll, auch sollen entweder die Summen oder die Differenzen zwischen dem Cubus der Summe und den einzelnen Zahlen Quadrate werden.

Dies giebt aber folgende Fälle:

1. s soll ein Quadrat sein, außerdem aber sollen s^3+x, s^3+y, s^3+z Quadrate sein.
2. s soll wieder ein Quadrat sein, auch sollen s^3-x, s^3-y, s^3-z Quadrate sein.
3. s soll wieder ein Quadrat sein, auch sollen $x-s^3$, $y-s^3$, $z-s^3$ Quadrate sein.
4. s soll einer gegebenen Zahl gleich sein, auch sollen wie bei der ersten Aufgabe s^3+x, s^3+y, s^3+z Quadrate sein.
5. s soll einer gegebenen Zahl gleich sein, auch sollen s^3-x, s^3-y, s^3-z Quadrate sein.
6. s soll einer gegebenen Zahl gleich sein, auch sollen $x-s^3$, $y-s^3$, $z-s^3$ Quadrate sein.

Den ersten Fall betrachtet Diophantus in XXI. den fünften in XXII. den sechsten in XXIII. und es ist daher mehr als wahrscheinlich, daß die mit 2. 3. 4 bezeichneten Aufgaben durch irgend einen Zufall verloren gegangen sind.

Bachet giebt für die drei Aufgaben eine ganz in Diophantus Sinn gearbeitete, und sich ganz an den XXII. Satz anschließende Auflösung. So wenig es sonst in meinem Plane lag, alle Aufgaben einzuschalten, welche Diophantus hätte bilden können, so muß ich doch diese drei Auflösungen mittheilen, weil sie nicht sowohl als ein müßiger Zusatz, sondern als eine wahre und nothwendige Ergänzung des Diophantischen Werkes anzusehen sind.

I. Man soll drei Zahlen suchen, deren Summe ein Quadrat ist, und welche die Beschaffenheit haben, daß der Cubus ihrer Summe, wenn man jede Zahl einzeln davon abzieht, ein Quadrat zum Reste läßt.

Die Summe der Zahlen sei $= x^2$, die Zahlen selbst aber der Reihe nach $\frac{3}{4}x^6$, $\frac{8}{9}x^6$, $\frac{15}{16}x^6$, denn dadurch wird sogleich die Bedingung erfüllt, daß der Cubus der Summe oder x^6 ein Quadrat zum Reste läßt, wenn man die Zahlen einzeln davon abzieht. Die Summe der Zahlen ist $\frac{371}{144}x^6$, und man erhält also die Gleichung

$$\frac{371}{144}x^6 = x^2, \text{ oder } \frac{371}{144}x^4 = 1,$$

die Auflösung ist aber in rationalen Zahlen nicht möglich, weil der Coefficient von x^4 kein vollständiges Biquadrat ist. Dieser Coefficient ist aber die Summe dreier Zahlen, deren jede ein Quadrat zum Reste läßt, wenn man sie von 1 abzieht. Man muß also statt der Coefficienten $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{15}{16}$ drei andere Zahlen suchen, deren jede ein Quadrat zum

Reste läßt, wenn man sie von 1 abzieht, und deren Summe ein vollständiges Biquadrat ist. Die erste Bedingung kann man auch so ausdrücken: wenn man die Summe der drei Zahlen von 3 abzieht, so muß der Rest die Summe von drei Quadraten sein, deren jedes kleiner als 1 ist.

Damit nun jede Zahl gewiß kleiner als 1, und ihre Summe gewiß ein Biquadrat werde, so setze man die Summe der drei Zahlen $=1$, folglich muß der Rest die Summe von drei Quadraten sein, und es kommt jetzt also darauf an, die Zahl 2 in drei Quadrate zu theilen, deren jedes kleiner als 1 ist.

Dies läßt sich aber auf dem Wege der Annäherung bewirken, und man findet z. B. $2 = \frac{16}{25} + \frac{71289}{105625} + \frac{72361}{105625}$. Jedes dieser Quadrate ziehe man von 1 ab, so erhält man die drei Zahlen, welche statt der anfangs beliebig gewählten, und daher nicht zweckmäßigen Coefficienten gesetzt werden müssen, nämlich $\frac{9}{25}$, $\frac{34336}{105625}$, $\frac{33264}{105625}$. Setzt man also die drei gesuchten Zahlen der Reihe nach $\frac{9}{25}x^6$, $\frac{34336}{105625}x^6$, $\frac{33264}{105625}x^6$, die Summe derselben aber $=x^2$, so wird auch jetzt noch die Bedingung erfüllt, daß das Quadrat der Summe, wenn man jedwede Zahl davon abzieht, wieder ein Quadrat zum Reste läßt. Die Summe der drei Zahlen findet sich durch Rechnung $=x^6$, sie ist aber auch der Annahme nach $=x^2$, also hat man die Gleichung $x^6 = x^2$, oder $x^4 = 1$, also $x = 1$. Daher

drücken die obigen Coefficienten selbst die drei gesuchten Zahlen aus.

II. Man soll drei Zahlen suchen, deren Summe ein Quadrat ist, und welche die Beschaffenheit haben, daß jede derselben ein Quadrat wird, wenn man den Cubus ihrer Summe davon abzieht.

Die Summe der drei Zahlen sei $= x^2$, die Zahlen selbst $2x^6$, $5x^6$, $10x^6$, so wird jede ein Quadrat, wenn man den Cubus der Summe oder x^6 davon abzieht. Die Summe der drei Zahlen soll x^2 sein, sie ist aber auch $= 17x^6$, man hat also die Gleichung:

$$17x^6 = x^2, \text{ oder } 17x^4 = 1.$$

Diese Gleichung würde nur dann einen rationalen Werth geben, wenn 17 ein Biquadrat wäre. Die Zahl 17 ist aber die Summe von drei Quadraten, deren jedes um 1 vergrößert ist. Ich muß also drei Quadrate suchen, deren Summe ein Biquadrat wird, wenn man 3 dazu addirt, oder, was einerlei ist, von irgend einem Biquadrat 3 abziehen, und den Rest in drei Quadrate theilen. Man nehme z. B. das Biquadrat 16, so kommt es darauf an, 13 in drei Quadrate zu theilen z. B. in $9, \frac{36}{25}, \frac{64}{25}$. Nun addire man zu jedem dieser Quadrate 1, und setze die gesuchten Zahlen $10x^6$, $\frac{61}{25}x^6$, $\frac{89}{25}x^6$. Nun ist die Summe der Zahlen $16x^6 = x^2$, also $x = \frac{1}{2}$; die gesuchten Zahlen sind also $\frac{10}{64}, \frac{61}{1600}, \frac{89}{1600}$. Die

Summe dieser Zahlen ist $\frac{1}{4}$, also ein Quadrat, der Cubus der Summe ist $\frac{1}{64}$, und zieht man diesen von den drei gegebenen Zahlen ab, so erhält man die Quadrate $\frac{9}{64}$, $\frac{9}{400}$, $\frac{1}{25}$.

III. Man soll drei Zahlen von der Beschaffenheit suchen, daß die Summe derselben einer gegebenen Zahl gleich wird, der Cubus dieser Summe aber ein Quadrat wird, wenn man jede Zahl einzeln dazu addirt.

Die gegebene Zahl, welcher die Summe der Zahlen gleich werden soll, sei 2, ihr Cubus also 8. Es kommt also bloß darauf an, die Zahl 2 in drei Stücke zu theilen, daß jedes derselben ein Quadrat wird, wenn man 8 dazu addirt; daher muß $2+3.8=26$ die Summe von drei Quadraten sein, deren jedes größer als 8 ist. Wie dies zu bewirken sei, ist aus dem Vorigen klar, und man findet die drei Quadrate 9, $\frac{1038361}{121801}$, $\frac{1032256}{121801}$. Zieht man von jedem dieser Quadrate die Zahl 8 ab, so erhält man die drei gesuchten Zahlen 1, $\frac{63953}{121801}$, $\frac{57848}{121801}$.

Nimmt man nun an, daß die letzte Aufgabe unmittelbar vor der XXII. Aufgabe vorher ging, und daß auch hier die gegebene Zahl 2 war, so ist alles vollkommen verständlich. Von dem Cubus der Summe oder von 8 soll jede der gesuchten Zahlen einzeln abgezogen

werden, und die Reste sollen Quadrate sein. Wenn man also von $3.8=24$ die Summe der Zahlen oder 2 abzieht, so muß der Rest 22 die Summe von drei Quadraten sein; man muß also die Zahl 22 in drei Quadrate theilen, deren jedes größer als 6 sein muß, damit jede der gesuchten Zahlen kleiner als 2 werde, aber auch kleiner als 8 sein muß, damit man dasselbe von 8 abziehen kann.

XXIII.

Diese Aufgabe verlangt, eine gegebene Zahl so zu theilen, daß jeder Theil, wenn man den Cubus der Summe davon abzieht, wieder ein Quadrat wird. Da also der Cubus der Zahl kleiner sein soll, als ein einzelner Theil derselben, so kann die gegebene Zahl nur ein Bruch sein. Das Verfahren selbst ist zwar nur angedeutet, ergiebt sich aber leicht aus folgender Betrachtung.

Die Summe der drei gesuchten Brüche ist $\frac{1}{4}$, der Cubus der Summe also $\frac{1}{64}$. Zieht man von jedem Stück $\frac{1}{64}$, oder von der Summe aller drei Stücke d. i. von $\frac{1}{4}$ den Bruch $\frac{3}{64}$ ab, so muß der Rest $\frac{13}{64}$ die Summe von drei Quadraten sein. Man theile daher $\frac{13}{64}$ in drei Quadrate, was hier darum ganz leicht ist, weil $\frac{13}{64}$ die

Summe von zwei Quadraten $\frac{9}{64}$ und $\frac{4}{64}$ ist, von denen eines z. B. das letztere noch in die Quadrate $\frac{9}{400}$ und $\frac{16}{400}$ getheilt werden kann. Zu jedem dieser Quadrate addire man $\frac{1}{64}$, so erhält man $\frac{250}{1600}$, $\frac{61}{1600}$, $\frac{89}{1600}$. Die Summe dieser drei Brüche ist die gegebene Zahl $\frac{1}{4}$, und zieht man von jedem $\frac{1}{64}$ ab, so erhält man die vorhin berechneten Quadrate.

XXIV.

1. Bei dem Ansatz kommt es zuerst darauf an, daß man drei Quadratzahlen habe, deren jede wieder ein Quadrat wird, wenn man 1 dazu addirt. Solche Zahlen findet man aber sehr leicht vermittelst rechtwinkliger Dreiecke, denn wenn man das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der anderen dividirt, so hat der auf diese Weise entstandene Quotient alle Mal die verlangte Eigenschaft. Denn das Dreieck sei von den Zahlen a und b gebildet, so ist die eine Kathete $= a^2 - b^2$, die andere $= 2ab$. Nimmt man nun den Quotienten $\frac{(a^2-b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}$, und addirt zu demselben $1 = \frac{4a^2b^2}{4a^2b^2}$, so erhält man $\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4a^2b^2}$, oder das Quadrat von $\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

2. Diophantus nimmt nun drei rechtwinklige Dreiecke, nämlich

3. 4. 5; 5. 12. 13; 8. 15. 17;

und findet daraus die Zahlen $\frac{9}{16}$, $\frac{25}{144}$, $\frac{64}{225}$. Er setzt daher die drei gesuchten Quadrate der Reihe nach $\frac{9}{16}x^2$, $\frac{25}{144}x^2$, $\frac{64}{225}x^2$, das Produkt dieser drei Zahlen aber $=x^2$. Addirt man zu diesem Produkte das erste der obigen Quadrate, so erhält man $\frac{25}{16}x^2$, addirt man das zweite, so erhält man $\frac{196}{144}x^2$, addirt man das dritte, so erhält man $\frac{289}{225}x^2$, folglich in allen drei Fällen ein Quadrat, wie es die Aufgabe verlangt.

3. Wenn man aber x^2 als das Produkt der drei obigen Quadrate ansieht, so erhält man die Gleichung

$$\frac{9.\ 25.\ 64.}{16.\ 144.\ 225.}x^6 = x^2, \text{ also } \frac{3.\ 5.\ 8.}{4.\ 12.\ 15.}x^2 = 1.$$

Um nun für x einen rationalen Werth zu erhalten, müßte der Bruch $\frac{4.\ 12.\ 15.}{3.\ 5.\ 8.}$ ein Quadrat sein, man sieht aber leicht, daß $3.5.8 = 120$ das Produkt aus sämmtlichen Lothen, $4.12.15 = 720$ das Produkt aus sämmtlichen Grundlinien der vorhin gewählten rechtwinkligen Dreiecke ist. Man muß also statt jener Dreiecke drei andere von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt der Lothe zu dem Produkt der Grundlinien sich wie ein Quadrat zu einem Quadrat verhält, oder wie Diophantus

diese Bedingung ausdrückt, daß das Produkt sämmtlicher Lothe mit dem Produkt sämmtlicher Grundlinien multiplicirt, wieder ein Quadrat zum Produkte giebt.

4. Bis dahin ist die Darstellung im Texte vollkommen deutlich und vollständig, das Uebrige ist aber mehr angedeutet, als ausgeführt, und in die Zahlen selbst haben sich einige Irrthümer eingeschlichen. Der Text ist aber keinesweges so entstellt, als es Bachet geglaubt hat, der eine Wiederherstellung desselben ohne Hülfe eines besseren Codex für völlig unmöglich erklärt. Die nachstehende Darstellung wird hoffentlich alle Schwierigkeiten heben.

Wenn man das Produkt sämmtlicher Lothe L.l.λ mit dem Produkt sämmtlicher Grundlinien G.g.γ multiplicirt, so hat dies neue Produkt L.l.λ.G.g.γ das Produkt aus dem Loth und der Grundlinie des einen dieser Dreiecke z. B. L.G zu einem seiner Factoren. Dies ist an sich selbst klar, im Griechischen steht aber πλευραὶ, welches nicht bloß die Wurzel einer Potenz, sondern auch jeden Factor einer Flächenzahl oder einer Körperzahl bedeutet (Euklides VII. Erkl. 16. 17); weil Bachet aber nur an die erste Bedeutung, als die gewöhnlichste dachte, so bezeichnete er schon diese vollkommen richtige Stelle als verderbt.

Wenn wir nun das Produkt aus den sämmtlichen Lothen und den sämmtliche Grundlinien, welches wir durch L.l.λ.G.g.γ bezeichnet haben, durch das Product aus der Grundlinie und dem Loth des einen Dreiecks, etwa

durch L.G dividiren, so erhalten wir ein Produkt $l.\lambda.g.\gamma$, welches das Produkt aus dem Loth und der Grundlinie des ersten Dreiecks z. B. l.g und das Produkt aus der Grundlinie und dem Loth des anderen Dreiecks $\lambda.\gamma$ zu seinen Factoren hat. Auch dieser Schluß ist vollkommen richtig, und im griechischen Texte weiter kein Fehler, als daß statt der Worte: τοῦ πρώτου τριγώνου die Abkürzung του ᾱ δ steht, wofür τοῦ ᾱ. τ. zu lesen ist. Daß Diophantus übrigens diese beiden Dreiecke das erste und zweite nennt, ist eine völlig gleichgültige Sache.

Von den drei gesuchten rechtwinkligen Dreiecken kann man also eines, dasjenige nämlich dessen Loth und Grundlinie wir oben durch L und G bezeichnet haben, willkührlich annehmen, und dann die beiden andern so bestimmen, daß $L.l.\lambda.G.g.\gamma$ ein Quadrat wird. Das erste Dreieck sei also 3.4.5, also das Produkt aus dem Loth und der Grundlinie $=12$. Die beiden andern Dreiecke müssen daher so bestimmt werden, daß $lg:\lambda\gamma$, folglich auch die Fläche des einen zur Fläche des andern sich wie $x:12x$ verhalte, denn wenn dies der Fall ist, so wird das Produkt aus sämmtlichen Lothen und sämmtlichen Grundlinien $=12x.12.x$, also gewiß ein Quadrat.

Anstatt aber die Größen lg und $\lambda\gamma$ in dem Verhältniß $x:12x$ oder $1:12$ zu nehmen, kann man sie

auch in dem Verhältnisse 1:3 nehmen. Dieser Schluß ist im Griechischen mit vier Worten ausgedrückt, die Richtigkeit desselben fällt aber sogleich in die Augen; denn wenn $lg = x$, $\lambda\gamma = 3x$ ist, so ist

$$L.l.\lambda.G.g.\gamma. = 12.x.3.x,$$

welches ebenfalls ein Quadrat ist.

6. Es kommt also bloß darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke zu suchen, deren Flächen sich wie $x:3x$ oder wie $1:3$ verhalten. Auf welche Weise diese Hülfsaufgabe gelöst wird, zeigt Diophantus nicht, sondern bemerkt nur, sie habe keine Schwierigkeit, und wir wollen die allgemeine Auflösung dieser Aufgabe am Schlusse dieser Anmerkung angeben. Diophantus führt nun die Dreiecke 9.40.41 und 5.12.13 als solche an, welche die verlangte Eigenschaft haben. Es ist aber klar, daß die letzteren Zahlen falsch, und mit den Zahlen eines der zuerst gewählten Dreiecke verwechselt sind. In der Randanmerkung werden schon von Bachet die Zahlen 8, 15, 17 als diejenigen angegeben, welche für unseren Zweck brauchbar sind.

7. Der aus den unrichtigen Zahlen 5, 12, 13 entstandene Fehler ist nun auch in den berichtigten Ansatz übergegangen, und außerdem sind die Nenner der Brüche und die Hauptgröße x^2 weggelassen. Setzt man, wie im Texte geschehen ist, die drei Zahlen $\frac{9}{16}x^2$, $\frac{25}{144}x^2$, $\frac{81}{1600}x^2$,

denn diese werden durch die Zähler 9, 25, 81 angedeutet, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{9.\ 25.\ 81}{16.\ 144.\ 1600}x^4 = 1, \text{ oder } \frac{3.\ 5.\ 9}{4.\ 12.\ 40}x^2 = 1.$$

Da aber dieser Coefficient kein Quadrat ist, so läßt sich der Werth von x nicht in rationalen Zahlen ausdrücken.

Man setze aber statt des Dreiecks 5. 12. 13 das richtige 8, 15, 17, so sind die drei gesuchten Zahlen der Reihe nach $\frac{9}{16}x^2$, $\frac{64}{225}x^2$, $\frac{81}{1600}x^2$. Setzt man nun das Produkt dieser drei Zahlen $= x^2$, so erhält man zuletzt die Gleichung

$$\frac{3.\ 8.\ 9}{4.\ 15.\ 40}x^2 = 1.$$

Hier ist nun zwar der Coefficient kein Quadrat, aber Zähler und Nenner verhalten sich wie zwei Quadrate, und wenn man daher in beiden die gleichen Factoren hebt, so erhält man

$$\frac{9}{100}x^2 = 1, \text{ folglich } x = \frac{10}{3}.$$

Die drei gesuchten Quadrate sind also der Reihe nach $\frac{25}{4}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{256}{81}$, das Produkt von allen dreien ist $\frac{100}{9}$, und wenn man zu diesem Produkt die drei Quadrate einzeln addirt, so erhält man der Reihe nach die Quadrate $\frac{625}{36}$, $\frac{1681}{144}$, $\frac{1156}{81}$.

8. Nachdem ich dies geschrieben, fällt mir noch ein, auf welche Weise das unrichtige Dreieck 5. 12. 13 in

den

den Text gekommen ist. Diophantus hat zuerst drei rechtwinklige Dreiecke willkührlich gewählt, nämlich

I. 3. 4. 5. II. 5. 12. 13. III. 8. 15. 17.

Die angestellte Betrachtung ergiebt, daß diese Dreiecke zur Auflösung der Aufgabe nicht zu gebrauchen sind, daß man aber eines derselben z. B. das erste behalten, die beiden übrigen aber so bestimmen muß, daß ihre Flächen sich wie 1:12, oder auch nur wie 1:3 verhalten. Nun ergiebt sich, daß man um diesen Zweck zu erreichen, auch das dritte Dreieck 8, 15, 17 beibehalten, statt des zweiten 5, 12, 13 aber ein anderes 9, 40, 41 setzen muß. Diophantus hatte also vermuthlich geschrieben, das gesuchte Dreieck ist 9, 40, 41, das andere aber, dasjenige nämlich, welches wir als unbrauchbar verwerfen müssen, war 5, 12, 13. Der Abschreiber, welcher nicht bemerkte, daß nur ein Dreieck zu suchen war, hielt aber 5, 12, 13 für das zweite der gesuchten Dreiecke, und setzte auch die diesem Dreieck zugehörigen Zahlen in den neuen Ansatz, und da die Rechnung nicht durchgeführt, sondern bloß angedeutet ist, so entging ihm, daß die Zahlen auf einen irrationalen Werth führen.

9. Ich gebe hier zuletzt die Auflösung der Aufgabe: zwei rechtwinklige Dreiecke zu suchen, deren Flächen ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben z. B. das Verhältniß m:1, wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Man bilde das eine Dreieck von den Zahlen $2m+1$ und $m-1$, das andere aber von den Zahlen $m+2$

und $m-1$, so wird die Fläche des ersten zu der Fläche des zweiten sich wie $m:1$ verhalten.

Die Katheten des ersten Dreiecks werden nämlich $4m^2-2m-2$ und $3m^2+6m$, folglich die Fläche des Dreiecks $6m^4+9m^3-9m^2-6m$. Die Katheten des zweiten Dreiecks werden $2m^2+2m-4$ und $6m+3$, folglich die Fläche desselben $6m^3+9m^2-9m-6$, und die Fläche des ersten verhält sich zur Fläche des zweiten wie $m:1$. Ist nun $m=3$, so ist das erste Dreieck von den Zahlen 7 und 2 zu bilden, und hat also die Seiten 28, 45, 53, das zweite von den Zahlen 5 und 2, und hat die Seiten 20, 21, 29. Die Fläche des ersten ist 630, die des zweiten 210, also die erste gerade das Dreifache des zweiten. Legt man diese Dreiecke zum Grunde, so erhält man

$$\frac{28.\,28.\,20.\,20.\,3.\,3.}{45.\,45.\,21.\,21.\,4.\,4.}x^4 = 1.$$

und daraus $\frac{28.\,20.\,3.}{45.\,21.\,4.}x^2 = 1.$

Hebt man die gleichen Factoren des Zählers und Nenners, so erhält man

$$\frac{4}{9}x^2 = 1 \text{ oder } 4x^2 = 9, \text{ also } x = \frac{3}{2}.$$

XXV.

Wenn man das Produkt der drei Zahlen $=x^2$ setzt, so kann man die Zahlen selbst durch x^2 und einen quadratischen Coefficienten ausdrücken, der von 1 abgezogen, wieder ein Quadrat zum Reste läßt. Solche Coeffici-

enten findet man aber leicht, wenn man drei rechtwinklige Dreiecke nimmt, z. B. 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; und nun das Quadrat der einen Kathete durch das Quadrat der Hypotenuse dividirt. Diophantus drückt daher die drei Zahlen durch $\frac{16}{25}x^2$, $\frac{25}{169}x^2$ und $\frac{64}{289}x^2$ aus; zieht man diese Zahlen einzeln von 1 ab, so sind die Reste $\frac{9}{25}x^2$, $\frac{144}{169}x^2$, $\frac{225}{289}x^2$ wieder Quadrate, und die Hauptbedingung der Aufgabe ist durch den bloßen Ansatz erfüllt.

Nun soll aber das Produkt der drei Zahlen $= x^2$ sein, und dies giebt die Gleichung

$$\frac{16.\,25.\,64}{25.\,169.\,289}x^6 = x^2, \text{ oder } \frac{16.\,25.\,64}{25.\,169.\,289}x^4 = 1.$$

Soll nun x einen rationalen Werth erhalten, so muß der Coefficient von x^4 ein Biquadrat, d. h. die Quadratwurzel dieses Coefficienten oder $\frac{4.\,5.\,8}{5.\,13.\,17}$ muß wieder ein Quadrat sein. Hieraus sieht man also, daß die rechtwinkligen Dreiecke, von welchen Diophantus seine Coefficienten entnommen, und welche er aus der vorigen Aufgabe beibehalten hat, für den jetzigen Zweck nicht brauchbar sind, und man muß statt derselben drei andere von der Beschaffenheit suchen, daß das Produkt der drei Katheten (4.5.8) durch das Produkt der drei Hypotenusen (5.13.17) multiplicirt oder dividirt, wieder ein Quadrat giebt.

Man bezeichne die drei Lothe durch L, l, λ, die drei Hypotenusen durch H, h, γ, so soll L.l.λ.H.h.γ ein Quadrat sein. Man nehme eines der Dreiecke, z. B. dasjenige, in welchem λ und γ vorkommen als bekannt an, und setze z. B. das Dreieck: 3, 4, 5, so wird λ.γ = 20. Nun kommt es darauf an, die beiden anderen Dreiecke so zu bestimmen, daß 20.L.H.l.h ein Quadrat wird, und dies wird der Fall sein, wenn L.H = 20.l.h, oder, weil 20 ein Produkt aus 5 und der Quadratzahl 4 ist, wenn LH = 5hl ist, denn in diesem Falle wird

L.l.λ.H.h.γ = 4.5.5.h.l.h.l,

also gewiß ein Quadrat.

Es kommt also bloß darauf an, zwei rechtwinklige Dreiecke von der Art zu finden, daß das Produkt aus der Hypotenuse und dem Lothe des einen zu dem Product aus der Hypotenuse und dem Lothe des anderen sich wie 5:1 verhalten.

Bis dahin ist die Darstellung im Texte vollkommen klar und richtig; auf welche Weise Diophantus aber die Zwischenaufgabe löst, das ist aus dem ganz verderbten Texte nicht zu entnehmen; ich habe daher diese Stelle gar nicht übersetzt, und die Lücke bloß angedeutet, theile aber den griechischen Text so mit, wie ich ihn in Bachets Ausgabe finde:

καὶ ἔστι ῥάδιον, καὶ ἔστι τὸ μὲν μεῖζον ε̄. ιβ̄. ιγ̄. τὸ δὲ ἔλαττον γ̄. δ̄. ε̄. ζητητέον οὖν ἀπὸ τούτων ἕτερα δύο, ὅπως ὁ ὑποτεινούσης

καὶ καθέτου ἡ μ̄ ϛ̄. ἔστι δὲ τοῦ μὲν μείζονος ὑποτείνουσα μ̄ ϛ̄. ᾱβ̄. ἡ δὲ κάθετος ξ̄. τοῦ δὲ ἐλάσσονος ὁ μὲν ἐν τῇ ὑποτεινούσῃ μ̄ β̄. ᾱβ̄. ὁ δὲ ἐν τῇ ᾱ. τῶν ὀρθογώνων ιβ̄.

Die Auflösung der Aufgabe findet man übrigens vollständig in Bachets Porismen zum Diophantus, und ist im Wesentlichen nicht von derjenigen verschieden, welche ich hier mittheile. Man nehme das einfachste rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5, und bilde aus der Grundlinie 4 und dem doppelten Lothe desselben, oder aus 2.3 ein neues rechtwinkliges Dreieck; dies hat die Seiten

$$20 = 2.2.3.3 - 4.4 = 4(3.3 - 4) = 4.5.$$
$$48 = 2.2.3.4 \qquad = 4(2.2.3) = 4.12.$$
$$52 = 2.2.3.3 + 4.4 = 4(3.3 + 4) = 4.13.$$

Nunmehr hat man die beiden rechtwinkligen Dreiecke 3, 4, 5 und 5, 12, 13 und zwar dieselben, welche Diophantus zum Grunde legt, um die für den Ansatz zweckmäßigen Dreiecke zu finden. Bildet man nämlich aus den Katheten dieser beiden Dreiecke zwei neue, so hat das erste die Seiten

$$7 = 4.4 - 3.3$$
$$24 = 2.3.4$$
$$25 = 4.4 + 3.3.$$

Das zweite aber die Seiten

$$119 = 144 - 25$$
$$120 = 2.5.12$$
$$169 = 144 + 25$$

und wenn man nun die Coefficienten von dem Dreieck 3, 4, 5 und den zuletzt gefundenen beiden Dreiecken entnimmt, d. h. wenn man die gesuchten Zahlen durch $\frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} x^2$, $\frac{24 \cdot 24}{25 \cdot 25} x^2$ und $\frac{120 \cdot 120}{169 \cdot 169} x^2$ ausdrückt, so haben diese Zahlen die Eigenschaft, daß, wenn man sie einzeln von x^2 abzieht, der Rest noch immer ein Quadrat bleibt, und wenn man das Produkt der drei Zahlen $= x^2$ setzt, so erhält man zuletzt

$$\frac{4 \cdot 24 \cdot 120}{5 \cdot 25 \cdot 169} x^2 = 1, \text{ und } x = \frac{65}{48},$$

woraus sich die Zahlen selbst leicht berechnen lassen.

Daß Diophantus wirklich die hier gefundenen Dreiecke zum Grunde gelegt habe, ist mir darum sehr wahrscheinlich, weil seine Zahlen mit den aus der Rechnung sich ergebenden, die ich auch in die Uebersetzung aufgenommen habe, ganz übereinstimmen, wenn man nur darauf Rücksicht nimmt, daß bei Diophantus häufig die Nenner der Brüche fehlen. Die erste gesuchte Zahl ist bei mir $\frac{16}{25} x^2$, wofür bei Diophantus bloß $16x^2$ steht, die zweite $\frac{24 \cdot 24}{25 \cdot 25} x^2 = \frac{576}{625} x^2$, wofür bei Diophantus bloß $576x^2$ gesetzt ist, die dritte endlich $\frac{120 \cdot 120}{169 \cdot 169} x^2 = \frac{14400}{28561} x^2$, wofür bei Diophantus $\frac{x^2}{28561}$ gesetzt ist, der Werth von x aber wird $\frac{65}{48}$, wofür abermals mit Weglassung des Nenners bloß 65 steht, offenbar durch ein bloßes Versehen des Abschreibers.

Es ist jetzt nur noch zu zeigen, daß der Coefficient von x^2 in der Endgleichung oder die Zahl $\frac{4.24.120}{5.25.169}$ nicht zufällig einen rationalen Werth für x giebt, sondern daß nach der Construction der obigen Dreiecke Zähler und Nenner sich wie zwei Quadrate verhalten. Nach der oben angedeuteten Entstehungsart der Dreiecke ist aber

$$5.25.169 = 5.25.13.13.$$
$$4.24.120 = 4.(2.3.4)(2.5.3.4)$$

Dividirt man nun beide Zahlen durch 5, so wird sowohl der Zähler als der Nenner ein vollständiges Quadrat, weil jeder Factor in einer geraden Anzahl vorkommt, und man kann daher aus dem Bruche $\frac{5.25.169}{4.24.120} = \frac{25.169}{4.24.24}$ die Quadratwurzel ausziehen.

XXVII. XXVIII. XXIX.

Die XXVII. Aufgabe wird, wie die beiden folgenden, auf frühere Aufgaben zurückgeführt, und wir wollen daher zeigen, daß Zahlen, welche der XXIV. Aufgabe genügen, auch die in XXVII. verlangte Eigenschaft haben. Ich nehme daher die Quadrate a^2, b^2, c^2 von der Beschaffenheit, daß $a^2b^2c^2+a^2$, $a^2b^2c^2+b^2$, $a^2b^2c^2+c^2$ noch immer ein Quadrat bleibt. Dividirt man nun die erste Formel durch a^2, so erhält man b^2c^2+1; dividirt man die zweite durch b^2, so erhält man a^2c^2+1, und dividirt man die dritte durch c^2,

so erhält man a^2b^2+1. Da in allen drei Fällen sowohl der Divisor als der Dividendus ein Quadrat war, so sind auch die Quotienten b^2c^2+1, a^2c^2+1, a^2b^2+1 wieder Quadrate, und die Zahlen c^2, b^2, c^2 leisten also auch der XXVII. Aufgabe Genüge.

Auf dieselbe Weise läßt sich auch zeigen, daß die Zahlen, die in der XXV. und XXVI. Aufgabe gefunden worden sind, auch der in XXVIII. und XXIX. geforderten Bedingung genügen.

XXX. — XXXI.

Nachdem Diophantus das eine der gesuchten Quadrate beliebig gewählt hat, so verwandelt sich die ganze Aufgabe in folgende: man soll zwei Quadrate y^2 und z^2 von der Beschaffenheit suchen, daß y^2+24, z^2+24, y^2+z^2+15 Quadrate sind. Er berücksichtigt aber anfangs nur die beiden ersten Bedingungen, und hier ergiebt sich leicht Folgendes; wenn man das Quadrat einer zweitheiligen Größe hat, in welchem -12 das doppelte Produkt beider Theile ist, und man addirt dazu 24, so wird das Quadrat die vorige Form behalten, und nur das doppelte Produkt aus -12 sich in $+12$ verwandeln, also das Quadrat der Differenz in das Quadrat der Summe zweier Größen übergehen. Um also y^2 und z^2 zu bestimmen, mußte das Quadrat einer Differenz genommen, die beiden Theile der Wurzel aber so bestimmt werden, daß das doppelte Produkt -12

wurde. Um dies zu bewirken, zerfällt Diophantus die Zahl 24 in die Factoren 4×6 und 3×8, und verbindet diese mit der Hauptgröße x dergestalt, daß ihr Produkt noch immer 24 bleibt, dies giebt die Factoren $6x$ und $\frac{4}{x}$, ferner $8x$ und $\frac{3}{x}$. Nimmt man nun die Hälfte jedes Factors, und bildet davon die Wurzeln $3x-\frac{2}{x}$ und $4x-\frac{3}{2x}$, so erhält man

$$y^2=9x^2-12+\frac{4}{x^2},\quad z^2=16x^2-12+\frac{9}{4x^2}$$

folglich $y^2+24=9x^2+12+\frac{4}{x^2}=\left(3x+\frac{2}{x}\right)^2$, und

$$z^2+24=16x^2+12+\frac{9}{4x^2}=\left(4x+\frac{3}{2x}\right)^2,$$

wodurch die erste Bedingung bereits erfüllt wird.

Die Factoren 4, 6, 3, 8 dürfen aber nicht willkührlich gewählt werden, sondern sie müssen nach der im Text enthaltenen Bemerkung von der Art sein, daß sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks vorstellen können, d. h. die Summe ihrer Quadrate muß wieder ein Quadrat sein, denn die zweite Bedingung verlangt, daß y^2+z^2+15 d. i. $25x^2-9+\frac{25}{4x^2}$ auch ein Quadrat sei. Dies erreicht Diophantus leicht, indem er den ganzen Ausdruck $=25x^2$ setzt, denn nunmehr heben sich zwei Glieder, und man erhält $\frac{25}{4x^2}=9$, also für x den den rationalen Werth $\frac{5}{6}$. Damit dies Verfahren aber möglich wurde, mußte jedes Glied in der zuletzt gefundenen

Formel ein Quadrat sein. Nun ist $9=24-15$, also dem zu Anfang der Auflösung beliebig gewählten Quadrate gleich; ferner ist $25x^2=16x^2+9x^2$, und $\frac{25}{4x^2}=\frac{9}{4x^2}+\frac{4}{x^2}=\frac{3\cdot3+4\cdot4}{4x^2}$, beide Formeln werden also nur dadurch Quadrate, daß die Summe $16+9$ ein Quadrat ist, oder daß die Factoren 6 und 8, folglich auch ihre Hälften 3 und 4, aus welchen man die Wurzeln von z^2 und y^2 gebildet hat, Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

Unter den verschiedenen Zerfällungen welche die Zahl 24 zuläßt, waren also nur die hier gewählten zweckmäßig, weil sie Factoren giebt, welche den Zahlen 3 und 4 proportional sind, und daher, wie diese, Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks vorstellen können. Aus $x=\frac{5}{6}$ findet man die kleinere Wurzel $=\frac{1}{10}$, die größere $=\frac{23}{15}$, die Zahlen sind also 9, $\frac{1}{100}$, $\frac{529}{225}$. Die Auflösung der XXXI. Aufgabe beruht auf ganz ähnlichen Betrachtungen.

XXXII.

Wenn man die Zahl der gekauften Maaße $=x$ setzt, so kommt es vorzüglich nur auf zwei Stücke an:

1. die Zahl x^2-60 in zwei Stücke zu theilen, und zwar so, daß ein Fünftel des einen, und ein Achtel des anderen die Summe x giebt,
2. die Zahl x^2-60 zu einem Quadrat zu machen.

Das Letztere hat gar keine Schwierigkeit, denn wenn man die Wurzel $=x-n$ setzt, so wird

$$x^2-60=x^2-2nx+n^2, \text{ und } x=\frac{n^2+60}{2n},$$

und insofern man bloß auf dies letzte Stück der Auflösung sieht, könnte man die Zahl n ganz beliebig wählen, wenn nur der für x gefundene Werth, ins Quadrat erhoben, größer als 60 wird, damit x^2-60 positiv bleibe. Die Zerstückelung aber, die man nachher mit der Zahl x^2-60 vornehmen soll, setzt nach der V. Aufgabe des ersten Buches voraus, daß x größer als $\frac{x^2-60}{8}$ und kleiner als $\frac{x^3-60}{5}$ sei. Aus diesen Bedingungen aber folgt

$$x^2-8x<60 \text{ und } x^2-5x>60.$$

Betrachtet man beide Formeln als vermischte quadratische Gleichungen, so erhält man aus der ersten

$$x=4+\sqrt{76}=12{,}72\ldots.$$

und aus der zweiten

$$x=\frac{5+\sqrt{265}}{2}=10{,}78\ldots.$$

Nun ist der erste Werth für x offenbar zu groß, denn sollte der Ausdruck $x^2-8x<60$ eine wirkliche Gleichung bilden, so müßte man statt 60 eine etwas kleinere Zahl setzen, wodurch x einen kleineren Werth erhält; und aus einem ähnlichen Grunde ist der zweite für x gefundene Werth etwas zu klein. Will man daher die Grenzen für x durch ganze Zahlen angeben, so kann man allerdings sagen, x müsse größer als 11 und kleiner als 12 sein, wiewohl die Rechnung zeigt, daß x noch etwas kleiner als 11, und auch noch etwas größer als 12 sein könnte.

Hiernach soll nun bestimmt werden, innerhalb welcher Grenzen die Zahl n in der Wurzel x — n zu nehmen sei. Zu diesem Ende überlegt Diophantus zuerst, wie der Werth von x gefunden werde, und spricht zuletzt in Worten aus, was die obige Formel $x = \frac{n^2+60}{2n}$ in allgemeinen Zeichen ausdrückt. Hieraus folgt aber

$$\frac{n^2+60}{2n} > 11, \text{ und } \frac{n^2+60}{2n} < 12, \text{ oder}$$

$$n^2 - 22n > -60 \text{ und } n^2 - 24n < -60.$$

Betrachtet man beide Formeln als vermischte quadratische Gleichungen, so findet man aus der ersten

$$n = 11 + \sqrt{61} = 18{,}8\ldots.$$

und aus der zweiten

$$n = 12 + \sqrt{84} = 21{,}16\ldots.$$

Der aus der ersten Gleichung gefundene Werth ist offenbar zu klein, denn um die Formel $n^2 - 22n > -60$ in eine Gleichung zu verwandeln, hätte man zu —60 noch eine gewisse Zahl addiren müssen, und dadurch würde x offenbar größer werden; aus einem ähnlichen Grunde aber ist der aus der zweiten Formel gefundene Werth etwas zu groß. Will man daher die Grenzen für n wieder durch zwei ganze Zahlen ausdrücken, so muß n kleiner als 21, und größer als 19 sein, d. h. man muß die Wurzel von $x^2 - 60 = x - 20$ setzen.

Ueber den Anhang zum fünften Buche.

Das in der vorigen Aufgabe mitgetheilte Epigramm veranlaßte Bachet noch 45 ähnliche Epigramme aus einer damals noch ungedruckten Handschrift, welche er von Salmasius erhalten hatte, mitzutheilen. Diese Epigramme sind nachmals in der griechischen Anthologie, in Brunckς Analectis Vett. Poetarum II. 477. sqq. und in Heilbronners Hist. Matheseos universae S. 845. wieder abgedruckt. Man wird es mir zu gute halten, daß ich die Nachbildung, welche ich von einigen dieser Räthsel versucht habe, hier mittheile. Die Auflösung zu geben, hielt ich für überflüssig, da sie überall keine Schwierigkeit hat, wenn man bei den Aufgaben, in welchen eine gewisse Tageszeit bestimmt werden soll, z. B. bei III. XX. XXIII. nur daran denkt, daß die Zeit vom Aufgang bis zum Untergang der Sonne immer in zwölf gleiche Theile getheilt wird.

Anmerkungen zum sechsten Buche.

I.

Wenn man annimmt, das Dreieck werde von den Zahlen x und a gebildet, so ist die Hypotenuse $= x^2 + a^2$, die eine Kathete $= x^2 - a^2$, folglich der Unterschied beider $= 2a^2$. Soll also die erste Bedingung der Aufgabe durch den bloßen Ansatz erfüllt werden, so muß man a so wählen, daß $2a^2$ ein Cubus wird. Dies erreicht man freilich am einfachsten, wenn man $a = 2$ setzt, es kann aber auch auf unzählige Arten erreicht werden. Denn man stelle sich die Aufgabe, eine Zahl x zu finden, deren doppeltes, oder allgemeiner, deren m faches Quadrat eine Kubikzahl sei, und setze $mx^2 = n^3x^3$, so wird $x = \frac{m}{n^3}$, wo man für n jede beliebige Zahl setzen kann.

Nachdem man nun $a = 2$ gesetzt, folglich eine Bedingung der Aufgabe durch den bloßen Ansatz erreicht hat, so kommt es noch darauf an, daß auch die Differenz der Hypotenuse und der zweiten Kathete, d. i. $x^2 - 4x + 4$ eine Kubikzahl werde. Diese Differenz ist aber alle Mal

ein Quadrat, in unserem Falle von der Wurzel $x-2$. Setzt man nun $x-2=n^3$, so wird $x^2-4x+4=n^6$, also ebenfalls eine Kubikzahl. Hier kann man n^3 ganz beliebig wählen, da das Quadrat eines Cubus nothwendig wieder ein Cubus wird.

Diophantus findet für die Seiten des gesuchten Dreiecks die Zahlen 40, 96, 104; man kann aber noch die Seiten durch eine beliebige Kubikzahl multipliciren oder dividiren, denn wenn $104-40$ eine Kubikzahl ist, so ist einleuchtend, daß sowohl $(104-40)n^3$, als $\frac{104-40}{n^3}$ ebenfalls eine Kubikzahl sein muß. Wenn man daher in unserem Falle alle Seiten durch 8 dividirt, so wird das Dreieck 5, 12, 13 noch immer den Bedingungen der Aufgabe genügen.

II.

Das gesuchte Dreieck werde wieder von den Zahlen x und a gebildet, jedoch so, daß a von beiden die größere ist, so wird die Hypotenuse $=a^2+x^2$, die eine Kathete $=a^2-x^2$, folglich die Summe beider $=2a^2$. Man muß daher a wieder so wählen, daß $2a^2$ ein Cubus wird, und man kann daher $a=2$ setzen, wie in der vorigen Aufgabe.

Nun soll aber auch die Summe der Hypotenuse und der zweiten Kathete, d. i. x^2+4+4x^2 eine Kubikzahl sein. Da diese Formel das Quadrat von $x+2$ ist, so erreicht man auch die zweite Bedingung, wenn man

$x+2=n^3$ setzt. Man darf hier aber n^3 nicht willkührlich, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen wählen. Aus der Gleichung folgt nämlich $x=n^3-2$, folglich muß n^3 größer als 2 sein. Da aber die eine Kathete $=4-x^2$, so muß x^2 kleiner als 4, folglich x kleiner als 2 sein, und dies wird nur dann zutreffen, wenn n^3 kleiner als 4 ist.

Um aber für n^3 eine Kubikzahl zu finden, welche größer als 2 aber kleiner als 4 ist, verwandle man beide Zahlen in ein Paar Brüche, deren Nenner eine beliebige Kubikzahl ist, z. B. in $\frac{16}{8}$ und $\frac{32}{8}$. Nun nehme man eine zwischen beiden Zählern liegende Kubikzahl z. B. 27 als Zähler an, so wird $\frac{27}{8}$ nicht nur eine Kubikzahl sein, sondern auch innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen liegen.

Bachet wirft hier die Frage auf, warum Diophantus nicht ein rechtwinkliges Dreieck von der Beschaffenheit suche, daß die Summe oder die Differenz der Hypotenuse und jedweder Kathete ein Quadrat werde. Es ist aber leicht einzusehen, daß diese Aufgabe unmöglich ist. Denn bildet man ein Dreieck von zwei Zahlen a und b, so ist die Hypotenuse $=a^2+b^2$, die eine Kathete $=2ab$, die zweite Kathete $=a^2-b^2$, folglich ist sowohl die Summe als die Differenz der Hypotenuse und der ersten Kathete schon an sich ein Quadrat, die Summe der Hypotenuse und der zweiten Kathete aber wird

$=2a^2$

$=2a^2$, und die Differenz eben dieser Größen $=2b^2$; beide Ausdrücke aber können niemals Quadrate werden, weil der Coefficient 2 kein Quadrat ist.

III. IV.

Ein Dreieck heißt seiner Gestalt nach gegeben, εἴδει δεδομένον, sobald man ein demselben ähnliches Dreieck zeichnen kann, unter andern also auch, wenn das Verhältniß der Seiten gegeben ist. Um den Gang der Auflösung bemerklich zu machen, nimmt Diophantus an, das gesuchte Dreieck sei irgend einem bestimmten rechtwinkligen Dreieck, hier z. B. dem Dreieck 3, 4, 5 ähnlich, und habe die Seiten $3x$, $4x$, $5x$. Nun ist die Fläche dieses Dreiecks $=6x^2$, und die Aufgabe verlangt also, daß man $6x^2+5$ zu einem Quadrat mache. Man setze daher $6x^2+5=n^2x^2$, wo n^2 zwar willkührlich, aber größer als 6 genommen werden muß, um negative Werthe zu vermeiden. Aus der obigen Gleichung folgt nun $x^2=\frac{5}{n^2-6}$; soll also x einen rationalen Werth erhalten so muß $\frac{5}{n^2-6}$ ein Quadrat sein, welches der Fall sein wird, wenn n^2-6 der fünfte Theil eines Quadrates ist. Nun ist die Zahl 6 die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks 3, 4, 5; man muß also dies Dreieck und das Quadrat, welches wir hier durch n^2 bezeichnet haben, so bestimmen, daß, wenn f die Fläche des Dreiecks bezeichnet, n^2-f der fünfte Theil eines Quadrates wird.

Um dies Verfahren allgemein darzustellen, sei die gegebene Zahl $= a$. Bildet man nun das Dreieck von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$, und setzt die Wurzel des gesuchten Quadrates $= x + \frac{2a}{x}$, so wird das Verlangte erreicht werden. Das Quadrat selbst wird nämlich $= x^2 + 4a + \frac{4a^2}{x^2}$; zieht man davon die Fläche des Dreiecks $= x^2 - \frac{1}{x^2}$ ab, so bleibt $4a + \frac{4a^2+1}{x^2}$. Dieser Rest soll nun $\frac{1}{a}$ eines Quadrates sein, daher muß $4a^2 + \frac{(4a^2+1)a}{x^2}$, folglich auch $4a^2x^2 + (4a^2+1)a$ ein Quadrat sein. Da aber $4a^2x^2$ schon ein Quadrat ist, so ist es ganz leicht, die ganze Formel zu einem Quadrat zu machen, wenn man die Wurzel $= 2ax + a$ setzt.

Nachdem Diophantus nun das zum Grunde gelegte Dreieck, und zugleich n^2 so bestimmt hat, daß $n^2 - f$ der fünfte Theil eines Quadrates wird, darf nur das zu Anfang der Auflösung erläuterte Verfahren wiederholt werden, um das in der ursprünglichen Aufgabe gesuchte Dreieck zu finden. Diese Rechnung führt Diophantus selten aus, und wir wollen sie ebenfalls dem eigenen Fleiße des Lesers überlassen, und dafür lieber auf die Umsicht aufmerksam machen, mit welcher Diophantus sowohl die Zahlen x und $\frac{1}{x}$, als die Wurzel $x + \frac{2a}{x}$ gewählt hat.

Da die Fläche eines von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$ gebildeten Dreiecks $= x^2 - \frac{1}{x^2}$ wird, so mußte die Wurzel des Quadrates ebenfalls ein Glied x enthalten, damit bei der Subtraction sich x^2 gegen x^2 hebe. Die Wurzel enthält ferner ein Glied $\frac{2a}{x}$, und dadurch wird bewirkt, daß das Quadrat dieses Theiles mit $\frac{1}{x^2}$ gleiche Benennung erhält, und, was vorzüglich wichtig ist, daß in dem Quadrat ein Glied $= 4a$ vorkommt. Da dieses in der Folge mit a, und zuletzt mit x^2 multiplicirt werden muß, so sieht man, daß in der Formel, die man zu einem Quadrat machen soll, das Glied $4a^2x^2$ nicht zufällig ein Quadrat wird, sondern daß alles für diesen Zweck berechnet war. Uebrigens konnte der Zähler des zweiten Theiles der Wurzel statt 2 jeden anderen Coefficienten erhalten, der das Doppelte eines Quadrates ist, z. B. 8, 16, 32 u. s. w. Vieta hat bei dieser Aufgabe bemerkt, daß die Zahl a nothwendig die Summe zweier Quadrate sein müsse, was bei der von Diophantus gewählten Zahl 5 wirklich der Fall ist; aus dem in allgemeinen Zeichen dargestellten Verfahren aber sieht man, daß a jede beliebige Beschaffenheit haben kann.

Bei der vierten Aufgabe finden ganz dieselben Betrachtungen Statt, welche wir bei der vorigen entwickelt haben.

V.

Die Aufgabe verlangt, daß $10-6x^2$ ein Quadrat werde. Zu diesem Ende setze man $10-6x^2=n^2x^2$, so wird $x^2=\frac{10}{n^2+6}$. Soll also x einen rationalen Werth erhalten, so muß der obige Bruch ein Quadrat, also n^2+6 der zehnte Theil eines Quadrats sein. Die Zahl 6 ist aber die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks 3, 4, 5, und man muß daher statt dieses Dreiecks ein anderes suchen, und n^2 so bestimmen, daß, wenn f die Fläche des Dreiecks bezeichnet, n^2+f der zehnte Theil eines Quadrats sei. Dies erreicht man aber, wenn man das Dreieck von den Zahlen x und $\frac{1}{x}$ bildet, und die Wurzel des gesuchten Quadrats $=\frac{1}{x}+5x$, oder, wenn die gegebene Zahl durch a bezeichnet wird, $=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}ax$ setzt.

Das gesuchte Quadrat wird jetzt nämlich

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}a^2x^2+a,$$

die Fläche des Dreiecks $=x^2-\frac{1}{x^2}$, folglich die Summe beider $=x^2+\frac{1}{4}a^2x^2+a=\left(\frac{1}{4}a^2+1\right)x^2+a$. Dies soll nun $\frac{1}{a}$ eines Quadrats, folglich $\left(\frac{1}{4}a^3+a\right)x^2+a^2$ ein Quadrat sein. Da das letzte Glied dieser Formel ein Quadrat ist, so wird die ganze Formel ein Quadrat,

wenn man $a+bx$ als Wurzel annimmt, wobei nur das zu beobachten ist, daß b^2 kleiner sein muß, als $\frac{1}{4}a^3+a$.

Uebrigens sieht man, wie das ganze Verfahren dahin abzweckt, in der Formel, die man zu einem Quadrat machen soll, ein Glied $=a^2$ zu erhalten, wovon die Möglichkeit der Auflösung abhangt.

VI. VII.

Um die vermischte quadratische Gleichung: $6x^2+3x=7$, oder, wenn man die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks $=f$, die Kathete $=k$, die gegebene Zahl $=a$ setzt, die Gleichung $fx^2+kx=a$ zu lösen, muß nach der in der Einleitung entwickelten Formel $\frac{1}{4}k^2+af$ ein Quadrat sein, wenn x einen rationalen Werth erhalten soll, und diesem gemäß muß man statt des Dreiecks 3, 4, 5 ein anderes zum Grunde legen.

Setzt man die eine Kathete $=x$, die zweite $=1$, so wird $f=\frac{1}{2}x$ und $k=1$, es soll also $\frac{1}{4}+\frac{7}{2}x$, folglich auch das Vierfache dieses Ausdrucks, d. i. $14x+1$ ein Quadrat sein. Ferner müssen die Quadrate beider Katheten zusammengenommen ein Quadrat geben, wenn die Hypotenuse durch eine rationale Zahl ausgedrückt werden soll.

Da man hier also einen Werth von x sucht, für welchen sowohl x^2+1 als $14x+1$ ein Quadrat wird, so läßt sich die doppelte Gleichung anwenden, und man

findet $x=\frac{24}{7}$. Das Dreieck hat also die Katheten $\frac{24}{7}$ und 1, oder wenn man beide mit 7 multiplicirt, 24 und 7, folglich wird die Hypotenuse $=25$. Daß man die Katheten des gesuchten Dreiecks durch jede beliebige Zahl multipliciren könne, ist leicht einzusehen. Denn wenn jede Kathete noch den Factor b erhält, so verwandelt sich $\frac{1}{4}k^2$ in $\frac{1}{4}b^2k^2$, die Fläche des Dreiecks aber wird $=b^2f$, also die Summe beider Größen

$$=\frac{1}{4}b^2k^2+b^2f=b^2\left(\frac{1}{4}k^2+f\right),$$

welches ohne Zweifel ein Quadrat sein wird, sobald $\frac{1}{4}k^2+f$ ein Quadrat ist.

Statt des Dreiecks 3, 4, 5 muß nun das Dreieck 7, 24, 25 zum Grunde gelegt, also die Seiten des in der Hauptaufgabe gesuchten Dreiecks durch 7x, 24x, 25x ausgedrückt werden. Nunmehr ist die Fläche des Dreiecks $=84x^2$, und es soll also $84x^2+7x=7$ sein. Nun wird $\frac{1}{4}k^2+af=\frac{49}{4}+588=\frac{2401}{4}$, folglich $\sqrt{\left(\frac{1}{4}k^2+af\right)}=\frac{49}{2}$. Zieht man davon $\frac{7}{2}$ ab, und dividirt den Rest durch 84, so erhält man $=\frac{42}{168}=\frac{1}{4}$.

Auch bei der siebenten Aufgabe ist die nämliche Hülfsaufgabe zu lösen.

VIII. IX.

Wenn man bei der Auflösung dieser Aufgabe ein Dreieck zum Grunde legt, in welchem die Summe der Katheten $= s$, die Fläche aber $= f$ wird, so erhält man die Gleichung $fx^2 + sx = 6$. Diese Gleichung kann aber nur dann in rationalen Zahlen aufgelöst werden, wenn $\frac{1}{4}s^2 + 6f$ ein Quadrat ist.

Um diesen Zweck zu erreichen, setzt Diophantus die eine Kathete $= x$, die zweite $= 1$, also $s = x + 1$, und $f = \frac{1}{2}x$. Es soll also $\frac{1}{4}(x+1)^2 + 3x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{4}$, also auch $x^2 + 14x + 1$ ein Quadrat sein. Da die Quadrate der beiden Katheten die Summe $x^2 + 1$ geben, so muß auch dieser Ausdruck ein Quadrat sein, und man findet vermittelst der doppelten Gleichung $x = \frac{45}{28}$, und daraus das Dreieck, von welchem man ausgehen muß. Die Seiten dieses Dreiecks können aus dem bei VI. angeführten Grunde mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden. Man erhält also das Dreieck 28, 45, 53, und setzt nunmehr die Seiten des gesuchten Dreiecks $= 28x$, $45x$, $53x$. Aus der Gleichung findet man zuletzt $x = \frac{1}{18}$.

X. XI.

Geht man von einem Dreieck aus, in welchem die Hypotenuse $= h$, die eine Kathete $= k$, die Fläche $= f$

ist, so erhält man zuletzt die Gleichung $fx^2 \pm (h+k)x = 4$, wo das Zeichen + für die X. das Zeichen — für die XI. Aufgabe gilt. Daher muß $\frac{(h+k)^2}{4} \pm 4f$ ein Quadrat sein, und das Dreieck muß diesem gemäß bestimmt werden.

Das Verfahren ist im Texte selbst ausführlich dargestellt. Das Dreieck sollte von den Brüchen $\frac{5}{4}$ und $\frac{9}{4}$ gebildet werden, Diophantus aber bildet es von den Zahlen 5 und 9; denn dies ist, wie man leicht übersieht, eben soviel, als hätte er die Seiten mit 16, oder mit dem Quadrat des Nenners multiplicirt, was nach der Anmerkung zu VI. alle Mal erlaubt ist. Das von den Zahlen 5 und 9 gebildete Dreieck hat nun die Seiten 56, 90, 106, statt dessen legt Diophantus das diesem ähnliche Dreieck 28, 45, 53 zum Grunde.

XII.

Wenn man das Dreieck von den Zahlen m und n bildet, so ist die eine Kathete $= 2mn$, die andere $= m^2 - n^2$, die Fläche des Dreiecks aber $= mn(m^2 - n^2)$. Sieht man nun $2mn$ als die größere Kathete an, so sollen

1. $2mn - m^2 + n^2$; 2. $2mn$;

3. $mn(m^2 - n^2) + m^2 - n^2$

Quadrate werden. Ist nun $m = 2n$, so wird

$2mn = 4n^2$, und $2mn - m^2 + n^2 = 5n^2 - m^2 = n^2$,

also die beiden ersten Bedingungen durch den bloßen Ansatz erreicht.

Bildet man also das Dreieck von den Zahlen x und 2x, so wird die größere Kathete $=4x^2$, die kleinere $=3x^2$, also die Fläche des Dreiecks $=6x^4$. Nun verlangt die Aufgabe, daß $6x^4+3x^2$, also auch $6x^2+3$ ein Quadrat sei, und man übersieht sogleich, daß dies geschehen wird, wenn man $x^2=1$ setzt. Der folgende Lehnsatz zeigt aber, daß man für x unzählig viele Werthe finden kann, weil 6+3, d. i. die Fläche und die kleinere Kathete eines von den Zahlen 1 und 2 gebildeten Dreiecks, nach dem Verfahren selbst ein Quadrat zur Summe giebt.

XIII.

In der vorigen Aufgabe kam es bloß darauf an, die Formel $6x^2+3$ zu einem Quadrat zu machen, und wir fanden ohne eine eigentliche Rechnung, daß dies geschehe, wenn man $x^2=1$ setzt, weil 6+3 selbst ein Quadrat war. Diophantus zeigt jetzt aber noch, daß man unter der obigen Voraussetzung für x^2 unzählige Werthe finden kann. Sein Verfahren zeigt eigentlich, wie man die Formel $3x^2+6$ zu einem Quadrat machen könne; in der vorigen Aufgabe war es aber die Formel $6x^2+3$, welche zu einem Quadrat gemacht werden sollte. Wir wollen daher das Verfahren an der letzteren Formel wiederholen.

Man setze das für x^2 gesuchte Quadrat

$$= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

wenn man dieses Quadrat mit der Zahl 6 multiplicirt, und die andere gegebene Zahl dazu addirt, so erhält man $6x^2+12x+9$. In dieser Formel ist das letzte Glied nach der Voraussetzung ein Quadrat, und man kann dieselbe daher auf unzählige Arten zu einem Quadrate machen. Man setze z. B. die Wurzel $=3-3x$, so wird

$$6x^2 + 12x + 9 = 9 - 18x + 9x^2$$

Hieraus ergiebt sich $x=10$, und da die Wurzel des gesuchten Quadrates $=x+1$ war, so wird dieselbe $=11$, und das Quadrat selbst $=121$. Setzt man diesen Werth in die Formel $6x^2+3$, so erhält man $6.121+3=729=27^2$. Man kann daher das in XII. gesuchte Dreieck auch von den Zahlen 11 und 22 bilden, wo die Seiten desselben 363, 484, 605 sein werden.

Uebrigens läßt sich der hier erläuterte Satz nicht bloß auf ein Paar Zahlen anwenden, deren Summe ein Quadrat ist, sondern auch, wie Bachet sehr richtig bemerkt hat, auf zwei Zahlen, welche so beschaffen sind, daß, wenn man die eine durch ein Quadrat multiplicirt oder dividirt, und die zweite gegebene Zahl dazu addirt, die Summe ein Quadrat wird. Man habe z. B. die Zahlen a^2b und c, und nehme an, daß $b+c$ ein Quadrat sei, so kann man unzählige Quadrate von der Beschaffenheit finden, daß, wenn man das erste Glied durch eines dieser Quadrate dividirt oder multiplicirt, und

das zweite Glied dazu addirt, die Summe wieder ein Quadrat wird. Es sei z. B. die Wurzel des gesuchten Quadrats $= a+x$, das Quadrat selbst also $= a^2+2ax+x^2$, so soll

$$\frac{a^2b}{a^2+2ax+x^2}+c=\frac{cx^2+2acx+a^2c+a^2b}{a^2+2ax+x^2}$$

ebenfalls ein Quadrat sein.

Da der Nenner schon ein Quadrat ist, so kommt es nur darauf an, den Zähler zu einem Quadrat zu machen. Nun ist aber $a^2c+a^2b=a^2(c+b)$, und da nach der Annahme $c+b$ ein Quadrat ist, so muß auch das ganze Glied $a^2(c+b)$ ein Quadrat sein, und man kann daher den Zähler des obigen Bruchs, folglich die ganze Formel zu einem Quadrate machen.

Von diesem Satze muß zur Auflösung der XII. Aufgabe vielfältig Anwendung gemacht werden. Man bilde z. B. das in XII. zum Grunde liegende Dreieck von den Zahlen $2x$ und $4x$, so ist die größere Kathete $=16x^2$, die kleinere Kathete $=12x^2$, also der Unterschied beider $=4x^2$, und zwei Bedingungen der Aufgabe sind also schon erfüllt. Nun soll aber auch die Fläche des Dreiecks, mit der kleinern Kathete zusammengenommen, ein Quadrat werden d. h. $96x^4+12x^2$, folglich auch $96x^2+12$ soll ein Quadrat sein. Hier ist nun die Summe $96+12$ kein Quadrat, wenn man aber 96 durch das Quadrat 4 dividirt, so wird $24+12=36$, und es läßt sich nunmehr wohl der Bachetsche, aber nicht der Diophantische Lehnsatz anwenden, um die Formel $96x^2+12$ zu einem Quadrat zu machen.

Aus der Entstehung der Fläche und der kleineren Kathete eines Dreiecks, wie in XII. gesucht wird, ist übrigens klar, daß die Zahlen, die man für 6 und 3 erhält, entweder unmittelbar, oder wenigstens dann ein Quadrat zur Summe geben, wenn man den Coefficienten der Fläche durch das Quadrat der kleineren Zahl, von denen man das Dreieck gebildet hat, dividirt. Das Dreieck sei z. B. von den Zahlen ax und 2ax gebildet, so ist die größere Kathete $=4a^2x^2$, die kleinere $=3a^2x^2$, also die Fläche $=6a^4x^4$, und man soll also die Formel $6a^4x^4+3a^2x^2$, oder auch nur $6a^4x^2+3a^2$ zu einem Quadrat machen. Dividirt man nun das erste Glied durch a^2, so ist $6a^2+3a^2=9a^2$, folglich alle Mal ein Quadrat.

XIV.

Um den Gang der Auflösung bemerklich zu machen, nehme man mx, nx, px als die Seiten des gesuchten Dreiecks an. Nun soll sowohl $\frac{mnx^2}{2}+mx$, als $\frac{mnx^2}{2}+nx$ ein Quadrat sein. Man setze also $\frac{mnx^2}{2}+nx=z^2x^2$, wo z^2 willkührlich, aber größer als $\frac{mn}{2}$ genommen werden muß. Hieraus ergiebt sich $x=\frac{n}{z^2-\frac{1}{2}mn}$, und wenn nun für eben diesen Werth von x auch $\frac{mnx^2}{2}+mx$ ein Qua-

drat würde, so wäre die Auflösung gefunden. Dies trifft aber nicht zu, wenn, wie im Texte,

$$z^2 = 36,\ \frac{mn}{2} = 30,\ \text{und } n = 12$$

ist. Daher muß man für z^2 ein anderes Quadrat von der Beschaffenheit suchen, daß, wenn man $\frac{1}{2}mn = 30$ davon abzieht, die Kathete $n = 12$ dadurch dividirt, hierauf den Quotienten $\frac{n}{z^2 - \frac{1}{2}mn}$ ins Quadrat erhebt, dieses wieder mit $\frac{1}{2}mn = 30$ multiplicirt, und endlich mx, d. i. $\frac{5n}{z^2 - \frac{1}{2}mn}$ dazu addirt, die Summe ebenfalls ein Quadrat wird.

Vollzieht man die angegebene Rechnung, so soll $\frac{60z^2 + 2520}{z^4 - 60z + 900}$ ein Quadrat sein, welches der Fall sein wird, sobald nur $60z^2 + 2520$ ein Quadrat ist. Es wäre nun nach dem vorigen Lehnsatz ganz leicht, die Formel $60z^2 + 2520$ zu einem Quadrat zu machen, wenn $60 + 2520$ ein Quadrat wäre, und man muß daher die Seiten des zum Grunde gelegten Dreiecks, m, n, p so bestimmen, daß dieser Forderung genügt wird.

Man überlege zu diesem Ende, wie die Zahlen 60 und 2520 entstanden sind, indem man die im Texte ausgeführte Zahlenrechnung, Schritt vor Schritt, verfolgt. Die Zahl 60 ist $= mn$, also ein Produkt der beiden Katheten, 2520 aber entsteht, indem man 144, oder das

Quadrat der größern Kathete mit der Zahl 30, oder mit der Fläche des Dreiecks $= \frac{1}{2}mn$ multiplicirt, und davon das Produkt $60 \times 30 = 5.12.30$ d. h. ein Produkt aus den beiden Katheten und der Fläche des Dreiecks abzieht. Ist also n die größere Kathete, so ist die wahre Entstehung der Zahl 2520 in folgender Formel enthalten, $2520 = n^2\frac{mn}{2} - mn.\frac{mn}{2} = n(n-m)\frac{mn}{2}$. Diophantus sagt daher ganz recht, die Zahl 2520 sei ein Produkt aus der größeren Kathete n, dem Unterschied beider Katheten n—m, und der Fläche des Dreiecks $\frac{mn}{2}$.

Es muß daher ein Dreieck gesucht werden, dessen Katheten m und n so beschaffen sind, daß $mn + n(n-m)\frac{nm}{2}$ ein Quadrat wird. Ist nun die größere Kathete n selbst ein Quadrat, und man dividirt obige Formel durch n, so muß $m + (n-m)\frac{nm}{2}$ d. i. die kleinere Kathete und das Produkt aus der Fläche in den Unterschied der Katheten ein Quadrat sein. Nach XII. sind wir im Stande, ein Dreieck zu finden, in welchem die größere Kathete n, ferner der Unterschied beider Katheten m—n, endlich die Summe der Fläche und der kleinern Kathete $m + \frac{mn}{2}$ ein Quadrat ist. Von den unzähligen Dreiecken, welche auf diese Weise gefunden werden können, nimmt Diophantus das Dreieck 3, 4, 5, weil in diesem $n - m = 1$,

folglich $m+(n-m)\frac{mn}{2}=m+\frac{mn}{2}$, also nach dem Verfahren selbst ein Quadrat ist. Um den Gang des Verfahrens anzudeuten, setzt Diophantus hinzu, daß es nach Auflösung dieser vorläufigen Aufgabe bloß darauf ankomme, zu den Zahlen m und $\frac{mn}{2}$, d. i. zu der kleinern Kathete und der Fläche des Dreiecks ein Quadrat (z^2) von der Beschaffenheit zu suchen, daß $mz^2+\frac{mn}{2}$ ein Quadrat wird.

Nunmehr setzt Diophantus die Seiten des Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$, und wiederholt ganz das vorige Verfahren. Es soll nämlich sowohl $6x^2+4x$ als $6x^2+3x$ ein Quadrat werden.

Nun sollte man $6x^2+4x=z^2x^2$ setzen, woraus sich $x=\frac{4}{z^2-6}$ ergiebt. Es muß aber z^2, (wofür Diophantus x^2 setzt), so bestimmt werden, daß das Quadrat von $\frac{4}{z^2-6}$ wenn man es mit 6 multiplicirt, und die dreifache Wurzel dazu addirt, wieder ein Quadrat wird. Ist nun $x=\frac{4}{z^2-6}$, so ist das Quadrat $=\frac{16}{z^4-12z+36}$; wenn man dies mit 6, multiplicirt, und die dreifache Wurzel dazu addirt, so erhält man $\frac{16.16}{z^4-12z+36}+\frac{3.4}{z^2-6}$, und wenn man beide Glieder auf einerlei Benennung bringt, so erhält man nach gehöriger Reduction $\frac{12z^2+24}{z^4-12z+36}$. Diese Formel soll ein Quadrat sein, und da der Nenner bereits ein Quadrat ist, so hat man nur den Zähler

$12z^2+24$ zu einem Quadrat zu machen. Da wir das Dreieck 3, 4, 5 so bestimmt haben, daß

$$12+24=mn+n(n-m)\frac{mn}{2}$$

ein Quadrat ist, so ist nur noch übrig, daß man z^2, nach dem in dem Lehnsatz XIII. gezeigten Verfahren bestimme.

Man setze die Wurzel des gesuchten Quadrates $=y+1$, also das Quadrat selbst $=y^2+2y+1$. Multiplicirt man dies mit 12, und addirt dazu 24, so erhält man $12y^2+24y+36$. Davon setze man die Wurzel $=6+3y$, so wird $y=4$, also die Wurzel des gesuchten Quadrates $y+1=5$, und das verlangte Quadrat ist also 25. Nunmehr setze man

$$6x^2+4x=25x^2$$

so wird $x=\frac{4}{19}$.

Da die Wurzel von $12y^2+24y+36$ verschieden genommen werden kann, so erhält man auch dann noch verschiedene Auflösungen, wenn man immer das Dreieck 3, 4, 5 zum Grunde legt, welches deshalb besonders brauchbar ist, weil in demselben $n-m=1$ wird. Die übrigen Dreiecke, welche nach XII. gefunden werden könnten, sind für unsern Zweck nicht ohne eine besondere Rechnung zu gebrauchen. Fermat zeigt jedoch, wie man aus dem Dreieck 3, 4, 5 unzählig viele andere Dreiecke ableiten könne, welcher auch unmittelbar zur Auflösung ge-

gebraucht werden können. Man setze nämlich die größere Kathete $=4$, die kleinere $=3+x$, so wird

$$mn+n(n-m)\frac{mn}{2}=36-12x-8x^2,$$

und diese Formel muß also ein Quadrat sein. Soll aber die Hypotenuse einen rationalen Werth erhalten, so muß auch die Summe der Kathetenquadrate d. i. $x^2+6x+25$ ein Quadrat sein. Die Auflösung dieser doppelten Gleichung hat aber keine Schwierigkeit, weil in beiden die bestimmte Zahl ein Quadrat ist.

XV.

Wenn man bei dieser Aufgabe ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck zum Grunde legt, so finden eben die Betrachtungen Statt, welche wir bei der vorigen Aufgabe entwickelt haben. Daher legt Diophantus sogleich das Dreieck 3, 4, 5 zum Grunde, und setzt die Seiten des gesuchten Dreiecks $3x$, $4x$, $5x$.

Dieser Ansatz führt darauf, daß sowohl $6x^2-4x$ als $6x^2-3x$ ein Quadrat sein soll. Man setze also $6x^2-4x=z^2x^2$, wo z^2 kleiner als 6 sein muß, so wird $x=\frac{4}{6-z^2}$. Nun muß $x^2=\frac{16}{z^4-12z^2+36}$ auch die Eigenschaft haben, daß, wenn man es mit 6 multiplicirt, und die dreifache Wurzel davon abzieht, der Rest ein Quadrat wird. Wenn man aber die hier angegebene Rechnung vollzieht, so erhält man $\frac{12z^2+24}{z^4-12z^2+36}$.

Nun kommt es bloß darauf an, den Zähler $12z^2+24$ zu einem Quadrat zu machen; da aber nach dem Verfahren selbst $12+24$ ein Quadrat ist, so kann man $z^2=1$ setzen, dann werden die Seiten des Dreiecks $\frac{12}{5}$, $\frac{16}{5}$ und 4, die Fläche $\frac{96}{25}$; zieht man davon die Katheten einzeln ab, so erhält man die Reste $\frac{36}{25}$ und $\frac{16}{25}$, also in beiden Fällen Quadrate.

Nach dem Lehnsatz XII. kann man statt z^2 noch unzählige Werthe finden, nur muß man darauf Rücksicht nehmen, daß z^2 nicht größer als 6 sein darf. Man setze also die Wurzel des Quadrats, welches in die Formel $12z^2+24$ statt z^2 gesetzt werden soll, $=z+1$, also das Quadrat selbst $=z^2+2z+1$, so soll

$$12z^2+24z+36,$$

oder, wenn man alles mit 4 dividirt, $3z^2+6z+9$ ein Quadrat sein. Die Wurzel muß nun die Form $3-nz$ haben, dies giebt $z=\frac{6n+6}{n^2+3}$. Nun soll das gesuchte Quadrat kleiner als 6, folglich die Wurzel desselben kleiner als $\sqrt{6}$, d. i. wenn man die Wurzel bloß durch Näherung bestimmt, kleiner als $\frac{22}{9}$ sein, daher muß z kleiner als $\frac{22}{9}-1$, d. i. kleiner als $\frac{13}{9}$ sein. Hiernach muß man also die Zahl n, welche sonst willkührlich ist, näher bestimmen, d. h. man muß eine Zahl n suchen, die so beschaffen ist, daß $\frac{6n+6}{n^2+3}$ kleiner als $\frac{13}{9}$ wird.

Wie man diese Prüfung anzustellen habe, ist in der Anmerkung zur XXXIII. Aufgabe des fünften Buches ausführlich gezeigt worden.

XVI.

Wenn man das Dreieck 3, 4, 5 zum Grunde legt, also die Seiten des gesuchten Dreiecks durch $3x$, $4x$, $5x$ ausdrückt, so soll man die Formeln $6x^2-5x$ und $6x^2-3x$ zu Quadraten machen. Man setze daher $6x^2-3x=z^2x^2$, wo z^2 ein beliebiges Quadrat, aber größer als 6 ist, so wird $x=\frac{3}{z^2-6}$, wofür Diophantus, wie immer, $\frac{3}{x^2-6}$ setzt. Nun sollte für eben diesen Werth von x auch die zweite Formel $6x^2-5x$ ein Quadrat sein, und nach der im Texte ausgeführten Rechnung kommt es dahin, daß man die Formel $15z^2-36$ zu einem Quadrat machen muß. Da das letzte Glied ein Quadrat ist, z^2 aber noch keinen bestimmten Zahlenwerth hat, so wäre es ganz leicht, diese Formel zu einem Quadrat zu machen, wenn 15 die Summe zweier Quadrate wäre; denn sollte man z. B. $(a^2+b^2)z^2-d^2$ zu einem Quadrat machen, so setze man $(a^2+b^2)z^2-d^2=a^2z^2$, so wird

$$b^2z^2=d^2, \text{ also } z=\frac{d}{b}.$$

Da 15 aber nicht die Summe von zwei Quadraten ist, so wird es nöthig, die Entstehung der ganzen Formel $15z^2-36$ näher zu betrachten, und um dieselbe

desto leichter darstellen zu können, wollen wir die Hypotenuse des zum Grunde gelegten Dreiecks = h, die kleinere Kathete = k, seine Fläche = f setzen. Nun ist, wie die im Text ausführte Rechnung nachweist,

$$15 = 3.5 = hk,\ 36 = 90 - 54 = 3.5.6 - 3.3.6 = khf - k^2f = kf(h - k)$$

d. h. 36 ist ein Produkt aus der kleineren Kathete, aus der Fläche des Dreiecks, und aus dem Unterschied der Hypotenuse und der kleineren Kathete. Endlich ist z^2 ein beliebiges Quadrat, welches aber kleiner sein muß, als die Fläche des Dreiecks, weil $6 - z^2 = f - z^2$ als Divisor vorkommt. Man muß also statt des Dreiecks 3, 4, 5, ein anderes Dreieck suchen, und dazu z^2 so bestimmen, daß mit Beibehaltung der vorigen Zeichen $hkz^2 - kf(h - k)$ ein Quadrat wird.

Hier folgt nun im Texte eine Betrachtung, welche die Auflösung vorbereiten soll, es fehlt aber nicht nur der Anfang derselben, der in der Uebersetzung daher durch eine Lücke angedeutet worden ist, sondern die letzten Worte derselben sind auch so verderbt, daß man kaum den Sinn derselben errathen kann, daher der Uebersetzer die ganze Stelle, deren Sinn er nur muthmaßen konnte, mit Sternen bezeichnet hat. Glücklicherweise ist indeß die eigentliche Auflösung vollständig erhalten, und die nähere Entwickelung derselben wird die muthmaßliche Uebersetzung rechtfertigen.

Man bilde das Dreieck, von welchem man ausgehen will, von zwei ähnlichen Flächenzahlen z. B. von a und

ab^2, so wird die Hypotenuse $h = a^2b^4 + a^2$; die größere Kathete $g = a^2b^4 - a^2$, die kleinere Kathete $k = 2a^2b^2$, also das Doppelte eines Quadrats, die Fläche des Dreiecks $f = \frac{1}{2}kg$, also ein Produkt aus einem Quadrat in die größere Kathete, endlich wird

$$h - k = a^2b^4 - 2a^2b^2 + a^2 = (ab^2 - a)^2,$$

d. h. diese Differenz wird, wie immer, ein Quadrat, und hieraus läßt sich zeigen, daß die obige Formel $hkz^2 - kf(h-k)$ ein Quadrat wird, wenn man

$$z^2 = \frac{1}{2}k(h-k)$$

setzt; denn daß dies Produkt ein Quadrat sein werde, ist einleuchtend, da nach der eben gegebenen Erläuterung beide Factoren Quadrate sind. Setzt man nämlich in die Formel die für f und z^2 angegebenen Werthe, so erhält man

$$hk.\frac{1}{2}k(h-k) - k.\frac{1}{2}kg(h-k).$$

Dividirt man diese Formel ein Mal durch das Quadrat $h-k$, und zwei Mal hinter einander durch das Quadrat $\frac{1}{2}k$, so hat man nur zu zeigen, daß der Quotient $2h - 2g = 2(h-g)$ ein Quadrat sei. Man setze aber für h und g die obigen Werthe, so wird

$$2(h-g) = 2(a^2b^4 + a^2 - a^2b^4 + a^2) = 4a^2,$$

und es ist also bewiesen, daß die Formel $hkz^2 - kf(h-k)$ durch das angegebene Verfahren nothwendig ein Quadrat wird.

Der leichteren Uebersicht wegen wollen wir den Beweis noch an einem bestimmten Zahlenbeispiele wiederholen. Man bilde das Dreieck von den Zahlen 1 und 4, so wird die Hypotenuse $=16+1=17$, die größere Kathete $=16-1=15$, die kleinere Kathete $=2.4=8$, also das Doppelte eines Quadrats, die Fläche des Dreiecks $=4.15=60$, die Differenz der Hypotenuse und der kleineren Kathe $=17-8=9$, also wie immer ein Quadrat.

Setzt man nun die Seiten des gesuchten Dreiecks der Reihe nach $8x$, $15x$, $17x$, so soll man die beiden Formeln $60x^2-17x$ und $60x^2-8x$ zu Quadraten machen. Um die letztere Formel zu einem Quadrate zu machen, setze man

$$60x^2-8x=z^2x^2, \text{ so wird } x=\frac{8}{60-z^2}.$$

Setzt man diesen Werth für x in die erste Formel, so soll auch

$$\frac{60.8.8-17.8.60+17.8.z^2}{3600-120z^2+z^4}=\frac{8.17.z^2-8.60(17-8)}{(60-z^2)^2}$$

ein Quadrat sein. Da der Nenner bereits ein Quadrat ist, so kommt es nur darauf an, den Zähler $8.17z^2-8.60.(17-8)$ zu einem Quadrat zu machen. Nun ist zwar der Coefficient $8.17=136=100+36$ die Summe zweier Quadrate, und es ist leicht einzusehen, daß dies nicht Zufall, sondern eine nothwendige Folge des ganzen Verfahrens ist, indem $8=2.4$, und $17=16+1$ ist; allein da das Glied $8.60.(17-8)$ nicht, wie in der

ersten Formel die Zahl 36, ein Quadrat ist, so läßt sich das dort angedeutete Verfahren gar nicht anwenden. Es ist aber auch nicht nöthig, dasselbe anzuwenden, da wir die Formel auf eine andere Art zu einem Quadrat machen können, indem wir nämlich $z^2 = \frac{1}{2}k(h-k)$ d. i. $=4.9=36$ setzen. Daß aber die Zahl

$$8.17.4.9-8.60.(17-8)$$

nothwendig ein Quadrat sei, läßt sich leicht einsehen. Beide Glieder enthalten den Factor $9=17-8$, der nach der Construction ein Quadrat ist. Da $60=4.15$, so enthalten beide Glieder den quadratischen Factor 4, und da der gemeinschaftliche Factor $8=2.4$ ist, so enthalten beide Glieder den quadratischen Factor 4 noch zum zweiten Male; dividirt man also durch das Quadrat 4.4.9, so ist nur noch zu zeigen, daß der Quotient

$$2.17-2.15=2(17-15)$$

ein Quadrat sein müsse. Nun ist aber, wenn wir wieder auf die Entstehung der Zahlen zurückgehen, $17=16+1$, und $15=16-1$, also wird $17-15$ nicht zufällig, sondern nothwendiger Weise das Doppelte eines Quadrats, also $2(17-15)$ das Vierfache eines Quadrats, d. h. $2(17-15)$ muß ein Quadrat sein.

Man kann daher, um die Formel $60x^2-8x$ zu einem Quadrat zu machen, z^2 sogleich $=36$, d. h. $60x^2-8x=36x^2$ setzen, weil man schon weiß, daß für diesen Fall auch $60x^2-17x$ ein Quadrat wird.

Jetzt ist nur noch eine Schwierigkeit zu erörtern. Wenn man nämlich $60x^2 - 8x = z^2x^2$ setzt, so muß z^2 nothwendig kleiner als 60 sein, weil man für x den Werth $\frac{8}{60-z^2}$ findet; es ist daher noch zu zeigen, daß bei dem angegebenen Verfahren 36 nicht zufälliger, sondern nothwendiger Weise kleiner als 60, d. i. kleiner als die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks wird. Nach der Entstehung dieser Zahlen war $36 = 4.9$, $60 = 4.15$; da beide Zahlen den Factor 4 gemein haben, so ist bloß zu zeigen, daß $9 = 17 - 8$ nothwendig kleiner als $15 = 16 - 1$ sei. Geht man auf die Entstehung des Dreiecks 8, 15, 17 zurück, und nennt die größere Zahl, von welchen dasselbe gebildet wurde a, die kleinere b, so ist $17 = a^2 + b^2$, $15 = a^2 - b^2$, $8 = 2ab$, also $9 = a^2 + b^2 - 2ab$. Ist nun a größer als b, so ist ab gewiß größer als b^2, folglich 2ab größer als $2b^2$; und daher giebt die Formel $a^2 + b^2 - 2ab$ nothwendig einen kleineren Werth, als die Formel $a^2 - b^2$.

Die Aufgabe ist ihrer Natur nach eine unbestimmte, auf dem hier angegebenen Wege erhält man aber immer nur eine Auflösung; will man daher für x andere Werthe haben, so kann man das Dreieck von ein Paar anderen Flächenzahlen bilden, oder nach Anleitung des folgenden Satzes statt 36 ein anderes Quadrat suchen, welches für z^2 gesetzt, ebenfalls den Bedingungen der Aufgabe genügt.

XVII.

In der XI. Aufgabe kam es darauf an, die Formel $3x^2+6$ zu einem Quadrat zu machen, und man sah sogleich, daß man nur $x^2=1$ setzen dürfe, um diesen Zweck zu erreichen. In dem folgenden Lehnsatz XII. zeigt Diophantus aber, wie aus dem einen Werthe $x^2=1$ sich unzählige Werthe ableiten lassen, welche der nämlichen Forderung genügen.

So wie dort die XI. Aufgabe durch den folgenden Lehnsatz ergänzt wurde, so wird die XVI. Aufgabe durch den gegenwärtigen Lehnsatz ergänzt. Es kam im Vorigen darauf an, die Formel $17.8.z^2-8.60.9=136x^2-4320$ zu einem Quadrat zu machen, und es fand sich, daß dies geschehe, wenn man $x^2=36$ setzt. Nunmehr wird gezeigt, daß man statt 36 noch unzählige Werthe finden könne, welche für x^2 gesetzt, die obige Formel zu einem Quadrat machen. In der Aufgabe ist zwar noch die nähere Bestimmung enthalten, daß das neue Quadrat größer sein solle, als das gegebene, weil dies in der folgenden Aufgabe verlangt wird. Es hat aber gar keine Schwierigkeit, auch ein kleineres Quadrat von der verlangten Eigenschaft zu finden. Wenn nämlich 3 und 11 die gegebenen Zahlen sind, und 25 die Eigenschaft hat, daß $3.25-11$ ein Quadrat wird, so setze man die Wurzel des gesuchten Quadrats $=5-x$, so wird das Quadrat $=x^2-10x+25$, und nun soll

$$3(x^2-10x+25)+11=3x^2-30x+3.25+11$$

ein Quadrat sein. Da das letzte Glied nach der Voraussetzung noch immer ein Quadrat, nämlich =64 ist, so läßt sich die ganze Formel zu einem Quadrat machen, wenn man die Wurzel =8—2x setzt. Hieraus ergiebt sich

$$4x^2-32x+64=3x^2-30x+64$$

also $x^2=2x$, und $x=2$. Da nun die Wurzel des gesuchten Quadrats 5—x war, so wird dieselbe =3, und das gesuchte Quadrat =9, und wirklich ist 3.9—11=16, also wieder ein Quadrat. Giebt man der Wurzel die Form 8—nx, so wird $x=\frac{16n-30}{n^2-3}$, und da x kleiner als 5 werden muß, so findet man, nach der oft erwähnten Methode, daß man für n alle ganzen Zahlen von der 2 an setzen könne.

XVIII.

Die Gründe des ganzen Verfahrens sind in der Anmerkung zu XVI. bereits entwickelt. Setzt man das gesuchte Dreieck =8x, 15x, 17x, so sollen $60x^2+17x$ und $60x^2+8x$ zwei Quadrate werden. Man setze also $60x^2+8x=z^2x^2$, so wird $x=\frac{8}{z^2-60}$, woraus sich sogleich ergiebt, daß z^2 größer als 60 d. i. größer als die Fläche des zum Grunde gelegten Dreiecks 8, 15, 17 sein muß. Setzt man nun diesen Werth von x in die Formel $60x^2+17x$, so soll auch $\frac{60.8.8}{(z^2-60)^2}+\frac{17.8}{z^2-60}=\frac{136z^2-4320}{(z^2-60)^2}$ ein Quadrat werden, welches geschehen wird, wenn nur der Zähler $136z^2-4320$ ein Quadrat wird.

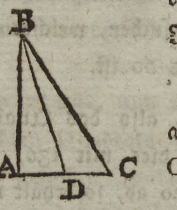
Wir wissen nun zwar, daß dies geschieht, wenn man $z^2=36$ setzt; dies Quadrat ist aber kleiner als die Fläche des Dreiecks, und man muß daher vermittelst des vorigen Lehnsatzes ein größeres Quadrat suchen, welches dieselbe Eigenschaft hat, und größer als 60 ist.

Man setze die Wurzel $=6+y$, also das Quadrat $=y^2+12y+36$. Multiplicirt man dies mit 136, und zieht von dem Produkt die Zahl 3420 ab, so erhält man $136y^2+1632y+576$. Da das letzte Glied das Quadrat von 24 ist, so setze man die Wurzel $=24+16y$, woraus sich $y=20$, also die gesuchte Wurzel $=26$, und das gesuchte Quadrat $=676$ ergiebt. Da das Quadrat größer als 60 sein sollte, so durfte die Wurzel nicht kleiner als 8, folglich y nicht kleiner als 2 sein. Giebt man also der Wurzel die Form $24-ny$, so wird $y=\frac{1632-48n}{n^2-136}$, woraus man sogleich sieht, daß n^2 größer als 136, also n nicht kleiner als 12 sein darf. Aus einer fernern Prüfung ergiebt sich $n^2+24n<952$, woraus man findet, daß n in ganzen Zahlen höchstens $=21$ sein könne, daher man für n alle Zahlen von 12 bis 21 setzen kann.

XIX.

In dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC werde der Winkel bei B durch die gerade $BD=5x$ gehälftet. Ist nun der Abschnitt $AD=3x$, so muß die Kathete $AB=\sqrt{(25x^2-9x^2)}=4x$ sein. Ist aber $AC=3$,

so wird $CD = AC - AD = 3 - 3x$ sein. Da der Winkel bei B gehälftet ist, so hat man nach Eukl. VI., 3. die Proportion $BC:CD = AB:AD$.



Nun ist nach der Annahme

$$AB:AD = 4x:3x = 4:3,$$

also ist auch $BC:CD = 4:3$. Da $CD = 3 - 3x$, so wird

$$BC = \frac{(3-3x)4}{3} = 4 - 4x.$$

Bachet fügt dieser Aufgabe eine sehr lehrreiche Sammlung von Aufgaben bei, in welchen schiefwinklige Dreiecke in rationalen Zahlen also bestimmt werden, daß die Linien, welche aus einer Winkelspitze gezogen werden, und entweder diesen Winkel oder die Gegenseite desselben hälften, oder auch auf der Gegenseite winkelrecht stehen, sich ebenfalls durch rationale Zahlen ausdrücken lassen. Diese Aufgaben sind dem Liebhaber der diophantischen Analysis mit Recht zu empfehlen; vermuthlich machten ähnliche Aufgaben den Inhalt einiger verlorenen Bücher des Diophantus aus.

XX.

Die Aufgabe, ein Quadrat zu finden, welches ein Cubus wird, sobald man 2 dazu addirt, führt auf die kubische Gleichung

$$x^3 + x = 4x^2 + 4, \text{ oder } x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0.$$

Da das letzte Glied die Factoren 1, 2 und 4 hat, so findet man leicht, daß die ganze Formel $=0$ werde, wenn man $x=4$ setzt. Auf welche Weise Diophantus eine kubische Gleichung löse, ist aus den vorhandenen Büchern nicht zu ersehen; vermuthlich kannte er nur die Auflösung für einige bestimmte Fälle, zu denen auch der gegenwärtige gehört. Hat nämlich eine kubische Gleichung die Form

$$x^3+x=ax^2+a, \text{ oder } x^3+x^2=ax+a,$$

so ist leicht einzusehen, daß in dem ersten Falle $x=a$, im zweiten $x=\sqrt{a}$ sein müsse, und daß man also in beiden Fällen eine der drei Wurzeln ohne eigentliche Rechnung finden könne.

XXI.

Setzt man die Hypotenuse $=8-x$, die Fläche $=x$, so ist die erste Bedingung bereits erfüllt. Ist ferner, wie in der vorigen Aufgabe, die eine Kathete $=2$, die andere $=x$, so ist der Umfang des Dreiecks $=8+2$, und da diese Summe kein Quadrat ist, so muß man, statt der beliebig gewählten Kubikzahl 8, eine andere von der Beschaffenheit suchen, daß sie ein Quadrat wird, wenn man 2 dazu addirt.

Durch eine besondere Rechnung findet Diophantus, daß $\frac{49^3}{64}$ eine Kubikzahl von der verlangten Eigenschaft sei, und ändert nun den vorigen Ansatz bloß dahin ab,

daß die Hypotenuse nicht $= 8 - x$, sondern $= \frac{49^{13}}{64} - x$ gesetzt wird, wofür in der Uebersetzung durch ein Versehen $\frac{49^{13}}{64} x$ steht.

XXII.

Der ursprüngliche Ansatz führt darauf, daß man die Zahl $4x + 6x + 2$, welche den Umfang ausdrückt, zu einem Cubus machen solle. Dividirt man diese Formel durch $x + 1$, und verwandelt dadurch den Umfang in $4x + 2$, so ist das eben so viel, als hätte man jede Seite durch $x + 1$ dividirt, und man setzt also statt des zuerst gewählten Dreiecks ein anderes, welches dem vorigen ähnlich ist, da das Verhältniß der Seiten dasselbe bleibt. Dadurch verwandelt sich aber die Summe der Fläche und der einen Kathete in $2x + 1$, und die Zahl $4x + 2$, welche ein Cubus werden soll, wird gerade das Doppelte der Zahl $2x + 1$, welche ein Quadrat werden soll, und die vorliegende Aufgabe ist eine auf weit einfachere Aufgabe zurück geführt, nämlich einen Cubus zu suchen, der das Doppelte einer Quadratzahl ist. Diese Aufgabe läßt aber, wie bei der ersten Aufgabe dieses Buches gezeigt ist, unzählige Auflösungen zu.

Daß sich übrigens die eigentliche Aufgabe auf eine andere zurückführen läßt, oder daß $4x + 2$ gerade das Doppelte von $2x + 1$ wird, ist nicht Zufall, sondern angelegter Plan, wie man aus folgender Betrachtung ersehen wird.

1. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks ist in jedem Falle ein Product aus der doppelten Summe der beiden Zahlen, woraus das Dreieck gebildet ist, und aus der größeren der beiden Zahlen. Es sei z. B. ein Dreieck aus den Zahlen a und b gebildet, und a von beiden die größere, so ist der Umfang $=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)+2ab=2a^2+2ab=2(a+b)a$. Daher ist der Umfang des anfänglich gesetzten Dreiecks $4x^2+6x+2$ offenbar $=2(2x+1)(x+1)$, läßt sich daher auch durch $x+1$ ohne Rest dividiren, und der Umfang des neuen, dem vorigen ähnlichen Dreiecks wird $=2(2x+1)=4x+2$, d. h. er ist die doppelte Summe der Zahlen $x+1$ und x, aus denen das erste Dreieck gebildet wurde.

2. Wenn man zwei ähnliche Dreiecke hat, und den Flächeninhalt des größeren kennt, so findet man den Flächeninhalt des kleinern, wenn man die Fläche des ersten durch das Quadrat der Zahl dividirt, welche das Verhältniß der Seiten anzeigt. Hätte man z. B. zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten na und nb sind, so ist die Fläche $=\frac{n^2ab}{2}$; die Fläche eines dem vorigen ähnlichen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind, ist aber $=\frac{ab}{2}$, und wird gefunden, wenn man $\frac{n^2ab^2}{2}$ durch n^2 dividirt. In dem vorliegenden Falle ist $n=x+1$, und die Fläche des zweiten Dreiecks kann durch

die Formel $\frac{(x^2+x)(2x+1)}{(x+1)^2}$ vorgestellt werden, in welcher der Zähler eigentlich die Fläche des ersten Dreiecks ist. Addirt man dazu die eine Kathete $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{(2x+1)(x+1)}{(x+1)^2}$, so wird die Zahl, welche man zu einem Quadrat machen soll

$$= \frac{(x^2+x)(2x+1)+(2x+1)(x+1).}{(1+x)^2}$$

Beide Glieder des Zählers haben den Factor $2x+1$, die Summe der beiden andern Factoren ist aber

$$(x^2+x)+(x+1) = (x+1)^2.$$

Von den beiden hier addirten Posten ist aber der erste die halbe Kathete des ersten Dreiecks, oder das Product der Zahlen $x+1$ und x, aus welchen das Dreieck gebildet wurde, daher ist

$$(x^2+x)+(x+1) = (x+1)x+x+1 = x^2+2x+1,$$

also nothwendig das Quadrat der Zahl $x+1$.

Es ist daher kein Zufall, daß sich der Zähler der obigen Formel

$$(x^2+x)(2x+1)+(2x+1)x+1) = 2x^3+5x^2+4x+1$$

durch $(x+1)^2$ dividiren läßt, und der Quotient wird nothwendig $2x+1 = (x+1)+x$ d. i. die einfache Summe der beiden Zahlen, aus denen das erste Dreieck gebildet ist.

XXIII.

Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf den nämlichen Gründen, welche bei der vorigen Aufgabe entwickelt wurden, und es läßt sich auf die nämliche Weise

zei-

zeigen, daß $4x+2$ nicht zufällig, sondern planmäßig das Doppelte von $2x+1$ wird.

Die Aufgabe, eine Kubikzahl zu suchen, welche das Doppelte einer Quadratzahl ist, kann nach der in der Anmerkung zur ersten Aufgabe dieses Buchs gegebenen Formel gelöst werden, wenn man $m=\frac{1}{2}$ setzt.

XXIV.

Der Ansatz führt darauf, daß man $2x^2+2x$ zu einem Quadrat, x^3+2x^2+x zu einem Cubus machen soll. Man setze

$$2x^2+2x=n^2x^2, \text{ so wird } x=\frac{2}{n^2-2}.$$

Nun darf aber die Zahl n nicht willkührlich gewählt werden, denn sie muß so beschaffen sein, daß für den Werth $x=\frac{2}{n^2-2}$ auch die Formel x^3+2x^2+x, d. i. $\frac{8}{(n^2-2)^3}+\frac{8}{(n^2-2)^2}+\frac{2}{n^2-2}=\frac{2n^4}{(n^2-2)^3}$ eine Kubikzahl wird. Diophantus betrachtet daher n als eine unbekannte Zahl, und untersucht, welchen Werth n haben müsse, damit $\frac{2n^4}{(n^2-2)^3}$ eine Kubikzahl sei. Nun ist der Nenner schon eine Kubikzahl, es kommt also bloß darauf an, den Zähler $2n^4$, oder, weil der Quotient wie das Produkt zweier Kubikzahlen gewiß eine Kubikzahl ist, den Quotienten $2n^4:n^3$, d. i. $2n$ zu einer Kubikzahl zu machen.

Nun kann man für $2n$ jede beliebige Kubikzahl setzen, z. B. 8, so wird $x=4$, und um daher die Formel

$2x^2+2x$ zu einem Quadrat zu machen, kann man $n^2=16$, also $2x^2+2x=16x^2$ setzen, so wird

$$x=\frac{2}{16-2}=\frac{1}{7}, \text{ also } x^2=\frac{1}{49}.$$

Nun entsteht aber eine neue Schwierigkeit, denn für diesen Werth von x wird die eine Kathete, welche allgemein durch x^2-1 ausgedrückt war, negativ. Man darf daher die Kubikzahl, welche wir $=2n$ gesetzt haben, nicht willkührlich nehmen. Aus der Formel $x=\frac{2}{16-2}$ ergiebt sich vielmehr, daß 16, d. i. das Quadrat von der Hälfte jenes Cubi, oder wie Diophantus dieselbe Sache ausdrückt, der vierte Theil von dem Quadrat jenes Cubi größer als 2 sein müsse, weil sonst $16-2$ negativ wird, aber es ergiebt sich auch, daß es kleiner als 4 sein müsse. Denn gesetzt es wäre $=4$, so würde $x=\frac{2}{4-2}=1$, folglich die Kathete $x^2-1=0$, welches widersprechend ist.

Man bezeichne daher den Cubus, den man der Zahl $2n$ gleich setzen will, allgemein durch x^3, so soll $\frac{1}{4}x^6$ größer als 2, und kleiner als 4, folglich, wenn man alles mit 4 multiplicirt, x^6 größer als 8 und kleiner als 16 sein. Um eine Kubokubikzahl dieser Art zu finden, drücke man die Zahlen 8 und 16 durch Brüche aus, deren Nenner eine Kubokubikzahl ist, z. B. durch $\frac{512}{64}$ und $\frac{1024}{64}$; nun nehme man irgend eine zwischen

beiden Zählern liegende Kubokubikzahl z. B. 729, so wird $\frac{729}{64}$ nicht nur eine Kubokubikzahl sein, sondern auch zwischen den vorgeschriebenen Grenzen liegen. Aus dieser Zahl ziehe man die Quadratwurzel, so ist $\frac{27}{8}$ eine zwischen den vorgeschriebenen Grenzen liegende Kubikzahl.

Setzt man also $2n=\frac{27}{8}$, so wird $n=\frac{27}{16}$, und $n^2=\frac{729}{256}$, setzt man endlich

$$2x^2+2x=\frac{729}{256}x^2, \text{ so wird } x=\frac{217}{512}.$$

Setzt man diesen Werth von x in die für die Seiten des Dreiecks gefundenen allgemeinen Ausdrücke $2x$, $x-1$, und x^2+1, so werden alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

XXV.

Die vorläufige Aufgabe verlangt, ein Dreieck zu suchen, dessen Fläche $f=7$, und dessen Umfang $p=12$ sei. Wenn die Fläche $=f$, so ist das Produkt beider Katheten $=2f$, und man kann daher die eine $=\frac{1}{x}$, die andere $=2fx$ setzen. Da p die Summe aller drei Seiten ist, so wird die Hypotenuse $=p-2fx-\frac{1}{x}$. Man setze also das Quadrat der Hypotenuse den Quadraten beider Katheten gleich, so erhält man

$$4f^2x^2-4pfx-\frac{2p}{x}+p^2+4f+\frac{1}{x^2}=4f^2x^2+\frac{1}{x^2}$$

und daraus durch weitere Entwickelung

$$4pfx^2-(p^2+4f)x=-2p.$$

Diese Gleichung giebt nur dann einen rationalen Werth für x, wenn $\frac{(p^2+4f)^2}{4}-8p^2f$ ein Quadrat ist, eine Bedingung, welche Diophantus nur in Worte übersetzt hat. Wir sehen also, daß die Auflösung der Hülfsaufgabe nicht alle Mal möglich ist, und da für $p=12$ und $f=7$ die obige Formel kein Quadrat wird, so muß man für p und f andere Werthe setzen, durch welche der obigen Bedingung genügt wird.

Man setze also $f=x$ und $p=64$, welche Zahl zugleich eine Kubikzahl und eine Quadratzahl ist. Setzt man diese Werthe in die obige Formel, so wird

$$\frac{(p^2+4f)^2}{4}=4x^2+8192x+4194304, \text{ und } 8p^2f=32768x,$$

folglich die ganze Formel $=4x^2-24576x+4194304$; diese Formel, folglich auch der vierte Theil derselben d. i. $x^2-6144x+1048576$ soll ein Quadrat sein. Nach den Bedingungen der Aufgabe soll aber die Summe des Umfangs und der Fläche, d. i. $x+64$ ebenfalls ein Quadrat sein, und man hat also wieder die doppelte Gleichung, welche hier leicht zu lösen ist, da 64 nach der Annahme, und $1048576=2048^2$ nach seiner Entstehung ein Quadrat ist. Hieraus sieht man ein, warum Diophantus die Zahl 64 so wählt, daß sie zugleich Quadratzahl und Kubikzahl ist. Letzteres geschah, weil der Umfang eine Kubikzahl sein sollte, ersteres damit das Produkt

1048576.64 gewiß ein Quadrat werde. Um nämlich die doppelte Gleichung aufzulösen, muß man die erste Formel mit 64, die zweite mit 1048576 multipliciren, wo denn in beiden Formeln das dritte Glied eine Quadratzahl sein wird. Nun werden aber auch die letzten Glieder in beiden Formeln den gemeinschaftlichen Factor $16384=128^2$ haben, und man kann beide Formeln durch diesen gemeinschaftlichen Factor dividiren. Dadurch wird die eine Formel $=16384x+1048576$, die zweite aber $=x^2-6144x+1048576$, also der Unterschied beider $x^2-22528x$. Dieser Unterschied hat die Factoren x und $x-22528$, die halbe Summe beider ist $x-11264$. Man setze also

$$(x-11264)^2=x^2-6144x+1048576,$$

so wird $x=7680$. Dieser Werth für x ist aber nicht zu gebrauchen, weil $8p^2x$ größer als $\frac{(p^2+4x)^2}{4}$ wird. Indeß kann die obige Gleichung noch auf eine andere Art gelöst werden, weil in der größern Formel x^2 vorkommt. Der Unterschied $x^2-22528$ hat auch die Factoren $11x$ und $\frac{x}{11}-2048$, der Unterschied beider ist $2048-10\frac{10}{11}x$, und dessen Hälfte $1024-5\frac{5}{11}x$. Wenn man nun das Quadrat dieses Unterschiedes

$$=16384x+1048576$$

setzt, so erhält man $x=175\frac{44}{225}$, und dieser Werth von x leistet der Aufgabe wirklich Genüge.

Anmerkungen zu Diophantus über die Polygonzahlen.

Diophantus Schrift über die Polygonzahlen ist für den Mathematiker nicht bloß wegen des Gegenstandes selbst, sondern noch weit mehr wegen der eigenthümlichen Behandlung arithmetischer Gegenstände wichtig. Die eigentliche Zahlenwissenschaft, welche die Alten von der Rechenkunst oder Logistik genau unterscheiden, ist von ihnen bereits zu einem weit höheren Grade der Vollkommenheit gebracht worden, als man oft anzunehmen geneigt ist; denn verschiedene Andeutungen in den arithmetischen Aufgaben beweisen unwidersprechlich, daß Lehrsätze aus der Theorie der Zahlen, welche nach der gewöhnlichen Annahme erst von den größten Mathematikern der neueren Zeit erfunden, oder bewiesen worden sind, den Alten in ihrem ganzen Umfange bekannt waren.

Da selbst Diophantus die Rechnung mit allgemein bezeichneten Größen nur in einem sehr beschränkten Umfange kennt, indem er sich damit begnügt, die unbe-

kannten Größen durch allgemeine Zeichen auszudrücken, so erregen die Fortschritte der Alten um desto größere Bewunderung, und man darf wohl fragen, wie sie ohne Hülfe des den Neuern eigenthümlichen Algorithmus möglich waren. Das Hauptwerk, welches hierüber Belehrung geben könnte, nämlich Diophantus Porismen, ist verloren gegangen, aber Andeutungen über seine Methode haben sich in den arithmetischen Aufgaben, und vorzüglich in der Schrift über die Polygonzahlen erhalten. Die Alten gingen, wie es scheint, überall von bestimmten Zahlen aus, deuteten aber die Rechnung selbst vermuthlich nur an, konnten also auf diese Weise den ganzen Gang der Rechnung verfolgen, das Wesentliche von dem Zufälligen sondern, und so aus dem einzelnen Falle eine allgemeine Regel ableiten.

Von weiterem Umfange und allgemeinerer Anwendbarkeit war aber die in dieser Schrift gebrauchte Methode, arithmetische Sätze durch geometrische Construction zu finden, oder zu beweisen. So wie nämlich die neuere Mathematik die Bestimmungsstücke räumlicher Größen sich als Zahlen vorstellt, und mit dem glücklichsten Erfolg der Rechnung unterwirft, so stellten die Alten umgekehrt sich die Zahlen im Allgemeinen als Linien, die Producte zweier Zahlen als Rechtecke, oder bei Gleichheit der Factoren als Quadrate, die Producte dreier Zahlen als Körper, oder bei Gleichheit der Factoren als Würfel, und überhaupt Zahlen von gewissen Eigenschaften als räumliche Größen von entsprechenden

Eigenschaften vor, und was sich von diesen räumlichen Größen durch geometrische Construction beweisen ließ, das trugen sie auf die ihnen entsprechenden Zahlen über. Dadurch erhalten geometrische Sätze, wie sie z. B. Euklides in dem zweiten Buch seiner Elemente vorträgt, außer dem eigentlichen geometrischen Sinn, auch noch eine arithmetische Bedeutung, und es wird dadurch recht anschaulich, daß Geometrie und Arithmetik eigentlich nur zwei verschiedene Arten sind, Größen sich vorzustellen und zu behandeln.

Das Bestreben der Alten, die anschaulichen Formen des Raumes auch in das Gebiet der Arithmetik überzutragen, erkennt man am deutlichsten durch eine Zusammenstellung der geometrischen Benennungen, durch welche die Alten die Eigenschaften der Zahlen zu bezeichnen suchten, und von welchen die Benennungen: Quadratzahl, Polygonzahl, Kubikzahl sich auch in der neuern Arithmetik aus guten Gründen behauptet haben. Um das Ganze aber zu übersehen, folgen hier Auszüge aus den Schriften des Theon von Smyrna deren Absicht zwar zunächst dahin ging, dem Leser der platonischen Schriften das Verständniß derselben zu erleichtern, die aber auch als eine Einleitung in die Arithmetik der Griechen überhaupt, und zu Diophantus Werk ins besondere dem Leser nicht unwillkommen sein werden.

1. Die Zahl ist ein Zusammenhang (σύστημα) von Einheiten oder die Vorschreitung einer Menge, die von

der Einheit anfängt, und eine Rückschreitung, die in der Einheit endigt. Die Einheit (μονάς) ist das Feste und Bleibende der Zahl, wenn diese durch Verkleinerung ganz aufgehoben wird. Diese giebt der Zahl ihre Gestalt, ist ihr Anfang und Element. Die Einheit, als Eins, ist untheilbar. Denn eine getheilte Zahl wird verkleinert und ihre Theile sind kleiner als das Ganze. Die Einheit aber, als Zahl, würde durch Theilung vergrößert, indem sie aus dem Einen ein Vieles würde *). Eins (τὸ ἕν) unterscheidet sich von der Einheit, wie das Gezählte von der Zahl. Jenes wird im Empfindbaren angetroffen: die Einheit aber ist die Idee und die Verstandesform des Eins, welches untheilbar ist.

2. Die erste Eintheilung der Zahlen ist die in gerade und ungerade.

Gerade (ἄρτιοι) sind, die in gleiche Theile, ungerade (περιττοί) die nur in ungleiche Theile zerlegt werden können.

Die Einheit haben einige zu den ungeraden gezählt, weil sie gar nicht, also auch nicht in gleiche Theile

*) Diese Art zu schließen schmeckt, wie jeder leicht empfindet, mehr nach Dialektik, als nach Mathematik. Inzwischen enthält das Gespräch Parmenides in Platons Werken eine sehr ausführliche dialektische Untersuchung über die Untheilbarkeit des Eins worin Argumente, wie das des Platonikers Theon, in großer Menge beigebracht werden. P.

zerlegt werden kann. Sie ist also die erste Idee des Ungeraden, so wie die Zwei die erste Idee des Geraden ist. Durch das Hinzukommen der Einheit wird das Gerade ungerad und das Ungerade gerad. Die übrigen Zahlen aber sind um Eins eine jede größer als die vorhergehende, so wie das Verhältniß je zweier nächsten zu einander kleiner ist, als das zweier vorhergehenden.

In der Reihe 1. 2. 3. 4. 5. 6. - - - - ist 5 : 6 kleiner als 4 : 5 als 3 : 4, als 2 : 3, als 1 : 2 *).

3. Einige Zahlen heißen die ersten, einfachen (πρῶτοι, ἀσύνθετοι, primi, incompositi) und zwar entweder unbedingt die ersten, oder die ersten in Beziehung auf einander; andere: die zusammengesetzten (σύνθετοι, compositi) und zwar ebenfalls unbedingt oder in Beziehung auf einander. Unbedingt erste sind, die von keiner Zahl, sondern bloß von der Einheit gemessen werden, als: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Sie werden auch Linienzahlen (γραμμικοί) und geradlinigte (εὐθυμε-

*) Nach diesen Bestimmungen ist die allgemeine Ferm einer Zahl, n, welches eine Menge von Einheiten bezeichnet. $2n$ ist die Form einer geraden; $2n+1$ die einer ungeraden. Drei nächste Zahlen in ihrer allgemeinen Form sind.

$$n, n+1, n+2$$

Nun ist $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$; $\frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$.

Folglich $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$. P.

τρικοί) genannt, *) weil auch Längen und Linien nur nach einer einzigen Ausdehnung gemessen werden. Man nennt sie auch die ungerad ungeraden.

Die geraden sind (nach 2.) wenigstens durch die Zwei meßbar: doch ausgenommen hievon die Zwei, da diese nur durch die Einheit gemessen wird, folglich zu den unbedingt ersten Zahlen gehört. Gerade Zahlen, außer der Zwei, sind also zusammengesetzte. Erste in Beziehung auf einander sind solche Zahlen, die, wenn auch jede für sich meßbar, doch kein anderes gemeinschaftliches Maaß, als die Einheit haben.

4. Unbedingt zusammengesetzte Zahlen sind solche, die von einer kleineren, als sie selbst, gemessen werden,

*) Der Grund dieser Benennung scheint darin zu liegen, daß eine solche Zahl nur die Linie als entsprechendes räumliches Symbol hat, aber nicht, wie die Flächenzahl unter dem Bilde eines Rechtecks, oder, wie die körperliche Zahl, unter dem Bilde eines Körpers vorgestellt werden kann. Das allgemeine Bild einer Primzahl läßt sich nicht ohne Zweideutigkeit angeben, weil man bis jetzt noch keine allgemeine Form der Primzahlen gefunden hat; die allgemeine Form einer Flächenzahl ist mn, wo m und n die Seiten (πλευραί) der Zahl mn heißen. Auch nennen die Alten sowohl das Rechteck zwischen zweien Linien μ und ν, als das Produkt zweier Zahlen μ und ν: τὸ ὑπὸ μν; so wie das Quadrat sowohl der Linie als der Zahl μ: τὸ ἀπὸ μ. Schulz.

wie Sechs durch Drei und Zwei. In Beziehung auf einander zusammengesetzt sind sie, wenn sie ein gemeinschaftliches Maaß haben, als 8 und 6 die Zwei; 6 und 9 die Drei.

Zahlen, die aus zwei andern zusammengesetzt sind, heißen Flächenzahlen (ἐπίπεδοι) weil man sie nach zwei Ausdehnungen, gleichsam Länge und Breite, betrachtet. Die aus drei Zahlen zusammengesetzten heißen Körperzahlen (στερεοί), weil sie eine dritte Ausdehnung haben. Den Inhalt (περιοχή) der Zahl nennt man die Vervielfältigung derer, welche sie zusammensetzen, durch einander.

5. Die geraden Zahlen unterscheiden sich in gerad gerade, ungerad gerade, und gerad ungerade. Bei der gerad geraden treffen drei Eigenschaften zusammen. Sie entstehen aus der Vervielfältigung zweier geraden durch einander; lassen sich bis zur Einheit in keine andere als gerade Zahlen gleich theilen; keiner ihrer gleichen Theile ist mit einer ungeraden Zahl gleichnamig.

Dergleichen sind alle Zahlen, die aus der Vervielfältigung der Zwei durch sich selbst entstehen. Diese haben kein anderes Maaß, als die Zwei und Vielfache der Zwei: also lassen sie sich in keine andere als gerade Zahlen gleich theilen, und daher kann auch keiner ihrer gleichen Theile mit einer ungeraden Zahl gleichnamig sein.

Die 32 entsteht aus 4 und 8, zerlegt sich in die Halbtheile 16, Viertheile 8, Achttheile 4 nicht aber in Drittheile, Fünftheile und andere den ungeraden gleichnamige Theile.

6. Gerad ungerade Zahlen sind, die durch die Zwei und eine ungerade Zahl gemessen werden, als 2 durch 1, 2; 6 durch 2, 3; 10 durch 2, 5. Ihre Halbtheile sind daher ungerade Zahlen, die sich also (nach 2) nicht weiter in gleiche Halbtheile zerlegen lassen.

7. Ungerad gerade Zahlen sind solche, die aus der Vervielfältigung einer geraden und einer ungeraden Zahl durch einander, erwachsen, und sich einmal in gerade Halbtheile, dann auch in ungerade gleiche Theile zerlegen lassen. So entsteht 12 aus 3 und 4; zerlegt sich in Hälften 6, in Drittheile 4, in Viertheile 3 *).

8. Die Flächenzahlen unterscheidet Theon in gleich gleiche, die aus der Vervielfältigung einer Zahl durch sich selbst, und in ungleich ungleiche, die aus der Vervielfältigung zweier ungleichen Zahlen durch einander entstehen. Erstere nennt er auch Viereckzahlen.

9. Längliche Zahlen (ἑτερομήκεις altera parte longiores) gehören zu den ungleich ungleichen Flächenzahlen und sind solche, deren eine Seite um die Einheit länger ist, als die andere **). Sie entstehen auf zweifache Art,

*) Anm. Die allgemeine Form der gerad geraden Zahlen ist: 2^n, die allgemeine Form der gerad ungeraden $2(2n+1)$, die allgemeine Form der ungerade geraden endlich ist: $2^n n(2n+1)$. P.

**) Bei Marpurg, in seinem Progressionalcalcul, kommen diese unter dem Namen: einlänglichte, vor. P.

Man vergleiche hierbei die bekannte Stelle in Platons Theätetus S. 300. sqq. Edit. Heindorf. Δύνα-

entweder durch Vervielfältigung oder durch Zusammenzählen.

Stellt man eine ununterbrochene Reihe gerader Zahlen auf:

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. —

so ist

$$2+4=6=2.\ 3$$
$$2+4+6=12=3.\ 4$$
$$2+4+6+8=20=4.\ 5$$
$$2+4+6+8+10=30=5.\ 6$$

u. s. w.

μις ist bei Euklides und Apollonius nicht gerade das Quadrat einer Linie, sondern überhaupt der Flächenraum, der durch eine Linie bestimmt wird, so wie δύνασθαι heißt: einen Flächenraum bestimmen. Man vergleiche Apollonii Conic. L. I. Th. VIII IX. X. wo der Parameter der Kegelschnitte durch ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ τεταγμένως κατηγμέναι umschrieben wird. In der angezogenen Stelle im Theätetus denkt sich Platon alle Zahlen als δυνάμεις, oder als Ausdrücke für Flächenräume, und so ist es einleuchtend, daß alle Zahlen zwar δυνάμει, oder wie Platon sagt: τοῖς ἐπιπέδοις, ἃ δύνανται commensurabel sind, denn es liegt bei ihnen allen dieselbe Einheit z. B. ein Quadratfuß ἡ ποδιαία (δύναμις) zum Grunde. Eben so einleuchtend aber ist es, daß die Seiten oder Wurzeln dieser Zahlen, insofern sie nicht vollständige Quadrate sind, irrational, also niemals μήκει sondern bloß δυνάμει commensurabel sind. Uebrigens ist es ein abweichender

woraus man sieht, wie die Summe jeder Anzahl Glieder dieser Reihe, von der 2 angerechnet, und diese inbegriffen, eine längliche Zahl giebt.

Stellt man die geraden und ungeraden Zahlen in ununterbrochener Folge auf:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. . . .

so ergiebt sich sogleich, daß, aus der Vervielfältigung einer jeden derselben mit der ihr nächsten, eine längliche Zahl entspringt *).

Sprachgebrauch, wenn Platon jede Linie, deren Quadrat durch eine Quadratzahl vorgestellt werden kann, (ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι) ein μῆκος nennt, jede Linie aber, deren Quadrat durch eine ungleichseitige Flächenzahl (ἀριθμὸν ἑτερομήκη) vorgestellt werden muß, eine δύναμις. Ueber den Sinn, den Platon diesen Ausdrücken beilegt, kann aber gar kein Zweifel entstehen; μῆκος heißt jede Linie, deren Länge durch eine Rationalzahl vorgestellt werden kann, δύναμις jede Linie, deren Länge sich nur durch eine Irrationalzahl vorstellen läßt. Schulz.

*) Die allgemeine Form der länglichen Zahlen ist nach Theons Erklärung: $n(n+1)$. Hieraus wird die zweite von ihm angegebene Entstehungsart derselben sogleich klar. Die erste folgt aus der Form: $\frac{n(n+1)}{2}$, welche die Summe von n Gliedern einer Reihe ununterbrochener mit Eins wachsender Zahlen, von Eins angerechnet und dieses inbegriffen, andeutet. Das Doppelte

10. Eine Parallelogrammzahl (ἑτερόμηκος παραλληλόγραμμος) ist eine solche, deren eine Seite die andre um zwei oder eine noch größere Zahl übertrifft, als 2. 4 = 8 *).

11. Die Viereckzahlen (τετράγωνοι) entstehen auf zweifache Art, entweder aus dem Zusammenzählen der Glieder einer ununterbrochenen Reihe ungerader Zahlen von Eins ab, oder aus der Vervielfältigung einer Zahl durch sich selbst.

Ein Beispiel der erstern Art gebe die Reihe:

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. — —

Hier ist 1 + 3 = 4 = 2. 2.

1 + 3 + 5 = 9 = 3. 3.

1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4. 4. u. s. w. **).

---

dieser Summe $n(n+1)$, ist die Summe einer Reihe gerader Zahlen, von 2 angerechnet und dieses inbegriffen. Also ist diese Summe eine längliche Zahl. P.

*) Eben diese Zahlen führt Theon in der Folge mit derselben Erklärung auf, doch unter dem andern Namen: Rechteckzahlen (προμήκεις, oblongi). P.

**) Die allgemeine Form der Summe einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, deren erstes Glied, 1, und deren Unterschied, d, ist $\frac{2 + (n-1)\,d)\,n}{2}$ für n Glieder. Für die Reihe ungerader Zahlen wird d = 2, also verwandelt sich jene Form in $\left(\frac{2 + 2(n-1)}{2}\right)n$ das ist, $(1+n-1)n$ oder n^2, die allgemeine Form der Viereckzahlen. P.

12. In der Reihe:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. . . . . .

ist die längliche Zahl, die zwischen zwei Viereckzahlen liegt, die mittlere des geometrischen Verhältnisses einer zu der andern. So ist 6 die mittlere Verhältnißzahl zwischen 4 und 9. Es ist aber 6=2.3, d. i. die längliche Zahl, die zwischen 4 und 9 liegt; und 6.6 ist =4.9.

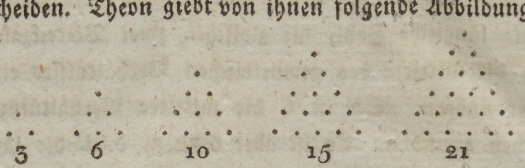
Umgekehrt steht die zwischen zwei länglichen liegende Viereckzahl in keinem ununterbrochenen geometrischen Verhältniß zu ersteren. Die 6 und die 12 haben die 9 zwischen sich. Allein 6.12 ist =72, und 9.9=81 *).

13. Die Flächenzahlen (s. oben n.4) theilt Theon in Dreieck- Viereck- Fünfeck- Vieleck-Zahlen.

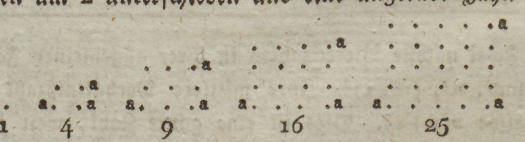
14. Dreieckzahlen (τρίγωνοι) entstehen durch Zusammenzählen der Glieder einer Reihe, die mit Eins anfängt,

*) Zwei nächste Viereckzahlen in ihrer allgemeinen Form sind: n^2, $(n-1)^2$. Ihre mittlere Verhältnißzahl ist also: $n(n+1)$. Dies ist eine ganze Zahl, weil jene ganze Zahlen sind, also liegt auch sie in derselben Reihe mit ihnen, und zwar ihrer Größe nach zwischen n^2 und $(n+1)^2$. Es ist aber auch die einzige längliche Zahl zwischen ihnen: denn gäbe es da noch eine kleinere oder größere, so würde auch diese die mittlere Verhältnißzahl zweier Viereckzahlen sein, von denen also die größere oder die kleinere zwischen n^2 und $(n+1)^2$ fallen würde, welches der Annahme, daß dieses die nächsten sind, widerspräche. P.

und deren zwei nächste sich um Eins von einander unterscheiden. Theon giebt von ihnen folgende Abbildung *).



15. Von den Viereckzahlen ist bereits oben bemerkt, daß sie durch Zusammenzählen der Glieder einer mit Eins anhebenden Reihe ungerader Zahlen gebildet werden. Hieraus folgt, daß sie in ihrer ununterbrochenen Folge abwechselnd gerade und ungerade Zahlen sein müssen. Theon giebt von ihnen folgende Abbildung. Zu der Einheit und zu jeder entstehenden Viereckzahl wird ein Gnomon gefügt, und damit eine neue Viereckzahl gebildet. Jedes folgende Gnomon ist von dem vorhergehenden um 2 unterschieden und eine ungerade Zahl.



Die mit a bezeichneten rechten Winkel sind die Gnomen.

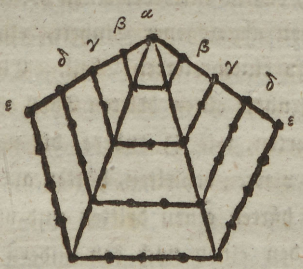
Unterscheiden sich die nach und nach zur Einheit hinzugefügten Gnomen um Drei von einander, so ent-

*) Die allgemeine Form einer Dreieckzahl ist also einerlei mit der einer Summe von n Gliedern einer solchen Reihe, als die hier angegebene, mithin (nach 9); $\frac{n(n+1)}{2}$, hier zeigt n also die Stelle an, welche die Dreieckzahl in ihrer Reihe, von Eins an gezählt, einnimmt. P.

stehen daraus die Fünfeckzahlen (πεντάγωνοι). Ist jener Unterschied Vier, so werden Sechseckzahlen (ἑξάγωνοι) gebildet. Auf solche Art kann man durch Vergrößerung des Unterschiedes der Gnomen jede Art Vieleckzahlen (πολύγωνοι) hervorbringen, und die Anzahl der Ecken, wovon sie benannt werden, ist stets um Zwei größer als der Unterschied der Gnomen, woraus sie entstehn.

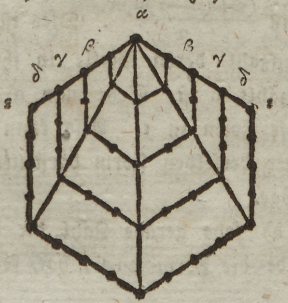
Von Vieleckzahlen giebt Theon folgende Abbildungen:

1) von Fünfeckzahlen



	α	β	γ	δ	ε	
Die Gnomen sind:	1.	4.	7.	10.	13.	. . .
Die Fünfeckzahlen:	1.	5.	12.	22.	35.	. . .

2) von Sechseckzahlen



	α	β	γ	δ	ε	
Die Gnomen sind:	1.	5.	9.	13.	17.	. . . . .
Die Sechseckzahlen:	1.	6.	15.	28.	45.	. . . . .

16. Die Einheit kann man als eine Vieleckzahl jeder Classe derselben betrachten *). Die Drei ist nächst ihr die kleinste aller Vieleckzahlen, so wie das Dreieck unter den Figuren diejenige ist, welche die mindeste Anzahl der Seiten hat.

17. Von den Viereckzahlen merkt Theon als etwas besonderes an, daß sie entweder einen dritten Theil haben, oder nach davon abgezogener Einheit, einen solchen erhalten; eben so einen vierten Theil. Einige, die nach abgezogener Einheit einen dritten Theil erhielten, hätten auch einen vierten, wie 4; andere, die nach abgezogener Einheit einen vierten erhielten, hätten auch einen dritten wie 9; einige hätten einen dritten und vierten, wie 36; andere weder den einen noch den andern, bekämen aber nach abgezogener Einheit, beides, wie 25 **).

*) Die allgemeine Form der Summe einer mit Eins anfangenden arithmetischen Reihe erster Ordnung (s. n. 11) ist $\frac{(2+(n-1)d)n}{2}$. Dies ist also auch die einer Vieleckzahl, deren Stelle in ihrer Reihe, von Eins an gezählt, n ist. Setzt man $n=1$, so verwandelt sich diese Form in 1. Also kann man auch die Einheit unter derselben Form darstellen, was auch d bedeuten möge.

**) Da (nach 2) jede gerade Zahl die Form $2n$, und jede ungerade die Form $2n+1$ hat, so hat jede Vier-

18. Die Summe zweier nächsten Dreieckzahlen ist eine Viereckzahl *).

19. Kreiszahlen, Kugelzahlen (κύκλικοι, σφαιροειδεις) sind solche, die durch eine ein- oder mehrmalige Vervielfältigung durch sich selbst, jederzeit auf dieselbe Zahl zurückkehren, als $5.5=25; 25.5=125; 6.6=36; 36.6=216$.

20. Die Körperzahlen (s.n.4) haben entweder gleiche, oder ungleiche Seiten; im letztern Falle sind diese entweder alle ungleich, oder zwei gleich, und die ungleiche ist entweder die längste oder die kürzeste der drei Seiten. Die von drei gleichen Seiten heißen Würfelzahlen (κύβοι); die von drei ungleichen werden Altarzahlen (βωμίσκοι) genannt; die zwei gleiche Seite haben, heißen Ziegelzahlen (πλίνθιδες), wenn die ungleiche die kürzere, und Balkenzahlen (δόκιδες), wenn jene die längere ist.

21, Noch giebt es bei Theon Pyramidenzahlen (πυραμοειδεις) und abgekürzte Pyramiden oder Kolur-

eckzahl entweder die Form $4n^2$, oder die: $4n^2+4n+1$, und ist daher an sich selbst, oder nach abgezogener Einheit, durch 4 theilbar. Ferner sind alle Zahlen, allgemein dargestellt, entweder $3n$ oder $3n+1$, oder $3n+2$, für jeden Werth von n, auch wenn $n=0$, mithin alle Viereckzahlen entweder $9n^2$, oder $9n^2+6n+1$ oder $9n^2+12n+4$, und daher entweder so fort, oder nach abgezogener Einheit, durch 3 theilbar. P.

*) Die allgemeine Form der Summe zweier nächsten Dreieckzahlen ist $\frac{(n+1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$ P.

zahlen (κολουροπυραμίδες), von Kolur, einer abgekürzten Pyramide, so benannt. Sie heißen auch Trapezzahlen (τραπέζια) *)

Zur Erleichterung der Mühe des Lesens deuten wir hier kurz den Gang der Beweisführungen an:

Satz II.

Drei Zahlen a, b, c, von gleichem Unterschiede Δ; a die größeste, b die mittlere, c die kleinste: zu beweisen ist, daß $8ab+c^2=(a+2b)^2$

*) Von diesen giebt Ismael Bullialdo in seinen Anmerkungen zu Theon folgende Abbildung.



Dies ist eine Dreieckpyramide, deren horizontale Durchschnitte Dreieckzahlen vorstellen. Nimmt man der Pyramide die Spitze, so heißt sie ein Kolur. Verkürzt man sie bis auf die zweite Horizontalfläche, so heißt sie ein Dikolur. Bei ferneren Verkürzungen heißt sie ein Trikolur u. s. w.

Alle diese bildlichen Darstellungen waren Hülfsmittel, sich Summen von Zahlenreihen anschaulich zu machen. Bei dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik sind es wohl nicht viel mehr als Spielwerke. Wer daran Geschmack findet, kann sich in Marpurgs angeführtem weitläuftigem Werke übersättigen; und wird daselbst noch verschiedene andere Erfindungen dieser Gattung z. B. Thurm- und Säulen-Zahlen antreffen.

Es ist $a=b+\Delta$; folglich

$$8ab = 8b^2 + 8b\Delta.$$

Durch geometrische Construction wird bewiesen, daß

$a^2=c^2+4b\Delta$, d. h. $(b+\Delta)^2=(b-\Delta)^2+4b\Delta$.

mithin $8ab+c^2=4b^2+4b^2+4b\Delta+a^2$

$$= 4b^2 + 4ba + a^2.$$

Durch geometrische Construction wird ferner bewiesen, daß

$$4b^2+4ba+a^2=(2b+a)^2,$$

woraus der Satz erhellet.

Bemerkenswerth ist hier und bei den folgenden Sätzen die unmittelbare Anwendung der von Theilung der Linien geltenden Sätze und geometrischer Constructionen auf Zahlen, worin Diophantus, dessen Theorie der Polygonzahlen sich übrigens an die Bücher 7. 8. 9 der Elemente des Euklides anschließt, von der strengen Methode des letzteren abweicht.

Satz III.

Es sind die Zahlen a, b, c, d, so viel man will, von gleichem Unterschiede Δ; a die größte, b die nächst kleinere, u. s. w. fort. Zu zeigen, daß der Unterschied der größten und kleinsten, a—d, gleich sei dem Unterschiede Δ zweier nächsten, vervielfacht durch die um Eins verkleinerte Anzahl der gegebenen, welche n sei; d. h. daß $a-d=(n-1)\Delta$.

Es ist

$$a - b = \Delta$$
$$b - c = \Delta$$
$$c - d = \Delta$$

Da nun dergleichen Verbindungen soviel sind als Zahlen weniger Eins, so folgt durch Summirung

$$a - d = (n - 1)\,\Delta.$$

Sätze IV. V.

Diese zwei Sätze sind vielmehr zwei Fälle eines einzigen in IV allgemein gefaßten Theorems.

Es sind die Zahlen a, b, c, d, e, f, soviel man will, von gleichem Unterschiede Δ. Zu zeigen, daß die größte, a, und kleinste, b, zusammengenommen, vervielfacht durch n, die Anzahl der gegebenen, die doppelte Summe s der gegebenen mache, d. h. daß $n(a+f)=2s$.

Erster Fall: n sei eine Paarzahl: $2r$.

Da $a-c=d-f$, so ist

$a+f=c+d$. Auf gleiche Weise ist

$a+f=b+e$, und $a+f=a+f$

mithin $r(a+f)=s$, und $n(a+f)=2s$.

Zweiter Fall: n sei eine Unpaarzahl: $2r+1$.

Jetzt sei gegeben die Reihe a, b, c, d, e. Es ist

$a-c=c-e$, daher

$a+e=2c$; eben so

$b+d=2c$; folglich

$s-c=r.2c=r(a+e)$

$2s=2r(a+e)+2c=(2r+1)(a+e)=n(a+e)$.

Satz VI.

Eine Reihe von Zahlen gleichen Unterschiedes, von der Einheit ab, sei gegeben 1. a. b. c. Der Unterschied zweier aufeinander folgender sei $=\Delta$. Zu beweisen ist, daß

$$8s\Delta+(\Delta-2)^2=(\Delta(2n-1)+2)^2.$$

Es ist

$$s=\frac{n(c+1)}{2}=\frac{n(c-1)}{2}+n \text{ (IV. V)}$$

und $c-1=(n-1)\Delta$ (III.) Daher ist

$$s=\frac{n(n-1)\Delta}{2}+n$$

Also ist zu beweisen, daß

$$8\Delta\left(\frac{n(n-1)\Delta}{2}+n\right)+(\Delta-2)^2=(\Delta(2n-1)+2)^2.$$

Nun ist

$$\Delta\frac{n(n-1)\Delta}{2}=\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2; \text{ mithin}$$

$8\Delta\frac{n(n-1)\Delta}{2}=4n(n-1)\Delta^2$. Daher zu beweisen, daß

$$4n(n-1)\Delta^2+8n\Delta+(\Delta-2)^2=(\Delta(2n-1)+2)^2.$$

Es ist

$$4\Delta=2.2\Delta, \text{ und}$$

$$2.2\Delta+(\Delta-2)^2=\Delta^2+2^2, \text{ daher auch}$$

$$2.2n\Delta+(\Delta-2)^2=2.2(n-1)\Delta+\Delta^2+2^2.$$

Also ist zu beweisen, daß

$$4n(n-1)\Delta^2+8n\Delta+(\Delta-2)^2=4n(n-1)\Delta^2$$
$$+2.2(2n-1)\Delta+\Delta^2+2^2$$

eine Quadratzahl sei.

Es ist aber

$4n(n-1)\Delta^2+\Delta^2=\Delta^2(4n^2-4n+1)=\Delta^2(2n-1)^2$;

mithin zu zeigen, daß

$$\Delta^2(2n-1)^2+2.2(2n-1)\Delta+2^2$$

eine Quadratzahl sei. Diese aber ist

$$=(\Delta(2n-1)+2)^2;$$

folglich der Satz erwiesen.

Satz VIII.

Setzen wir irgend eine Zahl $\Delta+2$; $\Delta>2$, und bilden die Reihe von drei Gliedern

$$\Delta+2,\ \Delta,\ \Delta-2,$$

so ist, nach II.

$$8(\Delta+2)\Delta+(\Delta-2)^2=(\Delta+2+2\Delta)^2$$
$$=(\Delta(2.2-1)+2)^2$$

Setzen wir nun eine Reihe von Zahlen

$1,\ 1+\Delta,\ 1+2\Delta$ u. s. w, wo $\Delta=1$ oder irgend eine Zahl, so erhalten wir daraus die erste Polygonzahl in ihrer Reihe $=\Delta+2$, deren Eckenzahl $=\Delta+2$, und deren Seite $=2$. Es ist aber auch

$$\Delta+2=1+(1+\Delta)=s.$$

Mithin erhalten wir hier nach VI. dieselbe Auflösung für $\Delta+2$, als oben, s ist also eine Polygonzahl, deren Seite $=n$, und deren Eckenzahl $=\Delta+2$.

Satz X.

Daß dieser Satz ein Bruchstück ist, hindert nicht, das Ganze dennoch als geschlossen zu betrachten. So wie der Verfasser seinen Plan gleich in dem ersten Satze bestimmt angegeben hat, so ist er mit dem achten und neunten ausgeführt; das hier gegebene Bruchstück hat also ganz das Ansehen eines fremdartigen Zusatzes, der ohne Beeinträchtigung des Ganzen weggelassen werden könnte.

Von der figurirten Zahlen Form, und ihrem Gebrauch bei arithmetischen Reihen.

Von

Friedrich Theodor Poselger.

1. Eine arithmetische Reihe oder Progression heißt eine Folge von Zahlen, deren je zwei nächste Glieder einerlei Differenz haben.

2. Eine Zahlenreihe, deren zwei nächste Glieder verschiedene Differenzen haben, heißt eine arithmetische Reihe höherer Ordnung.

3. Die Differenzen der Reihen letzterer Art heißen veränderliche, weil es auch von ihnen Differenzen giebt. Nicht so die der ersteren Art, daher diese die beständigen heißen.

4. Fängt eine arithmetische Progression mit Eins an, und zählt man ihre Glieder von Eins, so hat die erste Zahl nach Eins die zweite Stelle in der Reihe, und ist die Summe von Eins zugezählt zu der beständigen Differenz. Zählt man zu dieser Summe wieder die Differenz, zu der darauskommenden Summe nochmals, und so fort: so entsteht die zweite, dritte und folgende Zahl der Reihe an der dritten, vierten und folgenden Stelle.

Man setze den beständigen Unterschied, d, die Zahl der Stelle eines Gliedes, n, Eins mitgerechnet: so ist die dazu gehörige Zahl $= 1 + (n-1)d$.

5. Summirt man die zwei ersten Glieder der so entstandenen Reihe, setzt zur Summe das folgende, und zur neuen Summe wieder das folgende, so erhält man eine Reihe, wovon jene die Differenzenreihe ist. Die neuentstandene heißt eine Reihe zweiter Ordnung, weil erst die Differenzen ihrer Differenzen beständige sind.

6. Ihre Glieder heißen Polygon- oder Vieleckzahlen. Die Menge der Einheiten, welche die erste derselben enthält, ist die Anzahl der Ecken, wovon jede andere in derselben Reihe den Namen einer Vieleckzahl bekommt; die Seite einer Polygonzahl ist ihre Stelle in der Reihe, Eins mitgerechnet. Die, welche in ihrer Reihe die erste ist, muß mindestens Drei sein. Dann folgt Vier, Fünf, und jede andere mit Eins wachsende Zahl. Die Seite einer solchen ersten Vieleckzahl ist die Zwei (Dioph. I.) Nach ihr werden die übrigen in derselben Reihe: Dreieck-, Viereck-, Fünfeck-Zahlen, und so weiter genannt.

7. Setzt man, wie vorhin, die beständige Differenz $= d$, und die Stellenzahl eines Gliedes der dazu gehörigen Reihe $= n$, so ist das erste Glied derselben nach der Eins, gemäß der eben angegebenen Form,

$$1 + (n-1)d), = 1 + (2-1)d = 1 + d,$$

also die erste daraus erwachsende Polygonzahl (nach 5

und 6) $=1+1+d=2+d$, welches also die Menge der Ecken jeder andern in derselben Reihe ist.

8. O.A.K..N...B—R
H.M—T.

Es sei AK die Einheit; KB der beständige Unterschied $=d$ einer arithmetischen Progression; HT die Anzahl der in ihr gegebenen Glieder $=n$, Eins mitgerechnet; OA wieder die Einheit; NR gleich dem Produkt der Summe von HT und TM in KB, also $NR=(2n-1)d$; und KN sei $=2$: so ist, wenn man die Summe der gegeben n Glieder $=s$ setzt (Dioph. VI.)

$8sd+(d-2)^2=((2n-1)d+2)^2$. Also

$$s=\frac{((2n-1)d+2)^2-(d-2)}{8d}.$$

$OB=d+2$ ist die erste Polygonzahl. Da nun

$NB=d-2$, $KB=d$, $OB=d+2$,

drei Zahlen von gleichem Unterschiede sind, so ist (Dioph. II.)

$8OB.d+(d-2)^2=(3d+2)^2$

$=((2.2-1)d+2)^2$, also

$$OB=\frac{((2.2-1)d+2)^2-(d-2)^2}{8d}.$$

Wird also in der Gleichung für s, die Stellenzahl n, oder die Menge der gegebenen, Eins mitgerechnet, $=2$ gesetzt, so verwandelt sie sich in die für OB. Aber auch s verwandelt sich in OB, weil alsdann die gegebene Reihe, nur aus zwei Gliedern, Eins und der gegebenen Zahl, $d+1$, besteht, deren Summe $=OB$. Es ist also s von

OB in nichts als der Stellenzahl verschieden. Folglich ist s, ihre Größe bei Seite gesetzt, in ihrer Form nichts anders als OB, das ist, eine Polygonzahl von d+2 Ecken und von der Seite n.

9. Man setze also irgend eine Polygonzahl =P, so ist unter den vorigen Annahmen

$$P = \frac{((2n-1)d+2)^2-(d-2)^2}{8d}$$

$$= \frac{(n^2-n)d+2n}{2}.$$

Ist nun d=1 und d+2=3, so ist P eine Dreieckzahl

$$= \frac{n^2+n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Für d=2 ist d+2=4, P eine Viereckzahl $=n^2$.

Für d=3 ist d+2=5, P eine Fünfeckzahl $= \frac{3n^2-n}{2}$ und so weiter.

10. Setzt man n als unbekannt =x, so wird es aus der Polygonzahl P und der Anzahl ihrer Ecken, d+2, mittelst Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden. Siehe Klügel Art. Polygonzahl.

11. Wird d als unbekannt, und n beliebiger Annahme gesetzt, das heißt, will man wissen, in welchen verschiedenen Zahlenreihen die gegebene, P, als Polygonzahl angetroffen wird, und an welchen Stellen in denselben, (Dioph. X.) so dient dazu die Gleichung

$$\frac{2(P-n)}{n(n-1)} = d.$$

So findet man z. B. daß die Zahl 120 unter den Polygonzahlen von 120 Ecken die zweite Stelle hat, unter

denen von 41 die dritte; von 6 die achte und von 3 die funfzehnte: weiter aber in keiner andern Reihe ganzer und positiver Polygonzahlen angetroffen wird.

12. Summirt man die Glieder einer ununterbrochnen Reihe von Polygonzahlen von Eins ab, eben so als es, zur Bildung derselben, mit der Reihe erster Ordnung von der beständigen Differenz d geschah, so erhält man eine Reihe der dritten Ordnung; aus dieser auf gleiche Weise eine der vierten, und so weiter.

13. Alle diese Reihen, wovon die Polygonzahlen nur eine besondere Gattung ausmachen, begreift man unter dem Namen: figurirte Zahlen. Besonders bezeichnet man mit diesem Namen diejenigen Zahlenreihen, deren letzte Differenz $d = 1$ ist.

14. Es sei $d = 1$, so ist die erste Reihe figurirter Zahlen bis zur r^{ten} Stelle.

$$1.2.3.4.5.6.\ldots r-1.r.$$

Die Glieder der zweiten Reihe, oder die Dreieckzahlen haben (nach 9) für jede r^{te} Stelle die Form $\frac{(r+1)r}{1.2}$. Hierauf bringe man jedes Glied und ordne sie der ersten unter:

$$\frac{2.1}{1.2}; \frac{3.2}{1.2}; \frac{4.3}{1.2}; \frac{5.4}{1.2}; \frac{6.5}{1.2}; \frac{7.6}{1.2} \ldots \frac{r(r-1)}{1.2}; \frac{(r+1)r}{1.2}.$$

das ist: $1.3.6.10.15.21\ldots\ldots\frac{(r+1)r}{1.2}$.

Das

Das Eins läßt sich auf diese allgemeine Form bringen: $\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots\ldots(r+1)r}{1\,.\,2\ldots\ldots(m-1)m}$. Denn man setze $r=1$, so verwandelt sich jene Form in diese:

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots 2\,.\,1}{1\,.\,2\ldots\ldots(m-1)m}=1.$$

Man setze, diesem gemäß, für die dritte Reihe $1=\frac{3.2.1}{1.2.3}$; summire dies mit dem zweiten Gliede der zweiten Reihe, das daraus entstandene zweite der dritten mit dem dritten der zweiten, und so fort, so erhält man das erste Glied $\frac{3.2.1}{1.2.3}=1$, das zweite

$$\frac{3.2.1}{1.2.3}+\frac{3.2}{1.2}=\frac{3.2}{1.2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4.3.2}{1.2.3}.$$

das dritte $\frac{4.3.2}{1.2.3}+\frac{4.3}{1.2}=\frac{4.3}{1.2}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5.4.3}{1.2.3}$. Wäre nun die Form eines Gliedes dieser Reihe an der $(r-1)$sten Stelle: $\frac{(r+1)\,r\,(r-1)}{1.2.3}$, so würde man für die nächste r^{te} Stelle erhalten:

$$\frac{(r+1)r(r-1)}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{(r+1)r}{1\,.\,2}=\frac{(r+1)r}{1\,.\,2}\left(\frac{r-1}{3}+1\right)$$
$$=\frac{(r+2)(r+1)r}{1\,.\,2\,.\,3},$$

welches dieselbe Form für das r^{te} Glied ist, als jene für das $(r-1)^{ste}$ Glied, indem bloß für die um Eins höhere Stelle, $r+1$ für r gesetzt wird. Da also das erste, zweite und dritte Glied jene Form hat, so hat eben diese auch das vierte, und daher auch das fünfte und jedes folgende Glied.

Setzt man nun für die Ordnungszahl einer Reihe den allgemeinen Ausdruck m, und für die Stellenzahl eines Gliedes in dieser Reihe, r, so kann man die allgemeinen Formen der Glieder an der r^{ten} Stelle, in der ersten, zweiten und dritten Reihe, nämlich

$$\frac{r}{1}, \text{ für die erste Reihe,}$$

$$\frac{(r+1)r}{1 \cdot 2}, \text{ für die zweite,}$$

$$\frac{(r+2)(r+1)r}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ für die dritte,}$$

unter sich auf diese noch allgemeinere Form bringen:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots.(r+1)r}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m-1)m}.$$

Eins hat, wie oben bemerkt ist, für die um 1 höhere, vierte Reihe eben diese Form; also, statt m, m+1 gesetzt:

$$\frac{(r+m)(r+m-1)\ldots\ldots.(r+1)r}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m(m+1)},$$

und wenn r=2 gesetzt wird, für r—1:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)-(r+1)r(r-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m(m+1)}.$$

In dieser allgemeinen Form ist die Summe des ersten Gliedes der vierten mit dem zweiten der dritten Reihe:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots.r(r-1)}{1 \cdot 2 \ldots. m(m+1)}$$

$$+\frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots\ldots(r+1)r}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m-1)m}$$

$$= \frac{(r+m-1)(r+m-2)\ldots r}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}\left(\frac{r-1}{m+1}+1\right)$$

$$= \frac{(r+m)(r+m-1)(r+m-2)\ldots r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m(m+1)}.$$

Und dies ist eben die oben angeführte allgemeine Form eines Gliedes der ersten drei Reihen, statt m, m+1, gesetzt. Sie nimmt, r=3 gesetzt, für das zweite Glied wieder diese Gestalt an:

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\cdots(r-1)}{1 \cdot 2 \cdots m(m+1)}.$$

Folglich gilt sie auch für das vierte und daher für jedes folgende der vierten Reihe. Da aber Eins in jeder nächsten höheren Reihe durch eben diese Form ausgedrückt werden kann, so gilt sie auch für jede nächst höhere Reihe allgemein. Folglich ist jedes Glied an der r^{ten} Stelle in der Reihe m^{ter} Ordnung der figurirten Zahlen =

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\cdots(r+1)r}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)m}.$$

15. Hiernach wird das Glied jeder Stelle in der Reihe jeder Ordnung durch die Stellenzahl und Ordnungszahl bestimmt. Eben so die Summe von einer Anzahl Gliedern von Eins ab, dies inbegriffen, in irgend einer Ordnung, durch die Anzahl der Glieder und die Ordnungszahl der nächst höheren Reihe.

Man verlangt z. B. das 10te Glied in der Reihe 10ter Ordnung. Hier ist r=10, m=10, folglich

$$\frac{(r+m-1)(r+m-2)\cdots(r+1)r}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)m} =$$

$$= \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

$$= 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2 = 92378.$$

Man verlangt die Summe von 10 Gliedern in der Reihe 10ter Ordnung. Hier ist $m+1 = 11$, $r = 10$. Also

$$\frac{(r+m)(r+m-1)\ldots(r+1)r}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m(m+1)} =$$

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}$$

$$= 20 \cdot 19 \cdot 17 \cdot 13 \cdot 2 = 167960.$$

Die allgemeine Form der Quadratzahlen, n^2, läßt sich wie schon Theon bemerkt hat, auf die Form der Summe zweier nächsten Dreieckzahlen $\frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ zurückbringen. Also ist die Summe von n Quadratzahlen von Eins ab =

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$$

$$= \frac{(n+1)n}{1.2.3}(n+2+n-1) = \frac{(2n+1)(n+1)n}{1.2.3}.$$

Die Würfelzahlen n^3, nehmen diese gleichbedeutende Form an: $n + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}6$. Also ist ihre Summe von Eins ab, diese:

$$\frac{(n+1)n}{1.2} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}.6$$

$$= \frac{(n+1)n}{1.2}\left(1 + \frac{(n+2)(n-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)n}{1.2}\left(\frac{(2+(n+2)(n-1)}{2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)n}{1.2}\left(\frac{2+n^2+n-2}{2}\right) = \frac{(n+1)^2n^2}{4}.$$

16. Die Formen der figurirten Zahlen sind wegen ihres Ebenmaßes, ihrer großen Einfachheit und Geschmeidigkeit, wohl an sich schon der Betrachtung werth; außerdem haben sie für die ganze Analysis den vielseitigsten Nutzen, besonders da, wo die Glieder eines allgemeinen Ausdrucks mit Zahlencoefficienten versehen sind, um diese ebenfalls unter allgemeine Formen zu bringen. Dies wollen wir nun an einigen Beispielen zeigen.

17. Die ersten zwei Glieder einer rücklaufenden Reihe sein A, B; die zurückwerfende Skale (Beziehungs-Skale, scala relationis) sei $+\beta, -\alpha$. Jedes folgende Glied ist die Summe des Produkts von β in das nächst vorhergehende und von $-\alpha$ in das zweite vorhergehende Glied. Folglich ergeben sich, wenn man die Stellen vom zweiten Gliede zu zählen anfängt, die Glieder jeder Stelle, wie folgt:

0. A
1. B
2. $B\beta - A\alpha$
3. $B\beta^2 - A\alpha\beta - B\alpha$
4. $B\beta^3 - A\alpha\beta^2 - 2B\alpha\beta + A\alpha^2$
5. $B\beta^4 - A\alpha\beta^3 - 3B\alpha\beta^2 + 2A\alpha^2\beta + B\alpha^2$
6. $B\beta^5 - A\alpha\beta^4 - 4B\alpha\beta^3 + 3A\alpha^2\beta^2 + 3B\alpha^2\beta - A\alpha^3$
7. $B\beta^6 - A\alpha\beta^5 - 5B\alpha\beta^4 + 4A\alpha^2\beta^3 + 6B\alpha^2\beta^2 - 3A\alpha^3\beta - B\alpha^3$
8. $B\beta^7 - A\alpha\beta^6 - 6B\alpha\beta^5 + 5A\alpha^2\beta^4 + 10B\alpha^2\beta^3 - 6A\alpha^3\beta^2 - 4B\alpha^3\beta + A\alpha^4$.

Man will wissen, wie die in diesen Reihen von Ausdrücken vorkommenden Zahlen von der Stellenzahl jeder Reihe abhängen, und sich durch dieselbe in allgemeiner Form darstellen lassen?

Eine solche allgemeine für rbige Glieder geltende Form ist leicht gefunden, wenn man bemerkt, wie die Potenzzahlen von β rechtshin abnehmen, und wie die Potenzzahlen von α zunehmen, und daß die Zahlencoefficienten der Glieder figurirte Zahlenreihen der von 1 ab nach einander folgenden Ordnungen sind.

Man bezeichne, der Kürze wegen, die Glieder der figurirten Zahlenreihe

erster Ordnung mit $^{1}\mathfrak{A}$, $^{2}\mathfrak{A}$, $^{3}\mathfrak{A}$, ... $^{r}\mathfrak{A}$ —
zweiter — — — $^{1}\mathfrak{B}$, $^{2}\mathfrak{B}$, $^{3}\mathfrak{B}$, ... $^{r}\mathfrak{B}$ —
dritter — — — $^{1}\mathfrak{C}$, $^{2}\mathfrak{C}$, $^{3}\mathfrak{C}$, ... $^{r}\mathfrak{C}$ —
u. s. w.,

so daß jeder folgende Buchstab eine um Eins höhere Ordnung, und die demselben links vorgesetzte Zahl die Stelle der figurirten Zahl in ihrer Reihe bedeute. So lassen sich die oben bereits entwickelten Glieder für die r^{te} und $(r+1)^{ste}$ Stelle, wie folgt allgemein ausdrücken:

$$1)\ B\beta^{r-1} - A\alpha\beta^{r-2} - \overset{r-2}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{r-3} + \overset{r-3}{\mathfrak{A}}A\alpha^{2}\beta^{r-4}$$
$$+ \overset{r-4}{\mathfrak{B}}B\alpha^{2}\beta^{r-5} - \overset{r-5}{\mathfrak{B}}A\alpha^{3}\beta^{r-6} - \overset{r-6}{\mathfrak{C}}B\alpha^{3}\beta^{r-7}$$
$$+ \overset{r-6}{\mathfrak{C}}A\alpha^{4}\beta^{r-8} + \ldots,$$

$$r+1)\ B\beta^{r} - A\alpha\beta^{r-1} - \overset{r-1}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{r-2} + \overset{r-2}{\mathfrak{A}}A\alpha^{2}\beta^{r-3}$$

$$+\,\mathfrak{B}B\alpha^{2}\beta^{r-4} - \mathfrak{B}A\alpha^{3}\beta^{r-5} - \mathfrak{C}B\alpha^{3}\beta^{r-6} + \mathfrak{C}A\alpha^{4}\beta^{r-7} + \ldots$$

Multiplicirt man den Ausdruck der $(r+1)^{\text{sten}}$ Stelle mit $+\beta$ und den der r^{ten} Stelle mit $-\alpha$, so erhält man, nach dem Gesetz der Reihe den Ausdruck für die $(r+2)^{\text{te}}$ Stelle. Derselbe ist also

$$B\beta^{r+1} - A\alpha\beta^{r} - \left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ -1\end{matrix}\right\} B\alpha\beta^{r-1} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ +1\end{matrix}\right\} A\alpha^{2}\beta^{r-2} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}\\ +\mathfrak{A}\end{matrix}\right\} B\alpha^{2}\beta^{r-3}$$

$$\left.\begin{matrix}-\mathfrak{B}\\ -\mathfrak{A}\end{matrix}\right\} A\alpha^{3}\beta^{r-4} - \left.\begin{matrix}\mathfrak{C}\\ -\mathfrak{B}\end{matrix}\right\} B\alpha^{3}\beta^{r-5} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{C}\\ +\mathfrak{B}\end{matrix}\right\} A\alpha^{4}\beta^{r-6} + \ldots$$

Jeder Coefficient in diesem Ausdruck ist die Summe einer figurirten Zahl mit einer solchen von einer um Eins niedrigern Stelle in einer um Eins höheren Ordnung. Also ist jenes Glied (nach 14):

$$B\beta^{r+1} - A\alpha\beta^{r} - \mathfrak{A}B\alpha\beta^{r-1} + \mathfrak{A}A\alpha^{2}\beta^{r-2}$$

$$+\,\mathfrak{B}B\alpha^{2}\beta^{r-3} - \mathfrak{B}A\alpha^{3}\beta^{r-4} - \mathfrak{C}B\alpha^{3}\beta^{r-5}$$

$$+\,\mathfrak{C}A\alpha^{4}\beta^{r-6} + \mathfrak{D}B\alpha^{4}\beta^{r-7} - \ldots$$

In diesem hängen die numerischen Coefficienten und Zahlenpotenzen gerade so von der Stellenzahl, $r+2$, ab, als in dem Ausdrucke für die r^{te} und $(r+1)^{\text{ste}}$ Stelle von r und $r+1$. Da nun, wenn man statt $r+2$ wieder $r+1$ setzen wollte, die nämliche Operation auch die nämliche Form für den Ausdruck der um Eins höheren Stelle ergeben müßte, so ist sie allgemein für jede

Stelle. Mithin ist das Glied der rücklaufenden Reihe auf der n^{ten} Stelle, vom zweiten angerechnet, =

$$B\beta^{n-1} - A\alpha\beta^{n-2} - \overset{n-2}{\mathfrak{A}}B\alpha\beta^{n-3} + \overset{n-3}{\mathfrak{A}}A\alpha^2\beta^{n-4}$$
$$+ \overset{n-4}{\mathfrak{B}}B\alpha^2\beta^{n-5} - \overset{n-5}{\mathfrak{B}}A\alpha^3\beta^{n-6} - \overset{n-6}{\mathfrak{C}}B\alpha^3\beta^{n-7} + \ldots$$

$$= B\beta^{n-1} - A\alpha\beta^{n-2} - \frac{n-2}{1}B\alpha\beta^{n-3} + \frac{n-3}{1}A\alpha^2\beta^{n-4}$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}B\alpha^2\beta^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}A\alpha^3\beta^{n-6}$$
$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}B\alpha^3\beta^{n-7} + \ldots$$

Anmerkung.

Eine solche rücklaufende Reihe giebt die Gleichung:

$$\sin. n\varphi = 2\cos\varphi \sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi.$$

Hier ist $A = \sin 0\varphi = 0$

$B = \sin\varphi$

$\alpha = 1$

$\beta = 2\cos\varphi$

Folglich:

$$\sin n\varphi = B\beta^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}B\beta^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}B\beta^{n-5}$$
$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}B\beta^{n-7} + \ldots$$

$$= \sin\varphi(2^{n-1}\cos\varphi^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-3}$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-7} + \ldots)$$

Für die Gleichung:

$$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi \text{ ist}$$

$A = \cos 0\varphi = 1$

$B = \cos\varphi$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2\cos\varphi \quad \text{Also}$$

$$\cos n\varphi = B\beta^{n-1} - \beta^{n-2} - \frac{n-2}{1}B\beta^{n-3} + \frac{n-3}{1}\beta^{n-4}$$

$$+ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}B\beta^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}\beta^{n-6} - \ldots$$

$$= 2^{n-1}\cos\varphi^{n} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\Big\}\cos\varphi^{n-2} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}\Big\}\cos\varphi^{n-4} - \ldots$$

$$- 2^{n-2}\Big\} \quad + \frac{n-3}{1}2^{n-4}\Big\} \quad - \ldots$$

$$= 2^{n-1}\cos\varphi^{n} - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-6} + - \ldots$$

In der Gleichung:

$$\sin 2n\varphi = 2\cos 2\varphi \sin 2(n-1)\varphi - \sin 2(n-2)\varphi$$

setze man y für $\sin\varphi$; für $2\cos 2\varphi$ den gleichbedeutenden Werth $2-4y^2$, und für n nach und nach $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $+\frac{3}{2}$, $+\frac{5}{2}$ u. s. w. so erhält man folgende rücklaufende Reihe:

$$\sin -\varphi = -y$$

$$\sin \varphi = +y$$

$$\sin 3\varphi = 3y - 4y^3$$

$$\sin 5\varphi = 5y - 20y^3 + 16y^5$$

$$\sin 7\varphi = 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7$$

$$\sin 9\varphi = 9y - 120y^3 + 432y^5 - 576y^7 + 256y^9$$

u. s. w.

Ihre zurückweisende Skale ist $+(2-4y^2)$, -1.

Betrachtet man die so verwickelt scheinenden Coefficienten ihrer Glieder genauer, so erblickt man in ihnen

die figurirten Zahlen, die sich in folgender Art darstellen lassen:

$\sin -\varphi = -y$

$\sin +\varphi = +y$

$\sin 3\varphi = 3y - 4.1.y^3$

$\sin 5\varphi = 5y - 4(3+2.1)y^3 + 4^2.1.y^5$

$\sin 7\varphi = 7y - 4(6+2.4)y^3 + 4^2(5+2.1)y^5 - 4^3.1.y^7$

$\sin 9\varphi = 9y - 4(10+2.10)y^3 + 4^2(15+2.6)y^5 -$
$- 4^3(7+2.1)y^7 + 4^4.1.y^9$

$\sin 11\varphi = 11y - 4(15+2.20)y^3 + 4^2(35+2.21)y^5 -$
$- 4^3(28+2.8)y^7 + 4^4(9+2.1)y^9 - 4^5.1.y^{11}$

u. s. w.

Die allgemeine Form der so entwickelten Glieder, in den oben gebrauchten Symbolen ausgedrückt, ist also:

$$\sin n\varphi = {}^n\mathfrak{A}y - 4(^2\mathfrak{B} + 2.^2\mathfrak{C})y^3 + 4^2(^2\mathfrak{D} + 2.^2\mathfrak{E})y^5$$
$$- 4^3(^2\mathfrak{F} + 2.^2\mathfrak{G})y^7 + 4^4(^2\mathfrak{H} + 2.^2\mathfrak{J})y^9$$
$$- 4^5(^2\mathfrak{K} + 2.^2\mathfrak{L})y^{11} + \ldots$$

Diese gilt, wie der Augenschein lehrt, für jedes der entwickelten Glieder, und da sie sich für jedes r^{te} Glied ergiebt aus der Vervielfältigung des $(r-1)^{sten}$ und $(r-2)^{ten}$ Gliedes durch die Scala relationis, und deren Zusammenzählung; so folgt, daß sie sich für jedes nächst höhere Glied durch dieselbe Operation mit denselben allgemeinen Zeichen ergeben muß, wodurch also ihre Allgemeinheit für jedes Glied evident wird.

Hiernach ist also, wenn man den Zeichen A, B, u. s. w. die von ihrer Stellenzahl abhängenden Werthe derselben substituirt,

$$\sin n\varphi = ny - 4\left\{\frac{n+1)(n-1)}{1.2.2^2} + \frac{(n+1)(n-1)(n-3).2}{1.2.3.2^3}\right\}y^3$$
$$+4^2\left\{\frac{n+3)..(n-3)}{1...4.2^4} + \frac{(n+3)..(n-5).2}{1....5.2^5}\right\}y^5$$
$$-4^3\left\{\frac{(n+5...(n-5)}{1.....6.2^6} + \frac{(n+5).....(n-7).2}{1.....7.2^7}\right\}y^7$$
$$+\frac{4^4}{2^8}\left\{\frac{(n+7).....(n-7}{1.....8}\right\}\left\{1 + \frac{n-9}{9}\right\}y^9 - \cdots$$

oder, wenn man die beiden Theile jedes zweigliedrigen Ausdrucks addirt,

$$\sin n\varphi = ny - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5.}y^5 -$$
$$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7.}y^7 + \ldots$$

Die ähnliche Gleichung für cos. n φ wird auf eine ähnliche Art durch Darstellung der allgemeinen Form der figurirten Zahlen gefunden.

18. A. a. b. c. d. e. f. g. h. B
b′. c′. d′. e′. f′. g′ h′.
c″. d″. e″. f″. g″. h″.
d‴. e‴. f′. g‴. h′.
e^{IV}. f^{IV}. g^{IV}. h^{IV}.
f^{V}. g^{V}. h^{V}.
g^{VI}. h^{VI}.
h^{VII}. C

In diesem aus Elementen zusammengesetzten rechtwinklichen Dreiecke A B C, betrachte man jedes Glied in jeder mit AB parallelen Reihe als die Summe zweier nächsten Glieder der darüber stehenden parallelen Reihe. Es sei also

$$b' = a + b$$
$$c' = b + c$$
$$c'' = b' + c' = a + 2b + c$$
$$d'' = c' + d' = b + 2c + d$$
$$c'' + d'' = d''' = 2 + 3b + 3c + d$$

und immer so fort nach dem nämlichen Gesetz; so ist die Reihe der Elemente, welche die Hypotenuse A C bilden, eine arithmetische Reihe höherer Ordnung (2) und jede ihr parallele, eine Differenzreihe von ihr, jede um Eins niedriger als die andere; a ist das Anfangsglied der Hauptreihe, b, c, d, u. s. w. sind die Anfangsglieder der ersten, zweiten, dritten und folgenden Differenzreihe. Man bezeichne die Stellenzahl von a mit o, das heißt, man fange die Glieder der Hauptreihe mit b' zu zählen an, so ergeben sich für dieselben nach obigem folgende Gleichungen:

0. $a = a$
1. $b' = 1.a + 1.b$
2. $c'' = 1.a + 2.b + 1.c$
3. $d''' = 1.a + 3.b + 3.c + 1.d$

Man sieht sogleich, die numerischen Coefficienten von b, c, d, in diesen Gliedern sind figurirte Zahlen, deren Ordnungszahlen von der Linken zur Rechten um Eins

zunehmen, deren Stellenzahlen aber eben so um Eins abnehmen.

Man setze also irgend ein Glied der Hauptreihe an der r^{ten} Stelle

$$= a + \overset{r}{\mathfrak{A}}b + \overset{r-1}{\mathfrak{B}}c + \overset{r-2}{\mathfrak{C}}d + \overset{r-3}{\mathfrak{D}}e + \overset{r-4}{\mathfrak{E}}f + \ldots$$

Das an diesem Gliede nächst anliegende rechter Hand in der mit A B parallelen Linie wird aus b, c, d, u. s. w. eben so gebildet, als das erwähnte Glied der Hauptreihe an der r^{ten} Stelle. Folglich ist jenes

$$= b + \overset{r}{\mathfrak{A}}c + \overset{r-1}{\mathfrak{B}}d + \overset{r-2}{\mathfrak{C}}e + \overset{r-3}{\mathfrak{D}}f + \overset{r-4}{\mathfrak{E}}g + \ldots$$

Die Summe von beiden giebt das Glied der Hauptreihe an der $(r+1)^{sten}$ Stelle. Sie ist.

$$= a + (\overset{r}{\mathfrak{A}} + 1)b + (\overset{r-1}{\mathfrak{B}} + \overset{r}{\mathfrak{A}})c + (\overset{r-2}{\mathfrak{C}} + \overset{r-1}{\mathfrak{B}})d + (\overset{r-3}{\mathfrak{D}} + \overset{r-2}{\mathfrak{C}})e + (\overset{r-4}{\mathfrak{E}} + \overset{r-3}{\mathfrak{D}})f + \ldots$$

Dies ist, wie bereits oben (17 und 14) bemerkt ist.

$$= a + \overset{r+1}{\mathfrak{A}}b + \overset{r}{\mathfrak{B}}c + \overset{r-1}{\mathfrak{C}}d + \overset{r-2}{\mathfrak{D}}e + \overset{r-3}{\mathfrak{E}}f + \ldots$$

Diese Form, die für die ersten Glieder durch den Augenschein erwiesen wird, gilt also für jedes folgende um Eins weiter nach C hin liegende Glied der Hauptreihe a, b′, c″ u. s. w. Jedes wird also durch die Anfangsglieder der Hauptreihe und der Differenzreihen und durch die nach dem angegebnen Gesetz fortschreitenden figurirten Zahlen-Coefficienten gegeben.

Ist nun das Glied der Hauptreihe an der n^{ten} Stelle $= N$, so ist, wenn man für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die gleichbedeutenden Werthe substituirt,

$$N = a + \frac{n}{1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}c + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\text{-----}(n-r+1)}{1.2\text{-----}(r-1)r}r + \ldots$$

Da, für $r = n+1$, $n-r+1 = 0$ ist, so besteht die Reihe, welche das Glied an der n^{ten} Stelle ausdrückt, aus nicht mehr als $n+1$ Gliedern. So viel sind aber auch nöthig, um N und jedes folgende Glied der Hauptreihe zu bestimmen. Ist $r = n$, so ist $n-r+1 = 1$. Folglich ist der Coefficient des letzten Gliedes $= 1$, und die damit verbundene Differenz die letzte unveränderliche.

19. Man setze in der ersten Horizontalreihe AB des Dreiecks ABC, statt der Elemente a, b, c — diese a^5, a^4b, a^3b^2— und in der folgenden deren Summen jeder Ordnung in nachfolgender Art

A. a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5. B

$(a+b)a^4$, $(a+b)a^3b$, $(a+b)a^2b^2$, $(a+b)ab^3$, $(a+b)b^4$

$(a+b)^2a^3$, $(a+b)^2a^2b$, $(a+b)^2ab^2$, $(a+b)^2b^3$

$(a+b)^3a^2$, $(a+b)^3ab$, $(a+b)^3b^2$

$(a+b)^4a$, $(a+b)^4b$

$(a+b)^5$.

C.

so ist die Summe $(a+b)^5$ das 5te Glied der Hauptreihe, vom zweiten gezählt, mithin, nach vorigem

$$(a+b)^5 = \frac{a^5}{1} + \frac{5}{1}a^4b + \frac{5.4}{1.2}a^3b^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}a^2b^3$$
$$+ \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}ab^4 + \frac{5.4.3.4.1}{1.2.3.4.5}b^5.$$

Man sieht leicht, wie jede Form $(a+b)^n$ sich eben so,

als eine Summe, aus dem ersten Gliede a^n, und den Anfangsgliedern der Differenzreihen $a^{n-1}b$, $a^{n-2}b^2$, $a^{n-3}b^3$ u. s. w. darstellen, und das bekannte Gesetz des Binomiums aus dem Gesetze arithmetischer Reihen finden lasse.

20. Nimmt man in dem Dreiecke ABC (18) die erste Horizontalreihe a, b, c, d für die Hauptreihe, und die darunter stehenden parallelen für die Differenzreihen, das heißt, setzt man

$$\begin{array}{l} b' = b - a \\ c' = c - b \\ \hline c'' = c' - b' = c - 2b + a \\ d'' = d' - c' = d - 2c + b \\ \hline d''' = d'' - c' = d - 3c + 3b - a; \end{array}$$

so folgt auf dieselbe Art wie vorhin die Gleichung für das Anfangsglied der n^{ten} Differenzreihe

$$N = +a \mp \frac{n}{1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}c \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d \pm \ldots$$

und die oberen Vorzeichen gelten, wenn n eine gerade, die unteren, wenn es eine ungerade Zahl ist. Mittelst dieser Form finden sich die Glieder jeder Differenzreihe aus denen der Hauptreihe, so wie, nach der oben (8) dargestellten, die Glieder der Hauptreihe aus den Anfangsgliedern der Differenzreihen.

21. Man kann die Reihe a, b′, c″, d‴, die nun wieder für die Hauptreihe gelten soll, als eine stetige Linie betrachten. Theilt man die Zwischenräume zweier nächsten gegebenen Glieder in n gleiche Theile, und ver-

langt das Glied der $\frac{u}{n}$ten Stelle, fängt also von $\frac{1}{n}$ zu zählen an, so fordert man, daß dieses Glied für seine Stelle nach demselben Gesetze gebildet werden soll, als die gegebnen für ihre Stellen. Die Entfernung zweier nächsten gegebenen Glieder der Hauptreihe ist dann das Maaß, welches als Einheit betrachtet, und wodurch jedes Differenzglied, b, c, d, ... bestimmt wird.

Soll also das Glied der $\frac{u}{n}$ten Stelle nach demselben Gesetze gebildet sein, als das der ersten, zweiten und folgenden, so kann es offenbar keine andere Form haben, als diese:

$$a+\frac{u}{n}b+\frac{\frac{u}{n}\left(\frac{u}{n}-1\right)}{1.\ 2.}c+\frac{\frac{u}{n}\left(\frac{u}{n}-1\right)\left(\frac{u}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3.}d+\ldots$$

Hierdurch ist also der Forderung genügt, und das so gebildete Glied ist ein in die durch die Differenzen b, c, d und durch a bestimmte Hauptreihe gehöriges.

Je größer man die Zahl n setzt und je mehr Glieder man für die Stellenzahlen von der Form $\frac{u}{n}$ bestimmt, desto mehr nähert sich die Reihe der Idee einer ununterbrochenen Linie.

22. Verlängert man sie auch auf die andere Seite über o hinaus, so werden die Stellenzahlen der auf diese Seite fallenden Glieder subtractiv, und das Glied der $-n$ten Stelle ist =

$$a-\frac{n}{1}b+\frac{n(n+1)}{1.\ 2.}c-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}d+-$$

wel-

welche Form sich aus der obigen (18) unmittelbar ergiebt, wenn man darin $-n$ statt $+n$ setzt.

Hiedurch erhält also auch das Gesetz des Binomiums (19) seine Ausdehnuug auf beide Fälle für negative und gebrochne Exponenten.

23. Exempel.

Die Viereckzahlen in ihrer natürlichen Ordnung sind, für die darüber angegebnen Stellen, folgende:

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.
8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
81.	100.	121.	144.	169.	196.	225.	256.

Man nehme aber den Abstand dreier Glieder dieser Reihe zum Maaß der Einheit, so ergeben sich folgende Reihen:

Stellenzahl:	0.	1.	2.	3.	4.	5.
Hauptreihe:	1.	16.	49.	100.	169.	256.
1. Differenzr.		15.	33.	51.	69.	87.
2. — — —			18.	18.	18.	18.

Sucht man nun das $\frac{13}{3}$te Glied dieser Hauptreihe, so ergiebt es sich, nach der allgemeinen Form,

$$1+\tfrac{1}{3}\,15+\frac{\frac{13}{3}\left(\frac{13}{3}-1\right)}{1.\ 2}\,18 = 1+13.\,5+13.\,10. = 196.$$

Dies ist aber das 13te Glied der obigen Reihe, deren Maaß der Einheit ein Drittel ist des Maaßes der letzteren.

24. Wie durch die angegebnen Formen aus den Differenzen einer arithmetischen Reihe jedes ihrer Glieder, auf jeder $\frac{n}{n}$ten Stelle, auch ihre Summe, gefunden

werden kann, ist nach dem Gesagten leicht begreiflich. Ihr wichtigster Nutzen aber zeigt sich bei Darstellung des nach seinem Erfinder genannten Taylorischen Theorems. Dies enthält nämlich nichts anders, als die vollendete Annäherung einer arithmetischen Reihe an die ihr zum Grunde liegende Idee einer ununterbrochnen Linie. Die Darstellung dieses schönen Theorems möge denn die Betrachtung der figurirten Zahlen und der daraus entspringenden arithmetischen Formen beschließen.

25. Die oben (21) gegebene Form zur Bestimmung eines Gliedes der Hauptreihe an der $\frac{u}{n}^{ten}$ Stelle ist gleichbedeutend mit dieser:

$$a + u\frac{b}{n} + \frac{u(u-n)}{1.\ 2.}\frac{c}{n^2} + \frac{u(u-n)(u-2n)}{1.\ 2.\ 3.}\frac{d}{n^3} + \ldots$$

Man nenne die Quotienten $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n^2}$, $\frac{d}{n^3}$, u. s. w.: Differenzverhältnisse; n ist die Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile der Zwischenraum zweier Hauptglieder der Reihe, z. B. a, b′ eingetheilt worden ist; $\frac{1}{n}$ ist der Zwischenraum je zweier nächsten Glieder, die zwischen die Hauptglieder a, b′, c″ u. s. w. fallen, und von welchen das der u^{ten} Stelle gesucht wird.

Man sieht aus der aufgestellten Form, wie diese Glieder bestimmt werden, durch die Differenzverhältnisse $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n^2}$, $\frac{d}{n^3}$ u. s. w., die hier die Stelle der Differenzen selbst vertreten.

Fängt man nun von irgend einer Stelle der Hauptreihe, welche Stelle man mit x bezeichne, zu zählen an, und setzt man das dazu gehörige Glied derselben, y, welches also das Anfangsglied der neu zu zählenden Hauptreihe wird; denkt man sich die Zahl, welche die Menge der gleichen Theile bestimmt, in die der Zwischenraum von einem Hauptgliede bis zu dem ihm nächsten getheilt worden, als eine Funktion der Zahl x, um welche die letztere vermehrt oder vermindert wird, und bezeichnet man daher diesen Zwischenraum mit Δx; bezeichnet man die Differenzen der um Δx von einander entfernten Glieder nach ihrer Ordnung mit Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$— statt b, c, d u. s. w. und setzt man u irgend einem Vielfachen von Δx gleich, $u = n\Delta x$, so erhält jene Form diese Gestalt:

$$y + \frac{n\Delta x}{1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{n\Delta x(n\Delta x - \Delta x)}{1.\ 2.} \cdot \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

$$+ \frac{n\Delta x(n\Delta x - \Delta x)(n\Delta x - 2\Delta x)}{1.\ 2.\ 3.} \cdot \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \ldots$$

Die Differenzen Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ sind offenbar abhängig von der Größe des Zwischenraums zweier Hauptglieder Δx (von der Größe nämlich, die er absolut hat, ohne Rücksicht auf die Menge der Theile, in die er zerlegt ist); wachsen mit ihm und nehmen mit ihm ab. Je kleiner also Δx gesetzt wird, desto mehr nähern sich die Differenzverhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ — einer gewissen Grenze, die selbst nur aus der Art der Abhängigkeit des ersten Gliedes y von der Stellenzahl x ausgemittelt

werden kann. Diese für jetzt als unbekannt anzunehmenden Grenzen bezeichne man mit $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ —, welche also mit desto größerer Genauigkeit die Stelle der zu ihnen gehörigen Differenzverhältnisse vertreten werden, je kleiner man Δx setzt, je mehr es sich dem o nähert.

Setzt man nun $n\Delta x$ einer bestimmten Zahl gleich, $n\Delta x = b$, so giebt obige Form das Glied der Hauptreihe für die Stelle $x + n\Delta x$, das ist, für $x + b$ an. Man kann aber nun Δx kleiner setzen als jede gegebene Größe, wenn man nur n in demselben Maaße wieder vergrößert, so daß ihr Produkt unveränderlich bleibt. Wäre nun z. B. $n\Delta x = b = 3$ und $\Delta x = 0{,}0000001$, so würde schon Δx ohne merklichen Fehler gegen b verschwinden. Man kann sich aber Δx noch unendlich kleiner im Verhältnisse gegen b vorstellen. Es hindert nichts diese Vorstellung immer weiter zu treiben. Folglich kommt die obige Form immer näher dieser:

$$y + \frac{n\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{n^2\Delta x^2}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n^3\Delta x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

in dem Δx, $2\Delta x$, $3\Delta x$, u. s. w. als völlig verschwindend gegen b oder $n\Delta x$ gedacht werden. Da es nun keine Größe giebt, über die hinaus Δx nicht noch kleiner gedacht werden könnte, so ist die letzte Form die einzig beständige und wahre für das Glied der Reihe, welches auf y folgt, und zur Stelle $x + b$ gehört. Dies also ist, $n\Delta x = b$ gesetzt,

$$= y + b\frac{dy}{dx} + b^2 \cdot \frac{d^2y}{1.2.dx^2} + b^3 \cdot \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + b^4 \cdot \frac{d^4y}{1.2.3.4dx^4}.$$

26. Exempel.

Die Art, auf welche das Glied y der Hauptreihe von der Zahl seiner Stelle x abhängig ist, werde durch diese Gleichung gegeben:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Δx sei das Maaß des Zwischenraums von einem Gliede der Hauptreihe zum andern, und die auf y zunächst folgenden bezeichne man nach der Reihe mit y', y'', y''' u. s. w., so gehört y' zur Stelle $x + \Delta x$, y'' zur Stelle $x + 2\Delta x$, y''' zur Stelle $x + 3\Delta x$, y^N zur Stelle $x + n\Delta x$.

Man erhält also y', y'', $y''' \ldots y^N$, wenn man in die Gleichung für y statt x setzt $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $\ldots x + n\Delta x$. Es ist also

$$\begin{aligned}
y &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\
y' &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\
&\quad + B\Delta x + 2Cx\Delta x + 3Dx^2\Delta x \\
&\quad + C\Delta x^2 + 3Dx\Delta x^2 \\
&\quad + D\Delta x^3 \\
y'' &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\
&\quad + 2B\Delta x + 4Cx\Delta x + 6Dx^2\Delta x \\
&\quad + 4C\Delta x^2 + 12Dx\Delta x^2 \\
&\quad + 8D\Delta x^3 \\
y''' &= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \\
&\quad + 3B\Delta x + 6Cx\Delta x + 9Dx^2\Delta x \\
&\quad + 9C\Delta x^2 + 27Dx\Delta x^2 \\
&\quad + 27D\Delta x^3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$y^N = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + nB\Delta x + 2nCx\Delta x + 3nDx^2\Delta x + n^2C\Delta x^2 + 3n^2Dx\Delta x^2 + n^3D\Delta x^3$$

Hieraus ergeben sich die Differenzen für das Maaß Δx, und zwar:

$$\Delta y = y' - y = (B + 2Cx + 3Dx^2)\Delta x + (C + 3Dx)\Delta x^2 + D\Delta x^3$$

$$\Delta y' = y'' - y' = (B + 2Cx + 3Dx^2)\Delta x + (3C + 9Dx)\Delta x^2 + 7D\Delta x^3$$

$$\Delta y'' = y''' - y'' = (B + 2Cx + 3Dx^2)\Delta x + (5C + 15Dx)\Delta x^2 + 19D\Delta x^3$$

und aus diesen:

$$\Delta^2 y = \Delta y' - \Delta y = (2C + 6Dx)\Delta x^2 + 6D\Delta x^3$$

$$\Delta^2 y' = \Delta y'' - \Delta y' = (2C + 6Dx)\Delta x^2 + 12D\Delta x^3$$

daraus aber:

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y' - \Delta^2 y = 6D\Delta x^3.$$

Da nun $\Delta^3 y$ nicht mehr abhängig ist von x, so kann es auch durch die weitere Vermehrung oder Verminderung von x nicht mehr verändert werden. Mithin giebt es für die folgenden Stellenzahlen $x + 4\Delta x$, $x + 5\Delta x$ u. s. w. kein $\Delta^3 y'$, $\Delta^3 y'$, folglich kein $\Delta^4 y$, $\Delta^5 y$ u. s. w., sondern diese sind sämmtlich = 0.

Aus obigen Gleichungen folgen diese Differenz-Verhältnisse:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + (C + 3Dx)\Delta x + D\Delta x^2$$

$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = 2C + 6Dx + 6D\Delta x$

$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = 6D.$

Dies letzte ist unveränderlich. Die Grenzen, denen die übrigen sich nähern, je kleiner Δx gesetzt wird, sind:

für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, . . $B + 2Cx + 3Dx^2 = \frac{dy}{dx}$

für $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, . . $2C + 6Dx = \frac{d^2 y}{dx^2}$

Nach dem oben dargestellten Taylorschen Theorem ist

$$4^N = y + b\frac{dy}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{b^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$$

Setzt man in dieser Gleichung für b, $n\Delta x$, und für y und für die Grenzverhältnisse deren Werthe, so erhält man die Gleichung

$$y^N = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$+ n\Delta x(B + 2Cx + 3Dx^2)$$
$$+ \frac{n^2\Delta x^2}{1.2}(2C + 6Dx)$$
$$+ \frac{n^3\Delta x^3}{1.2.3}6D,$$

welche mit der vorhin gegebenen gleichbedeutend ist.

BIBLIOTEKA

Berlin, gedruckt bei Louis Quien.
Kronen-Straße No. 48.

ROTANOX
oczyszczanie
VI 2009

KD.4498
nr inw. 5921