Handbuch
der
Hydrostatik.

Mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von

D. J. A. Eytelwein,
Königl. Preuß. Ober-Landes-Baudirektor; Ritter des rothen Adler- und des k. niederländ. Löwenordens; ordentlichem Mitgliede der Akademie der Wissenschaften und des Senats der Akademie der Künste zu Berlin, des National-Instituts der Wissenschaften und Künste zu Amsterdam, der Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, u. m. a. Gesellschaften Mitgliede.

Mit sechs Kupfertafeln.

Berlin, 1826.
Gedruckt und verlegt
bei G. Reimer.

Vorrede.

Die Hydrostatik ist hier mit Rücksicht auf die Zwecke bearbeitet, welche meiner früher herausgegebenen Statik, Mechanik und Hydraulik zur Grundlage dienten. Ist es gleich nicht gewöhnlich, den Einfluß der Wärme bei hydrostatischen Untersuchungen, wie dies auch hier in den acht ersten Kapiteln geschehen ist, zu berücksichtigen: so schien es doch nothwendig für diejenigen Anwendungen, welche eine genauere Ermittelung erforderten, den Einfluß der Wärme auf die Ausdehnung der festen und flüssigen Körper so weit zu betrachten, als dies ohne zu große Weitläuftigkeit geschehen konnte.

Alle angeführten Maaße und Gewichte beziehen sich auf die preußischen, nach welchen ein

Fuß = 139,13 pariser Linien und ein Pfund = 467,711 Grammen beträgt. Werden andere Maaße oder Gewichte verstanden, so ist dies besonders angeführt.

Die vorkommenden Abkürzungen (St.) und (H. A.), beziehen sich auf mein Handbuch der Statik fester Körper und auf meine Grundlehren der höhern Analysis.

Berlin im Dezember 1825.

J. A. E.

Inhalt.

I. Kapitel. Grundlehren der Hydrostatik.

II. Kapitel. Vom Druck des Wassers gegen die Wände der Gefäße.

III. Kapitel. Von der erforderlichen Stärke cylindrischer Röhren.

IV. Kapitel. Vom Mittelpunkte des Drucks.

V. Kapitel. Von den ins Wasser eingetauchten festen Körpern.

VI. Kapitel. Von der Tiefe der Einsenkung schwimmender Körper.

VII. Kapitel. Von der verschiedenen Lage schwimmender Körper im Stande des Gleichgewichts und von ihrer Stabilität.

VIII. Kapitel. Vom Gleichgewichte solcher flüssigen Massen, deren Eigengewicht von dem des Wassers verschieden ist.

IX. Kapitel. Vom Einflusse der Wärme auf das Eigengewicht der Körper.

X. Kapitel. Von den Senkwagen.

XI. Kapitel. Von den Höhenmessungen mittelst des Barometers und Thermometers.

Erstes Kapitel.
Grundlehren der Hydrostatik.

§. 1.

Eine flüssige Masse unterscheidet sich von einer festen vorzüglich durch die vollkommene Bewegbarkeit ihrer einzelnen Theile, welche bei der geringsten Kraftäußerung an einander verschoben werden können.

Die flüssige Masse ist unpreßbar, wenn keine angebrachte Kraft eine Zusammendrückung oder Ausdehnung derselben bewirken kann. Gleichartig ist eine flüssige Masse, wenn gleich große Theile derselben gleiche Beschaffenheit, also auch gleiche Dichtigkeit oder gleiches Gewicht haben.

Die Hydrostatik enthält die Lehren vom Gleichgewichte und vom Druck der gleichartigen, schweren, unpreßbaren, flüssigen Massen, und so fern man dem Wasser diese Eigenschaften beilegen kann, ist solche die Lehre vom Gleichgewichte des Wassers. In der Folge wird man, zur Abkürzung, unter dem Worte *Wasser*, eine schwere, unpreßbare flüssige Masse verstehen.

Anmerkung. Nach den festgesetzten Begriffen über die Flüssigkeit und Unpreßbarkeit einer Masse, kann das Wasser nur mit gewissen Einschränkungen als eine solche Masse angesehen werden. Denn es ist bekannt, daß die Wassertheile mit einer gewissen Kraft zusammenhängen, und daß ein Wassertropfen am Finger hängen bleibt, welches bei einer vollkommenen Flüssigkeit deshalb nicht möglich wäre, weil das Gewicht der Wassertheile, welches als Kraft auf die Trennung derselben wirkt, solche von einander losreißen müßte. Dieser Zusammenhang des Wassers unter sich und mit anderen Körpern ist aber bei der Anwendung hydrostatischer Lehren auf das Wasser in den meisten Fällen so unbedeutend, daß man hierauf um so weniger Rücksicht nehmen darf, wenn man mit den Einschränkungen bekannt ist, welche an ihrem Orte bemerkt werden sollen. Es giebt zwar, so weit uns die Eigenschaften der Körper bekannt sind, keinen unpreßbaren oder unausdehnbaren Körper, weil die Wärme jeden Körper ausdehnt. Auch ist man noch aus andern Gründen berechtigt, dem Wasser eine Preßbarkeit zuzuschreiben. Allein wenn man hier nur Wasser von gleicher Temperatur versteht, und den Erfahrungen von **Zimmermann** und **Abich** *) gemäß voraussetzt, daß nur durch ungeheure Kraft eine unbedeutende Zusammendrückung des Wassers entsteht, so kann auch in dieser Rücksicht das Wasser ein Gegenstand hydrostatischer Untersuchungen werden.

§. 2.

In einem oben offenen Gefäße kann Wasser nur dann im Gleichgewichte sein, wenn der Wasserspiegel oder die oberste Fläche desselben wagerecht ist.

---

*) Ueber die Elasticität des Wassers. Theoretisch und historisch entworfen von E. A. W. Zimmermann. M. K. Leipzig, 1779. 8.

Beweis. Wollte man annehmen, daß im Gefäße ABC Tafel I. Figur 1. die oberste Fläche KML des Wassers nicht wagerecht, sondern wellenförmig wäre, so sei M ein Wassertheilchen dieser Oberfläche, welches höher als die benachbarten liegt. Das Gewicht R dieses Wassertheilchens, welches nach der vertikalen Richtung MR wirkt, kann senkrecht auf den Wasserspiegel bei M nach MN und senkrecht auf MN nach derjenigen Richtung MP zerlegt werden, wo die nächstgelegenen Wassertheilchen der Oberfläche niedriger als M liegen. Der Druck nach MP sei P, so findet man (Stat. §. 20.) die Kraft, mit welcher das Wassertheilchen M nach MP preßt, oder

$$P = \frac{MP}{MR} . R.$$

Da nun keine Kraft vorhanden ist, welche die in der Oberfläche unterhalb M gelegenen Wassertheilchen am Ausweichen hindert, und da bei einer flüssigen Masse die Theile durch die geringste Kraft verschoben werden können, so kann M nicht in Ruhe bleiben, weil die übrigen tiefer liegenden Wassertheile ausweichen, und dies muß so lange fortwähren, als noch irgend ein Wassertheilchen im Wasserspiegel höher liegt, als die übrigen Theile desselben. Nur dann, wenn alle Wassertheilchen der Oberfläche in einer wagerechten Ebene liegen, ist keine Ungleichheit unter den Seitenkräften P, welche aus der Zerlegung der Gewichte R entspringen.

Hier ist, so wie bei allen folgenden Untersuchungen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert

wird, vorausgesetzt, daß alle Vertikallinien untereinander parallel sind.

1. **Anmerkung.** Nur unter der Voraussetzung, daß alle Vertikallinien mit einander parallel sind, läßt sich beweisen, daß der Wasserspiegel im Gefäß eine wagerechte Ebene bilden muß. Da nun diese Voraussetzung nur bei geringen Abständen auf der Erdoberfläche gelten kann, so darf auch dieser Satz in keiner größern Ausdehnung angenommen werden.

2. **Anmerkung.** Stellt man den obersten ebenen Rand eines Gefäßes wagerecht, und gießt so lange Wasser in dasselbe, bis der Wasserspiegel mit dem Rande in eine wagerechte Ebene fällt: so kann man noch fortfahren Wasser zuzugießen, ohne daß solches über läuft; vielmehr erhebt sich der Wasserspiegel etwas über den Rand, bevor ein Abfließen erfolgt. Auch bemerkt man, daß in nicht vollen Gefäßen der Wasserspiegel, so weit er mit den Wänden des Gefäßes in Berührung kommt, sich entweder daselbst etwas senkt oder erhöht, wogegen der übrige Theil des Wasserspiegels wagerecht ist. Dieser Umstand rührt von anziehenden Kräften her, welche bei hydrostatischen Untersuchungen nicht in Betrachtung gezogen werden. Uebrigens leiden aber die hydrostatischen Sätze dadurch keine Abänderung, wenn man diese Abweichung am Rande des Gefäßes bei Seite setzt, und die hydrostatischen Lehren nicht unbedingt auf sehr enge Gefäße oder Haarröhren anwendet. Die Theorie über die Wirkungen, welche entstehen, wenn sich Flüssigkeiten in Harröhren befinden, ist vorzüglich von **Laplace** bearbeitet worden. M. s. Theorie der Kraft, welche in den Haarröhren und bei ähnlichen Erscheinungen wirkt, von **P. S. Laplace.** Frei übers. a. d. Franz. mit einigen Anmerkungen und Zusätzen von **H. W. Brandes** und **C. W. Gilbert.** Leipzig, 1810. 8.

3. **Anmerkung**. Den Beweis des vorstehenden Satzes hat zuerst **Daniel Bernoulli** *) gegeben, anstatt daß ihn **Stevin** **) als einen Erfahrungssatz annimmt. **Archimed**, welcher eben sowohl den Grund zur Hydrostatik wie zur Statik legte, nahm die Voraussetzung an, daß jedes Wassertheilchen von einer Wassersäule gedrückt werde, welche der vertikal darüberstehenden entspreche, wenn die Flüssigkeit irgend wohin ausweiche, oder von einem andern Theil der Flüssigkeit anderswohin gedrückt werde ***); woraus sich dann leicht der vorstehende Satz ableiten läßt. Gegen den Bernoullischen Beweis hat **d'Alembert** ****) Einwendungen gemacht, und dagegen als Erfahrungssatz aufgestellt, daß, wenn eine Flüssigkeit in einem Gefäße eingeschlossen ist, und ein Theil derselben einen Druck leidet: so verbreite sich dieser Druck nach allen Seiten der Flüssigkeit dergestalt gleichförmig, daß gleich große Theile von der Wand des Gefäßes gleichen Druck leiden. Wenn aber zur Begründung der hydrostatischen Lehren, außer dem §. 1. festgestellten Begriff der flüssigen Masse, noch ein Erfahrungssatz erforderlich wäre, so verdient der von **Stevin** angenommene offenbar wegen seiner Einfachheit den Vorzug, weil man sich von der Wahrheit desselben viel leichter überzeugen kann. Es scheint aber, daß die d'Alembertschen Einwendungen nicht so viel Gewicht haben, als ihnen beigelegt wird. Denn weil solche nur unter der Voraussetzung gemacht sind, daß man die Eigenschaft der flüssigen Massen

---

*) *Dan. Bernoulli*, Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. Argentorati, 1738. 4. Sect. II. §. 1. p. 17.

**) Hypomnemata mathematica, a *Simone Stevino* conscripta, et è Belgico in Latinum à *Wilh. Sn. (Snellius)* conversa. Lugduni Bat. 1608. fol. Tom. IV. Lib. 4. Post. 6. p. 113.

***) *Archimedis* Opera. Per *J. Barrow*. Londini, 1675. 4. — De Insidentibus Humido. Lib. I. pag. 245.

****) *d'Alembert*, Traité de l'équilibre et du mouvement des Fluides. Nouvelle édition. à Paris, 1770. 4. Chap. I. §. 13. p. 8.

bei Seite setzen oder sich die kleinsten Theile der Flüssigkeit als kleine feste Kugeln vorstellen soll, deren Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen, in welchem Falle diese Kügelchen nicht ausweichen können: so muß nach der Festsetzung des Begriffs von einer flüssigen Masse, diese Einwendung nothwendig wegfallen.

§. 3.

Zusatz. Wäre das Gefäß von einer sehr großen Ausdehnung, etwa ein Meer, so könnte man die Vertikallinien oder Richtungen der Schwere nicht als einander parallel annehmen. Es sei ADB Tafel I. Figur 2. ein Theil von der Erdoberfläche, in deren Mittelpunkt C sich die Richtungen der Schwere vereinigen. Ferner sei die Vertiefung ADB mit Wasser ausgefüllt, so wird die Oberfläche AMB desselben einen Theil einer Kugelfläche bilden, deren Mittelpunkt in C liegt, weil nur unter dieser Bedingung jedes Wassertheilchen M, welches nach der Richtung MC wirkt, jedes anliegende Wassertheilchen eben so stark drückt, als es von diesem gedrückt wird.

§. 4.

Das Gefäß ABCD Tafel I. Figur 3. sei mit stillstehendem Wasser angefüllt, so müssen sich alle Pressungen der Wassertheile gegen einander aufheben, weil sonst, wenn ein Wassertheilchen das neben liegende stärker preßte, als es wieder gedrückt wird, eine Bewegung entstehen müßte, welches gegen die Voraussetzung ist.

Verliert ein Theil EFGE des Wassers im Gefäße seine Flüssigkeit, und wird fest, ohne von seiner

Stelle zu weichen: so wird das übrige Wasser noch in Ruhe bleiben, weil der Druck desselben von der festen Wand EFG aufgehoben wird. Bliebe nur das Wasser innerhalb des Raumes EFGHIK flüssig, und alles übrige wäre fest: so wird auch dann die Ruhe nicht unterbrochen werden, und weil EFGHIK jede noch so verschieden gestaltete Röhre vorstellen kann, so folgt hieraus, daß, **wenn mehrere Gefäße oder Röhren mit einander verbunden und mit Wasser angefüllt sind, so ist solches im Gleichgewichte, wenn die Wasserspiegel der noch so verschieden gestalteten Gefäße oder Röhren in einerlei wagerechte Ebene fallen.**

Wenn hingegen in den beiden Schenkeln einer gebogenen Röhre ABCE Tafel I. Figur 4. Wasser befindlich wäre, und die beiden Oberflächen AE, CD liegen nicht in einerlei Ebene, so kann dasselbe nicht im Gleichgewichte sein. Denn man erweitere die wagerechte Ebene des höchsten Wasserspiegels CD, bis solcher den zweiten Schenkel der Röhre in FG schneidet. Man schütte den Schenkel von AE bis FG voll Wasser, so wird der ganze Wasserkörper nach dem Vorhergehenden in Ruhe bleiben. Die Ebene AE wird aber, von dem darüber befindlichen Wasserkörper AEFG, nach unten gepreßt, und weil alles in Ruhe ist: so muß von dem darunter befindlichen Wasser ein eben so großer Gegendruck erfolgen. Nimmt man den Wasserkörper AEFG wieder weg, so wird der aufwärts gegen AE gehende Druck des Wassers nicht aufgehoben, es muß also Bewegung erfolgen, daher kann das Wasser in den beiden Schenkeln irgend einer Röhre nicht im Gleichgewichte sein, wenn die erweiterten Wasserspiegel in verschiedenen wagerechten Ebenen liegen.

§. 5.

Ein gerades prismatisches oder cylindrisches Gefäß ABCD Tafel I. Figur 5. sei mit Wasser angefüllt, so ruht der ganze Wasserkörper auf dem wagerechten Boden BC des Gefäßes. Hieraus folgt, daß der wagerechte Boden BC einen senkrechten Druck leidet, welcher dem Gewichte des im Gefäße enthaltenen Wassers gleich ist.

Das Gewicht von einem preußischen Kubikfuß destillirten Wassers, bei einer Temperatur von 15 Grad Reaumür, ist genau 66 preußische Pfund. Setzt man diese Zahl $= \gamma$ und bezeichnet durch h die Höhe AB und durch F die Grundfläche BC des Gefäßes, so ist der Inhalt des Wassers im Gefäße $ABCD = h.F$, also das Gewicht oder der Druck des Wassers auf den Boden BC

$$= \gamma.h.F.$$

Man kann zur Abkürzung denjenigen Wasserdruck, dessen Richtung winkelrecht oder normal auf eine Ebene fällt, den Normaldruck gegen diese Ebene nennen.

Noch ist überhaupt zu bemerken, daß in allen den Fällen, wo nicht ausdrücklich eine andere Bestimmung gegeben wird, alle Gewichte auf preußische Pfunde und alle Abmessungen der Körper auf preußische Fuße bezogen werden, und daß, bei sämmtlichen Gewichtsbestimmungen des Wassers und anderer Materien, eine mittlere Temperatur von 13 bis 15 Grad nach dem Reaumürschen Quecksilberthermometer vorausgesetzt ist. Wenn lediglich von Wasser die Rede ist, so wird darunter das reinste oder destillirtes Wasser verstanden.

§. 6.

Die cylindrische Röhre AB Tafel I. Figur 6. sei gegen den Horizont AC geneigt und ihre Bodenfläche bei B, schneide die Axe normal. Die Länge der Röhre AB sei $= l$, ihre Lage werde durch die Vertikallinie $BC = h$ bestimmt, und ihr Querschnitt, welcher dem Inhalte der Bodenfläche bei B gleich ist, und hier nur sehr klein angenommen wird, sei $= e$, so ist, wenn man die ganze Röhre AB mit Wasser anfüllt, das Gewicht desselben $= \gamma . e . l$. Dieses Wasser drückt gegen den Boden B eben so, als wenn ein Körper, dessen Gewicht $\gamma e l$ ist, auf der schiefen Ebene AB liegt. Nennt man daher den Druck, welcher winkelrecht auf den Boden der Röhre entsteht $= p$, so erhält man (Statik §. 194.) $\gamma e l : p = l : h$, daher findet man

$$p = \gamma . h . e,$$

oder weil h die Tiefe der Bodenfläche B unter dem Horizonte des Wasserspiegels in der Röhre bezeichnet, so findet man den Normaldruck gegen die Bodenfläche, welche auf der Axe einer schiefen Röhre normal steht, dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche die Bodenfläche und deren Höhe der Tiefe der Bodenfläche unterm Horizonte des Wasserspiegels gleich ist.

Dasselbe gilt von jedem auf der Axe der Röhre normalen Querschnitte.

Irgend eine willkührlich gebogene Röhre AB Tafel I. Figur 7. sei durchgängig gleich weit, d. h. jeder auf ihre centrische Linie normale Querschnitt sei $= e$, wo e nur sehr klein angenommen wird. Verschließt man diese Röhre bei B und füllt solche bis A mit Wasser an: so kann man den Normaldruck auf jeden senkrechten Querschnitt $MN = e$ finden. Denn weil das Wasser in der Röhre AB im Gleichgewichte ist, so wird solches noch in Ruhe bleiben, wenn durch A die wagerechte Ebene ED gelegt, von B bis E eine eben so weite mit Wasser gefüllte Röhre angebracht und der Boden bei B weggenommen wird (§. 4.). Alsdann leidet der Querschnitt MN vom Wasser AM eben den Druck nach unten, wie vom Wasser EBM nach oben. Anstatt der krummen Röhre AM kann man eine eben so weite gerade Röhre MD anbringen, deren Axe auf MN senkrecht steht, und bis an die wagerechte Ebene AD mit Wasser gefüllt ist, da dann das Wasser DM ebenfalls mit MBE im Gleichgewichte ist. Es muß daher das Wasser in der Röhre MD eben so stark, als das Wasser der Röhre AM, gegen MN drücken; und weil der Normaldruck von $MD = \gamma . e . MP$ ist, so folgt hieraus, daß in einer jeden gleich weiten, willkührlich gekrümmten Röhre jeder normale Querschnitt derselben einen Normaldruck leidet, welcher eben so groß ist, als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche dem Querschnitte und deren Höhe der

Tiefe dieses Querschnitts unter dem Wasserspiegel oder dessen Erweiterung gleich ist.

Die vorstehenden Sätze gelten nur von engen Röhren, wie solche auf weite Röhren anzuwenden sind, wird in der Folge gezeigt werden.

§. 7.

Alle hier für das Wasser erwiesenen Sätze gelten eben so von jeder andern gleichartigen und unpreßbaren flüssigen Masse, deren Eigengewicht g' größer oder kleiner als 1 ist, weil man nur nöthig hat, das Gewicht γ' von einem Kubikfuße dieser Masse, oder $\gamma' = g'\gamma$ statt γ, in Rechnung zu bringen, da sich alsdann ganz ähnliche Folgen ableiten lassen, wenn man in den vorhergehenden und nachfolgenden Sätzen jede gleichartige unpreßbare flüssige Masse, anstatt des Worts Wasser setzt und γ' anstatt γ einführt.

So ist das Eigengewicht des deutschen Quecksilbers $= 14$, also das Gewicht von einem Kubikfuß Quecksilber oder $\gamma' = 14 \cdot 66 = 924$ preußische Pfund. So fern nun das Quecksilber als eine gleichartige, unpreßbare, flüssige Masse angesehen werden kann: so gelten auch die vorhergehenden Sätze eben so, wenn man nur in allen Ausdrücken Quecksilber anstatt Wasser setzt.

Zweites Kapitel.

Vom Druck des Wassers gegen die Wände der Gefäße.

§. 8.

In der Wand irgend eines mit Wasser angefüllten Gefäßes ABCD Tafel I. Figur 3. leidet jede kleine Fläche, oder jedes Element der Wand, von dem Wasser einen Normaldruck, welcher eben so groß ist als das Gewicht einer Wassersäule, deren Grundfläche dem Elemente und deren Höhe dem Abstande desselben, vom nöthigenfalls erweiterten Wasserspiegel, gleich ist.

Beweis. Man nehme das Element MN in der Wand des Gefäßes, wo man will, so läßt sich außerhalb des Gefäßes eine Röhre MP ansetzen, deren Weite durchgängig dem Flächeninhalt des Elements gleich ist. Füllt man diese Röhre bis an den erweiterten Wasserspiegel des Gefäßes mit Wasser an, so wird solches mit dem Wasser des Gefäßes im Gleichgewichte sein, wenn man den Theil MN von der Wand des Gefäßes wegnimmt (§. 4.). Der Druck vom Wasser in der Röhre MP gegen MN ist daher eben so groß, als der Druck vom gesammten Wasser des Gefäßes ABCD gegen diese Fläche MN. Da nun der Normaldruck des Wassers in der Röhre MP gegen MN nach §. 6. bestimmt werden kann, so ist dadurch der Wasserdruck gegen jedes Element wie MN bekannt.

§. 9.

1. Zusatz. Auf gleiche Weise wird dieser Satz von jedem Wasserelement wie mn Tafel I. Figur 8. erwiesen, welches man innerhalb des Gefäßes ABCD annehmen kann. Daher werden alle Wassertheilchen, welche in einerlei wagerechten Ebene liegen, gleich stark gedrückt.

2. Zusatz. Da jedes Wassertheilchen einen vertikalen Druck leidet, welcher dem Gewichte einer über diesem befindlichen Wassersäule gleich ist, deren Höhe bis zum Wasserspiegel reicht, und weil das Wassertheilchen nur dann in Ruhe bleiben kann, wenn von dem unter demselben befindlichen Wasser ein eben so starker Gegendruck erfolgt: so muß jedes Wassertheilchen einen vertikalen Druck von unten nach oben leiden, welcher dem Gewichte einer über diesem Wassertheilchen befindlichen Wassersäule gleich ist, deren Höhe bis zum nöthigenfalls erweiterten Wasserspiegel reicht.

3. Zusatz. Weil das in einem Gefäße befindliche Wasser gegen jedes Element einer Fläche einen Druck ausübt, welcher dem Gewichte einer Wassersäule entspricht, deren Grundfläche dem Element und deren Höhe dem Abstande desselben vom Wasserspiegel gleich ist, und weil dieses für jede Lage des Elements gilt: so folgt daraus, daß jedes Wassertheilchen nach allen Seiten einen gleich großen Druck ausübt, oder daß sich der Druck nach allen Seiten fortpflanzt.

Anmerkung. Dieser Satz wird gewöhnlich als ein Grundsatz aufgestellt, in welchem Falle aus demselben die übrigen Lehren der Hydrostatik abgeleitet werden können.

4. Zusatz. Die Pressungen des Wassers gegen die einzelnen Theile der Wände eines Gefäßes oder gegen einen im Gefäße befindlichen Körper, sind unabhängig von der Größe der Oberfläche des Wassers oder von der Menge des Wassers im Gefäße, weil die Größe des Normaldrucks auf gleich große Flächen, nur allein von der Höhe des Drucks abhängt.

§. 10.

Die Summe aller Normalpressungen des Wassers gegen irgend eine ebene Fläche in dem Umfange eines Gefäßes ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Höhe der Tiefe des Schwerpunkts der gedrückten Fläche unter dem Wasserspiegel, und deren Grundfläche dem Flächeninhalte der gedrückten Fläche gleich ist.

Beweis. Es sei LMN Tafel I. Figur 9. die gedrückte Fläche, deren Inhalt $= F$ ist, und AD der Wasserspiegel des Gefäßes ABCD. Ferner sei e ein Element dieser Fläche, deren Anzahl $= n$ ist, so wird $n.e = F$, und wenn d', d'', d''', ... die verschiedenen Abstände dieser gleich großen Elemente vom Wasserspiegel bezeichnen, so erhält man §. 8. die Summe aller Normalpressungen gegen die Fläche LMN =

$$\gamma d'e + \gamma d''e + \gamma d'''e + \ldots = \gamma e(d' + d'' + d''' + \ldots).$$

Ist nun G der Schwerpunkt von der Fläche LMN und $FG = d$ der Abstand desselben vom Wasserspiegel AD, so erhält man, wenn die einzelnen Elementarflächen als gleich schwer angesehen und ihre Momente gegen AD genommen werden (Stat. §. 78.), den Abstand

$$d = \frac{d'e + d''e + d'''e + \ldots.}{F}, \text{ daher ist}$$

$$d . F = e (d' + d'' + d''' + \ldots.).$$

Wird dieser Ausdruck mit dem vorhin gefundenen vertauscht, so erhält man die Summe aller Normalpressungen oder den Normaldruck gegen die Fläche LMN, welche sich übrigens in einer vertikalen oder schiefen Wand befinden mag,

$$= \gamma . d . F.$$

Hiebei ist zu bemerken, daß, weil sich γ auf Fußmaaß bezieht, auch die Werthe von d und F im Fußmaaße ausgedrückt werden müssen, in welchem Falle der Normaldruck in Pfunden gefunden wird, da γ nach Pfunden angegeben ist (§. 5.).

Mittelst dieses Satzes läßt sich übersehen, daß in einem oben engen und nach unten erweiterten Gefäße der Druck auf den Boden weit größer ist, als das Gewicht des gesammten im Gefäße enthaltenen Wassers. Eben so wird in einem oben weiten und am Boden verengten Gefäße der Druck auf den Boden kleiner seyn, als das Gewicht des gesammten im Gefäße enthaltenen Wassers.

§. 11.

Die Tiefe, um welche der Schwerpunkt einer gedrückten Fläche unter dem Wasserspiegel des Gefäßes liegt, heißt die Druckhöhe dieser Fläche.

Wäre P der Normaldruck des Wassers gegen irgend eine Fläche F und d die Druckhöhe, so ist $P = \gamma dF$; daher findet man aus dem gegebenen Normaldruck P gegen eine Fläche F die Druckhöhe

$$d = \frac{P}{\gamma F}.$$

Würde eine Fläche F' nicht vom Wasser, sondern durch irgend eine andere Materie dergestalt gepreßt, daß der gesammte Druck auf diese Fläche P' Pfund beträgt: so könnte man die Höhe d' einer Wassersäule angeben, welche die Fläche eben so stark als die Kraft P' preßt, weil man alsdann sich nur vorstellen darf, daß P' zugleich den Druck der Wassersäule bedeutet; man erhält daher die Höhe dieser Wassersäule oder

$$d' = \frac{P'}{\gamma F'},$$

wo man d' ebenfalls die der Kraft P' entsprechende Druckhöhe nennt.

§. 12.

Aufgabe. Die Wand eines mit Wasser angefüllten Behälters ist ein gegen den Horizont geneigtes ebenes Rechteck ABCD, Tafel I. Figur 10., dessen obere Seite AD mit dem Wasserspiegel zusammenfällt. Man sucht den Normal-, Horizontal- und Vertikaldruck des Wassers gegen diese Wand.

Auflösung. Man nehme die Vertikalebenen ABIG und CDE normal auf ABCD, lege durch BC die Vertikalebene BCLK, welche den Wasserspiegel in KL schneidet: so ist BCLK die Horizontalprojection und ADLK die Vertikalprojection von der Fläche ABCD. Der Normaldruck auf diese Fläche sei N, so ist die

Druckhöhe $= \frac{1}{2}$KB; daher findet man den Normaldruck gegen ABCD (§. 10.) oder

$$N = \tfrac{1}{2}KB.AB.BC.\gamma.$$

Diesen Druck kann man sich in irgend einem Punkte F der Fläche ABCD vereinigt vorstellen, so daß seine Richtung FN auf ABCD normal ist. Zerlegt man alsdann die Kraft N in einer auf ABCD normalen Ebene, nach horizontaler Richtung FH in eine Kraft H, und nach vertikaler Richtung FV in eine Kraft V: so können diese Kräfte H und V statt N gesetzt werden, und geben daher die Kräfte an, mit welcher die Fläche ABCD nach horizontaler und vertikaler Richtung gepreßt wird. Mittelst des Parallelogramms Ehnv erhält man (Statik §. 23.)

$$N:H:V = Fn:Fh:Fv,$$

und wegen Aehnlichkeit der Dreiecke Fhn und ABK,

$$Fn:Fh:Fv = AB:KB:AK, \text{ daher}$$

$$N:H:V = AB:KB:AK.$$

Nun sind die Flächen BCLK und ADLK die Horizontal- und Vertikalprojectionen der Fläche ABCD. Hieraus folgt:

(I) Der Normaldruck verhält sich zum Horizontaldruck einer rechtwinklichten Fläche, deren obere Seite in den Wasserspiegel fällt, wie diese Fläche zu ihrer Horizontalprojection.

(II) Der Normaldruck verhält sich zum Vertikaldruck, wie die gedrückte Fläche zu ihrer Vertikalprojection.

(III) Der Horizontaldruck verhält sich zum Vertikaldruck, wie die Horizontalprojection zur Vertikalprojection der gedrückten Fläche.

Aus (I) findet man $H = \frac{KB}{AB} N$; aber
$N = \frac{1}{2} KB . AB . BC . \gamma$, daher ist

$$(IV) \quad H = \tfrac{1}{2} KB . KB . BC . \gamma,$$

oder man findet den Horizontaldruck dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Höhe der Druckhöhe und deren Grundfläche der Horizontalprojection der gedrückten Fläche gleich ist.

Aus (II) erhält man $V = \frac{AK}{AB} N$, oder, wenn statt N sein Werth gesetzt wird,

$$(V) \quad V = \tfrac{1}{2} KB . AK . BC . \gamma,$$

oder man findet den Vertikaldruck dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Höhe der Druckhöhe und deren Grundfläche der Vertikalprojection der gedrückten Fläche gleich ist.

Eben die Folgerungen hätte man erhalten, wenn anstatt des spitzen Winkels ein stumpfer angenommen oder die gedrückte Seite der Fläche nach unten gekehrt wäre.

Beispiel. Die Fläche ABCD sei die Vorderböschung eines Deichs, deren Länge $BC = 100$ und Breite $AB = 20$ Fuß ist. Ferner sei die Höhe des Deichs $= 10$ Fuß; man sucht die verschiedenen vom Wasser entstehenden Pressungen.

Weil hier $BK = 10$, so findet man
$AK = \sqrt{(AB^2 - BK^2)} = \sqrt{(400 - 100)} = 17{,}3205$,
daher ist der Normaldruck:

$$N = \tfrac{1}{2} . 10 . 20 . 100 . 66 = 660000 \text{ Pfund};$$

der Horizontaldruck:

$$H = \tfrac{1}{2} . 10 . 10 . 100 . 66 = 330000 \text{ Pfund},$$

und der Vertikaldruck:

$$V = \tfrac{1}{2} . 10 . 17{,}3205 . 100 . 66 = 571576 \text{ Pfund.}$$

§. 13.

1. Zusatz. Steht die Fläche ABCD Tafel I. Figur 10. vertikal, so wird KB = AB, also

$$N = H = \tfrac{1}{2} AB^2 . BC . \gamma,$$

daher fällt der Normaldruck mit dem Horizontaldruck zusammen, und man findet den Druck auf die vertikale Seitenfläche halb so groß, als das Gewicht einer Wassersäule, welche die Seitenfläche zur Grundfläche und die ganze Höhe des Wassers zur Höhe hat.

Hier ist BC die Länge und AB die Höhe des Rechtecks. Für ein anderes Rechteck von derselben Länge, dessen Höhe aber A′B′ ist, erhält man den Normaldruck

$$N' = \tfrac{1}{2} (A'B')^2 . BC . \gamma;$$

daher verhält sich

$$N : N' = (AB)^2 : (A'B')^2,$$

oder bei zwei vertikalen gleich langen Rechtecken, deren oberste Seiten in den Wasserspiegel fallen, verhalten sich die Normalpressungen, wie die Quadrate ihrer Höhen.

Hieraus läßt sich beurtheilen, wie ansehnlich der Wasserdruck in größern Tiefen unter dem Wasserspiegel wächst, wobei es ganz einerlei ist, ob das Gefäß eng oder weit ist.

§. 14.

3. Zusatz. Mittelst des anatomischen Hebers kann man durch einen sehr einfachen Versuch die

große Gewalt, mit welcher das Wasser gegen die Wände der Gefäße preßt, versinnlichen. Man nehme zwei gleich große hölzerne kreisrunde Scheiben AB, CD Taf. I. Figur 11. und befestige um dieselben ein wasserdichtes gleich breites Leder dergestalt, daß der innere Raum ABCD vollkommen luft- und wasserdicht sei. Die obere Scheibe CD sei bei E durchbohrt und in die Oeffnung daselbst eine dünne gläserne Röhre EF befestigt und vertikal aufwärts gerichtet: so wird man mittelst dieser Röhre den innern Raum von ABCD mit Wasser anfüllen können, weil die Luft leicht durch die nicht zu enge Röhre entweicht. Nun werde auf CD ein bedeutendes Gewicht Q gesetzt, und so lange Wasser in die Röhre FE gegossen, bis das Gewicht Q zu steigen anfängt. Kommt endlich die Oberfläche des Wassers der Röhre in Ruhe, so ist zwischen dem Gewichte Q und dem fortgepflanzten Druck des Wassers der Röhre ein Gleichgewicht vorhanden, oder der Normaldruck des Wassers gegen CD muß dem Gewichte Q gleich sein.

Wäre der Flächeninhalt der Scheibe CD nach Abzug der Röhrenöffnung $= 2 \,\square$ Fuß, die Druckhöhe des Wassers in der Röhre EF $= 3$ Fuß, so ist (§. 10.) der Normaldruck gegen CD $= 3 . 2 . 66 = 396$ Pfund, und eben so groß muß das Gewicht Q mit Inbegriff des Gewichts der Röhre EF und der Scheibe CD sein. Der Querschnitt der Röhre betrage $\frac{2}{3} \,\square$ Zoll $= \frac{1}{216} \,\square$ Fuß, so ist das Gewicht des Wassers in der Röhre $= \frac{1}{216} . 3 . 66 = \frac{11}{12}$ Pfund. Man ist daher im Stande, mittelst $\frac{11}{12}$ Pfund Wasser, einen fortgepflanzten Druck von 396 Pfund zu bewirken, und man könnte durch Vergrößerung der Scheibe CD diesen Druck, so weit man will, vermehren.

Hierdurch wird auch der ungeheure Druck einleuchtend, welchen das Wasser gegen die Schleusenböden ausüben kann, wenn durch irgend eine Oeffnung in den Spundwänden eine Gemeinschaft zwischen dem Oberwasser und dem Raume unterm Schleusenboden entsteht. Gesetzt der Oberwasserspiegel liege 6 Fuß über einem 10 Fuß breiten und 20 Fuß langen Schleusenboden, so kann unter diesen Umständen ein Druck von $6.10.20.66 = 78400$ Pfund entstehen; und eben so groß ist die Gewalt, mit welcher der Schleusenboden alsdann aufgehoben wird.

Hierher gehört auch die bramahsche oder hydrostatische Presse.

§. 15.

Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, welche anfänglich erfordert wird, das Schutzbrett eines Wehrs vertikal aufwärts zu ziehen.

Auflösung. Wenn b die Breite des Schutzbretts, h die Höhe des Wassers vor demselben und Q das Gewicht dieses Schutzbretts anzeigt; wenn ferner P die zum Aufziehen desselben nöthige Kraft bezeichnet, so ist der Druck des Wassers gegen das Brett $= \frac{1}{2}\gamma b h^2$. Wegen Unebenheit der Fugen kann man hier die Reibung $= \frac{1}{3}$ des Drucks setzen; daher ist $\frac{1}{6}\gamma b h^2$ der Widerstand, welchen die Reibung verursacht. Hiezu das Gewicht Q des Schutzbretts addirt, giebt die Kraft, welche zum Aufziehen des Schutzbretts angewendet werden muß, oder

$$P = \frac{1}{6}\gamma b h^2 + Q = 11 . b h^2 + Q.$$

Beispiel. Ein 4 Fuß breites 210 Pfund schweres Schutzbrett, vor welchem das Wasser $5\frac{1}{2}$ Fuß hoch steht, erfordert daher zum Aufziehen eine Kraft

$$P = 11 . 4 . \frac{49}{4} + 210 = 749 \text{ Pfund}.$$

§. 16.

Die vertikale Wand AD Tafel I. Figur 12. werde auf beiden Seiten in ungleichen Höhen $AD = a$ und $DE = b$ vom Wasser gedrückt, so findet man, wenn c die Breite der gedrückten Fläche bezeichnet (§. 13.), den Ueberschuß des Drucks =

$$\frac{1}{2}\gamma a^2 c - \frac{1}{2}\gamma b^2 c = \frac{1}{2}c(a+b)(a-b)\gamma.$$

Wenn daher die von beiden Seiten gedrückte Fläche ein Rechteck ist, dessen oberste Seite in den obersten Wasserspiegel fällt, so ist der Ueberschuß des Normaldrucks eben so groß, als das Gewicht einer Wassersäule, deren Höhe dem Abstande beider Wasserspiegel und deren Grundfläche der halben Summe beider gedrückten Flächen gleich ist.

§. 17.

In der vertikalen Wand ABCD Tafel I. Figur 13. befindet sich die Fläche KL, deren Inhalt = F ist, und welche auf beiden Seiten in ungleichen Höhen vom Wasser gedrückt wird. Der Schwerpunkt dieser Fläche liege in G, und auf einer Seite derselben sei die Druckhöhe $HG = a$, auf der andern Seite $IG = b$, so findet man den Ueberschuß des Drucks

$$\gamma a F - \gamma b F = \gamma F(a-b).$$

Die-

Dieser Ueberschuß des Normaldrucks ist daher eben so groß, als das Gewicht einer Wassersäule, deren Höhe dem Abstande beider Wasserspiegel und deren Grundfläche dem Inhalte der gedrückten Fläche gleich ist.

Der Druck bleibt daher ungeändert, wenn auch die gedrückte Fläche noch so tief unterm Wasserspiegel liegt, so fern nur der Abstand zwischen beiden Wasserspiegeln unverändert bleibt.

Der Unterschied zwischen diesem Resultate und dem des vorigen §. ist wohl zu bemerken.

§. 18.

Aufgabe. Wie hoch muß das Wasser in der Kammer BCDE Tafel II. Figur 14. einer Schleuse stehen, wenn beide Schleusenthore AB, DE gleich stark gedrückt werden sollen.

Auflösung. Die Höhe AB des Oberwassers vor dem ersten Schleusenthore AB sei $= a$, des Unterwassers vor dem zweiten Schleusenthore oder $EF = b$, das Gefälle von B bis E oder $BG = c$ und die gesuchte Wasserhöhe in der Schleusenkammer oder $ED = x$, so erhält man, wenn die Breite der Schleusenthore $= 1$ gesetzt wird, den Ueberschuß des Drucks

gegen $AB = \frac{1}{2}a^2\gamma - \frac{1}{2}(x-c)^2\gamma$,

gegen $ED = \frac{1}{2}x^2\gamma - \frac{1}{2}b^2\gamma$

und weil beide Pressungen einander gleich sein sollen, so wird

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}b^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}(x-c)^2 \text{ oder}$$
$$x^2 - cx - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

daher findet man die erforderliche Wasserhöhe in der Schleusenkammer, oder

$$x = \frac{c \pm \sqrt{[2(a^2 + b^2) - c^2]}}{2}$$

wo nur das obere Zeichen vor der Wurzel gelten kann, weil x größer als c sein muß.

Beispiel. Es sei die Höhe des Oberwassers AB = 6, des Unterwassers EF = 7 und das Gefälle BG = 5 Fuß, so wird hier $a = 6$, $b = 7$ und $c = 5$ also die Wasserhöhe

$$x = \frac{5 + \sqrt{[2(36 + 49) - 25]}}{2} = 8{,}5205 \text{ Fuß.}$$

Hieraus erhält man ferner

$$BC = 8{,}5205 - 5 = 3{,}5205$$
$$AC = 11 - 8{,}5205 = 2{,}4795$$
$$DF = 8{,}5205 - 7 = 1{,}5205.$$

Wenn daher das Oberwasser 2,48 Fuß über dem Wasserspiegel der Schleusenkammer steht, so darf das Unterwasser nur 1,52 Fuß unter diesem Wasserspiegel stehen, wenn die Thore gleichen Druck leiden sollen.

§. 19.

Zusatz. Wäre die Wassertiefe vor den Oberthoren und hinter den Unterthoren gleich groß, also AB = EF oder $a = b$, so erhält man

$$x = \frac{c + \sqrt{(4a^2 - c^2)}}{2}.$$

Beispiel. Für $a = 5$ und $c = 6$ wird

$$x = \frac{6 + \sqrt{(4 \cdot 25 - 36)}}{2} = 7 \text{ Fuß.}$$

Daher ist $BC = 7 - 6 = 1$

$$AC = 11 - 7 = 4$$
$$DF = 7 - 5 = 2.$$

Man sieht hieraus, daß, wenn $AC = DF$ genommen wird, die Unterthore bei DE einen weit größeren Druck als die Oberthore bei AB leiden.

§. 20.

Aufgabe. Eine Schleuse besteht aus zwei Kammern ACED und DEHG, Tafel II. Figur 15., hat also in AB, DE, GH Thore; man soll die Wasserhöhe in beiden Kammern so bestimmen, daß der Ueberschuß des Drucks gegen jedes Schleusenthor gleich groß ist.

Auflösung. Man setze die Höhe des Oberwassers $AB = a$, des Unterwassers $IH = b$; das Gefälle von B bis E oder $BL = c$, das Gefälle von E bis H oder $LK = e$; die Wasserhöhe in der ersten Kammer oder $DE = x$ und in der zweiten Kammer oder $GH = y$.

Alsdann ist, wenn man die Breite der Thore sowohl als das Gewicht $\gamma = 1$ setzt, der Ueberschuß des Drucks

$$\text{gegen } AB = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}(x - c)^2,$$
$$\text{gegen } DE = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}(y - e)^2,$$
$$\text{gegen } GH = \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}b^2, \text{ folglich}$$
$$\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}(x - c)^2 = \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}b^2 \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}(y - e)^2 = \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}b^2.$$

Die Parenthesen aufgelöst, beide Gleichungen nach y geordnet und die erste mit 2 multiplizirt, giebt

$$y^2 + x^2 - 2cx - a^2 - b^2 + c^2 = 0 \qquad [I]$$
$$y^2 - ey - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}e^2 = 0 \qquad [II]$$

Die Gleichung [II] von [I] subtrahirt, so wird
$\frac{3}{2}x^2 - 2cx + ey - a^2 - \frac{1}{2}b^2 + c^2 - \frac{1}{2}e^2 = 0$ also

$$y = \frac{4cx - 3x^2 + 2a^2 + b^2 - 2c^2 + e^2}{2e}.$$

Aus [I] findet man

$$y^2 = 2cx - x^2 + a^2 + b^2 - c^2.$$

Zur Abkürzung setze man

$$\alpha = 2a^2 + b^2 - 2c^2 + e^2 \text{ und}$$
$$\beta = a^2 + b^2 - c^2, \text{ so wird}$$

$$y = \frac{4cx - 3x^2 + \alpha}{2e} \text{ oder } y^2 = \frac{(4cx - 3x^2 + \alpha)^2}{4e^2} \text{ und}$$

$$y^2 = 2cx - x^2 + \beta, \text{ daher}$$

$$2cx - x^2 + \beta = \frac{(4cx - 3x^2 + \alpha)^2}{4e^2}.$$

Hieraus findet man, wenn die Parenthese aufgelöset und die Glieder nach x geordnet werden,

$$x^4 - \frac{8}{3}cx^3 + \frac{2}{9}(8c^2 + 2e^2 - 3\alpha)x^2 + \frac{8}{9}c(\alpha - e^2)x + \frac{\alpha^2 - 4e^2\beta}{9} = 0.$$

Sobald aus dieser Gleichung der Werth für die Höhe x gefunden ist, so läßt sich leicht mit Hülfe desselben der Werth für y finden, weil

$$y = \frac{4cx - 3x^2 + \alpha}{2e} \text{ ist.}$$

Beispiel. Wäre $a = 6$, $b = 6$, $c = 5$ und $e = 7$ Fuß gegeben, so ist

$$\alpha = 107, \ \beta = 47 \text{ und daher}$$

$$x^4 - \frac{40}{3}x^3 - \frac{46}{9}x^2 + \frac{2320}{9}x + \frac{2237}{9} = 0.$$

Wenn in der Aufgabe selbst nichts Unmögliches liegt, so muß es für x einen positiven Werth geben, welcher zwischen c und $c + a$ enthalten ist. Man hat also nur nöthig, hier den Werth für x zwischen

5 und 11 zu suchen, und man findet, wenn in der vorstehenden Gleichung $x = 6$ gesetzt wird,

für $x = 6$ einen Rest $= + 27{,}22$

für $x = 7$ einen Rest $= - 369{,}77$.

Nun ist $\frac{27{,}22}{27{,}22 + 369{,}77} = 0{,}068$; daher erhält man nahe genug die Wasserhöhe in der ersten Schleusenkammer oder

$$x = 6{,}07 \text{ Fuß}.$$

Hieraus findet man ferner die Höhe des Wasserstandes in der zweiten Schleusenkammer oder

$$y = \frac{4.5.6{,}07 - 3.6{,}07^2 + 107}{2.7} = 8{,}42 \text{ Fuß}.$$

§. 21.

Aufgabe. Den Normaldruck des Wassers gegen ein Trapez zu finden, wenn solches sich in einer gegen den Wasserspiegel geneigten Ebene befindet, und die parallelen Seiten des Trapezes mit dem Wasserspiegel parallel sind.

Auflösung. Die Ebene MNP Tafel II. Figur 16., in welcher sich das Trapez DEHI befindet, sei gegen den Horizont NO unter dem Winkel MNO $= \alpha$ geneigt. G sei der Schwerpunkt vom Trapez DEHI, und wenn der Wasserspiegel LMQ die Ebene MNP in MQ schneidet: so ziehe man AK durch G auf MQ winkelrecht. Man setze AB $= a$, IH $= b$, DE $= c$, BK $= h$, so ist (Statik §. 104.) der Abstand des Schwerpunkts oder

$$BG = \frac{(2b + c)h}{3(b + c)}.$$

Durch G werde GC vertikal und AC in der Ebene AGC durch A horizontal gezogen: so entsteht das Dreieck ACG, in welchem der Winkel CAG $= \alpha$ ist. Man findet daher die Tiefe des Schwerpunkts G unterm Wasserspiegel oder

$CG = AG . \sin \alpha = (AB + BG) \sin \alpha$; aber $AB = a$ daher

$$CG = \left[a + \frac{(2b+c)h}{3(b+c)}\right] \sin \alpha = \frac{3a(b+c) + h(2b+c)}{3(b+c)} \sin \alpha.$$

Der Inhalt des Trapez oder F ist $= \frac{b+c}{2} . h$, daher findet man §. 10. den **Normaldruck** $N = \gamma . CG . F$ oder

$$\text{(I)} \quad N = \tfrac{1}{6} \gamma h [3a(b+c) + h(2b+c)] \sin \alpha.$$

Zerlegt man den Normaldruck N nach horizontaler und vertikaler Richtung in einen Horizontaldruck H und Vertikaldruck V, so erhält man den **Horizontaldruck**

$$\text{(II)} \quad H = N \sin \alpha$$

und den **Vertikaldruck**

$$\text{(III)} \quad V = N \cos \alpha.$$

Wird der Ausdruck für V positiv, so ist der Vertikaldruck nach oben gerichtet, im entgegengesetzten Falle aber nach unten.

Steht die gedrückte Fläche vertikal, so ist $\alpha = 90$ Grad, also $\sin \alpha = 1$, daher der Normaldruck

$$\text{(IV)} \quad N = \tfrac{1}{6} \gamma h [3a(b+c) + h(2b+c)].$$

§. 22.

1. Zusatz. Wäre die gedrückte Fläche ein Dreieck, dessen Spitze nach oben in B fällt, so ist, wenn die vorstehende Bezeichnung beibehalten wird, $DE = c = 0$, daher erhält man den Normaldruck

$$N = \tfrac{1}{6} \gamma b h (3a + 2h) \sin \alpha.$$

2. Zusatz. Wenn die Spitze des Dreiecks nach unten in K fällt, so wird $b = 0$, also der Normaldruck

$$N' = \frac{1}{6}\gamma c h (3a + h) \sin\alpha.$$

3. Zusatz. Wird für beide Dreiecke $a = 0$ und $b = c$, so wird $N = \frac{2}{6}\gamma b h^2 \sin\alpha$ und $N' = \frac{1}{6}\gamma b h^2 \sin\alpha$. Wenn daher die Spitze eines Dreiecks in dem Wasserspiegel und die Grundlinie wagerecht liegt, so ist der Druck gegen dasselbe doppelt so groß, als wenn man die Grundlinie in den Wasserspiegel und die Spitze nach unten bringt.

4. Zusatz. Wäre die gedrückte Fläche DEHI ein Parallelogramm, also $b = c$, so erhält man den Normaldruck oder

$$N = \gamma h b (a + \frac{1}{2} h) \sin\alpha.$$

Für $a = 0$ ist $N = \frac{1}{2}\gamma b h^2 \sin\alpha$.

§. 23.

Lehnsatz. Der Inhalt vom normalen Querschnitte eines Prismen ist eben so groß, als der Inhalt irgend eines schiefen Schnitts desselben, multiplizirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Schnitte.

Beweis. Von dem Prismen ABCDEF Tafel II. Figur 17. sei DEF ein schiefer und DGH ein normaler Querschnitt, welche beide den Punkt D gemein haben. Man verlängere EF und GH bis K, ziehe KD, so ist KD die Durchschnittslinie beider Flächen DEF und DGH, auch sind FH und EG auf der Ebene DGK normal. Aus F und E werde FL, EM auf DK winkelrecht und alsdann die Linien HL, GM gezogen, so ist jeder von den Winkeln FLH und EMG ein Neigungswinkel der beiden Ebenen DEF und DGH, auch HL und GM auf DK winkelrecht. Man setze den Winkel FLH = EMG = α, so verhält sich:

$$EM : MG = FL : LH = 1 : \cos\alpha.$$ Ferner

$$\Delta DEK : DGK = EM : MG = 1 : \cos\alpha$$ und

$$\Delta DFK : DHK = FL : LH = 1 : \cos\alpha,$$ daher

$$\Delta DEK - DFK : \Delta DGK - DHK = 1 : \cos\alpha$$ oder

$$\Delta DEF : \Delta DGH = 1 : \cos\alpha,$$ folglich

$$\Delta DGH = \Delta DEF \,.\, \cos\alpha.$$

Da nun jede Fläche als aus mehreren Dreiecken bestehend angesehen werden kann, so folgt hieraus die Allgemeinheit des Satzes.

§. 24.

Ein willkührlich gestaltetes Gefäß ABCD Tafel II. Figur 18. sei bis AB mit Wasser angefüllt. Man denke sich dieses Wasser in eine unendliche Menge vertikaler dreiseitiger Prismen vertheilt, und abcd stelle den Längendurchschnitt eins solchen äußerst dünnen Prismen vor: so können die Flächen ab und cd als eben angesehen werden. Die Höhe des Drucks gegen ab sei AE und gegen cd sei sie AF. Man setze die Fläche ab = e', die Fläche cd = e'' und den Querschnitt bf = cg = e, so ist

der Normaldruck gegen ab = $\gamma \,.\, e' \,.\, AE = N$ und

der Normaldruck gegen cd = $\gamma \,.\, e'' \,.\, AF = N'$.

Sind nun die Flächen ab und cd gegen den Horizont unter den Winkeln α und β geneigt, so wird die Richtung ihres Vertikaldrucks mit ihrem Normaldruck eben diese Winkel einschließen. Ist daher V der Vertikaldruck gegen ab und V' gegen cd, so wird (Statik §. 20.)

$V = N \cos\alpha$ und $V' = N' \cos\beta$ oder

$V = \gamma . AE . e' \cos\alpha$ und $V' = \gamma . AF . e'' \cos\beta$.

Aber (§. 23.) $e' \cos\alpha = e$ und $e'' \cos\beta = e$, daher

$$V = \gamma . AE . e \text{ und } V' = \gamma . AF . e.$$

Von diesen beiden Vertikalpressungen entsteht ein Ueberschuß des Drucks nach unten =

$$V' - V = \gamma . e . (AF - AE) = \gamma . e . EF.$$

Aber e.EF ist der Inhalt vom Wasserprisma abcd, daher drückt dies Wasserprisma das Gefäß eben so stark nach unten, als ein ihm gleiches Gewicht, und weil man das sämmtliche Wasser in lauter solche vertikale Wasserprismen eintheilen kann, so folgt hieraus, daß der Ueberschuß des gesammten Drucks, womit das Wasser ein Gefäß vertikal unterwärts drückt, eben so groß ist, als das Gewicht des im Gefäße befindlichen Wassers.

Von diesem Ueberschusse des gesammten Drucks, ist der Druck auf einzelne Theile des Gefäßes wohl zu unterscheiden. Denn der Druck auf den Boden eines Gefäßes kann vielmal größer sein, als das Gewicht des Wassers im Gefäße (§. 14.). Setzt man ein solches Gefäß auf eine Wage, so äußert sich lediglich das Gewicht des Wassers und des Gefäßes; wenn aber das Gefäß befestigt wird, nud nur der Boden beweglich bleibt: so wird eine dem Druck auf den Boden gleiche Kraft erfordert, um den Boden gegen das Gefäß zu halten.

§. 25.

Denkt man sich das Wasser eines Gefäßes ABCD, Tafel II. Figur 18., in lauter wagerechte äußerst dünne dreieckige Prismen nach einerlei Richtung eingetheilt, und $hklm$ stellt den Durchschnitt nach der Länge eines solchen Prismen vor, dessen senkrechter Querschnitt e ist, so können die Flächen hk und lm als eben angesehen werden, deren Inhalte hier durch e' und e'' bezeichnet werden sollen. Die Druckhöhe des Wassers für diese Flächen sei h, so ist

der Normaldruck gegen $hk = \gamma . e' . h = N$ und
der Normaldruck gegen $lm = \gamma . e'' . h = N'$.

Die Fläche hk sei gegen eine auf $hklm$ winkelrechte Ebene unter dem Winkel α, und die Fläche lm unter dem Winkel β geneigt: so wird die Richtung des Horizontaldrucks mit dem Normaldruck eben diese Winkel einschließen. Der Horizontaldruck gegen hk sei H und gegen $lm = H'$, so wird (Stat. §. 20.)

$H = N \cos\alpha$ und $H' = N' \cos\beta$, oder
$H = \gamma . h . e' \cos\alpha$ und $H' = \gamma h e'' \cos\beta$.

Aber (§. 23.) $e' \cos\alpha = e$ und $e'' \cos\beta = e$, also $H = \gamma . h . e$ und $H' = \gamma . h . e$, folglich $H = H'$.

Daher sind die Horizontalpressungen einander gleich, und weil dies eben so für alle übrigen horizontalen Prismen bewiesen wird, so folgt hieraus, daß bei jeder Gestalt eines Gefäßes die vom Wasser entstehenden entgegengesezte Horizontalpressungen einander aufheben, oder das Gefäß wird nach keiner Seite einen größern Horizontaldruck leiden, als auf der entgegengesezten.

§. 26.

Zusatz. Sucht man den Horizontaldruck, welchen das in einem Gefäße befindliche Wasser gegen irgend einen Theil seines gekrümmten Umfanges ausübt, so darf man nur senkrecht auf der Richtung des Horizontaldrucks eine Ebene annehmen, auf dieser die Projection des gekrümmten Theils vom Umfang des Gefäßes bestimmen, da dann der Normaldruck auf diese Projection eben so groß ist, als der gesuchte Horizontaldruck. So ist der Horizontaldruck gegen die gekrümmte Fläche, deren Durchschnitt b h c Tafel II. Figur 18. vorstellt, eben so groß, als der Normaldruck gegen ihre Projection, welche durch b c vorgestellt ist.

Ueberhaupt folgt hieraus, daß man den Druck des Wassers gegen eine willkührlich gekrümmte Fläche, nach irgend einer gegebenen Richtung, finden kann, wenn man die Projection dieser Fläche auf eine der gegebenen Richtung normale Ebene sucht, und wenn man diese Projection mit der Tiefe des Schwerpunkts der gedruckten Fläche unter dem Wasserspiegel multiplizirt: so erhält man dadurch den Inhalt eines Wasserkörpers, dessen Gewicht dem Druck, nach der gegebenen Richtung, gegen die krumme Fläche gleich ist.

Drittes Kapitel.
Von der erforderlichen Stärke cylindrischer Röhren.

§. 27.

Es sei ALD Tafel II. Figur 19. der wagerechte Querschnitt einer mit Wasser angefüllten Röhre, deren Wände durchgängig einerlei Dicke haben. Soll das Wasser die Röhre zersprengen, so kann man sich vorstellen, daß irgend ein Stück derselben, wie ABED, von dem Wasser ausgepreßt werde, in welchem Falle bei AB und DE Risse nach der Länge der Röhre entstehen müssen. Soll das Stück ABDE von der Röhre gänzlich abgelöst werden, so müssen noch zwei Risse nach der Quere der Röhre erfolgen; weil es aber für die erforderliche Stärke einer Röhte schon von großem Nachtheil ist, wenn Risse nach der Länge allein erfolgen: so wird man die Dicke der Röhre so anordnen müssen, daß auch ohne Rücksicht auf diese Querrisse, schon allein die Risse nach der Länge vermieden werden, weil alsdann kein Querriß erfolgen kann, da dieser zugleich einen Längenriß voraussetzt. Man nehme an, daß die Risse bei AB und DE, welche verlängert nach dem Mittelpunkte C gehen, irgend eine Länge l, nach der Länge der Röhre gemessen, erhalten, und daß längs dieser Risse das Wasser durchgängig auf der Höhe h stehe, so ist h die Druckhöhe, mit welcher das Wasser gegen die Wand BKE preßt. Sollen nun bei AB und DE keine Sprünge entstehen, so muß im äußersten Falle, die Festigkeit der Röhre, bei AB und DE, dem Wasserdruck gegen BKE das Gleichgewicht halten. Nun sei die Dicke der Röhre $AB = DE = c$, der Durchmesser von der innern Weite der Röhre oder $2.BC = 2.CE = d$, und für den willkührlich angenommenen Bogen BKE, der Winkel $BCE = 2\varphi$. In der Mitte F und G von AB und DE errichte man die winkelrechte Linien HFQ und HGQ, welche sich in H schneiden: so sind FQ und GQ die Richtungen, nach welchen die absolute Festigkeit der Röhre dem Zerreißen widersteht. Diese sei Q, so ist, wenn k das Maaß der absoluten Festigkeit von jedem Quadratzoll der Materie der Röhre bezeichnet, und wenn sich alle Größen auf Fußmaaß beziehen,

$$Q = 144 k . c l \text{ (Statik §. 430.).}$$

Man ziehe HC und BE, so ist CH die Richtung, in welcher das Wasser das Röhrenstück ABED nach außen preßt, wenn eine Ablösung bei AB und DE erfolgen soll. Dieser Druck sei P, so findet man, weil BE die Projection des Bogens BKE ist, den Druck

$$P = \gamma . h . l . BE \text{ (§. 26.),}$$

oder weil $\frac{1}{2}BE = CE . \sin\varphi$ also $BE = d \sin\varphi$ ist,

$$P = \gamma . l . d . \sin\varphi.$$

Sollen nun die Kräfte P, Q, Q, deren Richtungen sich im Punkte H vereinigen, einander im Gleichgewichte erhalten: so findet man für diesen Fall (Statik §. 21. II.)

$$P = 2 Q \sin \varphi,$$

oder wenn man die oben gefundenen Werthe statt P und Q setzt

$$\gamma h l d \sin \varphi = 2 . 144 k c l \sin \varphi,$$

und hieraus die erforderliche Dicke der Röhre oder,

$$\text{(I)} \quad c = \frac{\gamma d h}{2 . 144 k}.$$

Hieraus folgt, daß man einerlei Werth für die Stärke der Röhre erhält, man mag den Bogen BKE und die Länge l des Risses so groß oder klein, als man will, annehmen, weil in jedem Fall die Größen $\sin \varphi$ und l aus der Rechnung wegfallen.

Nach der vorhergehenden Bestimmung von c, ist der geringste Ueberschuß an Wasserkraft die Röhre zu zersprengen im Stande, und weil solche nothwendig eine größere Dicke, als das Gleichgewicht erfordert, erhalten muß; so kann man der unvermeidlichen ungleichen Festigkeit der Materialien und der erforderlichen Sicherheit wegen, diesen Werth dreimal nehmen. Alsdann erhält man für die nöthige Röhrendicke

$$\text{(II)} \quad c = \frac{3 . \gamma h d}{2 . 144 k} = \frac{11 d h}{16 k},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß sich sämmtliche Größen auf preußisches Fußmaaß und preußische Pfunde beziehen *).

---

*) Es wird als bekannt vorausgesetzt, daß der preußische Fuß, welcher auch wohl unter dem Namen des rheinländischen vorkommt, mit 139,13 pariser Linien übereinstimmt, und daß das preußische Pfund = 467,711 Grammen ist.

§. 28.

Zusatz. Bei irgend einer andern Röhre sei der Durchmesser ihrer innern Weite $= D$, und das Maaß ihrer absoluten Festigkeit $= k'$; auch sei dieselbe mit irgend einer andern Flüssigkeit angefüllt, von welcher ein Kubikfuß γ' Pfund wiegt: so erhält man auf gleiche Art, wenn H die Druckhöhe der Flüssigkeit und C die erforderliche Röhrendicke bezeichnet,

$$C = \frac{3 \cdot \gamma' H D}{2 \cdot 144 k'}.$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit dem vorhin gefundenen, so erhält man folgende Proportion:

$$c : C = \frac{\gamma h d}{k} : \frac{\gamma' H D}{k'},$$

oder wenn zwei Röhren dem Zersprengen gleich stark widerstehen sollen, so müssen sich ihre Dicken verhalten, wie die Eigengewichte ihrer Flüssigkeiten, wie ihre Druckhöhen, wie ihre Durchmesser, und umgekehrt, wie die Maaße ihrer absoluten Festigkeiten.

Bei Röhren von einerlei Materie, welche gleiche Flüssigkeiten enthalten, muß daher die Dicke eben so zunehmen, wie ihre Druckhöhen und Durchmesser wachsen. Eine doppelt so hohe und doppelt so weite Röhre erfordert daher, unter übrigens gleichen Umständen, eine viermal so große Dicke.

Gleichweite, aufrecht stehende Röhren müssen daher in eben dem Verhältnisse dicker werden, wie die Druckhöhen wachsen; dagegen erhalten wagerechte Röhren durchgängig einerlei Dicke.

§. 29.

Der allgemeine Ausdruck §. 27. zur Bestimmung der Röhrendicke kann in allen denjenigen Fällen angewandt werden, wo die Größen γ, h, d, k bekannt sind; nur ist bei hölzernen Röhren wohl zu bemerken, daß alsdann k nicht das Maaß der absoluten Festigkeit nach der Länge der Fasern, sondern nach einer Richtung bezeichnet, welche winkelrecht auf die Länge der Fasern geht. Dieses letztere ist viel geringer als ersteres, und da es noch an hinlänglichen Versuchen über die Festigkeit der Holzarten nach der angegebenen Richtung fehlt: so lassen sich die Dicken hölzerner Röhren nach diesem Ausdruck nicht bestimmen, wogegen die nöthige Dicke metallner Röhren leicht anzugeben ist. Uebrigens ist noch zu bemerken, daß wegen der Unvollkommenheit der Materien, woraus Röhren bearbeitet werden, die geringste Dicke der Röhre bei Holze $1\frac{1}{2}$ Zoll, bei gegossenem Eisen 3 Linien, bei Blei 1 Linie und bei Kupfer $\frac{1}{2}$ Linie ist, wenn auch die Rechnung eine geringere Dicke für c angeben sollte, und daß bei allen diesen Berechnungen die Voraussetzung angenommen ist, daß die Röhren sorgfältig, ohne einzelne schwache Stellen, bearbeitet sind, weil sonst die erforderliche Dicke merklich größer ausfallen müßte.

1. Beispiel. Die erforderliche Dicke einer gegossenen 16 Zoll weiten bleiernen Röhre zu finden, wenn die Druckhöhe des Wassers 50 Fuß beträgt.

Nach §. 27. ist hier h = 50 Fuß, d = $\frac{4}{3}$ Fuß und für englisch gegossenes Blei k = 913 (St. §. 436.), daher

c

$$c = \frac{11 . h . d}{16 . k} = \frac{11 . 50 . \frac{4}{3}}{16 . 913} = 0{,}0502 \text{ Fuß},$$

oder man findet die erforderliche Dicke einer solchen Röhre $= 7\frac{1}{5}$ Linien.

Nach Mariotte's Erfahrungen (Divers ouvrages de mathématiques et de physique par Mrs. de l'académie royale des sciences, Paris 1693. p. 516.) hat eine bleierne 16 Zoll weite Röhre, bei einer Dicke von $6\frac{1}{2}$ Linien, einem 50 Fuß hohen Wasserdruck hinlänglich widerstanden. Die Abmessungen beziehen sich auf pariser Maaß; aber die Art des Bleies ist eben so wenig, als der zum Zerreißen der Röhre erforderliche Wasserdruck, angegeben.

2. Beispiel. Die größte Höhe zu finden, auf welcher Wasser in einer 12 Zoll weiten und $\frac{1}{2}$ Linie dicken, aus geschmiedetem Kupfer verfertigten Röhre mit Sicherheit stehen kann.

Weil $c = \frac{11 . hd}{16 . k}$ ist, so findet man die Höhe $h = \frac{16 . ck}{11 . d}$. Nun ist $c = \frac{1}{288}$ Fuß, $d = 1$ Fuß und $k = 38865$ (Statik §. 436.), daher die gesuchte Höhe oder

$$h = \frac{16 . \frac{1}{288} . 38865}{11 . 1} = 196{,}2 \text{ Fuß}.$$

§. 30.

Kennt man aus zureichenden Erfahrungen die erforderliche Dicke einer Röhre, so kann man leicht hieraus für jede andere Röhre, von derselben Materie, die nöthigen Abmessungen bestimmen. Wäre daher bekannt, daß D der Durchmesser, C die Dicke und H die Druckhöhe des Wassers in einer Röhre sind, welche noch zureichend stark gewesen ist, dem Wasserdruck zu widerstehen, und man bezeichnet durch d, c, h diese Abmessungen für eine andere Röhre von derselben Materie, so verhält sich (§. 28.)

$$C : c = HD : hd,$$

und man erhält die Röhrendicke oder

$$\text{(I)} \quad c = \left(\frac{C}{HD}\right) hd,$$

wobei es lediglich darauf ankommt, die Werthe H, C, D aus zureichenden Erfahrungen zu kennen, und den beständigen Koeffizienten $\left(\frac{C}{HD}\right)$ ein für allemal zu berechnen, um alsdann für jeden Werth von h und d die Dicke c zu finden.

Beim Gebrauche dieses Ausdrucks kann man sich jeder Einheit bedienen, wenn man nur bemerkt, daß zusammengehörige Größen, wie C, c; H, h; D, d; auf einerlei Weise ausgedrückt werden müssen.

Nach den Versuchen, welche Jardine zu Edinburg mit Röhren von bedeutend weichem und biegsamem Blei angestellt hat (*Gill's* technical Repository. Octbr. 1825. p. 242. oder Dingler's Polytechnisches Journal, Band XIX. Heft I. 1826. S. 79.), fand man nachstehende Ergebnisse in englischem Maaße.

Eine $1\frac{1}{2}$ Zoll weite und $\frac{1}{5}$ Zoll dicke bleierne Röhre trug eine Wassersäule von 1000 Fuß Höhe. Bei 1200 Fuß Höhe fing die Röhre an zu schwellen und bei 1400 Fuß zu bersten.

Nach einem zweiten Versuch hatte die bleierne Röhre eine Weite von 2 Zoll und eine Dicke von $\frac{1}{5}$

Zoll. Sie trug eine Wassersäule von 800 Fuß Höhe, barst aber bei 1000 Fuß Höhe.

Wird nach §. 27. die zur Sicherheit der Röhre erforderliche Dicke dreimal genommen, so ist für beide Versuche die hiernach nöthige Röhrendicke $\frac{3}{5}$ Zoll, mit Bezug auf diejenige Wasserhöhe, bei welcher die Röhre der Gefahr des Zerberstens ausgesetzt war. Wird nun die Druckhöhe des Wassers in Fußen, die Weite der Röhre in Zollen und die Dicke derselben in Linien ausgedrückt: so erhält man nach dem ersten Versuche den Koeffizienten

$$\frac{C}{HD} = \frac{7{,}2}{1200 \cdot \frac{3}{2}} = 0{,}004,$$

und nach dem zweiten Versuche

$$\frac{C}{HD} = \frac{7{,}2}{1000 \cdot 2} = 0{,}0036,$$

wo sich alle Abmessungen auf englisches Maaß beziehen. Nun vergleichen sich 13913 englische Fuß mit 13510 preußischen, wenn man daher den ersten Versuch zur Grundlage für die Berechnung annimmt: so erhält man für den Fall, daß sich die Abmessungen C, H, D auf preußisches Längenmaaß beziehen

$$\frac{C}{HD} = \frac{0{,}004 \cdot 13913}{13510} = 0{,}004119,$$

wofür man 0,00412 annehmen kann.

Für Röhren aus bedeutend weichem und biegsamem Blei erhält man hiernach in preußischem Längenmaaße

$$\text{(II)} \quad c = 0{,}00412 \cdot hd,$$

wenn die Wasserhöhe h in Fußen, die Röhrenweite d in Zollen und die Dicke c in Linien ausgedrückt wird.

§. 31.

Mit Hülfe des Ausdrucks (I) im vorigen §. lassen sich leicht für jede zureichende Erfahrung Tafeln verfertigen, aus welchen man für besondere Fälle die nöthige Röhrenstärke entnehmen kann. Nachstehende Tafel kann als Beispiel für Röhren dienen, deren Materie aus Blei von eben der Beschaffenheit besteht, welches bei den Versuchen von Jardine Anwendung fand, weshalb auch die Röhrendicke nach dem Ausdruck (II) §. 30. berechnet ist.

Tafel

welche die Dicke bleierner Röhren für verschiedene Durchmesser und Druckhöhen angiebt, wenn sehr weiches und biegsames Blei vorausgesetzt wird.

Druckhöhe des Wassers in Fußen.	Weite der Röhre in Zollen.									
	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16
	Dicke der Röhre in Linien.									
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	1	1	1	1	1	1	1	1	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{3}{10}$
30	1	1	1	1	1	1	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{10}$	2
40	1	1	1	1	1	$1\frac{3}{10}$	$1\frac{3}{5}$	2	$2\frac{3}{10}$	$2\frac{3}{5}$
50	1	1	1	1	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{10}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{9}{10}$	$3\frac{3}{10}$
60	1	1	1	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
70	1	1	1	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{7}{10}$	$2\frac{3}{10}$	$2\frac{9}{10}$	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{3}{5}$
80	1	1	1	$1\frac{3}{10}$	2	$2\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{10}$	4	$4\frac{3}{5}$	$5\frac{3}{10}$
90	1	1	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{5}$	3	$3\frac{3}{5}$	$4\frac{2}{5}$	$5\frac{1}{5}$	$5\frac{9}{10}$
100	1	1	$1\frac{1}{5}$	$1\frac{3}{5}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{10}$	$4\frac{1}{10}$	$4\frac{9}{10}$	$5\frac{4}{5}$	$6\frac{3}{5}$
200	1	$1\frac{3}{10}$	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{10}$	$4\frac{9}{10}$	$6\frac{3}{5}$	$8\frac{1}{5}$	$9\frac{9}{10}$	$11\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{5}$

Einige Erfahrungen über die zureichende Stärke hölzerner Röhren, welche Herr Langsdorf (Lehrbuch der Hydraulik §. 133.) mittheilt, sind hier noch zu bemerken.

Eine 14 Zoll weite, $2\frac{1}{2}$ Fuß lange büchene Röhre, welche mit 4 eisernen 3 Zoll breiten und beinahe $\frac{1}{2}$ Zoll dicken Reifen beschlagen ist, hält den Druck einer 240 Fuß hohen Wassersäule hinlänglich aus, wenn ihre Wand nirgends unter $2\frac{1}{2}$ Zoll dick ist. Diese Röhre war vorher mit ihren Beschlägen drei Wochen ins Wasser geworfen, um hinlänglich zu verquellen.

Eine 6 Zoll weite, 10 Fuß lange fichtene Röhre, welche an beiden Enden mit einem eisernen 2 Zoll breiten und $\frac{1}{4}$ Zoll dicken Ring beschlagen war, hielt den Druck einer 40 Fuß hohen Wassersäule aus. Ihre geringste Dicke war 4 Zoll. Bei 50 Fuß Wasserdruck berstete sie, weshalb man auf 40 Fuß Druckhöhe 5 Zoll Dicke rechnen kann.

Ueber die erforderliche Dicke der Röhren können folgende Schriften bemerkt werden:

Parent, Des résistances de tuyaux cylindriques. mém. de l'acad. de Paris, Année 1707. (Amsterd. 1708.) p. 135 — 144.

Belidor, Architectura Hydraulica. 1. Theil, 3. Buch, 3. Kap. §. 944 — 952.

Bossüt, Lehrbegriff der Hydrodynamik. A. d. Franz. v. K. C. Langsdorf. 1. Band. Frankfurth 1792. 4. Kap. S. 44 — 50.

K. C. Langsdorf, Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794. 11. Kap. S. 128 — 134.

Viertes Kapitel.
Vom Mittelpunkte des Drucks.

---

§. 32.

Denkt man sich in der Seitenwand eines Gefäßes eine Oeffnung, welche durch eine feste genau passende Fläche von außen verschlossen werden kann: so wird diese Fläche, bei der Anfüllung des Gefäßes mit Wasser, eben den Druck leiden, als wenn es die Seitenwand des Gefäßes wäre. Die kleinste Kraft, welche man anwenden muß, daß die Fläche nicht weggedrückt werde, muß alsdann dem Druck des Wassers gleich seyn, und derjenige Punkt der Fläche, in welchem man diese Kraft vereinigt, anbringen müßte, um das Ausweichen der Fläche zu verhindern, heißt der **Mittelpunkt des Drucks** (Centrum pressionum) dieser Fläche. Durch ihn geht die mittlere Richtung aller einzelnen Wasserpressungen, und wenn man in der Ebene der gedrückten Fläche durch den Mittelpunkt des Drucks eine Momentenaxe zieht: so muß die Summe der Momente aller Wasserpressungen auf der einen Seite dieser Axe, der Summe der Momente auf der andern Seite derselben gleich sein, weil nur unter dieser Bedingung die gedrückte Fläche in Ruhe bleibt, wenn der Mittelpunkt des Drucks gestützt wird (Statik §. 61.).

Bei wagerechten Flächen fällt der Mittelpunkt des Drucks mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammen, weil gleich große Theile der Fläche gleich stark gedrückt werden. Bei vertikalen oder schiefen Flächen muß der Mittelpunkt des Drucks tiefer als der Schwerpunkt liegen, weil gleich große Theile der Fläche, welche tiefer liegen, stärker gedrückt werden, als die obern.

§. 33.

Aufgabe. Die Seitenwand eines Gefäßes ABDG Tafel II. Figur 20., welche bis zum Wasserspiegel reicht, sei ein Rechteck; man sucht den Mittelpunkt des Drucks gegen dasselbe.

Auflösung. Man theile die wagerechte Seiten AD und BC in zwei gleiche Theile in M und N; ziehe MN und nehme $MF = \frac{2}{3} MN$, so ist F der Mittelpunkt des Drucks.

Beweis. Nimmt man $AM = MD$ und zieht MN mit AB parallel, so wird die mittlere Richtung aller Pressungen in der Linie MN liegen, weil solche auf beiden Seiten derselben gleich groß sind. In N werde auf die Ebene AC die Linie NR normal gezogen; auch sei NR der Druckhöhe des Punkts N gleich oder $= BK$, und man ziehe die Linie RM: so wird jede mit MR parallele Linie, wie FQ, welche man aus irgend einem Punkte der Linie MN zieht, die Höhe des Drucks auf den Punkt F ausdrücken, und man kann sich über jeden Punkt der Linie MN solche Linien vorstellen, welche der zugehörigen Druckhöhe entsprechen. Die Summe der Pressungen gegen die Linie MF verhält sich alsdann zur Summe der Pressungen gegen MN, wie ΔMFQ zu ΔMNR. Stellt man sich nun unter

MNR ein schweres Dreieck vor, welches in einer wagerechten Fläche ABCD lothrecht herabhängt: so wird die Linie MN von diesem schweren Dreieck eben so, wie vom Wasser gedrückt. Nimmt man $MF = \frac{2}{3} MN$, so geht die mittlere Richtung des Drucks durch FQ, weil in dieser Linie der Schwerpunkt des Dreiecks MNR liegt (Statik §. 96.), daher muß auch die mittlere Richtung des Wasserdrucks durch F gehen.

§. 34.

Aufgabe. Den Mittelpunkt des Drucks gegen jedes Rechteck in der Seitenwand eines Gefäßes zu finden, wenn eine Seite desselben mit dem Wasserspiegel parallel ist.

Auflösung. In der Seitenwand MNPQ, Tafel II. Figur 21., welche gegen den Horizont unter dem Winkel α geneigt ist, befinde sich das Rechteck DEHI, dessen Seite DE mit dem Wasserspiegel MQ parallel ist. Man verlängere ID und HE bis D' und E', und ziehe durch die Mitte von DE und IH die Linie KBA. Nun sei F der Mittelpunkt des Drucks für die Fläche DEHI, F' für $D'IHE'$, und F'' für $D'E'ED$. Ferner setze man $AB = a$, $IH = b$ und $HE = BK = h$, so ist

$$AF' = \tfrac{2}{3} AK = \tfrac{2}{3}(a + h) \quad (§. 34.)$$
$$AF'' = \tfrac{2}{3} AB = \tfrac{2}{3} a.$$

Man setze den Normaldruck auf $DEHI = N$; auf $D'IHE' = N'$ und auf $D'DEE' = N''$, so ist

$$N = \gamma h b (a + \tfrac{1}{2} h) \sin\alpha$$
$$N' = \tfrac{1}{2} \gamma b (h + a)^2 \sin\alpha \text{ und}$$
$$N'' = \tfrac{1}{2} \gamma b a^2 \sin\alpha.$$

Sollen diese Pressungen im Gleichgewichte sein, so wird erfordert, daß

$$AF'.N' = AF.N + AF''.N'' \text{ ist.}$$

Hieraus erhält man

$$AF = \frac{AF'.N' - AF''.N''}{N},$$

oder wenn die oben gefundenen Werthe hiermit vertauscht und im Zähler und Nenner die gleichen Faktoren weggelassen werden: so findet man den Abstand vom Mittelpunkte des Drucks oder

$$AF = \tfrac{2}{3}.\frac{(a+h)^3 - a^3}{(a+h)^2 - a^2}, \text{ oder auch}$$

$$AF = \frac{a^2 + ah + \frac{1}{3}h^2}{a + \frac{1}{2}h}.$$

Diese Ausdrücke gelten für jede Lage der Seitenwand des Gefäßes, wenn nur die sämmtlichen Abmessungen in der Ebene dieser Seitenwand genommen werden.

§. 35.

Zusatz. Von dem gedrückten Rechtecke DEHI ist der Abstand seines Schwerpunkts vom Rande $MQ = a + \frac{1}{2}h$; zieht man diesen vom Abstand des Mittelpunkts des Drucks ab, so erhält man

$$\frac{a^2 + ah + \frac{1}{3}h^2}{a + \frac{1}{2}h} - (a + \tfrac{1}{2}h) = \frac{a^2 + ah + \frac{1}{3}h^2 - (a + \frac{1}{2}h)^2}{a + \frac{1}{2}h},$$

oder man findet den Abstand des Mittelpunkts des Drucks vom Schwerpunkte des Rechtecks DEHI

$$= \frac{\frac{1}{6}h^2}{a + 2h}.$$

Je tiefer daher das Rechteck unter dem Wasserspiegel liegt, desto kleiner ist der Abstand zwischen diesen beiden Punkten.

§. 36.

Aufgabe. Die Lage des Mittelpunkts des Drucks für jede ebene Figur ganz allgemein zu finden.

Auflösung. In der Seitenwand MP Tafel III. Figur 22. des Gefäßes NQS sei eine Fläche BIH gegeben, deren Seite HI mit dem Wasserspiegel parallel liegt. Ist nun MQ diejenige Linie, in welcher der Wasserspiegel die Wand MQ schneidet, und man zieht durch BIH eine Linie KA auf MQ winkelrecht: so sei diese Linie dergestalt gezogen, daß dadurch die Gestalt der Fläche BHI zwischen den Koordinaten $BK = x$ und $HI = y$, durch eine Gleichung zwischen x und y bestimmt werde. Man setze $AB = a$, den Normaldruck auf $BHI = N$, und wenn AF' dem Abstande des Mittelpunkts des Drucks gegen die Fläche BHI gleich ist: so sei $AF = v$. Wächst x um das Element $Kk = \partial x$, so wächst der Druck N um ∂N; das Moment dieses Drucks gegen die Axe MQ ist alsdann $= AK.\partial N = (a + x)\partial N$, und das Integral davon giebt die Summe aller einzelnen Momente für die ganze Fläche $BHI = \int(a + x)\partial N$, welches dem Moment des Drucks gegen die ganze Fläche gleich sein muß. Dieses Moment ist $AF'.N = v.N$ oder $vN = \int(a + x)\partial N$, daher findet man den Abstand des Mittelpunkts des Drucks von MQ oder $AF' =$

$$\text{(I)} \quad v = \frac{\int(a + x)\partial N}{N}.$$

Wäre der Normaldruck N nicht bekannt, so ist, wenn der Winkel α die Neigung der Wand MP gegen den Horizont bezeichnet, der Normaldruck gegen die Elementarfläche $HIih = \gamma(a+x)y\partial x \sin\alpha$ (§. 22. 4. Zus.) oder $\partial N = \gamma(a+x)y\partial x \sin\alpha$, also $N = \gamma \sin\alpha \int (a+x)y\partial x$, folglich

$$\text{(II)} \quad v = \frac{\int (a+x)^2 y\partial x}{\int (a+x)y\partial x}.$$

§. 37.

Aufgabe. Den Mittelpunkt des Drucks bei einem Trapez zu finden, dessen parallele Seiten wagerecht liegen.

Auflösung. Es sei DEHI Tafel III Figur 23. das gegebene Trapez und HA auf HI, also auch auf MQ winkelrecht. Ist ferner $AB = a$, $BH = h$, $IH = b$, $DE = c$, und man ziehe durch X die YY mit MQ parallel, setzt $BX = x$, $YY = y$, so verhält sich

$h : h - x = c - b : y - b$, und man findet hieraus

$$y = \frac{ch + bx - cx}{h}.$$

Eben diesen Ausdruck hätte man für $b > c$ erhalten. Nun ist $y\partial x = \frac{(ch + bx - cx)\partial x}{h}$, also

$$(a+x)y\partial x = \frac{ach + (ab - ac + ch)x + (b-c)x^2}{h}\partial x \text{ und}$$

$$(a+x)^2 y\partial x$$

$$= \frac{a^2ch + a(ab - ac + 2ch)x + (2ab - 2ac + ch)x^2 + (b-c)x^3}{h}\partial x.$$

Nimmt man hiervon die Integrale, so wird

$$\int (a+x)y\partial x = \frac{achx + \frac{1}{2}(ab - ac + ch)x^2 + \frac{1}{3}(b-c)x^3}{h} + \text{Const.}$$

$$\int (a+x)^2 y\partial x =$$

$$\frac{a^2chx + \frac{1}{2}a(ab - ac + 2ch)x^2 + \frac{1}{3}(2ab - 2ac + ch)x^3 + \frac{1}{4}(b-c)x^4}{h} + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ verschwinden die Integrale, also ist in beiden Fällen Const = o, daher

$$\frac{\int(a+x)^2 y\,\partial x}{\int(a+x)\,y\,\partial x}$$
$$= \frac{ach + \frac{1}{2}a(ab-ac+2ch)x + \frac{1}{3}(2ab-2ac+ch)x^2 + \frac{1}{4}(b-c)x^3}{ach + \frac{1}{2}(ab-ac+ch)x + \frac{1}{3}(b-c)x^2}.$$

Für $x = BH = h$ findet man nach gehöriger Abkürzung

$$\frac{\int(a+x)^2 y\,\partial x}{\int(a+x)\,y\,\partial x} = \frac{6a^2(b+c)+4ah(2b+c)+h^2(3b+c)}{6a(b+c)+2h(2b+c)}.$$

Der Abstand des Mittelpunkts des Drucks für das ganze Trapez sei $AF' = v$, so erhält man (§. 36.)

$$v = \frac{6a^2(b+c)+4ah(2b+c)+h^2(3b+c)}{6a(b+c)+2h(2b+c)}.$$

Zieht man nun durch F' die Linie LL mit MQ parallel, nimmt LF = LF: so ist F der gesuchte Mittelpunkt des Drucks, weil derselbe in einer Linie liegen muß, welche die Seiten DE und IH in zwei gleiche Theile theilt.

§. 38.

1. Zusatz. Liegt die oberste Seite des Tapezes im Wasserspiegel, so wird $a = o$, und man erhält den Abstand des Mittelpunkts des Drucks oder

$$v = \frac{h(3b+c)}{2(2b+c)}.$$

§. 39.

2. Zusatz. Wird $b = o$, so verwandelt sich das Trapez in ein Dreieck, dessen wagerechte Seite oben liegt, und man erhält

$$v = \frac{6a^2+4ah+h^2}{6a+2h}.$$

Für $a = o$ ist $v = \frac{1}{2}h$.

§. 40.

3. Zusatz. Für ein Dreieck, dessen wagerechte Seite unten liegt, erhält man $c = o$, also

$$v = \frac{6a^2 + 8ah + 3h^2}{6a + 4h},$$

und für $a = o$, $v = \frac{3}{4}h$.

§. 41.

4. Zusatz. Verwandelt sich das Trapez in ein Rechteck, so ist $b = c$ und man erhält §. 34.

$$v = \frac{a^2 + ah + \frac{1}{3}h^2}{a + \frac{1}{2}h}.$$

§. 42.

Aufgabe. Den Mittelpunkt des Drucks gegen eine Kreisfläche zu finden.

Auflösung. Der Halbmesser des Kreises sei r und der Abstand desselben von derjenigen Linie, in welcher der Wasserspiegel die Wand des Gefäßes schneidet, wie bisher $= a$, so erhält man mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 36. $\frac{1}{4}y^2 = x(2r - x)$, also $y = 2\sqrt{(2rx - x^2)}$, daher

$\int(a + x)y\partial x = 2\int(a + x)\partial x\sqrt{(2rx - x^2)}$ und

$\int(a + x)^2 y\partial x = 2\int(a^2 + 2ax + x^2)\partial x\sqrt{(2rx - x^2)}$.

Werden beide Integrale so entwickelt, daß sie mit $x = o$ verschwinden und für $x = 2r$ ihren vollständigen Werth erhalten: so kann mittelst derselben der Abstand des Mittelpunkts des Drucks (§. 36.) gefunden werden. Nun ist (Statik §. 120.)

$\int\partial x\sqrt{(2rx - x^2)} = \frac{r^2}{2}\text{Arc sinvs}\frac{x}{r} - \frac{r - x}{2}\sqrt{(2rx - x^2)}$,

wo keine Constante hinzu kommt, weil das Integral mit $x = 0$ verschwindet. Für $x = 2r$ ist Arc sinvs $\frac{x}{r} = \pi$, daher

$$\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = \tfrac{1}{2}\pi r^2.$$

Ferner ist (Statik §. 124.)

$$\int x\, \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$
$$= -\tfrac{1}{3}\sqrt{(2rx - x^2)^3} + r\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} \text{ und}$$
$$\int x^2 \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$
$$= -\frac{5r+3x}{12}\sqrt{(2rx - x^2)^3} + \frac{5r^2}{4}\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)},$$

daher findet man für $x = 2r$

$$2\int \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = \pi r^2$$
$$2\int x\, \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = \pi r^3$$
$$2\int x^2 \partial x \sqrt{(2rx - x^2)} = \frac{5\pi r^4}{4} \text{ folglich}$$
$$\int (a + x)\, y\, \partial x = \pi a r^2 + \pi r^3 = \pi r^2 (a + r) \text{ und}$$
$$\int (a + x)^2 y\, \partial x = \pi a^2 r^2 + 2\pi a r^3 + \frac{5\pi r^4}{4}$$
$$= \frac{\pi r^2}{4}(4a^2 + 8ar + 5r^2).$$

Ist nun v der Abstand des Mittelpunkts des Drucks von der Linie, in welcher der Wasserspiegel die Wand des Gefäßes schneidet: so erhält man (§. 36.)

$$v = \frac{4a^2 + 8ar + 5r^2}{4(a + r)} = \frac{4(a + r)^2 + r^2}{4(a + r)}$$

und wenn der oberste Rand der Kreisfläche in den Wasserspiegel fällt, so wird $a = 0$, also der Abstand $v = \frac{5}{4}r$. Es ist daher in diesem Falle der Mittelpunkt des Drucks um den vierten Theil des Halbmessers von dem Mittelpunkte des Kreises entfernt.

Fünftes Kapitel.
Von den im Wasser eingetauchten festen Körpern.

§. 43.

Ein fester Körper KL Tafel III. Figur 24. werde so eingetaucht, daß er auf allen Seiten von ruhigem Wasser umgeben ist: so wird derselbe nach horizontaler Richtung in Ruhe bleiben, weil sich alle entgegengesetzte Horizontalpressungen einander aufheben (§. 25.). Denkt man sich aber diesen Körper in lauter dünne, vertikale Prismen, wie abcd eingetheilt, und man verlängert ad und bc bis an den Wasserspiegel MN in e und f, so daß ef den wagerechten Querschnitt von dem Prisme abcd vorstellt: so ist (§. 24.)

der vertikale Wasserdruck gegen $cd = \gamma . cf . fe$ und
der vertikale Wasserdruck gegen $ab = \gamma . bf . fe$.

Der erste Druck preßt das Prisme abcd nach oben, der letzte nach unten und aus beiden entsteht ein Ueberschuß des Drucks nach oben =

$$\gamma . (cf - bf) . fe = \gamma . bc . ef,$$

daher ist der Ueberschuß des Drucks, welcher das Prisme abcd aufwärts treibt, eben so groß als das Gewicht eines Wasserkörpers, welcher mit diesem Prisme gleichen Inhalt hat. Von allen übrigen Prismen, in welche der Körper KL eingetheilt ist, gilt eben dasselbe; daher ist der gesammte Druck, mit welchem das Wasser einen ganz eingetauchten Körper vertikal aufwärts treibt, eben so groß, als das Gewicht eines Wasserkörpers, welcher mit dem eingetauchten Körper gleichen Inhalt hat.

Diesen vertikal aufwärts gerichteten Druck kann man den Auftrieb des Wassers gegen den eingetauchten Körper nennen; er ist so groß, als das Gewicht des vom Körper verdrängten Wassers. Wäre der Inhalt des Körpers $= V$, so ist der Auftrieb, wenn der Körper ganz eingetaucht ist, $= \gamma . V$.

Weil der Druck, welcher den Körper KL vertikal aufwärts treibt, dem Gewichte der einzelnen vertikalen Wasserprismen, wie abcd, entspricht: so kann man von einer willkührlich angenommenen Vertikalebene den Abstand desjenigen Punkts, durch welchen die mittlere Richtung aller dieser Pressungen geht, dadurch bestimmen, daß man die Summe der Momente von den Gewichten der einzelnen Wasserprismen durch das Gewicht des Wasserkörpers KL dividirt (Statik §. 78.). Weil aber auf eben die Art der Schwerpunkt desjenigen Wasserkörpers gefunden wird, welchen der eingetauchte Körper verdrängt hat: so folgt hieraus, daß die mittlere Richtung des Auftriebs durch den Schwerpunkt des verdrängten Wasserkörpers geht, vorausgesetzt daß man sich das verdrängte Wasser an die Stelle des eingetauchten Körpers KL denkt.

Ist die Materie des eingetauchten Körpers gleichartig oder homogen, so fällt der Schwerpunkt des

Kör-

Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers zusammen.

§. 44.

Zusatz. Ist ein fester Körper HIKL Tafel III. Figur 25. nur zum Theil ins Wasser eingetaucht, so kann man denjenigen Theil desselben, welcher unter der erweiterten Ebene des Wasserspiegels MN liegt, und der hier der eingetauchte Theil des Körpers heißt, ebenfalls in kleine vertikale Prismen, wie cdef, eintheilen. Alsdann ist der Auftrieb für ein jedes solches Prisme so groß, als das Gewicht eines Wasserkörpers, welcher mit diesem Prisme gleichen Inhalt hat; und daher ist der gesammte Auftrieb gegen den zum Theil eingetauchten Körper eben so groß, als das Gewicht eines Wasserkörpers, welcher mit dem eingetauchten Theile gleichen Inhalt hat. Es ist daher ganz allgemein der Auftrieb dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich.

Auch bei den zum Theil nur eingetauchten Körpern geht die mittlere Richtung des Auftriebs durch den Schwerpunkt des verdrängten Wassers.

§. 45.

Aus der Statik (§. 72.) ist bekannt, daß das eigenthümliche oder Eigengewicht eines Körpers durch diejenige Zahl ausgedrückt wird, welche anzeigt, wieviel mal das Gewicht eines Körpers größer oder kleiner als das Gewicht eines Wasserkörpers von gleichem Inhalte ist. Man pflegt alsdann das Eigengewicht des Wassers = 1 zu setzen, woraus sich dann leicht, wenn das Eigengewicht eines gleichförmig dichten Körpers größer oder kleiner als 1 wird, beurtheilen läßt, ob der Körper schwerer oder leichter als Wasser ist.

Wäre P das absolute Gewicht und V der Inhalt eines Körpers A, ferner γ das Gewicht von einem Kubikfuße Wasser, dessen Eigengewicht = 1 gesetzt wird: so ist γV das Gewicht eines Wasserkörpers, welcher mit dem Körper A gleichen Inhalt hat. Bezeichnet nun g das Eigengewicht des Körpers A, so wird, nach der vorstehenden Erklärung, $g = \frac{P}{\gamma V}$ oder

$$\text{(I)} \quad P = g\gamma V.$$

Hiebei ist wohl zu bemerken, daß, weil warmes Wasser leichter als kaltes Wasser von gleichem körperlichen Inhalte ist, auch warmes Wasser ein geringeres Eigengewicht als kaltes haben muß. Dieselbe Bemerkung gilt auch von dem Eigengewichte der übrigen Körper; daher erfordert die Angabe des Eigengewichts eines Körpers, daß man zugleich wisse, für welchen Wärmegrad das Eigengewicht des Wassers = 1 gesetzt ist, weil der vorstehende Ausdruck (I) voraussetzt, daß das Eigengewicht g des Körpers sich auf denselben Wärmegrad bezieht, welchen das Gewicht γ des Wassers bedingt. Zur leichtern Anwendung pflegt man das Eigengewicht des Wassers für eine Temperatur von 15 Grad des Reaumürschen Thermometers = 1 zu setzen und danach die Eigengewichte der übrigen Körper für diesen Wärmegrad anzugeben.

Hätte man hingegen, wie dies oft der Fall ist, das Eigengewicht des Wassers beim Frostpunkte oder bei 0 Grad Reaumür = 1 gesetzt, und wollte nun das Eigengewicht eines Körpers für irgend einen andern Wärmegrad finden: dann treten besondere Rücksichten ein, welche im achten Kapitel näher auseinander gesetzt werden.

Sind einzelne Theile eines festen Körpers von verschiedener Dichtigkeit, oder befinden sich in dem Körper Höhlungen, in welche kein Wasser eindringen kann: so läßt sich doch von dem ganzen Körper, so weit er von einer festen Oberfläche eingeschlossen ist, durch welche kein Wasser eindringen kann, ein mittleres eigenthümliches Gewicht angeben. Denn es sei P das absolute Gewicht, g' das mittlere Eigengewicht und V der Inhalt eines Körpers: so wird $P = g'\gamma V$, also

$$\text{(II)} \quad g' = \frac{P}{\gamma V},$$

daher findet man das mittlere Eigengewicht eines Körpers, wenn man das Gewicht das Wasserkörpers sucht, welcher demjenigen Raume gleich ist, der von der Oberfläche des Körpers eingeschlossen ist, und mit diesem Gewichte in das absolute Gewicht des Körpers dividirt.

Hiernach kann das mittlere Eigengewicht einer hohlen, kupfernen Kugel kleiner als das des Wassers sein, obgleich das Eigengewicht des Kupfers größer als des Wassers ist. Man unterscheidet daher hier das mittlere Eigengewicht eines Körpers von dem Eigengewichte seiner Materie.

Man sagt ein Körper ist leichter oder schwerer als Wasser, wenn sein mittleres Eigengewicht kleiner oder größer als das des Wassers ist.

Denkt man sich den Raum, welchen irgend ein fester Körper einnimmt, mit einer Materie von gleichförmiger Dichtigkeit oder mit Wasser angefüllt: so kann man den Schwerpunkt dieses Wasserkörpers, den **Mittelpunkt des Raums** des festen Körpers nennen, um ihn in dem Falle vom Schwerpunkte des Körpers zu unterscheiden, wenn der Körper keine gleichförmige Dichtigkeit hat, und sein Schwerpunkt nicht mit dem Mittelpunkt des Raums zusammen fällt.

Der Mittelpunkt des Raums eines Körpers, in der obigen Bedeutung, ist mit dem **Mittelpunkte der Größe** einer Fläche oder eines Körpers nicht zu verwechseln, weil dieser die Eigenschaft hat, daß gerade Linien oder Ebenen, welche man durch denselben legt, die Fläche oder den Körper in gleich große Theile theilen.

§. 46.

Ein fester Körper sei im Wasser ganz untergetaucht, so leidet er von demselben einen Auftrieb, welcher dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist. Diesem Auftriebe wirkt das Gewicht des Körpers grade entgegen, daher müssen sich gleich große Theile dieser Kräfte einander aufheben.

Das Gewicht des festen Körpers sei $= P$, sein Inhalt oder der Raum, welchen er im Wasser einnimmt $= V$ und das mittlere Eigengewicht desselben $= g$; so ist $P = \gamma . g . V$. Auch ist der Auftrieb des Wassers gegen den ganz eingetauchten Körper $= \gamma . V$ (§. 44.). Nun kann man drei Fälle unterscheiden:

$$P > \gamma . V \text{ oder } g > 1,$$
$$P = \gamma . V \text{ oder } g = 1 \text{ und}$$
$$P < \gamma . V \text{ oder } g < 1.$$

Ist $P > \gamma . V$, so wird der Körper stärker nach unten als nach oben gedrückt; daher wird ein Körper im Wasser sinken, wenn sein Gewicht größer ist, als das Gewicht des verdrängten Wassers, oder wenn sein mittleres Eigengewicht größer als das Eigengewicht des Wassers ist.

Wäre $P = \gamma . V$, so wird der ganz eingetauchte Körper eben so stark nach unten als nach oben gepreßt, und er wird daher in jeder Tiefe unter dem Wasserspiegel schweben, wenn sein Gewicht dem des verdrängten Wassers gleich ist, oder wenn beide einerlei Eigengewicht haben.

Wenn endlich $P < \gamma . V$, so wird der Körper stärker nach oben als nach unten gedrückt, weshalb der ganz eingetauchte Körper, wenn sein mittleres Eigengewicht kleiner als das des Wassers ist, steigen muß. Tritt alsdann ein Theil des Körpers über den Wasserspiegel, so vermindert sich der Auftrieb (§. 44.) und der Körper kann nur dann in Ruhe bleiben, wenn das Gewicht desselben dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist. Von einem solchen Körper, welcher zum Theil über den Wasserspiegel hervorragt, sagt man daß er schwimme.

Hiebei ist noch besonders zu bemerken, daß die mittlere Richtung aller Wasserpressungen durch den Schwerpunkt des verdrängten Wassers und die mittlere Richtung des Körpergewichts, durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Hat nun der eingetauchte Körper eine solche Lage, daß diese beiden Richtungen nicht in einerlei Vertikallinie fallen: so kann auch kein Gleichgewicht unter den entgegengesetzten Kräften entstehen. Sollen daher bei einem schwebenden oder schwimmenden Körper die entgegengesetzten Kräfte einander aufheben oder der Körper in Ruhe bleiben, so muß

I. Das Gewicht des Körpers dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich sein, und

II. Der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in einerlei Vertikallinie liegen.

§. 47.

Von irgend einem festen Körper, welcher schwerer als Wasser ist, sei

P das Gewicht,
V sein Inhalt und
g sein Eigengewicht.

Wird dieser Körper an einem äußerst dünnen Faden in ein Gefäß mit Wasser eingetaucht, so ist der Auftrieb desselben $= \gamma V$ (§. 44.). Ist nun die Kraft, mit welcher man den Faden vertikal aufwärts ziehen muß, damit der Körper in allen Lagen unter dem Wasserspiegel in Ruhe bleibe $= Q$, so muß

$$\text{(I)} \quad Q = P - \gamma V \text{ sein.}$$

Diese Kraft Q pflegt man das Gewicht des Körpers im Wasser zu nennen. Denn wenn an einer genauen gleicharmigen Wage Tafel III. Figur 26. die Schale A derselben unten mit einem Häkchen versehen ist und daran, mittelst eines äußerst dünnen Fadens, der Körper V hängt: so wird das Gewicht Q in der andern Wageschale B mit dem eingetauchten Körper im Gleichgewichte sein.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt

$$\text{(II)}\quad P - Q = \gamma V;$$

aber $P - Q$ ist dasjenige Gewicht, welches der Körper im Wasser verloren hat, und γV das Gewicht des Wassers, welches er verdrängte, folglich verliert ein Körper eben so viel von seinem Gewicht im Wasser, als das Wasser wiegt, welches er verdrängt hat.

Weil (§. 45.) $P = g\gamma V$, also auch $\frac{P}{g} = \gamma V$ ist, so erhält man aus der Verbindung mit (I) das Gewicht des Körpers im Wasser

$$\text{(III)}\quad Q = (g - 1)\gamma V \text{ oder auch}$$

$$\text{(IV)}\quad Q = \frac{g-1}{g} P.$$

Ferner erhält man aus (I) das Gewicht von einem Kubikfuß Wässer

$$\text{(V)}\quad \gamma = \frac{P-Q}{V}$$

oder den Inhalt des Körpers

$$\text{(VI)}\quad V = \frac{P-Q}{\gamma}$$

und endlich aus (IV) das Eigengewicht des Körpers

$$\text{(VII)}\quad g = \frac{P}{P-Q}.$$

Uebrigens ist bei diesen Abwägungen im Wasser vorausgesetzt, daß sich der feste Körper im Wasser nicht auflöse.

§. 48.

Aufgabe. Durch Abwägung das Gewicht des Wassers zu finden, welches ein Körper, der schwerer als Wasser ist, verdrängt.

Auflösung. An die eine Schale der §. 47. beschriebenen Wage hänge man den Körper an einen äußerst dünnen Faden, und auf die andere Schale so viel Gewichte, als zum Gleichgewichte erfordert werden: so geben diese das Gewicht des Körpers in der Luft. Hierauf versenke man den Körper im Wasser, so wird die Schale, woran der Körper hängt, steigen. In diese lege man so viel Gewichte als zum Gleichgewicht erfordert werden: so geben diese das Gewicht des verdrängten Wassers oder den Verlust, welchen der Körper an Gewicht im Wasser leidet.

§. 49.

Zusatz. Welche Rücksichten dergleichen Abwägungen in Bezug auf Thermometer und Barometerstand erfordern, wird im neunten Kapitel umständlich aus einander gesetzt werden. Aber auch dann, wenn nicht die größte Genauigkeit erfordert wird, muß dennoch dafür gesorgt werden, daß der im Wasser versenkte Körper keine Luftblasen enthalte, welches man dadurch vermeiden kann, daß der Körper vor der Einsenkung mit einem kleinen Haarpinsel abgebürstet wird. Finden sich hierauf bei der Versenkung dennoch Luftblasen, so müssen solche mittelst eines feinen Draths hinweggeschafft werden, weil ohne diese Vorsicht das Gewicht des Körpers im Wasser zu klein gefunden wird.

Eben so erfordert die genaue Abwägung eines Körpers in der Luft, daß man sich nicht damit begnügt, das Gewicht dieses Körpers dadurch zu bestimmen, daß man den Körper in die eine Wageschale der gleicharmigen Wage legt, und sein Gewicht demjenigen gleich annimmt, welches man zur Erhaltung des Gleichgewichts in die andere Wageschale gelegt hat. Besser ist es, zuvörderst durch willkührliche Gegengewichte den Körper, welcher sich in der einen Schale befindet, ins Gleichgewicht zu bringen, dann diesen Körper von der Wageschale weg zu nehmen und statt desselben so lange Gewichte aufzulegen, bis die Schale wieder ins Gleichgewicht kommt, und dieses Gewicht als das des Körpers anzunehmen, weil man dadurch das Gewicht desselben unabhängig von den etwanigen Unvollkommenheiten der Wage findet. Man nennt dies Verfahren, die Bestimmung des Gewichts eines Körpers durch Tarirung (Statik. §. 181.).

§. 50.

Aufgabe. Den Inhalt eines Körpers, welcher schwerer als Wasser ist, zu finden.

Auflösung. Für diejenige Temperatur, bei welcher die Untersuchung angestellt wird, sei das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bekannt. Bestimmt man nun das Gewicht des vom Körper verdrängten Wassers (§. 48.) und dividirt dasselbe durch das Gewicht von einem Kubikfuße dieses Wassers: so erhält man den Inhalt dieses Körpers.

Beweis. Nach §. 47. (II) ist $P - Q = R = \gamma V$ also $V = \frac{R}{\gamma}$.

Beispiel. Das Gewicht des vom Körper verdrängten destillirten Wassers bei 15 Grad Reaumür betrage 3 Pfund 8 Loth = 3,25 Pfund, so ist das Gewicht von einem Kubikfuße dieses Wassers = 66 Pfund (§. 5.), also der Inhalt des Körpers $= \frac{3{,}25}{66}$ = 0,04924 Kubikfuß = 85,09 Kubikzoll.

§. 51.

Aufgabe. Den Inhalt eines Hohlmaßes zu finden.

1. Auflösung. Wenn das Hohlmaß mit einem ebenen Rande versehen ist, welcher durch eine ebene, matt geschliffene Glasplatte luft- und wasserdicht bedeckt werden kann; so setze man auf die eine leere Schale einer gleicharmigen Wage, das Hohlmaß nebst der Glasplatte, und beschwere die andere Schale so lange mit Gewichten, bis die Wage ins Gleichgewicht kommt. Dann nehme man das Hohlmaß mit der Glasplatte von der Wage, stelle das Hohlmaß wagerecht, und fülle dasselbe bis zum obersten Rande mit Wasser, nachdem der innere Rand zuvor mit Wasser benetzt war. Sind alle Luftblasen ausgetrieben, so wird hierauf die Glasplatte über den obern

Rand des Gefäßes so geschoben, daß sie, ohne eine Luftblase zurück zu lassen, den Wasserspiegel berührt. Hierauf muß das Gefäß und die Platte, so weit sie frei liegt, sorgfältig abgetrocknet und in die vorige Lage auf die Wageschale gesetzt werden. Nun werden noch so viele Gewichte auf die zweite Wageschale gelegt, bis solche mit dem Wasser im Gleichgewichte sind. Die zuletzt aufgelegten Gewichte geben das Gewicht des Wassers im Hohlmaß, und wenn man dieses Gewicht durch das Gewicht eines Kubikfußes desjenigen Wassers dividirt, welches sich im Hohlmaße befindet, so giebt der Quotient den Kubikinhalt des Hohlmaßes.

2. Auflösung. Wenn der obere Rand des Gefäßes nicht so vollkommen eben ist, daß er mit einer Glasplatte luft- und wasserdicht bedeckt werden kann, so läßt sich folgendes Verfahren anwenden. Zuerst wird das Hohlmaß auf die Wageschale gesetzt, und durch Gegengewichte ins Gleichgewicht gebracht. Hierauf das Hohlmaß größtentheils mit Wasser angefüllt, das Gewicht dieses Wassers durch genaue Abwägung ermittelt, besonders angemerkt und alsdann das Hohlmaß mit dem darin befindlichen Wasser von der Wage abgenommen, auf ein festes Gestell, nicht weit von der Wage gesetzt, und mittelst einer Setzwage der oberste Rand des Hohlmaßes genau wagerecht gestellt. Ein zweites mit Wasser angefülltes Gefäß mit einem zum Ausschöpfen des Wassers bestimmten Löffel wird nun auf der leeren Wage ins Gleichgewicht gebracht, und alsdann, mittelst des Löf-

fels, so lange Wasser in das feststehende Hohlmaß gegossen, bis der Wasserspiegel des Hohlmaßes mit seinem obersten Rande genau gleiche Höhe hat, wovon man sich dadurch überzeugen kann, daß man über einzelne Theile des Randes und des Wasserspiegels nach den gegenüberstehenden hin sieht. Ist nun der Löffel wieder in das Gefäß auf der Wageschale gebracht, so werden neben dem Gefäße so lange Gewichte zugelegt, bis die Wage wieder ins Gleichgewicht kommt, da dann diese zugelegten Gewichte das Gewicht des aus dem Gefäße geschöpften Wassers bestimmen. Nun addire man dieses Gewicht zu dem vorhin gefundenen desjenigen Wassers, welches sich im Hohlmaße befand, als es auf der Wageschale stand und dividire die Summe dieser Gewichte durch das Gewicht von einem Kubikfuße des angewandten Wassers: so giebt der Quotient den Kubikinhalt des Hohlmaßes.

Bei diesem Verfahren wird vorausgesetzt, daß beim Ausschöpfen kein Wasser verloren geht.

§. 52.

Aufgabe. Das Eigengewicht eines festen Körpers zu finden, welcher schwerer als Wasser ist.

Auflösung. Man bestimme das Gewicht des Körpers sowohl als das Gewicht des Wassers, welches der Körper bei der gänzlichen Eintauchung verdrängte (§. 48.), dividire dieses erste Gewicht durch das zuletzt gefundene, so erhält man das Eigengewicht des Körpers. Hiebei wird vorausgesetzt, daß der Körper sowohl als das Wasser einerlei Temperatur haben, und das für diese Temperatur das Eigengewicht des Körpers gesucht wird.

Beweis. Das Gewicht des Körpers sei P, sein Inhalt V und sein Eigengewicht g, so ist (§. 45.) $P = g\gamma V$. Nun ist das Gewicht des Wassers, welches der Körper verdrängt, oder $R = \gamma V$ (§. 47. II.) daher $g = \frac{P}{R}$.

§. 53.

Zusatz. Bei der beschriebenen Auflösung ist vorausgesetzt, daß der Körper, dessen Eigengewicht bestimmt werden soll, weder Wasser einsauge, wie Kreide, Sandstein, trocknes Holz u. s. w., noch daß er im Wasser zerfalle oder aufgelößt werde, wie gewisse Thonarten, Salze u. s. w. Denn man hat sehr wohl das Eigengewicht der Materie oder der dichten Theile eines Körpers von dem mittleren Eigengewichte des ganzen Körpers zu unterscheiden. Sollte ein Körper, dessen mittleres Eigengewicht man sucht, Wasser einsaugen: so kann man sich alsdann einer andern Flüssigkeit, welche in den Körper nicht eindringt, zum Abwägen bedienen; auch kann man, wie dies gewöhnlich bei Hölzern geschieht, einen leicht ausmeßbaren Körper verfertigen lassen, und das gefundene Gewicht desselben durch seinen Inhalt dividiren, um das mittlere Eigengewicht zu finden (§. 45.). Sucht man hingegen das Eigengewicht der dichten Theile oder der Materie eines Körpers, so muß das Wasser alle Zwischenräume desselben ausfüllen können. So wird

z. B. ein Körper von Bimsstein auf dem Wasser schwimmen, und daher sein mittleres Eigengewicht kleiner als das des Wassers sein; wogegen der zerstoßene Bimsstein im Wasser untersinkt, also die Materie des Bimssteins ein größeres Eigengewicht als Wasser hat. Ueberhaupt ist zu bemerken, daß bei allen dergleichen Abwägungen darauf gesehen werden muß, daß die Flüssigkeit, in welche die Körper eingetaucht werden, keine chemische Auflösung bewirke, weil in diesem Falle gewöhnlich ganz andere Resultate erhalten werden.

§. 54.

Aufgabe. Das Eigengewicht eines festen Körpers zu finden, welcher leichter als Wasser ist.

Auflösung. Man wähle irgend einen schweren festen Körper, welcher mit dem leichtern verbunden im Wasser untersinkt. An den feinen Faden der Wageschale (§. 47.) befestige man den schwerern Körper, und bringe mittelst Gegengewichte die Wage ins Gleichgewicht. Hierauf lege man den leichtern Körper in die leere Schale und bringe die Wage mit beiden Körpern ins Gleichgewicht: so erhält man hiedurch das Gewicht des leichtern Körpers in der Luft. Versenkt man alsdann den schwerern Körper im Wasser, so wird die Schale mit den Gewichten sinken, und man kann durch Verminderung dieser Gewichte die Wage wieder ins Gleichgewicht bringen. Nun nehme man den leichtern Körper aus der Schale, verbinde solchen mit dem schwerern, und senke beide ins Wasser: so steigt die leere Schale so lange, bis man in dieselbe so viel Gewichte gelegt hat, als das Wasser wiegt, welches der leichtere Körper verdrängte (§. 47.). Dividirt man mit diesem zuletzt gefundenen Gewicht in das vorher gefundene Gewicht des leichtern Körpers in der Luft, so erhält man das Eigengewicht des leichtern Körpers.

Beispiel. Der leichtere Körper wiege in der Luft 13 Loth und nachdem derselbe aus der Schale der im Gleichgewicht befindlichen Wage weggenommen, mit dem schwerern Körper verbunden ins Wasser gesenkt worden, habe man 25 Loth auf die leere Schale bringen müssen, um das Gleichgewicht wieder her zu stellen: so ist das gesuchte Eigengewicht $= \frac{13}{25} = 0{,}52$.

§. 55.

Zusatz. Der schwerere Körper kann ausgehöhlt und mit einem durchlöcherten Deckel versehen sein, so läßt sich der leichtere Körper mit Bequemlichkeit in denselben bringen oder heraus nehmen, wenn nur beobachtet wird, daß beim Einsenken der leichtere Körper von allen Seiten mit Wasser umgeben ist. Man kann auch diesen ausgehöhlten Körper dazu gebrauchen, das eigenthümliche Gewicht solcher Körper zu finden, welche aus mehrern kleinen Stücken bestehen, und leichter oder schwerer als Wasser sind.

§. 56.

Aufgabe. Das Eigengewicht einer jeden flüssigen Masse zu finden.

1. Auflösung. Man wähle einen festen Körper, welcher in der gegebenen flüssigen Masse untersinkt. Ist das Eigengewicht g des festen Körpers bekannt, so bestimme man vorher sein Gewicht P in der Luft, und dann das Gewicht R′ von der flüssigen Masse, welches er beim Einsenken in dieselbe verdrängt (§. 48.); so ist, wenn g′ das Eigengewicht der flüssigen Masse bezeichnet,

$$g' = \frac{g R'}{P}.$$

2. Auflösung. Ist das Eigengewicht des Körpers, welcher in der flüssigen Masse untersinkt, nicht bekannt: so suche man das Gewicht R des Wassers und das Gewicht R′ der flüssigen Masse, welches der Körper beim Einsenken verdrängt: so ist das Eigengewicht der flüssigen Masse oder

$$g' = \frac{R'}{R}.$$

3. Auflösung. Eine gläserne mit eingeriebenem Glasstöpsel versehene Flasche werde auf einer gleicharmigen Wage ins Gleichgewicht gebracht. Die abgenommene Flasche werde hierauf mit destillirtem Wasser bis zum Ueberlaufen gefüllt, der Stöpsel eingedreht, das übergelaufene Wasser rein abgewischt und zum zweiten Male auf die Schale gesetzt, so daß man durch hinzugelegte Gewichte das Gewicht des Wassers, welches in der Flasche enthalten ist, bestimmen kann. Wird nun die Flasche geleert, ausgetrocknet und alsdann mit der gegebenen Flüssigkeit eben so wie vorhin angefüllt: so läßt sich bei einer neuen Abwägung das Gewicht dieser eingeschlossenen Flüssigkeit fin-

finden. Dividirt man nun dieses Gewicht durch das gefundene Gewicht des Wassers, so giebt der Quotient das gesuchte Eigengewicht der Flüssigkeit.

1. Beweis für die erste Auflösung. Wäre V der Inhalt des eingesenkten Körpers, so ist $P = g\gamma V$, aber $R' = g'\gamma V$ (§. 7.) daher $g' = \frac{gR'}{P}$.

2. Beweis für die zweite Auflösung. Weil $R' = g'\gamma V$ und $R = \gamma V$, so wird hieraus $g' = \frac{R'}{R}$.

3. Beweis für die dritte Auflösung. Von der Flasche, wenn sie mit dem Stöpsel verschlossen ist, sei der Inhalt $= v$, das Gewicht des darin enthaltenen Wassers $= p$ und der flüssigen Masse $= p'$, so ist $p = \gamma v$ und $p' = g'\gamma v$ daher $g' = \frac{p'}{p}$.

§. 57.

Aufgabe. Das Eigengewicht solcher Körper zu finden, welche sich im Wasser auflösen.

1. Auflösung. Man wähle eine Flüssigkeit, in welcher der Körper untersinkt, ohne sich aufzulösen. Das Eigengewicht g' dieser Flüssigkeit ist entweder bekannt oder kann leicht (§. 56.) bestimmt werden. Nun suche man das Gewicht P des Körpers in der Luft und das Gewicht R' der Flüssigkeit, welches er beim Einsinken verdrängt (§. 48.), so findet man das Eigengewicht g des Körpers

$$g = \frac{g'P}{R'}.$$

2. Auflösung. Mittelst der §. 56. beschriebenen Flasche mit eingeriebenem Glasstöpsel, bestimme man zuvor das Eigengewicht g' der Flüssigkeit, und bringe

die damit angefüllte Flasche auf einer Wage ins Gleichgewicht. Nun legt man den Körper neben das Glas auf die Schale und bringt die Wage ins Gleichgewicht: so ist dadurch das Gewicht P des Körpers bekannt. Man nehme hierauf Glas und Körper ab, bringe den Körper in das gefüllte Glas, und wenn sich an dem Körper und im Glase keine Luftblasen mehr befinden, so drehe man den Stöpsel ein, und setze dann das abgetrocknete Glas wieder auf die leere Wageschale, welche nothwendig steigen muß, weil das Gewicht in derselben um die vom Körper verdrängte Flüssigkeit vermindert ist. Legt man nun neben das Glas so viel Gewichte, als zum Gleichgewichte erforderlich sind: so geben solche das Gewicht R' der vom Körper verdrängten Flüssigkeit, und man erhält wie vorhin das Eigengewicht des Körpers oder $g = \frac{g' P}{R'}$.

Hiebei ist übrigens vorausgesetzt, daß der Körper so klein ist, oder aus so kleinen Stücken besteht, welche durch die Oeffnung des Glases gehen.

Beweis. Es ist $P = g\gamma V$ und $R' = g'\gamma V$, wenn V den Inhalt des Körpers bezeichnet, daher $g = \frac{g' P}{R'}$.

§. 58.

Zusatz. Sucht man das eigenthümliche Gewicht von den dichten Theilen oder von der Materie eines Körpers, so ist besonders das zuletzt beschriebene Verfahren hiezu sehr bequem, weil man nur den Körper vorher in so kleine Theile zerlegen darf, damit derselbe keine verschlossene Zwischenräume behält. Erlaubt es die Beschaffenheit der abzuwägenden Materie, so kann man sich auch alsdann des Wassers bedienen, in diesem Falle ist $g' = 1$ und man hat $g = \frac{P}{R'}$.

Herr Prof. Fischer in seinem vortrefflichen Lehrbuch der mechanischen Naturlehre 1. Theil, Berlin 1819, S. 63. empfiehlt den Gebrauch der Flasche mit dem eingeriebenen Glasstöpsel zu dergleichen Abwiegungen. Homberg bediente sich einer solchen Flasche mit engem Halse, aber ohne Stöpsel, zur Bestimmung des eigenthümlichen Gewichts mehrerer Flüssigkeiten; m. s. die Mém. de l'acad. de Paris, Année 1699. 8. in der Abhandlung: Observation sur la quantité exacte des sels volatils acides contenus dans les differens esprits acides. p. 65. Allein die Anwendung eines Glasstöpsels scheint mehr Genauigkeit zu gewähren, dessen sich auch schon Leutmann bediente. Comment. Petropol. Tom. V. ad annos 1730 — 31. p. 273 — 76. Ad gravitatis liquorum differentiam cognoscendam. Auctore *J. G. Leutmann.*

Man kann auch anstatt des Glasstöpsels eine matt geschliffene Glasplatte gebrauchen, welche auf den obern matt geschliffenen Rand vom Halse der Flasche luft- und wasserdicht angerieben werden kann. Eine dergleichen Flasche soll in der Folge den Namen einer hydrostatischen Flasche erhalten.

Sechstes Kapitel.
Von der Tiefe der Einsenkung schwimmender Körper.

§. 59.

In der Voraussetzung, daß bei den Untersuchungen in diesem Kapitel der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers, in einer Vertikallinie liege, so wird jeder auf dem Wasser schwimmende Körper in Ruhe bleiben, wenn das Gewicht des verdrängten Wassers dem Gewichte des Körpers gleich ist (§. 44.). Ist daher P das Gewicht des schwimmenden Körpers und v der Inhalt des eingetauchten Theils desselben, oder des verdrängten Wassers, so muß $P = \gamma v$ sein, und man erhält hieraus

$$\text{(I)} \quad v = \frac{P}{\gamma}.$$

Wäre g das mittlere Eigengewicht des schwimmenden Körpers und V sein Inhalt, so ist $P = g\gamma V$ also der Inhalt des eingetauchten Theils oder

$$\text{(II)} \quad v = gV.$$

Sollte der schwimmende Körper ausgehöhlt und dann noch besonders belastet sein, wie bei Schiffen, so kann man sich das Gewicht P aus zwei Theilen bestehend vorstellen, wovon der erste P' das Gewicht des schwimmenden Gefäßes und P'' die Belastung oder Ladung bezeichnet. Man erhält alsdann $\gamma v = P' + P''$. Ist daher in einem besondern Fall das Gewicht P' des Gefäßes und die Größe seiner Einsenkung oder v gegeben, so kann man daraus leicht die Größe der Ladung finden, denn es ist

$$\text{(III)}\quad P'' = \gamma v - P'.$$

§. 60.

Aufgabe. Die Gestalt und das Gewicht eines Schiffs oder Gefäßes sind bekannt, auch ist die Tiefe der Einsenkung gegeben; man soll daraus die Größe der Ladung bestimmen.

Auflösung. Weil die Gestalt des eingetauchten Theils vom Schiff gegeben ist, so sind sämmtliche Abmessungen desselben bekannt, woraus leicht der Inhalt v des eingetauchten Theils berechnet werden kann. Diese Berechnung wird selbst bei einer unregelmäßigen Gestalt des Schiffs wenig Schwierigkeiten haben, weil man alsdann mittelst paralleler Querschnitte (Statik §. 152.), v so genau, als es nur erfordert wird, finden kann. Ist nun P' das Gewicht des Schiffs, so erhält man das Gewicht der Ladung, oder $P'' = \gamma v - P'$.

Wäre z. B. GOPQ Tafel III. Figur 28. der Längendurchschnitt durch die Mitte eines Schiffs (Section diametrale) und AH die Linie, in welcher der Wasserspiegel das Schiff schneidet, also AHOG der Längendurchschnitt des eingetauchten Theils: so ziehe man auf AH den Perpendikel ao, theile denselben in eine beliebige grade Anzahl gleicher Theile, hier in sechs, und ziehe durch jeden der Theilungspunkte mit AH, die Parallelen BI, CK, DL, EM, FN. Ferner sei $A'H'$ mit AH parallel und jede Fläche wie $A'A''H''A'$ entspreche dem halben wagerechten Querschnitte, welcher durch AH geht, so daß $F'e'a'N'$ der unterste wagerechte Querschnitt ist, welcher zu FN gehört, weil hier angenommen wird, daß das Schiff unten rund, also der durch o gehende Querschnitt Null ist. Man setze den Flächeninhalt des Querschnitts durch $AH = A$, durch $AB = B$ ...., durch $NF = F$ und durch $GO = G = o$: so läßt sich der Inhalt derselben (St. §. 126.) finden. So ist z. B. für den Querschnitt $F'e'N'$, wenn man $F'N'$ in eine grade Anzahl gleicher Theile $N'b$, bc, cd.... theilt, und in den Theilungspunkten die Perpendikel $N'a'$, bb', cc', ... errichtet, alsdann $N'b = bc = \ldots = \alpha'$, ferner $N'a' = a$, $bb' = b$, $cc' = c \ldots$ setzt,

$$F = \tfrac{1}{3}\alpha'(a+4b+2c+4d+2e+4f+2g+4h+o).$$

Sind hiernach die Werthe für A, B, C, D, E, F bestimmt, so findet man (Statik §. 152.) den halben Inhalt des eingetauchten Theils, wenn $\tfrac{1}{6}.ao = \alpha$ gesetzt wird

$$= \tfrac{1}{3}\alpha(A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F + G),$$

und wenn man bemerkt, daß $G = o$ ist, so findet man den doppelten Inhalt oder

$$v = \tfrac{2}{3}\alpha(A + 4B + 2C + 4D + 2E + 4F),$$

und hieraus die Ladung oder

$$P'' = \gamma v - P'.$$

§. 61.

Aufgabe. Die Tiefe der Einsenkung eines prismatischen Körpers zu finden.

Auflösung. Die Grundfläche ABC Taf. IV. Figur 27. des prismatischen Körpers sei $= F$, sein Gewicht $= P$ und die Tiefe der Einsenkung $AD = BE = x$, so ist der Inhalt des eingetauchten Theils oder $v = F.x$ daher §. 59. (I) $v = F.x = \frac{P}{\gamma}$ und hieraus

$$x = \frac{P}{\gamma . F}.$$

Beispiel. Der prismatische Körper wiege 1000 Pfund und seine Grundfläche enthalte 12 □ Fuß, so findet man, wenn $\gamma = 66$ Pfund gesetzt wird, die Tiefe der Einsenkung oder

$$x = \frac{1000}{66 . 12} = 1{,}2626 \text{ Fuß}.$$

§. 62.

Zusatz. Wäre das Gewicht P'' des prismatischen Gefäßes nebst der Tiefe h gegeben, bis zu welcher es einsinken soll: so wird $v = hF$, und man findet die hierzu erforderliche Last $P'' = \gamma hF - P'$.

Beispiel. Das Gefäß, dessen Grundfläche 12 □ Fuß hält, wiege 300 Pfund und soll bis auf 2 Fuß tief einsinken: so ist $F = 12$, $h = 2$ und $P' = 300$, daher findet man die erforderliche Last

$$P'' = 66 . 2 . 12 - 300 = 1284 \text{ Pfund}.$$

§. 63.

Aufgabe. Die Tiefe der Einsenkung eines Pontons zu finden.

Auflösung. Des Pontons AadcCB Tafel IV. Figur 31. Boden abcd sei ein Rechteck, und der obere Rand ABCD desselben ebenfalls ein Rechteck, welches mit dem Boden parallel ist, so daß die übrigen vier Seitenflächen Trapeze bilden, von welchen gewöhnlich die obern Seiten größer als die untern sind. Ferner sei KLMN ein auf der Länge des Pontons senkrechter Querschnitt, und MH auf KN senkrecht: so ist MH die ganze Höhe des Pontons.

Man setze $AB = CD = A$, $BC = AD = B$; $ab = cd = a$, $bc = ad = b$; $MH = h$, so kann man sich den ganzen Ponton aus zwei dreieckigten schief abgeschnittenen Prismen AadcbB und ADdcCB bestehend vorstellen, deren senkrechte Querschnitte die Dreiecke LMN und KLN vorstellen. Nun ist der Inhalt vom Dreieck $LMN = \frac{bh}{2}$ und von $KLN = \frac{Bh}{2}$, daher findet man den Inhalt von jedem dieser Prismen (Statik §. 157.), oder

$$\text{Pr. } AadcbB = \frac{A + 2a}{3} \cdot \frac{bh}{2}$$

$$\text{Pr. } ADdcCB = \frac{2B + b}{3} \cdot \frac{Bh}{2}$$

und wenn V den Inhalt des ganzen Pontons bezeichnet

$$V = \tfrac{1}{6}h[b(A + 2a) + B(2A + a)].$$

Wird dieser Ponton im Wasser eingesenkt, so sei $A'B'C'D'$ die mit abcd parallele Ebene, in welcher der Wasserspiegel die Seitenwände schneidet. Man setze die Tiefe der Einsenkung oder $MP = x$, die Seiten $A'B' = C'D' = \alpha$, $B'C' = A'D' = \beta$ und den

Inhalt des eingetauchten Theils $A'B'C'D'dbca = v$, so erhält man wie vorhin

$$v = \tfrac{1}{6}x\,[b(\alpha + 2a) + \beta(2\alpha + a)].$$

Nun verhält sich

$$h : x = B - b : \beta - b \text{ und ebenso}$$

$$h : x = A - a : \alpha - a;$$

hieraus erhält man

$$\beta = \frac{x(B-b)}{h} + b \text{ und } \alpha = \frac{x(A-a)}{h} + a.$$

Diese Werthe mit α und β in der vorstehenden Gleichung vertauscht, geben

$$v = \tfrac{1}{6}x\left[b\left(\frac{x(A-a)}{h} + a\right) + \left(\frac{x(B-b)}{h} + b\right)\left(\frac{2x(A-a)}{h} + 3a\right)\right],$$

oder wenn man die Parenthesen auflöst und die Ausdrücke abkürzt

$$v = \frac{(A-a)(B-b)}{3h^2}x^3 + \frac{a(B-b) + b(A-a)}{2h}x^2 + abx.$$

Wäre nun P das Gewicht des Pontons sammt seiner Ladung, so ist $v = \frac{P}{\gamma}$ also

$$\frac{(A-a)(B-b)}{3h^2}x^3 + \frac{a(B-b)+b(A-a)}{2h}x^2 + abx = \frac{P}{\gamma} \quad [I]$$

und hieraus

$$x^3 + \frac{a(B-b)+b(A-a)}{2(A-a)(B-b)}.3hx^2 + \frac{3abh^2}{(A-a)(B-b)}x - \frac{3h^2P}{\gamma(A-a)(B-b)} = 0,$$

so daß mittelst dieser kubischen Gleichung, welche unter ihren möglichen Wurzeln wenigstens eine positive haben muß (H. Analys. §. 101.), die Tiefe der Einsenkung oder x gefunden werden kann. Uebrigens darf x nie größer als h sein.

Beispiel. Es sei für irgend einen Ponton $A = 18$, $B = 5$, $a = 12$, $b = 4$ und $h = 3$ Fuß. Ferner betrage die gesammte Last des Pontons 6000 Pfund, so erhält man, wenn $\gamma = 66$ gesetzt wird,

$$x^3 + \frac{12+24}{2.6} \cdot 3 \cdot 3 x^2 + \frac{3.12.4.9}{6} x - \frac{3.9.6000}{66.6} = 0 \text{ oder}$$

$$x^3 + 27 x^2 + 216 x - 409{,}09 = 0.$$

Für $x = 1$ ist der Rest $= - 165{,}09$.

Für $x = 2$ ist der Rest $= + 138{,}91$.

Nun ist $\frac{165{,}09}{165{,}09 + 138{,}91} = 0{,}54$, daher erhält man 1,5 als einen ungefähren Werth für x.

Will man x noch genauer finden, so erhält man (H. Analys. §. 222.) nahe genug

$$x = - \frac{1{,}5^3 + 27 \cdot 1{,}5^2 + 216 \cdot 1{,}5 - 409{,}09}{5 \cdot 1{,}5^2 + 54 \cdot 1{,}5 + 216} = 1{,}569,$$

daher ist die Tiefe der Einsenkung oder $x = 1{,}569$ Fuß $= 1$ Fuß $6\frac{4}{5}$ Zoll.

§. 64.

1. Zusatz. Wäre das Rechteck ABCD Tafel IV. Figur 31., welches der obere Rand des Pontons bildet, dem Rechtecke abcd, welches der Boden bildet, ähnlich: so ist das Ponton eine abgekürzte Pyramide, und es verhält sich

$$a : b = A : B, \text{ daher ist}$$

$$B = \frac{bA}{a} \text{ also } B - b = \frac{b(A-a)}{a}.$$

Diesen Werth in die Gleichung

$$x^3 + \frac{a(B-b)+b(A-a)}{2(A-a)(B-b)} 3hx^2 + \frac{3abh^2}{(A-a)(B-b)} x - \frac{3h^2P}{\gamma(A-a)(B-b)} = 0$$

gesetzt, giebt

$$x^3 + \frac{3ah}{A-a} x^2 + \frac{3a^2h^2}{(A-a)^2} x + \frac{3ah^2P}{\gamma b(A-a)^2} = 0 \text{ oder}$$

$$x^3 + \frac{3ah}{A-a} x^2 + \frac{3a^2h^2}{(A-a)^2} x + \frac{a^3h^3}{(A-a)^3} = \frac{3ah^2P}{\gamma b(A-a)^2} + \frac{a^3h^3}{(A-a)^3} \text{ oder}$$

$$\left(x + \frac{ah}{A-a}\right)^3 = \frac{3ah^2P}{\gamma b(A-a)^2} + \frac{a^3h^3}{(A-a)^3},$$

entwickelt man hieraus den Werth von x, so erhält man die Tiefe der Einsenkung, oder

$$x = \frac{-ab + \sqrt[3]{\left[a^3 h^3 + 3ah^2 P \frac{A-a}{\gamma b}\right]}}{A-a}$$

Beispiel. Es sei $A = 18$, $a = 12$, $b = 4$, $h = 3$ und $P = 6000$, so findet man die Tiefe der Einsenkung, oder

$$x = \frac{-36 + \sqrt[3]{\left(1728.27 + 3.12.9.6000 \cdot \frac{6}{66.4}\right)}}{6} = 1{,}492 \text{ Fuß}$$

$= 1$ Fuß $5\frac{9}{10}$ Zoll.

§. 65.

2. Zusatz. Stehen die langen Seitenwände des Pontons senkrecht auf dem Boden (wie bei den Fähren auf der Elbe, Weichsel u. s. w.), so wird $B = b$ also $B - b = 0$. Diesen Werth in die Gleichung [I] §. 63. gesetzt, giebt

$$\frac{b(A-a)}{2h} x^2 + abx = \frac{P}{\gamma} \text{ oder}$$

$$x^2 + \frac{2ah}{A-a} x - \frac{2hP}{\gamma b(A-a)} = 0.$$

Hieraus erhält man die Tiefe der Einsenkung, oder

$$x = \frac{-ab + \sqrt{\left(a^2 h^2 + 2hP \frac{A-a}{\gamma b}\right)}}{A-a}.$$

Beispiel. Für $A = 18$, $a = 12$, $b = 4$, $h = 5$ und $P = 6000$ findet man die Tiefe

$$x = \frac{-36 + \sqrt{\left(1296 + 36000 \cdot \frac{6}{66.3}\right)}}{6} = 2{,}141 \text{ Fuß}$$

$= 2$ Fuß $1\frac{7}{10}$ Zoll.

§. 66.

Aufgabe. Die Tiefe der Einsenkung eines nach seiner Länge auf dem Wasser schwimmenden Cylinders zu finden.

Auflösung. Es sei AEB Tafel IV. Figur 32. der Querschnitt des Cylinders, DE der Wasserspiegel, also der Abschnitt AEDA im Wasser eingetaucht. Auf DE sei der Halbmesser CA senkrecht, und für den eingetauchten Bogen DAE sei der Mittelpunktswinkel DCE $= \varphi$; wo φ zugleich den zugehörigen Bogen für den Halbmesser 1 bezeichnen kann. Ist nun P das Gewicht des Cylinders, a seine Länge und $r =$ AC sein Halbmesser, so erhält man den Inhalt des Abschnitts AEDA $= \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin\varphi)$ also den Inhalt des eingetauchten Theils oder

$$v = \tfrac{1}{2} a r^2 (\varphi - \sin\varphi) = \frac{P}{\gamma} \text{ (§. 59.) daher}$$

$$\text{(I)} \quad \varphi - \sin\varphi = \frac{2P}{\gamma a r^2}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks läßt sich ein Näherungswerth für den Winkel φ durch wiederholte Versuche finden. Ist alsdann die Tiefe der Einsenkung AF $= x$, so erhält man CF $=$ CE $\cos\frac{1}{2}\varphi$ oder $r - x = r\cos\frac{1}{2}\varphi$ und hieraus

$$\text{(II)} \quad x = r(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi).$$

§. 67.

Zusatz. Ein jeder Versuch wird die Ueberzeugung geben, wie mühsam und weitläufig es ist, wenn $\frac{2P}{\gamma a r^2}$ in Zahlen gegeben worden, daraus mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln, einen auch nur einigermaßen nahen Werth Φ zu finden, für welchen $\Phi - \sin\Phi$ $= \frac{2P}{\gamma a r^2}$ wird. Um daher das Aufsuchen dieses Werths zu erleichtern, wenn $\frac{2P}{\gamma a r^2}$ gegeben ist, berechne man vorläufig einige Werthe für $\Phi - \sin\Phi$, welche $\frac{2P}{\gamma a r^2}$ nahe kommen. Folgende Tafel giebt eine Uebersicht für verschiedene dieser Werthe.

Φ Grade	$\Phi - \sin\Phi$	Φ Grade	$\Phi - \sin\Phi$	Φ Grade	$\Phi - \sin\Phi$
10	0, 000 885	120	1, 228 370	230	4, 780 302
20	0, 007 046	130	1, 502 884	240	5, 054 816
30	0, 023 599	140	1, 800 673	250	5, 303 016
40	0, 055 344	150	2, 117 994	260	5, 522 664
50	0, 106 620	160	2, 450 507	270	5, 712 389
60	0, 181 172	170	2, 793 412	280	5, 871 730
70	0, 282 038	180	3, 141 593	290	6, 001 147
80	0, 411 456	190	3, 489 774	300	6, 102 013
90	0, 570 796	200	3, 832 679	320	6, 227 841
100	0, 760 521	210	4, 165 191	340	6, 276 140
110	0, 980 170	220	4, 482 512	360	6, 283 185

Aus dieser Tafel übersieht man sogleich, daß $\frac{2P}{\gamma a r^2}$ nie größer als 6,283185 werden kann, weil sonst der Cylinder untersinkt. Hat man nun für Φ einen ungefähren Werth α gefunden, welcher kleiner als Φ ist: so setze man $\Phi = \alpha + \omega$. Kann alsdann der Werth ω nahe genug angegeben werden, so ist Φ bekannt. Nun ist

$$\frac{2P}{\gamma a r^2} = \Phi - \sin\Phi = \alpha + \omega - \sin(\alpha + \omega)$$

oder (H. A. §. 194. 1. Beisp.)

$$\frac{2P}{\gamma ar^2} = \alpha + \omega - \sin\alpha - \omega\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{2}\omega^2 + \frac{\cos\alpha}{6}\omega^3 - \frac{\sin\alpha}{24}\omega^4 - \frac{\cos\alpha}{120}\omega^5 + \ldots$$

oder $\frac{2P}{\gamma ar^2} - (\alpha - \sin\alpha) = A$ gesetzt,

$$A = (1-\cos\alpha)\omega + \frac{\sin\alpha}{2}\omega^2 + \frac{\cos\alpha}{6}\omega^3 - \frac{\sin\alpha}{24}\omega^4 - \frac{\cos\alpha}{120}\omega^5 + \ldots$$

Für diese Reihe findet man (H. A. §. 298.) einen Näherungswerth

$A = \frac{(1-\cos\alpha)^2\omega}{(1-\cos\alpha) - \frac{1}{2}\sin\alpha.\omega}$ und hieraus

$\omega = \frac{2A}{A\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + 2(1-\cos\alpha)}$ oder (H. A. §. 146. [60])

$$\omega = \frac{2A}{A\cot\frac{1}{2}\alpha + 2(1-\cos\alpha)}.$$

Ist alsdann ω bekannt, so erhält man nahe genug $\varphi = \alpha + \omega$.

Beispiel. Es sei $P = 600$, $a = 9$ und $r = 1$, so erhält man $\frac{2P}{\gamma ar^2} = \frac{2.600}{66.9} = 2{,}0202020$.

Nun ist für $\alpha = 145$ Grad, der Bogen $\alpha = 2{,}5307274$; $\sin\alpha = 0{,}5735764$; $\cos\alpha = -0{,}8191521$ und $\cot\frac{1}{2}\alpha = 0{,}3152988$, also $\alpha - \sin\alpha = 1{,}9571510$ daher $\frac{2P}{\gamma ar^2} - (\alpha - \sin\alpha) = 0{,}0630510 = A$.

Ferner ist $1 - \cos\alpha = 1{,}8191521$ daher

$$\omega = \frac{2.0{,}0630510}{0{,}063051.0{,}3152988 + 2.1{,}8191521} = 0{,}0344712.$$

Hiernach wird der Bogen $\varphi = \alpha + \omega = 2{,}5651986$ wozu ein Winkel von 146 Grad $58\frac{1}{2}$ Minuten stimmt.

Für $\varphi = 146^\circ\ 58\frac{1}{2}'$ ist

$\varphi - \sin\varphi = 2{,}0201929$, welches dem gefundenen Werthe 2,020202 nahe genug kommt.

Will man nun die Tiefe der Einsenkung wissen, so wird

$$x = 1 - \cos 73^\circ\ 29' = 0{,}7157 \text{ Fuß.}$$

§. 68.

Aufgabe. Von einem Gefäß oder Schiff ADB FZA Tafel IV. Figur 33. sei der obere wagerechte Rand ADBE eine Ellipse, AB die große und DE die kleine Axe. Die vertikalen Durchschnitte AZFB und EYFD durch diese Axen sollen ebenfalls halbe Ellipsen sein, auch jeder wagerechte Querschnitt wie YZY'Z' eine Ellipse bilden. Man sucht die Tiefe der Einsenkung dieses Gefäßes.

Auflösung. Es sei $AC = CB = a$, $DC = CE = b$ und des Körpers Axe $CF = c$. Nun ist der Querschnitt YZY'Z', in welchem der Wasserspiegel den eingesenkten Körper schneidet, eine Ellipse, deren Mittelpunkt M in der Axe CF liegt. Man setze $FM = x$, $MY = MY' = y$, $MZ = MZ' = z$, so erhält man nach den bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte für die Ellipse DFE, $y^2 = \frac{b^2}{c^2}(2cx - x^2)$ und für die Ellipse AZFB, $z^2 = \frac{a^2}{c^2}(2cx - x^2)$, also $yz = \frac{ab}{c^2}(2cx - x^2)$, daher ist der Querschnitt $YZY'Z' = \pi yz$

$= \frac{\pi ab}{c^2}(2cx - x^2)$.

Das Differential des Körpers ZFZ'YZY' ist =

$$\pi yz . \partial x = \frac{\pi ab}{c^2}(2cx - x^2)\partial x$$

daher wenn v den Inhalt des Körpers ZFZ′ YZY′ oder des eingetauchten Theils bezeichnet, so erhält man

$$v = \int \frac{\pi a b}{c^2}(2cx - x^2)\partial x = \frac{\pi a b}{c^2}(c x^2 - \tfrac{1}{3}x^3),$$

wo keine Constante hinzukommt, weil v mit $x = 0$ verschwindet. Nun ist das Gewicht des Körpers oder $P = \gamma v$ daher

$$P = \frac{\pi \gamma a b}{c^2}(c x^2 - \tfrac{1}{3}x^3) \text{ oder}$$

$$(1) \quad x^3 - 3cx^2 + \frac{3c^2 P}{\pi \gamma a b} = 0$$

und man kann durch Auflösung dieser kubischen Gleichung die Tiefe der Einsenkung oder x bestimmen.

Beispiel. Es sei $P = 15000$, $a = 10$, $b = 4$, $c = 3$, so erhält man $x^3 - 9x^2 + 9{,}762$.
Für $x = 1$ ist der Rest $= + 1{,}762$.
Für $x = 2$ ist der Rest $= - 18{,}238$, daher
$\frac{1{,}762}{1{,}762 + 18{,}238} = 0{,}08$, folglich die gesuchte Tiefe der Einsenkung oder $x = 1{,}08$ Fuß.

Will man x genauer wissen, so darf man nur auf eine ähnliche Art wie §. 63. verfahren.

§. 69.

1. Zusatz. Weil das Gefäß in die Gefahr kommt unter zu sinken, wenn $x = c$ wird, so erhält man aus der Gleichung [I] für diese Voraussetzung

$$c^3 - 3c^3 + \frac{3c^2 P}{\pi \gamma a b} = 0$$

und hieraus $P = \frac{2}{3}\pi \gamma a b c$. Es muß daher das Gewicht des Gefäßes mit seiner Ladung oder P kleiner als $\frac{2}{3}\pi a b c$ sein.

§. 70.

2. Zusatz. Hätte das Gefäß die Gestalt eines halben elliptischen Sphäroids, welches durch Umdrehung der Ellipse AFB Tafel IV. Figur 33. um die Axe AB entstanden ist: so wird $c = b$ und man erhält für diesen Fall, um die Tiefe x der Einsenkung zu finden, die Gleichung

$$x^3 - 3bx^2 + \frac{3bP}{\pi\gamma a} = 0.$$

§. 71.

3. Zusatz. Der schwimmende Körper sei eine halbe Kugel, so ist $c = b = a$ und man erhält für diesen Fall

$$x^3 - 3ax^2 + \frac{3P}{\pi\gamma} = 0.$$

§. 72.

4. Zusatz. Es ist übrigens nicht erforderlich, daß der ganze schwimmende Körper genau die hier vorausgesetzte Gestalt habe, vielmehr können die Theile, welche sich über dem Wasser befinden, noch so verschieden gestaltet sein, wenn nur der Theil, welcher eingetaucht wird, der Voraussetzung entspricht, und der Schwerpunkt des ganzen Körpers in die Axe CF fällt. Wäre daher A'NFNB', Tafel IV. Figur 34. die Gestalt des Gefäßes, so hat man nur nöthig, einen Theil NFN desselben, welcher wenigstens eintaucht zu einer halben Ellipse ANFNB zu ergänzen, und auf solche Weise die Werthe a, b, c zu bestimmen.

§. 73.

Durch eine Zeichnung läßt sich sehr bequem für ein bestimmtes Gefäß oder Schiff, aus der gegebenen Belastung die Tiefe der Einsenkung oder aus der Tiefe der Einsenkung die dazu erforderliche Belastung, mittelst zweier Maßstäbe finden. Es sei z. B. GOPQ, Tafel III. Figur 28. der Längendurchschnitt durch die Mitte eines Schiffs und AH der Wasserspiegel, wenn das Schiff am tiefsten einsenkt. Man ziehe FN, EM, CK mit AB parallel, und bestimme (wie §. 60.) die körperlichen Inhalte, welche den Räumen FNOGF, EMOGE, CKOGC, AHOGA entsprechen, woraus leicht die Gewichte des Wassers, in Pfunden oder irgend einem andern Gewichte, bestimmt werden können, welche diese körperlichen Räume verdrängen. Man ziehe nun zwei auf einander senkrechte Linien OA und Oa, Tafel IV. Figur 29. theile OA in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile, nehme von O bis F so viel Theile, als der Wasserkörper FNOGF Pfunde wiegt. Von O bis f setze man nach einem andern willkührlichen Maßstabe die Tiefe der Einsenkung des Körpers FNOGF; ziehe FF′ mit Oa und fF′ mit OA parallel, und bemerke den Durchschnittspunkt F′. Auf gleiche Weise verfahre man mit dem zu EMOGE gehörigen Wasserkörper, indem man sein Gewicht von O nach E und die Tiefe seiner Einsenkung von O nach e trägt, um den Durchschnittspunkt E′ zu erhalten. Eben so suche man die Durchschnittspunkte C′ und A′, je mehr je besser, so läßt sich alsdann durch diese Punkte die krumme Linie OF′E′C′A′ ziehen. Wird alsdann die Tiefe Oa in eben so viel Fuß und Zolle getheilt, als die Tiefe der Einsenkung oa Tafel III. Figur 28. beträgt: so entsteht daraus die Scale Tafel IV. Figur 30. deren Gebrauch sogleich einleuchtet. Wollte man z. B. die Tiefe der Einsenkung für irgend eine Belastung finden, so zähle man von O bis R so viel Pfund, als das Schiff sammt der Ladung wiegt; ziehe RS mit Oa parallel bis an die krumme Linie OA und aus S mit OA die Parallele ST bis an Oa, so ist OT die Tiefe der Einsenkung für die gegebene Belastung.

§. 74.

Ueber die Tiefe der Einsenkung verschiedener Körper im Wasser findet man in folgenden Schriften Untersuchungen:

Varignon, Jaugage d'un navire ellipsoïde. — Mem. de l'académie de Paris, Année 1721. (Paris, 1725. 8.). p. 57 — 72.

von Clasen, Theorie der Pontons. Magazin für Ingenieur und Artilleristen von A. Böhm. 8. Band, Gießen 1782. 8. S. 307 — 340.

G. Juan, De la construction et de la manoeuvre de Vaisseaux et autres bâtiments, ou Examen maritime. trad. de l'espag par Levêque. Tom. II. Paris 1792. 4. Livre II. Chap. 1. p. 55. etc.

J. G. Hoyer, Versuch eines Handbuchs der Pontonnier-Wissenschaften. 1. Band, Leipzig 1793. 8. S. 106 — 145.

Siebentes Kapitel.

Von den verschiedenen Lagen schwimmender Körper im Stande des Gleichgewichts und von ihrer Stabilität.

---

§. 75.

Wird irgend ein schwimmender Körper vorausgesetzt, dessen Gewicht dem Gewichte des verdrängten Wassers gleich ist, und dessen Schwerpunkt mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in einerlei Vertikallinie liegt: so wird derselbe in dieser Lage in Ruhe bleiben (§. 46.). Aber hieraus folgt nicht, daß es nicht noch andere Lagen geben sollte, bei welchen der schwimmende Körper im Gleichgewichte bleiben könnte. Denn alle Abschnitte des Körpers, welche durch Ebenen von demselben getrennt werden, und deren Inhalt dem Inhalte des verdrängten Wassers gleich sind, kann man sich als eingetauchte Theile des Körpers vorstellen; und wenn alsdann die Linie, welche vom Schwerpunkte des vom Abschnitte verdrängten Wassers nach dem Schwerpunkte des Körpers gezogen wird, auf derjenigen Ebene senkrecht steht, welche den Abschnitt vom Körper trennt: so wird der Körper auch in dieser Lage in Ruhe bleiben.

Bei denjenigen prismatischen Körpern, deren Lage auf dem Wasser in den folgenden §. §. untersucht wird, ist allemal vorausgesetzt, daß solche nach ihrer

Länge auf dem Wasser schwimmen, und daß ihre nach der Länge gehende Kanten oder parallele Seiten, mit dem Wasserspiegel parallel sind. Legt man nach der Länge eines solchen prismatischen Körpers eine Vertikalebene durch den Schwerpunkt desselben und durch den Schwerpunkt des verdrängten Wassers, und man findet, daß diese Ebene den Körper in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt: so sagt man, der Körper schwimme in einer aufrechten Stellung. Ist dies nicht der Fall, so sagt man, der Körper habe eine schiefe Stellung.

Auch von andern Körpern, welche auf dem Wasser schwimmen und (wie Schiffe) durch eine nach ihrer Länge gelegte Ebene in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt werden können, sagt man, daß sie sich in einer aufrechten Stellung befinden, wenn eine Ebene durch die Schwerpunkte des Körpers und seines eingetauchten Theils gelegt, den schwimmenden Körper in zwei gleiche und ähnliche Theile theilet.

Schwimmt ein Körper in einer aufrechten Stellung, so heißt die Linie, welche durch die Schwerpunkte des Körpers und seines eingetauchten Theils geht, die Axe des schwimmenden Körpers. Diese Axe behält auch dann noch diese Benennung, wenn der Körper eine andere oder schiefe Stellung einnimmt.

§. 76.

Aufgabe. Ein prismatischer Körper oder ein Gefäß, dessen senkrechter Querschnitt auf seine Länge ein Dreieck bildet, schwimmt auf dem Wasser; man soll die verschiedenen Lagen desselben für das Gleichgewicht finden.

Auflösung. Es sei ABC Tafel IV. Figur 35. derjenige senkrechte Querschnitt, in welchem der Schwerpunkt G des Körpers oder der gesammten Belastung in einer Linie AQ liege, welche den Winkel BAC in zwei gleiche Theile theilt. Ist alsdann MN der Wasserspiegel und man setzt voraus, daß die Kanten bei B und C jederzeit aus dem Wasser hervorragen: so findet man den Schwerpunkt g des verdrängten Wassers, wenn MN bei D in zwei gleiche Theile getheilt und $Ag = \frac{2}{3} AD$ genommen wird. Soll alsdann der Körper in Ruhe bleiben, so muß gG auf MN senkrecht stehen, daher wenn man DQ auf MN senkrecht oder mit gG parallel zieht, so verhält sich

$$Ag : AD = AG : AQ \text{ oder}$$

$$2 : 3 = AG : AQ \text{ also ist } AQ = \tfrac{3}{2} . AG.$$

Man setze das Gewicht des Körpers $= P$, den Winkel $BAQ = CAQ = \alpha$; die ganze Länge des Körpers $= l$, $AG = u$; $AM = x$, $AN = y$, so ist der Inhalt des Dreiecks $AMN = \frac{1}{2} xy \sin 2\alpha$, daher $P = \gamma l . \frac{1}{2} xy \sin 2\alpha$ oder wenn man $\frac{2P}{\gamma l \sin 2\alpha} = a^2$ setzt

$$y = \frac{2P}{\gamma l x \sin 2\alpha} = \frac{a^2}{x}.$$

Ferner ist $AQ = \frac{3}{2} . AG = \frac{3}{2} u$ und

$MQ^2 = AQ^2 + AM^2 - 2 . AQ . AM . \cos\alpha$ oder

$MQ^2 = \frac{9}{4} u^2 + x^2 - 3 ux \cos\alpha$ und eben so

$NQ^2 = \frac{9}{4} u^2 + y^2 - 3 uy \cos\alpha.$

Weil aber $MD = DN$, so ist auch $MQ = NQ$ oder $MQ^2 = NQ^2$, daher

$$x^2 - 3ux\cos\alpha = y^2 - 3uy\cos\alpha,$$

oder wenn y mit $\frac{a^2}{x}$ vertauscht wird

$$x^2 - 3ux\cos\alpha = \frac{a^4}{x^2} - \frac{3a^2u\cos\alpha}{x} \text{ oder}$$

$$x^4 - 3ux^3\cos\alpha + 3a^2ux\cos\alpha - a^4 = 0.$$

Diese Gleichung kann man in folgende beide Faktoren zerlegen

$$x^2 - a^2 = 0 \text{ und}$$
$$x^2 - 3ux\cos\alpha + a^2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung erhält man, weil die negativen Werthe hier keine Anwendung finden, $x = a$ also auch $y = a$, daher

$$x = y = a = \sqrt{\frac{2P}{\gamma l \sin 2\alpha}},$$

welches die erste Lage des schwimmenden Körpers für das Gleichgewicht ist, wo $AM = MN = a$ ist, also der Körper eine aufrechte Stellung erhält.

Entwickelt man aus dem zweiten Faktor die Werthe für x, so erhält man

$x = \frac{3}{2}u\cos\alpha \pm \sqrt{(\frac{9}{4}u^2\cos\alpha^2 - a^2)}$ also

$y = \frac{a^2}{\frac{3}{2}u\cos\alpha \pm \sqrt{(\frac{9}{4}u^2\cos\alpha^2 - a^2)}}$, oder weil

$\frac{a^2}{A \pm \sqrt{(A^2 - a^2)}} = A \mp \sqrt{(A^2 - a^2)}$ ist, so erhält man auch

$$y = \frac{3}{2}u\cos\alpha \mp \sqrt{(\frac{9}{4}u^2\cos\alpha^2 - a^2)}$$

und wenn man zusammengehörige Werthe von x und y mit einander verbindet, so findet man als zweite Lage für das Gleichgewicht

$$x = \frac{3}{2}u\cos\alpha + \sqrt{(\frac{9}{4}u^2\cos\alpha^2 - a^2)}$$
$$y = \frac{3}{2}u\cos\alpha - \sqrt{(\frac{9}{4}u^2\cos\alpha^2 - a^2)}$$

und endlich als dritte Lage für das Gleichgewicht

$$x = \frac{3}{2} u \cos\alpha - \sqrt{(\frac{9}{4} u^2 \cos\alpha^2 - a^2)}$$
$$y = \frac{3}{2} u \cos\alpha + \sqrt{(\frac{9}{4} u^2 \cos\alpha^2 - a^2)}.$$

Diese beiden letzten Lagen bestimmen die schiefe Stellung des Körpers.

Die Möglichkeit einer schiefen Stellung des Körpers hängt davon ab, daß die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen nicht negativ werden.

Wenn daher $\frac{9}{4} u^2 \cos\alpha^2 =$ oder $< a^2$, also AG oder

u = oder kleiner als $\frac{2a}{5 \cos\alpha}$ ist,

so kann der Körper im Zustande des Gleichgewichts keine schiefe Stellung annehmen, oder er bleibt gegen das Umschlagen gesichert.

Hat man einen Durchschnitt ABC Tafel V. Figur 36. von dem aufrecht stehenden Körper, so daß AQ auf dem Wasserspiegel MN senkrecht steht: so ist AM = AN. Man nehme AF $= \frac{2}{3}$ AM, errichte in F den Perpendikel FK bis an AQ: so ist dadurch ein Punkt K gefunden, welcher dazu dient, um auf einem kürzern Wege zu entscheiden, ob der Körper eine schiefe Stellung auf dem Wasser annehmen kann oder nicht. Denn liegt der Schwerpunkt G des ganzen Körpers über K, so ist eine schiefe Stellung möglich; liegt aber G unter K, so ist der Körper gegen das Umschlagen gesichert.

Die Richtigkeit der gegebenen Auflösung folgt daraus, weil $AK = \frac{AF}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3} a}{\cos\alpha}$ ist, wie erfordert wird.

§. 77.

1. Zusatz. Für $\alpha = 30$ Grad, wird bei der aufrechten Stellung

$$a = 2\sqrt{\frac{P}{\gamma l \sqrt{3}}}$$

und für die schiefe Stellung

$$x = \tfrac{3}{4} u \sqrt{3} + \sqrt{(\tfrac{27}{16} u^2 - a^2)}$$
$$y = \tfrac{3}{4} u \sqrt{3} - \sqrt{(\tfrac{27}{16} u^2 - a^2)},$$

diese letzten Stellungen sind aber nur möglich, wenn

$$u > \frac{4a}{3\sqrt{3}} \text{ oder } u > \tfrac{8}{3}\sqrt{\frac{P}{3\gamma l \sqrt{3}}}.$$

§. 78.

2. Zusatz. Für $\alpha = 45$ Grad, wird bei der aufrechten Stellung

$$a = \sqrt{\frac{2P}{\gamma l}}$$

und für die schiefe Stellung

$$x = \tfrac{3}{4} u \sqrt{2} + \sqrt{(\tfrac{9}{8} u^2 - a^2)}$$
$$y = \tfrac{3}{4} u \sqrt{2} - \sqrt{(\tfrac{9}{8} u^2 - a^2)}$$

welche Lage aber nur möglich ist, wenn

$$u > \tfrac{2}{3} a \sqrt{2} \text{ oder } u > \tfrac{4}{3}\sqrt{\frac{P}{\gamma l}}.$$

§. 79.

3. Zusatz. Nach den bisherigen Bestimmungen konnte ABC der Querschnitt eines ausgehöhlten Körpers oder eines Gefäßes sein, welches nebst seiner Ladung P Pfund wog. Wäre hingegen ABC Tafel IV. Figur 35. der Querschnitt eines gleichartigen Prisme, dessen eigenthümliches Gewicht $= g$ ist: so ist die Lage seines Schwerpunkts G bekannt, weil

$AG = \frac{2}{3} AH$ wird, oder wenn man die Seiten $AB = AC = b$ setzt, so ist $AH = b \cos\alpha$, also

$$AG = u = \frac{2}{3} b \cos\alpha.$$

Ferner ist das ganze Gewicht des Körpers, oder

$$P = \frac{1}{2} g \gamma l b^2 \sin 2\alpha.$$

Setzt man diese Werthe in die §. 76. gefundenen Gleichungen, so erhält man für die erste Lage, oder wenn der Körper aufrecht steht, oder

$$a = b \sqrt{g}.$$

Für die schiefe Stellung des Körpers erhält man

$$x = b \cos\alpha^2 + b \sqrt{(\cos\alpha^4 - g)} \text{ und}$$
$$y = b \cos\alpha^2 - b \sqrt{(\cos\alpha^4 - g)}.$$

In Absicht dieser Werthe ist zu bemerken, daß $x < b$ sein muß, weil sonst zwei Kanten des Körpers unter den Wasserspiegel kommen, welches gegen die Voraussetzung ist. Damit aber x und y möglich werden, muß $g < \cos\alpha^4$ sein. Aber $b > x$ giebt $b > b \cos\alpha^2 + b\sqrt{(\cos\alpha^4 - g)}$ oder $(1 - \cos\alpha^2)^2 = (\cos\alpha^4 - g)$ oder $g > 2\cos\alpha^2 - 1$ oder $g > \cos 2\alpha$. Hieraus erhält man zwei Grenzen, innerhalb welcher der Werth von g liegen muß, wenn eine schiefe Lage möglich und nur eine Kante des Körpers unter getaucht sein soll

$$g < \cos\alpha^4 \text{ und } g > \cos 2\alpha.$$

Wäre das Dreieck ABC gleichseitig, so erhält man

$$x = \frac{3}{4} b + b \sqrt{(\tfrac{9}{16} - g)};\ g < \tfrac{9}{16};\ g > \tfrac{1}{2}.$$

Wenn hingegen der Winkel BAC ein rechter ist, so findet man

$$x = \frac{1}{2} b + b \sqrt{(\tfrac{1}{4} - g)};\ g < \tfrac{1}{4};\ g > 0.$$

§. 80.

Aufgabe. Der Querschnitt des auf dem Wasser schwimmenden prismatischen Körpers oder Gefäßes sei ein Rechteck ABCD Tafel V. Figur 37., von welchem die beiden untersten Kanten bei A und D unter dem Wasserspiegel bleiben; man sucht die verschiedenen Lagen für das Gleichgewicht.

Auflösung. In irgend einer Lage, wo das Gewicht des verdrängten Wassers dem Gewichte P der gesammten Belastung gleich ist, sei MN der Wasserspiegel, G der Schwerpunkt des Körpers und g der Schwerpunkt des verdrängten Wassers ADNM; auch sei GE auf AD senkrecht. Ist nun $AD = b$, $AE = \frac{1}{2} b$, $EG = u$ und die ganze Länge des Körpers $= l$ gegeben, so setze man $AM = x$, $DN = y$ und wenn Hl durch M auf MN senkrecht gezogen wird, den Winkel $AMl = \varphi$. Aus G, g und f ziehe man GH, gh und fl auf Hl und aus F und f, FK und fk auf GH und gh senkrecht, so sind die Winkel $FGK = fgk = \varphi$. Es ist aber (Statik, §. 104. II. III.)

$$fg = \frac{(2y + x).b}{3(x + y)} \text{ und } Af = \frac{x^2 + y^2 + xy}{3(x + y)};$$

ferner $gk = fg.\cos\varphi$ und

$kh = fl = fM.\sin\varphi = (AM - Af)\sin\varphi$ also

$gh = gk + kh = fg.\cos\varphi + (AM - Af)\sin\varphi$ oder

$$gh = \frac{(2y + x)b\cos\varphi}{3(x + y)} + \left(x - \frac{x^2 + y^2 + xy}{3(x + y)}\right)\sin\varphi \text{ oder}$$

$$gh = \frac{b(2y + x)\cos\varphi + (2x^2 + 2xy - y^2)\sin\varphi}{3(x + y)}.$$

Es ist ferner $GK = GF.\cos\varphi = \frac{1}{2} b\cos\varphi$ und

$KH = LM = FM.\sin\varphi = (x - u)\sin\varphi$ also

$GH = GK + KH = \frac{1}{2} b\cos\varphi + (x - u)\sin\varphi$.

Da nun der schwimmende Körper nur denn in Ruhe bleiben kann, wenn die Schwerpunkte G und g in einerlei Vertikallinie liegen, so muß GH = gh sein, und man erhält daher

$$\frac{b\cos\varphi}{2} + (x - u)\sin\phi = \frac{b(2y+x)\cos\varphi + (2x^2+2xy-y^2)\sin\varphi}{3(x+y)},$$

oder nach gehöriger Verwandlung

$$\tfrac{1}{2}b(x-y) + (x^2 + xy - 3ux - 3uy + y^2)\mathrm{Tgt}\,\phi = 0.$$

Man ziehe Do mit MN parallel, so ist

$$\mathrm{Tgt}\,ADo = \mathrm{Tgt}\,\phi = \frac{Ao}{AD} = \frac{x-y}{b}.$$

Diesen Werth in die vorhergehende Gleichung gesetzt, giebt

$$(x-y)(x^2 + xy - 3ux - 3uy + y^2 + \tfrac{1}{2}b^2) = 0$$

wodurch verschiedene Bedingungen für das Gleichgewicht ausgedrückt werden, nachdem man einen oder den andern Faktor = 0 setzt. Für $x - y = 0$ erhält man als erste Bedingung des Gleichgewichts

$$x = y;$$

in diesem Falle steht der Körper aufrecht; und wenn man $x = y = a$ setzt: so wird $P = \gamma lab$, also die Tiefe der Einsenkung beim aufrechten Stande des Körpers, oder

$$a = \frac{P}{\gamma bl}.$$

Für jede andere Lage des Körpers ist $P = \gamma bl\frac{x+y}{2}$ also

$$y = \frac{2P}{\gamma bl} - x \text{ oder } y = 2a - x.$$

Diesen Werth mit y im Factor

$$x^2 + xy - 3ux - 3uy + y^2 + \tfrac{1}{2}b^2 = 0$$

vertauscht, giebt

$$x^2 - 2ax - 6au + 4a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 = 0,$$

woraus sich noch zwei Lagen für das Gleichgewicht ableiten lassen. Es wird nemlich

$$x = a \pm \sqrt{(6au - 3a^2 - \tfrac{1}{2}b^2)} \text{ und}$$
$$y = a \mp \sqrt{(6au - 3a^2 - \tfrac{1}{2}b^2)}.$$

Soll die schiefe Stellung des Körpers, welche diese Gleichungen ausdrücken, möglich sein: so muß $6au > 3a^2 + \frac{1}{2}b^2$ sein, daher wird der Körper keine andere als eine aufrechte Stellung annehmen, wenn

$$u = \text{ oder } < \frac{6a^2 + b^2}{12a} \text{ ist.}$$

Auch folgt hieraus, daß unter übrigens gleichen Umständen ein schwimmendes Parallelepiped um so weniger eine schiefe Stellung auf dem Wasser annehmen kann, je breiter dasselbe ist oder je größer b wird.

§. 81.

Durch die bisherigen Untersuchungen ist man in den Stand gesetzt worden, die Umstände anzugeben, unter welchen ein schwimmender Körper in verschiedenen Lagen sich im Gleichgewichte erhalten kann. Wenn dagegen ein aufrecht schwimmender Körper oder ein Schiff durch irgend eine Kraft aus dem Gleichgewichte, also in eine schiefe Stellung gebracht wird: so ist es wichtig, die Umstände anzugeben, unter welchen das Schiff durch sein eigenes Gewicht und die Lage seines Schwerpunkts im Stande ist, seine vorige aufrechte Stellung wieder anzunehmen.

Wäre ABD Tafel V. Figur 33. der schwimmende Körper, welcher sich nach den Bedingungen §. 75. in einer aufrechten Stellung befindet, und dessen

Schwerpunkt G unter oder über dem Mittelpunkte g des eingetauchten Theils MBN liege. Durch irgend eine Kraft werde der Körper ABC in die schiefe Stellung Tafel V. Figur 39. gebracht, bei welcher mBn den eingetauchten Theil, g′ den Mittelpunkt des Raums desselben, G den unveränderten Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und g den Mittelpunkt des eingetauchten Theils MBN bei der aufrechten Stellung bezeichnet: so kann in dieser Lage kein Gleichgewicht entstehen, wenn nicht die Vertikallinie GP durch G mit der Vertikallinie g′p durch g′ in einerlei gerade Linie fällt (§. 46.). Behalten die angeführten Buchstaben eben die Bedeutung in den Figuren 40. und 41., wo man die Schwerpunkte der schwimmenden Körper über den Schwerpunkten des verdrängten Wassers angenommen hat: so läßt sich nun angeben, unter welchen Bedingungen der Körper entweder seine aufrechte Stellung wieder annehmen oder noch weiter umschlagen wird. Denn das Gewicht P des schwimmenden Körpers, welches man sich im Schwerpunkte G vereinigt vorstellen kann, äußert ein Bestreben, nach der vertikalen Richtung GP zu sinken. Der Auftrieb des Wassers sei p, also (§. 46.) = P, so geht die mittlere Richtung dieser Kraft durch den Schwerpunkt g′ nach der vertikalen Richtung g′p aufwärts. Da nun beide Kräfte bei den angenommenen schiefen Stellungen einander nicht im Gleichgewicht halten können, so muß, bis zur Wiederherstellung des Gleichgewichts, Bewegung erfolgen, und die aufwärts gerichtete Kraft p wird bei Tafel V.

Figur 39. und 40., wo sie am Hebelarm g′G wirkt, den Körper in seine vorige aufrechte Stellung wieder zurück bringen, da alsdann, wenn die Axe BE vertikal wird, beide Kräfte P, p einander aufheben. Dagegen wird bei Figur 41. der Erfolg umgekehrt sein; die Kraft p äußert hier ein Bestreben, den Körper noch weiter um zu drehen, und der Körper wird, anstatt in die vorige aufrechte Stellung zurück zu kehren, sich vielmehr noch weiter davon entfernen. Untersucht man die Umstände näher, unter welchen sich diese Erfolge darstellen: so kann man daraus folgende allgemeine Regel ableiten. Wird ein aufrecht schwimmender Körper aus dem Gleichgewichte in eine schiefe Stellung gebracht, und die Vertikallinie g′p, welche man durch den Schwerpunkt g′ des in der schiefen Stellung verdrängten Wassers zieht, schneidet die Axe BE des Körpers in O oberhalb des Schwerpunkts G dieses Körpers, so hat er ein Bestreben, seine vorige aufrechte Stellung wieder anzunehmen; wenn aber der Durchschnittspunkt O unterhalb (Tafel V. Figur 41.) des Schwerpunkts G fällt, so äußert er ein Bestreben, die Umdrehung noch weiter fort zu setzen.

Die Fähigkeit eines Körpers, seine vorige aufrechte Stellung wieder anzunehmen, heißt hier seine Stabilität oder Standfähigkeit. Sie ist desto größer, je größer das Bestreben zur Wiedererlangung des aufrechten Standes ist.

Um für jeden besondern Fall die Stabilität eines schwimmenden Körpers zu beurtheilen, oder mit der Stabilität anderer schwimmender Körper in Vergleichung zu setzen, wenn außer der Lage seines Schwerpunkts G nur noch die Lage des Mittelpunkts g von dem in aufrechter Stellung verdrängten Wasser bekannt ist, dient die folgende Untersuchung.

§. 82.

Der schwimmende Körper ABD Tafel VI. Figur 42., dessen unveränderlicher Schwerpunkt G in seiner Axe BE liegt, sei bei einer aufrechten Stellung bis zur Linie MN eingetaucht, und alsdann g der Mittelpunkt des Raums des eingetauchten Theils MBN. Dieser Körper werde nun äußerst wenig aus seiner aufrechten Stellung in die Figur 42. abgebildete schiefe Lage gebracht, und dabei vorausgesetzt, daß der entstandene eingetauchte Theil mBn dem Raum MBN gleich sei. Auch werde der Neigungswinkel gegen die vorige Stellung oder $MCm = NCn = \delta$, so klein angenommen, daß die Dreiecke MCm und NCn so wohl wie die Seiten Cm, Cn, CM, CN als einander gleich angesehen werden können. Fällt nun der unbekannte Mittelpunkt des Raums des eingetauchten Theils mBn, etwa in die Vertikallinie HO: so strebt der Auftrieb des Wassers, den Körper nach der Richtung HO zu heben, indem das Gewicht des Körpers im Schwerpunkte G nach der Vertikallinie GP unterwärts wirkt. Man setze den Inhalt der Fläche $MBN = mBn = F$ und die mittlere Länge des schwimmenden Körpers $= l$, so ist γlF (§. 44.) die Größe des Auftriebs; und wenn man GH auf HO senkrecht zieht, so wäre $GH . \gamma lF$ das Moment des Auftriebs in Bezug auf den Schwer-

Schwerpunkt G des Körpers. Weil aber die Lage des Mittelpunkts des Raums von mBn unbekannt ist, so läßt sich auch dieses Moment nicht unmittelbar finden. Dagegen ist

$$mBn = MBN + CNn - CMm, \text{ oder}$$

$$\gamma . F . l = \gamma(MBN) l + \gamma(CNn) l - \gamma(CMm) l \text{ [I].}$$

Nimmt man daher die einzelnen Momente von den auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehenden einzelnen Theilen, in Bezug auf die durch G gehende Vertikallinie KG: so muß ihre Summe dem Momente GH . γFl gleich sein. Es sei $CM = CN = Cm = Cn = \frac{1}{2}b$ also $MN = b$, und man ziehe mr auf CM und Nt auf Cn winkelrecht, so ist $mr = Nt = \frac{1}{2}b^2 \sin\delta$ also,

$$\Delta MCm = NCn = \tfrac{1}{8}b^2 \sin\delta.$$

Man nehme $Cp = Cq = \frac{1}{3}b$, so liegen die Schwerpunkte der Dreiecke MCm und NCn in pp′ und qq′; daher ist die Summe ihrer zugehörigen Momente gegen die Axe KG

$$\gamma . \tfrac{1}{8}b^2 \sin\delta . l . kq - \gamma . \tfrac{1}{8}b^2 \sin\delta . l . kp,$$

oder weil das Moment von CMm nach [I] negativ in Rechnung kommt,

$$\gamma\tfrac{1}{8}b^2 \sin\delta . l . kq - \gamma\tfrac{1}{8}b^2 \sin\delta . l . kp = \tfrac{1}{8}\gamma b^2 l \sin\delta(kq + kp)$$

Aber $kq + kp = pq = \frac{2}{3}b$, daher die Momente von MCm und NCn =

$$\tfrac{1}{12}\gamma b^3 l \sin\delta.$$

Der Schwerpunkt von MBN liegt in g, daher das Moment dieses Theils in Bezug auf die Axe KG =

$$Gf . \gamma . MBN . l = Gf . \gamma . F . l.$$

Es ist daher die Summe der Momente von den Theilen MBN, CNn, CMm

$$= Gf.\gamma F l + \tfrac{1}{12}\gamma b^3 l \sin\delta$$

und weil diese dem Moment des Auftriebs, GH.γFl gleich sein müssen: so erhält man

$$GH.\gamma.F.l = Gf.\gamma.F.l + \tfrac{1}{12}\gamma b^3 l \sin\delta \text{ oder}$$
$$GH\ .\ F = Gf\ .\ F + \tfrac{1}{12} b^3 \sin\delta.$$

Man setze in der Voraussetzung, daß g über G liege, den Abstand der beiden Schwerpunkte G und g oder Gg = a und den Abstand des Punkts O, in welchem die Vertikale HO die Axe BC schneidet, vom Schwerpunkte G oder GO = σ, so ist

$$GH = \sigma \sin\delta \text{ und } Gf = a \sin\delta,$$

also das Moment des Auftriebs

$$\gamma.F.l.\sigma\sin\delta = \gamma.F.l.a.\sin\delta + \gamma\tfrac{1}{12} b^3 l \sin\delta,$$

oder der Abstand

$$GO = \sigma = \frac{b^3}{12F} + a.$$

Da nun durch GO = σ die Lage der Vertikallinie HO bei einerlei Neigung δ des Körpers bestimmt wird, und durch HO die mittlere Richtung des Auftriebs geht: so folgt daraus, daß, so lange GO = σ positiv ist, also der Punkt O über G fällt, der Körper seine vorige aufrechte Stellung wieder annehmen wird; ist aber GO = σ negativ, oder fällt O unter G, so wird der Körper die Umdrehung noch weiter fortsetzen. Die Standfähigkeit eines schwimmenden Körpers kann daher mittelst des Ausdrucks

$$\sigma = \frac{b^3}{12F} + a,$$

leicht beurtheilt werden, und nur in dem Falle, wenn derselbe positiv ist, kann dem schwimmenden Körper eine Standfähigkeit beigemessen werden.

Weil die Lage des Punkts O lediglich von den drei unveränderlichen Größen a, b, F abhängt, und derselbe für jeden schwimmenden Körper eine bestimmte Lage haben muß: so hat man demselben einen eigenen Namen beigelegt, und nennt daher den Punkt O das Metacentrum des schwimmenden Körpers, welche Benennung zuerst Bouguer in seinem Traité du navire einführte. Die Standfähigkeit eines schwimmenden Körpers ist daher positiv, Null oder negativ, nachdem das Metacentrum entweder über, in oder unter dem Schwerpunkte des Körpers liegt. Auch folgt aus dem für den Abstand des Metacentrums vom Schwerpunkt des schwimmenden Körpers gefundenen Ausdruck $\sigma = \frac{b^3}{12\,F} + a$, daß die Standfähigkeit größer wird, wenn a und b zunehmen, oder wenn die Fläche F unter übrigens gleichen Umständen kleiner wird. Der Ausdruck $\frac{b^3}{12\,F}$ bleibt jederzeit positiv; aber a wird negativ, wenn der Schwerpunkt G des schwimmenden Körpers über dem Mittelpunkt g seines in aufrechter Stellung eingetauchten Theils liegt. Aber auch dann noch, wenn a negativ wird, behält der schwimmende Körper das Vermögen, sich aus der geneigten Lage wieder aufzurichten, wenn nur $a < \frac{2\,b^3}{3\,F}$ ist, weil alsdann σ noch positiv bleibt. Man erhält hiernach ganz allgemein den Abstand GO des Metacentrums O vom Schwerpunkte G des schwimmenden Körpers

$$\sigma = \frac{b^3}{12F} \pm a,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn g über G, und das untere, wenn g unter G liegt.

Wird für den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers BG = H und für den Schwerpunkt des eingetauchten Theils Bg = h gesetzt, so findet man $\pm a = h - H$ daher wird auch

$$\sigma = \frac{b^3}{12F} + h - H$$

und der schwimmende Körper behält Stabilität, so lange dieser Ausdruck positiv ist.

Uebrigens setzt dieser Ausdruck voraus, daß alle auf die Länge des schwimmenden Körpers rechtwinklichten Querschnitte des eingetauchten Theils = F und alle auf dem Wasserspiegel gemessenen Breiten = b sind. Wäre dies nicht der Fall, so muß ein Mittelwerth für sämmtliche Querschnitte und Breiten, statt F und b in Rechnung gebracht werden, wodurch ein annähernder Ausdruck für σ erhalten wird.

§. 83.

Weil die Stabilität eines schwimmenden Körpers desto größer wird, je größer sein Bestreben ist, seinen aufrechten Stand wieder anzunehmen, wenn er durch irgend eine Kraft aus der aufrechten Stellung gebracht wird; dieses Bestreben aber von dem Moment des Auftriebs, wie solches im vorigen §. gefunden worden, abhängt: so läßt sich die Stabilität zweier schwimmenden Körper dadurch vergleichen, daß man beide um einerlei Winkel δ aus der aufrechten

Stellung bringt, und alsdann für diese Lage die Momente des Auftriebs sucht. Sind daher mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung a, b, l, F, die Abmessungen eines schwimmenden Körpers und M das Moment des Auftriebs für den Neigungswinkel δ: so findet man

$$M = \frac{\gamma}{12} b^3 l \sin\delta \pm \gamma F l a \sin\delta$$

und wenn für einen zweiten Körper α, β, λ, F' die zugehörigen Abmessungen sind, und M' das Moment seines Auftriebs für denselben Winkel δ bezeichnet: so wird

$$M' = \frac{\gamma}{12} \beta^3 \lambda \sin\delta \pm \gamma F' \lambda \alpha \sin\delta,$$

daher findet man das Verhältniß der Stabilitäten beider Körper oder

$$M : M' = \frac{b^3 l}{12} \pm a l F : \frac{\beta^3 \lambda}{12} \pm \alpha \lambda F'$$

§. 84.

Aufgabe. Die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein aufrecht schwimmendes rechtwinklichtes Parallelepiped noch Stabilität besitzt, wenn in dem Querschnitt ABCD, Tafel VI. Figur 43. desselben, der Boden AD mit dem Wasserspiegel MN parallel ist.

Auflösung. Man setze die Breite $AD = b$, die Tiefe der Einsenkung $NA = MD = h$ und wenn EG auf der Mitte von AD normal steht, so sei G der Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und der Abstand $EG = H$. Ferner wird der Abstand des Schwerpunkts g des eingetauchten Theils, oder $Eg = \frac{1}{2} h$ und $F = bh$, daher §. 82.

$$\sigma = \frac{b^3}{12\,F} + \tfrac{1}{2}\,h - H = \frac{b^2}{12\,h} + \tfrac{1}{2}\,h - H \text{ oder}$$
$$\sigma = \frac{b^2 + 6\,h^2}{12\,h} - H,$$

daher wird das schwimmende Parallelepiped so lange stabil bleiben, als σ positiv oder $\frac{b^2 + 6\,h^2}{12\,h} > H$ ist.

Für $b = 4$ und $h = 2$ Fuß, wird $\frac{b^2 + 6\,h^2}{12\,h} = \frac{40}{24} = 1\frac{2}{3}$ Fuß, woraus folgt, daß, wenn ABCD ein beladenes rechtwinklichtes Gefäß ist, welches 2 Fuß tief im Wasser geht, der Schwerpunkt G des Gefäßes und seiner Ladung nicht $1\frac{2}{3}$ Fuß vom Boden AD entfernt sein darf.

§. 85.

Aufgabe. Ein halber Cylinder oder ein Gefäß, dessen normale Querschnitte Halbkreise ADB, Tafel VI. Figur 44. sind, schwimme aufrecht auf dem Wasser. Die Bedingungen für dessen Stabilität zu finden.

Auflösung. Aus dem Mittelpunkt C des mit dem Wasserspiegel MN parallelen Durchmessers AB werde CD auf AB normal gezogen, und man setze $AC = BC = CD = r$. Ferner sei G der Schwerpunkt des Gefäßes mit seiner Belastung, und g der Schwerpunkt des eingetauchten Theils MND. Wird nun $DG = H$, $MN = b$ und die Fläche $MND = F$ gesetzt, so erhält man (Statik §. 112.)

$$Cg = \frac{b^3}{12\,F} \text{ also } Dg = r - \frac{b^3}{12\,F} \text{ also §. 82.}$$
$$\sigma = \frac{b^3}{12\,F} + r - \frac{b^3}{12\,F} - H \text{ oder } \sigma = r - H.$$

So lange daher der Schwerpunkt G nicht über AB liegt, behält das Gefäß Stabilität.

Die Lage und Stabilität schwimmender Körper ist für die Schifffahrtskunde eine der wichtigsten und schwierigsten Untersuchungen. Hier sind nur die Grundzüge dieser Lehren ausgeführt worden. Vollständigere Untersuchungen hierüber findet man in dem §. 74. angeführten Werke von Don *George Juan* (Tom I. Liv. II. Chap. X. et Tom. II. Liv. II. Chap. III.) und in nachstehenden Schriften:

Bouguer, Traité du Navire, de la construction et de ses mouvements. Paris, 1746. Liv. II. Sect. II. Chap. I — XI.

L. Euler, Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Petropoli 1749. Pars I. Cap. I — IV. Pars II. Cap. II — III.

L. Euler, Théorie complette de la Construction et de la manoeuvre de vaisseaux. Petersbourg 1773. I. Partie. Chap. II — IX.

C. Bossut, Traité théorique et experimental d'Hydrodynamique. Nouv. édit. Paris, l'an IV. (1796). Tom. I. Prem. Partie. Chap. XI — XIV.

S. D. Poisson, Traité de mécanique. Paris 1811. Tome II. Liv. IV. Chap. III.

Achtes Kapitel.

Vom Gleichgewichte solcher flüssigen Massen, deren Eigengewicht von dem des Wassers verschieden ist.

---

§. 86.

Von denjenigen flüssigen Massen, deren Dichtigkeit von der des Wassers verschieden ist, lassen sich, wenn g' das Eigengewicht einer solchen Masse bezeichnet, und auf sie der §. 1. festgesetzte Begriff einer flüssigen Masse anwendbar ist, auch alle vorhergegangenen Sätze anwenden. Vertauscht man daher in den vorhergegangenen Sätzen, $g'\gamma$ mit γ, so finden solche auf flüssige Massen Anwendung, deren eigenthümliches Gewicht $= g'$ ist, wie solches schon §. 7. näher auseinander gesetzt worden.

§. 87.

Eben der Druck, welchen Wasser oder jede andere Flüssigkeit gegen die Wände eines Gefäßes ausübt, entsteht auch gegen die Berührungsflächen, wenn Flüssigkeiten, welche sich nicht vermischen, in einem Gefäße enthalten sind. Sind daher in den zusammenhängenden Gefäßen ABCFED Tafel VI. Figur 45. zwei Flüssigkeiten ABCD und CDEF, welche sich nicht mit einander vermischen, wie z. B. Wasser und Quecksilber, und CD ist die Berührungsfläche beider

Flüssigkeiten: so muß im Zustande des Gleichgewichts die Berührungsfläche CD wagerecht sein. Das eigenthümliche Gewicht der Flüssigkeit CDEF sei g und der Flüssigkeit ABCD $= g'$, so können diese Flüssigkeiten nur im Gleichgewichte bleiben, wenn die entgegengesetzten Pressungen gegen die Berührungsfläche CD gleich groß sind. Aus irgend einem Punkte D der Berührungsfläche, und aus den Punkten A und E der wagerechten Oberfläche AB und EF ziehe man die wagerechten Linien DH, AK und EG bis an die lothrechte Linie GH, so ist, wenn GH $= h$ und KH $= h'$ gesetzt wird, gh der Druck, welchen die Flüssigkeit CDEF, und $g'h'$ der Druck, welchen die Flüssigkeit ABCD gegen den Punkt D ausübt, daher muß, wenn ein Gleichgewicht statt finden soll, $gh = g'h'$ sein, und da dies nur alsdann von jedem andern Punkt der Berührungsfläche CD gilt, wenn man diese wagerecht annimmt: so folgt hieraus, daß die Berührungsfläche CD zwischen beiden Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts wagerecht sein muß.

Weil $gh = g'h'$ ist, so verhält sich

$$g : g' = h' : h,$$ oder

Flüssigkeiten, welche sich nicht vermischen, sind in zusammenhängenden Röhren im Gleichgewichte, wenn sich ihre Druckhöhen oder die Erhöhungen ihrer Oberflächen über der gemeinschaftlichen Berührungsebene, umgekehrt wie ihre eigenthümliche Gewichte verhalten.

Quecksilber, welches 14 Mal schwerer als Wasser ist, wird daher nur dann mit Wasser in verbundenen Röhren im Gleichgewichte sein, wenn die Wasserhöhe 14 Mal so groß als die Quecksilberhöhe über der gemeinschaftlichen Berührungsebene ist.

§. 88.

Ein fester Körper werde in eine Flüssigkeit versenkt, deren eigenthümliches Gewicht g' von dem des Wassers verschieden ist, so wird der Körper durch diese Einsenkung eben so viel von seinem Gewichte verlieren, als die Flüssigkeit wiegt, welche er verdrängt hat (§. 47.).

Wäre daher V der Inhalt des festen Körpers, P sein Gewicht, Q' sein Gewicht in der Flüssigkeit: so erhält man, wenn R' seinen Verlust in dieser Flüssigkeit bezeichnet, diesen Verlust oder das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit

$$R' = P - Q' = g' \gamma V.$$

Da alle Körper, deren Gewicht bestimmt wird, gewöhnlich in der Luft, also in einer flüssigen Masse gewogen werden: so folgt hieraus, daß solche eben so viel von ihrem Gewichte verlieren, als der Luftkörper wiegt, welchen sie verdrängt haben. Um daher das wahre Gewicht eines Körpers zu finden, müßte man ihn im luftleeren Raume wiegen, oder das Gewicht der verdrängten Luft noch in Rechnung bringen. Selten wird aber diese Genauigkeit verlangt, und für sehr dichte Körper ist dieser Unterschied unbedeutend. Umständliche Untersuchungen hierüber sind im folgenden Kapitel enthalten.

§. 89.

1. Zusatz. Wäre g das Eigengewicht des festen Körpers, also $g = \frac{P}{\gamma V}$, so verhält sich, weil $g' = \frac{R'}{\gamma V}$ ist,

$$P : R' = g : g',$$

daher verhält sich das Gewicht eines festen Körpers, zu dem Verluste seines Gewichts, wenn er in irgend eine Flüssigkeit versenkt wird, wie das Eigengewicht dieses Körpers zum Eigengewichte der Flüssigkeit.

§. 90.

2. Zusatz. Der Gewichtsverlust eines festen Körpers im Wasser werde durch R bezeichnet, so daß (§. 47.) $P - Q = R$ ist. Es ist aber auch $R = \gamma V$ und (§. 88.) $R' = g' \gamma V$, daher $R' = g' R$ oder

$$g' = \frac{R'}{R};$$

oder der Gewichtsverlust eines festen Körpers im Wasser werde durch den Gewichtsverlust dieses Körpers in irgend einer Flüssigkeit dividirt, so erhält man das Eigengewicht dieser Flüssigkeit.

Die vorstehenden beiden Sätze sind hier nur des Zusammenhanges wegen angeführt, obgleich schon §. 56. von denselben Anwendungen vorkommen.

§. 91.

3. Zusatz. Senkt man denselben Körper in eine zweite Flüssigkeit, deren Eigengewicht $= g''$ und in welcher der Gewichtsverlust $= R''$ ist, so erhält man $g'' = \frac{R''}{R}$; aber auch $g' = \frac{R'}{R}$, daher

$$g' : g'' = R' : R'',$$

oder die Eigengewichte verschiedener Flüssigkeiten verhalten sich wie die Gewichte, welche einerlei fester Körper in denselben verliert.

Beispiel. In einer Flüssigkeit, deren Eigengewicht $=0{,}936$ ist, beträgt der Gewichtsverlust eines untergetauchten Körpers 2,14 Loth. In einer zweiten Flüssigkeit beträgt der Gewichtsverlust eben dieses Körpers 1,85 Loth: daher findet man das Eigengewicht g'' dieser zweiten Flüssigkeit, weil hier $g' = 0{,}936$, $R' = 2{,}14$ und $R'' = 1{,}85$ ist,

$$g'' = g' \frac{R''}{R'} = \frac{0{,}936 \,.\, 1{,}85}{2{,}14} = 0{,}809.$$

§. 92.

Vorausgesetzt, daß zwei verschiedene Flüssigkeiten so beschaffen sind, daß auf jeder derselben einerlei Körper schwimmen kann, wenn g und g' ihre eigenthümliche Gewichte bezeichnen. Der schwimmende Körper sei ein Prisme dessen parallele Seiten vertikal aufwärts stehen. Ist nun P das Gewicht dieses Körpers und bezeichnet man durch v, v' die Inhalte der eingetauchten Theile des Körpers in den beiden Flüssigkeiten, so ist $P = g\gamma v$ und $P = g'\gamma v'$ also $gv = g'v'$, daher verhält sich

$$v : v' = g' : g,$$

und weil sich bei prismatischen Körpern von einerlei Querschnitten die Inhalte wie ihre Höhen verhalten, so werden sich auch die eigenthümlichen Gewichte zweier Flüssigkeiten umgekehrt wie die Tiefen der Einsenkung von einerlei prismatischen Körper verhalten.

Neuntes Kapitel.

Vom Einflusse, welchen die Wärme auf das Eigengewicht der Körper hat.

§. 93.

Die bisherigen Untersuchungen über die hydrostatische Ausmittelung des Eigengewichts einer Materie setzten voraus, daß sich sowohl das Wasser als die übrigen Körper in einerlei Temperatur befänden, und daß für eine solche Temperatur das Eigengewicht des Wassers = 1 wäre. Weil aber durch die Wärme der Umfang der Körper verändert wird, so muß auch hieraus eine Veränderung ihres Eigengewichts entstehen, und es ist nöthig, wenn mehr Genauigkeit als gewöhnlich, verlangt wird, diese Veränderung näher zu untersuchen.

Zur Bestimmung des Wärmezustandes einer Materie dienen Thermometer oder Wärmemesser, deren Bekanntschaft eben so wie die der Barometer, welche zur Bestimmung des Drucks der Luft dienen, vorausgesetzt wird, weil man diese Werkzeuge in den Naturlehren umständlich beschrieben findet. Nur die Ueberschrift dieses Kapitels wird es rechtfertigen können, daß von diesen Werkzeugen in der Hydrostatik die Rede ist.

Unter Barometerstand versteht man den Vertikalabstand der beiden Oberflächen des Quecksilbers in den Schenkeln der Barometerröhre. Dieser Stand wird gewöhnlich in pariser Zollen ausgedrückt, und wenn dergleichen Angaben von Barometerständen hier vorkommen: so werden allemal pariser Zolle verstanden.

Der Abstand zwischen dem Frost- und Siedepunkt eines Thermometers, welcher der Fundamentalabstand heißt, wird auf verschiedene Weise in Grade eingetheilt, woraus eben so verschiedene Thermometerscalen entstehen. Hier sind folgende Thermometer zu bemerken:

I. Das reaumürsche Thermometer, dessen Fundamentalabstand in 80 Grade getheilt wird, erhält bei der Temperatur des thauenden Eises oder beim Frostpunkt die Ziffer 0, und bei der Temperatur des kochenden Wassers oder beim Siedepunkt die Zahl 80. Die Grade über Null werden mit + und die eben so großen Grade unter Null mit — bezeichnet, um Verwechselungen zu vermeiden. Nach Reaumürs Angabe wird dieses Thermometer mit Weingeist gefüllt, welche de Lüc dadurch verbesserte, daß er Quecksilber statt des Weingeistes annahm, daher auch ein solches ein reaumürsches Quecksilberthermometer genannt wird.

Um in der Folge die Grade eines solchen Thermometers kurz zu bezeichnen, wird man denselben ein R beifügen, es bedeutet also 35 Grad R so viel als 35 Grad nach dem reaumürschen Quecksilberthermometer.

II. Das fahrenheitsche Thermometer enthält zwischen dem Frost- und Siedepunkt 180 Grade; die Scale wird aber so beschrieben, daß bei dem Frostpunkt die Zahl 32, also bei dem Siedepunkt 212 kommt. Fahrenheitsche Grade sollen mit F bezeichnet werden.

III. Das celsiussche oder Centesimal-Thermometer erhält zwischen dem Frost- und Siedepunkt 100 Grade; beim Frostpunkte 0, beim Siedepunkte 100. Dieselbe Anordnung hat das neu eingeführte Thermometer in Frankreich. Die zugehörigen Grade werden mit C bezeichnet.

Um mit Leichtigkeit aus dem gegebenen Stande eines Thermometers denselben Punkt auf der Scale eines andern anzugeben, dienen folgende Gleichungen, welche sich auf die angeführten Eintheilungen der Scalen gründen.

Bezeichnet

r die Anzahl reaumürscher Grade, die mit demselben Wärmezustand von

f Grade nach Fahrenheit, oder mit

c Grade nach Celsius übereinstimmen:

so giebt die Vergleichung der reaumür- und fahrenheitschen Scalen

$$80 : 180 = r : f - 32, \text{ also}$$

$$180 r = 80 (f - 32) \text{ oder } 9 r = 4 (f - 32), \text{ daher}$$

$$\text{(I)} \quad r = \tfrac{4}{9} (f - 32).$$

Ferner verhält sich

$$80 : 100 = r : c, \text{ daher ist}$$

$$\text{(II)} \quad r = \tfrac{4}{5}c.$$

Aus (I) erhält man ferner

$$\text{(III)} \quad f = \tfrac{9}{4}r + 32,$$

und, wenn hierin $\frac{4}{5}c$ statt r gesetzt wird,

$$\text{(IV)} \quad f = \tfrac{9}{5}c + 32.$$

Ferner erhält man aus (II) und (IV)

$$\text{(V)} \quad c = \tfrac{5}{4}r$$

$$\text{(VI)} \quad c = \tfrac{5}{9}(f - 32).$$

Diese Ausdrücke gelten aber nur so fern, als die Thermometer mit Quecksilber angefüllt sind.

Zur Vergleichung der ganzen Grade dieser drei Thermometerscalen sind hier einige Tafeln beigefügt.

Beispiel. Man soll den Thermometerstand von 39,83 fahrenheitschen Graden in reaumürschen angeben. Hier ist nach (I)

$$r = \tfrac{4}{9}(39{,}83 - 32) = 3{,}84 \text{ also}$$

$$39{,}83 \text{ Grad F} = 3{,}48 \text{ Grad R.}$$

Tafel zur Vergleichung verschiedener Thermometergrade.

Fahrenh.	Reaum.	Celsius	Fahrenh.	Reaum.	Celsius	Fahrenh.	Reaum.	Celsius
32	0	0	59	12	15	86	24	30
33	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	60	$12\frac{4}{9}$	$15\frac{5}{9}$	87	$24\frac{4}{9}$	$30\frac{5}{9}$
34	$\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{9}$	61	$12\frac{8}{9}$	$16\frac{1}{9}$	88	$24\frac{8}{9}$	$31\frac{1}{9}$
35	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	62	$13\frac{1}{3}$	$16\frac{2}{3}$	89	$25\frac{1}{3}$	$31\frac{2}{3}$
36	$1\frac{7}{9}$	$2\frac{2}{9}$	63	$13\frac{7}{9}$	$17\frac{2}{9}$	90	$25\frac{7}{9}$	$32\frac{2}{9}$
37	$2\frac{2}{9}$	$2\frac{7}{9}$	64	$14\frac{2}{9}$	$17\frac{7}{9}$	91	$26\frac{2}{9}$	$32\frac{7}{9}$
38	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{3}$	65	$14\frac{2}{3}$	$18\frac{1}{3}$	92	$26\frac{2}{3}$	$33\frac{1}{3}$
39	$3\frac{1}{9}$	$3\frac{8}{9}$	66	$15\frac{1}{9}$	$18\frac{8}{9}$	93	$27\frac{1}{9}$	$33\frac{8}{9}$
40	$3\frac{5}{9}$	$4\frac{4}{9}$	67	$15\frac{5}{9}$	$19\frac{4}{9}$	94	$27\frac{5}{9}$	$34\frac{4}{9}$
41	4	5	68	16	20	95	28	35
42	$4\frac{4}{9}$	$5\frac{5}{9}$	69	$16\frac{4}{9}$	$20\frac{5}{9}$	96	$28\frac{4}{9}$	$35\frac{5}{9}$
43	$4\frac{8}{9}$	$6\frac{1}{9}$	70	$16\frac{8}{9}$	$21\frac{1}{9}$	97	$28\frac{8}{9}$	$36\frac{1}{9}$
44	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	71	$17\frac{1}{3}$	$21\frac{2}{3}$	98	$29\frac{1}{3}$	$36\frac{2}{3}$
45	$5\frac{7}{9}$	$7\frac{2}{9}$	72	$17\frac{7}{9}$	$22\frac{2}{9}$	99	$29\frac{7}{9}$	$37\frac{2}{9}$
46	$6\frac{2}{9}$	$7\frac{7}{9}$	73	$18\frac{2}{9}$	$22\frac{7}{9}$	100	$30\frac{2}{9}$	$37\frac{7}{9}$
47	$6\frac{2}{3}$	$8\frac{1}{3}$	74	$18\frac{2}{3}$	$23\frac{1}{3}$	110	$34\frac{2}{3}$	$43\frac{1}{3}$
48	$7\frac{1}{9}$	$8\frac{8}{9}$	75	$19\frac{1}{9}$	$23\frac{8}{9}$	120	$39\frac{1}{9}$	$48\frac{8}{9}$
49	$7\frac{5}{9}$	$9\frac{4}{9}$	76	$19\frac{5}{9}$	$24\frac{4}{9}$	130	$43\frac{5}{9}$	$54\frac{4}{9}$
50	8	10	77	20	25	140	48	60
51	$8\frac{4}{9}$	$10\frac{5}{9}$	78	$20\frac{4}{9}$	$25\frac{5}{9}$	150	$52\frac{4}{9}$	$65\frac{5}{9}$
52	$8\frac{8}{9}$	$11\frac{1}{9}$	79	$20\frac{8}{9}$	$26\frac{1}{9}$	160	$56\frac{8}{9}$	$71\frac{1}{9}$
53	$9\frac{1}{3}$	$11\frac{2}{3}$	80	$21\frac{1}{3}$	$26\frac{2}{3}$	170	$61\frac{1}{3}$	$76\frac{2}{3}$
54	$9\frac{7}{9}$	$12\frac{2}{9}$	81	$21\frac{7}{9}$	$27\frac{2}{9}$	180	$65\frac{7}{9}$	$82\frac{2}{9}$
55	$10\frac{2}{9}$	$12\frac{7}{9}$	82	$22\frac{2}{9}$	$27\frac{7}{9}$	190	$70\frac{2}{9}$	$87\frac{7}{9}$
56	$10\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$	83	$22\frac{2}{3}$	$28\frac{1}{3}$	200	$74\frac{2}{3}$	$93\frac{1}{3}$
57	$11\frac{1}{9}$	$13\frac{8}{9}$	84	$23\frac{1}{9}$	$28\frac{8}{9}$	210	$79\frac{1}{9}$	$98\frac{8}{9}$
58	$11\frac{5}{9}$	$14\frac{4}{9}$	85	$23\frac{5}{9}$	$29\frac{4}{9}$	212	80	100

Fortsetz. d. Vergleichung verschied. Thermometergrade.

Reaum.	Fahrenh.	Celsius	Reaum.	Fahrenh.	Celsius	Reaum.	Fahrenh.	Celsius
0	32	0	27	92¾	33¾	54	153½	67½
1	34¼	1¼	28	95	35	55	155¾	68¾
2	36½	2½	29	97¼	36¼	56	158	70
3	38¾	3¾	30	99½	37½	57	160¼	71¼
4	41	5	31	101¾	38¾	58	162½	72½
5	43¼	6¼	32	104	40	59	164¾	73¾
6	45½	7½	33	106¼	41¼	60	167	75
7	47¾	8¾	34	108½	42½	61	169¼	76¼
8	50	10	35	110¾	43¾	62	171½	77½
9	52¼	11¼	36	113	45	63	173¾	78¾
10	54½	12½	37	115¼	46¼	64	176	80
11	56¾	13¾	38	117½	47½	65	178¼	81¼
12	59	15	39	119¾	48¾	66	180½	82½
13	61¼	16¼	40	122	50	67	182¾	83¾
14	63½	17½	41	124¼	51¼	68	185	85
15	65¾	18¾	42	126½	52½	69	187¼	86¼
16	68	20	43	128¾	53¾	70	189½	87½
17	70¼	21¼	44	131	55	71	191¾	88¾
18	72½	22½	45	133¼	56¼	72	194	90
19	74¾	23¾	46	135½	57½	73	196¼	91¼
20	77	25	47	137¾	58¾	74	198½	92½
21	79¼	26¼	48	140	60	75	200¾	93¾
22	81½	27½	49	142¼	61¼	76	203	95¼
23	83¾	28¾	50	144½	62½	77	205¼	96½
24	86	30	51	146¾	63¾	78	207½	97¾
25	88¼	31¼	52	149	65	79	209¾	98¾
26	90½	32½	53	151¼	66¼	80	212	100

Fortsetz. d. Vergleichung verschied. Thermometergrade.

Celsius	Fahrenh.	Reaum.	Celsius	Fahrenh.	Reaum.	Celsius	Fahrenh.	Reaum.
0	32	0	27	80,3	21,3	54	129,1	43,1
1	33,4	0,4	28	82,2	22,2	55	131	44
2	35,3	1,3	29	84,1	23,1	56	132,4	44,4
3	37,2	2,2	30	86	24	57	134,3	45,3
4	39,1	3,1	31	87,4	24,4	58	136,2	46,2
5	41	4	32	89,3	25,3	59	138,1	47,1
6	42,4	4,4	33	91,2	26,2	60	140	48
7	44,3	5,3	34	93,1	27,1	61	141,4	48,4
8	46,2	6,2	35	95	28	62	143,3	49,3
9	48,1	7,1	36	96,4	28,4	63	145,2	50,2
10	50	8	37	98,3	29,3	64	147,1	51,1
11	51,4	8,4	38	100,2	30,2	65	149	52
12	53,3	9,3	39	102,1	31,1	66	150,4	52,4
13	55,2	10,2	40	104	32	67	152,3	53,3
14	57,1	11,1	41	105,4	32,4	68	154,2	54,2
15	59	12	42	107,3	33,3	69	156,1	55,1
16	60,4	12,4	43	109,2	34,2	70	158	56
17	62,3	13,3	44	111,1	35,1	71	159,4	56,4
18	64,2	14,2	45	113	36	72	161,3	57,3
19	66,1	15,1	46	114,4	36,4	73	163,2	58,2
20	68	16	47	116,3	37,3	74	165,1	59,1
21	69,4	16,4	48	118,2	38,2	75	167	60
22	71,3	17,3	49	120,1	39,1	76	168,4	60,4
23	73,2	18,2	50	122	40	77	170,3	61,3
24	75,1	19,1	51	123,4	40,4	78	172,2	62,2
25	77	20	52	125,3	41,3	79	174,1	63,1
26	78,4	20,4	53	127,2	42,2	80	176	64

Fortsetz. d. Vergleichung verschied. Thermometergrade.

Celsius	Fahrenh.	Reaum.	Celsius	Fahrenh.	Reaum.	Celsius	Fahrenh.	Reaum.
81	177,4	64,4	88	190,2	70,2	95	203	76
82	179,3	65,3	89	192,1	71,1	96	204,4	76,4
83	181,2	66,2	90	194	72	97	206,3	77,3
84	183,1	67,1	91	195,4	72,4	98	208,2	78,2
85	185	68	92	197,3	73,3	99	210,1	79,1
86	186,4	68,4	93	199,2	74,2	100	212	80
87	188,3	69,3	94	201,1	75,1			

Noch andere merkwürdige Punkte des Thermometers sind in nachstehender Tafel enthalten:

	Grad F	Grad R
Quecksilber friert	— 40	— 32
Wasser friert	+ 32	0
Sommerwärme, gemäßigte, . .	+ 64	+ 14
Butter schmilzt	+ 82	+ 22
Wärme des menschlichen Bluts	+ 99	+ 30
Blutwärme in Federn . . .	+ 108	+ 33
Wachs schmilzt	+ 140	+ 48
Alkohol siedet	+ 174	+ 63
Wasser siedet	+ 212	+ 80
Siegellack schmilzt	+ 228	+ 87
Schwefel schmilzt	+ 234	+ 90
Zinn schmilzt	+ 400	+ 164
Wismuth schmilzt	+ 460	+ 190
Blei schmilzt	+ 540	+ 226
Quecksilber siedet	+ 600	+ 252

§. 94.

Die Ausdehnung fester Körper durch die Wärme ist geringer als die der flüssigen, und wenn gleich die Gesetze, nach welchen diese Ausdehnungen bei verschiedenen Temperaturen erfolgen, nicht hinlänglich genau bekannt sind: so läßt sich doch wegen der geringen Ausdehnung fester Körper von einerlei Materie mit hinlänglicher Genauigkeit annehmen, daß, so lange ihre natürliche Beschaffenheit durch die Wärme nicht geändert wird, die Zunahmen ihrer Längen sich nahe genug wie die Unterschiede der entsprechenden Temperaturen verhalten.

Hat also ein fester Körper bei der Temperatur t die Länge L und er erhält für die erhöhten Temperaturen t', t'' die Längen L', L'', so sind $L' - L$ und $L'' - L$ die Verlängerungen oder Ausdehnungen des Körpers bei den veränderten Temperaturen, und es verhält sich

$$L' - L : L'' - L = t' - t : t'' - t.$$

Nach Hällströms Versuchen (Gilbert's Annalen der Physik, Neue Folge, 6. Bd., S. 64.) war die Länge einer eisernen Stange bei 0 Grad C = 1,000000; bei 20 Grad C = 1,000211; bei 40 Grad C = 1,000453; bei 60 Grad C = 1,000734 und bei 80 Grad C = 1,001063. Hier zeigt sich zwar, daß die Zunahme an Länge oder die Längenausdehnung mit der Temperatur nicht gleichförmig wächst; allein da die ganze Ausdehnung, von 0 bis 80 Grad nach dem hunderttheiligen Thermometer, nicht beträchtlich ist: so wird in den meisten Fällen, wo es darauf ankommt, die Ausdehnung nur einigermaßen genau anzugeben, das obige Verhältniß zureichen. Um die entstehenden Unterschiede zu übersehen, setze man die Ausdehnung des Eisens bei 100 Grad C, nach Smeaton, = 0,0001258, wenn die Ausdehnung bei 0 Grad = 0 ist: so erhält man unter der Voraussetzung, daß das Eisen mit Zunahme der Temperatur gleichförmig ausgedehnt werde, für jede 20 Grad C, den Werth 0,0002516 und hieraus nachstehende Vergleichung.

Thermom. Celsius	beobachtet	berechnet
0°	1,000 000	1,000 000
20°	1,000 211	1,000 252
40°	1,000 453	1,000 503
60°	1,000 734	1,000 755
80°	1,001 063	1,001 006

Noch weit geringer ist die Ausdehnung des Glases. Nach Delüc's Versuchen (Philos. Transact. 1778, P. I. p. 478.) beträgt die Ausdehnung beim Siedepunkt 0,00083, wenn die Ausdehnung beim Frostpunkt = 0 gesetzt wird. Dies giebt für jeden Grad F eine Zunahme oder Ausdehnung $= \frac{0,00083}{180} = 0,000046$. Hiernach erhält man folgende Vergleichung:

Thermom. Fahrenh.	beobachtet	berechnet
32°	1,000 00	1,000 00
50°	1,000 06	1,000 07
70°	1,000 14	1,000 17
100°	1,000 23	1,000 31
120°	1,000 33	1,000 41
150°	1,000 44	1,000 54
167°	1,000 56	1,000 62
190°	1,000 69	1,000 73
212°	1,000 83	1,000 83

§. 95.

Es ist bequem, zur Vergleichung der verschiedenen Längen, welche Körper durch die Wärme erhalten, diejenige, welche ein Körper beim Eispunkte oder bei o Grad R erhält, seine absolute Länge zu nennen.

Wäre K die absolute Länge eines Körpers, und L die Länge desselben bei t Grad irgend eines Thermometers: so wird

L — K die Längenausdehnung desselben bei t Grad.

Setzt man zur leichtern Vergleichung die absolute Länge eines Körpers = 1 und es ist λ die Längenausdehnung desselben für jeden Grad irgend eines Thermometers: so soll hier λ die eigenthümliche Längenausdehnung dieser Materie für jeden Grad des angenommenen Thermometers heißen. Für t Grad eines Thermometers, dessen Frostpunkt mit o bezeichnet wird, ist alsdann λt diese Längenausdehnung, also $1+\lambda t$ die Länge des Körpers bei t Grad.

Behalten die Längen K, L die vorstehende Bedeutung, so verhält sich

$$1:\lambda t = K:L-K,$$

und man findet hieraus die Länge eines Körpers bei einer Temperatur von t Grad oder

$$\text{(I)} \quad L=(1+\lambda t)K.$$

Hieraus erhält man $K=\frac{1}{1+\lambda t}L$. Es ist aber $\frac{1}{1+\lambda t} = 1-\lambda t+\lambda^2 t^2-\lambda^3 t^3+\ldots\ldots$ Läßt man das dritte und die folgenden Glieder dieser Reihe weg, weil λ^2, λ^3, ... nur sehr klein sind: so findet man die absolute Länge eines Körpers oder

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} K = \frac{L}{1+\lambda t} \text{ oder} \\ K = (1-\lambda t)L, \text{ beinahe.} \end{cases}$$

Sind die Längen L und K gegeben, so findet man nach (I) bei der Temperatur von t Grad die eigenthümliche Längenausdehnung der Materie oder

$$\text{(III)} \quad \lambda = \frac{L-K}{tK}.$$

Wäre endlich für t' Grade die zugehörige Länge $=L'$, so wird nach (I), $L'=(1+\lambda t')K$ und nach (II) $K=\frac{L}{1+\lambda t}$ daher

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} L' = \frac{1+\lambda t'}{1+\lambda t}L \text{ oder} \\ L' = (1+\lambda t')(1-\lambda t)L, \text{ beinahe.} \end{cases}$$

Nun ist $(1+\lambda t')(1-\lambda t) = 1+\lambda t'-\lambda t-\lambda^2 t t'$; daher, wenn man das letzte Glied als unbedeutend weg läßt, findet man auch

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} L' = [1 + \lambda(t' - t)]L \text{ oder} \\ L' = [1 - \lambda(t - t')]L, \text{ beinahe.} \end{cases}$$

Hieraus erhält man auch $L = \frac{L'}{1 + \lambda(t' - t)}$, oder, wenn man wie bei (II) verfährt,

$$(\mathrm{VI})\quad \begin{cases} L = [1 - \lambda(t' - t)]L' \text{ oder} \\ L = [1 + \lambda(t - t')]L', \text{ beinahe.} \end{cases}$$

Die Anwendung der vorstehenden und folgenden Ausdrücke setzt voraus, daß sich t und t' auf einen Thermometer beziehen, dessen Grade mit Null beim Frostpunkte anfangen.

§. 96.

Aufgabe. Von zwei auf verschiedenen Materien befindlichen Maßstäben, deren jeder eine eigene Eintheilung hat, ist das Verhältniß ihrer Längen bekannt, wenn sie sich unter verschiedenen Temperaturen befinden. Man soll eine Vergleichung dieser Maße anstellen, wenn sie beide unter einerlei Temperatur gebracht werden.

Auflösung. Die eigenthümliche Längenausdehnung des ersten und zweiten Maßstabes werde durch λ und λ' bezeichnet, auch sei die Länge des ersten Maßstabes bei einer Temperatur von t Grad $= m$, und die Länge des zweiten bei t' Grad $= m'$. Ferner werde vorausgesetzt, das bei einer gemeinschaftlichen Temperatur von τ Grad, die Länge des ersten Maßstabes $= \mu$ und die des zweiten $= \mu'$ sei, so wird §. 95. (IV.)

$$\mu = \frac{1 + \lambda\tau}{1 + \lambda t} m \text{ und } \mu' = \frac{1 + \lambda'\tau}{1 + \lambda' t'} m', \text{ also}$$

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{1 + \lambda\tau}{1 + \lambda t} \cdot \frac{1 + \lambda' t'}{1 + \lambda'\tau}.$$

Weil aber nach diesem unabgekürzten Ausdruck die Rechnung beschwerlich wird, so kann man auch folgende Näherungsausdrücke bilden. Nach §. 95. (V) und (VI) wird

$\mu = [1 + \lambda(\tau - t)]\,m = \frac{m}{1 - \lambda(\tau - t)}$ und

$\mu' = [1 + \lambda'(\tau - t')]\,m' = \frac{m'}{1 - \lambda'(\tau - t')}$, also

$\frac{\mu}{\mu'} = [1 + \lambda(\tau - t)][1 - \lambda'(\tau - t')]\frac{m}{m'}$ oder

$\mu = \frac{m}{m'}[1 + \lambda(\tau - t) - \lambda'(\tau - t') - \lambda\lambda'(\tau - t)(\tau - t')]\mu'$

und

$\mu' = \frac{m'}{m}[1 - \lambda(\tau - t) + \lambda'(\tau - t') - \lambda\lambda'(\tau - t)(\tau - t')]\mu$

oder nahe genug

$\mu = \frac{m}{m'}[1 + \lambda(\tau - t) - \lambda'(\tau - t')]\mu'$ und

$\mu' = \frac{m'}{m}[1 - \lambda(\tau - t) + \lambda'(\tau - t')]\mu$.

Beispiel. Der französische Meter hält 443,295936 Linien der eisernen Toise von Peru, wenn sich der Meter unter einer Temperatur von 0 Grad und die Toise unter einer Temperatur von 13° R befindet, und die Toise in 864 Linien eingetheilt wird: wie viel Linien wird ein Meter betragen, wenn beide Maße sich unter einerlei Temperatur von τ Grad R befinden. Hier wird $m = 443{,}295936$ und $m' = 864$, also $\frac{m}{m'} = 0{,}513074$ und $\frac{m'}{m} = 1{,}9490\,3659\,116$; ferner $t = 0$ und $t' = 13$. Nun sei der Meter von Platina, so ist für denselben $\lambda = 0{,}0000\,1070$ und für die eiserne Toise, $\lambda' = 0{,}0000\,1445$, ferner $\mu = 1$ Meter und $\mu' = 1$ Toise, daher erhält man, wenn beide Maßstäbe unter einerlei Temperatur von τ Grad R gebracht werden, die Länge eines Meters oder

$$\mu = 0{,}513074[1 + 0{,}0000\,1070\tau - 0{,}0000\,1445(\tau - 13)] \text{ Toisen}$$

und die Länge einer Toise oder

$$\mu' = 1{,}9490\,3659\,116[1 - 0{,}0000\,1070\tau + 0{,}0000\,1445(\tau - 13)] \text{ Meter.}$$

Will man die Länge des Meters in pariser Fuß ausdrücken, so erhält man die Länge des Meters, oder

$$\mu = 3{,}078\,444[1 + 0{,}0000\,1070\tau - 0{,}0000\,1445(\tau - 13)] \text{ par. Fuß,}$$

und die Länge eines pariser Fußes, oder

$$\mu' = 0{,}3248\,3943\,187[1 - 0{,}0000\,1070\tau + 0{,}0000\,1445(\tau - 13)] \text{ Meter.}$$

Für die angenommenen Metalle ist daher

1 Meter $= 3{,}0790\,2228\,57$ pariser Fuß für $\tau = 0°$ R

1 Meter $= 3{,}0788\,7498\,22$ pariser Fuß für $\tau = 13°$ R

1 par. Fuß $= 0{,}3247\,7841\,078$ Meter für $\tau = 0°$ R

1 par. Fuß $= 0{,}3247\,9424\,671$ Meter für $\tau = 13°$ R.

§. 97.

Zusatz. Für den Fall, daß beide Maßstäbe von einerlei Materie sind, erhält man $\lambda = \lambda'$. Weil aber die zuletzt gefundenen Ausdrücke nur näherungsweise gelten, so nehme man den vollständigen unabgekürzten Ausdruck

$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{1 + \lambda\tau}{1 + \lambda t} \cdot \frac{1 + \lambda' t'}{1 + \lambda'\tau}$. Hierin $\lambda' = \lambda$ gesetzt, giebt

$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t}$ oder beinahe

$\mu = \frac{m}{m'}(1 + \lambda t')(1 - \lambda t)\mu'$ oder

$$= \frac{m}{m'}[1 + \lambda(t' - t)]\mu' \text{ und}$$

$$\mu' = \frac{m'}{m}(1 + \lambda t)(1 - \lambda t')\mu, \text{ oder}$$

$$= \frac{m'}{m}[1 - \lambda(t' - t)]\mu.$$

1. Beispiel. Die Abmessungen eines Meters und pariser Fußes, welche beide auf Messing getragen sind, sollen mit einander verglichen werden, wenn der Meter bei 0 Grad 443,295936 pariser Linien und der Fuß bei 13 Grad R, 144 dieser Linien enthält. Hier ist $m = 443{,}295936$, $m' = 144$; $t = 0$ und $t' = 13$ also $\frac{m}{m'} = 3{,}078444$ und $\frac{m'}{m} = 0{,}3248\ 3943\ 187$, daher wenn man die eigenthümliche Längenausdehnung des Messings oder $\lambda = 0{,}0000\ 2333$, $\mu = 1$ Meter und $\mu' = 1$ pariser Fuß setzt, so erhält man für jede Temperatur, unter welcher sich beide Maßstäbe zugleich befinden

1 Meter = 3,0793 7766 pariser Fuß und

1 pariser Fuß = 0,3247 4094 Meter.

2. Beispiel. Die Abmessungen eines Meters und eines preußischen Fußes, beide auf Eisen getragen, sollen bei einerlei Temperatur mit einander verglichen werden, wenn der Meter bei 0 Grad, 443,295 936 pariser Linien, und der preußische Fuß bei 13 Grad R, 139,13 par. Linien hält. Hier ist $m = 443{,}295\,936$; $m' = 139{,}13$; $t = 0$ und $t' = 13$, also

$\frac{m}{m'} = 3{,}1861\ 9949\ 687$; $\frac{m'}{m} = 0{,}3138\ 5354\ 275$ und wenn man die eigenthümliche Längenausdehnung des Eisens oder $\lambda = 0{,}0000\ 1445$, $\mu = 1$ Meter und $\mu' = 1$ preuß. Fuß setzt, so findet man für jede Temperatur, unter welcher sich beide eiserne Maßstäbe befinden,

1 Meter = 3,1867 9802 preußische Fuß

1 preußischer Fuß = 0,3137 9459 Meter.

3. Beispiel. Sollen der Meter und der preußische Fuß, beide auf Messing getragen, für einerlei Temperatur mit einander verglichen werden, so bleiben die im vorigen Beispiele gefundenen Werthe m und m′ unverändert, nur daß hier die eigenthümliche Längenausdehnung des Messings oder $\lambda = 0{,}0000\,2333$ wird. Hiernach findet man für jede Temperatur, unter welcher sich beide messingene Maßstäbe befinden,

1 Meter = 3,1879 6155 preußische Fuß,

1 preußischer Fuß = 0,3137 5838 Meter.

Das Verhältniß des Meters zum preußischen Fuße ist daher für verschiedene Metalle verschieden.

§. 98.

Die nachstehende Tafel enthält die eigenthümliche Längenausdehnung verschiedener Körper, vom Frostpunkte bis zum Siedepunkte, für jeden Grad des Reaumürschen Thermometers.

Tafel
für die eigenthümliche Längenausdehnung verschiedener Körper durch die Wärme.

Benennung der Materie.	Eigenthümliche Längenausdehnung. Vom Frost- bis Siedepunkt.	Für jeden Grad R λ	Beobachter.
Flintglas, englisches	0,000 81166	0,0000 1015	Laplace u. Lavoisier
Glasstab	0,000 80787	0,0000 1015	Roy
Glasröhren	0,000 77615	0,0000 0970	=
	0,000 83000	0,0000 1037	Deluc
	0,000 83333	0,0000 1042	Smeaton
	0,000 87572	0,0000 1095	Laplace u. Lavoisier
	0,000 89760	0,0000 1122	= = =
Glas, französisches mit Blei	0,000 87199	0,0000 1090	= = =
Spiegelglas von St. Gobin	0,000 89089	0,0000 1114	= = =
Platina	0,000 85655	0,0000 1070	Borda
	0,000 99180	0,0000 1240	Troughton
Spiesglanz	0,001 08330	0,0000 1354	Smeaton
Stahl, ungehärtet	0,001 07875	0,0000 1348	Laplace u. Lavoisier
	0,001 07956	0,0000 1349	= = =
	0,001 15000	0,0000 1437	Smeaton
Gußstahl	0,001 22500	0,0000 1531	=
Stahl, gelb angelaufen, bei 65° angelassen	0,001 23956	0,0000 1594	Laplace u. Lavoisier
Stahl, gehärteter.	0,001 37500	0,0000 1719	Troughton
Gußeisen	0,001 10940	0,0000 1387	Roy
	0,001 11100	0,0000 1389	Lavoisier
Eisen, geschmiedetes	0,001 15600	0,0000 1445	Borda
	0,001 25800	0,0000 1572	Smeaton
	0,001 26660	0,0000 1583	Dulong und Petit
Eisen, schwach geschmiedet	0,001 22045	0,0000 1526	Laplace u. Lavoisier
Eisendrath	0,001 23504	0,0000 1544	= = =

Fortsetzung.

Benennung der Materie.	Eigenthümliche Längenausdehnung. Vom Frost- bis Siedepunkt.	Für jeden Grad R λ	Beobachter.
Eisendrath	0,001 14010	0,0000 1425	Troughton
Wismuth	0,001 39167	0,0000 1740	Smeaton
Gold, reines	0,001 46606	0,0000 1832	Laplace u. Lavoisier
„ pariser,			
ausgeglüht	0,001 51361	0,0000 1892	„ „ „
unausgeglüht	0,001 55155	0,0000 1939	„ „ „
Kupfer, geschlagenes	0,001 71222	0,0000 2140	„ „ „
	0,001 72244	0,0000 2153	„ „ „
	0,001 70000	0,0000 2125	Smeaton
	0,001 78400	0,0000 2230	Borda
Kupfer 8 Theile,			
Zinn 1 Theil . .	0,001 81667	0,0000 2271	Smeaton
Messing, gegossenes	0,001 86671	0,0000 2334	Laplace u. Lavoisier
	0,001 88971	0,0000 2362	„ „ „
	0,001 87500	0,0000 2344	Smeaton
Messing 16 Theile,			
Zinn 1 Theil . .	0,001 90833	0,0000 2385	„
Messingdrath . . .	0,001 93333	0,0000 2416	„
Silber	0,001 90500	0,0000 2381	Berthoud
„ pariser . . .	0,001 90868	0,0000 2386	Laplace u. Lavoisier
Kapellensilber . . .	0,001 90974	0,0000 2387	„ „ „
Zinn, indisches . . .	0,001 93765	0,0000 2422	„ „ „
„ von Falmouth	0,002 17298	0,0000 2716	„ „ „
Messing 2 Theile,			
Zink 1 Theil . .	0,002 05833	0,0000 2573	Smeaton
Zinn, körniges, gemeines	0,002 48333	0,0000 3104	„
Blei 2 Theile, Zinn			
1 Theil	0,002 50833	0,0000 3135	„
Blei	0,002 84836	0,0000 3560	Laplace u. Lavoisier
	0,002 86667	0,0000 3584	Smeaton
	0,003 08600	0,0000 3857	Berthoud
Zink, gegossenes . .	0,002 94167	0,0000 3677	Smeaton
„ gehämmertes	0,003 10833	0,0000 3885	„

Nach P. Heinrich beträgt die Ausdehnung des Eises beim Frostpunkte, 0,024 5120.

§. 99.

Von der Ausdehnung nach der Länge eines Körpers ist die Ausdehnung seines ganzen Raums oder seines Inhalts zu unterscheiden. Wird nun eben so, wie bei der Längenausdehnung, der Inhalt eines Körpers beim Frostpunkte oder bei 0 Grad R, sein absoluter Inhalt genannt und durch V ausgedrückt; bezeichnet ferner W den Inhalt dieses Körpers bei t Grad irgend eines Thermometers, so ist

$W - V$ die Inhaltsausdehnung des Körpers bei t Grad.

Sind nun L, L' die zusammengehörigen Längen und W, W' die Inhalte desselben Körpers, welche den Temperaturen t, t' irgend eines Thermometers, dessen Frostpunkt mit 0 bezeichnet ist, entsprechen: so verhält sich wegen Aehnlichkeit dieser Körper $W : W' = L^3 : (L')^3$, oder weil §. 95. (IV) $L' = [1 + \lambda(t' - t)] L$, so wird

$$\text{(I)}\quad W' = [1 + \lambda(t' - t)]^3 W.$$

Weil $L = [1 - \lambda(t' - t)] L'$ ist, §. 95. (V), so erhält man auch mittelst der zuerst gefundenen Proportion

$$\text{(II)}\quad W = [1 - \lambda(t' - t)]^3 W'.$$

Für $t' = 0$ wird $W' = V$. Diese Werthe in (I) und (II) gesetzt, geben

$$\text{(III)}\quad V = (1 - \lambda t)^3 W.$$

$$\text{(IV)}\quad W = (1 + \lambda t)^3 V.$$

Bei-

Beispiel. Der Inhalt eines preußischen Scheffels beträgt 3072 preußische Kubikzoll bei einer Temperatur von 13 Grad R; wie groß wird der absolute Inhalt dieses Gemäßes sein? Hier ist $W = 3072$, $t = 13$ und $\lambda = 0{,}0000\,2334$, daher findet man nach (III) den Inhalt des messingenen preußischen Scheffels bei 0 Grad oder

$V = (1 - 13 \cdot 0{,}0000\,2334)^3 \cdot 3072 = 3069{,}2043$ preußische Kubikzoll.

Für den Inhalt dieses Scheffels bei der Temperatur von 15 Grad R findet man nach (I)

$W' = (1 + 2 \cdot 0{,}0000\,2334)^3 \cdot 3072 = 3072{,}2463$ preußische Kubikzoll.

§. 100.

1. Zusatz. Weil $(1 \pm \lambda t)^3 = 1 \pm 3\lambda t + 3\lambda^2 t^2 \pm \lambda^3 t^3$ ist, so kann man, wenn nicht die größte Genauigkeit erfordert wird, weil λ^2 und λ^3 nur sehr klein sind, die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks weg lassen; alsdann erhält man:

$$\text{(I)} \quad W' = [1 + 3\lambda(t' - t)]\,W,$$
$$\text{(II)} \quad W = [1 - 3\lambda(t' - t)]\,W',$$
$$\text{(III)} \quad V = (1 - 3\lambda t)\,W,$$
$$\text{(IV)} \quad W = (1 + 3\lambda t)\,V,$$

wo W, W' und V die Inhalte des Körpers bei t, t' und 0 Grad bezeichnen.

§. 101.

2. Zusatz. Der zuletzt gefundene Ausdruck giebt $\frac{W - V}{V} = 3\lambda$ oder §. 95. (III)

$$\frac{W-V}{V} = 3 \cdot \frac{L-K}{K}.$$ Eben so
$$\frac{W'-V}{V} = 3 \cdot \frac{L'-K}{K},$$ daher

$$\text{(I)} \quad W-V : W'-V = L-K : L'-K,$$

oder für zusammengehörige Temperaturen eines festen Körpers, wenn nicht die größte Genauigkeit erforderlich ist, verhalten sich die Inhaltsausdehnungen wie die Längenausdehnungen desselben.

Nun verhält sich ferner §. 94.

$$L-K : L'-K = t : t',$$ daher auch

$$\text{(II)} \quad W-V : W'-V = t : t',$$

oder die Inhaltsausdehnungen verhalten sich wie die entsprechenden Temperaturen.

Wenn $L-K = \Delta K$ die Längenausdehnung und $W-V = \Delta V$ die zugehörige Inhaltsausdehnung eines Körpers bezeichnet, so ist

$$\frac{W'-V}{V} = 3\,\frac{L-K}{K}$$ oder $$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta K}{K}$$ oder

$$\text{(III)} \quad \Delta V = 3 \,.\, \Delta K \,.\, \frac{V}{K}.$$

Wenn daher die Längenausdehnung ΔK eines Körpers bekannt ist, so kann daraus die zugehörige Inhaltsausdehnung ΔV gefunden werden.

§. 102.

Zur bequemen Vergleichung der Inhaltsausdehnungen setze man den absoluten Inhalt eines Körpers $= 1$ und die Inhaltsausdehnung desselben für jeden Grad eines Thermometers $= \delta$, welche hier die eigenthümliche Inhaltsausdehnung heißt: so wird nach §. 101. (III) $\Delta V = \delta t$ für $V = 1$ und $\Delta K = \lambda t$

für K = 1. Diese Werthe in den angeführten Ausdruck gesetzt, giebt

$$\delta = 3\lambda$$

oder die eigenthümliche Inhaltsausdehnung eines Körpers ist dreimal so groß als die Längenausdehnung desselben.

Hiernach erhält man auch §. 100.

$$W' = [1 + \delta(t' - t)]\,W = [1 - \delta(t - t')]\,W$$

$$W = [1 - \delta(t' - t)]\,W' = [1 + \delta(t - t')]\,W'.$$

$$V = (1 - \delta t)\,W.$$

$$W = (1 + \delta t)\,V.$$

§. 103.

Der Ausdruck $\delta = 3\lambda$ kann nur als ein annähernder Werth für δ, nach der Voraussetzung §. 95., angesehen werden. Eigentlich ist δ nur $= 3\lambda$ für $t = 0$. Denn es verhält sich nach der angenommenen Bezeichnung

$V : W - V = 1 : \delta t$, daher wird

$W = (1 + \delta t)\,V$. Dies mit (IV) §. 99. verglichen, giebt $1 + \delta t = (1 + \lambda t)^3$ oder

$$\delta t = 3\lambda t + 3\lambda^2 t^2 + \lambda^3 t^3, \text{ folglich}$$

$$\text{(I)} \quad \delta = 3\lambda + 3\lambda^2 t + \lambda^3 t^2.$$

Wächst hiernach die eigenthümliche Längenausdehnung mit der zunehmenden Wärme gleichförmig, so wird die eigenthümliche Inhaltsausdehnung in einem höhern Verhältniß zunehmen.

Fände man hingegen aus der beobachteten Inhaltsausdehnung eines Körpers, daß die eigenthümliche Inhaltsausdehnung mit der zunehmenden Wärme gleichförmig wächst: so erhält man, wenn die größte Genauigkeit verlangt wird, wegen $(1+\lambda t)^3 = 1 + \delta t$ oder

$$\lambda = \frac{\sqrt[3]{(1+\delta t)} - 1}{t}.$$

Sucht man dafür einen Näherungswerth, so wird (H. Analys. §. 332.)

$$\text{(II)} \quad \lambda = \frac{\delta}{3 + \delta t}.$$

§. 104.

Bezeichnen F, F′ und f die Flächenausdehnungen eines Körpers bei t, t′ und o Grad R, so erhält man wie §. 99.

$$F : F' = L^2 : (L')^2 \text{ also}$$
$$F' = [1 + \lambda(t' - t)]^3 F \text{ und}$$
$$F = [1 - \lambda(t' - t)]^3 F'$$

oder wie §. 100.

$$\text{(I)} \quad F' = [1 + 2\lambda(t' - t)]\, F$$
$$\text{(II)} \quad F = [1 - 2\lambda(t' - t)]\, F'$$
$$\text{(III)} \quad F = (1 + 2\lambda t)\, f$$
$$\text{(IV)} \quad f = (1 - 2\lambda t)\, F.$$

Es ist aber $\delta = 3\lambda$ (§. 102.) also $\lambda = \frac{1}{3}\delta$ daher $2\lambda = \frac{2}{3}\delta$, folglich auch

$$\text{(V)} \quad F = (1 + \tfrac{2}{3}\delta t)\, f \text{ und}$$
$$\text{(VI)} \quad f = (1 - \tfrac{2}{3}\delta t)\, F.$$

§. 105.

Zur Angabe des eigenthümlichen oder Eigengewichts eines Körpers, wird das Eigengewicht des Wassers = 1 gesetzt. In denjenigen Fällen, welche keine besondere Genauigkeit erfordern, pflegt man zwar die Temperatur des Wassers nicht zu berücksichtigen, obgleich die Eigengewichte des Wassers bei verschiedenen Wärmegraden sehr verschieden ausfallen, wie dies §. 108. näher nachgewiesen wird. Soll daher das Eigengewicht eines Körpers mit Genauigkeit angegeben werden, so muß nicht nur der Wärmegrad bekannt sein, auf welchen sich dieses Eigengewicht bezieht, sondern es muß auch bestimmt sein, für welchen Wärmegrad das Eigengewicht des reinsten Wassers = 1 gesetzt wird, weil sich hierauf alle Eigengewichte anderer Materien beziehen. Bei den folgenden Untersuchungen wird durchgängig vorausgesetzt, daß das Eigengewicht des reinsten Wassers bei der Temperatur des thauenden Eises oder bei $0°$ R = 1 sei, weshalb man auch diese Temperatur beim Frostpunkte des Thermometers, wenn das Wasser seine Flüssigkeit noch nicht verloren hat, die Normaltemperatur zu nennen pflegt; auch wird man das absolute Gewicht eines preußischen Kubikfußes Wasser bei dieser Temperatur, in preußischen Pfunden ausgedrückt, durch γ bezeichnen. Für das Maaß und Gewicht eines andern Landes erhält alsdann γ andere Werthe.

Für irgend eine Temperatur von t' Grad R, sei ω' das dazu gehörige Eigengewicht des Wassers, und γ' das dazu gehörige absolute Gewicht eines Kubikfußes Wasser: so wird (St. §. 74. I.)

$$\text{(I)}\quad \gamma' = \omega' \gamma.$$

Sind die Inhalte zweier Körper bei einerlei Temperatur einander gleich, aber ihre Gewichte verschieden: so bezeichne P und P' die absoluten Gewichte, g und g' die Eigengewichte und V den gemeinschaftlichen Inhalt beider Körper; alsdann wird (§. 45.) $P = g\gamma V$ und $P' = g'\gamma V$, also

$$\text{(II)}\ \frac{P}{P'} = \frac{g}{g'} \text{ oder } P : P' = g : g',$$

daher wenn die Inhalte zweier Körper einander gleich sind, so verhalten sich ihre absoluten Gewichte, wie die zugehörigen Eigengewichte, bei einerlei Wärmegrad.

Wenn die Gewichte zweier Körper einander gleich, aber ihre Inhalte verschieden sind, so bezeichnen W und W' die Inhalte, g und g' die Eigengewichte, und P das gemeinschaftliche absolute Gewicht beider Körper; daher erhält man (§. 46.)

$$P = g\gamma W = g'\gamma W', \text{ folglich}$$

$$\text{(III)}\ \frac{g}{g'} = \frac{W'}{W} \text{ oder } g : g' = W' : W,$$

oder wenn die absoluten Gewichte zweier Körper einander gleich sind, so verhalten sich ihre Eigengewichte umgekehrt wie die zugehörigen Inhalte derselben.

Haben zwei verschiedene Körper einerlei Eigengewicht, aber verschiedene absolute Gewichte P, P' und Inhalte W, W': so ist, wenn g das gemeinschaftliche Eigengewicht bezeichnet, $P = g\gamma W$ und $P' = g\gamma W'$, folglich

$$\text{(IV)}\ \frac{P}{P'} = \frac{W}{W'} \text{ oder } P : P' = W : W',$$

oder die absoluten Gewichte zweier Körper, welche einerlei Eigengewicht haben, verhalten sich wie ihre Inhalte.

§. 106.

Wenn gleich den vorhergehenden Bestimmungen gemäß, hier durchgängig das Eigengewicht des Wassers bei 0 Grad R = 1 gesetzt wird, so findet man doch öfter Angaben für das Eigengewicht eines Körpers unter der Voraussetzung, daß das Eigengewicht des Wassers für irgend eine andere Temperatur = 1 sei. Die Angaben des Eigengewichts einer und derselben Materie, müssen daher sehr verschieden ausfallen, nachdem eine oder die andere dieser Voraussetzungen angenommen ist.

Setzt man für o Grad R das Eigengewicht des Wassers = 1 und das Gewicht eines Kubikfußes dieses Wassers $= \gamma$; ferner für t Grad R das Eigengewicht des Wassers $= \omega$ und das Gewicht von einem Kubikfuße dieses Wassers $= \gamma'$, so ist $\gamma' = \omega\gamma$ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bei t Grad R.

Wäre nun nach einer andern Voraussetzung, das Eigengewicht des Wassers für t Grad R = 1 gesetzt, und für o Grad $R = \varphi$, so verhält sich $1 : \omega = \varphi : 1$, daher ist $\omega\varphi = 1$ also

$$\text{(I)} \quad \varphi = \frac{1}{\omega} \text{ oder } \omega = \frac{1}{\varphi}.$$

Nun war $\gamma' = \omega\gamma$, daher wird auch $\gamma' = \frac{1}{\varphi}\gamma$ oder

$$\text{(II)} \quad \gamma = \varphi\gamma'.$$

Unter der Voraussetzung, daß g das Eigengewicht irgend eines Körpers bei o Grad R ist, wenn das Wasser bei o Grad R = 1 gesetzt wird, sei h das Eigengewicht dieses Körpers bei o Grad R, wenn das Eigengewicht des Wassers bei t Grad R = 1 angenommen wäre. Ist nun P das Gewicht und V der Inhalt dieses Körpers, bei o Grad R, γ das Gewicht von einem Kubikfuße Wasser bei o Grad R und γ' das Gewicht von einem Kubikfuße Wasser bei t Grad R, so wird (§. 45.)

$P = g\gamma V = h\gamma' V$ also $g = \frac{\gamma'}{\gamma} h$ oder wegen $\frac{\gamma'}{\gamma} = \omega$,

$$\text{(III)}\quad g = \omega h,$$

wo ω das Eigengewicht des Wassers bei t Grad R bezeichnet.

§. 107.

Für diejenigen Körper, welche durch die Wärme gleichförmig ausgedehnt werden, läßt sich mittelst der eigenthümlichen Inhaltsausdehnung δ und des bekannten Eigengewichtes bei irgend einem Thermometergrad, das Eigengewicht für jeden andern Wärmegrad finden. Bezeichnen g, g' die Eigengewichte; t, t' die zugehörigen Thermometergrade; W, W' die Inhalte eines Körpers, dessen eigenthümliche Inhaltsausdehnung $= \delta$ ist: so wird §. 105. (III),

$gW = g'W'$ also $\frac{W'}{W} = \frac{g}{g'}$. Ferner ist §. 102.

$$\frac{W'}{W} = \frac{1+\delta t'}{1+\delta t}, \text{ folglich}$$

$$\text{(I)}\quad g = \frac{1+\delta t'}{1+\delta t} g',$$

oder beinahe

$$g = [1 + \delta(t' - t)] g'.$$

Aus (I) erhält man ferner die eigenthümliche Inhaltsausdehnung für jeden Grad R

$$\text{(II)}\quad \delta = \frac{g - g'}{g't' - gt}.$$

§. 108.

Bei den festen Körpern konnte wegen ihrer geringen Ausdehnung durch die Wärme angenommen werden, daß sich diese Ausdehnungen wie die entsprechenden Temperaturen verhielten, obgleich diese Voraussetzung nicht in aller Schärfe gültig ist. Ganz unanwendbar ist diese Voraussetzung auf den größten Theil der flüssigen Körper, weil bei denselben andere Verhältnisse zwischen der Ausdehnung und Temperatur gefunden werden.

Unter allen flüssigen Materien verdient das Wasser, wegen seiner mannigfaltigen Beziehungen bei der Untersuchung des Eigengewichts fester Körper, eine vorzügliche Aufmerksamkeit. Zu den wichtigsten Versuchen über die Ausdehnung des Wassers gehören die von Deluc (Untersuchungen über die Atmosphäre. Leipzig 1776. 2. Theil, S. 424. und 513.), Blagden und Gilpin (Philosophical Transaction. 1792. p. 428. und 1794. p. 382. oder Gren's neues Journal der Physik, Leipzig 1795. 2. Bd. S. 374.), Schmidt (Gren's neues Journ. d. Phys. Leipzig 1795. 1. Bd. S. 343.) und Charles (Biot, Traité de Physique, Paris 1816. T. I. p. 425.), vorzüglich aber die neusten hierher gehörigen sorgfältigen Versuche von Hällström (Vetenkaps academiens Handlingar, 1823. oder Poggendorff's Annalen der Physik, Leipzig 1724. 1. Bd. S. 129. u. f.). Setzt man das Eigengewicht des Wassers bei einer Temperatur von Null Grad = 1, und bezeichnet durch (y) das Eigengewicht bei einer Temperatur von t Grad C: so erhält man nach den Hällströmschen Versuchen

$$(y) = 1 + 0{,}000\,052\,939\,t - 0{,}000\,006\,5322\,t^2 + 0{,}000\,000\,01445\,t^3.$$

Sucht man hieraus das Eigengewicht y für Grade des Reaumurschen Quecksilber-Thermometers, so muß man nach §. 93. (V), $\frac{5}{4}t$ statt t setzen und erhält alsdann

$$(I)\ y = 1 + 0{,}000\,066\,173\,75\,t - 0{,}000\,010\,206\,5625\,t^2 + 0{,}000\,000\,028\,222\,656\,t^3.$$

Diese allgemeinen Ausdrücke können nur innerhalb der Grenzen zwischen 0 und $32\frac{1}{2}$° C oder 26° R angewandt werden, weil die Versuche, worauf sie sich gründen, nur innerhalb dieser Grenzen angestellt sind.

Hiernach entsteht folgende Tafel zur Vergleichung der Eigengewichte des Wassers bei verschiedenen der am meisten vorkommenden Temperaturen.

Grad C	Eigengewicht nach Hällström	Grad C	Eigengewicht nach Hällström
0	1,000 0000	11	0,999 8112
1	1,000 0466	12	0,999 7196
2	1,000 0799	13	0,999 6160
3	1,000 1004	14	0,999 5005
4	1,000 1082	15	0,999 3731
4,1	1,000 10824	16	0,999 2340
5	1,000 1032	17	0,999 0832
6	1,000 0856	18	0,998 9207
7	1,000 0555	19	0,998 7468
8	1,000 0129	20	0,998 5615
9	0,999 9579	21	0,998 3648
10	0,999 8906	22	0,998 1569

Fortsetzung

Grad C	Eigengewicht nach Hällström	Grad C	Eigengewicht nach Hällström
23	0,997 9379	27	0,996 9518
24	0,997 7077	28	0,996 6783
25	0,997 4666	29	0,996 3941
26	0,997 2146	30	0,996 0993

Grad R	Eigengewicht nach Hällström	Grad R	Eigengewicht nach Hällström
0	1,000 0000	13	0,999 1974
1	1,000 0560	14	0,999 0054
2	1,000 0917	15	0,998 7914
3	1,000 1074	16	0,998 5615
3,3	1,000 10824	17	0,998 3139
4	1,000 1032	18	0,998 0488
5	1,000 0792	19	0,997 7663
6	1,000 0357	20	0,997 4666
7	0,999 9728	21	0,997 1499
8	0,999 8906	22	0,996 8174
9	0,999 7894	23	0,996 4661
10	0,999 6693	24	0,996 0993
11	0,999 5305	25	0,995 7162
12	0,999 3731	26	0,995 3169

Wenn gleich die vorstehenden Tafeln die Eigengewichte des Wassers nicht bis zum Siedepunkt angeben, so verdienen sie doch wegen der Sorgfalt, mit welcher die Versuche angestellt sind, vor andern den Vorzug. Zur Erlangung einer Uebersicht, wie sich die Eigengewichte des Wassers, vom Frost- bis Siedepunkt verändern, kann nachstehende von Biot (Traité de Physique, T. I. p. 425.) mitgetheilte Tafel dienen, welche nach den Versuchen von Charles berechnet ist.

Grad R	Eigengewicht nach Charles	Grad R	Eigengewicht nach Charles	Grad R	Eigengewicht nach Charles
0	1,000 0000	27	0,994 6517	54	0,978 1423
1	1,000 0447	28	0,994 2154	55	0,977 3754
2	1,000 0694	29	0,993 7637	56	0,976 5923
3	1,000 0739	30	0,993 2970	57	0,975 8003
4	1,000 0593	31	0,992 8159	58	0,974 9982
5	1,000 0241	32	0,992 3200	59	0,974 1877
6	0,999 9700	33	0,991 8098	60	0,973 3683
7	0,999 8966	34	0,991 2856	61	0,972 5403
8	0,999 8041	35	0,990 7473	62	0,971 7040
9	0,999 6925	36	0,990 1952	63	0,970 8595
10	0,999 5620	37	0,989 6298	64	0,970 0071
11	0,999 4131	38	0,989 0512	65	0,969 1467
12	0,999 2457	39	0,988 4592	66	0,968 2788
13	0,999 0600	40	0,987 8544	67	0,967 4035
14	0,998 8564	41	0,987 2370	68	0,966 5212
15	0,998 6350	42	0,986 6069	69	0,965 6317
16	0,998 3958	43	0,985 9646	70	0,964 7353
17	0,998 1390	44	0,985 3103	71	0,963 8326
18	0,997 8650	45	0,984 6441	72	0,962 9232
19	0,997 5739	46	0,983 9665	73	0,962 0076
20	0,997 2663	47	0,983 2771	74	0,961 0860
21	0,996 9411	48	0,982 5766	75	0,960 1585
22	0,996 5997	49	0,981 8648	76	0,959 2256
23	0,996 2419	50	0,981 1425	77	0,958 2872
24	0,995 8681	51	0,980 4094	78	0,957 3433
25	0,995 4783	52	0,979 6660	79	0,956 3945
26	0,995 0729	53	0,978 9124	80	0,955 4406

Die angeführten Gilpinsche Versuche über die Eigengewichte des reinsten Wassers, welche ältern Untersuchungen oft zur Grundlage dienen, sollen deshalb hier noch angeführt werden.

Grad F	Eigengewicht des Wassers nach Gilpin		Grad F	Eigengewicht des Wassers nach Gilpin	
32	1,000 82	1,000 000	65	0,999 50	0,998 681
35	1,000 90	1,000 080	70	0,998 94	0,998 121
40	1,000 94	1,000 120	75	0,998 30	0,997 482
45	1,000 86	1,000 040	80	0,997 59	0,996 773
50	1,000 68	0,999 860	85	0,996 81	0,995 993
55	1,000 38	0,999 560	90	0,995 98	0,995 164
60	1,000 00	0,999 181	95	0,995 02	0,994 205
65	0,999 50	0,998 681	100	0,994 02	0,993 206

§. 109.

Setzt man den Inhalt eines Wasserkörpers bei 0 Grad $= 1$ und bei t Grad $= 1 + d$, so ist d die Inhaltsausdehnung von 0 bis t Grad, und weil sich, bei gleichem absoluten Gewichte, die Inhalte umgekehrt wie die Eigengewichte verhalten (§. 105. III), so sei ω das Eigengewicht bei t Grad, wenn dasselbe bei 0 Grad $= 1$ ist. Hiernach verhält sich $1 : 1 + d = \omega : 1$, und man findet

$$1 + d = \frac{1}{\omega} \text{ oder } d = \frac{1-\omega}{\omega}.$$

Nach den Versuchen von Charles ist daher für $t = 80^\circ$;

$$\frac{1}{\omega} = 1,0466376 = 1 + d;$$

daher findet man die Inhaltsausdehnung des Wassers vom Frost- bis Siedepunkt = 0,0466376. Nach Schmidt's Versuchen (Gren's Journ. d. P. 1. Bd. S. 223.) findet man diese Inhaltsausdehnung = 0,045176.

Daß die größte Dichtigkeit des Wassers nicht bei 0 Grad liegt, geht aus den im vorigen §. angeführten Tafeln hervor, und man kann nach den sorgfältigen Hällströmschen Versuchen annehmen, daß das Wasser seine größte Dichtigkeit, bei

$$4{,}108^\circ\,\mathrm{C} = 3{,}286^\circ\,\mathrm{R} = 39{,}394^\circ\,\mathrm{F}$$

erhält, wofür man 3,3° R annehmen kann. Tralles fand 39,8° F = 3,48° R (Mém. de l'acad. de Berlin, 1804. p. 12.).

Nach der Maaß- und Gewichtsordnung für die preußischen Staaten vom Jahr 1816. soll das preußische Pfund, mit dem sechs und sechszigsten Theil des Gewichts eines preußischen Kubikfußes destillirten Wassers im luftleeren Raume, bei einer Temperatur von 15° R überein kommen. Sucht man hiernach das Gewicht eines preußischen Kubikfußes Wassers für verschiedene Wärmegrade, nach den Hällströmschen Versuchen (§. 108.), so entstehen folgende Vergleichungen.

Ein preußischer Kibikfuß Wasser im luftleeren Raume wiegt, bei

Grad R	Preuß. Pfund	Grad R	Preuß. Pfund
0	66,079 8641	10	66,058 8115
1	66,083 5646	11	66,048 8396
2	66,085 9236	12	66,038 4387
3	66,086 9611	13	66,026 8218
3,3	66,087 0166	14	66,014 0089
4	66,086 6836	15	66,000 0000
5	66,085 0976	16	65,984 8082
6	66,082 2232	17	65,968 4469
7	66,078 0667	18	65,950 9291
8	66,072 5993	19	65,932 2615
9	66,065 9477	20	65,912 4574

Ein preußischer Kubikzoll Wasser im luftleeren Raume wiegt, bei

Grad R	Preuß. Loth	Grad R	Preuß. Loth
0	1,223 7012	10	1,223 2965
1	1,223 7697	11	1,223 1267
2	1,223 8134	12	1,222 9340
3	1,223 8326	13	1,222 7189
3,3	1,223 8336	14	1,222 4816
4	1,223 8275	15	1,222 2222
5	1,223 7981	16	1,221 9409
6	1,223 7449	17	1,221 6379
7	1,223 6679	18	1,221 3135
8	1,223 5659	19	1,220 9678
9	1,223 4435	10	1,220 6011

§. 110.

Aufgabe. Der Inhalt W eines Gefäßes bei t Grad R ist gegeben; man sucht das Gewicht P′ des reinsten Wassers, welches dieses Gefäß bei einer Temperatur von t′ Grad R enthält?

Auflösung. Der Inhalt W′ des Gefäßes bei t′ Grad R ist, wenn λ die eigenthümliche Längenausdehnung des Gefäßes bezeichnet (§. 99.)

$$W' = [1 + \lambda(t' - t)]^3 W \text{ oder (§. 100.)}$$
$$W' = [1 + 3\lambda(t' - t)] W \text{ beinahe.}$$

Bezeichnet ferner γ' das Gewicht von einem Kubikfuß des reinsten Wassers bei t′ Grad R, so wird $P' = \gamma' W'$ oder man findet das gesuchte Gewicht, in preußischen Pfunden

$$P' = \gamma' [1 + \lambda(t' - t)]^3 W' \text{ oder}$$
$$P' = \gamma' [1 + 3\lambda(t' - t)] W \text{ beinahe.}$$

Beispiel. Der Inhalt eines messingenen Scheffels bei 13 Grad R sei 3072 preuß. Kubikzoll; man sucht das Gewicht P′ des reinsten Wassers, welches in diesem Scheffel bei 15 Grad R im luftleeren Raume enthalten ist: so wird hier $W = \frac{3072}{1728} = \frac{16}{9}$ Kubikfuß; $t = 13$, $t' = 15$; $\lambda = 0{,}00002334$ und $\gamma' = 66$ (§. 5.) daher nach dem ersten Ausdruck

$P' = 66 \cdot 1{,}000\,13997 \cdot \frac{16}{9} = 117{,}349756$ pr. Pfund, oder nach dem zweiten Ausdruck

$P' = 66 \cdot 1{,}000\,14004 \cdot \frac{16}{9} = 117{,}349765$ pr. Pfund.

§. 111.

Ueber die Ausdehnung des Weingeistes oder Alkohols und über die Vermischung desselben mit Wasser,

ser, wenn diese Mischungen nach ihrem Gewichte angegeben werden, haben Blagden und Gilpin vollständige Versuche angestellt (Philosophical Transactions etc. 1794. P. II. p. 275. etc.) und entsprechende Resultate in Tafeln mitgetheilt, wovon sich einige in Grens neuem Journal, 2. Band, S. 365. u. f. befinden.

Bei den folgenden Tafeln ist vorausgesetzt, daß das Eigengewicht des Wassers bei 60 Grad F = 1 und das Eigengewicht des reinen Alkohols bei eben dieser Temperatur = 0,825 sei. Die Buchstaben A und W, bedeuten Alkohol und Wasser.

I. Tafel. Reiner Alkohol.

Grad F	Eigengewicht	Grad F	Eigengewicht	Grad F	Eigengewicht
30	0,83896	47	0,83120	64	0,82310
31	0,83852	48	0,83073	65	0,82262
32	0,83807	49	0,83025	66	0,82214
33	0,83762	50	0,82977	67	0,82167
34	0,83717	51	0,82929	68	0,82119
35	0,83672	52	0,82881	69	0,82071
36	0,83627	53	0,82833	70	0,82023
37	0,83582	54	0,82784	71	0,81975
38	0,83536	55	0,82736	72	0,81927
39	0,83491	56	0,82689	73	0,81878
40	0,83445	57	0,82642	74	0,81829
41	0,83399	58	0,82594	75	0,81780
42	0,83353	59	0,82547	76	0,81730
43	0,83307	60	0,82500	77	0,81680
44	0,83261	61	0,82453	78	0,81630
45	0,83214	62	0,82405	79	0,81580
46	0,83167	63	0,82357	80	0,81530

II. Tafel.

Vermischung von Alkohol und Wasser.

Grad F	Mischung in Theilen nach dem Gewichte.				
	100 A + 10 W	100 A + 50 W	100 A + 100 W	50 A + 100 W	10 A + 100 W
	Eigengewicht	Eigengewicht	Eigengewicht	Eigengewicht	Eigengewicht
30	0,85957	0,91523	0,94222	0,96719	0,98804
35	0,85729	0,90811	0,94025	0,96579	0,98804
40	0,85507	0,90596	0,93827	0,96434	0,98795
45	0,85277	0,90380	0,93621	0,96280	0,98774
50	0,85042	0,90160	0,93419	0,96126	0,98745
55	0,84802	0,89933	0,93208	0,95966	0,98702
60	0,84568	0,89707	0,93002	0,95804	0,98654
65	0,84334	0,89479	0,92794	0,95635	0,98594
70	0,84092	0,89252	0,92580	0,95469	0,98527
75	0,83851	0,89018	0,92364	0,95292	0,98454
80	0,83603	0,88781	0,92142	0,95111	0,98367

Nach den Versuchen von Tralles (Gilbert's Annalen der Physik, 38. Band, 1811. S. 367.) soll derjenige Alkohol, dessen sich Gilpin zu seinen Versuchen bediente, und der bei 60 Grad F ein Eigengewicht von 0,825 hatte (Tafel I.) kein reiner Alkohol sein, sondern noch 0,0963 seines Gewichts an Wasser beigemischt enthalten. Auch fand Tralles, daß der wasserfreie, absolut reine Alkohol sich eben so gleichförmig ausdehne, als Quecksilber und Luft.

Bei den nachstehenden von Tralles mitgetheilten Tafeln über das Eigengewicht einer Vermischung von reinem Alkohol mit Wasser ist vorausgesetzt worden, daß das Eigengewicht des dichtesten Wassers = 1, und daß bei 60 Grad F das Eigengewicht des Wassers = 0,9991 und des als rein angenommenen Alkohols = 0,7939 bei eben diesem Wärmegrade sei. Auch ist wohl zu bemerken, daß bei den Gilpinschen Versuchen die Theile der Vermischung von Alkohol und Wasser nach dem Gewichte, bei den Trallesschen aber nach dem Inhalte dieser Mischungen oder nach willkührlich anzunehmenden Maaßen von gleichem Inhalte, angenommen sind.

III. Tafel. Vermischung von reinem Alkohol mit Wasser bei 60 Grad F, wenn der Inhalt der Mischung = 100 Maaß angenommen wird.

Alkoh. in 100 Maaß	Eigengewicht	Alkoh. in 100 Maaß	Eigengewicht	Alkoh. in 100 Maaß	Eigengewicht	Alkoh. in 100 Maaß	Eigengewicht
0	0,9991	25	0,9700	50	0,9335	75	0,8765
1	0,9976	26	0,9689	51	0,9315	76	0,8739
2	0,9961	27	0,9679	52	0,9295	77	0,8712
3	0,9947	28	0,9668	53	0,9275	78	0,8685
4	0,9933	29	0,9657	54	0,9254	79	0,8658
5	0,9919	30	0,9646	55	0,9234	80	0,8631
6	0,9906	31	0,9634	56	0,9213	81	0,8603
7	0,9893	32	0,9622	57	0,9192	82	0,8575
8	0,9881	33	0,9609	58	0,9170	83	0,8547
9	0,9869	34	0,9596	59	0,9148	84	0,8518
10	0,9857	35	0,9583	60	0,9126	85	0,8488
11	0,9845	36	0,9570	61	0,9104	86	0,8458
12	0,9834	37	0,9556	62	0,9082	87	0,8428
13	0,9823	38	0,9541	63	0,9059	88	0,8397
14	0,9812	39	0,9526	64	0,9036	89	0,8365
15	0,9802	40	0,9510	65	0,9013	90	0,8332
16	0,9791	41	0,9494	66	0,8989	91	0,8299
17	0,9781	42	0,9478	67	0,8965	92	0,8265
18	0,9771	43	0,9461	68	0,8941	93	0,8230
19	0,9761	44	0,9444	69	0,8917	94	0,8194
20	0,9751	45	0,9427	70	0,8892	95	0,8157
21	0,9741	46	0,9409	71	0,8867	96	0,8118
22	0,9731	47	0,9391	72	0,8842	97	0,8077
23	0,9720	48	0,9373	73	0,8817	98	0,8034
24	0,9710	49	0,9354	74	0,8791	99	0,7988
25	0,9700	50	0,9335	75	0,8765	100	0,7939

In den beiden folgenden Tafeln wird vorausgesetzt, daß sich die angegebenen Zu- oder Abnahmen, auf die letzten Decimalstellen des Eigengewichts beziehen.

IV. Tafel. Vermischung von reinem Alkohol mit Wasser bei Temperaturen von 30 bis 60 Grad F.

Alkoh. in 100 Maaß	Eigengewicht	Zunahme des für 60 Grad F geltenden Eigengewichts, bei folgenden Thermometerständen					
bei 60 Grad F		55°	50°	45°	40°	35°	30°
0	0,9991	4	7	9	9	9	7
5	0,9919	4	7	9	10	10	9
10	0,9857	5	9	12	14	15	15
15	0,9802	6	12	17	21	23	25
20	0,9751	8	16	23	29	35	39
25	0,9700	10	21	31	39	48	56
30	0,9646	13	26	39	51	62	73
35	0,9583	16	31	46	61	75	89
40	0,9510	18	35	52	70	87	103
45	0,9427	19	39	57	76	94	112
50	0,9335	20	40	60	80	99	118
55	0,9234	21	[illegible]	63	84	104	124
60	0,9126	22	43	65	86	107	127
65	0,9013	22	45	67	88	109	130
70	0,8892	22	45	68	90	112	133
75	0,8765	23	46	68	91	113	135
80	0,8631	23	47	70	92	115	137
85	0,8488	23	47	70	93	116	139
90	0,8332	24	48	71	94	117	140

V. Tafel.

Vermischung von reinem Alkohol mit Wasser, bei einer Temperatur von 60 bis 100 Grad F.

Alkoh in 100 Maaß	Eigengewicht	Abnahme des für 60 Grad F geltenden Eigengewichts, bei folgenden Thermometerständen.							
bei 60 Grad F		65°	70°	75°	80°	85°	90°	95°	100°
0	0,9991	5	11	17	24	32	40	50	60
5	0,9919	6	11	18	25	33	42	51	62
10	0,9857	6	13	20	29	37	47	57	68
15	0,9802	7	15	25	34	44	55	67	79
20	0,9751	9	19	30	41	53	66	79	93
25	0,9700	11	24	36	50	63	78	93	109
30	0,9646	14	28	43	59	75	91	108	125
35	0,9583	17	33	50	68	86	104	122	141
40	0,9510	18	37	56	75	94	114	134	154
45	0,9427	20	40	60	80	101	122	143	164
50	0,9335	21	42	63	84	106	128	150	173
55	0,9234	22	43	65	87	109	132	155	178
60	0,9126	22	44	67	90	113	136	159	183
65	0,9013	22	45	68	92	115	138	162	187
70	0,8892	23	46	69	93	117	141	165	190
75	0,8765	23	46	70	94	119	143	167	192
80	0,8631	23	47	71	96	120	144	169	194
85	0,8488	24	48	72	96	121	145	170	195
90	0,8332	24	48	72	97	121	146	171	196

§. 112.

Es würde zu weitläuftig sein, die Versuche über die Ausdehnung noch mehrerer Flüssigkeiten hier auseinander zu setzen, da aus dem Vorhergehenden zu übersehen ist, wie verschieden bei gleicher Zunahme der Wärmegrade, die Ausdehnungen zunehmen. Nur das Quecksilber und die trockne atmosphärische Luft machen hiervon eine Ausnahme; daher ihre Ausdehnung noch besonders untersucht werden soll. Ueber Ausdehnung des Terpentinöls, Baumöls, Vitriolöls und anderer Flüssigkeiten findet man Versuche von Schmidt in Grens angef. Journal, 1. Band, 1795. S. 223.; über Terpentinöl, Schwefelsäure, Salpetersäure u. s. w. in Thomson, System der Chemie, übers. v. Wolf, 1. Band, Berlin 1805. S. 451. und über die Ausdehnung der Salzsolen, die Versuche von Bischof in Gilberts angef. Annalen, 5. Band, 1810. S. 311 und 1815. 21. Band, S. 397.

§. 113.

Die Inhaltsausdehnung des Quecksilbers ist nach den Versuchen von Laplace und Lavoisier (*Biot* Traité de Physique, Tome I. p. 52.) vom Frost- bis Siedepunkt $= \frac{100}{5412} = 0{,}0184775$; man erhält daher, weil sich, den Versuchen gemäß, das Quecksilber innerhalb dieser Grenzen beinahe gleichförmig durch die Wärme ausdehnt, die eigenthümliche Inhaltsausdehnung für jeden Grad R oder

$$\delta = \frac{0{,}0184775}{80} = 0{,}00023096875 = \frac{1}{4330}.$$

Bezeichnen nun

V, W und W' die Inhalte einer Quecksilbermasse bei o, t und t' Grad R, so erhält man (§. 102.)

$$W = \left(1 + \frac{t}{4330}\right) V \text{ und } V = \left(1 - \frac{t}{4330}\right) W$$

$$W' = \left(1 + \frac{t'-t}{4330}\right) W \text{ und } W = \left(1 - \frac{t'-t}{4330}\right) W'.$$

Das Eigengewicht des Quecksilbers ist bei o Grad R = 13,598207, wenn für diese Temperatur das Eigengewicht des Wassers = 1 gesetzt wird (*Biot* a. a. O. p. 405.); man erhält daher (§. 107. I.) für $\delta = \frac{1}{4330}$; $g' = 13,598207$ und $t' = 0$, das Eigengewicht g des Quecksilbers bei t Grad R, oder

$$g = \frac{58880{,}236}{4330 + t} \text{ oder}$$

$$g = 13{,}598207 - 0{,}00314076\,t.$$

§. 114.

Aufgabe. Die Höhe des Quecksilbers in einem hinlänglich hohen cylindrischen Gefäße bei verschiedenen Wärmegraden zu finden.

Auflösung. Für t Grad R bezeichne W den Inhalt und h die Höhe des Quecksilbers im Gefäße, wenn r den Halbmesser des Gefäßes bei diesem Wärmegrad bezeichnet. Für t' Grad R sei alsdann W' der Inhalt und h' die gesuchte Höhe. Die eigenthümliche Inhaltsausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad R werde durch $\delta = \frac{1}{4330}$, und die eigenthümliche Längenausdehnung des Gefäßes durch λ bezeichnet: so findet man für t' Grad R den Halbmesser des Gefäßes (§. 95. V.)

$= [1 - \lambda(t - t')]\, r$, also den wagerechten Querschnitt

$= \pi[1 + \lambda(t' - t)]^2 r^2$. Ferner ist (§. 102.)

$W' = [1 + \delta(t' - t)] W$, oder weil $W = \pi r^2 h$,

$$W' = \pi [1 + \delta(t' - t)] r^2 h, \text{ folglich}$$

$$h' = \frac{\pi[1 + \delta(t' - t)] r^2 h}{\pi[1 + \lambda(t' - t)]^2 r^2} \text{ oder}$$

$$\text{(I) } h' = \frac{1 + \delta(t' - t)}{[1 + \lambda(t' - t)]^2} h.$$

Zur Bildung eines einfacheren Ausdrucks für h' bemerke man, daß

$$[1 + \lambda(t' - t)]^2 = 1 + 2\lambda(t' - t) + \lambda^2(t' - t)^2.$$

Läßt man $\lambda^2(t' - t)^2$ weg, weil λ nur sehr klein ist: so wird

$$\frac{1}{1 + 2\lambda(t' - t)} = 1 - 2\lambda(t' - t) + 4\lambda^2(t' - t)^2 - \ldots.$$

wofür man $1 - 2\lambda(t' - t)$ annehmen kann. Dies giebt

$$h' = [1 + \delta(t' - t)] . [1 - 2\lambda(t' - t)] h$$

oder nahe genug

$$\text{(II) } h' = h + (\delta - 2\lambda)(t' - t) h.$$

Will man den vorstehenden Ausdruck auf Barometerröhren anwenden, so wird (§. 98.) für gläserne Röhren $\lambda = 0{,}0000\ 1095$ und weil $\delta = \frac{1}{4330}$ $= 0{,}00023096875$ ist: so findet man, wenn $\delta - 2\lambda$ $= d$ gesetzt wird, $d = 0{,}000\ 209069$, also

$$\text{(III) } h' = [1 + d(t' - t)] h \text{ oder}$$

$$h' = [1 + 0{,}000209069 (t' - t)] h.$$

Beispiel. An einem Barometer stand bei 18 Grad R, die Höhe des Quecksilbers $= 27{,}5$ pariser Zoll; man sucht die entsprechende Höhe für 12 Grad R. Hier wird $t' - t = 12 - 18 = -6$, also die gesuchte Höhe

$h' = [1 - 0{,}000209069 . 6] . 27{,}5 = 75{,}4655$ pariser Zoll.

Zusatz. Wird nicht die größte Genauigkeit erfordert, so kann man $d = \delta$ setzen. Dies giebt

$$h' = [1 + 0{,}00230969\,(t' - t)]\,h.$$

Hiernach findet man für das vorstehende Beispiel $h' = 27{,}4619$ par. Zoll.

§. 115.

Nach den Versuchen von Gay-Lussac (Gilberts Annalen der Physik, 12. Band, S. 257.) ist die Inhaltsausdehnung der trocknen atmosphärischen Luft, bei einerlei Druck, vom Frost- bis zum Siedepunkte $= 0{,}375$, wenn die Inhaltsausdehnung bei 0 Grad $= 1$ gesetzt wird. Weil nun nach eben diesen Versuchen angenommen werden kann, daß sich diese Luft durch die Wärme gleichförmig ausdehnt: so erhält man die eigenthümliche Inhaltsausdehnung der atmosphärischen Luft, bei einerlei Druck oder Barometerstand, für jeden Grad R, oder

$$\delta = \frac{0{,}375}{80} = \frac{3}{640} = 0{,}004\,6875.$$

Eben dieselbe gleichförmige Ausdehnung bei einerlei Druck fand Gay-Lussac bei dem Wasserstoffgas, Sauerstoffgas, Stickgas, Salpetergas, Ammoniakgas, salzsauren Gas, schwefelsauren Gas und kohlensauren Gas, so daß für diese verschiedenen Gasarten $\delta = 0{,}0046875$ ist.

Für die atmosphärische Luft fand Lambert eben dieselbe Ausdehnung (Pyrometrie, Berlin 1779. S. 47.).

Die vorstehenden Ausdehnungsgesetze elastischer Flüssigkeiten gelten nur dann, wann dieselben einerlei

Druck ausgesetzt sind. Da nun alle bis jetzt bekannten Versuche das Mariottesche Gesetz bestätigen, nach welchem sich, bei einerlei Temperatur, die Dichtigkeiten oder Eigengewichte der Luft wie die Barometerstände verhalten, so bezeichne man durch

g, G, g' die Eigengewichte der Luft bei
t, t', t' Grad R, und bei
h, h, h' pariser Zoll Barometerhöhe, wenn
T, T, T' die entsprechenden Wärmegrade des Quecksilbers der Barometerröhre darstellen; alsdann erhält man, wegen der gleichförmigen Ausdehnung der Luft durch die Wärme, bei einerlei Barometerstand h, nach §. 107. (I)

$$g : G = 1 + \delta t' : 1 + \delta t.$$

Die Anwendung des Mariotteschen Gesetzes erfordert, daß die Barometerstände, welche der Dichtigkeit der Luft proportional sind, sich auf einerlei Wärmegrad des Quecksilbers beziehen. Für die Barometerhöhe h und h' waren T und T' die entsprechenden Wärmegrade; sucht man daher die zugehörigen Quecksilberhöhen, welche einer gemeinschaftlichen Temperatur von t' Grad R entsprechen: so findet man (§. 114. III.) für die Barometerhöhe h bei t' Grad R

$$[1 + d(t' - T)]\, h,$$

und für die Barometerhöhe h' bei t' Grad R

$$[1 + d(t' - T')]\, h'.$$

Weil sich nun, nach dem angeführten Mariotteschen Gesetze, die Eigengewichte der Luft wie die Barometerstände bei einerlei Temperatur verhalten, so findet man auch

$$G : g' = [1 + d(t' - T)]h : [1 + d(t' - T')]h'.$$

Beide Proportionen zusammen gesetzt geben:

$$g : g' = (1 + \delta t')[1 + d(t' - T)]h : (1 + \delta t)[1 + d(t' - T')]h',$$

folglich

$$\text{(I)} \quad g = \frac{1 + \delta t'}{1 + \delta t} \cdot \frac{1 + d(t' - T)}{1 + d(t' - T')} \, \frac{h}{h'} \, g',$$

wo $\delta = 0{,}0046875$ und $d = 0{,}000\,2091$ ist.

Nach den Angaben von Biot (Traité de Physique, Tome I. p. 394.) ist an der Oberfläche des Meers, bei einem Barometerstande von 0,76 Meter = 28,075 pariser Zoll, und bei einer Temperatur von 0 Grad, das Eigengewicht der trocknen Luft = 0,001299075, wenn das Eigengewicht des Wassers bei 3,42 Grad C = 1 gesetzt wird. Sucht man hieraus das Eigengewicht der Luft für den Fall, daß das Eigengewicht des Wassers bei 0 Grad = 1 gesetzt werde (§. 105.): so ist nach Biot (a. a. O. p. 425.) das Eigengewicht des Wassers bei 3,42 Grad C = 1,0000746, wenn das Eigengewicht des Wassers bei 0 Grad = 1 angenommen wird. Hiernach findet man

$$0{,}001299075 \cdot 1{,}0000746 = 0{,}0012991719$$

für das Eigengewicht der trocknen Luft, bei 0 Grad des Thermometers und bei einem Barometerstand von 28,075 pariser Zoll, wenn das Eigengewicht des Wassers bei 0 Grad = 1 gesetzt wird.

Die vorstehenden Werthe auf den allgemeinen Ausdruck (I) angewandt, geben

$t' = T' = 0$; $h' = 28{,}075$; $g' = 0{,}0012991719$ und

$$\delta = \frac{3}{640}; \quad \frac{1 + \delta t'}{1 + \delta t} = \frac{640}{640 + 3t}, \text{ folglich}$$

$$(\text{II}) \quad g = \frac{0{,}0296016029}{640 + 3t}(1 - 0{,}0002091\,T)\,h.$$

Mittelst dieses Ausdrucks läßt sich das Eigengewicht der trocknen atmosphärischen Luft, bei einem Barometerstande von h pariser Zoll und einer gegebenen Temperatur des Quecksilbers von T und der Luft von t Grad R finden, wenn das Eigengewicht des reinsten Wassers für 0 Grad R = 1 gesetzt wird.

Weil der Faktor $(1 - 0{,}0002091\,T)$ für die gewöhnlich vorkommenden Fälle, nur sehr wenig von der Einheit verschieden ist, so erhält man auch, nahe genug das Eigengewicht der trocknen atmosphärischen Luft

$$(\text{III}) \quad g = \frac{0{,}0296016029}{640 + 3t}\,h.$$

Beispiel. Das Eigengewicht der Luft bei 15 Grad R und einem Barometerstande von $28\frac{1}{4}$ pariser Zoll zu finden, wird hier

$$g = \frac{0{,}0296016029}{685} \cdot \frac{113}{4} = 0{,}00122139.$$

§. 116.

Bezeichnet γ das Gewicht eines Kubikfußes des reinsten Wassers im luftleeren Raume, bei einer Temperatur von 0 Grad, so wird §. 109.

$$\gamma = 66{,}0798641 \text{ preuß. Pfund.}$$

Nun sei p das Gewicht einer Luftmasse, deren Inhalt = V bei einer Temperatur von t Grad R ist: so erhält man, wenn g das Eigengewicht dieser Luft bezeichnet,

$$(\text{I}) \quad p = \gamma g V.$$

Werden durchgängig 28 pariser Zoll für den Barometerstand angenommen, so ist nach §. 115. II. $g = \frac{0,8306885}{640 + 3t}$ daher $p = \frac{0,8306885 . \gamma V}{640 + 3t}$ oder den vorstehenden Werth statt γ gesetzt, giebt

$$\text{(II)}\ p = \frac{54,8917829}{640 + 3t} V.$$

Hiernach entsteht folgende Tafel für das Gewicht eines preußischen Kubikfußes Luft, bei einem Barometerstand von 28 pariser Zoll.

Grad R	Preuß. Pfund	Preuß. Loth
0	0,085 7651	2,744 4818
3,3	0,084 4633	2,702 8250
6	0,083 4058	2,668 9865
8	0,082 6659	2,645 3091
10	0,081 9258	2,621 6261
12	0,081 1989	2,598 3660
13	0,080 8421	2,586 9474
14	0,080 4853	2,575 5288
15	0,080 1416	2,564 5328
16	0,079 7848	2,553 1145
18	0,079 0910	2,520 9116
20	0,078 4170	2,509 3432

Das Gewicht eines preußischen Kubikzolls Luft bei einer Temperatur von 0 Grad ist daher = 0,0015 8824 preuß. Loth.

§. 117.

Wegen der Feuchtigkeit, welche sich in der atmosphärischen Luft befindet, wenn Höhen mittelst des

Barometers gemessen werden, setzt Laplace (Exposition du système du monde. 4. édit. Paris 1813. Chap. 16. p. 91.) die Ausdehnung der feuchten Luft, bei einerlei Druck vom Frost- bis zum Siedepunkte, für jeden Grad C = 0,004, daher wird hier $\delta = 0{,}005 = \frac{1}{200}$.

Ist nun die Ausdehnung der feuchten Luft für 0 Grad R = 1, so findet man diese Ausdehnung für t Grad R $= 1 + \frac{t}{200}$.

Ferner wird (a. a. O. p. 89.) an der Oberfläche des Meers, bei einer Temperatur von 0 Grad R und einer Barometerhöhe von 0,76 Meter, das Verhältniß der Luft zum Quecksilber wie 1 : 10477,9 angegeben. Das Eigengewicht des Quecksilbers ist (§. 113.) = 13,598207, daher findet man bei 0 Grad R das Eigengewicht der gewöhnlich feuchten Luft

$$\frac{13{,}598207}{10477{,}9} = 0{,}001297799.$$

Die vorstehenden Werthe auf den allgemeinen Ausdruck §. 115. (I) angewandt, geben $t' = T' = 0$, $h' = 28{,}075$, $g' = 0{,}001297799$, $\delta = 0{,}005$ und $d = 0{,}000209069$, folglich

$$g = \frac{0{,}0092452388}{200 + t}(1 - 0{,}0002091\, T)\, h.$$

§. 118.

Weil die Eigengewichte der Flüssigkeiten mit der zunehmenden Temperatur nicht gleichförmig abnehmen, so kann auch die bisherige Bezeichnung der eigenthümlichen Ausdehnung durch die unveränderliche Größen λ und δ nicht ferner beibehalten werden.

Bezeichnet daher d die Inhaltsausdehnung einer Flüssigkeit von o bis t Grad, wenn der absolute Inhalt bei o Grad = 1 gesetzt wird: so ist der Inhalt bei t Grad = 1 + d.

Bezeichnet nun V den absoluten Inhalt eines flüssigen Körpers, und W, W′ die Inhalte dieses Körpers bei t, t′ Grad: so verhält sich
$V:W = 1:1+d$, und man findet

$$\text{(I)}\quad W = (1+d)V$$

$$\text{(II)}\quad V = \frac{W}{1+d} \text{ oder beinahe (§. 95.)}$$

$$V = (1-d)W.$$

Weil $W' = (1+d')V$ ist, wenn d′ die Inhaltsausdehnung von o bis t′ Grad bezeichnet, so erhält man in Verbindung mit (I)

$$\text{(III)}\quad W' = \frac{1+d'}{1+d}W,$$

oder wie §. 95. beinahe

$$W' = (1+d'-d)W \text{ und}$$

$$W = (1+d-d')W'.$$

Bezeichnen g, g′ die Eigengewichte, welche den Inhaltsausdehnungen d, d′ für die Temperaturen t, t′ entsprechen: so erhält man nach (III) und wegen $\frac{W'}{W} = \frac{g}{g'}$ (§. 105. III)

$$\text{(IV)}\quad g = \frac{1+d'}{1+d}g'$$

und hieraus die Inhaltsausausdehnung von o bis t Grad

$$\text{(V)}\quad d = (1+d')\frac{g'}{g} - 1.$$

Für t = o wird d = o, also wenn g das Eigengewicht eines Körpers bei o Grad und g′ bei t′ Grad

bezeich-

bezeichnet, so erhält man die Inhaltsausdehnung von 0 bis t' Grad, oder

$$(VI) \quad d' = \frac{g}{g'} - 1.$$

§. 119.

So wie jeder ins Wasser versenkte Körper so viel von seinem Gewichte verliert, als das Gewicht des Wassers beträgt, welches er verdrängt hat, eben so verliert jeder in der Luft befindliche Körper so viel von seinem Gewichte, als das Gewicht der verdrängten Luft beträgt (§. 88.), weshalb Körper beim Abwägen in der Luft bald mehr bald weniger von ihrem Gewichte verlieren können.

Die Verschiedenheit des Gewichts eines Körpers, wenn solcher, bei abweichenden Thermometer- und Barometerständen, in der Luft gewogen wird, läßt die Nothwendigkeit übersehen, weshalb bei genauen Ausmittelungen, zur Vermeidung aller Irrungen, die Gewichte der Körper für den luftleeren Raum bestimmt werden, und weshalb sich auch die preußischen, so wie die französischen Gewichte, auf den luftleeren Raum beziehen. Man könnte daher das absolute Gewicht eines Körpers im luftleeren Raum, sein wahres Gewicht nennen.

Es sei K das Gewicht eines Körpers A im luftleeren Raume, und W sein Inhalt bei einer Temperatur von t Grad R. Dieser Körper A werde in der Luft, deren Eigengewicht $= \lambda$ ist, auf eine Wageschale gelegt: so ist

$\lambda\gamma W$ das Gewicht der verdrängten Luft, wenn $\gamma = 66{,}0798641$ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bei 0 Grad bezeichnet.

Der Druck des Körpers A auf die Wageschale im luftleeren Raume ist daher $= R$ und in der Luft

$$= R - \lambda\gamma W.$$

Weil nun alle Ermittelungen über die Gewichte der Körper nur in der Luft angestellt werden, und die Wage nur im Gleichgewichte sich befindet, wenn beide Schalen gleich stark gedrückt werden: so kommt es bei allen dergleichen Abwägungen darauf an, den Druck auf die Wageschale zu ermitteln, und daraus das Gewicht des abzuwägenden Körpers im luftleeren Raume, oder sein wahres Gewicht zu finden. Auch sieht man hieraus, das zwei Körper im luftleeren Raume im Gleichgewichte sein können, ohne daß sie, in der Luft gewogen, einander das Gleichgewicht halten.

Die Werthe von λ können nach dem §. 115. (III) gegebenen allgemeinen Ausdruck berechnet werden. Erhält γ den angegebenen Werth, so muß P in preußischen Pfunden und W in preußischen Kubikfußen ausgedrückt werden.

§. 120.

Aufgabe. Das Gewicht R eines Körpers A für den luftleeren Raum durch Abwägen in der Luft mittelst einer gewöhnlichen gleicharmigen Wage zu finden.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß sich ein Gewicht P, dessen Inhalt bei der Abwägung $= V$, mit dem

Körper A, dessen Inhalt bei eben dieser Temperatur $= W$ sei, im Gleichgewichte befinde: so ist, wenn λ das Eigengewicht der Luft beim Abwägen bezeichnet, der Druck des Körpers A auf seine Wageschale $= R - \lambda\gamma W$ und der Druck des Gewichts P auf seine Wageschale $= P - \lambda\gamma V$. Für das Gleichgewicht erleiden beide Wageschalen gleichen Druck; daher wird $R - \lambda\gamma W = P - \lambda\gamma V$, und man findet das Gewicht des Körpers A für den luftleeren Raum, oder

$$\text{(I)}\quad R = P + \lambda\gamma(W - V).$$

Sind die Inhalte V und W unbekannt, man kennt aber das Eigengewicht w des Körpers A und das Eigengewicht v des Gewichts P: so wird (§. 45.) $W = \frac{R}{w\gamma}$ und $V = \frac{P}{v\gamma}$. Diese Werthe statt V und W in vorstehende Gleichungen gesetzt, geben

$$\text{(II)}\quad R = \frac{1 - \frac{\lambda}{v}}{1 - \frac{\lambda}{w}} P = P + \lambda \frac{\frac{v}{w} - 1}{v - \lambda} P.$$

Wäre $W = V$ oder $w = v$, so wird $R = P$, daher, wenn der Inhalt des abzuwiegenden Körpers dem Inhalte des Gewichts gleich ist, oder wenn beide einerlei Eigengewicht haben: so erhält man beim Abwägen in der Luft das wahre Gewicht des Körpers, wobei jedoch immer vorausgesetzt wird, daß die zum Abwägen dienenden Gewichte sich auf den luftleeren Raum beziehen.

§. 121.

Aufgabe. Zwei Körper A und B von verschiedener Materie sollen im luftleeren Raume gleiches

Gewicht haben. Man sucht die Bedingungen, unter welchen sie auf einer Wage in der Luft, bei irgend einer Temperatur, im Gleichgewichte sind.

Auflösung. Bei der Temperatur der Abwägung bezeichnen V und W die Inhalte der Körper A und B, wenn R das gemeinschaftliche Gewicht derselben im luftleeren Raume bedeutete. Ist ferner λ das Eigengewicht der Luft bei der Abwägung und γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser bei o Grad R, so entsteht von A ein Druck auf die Wageschale $= R - \lambda\gamma V$, und von $B = R - \lambda\gamma W$. Weil nun der größere Körper mehr Luft verdrängt, so können beide Körper auf der Wage in der Luft nur dann im Gleichgewichte sein, wenn man dem größten Körper, welcher hier B sein mag, noch ein Gewicht p, dessen Inhalt W' ist, zu legt. Für das Gleichgewicht in der Luft ist alsdann

$$R - \lambda\gamma V = R - \lambda\gamma W + p - \lambda\gamma W'.$$

Bezeichnet nun g das Eigengewicht der Materie des Gewichts p, so ist $W' = \frac{p}{g\gamma}$, und man findet

$$\text{(I)} \quad p = \frac{g\lambda\gamma}{g-\lambda}(W - V).$$

Wird p negativ, so ist dies ein Zeichen, daß man p auf die Wageschale von A legen muß.

Hieraus folgt, daß die beiden Körper A und B im luftleeren Raume gleiche Gewichte haben, wenn, in der Luft gewogen, dem Körper B noch das Gewicht p zugelegt wird, um mit A im Gleichgewichte zu sein.

Sind nicht die Inhalte, sondern die Eigengewichte v und w der Körper A und B bekannt, so wird $V = \frac{R}{v\gamma}$ und $W = \frac{R}{w\gamma}$. Diese Werthe in (I) gesetzt, geben

$$\text{(II)}\quad p = \frac{g\lambda}{vw} \cdot \frac{w-v}{g-\lambda} \cdot R.$$

§. 122.

Aufgabe. Das Eigengewicht eines Körpers für den luftleeren Raum, durch Abwägen desselben in der Luft und im Wasser zu finden.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die Gewichte, deren man sich zum Abwägen bedient, aus einerlei Materie verfertigt sind, und sich auf den luftleeren Raum beziehen: so bezeichne

P das Gewicht des Körpers in der Luft,
Q das Gewicht desselben im Wasser, beide Gewichte, wie sie auf der Wageschale gefunden werden,
λ das Eigengewicht der Luft,
ω das Eigengewicht des Wassers und
g das gesuchte Eigengewicht des Körpers, sämmtliche Eigengewichte für die Temperatur bei der Abwägung.

Es sei ferner V der Inhalt des Gewichts P und V' des Gewichts Q; H das Eigengewicht der Materie dieser Gewichte und W der Inhalt des gegebenen Körpers für die Temperatur bei der Abwägung: so findet man, wenn γ das Gewicht von einem Kubikfuß Wasser bei 0 Grad R bedeutet, den Druck auf jede Wageschale beim Abwägen in der Luft (§. 119.)

$$g\gamma W - \lambda\gamma W = H\gamma V - \lambda\gamma V$$

und für das Abwägen des Körpers im Wasser

$$g\gamma W - \omega\gamma W = H\gamma V' - \lambda\gamma V'.$$

Mit den Gliedern dieser in die vorstehende Gleichung dividirt, giebt

$\frac{g-\lambda}{g-\omega} = \frac{(H-\lambda)V}{(H-\lambda)V'} = \frac{V}{V'}$ oder §. 105. (IV) $\frac{g-\lambda}{g-\omega} = \frac{P}{Q}$

folglich

$$g = \frac{\omega P - \lambda Q}{P - Q}.$$

§. 123.

Aufgabe. Den Inhalt W eines Körpers durch Abwägen in der Luft zu finden, wenn das Eigengewicht g dieses Körpers bekannt ist.

Auflösung. Bezeichnet P das Gewicht des Körpers in der Luft, welches auf der Wageschale gelegen hat, und V seinen Inhalt bei der Temperatur der Abwägung; und ist ferner λ das Eigengewicht der Luft bei dieser Temperatur: so ist für das Gleichgewicht der Druck auf jede Wageschale (§. 119.)

$g\gamma W - \lambda\gamma W = P - \lambda\gamma V$, folglich der Inhalt des Körpers für den Wärmegrad bei der Abwägung, oder

$$W = \frac{P - \lambda\gamma V}{(g-\lambda)\gamma},$$

wo $\gamma = 66{,}0798641$ ist.

Für $V = W$ wird $W = \frac{P}{g\gamma}$.

§. 124.

Aufgabe. Den Inhalt W eines Körpers durch Abwägen in der Luft und im Wasser zu finden.

Auflösung. Bezeichnen P und Q die Gewichte des Körpers in der Luft und im Wasser, wie sie von der Wageschale abgenommen werden, und V den Inhalt des Gewichts P bei der Temperatur der Abwägung; λ und ω die Eigengewichte der Luft und des Wassers für eben diese Temperatur: so erhält man, wenn g das unbekannte Eigengewicht des Körpers bezeichnet (§. 119.), $g\gamma W - \lambda\gamma W = P - \lambda\gamma V$. Hierin g mit $\frac{\omega P - \lambda Q}{P - Q}$ vertauscht (§. 122.) und W entwickelt, so erhält man den Inhalt des Körpers für den Wärmegrad bei der Abwägung, oder

$$W = \frac{P - \lambda\gamma V}{(\omega - \lambda)\gamma} \cdot \frac{P - Q}{P}.$$

§. 125.

Aufgabe. Das Gewicht R eines Körpers im luftleeren Raume durch Abwägung in der Luft und im Wasser zu finden, wenn weder der Inhalt des Körpers noch sein Eigengewicht bekannt ist.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 124. wird nach §. 119. $R - \lambda\gamma W = P - \lambda\gamma V$, oder hierin den Werth von W nach §. 124. gesetzt: so findet man das Gewicht des Körpers im luftleeren Raume, oder

$$R = \frac{\omega P - \lambda Q}{\omega - \lambda} \cdot \frac{P - \lambda\gamma V}{P}.$$

§. 126.

Aufgabe. Den Inhalt W des innern Raums der durch den Stöpsel verschlossenen hydrostatischen Flasche (§. 58.) zu finden.

Auflösung. Auf eine Schale einer gleicharmigen Wage werde zuerst die leere offene Flasche und daneben der Stöpsel gelegt, und es sey p das auf der andern Wageschale für das Gleichgewicht in der Luft erforderliche Gewicht. Ist diese Abwägung bei t Grad R geschehen, so werde die Flasche mit reinem Wasser von diesem Wärmegrad gefüllt, mit dem Stöpsel verschlossen und wieder auf die Wageschale gesetzt, wozu alsdann für das Gleichgewicht in der Luft ein Gewicht $p + P$ erforderlich sey. Hiernach findet man, wenn λ und ω die Eigengewichte der Luft und des Wassers und V den Inhalt des Gewichts P bezeichnen, für t Grad R, den Inhalt des innern Raums der verschlossenen Flasche oder

$$W = \frac{P - \lambda\gamma V}{(\omega - \lambda)\gamma}.$$

Weil W den Inhalt für t Grad R angiebt, so sei für jeden andern Grad t' der Inhalt $= W'$, so erhält man, wenn δ die eigenthümliche Inhaltsausdehnung der Flasche bezeichnet (§. 102.)

$$W' = [1 + \delta(t' - t)]\,W.$$

Beweis. Es sey w der Inhalt von der Materie der Flasche nebst ihrem Stöpsel, und g das Eigengewicht desselben, auch werde durch v der Inhalt des Gewichts p bezeichnet. Nun war bei t Grad R auf der Wage die Flasche nebst dem Wasser und dem Stöpsel mit den Gewichten $P + p$ in der Luft im Gleichgewichte. Der Druck auf jede Wageschale ist alsdann (§. 119.)

$$\omega\gamma W - \lambda\gamma W + g\gamma w - \lambda\gamma w = P - \lambda\gamma V + p - \lambda\gamma v.$$

Nach §. 123. ist aber $(g - \lambda)\gamma w = p - \lambda\gamma v$; daher, wenn man diese Werthe auf jeder Seite der vorstehenden Gleichung abzieht, wird

$$\omega\gamma W - \lambda\gamma W = P - \lambda\gamma V \text{ also } W = \frac{P - \lambda\gamma V}{(\omega - \lambda)\gamma}.$$

§. 127.

Aufgabe. Das Eigengewicht g einer Flüssigkeit, mittelst der hydrostatischen Flasche durch Abwägen in der Luft zu finden.

Auflösung. Der Inhalt W des innern Raums der verschlossenen Flasche für t Grad R bei der Abwägung sey bekannt (§. 125.), auch sey die leere offene Flasche nebst dem daneben liegenden Stöpsel mit einem Gewichte p auf der Wage in der Luft ins Gleichgewicht gebracht. Nun werde die Flasche mit einer Flüssigkeit von demselben Wärmegrad gefüllt, durch den Stöpsel verschlossen, und es sey alsdann das Gewicht p + P mit der Flasche und ihrer Flüssigkeit im Gleichgewichte: so findet man wie §. 126. den Druck auf die Wageschalen, nach Abzug des Gewichts der Flasche,

$$g\gamma W - \lambda\gamma W = P - \lambda\gamma V;$$

folglich das Eigengewicht der Flüssigkeit bei t Grad R oder

$$g = \frac{P + \lambda\gamma(W - V)}{\gamma W},$$

§. 128.

Aufgabe. Die eigenthümliche Inhaltsausdehnung δ eines Körpers, durch Abwägung in der Luft und im Wasser unter der Voraussetzung zu finden, daß sich die

Inhaltsausdehnungen wie die entsprechenden Temperaturunterschiede verhalten.

Auflösung. Außer dem Körper dessen Inhaltsausdehnung man sucht, bediene man sich noch eines zweiten Körpers, dessen gleichförmige Inhaltsausdehnung von der des ersten Körpers bedeutend verschieden sein muß, ohne daß es jedoch nöthig ist, seine Inhaltsausdehnung eben so wenig, als die des Wassers oder jeder andern Flüssigkeit, in welcher man die Abwiegung verrichtet, näher zu kennen.

Die Gewichte in der Luft und im Wasser müssen nach den angegebenen Berichtigungen für den luftleeren Raum bestimmt werden, woraus leicht die Gewichtsverluste der Körper im Wasser gefunden werden können. Sind nun diese Gewichtsverluste unter drei verschiedenen Temperaturen für beide Körper in einerlei Flüssigkeit bestimmt worden und es bezeichnen

t, t', t'' Grad R die Temperaturen,

R, R', R'' die entsprechenden Gewichtsverluste des Körpers, dessen Ausdehnung man sucht,

r, r', r'' die Gewichtsverluste eines zweiten Körpers, so findet man die gesuchte eigenthümliche Inhaltsausdehnung für jeden Grad R oder

$$\delta = \frac{\frac{t''-t}{t'-t}\left(\frac{r'}{R'}-\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r}{R}\right)}{(t''-t)\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r'}{R'}\right)}.$$

Beweis. Für die Temperaturen

t, t', t'' Grad R bezeichnen

V, V', V'' die entsprechenden Inhalte des Körpers, dessen Ausdehnung bestimmt wird,

v, v', v'' die Inhalte des zweiten Körpers: so ist wegen der vorausgesetzten gleichförmigen Ausdehnung $\frac{V''-V}{V'-V}=\frac{t''-t}{t'-t}$ und $\frac{v''-v}{v'-v}=\frac{t''-t}{t'-t}$. Hieraus wird $V''=V+\frac{t''-t}{t'-t}(V'-V)$ und $v''=v+\frac{t''-t}{t'-t}(v'-v)$. Ferner ist, weil beide Körper in einerlei Flüssigkeit versenkt worden sind (§. 47. V.)

$$\frac{R}{V}=\frac{r}{v};\ \frac{R'}{V'}=\frac{r'}{v'};\ \frac{R''}{V''}=\frac{r''}{v''};\ \text{also}$$

$$v'=\frac{r'}{R'}V'=\frac{r'}{R'}V+\frac{r'}{R'}(V'-V)\ \text{und}$$

$v''=\frac{r''}{R''}V''$, oder hierin die Werthe statt v'' und V'' gesetzt, $v+\frac{t''-t}{t'-t}(v'-v)=\frac{r''}{R''}V+\frac{t''-t}{t'-t}\frac{r''}{R''}(V'-V)$. Hierin die Werthe $\frac{r}{R}V$ statt v und $\frac{r'}{R'}V+\frac{r'}{R'}(V'-V)$ statt v' gesetzt giebt

$$\frac{t''-t}{t'-t}\left(\frac{r'}{R'}-\frac{r}{R}\right)V-\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r}{R}\right)V$$

$$=(V'-V)\frac{t''-t}{t'-t}\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r'}{R'}\right)\ \text{oder}$$

$$\frac{V'-V}{(t'-t)V}=\frac{\frac{t''-t}{t'-t}\left(\frac{r'}{R'}-\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r}{R}\right)}{(t''-t)\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r'}{R'}\right)}.$$

Nach §. 102. ist $V'=[1+\delta(t'-t)]V$, also $\delta=\frac{V'-V}{(t'-t)V}$, folglich wie erfordert wird

$$\delta=\frac{\frac{t''-t}{t'-t}\left(\frac{r'}{R'}-\frac{r}{R}\right)-\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r}{R}\right)}{(t''-t)\left(\frac{r''}{R''}-\frac{r'}{R'}\right)}.$$

Zur Ueberzeugung, daß die Inhaltsausdehnung des Körpers gleichförmig sei, kann man auf eine ähnliche Art die Gewichtsverluste für eine vierte Temperatur von t''' Grad R bestimmen. Findet sich alsdann durch Einführung dieser Größen eben derselbe Werth für δ, so läßt sich die Ausdehnung innerhalb der Temperaturen t, t', t'' und t''' als gleichförmig annehmen.

Die vorstehende Auflösung gründet sich auf eine Abhandlung des Hr. Prof. Tralles (Mém. de l'acad. de Berlin, 1804. p. 12, oder Gilberts Annalen, 27. Band. 1807. S. 241.).

Zehntes Kapitel.

Von den Senkwagen.

§. 129.

Feste Körper von angemessener Gestalt und Materie, welche man in Flüssigkeiten schwimmen läßt, und mittelst der Größe des eingetauchten Theils, das Eigengewicht der Flüssigkeit oder auch anderer Körper bestimmt, heißen Senkwagen oder Aräometer. Sie werden gewöhnlich von Glas, inwendig hohl, auch wohl von Metall, Elfenbein, Bernstein u. s. w. länglich und symetrisch so gestaltet, daß die Axe beim Schwimmen der Senkwage lothrecht steht, also der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des Drucks in dieser Axe so liegen, daß ersterer unterhalb des letztern fällt, welches leicht durch Beschwerung des untern Theils der Senkwage bewirkt werden kann. Nach ihrem verschiedenen Gebrauche zur Bestimmung des Eigengewichts des Wassers, der Solen, des Biers, des Branntweins oder Alkohols u. s. w. erhalten sie den Namen hydrostatische Senkwage, Solwagen oder Salzspindeln, Bierwagen, Branntweinwagen oder Alkoholometer u. s. w.

Die Senkwagen nach ihrer wesentlichen Einrichtung, lassen sich in drei verschiedene Klassen bringen, wovon die erste die Senkwagen mit Scalen und einer veränderlichen Einsenkung, die zweite die Senkwagen mit Gewichten und einer unveränderlichen Einsenkung und die dritte Senkwagen mit Scalen und Gewichten enthält.

Die Senkwagen mit Scalen und einer veränderlichen Einsenkung bestehen aus einem cylindrischen oder prismatischen Stab AB Tafel VI. Figur 46. und 47., dessen Axe mit der eines darunter befindlichen birnförmigen oder besser cylindrischen hohlen Körpers BC von angemessenem Umfange zusammen fällt. Unter diesem hohlen Körper, welcher der Bauch der Senkwage heißen kann, befindet sich ein kleinerer D, aus einer dichtern schwerern Materie oder ausgehöhlt und mit Blei oder Quecksilber angefüllt, um durch Erniedrigung des Schwerpunkts der Senkwage, den aufrechten Stand derselben beim Einsenken in Flüssigkeiten zu bewirken. Das Stäbchen oder der Stiel AB erhält nach den verschiedenen Zwecken eine besondere Eintheilung, so daß man, wenn die Senkwage in eine Flüssigkeit gesetzt wird, aus dem Stand der Oberfläche dieser Flüssigkeit, an der Scale AB, das

Eigengewicht derselben angeben kann. Die Senkwagen von Boyle und Baume, die Bierprober und Alkoholometer gehören in die Klasse der hier beschriebenen Senkwagen.

Die Senkwagen mit Gewichten und einer unveränderlichen Einsenkung erhalten außer dem bauchigen Körper BC Tafel VI. Figur 48. und einer hinlänglichen Belastung bei D, ein kurzes dünnes Stäbchen AB, an welchem sich bei E ein Zeichen und bei A ein Tellerchen oder eine Schale befindet, welche, wenn das Instrument in einer Flüssigkeit schwimmt, so lange mit Gewichten beschwert wird, bis das Zeichen E genau in die Oberfläche der Flüssigkeit fällt, da man dann aus der Größe der aufgelegten Gewichte das Eigengewicht der Flüssigkeit finden kann. Hiermit stimmt die Anordnung der Fahrenheitschen Senkwage überein, welche zugleich zur Ausmittelung des Eigengewichts fester Körper dienen kann, wenn wie bei der Nichelsonschen Senkwage, bei D Tafel VI. Figur 49. ein hinlänglich beschwertes kleines Gefäß E befestigt wird, in welches man den abzuwägenden Körper legen kann.

Ein Mangel dieser Gewichtssenkwagen besteht darin, daß durch Auflegen der Gewichte bei A die Wagen leicht umschlagen oder bei einer zu tiefen Einsenkung der Teller A naß wird. Diese Mängel werden durch die Senkwage von Tralles abgestellt, und zugleich der Vortheil erreicht, daß man den Punkt, bis zu welchem das Instrument einsenkt, mit der größten Genauigkeit beobachten kann. Diese Wage hat folgende Einrichtung. An dem hohlen Körper A Tafel VI. Figur 50. ist ein kleiner Würfel oder Cylinder B befestigt, aus welchem ein kurzes dünnes Stäbchen BC hervorgeht, welches mit dem Bügel CDE vereinigt ist. Beim Gebrauch wird der hohle Körper A in der auf einem dazu geeigneten Gestelle stehenden gläsernen Cylinder so gehängt, daß, wenn derselbe in der abzuwiegenden Flüssigkeit schwimmt, unter demselben an dem Bügel bei E eine Wageschale aufgehängt, und so lange mit Gewichten beschwert werden kann, bis ein nicht weit vom Würfel B an dem Stäbchen BC befindliches Zeichen in die Oberfläche der Flüssigkeit fällt. Ist diese Flüssigkeit durchsichtig, so läßt sich die Abspiegelung des kleinen Würfels B in der Oberfläche der Flüssigkeit bemerken, wenn man das Auge unter diese Oberfläche hält. Man sieht alsdann zwei Würfel, und der Abstand derselben von einander dient zur genauern Beurtheilung der Einsenkung. Diese Senkwage kann auch anstatt einer gewöhnlichen Armwage zum Abwägen einzelner Körper sehr vortheilhaft benutzt werden.

Zur dritten Klasse von Senkwagen, welche mit Scalen versehen sind, und zum Gebrauch in Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit noch besonders an ihrem Obertheil belastet werden, gehört die von Atkin angegebene Senkwage, welche man in Gilberts Annalen der Physik. N. F. 7. Band, 1811. S. 432. beschrieben findet.

Alle Senkwagen müssen übrigens von solchen Materien verfertigt werden, welche die Flüssigkeiten, zu deren Abwägung sie bestimmt sind, nicht angreifen. Auch muß dafür gesorgt werden, daß der eingesenkte Körper von allen Luftblasen befreit werde.

§. 130.

Zur Entwickelung der Bedingungen, unter welchen Senkwagen mit Scalen in irgend einer Flüssigkeit im Gleichgewichte sind, werde vorausgesetzt, daß das Stäbchen der Senkwage, an welchem sich die Scale befindet, genau prismatisch sei. Am Anfang des Stäbchens AB Tafel VI. Figur 47. der Senkwage AD, werde B als Anfangspunkt angenommen, um die Tiefe der Einsenkung des Stäbchens in eine Flüssigkeit, von B ab, zu bestimmen. Bezeichnet nun

- P das Gewicht der Senkwage im luftleeren Raume;
- W den Inhalt von demjenigen Theil BD der Senkwage, welcher sich unter dem Anfangspunkte B des Stäbchens befindet;
- a den Flächeninhalt vom Querschnitt des Stäbchens;
- $b = BM$ die Tiefe der Einsenkung des Stäbchens in eine Flüssigkeit, von welcher
- g das Eigengewicht für eine Temperatur von
- t Grad R bezeichnet, auf welche sich ebenfalls der Inhalt W bezieht:

so findet man, wenn γ dem Gewichte von einem Kubikfuße Wasser bei 0 Grad R entspricht,

$$P = g\gamma W + g\gamma a b \quad (\S. 45.)$$

und hieraus die Tiefe der Einsenkung von BM oder

$$(1) \quad b = \frac{P - g\gamma W}{g\gamma a} = \frac{P}{g\gamma a} - \frac{W}{a}.$$

Hier-

Hieraus folgt, daß die Tiefe der Einsenkung wächst, wenn unter übrigens gleichen Umständen das Gewicht P der Senkwage vermehrt wird, oder wenn der Inhalt W vom Bauch der Senkwage, oder der Querschnitt des Stiels oder das Eigengewicht der Flüssigkeit kleiner werden.

Zur Bestimmung der Grenzen, innerhalb welcher die Senkwage, bei verschiedenen Flüssigkeiten, gebraucht werden kann, setze man die ganze Länge des Stiels $AB = B$. Nun ist nach (I) das Eigengewicht der Flüssigkeit, oder

$$\text{(II)} \quad g = \frac{P}{\gamma(ab + W)}.$$

Für $b = 0$ wird $g = \frac{P}{\gamma W}$ und für $b = B$ erhält man

$$g = \frac{P}{\gamma(aB + W)};$$

oder $\frac{P}{\gamma W}$ ist das größte und $\frac{P}{\gamma(aB + W)}$ das kleinste Eigengewicht einer Flüssigkeit, für welche die Senkwage gebraucht werden kann, und es läßt sich für jeden Werth von g, innerhalb dieser Grenzen, der dazu gehörige Werth von b nach (I) angeben, also hiernach die Eintheilung der Scale finden. Für kleinere oder größere Eigengewichte werden alsdann andere Senkwagen erfordert, deren P und W den vorstehenden Bestimmungen gemäß anzuordnen sind.

§. 131.

Weil der Bauch der Senkwage bei verschiedenen Temperaturen eine verschiedene Ausdehnung erhält, so erfordert die genaue Bestimmung des Eigengewichts einer Flüssigkeit, diese Ausdehnung in Rechnung zu bringen. Die Ausdehnung des Stiels bei verschiedener Wärme kann hier wegen ihres geringen Einflusses bei Seite gesetzt werden.

Zur Entwickelung eines allgemeinen Ausdrucks für irgend eine Senkwage, bei verschiedenen Wärmegraden, werde vorausgesetzt, daß das Eigengewicht g' einer Flüssigkeit bei t' Grad R bekannt sei, und daß sich der Inhalt W' des Bauchs der Senkwage auf eben diese Temperatar beziehe: dann erhält man nach (I) §. 130.

$$W' = \frac{P - g'\gamma ab}{g'\gamma}.$$

Hiernach kann W' mittelst der bekannten Größen P, a, b, g', γ für die Wärme von t Grad R berechnet werden. Bezeichnet nun

V den Inhalt des Bauchs der Senkwage bei 0 Grad R und

δ die eigenthümliche Inhaltsausdehnung der Materie der Senkwage, so wird §. 102.

$W' = (1 + \delta t')V$, und es läßt sich, wenn W' bekannt ist, hieraus $V = \frac{W'}{1 + \delta t'}$ finden.

Dies vorausgesetzt, wird V eine bekannte Größe, und man erhält für t Grad R

$$P = g\gamma(1 + \delta t)V + g\gamma ab;$$

folglich hieraus das Eigengewicht einer Flüssigkeit bei t Grad R

$$g = \frac{P}{\gamma(1 + \delta t)V + \gamma ab},$$

wo P, V, a, γ, δ unveränderliche Größen sind.

Hat man für eine bestimmte Senkwage ein für alle Mal die Werthe $\frac{P}{\gamma a} = \alpha$ und $\frac{V}{a} = \beta$ bestimmt, so erhält man

$$g = \frac{\alpha}{\beta(1+\delta t)+b}.$$

§. 132.

Anstatt daß die Senkwagen mit Scalen unmittelbar das Eigengewicht einer Flüssigkeit, in welche solche gesenkt werden, anzeigen, so pflegt man ihnen auch, wenn sie als Alkoholometer, Salzspindeln u. dergl. gebracht werden sollen, eine solche Abtheilung auf der Scale zu geben, daß diese den Gehalt des Alkohols, des Salzes u. s. w., welches in einer Flüssigkeit enthalten ist, anzeigen. So geben die Richterschen Alkoholometer die Procente des Gewichts und die Trallesschen die des Inhalts an. Ueber die Anordnung dieser Alkoholometer s. m. Gilberts Annalen der Physik, N. F. 1811. 7. Band, S. 349., so wie über die mancherlei Senkwagen überhaupt: Meißner's Aräometrie, Wien 1816.

§. 133.

Die Senkwagen mit Gewichten und einer unveränderlichen Einsenkung haben den Vorzug, daß sie von dem kleinsten eigenthümlichen Gewicht einer Flüssigkeit an, welches sie angeben, auch für jede dichtere Flüssigkeit angewandt werden können, ohne daß mehr als eine Senkwage erfordert wird, wenn nur bis auf die kleinsten Theile sorgfältig gearbeitete Gewichte zur Auflegung in die Schale vorhanden sind.

Zur Bestimmung der Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Senkwagen, bezeichne

P das Gewicht der Senkwage im luftleeren Raume,
W den Inhalt des eingetauchten Theils bei t Grad R,
Q das Gewicht, welches zur Bewirkung des Gleichgewichts auf der Schale erfordert wird, und
g das Eigengewicht der Flüssigkeit bei t Grad R:

dann erhält man, wenn der Verlust des Gewichts Q in der Luft, wegen seiner Unbeträchtlichkeit, nicht in Rechnung kommt (§. 45.),

$$P + Q = g\gamma W.$$

Hieraus folgt, daß auf der Schale, unter übrigens gleichen Umständen, desto mehr Gewichte erfordert werden, je kleiner das Gewicht der Senkwage oder je größer ihr Inhalt oder das Eigengewicht der Flüssigkeit ist.

Wäre die Schale mit keinem Gewicht belastet, also $Q = 0$, so wird $P = g\gamma W$; oder

$$g = \frac{P}{\gamma W}$$

ist das kleinste Eigengewicht einer Flüssigkeit, welches die Senkwage bei t Grad R angiebt.

Wächst in dem Ausdruck $P + Q = g\gamma W$ das Gewicht Q um ΔQ, so wachse g um Δg, weil γ, W, P unveränderlich sind. Setzt man daher $Q + \Delta Q$ und $g + \Delta g$ statt Q und g in diesen Ausdruck, so wird

$$P + Q + \Delta Q = (g + \Delta g)\gamma W. \text{ Aber}$$
$$P + Q = g\gamma W. \text{ Dies abgezogen, giebt}$$
$$\Delta Q = \gamma W . \Delta g. \text{ Eben so wird}$$
$$\Delta Q' = \gamma W . \Delta g', \text{ oder es verhält sich}$$
$$\Delta Q : \Delta Q' = \Delta g : \Delta g',$$

d. h. die Zunahmen der Gewichte auf der Schale verhalten sich, wie die Zunahmen der Eigengewichte der Flüssigkeiten.

§. 134.

Bezeichnet V den Inhalt des eingetauchten Theils der Senkwage bei o Grad R, so wird mit Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnung, wenn δ die eigenthümliche Inhaltsausdehnung der Materie der Senkwage vorstellt (§. 102.),
$W = (1 + \delta t) V$. Ist nun W für irgend eine Temperatur t gefunden, so wird dadurch V bekannt, und man erhält alsdann, mit Rücksicht auf die Ausdehnung der Senkwage bei verschiedener Wärme,

$$P + Q = g\gamma(1 + \delta t)V,$$

oder man findet das Eigengewicht der Flüssigkeit,

$$g = \frac{P + Q}{\gamma(1 + \delta t)V}.$$

§. 135.

Aufgabe. Das Eigengewicht eines Körpers zu finden, welcher mit einer Gewichtssenkwage in einer Flüssigkeit untergetaucht wird, deren Eigengewicht bekannt ist.

Auflösung. Bezeichnet

p das Gewicht des Körpers im luftleeren Raume,
w seinen Inhalt bei t Grad R und
g' das Eigengewicht des Körpers:

so ist mit Beibehaltung der Bezeichnung §. 132.

$$P + Q + p = g\gamma W + g\gamma w.$$

Aber $p = g'\gamma w$ also $w = \frac{p}{g'\gamma}$. Diesen Werth statt w in die vorstehende Gleichung gesetzt und g′ entwickelt, so erhält man das gesuchte Eigengewicht oder

$$g' = \frac{gp}{P+Q+p-g\gamma W}.$$

§. 156.

Senkwagen mit Scalen und Gewichten können eine solche Einrichtung erhalten, daß bei ihnen nur einige Gewichte erforderlich sind, ohne daß kleinere Eintheilungen derselben nöthig wären. Es bedarf alsdann nicht mehr als einer Senkwage, um von dem kleinsten Eigengewichte einer Flüssigkeit an, welches die Senkwage angiebt, das Eigengewicht der dichtern Flüssigkeiten zu finden.

Es lassen sich die Gewichte, welche mit der Senkwage verbunden werden sollen, entweder oberhalb am Stiele, oder unterhalb des Bauchs anbringen. Im ersten Falle bleiben sie in der Luft, im zweiten werden sie in die Flüssigkeit eingetaucht. Die letztere Art verdient den Vorzug, weil alsdann der Schwerpunkt der Senkwage weit genug unterhalb fällt, und kein Umschlagen derselben zu fürchten ist. Eine bequeme Anordnung zur Befestigung dieser Gewichte ist bei der Atkinschen Senkwage angebracht, wo unterhalb des Bauchs BC Tafel VI. Figur 51. eine von oben nach unten sich erweiternder Stiel angebracht ist, welcher sich bei D an der Belastung DE endet. Auf diesen Stiel werden, wenn es erfordert wird, mehrere Gewichte wie F bei C eingeschoben, und bis D heruntergelassen, wo sie alsdann fest sitzen.

Für dergleichen Senkwagen bezeichne:

P das Gewicht derselben im luftleeren Raume, wenn solche mit keinen Gewichten beschwert ist;

W den Inhalt der Senkwage ohne das Stäbchen, woran sich die Scale befindet, bei t Grad R;

Q das Gewicht im luftleeren Raume, welches an der Senkwage befestigt in die Flüssigkeit eingetaucht wird,

U den Inhalt dieses Gewichts,

H das Eigengewicht desselben,

a den Inhalt vom Querschnitt des Stäbchens AB,

b die Tiefe der Einsenkung,

B die ganze Länge des Stäbchens und

g das Eigengewicht der Flüssigkeit: so erhält man für das Gleichgewicht der Senkwage:

$$P + Q = g\gamma W + g\gamma ab + g\gamma U.$$

Nun ist $Q = H\gamma U$ also $\gamma U = \frac{Q}{H}$; daher, wenn $\frac{Q}{H}$ mit γU vertauscht und g entwickelt wird: so findet man das Eigengewicht der Flüssigkeit

$$g = \frac{H(P+Q)}{H\gamma(W+ab)+Q}.$$

Hierin läßt sich, wenn W bekannt ist, eben so wie §. 134. $(1+\delta t)V$ statt W setzen.

§. 137.

Sollen dergleichen Senkwagen für den Gebrauch bequem sein, so müssen die verschiedenen Gewichte welche hier durch q, q', q'', q''', ... bezeichnet werden sollen, so beschaffen sein, daß, wenn man die Senkwage ohne Gewicht in eine Flüssigkeit bis B eintaucht, alsdann das Gewicht q in eben der Flüssigkeit die Senkwage bis A sinken läßt. Steigt mit diesem Gewicht q die Senkwage in einer dichtern Flüssigkeit bis B, so muß das Gewicht $q + q'$ angebracht, die Senkwage wieder bis A sinken lassen, u. s. w.

Ganz allgemein sei Q das Gewicht, welches an der Senkwage befestigt wird, und man bezeichne für die verschiedenen Lagen der Senkwage bei A und B, die entsprechenden Eigengewichte der Flüssigkeiten durch g, g', g'', g''', ... so daß

für $Q = o$ . . . . . das kleinste $= g$, das größte $= g'$
für $Q = q$ . . . . . „ „ $= g'$, „ „ $= g''$
für $Q = q + q' = r$ . . „ „ $= g''$, „ „ $= g'''$
für $Q = q + q' + {}''q = r'$ „ „ $= g'''$, „ „ $= g^{IV}$
. . . .

werde, so erhält man nach dem allgemeinen Ausdruck §. 136. wenn B die ganze Länge der Scale bezeichnet

für $Q = o$, $g = \frac{P}{\gamma(W + aB)}$; $g' = \frac{P}{\gamma W}$;

für $Q = q$, $g' = \frac{H(P+q)}{H\gamma(W + aB) + q}$; $g'' = \frac{H(P+q)}{H\gamma W + q}$;

für $Q = r$, $g'' = \frac{H(P+r)}{H\gamma(W + aB) + r}$; $g''' = \frac{H(P+r)}{H\gamma W + r}$;

für $Q = r'$, $g''' = \frac{H(P+r')}{H\gamma(W + aB) + r'}$; $g^{IV} = \frac{H(P+r')}{H\gamma W + r'}$;

. . . .

Hiernach findet man, wenn man die für g', g'', g''',... gefundenen Werthe einander gleich setzt:

$$q = \frac{H\gamma aBP}{H\gamma W - P};$$

$$r = 2q + \frac{qq}{P};$$

$$r' = 2r + \frac{rr}{P};$$

$$r'' = 2r' + \frac{r'r'}{P};$$

$$r''' = 2r'' + \frac{r''r''}{P};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Hiernach lassen sich leicht die einzelnen Gewichte

$$q = \frac{H\gamma aBP}{H\gamma W - P};$$

$$q' = r - q;$$

$$q'' = r' - r;$$

$$q''' = r'' - r';$$

$$q^{IV} = r''' - r'';$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

und die Eigengewichte

$$g = \frac{P}{\gamma(W + aB)};$$

$$g' = \frac{P}{\gamma W};$$

$$g'' = \frac{H(P + q)}{H\gamma W + q};$$

$$g''' = \frac{H(P + r)}{H\gamma W + r};$$

$$g^{IV} = \frac{H(P + r')}{H\gamma W + r'};$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

berechnen.

Eilftes Kapitel.
Von den Höhenmessungen mittelst des Barometers und Thermometers.

§. 138.

Die bekannte Erfahrung, daß die Barometerstände abnehmen, wenn man das Barometer auf höhere Orte bringt, haben Veranlassung gegeben, den Vertikalabstand zweier auf verschiedenen Höhen gelegenen Orte mittelst dieses Werkzeugs zu bestimmen. Die hierzu erforderlichen tragbaren Barometer mit den zugehörigen Thermometern werden hier als bekannt vorausgesetzt. Eine Beschreibung derselben, nebst der Anweisung zu ihrem Gebrauche, findet man in den meisten physikalischen Werken.

Weil die Wärme der äußern Luft von der Wärme des Quecksilbers im Barometer verschieden sein kann, beide Wärmezustände aber einen wesentlichen Einfluß auf die Höhenbestimmungen haben: so wird vorausgesetzt, daß mittelst zweier Thermometer, wovon der eine sich in freier Luft befindet und der andere neben der Barometerröhre angebracht ist, diese Wärmezustände jedesmal genau bemerkt werden.

§. 139.

Am Spiegel des Meeres in A Tafel VI. Figur 52. habe man bei einer Wärme von o Grad R den Barometerstand (h) beobachten lassen, und an einem höher gelegenen Orte B sei bei eben diesem Wärmegrad der Barometerstand $= h$ gefunden worden. Man setze den Vertikalabstand beider Orte oder $AB = x$, bezeichne das Eigengewicht der Luft in A und B durch (g) und das Eigengewicht des Quecksilbers an beiden Orten durch (G) für o Grad R. Weil nun unter übrigens gleichen Umständen der Druck der Luft in der Tiefe A größer seyn muß als auf der Höhe bei B, so wird die Höhe des Quecksilbers im Barometer oder der Barometerstand abnehmen, wenn die Höhe $AB = x$ größer wird. Wächst nun x um ∂x, so sei $-\partial h$ der Zuwachs, welcher der Barometerhöhe h entspricht. Alsdann muß der Druck der Luftsäule von der Höhe ∂x mit dem Druck der Quecksilberhöhe $-\partial h$ im Gleichgewichte sein (§. 87.), daher wird $g\partial x = -(G)\partial h$, oder weil nach dem Mariotteschen Gesetze (§. 115.)

$(h):h = (g):g$ also $g = \frac{(g)}{(h)}h$, so erhält man auch $\frac{(g)}{(h)}h\partial x = -(G)\partial h$ oder $\partial x = -\frac{(G)(h)}{(g)} \cdot \frac{\partial h}{h}$.

Zur Abkürzung werde

$\frac{(G)(h)}{(g)} = A$ gesetzt, dies giebt

$\partial x = -A\frac{\partial h}{h}$. Das Integral hiervon wird (H. A. §. 214. IV)

$x = C - A\,\mathrm{lgn}\,h$. Für $x = o$ wird $h = (h)$ also $o = C - A\,\mathrm{lgn}(h)$, oder $C = A\,\mathrm{lgn}(h)$, und daher $x = A\,\mathrm{lgn}(h) - A\,\mathrm{lgn}\,h$.

Eben so findet man, wenn die Vertikalhöhe AC $= y$ und der Barometerstand in $C = h$ für eine

Wärme von 0 Grad R gesetzt wird

$$y = A \lg n(h) - A \lg n h'.$$

Setzt man nun die Vertikalhöhe $BC = y - x = z$, so erhält man hieraus

$$z = y - x = A \lg n h - A \lg n h' = A \lg n \frac{h}{h'},$$

oder wenn man sich anstatt der natürlichen, der briggischen Logarithmen bedienen will, und diese durch Log bezeichnet, so findet man für $m = 0{,}4342948$ (H. A. §. 165. II) die Vertikalhöhe

$$z = \frac{A}{m} \operatorname{Log} \frac{h}{h'},$$

vorausgesetzt, daß sich in den Punkten A, B, C Luft und Quecksilber unter einerlei Wärme von 0 Grad R befinden.

§. 140.

Sind die Wärmegrade der Luft und des Quecksilbers in den Punkten B und C Tafel VI. Figur 52. verschieden, so erfordert der Ausdruck für die Höhe z einige Abänderungen. Man setze daher, daß in B und C durch

- h und h' die beobachteten Barometerstände, ferner durch
- t und t' Grad R die entsprechende Wärme der Luft und durch
- T und T' Grad R die Wärme des Quecksilbers bezeichnet werde.

Nun muß die Höhe $z = \frac{A}{m} \operatorname{Log} \frac{h}{h'}$, welche man unter der Voraussetzung fand, daß in den Punkten B und C die Luft einerlei Wärme von 0 Grad R habe, deshalb einen andern Werth erhalten, weil in diesen Punkten die Wärmegrade der Luft verschieden sind. Dieserhalb kann man den Beobachtungen gemäß annehmen, daß wenn die Höhen wachsen, alsdann die entsprechenden Wärmegrade der Luft, nahe genug, gleichförmig abnehmen. Hiernach ist die Wärme der Luft in der Mitte zwischen B und C $= \frac{t+t'}{2}$, und man kann diese mittlere Wärme so ansehen, als wenn in allen Punkten zwischen B und C nur einerlei Wärme der Luft von $\frac{t+t'}{2}$ Grad R vorhanden wäre. Der vorstehende Ausdruck $z = \frac{A}{m} \text{Log} \frac{h}{h'}$ bedingt, daß die Luftsäule $BC = z$ zu einer Wärme von 0 Grad R gehört; wenn daher die mittlere Wärme dieser Luftsäule $= \frac{t+t'}{2}$ Grad R wird: so erhält man nach §. 117. die entsprechende Höhe derselben $= 1 + \frac{t+t'}{400}$, wenn diese Höhe für eine Wärme von 0 Grad $R = 1$ ist. Für den Fall, daß t und t' Grad R die Wärme der Luft in B und C bezeichnen, erhält man daher die Höhe

$$z = \frac{A}{m}\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \text{Log} \frac{h}{h'}.$$

Zur Berücksichtigung der verschiedenen Wärme des Quecksilbers in B und C, bemerke man, daß nach §. 113. das Quecksilber für jeden Grad R um $\frac{1}{4330}$ ausgedehnt wird, wenn die Ausdehnung für 0 Grad $R = 1$ ist. Wären daher [h] und [h'] die Höhen der Quecksilbersäulen bei 0 Grad R in B und C, ferner h und h' diese Höhen bei T und T' Grad R: so wird (§. 113.)

$[h] = h\left(1 - \frac{T}{4330}\right)$ und $[h'] = h'\left(1 - \frac{T'}{4330}\right)$ also

$$\frac{[h]}{[h']} = \frac{h\left(1 - \frac{T}{4330}\right)}{h'\left(1 - \frac{T'}{4330}\right)} = \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T - T'}{4330}\right)}.$$

Diesen Werth statt $\frac{h}{h'}$ in vorstehenden Ausdruck gesetzt, giebt die Höhe

$$z = \frac{A}{m}\left(1 + \frac{t + t'}{400}\right) \mathrm{Log} \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T - T'}{4330}\right)}.$$

Diesen Ausdruck für die Anwendung geschickt zu machen, muß noch der Werth des unveränderlichen Koeffizienten $\frac{A}{m}$ bestimmt werden. Nun war A $= \frac{(G)}{(g)}(h)$ für die entsprechenden Beobachtungen bei 0 Grad R an der Oberfläche des Meers (§. 139.), daher wird nach §. 117.
$\frac{(G)}{(g)} = 10477{,}9$ und $(h) = 0{,}76$ Meter. Ferner ist $m = 0{,}43429448$, daher erhält man $\frac{A}{m} = 18336$ Meter, welches mit der Annahme von Laplace (Traité de mécanique céleste. Tome IV. Paris 1805. p. 290.) überein stimmt. Wird dieser Werth in vorstehenden Ausdruck gesetzt, und darnach die Höhe z aus verschiedenen Beobachtungen mit dem Barometer bestimmt, hiernächst aber diese berechneten Höhen mit den trigonometrischen Messungen dieser Höhen verglichen: so findet man, daß der Koeffizient 18336 etwas zu klein ist, und Ramond nimmt daher für denselben 18393 Meter an, welches auch mit der neusten Annahme von Laplace (Exposition du Système du monde. IV. édit. Paris 1813. p. 92.) überein stimmt.

Die Bestimmung der Höhe z erfordert zwar auch noch, daß die Verminderung der Schwere der Körper bei verschiedenen Höhen auf der Oberfläche der Erde in Rechnung gebracht werde, welches aber hier um so mehr wegbleiben kann, da wegen der geringen Abweichung, welche dadurch entsteht, hierauf nur selten Rücksicht genommen wird.

Den vorstehenden Auseinandersetzungen gemäß erhält man daher die Vertikalhöhe

$$z = 18393\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \text{Log} \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T-T'}{4330}\right)} \text{ in Meter,}$$

$$z = 56622\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \text{Log} \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T-T'}{4330}\right)} \text{ in par. Fuß,}$$

$$z = 58604\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \text{Log} \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T-T'}{4330}\right)} \text{ in preuß. Fußen.}$$

Hier bedeutet:

h und h' den untern und den obern Barometerstand, in jedem willkührlichen Maaße,

t und t' die zugehörigen Wärmegrade der Luft, nach dem Reaumürschen Quecksilberthermometer,

T und T' die entsprechenden Wärmegrade des Quecksil- in der Barometerröhre, nach demselben Thermometer, und

z die Vertikalhöhe zwischen den beiden Punkten, in welchen Beobachtungen angestellt sind, nach dem angegebenen Maaße.

Beim Gebrauche des Barometers zum Höhenmessen ist noch besonders zu erinnern, daß man sich dann günstige Ergebnisse versprechen kann, wenn die Beobachtungen bei ruhiger, freier Luft, während der Mittagszeit, so angestellt werden, daß sich Barometer und Thermometer im Schatten befinden und keine Gewitter in der Luft vorhanden sind.

Beispiel. Nach den Beobachtungen von Ramond am Pik von Bigorre fand man am Fuße des Berges den Barometerstand 326,08 pariser Linien, wenn der Thermometer für die Wärme des Quecksilbers 14,9 Grad R und in freier Luft 15,3 Grad R zeigte. Auf dem Gipfel des Berges war der Barometerstand 238,14 pariser Linien, die Wärme des Quecksilbers in der Barometerröhre 7,8 Grad R und in der freien Luft 3,2 Grad R. Hiernach wird

$h = 326{,}08'''$; $T = 14{,}9°\,R$ und $t = 15{,}3°\,R$

$h' = 238{,}14'''$; $T' = \ \ 7{,}8°\,R$ und $t' = \ \ 3{,}2°\,R$; also

$$1 + \frac{T - T'}{4330} = 1 + \frac{1{,}7}{4330} = \frac{43371}{43300}$$

$$\frac{h}{h'\left(1 + \frac{T - T'}{4330}\right)} = \frac{326{,}08 \,.\, 43300}{238{,}14 \,.\, 43371}$$

$1 + \frac{t + t'}{400} = 1 + \frac{18{,}5}{400} = 1{,}04625$ also für par. Fuß

$$z = 56622 \,.\, 1{,}04625 \text{ Log } \frac{326{,}08 \,.\, 43300}{238{,}14 \,.\, 43371}.$$

Mittelst der Logarithmen entsteht hiernach folgende Rechnung:

Log 326,08 = 2,5133242	Log 238,14 = 2,3768323
Log 43300 = 4,6364879	Log 43371 = 4,6371994
7,1498121	7,0140317
7,0140317	

Log 0,1357804 = 0,1328371 — 1

Log 1,04625 = 0,0196354

Log 56622 = 4,7529852

3,9054577 = Log 8043,7.

Es

Es ist daher die entsprechende Vertikalhöhe oder $z = 8043{,}7$ pariser Fuß.

Durch trigonometrische Messungen fand man diese Höhe $= 1340{,}7$ Toisen oder 8044,2 pariser Fuß.

§. 141.

Sucht man die Höhe eines Orts über der Meeresfläche, ohne die entsprechenden Beobachtungen an dem Meere anzustellen, so muß man zuvörderst denjenigen Wärmegrad der Luft wenigstens beinahe angeben können, welcher dem beobachteten Wärmegrad auf der Höhe entspricht, weil nur hiernach die Temperatur der Luftsäule in Rechnung gebracht werden kann, welche zwischen dem Orte der Beobachtung und der Meeresfläche enthalten ist.

Nach v. Lindenau (Tables barométrique, Gotha 1809. p. LXVI.) kann man den Beobachtungen von Humboldt, Saussüre und Ramond gemäß annehmen, daß im Durchschnitt für den Sommer, in unserer Himmelsgegend, eine Erhöhung von 100 Toisen = 600 pariser Fuß, eine Verminderung der Luftwärme von 1 Grad R verursacht. Wäre daher auf einer Höhe von z pariser Fuß über die Meeresfläche, die Luftwärme $= t'$ Grad R, und man setzt die zugehörige, noch näher zu bestimmende Luftwärme an der Meeresfläche $= t$ Grad R, so wird für

pariser Fußmaaß $t = t' + \frac{z}{600}$,

Meter $t = t' + \frac{z}{194{,}9}$,

preuß. Fußmaaß $t = t' + \frac{z}{621}$.

Setzt man für jedes beliebige Längenmaaß den vorstehenden Divisor $= \beta$ und in dem (§. 140.) für z gefundenen Ausdruck den Koeffizienten $= A$, so wird

$$t = t' + \frac{z}{\beta} \text{ und}$$

$$z = A\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \operatorname{Log} \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T-T'}{4330}\right)},$$

oder wenn man $\frac{h}{h'\left(1 + \frac{T-T'}{4330}\right)} = B$ setzt,

$$z = A\left(1 + \frac{t+t'}{400}\right) \operatorname{Log} B.$$

Soll durch den vorstehendrn Ausdruck die Höhe z über der Meeresfläche gefunden werden, und man hat die Temperatur t nicht beobachtet, so muß $t' + \frac{z}{\beta}$ statt t gesetzt werden, dies giebt

$$z = A\left(1 + \frac{2t' + \frac{z}{\beta}}{400}\right) \operatorname{Log} B \text{ und hieraus}$$

$$z = \frac{2\beta(200 + t') \operatorname{Log} B}{\frac{400\beta}{A} - \operatorname{Log} B}.$$

Es ist aber $B = \frac{h}{h'\left(1 + \frac{T-T'}{4330}\right)}$, wenn h den Barometerstand an der Meeresfläche und T die entsprechende Temperatur des Quecksilbers in der Barometerröhre bezeichnet. Für diesen Fall wird (§. 117.) $h = 0{,}76$ Meter $= 28{,}075$ par. Zoll $= 336{,}9$ par. Linien und $T = 0$; daher erhält man, wenn die Barometerstände in pariser Linien ausgedrückt werden,

$$B = \frac{336{,}9}{h'\left(1 - \frac{T'}{4330}\right)},$$

folglich die gesuchte Vertikalhöhe über der Meeresfläche

$$z = \frac{2\beta\,(200+t')\,\mathrm{Log\,B}}{\frac{400\,\beta}{A} - \mathrm{Log\,B}} \text{ oder}$$

$$z = \frac{389{,}8\,(200+t')\,\mathrm{Log\,B}}{4{,}238535 - \mathrm{Log\,B}} \text{ Meter,}$$

$$z = \frac{1200\,(200+t')\,\mathrm{Log\,B}}{4{,}238535 - \mathrm{Log\,B}} \text{ pariser Fuß,}$$

$$z = \frac{1242\,(200+t')\,\mathrm{Log\,B}}{4{,}238535 - \mathrm{Log\,B}} \text{ preuß. Fuß}$$

$$\text{für } B = \frac{336{,}9}{h'\left(1-\frac{T'}{4330}\right)}.$$

Hier bedeutet:

h' den auf der Höhe beobachteten Barometerstand in pariser Linien,

t' den zugehörigen Wärmegrad der Luft,

T' den entsprechenden Wärmegrad des Quecksilbers der Barometerröhre, nach dem reaumürschen Quecksilberthermometer und

z die Vertikalhöhe des beobachteten Orts über der Meeresfläche, nach dem angegebenen Maaße.

Beispiel. Sucht man die Höhe des Piks von Bigorre nach den im Beispiele §. 140. angeführten Beobachtungen, so wird hier $h' = 238{,}14$ par. Linien, $T' = 7{,}8$ Grad R und $t' = 3{,}2$ Grad R also

$$B = \frac{336{,}9}{237{,}71047} \text{ und}$$

$$z = \frac{1200 \cdot 203{,}2 \cdot \mathrm{Log\,B}}{4{,}238535 - \mathrm{Log\,B}} \text{ pariser Fuß.}$$

Dies giebt folgende Rechnung:

Lg336,9	=2,5275010	4,238535
Lg237,71047	=2,3760484	0,151453
LgB	=0,1514526	Lg4,087082=0,6114151

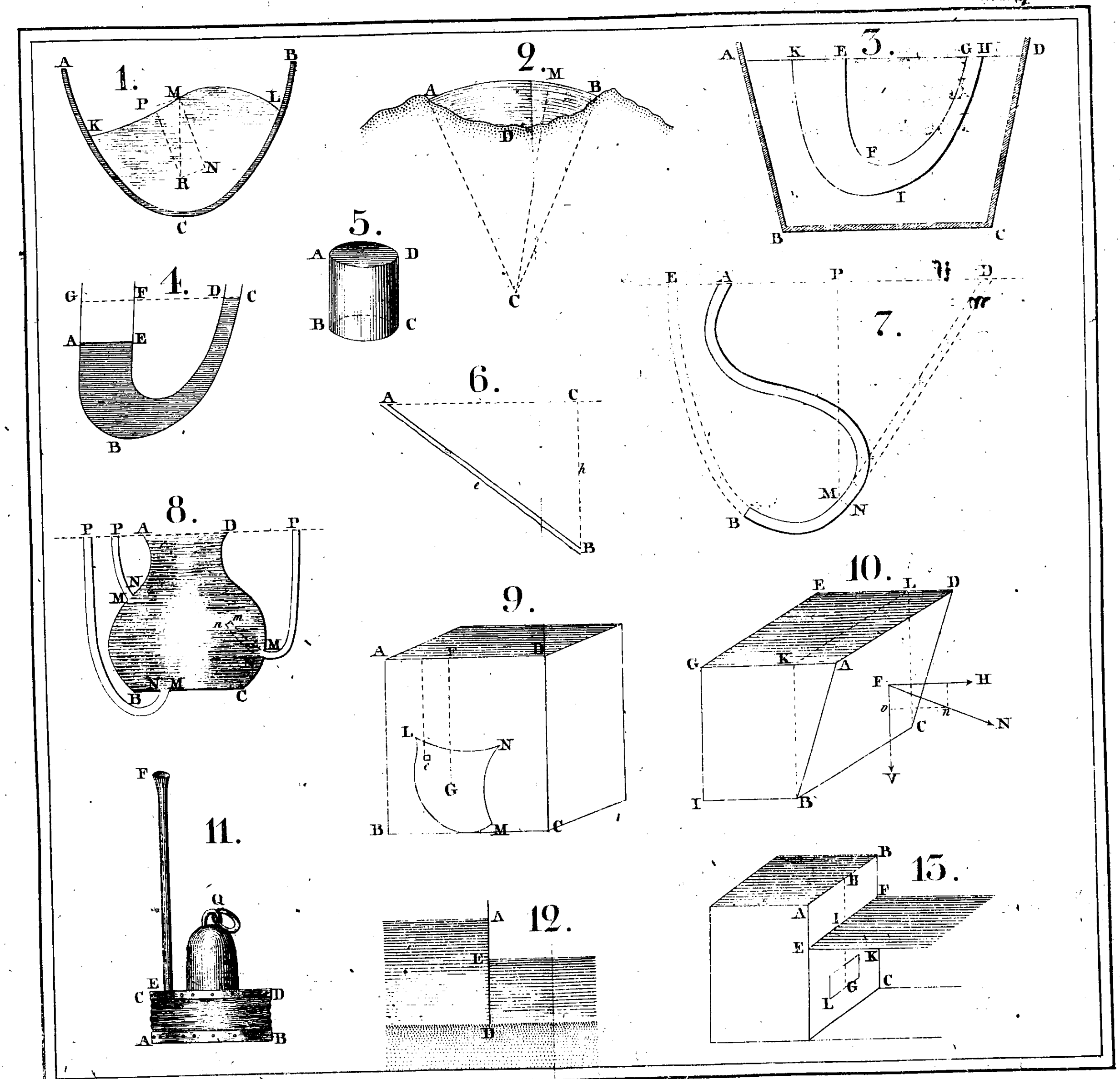
$$
\begin{array}{lll}
\text{Log}\,0{,}1514526 & = & 0{,}1802767 - 1 \\
\text{Log}\,1200 & = & 3{,}0791812 \\
\text{Log}\,203{,}2 & = & \underline{2{,}3079237} \\
 & & 4{,}5673816 \\
 & & \underline{0{,}6114151} \\
 & & 3{,}9559665 = \text{Log}\,9035{,}8.
\end{array}
$$

Es ist daher die entsprechende Vertikalhöhe über der Meeresfläche oder $z = 9035{,}8$ pariser Fuß.

Durch trigonometrische Messung fand man diese Höhe = 1506 Toisen = 9036 pariser Fuß.

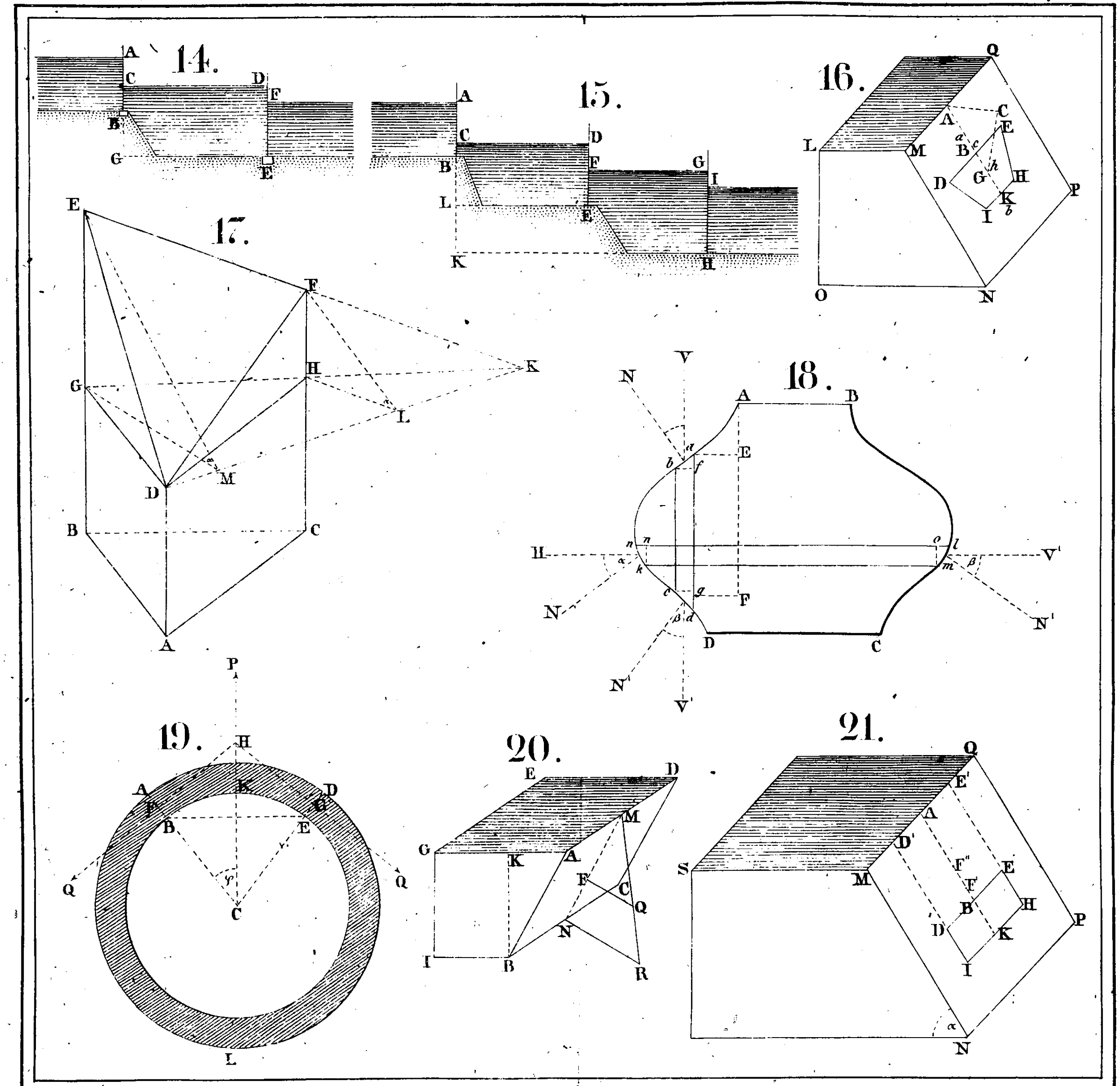
Druckfehler.

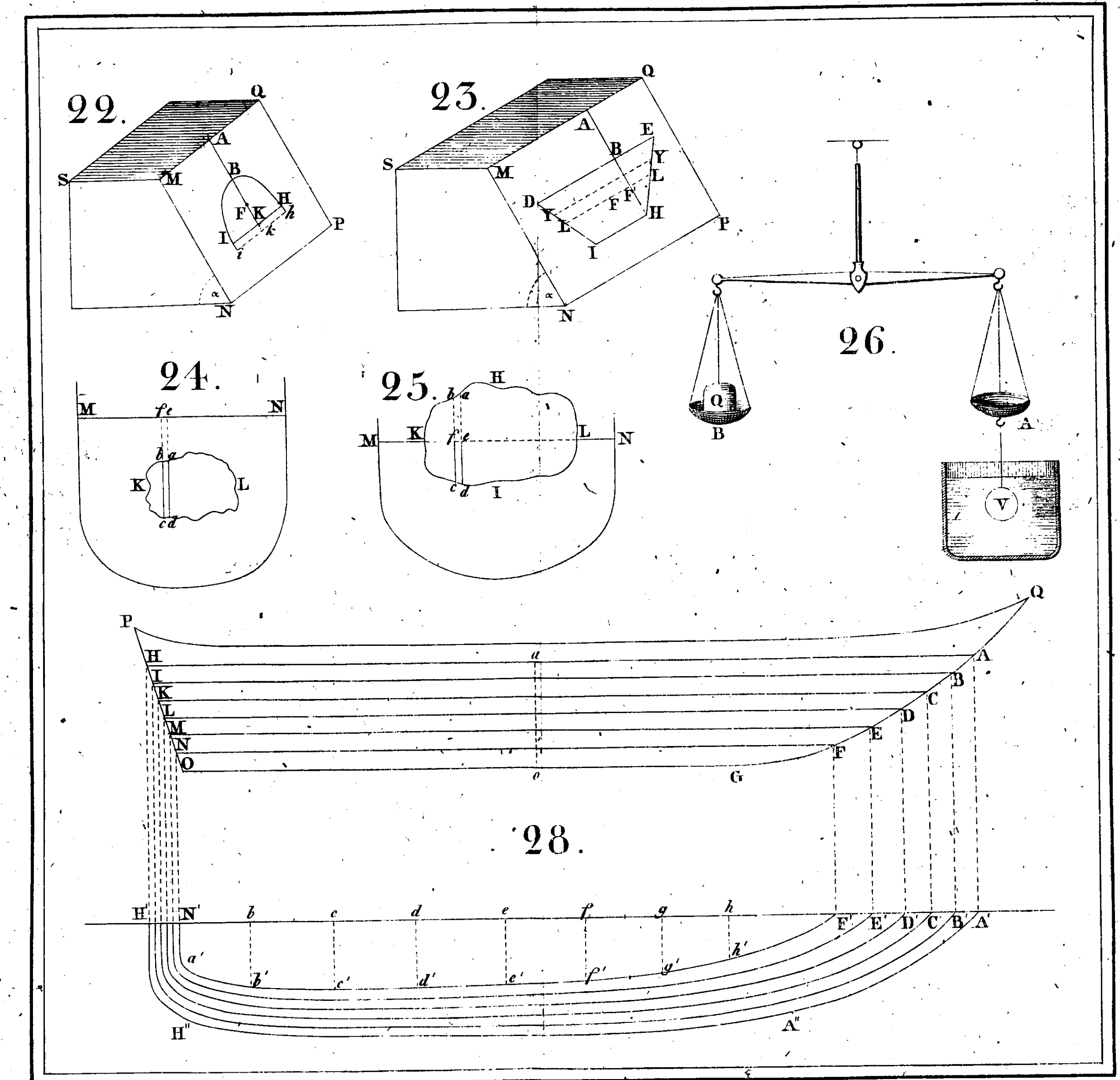
Seite 156. Zeile 3. v. u. statt 0,8731. lies 0,8631.



Gest. bei C. Mare.

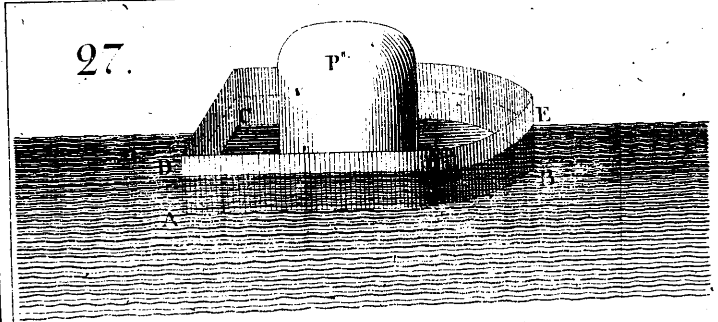
Eytelweins Hydrostatik.


14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.

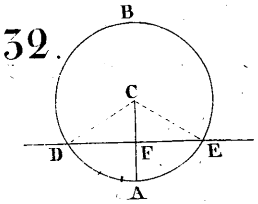


Gest. bei C. Mare

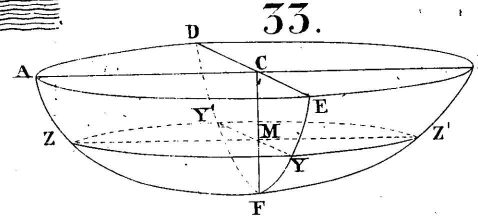
27.



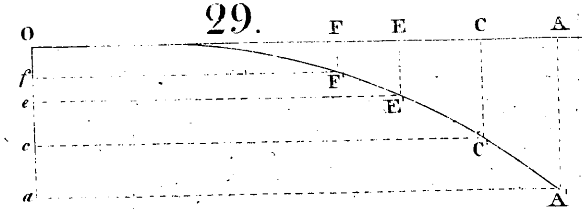
32.



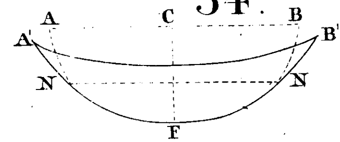
33.



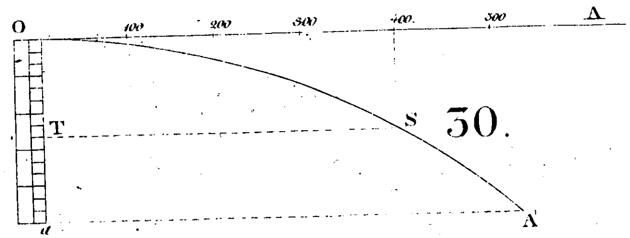
29.



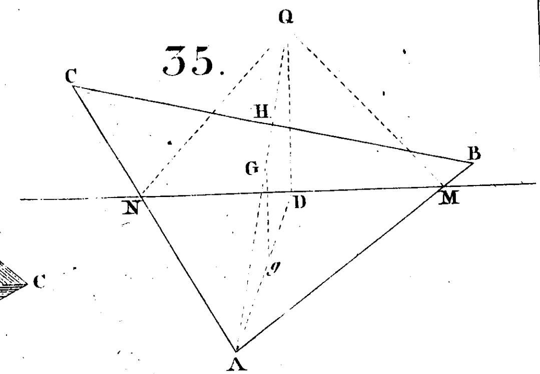
34.



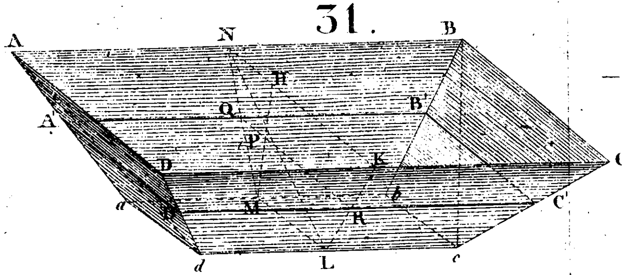
30.

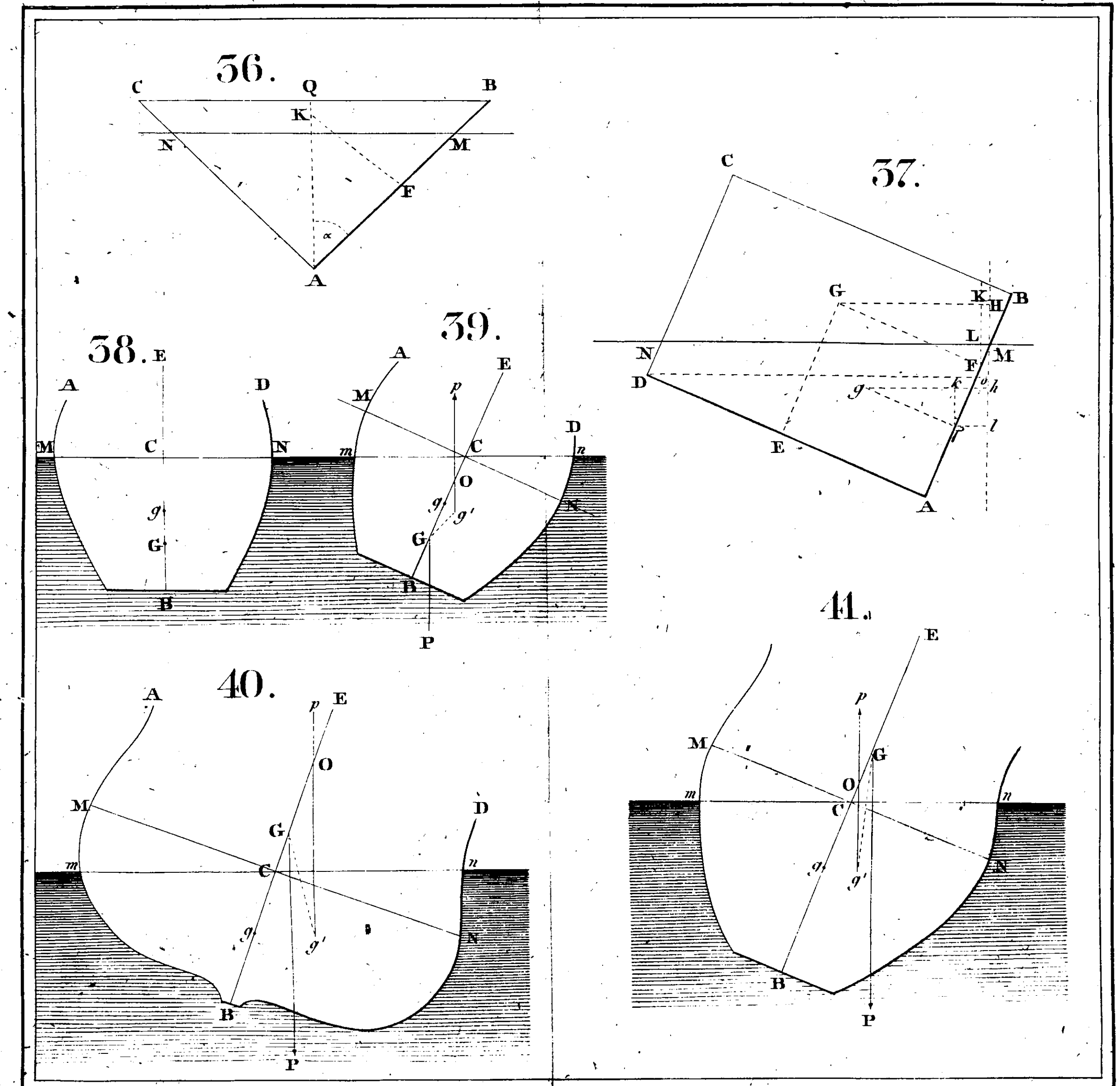


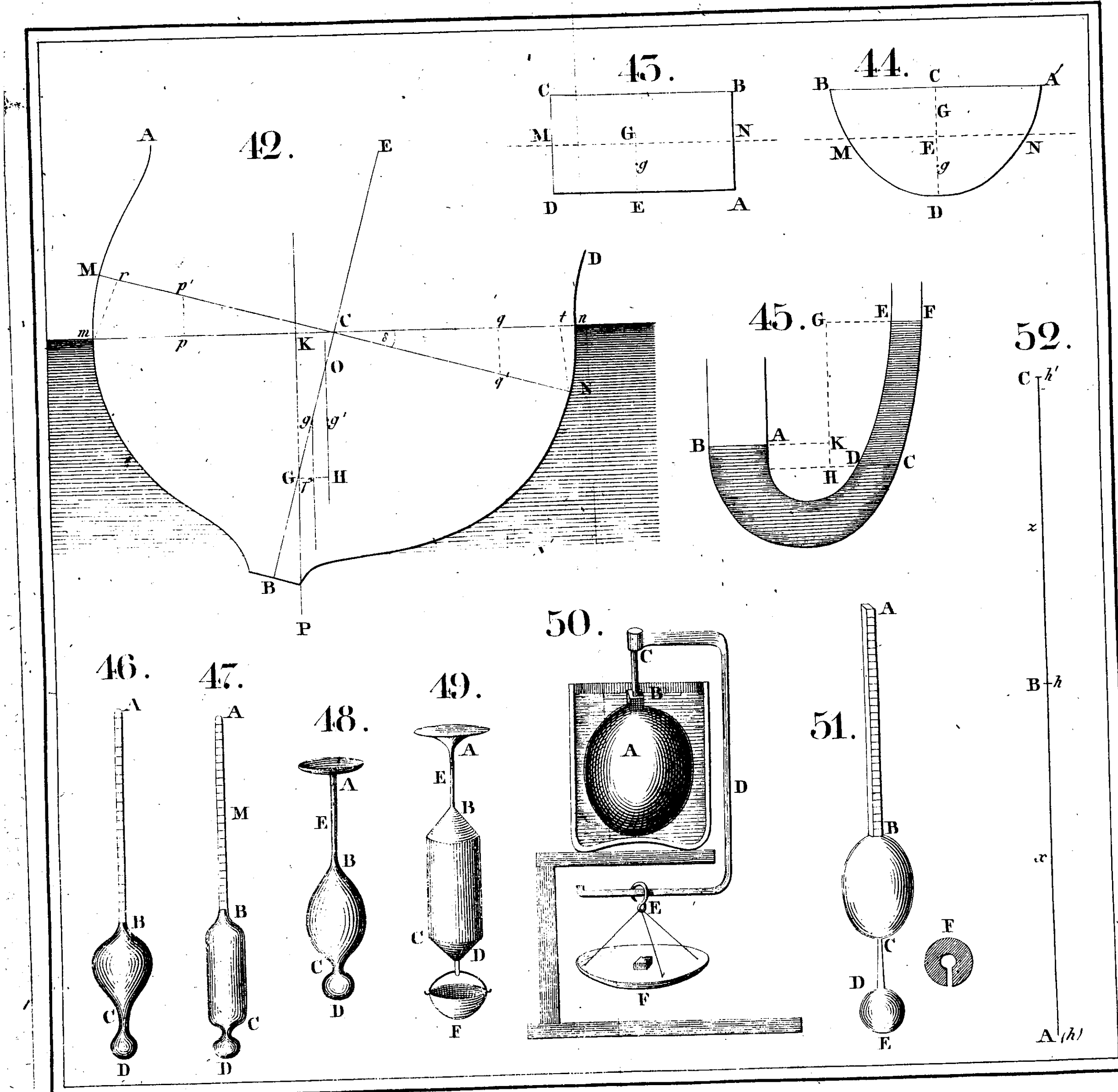
35.



31.




36.
C Q B
K
N M
F
α
A
37.
C
G K H B
L
N M
F
D o h
g
l
E
A
38. E
A D
M C N
g
G
B
39.
A E
M p
D
m C n
O
g g'
N
G
B
P
40.
A p E
O
M D
G
m C n
g g'
N
B
P
41.
E
p
M G
O
m C n
N
g g'
B
P


42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.

OTANOX
:zyszczanie
2009