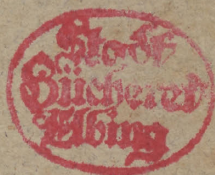


1001
1001

1001
1001

1870.
Hb 21



~~Carl Heinrichs Geschichte 1828.~~

Darstellung

der

Handwritten signature

mathematischen Geographie

mit besonderer Rücksicht

auf

geographische Ortsbestimmung

von

Adolph Zeilfampf

Doctor der Philosophie und Lehrer der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Hamm.



Mit numerischen Anlagen und zwei Kupfertafeln.

Hannover, 1824.

Im Verlage der Hahnschen Hof-Buchhandlung.



3707



V o r r e d e.

Ein academischer Vortrag über den Gegenstand dieses Buchs veranlaßte den Verfasser, sich unter den zahlreichen Lehrbüchern der mathematischen Geographie, welche unsere Litteratur aufzuweisen hat, nach einem solchen umzusehen, welches Zuhörern, die im Gebiete der Mathematik nicht mehr Neulinge waren, als Leitfaden empfohlen zu werden verdiente. Unter allen jedoch, die ihm zu Gesicht kamen, fand er keines, das seinen Wünschen in dieser Hinsicht durchaus entsprochen hätte; selbst diejenigen Schriften, welche sich von der bloß populären Darstellungsweise entfernten und einige Anforderungen an mathematische Vorkenntnisse ihrer Leser machten, hatten sich nach seiner Ansicht zu enge Schranken gesetzt, indem sie Gegenstände zur Seite liegen ließen, deren Betrachtung die mathematische Geographie, wenn sie ihrem Namen genügen will, sich doch nicht füglich ersparen darf. Zu ihnen muß namentlich die geographische Ortsbestimmung, das Verfahren bei

Gradmessungen und die Berechnungsweise der Dimensionen des Erdkörpers gezählt werden — Gegenstände, deren überall nur oberflächlich oder auch gar nicht Erwähnung geschieht.

Von diesem herkömmlichen Gange hat der Verfasser geglaubt, sich entfernen zu müssen, wenn junge Mathematiker bei dem Gebrauche seines Buches ihre Rechnung finden sollten. Er ging also bei seiner Darstellung von dem Grundsatz aus, dasjenige, was in einem populären Vortrage der mathematischen Geographie schon bei früherem Unterricht erwähnt zu werden und daher den meisten Lesern nicht unbekannt zu seyn pflegt, so kurz als möglich zu berühren, um desto ausführlicher bei denjenigen Betrachtungen zu verweilen, die einer vorzüglichen Aufmerksamkeit werth sind. Daher die Kürze der früheren Capitel im Vergleich mit den späteren. Die hie und da zur Verdeutlichung des allgemein Ausgesprochenen und zur Veranlassung ähnlicher Berechnungen eingestreuten numerischen Beispiele sind theils fingirt, größtentheils aber aus von Zach's monatlicher Correspondenz, und einige aus Bohnenberger's geographischer Ortsbestimmung entlehnt. Es ist besonders dieses letztere vortreffliche Werk, welchem die vorliegende Schrift als eine Art von Einleitung dienen, und zu dessen näherer Bekanntschaft sie ihre Leser veranlassen möchte. Denn begreiflich konnte sie in einer allgemeinen Darstellung aller, der mathematischen Geographie anheim fallenden, Gegenstände zu jenem speciellen Geschäfte keine vollständige Anleitung liefern, sondern nur die Hauptzüge zu den gebräuchlichsten Methoden der geographischen Ortsbestimmung mittheilen wollen. Damit aber das Buch den Leser zugleich in den Stand setzen möge, von den vorgetragenen Lehren Anwendung auf specielle Fälle zu machen, sind ferner am Schlusse mehrere Tabellen mitgetheilt worden, welche die nöthigen numerischen Data zu manchen Berechnungen enthalten, oder die Einrichtung der astronomischen Ephemeriden zeigen, deren man sich außerdem gewöhnlich be-

dienen muß. Es würde den Verfasser besonders freuen, wenn sein Buch durch diese Eigenschaften so glücklich wäre, hie und da bei jungen Mathematikern die Neigung für geographische Vorübungen aufzuregen, namentlich bei denen des Militairstandes, weil sich ihnen vor Andern leicht die Gelegenheit darbieten kann, davon einen sehr reellen, das Detail der Geographie bereichernden, Gebrauch zu machen.

Schwerlich wird indessen die vorliegende Schrift bei allen ihren Bemühungen, jeder billigen Anforderung zu entsprechen, zu welcher ihr Titel berechtigt, dem Tadel entgehen, manche Gegenstände (wie die Correction des unverbesserten Mittags) nicht gründlich genug behandelt, oder gar andere (z. B. die Verbesserung der Strahlenbrechung in Rücksicht auf Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre) ganz vernachlässigt zu haben; und der Verfasser gesteht, daß er sich an manchen Orten nur ungern eine ausführlichere Behandlung versagt hat. Allein die Gränzen der mathematischen Geographie sind zu unbestimmt, und sie geräth zu oft in die Nothwendigkeit, diesem oder jenem Zweige der Astronomie Betrachtungen abzuborgen, als daß man sich nicht häufig freiwillig ein Ziel da stecken müßte, wo der denkende Leser noch weiter zu gehen wünscht. Das Buch hält aber seine Bestimmung für erreicht, wenn es diesen Wunsch aufgeregt hat, und sich von einem Bohnenberger, Schubert, Biot, Piazzzi, u. A. verdrängt sieht, ohne jedoch darum dem Bestreben zu entsagen, durch Aufnahme solcher Betrachtungen, welche die gerechte Critik noch etwa vermißt, für die Zukunft an seiner Vervollkommenung zu arbeiten.

In der Darstellungsweise wird derjenige, der mathematischer Betrachtungen gewohnt ist — und nur solchen Lesern ist es bestimmt — die beobachtete Kürze nicht tadeln, und in Ansehung des Inhalts die Ueberhüpfung

nutzloser Belehrungen über eine veraltete Eintheilung von Zonen und Erdbewohnern hoffentlich gern entschuldigen. Endlich bliebe es dem Verfasser noch übrig, sich über die Zugabe einer kurzen Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie zu rechtfertigen. Gegen Leser, wie er sie für sein Buch voraussetzen muß, glaubt er indessen dieser Mühe überhoben zu seyn, weil vermuthlich die Meisten hier zum erstenmal Veranlassung finden, von einem Theile der reinen Mathematik wirklichen Gebrauch zu machen, der bis dahin von ihnen ziemlich vernachlässigt seyn mag. Die Kürze der Entwicklung jener Formeln und das fortwährende Bedürfniß derselben für die mathematische Geographie mögen daher die Einleitung in Schutz nehmen.

I n h a l t.

Einleitung.	Kurze Entwickelung der Formeln der sphärischen Trigonometrie.	—	—	—	—	—	S. 1
1. Capitel.	Geometrische Auffassung der täglichen Erscheinungen und Veränderungen am Himmel.	—	—	—	—	—	9
2. Capitel.	Vom Standpunkte der Erde im Weltsystem.	—	—	—	—	—	15
3. Capitel.	Kugelgestalt der Erde.	—	—	—	—	—	19
4. Capitel.	Axendrehung des Erdballs.	—	—	—	—	—	22
5. Capitel.	Vom Horizont.	—	—	—	—	—	25
6. Capitel.	Von den Weltgegenden.	—	—	—	—	—	31
7. Capitel.	Bewegung der Erde um die Sonne.	—	—	—	—	—	33
8. Capitel.	Beziehung des gestirnten Himmels auf die Ekliptik.	—	—	—	—	—	40
9. Capitel.	Erleuchtung der Erde von der Sonne.	—	—	—	—	—	45
10. Capitel.	Von der Zeit.	—	—	—	—	—	55
11. Capitel.	Construction der Mittagslinie.	—	—	—	—	—	62
12. Capitel.	Lauf und Erscheinungen des Mondes.	—	—	—	—	—	67
13. Capitel.	Bestimmung der geographischen Breite.	—	—	—	—	—	73
14. Capitel.	Bestimmung der geographischen Länge.	—	—	—	—	—	87
15. Capitel.	Von den Gradmessungen.	—	—	—	—	—	101
16. Capitel.	Sphäroidische Gestalt der Erde.	—	—	—	—	—	107
17. Capitel.	Darstellungen der Erdoberfläche.	—	—	—	—	—	123
18. Capitel.	Construction der Land- und Seescharten.	—	—	—	—	—	134

A n l a g e n.

I. Verzeichniß von 46 der vornehmsten Sterne.	—	—	—	—	©. 141
II. Uebersicht des Sonnensystems.	—	—	—	—	143
III a. Verwandlung der Stundenwinkel in Zeit.	—	—	—	—	144
b. Verwandlung der Zeit in Aequators-Bogen.	—	—	—	—	145
IV a. Weite des Horizonts, in Meilen zu 3807 Toisen, für gegebene Höhen.	—	—	—	—	146
b. Erniedrigung des scheinbaren Horizonts unter den wahren für gegebene Höhen.	—	—	—	—	146
V. Höhen und geographische Lage einiger Berge.	—	—	—	—	147
VI. Tafel der mittlern Strahlenbrechung.	—	—	—	—	148
VII. Höhen-Parallaxe der Sonne.	—	—	—	—	149
VIII. Verbesserung des Mittags aus correspondirenden Sonnenhöhen.	—	—	—	—	150
IX a. b. c. Astronomische Ephemeriden.	—	—	—	—	151
X. Verzeichniß der geographischen Längen und Breiten von 240 Punkten der Erdoberfläche.	—	—	—	—	153
XI. Tafel der abnehmenden Längengrade.	—	—	—	—	157
XII. Geographische Längenmaasse.	—	—	—	—	158
Alphabetisches Verzeichniß der im Buche vorkommenden Kunstwörter.	—	—	—	—	159

E i n l e i t u n g.

Kurze Entwicklung der Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Auf eine ähnliche Weise, wie unter den Seiten des ebenen geradlinigten Dreiecks, herrscht ein gesetzmäßiger, durch analytische Formeln darstellbarer Zusammenhang unter den Seiten- und Neigungswinkeln der einfachsten körperlichen Ecke, die durch die Vorstellung dreier, in einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte vereiniger, gerader Linien erzeugt wird. Von der Entfernung der Punkte, welche durch ihre Lage gegen den Anfangspunkt die Richtungen dieser Linien, ihre Neigung gegen einander, bestimmen mögen, ist ein solcher Zusammenhang der Winkel offenbar ganz unabhängig. Wir dürfen also, die Vorstellung der körperlichen Ecke zu erleichtern, und an eine andere bekanntere zu knüpfen, die Richtungspunkte alle in gleichen Entfernungen vom gemeinschaftlichen Anfangspunkte feststellen; oder wir denken uns mit einer willkürlichen, als Radius und Einheit angenommenen Länge um diesen, als Centrum, die Oberfläche einer Kugel construirt, welche in drei bestimmten Punkten von den gegebenen Richtungen angetroffen wird.

Indem wir nun durch je zwei dieser Punkte und den Mittelpunkt der Kugel Durchschnittsebenen legen, entsteht auf ihrer Oberfläche das sphärische Dreieck. Es bildet sich aus drei Kreisbögen eines größten Durchschnittskreises, und verbindet also die Richtungspunkte durch die kürzesten Linien, die sich auf der Oberfläche der Kugel ziehen lassen. Diese Kreisbögen, bezogen auf den angenommenen Radius, sind nichts anders, als das Maas der Seitenwinkel der körperlichen Ecke. Wir wollen sie, als Seiten des sphärischen Dreiecks, durch die Buchstaben a, b, c andeuten; die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber, worin wir die Neigungswinkel der körperlichen Ecke erkennen, durch A, B, C ; so, daß gleichnamige Seiten und Winkel einander gegenüber liegen.

Die Aufgabe, den Zusammenhang unter den sechs Bestandtheilen des sphärischen Dreiecks durch Gleichungen unter je vier verschiedenen Stücken nachzuweisen, nöthigt uns, eine Beziehung zwischen

Seiten und Neigungswinkeln durch folgende geometrische Construction zu vermitteln. Der Neigungswinkel A (Fig. 1.) werde bestimmter durch zwei, an seinen Scheitelpunkt gelegte Tangenten dargestellt, und aus dem Mittelpunkt der Kugel durch die Punkte B und C nach jeder dieser Tangenten eine Linie gezogen. Dann entstehen zwei neue Durchschnittspunkte, β und γ , und durch deren Verbindung mit A das geradlinigte Dreieck $A\beta\gamma$, dessen Seite $\beta\gamma$ zugleich dem Dreieck $M\beta\gamma$ angehört. Durch Gleichsetzung der für sie, einerseits in Function von $A\beta$, $A\gamma$, und dem Neigungswinkel A, andernseits in Function von $M\beta$, $M\gamma$ und dem eingeschlossenen Seitenwinkel a gewonnenen Werthe gelangen wir nun zu einer Gleichung, welche die Relation unter drei Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreiecks zu erkennen giebt. Denn es ist, wenn MA als Einheit betrachtet wird,

$$\begin{aligned} A\beta &= \text{tang. } c & A\gamma &= \text{tang. } b \\ M\beta &= \text{sec. } c & M\gamma &= \text{sec. } b \end{aligned}$$

Folglich: 1) $\beta\gamma = \sqrt{(\text{tg. } b^2 + \text{tg. } c^2 - 2 \text{tg. } b. \text{tg. } c. \cos. A)}$
 2) $\beta\gamma = \sqrt{(\text{sec. } b^2 + \text{sec. } c^2 - 2 \text{sec. } b. \text{sec. } c. \cos. a)}$

Hieraus ergibt sich, mit der Vereinfachung $\text{sec.}^2 - \text{tg.}^2 = 1$:

$$1 + \text{tg. } b. \text{tg. } c. \cos. A = \text{sec. } b. \text{sec. } c. \cos. a.$$

und wenn tang. und sec. durch ihre Werthe $\frac{\sin.}{\cos.}$ und $\frac{1}{\cos.}$ ersetzt werden:

$$(I) \cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. A$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$(A) \cos. b = \cos. a. \cos. c + \sin. a. \sin. c. \cos. B.$$

Diese beiden Gleichungen, unter der Form

$$\cos. a - \cos. b. \cos. c = \sin. b. \sin. c. \cos. A$$

$$\cos. b - \cos. a. \cos. c = \sin. a. \sin. c. \cos. B$$

zum Quadrat erhoben und von einander abgezogen, ergeben als Zusammenhang unter zwei Seiten und den beiden, ihnen gegenüberliegenden Winkeln des sphärischen Dreiecks:

$$\begin{aligned} \cos. a^2 - \cos. b^2 + \cos. c^2 (\cos. b^2 - \cos. a^2) \\ = \sin. c^2 (\sin. b^2 \cos. A^2 - \sin. a^2 \cos. B^2) \end{aligned}$$

Zusammengezogen, wird diese Gleichung

$$(\cos. a^2 - \cos. b^2) \sin. c^2 = \sin. c^2 (\sin. b^2 \cos. A^2 - \sin. a^2 \cos. B^2)$$

und vereinfacht durch die Substitution $1 - \sin.^2 = \cos.^2$:

$$(II) \sin. b. \sin. A = \sin. a. \sin. B.$$

Auf gleiche Weise gilt:

$$(B) \sin. c. \sin. A = \sin. a. \sin. C.$$

Eine Relation unter zwei Seiten, dem eingeschlossenen und einem anliegenden Winkel stiften wir durch Einführung des Werthes von $\cos. b$ aus (A) und des Werthes von $\sin. b$ aus (II) in die Gleichung (I). Diese erhält alsdann die Form:

$$\cos. a. \cos. c^2 + \sin. a. \sin. c. \cos. c. \cos. B + \frac{\sin. a. \sin. B}{\sin. A} \sin. c. \cos. A = \cos. a$$

oder zusammengezogen:

$$(III) \cot. a. \sin. c = \cos. c. \cos. B + \sin. B. \cot. A$$

Endlich bleibt uns noch die Beziehung zwischen einer Seite und drei Winkeln des sphärischen Dreiecks zu entwickeln übrig. Wir brauchen zu diesem Behuf nur die aus (B) für $\sin. a$ und $\cos. a$ gezogenen Werthe in die Gleichung (III) zu substituiren, und sie dann zum Quadrat zu erheben. Das Resultat ist

$$\frac{\sin. C^2 - \sin. c^2. \sin. A^2}{\sin. A^2} = \cos. c^2. \cos. B^2$$

$$+ 2 \cos. c. \cos. B. \sin. B. \cot. A + \sin. B^2. \cot. A^2$$

oder, auf eine einfachere Form gebracht, indem wir alle Glieder durch $\sin. A^2$ multipliciren und $1 - \sin. B^2$, $1 - \cos. B^2$ an die Stelle von $\cos. B^2$, $\sin. B^2$ setzen:

$$\sin. C^2 - \sin. A^2 (\sin. c^2 + \cos. c^2) - \cos. A^2 = - \cos. c^2. \sin. B^2. \sin. A^2 + 2 \cos. c. \cos. B. \sin. B. \cos. C. \sin. C - \cos. B^2. \cos. A^2$$

zusammengezogen, die Zeichen verändert und die Wurzel ausgezogen:

$$(IV) \cos. C = \sin. B. \sin. A. \cos. c - \cos. B. \cos. A.$$

Für die Anwendung der Logarithmen ist nur die zweite der hier entwickelten Formeln geeignet. Auch den drei andern eine Gestalt zu geben, worin sie als Producte oder Quotienten der trigonometrischen Funktionen erscheinen, bieten sich uns zwei Hülfsmittel dar. Das eine besteht in der Benutzung bekannter Formeln der analytischen Trigonometrie zur Aufhebung der Zweitheiligkeit, das andere in der Einführung eines zu dieser Absicht zweckmäßig gewählten Hülfswinkels.

Die erste und letzte der gewonnenen Gleichungen lassen sich zusammenziehen durch Anwendung der bekannten Relationen:

$$(1) \cos. \alpha - \cos. \beta = 2 \sin. \frac{1}{2} (\beta - \alpha) \sin. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

$$(2) \cos. \alpha + \cos. \beta = 2 \cos. \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos. \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

$$(3) \cos. \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos. \alpha}{2}}$$

$$(4) \sin. \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos. \alpha}{2}}$$

Es ist nämlich, etwas umgestaltet:

$$(I) \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b. \cos. c}{\sin. b. \sin. c}$$

$$\text{mithin } 1 + \cos. A = \frac{\sin. b. \sin. c - \cos. b. \cos. c + \cos. a}{\sin. b. \sin. c}$$

$$\text{und zusammengezogen} = \frac{\cos. a - \cos. (b + c)}{\sin. b. \sin. c}$$

Die Formeln (1) und (3), auf diesen Ausdruck bezogen, geben ihm folgende Gestalt:

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (b + c - a) \sin. \frac{1}{2} (a + b + c)}{\sin. b. \sin. c}}$$

Um hingegen den Werth von A in Function des Sinus zu erhalten, setzen wir die gegebene Gleichung unter die Form

$$\begin{aligned} 1 - \cos. A &= \frac{\sin. b. \sin. c + \cos. b. \cos. c - \cos. a}{\sin. b. \sin. c} \\ &= \frac{\cos. (b - c) - \cos. a}{\sin. b. \sin. c} \end{aligned}$$

und erhalten mit Zuziehung der Formeln (1) und (4)

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (a - b + c) \sin. \frac{1}{2} (b - c + a)}{\sin. b. \sin. c}}$$

Auf dieselbe Weise verfährt man mit der letzten Hauptgleichung.

$$(IV) \cos. c = \frac{\cos. C + \cos. B. \cos. A}{\sin. B. \sin. A}$$

$$\begin{aligned} 1 + \cos. c &= \frac{\sin. A. \sin. B + \cos. A. \cos. B + \cos. c}{\sin. A. \sin. B} \\ &= \frac{\cos. (A - B) + \cos. C}{\sin. A. \sin. B} \end{aligned}$$

Nach den Formeln (1) und (3)

$$\cos. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B + C) \cos. \frac{1}{2} (A - B - C)}{\sin. A. \sin. B}}$$

oder, um die Function des Sinus zu erhalten:

$$1 - \cos. c = \frac{\sin. A. \sin. B - \cos. A. \cos. B - \cos. C}{\sin. A. \sin. B}$$

$$= \frac{-\cos. (A + B) - \cos. C}{\sin. A. \sin. B}$$

Den Formeln (2) und (4) gemäß:

$$\sin. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos. \frac{1}{2} (A + B + C) \cos. \frac{1}{2} (A + B - C)}{\sin. A. \sin. B}}$$

Das zweite Vereinfachungsmittel besteht in der Einführung eines Hülfswinkels in eine zweitheilige Größe, worin Sinus und Cosinus desselben Winkels erscheinen, der allgemeinen Form:

$$(A) P \sin. \alpha + Q \cos. \alpha$$

$$(B) P \sin. \alpha - Q \cos. \alpha$$

Die Factoren P und Q werden nämlich dem Sinus und Cosinus des Hülfswinkels proportional gesetzt, welches auf zwiefache Art geschehen kann:

$$(a) \frac{P}{Q} = \frac{m. \sin. \varphi}{m. \cos. \varphi} = \text{tang. } \varphi$$

woraus sich $m = \frac{P}{\sin. \varphi}$, oder $= \frac{Q}{\cos. \varphi}$ ergibt.

$$(b) \frac{Q}{P} = \frac{m. \sin. \varphi}{m. \cos. \varphi} = \text{tang. } \varphi$$

mithin $m = \frac{Q}{\sin. \varphi}$ oder $= \frac{P}{\cos. \varphi}$.

Durch Combination der Ausdrücke (a) und (b) mit (A) und (B) entspringen nun die vier nachstehenden:

$$(Aa) m (\sin. \alpha. \sin. \varphi + \cos. \alpha. \cos. \varphi) = m \cos. (\alpha - \varphi)$$

$$\text{d. i.} = \frac{P}{\sin. \varphi} \cos. (\alpha - \varphi) \text{ oder } = \frac{Q}{\cos. \varphi} \cos. (\alpha - \varphi)$$

$$(Ba) m (\sin. \alpha. \sin. \varphi - \cos. \alpha. \cos. \varphi) = -m \cos. (\alpha + \varphi)$$

$$\text{d. i.} = -\frac{P}{\sin. \varphi} \cos. (\alpha + \varphi) \text{ oder } = -\frac{Q}{\cos. \varphi} \cos. (\alpha + \varphi)$$

$$(Ab) m (\sin. \alpha. \cos. \varphi + \sin. \varphi. \cos. \alpha) = m \sin. (\alpha + \varphi)$$

$$\text{d. i.} = \frac{Q}{\sin. \varphi} \sin. (\alpha + \varphi) \text{ oder } = \frac{P}{\cos. \varphi} \sin. (\alpha + \varphi)$$

$$(Bb) \quad m (\sin. \alpha. \cos. \varphi - \sin. \varphi. \cos. \alpha) = m \sin. (\alpha - \varphi)$$

$$\text{d. i.} = \frac{Q}{\sin. \varphi} \sin. (\alpha - \varphi) \text{ oder } \frac{P}{\cos. \varphi} \sin. (\alpha - \varphi)$$

Den Winkel φ erhält man durch Aufschlagen seiner Tangente, welche für die ersten beiden Ausdrücke $\frac{P}{Q}$, für die beiden letzten $\frac{Q}{P}$ ist.

Das hier im Allgemeinen bezeichnete Verfahren möge nun auf die erste, dritte und vierte der obigen Hauptformeln angewandt werden, wodurch man zu brauchbaren Ausdrücken für sechs verschiedene Fälle gelangt.

1) Um eine Seite aus den beiden andern und dem ihr gegenüberliegenden Winkel zu berechnen, giebt man der Gleichung

$$\cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. A$$

durch Einführung der Werthe $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m \sin. \varphi}{m \cos. \varphi} = \frac{\sin. c. \cos. A}{\cos. c}$,

mithin $m = \frac{\cos. c}{\cos. \varphi}$, die Gestalt:

$$\cos. a = \frac{\cos. c}{\cos. \varphi} \cos. (b - \varphi).$$

2) Dieser Ausdruck gilt zugleich für die Berechnung einer Seite aus beiden andern und einem anliegenden Winkel, unter der Form:

$$\cos. (b - \varphi) = \frac{\cos. \varphi. \cos. a}{\cos. c}.$$

3) Eine Seite aus beiden ihr anliegenden Winkeln und einer andern Seite zu berechnen, führen wir in die dritte Hauptgleichung

$$\cot. a. \sin. c - \cos. c. \cos. B = \sin. B. \cot. A$$

die Werthe $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m \sin. \varphi}{m \cos. \varphi} = \frac{\cos. B}{\cot. a}$, mithin $m = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi}$ ein, und geben ihr dadurch die Gestalt

$$\sin. (c - \varphi) = \frac{\operatorname{tang} B. \sin. \varphi}{\operatorname{tang} A}.$$

4) Für die Berechnung eines Winkels aus beiden ihn einschließenden Seiten und einem andern Winkel verwandelt man die vorstehende Gleichung

$$\cot. A. \sin. B + \cos. B. \cos. c = \cot. a. \sin. c$$

durch Einführung der Werthe $\operatorname{tg.} \varphi = \frac{m \sin. \varphi}{m \cos. \varphi} = \frac{\cos. c}{\cot. A}$ und $m = \frac{\cos. c}{\sin. \varphi}$, in

$$\sin. (B + \varphi) = \frac{\operatorname{tang.} c. \sin. \varphi}{\operatorname{tang.} a}.$$

5) Um einen Winkel aus den beiden andern und der ihr gegenüberliegenden Seite zu berechnen, ertheilt man der vierten Hauptformel

$$\cos. C = \sin. B. \sin. A. \cos. c - \cos. A. \cos. B$$

durch die eingeführten Hülfsgrößen

$$\operatorname{tg.} \varphi = \frac{m \sin. \varphi}{m \cos. \varphi} = \frac{\cos. B}{\sin. B. \cos. c}; m = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi};$$

die Gestalt $\cos. C = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi} \sin. (A - \varphi).$

6) Endlich erhält man den Ausdruck eines Winkels durch die beiden andern und eine ihm anliegende Seite in einer einfachen Transposition der vorigen Gleichung

$$\sin. (A - \varphi) = \frac{\cos. C. \sin. \varphi}{\cos. B}.$$

Zusammenstellung der im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln der sphärischen Trigonometrie.

I. $\cos. a = \cos. b. \cos. c + \sin. b. \sin. c. \cos. A$

$$\left. \begin{aligned} \cos. a &= \frac{\cos. c}{\cos. \varphi} \cos. (b - \varphi) \\ \cos. (b - \varphi) &= \frac{\cos. \varphi. \cos. a}{\cos. c} \end{aligned} \right\} \text{ wenn } \operatorname{tg.} \varphi = \cos. A. \operatorname{tg.} c$$

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (a + b - c) \sin. \frac{1}{2} (a - b + c)}{\sin. b. \sin. c}}$$

$$\cos. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (b + c - a) \sin. \frac{1}{2} (b + c + a)}{\sin. b. \sin. c}}$$

II. $\sin. b. \sin. A = \sin. a. \sin. B.$

$$\text{III. } \cot. a. \sin. c = \cos. c. \cos. B + \sin. B. \cot. A$$

$$\sin. (c - \varphi) = \frac{\text{tg. } B. \sin. \varphi}{\text{tg. } A}, \text{ wenn } \text{tg. } \varphi = \cos. B. \text{tg. } a$$

$$\sin. (B + \varphi) = \frac{\text{tg. } c. \sin. \varphi}{\text{tg. } a}, \text{ wenn } \text{tg. } \varphi = \cos. c. \text{tg. } A$$

$$\text{IV. } \cos. C = \sin. B. \sin. A \cos. c - \cos. B. \cos. A$$

$$\left. \begin{aligned} \cos. C &= \frac{\cos. B. \sin. (A - \varphi)}{\sin. \varphi} \\ \sin. (A - \varphi) &= \frac{\cos. C. \sin. \varphi}{\cos. B} \end{aligned} \right\} \text{ wenn } \text{tg. } \varphi = \frac{\cot. B}{\cos. c}$$

$$\sin. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{-\cos. \frac{1}{2} (A + B + C) \cos. \frac{1}{2} (A + B - C)}{\sin. A. \sin. B}}$$

$$\cos. \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2} (A - B + C) \cos. \frac{1}{2} (A - B - C)}{\sin. A. \sin. B}}$$

Die einfacheren Gleichungen für rechtwinklichte sphärische Dreiecke ergeben sich aus den obigen vier Hauptformeln, wenn man einen der in ihnen erscheinenden Winkel $= 90^\circ$ setzt. Auf diese Weise erhalten wir die Ausdrücke:

- $$\left. \begin{aligned} 1) \cos. a &= \cos. b. \cos. c \\ 2) \sin. a. \sin. B &= \sin. b \\ 3) \text{tg. } B. \sin. c &= \text{tg. } b \end{aligned} \right\}, \text{ wenn } A = 90^\circ.$$
- $$\begin{aligned} 4) \cos. A. \text{tg. } b &= \text{tg. } c, \text{ wenn } B = 90^\circ. \\ 5) 1 &= \text{tg. } B. \text{tg. } C. \cos. a, \text{ wenn } A = 90^\circ. \\ 6) \cos. A &= \sin. C. \cos. a, \text{ wenn } B = 90^\circ. \end{aligned}$$

Mathematische Geographie.

Erstes Capitel.

Geometrische Auffassung der täglichen Erscheinungen und Veränderungen am Himmel.

Die mathematische Erdbeschreibung macht es sich zur Aufgabe, uns Aufklärung über die Gestalt und Ausdehnung der Erde, über ihre räumlichen Beziehungen zu den übrigen Weltkörpern und die Zeitbestimmung zu geben, die wir auf mehrere, regelmäßig am Himmel wiederkehrende Erscheinungen begründen. Sie tritt daher auf als ein, aus jener umfassenderen Wissenschaft, die das ganze Weltgebäude zum Gegenstande ihrer Untersuchungen macht, hervorgehobenes Bruchstück, von unbestimmten Gränzen umschlossen und nichts weniger, als selbstständig, weil sie überall der Hinweisung auf Gegenstände bedarf, die der eigentlichen Astronomie anheim fallen. Erscheinungen des gestirnten Himmels sind es, aus denen sie vorzugsweise und beinahe ausschließlich ihre Lehren schöpft; mit Recht stellen wir diese an den Eingang unserer Betrachtungen und suchen in ihnen ein Princip ausfindig zu machen, das uns zu einer gewissen allgemeinen Beziehung der Richtungen im Welt- raume leite, deren jede geometrische Behandlung der Geographie, als ihrer Basis, bedarf.

Wenn unser Auge in heitrer, sternenheller Nacht von einem freiliegenden Standpunkte aus mit Aufmerksamkeit den Himmel betrachtet, der einem hohen Gewölbe gleich an den Gränzen unsers Gesichtskreises sich auf die flache Erde herabzuneigen scheint, so nimmt es durch Vergleichung mit den ruhenden Gegenständen der Erdoberfläche eine langsame gemeinschaftliche Bewegung aller leuchtenden Punkte wahr. Mit wachsendem Glanze steigen sie in der Gegend des Morgens herauf, durchschweben in größeren und kleineren concentrischen und parallelen Kreisen *) den dunkeln Raum,

*) Auf empirischem Wege ergibt sich die Kreisform dieser Bahnen sehr einfach durch ein Instrument, an welchem um die verkörperte gemeinschaftliche Axe derselben ein Fernrohr in geneigter Lage drehbar ist. Denn dasselbe wird unter diesen Bedingungen die Bahn eines Sterns, wenn es gedreht wird, unaufhörlich verfolgen. Beschreibt aber Ein Stern einen Kreis am Himmel, so gilt dieß zugleich von allen übrigen, wenn sie ihre gegenseitige Lage nicht ändern.

und verlieren sich mit immer matterem Scheine in der Morgendämmerung, die der Sonne voranzieht. Eben so verschwindet, vom Sonnenlicht überwältigt, eine Flamme, die weit durch die finstere Nacht leuchtete, schon in geringer Entfernung unserm Auge, und nur die optische Kraft der Fernröhre setzt uns in den Stand, am blauen, erleuchteten Himmel die dem unbewaffneten Auge längst erloschenen Gestirne in ihren Bahnen zu verfolgen.

Bei jener gleichförmigen Bewegung, wodurch das ganze Himmelsgewölbe umgewälzt zu werden scheint, indem die gegenseitige Lage der Gestirne sich nicht ändert, sondern nur ihr Standpunkt, bezogen auf irdische Richtungen und Gegenstände, bleibt Ein Punkt völlig unbeweglich: die übrigen Sterne beschreiben um ihn nach Verhältniß ihrer größeren oder geringeren Entfernung weitere oder kleinere Kreise. Die, welche ihn zunächst umkreisen, bleiben uns ununterbrochen sichtbar; andere erheben sich am östlichen Himmel, um am westlichen dem Auge wieder zu entschwinden: aber die Analogie leitet uns zu dem natürlichen Schlusse, daß auch sie die Kreisbahn, in welcher sie über dem Horizont fortschritten, unter demselben fortsetzen werden. Auch sehen wir sie mit jedem Abend unverändert hinter dem östlichen Erdrande wieder emporsteigen.

Nach diesen Erfahrungen umkreist der Himmel — immer nur zum Theil für uns übersehbar — in Gestalt einer hohlen Kugel die Erde. Die Are dieser Kugel ist eine durch den oben erwähnten unbeweglichen Punkt am Himmel und unser Auge gelegte gerade Linie, welche verlängert die Himmelskugel in einem zweiten unbeweglichen Punkte antreffen muß. Wirklich hat uns die Erfahrung einen solchen, nur in entfernten mittäglichen Gegenden sichtbar, kennen gelehrt. Senkrecht auf der Are, durch welche wir uns beide Drehungspunkte — die Weltpole — verbunden denken, stehen die sämtlichen Kreisbahnen der Sterne, in der Kunstsprache der Astronomie die Tage- oder Parallelkreise. Das für uns sichtbare Stück des Kreisbogens, welchen irgend ein Gestirn beschreißt, wird sein Tagbogen genannt. Der größte unter allen Parallelkreisen ist augenscheinlich der zwischen beide Pole genau in die Mitte fallende, der die Himmelskugel in zwei gleiche Hälften theilt. Man nennt ihn (jedoch aus einer andern Veranlassung) den Aequator, worunter auch, im weiteren Sinne, eine durch ihn gelegte unbegranzte Ebene verstanden wird. Wünschen wir eine Basis für die Beziehung der Lage der Sterne an der Himmelskugel, d. h. der Richtungen ihrer zu unserm Auge gelangenden Lichtstrahlen, zu erhalten, so ist uns hier die Möglichkeit dazu gegeben.

Analog dem Verfahren der höheren Geometrie, welche die Lage von Punkten durch geradlinigte Abscissen und Ordinaten bestimmt, können wir hier nämlich den Kreis des Aequators als Abscissenlinie, und ein senkrecht vom Stern auf ihn gefälltes Bogenstück als dessen Ordinate betrachten.

Von einem hier noch willkürlich erscheinenden Anfangspunkte, der erst späterhin bestimmt werden wird, zählt man diese Coordinaten. Man hat in der Astronomie den Abscissen den Namen Rectascension oder gerade Aufsteigung, den Ordinaten die Benennung Declination oder Abweichung beigelegt, und pflegt dieörter der Sterne durch diese in Graden ausgedrückten Kreisbögen in den Sternencatalogen anzugeben. Je nachdem die Sterne in der südlichen oder nördlichen Hemisphäre liegen, werden auch ihre Abweichungen als nördliche und südliche unterschieden. Größte Kreise, die durch beide Pole geführt sind, und also den Aequator senkrecht durchschneiden, nennt man Declinations- oder auch Stundenkreise. Derjenige unter ihnen, der durch den Scheitelpunkt des Beobachters gelegt ist, heißt der Meridian desselben, weil in ihm die Sonne täglich den höchsten Punkt ihrer Bahn erreicht und dadurch dem Beobachter zugleich die Zeit und Richtung des Mittags anweist; im weiteren Sinne begreift man darunter eine durch diesen Kreis gelegte Ebene. Den von dem Meridian und einem andern Stundenkreise eingeschlossenen Winkel nennt man den Stundenwinkel.

Aber es giebt noch ein anderes, dem vorigen freilich ganz ähnliches, Verfahren, die Richtung der zu uns kommenden Lichtstrahlen der Sterne im Raume festzulegen, welches den natürlichen Horizont — eine Ebene, die durch den Spiegel jeder ruhigen Flüssigkeit am Orte des Beobachters versinnlicht wird — zur Basis der Beziehungen annimmt. Diese Ebene schneidet den Himmel in einem größten Kreise, dessen Pole — über dem Scheitel und unter den Füßen des Beobachtenden durch die Richtung eines herabhängenden Lothes bestimmt — Zenith und Nadir genannt werden. Auch in diesem Kreise müssen wir einen Anfangspunkt festlegen, um von ihm aus in gegebener Richtung die Abscissen — die Azimuthe — zu zählen, welche durch die, als Ordinaten von den Sternen senkrecht gefällten Bögen — die Höhen der Sterne — abgeschnitten werden. Analog den Stundenkreisen sind hier die Scheitel- oder Verticalkreise, durch Zenith und Nadir in allen Richtungen gezogen, so wie den Tagekreisen auf der vorhin construirten Kugel hier die, dem Horizont parallelen Kreise entsprechen, die den Namen Almucantharat oder Höhenkreise führen. Der Meridian des Beobachters erscheint hier als der, durch sein Zenith und beide Pole gelegte Verticalkreis. Von einem der beiden Punkte, in denen er den Kreis des Horizonts schneidet, zählt man die Azimuthe. Sie heißen Nord- und Südpunkt, je nachdem sie in der nördlichen oder südlichen Halbkugel, dem Nordpol oder dem Südpol zunächst liegen. Gewöhnlich wählt man den Südpunkt zum Anfangspunkte, und mißt den sphärischen Winkel, welchen der Meridian des Beobachters mit einem andern Scheitelkreise einschließt, durch das östliche oder westliche Azimuth; den Bogen aber, um welchen ein Punkt am Himmel sich über den Horizont erhebt, durch seine Höhe, wodurch die Richtung auf eine, wie man sieht, der vorhergehenden ganz ähnliche, Weise ebenfalls mathematisch festgelegt ist.

Diese letztere Art, die Dörter der Sterne zu bestimmen, ist diejenige, wozu die gewöhnliche Beobachtungsmethode sich gleichsam von selbst darbietet. Sie läßt sich ohne Schwierigkeit auf die erstere zurückführen, indem wir die Beziehungslinie beider Bestimmungsarten in einem sphärischen Dreieck mit einander verknüpfen. Der Abstand des Zeniths vom Pol oder seine Polardistanz ZP (Fig. 2.), welche wir als Complement der Polhöhe HP durch Beobachtung gewinnen, bildet die eine Seite dieses Dreiecks. Die zweite erkennen wir in dem Bogenstück eines Stundenkreises, welches die Polardistanz eines Sterns (PS) als Ergänzung seiner Declination (DS) mißt, die dritte aber in der Zenithdistanz dieses Sterns (ZS), dem Bogen eines Scheitelskreises, in welchem die Höhe (NS) beobachtet worden ist. In dem, auf diese Weise entstandenen, sphärischen Dreieck PZS sind bekannt: die Seiten PZ und ZS nebst dem eingeschlossenen Winkel in Z, als Nebenzwinkel des Azimuths. Aus ihnen müssen die Seite PS und der Stundenwinkel in P berechnet werden, wenn wir die Rectascension und Declination der Sterne ausmitteln oder ihre Dörter auf den Aequator beziehen wollen. Ist der Stundenwinkel, den der Bogen DR des Aequators mißt, gefunden, so folgt daraus, wenn wir anders den Bogenabstand VR des Anfangspunktes V vom Meridian im Augenblick der Beobachtung kennen, die gerade Aufsteigung VD von selbst, weil $VD = VR - DR$. Wie aber der Bogenabstand VR für einen gegebenen Zeitpunkt als bekannt angesehen werden könne, müssen uns spätere Betrachtungen lehren.

Möge nun hier und in der Folge überhaupt die Polhöhe durch β , die Rectascension durch α , der Stundenwinkel durch γ , die Declination durch δ , das Azimuth durch a und die Höhe durch h bezeichnet werden, so lösen wir die obige Aufgabe mit Hülfe der beiden ersten, in der Einleitung entwickelten, Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie. Ihnen zufolge ist in Fig. 3:

$$\cos. PS = \frac{\cos. ZS}{\cos. \varphi} \cos. (PZ - \varphi), \text{ wenn } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} ZS \cdot \cos. Z$$

$$\text{d. i. 1) } \sin. \delta = \frac{\sin. h}{\cos. \varphi} \sin. (\beta \mp \varphi), \text{ wenn } \operatorname{tg} \varphi = -\cot. h \cdot \cos. a$$

$$\text{Ferner } \sin. PS \cdot \sin. P = \sin. ZS \cdot \sin. Z$$

$$\text{d. i. 2) } \cos. \delta \cdot \sin. \gamma = \cos. h \cdot \sin. a.$$

In diesen zweiten Ausdruck muß der aus Nr. 1. berechnete Werth von δ substituirt werden, wenn man γ und eben dadurch α erhalten will.

Häufiger, als von der vorstehenden Aufgabe, wird man von der umgekehrten Gebrauch zu machen Gelegenheit finden: den Ort eines Gestirns, bezogen auf den Horizont, oder Höhe und

Azimuth, aus der (in den Sternverzeichnissen) gegebenen geraden Aufsteigung und Abweichung zu bestimmen. Dieß geschieht mit Hülfe des Ausdrucks:

$$\cos. ZS = \frac{\cos. PS}{\cos. \varphi} \cos. (PZ - \varphi), \text{ wenn } \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} PS \cdot \cos P$$

$$\text{d. i. 1) } \sin. h = \frac{\sin. \delta}{\cos. \varphi} \sin. (\beta + \varphi), \text{ wenn } \operatorname{tg} \varphi = \cot. \delta \cdot \cos \gamma$$

und des schon oben gebrauchten:

$$2) \sin. a \cdot \cos. h = \cos. \delta \cdot \sin. \gamma.$$

Es werde z. B. für den 1. Januar 1820 in Palermo, wofür man die Polhöhe = $39^{\circ} 6' 44''$ findet, der Ort des Sterns α im Sternbilde des Perseus in Beziehung auf den Horizont für denjenigen Augenblick gesucht, in welchem derselbe um den Stundenwinkel von 30° über den Meridian hinausgerückt ist *), so entnehmen wir aus einem Sternverzeichniß (Anl. Nr. I.) seine Declination für jenes Jahr = $49^{\circ} 12' 42''$, und berechnen Höhe und Azimuth behuf der dem Instrument im Voraus zu gebenden Stellung folgendermaßen:

$$\log. \cot. \delta = \text{l. } \cot. 49^{\circ} 12' 42'' = 9.93592$$

$$+ \log. \cos. \gamma = \text{l. } \cos. 30^{\circ} = 9.93753$$

$$\log. \operatorname{tg} \varphi = 9.87345$$

$$\text{folglich } \varphi = 36^{\circ} 46' 5''$$

$$\log. \sin. \delta = \text{l. } \sin. 49^{\circ} 12' 42'' = 9.87917$$

$$+ \log. \sin. (\beta + \varphi) = \text{l. } \sin. 74^{\circ} 52' 49'' = 9.98470$$

$$19.86387$$

$$- \log. \cos. \varphi = \text{l. } \cos. 36^{\circ} 46' 5'' = 9.90368$$

$$\log. \sin. h = 9.96019$$

$$\text{also } h = 65^{\circ} 50' 33''$$

$$\log. \cos. \delta = \text{l. } \cos. 49^{\circ} 12' 42'' = 9.81509$$

$$+ \log. \sin. \gamma = \text{l. } \sin. 30^{\circ} = 9.69897$$

$$19.51406$$

$$- \log. \cos. h = \text{l. } \cos. 65^{\circ} 50' 33'' = 9.61198$$

$$\log. \sin. a = 9.90208$$

$$\text{folglich } a = 52^{\circ} 57' 12''.$$

*) Wie man diesen Augenblick durch Kenntniß der Uhrzeit und der geraden Aufsteigung des Sterns findet, kann erst in der Folge aufgeklärt werden.

Eine dritte, in dem sphärischen Dreiecke ZPS unſ entgegengetretende Aufgabe, deren practiſcher Werth für den Seefahrer erſt an einem ſpättern Orte hervorgehoben werden kann, fordert die Berechnung des Stundenwinkels aus gegebener Polhöhe, und der Höhe und Polarbistanz eines Sterns. Dieſe letztere, das Complement der Declination, welche für die Bequemlichkeit der Rechnung unmittelbar in den Ausdruck eingeführt werden muß, mag durch π bezeichnet werden. Alsdann werden die beiden, den Werth des Stundenwinkels durch die drei Seiten in Function des Sinus und Cosinus beſtimmenden, Gleichungen:

$$1) \sin. \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (ZS + PZ - PS) \sin. \frac{1}{2} (ZS + PS - PZ)}{\sin. PZ. \sin. PS}}$$

$$2) \cos. \frac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (PZ + PS - ZS) \sin. \frac{1}{2} (PZ + PS + ZS)}{\sin. PZ. \sin. PS}}$$

nach geſchehener Subſtitution und Vereinfachung:

$$1) \sin. \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2} (\beta + \pi + h) \sin. \frac{1}{2} (\beta + \pi - h)}{\cos. \beta. \sin. \pi}}$$

$$2) \cos. \frac{1}{2} \gamma = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (h + \pi - \beta) \cos. \frac{1}{2} (h + \beta - \pi)}{\cos. \beta. \sin. \pi}}$$

Der erſte Ausdruck wird den Stundenwinkel ſchärfer geben, wenn er klein iſt, der letzte hingegen, wenn er 90° nahe kommt. Vorzüglich hängt aber die Schärfe in der Beſtimmung von γ davon ab, daß man die Höhe ſehr genau für den Moment der Beobachtung angegeben habe; folglich muß der Beobachter ſolche Augenblicke wählen, in denen eine Aenderung der Höhe am wenigſten zweifelhaft ſeyn kann, und dieſe ſind diejenigen, in denen das Azimuth des Sterns 90° oder 270° beträgt.

Wählen wir, um ein Beiſpiel der Anwendung des erſten Ausdrucks zu geben, die oben gebrachten Werthe $\beta = 38^\circ 6' 44''$, $h = 65^\circ 50' 33''$ und $\delta = 49^\circ 12' 42''$, folglich $\pi = 40^\circ 47' 18''$, ſo nimmt die Rechnung folgenden Gang:

$$\begin{array}{r} 1. \cos. \frac{1}{2} (\beta + \pi + h) = 1. \cos. 72^\circ 22' 17'', 5 = 9.48121 \\ + 1. \sin. \frac{1}{2} (\beta + \pi - h) = 1. \sin. 6^\circ 31' 44'', 5 = 9.05579 \\ \hline 8.53700 \\ 1. \cos. \beta = 1. \cos. 38^\circ 6' 44'' = 9.89587 \\ + 1. \sin. \pi = 1. \sin. 40^\circ 47' 18'' = 9.81509 \\ \hline - 9.71096 \\ \hline 28.53700 - 20 \\ \hline 18.82604 - 20 \\ \hline : 2 \end{array}$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} \gamma = 9.41302$$

$$\text{folglich } \frac{1}{2} \gamma = 15^\circ \text{ und } \gamma = 30^\circ.$$

Von den mannigfaltigen Aufgaben, zu denen die Betrachtung des, durch die Verbindung eines Sterns mit den Punkten des Pols und des Zeniths erzeugten, sphärischen Dreiecks Stoff darbietet, werden die hier mitgetheilten hinreichen, um von der unmittelbaren Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Beobachtungen des gestirnten Himmels einen Begriff zu geben.

Zweites Capitel.

Vom Standpunkt der Erde im Weltsystem.

Der Ausspruch der Alten: die Erde stehe im Mittelpunkte der Welt, enthielt eine Wahrheit, die sie selbst vermuthlich nicht dabei im Auge hatten. Denn da die Idee des Raumes durchaus keine Schranken duldet, und unsre Einbildungskraft sich genöthigt fühlt, von jedem Punkte aus nach allen Richtungen eine Unendlichkeit der Ausdehnung anzunehmen, so dürfen wir auch den Ort unserer Erde als den Mittelpunkt einer Sphäre ansehen, die sich über alle willkürliche Gränzen hinaus erweitert.

Die Frage nach dem Standpunkt der Erde im Weltraum gewinnt aber nur dann eine vernünftige Bedeutung, wenn wir darunter die Lage derselben, in Beziehung zu den übrigen Himmelskörpern, verstehen. Zu ihrer Lösung führt uns ein aufmerksames Nachdenken über den wahren Grund jener Erscheinung einer gemeinsamen Rotation aller Sterne um unsern Erdkörper. Die Einbildungskraft, und mehr noch der Verstand, sträuben sich gegen die Vorstellung einer wirklichen Bewegung jener unzähligen Menge von Weltkörpern, welche durch unermessliche Abstände von einander und unserer Erde geschieden werden. Weniger ungereimt erscheint in der That die kindische Vorstellung der Alten, daß eine materielle Hohlkugel, vom himmlischen Feuer durchstrahlt, sich um uns drehe, als die Annahme, daß alle im endlosen Raume zerstreuten Weltkörper in parallelen Bahnen und mit Geschwindigkeiten uns umkreisen, die genau ihrem Abstände von der Ase proportional seyn müßten, um das Phänomen einer gleichförmigen gemeinschaftlichen Bewegung der Sternconfigurationen möglich zu machen.

Glücklicherweise bleibt uns eine einfachere Erklärungsart, die aber — vielleicht, weil sie zu einfach und natürlich ist — dem menschlichen Scharfsinne erst in spätem Jahrhunderten sich darbietet: wir brauchen nur, statt den Himmel um seine Ase, die Erde im entgegengesetzten Sinne um die

ihre in Bewegung zu setzen, um zugleich den sinnlichen Wahrnehmungen und den Anforderungen des Verstandes Genüge zu leisten. Dann bedarf es nicht jener unnatürlichen erkünstelten Anordnung des Weltsystems, jener parallelen Bahnen und ungeheuren Geschwindigkeiten der übrigen Weltkörper: der Himmel mit seinen unzähligen Gestirnen steht fest und unbeweglich, während die Erde, überall von jenen Weltkörpern umgeben, sich drehet und durch ihre Umwälzung eine Weltaxe für den Himmel bestimmt.

Das hier im Allgemeinen über reelle Unbeweglichkeit der Gestirne Ausgesprochene leidet jedoch einige Ausnahmen bei der Sonne, dem Monde und wenigen andern Sternen. Der scheinbare tägliche Umlauf dieser Körper beruht allerdings auf der Rotation der Erde: aber sie erscheinen nicht immer neben denselben Fixsternen, sondern ändern unaufhörlich ihren Ort am Himmel. So entdecken wir an der Sonne eine eigenthümliche Bewegung von Westen nach Osten in einem andern Kreise, als dem des Aequators — dem Kreise der Ekliptik. Wir urtheilen über ihren Weg am Himmel durch Beobachtung derjenigen Sterne, die nach ihrem Untergange über den östlichen Horizont heraussteigen. Mit jedem Abend sehen wir diese weiter nach Westen vorrücken und sich allmählig im Tageslichte verlieren, während andere Sternbilder im Osten sichtbar werden. Die Sonne zeigt also eine eigenthümliche, rückgängige Bewegung von Abend nach Morgen gegen die der Fixsterne. Nach einer Periode von 365 Tagen und einigen Stunden erreicht sie wieder denjenigen Fixstern in ihrer Bahn, von welchem sie ausgegangen war, und beginnt ihren bisherigen Kreislauf von neuem.

Der Lauf der Sonne erscheint mithin so einfach, daß man keinen Grund hat, die Realität der anscheinenden Bewegung zu bezweifeln, so lange man nicht auch die Bahn der Planeten der Beobachtung unterzieht. Mitten unter der zahllosen Menge leuchtender Punkte am nächtlichen Himmel zählen wir nämlich zehn Sterne, welche unaufhörlich ihren Standpunkt verändern und dadurch vor allen übrigen sich bald auszeichnen. Fünf von ihnen: Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn, kann man mit bloßem Auge wahrnehmen; fünf andere: Uranus, Ceres, Pallas, Juno und Vesta — eine Entdeckung der neuesten Zeiten — sind nur in Fernrohren sichtbar. Merkur und Venus begreift man unter dem Namen der untern Planeten, während man unter den obern die acht übrigen versteht. Die Bahnen aller dieser Himmelskörper erscheinen sehr verwickelt und unregelmäßig, wenn wir die Dexter, welche sie nach und nach am Himmel durchziehen, ebenfalls an den Fixsternen bemerken. Eine Zeit lang werden sie im Sinne der übrigen Sterne von Osten nach Westen in sogenannter rechtläufiger Bewegung vorrücken, dann still zu stehen scheinen oder stationär seyn, und endlich als rückläufig sich im entgegengesetzten Sinne der Umwälzung des Himmels bewegen. Die anscheinende Geschlossenheit dieses Laufes vermag auch die künstlichste Fiction epicycloidischer Bahnen — wie sie einst das Ptolemäische System versuchte —

nicht

nicht aufzuheben; nur dann verschwindet sie, wenn wir den jedesmaligen Ort der Planeten auf den der Sonne, als Mittelpunkt, beziehen; denn nun erklärt sich die für unser Auge scheinbare Unregelmäßigkeit ihres Laufes aus ihrer mit der Sonne fortschreitenden Bewegung und der verschiedenen Neigung ihrer Bahnen gegen diejenige, welche die Sonne um die Erde zu beschreiben scheint.

Aber es fragt sich, ob diese anscheinende jährliche Bewegung der Sonne um die Erde nicht eben sowohl eine Illusion sey, als die tägliche des gestirnten Himmels? Denn weigern wir uns nicht, als dynamische Ursache jener Circulation der Planeten um den Sonnenkörper eine gewisse Anziehungskraft anzuerkennen, welche im Conflict mit der, in progressiver Bewegung begründeten, Centrifugalkraft sie vollkommen erklärbar macht, so müssen wir die Behauptung, daß der Sonnenkörper sammt dem ganzen Planetensystem den kleineren Erdkörper umkreise, nothwendig aufgeben, also das sogenannte Tychonische System ebenfalls verwerfen. Diesen Zweifel an wirklicher Bewegung der Sonne rechtfertigt folgende allgemeine optisch-phoronomische Betrachtung. Jede Ortsveränderung im Raume äußert sich dem Auge nur als relative Bewegung. Das Fortrücken eines Punktes wird bemerkbar, indem wir ihn auf einen andern Punkt beziehen und mit seiner ursprünglichen Lage und Richtung die nachherigen Veränderungen derselben in Vergleich stellen. Die Erscheinung der Bewegung bleibt also für unser Auge die nämliche: sey es, daß ein Object sich bewege, während wir in absoluter Ruhe sind; oder umgekehrt, daß jenes Object unverrückt seinen Platz behaupte, während das Auge seine Stelle im Raume verändert. Jede sanfte Bewegung auf der Oberfläche der Erde, worin wir nicht durch Erschütterung oder Hemmung gestört werden, kann auf diese Weise uns durch Sinnentäuschung alle äußere Gegenstände bewegt erscheinen lassen, während wir selbst unsern Standpunkt gegen sie verändern.

Der scheinbare Kreislauf der Sonne kommt mithin auch dann zu Stande, wenn die Erde sich in einer Kreisbahn um jene bewegt; denn die Richtungen, unter welchen der Sonnenkörper dem Auge des irdischen Beobachters erscheint, müssen auch unter dieser Hypothese alle Gestirne im Umfange eines größten Kreises am Himmel treffen, so daß der Erscheinung durch sie eben sowohl, als durch die, auf den Augenschein gebauete, ältere Vorstellungsart Genüge geleistet wird. Was aber jede Ungewißheit über die wahre Natur dieser Bewegung entfernt, ist die einfache Gesetzmäßigkeit, die wir plötzlich hervortreten sehen, sobald wir Unbeweglichkeit der Sonne und dahin- gegen eine zwiefache, zugleich rotirende und progressive, Bewegung der Erde annehmen. Dieselbe tritt dann in die Reihe der Planeten, welche von der Sonne aus gesehen, sie alle in der Richtung von Westen nach Osten umkreisen werden, und zwar in Umlaufzeiten, deren Quadrate — wie die Erfahrung lehrt — sich verhalten, wie die Cubikzahlen der mittleren Entfernung von der Sonne *).

*) Siehe die Uebersicht des Sonnensystems in Anlage Nr. II.



Auf diesen Platz weisen sie auch die Entdeckungen der Trabanten des Jupiters, Saturns und Uranus an, welche — unserm Monde ähnlich — jene Körper im Kreislause begleiten. Auch nehmen wir bei Venus, Mars, Jupiter und Saturn mit Hülfe der Fernröhre eine Aendrehung wahr, die in ihrer Richtung vollkommen mit der unserer Erde übereinstimmt, und durch Analogie einen neuen Beweisgrund für die Richtigkeit unserer Hypothese abgiebt.

Bei dieser Erklärungsart der Bewegung der himmlischen Körper — dem Copernikanischen Weltssystem — welche die Erde aus dem unbeweglichen Mittelpunkte der Schöpfung in die Bahn eines Wandelsterns versetzt, gewinnt die letztere vor dem Auge unserer Phantasie eine weit größere Ausdehnung. Denn nun erhalten wir als Maassstab für die Abstände der himmlischen Körper, verglichen mit irdischen Dimensionen, eine Basis von ungeheurer Ausdehnung in dem Durchmesser der Erdbahn. Nichts desto weniger ist der Winkel, unter welchem das Auge von den Fixsternen aus diesen Durchmesser erblicken würde — die sogenannte jährliche Parallaxe der Fixsterne — so klein, daß er nur bei den wenigen von ihnen bemerkbar werden könnte, die durch ihren lebhaften Glanz der Erde näher zu seyn scheinen; aber auch bei ihnen erreicht er kaum ein Paar Secunden. Dieß folgt aus allen Beobachtungen, die man in einander entgegengesetzten Punkten der Erdbahn, also in halbjährigen Intervallen angestellt hat, und über deren Zuverlässigkeit noch gar Zweifel erhoben werden, da ein Unterschied der Richtungen von wenigen Bogensecunden in der Veränderlichkeit der empirischen Hülfsmittel seinen alleinigen Grund haben könnte. Jene Angabe versetzt die nächsten Fixsterne in eine Entfernung von etwa 200000 Halbmessern der Erdbahn oder Sonnenweiten, indem die Cotangente eines Winkels von einer Secunde ihrer Länge nach ungefähr dieses Vielfache des Radius beträgt.

Aus einer so großen Entfernung können die Fixsterne nur durch eigenthümlichen, nicht — wie unsere Planeten und deren Monde — durch erborgten Glanz unserm Auge sichtbar werden, so daß man sie für eben so viele Sonnen halten darf, die im Weltraum zerstreut, und gleich unserm Sonnenkörper Mittelpunkte eigener Planetensysteme sind. Denn auch dieser würde dem Auge, das ihn vom nächsten Fixstern aus erblickte, nur als leuchtender Punkt unter einem scheinbaren Durchmesser von kaum $\frac{1}{10}$ Secunde erscheinen. Dieß ist das Resultat folgender, aus zwei verschiedenen Ausdrücken des Sonnendiameters gebildeter Gleichung:

$$2 r. \sin. \frac{1}{2} \varphi = 2 E. \sin. \frac{1}{2} x,$$

worin r den Radius der Erdbahn $= 1$, φ den Gesichtswinkel, unter welchem der Sonnendurchmesser auf der Erde erscheint, $= 30'$, und E die Entfernung des nächsten Fixsterns von der Sonne, $= 200000$ der angenommenen Einheit bezeichnet.

Drittes Capitel.

Kugelgestalt der Erde.

Unabhängig von der Erfahrung, daß Nord- und Südpol sich höher über den Horizont erheben oder unter ihn hinabsinken, je nachdem wir in der Richtung von Norden nach Süden unsern Standpunkt verändern, findet der Verstand durch mannigfaltige Beobachtungen, die wir an jedem Ort der Erdoberfläche zu machen Gelegenheit haben, sich zu der einfachen Hypothese veranlaßt: die Figur der Erde sey die einer Kugel. Ein einziger, auf Induction gegründeter, Beweis würde hinreichen, der Vorstellung dieser Gestalt, welche die Phantasie bei'm Anblick des umkreisenden Himmels so bereitwillig aufnimmt, überzeugende Gewißheit zu geben. Aber man hat unter vielen die Wahl, denn kaum ist irgend ein Erfahrungssatz, wie dieser, so reich an den verschiedenartigsten Argumentationen.

Das Wesentlichste aller dieser Beweise besteht darin, daß unser Verstand auf die abstracte Vorstellung der Kugel und deren geometrischer Eigenschaften die Erscheinungen bezieht, welche entweder die Erdoberfläche selbst oder Beobachtungen am Himmel unserm Gesichtssinn darbieten. Denn derjenige Sinn, welcher uns am gewissesten über die Gestalt materieller Körper belehrt, der Sinn des Gefühls, läßt uns bei Entscheidung der Frage: wie der Erdkörper geformt seyn möge? im Stiche, weil der Gegenstand für die Ausübung seiner Thätigkeit zu unermesslich ist. Dem Auge allein, dessen sinnliche Wahrnehmung nur auf die Richtungen der Gegenstände beschränkt ist, verdanken wir die empirischen Data, aus denen unsere mathematische Einbildungskraft für die Bestimmung der Figur der Erde ihre Folgerungen zieht.

Am natürlichsten befragen wir zuerst die Erscheinungen der Erdoberfläche selbst, welche uns über ihre Gestalt einigen Aufschluß geben können, zumal wenn wir ihre Allgemeinheit, durch Veränderung unsers Standorts, zu bestätigen suchen.

Die offene See, welche noch täuschender, als eine weite Landstrecke, dem Auge als ebene Fläche erscheint, verbirgt gleichwohl dem Beobachter am Gestade die Schiffe in weiter Entfernung, und läßt nur allmählig Wimpel, Masten und Segel über den Rand des Wassers heraustreten, bis ihm endlich das ganze Fahrzeug an der Gränze des Gesichtskreises sichtbar wird. Der Schiffende dahingegen erblickt anfangs nur die höheren Gegenstände am Ufer, einen Thurm oder Hügel, und entdeckt, wie das Schiff dem Lande näher und näher steuert, immer niedrigere Punkte, die ihm vorher

die Wölbung des Meeres versteckte. Eben so röthet die Sonne bei jedem Aufgang zuerst die Gipfel der westlichen Gebirge, späterhin ihren Fuß und die ganze vorliegende Ebene. Bei der Eigenschaft der Lichtstrahlen, nur in gerader Linie ihren Weg von einem Punkte zum andern zurückzulegen, können wir uns die obige Erfahrung nur dadurch erklären, daß die Oberfläche der Erde gekrümmt seyn müsse. Dasselbe scheint der Anblick des kreisförmigen Horizonts zu bestätigen, der überall, wo nicht Gebirge und andere Hindernisse die Aussicht hemmen, aber am schärfsten begränzt auf offener See, das Auge rings umschließt. Wo sich uns Mittel darbieten, höhere Standpunkte zu gewinnen, da sehen wir, indem wir uns über die Fläche erheben, die Gränzen des Gesichtskreises immer mehr und mehr zurückweichen, und von allen Seiten Gegenstände zum Vorschein kommen, die bisher unserm Auge verborgen geblieben waren. Aber nur die gekrümmte Erde kann sie uns versteckt gehalten haben, da in ebener Fläche ein Object dem Auge nur da entschwindet oder vielmehr gestaltlos zerfließt, wo der Gesichtswinkel eine, für jedes Auge individuell zu bestimmende, Gränze der Kleinheit erreicht. Dazu gehören aber bei einem ziemlich hohen Gegenstande schon sehr beträchtliche Entfernungen, wie uns der numerische Werth von E lehrt, wenn wir in den Ausdruck der Höhe:

$$E. \operatorname{tang.} \alpha = H$$

für H und α die particulären Werthe einer bestimmten Beobachtung an die Stelle setzen. Angenommen, das Object sey ein Thurm von 300 Fuß Höhe, die Gränze des Gesichtswinkels aber $= 2'$, so ist

$$E = \frac{300}{\operatorname{tang.} 2'} = 515660 \text{ Fuß};$$

eine Entfernung, welche mehr, als 20 Meilen beträgt. Ein Auge von der hier angenommenen, mäßigen Sehkraft würde also, wenigstens auf dem Wasserspiegel, der keine hindernde Objecte aufstellt, einen 300 Fuß hohen Thurm in dieser Entfernung erkennen, und zugleich seiner ganzen Länge nach auf Einmal überblicken müssen, wenn die Erde nicht gerundet, sondern flach wäre. Es gehört aber, wie die Erfahrung lehrt, eine Annäherung bis auf etwa 5 Meilen dazu, wenn uns auch nur der Gipfel eines 300 Fuß hohen Objects sichtbar werden soll. Außerdem entspricht die Erscheinung eines stets ringförmigen und mit jedem höheren Standpunkte sich erweiternden Horizonts keiner andern, als der Kugelgestalt.

Wohin wir uns aber auch begeben, welche entfernte Gegend der Erde wir auffuchen mögen; immer bleiben jene Phänomene sich gleich und nirgends treffen wir auf eine Gränze, wo die Fläche etwa an einem schroffen Abgrunde endete, oder, wie an eßigen Körpern, mit einer andern unter schiefem Winkel zusammenträte. Ueberall dehnen sich Länder und Meere zu einer ununterbrochenen gleichförmigen Oberfläche aus, die unter allen körperlichen Gestalten nur der Kugel angehören kann.

Zahllose Reisen der neueren Zeit, welche beinahe keine Gegend der Erdoberfläche unbefucht gelassen, bestätigen die Allgemeinheit der obigen Erscheinungen. Aber sie selbst geben, abgesehen von allen Beobachtungen, noch ein weit kräftigeres Argument für die sphärische Gestalt des Erdkörpers, indem sie, analog dem Sinne des Gefühls, ihn rings umfahren und so im Kreislauf zu dem Anfange ihrer Bahn zurückgekehrt sind. Zugleich sind sie vor andern Erfahrungen geeignet, jede thörichte Vorstellung von einer Unterstüßung oder einer unteren unbewohnbaren Seite des Erdballs zu verschrecken und kurzsichtigen Blicken die unwahrscheinliche Behauptung anschaulich zu machen: der Boden, auf welchem wir einhergehen, schwebe — eine ringsum von Geschöpfen bewohnte Kugel — gleich den übrigen Himmelskörpern im Weltraume.

Von den Erscheinungen am Himmel, welche unsere Ueberzeugung von der Kugelgestalt der Erde zu befestigen geeignet sind, ist bereits der veränderlichen Höhe beider Weltpole, je nachdem man sich nördlich oder südlich bewegt, Erwähnung geschehen. Wir dürfen uns hier auf zwei andere Erfahrungen von gleicher Kraft berufen: auf die Verfinsterungen des Mondes und die, dem bewaffneten Auge sichtbare, Form der uns zunächst liegenden Himmelskörper.

Der Mond, den seine matte und veränderliche Beleuchtung als einen an sich dunkeln und nur von den Strahlen der Sonne erhellen Körper bezeichnet, wird nicht selten dann, wenn er dieser am Himmel gerade gegenüber und mithin in voller Erleuchtung steht, von einem kreisförmigen Schatten überzogen, welcher ihn unserm Auge gänzlich oder auch nur zum Theil verhüllt. In der That kann ein genaues Gegenüberstehen von Sonne und Mond nur dann Statt finden, wenn das Auge sich zwischen beiden Körpern in gerader Linie befindet, und in diesem Falle muß die Erde durch ihren Zwischentritt dem Monde das Sonnenlicht entziehen. Die Gränze des Schattens, welchen unser Erdkörper, indem er in die Richtung zwischen Sonne und Mond einrückt, auf diesen letzteren wirft, giebt uns hier also Gelegenheit, auf seine körperliche Gestalt zu schließen. Jene Schattengränze scheint nun aber, so vielfache Beobachtungen man auch zusammenfasse, immer einem Kreise anzugehören, dessen Durchmesser etwa das Dreifache eines Monddiameters betragen mag. Fänden diese Verfinsterungen jedes Mal auf die nämliche Weise, d. h. bei denselben Standpunkten der Himmelskörper Statt, so würde die Vorstellung einer Scheibe oder eines flachen Cylinders hinreichen, den gekrümmten Schatten zu erklären: da aber die Oppositionen von Sonne und Mond nicht etwa an einem bestimmten Orte des Himmels, sondern in allen Richtungen sich wiederholen, so geht hervor, daß der Erdkörper unter allen Umständen denselben kreisförmigen Schatten hinter sich wirft; eine Eigenschaft, die unter allen körperlichen Gestalten nur die Kugel besitzt.

Die Analogie, welche da, wo unmittelbare Erkenntniß nicht möglich ist, oft sehr schätzbare, wenn auch minder überzeugende, Beweise liefert, kommt hier der Induction noch zu Hülfe, um

die sphärische Gestalt der Erde außer allen Zweifel zu setzen. Der Anblick des Mondes und der übrigen Planeten unsers Sonnensystems läßt uns nämlich sphärisch gebildete Weltkörper erkennen, und wir haben um so mehr Grund, eine Uebereinstimmung zwischen ihrer Gestalt und der der Erde anzunehmen, da uns die Beobachtung zugleich an mehreren jener Körper eine mit der unserer Erde harmonirende, progressive und rotirende, Bewegung kennen lehrt.

Eine andere Frage ist es, ob der Erdkörper vollkommen sphärisch geformt, oder nur ein der Kugel sehr nahe kommendes Sphäroid sey? Ihre Beantwortung kann aber erst an einem spätern Orte Raum finden, nachdem die mathematische Geographie uns die Möglichkeit und die Methode einer genaueren Bestimmung seiner Gestalt gezeigt hat. Bis dahin mag uns die Hypothese der Kugel genügen.

Viertes Capitel.

Umdrehung des Erdballs.

Außer den, von Erscheinungen am Himmel hergeleiteten, Gründen, welche uns zur Annahme einer täglichen Umdrehung des Erdkörpers berechtigen — Gründe, die auf einem Raisonnement beruhen, das die Wahrscheinlichkeit und Analogie von der einen, die Ungereimtheit von der andern Seite hervorhebt, ohne sich jedoch auf eine eigentlich mathematische Demonstration berufen zu können — finden wir noch ein empirisches Prüfungsmittel dieses Satzes in dem freien Falle schwerer Körper aus einer beträchtlichen Höhe. Drehet sich die Erde in der That von Westen nach Osten um eine Ase, deren Richtung im Raume durch die Lage der Weltpole erkannt wird, und zwar mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, wie dieß die Erklärung der täglichen Erscheinungen am Himmel erfordert, so muß jeder Punkt ihrer Oberfläche nach dem Verhältniß seines kleineren oder weiteren Abstandes von der Ase eine geringere oder größere Geschwindigkeit besitzen. Ein aus beträchtlicher Höhe frei fallender Körper wird mithin im Anfangspunkt seiner Bahn eine größere Geschwindigkeit besitzen, als der senkrecht unter ihm sich befindende Punkt der Erdoberfläche, und folglich nicht genau auf diesen treffen, sondern etwas weiter ostwärts fallen müssen.

Diese Vorstellung zu verdeutlichen, denke man sich einen Versuch über die östliche Abweichung fallender Körper, als nothwendiger Folge der Umdrehung der Erde, in einem Thurme von

240 Fuß Höhe angestellt, dessen Richtung zur Vereinfachung der Aufgabe in der Ebene des Aequators, also senkrecht gegen die Erdoaxe, angenommen werden mag. Der höchste Punkt dieses Thurms wird während einer ganzen Umdrehung der Erde einen Weg von $2(r + 240)\pi$ beschreiben, während der Umfang des Kreises, welchen der Fußpunkt beschreibt, $2r\pi$ beträgt. Der zurückgelegte Weg des ersteren übertrifft mithin den des letztern um $2 \cdot 240 \cdot \pi$ oder 1507 Fuß. Die Periode einer Umdrehung des Erdkörpers wird aber erkannt durch das nächste Wiedererscheinen eines Fixsterns in seiner vorigen Richtung, z. B. im Zenith des Beobachtungsortes. Wir nennen sie einen Sternentag und geben ihr die gewöhnliche Eintheilung in 24 Stunden (= 1440 Minuten, = 86400 Secunden). Etwa 4 Secunden eines solchen Tages werden nach dem bekannten Gesetze des Falles ($s = gt^2$) erfordert, wenn der aus der Thurmspitze fallende Körper den Raum von 240 Fuß bis zur Erdoberfläche durchlaufen soll; vermöge der erlangten größeren Geschwindigkeit würde er mithin während seines Falls dem untern Punkte um $4 \cdot \frac{1507}{86400}$ oder etwa 10'' vorangeilt seyn müssen.

Schwieriger wird die theoretische Behandlung der Aufgabe, wenn wir Versuche dieser Art an einem andern Orte der Erdoberfläche, als unter'm Aequator, anstellt denken, — zugleich die convergenten Richtungen der Schwere in Betracht ziehen und endlich gar auf die physischen Umstände, welche das Resultat nothwendig modificiren, — auf Temperatur, Widerstand der Luft, Gestalt des fallenden Körpers u. s. w. Rücksicht nehmen. Diese mannigfaltigen Umstände bringen, auch bei der größten Vorsicht, solche Abweichungen in den Versuchen hervor, daß man unmöglich eine genaue Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung erwarten kann. Demungeachtet entsprechen die wenigen bisher angestellten Versuche über die östliche Abweichung fallender Körper der Behauptung einer Umdrehung des Erdballs hinlänglich, um eine unmittelbare Bestätigung derselben zu liefern.

Dieser gleichförmigen Umwälzung der Erde um ihre Axe verdanken wir außer der allgemeinen Zeitbestimmung des Tages die Möglichkeit einer geographischen Ortsbestimmung oder genauen Ausmittelung der Lage eines jeden Punktes der Erdoberfläche; ein Geschäft, wozu die Kräfte der praktischen Geometrie begreiflich nicht ausreichen. Der zwischen die beiden Pole der Erdkugel fallende größte Kreis des irdischen Aequators zeigt sich als eine sehr angemessene, von der Natur gegebene Basis, auf welche jeder beliebige Punkt der Erdoberfläche durch Angabe seines senkrechten Bogenabstandes bezogen werden kann. Das ganze Verfahren ist hier augenscheinlich dasselbe, wie für die Ortsbestimmung am Himmel: analog den Rectascensionen der Sterne zählt man die (östliche, auch wohl die westliche) Länge eines irdischen Punktes; analog den Declinationen die (nördliche oder südliche) Breite. Der in dieser Bezeichnungsart durchaus unbestimmt gelassene Anfangspunkt der

geographischen Länge, zu welchem kein Punkt im Aequator sich vorzugsweise darbietet, pflegt von den Geographen der verschiedenen Nationen willkürlich angenommen zu werden, indem sie die Länge auf dem Meridian irgend eines merkwürdigen Punktes beziehen.

Ein solcher irdischer Meridian in engerer Bedeutung ist nur die Hälfte des, durch den gegebenen Ort und beide Pole der Erdkugel gelegten größten Kreises; die andere Hälfte wird zum Meridian eines, um 180 Längengrade von jenem entfernt liegenden, Punktes. Man kann sich die Erdkugel mit einer willkürlichen Menge dieser Meridiane umzogen denken; die Wahl eines unter ihnen zum Normalmeridian ist völlig gleichgültig, weil unter der geographischen Länge nie eine absolute Größe, sondern nur eine Differenz der Längen zweier Derter verstanden werden kann. Dieser Längenunterschied ist demnach der sphärische Winkel, welchen ihre beiden Meridiane am Pol einschließen, und der durch das, zwischen ihnen enthaltene, Bogenstück des Aequators gemessen wird. Eine Verschiedenheit in der Wahl des Normalmeridians verursacht keine andere Unbequemlichkeit in geographischen Angaben, als die geringe Mühe einer Addition oder Subtraction des Längenabstandes, um welchen man den Normalmeridian mehr östlich oder westlich annimmt, als denjenigen, worauf sich die gegebenen Längen beziehen.

Da wir die Zeit einer ganzen Umdrehung der Erde — den Tag im Allgemeinen — in 24 Stunden theilen, so werden in jeder Stunde $\frac{360}{24} = 15^\circ$ des Aequators oder jedes andern Parallelkreises durch einen unbeweglichen Stundenkreis am Himmel gehen müssen, und es läßt sich mit Leichtigkeit aus dem bekannten Längenunterschiede die Abweichung in den Stunden des Tages, wie auch umgekehrt aus der bekannten Zeitverschiedenheit die Abweichung in der geographischen Länge herleiten. Verhalten sich z. B. die Uhrzeiten verschiedener Derter in demselben Momente, wie 3, 6, 9, 12, so sind ihre Längenunterschiede (bezogen auf den Meridian, unter welchem die Zeit = 0 ist, oder der Tag anhebt) = 45, 90°, 135°, 180°, u. s. w. Auf dieser Proportionalität der Längen zweier Derter und der an ihnen, in einem identischen Augenblicke, beobachteten Tageszeiten beruhen alle Methoden der geographischen Längenbestimmung, von denen später die Rede seyn wird. Die Mühe der aus diesem Grunde so oft erforderlichen Umsetzung von Zeit und Bogen erleichtert man sich durch den Gebrauch hierzu berechneter Tafeln (Anl. Nr. III.)

Auch müssen wir hier die Ursache jener Erscheinung suchen, daß Seefahrer, welche die Erde umsegeln, wenn sie wieder am Orte ihrer Abfahrt eintreffen, in ihrer Zeitrechnung entweder einen ganzen Tag vorgeeilt oder zurückgeblieben sind, je nachdem sie ihren Weg in der Richtung nach Osten oder nach Westen zurücklegten. Da die Erde sich von Westen nach Osten dreht, mithin die östlicher liegenden Punkte früher, als die westlichen, in die Ebene desjenigen Stundenkreises am Himmel eintreten, dessen Coincidenz mit dem Meridian des Beobachters überhaupt die Gränze des Tages

Tages für diesen bestimmt, so wird der Seefahrer, der nach Osten steuert, in kürzerer Frist seinen Tag vollenden, als der unbewegliche Punkt seiner Abfahrt, und nachdem er $\frac{1}{n}$ tel seiner Kreisbahn zurückgelegt hat, bereits um $\frac{1}{n}$ tel eines ganzen Tages oder $\frac{24}{n}$ Stunden der Zeitrechnung, die auf jenem Punkte Statt findet, vorangeeilt seyn. Die Zeitunterschiede, welche er durch seine Ortsveränderung an jedem einzelnen Tage gewinnt, müssen sich also nach beendigter Umschiffung der Erdfugel allmählig zu einem ganzen Tage angehäuft haben. Eben so einfach erklärt sich bei dem nach Westen Steuernden, wo Meridian und Stundenkreis im einstimmigen Sinne fortschreiten, daß allmähliche Zurückbleiben um einen Tag in der Zeitrechnung. Denn der Stundenkreis hat hier immer etwas über einen ganzen Umlauf zurückzulegen, ehe er den indessen fortgeschrittenen Meridian wieder erreicht, wodurch die Tage des Seefahrers über die Dauer von 24 Stunden verlängert werden; und die Summe dieses täglichen Ueberschusses wird sich nach vollendeter Umschiffung der Erde auf einen, dem zurückgelegten Wege proportionalen Zeitraum, d. h. auf einen Tag belaufen, um welchen der Seefahrer in seiner Zeitrechnung allmählig zurückgeblieben ist.

Fünftes Capitel.

Vom Horizonte.

Den vorhergehenden Betrachtungen gemäß dürfen wir uns die Erde und die scheinbare, oder vielmehr von der Phantasie construirte, Himmelskugel als zwei concentrische Sphären denken, von denen die erstere sich in der letzteren unbeweglichen mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um ihre unverrückbare Ase dreht. Jede, an einen Punkt der inneren Kugel gelegte Berührungsebene würde nach den Lehren der Geometrie die äußere Kugel in zwei ungleiche Hälften theilen. Die Erfahrung hingegen lehrt uns, daß Sterne, deren Zenithdistanz 90° und darüber beträgt, zu gleicher Zeit an der Gränze des Gesichtskreises dem Auge sichtbar sind, welches mit den geometrischen Grundsätzen unverträglich scheint. Bei näherer Untersuchung finden wir diesen scheinbaren Widerspruch der Erfahrung begründet in der unermeßlichen Entfernung der Fixsterne, der Erhöhung unsers Auges über der Erdoberfläche und endlich in der Eigenschaft unserer Atmosphäre, die Lichtstrahlen der Sterne von ihrem ursprünglichen Wege abzulenken und diese scheinbar zu erhöhen.

Der früher angeführte Erfahrungssatz, daß die Richtungen eines Fixsterns aus zwei entgegengesetzten Punkten der Erdbahn parallel laufen, oder die jährliche Parallaxe der Fixsterne im Allgemeinen = 0 sey, wovon uns die unveränderliche Lage der Weltpole am Himmel ein Beispiel giebt, überzeugt uns, daß der Durchmesser der Erdfugel, als eine zu unbedeutende Dimension, gegen die unermessliche Entfernung der Fixsterne gar nicht in Betracht gezogen werden könne, sondern sich in einen geometrischen Punkt verliere. — Hiernach ist es uns gestattet, den wahren Horizont am Himmel (*horizon rationalis*), worunter wir den Durchschnitt der Himmelskugel mit einer, durch den Mittelpunkt der Erde gelegten, Ebene begreifen, die mit der Berührungsebene des Beobachtungsorts parallel läuft, — in diese berührende Ebene selbst zu verlegen. Denn bei der so unbedeutenden Ausdehnung des Erdradius müssen beide Ebenen am Himmel in eine einzige zusammenzufallen scheinen.

Daß dicht an der Erdoberfläche befindliche Auge kann mithin überall, wo keine Hindernisse die freie Aussicht beschränken, die Hälfte der Himmelskugel überblicken. Dem Erdbewohner unter dem Aequator müssen daher immer die beiden Pole an der Gränze seines Gesichtsfeldes sichtbar bleiben, während sämtliche Gestirne im Osten senkrecht empor, und im Westen eben so hinab steigen, indem der Horizont hier stets mit einem Stundenkreise am Himmel zusammenfällt. Man bezeichnet diese besondere Lage der Himmelskugel durch die Benennung einer *sphaera recta*. Für ein Auge unter dem Pol hingegen müßten Horizont und Aequator zusammenfallen, so daß sämtliche Sterne gleichnamiger (entweder nördlicher oder südlicher) Declination während ihres scheinbaren Kreislaufs ununterbrochen sichtbar seyn würden. *Sphaera parallela* ist der Ausdruck für diese Beziehung der Himmelskugel auf den Horizont, da die Bahnen der Sterne mit letzterem parallel laufen. Jeder andere, zwischen den Polen und dem Aequator befindliche Punkt der Erdoberfläche hat einen Horizont, über welchen die Gestirne sich in mehr oder weniger geneigten Bahnen erheben, je nachdem seine geographische Breite größer oder geringer ist. Nur ein Theil von ihnen bleibt während des ganzen Kreislaufes sichtbar, diejenigen Sterne nämlich, deren Polardistanz die Polhöhe nicht übersteigt; die übrigen durchlaufen, mit Ausnahme der im Aequator selbst liegenden, theils mehr, theils weniger, als die Hälfte ihrer Kreisbahnen über dem Horizonte. Die Vorstellung dieser Lage der Himmelskugel — der sogenannten *sphaera obliqua* — ist die allgemeine, und findet in den ersteren beiden auf dieselbe Weise ihre Gränzen, wie schiefe Winkel in einem rechten oder geraden. Uebrigens schöpft die mathematische Geographie aus dieser herkömmlichen Unterscheidung von drei Sphären nicht den mindesten weiteren Nutzen.

Sobald wir nun aber nicht, wie bisher, das Auge des Beobachters unmittelbar an der Erdoberfläche, sondern in einer gewissen Erhöhung über derselben annehmen, wie die gewöhnlichen

Umstände es erfordern, verwandelt die Berührungsebene sich in eine conische Oberfläche, von welcher die Himmelskugel in einem kleineren Kreise — dem scheinbaren Horizonte — geschnitten wird. Je weiter das Auge sich von der Erde entfernt, um so mehr nimmt der Durchschnitwinkel im Scheitelpunkt der fingirten Kugeloberfläche ab, während die ringförmige Gränze der Erdkugel, worauf sie sich stützt — der scheinbare irdische Horizont — sich erweitert. Die Weite desselben wird durch das zwischen dem Fußpunkt des Beobachters und dem Rande des Horizonts enthaltene Bogenstück des Erdumfangs, FB (Fig. 4.) oder den ihm entsprechenden Winkel am Mittelpunkte der Erde, gemessen. Die Weite des scheinbaren himmlischen Horizonts hingegen ist durch seine Zenithdistanz oder den Winkel ZAB gegeben; und da dieser nach der Figur $= 90^\circ + BCF$, so bedarf es nur der Berechnung der irdischen Horizontweite, um auch sie zu erhalten.

Sey in dem rechtwinklichten Dreiecke ABC unter A der Standpunkt des Auges, unter C der Erdmittelpunkt und unter B der Berührungspunkt der Gesichtslinie mit der Erdkugel verstanden; werde ferner der Radius durch r , die Erhöhung des Auges durch h und der Winkel FCB durch e angedeutet, so ist:

$$(r + h) \cos. e = r$$

$$\text{oder } \cos. e = \frac{r}{r + h}.$$

Dieser Ausdruck, welcher die gesuchte Weite des Horizonts für einen bestimmten Werth von h in Function des Cosinus giebt, erscheint aber nicht sehr brauchbar, da der Werth von h immer nur äußerst unbedeutend gegen den von r ausfallen, und der des Cosinus mithin sehr wenig von der Einheit abweichen wird, wobei man keine Sicherheit in der Bestimmung des Winkels erwarten darf. Die Anwendung der bekannten Beziehung $\sin. \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. 2\alpha}{2}\right)}$ setzt uns aber in den Stand, den Winkel e durch die Function des Sinus zu berechnen; es ist nämlich:

$$\sin. \frac{1}{2} e = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos. e}{2}\right)} = \sqrt{\frac{h}{2(r + h)}};$$

Ein Ausdruck, der noch einer Vereinfachung fähig ist, da uns die Kleinheit der Größen h und e auch noch dann, wenn die Erhöhung mehrere tausend Fuß beträgt, statt des Sinus den Bogen zu setzen, und die geringe Vermehrung des Erdradius um h zu vernachlässigen erlaubt. Dann ist die sehr einfache Relation unter h und e :

$$\frac{1}{2} e = \sqrt{\frac{h}{2r}} \text{ oder } e = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Diese Gleichung giebt den Bogen der irdischen Horizontsweite in Theilen des Halbmessers; in Secunden giebt ihn der Ausdruck

$$e = 206265 \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot \sqrt{h} *).$$

Die Kenntniß des Winkels e ist besonders dem Seefahrer bei Höhenbeobachtungen wichtig, da er denselben von der gemessenen Höhe eines Sterns, BAS (Fig. 4.), abziehen muß, um die auf den wahren Horizont bezogene, HAS , zu erhalten. Besitzt er eine für diesen Zweck berechnete Tafel, worin der Winkel unter Voraussetzung verschiedener Werthe für h angegeben ist, so braucht er nur die Erhöhung seines Auges über die Meeresoberfläche unter diesen Werthen zu suchen, und die nebenstehenden Minuten und Secunden von der gemessenen Höhe des Sterns zu subtrahiren. (S. Anlage, Nr. IV. b.)

Ferner finden wir hier Gelegenheit, eine für spätere Zwecke der mathematischen Geographie nicht uninteressante Aufgabe zu lösen. Es kann nämlich in Frage kommen, ob die Gipfel zweier Berge, deren geographische Lage durch astronomische Beobachtungen, und deren Höhe über der Meeresfläche durch Messung mit dem Barometer bereits bestimmt und uns bekannt sind, einander gegenseitig oder einem zwischenliegenden Orte sichtbar seyn werden? Dieses ist offenbar nur dann möglich, wenn eine, beide verbindende, gerade Linie die zwischenliegende Oberfläche der Erde nur berührt, nicht aber durchschneidet. Der Winkel am Centrum der Erdkugel, welcher die Entfernung beider Punkte mißt, darf also nicht größer, als die Summe beider Winkel seyn, welche die Weite der Aussicht oder des irdischen Horizonts messen. Hat man eine Tabelle dieser Weiten, nach der ersten Gleichung in geographischem Längenmaaß für eine Reihe verschiedener Höhen entworfen (s. Anlage, Nr. IV. a.), so darf man nur die für zwei gegebene Höhen bemerkten zusammen addiren, und ihre Summe mit der bekannten, oder aus der geographischen Lage zu berechnenden, Entfernung der beiden Berggipfel vergleichen **).

*) Der Factor 206265 ist der, mit Hülfe der Logarithmen leicht zu berechnende Quotient $\frac{360.60.60}{2\pi} = \frac{1296000}{2.5,14159...}$, welcher den Inhalt an Secunden eines, dem Halbmesser an Länge gleichen, Kreisbogens ausdrückt.

**) Die Ausmittlung dieser Entfernung aus gegebener geographischer Länge und Breite reducirt sich auf die Berechnung der einen Seite eines sphärischen Dreiecks aus den beiden andern (den Complementen der geographischen Breite) und dem gegenüberstehenden Winkel (dem Längenunterschiede

Diese Folgerungen der Theorie werden freilich in ihrer Anwendung auf die verschiedenen Gegenden der Erdoberfläche unzählige Modificationen erleiden müssen, weil die Gesichtswerte auf dem festen Lande durch dessen mannigfaltige Gestaltung nicht nach allen Seiten dieselbe, und der irdische Horizont deshalb nicht ringförmig seyn kann; nur da, wo die Horizontalität der Meeresfläche der Voraussetzung der Berechnung nicht widerspricht, wird man sie mit Sicherheit zur Lösung der obigen Aufgabe anwenden können.

Die Sichtbarkeit der im wahren Horizonte, und eines Theiles der unter ihm liegenden, Gestirne verdanken wir mehr noch, als ihrer unermesslichen Entfernung und einer unbeträchtlichen Erhöhung unsers Auges, dem bereits erwähnten Umstande, daß die in unsere Erdatmosphäre dringenden Lichtstrahlen nach den Grundsätzen der Dioptrik gebrochen und von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden. Die veränderliche Dichtigkeit der Luft, welche (bei gleicher Temperatur) mit jedem Schritte der Erhöhung in geometrischer Progression abnimmt, verursacht eine continuirliche Ablenkung in der Richtung des Strahls, da das Brechungsvermögen sich unaufhörlich in den dichter werdenden Luftschichten vermehrt, wodurch derselbe eine gegen die Erde gebogene Curve zu beschreiben gezwungen wird. Die Wirkung dieser Strahlenbrechung besteht also darin, daß wir über den wahren Ort eines beobachteten Himmelskörpers getäuscht werden und ihn in einer größeren Höhe über dem Horizont oder in einer geringeren Zenithdistanz erblicken, als es ohne den Zutritt der Atmosphäre geschehen würde. Die Größe der Refraction wird durch die Verschiedenheit der scheinbaren und der wahren Richtung des Lichtstrahls, mithin auch durch die Differenz der wahren und scheinbaren Zenithdistanz des Sterns gemessen: $\rho = ZAS' - ZAS = SAS'$ (Fig. 5.). Ein geringes Nachdenken über die physische Ursache der Erscheinung lehrt uns, daß dieser Unterschied sein Maximum erreicht haben wird, wenn wir den Stern in einer Zenithdistanz von 90° , also dem Anschein nach im wahren Horizonte beobachten — daß er hingegen verschwinden muß, wenn der Stern im Zenith selbst steht. In der Abnahme der Refraction zwischen diesen beiden Gränzen darf man eine gewisse Gesetzmäßigkeit vermuthen, die sich auch in der That sehr bald offenbart, wenn man durch Vergleichung gemessener Zenithdistanzen mit den Declinationen des Sterns, welche für die Augenblicke der Beobachtung unter Voraussetzung einer gleichförmigen täglichen Bewegung berechnet

beider Punkte). Die Formel für diesen Fall ist, wenn man mit β, β' die Breiten, λ die Längendifferenz, und mit E die Entfernung bezeichnet:

$$\cos. E = \frac{\cos. (90^\circ - \beta)}{\cos. \varphi} \cos. (90^\circ - \beta' - \varphi) = \frac{\sin. \beta}{\cos. \varphi} \sin. (\beta' + \varphi)$$

wo der Hülfswinkel φ durch die Gleichung $\tan. \varphi = \cos. \lambda. \cot. \beta$ gegeben ist. Data zur Anwendung dieses Verfahrens enthält die Anlage, Nr. V.

worden sind, die Größe der Refractionen für verschiedene Abstände auf dem empirischen Wege sucht. Man findet nämlich, daß dieselben etwa den Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen proportional sind, so daß sie durch das Product einer Constante und jener veränderlichen Tangente ($\rho = k. \text{ tang. } z$) ausgedrückt werden können. Doch hört dieses Gesetz auf, gültig zu seyn, sobald die Zenithdistanz 75 bis 80 Grad erreicht hat, weil über diese Gränze hinaus die Tangenten zu unverhältnißmäßig wachsen. Genauer bestimmt die Theorie als allgemeinen Ausdruck der Strahlenbrechung das Product aus einer Constante in die Tangente der — um das dreifache der Refraction selbst verminderten — Zenithdistanz ($\rho = k. \text{ tg. } (z - 3\rho)$).

Der Werth des constanten Factors, den man schon mit ziemlicher Schärfe aus der Beobachtung zweier Sterne bestimmen kann *), beträgt etwa 57"; man pflegt ihn die mittlere Refraction zu nennen, weil er einer Zenithdistanz von 45° entspricht, wo der Factor $\text{tang. } z$ zur Einheit wird. Die mit seiner Hülfe leicht zu berechnende Refractionstafel (s. Anlage, Nr. VI.) pflegt für Höhenbeobachtungen eingerichtet zu werden, so daß dieselbe mit dem Maximum, der sogenannten Horizontalrefraction, für die Höhe $= 0^\circ$ anhebt. Die hier für die verschiedenen Grade bemerkten Werthe hat man von der beobachteten, scheinbaren Höhe zu subtrahiren, um die wahre zu erhalten ($h' = h - \rho$), während im Gegentheil dieselben Refractionen für die Gewinnung der wahren Zenithdistanzen zu den scheinbaren (den Complementen der nebenstehenden Höhen) addirt werden müssen ($z' = z + \rho$).

*) Nämlich solcher, die dem Pole nahe genug sind, um bei ihrem Kreislauf zweimal im Meridian des Beobachters erscheinen zu können, so daß man von einem jeden zwei Zenithdistanzen, eine größte und eine kleinste, erhält. Mögen diese vier gewonnenen Werthe der Beobachtung mit Z, z, Y, y , bezeichnet werden, so ist:

$$Z' = Z + k. \text{ tg. } Z, \quad z' = z + k. \text{ tg. } z.$$

$$Y' = Y + k. \text{ tg. } Y, \quad y' = y + k. \text{ tg. } y.$$

In den (auf Fig. 6. bezogenen) allgemeinen Ausdruck der Zenithdistanz des Pols: $ZP = Zs + \frac{1}{2}(ZS - Zs) = \frac{1}{2}(ZS + Zs)$ jene zwiefachen Werthe einführend, erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2}(Z' + z') = \frac{1}{2}(Y' + y')$$

$$\text{d. i. } Z + z + k(\text{tg. } Z + \text{tg. } z) = Y + y + k(\text{tg. } Y + \text{tg. } y)$$

$$\text{mithin } k = \frac{(Y + y) - (Z + z)}{(\text{tg. } Y + \text{tg. } y) - (\text{tg. } Z + \text{tg. } z)}$$

$$= \frac{(Y - Z) + (y - z)}{(\text{tg. } Y - \text{tg. } Z) + (\text{tg. } y - \text{tg. } z)}$$

Sechstes Capitel.

Von den Weltgegenden.

Jede von dem Standorte des Beobachters nach irgend einem Punkte in seinem himmlischen Horizont ausgehende Richtung bezeichnet für ihn eine Welt- oder Himmelsgegend, deren Anzahl mithin unbestimmt und von einer willkürlichen Einteilung des Horizonts abhängig ist. Außer der gewöhnlichen Kreiseinteilung in 360° zeigt sich uns in diesem Falle eine fortgesetzte Halbierung anwendbar und zweckmäßig, wodurch nach n Schritten der Theilung eine Anzahl von Punkten $= 2^n$ im Horizont festgelegt wird. Als zwei mit äußerster Genauigkeit am Himmel bestimmte Punkte sind nämlich schon früher diejenigen bezeichnet, in denen Meridian und Horizont des Beobachters sich durchschneiden — der Nord- und Südpunkt. Sie selbst geben die Gränzpunkte der Kreiseinteilung und eine sie verbindende gerade Linie die Hauptrichtung ab, durch welche alle übrigen Himmelsgegenden zugleich bestimmt werden. Diese Normalrichtung im Horizont — die wahre Mittagslinie, welche von der scheinbaren, dem Bogenstück eines irdischen Meridians unterschieden werden muß — kann man sich senkrecht von einer andern im Beobachtungsorte durchkreuzt denken, die den Horizont im Ost- oder Westpunkte antreffen wird.

Die auf diese Weise gewonnenen vier Cardinalpunkte legen die Richtung der vier Hauptgegenden fest, von welchen man durch fortgesetzte Halbierung der erhaltenen Quadranten des Horizonts, nunmehr zur Bestimmung der Nebengegenden übergeht, deren Namen durch Combination der obigen nach dem Grundsatz gebildet werden, daß die Folge der Ableitung über die der Zusammensetzung entscheide. So entstehen die Nebengegenden ND, NW, SD, SW, und die zwischenliegenden NND, DND, DSD, u. s. w. Um die aus der nächstfolgenden Theilung entspringenden Gegenden zu bezeichnen, macht man die vorstehenden nebst der Hauptgegend bemerklich, nach welcher sie von ihnen abweichen, und erhält so die Benennungen N gen Ost, ND gen Nord u. s. f. Es würden also die 32 im Horizont festgelegten Himmelsgegenden in ihrer Kreisfolge mit N, N g. O, NND, ND g. O anheben und mit NW, NW g. N, NWN, N g. W, schließen.

Ein auf diese Weise eingetheilter Kreis ist die Windrose der Seefahrer, und bildet, mit einer Magnetnadel versehen (deren veränderliche Abweichung von den verschiedenen Erdmeridianen man in eigenen Declinations-Karten oder Tafeln angegeben findet), das schöpferische

Werkzeug der neueren Geographie — den Compaß. Dieser vereinigt auch wohl die Eintheilung des Horizonts in 360° mit der obigen und dadurch die Construction der Bousssole mit der der Windrose, welche dem Schiffer zur genauen Angabe der Richtung der Winde und folglich seiner Fahrt dienen soll. Die Gelegenheit zur Verwandlung der einen Theilungsart in die andere, wenn beide nicht neben einander auf dem Instrumente bemerkt sind, bietet sich dem Vesteren alsdann dar, wenn er aus den Angaben des Logs (einer sich leicht vom Schiff abrollenden Linie, deren äußerstes Ende an ein, in's Meer geworfenes, Holz befestigt ist) und der Windrose den in Beziehung auf die Hauptgegenden zurückgelegten Weg, d. h. seinen Fortschritt im Sinne der geographischen Länge und Breite, beurtheilen will *).

Steuert nämlich ein Schiff von einem Punkte A (Fig. 7.) stets nach derselben Himmelsgegend, so wird es alle Erdmeridiane unter gleichem Winkel durchschneiden, und eine zwiefach gekrümmte, spiralförmige Curve — die sogenannte Loxodromie — beschreiben, welche nur dann zu einer Kreisbahn wird, wenn das Fahrzeug genau in der Richtung einer der vier Hauptgegenden segelt. Bei der beschränkten Genauigkeit in der Angabe des zurückgelegten Weges durch das oben genannte Hülfsmittel und der verhältnißmäßigen Kleinheit seines zur Berechnung gezogenen Werthes darf man von der Krümmung der Loxodromie ganz abstrahiren und sie sammt den kleinen Bögen des Meridians und Parallelkreises, welche als Catheten ihr gegenüber liegen, in eine Ebene versetzen, um die Aufgabe durch die Betrachtung eines rechtwinklichten Dreiecks zu lösen. Nach diesem Verfahren der sogenannten ebenen Schifffahrt hat man also die Abweichung der verfolgten Richtung von der Mittagslinie ($\alpha = \text{NAB}$) in Graden anzugeben, und erhält in dem Cosinus dieses Winkels den Fortschritt nach Norden oder Süden, ($\text{AC} = \text{AB. cos. } \alpha$), durch den Sinus den nach Westen oder Osten zurückgelegten Weg ($\text{CB} = \text{AB. sin. } \alpha$).

Hätte z. B. das Schiff von A seinen Lauf in der Richtung Nd g. D genommen, welche um $\frac{1}{2}$ des Quadranten vom Meridian abweicht, so ist der Winkel $\alpha = \frac{1}{2} 90^\circ = 56^\circ 15'$, und das Fahrzeug, wenn die Angabe des Logs 20 Seemeilen beträgt, um $\text{AC} = 20. \text{cos. } 56^\circ 15'$ oder 11, 1 Meilen nach Norden, um $\text{CB} = 20. \text{sin. } 56^\circ 15'$ oder 16, 6 Meilen nach Osten fortgeschritten, wodurch die geographische Lage des Punktes B bestimmt ist, wenn man anders die Länge und Breite des Ausgangspunktes A kannte.

Für

*) Das Log wird nur von Zeit zu Zeit ausgeworfen, um aus der, in einer gewissen Anzahl von Sekunden sich abwickelnden, Länge die jedesmalige Geschwindigkeit des Schiffs in Erfahrung zu bringen, deren Multiplication mit der ganzen Verlaufszeit den zurückgelegten Weg ergiebt.

Für die Angabe derjenigen Punkte des Horizonts, in denen der Auf- oder Untergang der Gestirne beobachtet worden, bedient man sich der gewöhnlichen Kreiseintheilung desselben, indem man ihren nördlichen oder südlichen Bogenabstand vom Ost- oder Westpunkte — die sogenannte Morgen- und Abendweite — in Graden ausdrückt. Bezeichnen wir diese Größe durch w , das Azimuth (die östliche oder westliche Bogenentfernung vom Südpunkte) durch a , so ist, wenn der Stern in einem nördlichen Quadranten des Horizonts auf- oder untergeht, $w = a - 90^\circ$; wenn er hingegen denselben in einem südlichen Quadranten durchschneidet, $w = 90^\circ - a$, oder das Complement des Azimuths. Man könnte die Richtung der Weltgegenden für einen gegebenen Ort also dadurch festlegen, daß man diejenige eines auf- oder untergehenden Sterns beobachtete und zur Ausmittlung seiner Abend- oder Morgenweite das Azimuth, als Winkel eines sphärischen Dreiecks (PZO, Fig. 13.), berechnete, dessen drei Seiten man als bekannt annehmen darf; indessen wird dieser Zweck weit sicherer durch die Auffindung der Mittagslinie erreicht, wofür eines der nachfolgenden Capitel die verschiedenen Methoden mittheilt.

Sie b e n t e s C a p i t e l.

B e w e g u n g d e r E r d e u m d i e S o n n e.

Bei dem Fortschritte von der allgemeinen Beziehung zwischen der Erdfugel und der sie umgebenden himmlischen Sphäre zu speciellen Betrachtungen über das Verhältniß der ersteren zu einzelnen Gestirnen, die uns theils durch ihre eigenthümliche Bewegung, ihre Nähe und Deutlichkeit, theils durch ihre practische Wichtigkeit interessiren, tritt uns zuerst die Untersuchung über den scheinbaren Sonnenlauf entgegen, aus welcher sich zugleich die verschiedenen Methoden der Zeitbestimmung und die Abwechselung und Veränderlichkeit in den Tags- und Jahreszeiten entwickeln werden.

Die Ebene, in welcher die Bewegung der Erde um die Sonne geschieht, wird durch den größten Kreis am Himmel bezeichnet, den dieses Gestirn dem Anschein nach allmählig von Abend nach Morgen rückgängig durchschreitet. Wir können diesen Kreis am Himmel bestimmen, indem wir täglich die Höhe der Sonne im Meridian und späterhin einen Fixstern beobachten, der in dieselbe Richtung des Fernrohrs fällt. Da der Ort des Letzteren an der Himmelskugel als bekannt vorausgesetzt wird, so kennen wir eben dadurch den Parallelkreis, in welchem die Sonne zur Zeit

der Beobachtung sich befand, d. h. ihre Abweichung; der Zeitunterschied beider Beobachtungen giebt ferner den Bogenabstand der Sonne vom Fixsterne oder den Stundenwinkel an, welcher in Graden ausgedrückt die gerade Aufsteigung der Sonne bestimmt. Die Verbindung einer Menge solcher fortgesetzten Beobachtungen (deren es übrigens zur Führung des Beweises nur weniger bedarf) zeigt uns, daß der scheinbare Lauf der Sonne in einem größten Kreise — dem Kreise der Ekliptik — mithin der wahre Kreislauf der Erde in der, durch diesen bezeichneten, Ebene vor sich geht.

Gegen diese Ebene muß die Erdoberfläche, welche die Lage der Aequator-Ebene bestimmt, geneigt seyn, da beide größte Kreise dieses Namens einander an der Himmelskugel durchschneiden. Der Neigungswinkel, welchen Ekliptik und Aequator einschließen, wird durch das Maximum des Abstandes der Sonne vom Aequator in zwei entgegengesetzten Zeitpunkten des Jahres gemessen. Denn beim jährlichen Umlauf um die Sonne muß die Erde zweimal in die Durchschnittslinie der Ekliptik mit dem Aequator gerathen, und zweimal am weitesten von dem Letzteren entfernt seyn. Denken wir uns die im Centrum der Sonne sich durchschneidenden Ebenen der Erdbahn und des Aequators von einer dritten Ebene rechtwinklig durchkreuzt, so ist der Winkel, welchen die neuen Durchschnittslinien bilden, der Neigungswinkel beider Ebenen. Eben diesen Winkel erhalten wir in der Declination der Sonne, wenn die Erde sich in der Richtung seines einen Schenkels befindet, weil der Aequator in allen Punkten der Erdbahn einen vollkommenen Parallelismus der Lage zeigt. Eine von drei Parallelen schiefwinklig durchkreuzte gerade Linie EK (Fig. 8.) versinnlicht das hier Ausgesprochene. In dem mittlern Durchschnittspunkte erhält die Sonne, in den beiden äußeren die Erde ihren Platz; die nördliche und südliche Abweichung erscheinen hier als Wechselwinkel, mithin einander gleich.

Hierauf gründet sich das Verfahren, aus den Beobachtungen der beiden größten Abweichungen die Neigung des Aequators gegen die Erdbahn zu bestimmen. Wir erhalten nämlich im Punkte T, wo die Sonne sich am meisten vom Aequator nach Norden, und ein halbes Jahr später, im Punkte T', wo sie sich am Weitesten von ihm nach Süden entfernt haben mag, zwei Richtungen an einem im Meridian aufgestellten Instrumente, die einen Winkel von etwa $46^{\circ} 56'$ bilden. Daß die beiden Wechselwinkel in der Figur sich zu einem einzigen, doppelt großen, am Instrument verbinden, beruhet auf der allmählichen Drehung der Mittagsfläche im absoluten Raume, indem dieselbe als eine, durch die Erdoberfläche und den Sonnenmittelpunkt gelegte, Ebene der Erde in ihrer Bahn folgt und binnen der halben Umlaufszeit sich so weit gedrehet hat, daß die Richtung Ta in die entgegengesetzte T'a' übergegangen ist. Aus der erhaltenen Summe der beiden größten Abweichungen ergibt sich die Neigung der Ebenen — die sogenannte Schiefe der Ekliptik — zu $23^{\circ} 28'$.

und die der Erdbare gegen die Ekliptik, als Complementwinkel der ersteren, zu $66^{\circ} 32'$. Um denselben Winkel würde eine auf der Erdbahn errichtete Perpendiculäre (Qq) gegen den Aequator geneigt seyn, und die von ihr an der Himmelskugel angetroffenen Pole der Ekliptik lägen in einem Bogenabstande von den Weltpolen $= s$, wenn man mit diesem Buchstaben die Schiefe der Ekliptik bezeichnen will.

Nachdem wir auf die vorerwähnte Weise die Lage der Erdbahn gegen die unveränderliche Richtung der Weltaxe bestimmt haben, gehen wir zu der Untersuchung über: wie die Figur der von der Erde um die Sonne beschriebenen Bahn beschaffen seyn möge? Denn der scheinbare Umlauf jenes Himmelskörpers in einem größten Kreise, welcher ja nur von den Richtungen am Himmel beschrieben wird, läßt ohne weitere Nebenbestimmung eine unzählige Menge von Annahmen für diese Figur zu. Die einfachste unter allen wäre die eines Kreises, um die Sonne mit einer constanten Entfernung der Erde, als Radius, beschrieben. Doch dieser Hypothese entsprechen die Beobachtungen nicht; denn weder ist die scheinbare Bewegung der Sonne gleichförmig, noch der Winkel, unter welchem der Sonnendurchmesser unserm Auge erscheint, zu allen Zeiten derselbe, wie es der Fall seyn würde, wenn die Sonne genau im Mittelpunkte der Erdbahn stände. Die letztere würde nach dieser Veränderlichkeit des scheinbaren Sonnendurchmessers also wenigstens ein excentrischer Kreis seyn müssen, wie Kepler bei seinen Bemühungen, eine Gesetzmäßigkeit im Laufe der Planeten zu entdecken, dieses zuerst annahm. Aber die Beobachtungen entsprechen auch dieser Hypothese nicht, und wir gehen am sichersten, wenn wir aus der Veränderlichkeit in dem scheinbaren Durchmesser der Sonne und der scheinbaren Bewegung derselben die wahre Curve, in welcher die Erde sich um sie bewegt, abzuleiten suchen. Den veränderlichen Abstand der beiden Himmelskörper, den wir den Radius vector der Erdbahn nennen wollen, bestimmt für jeden Augenblick der Beobachtung die Gleichung:

$$2 \rho \cdot \sin. \frac{1}{2} \alpha = \text{Diam.}$$

worin ρ den Radius vector und α den Gesichtswinkel bezeichnet, unter welchem der Sonnendurchmesser erscheint. Diesen Winkel finden wir mit Hülfe eines zu diesem Zwecke eingerichteten Instruments, des Helimeters. Der Werth des Radius vector ist also, wenn wir ihn in Beziehung auf den wahren Sonnendurchmesser, als Einheit, angeben wollen, enthalten in der Gleichung

$$\rho = \frac{1}{2 \cdot \sin. \frac{1}{2} \alpha}.$$

In dem Augenblicke, wo der Durchmesser der Sonne unter dem größten Winkel erscheint, erhält ρ seinen kleinsten Werth; d. h. die Erde steht der Sonne am nächsten oder im Perihelium. Das Minimum von α hingegen giebt das Maximum von ρ , und wir nennen den Stand-

punkt der Erde bei dieser Entfernung das Aphelium. Gleichbedeutend und nur auf den vermeintlichen Stillstand der Erde und die scheinbare Bewegung der Sonne bezogen sind die Ausdrücke Perigäum und Apogäum. Die Größe des scheinbaren Sonnendurchmessers ist im Perihelium $= 32' 38'', 6$ und im Aphelium $= 31' 33'', 8$, woraus wir nach oben stehender Formel die beiden correspondirenden Entfernungen zu 105,313 und 108,918 berechnen.

Die tägliche Geschwindigkeit, mit welcher die Sonne sich um die Erde zu bewegen scheint oder diese sich wirklich um jene bewegt, ist ebenfalls eine veränderliche, z. B. im Perigäum $= 61' 10''$, im Apogäum $= 57' 12''$. Eine Vergleichung der sorgfältigsten Beobachtungen lehrt uns, daß diese tägliche Geschwindigkeit in eben dem Verhältniß abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung zunehmen, oder daß diese Werthe im umgekehrten Verhältniß stehen:

$$\mu' : \mu'' = \rho'^2 : \rho''^2.$$

μ' und μ'' bezeichnen hier die, in beliebigen Zeitpunkten des Jahres, in Einem Tage von der Sonne scheinbar durchlaufenen Kreisbögen, ρ' und ρ'' die eben diesen Augenblicken entsprechenden Werthe des Radius vector. Dieser Gleichung läßt sich unter der Form

$$\mu' \cdot \rho''^2 = \mu'' \cdot \rho'^2$$

$$\text{oder } \mu' \rho'' \cdot \rho'' = \mu'' \rho' \cdot \rho'$$

eine interessante geometrische Deutung geben. Sey μ ein kleiner Kreisbogen (und mit einem solchen dürfen wir ein Stück der Erdbahn verwechseln), ausgesprochen in Beziehung auf die Einheit als Halbmesser; sey ferner ρ der Radius des zu construierenden Kreises, so ist $\mu \rho \cdot \rho$ der Ausdruck einer doppelten Sectorfläche, und wir können den in vorstehender Gleichung aufgestellten Erfahrungssatz auch folgendergestalt aussprechen: Alle in gleichen Zeiträumen vom Radius vector der Erdbahn durchlaufene Sectorflächen sind einander gleich, und diejenigen, welche er in verschiedenen Zeiten beschrieben, diesen Zeiten proportional ($\mu \rho^2 : \mu' \rho'^2 = t : t'$).

Wenn wir nach diesen (ebenfalls von der Theorie a priori entwickelten) Sätzen von einem Tage zum andern die Länge des Radius vector nebst dem veränderlichen Winkel seiner Bewegung construiren und durch die Endpunkte dieser Radien eine Curve führen, so erkennen wir darin eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet. Doch unterscheidet sich die elliptische Figur der Erdbahn sehr wenig von der eines Kreises; denn wenn man den Radius vector des Periheliums von dem des Apheliums abzieht und die Hälfte der Differenz nimmt, so erhält man für die Excentricität der Ellipse einen numerischen Werth von 1,802 Sonnendiametern, als Theilen, durch welche oben die Entfernungen ausgedrückt wurden. Betrachten wir die halbe Summe jener beiden Radien oder die halbe große Ase ($= 107,115$) als Einheit, so ist die Excentricität $\frac{1,802}{107,115} = 0,016823..$

Freilich entspricht auch die elliptische Figur der Erdbahn nicht mit vollkommener Schärfe den äußerst genauen Beobachtungen der neuesten practischen Astronomie: wir nehmen vielmehr bei einer Vergleichung derselben mit dem oben aufgestellten Erfahrungssatze eine Menge kleiner Abweichungen wahr, deren Ursache durch die physische Astronomie in der Anziehungskraft und den Bahnen der übrigen Planeten (namentlich des Jupiters) und unsers Mondes nachgewiesen werden. Doch ändern diese, durch die Einwirkung der nächsten Himmelskörper hervorgebrachten Störungen oder Perturbationen weniger die elliptische Bahn der Erde, als die Lage ihrer Apsiden, und dadurch zugleich die Lage der Himmelskugel, sofern sie auf den Aequator bezogen worden, wovon wir den Erfolg im nächsten Capitel kennen lernen werden.

Die einfachste und natürlichste Art, die Entfernung der Sonne von der Erde durch eine irdische Längeneinheit, am zweckmäßigsten durch Erdhalbmesser, anzugeben, ist dieselbe, deren man sich in der practischen Geometrie bedient, um die Entfernung von Gegenständen auf der Erdoberfläche zu messen. Man nimmt eine Basis von bestimmter Länge an, und beobachtet an ihren Endpunkten die Winkel, welche die Richtungen des Object's mit derselben einschließen. Daraus läßt sich unmittelbar der dritte Winkel ableiten, unter welchem beide Richtungen zusammenstoßen: man nennt ihn die Parallaxe des beobachteten Gegenstandes.

Bei den Beobachtungen der Sonne, des Mondes und der übrigen Planeten unsers Sonnensystems, deren Entfernung ohne Vergleich geringer, als die der Fixsterne ist, muß stets die Parallaxe in Betracht gezogen werden, weil man, um eine vollkommene Gesetzmäßigkeit in der Bewegung dieser Körper zu erkennen, genöthigt ist, sie auf den Mittelpunkt der Erde zu beziehen. Der an dem Gestirn durch die beiden Richtungen vom Beobachtungspunkte und dem Centrum der Erde (BS und CS, Fig. 9.) gebildete Winkel ist die Parallaxe desselben im engeren Sinne des Wortes. Sie muß zu der scheinbaren Höhe, HBS, hinzu addirt werden, um die wahre, $S'HS = H'CS$, zu geben, wohingegen die beobachtete Zenithdistanz um die Parallaxe zu groß erscheint, und durch deren Subtraction in die wahre, ZCS, verwandelt wird *). Im Zenith wird die Parallaxe = 0, mit dem weiteren Abstände von demselben aber immer größer, und erreicht als Horizontalparallaxe ihr Maximum. Der specielle Werth (p'), welchen sie als solche annimmt, findet sich,

*) Die Verbesserung der Beobachtungen durch die Parallaxe (p) geschieht im entgegengesetzten Sinne der durch die Refraction (q) veranlaßten, und wir erhalten als Schemata für die Zurückführung des scheinbaren auf den wahren Ort eines Gestirns oder seine Beziehung auf den Mittelpunkt der Erde, je nachdem man Höhe oder Zenithdistanz gemessen hat:

$$\begin{aligned} h' &= h - q + p \\ z' &= z + q - p. \end{aligned}$$

wenn für eine gegebene Höhe oder Zenithdistanz die Höhenparallaxe (p) bekannt ist, durch Zusammenstellung der gleichbedeutenden Werthe $\frac{CB}{CS} = \frac{\sin. p}{\sin. z}$, und $\frac{CB}{CS'} = \frac{\sin. p'}{I}$, wornach man $\sin. p' = \frac{\sin. p}{\sin. z} = \frac{\sin. p}{\cos. h}$ erhält. Umgekehrt wird man daher, wenn die Horizontalparallaxe eines Gestirns gegeben ist, die Parallaxe, welche einer beliebigen Höhe oder Zenithdistanz desselben entspricht, nach dem Ausdruck $\sin. p = \sin. p' \cdot \sin. z = \sin. p' \cdot \cos. h$. berechnen können.

Da die Identität in den Augenblicken der Beobachtung nebst der gleichzeitigen Beziehung des Gestirns auf die Scheitelpunkte beider Beobachter und einen unveränderlichen Punkt der Himmelskugel nothwendige Erfordernisse zu einer Parallaxenbestimmung sind, so fern man die Aufgabe durch das oben angedeutete Verfahren lösen will, so wählt man am einfachsten das Stück eines Erdmeridians zur Basis. Um die Unsicherheit in der Bestimmung der gesuchten Größe möglichst zu vermeiden, die selbst bei dem der Erde am nächsten stehenden Himmelskörper, unserm Monde, äußerst unbeträchtlich erscheinen wird, ist eine ansehnliche Ausdehnung dieser Basis erforderlich, so daß man ihren einen Endpunkt in die nördliche, den andern in die südliche Hälfte der Erdkugel versetzen darf. Die hier den Eintritt des Gestirns in den Meridian erwartenden Beobachter brauchen nur dessen Zenithdistanzen, $ZBS = z$ und $Z'B'S = z'$ (Fig. 10.), zu messen, und erhalten in den Unterschieden dieser Größen und der bereits gefundenen Polhöhen, $HBP = \beta$ und $H'B'P' = \beta'$, seine Declinationen:

$$SBA = ZBA - ZBS \text{ oder } \delta = \beta - z$$

$$SB'A = Z'B'S - Z'B'A \text{ oder } \delta' = z' - \beta',$$

da Polhöhe und Declination des Zeniths, zwei Winkel, die beide die Polardistanz des Zeniths zu 90° ergänzen, mit einander verwechselt werden dürfen.

Durch die Beobachtung kennt man demnach die Zenithdistanzen z und z' nebst den Declinationen δ und δ' und die Summe der beiden, am Gestirn durch die Richtungen BS , CS , $B'S$ gebildeten, Parallaxen oder den Winkel $BSB' = P$, als Differenz der Declinationen ($\delta' - \delta$). Aus diesen Größen berechnet sich eine der Parallaxen, z. B. $BSC = p$ auf folgende Weise. Es ist

$$\frac{CB}{CS} = \frac{\sin. p}{\sin. z} \text{ und } \frac{CS}{CB'} = \frac{\sin. z'}{\sin. (P - p)}.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen giebt, da $CB = CB'$ ist:

$$I = \frac{\sin. p \cdot \sin. z'}{\sin. z \cdot \sin. (P - p)}.$$

Um die Parallaxe in Function des Sinus zu erhalten, entwickeln wir diesen Ausdruck, und geben ihm dadurch die Gestalt:

$$1 = \frac{\sin. p. \sin. z'}{\sin. z. (\sin. P \sqrt{1 - \sin. p^2 - \cos. P. \sin. p})},$$

woraus sich nach einer leichten Umformung ergibt:

$$\sin. p = \frac{\sin. z. \sin. P}{\sqrt{(\sin. z'^2 + 2 \sin. z'. \sin. z. \cos. P + \sin. z^2)}}.$$

Weil aber der Winkel P immer äußerst klein ausfallen wird, so darf man $\cos. P = 1$ setzen, ohne dadurch in dem Werthe von $\sin. p$ einen irgend merklichen Fehler zu veranlassen, und gelangt zu dem einfachen Ausdrucke:

$$\sin. p = \frac{\sin. z. \sin. P}{\sin. z' + \sin. z}.$$

Bekannt mit dem Werthe von p berechnen wir nunmehr die Entfernung des Gestirns nach der Formel

$$\frac{CS}{CB} = \frac{E}{r} = \frac{\sin. z}{\sin. p}$$

$$\text{oder } E = \frac{r. \sin. z. (\sin. z' + \sin. z)}{\sin. z. \sin. P} = \frac{r. (\sin. z' + \sin. z)}{\sin. (\delta' - \delta)}.$$

Es ist aber ebenfalls $E. \sin. p' = r$, wenn wir unter p' die Horizontalparallaxe des Gestirns verstehen, folglich $\frac{\sin. (\delta' - \delta)}{\sin. z' + \sin. z}$, oder wenn man statt des Sinus der Parallaxe den Bogen setzt und für δ' und δ ihre obigen Werthe substituirt: $\frac{(z' + z) - (\beta' + \beta)}{\sin. z' + \sin. z} = p'$.

Gegen das vorstehende, unter den bisherigen Voraussetzungen geometrisch freilich ganz richtige Verfahren, die Parallaxe und durch sie die Entfernung der Sonne zu bestimmen, erheben sich mehrere Bedenken, wenn man durch einige Beobachtungen sich überzeugt hat, daß die Declinationen δ und δ' äußerst wenig von einander abweichen und in Erwägung zieht, daß auf diese Verschiedenheit der Werthe bei weitem mehr, als der parallactische Winkel, andere Umstände Einfluß gehabt haben mögen, z. B. Fehler in der Messung oder am Instrument, die durch die physische Beschaffenheit der Atmosphäre bedingte Strahlenbrechung, ein Irrthum in der Annahme der Polhöhe, und endlich die vielleicht unrichtig supponirte Gestalt der Erde. Man hat daher in der practischen Astronomie durch andere und sicherer zum Ziele führende Methoden der Parallaxenbestimmung, namentlich durch sorgfältige Beobachtungen der Durchgänge der Venus durch die

Sonnenscheibe, welche sich von Zeit zu Zeit ereignen, den mittleren Werth der Horizontalparallaxe der Sonne zu $8'', 5$ bis $8'', 75$ ausgemittelt *), woraus die Entfernung derselben nach dem Ausdruck

$$E = \frac{r}{\sin. p'}$$

sich zu etwa 24000 Erdhalbmessern, oder wenn man den Abstand im Längenmaße geographischer Meilen angeben will, deren man ungefähr 860 auf einen Erdradius rechnet, zu etwa 20 Millionen Meilen ergibt. Der als Kreis hieraus berechnete Umfang der Erdbahn würde etwa 125600000 Meilen, und die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher die Erde in derselben fortschreitet, ungefähr 4 Meilen betragen, da man die Umlaufszeit = $31558148''$ gefunden hat — eine Geschwindigkeit, gegen welche die der rotirenden Bewegung selbst in ihrem Maximo, d. h. für Punkte unter dem Aequator, sehr gering erscheint. Denn es beschreibt ein solcher Punkt in einer Zeitsecunde einen Bogen von $\frac{360}{24.60.60} = \frac{1}{10}$ Grad oder $\frac{1}{6}$ geogr. Meilen, mithin übertrifft seine progressive Bewegung im Raume die rotirende etwa um das 64fache an Geschwindigkeit.

Achtes Capitel.

Beziehung des gestirnten Himmels auf die Ekliptik.

In dem größten Kreise, welchen die Sonne am Himmel zu durchlaufen scheint, bietet sich uns auf gleiche Weise, wie früherhin in den Kreisen des Horizonts und des Aequators für alle Punkte der Himmelskugel eine allgemeine Beziehungslinie dar. Den Bogenabstand eines Sterns von ihm nennen wir die (astronomische) Breite, die auf einen gewissen Anfangspunkt bezogene Kreis-Abscisse in der Ekliptik hingegen die Länge desselben. In den Durchschnittspunkten der Ekliptik und des Aequators erkennen wir zwei von der Natur selbst angewiesene Anfangspunkte für die Beziehungen

*) Die aus dieser mittlern Horizontalparallaxe nach der veränderlichen Entfernung der Sonne von der Erde für sämtliche scheinbare Höhen berechneten Parallaxen pflegt man in einer Tafel (s. Anl. Nr. VII.) zusammen zu stellen, um von ihnen bei den häufig vorkommenden Sonnenbeobachtungen Gebrauch zu machen.

Beziehungen der Gestirne auf beide größte Kreise. Sie führen den Namen der Aequinoctial- oder Nachtgleichepunkte, weil die Sonne, wenn sie in ihrer Bahn einen von ihnen erreicht hat, den Kreis des Aequators, der halb über, halb unter dem Horizont eines jeden Ortes liegt, bei der täglichen Umwälzung der Himmelskugel beschreibt, und dadurch in allen Punkten der Erdoberfläche eine gleiche Dauer von Tag und Nacht bewirkt. Denjenigen dieser beiden Punkte, durch welchen die Sonne aus der südlichen Hemisphäre in die nördliche emporzusteigen scheint, den Frühlingsnachtgleichepunkt, hat man gewählt, um von ihm aus gerade Aufsteigungen im Aequator und Längen der Sterne in der Ekliptik im gleichen Sinne, nämlich von Westen nach Osten, zu zählen. Ihm genau gegenüber liegt der Herbstnachtgleichepunkt, in welchem die Sonne den Aequator zum zweiten Male durchschneidet, wenn sie aus der nördlichen in die südliche Halbkugel wieder hinüber tritt.

Außer der gewöhnlichen Kreiseintheilung bedient man sich für die Ekliptik auch wohl der im Alterthum eingeführten in zwölf gleiche Kreissektoren oder sogenannte Zeichen, welche ihre eigenthümlichen Benennungen von den Sternbildern des Thierkreises (Zodiacus) entlehnen, durch welche die Sonne ihrem Weg am Himmel nimmt. Im Frühlingsäquinoccium beginnend, folgen sie in der Richtung von Westen nach Osten auf einander in folgender Ordnung:

♈ Widder, ♉ Stier, ♊ Zwillinge, ♋ Krebs, ♌ Löwe, ♍ Jungfrau,
♎ Waage, ♏ Scorpion, ♐ Schütz, ♑ Steinbock, ♒ Wassermann, ♓ Fische.

Da, wo diese Zeichen in dem Ausdrücke der Länge erscheinen, deutet man sie durch die Zahl an, die sie in vorstehender Reihenfolge einnehmen; das Zeichen der Waage z. B. durch 7^z. Jedes Zeichen, als zwölfter Theil eines größten Kreises, enthält 30°; mithin sind die Längenangaben 5^z 13° 7' 25" und 163° 7' 25" identisch.

Von den Aequinoctialpunkten um 3^z oder 90° entfernt liegen die Solstitial- oder Sonnenwendepunkte: in der nördlichen Hemisphäre das Sommer-, in der südlichen das Winter-solstitium. Einen, durch diese beiden Punkte gelegten und auf Aequator und Ekliptik senkrecht stehenden Kreis nennt man den Colur der Solstitien, so wie einen zweiten durch die Pole der Ekliptik und die Aequinoctien gelegten Kreis den Colur der Aequinoctien. Diese beiden Colure schneiden also einander unter rechten Winkeln und den Kreis der Ekliptik in den Anfangspunkten der Zeichen des Widder, des Krebses, der Waage und des Steinbocks, welche mit den Aequinoctial- und Solstitialpunkten identisch sind. Die Benennung der letzteren bezieht sich auf den anscheinenden Stillstand der Sonne, wenn sie bis zu ihnen vorgerückt ist; denn die tägliche Declinationsänderung ist am größten in der Nähe der Aequinoctien, am unmerklichsten hingegen in einem Abstände von 90°, wo $d = \varepsilon$ geworden ist. Dieß giebt die

Differentiation der Gleichung $\tan \delta = \sin \alpha \cdot \tan \varepsilon$, die sich auf das rechtwinklichte Dreieck VDF (Fig. II.) bezieht, zu erkennen: bezeichnet $d\delta$ die tägliche Declinationsänderung, $d\alpha$ die mittlere Aenderung der Rectascension, so lehrt uns der Werth des ersten Differentialverhältnisses

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \cos \delta^2 \cdot \cos \alpha \cdot \tan \varepsilon,$$

daß die tägliche Aenderung um so geringer seyn wird, je mehr die Werthe von α und δ sich 90° nähern, und daß sie umgekehrt in eben dem Maasse zunehmen muß, worin dieselben den Werthen 0° oder 180° näher kommen. Sonnenwendepunkte pflegt man ebenfalls die Solstitien zu nennen, weil die Sonne, nachdem sie in ihnen den höchsten Punkt ihrer Abweichung vom Aequator erreicht hat, wieder zu demselben zurückzukehren anfängt.

Diejenigen Parallelkreise am Himmel, welche von den Solstitialpunkten und den Polen der Ekliptik während der täglichen Umbrehung beschrieben werden, führen den Namen der Wend- und Polarkreise. Die nördliche oder südliche Abweichung der ersteren vom Aequator ist $= \varepsilon$, die der letzteren $= 90^\circ - \varepsilon$, weil von den Weltpolen die Pole der Ekliptik um den Bogen ε entfernt sind. Ein durch diese Pole gelegter und auf der Ekliptik senkrecht stehender Kreis wird ein Breitenkreis genannt, und nur ein Analogon für Parallelkreise fehlt, um folgende Vergleichung zwischen den drei Beziehungsarten auf Horizont, Aequator und Ekliptik vollständig zu machen.

Horizont,	Aequator,	Ekliptik,
Zenith und Nadir,	Weltpole,	Pole der Ekliptik,
Verticalkreis,	Declinationskreis,	Breitenkreis,
Amucantharat,	Parallelkreis,	_____
Meridian,	Meridian,	Colur der Solstitien,
Azimuth,	Rectascension,	Länge,
Höhe,	Declination,	Breite.

Zwischen den beiden Beziehungsarten auf die Ekliptik und den Aequator existirt wiederum ein allgemeiner, durch analytische Ausdrücke leicht darzustellender Zusammenhang, der uns in den Stand setzt, die Länge und Breite eines Himmelskörpers aus seiner gegebenen Rectascension und Declination zu berechnen. Es erneuert sich hier die, auf den Zusammenhang zwischen Horizont und Aequator früher angewandte, Betrachtung; aber noch einfacher kommt man durch die Verknüpfung der obigen Größen in zwei rechtwinklichten Dreiecken VSD und VSB (Fig. II.), denen die Hypothenuse VS gemeinschaftlich ist, zum Ziele. Es ist nämlich im Dreieck SVD:

$$\cotg. SVD = \cotg. SD \cdot \sin. VD = \cotg. \delta \cdot \sin. \alpha$$

$$\cos. SV = \cos. SD \cdot \cos. VD = \cos. \delta \cdot \cos. \alpha$$

Bekannt mit den Werthen des Winkels SVD und der Seite SV finden wir nun im andern Dreieck SVB:

$$\text{tang. VB} = \text{tang. L} = \text{tang. SV. cos. (SVD} - \varepsilon)$$

$$\text{sin. SB} = \text{sin. B} = \text{sin. SV. sin. (SVD} - \varepsilon),$$

wenn L und B astronomische Länge und Breite bezeichnen. Dasselbe Verfahren dient zur Ableitung der Rectascension und Declination, aus diesen, als den gegebenen, Größen.

Beide Beziehungsarten, auf den Aequator sowohl, als die Ekliptik, zeigen in den numerischen Angaben der Sternverzeichnisse nach einer beträchtlichen Reihe von Jahren merklliche Abweichungen von dem auf's neue beobachteten Stande der Gestirne. Bei der Vergleichung von Sternatalogen, die in verschiedenen Zeiten entworfen worden, nehmen wir nämlich in den Rectascensionen und Declinationen eine sehr unregelmäßige, in den Längen eine durchaus gleichförmige und in den Breiten der Sterne gar keine Veränderung wahr. Die Längen und geraden Aufsteigungen haben sämmtlich, letztere jedoch auf eine sehr ungleiche Weise, zugenommen; in den Werthen der Declinationen hingegen finden wir theils Zunahme, theils Verminderung, auch wohl gar Verwandlung der nördlichen Abweichung eines Sterns in südliche, und umgekehrt.

Diesen Erfahrungen zufolge muß also der Anfangspunkt, von welchem die Längen in dem Kreise der Ekliptik gezählt werden, gegen die Ordnung der Zeichen allmählig zurückweichen; denn hieraus allein läßt sich ein gleichmäßiges Wachsthum der Bogenabsceissen und die Unveränderlichkeit der Ordinaten erklären. Seine rückgängige Bewegung ist zugleich der Beweis einer Drehung oder Verschiebung des Aequators längs dem Kreise der Ekliptik, die wiederum nur dadurch hervorgebracht werden kann, daß die Erbare ihre Lage gegen die Gestirne ändert, und die durch ihre Richtung an der Himmelskugel bezeichneten Weltpole sich in einer langsamen Drehung um die Pole der Ekliptik befinden. Als die physische Ursache dieser Bewegung der Erbare, deren Periode etwa 25900 Jahre umfaßt, hat man die Anziehungskraft der Sonne und des Mondes in Verbindung mit der, von der Kugelform abweichenden, Gestalt unsers Erdbörpers erkannt *).

Hiernach wird man sich eine deutliche Vorstellung von der sogenannten Vorrückung der Nachtgleichenpunkte (eigentlich ihrer Zurückweichung) oder der Präcession der Fixsterne machen können, welche in dem Zeitraum eines Jahrs etwa 50" beträgt. Der sehr verschiedenartige

*) Eine andere Wirkung der Attraction des Mondes ist die sogenannte Nutation, eine periodische Schwankung der Erbare, vermöge welcher diese in einem Zeitraume von 18 Jahren am Himmel einen sehr kleinen Kreis von etwa 9" im Halbmesser beschreibt, in dessen Mittelpunkt der Pol ohne diese Schwankung fallen würde.

Einfluß, den diese constante Längenänderung auf Rectascensionen und Declinationen der Sterne äußert, ist als jährliche Veränderung derselben in den Sternverzeichnissen ausgedrückt; man muß daher, um die wahren Werthe jener Größen für eine gegebene Zeit zu erhalten, die jährliche Aenderung mit der Anzahl von Jahren multipliciren, die seit der Epoche des Stern catalogs verfloßen sind, wodurch man die für seine Angaben erforderliche Correction erhält. (Anf. Nr. I.)

Eine andere Folge der Vorrückung der Nachtgleichen ist die Verschiedenheit des siderischen Jahrs oder der Periode des Sonnenumlaußs in Beziehung auf einen Fixstern, von dem gewöhnlichen, tropischen Jahre oder dem Zeitraume, der zwischen zwei auf einander folgenden Durchgängen der Sonne durch den Aequinoctialpunkt bei ihrem jährlichen Kreislauße durch die Ekliptik verfließt. Denn da letzterer während dieser Periode um $50''$ in der Richtung von Osten nach Westen fortgeschritten ist, die Sonne hingegen sich im Sinne der Zeichen von Westen nach Osten bewegt, so wird sie früher mit ihm, als mit dem Punkte ihres Auslaußs, der durch einen Fixstern bezeichnet seyn mag, wieder zusammentreffen. Den kleinen Bogen von $50''$ zu durchlaufen, bedarf sie noch 20 M. 22 S. und die Addition dieses Zeitunterschiedes zur Dauer des tropischen Jahres, welches man durch Vergleichung sehr entfernter astronomischer Beobachtungen auf 365 T. 5 St. 48 M. 48 S. bestimmt hat, giebt die des siderischen Jahrs = 365 T. 6 St. 9 M. 10 S.

Die Astronomie unterscheidet von diesen beiden Perioden noch ein drittes, das sogenannte anomalistische Jahr oder den Umlauf der Sonne in Beziehung auf das Perigäum, dessen Dauer 365 T. 6 St. 13 M. 58 S. beträgt. Dieser Ueberschuß von $25' 10''$ über den Zeitraum des tropischen oder mittlern Jahres rührt von einer kleinen vorrückenden Bewegung der großen Axe der Erdbahn oder Apfidenlinie her, welche sich jährlich um 62 Bogensekunden im Sinne der Zeichen vorwärts bewegt. Die Erde wird daher, wenn sie von neuem sich im Perihelium befindet, das Maximum der Geschwindigkeit ihrer Bewegung, nicht aber denselben absoluten Ort im Raume wieder erreicht haben.

Neuntes Capitel.

Erleuchtung der Erde von der Sonne.

Die Geseze, nach welchen alle Punkte der lichtlosen Erdoberfläche von den Strahlen der Sonne ihre veränderliche Beleuchtung empfangen, müssen theils in jener doppelten Bewegung der Erde um ihre Ase und um die Sonne, theils in den Dimensionen und der Entfernung beider Körper, und endlich in der astronomischen Strahlenbrechung nachgewiesen werden. Bei der Untersuchung der letzteren beiden Quellen können wir von jeder Bewegung der Erde abstrahiren, und dieselbe als unbeweglich im mittlern Abstände von der Sonne betrachten.

Von der sphärischen Gestalt der Sonne überzeugt uns nicht allein ihr kreisförmiger Anblick in allen Punkten der Erdbahn, sondern auch die Beobachtung ihrer eigenthümlichen Aendrehung, welche aus der periodischen Erscheinung mehrerer in ihr sichtbarer dunkler Flecken gefolgert werden muß. Nach etwa $27\frac{1}{2}$ Tagen kommen diese Flecken immer von neuem zum Vorschein, woraus man die Zeit der wirklichen Rotation, die wegen des Fortrückens der Erde früher, als die scheinbare, vollendet seyn muß, zu 25 T. 12 St. berechnet hat. Das Verhältniß, worin die Durchmesser der Sonnen- und Erdfugel zu einander stehen, ergibt sich aus den Winkeln, unter welchen beide in gleicher Entfernung dem Auge erscheinen würden. Nehmen wir als solche den mittlern Abstand der Sonne an, so finden wir den scheinbaren Sonnendurchmesser durch Beobachtung an einem Helio- meter = $32' 5''$, den scheinbaren Erddiameter aber als das Doppelte der horizontalen Sonnen- parallaxe = $17''$. Bei gleicher Entfernung verhalten die scheinbaren Durchmesser sich zu einander, wie die wahren. Das Verhältniß der letzteren ist mithin $32' 5'' : 17''$, d. i. $1925 : 17$, oder nahe wie $113 : 1$, das der Oberflächen 113^2 oder $12769 : 1$, und das des räumlichen Inhalts beider Körper 113^3 oder $1442897 : 1$. Die Abweichung dieser Zahlenwerthe von andern Angaben hat ihren Grund in der Annahme der Sonnenparallaxe zu $8'', 5$, während dieselbe in manchen Schriften beträchtlich größer gesetzt wird.

Die Kenntniß jenes Verhältnisses der Durchmesser setzt uns in den Stand, die Größe des von der Sonnenfugel immer erleuchteten Theils der Erdoberfläche näher zu bestimmen. Nur wenn beide Sphären von gleicher Größe wären, würde genau die Hälfte der einen von der andern ihr Licht empfangen: ist die leuchtende Sphäre die kleinere, so wird von der dunkeln weniger, ist jene hin-

gegen die größere, so wird von dieser mehr, als die Hälfte erleuchtet werden. Denn denken wir uns an beide Kugeln, als Gränze der Lichtstrahlen, eine Berührungslinie gelegt und diese in drehende Bewegung um ihre Oberflächen versetzt, so entsteht uns unter der ersten Annahme ein Cylinder, der beide in einem größten Kreise berührt, im zweiten und dritten Falle aber eine Kegeloberfläche, welche vor oder hinter jenem größten Kreise der dunkeln Kugel einen kleineren begränzt.

Das größere oder geringere Zurücktreten dieses kleineren, als Gränze der Erleuchtung erscheinenden, Kreises auf der Erde, welche sich in dem dritten Falle befindet, wird nicht allein durch das Verhältniß der Durchmesser, sondern auch durch die Entfernung bestimmt. Die beträchtliche Größe der letzteren, welche verursacht, daß jene unter so kleinen Winkeln erscheinen, rechtfertigt folgende geometrische Betrachtung, die für einander sehr nahe stehende Sphären ungünstig seyn würde.

Werde der scheinbare Sonnenhalbmesser TcC (Fig. 12.) $= R$, der scheinbare Erdhalbmesser $= r$ und der Winkel act , welcher die Abweichung der Erleuchtungsgränze vom Diameter ab mißt, $= x$ gesetzt, so ist nach der Figur:

$$x = act = TaD.$$

Ferner ist $AD = AC - DC$, d. i. $aD. \text{tang. } x = Cc. \text{tang. } R - aD. \text{tang. } r$ und wenn wir die Gleichung durch $Cc = aD$ dividiren:

$$\text{tang. } x = \text{tang. } R - \text{tang. } r.$$

Dieser Ausdruck giebt, da die Tangenten so kleiner Winkel, als R und r sind, mit den ihnen angehörenden Kreisbögen verwechselt werden dürfen, den Abstand der Erleuchtungsgränze $x = 16' 2''$, $5 - 8''$, $5 = 15' 54''$, und das Doppelte dieses Winkels, zu 180° addirt, den erleuchteten Bogen uab im Durchschnittskreise der Erdkugel $= 180^\circ 31' 48''$.

Dieser Bogen wird noch beträchtlicher durch die früher erwähnte Wirkung unserer Atmosphäre, die Lichtstrahlen gegen die Erdoberfläche zu krümmen, oder durch die astronomische Strahlenbrechung erweitert. Die letztere verursacht nämlich, daß noch ein Theil derjenigen Lichtstrahlen, welche den Erdkörper nicht berühren würden, von den Luftschichten, welche sie antreffen, nach Punkten seiner Oberfläche gelenkt werden, die hinter t und u liegen. Da in diesen äußersten Punkten des erleuchteten Gebiets die Sonne im Augenblicke des Untergangs erscheinen wird, so müssen sie um einen der Horizontalrefraction gleichen Winkel von t und u entfernt seyn. Nehmen wir diese zu $33'$ an, so erweitert sich folglich der überstumpfe Winkel uct , der die Ausdehnung der Erleuchtung mißt, auf $181^\circ 37' 48''$.

Die Erleuchtungsgränze der Erdkugel wird durch die Auenbrechung derselben unaufhörlich an ihr verschoben, so daß sie in jedem Augenblicke gewisse Gegenden verläßt und neue aufnimmt: für jene

hebt jetzt die, aus der noch fortbauernnden Erleuchtung der höheren Luftschichten entspringende Abenddämmerung an, welcher später das völlige Dunkel der Nacht folgt; diese hingegen, denen die oben erleuchtete Atmosphäre schon früher die Morgendämmerung und Morgenröthe zeigte, haben den Anblick des Sonnenaufgangs, mit welchem der bürgerliche Tag beginnt. Während die Erde sich nun weiter drehet und dadurch stets andern Gegenden ihrer Oberfläche Abend und Morgen bereitet, scheint die aufgehende Sonne dem Auge immer höher am östlichen Himmel empor zu steigen, bis sie den Meridian erreicht hat, alsdann aber gegen den westlichen Horizont wieder hinabzusinken. Der Augenblick ihres Verschwindens im Gesichtskreise ist die zweite Gränze des Tages. Zwischen ihr und dem nächstfolgenden Sonnenaufgange verrinnt die Nacht, zu welcher wir beide Dämmerungen rechnen; denn völlige Dunkelheit tritt, wie die Erfahrung uns lehrt, erst dann ein, wenn die Sonne sich 18° unter dem Horizont befindet. Einen in diesem Abstände von demselben gedachten kleineren Kreis am Himmel nennt man daher den Dämmerungskreis.

So wie aus der Umdrehung der Erde die Verschiedenheit in den Stunden des Tages für Derter, die unter verschiedenen Meridianen liegen, entspringt, erkennen wir in ihrer progressiven Bewegung den Grund der Veränderlichkeit in der Dauer von Tag und Nacht für einen jeden gegebenen Ort und der, auf dem Wechsel der Erleuchtung und Erwärmung beruhenden, Eintheilung des Jahres in vier gleiche Jahreszeiten. Fiele die Ebene der Erdbahn mit der des Aequators zusammen, so würde eine die Mittelpunkte der Erde und Sonne verbindende gerade Linie senkrecht auf der Erdbare stehen, mithin die Erleuchtung der ersteren (wenn wir deren geringe Erweiterung durch Dimensionsverschiedenheit und Refraction hier außer Acht lassen) sich vom Nordpol bis zum Südpol erstrecken. — Bei ihrer Umdrehung läge alsdann jeder geographische Parallelkreis in der nördlichen und südlichen Hemisphäre zur Hälfte im Licht und halb im Dunkel, so daß an jedem Orte der Erdoberfläche die Dauer der Tage und Nächte einander gleich seyn würde. Unter diesen Umständen fiel also jede Veränderlichkeit der Tageszeiten und der Unterschied besonderer Jahreszeiten ganz hinweg.

Um die Entstehung dieser letzteren am einfachsten aufzuklären, abstrahiren wir für den Augenblick von der rotirenden Bewegung der Erde, und betrachten nur ihre progressive um die Sonne. Diese geschieht, wie wir oben sahen, in einer Bahn, gegen welche die Erdbare um $(90^\circ - \epsilon)$ oder etwa $66^\circ 32'$ geneigt ist, da sie mit der Ebene des Aequators einen Neigungswinkel (ϵ) von ungefähr $23^\circ 28''$ einschließt. Unveränderlich diese Lage behauptend, also in stets parallelen Richtungen fortschreitend, muß die Erdbare mit dem Radius vector stets veränderliche, bald stumpfe, bald spitze und in einzelnen Momenten rechte Winkel bilden. Denken wir uns die Erde, um von einer anfänglichen Lage derselben gegen die Sonne auszugehen, in dem Punkte T (Fig. 8.) ihrer Bahn, wo die Richtung der Axa mit der des Radius vector den größten stumpfen Winkel bildet, so wird

der Südpol p in die erleuchtete Hälfte der Erdoberfläche, der Nordpol P hingegen in die dunkle fallen. Die Entfernung der Lichtgränze von beiden Polen ist hier der Schiefe der Ekliptik gleich; mithin liegen in der südlichen Hemisphäre alle im Meridian befindlichen Derter im Sonnenlichte, die um einen Bogen von $90^\circ + \varepsilon$ vom Aequator absteigen, während in der nördlichen Halbkugel nur diejenigen Derter von den Sonnenstrahlen im Meridian beschienen werden, deren geographische Breite $90^\circ - \varepsilon$ nicht übersteigt. Die Parallelkreise werden hier, mit Ausnahme des Aequators, augenscheinlich in ungleiche Theile zerlegt, und nach Verhältniß ihrer größeren Annäherung an den Südpol immer mehr, ja in einem Abstände $= \varepsilon$ von demselben ihrem ganzen Umfange nach erleuchtet. Die hier beschriebene Lage der Erdkugel gegen den Sonnenkörper ist die, welche dem Anfange des Winters entspricht.

Bei weiterem Fortrücken nimmt der stumpfe Winkel, welchen Erdaxe und Radius vector einschließen, allmählig immer mehr ab, bis er in einem zweiten Hauptmoment der Bewegung zu einem rechten geworden ist. Denken wir uns eine durch den Mittelpunkt der Erde gelegte und auf dem Radius vector senkrecht stehende Ebene, welche dieselbe in eine erleuchtete und eine dunkle Hemisphäre theilt, so fällt jetzt die Axe in diese Ebene und sämtliche Parallelkreise werden von ihr in zwei gleiche Hälften zerlegt. Dieß ist der Augenblick des Frühlingsäquinocciums: für einen jeden Punkt der Erde sind Tag und Nacht von gleicher Dauer; die Sonne bescheint gleichzeitig die Derter unter demselben Meridian vom Nord- bis zum Südpol, und geht für diese letzteren Punkte nicht mehr unter, sondern bleibt ihnen (wegen der erhöhenden Strahlenbrechung) über dem Horizonte während der ganzen täglichen Bewegung fortwährend sichtbar.

Sobald nun die Erde diesen zweiten Standpunkt ihrer Bahn verlassen, geht der von Radius vector und Erdaxe gebildete Winkel von einem rechten in einen spitzen über und nimmt so lange ab, bis er in einem dritten Standpunkte der Erde, T (Fig. 8.), dem ersten direct gegenüber, sein Minimum $= 90^\circ - \varepsilon$ erreicht. Jetzt liegt der Nordpol in der erleuchteten, der Südpol in der dunkeln Hemisphäre; überhaupt sind die Erscheinungen, nur in entgegengesetzter Beziehung, durchaus dieselben, wie in der ursprünglich betrachteten Lage, und es verhält sich hier die nördliche Hemisphäre zur Sonne, wie dort die südliche, welche nunmehr — wie es dort mit der nördlichen der Fall war — nur bis zur Breite von $90^\circ - \varepsilon$ Erleuchtung empfängt. Die früher durchaus erleuchtete Umgegend des Südpols liegt jetzt eben so weit, nämlich in einem Abstände $= \varepsilon$, während der drehenden Bewegung der Erdkugel im Schatten.

Beim allmählichen Fortschreiten derselben von diesem dritten Standpunkte, mit dessen Erreichung der Sommer beginnt, nähert sich der Winkel $ST'P$ allmählig wieder immer mehr einem rechten.

rechten. Dem zweiten Standpunkte genau gegenüber steht die Erdaxe wieder senkrecht auf dem Radius vector: der Moment des Herbstäquinocciums tritt ein, und mit ihm die Erscheinung eben der einfachen Beleuchtung des Erdkörpers, wovon beim zweiten Momente die Rede war. Ihren Kreislauf vollendend kehrt nun die Erde mit immer stumpferer Neigung ihrer Ase gegen den Radius vector zum Anfangspunkt ihrer Bahn zurück, wo die beschriebene Erleuchtung von neuem anhebt.

Die Darstellung der vier Hauptmomente in der veränderlichen Erleuchtung der Erdfugel durch die Sonne erklärt zugleich etymologisch die, ihrer Bedeutung nach, im vorigen Capitel eingeführten Kunstwörter: Frühlings- und Herbstnachtgleiche, Solstitium, Sommer- und Winter Sonnenwende; auch für die Benennung des Aequators erkennen wir hier die Veranlassung in der gleichen Dauer von Tag und Nacht, da ein jeder seiner Punkte die Hälfte des täglichen Weges in der Sonnen-erleuchtung, die Hälfte im Schatten zurücklegt, an welchem Orte ihrer Bahn die Erde sich auch befinden möge, indem Lichtgränze und Aequator, als größte Kreise auf der Erdfugel, einander jederzeit halbiren müssen.

Die in der Lage des Winter- und Sommersolstitiums dem Nord- und Südpol zunächst liegenden Punkte der Erleuchtungsgränze beschreiben bei der Umdrehung die irdischen Polarkreise, die man sich ebenfalls durch eine das Centrum der Erde mit den Polen der Ekliptik verbindende gerade Linie auf der Erdoberfläche vermöge einer drehenden Bewegung um die Erdaxe construirt denken kann. Auf dieselbe Weise legen wir in beiden irdischen Hemisphären die Wendekreise fest, indem wir — analog den an der Himmelsfugel durch die Solstitialpunkte beschriebenen — Parallelkreise ziehen, die in einer geographischen Breite $= s$ auf beiden Seiten des Aequators liegen. Auch auf sie hat man die Benennung der himmlischen Wendekreise nach den Zeichen des Steinbocks und Krebses übertragen. Die in ihnen liegenden Punkte der Erdoberfläche werden in den Solstitien senkrecht von den Strahlen der Sonne getroffen.

Nach dieser vorläufigen Betrachtung über die Erleuchtung der Erde in den vier Hauptmomenten ihres Kreislaufs, welche den Anfang der Jahreszeiten (im astronomischen Sinne des Worts) bestimmen, bleibt uns noch die allgemeine Untersuchung zu erledigen übrig: welches das Gesetz der Veränderlichkeit der Tageszeiten überhaupt, in jedem beliebigen Standpunkte der Erde, und für einen jeden gegebenen Ort auf ihrer Oberfläche sey? Diese Frage reducirt sich bei näherer Betrachtung auf die Aufgabe: den Tagebogen zu bestimmen, welchen die Sonne zu einer gegebenen Zeit über dem Horizonte eines gegebenen Orts beschreibt.

Die Größe dieses Tagebogens ist offenbar abhängig: theils von der geographischen Breite oder der damit identischen Polhöhe (β) des Orts, theils von dem Standpunkt der Erde in ihrer

Bahn oder der daraus fließenden Declination der Sonne (δ). Diese letztere finden wir für alle Tage des Jahrs in den astronomischen Jahrbüchern aufgezeichnet, oder leiten sie ab aus der bekannten Länge der Sonne und der Schiefe der Ekliptik, nach der Formel

$$\sin. l. \sin. \varepsilon = \sin. \delta.$$

Die Auslösung der obigen Aufgabe fordert nunmehr die Construction eines sphärischen Dreiecks (Fig. 13.), worin die eine Seite der vom Pol bis auf den Kreis des Horizonts herabgehende Bogen des Meridians (PH), die andere Seite das vom Horizont abgeschnittene Bogenstück eines Declinationskreises (PO) ist, welchen wir uns durch die Punkte des Auf- oder Untergangs der Sonne (O) gelegt denken; der Bogen im Horizont, welcher die Punkte H und O verbindet (die Morgen- oder Abendweite), schließt dieses, in H rechtwinklichte, sphärische Dreieck. Der in O beginnende Tagebogen der Sonne wird nun durch das Doppelte des Winkels in P oder des gleichbedeutenden Bogens AD im Aequator gemessen. Jenen Winkel aber berechnen wir nach der Gleichung

$$\cos. P = \frac{\text{tang. HP}}{\text{tang. PO}},$$

welche sich durch Substitution der Werthe $HP = 180^\circ - \beta$ und $PO = 90^\circ - \delta$ in folgende verwandelt:

$$\cos. P = \frac{-\text{tang. } \beta}{\cot. \delta} = -\text{tg. } \beta. \text{tg. } \delta.$$

Da sowohl β , als δ immer $< 90^\circ$ sind, so ist der Werth des vorstehenden Products negativ und bezeichnet den Cosinus von P als den eines stumpfen Winkels. Für alle Derter nördlicher Breite ist diese Formel von der Zeit der Frühlingsnachtgleiche bis zu der des Herbstes gültig, weil in dieser Zwischenzeit, wie wir oben sahen, die Richtung des Nordpols mit dem Radius vector einen spitzen Winkel einschließt, mithin die Declination der Sonne dem Beobachter nördlich oder positiv erscheint. In der andern Hälfte der Umlaufsperiode hingegen, wo derselbe die Sonne unter dem Aequator, in ihrer südlichen oder negativen Abweichung erblickt, erscheint die dem Meridian näher gerückte Seite PO nicht mehr als die Differenz, sondern als die Summe eines Quadranten und der Declination ($90^\circ + \delta$), und für den halben Bogen des Tagekreises haben wir den positiven Werth

$$\cos. P = \frac{\text{tang. } \beta}{\cot. \delta} = \text{tg. } \beta. \text{tg. } \delta.$$

Der halbe Tagebogen beträgt hier weniger als 90° , d. h. die Tage fallen kürzer aus, als die Nächte.

Man sieht leicht ein, daß die Strahlenbrechung auf die Erweiterung der Tagebögen einen sehr ungleichen Einfluß äußern, z. B. unter dem Aequator geringer, als unter einem jeden andern Parallelskreise auf die Vergrößerung derselben wirken muß, weil der Tag — wie wir oben sahen — durch den Einfluß der Refraction bereits dann beginnt, wenn die Sonne noch 33' unter dem Horizont steht, mithin ein kleines Bogenstück Oo zum halben Tagebogen addirt werden muß, das einem um so größeren Winkel entsprechen wird, je kleiner der Radius des Parallelskreises ist, dem es angehört. Werde die horizontale Strahlenbrechung no mit ρ bezeichnet, so erhalten wir durch Construction des sphärischen Dreiecks ZPo (worin die Seite $ZP = 90^\circ - \beta$, $Po = 90^\circ - \delta$ und $Zo = 90^\circ + \rho$) den Werth des halben Tagebogens oder des ihm entsprechenden Winkels $ZPo = P'$, der den sichtbaren Weg der Sonne über dem Horizonte mißt, in der Gleichung:

$$\begin{aligned} \cos. P' &= \frac{\cos. (90^\circ + \rho) - \cos. (90^\circ - \beta) \cos. (90^\circ - \delta)}{\sin. (90^\circ - \beta) \sin. (90^\circ - \delta)} \\ &= \frac{-\sin. \rho - \sin. \beta \sin. \delta}{\cos. \beta \cos. \delta} = -\operatorname{tg.} \beta \operatorname{tg.} \delta - \frac{\sin. \rho}{\cos. \beta \cos. \delta}. \end{aligned}$$

In der zweiten Hälfte des Jahres, wo $Po = 90^\circ + \delta$ ist, wird das erste Glied positiv.

Dieser Ausdruck, verglichen mit dem oben stehenden, hebt den Einfluß der Strahlenbrechung hervor, ist aber zur Berechnung weniger geeignet, als der folgende, worin statt der Declination die Polardistanz der Sonne $\pi = 90^\circ - \delta$ gesetzt worden:

$$\sin. \frac{1}{2} P' = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (\pi + \beta + \rho) \cos. \frac{1}{2} (\pi + \beta - \rho)}{\cos. \beta \sin. \pi}}$$

Aber auch diese Gleichung bestimmt den halben Tagebogen für einen gegebenen Tag des Jahres noch nicht mit mathematischer Genauigkeit, weil an ihm die Sonne nicht, wie es hier stillschweigend angenommen ist, bei ihrem Untergange noch an demselben Punkte des Himmels steht, wo sie bei'm Aufgange stand. Vielmehr muß sie, die wegen des Fortschritts der Erde in der Ebene der Ekliptik unaufhörlich ihren Standpunkt gegen die Fixsterne ändert, im Augenblicke, wo der Tag endet, eine andere Rectascension und Declination besitzen, als im Anfangsmoment desselben. Die Wirkung dieser eigenthümlichen Bewegung der Sonne auf die Größe der Tagebögen ist wiederum eine Erweiterung derselben, weil die geschehene Rectascensions-Änderung, welche bei der Bestimmung von Ad oder P' in Betracht kommt, im entgegengesetzten Sinne der täglichen Bewegung (von Westen nach Osten) geschieht; bei diesem verzögerten Fortschritte der Sonne erreicht sie nämlich den Punkt des Untergangs um so viel später, als sie im Laufe des Tages von dem Orte, wo sie sich bei'm Aufgange befand, nach Osten weiter gerückt ist. Da wir in

astronomischen Jahrbüchern die Rectascensionsänderung der Sonne für alle Tage (d. h. für die Dauer von einem Mittage zum andern) angegeben finden, so haben wir für den gegebenen Tag nur das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Aenderungen zu nehmen und dem berechneten Werthe des halben Tagebogens P' einen ihm proportionalen Theil davon als Ergänzung hinzuzufügen, um das Bogenstück des himmlischen Parallelkreises, welches die Sonne vom Aufgang bis zum Niedergang durchschreitet, vollständig zu erhalten. Dadurch, daß man die, an jenem Orte ebenfalls für den Augenblick des Mittags bemerkte, Declination der Sonne als mittlern Werth derselben für δ annimmt, überhebt man sich der Mühe, den Einfluß der stets sehr unbedeutenden Declinationsänderung auf die Größe des Tagebogens besonders in Betracht zu ziehen.

Ein Beispiel der Anwendung des hier ausgesprochenen Verfahrens gebe die Bestimmung des Tagebogens, welchen die Sonne zwischen ihrem Auf- und Untergange zu Calmar in Schweden am 17. Junius 1825 beschreibt. Ihre Declination am Mittage jenes Tages ist (nach Anl. IX. a.) $= 23^\circ 23' 50''$, die Polardistanz mithin $= 66^\circ 36' 10''$; die Breite von Calmar $= 56^\circ 40' 30''$; die Refraction $= 33'$.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{I. } \sin. \frac{1}{2} (\pi + \beta + \rho) & = & \text{I. } \sin. 61^\circ 54' 50'' = 9.94559 \\
 + \text{I. } \cos. \frac{1}{2} (\pi + \beta - \rho) & = & \text{I. } \cos. 61^\circ 21' 50'' = 9.68052 \\
 & & \hline
 & & 9.62611 \\
 \text{I. } \cos. \beta & = & \log. \cos. 56^\circ 40' 30'' = 9.73988 \\
 + \text{I. } \sin. \pi & = & \log. \sin. 66^\circ 36' 10'' = 9.96273 \\
 & & \hline
 & & - 9.70261 \\
 & & \hline
 \text{Differenz} & = & 19.92350 - 20 \\
 & & : 2 \\
 & & \hline
 \log. \sin. \frac{1}{2} P' & = & 9.96175 - 10.
 \end{array}$$

Der diesem Logarithmus entsprechende Sinus gehört einem Winkel von $66^\circ 18' 15''$ an, dessen Verdoppelung den halben Tagebogen zu $132^\circ 36' 30''$ angiebt. Die Rectascensionsänderung vom 16. zum 17. Junius finden wir $= 1^\circ 2' 21''$, am folgenden Tage $= 1^\circ 2' 24''$, also darf sie für den 17. Junius $= 1^\circ 2' 22''$ gesetzt werden. Der dem berechneten halben Tagebogen proportionale Theil dieser Größe beträgt sehr nahe $\frac{132}{360} (1^\circ 2' 22'') = 22' 52''$, und vermehrt den Werth von P' auf $132^\circ 59' 22''$. Der ganze Tagebogen, welchen die Sonne durchläuft, würde daher $265^\circ 58' 44''$ umfassen.

An die vorstehende Untersuchung schließt sich die Aufgabe, die Dauer der Dämmerung oder das vom Horizont bis zu dem, in einem Abstände von 18° , unter ihm liegenden Dämmerungs-

kreise sich erstreckende Bogenstück des Parallelkreises zu bestimmen, in welchem die Sonne an einem gegebenen Tage ihre Bahn am Himmel beschreibt *). Die über den Einfluß der Refraction auf die Größe des Tagebogens angestellte Betrachtung wiederholt sich hier; der mit ρ bezeichnete Abstand $n o = 18^\circ$ gesetzt, wird der Werth des halben Tagebogens mit Einschluß des, in das Gebiet der Dämmerung fallenden, Bogenstücks $O o$ gegeben in der Gleichung:

$$\cos. P'' = - \left(\operatorname{tg.} \delta. \operatorname{tg.} \beta + \frac{\sin. 18^\circ}{\cos. \delta. \cos. \beta} \right).$$

Die Größe der Morgen- oder Abenddämmerung für sich zu erhalten, ziehen wir von P'' den oben erwähnten Winkel P' ab:

$$P'' - P' = O o = D d.$$

Je mehr die Cosinus der Winkel P'' und P' von einander abweichen, um so beträchtlicher wird auch der Werth von $D d$ werden. Der Unterschied in den Cosinus besteht aber in der additiven Größe $\frac{\sin. 18^\circ}{\cos. \delta. \cos. \beta}$, um welche derjenige des Winkels P'' den Cosinus des halben Tagebogens übersteigt. Dieser Quotient wird um so beträchtlicher, je kleiner sein Divisor $\cos. \beta$ ausfällt, d. h. je weiter der angenommene Standort, für welchen die Dauer der Dämmerung gesucht wurde, vom Aequator absteht, so daß ihr Werth mit wachsender geographischer Breite ebenfalls zunimmt, unter dem Aequator aber sein Minimum $= 18^\circ$ erreicht, wovon man sich auch leicht durch die Construction (Fig. 13.) überzeugen kann.

Man pflegte früherhin nach der Dauer der längsten Tage in jeder Hemisphäre die Oberfläche der Erde unter dem Namen der verschiedenen Climata in gewisse Zonen abzutheilen. Zwischen dem Aequator und jedem der beiden Polarkreise wurden 24 solcher Climata angenommen, indem man den Unterschied einer halben Stunde in der Dauer der längsten Tage als Gränzen derselben festsetzte. Die diesen Gränzen entsprechenden Tagebögen der Sonne sind also um $\frac{1}{2} \text{ St.} = 7^\circ 30'$ von einander verschieden, und berechnen sich nach der oben entwickelten Formel:

$$\cos. P = - \operatorname{tg.} \delta. \operatorname{tg.} \beta.$$

Die geographische Breite β , welche gesucht wird, ergibt sich durch Substitution des halben Tagebogens P , welcher für ein bestimmtes Klima gegeben worden, und der Declination der Sonne am längsten Tage, $\delta = 23^\circ 28'$. So findet man die Gränze des ersten Climas, indem man $\frac{1}{2} (180^\circ + 7^\circ 30') = 93^\circ 45'$ in der Gleichung

$$\operatorname{tg.} \beta = - \cos. P. \cot. \delta$$

*) Nach der im 4ten Capitel erwähnten Proportionalität zwischen Zeit und Kreiseintheilung bestimmt man mit der einen Größe zugleich die andere.

an die Stelle von P setzt. Der Raum innerhalb des Polarkreises, welcher am längsten Tage durch-
aus erleuchtet ist, wird nach einem andern Princip in 6 Climate getheilt, als deren Gränzen man
den Unterschied von einem ganzen Monate in der Dauer der Erleuchtung angenommen hat. Zu
diesem Zwecke muß man in ihm fünf von einander und dem Polarkreise gleich weit, d. h. um den
Bogen $\frac{\pi}{6}$, absteigende Kreise construirt denken, von welchen der untere erst dann in seinem ganzen
Umfange von der Sonne beschienen werden wird, wenn ihre Declination $\frac{\pi}{6}$ ε, ihre Entfernung vom
Aequinoctialpunkt im Kreise der Ekliptik, mithin $\frac{\pi}{6}$ des zum Solstitium sich erstreckenden Qua-
dranten oder 15° beträgt. Der nächstfolgende fällt völlig in die Erleuchtungsgränze, sobald die
Länge der Sonne auf 30° und ihre Declination auf $\frac{2\pi}{6}$ angewachsen ist, u. s. f.; die den Längen
 $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ \dots 90^\circ$ entsprechenden Declinationen messen also die Complementary der geographischen
Breiten, welche jene sechs Climate einschließen.

Es wird ein leichtes Geschäft seyn, nach dieser Anleitung eine eigene Tafel zu construiren,
welche die Gränzen der 30 verschiedenen Climate jeder Hemisphäre enthält; indessen hat die ganze
vorstehende Betrachtung in unsern Tagen, wo eine Eintheilung dieser Art völlig zwecklos erscheint,
eben so wenig ein practisches Interesse, als die alte aristotelische, auf die Verschiedenheit der Be-
leuchtung gegründete, Unterscheidung der Erdbewohner nach der Lage ihres Schattens.

Mit der Erleuchtung unserer Erde durch den Sonnenkörper ist eine physische Wirkung des
Lichtes, die Erwärmung ihrer Oberfläche, verbunden. Unter übrigens gleichen Umständen richtet der
Grad der Erwärmung sich nach der Menge der auffallenden Lichtstrahlen. Die Erdzone zwischen
beiden Wendekreisen muß also, weil hier in dem Zeitraume eines Jahres alle Punkte allmählich
von der senkrecht stehenden Sonne erleuchtet werden, die heißesten Gegenden einschließen. Gemäßig-
ter wird die Wärme in den beiden Zonen seyn, die zwischen den Wende- und Polarkreisen liegen,
weil die Strahlen hier schon mehr oder weniger geneigt auf die Horizontalebenen fallen, und am
geringsten ist die Erwärmung unstreitig da, wo das Sonnenlicht sehr flach die Oberfläche der Erde
trifft und größtentheils über dieselbe hinstreift — innerhalb der Polarkreise. Daher die Benennung
von heißer, gemäßigter und kalter Zone. Der eigentlich auffallende Wechsel der Temperatur, wo-
durch die Jahreszeiten (in gewöhnlicher Bedeutung) sich von einander unterscheiden, correspondirt nicht
mit den Nachtgleichen, dem längsten und dem kürzesten Tage, sondern fällt — so wie die
tägliche Erwärmung ihr Maximum erst nach dem Mittage erreicht — zwischen diese Haupt-
momente des jährlichen Umlaufs. Für alle Derter der nördlichen Hemisphäre herrscht dieselbe Jahres-

zeit, für die der südlichen die gerade entgegengesetzte, so daß nach Verlauf eines halben Jahres von der einen dasselbe gilt, was in Beziehung auf die andere gesagt wurde.

Doch erleidet dieser letzte Ausspruch eine kleine Modification, wenn wir die ungleichförmige Bewegung der Erde in ihrer Bahn um die Sonne oder die scheinbare, damit übereinstimmende, der letzteren berücksichtigen. Bekanntlich ist diese Bewegung am schnellsten in der Sonnennähe, welche für die nördliche Halbkugel im Winter, für die südliche im Sommer eintritt, — am langsamsten in den entgegengesetzten Jahreszeiten für beide. Daraus entspringt ein Unterschied von etwa 8 Tagen, welche die Sonne länger in der nördlichen Hemisphäre verweilt, und zugleich eine Verschiedenheit der Tagebögen für Orte von gleicher nördlicher und südlicher Breite, die jedoch zu unbedeutend ist, als daß man sie in Betracht ziehen könnte.

Behtes Capitel.

V o n d e r Z e i t.

Durch die Eindrücke, welche eine Folge von Ereignissen in unserm Gedächtniß zurück läßt, werden wir uns des Nacheinanderseyns derselben — der Zeit — bewußt, wofür sich jedoch in unserm Geiste kein Maßstab der ihr kürzeres oder schnelleres Vorübergehen Maße, auffinden läßt. Die Zeit ist keine, unmittelbarer Anschauung fähige, Größe, wie jede räumliche, sondern muß aus der Veränderung im Raume mittelbar erkannt werden, indem man die verschiedenen Momente im successiven Uebergange eines bewegten Körpers, aus einem Punkte in den andern auffaßt, und von der Aenderung des Orts auf die darüber verflossene Zeit schließt. Es ist einleuchtend, daß zu diesem Zweck nur eine gleichförmige Bewegung benutzt werden kann; aber die Erkenntniß einer solchen setzt wiederum den Begriff einer unveränderlichen Zeiteinheit voraus. In der That reicht unsre Gedächtnißkraft hin, uns die Gleichheit oder Ungleichheit kleiner und schnell auf einander folgender Zeiträume (z. B. der Takte in der Musik) beurtheilen zu lassen. Eine Maschine, welche durch discontinuirliche oder hüpfende Bewegung solche gleiche Zeiteinheiten mißt, setzt uns in den Stand, über die Gleichförmigkeit größerer, continuirlicher Bewegungen zu urtheilen; finden wir, daß über gleichen Raumbeschreibungen der letzteren eine gleiche Anzahl Pendelschläge oder Secunden verfließt, so ist sie eben dadurch als gleichförmige Bewegung erkannt.

Eine solche bietet sich uns nun erfahrungsmäßig in der scheinbaren Umwälzung des gestirnten Himmels dar, deren Dauer, den Sternentag, wir in 24 Stunden, 1440 Minuten oder 86400 Secunden Sternenzzeit theilen. Um eine Uhr nach dieser Zeit zu reguliren, müssen wir die Gränzen des Sternentages durch zwei auf einander folgende, in willkürlicher Richtung angestellte Beobachtungen eines Fixsterns zu bestimmen suchen. Der vom Stundenzeiger auf dem Zifferblatte der Uhr (das an astronomischen Uhren nicht in 12, sondern in 24 Stunden abgetheilt ist) beschriebene Weg, verglichen mit der erforderlichen ganzen Umdrehung des Zeigers, giebt die Abweichung im Gange der Uhr zu erkennen, der entweder beschleunigt oder verzögert genannt wird, je nachdem in dem beobachteten Intervall mehr oder weniger, als die ganze Eintheilung des Zifferblattes, durchlaufen ist. Um ihn mit der Sternenzzeit in Uebereinstimmung zu bringen, muß man ihn daher (durch veränderte Stellung der Pendel-Einse oder Spannung der Uhrfeder) in dem einen Falle verzögern, in dem andern beschleunigen. Doch ist eine solche, in der Idee leicht bewirkte, Uebereinstimmung auf die Dauer nie zu erreichen und auch für astronomische Beobachtungen nicht wesentlich erforderlich; denn man lernt die wahre Sternenzzeit auch durch eine fehlerhaft gehende Uhr kennen, wenn ihr tägliches Voreilen oder Zurückbleiben und der Augenblick, in welchem diese Abweichung = 0 war — ihre sogenannte Epoche — gegeben sind. Es sey z. B. eine Uhr bei der Culmination eines bestimmten Fixsterns auf den Nullpunkt gestellt worden und ihre schon bekannte tägliche Uenderung = v , so wird diese Abweichung nach n Tagen bereits $n v$ betragen, und man darf nur dieses Product, je nachdem es Acceleration oder Verzögerung ausdrückt, von der angegebenen Zeit abziehen oder zu ihr addiren, um die wahre Sternzeit zu erhalten. Dabei wird freilich vorausgesetzt, daß der Gang der Uhr gleichförmig bleibe, und in der That wendet man zur Erreichung dieser Bedingung außerordentliche Kunst und Vorsicht an, ohne jedoch dadurch kleinen Unregelmäßigkeiten, die besonders durch den Wechsel der Temperatur herbeigeführt werden, vorbeugen zu können. Um aber die Bestimmung des täglichen Voreilens oder Zurückbleibens der Uhr von ihnen möglichst unabhängig zu machen, bemerkt man nach einem beträchtlichen Zeitraume die Summe der bis dahin angehäuften Abweichungen von der wahren Sternzeit, indem man den Moment einer neuen Beobachtung des gewählten Fixsterns von der Uhr entlehnt, und dividirt diese Summe (s) durch die Anzahl der seit der Epoche verflossenen Sterntage (t), woraus augenscheinlich für die tägliche Uenderung ein Durchschnittswerth ($\frac{s}{t} = v$) hervorgeht, dem sie immer ziemlich nahe kommen wird. — Ging die Uhr zu früh, so wird er subtractiv, ging sie zu spät, so wird er additiv gebraucht werden müssen, um die richtige Zeitangabe zu erhalten.

Es wurde aber durch Uebereinstimmung des Zeigerumlaufs mit dem Zeitintervall, das zwischen zwei Beobachtungen eines beliebigen Fixsterns verfließt, nur die Dauer eines Sternentages, nicht sein

sein Anfangsmoment an derselben bezeichnet. Denn diesen Augenblick bestimmt nur die Culmination (der Eintritt in den Meridian) eines gewissen allgemein angenommenen Beziehungspunktes am Himmel — des Aequinoctialpunkts. Indessen bedarf es keiner unmittelbaren Beobachtung seiner Culmination, denn wenn wir bereits die irgend eines andern Fixsterns kennen, so darf nur dessen, aus Sternverzeichnissen bekannte, Rectascension in Zeit umgesetzt und zur Culminationszeit des Fixsterns gerechnet werden *).

Als ein ungleichförmiges Zeitmaaß erscheint die Periode des bürgerlichen, durch die untern Culminationen der Sonne begränzten Tages. Da die Sonne bei ihrem scheinbaren jährlichen Kreisläufe in der Richtung von Westen nach Osten am Himmel fortrückt, und also jederzeit später, als der Fixstern, mit welchem sie zuletzt culminirte, in den Meridian tritt, so müssen die Sonnentage überhaupt um einen, den täglichen Rectascensionsunterschieden proportionalen, Zeittheil die Sternentage an Dauer übertreffen. Wendete sich die gerade Aufsteigung der Sonne gleichförmig, so würde sie täglich $\frac{2}{360}$ oder beinahe 1° betragen, welchem 4 Zeitminuten entsprechen; da aber ihre Bahn gegen den Aequator geneigt, und überdieß die Bewegung, womit sie in derselben fortschreitet, ungleichförmig ist, muß der Rectascensionsunterschied nothwendig von einem Tage zum andern veränderlich ausfallen und eben dadurch eine Verschiedenheit in der Dauer der Sonnentage bewirkt werden. Man sieht hieraus, warum es nicht möglich ist, den Gang der Uhren mit diesem, im bürgerlichen Leben gebräuchlichen, Zeitmaasse in Uebereinstimmung zu bringen, und daß man sich das Vor- und Zurückstellen derselben auch dann nicht würde ersparen können, wenn sie den sichersten und regelmässigsten Gang besäßen. Nur durch die genaue Construction einer Sonnenuhr kann man jener Forderung einer stets richtigen Angabe der wahren Sonnenzeit, ohne daß es wiederholter Correctionen bedürfte, genügen.

Es verdient hier bemerkt zu werden, daß die Astronomen den Tag nicht, wie es im bürgerlichen Leben Sitte ist, von einer Mitternacht zur andern rechnen, sondern darunter das Zeitintervall zwischen zwei Mittagagen begreifen, weil diese Gränzen des astronomischen Tages durch unmittelbare Beobachtungen mit äußerster Schärfe bestimmt werden können **). Am leichtesten geschieht diese

*) Die Zwischenzeit zwei auf einander folgender Culminationen des Aequinoctialpunkts ist vermöge der Präcession dieses letzteren allerdings von der beobachteten Intervalle zwischen zwei Eintrittten eines Sterns in dieselbe Richtung verschieden, aber um einen so unbedeutenden Zeittheil, daß derselbe weder durch Instrumente angegeben, noch durch unsere Sinne wahrgenommen werden könnte.

**) Nur die neueren französischen Astronomen machen hievon eine Ausnahme, indem sie den Anfangspunkt des Tages in die Mitternacht versetzen. Zugleich theilen sie denselben in 10 Stunden, 1000 Minuten oder 100000 Secunden; zwei Umstände, die man bei ihren Angaben nicht übersehen darf.

Bestimmung des wahren Mittags auf Sterwarten durch Fernröhre, deren Axe sich genau in der Ebene des Meridians bewegt (die Passage-Instrumente), und die also nur auf die Sonne gerichtet zu werden brauchen, um aus den Momenten, worin ihre Scheibe die im Fernrohre vertical gezogenen Fäden berührt, den Augenblick der Culmination zu bestimmen. Die gewöhnliche Bestimmungsmethode aber, deren man sich überall bedienen kann, ist die der correspondirenden Höhen, und besteht wesentlich im Folgenden:

Der Beobachter nimmt mit Hülfe eines winkelmessenden Instruments — z. B. eines Spiegelfertanten — Vormittags mehrere Sonnenhöhen, und bemerkt sich sowohl deren Angabe am Gradbogen des Instruments, als die Zeitmomente der einzelnen Beobachtungen an einer Uhr. Es sind nicht die Höhen des Sonnenmittelpunktes, sondern die ihres untern oder obern Randes, welche hier genommen werden; wünscht man daher aus diesen Beobachtungen die Mittagshöhe oder die Declination der Sonne abzuleiten, so muß mit dem gemessenen Winkel noch der scheinbare Halbmesser derselben verbunden werden. Nachmittags, ehe die Sonne zu denselben Höhen herabsinkt, welche den vormittägigen gleich sind oder correspondiren, giebt der Beobachter dem Fernrohr des Instruments successive die Stellungen, welche es am Morgen hatte, jedoch in umgekehrter Zeitfolge — und beobachtet an der Uhr die Augenblicke, in welchen die Sonne mit dem Horizont (der auf offener See durch den natürlichen Horizont, auf dem festen Lande durch eine künstliche Spiegelfläche dargestellt wird) die angegebenen Winkel bildet. Dadurch sind mehrere Zeitpunkte festgelegt, zwischen welche, wenn wir sie paarweise zusammenfassen, der Augenblick des Mittags oder höchsten Sonnenstandes in die Mitte fallen muß. Die Mehrzahl der Beobachtungen dient zur sichreren Bestimmung, indem kleine Irrthümer dadurch aufgehoben werden, daß wir aus allen Resultaten das arithmetische Mittel nehmen.

Aber der auf diese Weise gewonnene Mittag ist keineswegs der wahre, sondern bedarf wegen der veränderlichen Declination der Sonne, die den Tagebogen des Nachmittags von dem des Morgens verschieden macht, einer besonderen Correction. Aus diesem Grunde nennt man den eben abgeleiteten Zeitmoment, welcher dem höchsten Punkte der Sonne in ihrem Tagebogen, nicht aber der Culmination derselben im Meridian entspricht, den unverbesserten Mittag. Die Correctionen, durch welche er auf den wahren reducirt wird, erscheinen in Gestalt einer zweitheiligen Größe, in deren letzten Gliede die Tangente der Polhöhe des Beobachtungsorts als Factor auftritt. Deuten wir sie allgemein durch $A + B \cdot \text{tang. } \beta$ an, so hat man sich unter A und B, hinsichtlich ihrer Bezeichnung, im Laufe des Jahres zweimal veränderliche Größen zu denken, die abwechselnd positiv und negativ erscheinen, wie es von der jedesmaligen Länge der Sonne bestimmt wird. Diese Abwechselung der Zeichen für alle speciellen Fälle begreift man sehr einfach in der

Andeutung von A und B durch trigonometrische Functionen zweier fingirter Winkel, x und y , die mit der Länge der Sonne in die nämlichen Quadranten der Ekliptik fallen. Mit dieser Rücksicht auf die jedesmalige Lage der Winkel wird man nach dem Ausdruck:

$$u = \text{tang. } x - \cos. y. \text{ tang. } \beta$$

durch Hülfe einer, zu diesem Zweck entworfenen, Tabelle (s. Anl. Nr. VIII.) die additive Correction des unverbesserten Mittags für einen jeden Tag im Jahre und die verschiedenen Zwischenzeiten der Beobachtungen leicht berechnen können.

Zwischen wahrer Sonnenzeit und Sternzeit herrscht eine so einfache Relation, daß wir ohne Mühe von einer Zeitbestimmung sogleich auf die andere zu schließen im Stande sind. Da nämlich der Zeitunterschied zwischen den Anfangsmomenten des Stern- und Sonnentages, d. h. zwischen den Culminationen des Aequinoctialpunkts und der Sonne durch die jedesmalige, in Zeit umgesetzte, Rectascension der Sonne gemessen wird, so ist die allgemeine Andeutung des Zusammenhangs beider Zeitarten:

$$\text{Sternzeit} - \text{S. Zeit} = \text{A. R. S.}$$

Im Besitze einer, nach Sonnenzeit regulirten, Uhr und astronomischer Tafeln, welche die geraden Aufsteigungen der Sonne für einen jeden Tag des Jahres enthalten *), finden wir demnach den Augenblick der Beobachtung in Sternzeit = S. Zeit + A. R. S.; im Besitze einer astronomischen Uhr, welche Sternzeit zeigt, hingegen die wahre Sonnenzeit = Sternzeit — A. R. S.

Zu den beiden bisher betrachteten gesellt sich endlich noch eine dritte Zeitbestimmung, ebenfalls auf die scheinbare Bewegung der Sonne gegründet, aber unabhängig von jener Unregelmäßigkeit in der Rectascensionsänderung, die den wahren Sonnentag zu einem ungleichförmigen Zeitmaasse macht. Man fingirt nämlich eine zweite Sonne, die sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in demselben Zeitraume, welchen die wahre Sonne zum Durchschreiten der Ekliptik gebraucht, durch den Kreis des Aequators bewegt. Die durch diese Vorstellung geschaffene Zeiteintheilung, nach welcher die Dauer eines Tages durch zwei auf einander folgende Culminationen des fingirten Punktes begränzt

*) In dem Berliner astronomischen Jahrbuche finden sich außer den Rectascensionen der Sonne ihre Complements zu 360° oder 24 St. unter dem Titel: "Definitiver Abstand des Widerpunkts von der Sonne in Sternzeit" angegeben (s. Anl. Nr. IX. a.). Man darf also nur, um den Anfang des Sterntags zu erfahren, die Ergänzung jener Angaben zum Augenblicke des Mittags addiren. Da aber die Tafeln die Rectascensionen für den Meridian von Berlin berechnet enthalten, so muß man unter jedem andern Meridian dieselben um einen — dem geographischen Längenunterschiede proportionalen — Theil der täglichen Rectascensions-Änderung vermehren oder vermindern.

wird, heißt die mittlere Sonnenzeit und ist für den Gang astronomischer Uhren nicht weniger geeignet, als die Sternzeit. Daneben besitzt sie den Vorzug, von der wahren Sonnenzeit immer nur wenig abzuweichen und also der üblichen Benennung der verschiedenen Tage im Jahre ebenfalls zu entsprechen. Denn die Rectascensionen der fingirten Sonne werden denen der wirklichen im Aequator bald voreilen, bald hinter ihnen zurückbleiben, und während der ganzen Periode viermal mit denselben zusammenfallen. Diese Augenblicke, in welchen beide Sonnen sich in demselben Stundenkreise befinden müssen, treten der Annahme über den respectiven Anfang ihrer Bewegung gemäß, am 15. April, 15. Junius, 1. September und 24. December — die Augenblicke hingegen, wo die Dauer beider Sonnentage übereinstimmt, am 11. Februar, 15. Mai, 27. Julius und 2. November ein. Denkt man von einem jener Momente, in denen die Rectascension der wahren Sonne (S) mit derjenigen der fingirten (F) zusammenfällt, den Fortschritt derselben anhebend, so ist der allgemeine Ausdruck des Zeitunterschiedes ihrer Culminationen dem in Zeit umgesetzten zwischen beiden Stundenkreisen enthaltenen Aequatorbogen, d. h. der mit dem Divisor 15 versehenen Differenz der Rectascensionen gleich:

$$z = \frac{AR. S - AR. F}{15}$$

Die nach diesem Ausdrücke berechneten Zeitunterschiede der wahren und mittlern Sonnenzeit werden unter dem Namen der Zeitgleichung mit der gegebenen dieser beiden Zeitarten additiv oder subtractiv verbunden, um dadurch die andere, unbekannte zu bestimmen. Man findet zu dieser Absicht die numerischen Werthe der Zeitgleichung für alle Mittage des Jahrs in einer Tafel zusammengestellt oder noch bequemer für den practischen Gebrauch in den astronomischen Ephemeriden die mittlere Zeit im wahren Mittage angegeben. Hat man den Augenblick des Mittags durch Beobachtung ausgemittelt, so darf man nur den Zeigern einer in ihrem Gange der mittlern Zeit entsprechenden, Uhr die dort bemerkte Stellung geben, um sie völlig nach dieser Zeitart zu reguliren; umgekehrt erhält man an einer, mittlere Zeit zeigenden Uhr den Augenblick des wahren Mittags in jenen Angaben.

Es bleibt uns endlich noch die gegenseitige Beziehung zwischen dem Tage der mittlern Zeit und dem Sterntage zu betrachten übrig, sowohl in Ansehung ihrer Dauer, als ihrer verschiedenen Zeitangaben eines und desselben Moments. Denken wir uns den Aequinoctialpunkt und die fingirte Sonne gleichzeitig durch den Meridian gehen, also Sterntag und mittlern Sonnentag im gleichen Augenblick beginnen, so wird bei dem Umlauf in der Richtung von M nach C (Fig. 14.) die abgebildete Sonne F vermöge ihrer eigenthümlichen Bewegung in entgegengesetzter Richtung noch um den Bogen MF von dem Meridian entfernt seyn, während der Aequinoctialpunkt von neuem

culminirt; der letztere hingegen bereits den Bogen MS beschrieben haben, wenn F den Meridian erreicht. Dieser Bogenabstand im Aequator wird durch das fortwährende Zurückbleiben der fingirten Sonne so lange zunehmen, bis er 360° beträgt oder die Punkte S und F wieder coincidiren. Dieß geschieht, nachdem F 365 mal, S 366 mal den Aequator durchlaufen, und noch um den Bogen $MC = 77^\circ 12'$ über den Meridian hinausgerückt sind — ein Bogen, der in Zeit umgekehrt, 5 St. 48 M. 48 S. beträgt, so daß 365 T. 5 St. 48 M. 48 S. mittlere Zeit und 366 T. 5 St. 48 M. 48 S. Sternzeit gleichbedeutende Werthe des tropischen Jahres sind. Um nun den Unterschied in der Dauer der Tage dieser verschiedenen Zeitarten anzugeben, berechnen wir sowohl das tägliche Zurückbleiben der fingirten Sonne in dem Bogen MF für den Sternzeit, als das tägliche Voreilen des Aequinoctialpunkts in dem Bogen MS für einen Tag mittlerer Zeit. Da beide Aenderungen nach dem jährlichen Kreislaufe sich zu 360° angehäuft haben werden, so berechnen wir den Werth jener Bögen nach den Gleichungen:

$$1) \frac{MF}{1 \text{ T. St.}} = \frac{360^\circ}{366 \text{ T. 5 St. 48 M. 48 S.}}$$

$$2) \frac{MS}{1 \text{ T. M.}} = \frac{360^\circ}{365 \text{ T. 5 St. 48 M. 48 S.}}$$

und finden $MF = 58' 58'' 38''' = 3' 55'' 54'''$ in Zeit.

$MS = 59' 8'' 20''' = 3' 56'' 33'''$ in Zeit.

Die Addition des Werthes von MS zu 24 St. giebt die Dauer des mittlern Tages in Sternzeit $= 24 \text{ St. } 3' 56'' 33'''$; die Subtraction des in Zeit umgekehrten Bogens MF von 24 St. hingegen die Dauer des Sterntages in mittlerer Zeit $= 23 \text{ St. } 56' 4'' 6'''$. Nach dem Verhältniß dieser Zahlenwerthe zu 24 wird man jede in der einen Zeiteintheilung gegebene Dauer auf die andere reduciren können.

Um ferner die Angaben der einen Zeitart auf solche der andern zurückzuführen, ist die Kenntniß des Zeitunterschiedes in den Culminationen der Punkte F und S, d. h. der von Tage zu Tage wachsenden Bögen MF und MS, erforderlich. Die sogenannte mittlere Rectascension, welche durch diese Bögen dargestellt wird, ist nichts anders, als die Rectascension der wahren Sonne, verbunden mit der Zeitgleichung. Ihre Berechnung für einen gegebenen Augenblick erspart uns indessen die in den astronomischen Ephemeriden enthaltene Angabe der Sternzeit im mittlern Mittag, Ausdruck des in Zeit umgekehrten Bogens MS für alle Tage des Jahres.

Die leicht zu vollziehende Reduction eines Zeitmaasses auf jedes andere läßt es völlig gleichgültig erscheinen, welches von ihnen man für die Bestimmung eines gewissen Augenblicks wählt.

Unmittelbar gewinnt man durch Beobachtungen am Himmel entweder wahre Sonnenzeit oder Sternzeit; aus beiden leiten wir mit Hülfe der Tafeln sehr leicht die mittlere Zeit ab, wie die Einrichtung derselben zeigt. (Anl. Nr. IX.)

Am allgemeinsten wird die Aufgabe der Zeitbestimmung gelöst, wenn wir für einen gegebenen Augenblick aus der beobachteten Höhe des Himmelskörpers, seiner Declination und der Polhöhe des Beobachtungsorts den Stundenwinkel berechnen, um welchen Stern oder Sonne sich vom Meridian entfernt haben und diesen Stundenwinkel in Stern- oder Sonnenzeit aussprechen. Der analytische Ausdruck desselben ist bereits im ersten Capitel mitgetheilt. Augenscheinlich ist diese Methode der Zeitbestimmung für den Seefahrer von besonderm Werthe, während man auf dem festen Lande die Zeit zugleich einfacher und genauer durch Beobachtung der Culminationen von Sonne und Fixsternen vermöge eines im Meridian aufgestellten, höhenmessenden, Instruments zu bestimmen im Stande ist.

Elftes Capitel.

Construction der Mittagslinie.

Nicht allein für die Bestimmung der Zeit, sondern auch für mehrere andere astronomisch-geographische Operationen ist es von Wichtigkeit, die genaue Richtung des Meridians für den Punkt der Beobachtung zu kennen. An solchen Orten daher, welche der Beobachter auf längere Zeit zu seinem Standpunkte wählt, wird er genöthigt seyn, nach einer oder der andern der nachfolgenden Methoden seine Mittagslinie zu construiren.

Die erste Methode ist in ihrer Idee sehr einfach. Ein im Augenblicke der Culmination eines Gestirns nach demselben gerichtetes Fernrohr, dessen Axe die von ihm zu unserm Auge gezogene gerade Linie versinnlicht, muß in der Ebene des Meridians liegen, und zwei, von beiden Enden auf eine Horizontalfäche herabfallende Perpendikel bezeichnen auf dieser letzteren die Richtung der Mittagslinie. Um im dauernden Besitze derselben zu bleiben, würde man in der, durch die Lothrechten Fäden gegebenen Richtung feste Punkte auf der Erdoberfläche auffuchen oder errichten müssen. Kennt man die Zeit der Culmination an einer Uhr, so hat diese Bestimmungsart keine Schwierigkeit. Doch auch unabhängig von jener Forderung sind wir im Stande, die Mittagslinie durch ein

ähnliches, wenn auch etwas weiltläufigeres Verfahren zu construiren. Man nimmt nämlich an einem Fernrohr, das zu diesem Zweck an einem winkelmessenden Instrument befestigt und um eine verticale Ase drehbar seyn muß, vor und nach der Culmination des Gestirns correspondirende Höhen desselben, und entwirft bei jeder Beobachtung, wie vorhin, seine Richtung durch zwei lothrecht herabhängende Fäden auf eine horizontal gestellte Ebene. Zwischen den dadurch entstandenen Projectionslinien ist es leicht, eine mittlere Richtung zu construiren, welche in den Meridian fallen muß. Augenscheinlich ist die Genauigkeit dieses Verfahrens von der Länge des Fernrohrs, welche die Entfernung der Richtungspunkte aller Projectionen bestimmt, abhängig, und daher nur bei Instrumenten von ziemlicher Größe anwendbar.

Ist von den Culminationen der Sonne die Rede, so kommen wir durch Benützung des Schattens, welchen undurchsichtige Körper hinter sich werfen, leichter zum Ziele. Auf einer horizontalen Ebene, in welcher mehrere concentrische Kreise construirt sind, errichtet man in dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt derselben ein Perpendikel (dieß geschieht am sichersten durch Aufstellung eines senkrechten Kegels, so daß dessen Ase zugleich die Ase aller Kreise wird), und bezeichnet bei sorgfältiger, in kurzen Intervallen wiederholter, Beobachtung des am Vormittage abnehmenden und Nachmittags wachsenden Schattens des aufgestellten Körpers, die Endpunkte desselben. Durch eine Verbindung der gewonnenen Punkte erhält man die auf der Horizontalebene von der Schattengränze beschriebene Curve und zugleich deren Durchschnittspunkte mit den anfänglich construirten Kreisen. Dadurch entstehen in jedem dieser Kreise zwei einander gegenüberliegende Punkte, in deren Mitte die gesuchte Richtung fallen muß. Die Menge der Beobachtungen an mehreren Kreisen dient hier als Correction der dabei eintretenden Fehler, indem man aus allen den mittlern Werth zieht.

Zweckmäßiger und sicherer aber, als durch den Sonnenschatten, dessen Ende immer undeutlich begrenzt erscheint, bestimmt man die Mittagslinie vermittelst eines, durch die feine Oeffnung einer schrägen Wand in ein dunkles Zimmer fallenden Sonnenstrahls. Die hiezu nöthige Vorrichtung läßt sich in einem nach Süden gehenden Fenster leicht anbringen, indem man darin eine dünne Metallplatte, mit einer äußerst feinen Oeffnung versehen, etwa in der Richtung der Weltaxe, befestigt. Oberhalb der Oeffnung ist ein feiner Einschnitt, durch welchen ein herabfallender Metallfaden gezogen ist, dessen durch die Spitze eines Gewichts bezeichneter Fußpunkt den horizontalen Boden des Zimmers trifft. Der einfallende Lichtstrahl beschreibt hier eben so, wie oben die Schattengränze, auf der horizontalen Ebene einen elliptischen Bogen, dessen Durchschnittspunkte mit mehreren Kreisbögen, die aus jenem Fußpunkte des lothrechten Fadens construirt worden, zur Bestimmung der Mittagslinie auf die vorhin erwähnte Weise dienen könnten. Doch zieht man lieber vorläufig die Mittagslinie nach ihrer ungefähren Richtung und nimmt correspondirende Sonnenhöhen

an einem Sextanten, um die Zeit des aus ihnen geschlossenen wahren Mittags mit dem Augenblicke zu vergleichen, in welchem der Schatten des Metallfadens mit der hypothetischen Mittagslinie zusammenfiel. Nach dem bekannten Unterschiede dieser Zeiten kann man die Correction der Richtung vornehmen. Noch bequemer ist es, wenn man die Zeit des wahren Mittags an der Uhr bestimmt hat (die nach mittlerer Zeit geht), am Mittage des folgenden Tages, dessen Moment man mit Hülfe der Zeitgleichung aufs genaueste erhält, den Punkt des einfallenden Lichtstrahls mit dem Fußpunkte des Perpendikels durch eine gerade Linie zu verbinden oder auch nur die Schattenlinie eines lothrechten Fadens auf horizontaler Ebene zu bemerken.

Dieselbe Methode läßt sich an einem Mestische sehr zweckmäßig in Ausübung bringen, mit dessen Hülfe man die Mittagslinie an einem jeden Orte auf freiem Felde mit großer Schnelligkeit ausstecken kann. Man kehrt nämlich die Objectivdiopter, in welcher ein feiner, über dem Lineal zur Sculardiopter fortlaufender, Faden ausgespannt ist, der Sonne zu, und bemerkt den Eintritt seines Schattens in die Mitte des kleinen Lichtpunkts, welchen die Oeffnung in der Sculardiopter auf die Tafel wirft. Diesen Eintritt muß man durch sanfte Drehung des Mestisches vermöge der Mikrometerschraube im Augenblicke des Mittags zu bewirken suchen: dann zeigt das Diopterlineal die Richtung auf dem Erdboden, in welche man die Mittagslinie ausstecken kann. Im Besitze einer Sternzeit zeigenden Uhr könnte man sich zu demselben Verfahren der im Voraus berechneten Culminationszeit eines beliebigen Fixsterns bedienen, nach welchem man in diesem Augenblicke das Diopterlineal genau zu richten suchen müßte — eine Bestimmungsart, die nöthigenfalls noch mit der vorigen verbunden werden kann, wenn man ohne großen Zeitaufwand Genauigkeit erreichen will. —

Ein anderes Verfahren, die Mittagslinie zu ziehen, besteht in der Berechnung des Azimuths der Sonne (TN, Fig. 2.) für den Augenblick der beobachteten Sonnenhöhe (NS), wozu man die Kenntniß der Polhöhe seines Standpunktes (HP) und die der Declination der Sonne (SD) nöthig hat, dagegen aber keiner Uhr bedarf. Die Complementary jener drei gegebenen Größen erscheinen uns als die Seiten eines sphärischen Dreiecks, in welchem der Nebenwinkel des Azimuths (Z, Fig. 3.) zur Berechnung gezogen wird. Bezeichnen wir die Zenithdistanz des Poles (PZ) durch b , die Zenithdistanz der Sonne (ZS) durch z und die Polaridistanz derselben (PS) durch π , so wird das Azimuth gegeben durch die Gleichung:

$$\sin. \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (b + \pi + z) \sin. \frac{1}{2} (b + z - \pi)}{\sin. b. \sin. z}}.$$

Hat man im Augenblicke der genommenen Sonnenhöhe die Schattenlinie eines lothrecht hängenden Fadens auf horizontaler Ebene bemerken lassen, so braucht man den berechneten Winkel nur auf dieser zu construiren, um die Richtung der Mittagslinie zu erhalten. Auch läßt sich dieses Verfahren mit der oben erwähnten Bestimmungsart durch den Schatten eines vertical stehenden Kegels verbinden, wobei man sogar jedes winkelmessenden Instruments entbehren kann, indem man aus der Länge des Schattens (l) und Höhe des Kegels (k) die Sonnenhöhe für den Augenblick, in welchem die Schattenlinie bemerkt worden ist, nach dem Ausdruck $k = l \cdot \tan g. h$ berechnet, und nun die obige Formel anwendet, um den Azimuthwinkel zu finden, und durch seine Auftragung an die bezeichnete Richtung des Schattens die des Mittags zu gewinnen.

Zur Anwendung der obigen, für die Berechnung des Azimuths aus Zenith- und Polarabstand der Sonne und Complement der Polhöhe gegebenen Formel bietet sich ebenfalls Gelegenheit dar, wenn man bei der trigonometrischen Vermessung eines Landes die Richtung der Mittagslinie gegen eine gegebene Richtung finden will, um die Charte des aufgenommenen Landes genau zu orientiren. Daß bei solchen Operationen gebräuchliche Instrumente — ein Theodolit — gestattet Horizontal- und Verticalwinkel, mithin neben der Höhe der Sonne zugleich den Winkel zu nehmen, welcher den Bogenabstand des Scheitelskreises, in welchem die Sonne sich befindet, von der gegebenen terrestrischen Richtungslinie mißt. Dieser Winkel, zu dem berechneten Azimuth der Sonne addirt oder von demselben abgezogen (je nachdem die gegebene Richtung außerhalb oder innerhalb des Azimuths liegt) giebt uns die Lage der Mittagslinie in Beziehung auf schon bekannte Richtungen, und kann nun eben sowohl auf dem Terrain, als auf der Charte construirt werden.

Die brauchbarste aller bisher angewandten Methoden für die genaue Ziehung einer Mittagslinie, besonders wenn sie auf eine beträchtliche Strecke fortgeführt werden soll, scheint indessen folgende zu seyn *). Nachdem man durch Beobachtung des Schattens im Mittage oder mit Hülfe der Bouffole die Richtung der Mittagslinie ungefähr bestimmt hat, steckt man in ziemlich weiter Entfernung — etwa 1500 bis 1800 Fuß — vom Beobachtungspunkte mehrere glänzende (etwa gläserne) Kugeln auf senkrechte Stäbe, welche in Abständen von einigen Fuß so gestellt sind, daß die wahre Mittagslinie vermuthlich zwischen ihnen hindurchgehen wird. Außer einer Anzahl von correspondirenden Sonnenhöhen, aus denen man die Zeit des wahren Mittags an der Uhr bestimmt, nimmt man nun mit Hülfe des Sextanten Vor- und Nachmittags auch correspondirende Sonnenabstände. Hierunter sind nämlich die Winkel verstanden, welche die Richtungen der Sonne und einer ausgesteckten Kugel am Auge des Beobachters bilden. Die Dimensionen beider Objecte veran-

*) S. v. Zachs Monatl. Corresp. May-Stück. 1801.

lassen keine Ungewißheit in dem Beobachtungsmomente, weil von der Kugel sich nur ein glänzender Punkt zeigt, der das Licht der Sonne reflectirt und dessen momentanen Eintritt in den Rand der Sonnenscheibe wir Vormittags beobachten. Die correspondirende Sonnendistanz des Nachmittags hingegen mißt seinen Austritt; und ist wegen des veränderten Sonnenstandes der glänzende Punkt der Kugel auch ein anderer geworden, so entsteht doch dadurch kein Unterschied in den eigentlichen Distanzen vom Mittelpunkte der Kugel, weil jener Punkt von dem letztern bei beiden Beobachtungen gleichweit westlich und östlich absteht. Nun ist offenbar, daß die beiden Beobachtungen an derjenigen Kugel, welche zufällig in den wahren Meridian ausgesteckt seyn möchte, die wahre Zeit des Mittags genau in die Mitte der an der Uhr beobachteten Zeitmomente versetzen müßten. Stimmt also der Mittag, welchen wir aus correspondirenden Sonnendistanzen an der ausgesteckten Kugel ableiten, überein mit dem aus correspondirenden Sonnenhöhen gewonnenen, so wäre eben dadurch der genaue Stand dieser Kugel in der Mittagslinie erwiesen, und die Bestimmung derselben vollkommen erreicht. Hat es sich aber nicht zufälliger Weise ereignet, daß eine der Kugeln in den Meridian selbst ausgesteckt worden, so erkennt man sogleich an den correspondirenden Beobachtungen an jeder einzelnen Kugel, welche von ihnen östlich, und welche westlich vom Meridian absteht. Bei jenen tritt nämlich der aus dem Beobachtungsmoment geschlossene Mittag zu früh, bei diesem hingegen zu spät ein, indem wir ihn mit dem aus Sonnenhöhen gewonnenen vergleichen. Wir dürfen daher behaupten, daß die einzelnen Kugeln in demselben Verhältniß von der Mittagslinie entfernt liegen, wie der aus ihnen abgeleitete Mittag von dem wahren abweicht.

Es möge allgemein unter den ausgesteckten Kugeln die eine den Mittag um p Secunden zu früh, eine andere um q Secunden zu spät ergeben, und ihr Abstand von einander mit a bezeichnet werden, so findet man den Punkt, welcher die wahre Richtung der Mittagslinie bezeichnet, oder seine Entfernung (x) von der ersteren Kugel durch die Gleichung:

$$(p + q) : p = a : x.$$

Diese Kugel müßte also um die Weite $x = \frac{ap}{(p + q)}$ westlich gerückt werden, um genau in den Meridian zu kommen. Um ein sichereres Resultat zu gewinnen, kann man dieses x für die übrigen Kugeln ebenfalls berechnen, und wenn sich kleine Abweichungen zeigen sollten, das arithmetische Mittel nehmen, um durch den auf diese Weise bestimmten Punkt die Mittagslinie festzusetzen. Hat man einmal ein solches Meridianzeichen (sogenanntes Absehen) errichtet, so kann man vermöge seiner ebenfalls durch Sonnendistanzen auf eine sehr einfache und zuverlässige Art die Zeit des wahren Mittags bestimmen.

Zwölftes Capitel.

Lauf und Erscheinungen des Mondes.

Eine kurze Darstellung des Mondlaufes und der veränderlichen Erscheinungen dieses Himmelskörpers für unser Auge verdient um so eher einen Platz unter den Gegenständen der mathematischen Geographie, da eines ihrer wichtigsten Probleme — die Bestimmung der geographischen Länge — nur von genauen Beobachtungen dieses Trabanten der Erde, in Verbindung mit den Methoden der Zeitbestimmung, wovon in den vorhergehenden Betrachtungen die Rede war, sich eine allgemeine, immer anwendbare und untrügliche Lösung versprechen darf.

Verfolgen wir die eigenthümliche Bewegung des Mondes, welche im gleichen Sinn, wie die der Sonne, von Westen nach Osten geschieht, so sehen wir ihn seinen Lauf binnen 27 Tagen 7 St. und 43 M., dem periodischen Monate, vollenden, oder wieder zu demselben Fixsterne zurückkehren; beziehen wir sie aber auf die jedesmalige Richtung der Sonne, so bleibt ihm — weil die Erde indessen um beinahe den zwölften Theil ihrer Kreishahn weiter gerückt ist — noch ein Winkel FEM (Fig. 15.) von etwa 30° zu beschreiben, der noch 2 Tage 5 St. und 1 M. erfordert, so daß die Zeit dieses synodischen Umlaufs oder der synodische Monat 29 Tage 12 Stunden und 44 Minuten zählt. Die Zeit des Sonnenjahrs durch die Zeit dieser Perioden dividirend, finden wir in jener etwas mehr als 13 periodische und 12 synodische Monate.

Die vom Monde am Himmel beschriebene Bahn durchschneidet den Aequator unter einem Winkel von etwa $28\frac{1}{2}^\circ$ und ist gegen die Ebene der Ekliptik um ungefähr $5\frac{1}{4}^\circ$ geneigt. Für ihn wird daher nicht nur die Declination, sondern auch die Breite, bald nördlich, bald südlich; nur durch sie und die astronomische Länge pflegt man den Ort des Mondes anzugeben, weil seine Beziehung auf die Ekliptik bequemer, als die auf den Aequator erscheint. Die beiden Punkte, in denen er den Kreis der Ekliptik bei seinem Umlauf durchschneidet, nennt man Knoten der Mondbahn und unterscheidet in ihnen den aufsteigenden von dem niedersteigenden Knoten. Aus jenem (♊) erhebt sich der Mond über die Ekliptik in die nördliche der von ihr gebildeten Hemisphären, durch diesen (♋) tritt er wieder in die südliche Hemisphäre hinüber. Eine beide verbindende gerade Linie heißt die Knotenlinie.

Diese Knoten der Mondbahn fallen aber nicht, wie die Aequinoctialpunkte, einander direct gegenüber, in eine, durch den Erdmittelpunkt gezogene gerade Linie, sondern rücken wegen der zugleich progressiven Bewegung des Mondes allmählig in der Richtung von Osten nach Westen vor. Denken wir uns, die Bewegung des Mondes zu verdeutlichen, einen festen Kreis, in dessen Umfange er sich befinden mag, um das Centrum der Erde in Rotation versetzt, während diese selbst in einer größeren Kreissbahn fortrückt, so müssen wir zugleich der Scheibe, welche nach dieser Vorstellung den Mond umherträgt, anstatt sie uns in immer paralleler Lage zu denken, eine langsame Bewegung von Osten nach Westen ertheilen, wodurch die Knoten sich unaufhörlich in der Elliptik verschieben. Ihre Bewegung, die aus der Beobachtung derjenigen Fixsterne erkannt wird, welche der Mond bei seinen Durchgängen durch die Elliptik antrifft, ist seiner eigenthümlichen Bewegung entgegen, in Beziehung auf diese also rückgängig zu nennen. In der That geschieht das Fortrücken der Mondsknoten oder die Drehung der Knotenlinie sprunghaft in Intervallen von halben Monaten; anschaulicher aber wird sie durch die obige Vorstellung der Mondbahn als einer, in der Elliptik mit gleichbleibender Neigung sich drehenden, Scheibe gemacht, wodurch sie continuirlich erscheint. Nach neun Jahren ist diese Drehung etwa zur Hälfte vollendet und der Mond steht alsdann um eben so viel Grade nördlich von einem Stern in der Elliptik, als er anfangs südlich von ihm entfernt war; die Richtung der Knotenlinie ist beinahe wieder die anfängliche geworden, aber beide Knoten haben ihre Lage vertauscht. Bei fortgesetzter Drehung der Scheibe rückt der aufsteigende Knoten immer weiter nach Westen vor und gelangt nach einem Zeitraume von ungefähr 19 Jahren wieder zu dem Punkte der Elliptik, von welchem er ausgegangen war. Die Lage der Mondbahn ist also wieder die anfängliche geworden, und der sogenannte siderische Umlauf der Knoten beginnt von neuem.

Der Umlauf der Sonne, wenn er auf die Lage des aufsteigenden Mondknotens bezogen wird, zählt weniger Tage, als das eigentliche Sonnenjahr, weil dieser Knoten der von Westen nach Osten fortschreitenden Sonne um etwa $3\frac{60}{19}^{\circ}$ oder 19° entgegenrückt. Die Periode dieses Zusammenstreffens ist im Durchschnitt = 346 T. 14 St., und verhält sich zu der Dauer des synodischen Mondumlaufs von 29 T. 12 St. 44' sehr nahe, wie 223 : 19. Nach 19 Jahren hat daher der Mond seinen Kreislauf um die Erde 223 mal vollendet, und der aufsteigende Knoten die vor dieser Periode verlassene Lage gegen die Sonne wieder gewonnen; es müssen daher die bisherigen Erscheinungen in derselben Ordnung von neuem eintreten, welches für die Vorhersagung der Verfinsternungen ein leichtes Mittel abgiebt, dessen sich auch die alten Astronomen bedienen. Aber Ungleichheiten mannichfaltiger Art in den Bewegungen der Sonne und des Mondes bewirken in der neuen Periode wesentliche Abweichungen von der vorigen, um so mehr, da die Hypothese, daß nach

223 synodischen Mondsummläufen beide Himmelskörper zu demselben Standpunkt zurückgekehrt seyn werden, nicht genau, sondern nur näherungsweise richtig ist.

Die Veränderlichkeit, welche wir in dem scheinbaren Durchmesser des Mondes wahrnehmen, widerspricht unserer vorläufigen Annahme, daß der Mond einen Kreis um die Erde beschreibe. Wir finden hier, wie früherhin für die Sonnenbahn, die Hypothese der Ellipse brauchbar, obgleich dieselbe durch die Unregelmäßigkeiten, welche aus den verschiedenen Anziehungen der nächsten Himmelskörper entspringen, sehr modificirt wird. Im Perigäum erscheint der Mond unserm Auge unter einem Durchmesser von $29' 27''$, im Apogäum von $33' 32''$. Nehmen wir die große Ase der Mondbahn = 20,000 oder seine mittlere Entfernung = 10,000 an, so beträgt die, aus jenen Werthen des scheinbaren Durchmessers berechnete Excentricität ungefähr 550 solcher Theile, die Entfernung im Perigäum also 9450, die im Apogäum 10550, und der hieraus leicht zu berechnende Werth der kleinen Ase 19970.

In Ansehung der Zeit, welche über der Bewegung des Mondes verfließt, müssen die Unregelmäßigkeiten seines Laufes noch größer seyn, als die des scheinbaren Sonnenlaufes, da hier zu dem Einfluß der elliptischen Bahn sich noch die Wirkung der veränderlichen Attraction des Sonnenkörpers gesellt, dem der Mond sich bald nähert, und wovon er sich bald weiter entfernt. Es ist daher eine der schwierigsten Aufgaben der Astronomie, den Lauf des Mondes durch allgemeine analytische Ausdrücke zu bestimmen, nach denen sein Standpunkt am Himmel für einen beliebigen Augenblick im Voraus berechnet werden könnte.

Die Schwierigkeit einer solchen Bestimmung des Orts, an welchem der Mond zu einer gegebenen Zeit sich befindet, wird durch seine verhältnißmäßig geringe Entfernung von der Erde um Vieles vermehrt; denn da die Richtungen des Mondes, aus verschiedenen Punkten der Erdoberfläche gesehen, auch verschiedene Fixsterne treffen, so muß die geographische Lage des Beobachtungsortes ebenfalls auf sie ihren Einfluß äußern. Doch eben diesem Umstande verdanken wir die Anwendbarkeit einer Methode zur Bestimmung der Parallaxe des Mondes und seiner Entfernung von der Erde, von welcher wir für die Sonne keinen practischen Gebrauch machen konnten. Wir vergleichen zwei, in demselben Augenblicke an sehr entfernten Punkten der Erde beobachtete Richtungen des Mondes mit einander und berechnen auf die früher angedeutete Weise seine horizontale Parallaxe oder den Winkel unter welchem einem Auge auf dem Monde der Erdradius erscheinen würde *).

*) Diese Bestimmung wird indessen durch die sphäroidische Gestalt der Erde, auf welche bisher keine Rücksicht genommen ist, nothwendig modificirt, indem eine Veränderlichkeit der Parallaxe durch die des Erdradius herbeigeführt wird.

Die Größe der horizontalen Mondsparrallaxe ist augenscheinlich von der veränderlichen Entfernung des Mondes abhängig, und beträgt im Perigäum $61' 32''$, im Apogäum $54' 2''$; wir dürfen sie also im Durchschnitt zu ungefähr einem Grade annehmen, dahingegen wir für die mittlere Sonnenparallaxe einen Werth von kaum 9 Secunden, oder $\frac{1}{400}$ von jenem, fanden. Soll aber die Erde am Monde 400 mal größer, als an der Sonne, erscheinen, so muß die Entfernung der letzteren auch jenes Vielfache des Mondabstandes betragen.

Die Entfernung des Mondes ergibt sich, wenn p die Parallaxe, r den Erdbahnmesser bezeichnet, durch die Gleichung:

$$e \sin. p = r \text{ oder } e = \frac{r}{\sin. p},$$

worin man für r seinen Werth in Meilen $= 860$, für p seinen mittleren Werth $= 58'$, setzen mag, um die Entfernung im bestimmten Längenmaße auszudrücken:

$$e = \frac{860}{\sin. 58'} = 50976.$$

In dieser Entfernung von ungefähr 51000 Meilen erscheint der Mond der Erde unter dem mittlern Durchmesser von $31' 30''$ und die letztere, vom Monde aus gesehen unter der doppelten Horizontalparallaxe $= 1^\circ 56'$. Legen wir diese Angaben zum Grunde, so ist, wenn d den wahren Durchmesser des Mondes bezeichnet:

$$d : 2r = 31' 30'' : 116'$$

$$\text{mithin } d = \frac{31\frac{1}{2}' \cdot 1720}{116'} = 467.$$

Zu den veränderlichen Lichtgestalten des Mondes, unter welchen derselbe einem Auge an der Erde während seines Umlaufs erscheint, übergehend, müssen wir in der synodischen Periode vier Punkte seiner Bahn unterscheiden: die Syzigien, d. h. die beiden Punkte der Conjunction und Opposition, und die um 90° von ihnen abstehenden Quadraturen. Steht der Mond, seinen Umlauf beginnend, mit der Sonne in Conjunction oder im ersten Syzigium (Augenblick des Neumonds), so wendet er der Erde die dunkle Seite zu, und geht in der Helligkeit des Tageslichts, meistens unbemerkt, der Sonne ober- oder unterhalb vorüber. Nur in dem besondern Falle, wo der aufsteigende oder niedersteigende Mondknoten mit dem Sonnenstande genau zusammentrifft, tritt der dunkle Körper des Mondes zwischen unser Auge und die Sonnenscheibe, und entzieht uns dieselbe ganz oder zum Theil. — Eine völlige Bedeckung der Sonne durch den ohne Vergleich kleineren Mond wird nur durch dessen geringe Entfernung von der Erde möglich. Die scheinbaren, wenig von einander abweichenden Durchmesser beider Himmelskörper übertreffen einander wechselseitig

an Größe, je nachdem diese dem Auge näher oder entfernter stehen: hieraus erklärt sich die totale und die ringförmige Sonnenfinsterniß, welche uns erscheinen müssen, wenn das Auge sich mit den Mittelpunkten der Sonne und des Mondes in gerader Linie befindet. Tritt dieser Umstand nicht ein, so kann der Mond bei seinem Vorübergange nur einen Theil der Sonnenscheibe verhüllen, und veranlaßt alsdann eine sogenannte partielle Sonnenfinsterniß. Der Einfluß der Parallaxe ändert bei diesem Ereigniß den Ort und Vertical-Durchmesser beider Himmelskörper, vorzüglich aber des Mondes, wenn man sich Beobachter auf mehreren Punkten der Erdoberfläche denkt; daher Sonnenfinsternisse sich immer nur gewissen Gegenden, und diesen auf verschiedene Weise, darstellen, während in andern Punkten die Sonnenscheibe ganz unverdeckt bleibt, so daß für sie das Ereigniß unsichtbar ist.

Mit dem Austritt des Mondes aus seinem ersten Syzigium fangen seine Lichtgestalten oder Phasen an. Von der der Sonne zugewandten Seite erscheint uns anfangs, so wie der Mond seitwärts aus ihrer Richtung sich entfernt, ein schmaler sichelförmiger Lichtstreif, der fortwährend an Breite zunimmt, bis er im Punkte der Quadratur (eigentlich schon etwas früher) die Hälfte der Mondscheibe umfaßt. Dieß ist die Erscheinung des ersten Viertels. Bei'm weitem Fortschreiten wachsen die Lichtgestalten des Mondes immer mehr mit elliptischer Begrenzung und endigen im zweiten Syzigium mit der Erscheinung des Vollmonds. Die andere Hälfte seines Laufes bietet dieselben Phänomene, wie die erste, nur in umgekehrter Ordnung, dar: die zweite Quadratur erreicht der Mond im letzten Viertel, und das erste Syzigium wieder im Augenblick des Neumonds.

So wie in den Conjunctionen sich Bedeckungen der Sonne durch den Mond ereignen können, entstehen in den Oppositionen Verfinsterungen des Mondes durch die zwischentretende Erde, wenn derselbe in den kegelförmigen Schatten geräth, den die Erdfugel hinter sich wirft. Wegen der Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik taucht er aber nur dann in diesen Schatten ein, wenn er im Augenblicke der Conjunction dem Knoten sehr nahe ist, und geht bei Weitem in den meisten Fällen ober- oder unterhalb desselben vorüber. Die Mondsfinsterniß wird eine totale, wenn die ganze Scheibe sich innerhalb des Erdschattens befindet; eine partielle, wenn dieselbe nur zum Theil im Schatten liegt, so daß ein erleuchtetes Segment sichtbar bleibt. Die scheinbare Größe des Halbmessers, welcher dem auf den Mond geworfenen kreisförmigen Schatten der Erde angehören würde, läßt sich bestimmen, wenn wir durch Verbindung der Endpunkte von Sonnen- und Erddiameter (Fig. 16.) ein gleichschenkeliges Dreieck construiren, in dessen Scheitelpunkt C beide Durchmesser von gleicher Größe erscheinen müssen. Die Entfernungen $SE = a$, $EM = b$, so wie die Halb-

messer der Sonne und der Erde R und r , sind gegebene Größen, die den Winkel MET bestimmen sollen. Dieß geschieht durch den zwiefachen Werth von

$$MT = CM. \operatorname{tg.} TCM = b. \operatorname{tg.} MET.$$

Für die Linie CM finden wir aus der Gleichung

$$\frac{CM + b}{r} = \frac{CM + b + a}{R}$$

den Werth $\frac{ar + br - bR}{R - r}$, und können die Tangente des Winkels TCM durch $\frac{R - r}{a}$ ausdrücken. Nach Substitution dieser Werthe wird

$$\operatorname{tang.} MET = \frac{r}{b} + \frac{r}{a} - \frac{R}{a},$$

d. h. die scheinbare Größe des Halbmessers des Erdschattens auf dem Monde ist der Summe der horizontalen Parallaxen der Sonne und des Mondes, weniger dem scheinbaren Halbmesser der Sonne, gleich. Der numerische Werth des berechneten Winkels MET verhält sich zum scheinbaren Mondhalbmesser beinahe, wie 8 : 3. Hiernach bestimmt sich leicht die Größe des Bogens, welchen wir dann vom Erdschatten im Monde wahrnehmen werden, wenn dieser die Mondscheibe in der größten Sehne, d. h. in beiden Endpunkten ihres Durchmessers durchschneidet. Wir finden nach der Gleichung (bezogen auf Fig. 16.):

2. c. a. $\sin. \frac{1}{2} x = ab$, d. i. $8 \sin. \frac{1}{2} x = 3$
für ihn einen numerischen Werth von etwas mehr, als 44 Graden.

Bei diesen Verfinsterungen der Mondscheibe verliert der verdunkelte Theil nur allmählich das Licht der Sonne, wodurch eine geschwächte Erleuchtung — der sogenannte Halbschatten — entsteht, dem die undeutliche Begränzung der Verfinsterung zuzuschreiben ist. Nie kann aber der Mond, wie die Sonne, nur einem Theil der Erdbewohner verhüllt erscheinen, während ein anderer Theil den Himmelskörper im gleichen Augenblick unverdeckt erblickt; vielmehr sieht jedes, dem Himmelskörper zugewandte Auge ihn gleichzeitig, anfangs mit dem vordern, später mit dem hintern Rande in den Schattenkegel eintauchen und eben so denselben wieder verlassen. Dieß sind die vier Hauptmomente der Beobachtung, zu denen sich noch diejenigen gesellen, in welchen ausgezeichnete Punkte der sehr mannichfaltig schattirten und gefleckten Mondscheibe dem Auge verschwinden und wieder sichtbar werden. Die Zwischenzeiten der correspondirenden Ein- und Austritte, zur Hälfte genommen, ergeben den Augenblick des Mittels der Mondfinsterniß, den man um so genauer wird bestimmen können, je größer die Anzahl der Beobachtungen ist.

Dreizehntes Capitel.

Bestimmung der geographischen Breite.

Bekannt mit dem Laufe und den Erscheinungen der Sonne und des Mondes, mit den verschiedenen Zeitarten und den Methoden ihrer Bestimmung, sind wir im Stande, die Frage zu beantworten: wie man mit Hülfe astronomischer Beobachtungen die Lage eines Punktes der Erdoberfläche mit äußerster Genauigkeit bestimmen könne? — eine Aufgabe, die sich begreiflich durch die alleinigen Hülfsmittel der practischen Geometrie nicht lösen läßt, so zweckmäßig dieselben auch mit astronomischen Operationen für die geographische Ortsbestimmung vereinigt werden können.

Die bei weitem leichtere Hälfte jenes Geschäfts besteht in der Bestimmung der geographischen Breite eines Orts oder seiner Bogenentfernung vom Aequator, da man zu ihrer Lösung sich nur auf die scheinbare tägliche Bewegung des Himmels berufen darf. Um den Zusammenhang zwischen der geographischen Breite und den am Himmel gebildeten Bögen zu erkennen, haben wir nur die, durch die Ebene des Meridians, erzeugten Durchschnittskreise beider Sphären zu betrachten. Ihre Entfernung von einander ist so groß, daß die Richtungen des Aequators und des Pols im Beobachtungspunkte (BA und BP, Fig. 17.) mit denen am Centrum der Erde (CA' und CP') parallel laufen, mithin ebenfalls einen rechten Winkel bilden. Der Erdhalbmesser (CB), bis zum Himmel verlängert, legt hier das Zenith des Beobachters fest, dessen Declination mit der geographischen Breite identisch ist ($ABZ = A'CZ$). Die Aufgabe, den Winkel zu finden, der diese Größe mißt, wird mithin erledigt, wenn wir die Entfernung des Zeniths von irgend einem festen Punkte der Himmelskugel durch Beobachtung gewinnen, dessen Lage gegen den Aequator durch gerade Aufsteigung und Abweichung gegeben ist, und daraus den Unterschied in den Richtungen (CA' und CZ) ableiten.

Unmittelbar würde die Aufgabe gelöst seyn, wenn wir zu unserer Beobachtung einen Punkt im Aequator selbst wählten (z. B. die Sonne zur Zeit der Aequinoctien) und dessen Abstand vom Zenith, ZBA, oder noch bequemer das Complement desselben, die Höhe ABH, beobachteten. Bezeichnet β die geographische Breite, h die Höhe des Gestirns im Aequator, so ist:

$$\beta = 90^\circ - h.$$

Auch findet sich der Werth von h mittelbar aus zwei Beobachtungen des Sonnenstandes zur Zeit ihrer größten, nördlichen und südlichen, Abweichung, d. h. an den Mittagen des 21. Junius und 21. Decembers. Die zwischen diese beiden Mittagshöhen in die Mitte fallende Höhe des Aequators ist ihrer halben Summe gleich. Denn bezeichnen wir jene durch h' und h'' , so ist:

$$h = h' + \frac{1}{2} (h'' - h') = \frac{1}{2} (h' + h''),$$

und das Complement der Aequatorhöhe oder die geographische Breite:

$$\beta = 90^\circ - \frac{1}{2} (h' + h'').$$

Aus Beobachtungen der größten und kleinsten Zenithdistanz (z'' und z') fanden wir auf demselben Wege den Ausbruch

$$\beta = \frac{1}{2} (z' + z'').$$

Doch ist hier die Breitenbestimmung, sofern sie auf diese Weise geschehen soll, nur in ihren Hauptzügen angedeutet, denn die Maxima und Minima der Sonnenhöhen oder Zenithdistanzen fallen im Allgemeinen nicht in das Solstitium, und müssen, wenn dasselbe nicht gerade im Mittage eintritt, durch solche, die mit Hülfe von Sonnentafeln aus der Beobachtung abgeleitet sind, ersetzt werden. Hierzu kommen noch die gewöhnlichen Correctionen mit Rücksicht auf den scheinbaren Sonnenhalbmesser, die Parallaxe und Refraction, welche im widersstreitenden Sinne an den Höhen und Zenithdistanzen angebracht werden müssen. Man sieht, daß bei dieser Bestimmungsmethode, die noch dazu die Voraussetzung enthält, daß das Maximum der südlichen Abweichung dem der nördlichen durchaus gleich sey, nicht die größte Genauigkeit des Resultats erwartet werden dürfe; ihr Werth wird aber am meisten durch den Umstand vermindert, daß man sie nur einmal jährlich anzuwenden Gelegenheit findet.

Einfacher erscheint die Bestimmung der geographischen Breite, wenn man sich zu ihr eines culminirenden Fixsterns bedient. Befände sich derselbe genau in der Richtung der Weltaxe, also im Pol der Himmelskugel, so hätten wir, indem wir den Abstand dieses Sterns vom Horizont oder die Polhöhe (TBP, Fig. 17.) mit Hülfe eines winkelmessenden Instruments beobachteten, die Aufgabe auf die einfachste Weise gelöst. Denn im Beobachtungspunkte treten die Richtungen des Poles und Zeniths mit denen des Aequators und Horizonts rechtwinklicht zusammen, wodurch hier drei Winkel entstehen, von denen die beiden äußeren die Differenz zwischen einem rechten und dem mittlern Winkel, also einander gleich sind ($ABZ = PBT$). Declination des Zeniths, geographische Breite und Polhöhe eines Orts der Erdoberfläche sind mithin gleichbedeutende Größen. In der That bedient man sich vorzugsweise dieses einfachen Verfahrens, die Entfernung eines Orts vom Aequator zu erfahren, jedoch mit der Modification, daß man die Polhöhe nicht unmit-

telbar erhält, sondern aus andern Beobachtungen ableitet, weil kein Fixstern uns den Punkt des Pols am Himmel bezeichnet. Der dem Nordpol zunächst stehende, unter dem Namen des Polarsterns bekannt (α im Sternbilde des kleinen Bären), ist mehr, als anderthalb Grade von ihm entfernt. Man benutzt daher, um die Polhöhe zu gewinnen, die Culmination der Sterne, indem man ihre Mittagshöhen, d. h. ihre Höhen beim Eintritt in die Ebene des Meridians, mißt. Dieß kann auf zwiefache Art geschehen, je nachdem man Sterne wählt, die fortwährend über dem Horizont bleiben, oder solche, welche auf- und untergehen.

Alle Sterne, die den Pol innerhalb eines, seiner Höhe gleichen Abstandes umkreisen, die sogenannten Circumpolarsterne, können für unser Auge nur im Glanze des Tages, nicht durch den Zwischentritt der Erdoberfläche verschwinden. Zu ihnen gehören alle diejenigen, deren Declination das Complement der Polhöhe übersteigt, daher man sie, wenn die Breite des Orts ungefähr bekannt ist, leicht aus einem Sternverzeichnisse kennen lernt. Augenscheinlich culminiren sie, dem Beobachter sichtbar, ober- und unterhalb des Pols, und seine Höhe, die zwischen die beiden beobachteten in die Mitte fällt, ist ihrer halben Summe gleich; denn wählen wir einen Stern, dessen Polardistanz = p ist, so ergeben sich für die Polhöhe β die beiden Werthe

$$\beta = h' + p$$

$$\beta = h'' - p$$

und durch deren Addition: $\beta = \frac{1}{2} (h' + h'')$.

Man pflegt zu dieser Bestimmungsart Sterne zu wählen, deren Polardistanz nicht zu groß ist, weil die Beobachtungen sehr niedriger Mittagshöhen bei den untern Culminationen durch den Einfluß der Strahlenbrechung zu unsicher und dadurch unbrauchbar werden. Ein Beispiel giebt uns die Bestimmung der geographischen Breite von Göttingen aus zwei, am 28. August 1820 auf der dortigen Sternwarte genommenen Mittagshöhen des Sterns μ im Sternbilde des großen Bären:

$$\text{Größte Mittagshöhe} = 81^{\circ} 39' 18'', 1$$

$$\text{— Refraction} = 8, 7$$

$$h = 81 \quad 39 \quad 9, 4$$

$$\text{Kleinste Mittagshöhe} = 21 \quad 26 \quad 53, 1$$

$$\text{— Refraction} = 28, 5$$

$$h' = 21 \quad 26 \quad 26, 6$$

$$h + h' = 103 \quad 5 \quad 34, 0$$

$$\text{Polhöhe} = \frac{1}{2} (h + h') = 51^{\circ} 32' 47''$$

Nicht minder wichtig, als diese, eben so genaue als einfache, Methode der Breitenbestimmung ist die, auf eine einzige Culmination gegründete, wozu ein jeder, über dem Horizont befindlicher Stern benutzt werden kann, und die man bei Circumpolarsternen ebenfalls anzuwenden Gelegenheit findet, wenn zufällige Umstände oder bedeckter Himmel die Beobachtung des Sterns in seiner zweiten Culmination vereiteln. Man verbindet nämlich die im Meridian beobachtete Zenithdistanz, oder deren Complement, die Mittagshöhe, mit der als bekannt vorausgesetzten Declination, und noch bequemer mit der Polardistanz des Sterns, wodurch man zu zwei verschiedenen Ausdrücken der Polhöhe geführt wird. Zählt man die Höhen vom Südpunkte und die Polardistanzen im entgegengesetzten Sinne, so ist (Fig. 17.):

$$H'S + SP' = 180^\circ - P'T'$$

$$\text{d. i. } h + \pi = 180^\circ - \beta. (a).$$

Wird hingegen die Mittagshöhe des Sterns S' vom Nordpunkt, und die Polardistanz in der Richtung vom Pole zu demselben gerechnet, so erhalten wir:

$$h' \pm \pi' = \beta (b).$$

Das obere Zeichen gilt den Circumpolarsternen bei ihrer untern Culmination; das untere entspricht den im nördlichen Quadranten nach dem Zenith hinzu gezählten Polardistanzen. Ein Beispiel der Anwendung dieses letzteren Ausdrucks giebt uns die Bestimmung der Polhöhe von Pera bei Constantinopel aus einer am 28. May 1767 dort beobachteten Mittagshöhe des Polarsterns $= 39^\circ 5' 22''$, dessen Polardistanz zu jener Zeit $= 1^\circ 55' 10''$ war.

$$\text{Beobachtete Mittagshöhe} = 39^\circ 5' 22''$$

$$\text{— Refraction} = 1 \ 10$$

$$\text{Verbesserte Höhe} = 39 \ 4 \ 12$$

$$+ \text{ Polardistanz} = 1 \ 56 \ 10$$

$$\text{Polhöhe} = 41 \ 0 \ 22$$

Stellt man die Beobachtung von Mittagshöhen oder Zenithdistanzen an der Sonne an, so gesellt sich zur Correction der Strahlenbrechung noch die des scheinbaren Halbmessers und der Höhenparallaxe. Außerdem muß, wenn der Beobachtungsort nicht in demselben Meridian liegt, für welchen die Ephemeriden, aus denen man die Declination der Sonne schöpft, berechnet worden, ein dem Längenunterschiede proportionaler Theil von der täglichen Declinations-Änderung additiv oder subtractiv mit derselben verbunden werden.

Werde z. B. am 2. Junius 1825 zu Killybeg in Irland die Mittagshöhe der Sonne, $= 67^\circ 50' 15''$, genommen, um aus ihr und der Abweichung die Polhöhe zu bestimmen, so

sucht man zuvor den Längenunterschied von diesem Orte und Berlin, der etwa 24° beträgt, und nimmt, weil die Sonne, um aus dem Meridian des einen Orts in den des andern zu gelangen, $\frac{24}{360}$ oder $\frac{1}{15}$ ihres täglichen Umlaufs beschreibt, den funfzehnten Theil der Declinationsänderung, die an jenem Tage $7' 38''$ beträgt: $\frac{1}{15} \cdot 7' 38'' = 30'', 5$. Diese Größe muß, weil die Sonne vor dem Sommersolstitium bei ihrem Fortschreiten nach einem westlicher liegenden Meridiane im Steigen begriffen ist, zu der Declination, welche die Tafeln angeben, addirt werden, wodurch wir dieselbe für den Meridian von Kilkenny näherungsweise $= 22^\circ 11' 49''$ und ihr Complement, die Polaristanz, $= 67^\circ 48' 11''$ finden. Aus diesen Datis berechnet sich die geographische Breite nach dem Ausdruck $\beta = 180^\circ - (h + \pi)$ folgendergestalt.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Beobachtete Mittagshöhe der Sonne} & = & 67^\circ 50' 15'' \\
 - \text{Refraction} & = & 23, 3 \\
 + \text{Höhenparallaxe} & = & 3, 2 \\
 + \text{Halbm. der Sonne} & = & 15 \ 47, 5 \\
 \hline
 \text{Wahre Höhe} & = & 67 \ 6 \ 29 \\
 + \text{Polaristanz} & = & 67 \ 48 \ 11 \\
 \hline
 - (h + \pi) & = & 135 \ 54 \ 40 \\
 + 180^\circ & = & 179 \ 59 \ 60 \\
 \hline
 \text{Polhöhe} & = & 54 \ 5 \ 20
 \end{array}$$

Ist man noch nicht mit dem Collimationsfehler — d. h. mit der Abweichung der auf dem Instrumente bezeichneten von der wahren Richtung des Horizonts — bekannt, durch dessen Addition oder Subtraction die unmittelbar gewonnenen Höhen oder Zenithdistanzen berichtigt werden müssen, so muß dasselbe in die umgekehrte Lage gebracht werden, um an einem Sterne im entgegengesetzten Quadranten ebenfalls eine Beobachtung zu verschaffen, deren Resultat von dem früher erhaltenen um das Doppelte des Collimationsfehlers abweichen wird.

So enthält z. B. die Mittagshöhe des Polarsterns, aus welcher oben die Polhöhe von Pera berechnet worden, den unbekannten Collimationsfehler des Instruments, der mithin auch auf den Werth der berechneten Größe übergegangen ist. Wählen wir, um das Resultat von ihm zu befreien, eine im südlichen Quadranten ebenfalls am 28. Mai 1767 unternommene Höhenbeobachtung des Arcturs, so findet sich die Breite folgendermaßen:

$$\begin{array}{rcl} \text{Beob. Mittagshöhe} & = & 69^\circ 21' 42'' \\ - \text{Refraction} & = & 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Wahre Höhe} & = & 69^\circ 21' 21'' \\ + \text{Polaristanz} & = & 69 \quad 35 \quad 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} - (h + \pi) & = & 138 \quad 56 \quad 25 \\ + 180^\circ & = & 179 \quad 59 \quad 60 \end{array}$$

$$\text{Breite} = 41 \quad 3 \quad 35$$

Die Differenz dieses und des oben erhaltenen Werthes beträgt $3' 13''$, mithin der Collimationsfehler des Instruments $1' 36'',5$ und die wahre Polhöhe von Pera $41^\circ 1' 58'',5$.

Zu einem sehr brauchbaren und vom Collimationsfehler (f) ganz unabhängigen Ausdrucke der Breite gelangt man durch Verbindung der beiden Formeln (a) und (b), indem man in ihrer Summe die Differenz der Höhen erhält, worin f und f einander aufheben:

$$a) \quad \beta = 180^\circ - h - \pi$$

$$b) \quad \beta = h' \pm \pi'$$

$$2\beta = 180^\circ - h + h' - \pi \pm \pi'$$

$$\text{folglich } \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}(h - h') - \frac{1}{2}(\pi \mp \pi') \dots (c).$$

Hier gilt das obere Zeichen von π' wiederum den im nördlichen Quadranten nach dem Nordpunkte, das untere hingegen den nach Süden oder dem Zenith gezählten Polaristanzen. Die Berechnung der geographischen Breite von Pera aus den oben angeführten Werthen von h , h' , π , π' , fällt nach dieser Formel folgendergestalt aus:

$$\begin{array}{rcl} \text{Wahre Höhe des Arcturs} & = & 69^\circ 21' 21'' \\ - \text{W. Höhe des Polarsterns} & = & 39 \quad 4 \quad 12 \end{array}$$

$$30 \quad 17 \quad 9$$

$$\frac{1}{2}(h - h') = 15 \quad 8 \quad 34,5$$

$$\text{Polaristanz des Arcturs} = 69 \quad 35 \quad 4$$

$$- \text{Polardist. des Polarsterns} = 1 \quad 56 \quad 10$$

$$67 \quad 38 \quad 54$$

$$\frac{1}{2}(\pi - \pi') = 33 \quad 49 \quad 27$$

$$- \frac{1}{2}(h - h') - \frac{1}{2}(\pi - \pi') = 48 \quad 58 \quad 1,5$$

$$+ 90^\circ = 89 \quad 59 \quad 60,0$$

$$\text{Polhöhe} = 41 \quad 1 \quad 58,5$$

Der obige, für die Bestimmung der geographischen Breite gegebene Ausdruck (c) ist dadurch von besonderer practischer Brauchbarkeit, daß man mit Hülfe eines Fernrohrs, dem man nach seiner Umdrehung in der Ebene des Meridians eine gleiche Lage gegen den Horizont zu geben im Stande ist, zwei wenig verschiedene Mittagshöhen, die eine im nördlichen, die andere im südlichen Quadranten beobachtet, und nicht deren absoluten Werth, sondern ihren Unterschied ($h - h'$) durch die Drehung einer Mikrometerschraube zu bestimmen sucht; eine Methode, die nach den Astronomen Horrebow und Hell, die sie zuerst anwandten und ausführten, benannt zu werden pflegt.

An die bisher erwähnten Bestimmungsarten der geographischen Breite, die sämmtlich Beobachtungen, welche im Meridian unmittelbar angestellt worden, voraussetzen, schließt sich zunächst die Methode, aus Sonnenhöhen, die in der Nähe des Mittags genommen werden — sogenannten Circummeridianhöhen — die Polhöhe zu bestimmen. Am einfachsten wählt man unter einer Reihe solcher Höhen, die in kurzen Intervallen beobachtet worden, die größte, um sie als Mittagshöhe anzunehmen, da der hiebei begangene Irrthum nur äußerst gering seyn kann. Correspondiren einige der Höhen mit einander, so läßt sich, wenn man die Momente der Beobachtung an einer Uhr bemerkt, der Augenblick des höchsten Sonnenstandes und die ihm entsprechende Mittagshöhe um so sicherer folgern. Um die wahre Mittagshöhe zu erhalten, wird hier freilich noch auf die früher erwähnte Correction des unmittelbar gewonnenen, unverbesserten Mittags Rücksicht genommen werden müssen, indem wir einen, dieser Correction proportionalen Theil der täglichen Declinationsänderung der Sonne, je nachdem sie im Steigen oder Sinken begriffen ist, von der beobachteten Mittagshöhe abziehen oder zu ihr addiren; bei Beobachtungen, die in der Nähe der Solstitien angestellt sind, wo die Declination der Sonne sich nur sehr langsam ändert, darf man allenfalls eine solche Correction vernachlässigen. Als Beispiel der Anwendung dieser Methode mag die Bestimmung der Breite von München aus nachstehenden, am 26. Junius 1804 dort beobachteten Circummeridianhöhen dienen, deren Momente nach einer, mittlere Zeit gebenden, Uhr bemerkt worden sind.

Nr.	Zeit der Beob.	C. M. Höhen.
1	23 U. 53' 19"	64° 59' 24", 6
2	55 31	59' 26", 1
3	57 53	59 27, 0
4	0 0 19	59 27, 1
5	2 34	59 27, 6
6	4 30	59 27, 6
7	6 40	59 27, 4
8	8 59	59 27, 2
9	10 57	59 27, 0

Das Maximum der Höhe in den Beobachtungen 5 und 6 darf als wahre Mittagshöhe angenommen werden, und die Polhöhe von München berechnet sich hiernach auf folgende Weise:

Mittagsh. des untern S. Randes	=	64° 59' 27",6
— Refraction	=	26, 6
		<hr/>
		64 59 1, 0
+ Halbmesser der Sonne	=	15 46, 9
+ Höhenparallaxe	=	3, 5
		<hr/>
Wahre Höhe des S. Mittelpunkts	=	65 14 51, 4
+ Polaristanz der Sonne	=	66 36 39, 4
		<hr/>
— (h + π)	=	131 51 30, 8
+ 180°	=	179 59 60, 0
		<hr/>
Breite	=	48 8 29, 2

Beobachtungen von Fixsternen, die im Meridian angestellt worden sind, lassen sich auf eine noch einfachere Art zur Bestimmung der geographischen Breite benutzen, wenn wir die Lage einer großen Anzahl von Punkten der Erdoberfläche — etwa bei der trigonometrischen Aufnahme eines Landes — auf den Aequator zu beziehen haben. Denn es wird hier hinlänglich seyn, die Breitenunterschiede der Derter in Beziehung auf einen einzigen unter ihnen auszumitteln, dessen Polhöhe mit großer Schärfe bestimmt worden ist, um sehr schnell durch Addition oder Subtraction jener Größen ihre geographische Breite ebenfalls zu gewinnen. Die Breitenunterschiede sind aber der Summe oder Differenz der Zenithdistanzen eines an beiden Orten im Meridian beobachteten Fixsterns gleich. Sey B (Fig. 18.) der nördlicher, B' der südlicher liegende Ort, und falle der Stern zwischen ihre Scheitelpunkte, so ist, weil BS und B'S' parallel laufen, die Summe der Zenithdistanzen $ZBS + Z'B'S' = BCB'$, d. i.

$$z + z' = \beta - \beta';$$

oder wenn man statt der Zenithdistanzen die Höhen substituiren will:

$$180^\circ - (h + h') = \beta - \beta'.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auf alle Fälle anwenden, wenn man beachtet, daß z und h im südlichen, z' und h' im nördlichen Quadranten der Beobachtungspunkte genommen sind. Fällt der Fixstern über Z oder Z' hinaus, so wird eine der Zenithdistanzen negativ, und ihr Unterschied der Breitendifferenz gleich; dasselbe gilt alsdann von den Höhen, denn $z - z'$ ist $= (90^\circ - h) - (90^\circ - h') = h' - h$. Wir erhalten dadurch, wenn dasselbe winkelmessende

Instrument

Instrument an allen Beobachtungspunkten angewandt wird, vom Collimationsfehler unabhängige Resultate; doch kann man auch durch die Beobachtung eines, zwischen beide Scheitelpunkte fallenden Sterns zur Anwendung des ersten Ausdrucks veranlaßt werden, und dieß um so eher, wenn man zur Messung der Zenithdistanzen sich des Zenithsector's bedient, eines Instruments, welches mit einem beträchtlichen Radius construirt ist und nur einen geringen Grädbogen umfaßt, damit die Beobachtung so viel als möglich von den Fehlern der Theilung und dem Einflusse der Refraction unabhängig gemacht werde.

Die bisherige specielle Annahme über den Stand des beobachteten Gestirns in der Mittagsfläche erleichterte die Breitenbestimmung im hohen Grade, indem wir nur zu einer Vergleichung von Bögen geführt wurden, die einem einzigen größten Kreise angehörten. Fällt hingegen der Stern nicht mit dem Pole und dem Zenith in einen Kreis zusammen, so entsteht durch die Verbindung dieser drei Punkte ein sphärisches Dreieck, welches für die Bestimmung der Polhöhe die Anwendung trigonometrischer Formeln erfordert.

Die Seite ZP im Dreieck ZPS (Fig. 2.) bestimmen wir aus den andern beiden Seiten und dem Stundenwinkel SPZ nach dem Ausdruck:

$$\cos. (ZP - \varphi) = \frac{\cos. ZS. \cos. \varphi}{\cos. PS}, \text{ wenn } \operatorname{tg}.\varphi = \operatorname{tg}.PS. \cos. ZPS,$$

d. i. wenn durch γ der Stundenwinkel, durch δ die Declination und durch h die Höhe des beobachteten Gestirns angedeutet wird:

$$\sin. (\beta + \varphi) = \frac{\sin. h. \cos. \varphi}{\sin. \delta}, \text{ wenn } \operatorname{tg}.\varphi = \cot. \delta. \cos. \gamma.$$

Den Werth von δ enthalten die Ephemeriden, wenn wir die Sonne zur Beobachtung wählen, für einen bestimmten Normal-Meridian berechnet; daraus leitet man — durch Addition oder Subtraction eines, dem Bogen, um welchen die Sonne im Augenblicke der Beobachtung von jenem Meridian entfernt ist, proportionalen Theils der täglichen Declinationsänderung — die Abweichung für Zeit und Ort der Beobachtung ab. Hierzu ist nun aber außer der Kenntniß des ungefähren Längengunterschiedes beider Meridiane die des Stundenwinkels nöthig, welcher den Abstand der Sonne vom Mittagskreise des Beobachtungsortes mißt. Diesen Stundenwinkel, der ohnehin als bestimmende Größe in dem obigen Ausdrucke der Polhöhe auftritt, zu erhalten, ist augenscheinlich die schwierigste Bedingung der Aufgabe, da sie eine genaue Zeitbestimmung fordert, wodurch die Methode in manchen Fällen (z. B. für Reisende) unbrauchbar zu werden scheint. Aber wenn der Beobachter nicht etwa mit Hülfe einer gut regulirten Uhr die Zeit eines bestimmten Meridians bei sich führt, so setzen ihn correspondirende Sonnenhöhen in den Stand, den Augenblick des wahren Mit-

tags für seinen Standpunkt zu bestimmen und durch Vergleichung desselben mit dem Moment der genommenen Höhe den Stundenwinkel zu finden. Folgendes Beispiel wird dieß näher erläutern.

Am 24. August 1801 wurden auf dem Inselfberge bei Gotha correspondirende Höhen der Sonne genommen, aus welchen sich die Uhrangabe 24 U. 1' 58",5 für den Augenblick des unverbesserten Mittags in völliger Uebereinstimmung ergab. Die Sonnenhöhe von $43^{\circ} 28'$, welche hier der Berechnung zum Grunde gelegt werden mag, wurde Vormittags um 22 U. 2' 34", Nachmittags um 2 U. 2' 23" beobachtet, woraus sich die halbe Zwischenzeit, welche vorläufig als Stundenwinkel angesehen werden kann, zu 1 St. 59' 54",5 ergibt. Setzt man die Längendifferenz der Meridiane von Berlin und dem Inselfberge = $11^{\circ} 30'$ in Zeit, so findet sich aus dem astronomischen Jahrbuche die Declination der Sonne für den Moment der vormittägigen Beobachtung = $11^{\circ} 15' 6''$. Ferner erhalten wir (nach Anl. VIII.) die, der Länge der Sonne = 230° und der beiläufig zu 50° geschätzten Polhöhe entsprechende, Mittagsverbesserung $\text{tg. } x - \cos. y. \text{tg. } \beta = + 15'',5$. Die Uhrangabe des wahren Mittags wird durch die Addition dieses Werthes = 24 U. 2' 13", und der vormittägige Stundenwinkel, wenn wir die Zeit der ersten Beobachtung hiervon abziehen, = 1 St. 59' 39" oder $29^{\circ} 54' 45''$. Aus diesen Werthen berechnet sich die Polhöhe des Inselfbergs folgendergestalt:

$$\begin{aligned}
 \log. \cot. \delta &= \text{l. cot. } 11^{\circ} 15' 6'' = 10.70127 \\
 + \log. \cos. \gamma &= \text{l. cos. } 29^{\circ} 54' 45'' = 9.93792 \\
 \hline
 \log. \text{tang. } \varphi &= 10.63919 \\
 \text{folglich } \varphi &= 77^{\circ} 4' 25''. \\
 \log. \sin. h &= \text{l. sin. } 43^{\circ} 28' = 9.83754 \\
 + \log. \cos. \varphi &= \text{l. cos. } 77^{\circ} 4' 25'' = 9.34566 \\
 \hline
 &19.18720 \\
 - \log. \sin. \delta &= \text{l. sin. } 11^{\circ} 15' 6'' = 9.29030 \\
 \hline
 \log. \sin. (\beta + \varphi) &= 9.89690
 \end{aligned}$$

Der diesem Sinus entsprechende stumpfe Winkel, welcher hier gewählt werden muß, da $\varphi = 77^{\circ} 4' 25''$ von ihm abgezogen werden soll, ist = $127^{\circ} 56' 12''$, und die gesuchte Polhöhe $\beta = 50^{\circ} 51' 47''$.

Unabhängig von der Kenntniß der Zeit und der vorläufigen Berechnung des Stundenwinkels wird die Bestimmung der Polhöhe alsdann, wenn wir ihrer Berechnung die Höhenbeobachtungen zweier Sterne und deren, aus Sternenverzeichnissen geschöpfte Declinationen und Rectascensionen

zum Grunde legen. Hier erscheint die geographische Breite als eine Function von sechs Größen ($h, h', \delta, \delta', \alpha, \alpha'$), zu denen sich noch eine siebente — die Zwischenzeit der Beobachtungen — gesellt, sobald dieselben nicht im gleichen Momente von zwei verschiedenen Beobachtern angestellt worden sind. Wäre das Letztere der Fall, so würde der am Pol durch die Declinationskreise beider Sterne gemessene Winkel ($\angle SPS' = \gamma - \gamma'$, Fig. 19.) durch den Unterschied der Rectascensionen ($\alpha' - \alpha$) ausgedrückt werden; aber jene Bedingung, die in den meisten Fällen die Aufgabe unbrauchbar machen würde, ist offenbar überflüssig, da die Uhrzeiten der verschiedenen Beobachtungsmomente nur von einander abgezogen zu werden brauchen, um die Größe 15 ($t' - t$) zu ergeben, welche von der Rectascensionsdifferenz noch abgezogen werden muß, wenn man den Winkel $\angle SPS'$ erhalten will:

$$\gamma - \gamma' = (\alpha' - \alpha) - 15 (t' - t).$$

Die Auflösung der Aufgabe theilt sich in die einzelnen Betrachtungen der drei sphärischen Dreiecke PSS' , ZSS' und ZPS , durch welche wir allmählich zur Ausmittlung der Polhöhe fortschreiten. Aus den gegebenen Seiten PS und PS' nebst dem eingeschlossenen Winkel findet man die Seite SS' in Function der Declinationen und Rectascensionen der Sterne; eben so den Winkel $\angle PSS'$. Im zweiten Dreieck ZSS' , dessen drei Seiten nunmehr bekannt sind, muß der Winkel in S berechnet und von dem eben genannten abgezogen werden. Dann sind im dritten, PZS , die Seiten ZS und PS nebst dem eingeschlossenen Winkel bekannt, woraus die unbekannte Seite ZP , das Complement der Polhöhe endlich gefunden wird.

Die Umständlichkeit des hier angedeuteten Verfahrens, welche auf analytischem Wege allerdings zum Theil wird gehoben werden können, vermindert den Werth der Aufgabe nicht, der sowohl in ihrer Allgemeinheit, als in dem Umstande begründet ist, daß man bei den Beobachtungen durchaus keiner regulirten Uhr bedarf, indem hier nur der Zeitunterschied ihrer Momente in Betracht gezogen wird. Eine specielle Anwendung ist die von Douwes eingeführte und nach ihm benannte Methode, zwei verschiedene Sonnenhöhen, von denen die eine nahe am Meridian genommen wird, nebst ihren Uhrzeiten zu beobachten, und daraus die Polhöhe abzuleiten. Die Aufgabe vereinfacht sich hier, indem $\delta = \delta'$ wird, und der Werth von $\gamma - \gamma'$ sich auf 15 ($t' - t$) beschränkt, wobei jedoch die Rectascensionsänderung der Sonne eine Correction nöthig macht, wenn die Uhr nach Sternzeit geht.

Der allgemeine Ausdruck der Relation unter den drei Seiten und dem Stundenwinkel:

$$\cos. ZS = \cos. PZ. \cos. PS + \sin. PZ. \sin. PS. \cos. ZPS$$

giebt für die beiden sphärischen Dreiecke (Fig. 19.) nach Substitution der einfacheren Bezeichnung:

$$(1) \sin. h' = \sin. \beta. \sin. \delta + \cos. \beta. \cos. \delta. \cos. \gamma'$$

$$(2) \sin. h = \sin. \beta. \sin. \delta + \cos. \beta. \cos. \delta. \cos. \gamma$$

$$\text{folglich } \sin. h' - \sin. h = \cos. \beta. \cos. \delta. (\cos. \gamma' - \cos. \gamma)$$

oder in einer für die Rechnung bequemerer Gestalt:

$$(3) 2 \cos. \frac{1}{2} (h' + h). \sin. \frac{1}{2} (h' - h) = 2 \cos. \beta. \cos. \delta. \sin. \frac{1}{2} (\gamma + \gamma'). \sin. \frac{1}{2} (\gamma - \gamma').$$

Hieraus ergibt sich:

$$\text{I. } \sin. \frac{1}{2} (\gamma + \gamma') = \frac{\cos. \frac{1}{2} (h' + h). \sin. \frac{1}{2} (h' - h)}{\cos. \beta. \cos. \delta. \sin. \frac{1}{2} (\gamma - \gamma')}.$$

Nehmen wir, um einen Näherungswerth des Stundenwinkels γ' zu erhalten, die geographische Breite vorläufig nach Schätzung an, so besteht das zweite Glied dieser Gleichung aus gegebenen Größen, und wir berechnen durch sie die halbe Summe der Stundenwinkel. Mit dieser die, in dem Zeitunterschiede gegebene, halbe Differenz derselben verbindend, findet man

$$\gamma' = \frac{1}{2} (\gamma + \gamma') - \frac{1}{2} (\gamma - \gamma').$$

Fielen aber nicht beide Beobachtungen auf dieselbe Seite des Meridians, so würde im Gegentheil die Summe der Stundenwinkel gegeben und ihre Differenz auszumitteln seyn; wir hätten alsdann der Gleichung (3) folgende Gestalt zu geben:

$$\text{II. } \sin. \frac{1}{2} (\gamma - \gamma') = \frac{\cos. \frac{1}{2} (h + h'). \sin. \frac{1}{2} (h - h')}{\cos. \beta. \cos. \delta. \sin. \frac{1}{2} (\gamma + \gamma')}.$$

Den hieraus berechneten Näherungswerth des Winkels $\frac{1}{2} (\gamma - \gamma')$ mit der gegebenen halben Summe der Stundenwinkel verbindend, findet man, wie oben $\gamma' = \frac{1}{2} (\gamma + \gamma') - \frac{1}{2} (\gamma - \gamma')$. Wenn man daher ungefähr zur Zeit des Mittags die Höhe der Sonne beobachtet hat, um diese Beobachtung mit einer vormittägigen oder nachmittägigen zusammen zu stellen, so bleibt die Berechnungsart des Stundenwinkels γ' ganz dieselbe, die Höhe möge auf der einen oder auf der andern Seite des Mittagskreises genommen seyn, so daß hierin immer eine Ungewißheit obwalten mag.

Die Gleichung (1) kann nun ferner, wenn man $\cos. \gamma' = 1 - 2 (\sin. \frac{1}{2} \gamma')^2$ setzt, unter folgende Gestalt gebracht werden:

$$\begin{aligned} \sin. h' &= \sin. \beta. \sin. \delta + \cos. \beta. \cos. \delta - 2 \cos. \beta. \cos. \delta. (\sin. \frac{1}{2} \gamma')^2 \\ &= \cos. (\beta - \delta) - 2 \cos. \beta. \cos. \delta. (\sin. \frac{1}{2} \gamma')^2. \end{aligned}$$

Es ist aber der Abstand der Sonne vom Zenith im Meridian (nach Fig. 17.) $ZS = A'Z - A'S$, d. i. $\beta - \delta$, ein Ausdruck, der auch für südliche Abweichungen gültig bleibt, wenn wir die-

selben als negativ ansehen; folglich wird die vorstehende Gleichung, wenn die wahre Mittagshöhe der Sonne ($90^\circ - ZS = 90^\circ - \beta + \delta$) durch H angedeutet wird:

$$\sin. H = \sin. h' + 2 \cos. \beta. \cos. \delta. (\sin. \frac{1}{2} \gamma')^2,$$

und wenn wir, um diesen Ausdruck für die Berechnung mit Logarithmen brauchbar zu machen, das letzte Glied $= \sin. M$ setzen:

$$\text{III. } \sin. H = \sin. h' + \sin. M = 2 \sin. \frac{1}{2} (h' + M) \cos. \frac{1}{2} (h' - M).$$

Je näher dem Meridian die Höhe h' genommen ist, um so weniger wird $\sin. h'$ von $\sin. H$ abweichen, und eine Fehlerhaftigkeit von mehreren Minuten in dem präsumirten Werthe der Polhöhe, welcher nebst dem von ihm bestimmten Stundenwinkel γ' in dem letzten Gliede ($\sin. M$) enthalten ist, kann in dieser an sich äußerst kleinen Größe das Resultat nur sehr unbedeutend afficiren. Man erhält also unter jener Voraussetzung, nachdem der Stundenwinkel nach I. oder II. berechnet worden ist, aus III. den Werth der wahren Mittagshöhe, deren Verbindung mit der Declination endlich die gesuchte Polhöhe ergibt. Sollte der gefundene von dem in der Rechnung gebrauchten Werthe der Breite auffallend abweichen, so wird man dieselbe, um ein genaueres Resultat zu erhalten, wiederholen müssen. Von der Declinationsänderung wird dadurch Rechnung getragen, daß man die Abweichung für den, zwischen beide Beobachtungen in die Mitte fallenden, Moment als Werth von δ ansetzt.

Eine Anwendung der hier entwickelten Methode möge uns die Bestimmung der geographischen Breite von Cassel in Irland, aus zwei am 29. Julius 1802 dort genommenen Sonnenhöhen und der beobachteten Zwischenzeit geben. Die Data der Beobachtung sind:

Zeitangaben der Uhr	Wahre Höhen des S. Mittelpunkts
$t' = 0 \text{ U. } 8' 7''$	$h' = 56^\circ 19' 54''$
$t = 4 \text{ U. } 25' 10''$	$h = 28^\circ 12' 13''$

folglich $\gamma - \gamma' = 15 (t - t') = 4 \text{ U. } 17' 3''$ oder $64^\circ 15' 45''$; die hiernach berechnete Declination ist $= 18^\circ 52' 34''$; der vorläufige Werth der Polhöhe endlich werde zu $52^\circ 20'$ angenommen.

$$\log. \cos. \frac{1}{2}(h' + h) = \log. \cos. 42^\circ 16' 3''/5 = 9.86924$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2}(h' - h) = \log. \sin. 14^\circ 3' 50''/5 = 9.38562$$

$$19.25486$$

$$\log. \cos. \beta = \log. \cos. 52^\circ 20' = 9.78609$$

$$+ \log. \cos. \delta = \log. \cos. 18^\circ 52' 34'' = 9.97597$$

$$+ \log. \sin. \frac{1}{2}(\gamma - \gamma') = \log. \sin. 32^\circ 7' 52''/5 = 9.72579$$

$$9.48785$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2}(\gamma + \gamma') = 9.76701$$

$$\text{folglich } \frac{1}{2}(\gamma + \gamma') = 35^\circ 47' 23''$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - \gamma') = 32^\circ 7' 52''$$

$$\gamma' = 3^\circ 39' 31''$$

$$\frac{1}{2}\gamma' = 1^\circ 49' 45''/5$$

$$\log. 2 = 0.30103$$

$$+ \log. \cos. \beta = \log. \cos. 52^\circ 20' = 9.78609$$

$$+ \log. \cos. \delta = \log. \cos. 18^\circ 52' 34'' = 9.97597$$

$$+ \log. (\sin. \frac{1}{2}\gamma')^2 = 2 \log. \sin. 1^\circ 49' 45''/5 = 17.00818$$

$$\log. \sin. M = 7.07127$$

$$M = 0^\circ 4' 3''$$

$$\log. 2 = 0.30103$$

$$+ \log. \sin. \frac{1}{2}(h' + M) = \log. \sin. 28^\circ 11' 58''/5 = 9.67444$$

$$+ \log. \cos. \frac{1}{2}(h' - M) = \log. \cos. 28^\circ 7' 55''/5 = 9.94539$$

$$\log. \sin. H = 9.92086$$

$$\text{folglich } H = 56^\circ 27' 3''$$

Es ist aber, wie wir oben sahen, $H = 90^\circ - \beta + \delta$, mithin $\beta = 90^\circ + \delta - H$, d. i. nach Substitution der Werthe von H und δ , Polhöhe von Cassel = $52^\circ 25' 31''$.

Bei näherer Ansicht der in diesem Capitel mitgetheilten Bestimmungsarten der geographischen Breite, an welche sich noch einige andere minder gebräuchliche schließen, wird man bald erkennen, daß die größte Leichtigkeit und Sicherheit der Bestimmung durch solche Instrumente erreicht wird, die in der Mittagssebene des Beobachters aufgestellt sind, wodurch diejenigen Methoden, welche diese Bedingung enthalten, für die Festlegung von Punkten des festen Landes vorzüglich geeignet erschei-

nen: daß hingegen diejenigen Bestimmungsarten, welche sich auf Beobachtungen gründen, die außer dem Meridian angestellt sind, einen für die Bedürfnisse der menschlichen Gesellschaft weit größeren Werth besitzen, indem sie dem Seefahrer, der auf den Gebrauch des Spiegelfertanten beschränkt ist, das einzige Mittel an die Hand geben, die geographische Breite zu bestimmen, in welcher sich sein Schiff befindet. Aber auch für die Bestimmung von Punkten des festen Landes sind diese letzteren Methoden von einem ausgebreiteten Nutzen und einer allgemeineren Anwendbarkeit, als die zuerst erwähnten, weil sie sowohl geringere und minder kostbare Hülfsmittel, als auch weniger mühsame Vorrichtungen, und aus diesem Grunde keinen großen Zeitaufwand erfordern.

Vierzehntes Capitel.

Bestimmung der geographischen Länge.

So wie die Umdrehung der Erde uns Veranlassung gab, auf den, durch sie erzeugten, Kreis des Aequators einen jeden Punkt der Erdoberfläche vermöge astronomischer Beobachtungen zu beziehen, erscheint sie uns auch, wie wir schon früher erwähnt haben, als Quelle der geographischen Längenbestimmung dadurch, daß wir Zeitangaben von verschiedenen Orten, die sich auf die Culminationen eines bestimmten Punktes am Himmel beziehen, mit einander vergleichen, um aus ihrem Unterschiede auf den Winkel zu schließen, welchen die Meridiane der Beobachtungspunkte am irdischen Pole bilden. Von der Geschwindigkeit, mit welcher jener Punkt sich scheinbar von einem Meridian zum andern fortbewegt, hängt offenbar die größere oder geringere Sicherheit der aus Zeitbeobachtungen geschlossenen Bestimmungen ab; denn angenommen, daß wir mit völliger Gewißheit die Zeit nur bis auf eine Secunde genau erhalten können, wird man, wenn der obige Punkt vier Zeitminuten gebraucht, um einen Grad seines Tagebogens zu beschreiben, in einer Zeitsecunde um 15 Bogensekunden fehlen, während bei einer 15 mal langsameren Umdrehung die Eintheilung der täglichen Umlaufzeit in Secunden mit derjenigen des Tagebogens völlig correspondiren, und die Unsicherheit der Bestimmung nur eine Bogensekunde umfassen würde. Die Beobachtung hat uns jene erstere Geschwindigkeit in der scheinbaren täglichen Bewegung der Sonne oder Fixsterne kennen gelehrt, und wenn wir auch die Möglichkeit einer genaueren Bestimmung der Zeit, etwa bis auf Zehnthelle einer Secunde, annehmen, so bleibt unter der Voraussetzung einer gleichen Genauigkeit

in der Bestimmung der Bogensekunden, welche in der That durch die neuesten Instrumente erreicht werden kann, das Verhältniß der Unsicherheit einer Längen- zu einer Breitenbestimmung, wie 15 : 1.

Welche von den drei uns bekannten Zeitarten wir zur Auffindung des Längenunterschiedes zweier Meridiane wählen, erscheint vollkommen gleichgültig, da die Proportionalität zwischen Zeit- und Kreiseintheilung von der Dauer des Tages unabhängig ist. Möge dieser durch zwei auf einander folgende Culminationen des Aequinoctialpunkts, der wahren, oder einer eingebildeten Sonne bestimmt werden, immer hat die Erde in Beziehung auf diesen Punkt, sobald er aufs Neue im Meridian erscheint, eine ganze Umdrehung vollendet, d. h. es entsprechen in jedem Falle 360° eines Parallelkreises oder des Aequators einem Tage von 24 Stunden, mögen diese Stunden als Sternzeit, wahre oder mittlere Zeit gegeben seyn. Doch darf man begreiflich, um den Mittagsunterschied zweier Derter zu bestimmen, nur gleichartige Zeitangaben (und nicht etwa Sternzeit mit mittlerer Zeit) in Vergleich stellen, die in demselben absoluten Augenblicke unter beiden Meridianen beobachtet worden sind.

Wie die erste Forderung der Längenbestimmung, die Berichtigung der Uhr für den Ort der Beobachtung, befriedigt werden könne, haben wir an einem früheren Orte gesehen, wo von den verschiedenen Methoden der Zeitbestimmung die Rede war. Es bleibt uns aber noch die weit schwierigere zu lösende Aufgabe: für einen bestimmten, an der Uhr beobachteten, Moment die Uhrzeit desjenigen Orts in Erfahrung zu bringen, auf dessen Meridian der Längenabstand des Beobachtungspunktes bezogen werden soll.

Das einfachste Mittel, dieser Forderung zu genügen, erkennen wir in einer tragbaren astronomischen Uhr (Chronometer, Seeuhr, Timekeeper), welche einmal nach einem bestimmten Meridiane regulirt, dem Beobachter — wohin er sich auch begeben möge — die Zeit jenes Normalmeridians aufbewahrt, so daß er sich jeden Augenblick im Besitze der beiden Zeitangaben befindet, deren Differenz ihm die Länge seines jedesmaligen Standpunktes angiebt. Es bedarf hier keiner zweiten Uhr, um an derselben die Zeit zu bestimmen, sondern man benutzt zu dieser Absicht zugleich den Chronometer, indem man durch correspondirende Sonnenhöhen seine Zeigerstellung im Augenblicke des wahren Mittags ausmittelt. Auf diese Weise erhält man den Längenunterschied der beiden Sternwarten zu Seeberg und Eilienthal aus einer am 17. September 1800 auf letzterer angestellten Vergleichung der dortigen Zeitangabe von 9 U. 47' 54".4 mit derjenigen des Chronometers = 9 U. 55' 15".1 zu 7' 20".7 in Zeit, welcher abgezogen von der Längendifferenz zwischen Seeberg und Paris, = 33' 35", diejenige zwischen Eilienthal und Paris zu 26' 14".3 oder $6^\circ 33' 34".5$ der

der Kreiseintheilung ergiebt. Zu diesem Resultat müssen noch 20° addirt werden, wenn die Länge von Vienthal, wie es gewöhnlich geschieht, auf einen um 20° westlich von der Pariser Sternwarte liegenden, die Insel Ferro durchschneidenden, Meridian bezogen werden soll.

Diese Bestimmungsart der geographischen Länge, so einfach sie auch in der Idee und so zweckmäßig namentlich ihre Anwendung zur See erscheint, enthält indessen eine Forderung, welche die practische Mechanik nur mit der größten Anstrengung und dennoch nie vollkommen zu befriedigen vermag, so daß man kaum hoffen darf, gute Chronometer je zu verbreiteten Werkzeugen werden zu sehen. Aber nicht allein ihre Seltenheit und Kostbarkeit, sondern auch die Erfahrung, daß ihr Gang durch den Einfluß von Erschütterungen, Wechsel der Temperatur u. s. w. auf die Dauer kleinen Veränderungen unterworfen ist, wodurch die Zeitangaben ziemlich fehlerhaft werden können, lassen oft andere Methoden der Längenbestimmung, mögen dieselben auch mit größerer Beschwerlichkeit der Beobachtung und Rechnung verknüpft seyn, vortheilhafter erscheinen.

Unter ihnen gründen sich die meisten auf gleichzeitige an verschiedenen Orten angestellte Beobachtungen einer und derselben momentanen Erscheinung, indem man die im Beobachtungsmoment bemerkten Zeitangaben der Uhren späterhin mit einander vergleicht. Erscheinungen dieser Art erhält man künstlich durch Feuersignale, welche auf hohen Punkten während der Dunkelheit der Nacht gegeben, von beiden Orten, deren Längendifferenz ausgemittelt werden soll, wahrgenommen werden können. Die Forderung eines raschen Verschwindens der Erscheinung wird am besten durch einfache Verbrennung von Schießpulver oder durch das Steigen von Raketen bewirkt, wobei man den Augenblick des Zerplagens bemerkt. Doch ist die Anwendung dieses oft äußerst brauchbaren Verfahrens sehr beschränkt, weil dazu eine geringe Entfernung der Beobachtungspunkte und außerdem eine günstige Beschaffenheit des zwischenliegenden Terrains erfordert wird. Dieß ergiebt sich aus den früheren Betrachtungen über die Weite der Aussicht (im 5. Cap.), nach denen man, sobald von der Unebenheit des Bodens (wie z. B. bei der Meeresfläche) abstrahirt werden darf, im Voraus zu beurtheilen im Stande seyn wird, ob ein an einem zwischenliegenden Punkte gegebenes Signal an beiden Orten sichtbar seyn werde, wenn anders die ungefähre Entfernung derselben und ihre Höhen über der Meeresoberfläche bekannt sind.

Ein Beispiel der vorstehenden Methode giebt uns die Bestimmung des Längenunterschiedes von Seeburg, Magdeburg, Braunschweig und dem Petersberge bei Halle aus mehreren, am 15. August 1803 an diesen Orten beobachteten irdischen Signalen, welche auf dem Brocken gegeben wurden. Die in mittlerer Zeit ausgedrückten, an den verschiedenen Punkten beobachteten Momente sind folgende:

Seeberg	Braunschweig	Magdeburg	Petersberg
9 U. 1' 26",3	9 U. 0' 40",9	9 U. 5' 5",0	9 U. 6' 18",8
10 27,1	9 40,9	15 5,0	15 22,0
20 26,5	19 41,0	25 4,9	25 21,2
30 26,1	29 41,1	35 4,8	35 20,3
40 26,4	39 41,5	45 5,3	44 21,4
50 26,7	49 41,8	55 5,0	— —

Hieraus ergeben sich, wenn wir aus den einzeln berechneten Resultaten das arithmetische Mittel nehmen, folgende Längenabstände, in Zeit ausgedrückt, wobei die Richtung nach Osten als positiv angenommen wird:

	Von Seeberg	Von Paris
Seeberg	0' 0",00	33' 35",00
Braunschweig	— 0' 45,32	32 49,68
Magdeburg	+ 3 38,51	37 13,51
Petersberg	+ 4 54,26	38 29,26

Unter den natürlichen Erscheinungen, die vermöge ihrer momentanen Existenz zur Bestimmung der Länge geeignet sind, wählt man vorzüglich die Hauptmomente in den Verfinsterungen des Mondes und der Jupiterstrabanten *). Bei den letzteren beobachtet man sowohl die Eintritte in den Schatten des Planeten, als ihre Austritte aus demselben — die Immersion und Emersion — um aus diesen, einzeln verglichenen, Beobachtungen einen mittlern Werth des Längenunterschiedes zu erhalten. Bei'm Monde hingegen, dessen Oberfläche eine Menge eigenthümlich benannter Flecken darbietet, werden außer den Momenten der Immersion und Emersion, auch die der einzelnen Flecken bemerkt, um mehrere Data für ein mittleres und gewisseres Resultat zu erhalten. Indessen darf man überhaupt von diesem Verfahren keine besonders genaue Längenbestimmung erwarten, weil der Schatten, welchen unsere Erde auf die Mondscheibe wirft, nicht scharf und deutlich begränzt erscheint, weshalb sein Vorübergehen auf derselben die einzelnen Momente nicht — wie es hier erforderlich wäre — plötzlich bemerklich macht. Da aber nicht immer die größte Genauigkeit in der An-

*) Der Vorschlag, atmosphärische Erscheinungen, z. B. Blize und Sternschnuppen, als Signale für die Längenbestimmung zu benutzen, ist unausführbar, weil man einerseits nicht auf die Erscheinung dieser Meteore vorbereitet ist, andernseits über die Identität des an mehreren Orten beobachteten Phänomens immer zweifelhaft bleiben würde.

gabe der Länge verlangt wird, oder eine solche durch vorläufige Kenntniß des genäherten Werthes leichter erreicht werden kann, so darf man die Beobachtungen der Mondfinsternisse an solchen Orten, deren Länge entweder noch gar nicht oder unvollkommen bestimmt ist, nicht vernachlässigen; ja, sie verschaffen, wenn der Längenabstand vom Normalmeridian sehr beträchtlich ist, eine größere Sicherheit in der Bestimmung, als die Zeitangaben des besten Chronometers.

Schwieriger wird die geographische Längenbestimmung, wenn wir sie auf die Beobachtung solcher Phänomene gründen, die unter verschiedenen Meridianen nicht im gleichen Moment, sondern in absolut andern Zeiten eintreten. Zu ihnen gehören die Bedeckungen der Sonne und der Fixsterne durch den Mond. Denn da dieser Himmelskörper wegen seiner Nähe mehreren, auf der Erdoberfläche zerstreuten, Beobachtern in einem und demselben Augenblicke an verschiedenen Stellen des Himmels erscheint, so wird der Eine bereits den Anfang einer Sonnenfinsterniß wahrnehmen, während der Andere noch einen Abstand zwischen Sonne und Mond sieht; dasselbe gilt von den Bedeckungen der Fixsterne. Die Länge kann hier also nicht, wie bei der Beobachtung gleichzeitig eintretender Phänomene aus einer Vergleichung der beiden Uhrzeiten unmittelbar gefolgert, sondern nur durch eine Zurückführung der Beobachtungen auf den Mittelpunkt der Erde mittelbar gewonnen werden.

Bei den Sonnenfinsternissen beobachtet man den Eintritt des Mondes in die Sonnenscheibe und seinen Austritt, oder die erste Berührung und den nachherigen Moment der Trennung, weil uns für diesen Augenblick die scheinbare Entfernung der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes in der Summe ihrer Halbmesser gegeben ist. Aus dieser Entfernung kann man den scheinbaren Längenunterschied der Mittelpunkte ableiten, wenn man zugleich die scheinbare Breite des Mondes kennt, weil durch Fällung einer Ordinate aus seinem Centrum auf den Kreis der Ekliptik ein kleines sphärisches Dreieck, SMB (Fig. 20.), entsteht, dessen eine Cathete, SB , als die hier gewünschte Größe, aus den beiden andern Seiten, MS und MB , berechnet wird. Aus diesem scheinbaren Längenunterschiede der Mittelpunkte kann durch Berücksichtigung der Parallaxen der Sonne und des Mondes ihr wahrer Längenunterschied, auf das Centrum der Erde reducirt, abgeleitet werden. Bekannt mit der Geschwindigkeit oder stündlichen Bewegung der Sonne und des Mondes, die wir in den Ephemeriden für einen jeden Tag des Jahres angegeben finden (s. Anl. IX. b. c.), berechnet man alsdann den Augenblick, in welchem die Mittelpunkte beider in einer senkrecht auf der Ekliptik stehenden Ebene zusammenfallen oder einerlei Länge haben werden, d. h. den Augenblick des Neumonds. Diese Berechnung wird zu größerer Sicherheit des Resultats für beide Beobachtungen unternommen, indem man aus dem wahren Längenunterschiede der Mittelpunkte beim Austritt

der Mondscheibe den verfloßenen, wie früherhin aus dem Eintritte den bevorstehenden Augenblick der Zusammenkunft berechnet *).

Denkt man sich an mehreren Punkten der Erdoberfläche Beobachtungen und Berechnungen dieser Art angestellt, so wird dadurch die Zeit des Neumonds nach der, für den Meridian eines jeden Orts berichtigten Uhrzeit bestimmt, und eben dadurch der vorgesezte Zweck erreicht: Zeitangaben eines identischen Augenblicks für verschiedene Punkte der Erde zu erhalten, welche zur Bestimmung des Längenunterschiedes derselben führen.

Durch eine ähnliche Behandlung der Aufgabe findet man die Länge aus beobachteten Bedeckungen (Occultationen) von Fixsternen, deren Entfernung vom Mittelpunkte des Mondes bei ihrem Ein- und Austritt dem Halbmesser desselben gleich ist. Aus diesem scheinbaren Halbmesser und dem berechneten Unterschiede der scheinbaren Breiten beider Himmelskörper findet man ihren scheinbaren Längenunterschied. Aus demselben ergibt sich alsdann mit Beziehung der Längenparallaxe des Mondes die wahre Längendifferenz derselben, auf den Mittelpunkt der Erde bezogen, und endlich aus der, mit ihr verglichenen, stündlichen Bewegung des Mondes die Zeit, welche derselbe nach dem Beobachtungsmoment noch bedurfte, um mit dem Stern gleiche Länge zu erreichen. Wird hingegen die Beobachtung des Austritts zum Grunde gelegt, so sucht man aus dem Längenunterschiede und der Geschwindigkeit des Mondes den schon vorübergegangenen Augenblick seiner wahren Zusammenkunft mit dem Stern, dessen Berechnung für verschiedene Punkte der Erdoberfläche deren geographischen Längenabstand kennen lehrt.

Die vorstehenden, auf Beobachtung von Sternbedeckungen und Finsternissen gegründeten Methoden der Längenbestimmung, so brauchbar sie auch für den Geographen sind, reichen nicht hin, dem Bedürfnisse des Seefahrers abzuheffen, dem die Kenntniß der Länge, unter welcher er sich befindet, in jedem Augenblicke von Wichtigkeit ist. Dagegen bietet ihm die sehr schnelle, eigenthümliche Bewegung des Mondes, womit derselbe unaufhörlich seine Lage gegen die übrigen Himmelskörper ändert, ein stets anwendbares Mittel dar, die Länge in Erfahrung zu bringen; es besteht in der Beobachtung des scheinbaren Abstands des Mondes von einem Fixstern oder der Sonne, welcher auf den Mittelpunkt der Erde reducirt wird, worauf man in besondern Tafeln, welche für einen bestimmten Meridian berechnet sind, den gefundenen wahren Mondsabstand aufsucht und die, demselben unter jenem Meridian entsprechende, Zeitangabe mit dem Beobachtungsmomente vergleicht.

*) Hier kann nur die Art und Weise dieser Bestimmungsmethode, aber nicht das Rechnungsverfahren selbst angezeigt werden, weil dieses eine weitläufige Erörterung der Parallaxenrechnung voraussetzt.

Zur Lösung der Aufgabe bedarf man neben der gemessenen Distanz zugleich der scheinbaren Höhen beider Himmelskörper, die allerdings aus dem Augenblick der Beobachtung mit Hülfe der Ephemeriden, Refraktions- und Parallaxentafeln abgeleitet werden können, wobei man zu einer vorläufigen Schätzung der geographischen Länge genöthigt ist; dieser Berechnung würde uns aber die unmittelbare Beobachtung der Höhen überheben, und da die Forderung, daß drei Beobachter gleichzeitig Höhen und Abstand messen sollen, unzulässig ist, so wird man zur Erleichterung der Längenbestimmung folgendes Verfahren anwenden müssen.

Der mit Uhr und Spiegelsextanten versehene Beobachter nimmt nach einander eine Sonnen- und eine Mondhöhe, wobei er sich die Zeitangaben bemerkt; mißt alsdann den Abstand des Sonnenrandes vom Mondrande, und hierauf in gleichen Zeitintervallen, wie vorhin, aber in umgekehrter Folge, wieder die Höhe beider Himmelskörper. Diese vier Höhenbeobachtungen ersetzen dadurch, daß man aus ihnen das Mittel nimmt, zwei mit der Mondsdistanz gleichzeitig gewonnene, und man erhält auf diese Weise sowohl die scheinbaren Höhen, als die scheinbare Entfernung der Mittelpunkte von Sonne und Mond, indem man mit den beobachteten Winkeln noch ihre scheinbaren Halbmesser additiv oder subtractiv verbindet.

Die wahre Entfernung der Mittelpunkte, wie sie einem Auge im Centrum der Erde erscheinen würde, finden wir vermöge dieser drei Werthe und der leicht abzuleitenden wahren Höhen beider Himmelskörper durch folgende trigonometrische Betrachtung, welche sich auf ein, durch die Verbindung des Zeniths mit Mond und Sonne gebildetes sphärisches Dreieck ZMS (Fig. 21.) bezieht. In diesem Dreieck erscheint der Ort des Sonnenmittelpunkts (S), weil die Wirkung der Strahlenbrechung die widerstreitende der Parallaxe bei weitem überwiegt, zu hoch; der Mond hingegen (M), dessen Parallaxe immer die Refraction übersteigt, dem Auge an der Erdoberfläche niedriger, als von ihrem Centrum aus gesehen. Die wahren Oerter beider Himmelskörper, S' und M' , liegen aber mit den scheinbaren in einerlei Verticalkreisen, so daß zwei sphärische Dreiecke, ZMS und $ZM'S'$, deren Seiten sämmtlich verschieden sind, einen gemeinschaftlichen Winkel (Z) enthalten. Sey nun:

die beobachtete Mondsdistanz $MS = D$

die beob. Höhe des Mondes $MN = h$

die beob. Höhe der Sonne $SR = H$

die wahre Mondsdistanz $M'S' = D'$

die wahre Höhe des Mondes $M'N = h'$

die wahre Höhe der Sonne $S'R = H'$,

so ist

$$1) \cos. Z = \frac{\cos. MS - \cos. MZ. \cos. ZS}{\sin. MZ. \sin. SZ} = \frac{\cos. D - \sin. h. \sin. H}{\cos. h. \cos. H}$$

$$2) \cos. Z = \frac{\cos. M'S' - \cos. M'Z. \cos. ZS'}{\sin. M'Z. \sin. S'Z} = \frac{\cos. D' - \sin. h'. \sin. H'}{\cos. h'. \cos. H'}$$

Durch Verbindung dieser gleichbedeutenden Werthe erhält man

$$\cos. D' = \frac{\cos. h'. \cos. H' (\cos. D - \sin. h. \sin. H)}{\cos. h. \cos. H} + \sin. h'. \sin. H'$$

Diesen für die Berechnung von D' unbrauchbaren Ausdruck gestalten wir durch Anwendung der Formel $\sin. a. \sin. b = \cos. a. \cos. b - \cos. (a + b)$ folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} \cos. D' &= \frac{\cos. h'. \cos. H'}{\cos. h. \cos. H} \left\{ \cos. D - \cos. h. \cos. H + \cos. (h + H) \right\} \\ &\quad + \cos. h'. \cos. H' - \cos. (h' + H') \\ &= \frac{\cos. h'. \cos. H'}{\cos. h. \cos. H} \left\{ \cos. D + \cos. (h + H) \right\} - \cos. (h' + H') \\ &= \frac{\cos. h'. \cos. H'}{\cos. h. \cos. H} 2 \cos. \left(\frac{H + h + D}{2} \right) \cos. \left(\frac{H + h - D}{2} \right) - \cos. (h' + H'). \end{aligned}$$

Wenn man beide Seiten dieser Gleichung von 1 abzieht und $1 - \cos. a$ durch $2 (\sin. \frac{1}{2} a)^2$, ferner $1 + \cos. a$ durch $2 (\cos. \frac{1}{2} a)^2$ ersetzt, so wird:

$$2 (\sin. \frac{1}{2} D')^2 = 2 \left(\cos. \frac{h' + H'}{2} \right)^2 - 2 \frac{\cos. h'. \cos. H'}{\cos. h. \cos. H} \cos. \left(\frac{D + h + H}{2} \right) \cos. \left(\frac{H + h - D}{2} \right)$$

oder:

$$\frac{(\sin. \frac{1}{2} D')^2}{\left(\cos. \frac{h' + H'}{2} \right)^2} = 1 - \frac{\cos. h'. \cos. H'. \cos. \frac{1}{2} (D + h + H) \cos. \frac{1}{2} (H + h - D)}{\cos. h. \cos. H. \left(\cos. \frac{h' + H'}{2} \right)^2}$$

Das letzte Glied dieser Gleichung werde nunmehr $= \sin. A^2$ gesetzt, so zieht sie sich zusammen auf:

$$\frac{\sin. \frac{1}{2} D'}{\cos. \left(\frac{h' + H'}{2} \right)} = \sqrt{1 - \sin. A^2} = \cos. A$$

und die für die Berechnung der Mondsdistanz gewünschte (sogenannte Borda'sche) Formel ist:

$$\sin. \frac{1}{2} D' = \cos. \left(\frac{h' + H'}{2} \right) \cos. A$$

Den hiernach berechneten Werth der wahren Mondsdistanz vergleicht man nunmehr mit den Angaben hierzu besonders entworfener Tafeln, welche die wahren Entfernungen des Mondes von

der Sonne von drei zu drei Stunden mit der Zeit des Normalmeridians enthalten *). Aus diesen Angaben wählt man die nächst höhere und die nächst niedrigere (F und G), und schließt, indem man die Aenderung der Mondsdistanz der Zeit proportional betrachtet, auf den Augenblick, in welchem D' eintrat, nach der Gleichung:

$$\frac{t}{10800''} = \frac{F - D'}{F - G}.$$

Der Werth von t, zur Zeitangabe der Mondsdistanz F, wenn sie die frühere ist, addirt, und im umgekehrten Falle von ihr subtrahirt, verschafft uns also die Zeit des Normalmeridians, welche dem Augenblicke der Beobachtung entspricht und mit der beobachteten Uhrzeit verglichen, den Längenunterschied beider Meridiane ergibt.

Zu einem Beispiele dieser Längenbestimmung möge uns eine, am 10. September 1792 östlich von Gotha angestellte Beobachtung der Höhe des Mondes und der Sonne, so wie ihres scheinbaren Abstandes, dienen. Dieser wurde um 8 U. 3' 29'', 2 wahrer Zeit = 67° 36' 50'' gefunden; die auf denselben Augenblick reducirten scheinbaren Höhen waren für die Sonne = 22° 26' 41'', für den Mond = 55° 29' 6''. Mit Rücksicht auf die scheinbaren Halbmesser dieser Himmelskörper, ihre Parallaxe und die Strahlenbrechung finden wir hieraus folgende Werthe der fünf Größen, welche für die Lösung der Aufgabe erfordert werden.

Beob. Höhe des untern Mondrandes	=	55° 28' 52''
Scheinbarer Halb. des Mondes	=	15 2
1) Scheinb. Höhe des Mondmittelp. h	=	55° 43' 54''
+ Parallaxe	=	30' 31''
— Refraction	=	39
2) Wahre Höhe des Mondes h'	=	56 13 46
Beob. Höhe des untern Sonnenrandes	=	22 26 40
Scheinb. Halb. der Sonne	=	15 57
3) Scheinb. Höhe des Sonnenmittelp. H	=	22 42 37
+ Parallaxe	=	7.8
— Refraction	=	2 15.6
4) Wahre Höhe der Sonne H'	=	22 40 29,2

*) Dergleichen findet man in der Pariser Connoissance des tems, Schumachers Ephemeris of the Moon's Distances, etc.

Beobachtete Mondsbifanz = 67 36 50

Halbm. des Mondes = 15 0

Halbm. der Sonne = 15 57

5) Scheinbare Mondsbifanz $D = 68 \quad 7 \quad 47$

Die Anwendung der Borda'sifchen Formel auf diefe Werthe giebt folgende Rechnung, worin $\frac{1}{2}(H + h + D) = \frac{1}{2}S$, mithin $\frac{1}{2}(H + h - D) = \frac{1}{2}S - D$ gefetzt ift.

$D = 68^{\circ} \quad 7' \quad 47''$	
$H = 22 \quad 42 \quad 37$	
$h = 55 \quad 43 \quad 54$	
$S = 146 \quad 34 \quad 18$	
$\frac{1}{2}S = 73 \quad 17 \quad 19$	$\text{Log. cos.} = 9.45878$
$\frac{1}{2}S - D = 5 \quad 9 \quad 22$	$\text{log. cos.} = 9.99824$
$H' = 22 \quad 40 \quad 29,2$	$\text{log. cos.} = 9.96506$
$h' = 56 \quad 13 \quad 46$	$\text{log. cos.} = 9.74497$
$H' + h' = 78 \quad 54 \quad 15,2$	39.16705
$\frac{H' + h'}{2} = 39 \quad 27 \quad 7,6$	$\text{log. cos. } h = 9.75056$
	$\text{log. cos. } H = 9.96495$
	$2 \text{ log. cos. } \frac{1}{2}(H' + h') = 19.77541$
	$- 39.49092$
	$19.67613 - 20$
	$\text{Hälfte} = 9.83806 = 1. \sin. A$
	$A = 43^{\circ} \quad 31' \quad 45''$
	$\text{log. cos. } A = 9.86035$
	$\text{log. cos. } \frac{1}{2}(H' + h') = 9.88771$
	$\text{log. sin. } \frac{1}{2}D' = 9.74806$
	$\frac{1}{2}D' = 34^{\circ} \quad 2' \quad 39''$
	$D' = 68^{\circ} \quad 5' \quad 18''$

Diefe wahre Mondsbifanz fällt, wenn wir fie nach der Connoiffance des tems vom J. 1792 auf Parifer Zeit beziehen, zwifchen die beiden Angaben:

10. Sept.

10. Sept. 6 U. wahre Zeit 68° 45' 50"

9 U. — — 67 24 28

Untersch. 3 St. = 10800"

I 21 22 = 4882".

Ferner ist 68° 45' 50" — 68° 5' 18" = 40' 32" oder 2432", mithin:

$$\frac{t}{10800''} = \frac{2432}{4882}$$

$$\log. 10800 = 4.03342$$

$$+ \log. 2432 = 3.38596$$

$$7.41938$$

$$- \log. 4882 = 3.68860$$

$$\log. t = 3.73078$$

$$t = 5380'' = 1 \text{ St. } 29' 40''.$$

Die Addition dieses Werthes zur früheren Zeitangabe giebt 7 St. 29' 40" als Zeit des Pariser Meridians für den Augenblick, in welchem die Mondsdistanz D genommen wurde, und den die Uhr des Beobachters in der Zeit seines Meridians durch 8 U. 3' 29" angab. Der hieraus erwachsende Längenunterschied versetzt den Beobachtungsort 33 M. 49 S. oder 8° 27' 15" östlich von Paris.

Die Rechnung erfährt einige Modificationen, wenn man statt der Sonne einen Fixstern wählt, um von ihm aus den Abstand des Mondes zu messen, weil hier weder von einer Parallaxe noch von einem scheinbaren Halbmesser dieses Himmelskörpers die Rede ist. Beobachtungen dieser Art bieten indessen in Auffindung des Sterns größere Schwierigkeit dar, und gewähren weniger Sicherheit, als jene Beobachtung des Abstandes der Ränder, da man hier die momentane Berührung der Bilder im Fernrohre des Sextanten genauer wahrnehmen kann.

Die dem Monde eigenthümliche schnelle Rectascensionsänderung und daraus entspringende Langsamkeit seiner scheinbaren Bewegung von Osten nach Westen kann indessen auf eine noch viel einfachere, als die vorhergehende, Weise zur Längenbestimmung benutzt werden, wenn man Beobachtungsorter voraussetzt, an denen ein Fernrohr genau in der Mittagsebene aufgestellt ist. Beobachtet man nämlich an dem einen Orte zwei auf einander folgende Culminationen des Mondes nach Sternzeit, so findet sich in der Differenz der Zeiten die Zunahme der geraden Aufsteigung dieses Himmelskörpers (M), während die Erde eine ganze Umdrehung von 360° in Beziehung auf denselben vollendet hat. Tritt der Mond in die Mittagsebene eines um λ Grade der Länge von dem ersten entfernten Ortes, oder hat die Erde sich um λ° in Bezug auf ihn gedreht, so wird seine Rectascension um eine Größe (m) zugenommen haben, welche sich dadurch findet, daß man die Zeitangabe

seiner Culmination mit der, unter dem ersten Meridian beobachteten, vergleicht und den Unterschied beider Zeiten nimmt. Unter der erleichternden, wenn freilich nicht strengen Annahme, daß die gerade Aufsteigung des Mondes sich in der Zwischenzeit zwei auf einander folgender Culminationen gleichförmig ändere, schließt man nun auf den unbekannten Längenabstand beider Orte nach dem Verhältniß:

$$\frac{\lambda}{360^\circ} = \frac{m}{M}.$$

Die beiden Data m und M erhält man am sichersten durch Beobachtung der Culminationen des Mondes und eines ihm vorangehenden Fixsterns, weil hier die Rechnung sich nicht auf absolute Angaben der Sternzeit, sondern deren Unterschiede gründet. So findet sich der Mittagsunterschied von Mannheim und Gotha aus folgenden, an diesen beiden Orten beobachteten, Culminationen des Mondrandes und des Sterns Spica im Sternbilde der Jungfrau:

In Gotha.	E. des Mondes	13 U. 47' 32",45
	E. der Spica	13 14 17,87
	Untersch. =	33 14,58
In Mannheim.	E. des Mondes	13 U. 47' 53",0
	E. der Spica	13 14 17,2
	Untersch. =	33 35,8

Zunahme der Rectascension = 22,21 = 5' 18",3 in Bogen.

Die durch wiederholte Beobachtung der Mondsculmination im Meridian von Gotha gefundene Aenderung der geraden Aufsteigung, M, war = 13° 54'; mithin ist

$$\frac{\lambda}{360} = \frac{5' 18",3}{13^\circ 54'} = \frac{318,3}{50040}$$

und der daraus berechnete Werth von $\lambda = 2^\circ 17' 23''$; Längenunterschied von Mannheim und Gotha.

Wollte man diese Methode für die unmittelbare Bestimmung der Länge, ohne Kenntniß einer correspondirenden Beobachtung brauchbar machen, so müßte man statt dieser letzteren die Angaben der für einen bestimmten Meridian berechneten Ephemeriden zum Grunde legen. Wenn diese die gerade Aufsteigung der Sonne und des Mondes im Augenblicke des wahren Mittags für einen jeden Tag im Jahre enthalten, so finden wir in der Differenz zweier solcher auf einander folgender Angaben die Aenderungen der Rectascension der Sonne und des Mondes in 24 Stunden wahrer Zeit (S und M). Verschaffen die Tafeln uns ferner den Augenblick der Mondsculmination in Sternzeit und haben wir den für einen andern Meridian durch Beobachtung erhalten, so finden

wir durch Vergleichung dieser Werthe die Zunahme der Rectascension des Mondes (m) von der Zeit seines Durchganges durch den ersten Mittagskreis bis zu seinem Eintritt in den zweiten. Aus diesen Daten bestimmt sich der Längenunterschied auf folgende Weise.

Man denke die Sonne, den Mond und einen Fixstern in der Mittagslinie AP (Fig. 22.) ihre scheinbare tägliche Bewegung beginnen, so wird nach 24 Stunden wahrer Zeit, wenn also die Sonne von neuem den Meridian erreicht, ihre Rectascension um den Bogen $FS = S$, und die des Mondes um $FM = M$ zugenommen haben. Dieser culminirt alsdann für einen Ort C , welcher um den Bogen $SM = M - S$ östlich, oder 24 St. — $(M - S)$ westlich von A entfernt liegt. In der Mittagsfläche eines andern Ortes B , für welchen der Mond früher culminirte, war die Zunahme seiner Rectascension $= F'M' = m$. Es ist also unter der Annahme einer gleichförmigen Rectascensionsänderung:

$$\frac{SM'}{F'M'} = \frac{SF'M}{FM} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda}{m} = \frac{24 \text{ St.} - (M - S)}{M}.$$

Folgende Längenbestimmung diene als Beispiel. Am 8. April 1800 culminirte der Mond im Meridian von Greenwich, auf welchen die Ephemeriden sich beziehen, um 12 U. 36' 26",6 Sternzeit. Zu Port Royal in Jamaica beobachtete man die Culmination um 12 U. 47' 56",7

$$\text{Zunahme der Rectascension } m = 11 \text{ } 30,1$$

Die Veränderung der Rectasc. des Mondes in 24 St. wahrer Zeit

$$\text{ist nach den Ephemeriden} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = 52' \text{ } 6'' \text{ Sternzeit.}$$

$$\text{Die Veränderung der Rectascension der Sonne,} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad = 3 \text{ } 39,3$$

$$M - S = 48 \text{ } 27,7$$

folglich $24 \text{ St.} - (M - S) = 86400'' - 2907'',7 = 83492'',3$, woraus wir den Längenunterschied folgendermaßen berechnen:

$$\log. (24 \text{ St.} - (M - S)) = \log. 83492'',3 = 4.92165$$

$$+ \log. m = \log. 690,1 = 2.83891$$

$$7.76056$$

$$- \log. M = \log. 3126 = 3.49499$$

$$\log. \lambda = 4.26555$$

Also $\lambda = 18431'',9 = 5 \text{ St. } 7' \text{ } 11'',9$; westlicher Längenabstand des Beobachtungsorts vom Greenwich Meridian.

Enthalten die Ephemeriden nicht die Rectascensionen, sondern nur die Längen des Mondes im wahren Mittag (s. Anl. Nr. IX. b.), so muß jene zuvor aus diesen abgeleitet werden. Dieß geschieht — in Beziehung auf Fig. II. — durch folgende drei Gleichungen:

- 1) $\cotg. SVB = \cotg. SB. \sin. VB = \cotg. B. \sin. L$
- 2) $\cos. SV = \cos. SB \cos. VB = \cos. B. \cos. L$
- 3) $\tan g. VD = \tan g. SV. \cos. (SVB + BVD)$
oder $\tan g. \alpha = \tan g. SV. \cos. (SVB + \varepsilon)$

Die gerade Aufsteigung des Mondes im Augenblick seiner Culmination im Normalmeridian oder dessen Angabe in Sternzeit kann man ferner, wenn sie nicht unmittelbar gegeben ist, aus den Tafeln auf folgende Weise ableiten. In der Differenz der Rectascension der Sonne und des Mondes im wahren Mittag erhalten wir den östlichen Abstand des letzteren (a), um welchen er später, als die Sonne, culminiren würde, nähme nicht seine Rectascension unaufhörlich zu. Es kommt also darauf an, diese Zunahme x des Bogens a in Erfahrung zu bringen, und wir finden sie, da (a + x) Grade durch den Meridian gehen müssen, bis der Mond in denselben tritt, bekannt mit der Zunahme seiner Rectascension (M) für 24 Stunden w. Z. und der, in den Tafeln bemerkten, Anzahl von Graden des Aequators (A), welche zwischen den beiden auf einander folgenden Mittagen durch die Mittagsebene gehen, durch die Gleichung:

$$\frac{a + x}{A} = \frac{x}{M}.$$

Hiernach ist $x = \frac{Ma}{(A - M)}$ und $a + x = a \left(1 + \frac{M}{A - M}\right) = \frac{aM}{A - M}$, Ausdruck des Bogens oder der Sternzeit, um welche der Mond später, als die Sonne, in den Meridian tritt, auf welchen die Ephemeriden sich beziehen. Die gerade Aufsteigung der Sonne oder Sternzeit im wahren Mittag um diesen Werth vermehrend, erhalten wir den gewünschten Augenblick der Mondsculmination.

Die letzte Methode wird durch diese vorbereitenden Rechnungen ziemlich weitläufig, und verschafft, theils wegen der Fehlerhaftigkeit der Mondstafeln, vorzüglich aber wegen der wiederholt gebrauchten, aber im Grunde unstatthafter, Annahme einer gleichförmigen Aenderung der Rectascension des Mondes so wenig Sicherheit, daß man keinen besondern Werth auf sie legen darf.

Funfzehntes Capitel.

Von den Gradmessungen.

Ausgerüstet mit den Mitteln, die Lage eines jeden Punktes der Erdoberfläche auf den Aequator und einen gegebenen Meridian zu beziehen, konnten die neueren Geographen mit gewisserem Erfolge, als ihre Vorgänger im Alterthum, das schwierige Geschäft unternehmen, durch sorgfältig angestellte terrestrische Messungen die Größe der Erdfugel nach einem willkürlich gewählten Längemaße zu bestimmen. Mag man immerhin vermuthen, daß die Gestalt der Erde von der sphärischen etwas abweiche, so kann jene, von der Erfahrung im Allgemeinen gerechtfertigte, Hypothese einer solchen Bestimmung dennoch vorläufig zum Grunde gelegt werden, indem alsdann die Messung eines beliebigen Stücks aus einem der größten Kreise, die sie umziehen, zur Bestimmung des ganzen Kreisumfangs, mithin auch seines Halbmessers, des Erdradius, hinreichen wird.

Zu solchen Kreisen bieten sich uns nun vorzugsweise die Meridiane dar, weil wir die beiden Endpunkte eines Meridianbogens durch die geographische Ortsbestimmung mit Sicherheit aufzufinden vermögen. Von seiner senkrechten Lage gegen den Aequator überzeugt man sich durch die Identität der Zeitangaben, welche an beiden, nord- und südwärts von einander entfernten, Orten im gleichen Moment beobachtet worden sind. Die in Graden ausgesprochene Krümmung des zwischen diesen Punkten enthaltenen Bogenstücks, oder den, dieser Krümmung entsprechenden Winkel am Mittelpunkte der Erde giebt uns ferner die geographische Breitenbestimmung in dem Unterschiede der Polhöhen; am einfachsten durch Beobachtungen von Höhen oder Zenithdistanzen eines Sterns, nach dem Ausdrücke $\beta - \beta' = L - L'$ oder $= z' - z$. Werde nun die Länge des, zwischen den Endpunkten B und B' enthaltenen Bogens mit a, der Halbmesser der Erde mit r bezeichnet, so drückt $2r\pi$ ihren Umfang aus, und es verhalten sich:

$$\frac{a}{2r\pi} = \frac{\beta - \beta'}{360^\circ},$$

woraus, wenn die Länge a bekannt geworden ist, der Werth von r sich unmittelbar ergibt.

Diese zweite Hälfte der Aufgabe: die Ausdehnung des Bogens BB' in irgend einem Längemaße zu bestimmen, um dadurch einen gegebenen aliquoten Theil des ganzen Erdumfangs zu erhalten, ist offenbar bei weitem schwerer zu befriedigen. Die gewöhnlichen, bei detaillirten Aufnah-

men gebräuchlichen Messungsmethoden der practischen Geometrie würden für die Bestimmung des Bogens a , der eine Strecke von vielen Meilen umfaßt, sowohl wegen ihrer Beschränktheit als wegen der Unzuverlässigkeit des Resultats, gar nicht anwendbar seyn. Anstatt daher den Bogen seiner ganzen Länge nach einer unmittelbaren Messung zu unterwerfen, die ohnehin sehr häufig an den Hindernissen des Terrains scheitern möchte, sucht man ihn durch Umziehung mit einem Netze von Dreiecken, worin nur eine bequem gelegene Seite als Basis ausgemessen zu werden braucht, mittelbar aus trigonometrischer Berechnung zu bestimmen. Eine Anzahl hervorragender Punkte, die auf beide Seiten der von B nach B' fallenden Mittagslinie fallen, werden nämlich durch die sorgfältigsten Winkelmessungen, zu denen man sich des Multiplicationskreises bedient, in einer zusammenhängenden Reihe von Dreiecken mit einander verbunden, und die Entfernung zweier unter ihnen, welche ein ebenes freies Terrain zwischen sich enthalten (vermittelst metallener, hölzerner oder gläserner Maassstäbe, von deren veränderlicher Ausdehnung in Rücksicht auf das Thermometer Rechnung getragen wird), mit äußerster Vorsicht gemessen. Die theoretische und practische Behandlung der hierher gehörigen Aufgaben und Operationen bildet unter dem Namen Geodäsie einen eigenthümlichen, nur den Zwecken der Geographie dienenden, Zweig der practischen Geometrie, in dessen engeres Gebiet auch nachstehende Betrachtungen über die Berechnung des trigonometrischen Netzes fallen.

Lägen die sämtlichen Dreieckspunkte in einer einzigen Ebene, so würden die Vorschriften der ebenen Trigonometrie hinreichen, um von demjenigen Dreieck, worin eine Seite als Basis unmittelbar gemessen worden, allmählich zu den übrigen fortzuschreiten, und so die Längen der sämtlichen Dreiecksseiten durch Rechnung zu finden. Da aber die Oberfläche, auf welcher jene Punkte zerstreuet liegen, gekrümmt ist, und das winkelmessende Instrument wegen der verschiedenen Höhe der beobachteten Objecte oft eine, gegen den Horizont geneigte Stellung erhalten muß, so wird man, um jenes einfache Verfahren dennoch anwenden zu können, zuvor an den unmittelbaren Resultaten der Messung eine zwiefache Verbesserung anbringen müssen.

Die, wegen der schiefen Lage der Dreiecksebene erforderliche, Reduction der Winkel auf den Horizont geschieht, wenn wir den Elevationswinkel ACA' (Fig. 23.) mit a , den des andern Object's, BCB' , mit b , und den beobachteten Winkel ACB mit c bezeichnen, durch Berechnung des Winkels $A'CB'$ oder c' nach dem Ausdruck:

$$\sin. \frac{1}{2} AZB = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (AB + ZA - ZB). \sin. \frac{1}{2} (AB + ZB - ZA)}{\sin. ZA. \sin. ZB.}}$$

$$\text{d. i. } \sin. \frac{1}{2} c' = \sqrt{\frac{\sin. \frac{1}{2} (c + b - a). \sin. \frac{1}{2} (c + a - b)}{\cos. a. \cos. b.}}.$$

Die hier als bekannt angenommenen Elevationswinkel erhält man dadurch, daß man das Instrument aus der horizontalen in eine verticale Lage versetzt. Durch den Gebrauch des Theodoliten, der zugleich Horizontal- und Verticalwinkel zu nehmen erlaubt, wird uns dieses Geschäft und die Reduction überhaupt erspart; aber auch bei dem gewöhnlichen Borda'schen oder Multiplicationskreise sind wir ihrer dann überhoben, wenn die Dreieckspunkte in weiten Ebenen zerstreut liegen, weil hier die Objecte gewöhnlich im Gesichtsfelde des horizontal gestellten Fernrohrs erscheinen werden.

Das auf den Horizont reducirte Dreieck wird nunmehr als ein sphärisches betrachtet, und jede seiner Seiten unter dieser Voraussetzung bestimmt werden müssen. Diese Bestimmung geschieht aber, weil das Dreieck in Beziehung auf den Erdradius immer nur äußerst klein erscheint, schärfer durch die ebene, als durch die sphärische Trigonometrie, indem man die gegebenen Winkel durch andere ersetzt, welches auf zwiefache Art geschehen kann: entweder durch eine leichte Correction, oder durch Zurückführung des gegebenen sphärischen Dreiecks auf ein geradlinigtes, das durch die Chorden seiner Seiten gebildet wird.

Die Summe der gemessenen Winkel übersteigt — wenn auch nur um wenige Secunden — den Werth von 180° . Dieser geringe Ueberschuß wird in drei gleichen Theilen von den Winkeln abgezogen, der gemessene oder berechnete Abstand zweier Dreieckspunkte als gerade Linie angesehen und jede der andern Seiten nach den Regeln der ebenen Trigonometrie berechnet. Dieses Verfahren erweist sich als vollkommen gültig, sobald die Dreiecksseiten gegen den Radius der Kugel so unbedeutend erscheinen, daß die Summe der drei Winkel diejenige von zwei rechten nur um wenige Secunden übersteigt, wie dieses bei den geodätischen Operationen, wo die Entfernung der Standpunkte höchstens 15 bis 20 Meilen beträgt, immer der Fall ist *).

*) Folgendes ist der von Legendre gegebene Beweis dieses Satzes. — Um die Größe des Winkels A' zu finden, welchen man dem gemessenen A substituiren muß, wenn die Bögen a, b, c als gerade Linien behandelt werden sollen, vergleiche man die Formeln:

$$\cos. A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos. A = \frac{\cos. \frac{a}{r} - \cos. \frac{b}{r} \cdot \cos. \frac{c}{r}}{\sin. \frac{b}{r} \cdot \sin. \frac{c}{r}}$$

wovon die eine aus der ebenen, die andere aus der sphärischen Trigonometrie entlehnt ist, und untersuche, worin sie von einander abweichen. Dieß kann nur dann geschehen, wenn wir die Functionen

Man hat statt dieser einfachen Reductionsart eine zweite, dem Anschein nach strengere, in Vorschlag gebracht, die aber — wenn man die Kleinheit der Dreiecke in Betracht zieht, — ungeachtet

nen von $\cos.$ und $\sin.$ entwickeln, wobei indessen wegen der Kleinheit von $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ die späteren Glieder der Entwicklung vernachlässigt werden dürfen. Demnach ist:

$$\cos. \frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^4}$$

$$\cos. \frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^4}$$

$$\cos. \frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^4}$$

$$\sin. \frac{b}{r} = \frac{b}{c} - \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot r^3}, \quad \sin. \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{2 \cdot 3 \cdot r^3},$$

und nach der Einführung dieser Werthe:

$$\cos. A = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2r^2} + \frac{a^4 - b^4 - c^4}{24r^4} - \frac{b^2 c^2}{4r^4}}{\frac{bc}{r^2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6r^2} \right)}$$

Durch Multiplication mit $\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6r^2} \right)$ im Zähler und Nenner erhält man:

$$\begin{aligned} \cos. A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2 - 2b^2 c^2}{24bcr^2} \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - \frac{bc}{6r^2} \left\{ 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

d. i. wenn wir auf den obigen Werth von $\cos. A'$ zurückblicken

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{bc}{6r^2} (\sin. A')^2.$$

Sey nun $A = A' + x$, so zieht sich wegen der Kleinheit der Differenz x der Ausdruck $\cos. A = \cos. A' \cdot \cos. x - \sin. A' \cdot \sin. x$ auf $\cos. A' - x \cdot \sin. A'$ zusammen. Die Vergleichung

beider Werthe von $\cos. A$ giebt $x = \frac{bc}{6r^2} \sin. A'$, mithin

$$A = A' + x = A' + \frac{bc}{6r^2} \sin. A'.$$

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks (F) durch $\frac{1}{2} bc \cdot \sin. A'$ ausgesprochen wird, so kann man ebenfalls sehen:

$$A = A' + \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{r^2} \quad \text{oder} \quad A' = A - \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{r^2}.$$

Eben

geachtet ihrer größeren Weitläufigkeit wohl nicht zu genaueren Resultaten führen möchte, als jene. Sie fordert eine Zurückführung der Seiten auf ihre Chorden, welche nur dadurch erreicht werden kann, daß man sie in Theilen der Kreiseintheilung oder die Winkel, welche sie als Bögen am Mittelpunkte der Erde messen, ausspricht. Um dieses zu können, muß man aber von bereits angestellten Messungen die Erfahrung borgen, daß einem Bogen von einer Secunde etwa 15 Toisen oder 90 Fuß auf der Oberfläche der Erde entsprechen. Die Länge einer mit Sorgfalt unmittelbar gemessenen Basis wird demnach den ihr zugehörigen Winkel mit einer, bis auf einzelne Theile einer Secunde gehenden, Genauigkeit anzeigen; dasselbe gilt von der nach den bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie berechneten Länge der übrigen Seiten, so daß man alle sechs Bestandtheile des sphärischen Dreiecks, in Kreiseintheilung gegeben, erhält. Die hier verlangte Reduction desselben ist augenscheinlich das Umgekehrte der vorhin betrachteten Zurückführung auf den Horizont, da der Horizontalwinkel $A'CB'$ (Fig. 24.) durch den, in der schiefen Dreiecksfläche ABC liegenden, ersetzt werden soll; zu seiner Bestimmung sind uns aber außer jenem Winkel in C die beiden Depressionswinkel $ACA' = a$ und $BCB' = b$, da sie von Chorden und Tangenten eingeschlossen sind, als die Hälfte der Bögen AC und BC gegeben, so daß man den gesuchten Seitenwinkel ECD oder Bogen ED des, mit willkürlichem Radius beschriebenen, sphärischen Dreiecks DEN aus den bekannten Bögen EB' und DA' und dem Neigungswinkel in $N = A'CB'$ findet, durch den Ausdruck:

$$\cos. ED = \frac{\cos. NE}{\cos. \varphi} \cos. (ND - \varphi), \text{ wenn } \tan. \varphi = \cos. N. \tan. NE$$

$$\text{d. i. } \cos. ED = \frac{\sin. b}{\cos. \varphi} \sin. (a + \varphi), \text{ wenn } \tan. \varphi = \cos. N. \cot. b.$$

Nach einer ähnlichen Reduction der Winkel in A und B auf die, von den Chorden eingeschlossenen, nimmt man — wie bei dem vorhergehenden Verfahren — die schon bekannte Seite des sphärischen Dreiecks als gerade Linie an und erhält durch Berechnung der beiden andern Seiten des ebenen Dreiecks diejenigen des sphärischen mit möglichster Schärfe ausgedrückt.

Eben so sind die andern beiden zu substituierenden Winkel:

$$B' = B - \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{r^2}, \quad C' = C - \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{r^2},$$

$$\text{mithin ihre Summe: } A' + B' + C' = A + B + C - \frac{F}{r^2} = 180^\circ.$$

Der Ueberschuß der beobachteten Winkel über 180° (durch $\frac{F}{r^2}$ ausgedrückt) darf also nur in drei gleichen Theilen von ihnen einzeln abgezogen werden, wenn wir die Winkel eines geradlinigten Dreiecks erhalten wollen, dessen Seiten denen des sphärischen gleich sind.

Sind auf diese Weise die einzelnen Linien des trigonometrischen Netzes, welches den zu messenden Meridianbogen (BB', Fig. 25.) umzieht, sorgfältig bestimmt worden, so muß dessen Ausdehnung aus ihren Werthen (BA, AD...) und den Azimuthalwinkeln (B'BA, nAD, nDE...), die an den einzelnen Punkten ebenfalls beobachtet sind, stückweise nach der Formel $Ba + ad + \dots = BA \cdot \cos. ABA + AD \cdot \cos. nAD + \dots$ berechnet werden, welches zur Verifikation durch Combinirung verschiedener Dreiecksseiten geschehen kann.

Durch das hier bezeichnete Verfahren durfte man allerdings einen größten Kreis der Erdkugel und dadurch ihre übrigen Dimensionen mit ziemlicher Bestimmtheit auszumitteln hoffen. Daß Messungen, die in verschiedenen Gegenden, durch andere Beobachter und unter sehr abweichenden Umständen in Ansehung der dabei benutzten Hülfsmittel angestellt wurden, verschiedene Resultate liefern würden, war voraus zu sehen; daß aber die Abweichungen derselben so beträchtlich waren, ließ sich nur dadurch erklären, daß man sich in der bisherigen Annahme einer vollkommenen Sphäricität des Erdkörpers geirrt habe, und demselben eine von der Kugelform etwas abweichende Gestalt zuerkennen müsse. So werden wir also zu einer neuen, für die mathematische Geographie höchst wichtigen, Untersuchung über die genauere Gestalt der Erde veranlaßt, zu welcher die Resultate der verschiedenen, bisher angestellten, Gradmessungen die Erfahrungssätze liefern. Sie ist der Gegenstand des folgenden Capitels.

Der oben für die Berechnung des Umfangs und Halbmessers der Erde gegebene Ausdruck:

$$\frac{a}{2r\pi} = \frac{\beta - \beta'}{360^\circ}$$

kann also nur zu Näherungswerthen für diese Größen führen, weil er auf der Hypothese der Kugelgestalt beruht. Wählen wir zu dieser Absicht die zu 57012 Toisen gefundene Länge eines, unter 45° der Breite im Pariser Meridian gemessenen, Grades, weil dieser zwischen Pol und Aequator in die Mitte fällt, so wird die vorstehende Gleichung:

$$\frac{57012}{2r\pi} = \frac{1^\circ}{360^\circ},$$

woraus sich der Umfang eines Erdmeridians zu 20524320 und der Halbmesser zu 3265945 Toisen ergibt; mithin die Ausdehnung einer Meile, wenn wir deren 15 auf jeden Grad, also 5400 auf den Umfang eines Erdmeridians rechnen wollen, zu 3800 $\frac{1}{2}$ Toisen. Wir werden unter einer gültigen Voraussetzung über die Gestalt der Erde ein, von dem vorstehenden nur wenig verschiedenes, Resultat für die Ausdehnung des Meridian=Quadranten erhalten.

Hat man diese letztere in Beziehung auf ein beliebiges Längenmaaß mit großer Schärfe ausgemittelt, so sieht man sich im Stande, durch die Wahl eines aliquoten Theils ihrer ganzen Länge

eine neue, auf die bekannte Größe des Erdbörpers gegründete, Längeneinheit zu bilden. Dieß ist von französischen Geometern geschehen, indem sie eine, aus ihrer Gradmessung gefolgerte, Länge des Meridian-Quadranten = 5130740 Toisen in zehn Millionen gleiche Theile zerlegten, und dadurch die Längeneinheit des Metre, = 0,513074 Toisen oder 443,296 Pariser Linien, welche einem neuen, nach der Decimal-Eintheilung gebildeten Maaß- und Gewichtssystem zur Grundlage dienen mußte.

Diese, dem Anschein nach wissenschaftliche Bestimmung, welche ein, aus der Natur geschöpftes, unveränderliches und deshalb allen Völkern sich zur Anwendung empfehlendes, Normalmaaß zu liefern verspricht, ist jedoch — wenn man auch von dem Umstande absehen will, daß der Meridian von Paris, so lange man die regelmäßige Gestalt des Erdbörpers bezweifeln muß, nicht als das Maaß aller übrigen Meridiane betrachtet werden darf, — in der Ausführung einer so unvermeidlichen Unsicherheit unterworfen, indem man dabei von dem Kleinern auf das Größere zu schließen gezwungen ist, daß man die Resultate der sorgfältigsten Gradmessung immer nur als vorläufig gefundene Werthe der wahren Ausdehnung ansehen darf, die von der Erweiterung der Operationen fortwährend modificirt werden können. So geschah es auch, daß jene französische Gradmessung, nachdem sie noch um mehrere Grade südlich fortgeführt war, für den zehnmillionsten Theil des Meridian-Quadranten 443,32 statt 443,296 Linien ergab, so daß das bereits gesetzlich eingeführte Metre, wenn man diese neue Bestimmung als der Wahrheit näher kommend betrachtet, der ursprünglichen Idee durchaus zuwider, als ein willkürliches Längenmaaß erscheint.

Sechszehntes Capitel.

Sphäroidische Gestalt der Erde.

Der, als Resultat der Gradmessungen gefundene, Erfahrungssatz: daß die Gestalt des Erdbörpers merklich von der sphärischen abweiche, war nur eine Bestätigung dessen, was die Theorie aus mechanischen Principien bereits a priori gefolgert, und worauf sie die Hypothese einer elliptoidischen Gestalt desselben gegründet hatte. Gene einfachere Voraussetzung, welcher wir bisher folgten, würde sich, wenn man die Lehren der Dynamik zu Rathe zieht, nur für die beiden Fälle gültig erweisen: daß die Erde entweder keine Umdrehung erlitte oder bei derselben ein durchaus fester Körper wäre,

so daß keiner ihrer Theile dem Bestreben, sich von der Aze zu entfernen, Folge leisten und dadurch eine Modification der Kugelform veranlassen könnte. Die Erfahrung lehrt uns von beidem das Gegentheil: von der rotirenden Bewegung überzeugen uns, an einem früheren Orte erwähnte, astronomische Gründe und empirische Versuche; daß ferner die Theile der Oberfläche des Erdkörpers nicht der Einwirkung seiner Umdrehung allgemein widerstehen werden, zeigt ein Blick auf ihre physische Beschaffenheit. Die ihn zum größten Theil umschließende Wassermasse wird, als bewegliches Fluidum, jenem der Kraft der Schwere entgegenwirkenden und von den Polen nach dem Aequator hin zunehmenden Bestreben, sich von der Aze zu entfernen (der sogenannten Centrifugal- oder Schwingkraft) gehorchen, und deshalb die Erdkugel im Durchmesser des Aequators nothwendig erweitern müssen.

Diese Behauptung nöthigt uns zu einer kurzen Abschweifung in das Gebiet der Mechanik. Bekanntlich verhalten sich die, durch Umdrehung eines festen Hebelarms dessen sämtlichen Punkten mitgetheilten Geschwindigkeiten (die sehr unpassend sogenannten Schwingkräfte) wie ihre Abstände vom Drehungspunkte. Bei einer um ihre Aze sich drehenden Kugel werden sie also für die Punkte der Oberfläche im Verhältnisse der Radien der Parallelkreise stehen, in denen dieselben umhergeführt werden. Der Halbmesser eines Parallelkreises ist aber, wenn der Radius der Kugel als Einheit betrachtet wird, dem Cosinus seines Bogenabstandes vom Aequator — auf der Erdkugel dem Cosinus der geographischen Breite — gleich, so daß die Schwingkraft, wenn sie unter dem Aequator = f gesetzt wird, nach dem Gesetze $f \cos. \beta$ nach den Polen hin abnimmt, und in diesem Punkte, wo $\cos. \beta = 90^\circ$ geworden ist, völlig verschwindet.

Was wir uns hier als festen Hebelarm gedacht haben, der den bewegten Punkt mit der Drehungsaxe in unzertrennlicher Verbindung erhält, und ihn verhindert, mit der, durch die Rotation erlangten Geschwindigkeit sich von jener zu entfernen, wird in der Natur durch die, allem Materiellen eigenthümliche Aeußerung einer gegenseitigen Anziehung oder die Kraft der Schwere ersetzt. Bei jeder körperlichen Masse erscheint dieselbe ihrer Richtung und Stärke nach als das Resultat der vereinigten Anziehung aller materiellen Theile; ist sie eine Kugel, so wird diese Kraft an jedem Punkte der Oberfläche in der Richtung nach dem Mittelpunkte wirken, wo sie als concentrirt gedacht werden mag. Wäre die Sphäre in Ruhe, so würde auf der Oberfläche überall eine gleich starke Anziehung herrschen; bei einer Umdrehung hingegen müssen die, den einzelnen Theilen mitgetheilten, Geschwindigkeiten ihre Aeußerung auf eine sehr verschiedene Weise modificiren. In der Ebene des Erdaequators wird die Kraft der Schwere (dargestellt durch den Raum g , welchen sie in der Zeiteinheit einer Secunde einen Körper durchlaufen läßt) um die ganze Schwingkraft (die oben durch f , den während einer Secunde im entgegengesetzten Sinne beschriebenen Raume, bezeichnet

wurde) vermindert werden; in jedem Parallelkreise hingegen wirkt von der totalen Schwingkraft $f \cdot \cos. \beta$ nur ein, dem Cosinus der Breite proportionaler Theil der Schwere entgegen, wie Fig. 26, wo BG die Schwingkraft im Punkte B, und BF den in der Richtung des Radius wirkenden Theil derselben bezeichnet, dieß anschaulich macht. Es ist daher allgemein $FB = f \cdot \cos. \beta^2$, und der Ausdruck der, durch die Schwingkraft modificirten Schwere $= g - f \cdot \cos. \beta^2$.

Um durch diese Betrachtung zu einem bestimmten Resultate des Einflusses, welchen die tägliche Umdrehung der Erde auf ihre Gestalt äußern mag, geleitet zu werden, müssen wir vor allen Dingen die Werthe von g und f kennen. Jenen geben sorgfältige Beobachtungen $= 15,104$ Pariser Fuß; die Schwingkraft aber wird durch den Sinus versüs des, ebenfalls in einer Secunde beschriebenen, kleinen Aequatorbogens ($\varphi = 15''$) dargestellt. Nehmen wir, nach der vorläufigen Berechnung des vorhergehenden Capitels, den Halbmesser der Erde zu 3265945 Toisen an, so erhält man als Sinus versüs $r \cdot \sin. \varphi \cdot \sin. \frac{1}{2} \varphi = 0,052$ Pariser Fuß. Dieser Werth von f ist in dem von g etwa 289 mal enthalten, so daß die Schwerkraft unter dem Aequator um eben so vieles beträchtlicher, als die Centrifugalkraft erscheint.

Nunmehr nehme man, zu bestimmten Voraussetzungen über die physische Beschaffenheit der Erde genöthigt, an, sie sey eine homogene flüssige Masse, also überall von gleicher Dichtigkeit. Jedes ihrer Theilchen wird alsdann bei einer Umdrehung durch die, in dem Ausdruck $g' - f' \cos. \beta^2$ gegebene, Kraft der Schwere nach dem Mittelpunkte gezogen werden, unter g' und f' Größen gedacht, welche durch den jedesmaligen Abstand vom Centrum und von der Axe bestimmt werden. Vergleicht man eine vom Mittelpunkte zum Pol führende mit einer, in dem Aequator liegenden, Wassersäule, so wird der Ausdruck der anziehenden Kraft sich in dem einen Falle auf g' , im andern auf $g' - f'$ reduciren; d. h. in der Richtung der Axe wirkt die Schwere total, in der des Aequators hingegen um die ganze Schwingkraft vermindert. Die Letztere, welche im Mittelpunkte $= 0$, an dem Ende des Erdradius $= \frac{1}{2} \frac{r}{289}$ ist, beträgt für den mittlern Abstand $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{289} = \frac{1}{578}$ der Schwere, und diesen mittlern Werth dürfen wir als Ausdruck der Centrifugalkraft ansehen, welche der gesammten, im Aequator liegenden, Wassersäule angehört. Dieselbe würde demnach um $\frac{1}{578}$ länger, als die zum Pol führende, um eben so viel specifisch schwerere, seyn müssen, um ihr das Gleichgewicht zu halten. Für jeden Parallelkreis gilt dasselbe, wie für den Aequator, nur daß sich zum Ausdruck der mittlern Schwingkraft noch der Factor $\cos. \beta^2$ gesellt. Hieraus folgt, daß die Zunahmen der Erdradien vom Pole nach dem Aequator hin den Quadraten des Cosinus der geographischen Breite proportional und in dem allgemeinen Ausdruck $r - b = (a - b) \cos. \beta^2$

gegeben sind, worin wir eine der Ellipse angehörige Eigenschaft erkennen, wenn a deren große, b ihre kleine Axe bezeichnet *). Die Erde erscheint also unter den obigen Voraussetzungen als ein Ellipsoid, dessen Axen sich zu einander, wie 577 : 578 verhalten, und dieß Resultat würde auch dann noch gültig bleiben, wenn ein Theil der flüssigen Masse in den festen Zustand überginge.

Aber die Annahme einer durchaus gleichen Dichtigkeit des Erdkörpers ist augenscheinlich unstatthaft, und die alleinige Kenntniß der Werthe von f und g wird nicht hinreichen, das wahre Axenverhältniß und die sogenannte Abplattung $\left(\frac{a-b}{a}\right)$ zu bestimmen, wenn man auch durch wahrscheinlichere Hypothesen zu einem genauern Resultate, als dem obigen, gelangt. Von der Erfahrung allein dürfen wir eine sichere Entscheidung erwarten, und diese zu gewinnen, stehen uns zwei verschiedene Wege offen.

Das eine Verfahren, die Gestalt eines Erdmeridians zu bestimmen, gründet sich auf die Beobachtung der, unter verschiedenen Breiten ungleichen, Beschleunigungen in dem Falle schwerer Körper, welche man an schwingenden Pendeln anstellt. Man wird nämlich durch Vergleichung dieser, aus Pendelversuchen sich ergebenden Beschleunigungen auf die Abstände der Beobachtungspunkte von der Axe, mithin aus einer ganzen Reihe solcher Data auf die Figur der Erde auf demselben Wege rückwärts schließen könne, der uns oben zur Entdeckung der verschiedenen Werthe der Beschleunigungen leitete, als wir die Gestalt der Kugel voraussetzten; aber diese Untersuchung erscheint bei der Annahme der sphäroidischen Gestalt dadurch sehr schwierig, daß nunmehr die Schwere nicht mehr nach dem Mittelpunkte der Erde, sondern in einer Richtung wirkt, die selbst von ihrer noch unbekannten Gestalt abhängig ist.

*) Es ist nämlich, wenn man mit a und b als Radien zwei, die Ellipse innen und außen berührende Kreise beschreibt (Fig. 26.) und aus den Durchschnittspunkten M und S eines beliebigen Radius CM die Perpendikel MQ und SV fällt, der bekannten Relation zwischen Ellipse und umschriebenen Kreise gemäß:

$$VQ = \frac{b}{a} MQ = \frac{b}{a} a \sin. \beta$$

$$\text{und } VM = MQ - VQ = a \sin. \beta \left(1 - \frac{b}{a}\right) = (a - b) \sin. \beta;$$

wornach $VS = MS \cos. \beta = (a - b) \cos. \beta$ die Ordinate MQ in ihrem Durchschnittspunkt mit der Ellipse antrifft. Betrachtet man nunmehr im Dreieck MVS den kleinen elliptischen Bogen VR als senkrecht auf MS, so wird $RS = VS \cos. RSV$, d. i. $r - b = (a - b) \cos. \beta^2$.

Den sichersten Aufschluß über Gestalt und Größe der Erde zugleich erhalten wir von sorgfältigen, unter verschiedenen Breitengraden angestellten Gradmessungen, wie sie im vorhergehenden Capitel angedeutet worden. Findet es sich, daß von zwei Breitengraden (d. h. Meridianstücken, an deren Endpunkten die Polhöhe um einen Grad verschieden ist) der dem Pol näher liegende eine größere Ausdehnung hat, als der in der Gegend des Aequators gemessene, so ist die Krümmung hier stärker, als in der Nähe des Pols, mithin die Axenverschiedenheit oder Abplattung der Erde empirisch erwiesen. Um nunmehr den Werth dieser Abplattung, die Größe der beiden, zum Pole und zum Aequator führenden Erdradien und den Umfang der Erde in einem bekannten Längenmaasse zu bestimmen, müssen wir zur Anwendung der, durch die Gradmessung gewonnenen, Data die oben im Allgemeinen gerechtfertigte Hypothese zum Grunde legen, daß die Erde wirklich ein Ellipsoid, mithin ihr Durchschnitt in der Richtung der Axe oder die geschlossene Curve, welche den Meridian bildet, eine Ellipse sey.

Sey also der Bogen $AMB = Q$ (Fig. 27.) der Quadrant, $AC = a$ die halbe große, $BC = b$ die halbe kleine Ase, $CP = x$ die Abscisse, $PM = y$ die Ordinate und $CM = r$ der Radius eines elliptischen Erdmeridians; werde ferner der Winkel, welchen die Normale MN mit der großen Ase bildet (die Polhöhe), durch β , der Winkel ACM hingegen, am Mittelpunkte (die sogenannte verbesserte Polhöhe), durch ψ bezeichnet, so werden wir durch folgende Reihe von Gleichungen zu allgemeinen Ausdrücken derjenigen Größen geführt, die wir aus den speciellen Werthen zwei wirklich gemessener Breitengrade abzuleiten wünschen.

Die der ganzen Betrachtung zum Grunde liegende, auf den Mittelpunkt bezogene, Gleichung der Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und daß, aus ihr abgeleitete, erste Differentialverhältniß:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

oder wenn wir für $\sqrt{a^2 - x^2}$ den gleichbedeutenden Werth $\frac{a}{b} y$ substituiren,

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Denselben Winkel schließt im Dreieck NMP die Normale mit der Ordinate ein, wo seine Tangente

durch das Verhältniß $\frac{NP}{PM} = \frac{\cos. \beta}{\sin. \beta}$ dargestellt erscheint. Hier erhalten wir also für die nämliche

trigonometrische Function zwei verschiedene Ausdrücke, durch deren Gleichsetzung, wenn wir für x und y ihre Werthe:

$$2) \quad x = r. \cos. \psi$$

$$3) \quad y = r. \sin. \psi$$

substituiren, und die negative Bezeichnung, welche sich nur auf die Richtung, nicht auf die Größe der Linien bezieht, außer Acht lassen, folgender Zusammenhang zwischen der wahren und der verbesserten Polhöhe hervorgeht:

$$I. \quad \text{tang. } \psi = \frac{b^2}{a^2} \text{ tang. } \beta.$$

Den Werth von r zu erhalten, berechnen wir x und y in Function des Winkels β aus der Subnormale $NP = y. \frac{dy}{dx}$, d. i. nach Einführung des Werthes von $\frac{dy}{dx} = y. \frac{b^2 x}{a^2 y} = \frac{b^2}{a^2} x$.

Es ist hiernach $y = PN. \text{tang. } \beta = \frac{b^2 x}{a^2} \text{ tang. } \beta$; und dieser Ausdruck mit dem obigen gleichbedeutenden, $\frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, zusammengestellt, giebt nach gehöriger Transformation:

$$4) \quad x = \frac{a}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ tang. } \beta^2\right)}}$$

$$5) \quad y = \frac{b^2}{a^2} \frac{a. \text{tang. } \beta}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ tang. } \beta^2\right)}}$$

Nun ist $r^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ tg. } \beta^2\right)} \cdot \left(1 + \frac{b^4}{a^4} \text{ tg. } \beta^2\right)$, folglich

$$r = a \sqrt{\frac{1 + \frac{b^4}{a^4} \text{ tang. } \beta^2}{1 + \frac{b^2}{a^2} \text{ tang. } \beta^2}}$$

und wenn wir, um diesen Ausdruck für numerische Berechnungen bequemer zu machen, für $\frac{b^2}{a^2} \text{ tang. } \beta$ seinen oben erhaltenen Werth $\text{tang. } \psi$ einführen:

$$r = a \sqrt{\frac{1 + \text{tang. } \psi^2}{1 + \text{tg. } \psi \text{ tg. } \beta}} = a \sqrt{\frac{\cos. \beta. \cos. \psi + \frac{\sin. \psi^2}{\cos. \psi} \cdot \cos. \beta}{\cos. \beta. \cos. \psi + \sin. \beta. \sin. \psi}}$$

oder

oder zusammengezogen

$$\text{II. } r = a \sqrt{\left\{ \frac{\cos. \beta}{\cos. \psi \cdot \cos. (\beta - \psi)} \right\}}.$$

Für den Aequator wird $r = a$, also der Umfang durch $2 a \pi$ und die Ausdehnung eines Grades durch (6) $g = \frac{a \pi}{180^\circ}$ ausgedrückt. Jeder andere, in einem der Parallelskreise genommene Längengrad, $g' = \frac{x \pi}{180^\circ}$, wird durch Substitution des Werthes von x aus (4):

$$\text{III. } g' = \frac{a \pi}{180^\circ \sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2. \beta^2\right)}} = \frac{g}{\sqrt{\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2. \beta^2\right)}}.$$

Als Ausdruck des elliptischen Bogens G , der einem beliebigen Grade der Breite entspricht, d. h. eines solchen, der sich zu beiden Seiten des Punktes, dessen Polhöhe man angiebt, gleich weit erstreckt, erhalten wir, MT , MS und TS als Differentiale der Größen s , x , y , betrachtend:

$$ds = - \frac{dx}{\sin. \beta}.$$

Nun giebt die Differenz der Gleichung (4)

$$dx = - a \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2. \beta^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{b^2}{a^2} \frac{\tan. \beta \cdot d\beta}{\cos. \beta^2} = - \frac{b^2}{a} \frac{\sin. \beta \cdot d\beta}{\cos. \beta^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2. \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Demnach ist:

$$(7) ds = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{d\beta}{\cos. \beta^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \tan^2. \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{b^2}{a} d\beta}{\left(\cos. \beta^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man die Differentiale als die Differenzen selbst ansieht, in deren Entwicklung sie als erste Glieder erscheinen, wozu man hier durch die Kleinheit der Bögen vollkommen berechtigt wird,

also $ds = G$ und $d\beta = \frac{\pi}{180^\circ}$ oder nach (6) $= \frac{g}{a}$ setzt:

$$\text{IV. } G = \frac{\frac{b^2}{a^2} g}{\left(\cos. \beta^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Für einen andern, unter der Breite β' gemessenen, Grad wäre mithin

$$G' = \frac{\frac{b^2}{a^2} g}{\left(\cos. \beta'^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta'^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Der Quotient dieser beiden Gleichungen ist:

$$(7) \quad \frac{G}{G'} = \left\{ \frac{\cos. \beta'^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta'^2}{\cos. \beta^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta^2} \right\}^{\frac{3}{2}}$$

und durch Transposition ergibt sich aus derselben

$$V. \quad \frac{b}{a} = \sqrt[3]{\frac{G^{\frac{2}{3}} \cos. \beta^2 - G'^{\frac{2}{3}} \cos. \beta'^2}{G^{\frac{2}{3}} \sin. \beta'^2 - G'^{\frac{2}{3}} \sin. \beta^2}}$$

Nach diesem Ausdrucke würde man das Verhältniß von a und b , mithin auch den Werth der Abplattung $\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ und durch Substitution in (IV) den Werth eines Grades im Aequator (g) berechnen, und aus diesem nach Gleichung (6) endlich die Ausdehnung der großen Axe ableiten können, wenn zwei unter verschiedenen Breiten gemessene Grade sammt den, ihnen entsprechenden, Polhöhen gegeben wären. Doch kann man mit Rücksicht auf den geringen Unterschied der beiden Axen a und b für die Abplattung eine bequemere Näherungsformel auf folgende Weise ableiten.

Die Gleichung (7) ist unter etwas veränderter Gestalt:

$$G \left(\cos. \beta^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta^2 \right)^{\frac{3}{2}} = G' \left(\cos. \beta'^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta'^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

oder entwickelt, nachdem $1 - \sin.^2$ für $\cos.^2$ substituirt worden:

$$\begin{aligned} G & \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin. \beta^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^2 \sin. \beta^4 - \text{etc.} \right\} \\ &= G' \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) \sin. \beta'^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^2 \sin. \beta'^4 + \text{etc.} \right\} \end{aligned}$$

In diesen Reihen können ohne merklichen Einfluß auf das Resultat der Rechnung alle Glieder nach dem zweiten vernachlässigt werden, weil sie aus sehr schnell abnehmenden Factoren bestehen. Dann bleibt uns der Ausdruck:

$$G - \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) G \sin. \beta^2 = G' - \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) G' \sin. \beta'^2.$$

Aus ihm ergibt sich:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{2(G' - G)}{3(G' \sin. \beta'^2 - G \sin. \beta^2)},$$

und wenn wir den Bruch $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ in $\frac{a - b}{a} \cdot \frac{a + b}{a}$ zerlegen, wobei man den Factor $\frac{a + b}{a}$ ohne merklichen Fehler = 2 annehmen darf, endlich die sogenannte Maupertuis'sche Formel:

$$\text{VI. } \frac{a - b}{a} = \frac{G' - G}{3(G' \sin. \beta'^2 - G \sin. \beta^2)}.$$

Aus dem berechneten Werthe der Abplattung findet sich das Verhältniß $\frac{b}{a}$, so wie die Werthe von g , a und b auf dem oben bezeichneten Wege. Um endlich die Größe des Meridian-Quadranten Q aus derjenigen der beiden gemessenen Grade herzuleiten, bedarf es einer vollständigen Rectification der Ellipse, nach Formel (7) angedeutet durch:

$$s = \frac{b^2}{a} \int \frac{d\beta}{\cos. \beta^3 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg.} \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

oder in etwas veränderter Gestalt, nachdem statt des Axenverhältnisses $\frac{a}{b}$ die Excentricität

$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ eingeführt ist:

$$s = a(1 - e^2) \int \frac{d\beta}{(1 - e^2 \sin. \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Die Entwicklung der Integrande nach der Formel des Binomiums giebt:

$$d\beta + \frac{3}{2} e^2 \sin. \beta^2 d\beta + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \sin. \beta^4 d\beta + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \sin. \beta^6 d\beta + \text{etc.}$$

Daß, auf dem Wege der Reduction erhaltene, Integrationschema für alle Glieder dieser Reihe ist

$$\begin{aligned} \int \sin. \beta^{2r} d\beta = & - \left\{ \frac{\sin. \beta^{2r-1}}{2r} + \frac{(2r-1) \sin. \beta^{2r-3}}{2r(2r-2)} + \dots + \frac{(2r-1)(2r-3) \dots 5 \cdot 3 \sin. \beta}{2r(2r-2) \dots 4 \cdot 2} \right\} \cos. \beta \\ & + \frac{(2r-1)(2r-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2r(2r-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \beta \end{aligned}$$

und die nach ihm vollzogene Integration giebt für die einzelnen Glieder:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} e^2 \int \sin. \beta^2 d\beta &= \frac{3}{2} e^2 \left\{ - \left(\frac{\sin. \beta}{2} \right) \cos. \beta + \frac{1}{2} \beta \right\} \\ \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int \sin. \beta^4 d\beta &= \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \left\{ - \left(\frac{\sin. \beta^3}{4} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \sin. \beta \right) \cos. \beta + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \beta \right\} \\ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int \sin. \beta^6 d\beta &= \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left\{ - \left(\frac{\sin. \beta^5}{6} + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4} \sin. \beta^3 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \sin. \beta \right) \cos. \beta + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \beta \right\}\end{aligned}$$

u. s. w.

Der vollständige Werth des Integrals ist daher, weil man keine Constante hinzuzufügen braucht, da mit $\beta = 0$ zugleich $\sin. \beta$ und $s = 0$ werden:

$$s = a(1 - e^2) \left\{ \begin{aligned} &\left(1 + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} e^2 + \frac{5 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2} e^4 + \frac{7 \cdot 5^2 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} e^6 + \text{etc.} \right) \frac{\beta \pi}{180^\circ} \\ &- \left(\frac{3}{2^2} e^2 + \frac{5 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2} e^4 + \frac{7 \cdot 5^2 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} e^6 + \text{etc.} \right) \sin. \beta. \cos. \beta \\ &- \left(\frac{5 \cdot 3}{4^2 \cdot 2} e^4 + \frac{7 \cdot 5^2 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2} e^6 + \text{etc.} \right) \sin. \beta^3. \cos. \beta \\ &- \left(\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{6^2 \cdot 4 \cdot 2} e^6 + \text{etc.} \right) \sin. \beta^5 \cos. \beta \dots \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Um aus diesem allgemeinen Ausdruck des elliptischen Bogens AM denjenigen des Quadranten AMB abzuleiten, dürfen wir nur $\beta = 90^\circ$ setzen, wodurch alle, mit dem Factor $\cos. \beta$ behafteten, Glieder verschwinden. Demnach ist

$$\text{VII. } Q = a(1 - e^2) \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} e^2 + \frac{5 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2} e^4 + \frac{7 \cdot 5^2 \cdot 3^2}{6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} e^6 + \text{etc.} \right\}$$

Um mit Hülfe der hier entwickelten Formeln die wirklichen Dimensionen des Erdkörpers in einem gegebenen Längenmaasse und seine Abplattung zu erfahren, möge der, unter dem Aequator zu 56735 Toisen gefundene Breitengrad mit dem, unter dem 45sten Grade der Breite gemessenen, welcher 57012 Toisen betrug, zusammengestellt werden. Die Einführung dieser beiden Zahlenwerthe in die Gleichung V. giebt, indem $\cos. \beta = 1$, $\sin. \beta = 0$ wird:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{56735^{\frac{2}{3}} - 57012^{\frac{2}{3}} \cdot \cos. 45^\circ}{57012^{\frac{2}{3}} \cdot \sin. 45^\circ}}$$

Dieser Ausdruck fordert folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \log. 56735 &= \frac{2}{3} \cdot 4,7538511 = 3,1692340 \\ &\text{ist log. } 1476,5 \\ \frac{2}{3} \log. 57012 &= \frac{2}{3} \cdot 4,7559663 = 3,1706442 \\ + 2 \log. \cos. 45^\circ &= 2 \cdot 9,8494850 = 9,6989700 \\ &\hline &2,8696142 \\ &\text{ist log. } 740,65 \end{aligned}$$

Eben diesen Werth finden wir für den Divisor, da $\sin. 45^\circ = \cos. 45^\circ$; mithin ist die Radicalgröße

$$\begin{aligned} \sqrt{\left\{ \frac{1476,5 - 740,65}{740,65} \right\}} &= \sqrt{\frac{735,85}{740,65}} \\ \log. 735,85 &= 2,8667893 \\ - \log. 740,65 &= 2,8696142 \\ &\hline &1,9971751 - 2 \\ &\quad : 2 \\ &\hline &0,9985375 - 1 \end{aligned}$$

Die, diesem Logarithmus entsprechende, Zahl ist $\frac{9985375}{10000000} = \frac{3987}{40000}$, oder sehr nahe $\frac{308}{309}$, woraus sich die Abplattung zu $\frac{1}{309}$ findet. Eben diesen Werth erhalten wir durch Anwendung der Maupertuis'schen Formel (VI.)

$$\frac{a - b}{a} = \frac{57012 - 56735}{3(57012 \cdot \sin. 45^\circ)^2} = \frac{277}{85518} = \frac{1}{309}.$$

Der Werth eines Längengrades im Kreise des Erdäquators ergibt sich durch Substitution von $\frac{b}{a} = \frac{308}{309}$ in den vierten Ausdruck:

$$\begin{aligned} g &= \frac{G \left(\cos. \beta^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin. \beta^2 \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^2}{a^2}} \\ &= \frac{57012 \left(\frac{1}{2} + \left[\frac{308}{309} \right]^2 \cdot \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{308}{309} \right)^2} = \frac{57012 \left(\frac{190345}{190962} \right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{94864}{95481} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \log. 190345 = 5,2795415 \\
 - \log. 190962 = 5,2809470 \\
 \hline
 1,9985945 - 2 \\
 \cdot \frac{3}{2} \\
 \hline
 0,9978917 - 1 \\
 + \log. 57012 = 4,7559663 \\
 \hline
 4,7538580 \\
 \log. 94864 = 4,9771014 \\
 - \log. 95481 = 4,9799170 \\
 \hline
 0,9971844 - 1
 \end{array}$$

$$\text{Unterschied} = 4,7566736 = \log. g.$$

Hiernach findet sich $g = 57105$ Toisen. Noch einfacher würden wir durch Substitution der correspondirenden Werthe $G = 56735$, $\beta = 0$ zu eben demselben Resultate gelangt seyn, weil in diesem Falle $\cos. \beta = 1$, $\sin. \beta = 0$ wird. Die Dimension des gebräuchlichen Längenmaaßes — einer Meile, deren 15 auf einen Grad des Erdäquators gerechnet werden — findet sich hiernach zu $\frac{1}{15} \cdot 57105 = 3807$ Toisen.

Um ein Beispiel zu geben, wie jeder andere, in einem beliebigen Parallellkreise des Erdellipsoids genommene Längengrad sich nach der dritten der entwickelten Formeln berechnet, wollen wir die Ausdehnung eines solchen suchen, der dem 45ten Grade der Breite entspricht. Da $\tan g. 45^\circ = 1$, so zieht sich der Ausdruck (III) zusammen auf

$$\begin{aligned}
 g' &= \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{57105}{\sqrt{\frac{190345}{95481}}} \\
 \log. 57105 &= 4,7566741 \\
 \log. 190345 &= 5,2795415 \\
 - \log. 95481 &= 4,9799170 \\
 \hline
 0,2996245 \\
 : 2 \\
 \hline
 0,1498122 \\
 \hline
 4,6068619 &= \log. g'.
 \end{aligned}$$

Der Werth eines Längengrades unter dem 45ten Grade der Breite ergibt sich hiernach zu 40445 Toisen.

Die Länge der großen Ase des elliptischen Erdmeridians in eben diesem Längenmaaße finden wir nach Formel (6), wenn $g = 57105$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} a &= \frac{57105 \cdot 180}{\pi} \\ \log. 57105 &= 4,7566741 \\ + \log. 180 &= 2,2552725 \\ &= 7,0119466 \\ - \log. \pi &= 0,4971499 \\ &= 6,5147967 = \log. a. \end{aligned}$$

Die Tafeln geben $a = 3271870$ Toisen; durch Division dieses Zahlenwerthes mit 3807 erhalten wir seine Ausdehnung in geographischen Meilen angegeben $= 859,44$, wie sie einfacher aus der Gleichung $2a\pi = 15.360$ folgt. Hieraus ergibt sich der Werth von $b = \frac{308}{309} a$ zu 3261286 Toisen oder 856,75 Meilen.

Jeden andern, zu einem beliebigen Punkte der Erdoberfläche führenden Radius des Erdellipsoids finden wir nach Formel II., nachdem der Werth der verbesserten Polhöhe ψ nach I. berechnet worden. Werde der Erdradius für den 45ten Grad der Breite gesucht, so ist

$$\text{tang. } \psi = \frac{b^2}{a^2} = \frac{94864}{95481}.$$

Als Differenz der Logarithmen dieser Zahlenwerthe fanden wir oben den Logarithmus 9,9971844, der unter denen der Tangenten dem Winkel von $44^\circ 48' 51'' = \psi$ entspricht. Der Ausdruck von r in Toisen für die Polhöhe von 45° ist daher:

$$\begin{aligned} r &= 3271870 \sqrt{\frac{\cos. 45^\circ}{\cos. 44^\circ 48' 51'' \cdot \cos. 11' 9''}} \\ \log. \cos. 45^\circ &= 9,8494850 \\ \log. \cos. 44^\circ 48' 51'' &= 9,8507891 \\ + \log. \cos. 11' 9'' &= 9,9999977 \\ &= 9,8507868 \\ \text{Diff.} &= 9,9986982 - 10 \\ &= 2 \\ &= 4,9993491 - 5 \\ + \log. 3271870 &= 6,5147967 \\ &= 6,5141458 = \log. r, \end{aligned}$$

also $r = 3266975$ Toisen oder 858,153 geographische Meilen.

Die letzte numerische Berechnung, welche uns übrig bleibt, betrifft die Ausdehnung des elliptischen Meridian-Quadranten, wofür in (VII.) der allgemeine Ausdruck gegeben ist. Das in ihm enthaltene $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ist nach den obigen Zahlenwerthen $= \frac{617}{97481}$ oder 0,0064622, mithin

$1 - e^2 = 0,9935378$; die Logarithmen der drei ersten Potenzen von e^2 sind:

$$\log. e^2 = 0,8103682 - 3$$

$$\log. e^4 = 0,6207364 - 5$$

$$\log. e^6 = 0,4311046 - 7$$

Die Coefficienten dieser Potenzen in (VII) sind zusammengezogen: $\frac{3}{4}$, $\frac{45}{64}$, $\frac{1575}{2304}$; mithin nimmt die Rechnung folgenden Gang:

$$\log. e^2 = 0,8103682 - 3$$

$$+ \log. 3 = 0,4771213$$

$$+ \text{Compl. log. } 4 = 9,3979400$$

$$\hline 0,6854295 - 3$$

$$\text{ist log. } 0,00484651$$

$$\log. e^4 = 0,6207364 - 5$$

$$+ \log. 45 = 1,6532125$$

$$+ \text{C. log. } 64 = 9,1938200$$

$$\hline 0,4677689 - 5$$

$$\text{ist log. } 0,00002936$$

$$\log. e^6 = 0,4311046 - 7$$

$$+ \log. 1575 = 3,1972806$$

$$+ \text{C. log. } 2304 = 6,6375175$$

$$\hline 0,2659027 - 7$$

$$\text{ist log. } 0,00000018$$

Den Zahlenwerth der Reihe, welche als Factor in VII auftritt, erhalten wir also durch folgende Addition:

$$1,00000000$$

$$0,00484651$$

$$0,00002936$$

$$0,00000018$$

$$\hline 1,00487605$$

Der übrige Calcul ist einfacher, weil wir es nunmehr nur mit Factoren zu thun haben:

$$\log. (1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \text{etc.}) = 0,0021124$$

$$+ \log. a = \log. 3271870 = 6,5147967$$

$$+ \log. (1 - e^2) = \log. 0,9935378 = 0,9971843 - 1$$

$$+ \log. \pi = \log. 3,14159.. = 0,4971499$$

$$\hline 7,0112433$$

$$- \log. 2 = 0,3910300$$

$$\hline \log. Q = 6,7102133$$

Die Tafeln geben $Q = 5131132$ Toisen, und der zehnmillionste Theil dieser Länge, welcher als Längeneinheit des neuen französischen Systems angenommen worden, berechnet sich aus dieser Angabe (die Toise = 864 Linien gesetzt) zu $443'',33$, von dem gesetzlich bestimmten Metre ($443,296$ Linien) um $0'',035$ abweichend.

Die Richtigkeit der im Vorhergehenden berechneten Abplattung und Dimensionen des Erdbörpers beruhet sowohl auf derjenigen der elliptischen Hypothese, als der Gradmessungen, deren Resultate hier zum Grunde gelegt wurden. Gegen beide Voraussetzungen, vorzüglich gegen die erstere, lassen sich indessen Zweifel erheben, die um so mehr gerechtfertigt erscheinen, wenn man die bisher angestellten Gradmessungen zusammenstellt und in den, aus ihnen gefolgerten, Werthen der Abplattung eine so auffallende Verschiedenheit wahrnimmt.

Die bedeutendsten Operationen dieser Art und ihre Resultate sind folgende:

Gradmessungen ausgeführt durch	Ort.	Breite.	Länge des Grades.	Abplat- tung.
1. Bouguer	Peru	0° 0'	56735 L.	...
2. La Caille	Afrika	33 18	57040	$\frac{1}{169}$
3. Mason	Pensylvanien	39 12'	56888	$\frac{1}{445}$
4. Boscovich	Italien	43 0	56979	$\frac{1}{324}$
5. Delambre	Frankreich	45 0	57012	$\frac{1}{309}$
6. Cassini	Frankreich	49 23	57074	$\frac{1}{291}$
7. Mudge	England	52 2	57069	$\frac{1}{319}$
8. Swanberg	Lappland	66 20	57193	$\frac{1}{314}$

Wäre die Erde in der That ein Ellipsoid, so müßten alle Gradmessungen, wenigstens sehr nahe, dieselbe Abplattung ergeben, sey es, daß sie sämmtlich mit der unter dem Aequator vollzogenen, oder je zwei unter einander verglichen würden. Die Abweichungen, welche hier aber hervortreten, sind zu bedeutend, als daß sie sich durch vermeidliche Fehler der Messungen erklären ließen; vielmehr deuten sie auf eine, von der elliptischen abweichende, Gestalt der Erde hin. Ja, die Messung von Lacaille am Vorgebirge der guten Hoffnung, wodurch er einen Grad unter dem 33sten Grade südlicher Breite größer, als den unter dem 45sten Grade nördlicher Breite gemessenen, fand, führt zu der Vermuthung, daß beide Hemisphären des Erdkörpers von ungleicher Gestalt sind. Doch darf man dieser einzelnen, noch dazu mit unvollkommenen Hülfsmitteln ausgeführten, Operation kein zu großes Gewicht beilegen, noch von ihr die Entscheidung der obigen Frage erwarten. Mag aber auch die Erfahrung in der Folge durch unverwerfliche Beweise die Abweichung des Erdkörpers von der elliptischen Gestalt darthun, so wird es für astronomische und geographische Zwecke stets hinreichend seyn, ihn als ein Ellipsoid mit demjenigen Axenverhältnisse, welches den Resultaten der Gradmessungen am nächsten entspricht, zu betrachten. Die bei den Operationen in Frankreich, wie in England gemachte Bemerkung, daß die Zunahme in der Ausdehnung der Breitengrade des gemessenen Meridianbogens größer war, als es die, aus Vergleichung mit der Gradmessung unter dem Aequator geschlossene, Ellipticität erlaubte, widerstreitet der Hypothese, von welcher wir bei unserer Berechnung ausgingen, nicht so entschieden, wenn man bedenkt, daß durch die ungleiche Dichtigkeit der Erde, wie die Unebenheiten ihrer Oberfläche die Richtung der Schwere, also auch die Lage des Zeniths und dadurch die Höhen oder Zenithdistanzen der Sterne verändert werden können; mithin das Resultat, welches wir für die Krümmung des Meridianbogens finden, von der Zusammensetzung der Materie, wie der Unregelmäßigkeit der Erdoberfläche stets abhängig erscheint.

Siebenzehntes Capitel.

Von den Darstellungen der Erdoberfläche.

Die genaue Bestimmung einzelner bemerkenswerther Punkte auf unserer Erde darf als eigentliche Vorarbeit für das letzte Geschäft der mathematischen Geographie: "Darstellung der Erdoberfläche im verjüngten Maaßstabe" betrachtet werden. Eine solche Darstellung, welche von den Gränzen der physischen Beschaffenheit der Oberfläche, von der Gestalt der Länder und Meere, den Richtungen der Ströme und Gebirge, der Lage von Berggipfeln und Städten, ein geometrisches Bild liefert, ist eines der wichtigsten Resultate jener Methoden der geographischen Ortsbestimmung, von denen in früheren Capiteln die Rede war. Ihre Anwendung liefert freilich nur einzelne zerstreute Punkte zu dem ganzen geometrischen Bilde, aber gerade die festen unveränderlichen Stützpunkte der übrigen Construction, deren Vollendung durch terrestrische Messungen das Geschäft der Geodäsie und practischen Geometrie wird.

Ein vollkommen treues Bild der Erdoberfläche erhalten wir nur in einer Kugel, auf welcher die Lage aller einzelnen Punkte unter denselben Winkeln, wie sie die Beobachtung ergab, und die Umgränzungen der Länder und Meere in ähnlichen, in dem Verhältniß des Durchmessers verkleinerten, Formen erscheinen. Bei den geringen Dimensionen solcher künstlichen Darstellungen der Erdkugel ist die Abplattung von $\frac{1}{309}$ des Durchmessers zu unbedeutend, als daß sie eine Modification der Kugelform veranlassen könnte; diese stellt daher mit hinlänglicher geometrischer Genauigkeit die Gestalt des Erdkörpers dar.

Auf der, zu einem künstlichen Erdglobus bestimmten, Kugel muß man zuerst zwei Endpunkte eines Durchmessers als Pole festlegen, um von ihnen aus das geometrische Netz der Meridiane und Parallelen zu construiren, in welches die einzelnen Theile der Oberfläche eingetragen werden können. Der in die Mitte zwischen die Pole fallende Kreis des Aequators wird von 10 zu 10 Graden von einzelnen Meridianen durchschnitten, und in gleichen Abständen durchkreuzen Parallelkreise wiederum die Meridiane zu beiden Seiten des Aequators. Außerdem bezeichnet man unter diesen die, in $23\frac{1}{2}^{\circ}$ und $66\frac{1}{2}^{\circ}$ nördlicher und südlicher Breite liegenden Wende- und Polarkreise. In dieses vollendete Kugelnetz werden alsdann alle einzelnen Punkte nach ihrer geographi-

sehen Länge und Breite mit Sorgfalt eingetragen, und die Umrisse der verschiedenen Theile der Erdoberfläche so hineingezeichnet, daß sie sich dem Auge in ihrer wahren Gestalt und verhältnißmäßigen Größe verkleinert darstellen *).

Solche künstliche Erdkugeln, in denen die Erdare durch eine materielle Drehungsaxe versinnlicht wird, ruhen mit den Endpunkten derselben in einem festliegenden Meridiankreise, welcher einen andern, durch vier Quadranten an ein Fußgestell befestigten, größten Kreis — den Horizont darstellend — vertical durchschneidet, so daß beide einander in zwei gleiche Hälften theilen. Die, in diesen beiden Kreisen um ihre Ase drehbare Kugel gewährt für die sinnliche Anschauung das vortheilhafteste Mittel der Erklärung, wo die geometrische Einbildungskraft auf anderm Wege nicht ausreichen will; von wenigem Nutzen ist hingegen die, auf mechanische Lösung geographischer Aufgaben berechnete Verbindung derselben mit dem eingetheilten Horizont und Meridian, an welchem letzteren sich um den Nordpol noch ein kleiner, in 24 gleiche Theile zerlegter, Kreis — der sogenannte Stundenring — mit einem beweglichen Zeiger befindet. Der Gebrauch dieser Einrichtungen ergibt sich bei einiger Aufmerksamkeit so leicht, daß er keine besondere Erwähnung verdient.

Die Gestalt der Kugel wird auch wohl, wenn freilich nur sehr mangelhaft, durch die eines Kegels in den sogenannten Conigloben ersetzt, deren man sich indessen häufiger zur Darstellung der Hemisphären des Himmels als derjenigen der Erde bedient. Auf ihnen erscheint die sphärische Oberfläche so dargestellt, wie sie sich in den Richtungen der Radien auf der Oberfläche des Kegels entwerfen, oder vom Mittelpunkte aus wahrgenommen werden müßte. Nehmen wir den Radius der Kugel (Fig. 28.) $CB = r$ an, so ist die Hypothenuse des in ihr enthaltenen Kegels $DB = r\sqrt{2}$ und die Peripherie der Basis $= 2r\pi$. Seine gekrümmte Oberfläche läßt sich mithin in einer Ebene als überstumpfer Kreisausschnitt entwickeln, indem man von einem, mit dem Radius $r\sqrt{2}$ construirten, Kreise, einen Bogen abschneidet, an Länge $= 2r\pi$. Der demselben entsprechende Winkel ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{2r\sqrt{2} \cdot \pi}{360^\circ} = \frac{2r\pi}{x}.$$

$$\text{Folglich } x = \frac{360^\circ}{\sqrt{2}} = 180^\circ \cdot \sqrt{2} = 254^\circ 33' 28''.$$

*) Diese Art der Construction eines künstlichen Erdglobus würde aber bei practischer Ausführung auf mancherlei Hindernisse stoßen, und immer nur ein Exemplar liefern, während man durch Zeichnung einzelner Theile der Erdoberfläche in ebenen Kreissegmenten (die durch den Kupferstich vervielfältigt werden) auf eine leichtere Weise zu mehreren Exemplaren gelangt.

Wenn der Punkt D den Pol, die Richtung AB den Aequator bezeichnet, so entwerfen sich die Meridiane als gerade Linien auf der Kegelfläche, deren Abstände in der, als Kreisbogen entwickelten, Basis, wenn sie von 10 zu 10 Graden gezogen worden, $\frac{180^\circ \cdot \sqrt{2}}{36} = 5^\circ \sqrt{2}$ betragen. Die Theilungspunkte, durch welche die Meridiane geführt werden müssen, finden sich also durch 36maliges Abtragen der Sehne $2 \sin. \frac{5^\circ \cdot \sqrt{2}}{2}$ im Bogen des Kreissectors, oder wenn die Construction unmittelbar auf dem Keg. vorgenommen werden soll, durch Theilung der Basis-Peripherie $2\pi r$ in 36 gleiche Theile mittelst der Sehne $2 \sin. \frac{1}{2} 10^\circ$. Der Radius De, mit welchem der Parallelkreis eines Ortes E zu construiren ist, dessen geographische Breite durch β bezeichnet werden mag, berechnet sich nach der Formel:

$$\frac{De}{\sin. DCE} = \frac{DC}{\sin. DeC}$$

$$\text{oder } De = \frac{r \cdot \sin. DCE}{\sin. (DBC + BCE)} = \frac{r \cdot \cos. \beta}{\sin. (45^\circ + \beta)}$$

Bei weitem wichtiger, als diese künstlichen Hülfsmittel, von dem Erdkörper ein Bild zu geben, die wegen ihrer Form zu unbequem für den Gebrauch, wegen der nothwendigen Kleinheit ihrer Dimensionen zu unzulänglich für eine genaue Darstellung der Erdoberfläche erscheinen, sind jene Constructionen in ebener Fläche, die unter dem Namen von Charten uns die Gestalt der Länder und Meere versinnlichen. Da die Aufgabe, ein vollkommen ähnliches Bild der Erdoberfläche zu liefern, von einer Zeichnung in ebener Fläche unmöglich befriedigt werden kann, so muß man sich hier auf die gemäßigste Forderung beschränken: daß die Gestalt der gebogenen Gränzen und der räumliche Inhalt der gekrümmten Oberfläche mit einer, der Wahrheit möglichst nahe kommenden Treue dargestellt werde. Man wird dieser Forderung nach dem Umfange des darzustellenden Flächenraums mehr oder weniger Genüge leisten können; besondere Zwecke (wie die des Seefahrers) billigen aber auch solche Entwerfungsarten, die auf die Erhaltung der Aehnlichkeit in den Figuren keine Rücksicht nehmen.

Die mannichfachen Methoden, deren man sich bedient, um Punkte der Erdoberfläche auf eine ebene Fläche zu beziehen oder zu projectiren, lassen sich nach den verschiedenen Grundsätzen, worauf sie beruhen, in folgende Hauptclassen bringen:

- I. Orthographische Projection.
- II. Perspectivische Projection.
 - a. Central = Projection.
 - b. Stereographische Projection.
- III. Projection durch Abwicklung.

Die beiden ersten Entwurfungsarten eignen sich vorzugsweise für die Darstellung eines sehr bedeutenden Theils der Erdoberfläche, während man kleinere Theile weit zweckmäßiger und genauer mit Hilfe der dritten Projections-Methode entwirft. Von ihr sey also späterhin die Rede, wenn wir die Construction ausführlicherer Charten betrachten, indeß wir hier die Untersuchung verfolgen, wie man sich von der ganzen Erdkugel ein Bild in ebener Fläche verschaffen könne?

Die orthographische Projection ist die, in der practischen Geometrie gebräuchliche, Beziehung aller Punkte einer gekrümmten Oberfläche auf eine, in bestimmter Richtung durch sie gelegte Ebene, indem aus jenen Punkten gefällte Perpendikel denselben ihren Platz in der Basis-Ebene anweisen. Um von dieser Projection für die Darstellung der Erdkugel Gebrauch zu machen, denken wir uns eine Ebene durch den Mittelpunkt derselben gelegt, auf welche durch Perpendikel die auf der, über ihr liegenden, Halbkugel enthaltenen Punkte und Begrenzungen entworfen werden. Da die Oberfläche einer Kugel durch den vierfachen Flächenraum ihres größten Durchschnittskreises gemessen wird, so drängt die orthographische Projection die ganze Oberfläche der Hemisphäre auf einen halb so großen Raum zusammen, wobei nur die in die Mitte des Kreises fallende Zeichnung ähnlich gerathen wird, während die, nach dem Rande der Halbkugel zu liegenden Figuren der Länder sehr verengt und zusammengezogen in der Projections-Ebene erscheinen. Diese nach dem Rande hin zunehmende Verkürzung erkennt man am deutlichsten, wenn man in einem Quadranten aus der zu projectirenden Hemisphäre (Fig. 29.) zwei gleiche Bögen PD und EB aus P und B abträgt, welchen in der Projections-Ebene die durchaus ungleichen Linien Cd und eB entsprechen. Es soll also in den Raum eB eine gleiche Menge von Punkten verzeichnet werden, wie in Cd, wodurch die Gestalt der Länder hier sehr undeutlich und verzerrt ausfallen muß. Die Entfernung eines Punktes der Charte von ihrem Mittelpunkt ist überhaupt $= r. \sin. \alpha$, wenn wir uns unter r den Halbmesser eines fingirten Erdglobus denken, der eine, durch den Zweck der Charte bestimmte, Länge hat.

Ein ganz anderes Bild der Hemisphäre liefern die perspectivischen Projections-Arten, ausgehend von der Annahme, das Auge befinde sich an einem bestimmten Punkte und beziehe die Gegenstände, die es auf der Halbkugel wahrnimmt, durch die Richtungen, unter welchen sie ihm erscheinen, auf eine hinter oder vor sie gestellte Ebene. Denkt man sich der Central-Projection gemäß das Auge im Centrum des Erdglobus und die Projections-Ebene mit dem höchsten Punkte der darzustellenden Halbkugel in Berührung, der zugleich Mittelpunkt der Charte wird, so fallen die einzelnen Punkte der Oberfläche in immer größere Abstände von einander, je näher sie dem Rande liegen, und zuletzt in so große Entfernungen hinaus, daß man von dieser Ent-

werfungsart zur Darstellung einer ganzen Hemisphäre gar keinen Gebrauch machen kann, sondern sich damit auf einen kleineren Theil der Erdoberfläche beschränken muß. Denn die Entfernungen der Punkte d' , e' vom Mittelpunkt der Charte, P , stehen im Verhältniß der Tangenten jener Winkel oder Kreisbögen, um welche D und E vom Berührungspunkt auf der Kugel entfernt liegen; der allgemeine Ausdruck $r. \tan \alpha$ giebt aber für Bögen, die 90° nahe kommen, so unverhältnißmäßig wachsende Werthe, daß sie für die Construction über eine gewisse Gränze hinaus nicht mehr angewandt werden können.

Zweckmäßiger, als beide vorhergehenden Entwerfungsarten, die im entgegengesetzten Sinne die Figur der Erdoberfläche nach dem Rande der Hemisphäre hin verunstalten, erscheint für unsere Absicht die stereographische Projection, welche das Auge im Umfange der Kugel, dem Mittelpunkt der darzustellenden Hemisphäre genau gegenüber, annimmt, so daß durch die, von ihm ausgehenden Richtungen sämtliche Punkte derselben sich auf der, durch die Kugel gelegten Durchschnitts-Ebene entwerfen. Das Centrum der Kugel wird hier zugleich Mittelpunkt der Charte, und die Abstände Cd'' , Ce'' , welche den gleichen Bögen PD , DE entsprechen, gerathen hier nie in ein auffallendes Mißverhältniß, weil der allgemeine Ausdruck der Entfernung, $Cd'' = r. \tan \frac{1}{2} \alpha$ mit der Tangente von 45° bereits den äußersten Rand der Hemisphäre erreicht. Man wählt daher diese Projection, welche die Länder ziemlich in ihrer verhältnißmäßigen Größe darstellt, und die Gestalt derselben am wenigsten ändert, vorzüglich zur Entwerfung von Planigloben.

Das geographische Netz von Meridianen und Parallelkreisen, welches die Erbkugel umzieht, entwirft sich bei der Anwendung der genannten drei Projections-Methoden unter den mannichfaltigsten Formen auf einer ebenen Fläche, je nachdem man einen der beiden Pole, einen Punkt des Aequators oder irgend einen andern beliebigen Ort der Erdoberfläche als Mittelpunkt der zu entwerfenden Hemisphäre wählt. Im ersten Falle, wo der Aequator die Charte begränzt, heißt die Projection eine Polar-Projection; im zweiten, wo derselbe als Durchmesser die kreisförmige Zeichnung durchschneidet, die von einem Meridian eingeschlossen wird, Aequatorial-Projection; und im dritten endlich, wo die Kreisfläche als Durchschnitt der Erbkugel mit dem wahren Horizont eines beliebigen Orts ihrer Oberfläche erscheint, wird sie zu einer Horizontal-Projection. Augenscheinlich begreift diese letztere Annahme, als die völlig allgemeine, jene beiden andern in sich, und die Resultate, zu welchen wir durch die, in Beziehung auf sie allein angestellte, Untersuchung gelangen, werden leicht auf jene speciellen Fälle angewandt werden können, wodurch man einer ermüdenden Wiederholung der Betrachtungen entgeht.

Bei der orthographischen Horizontal-Projection, wo die darzustellende Hemisphäre von der Projections-Ebene wie in Fig. 30. durchschnitten erscheint, sind sowohl die Parallelkreise, als die Meridiane, von denen die Kugel umzogen ist, gegen die Durchschnitts-Ebene geneigte Kreise, die als Grundflächen eines Cylinders angesehen werden können, welcher dann entsteht, wenn wir ein Perpendikel in ihrem Umfange umherführen. Die Projections-Fläche durchschneidet aber alle jene schiefen Cylinder senkrecht, mithin in Ellipsen, die Meridiane und Parallelen theils als geschlossene Curven, theils unvollständig darstellend. Das nächste Erforderniß, um die Charte einer Hemisphäre nach dieser Entwerfungsart zu construiren, ist die Kenntniß der geographischen Breite des, in ihren Mittelpunkt fallenden, Orts B, weil dieselbe mit der Neigung der Erdoberfläche gegen die horizontale Durchschnittsebene (der Polhöhe TCP) übereinstimmt. Der Pol P projecirt sich alsdann in einer Entfernung $cp = r. \cos. \beta$ vom Mittelpunkte der Charte. Die Ellipsen, welche ihn umgeben, haben die wirklichen Durchmesser der Parallelen zu ihren großen Axen (2 a), während eben diese Durchmesser in der Richtung ht auf die Grundebene entworfen, sich zu den kleinen Axen (2 b) verkürzen. In der elliptischen Projection des Parallelkreises DE, dessen Breitenabstand vom Aequator, AD, durch δ bezeichnet werden mag, erhält man, weil $EDd = PCT$:

$$1) fg = r. \cos. \delta = a$$

$$2) fd = r. \cos. \delta. \sin. \beta = b.$$

Nach diesen Formeln berechnen sich die Dimensionen der einzelnen Ellipsen; ihre Lage bestimmt sich durch den Abstand des Anfangspunktes der kleinen Axe vom Mittelpunkte der Charte, ausgedrückt durch:

$$Cd = CD. \sin. BCD = r. \sin. (ACD - ACB) = r. \sin. (\delta - \beta).$$

Für Punkte zwischen A und B ist $\beta > \delta$, also $Cd = r. \sin. (\beta - \delta)$, und für solche endlich, die zwischen A und H fallen, verbindet sich der Breitenabstand AD additiv mit dem Bogen AB: also $Cd = r. \sin. (\beta + \delta)$.

Die wirkliche Construction eines Planiglobiums nach dieser orthographischen Horizontal-Projection fordert, daß man vermittelst der Werthe von a und b die Entfernung der Brennpunkte jeder Ellipse von ihrem Mittelpunkte nach dem Ausdruck $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ bestimme, und aus diesen beiden Punkten, welche auf einer, in dem Abstände $Cf = r. \cos. \beta. \sin. \delta$ vom Mittelpunkte der Charte zu errichtenden Perpendikuläre abzutragen sind, vermöge eines dazu geeigneten practischen Verfahrens die Curven construire.

Die Ellipsen, in welchen sich die Meridiane auf den Planiglobien projeciren, müssen einander sämmtlich im Punkte p durchschneiden. Ihre großen Axen (KG, Fig. 31.) sind Durchmesser des Projections-

Projections-Kreises, weil sie die Endpunkte der, von ihm halbirten, Mittagskreise verbinden. Ihre Lage gegen die geradlinigte Projection HT des mittlern Meridians, d. h. den Bogen $GT = HK$, findet man bei Betrachtung des rechtwinklichten sphärischen Dreiecks $P GT$, in welchem der Winkel bei $P = \gamma$ (der Abstand der Meridiane auf der Kugel) und die Seite $PT = \beta$ gegeben ist, in der Formel:

$$3) \quad \text{tang. } GT = \text{tang. } \gamma \cdot \sin. \beta.$$

Der Neigungswinkel des Meridians gegen die Grundfläche wird ausgedrückt durch

$$4) \quad \cos. G = \cos. \beta \cdot \sin. \gamma.$$

Hiernach ist die halbe kleine Axc der elliptischen Meridian-Projection $Km G$:

$$5) \quad Cm = CM \cdot \cos. G = r \cdot \cos. \beta \cdot \sin. \gamma.$$

Die Construction erscheint mithin bei den Meridianen einfacher, als bei den Parallelen; indes ist die hier beschriebene Projections-Art mit so vielen Schwierigkeiten von der einen, und so vielen Mängeln von der andern Seite (wie wir oben sahen) verknüpft, daß sie sich in keiner Hinsicht empfiehlt. Dieser Vorwurf fällt indessen zum Theil hinweg, wenn man statt der Horizontal-Projection die orthographische Polar- oder Aequatorial-Projection wählt. Bei der ersteren rückt der Pol P (Fig. 30.) nach B , mithin p in den Mittelpunkt der Charte; β ist hier also $= 90^\circ$, und nach den vorstehenden Formeln 1) und 2) $b = a = r \cdot \cos. \delta$, d. h. die Parallelen entwerfen sich als concentrische Kreise, deren Halbmesser den Cosinus ihrer geographischen Breiten gleich sind. Die Meridiane hingegen stellen sich, weil in diesem Falle der Neigungswinkel ebenfalls $= 90^\circ$ ist, als gerade Linien dar, und die Gleichungen 3) 4) und 5) werden überflüssig.

Umgekehrt erscheinen in der orthographischen Aequatorial-Projection, wo $\beta = 0$ und nach 1) und 2) $b = 0$, $a = r \cdot \cos. \delta$ ist, sämtliche Parallelen als geradelinigte Chorden der Kreisfläche, während die Meridiane, mit Ausnahme des mittlern, sich als Ellipsen darstellen, deren gemeinschaftliche große Axc der (die beiden Pole verbindende) Durchmesser des Planiglobiums ist; der allgemeine Ausdruck der kleineren Axc (5) vereinfacht sich auf $Cm = r \cdot \sin. \gamma$.

Die Central-Projection bietet noch größere Schwierigkeiten in der Construction dar, als wir bei der vorhergehenden Entwerfungsart in ihrer allgemeinsten Annahme antrafen, und kann ohnehin — wie schon gezeigt ist — nur in gewissen Gränzen angewandt werden. Als Horizontal-Projection betrachtet hat sie nur den Vorzug, daß die Meridiane sich einander als gerade Linien durchschneiden. Dieß geschieht im Punkte p (Fig. 32.), wo die Richtung der Erdaxe die, die Hemisphäre berührende, Projections-Ebene antrifft, nach dem Grundsatz, daß zwei convergirende Ebenen von einer dritten, nicht parallelen, stets so durchschnitten werden, daß die Intersection

einen geradlinigten Winkel bildet. Da ferner diese Intersectionen einander gleich bleiben, wenn die Durchschnittsebenen, wodurch sie erzeugt worden, mit einander parallel laufen, so dürfen wir, um die Winkel aufzufinden, welche die übrigen Meridian-Projectionen mit der mittlern einschließen, nur den allgemeinen Ausdruck des Bogens GT suchen, der ihren Intersections-Winkel in der Ebene des Horizonts mißt. Wir fanden ihn bereits bei Betrachtung der orthographischen Projection:

$$\text{tang. } GT = \text{tang. } \gamma \cdot \sin. \beta$$

unter der Voraussetzung, daß β die Polhöhe für den Mittelpunkt der Charte, γ der veränderliche Abstand der Meridiane auf der Kugel von dem mittlern unter ihnen sey.

In Ansehung der Paralleltreise ist es leicht wahrzunehmen, daß sie sich hier theils als Ellipsen, theils als Hyperbeln auf der Projections-Ebene entwerfen werden; nur ein einziger kann sich auf ihr als Parabel darstellen. Es erzeugen sich nämlich, wenn wir vom Mittelpunkt der Hemisphäre ausgehende gerade Linien im Umfange der Parallelen umhergeführt denken, conische Oberflähen, die sämmtlich von jener Ebene durchschnitten werden, entweder durchaus oder in einer Ellipse, wenn das Complement der Breite, PE , des Paralleltreises DE kleiner ist, als die für die Construction gegebene Polhöhe β ; oder unbegrenzt, und zwar in einer Hyperbel, so bald jenes Complement die Polhöhe β übertrifft, $PI_1 = FP > PT$; der dritte denkbare Fall ist, daß die Polhöhe dem Complement der Breite gleich sey, $PT = PR$, so daß die Kugeloberfläche durch die mit ihrer Erzeugungslinie CT parallele Ebene geschnitten wird, wodurch eine parabolische Projection des Paralleltreises RT entsteht.

Der zweite der vorerwähnten Fälle: daß das Complement der Breite der Parallelen die gegebene Polhöhe übertreffe, tritt in seinem ganzen Umfange ein, wenn die centrale Aequatorial-Projection gefordert oder $\beta = 0$ gesetzt wird. Sämmtliche Paralleltreise entwerfen sich hier also, mit Ausschluß des Aequators, der sich in gerader Linie darstellt, als Hyperbeln, während die Projectionen der Meridiane dieselben geradlinigt, und weil $\text{tang. } GT = 0$ wird, parallel-laufend, durchkreuzen. Ihre Abstände vom Mittelpunkt der Charte verhalten sich, dem Princip dieser Entwerfungsart gemäß, wie die Tangenten der Winkel, welche die Meridianflächen in der Hemisphäre mit der mittlern unter ihnen einschließen.

Brauchbarer und leichter zu construiren erscheint die centrale Polar-Projection, da sie die Paralleltreise bei der senkrechten Lage der Erdoberfläche nicht mehr in Kegelschnitten, sondern in concentrischen Kreisen darstellt, deren Halbmesser im Verhältniß der Cotangenten ihrer geographischen Breiten stehen. Die Meridiane durchschneiden einander im Mittelpunkt der Charte unter denselben

Winkeln, wie auf der Kugel, indem $\sin. \beta = 1$, $\text{tang. } GT = \text{tang. } \gamma$ wird. Man bedient sich dieser Entwerfungsart sehr zweckmäßig zur Construction der Himmelscharten, welche die Circumpolar-Sterne in sich begreifen sollen; weniger für geographische Absichten, wo besonders auf Erhaltung der Aehnlichkeit in den darzustellenden Figuren gedrungen wird.

Von dieser Seite sowohl, als auch in Hinsicht der Leichtigkeit ihrer Construction empfiehlt sich vor beiden vorhergehenden die stereographische Projection (Fig. 33.), welche unter der allgemeinsten Annahme, daß die Hemisphäre für den Horizont eines gegebenen Orts entworfen werden solle, Meridiane und Parallelen als Kreisbögen darstellt. Dieß zu erweisen, müssen wir uns auf den, aus der Theorie der Kegelschnitte bekannten Satz beziehen: daß wenn ein schiefer Keil von zwei gegen die Schenkel eines beliebigen Axendurchschnitts seiner Oberfläche gleichviel geneigten Ebenen durchschnitten wird, dieser sogenannte Wechselschnitt des Kegels ähnliche, wenn auch in ihrer Größe verschiedene, Curven erzeugen wird.

In Ansehung der Parallelkreise und ihrer Projectionen erkennen wir ohne Mühe einen solchen Wechselschnitt in derjenigen conischen Oberfläche, welche durch Umherführung der Linie ND im Umfange des Kreises DE entstanden ist; denn die Winkel EDN und d e N, unter welchen dieselbe von den beiden Ebenen des Parallels und der Projection geschnitten wird, sind einander gleich, da jener den halben Bogen NE zu seinem Maaße hat, und mithin eben sowohl, als der letztere, den Winkel ENZ zu einem rechten ergänzt. Die conische Section d e ist folglich als Wechselschnitt von derselben Figur, wie DE, d. h. ein Kreis, und dasselbe gilt von den Projectionen aller übrigen Parallelen, nur daß ein Theil unter ihnen unvollständig oder als Kreisbögen erscheinen wird. Ihre Lage und Größe müssen wir in den Werthen des Abstandes Cd und des Halbmessers p d bestimmen. Ferner ist, wenn β die Polhöhe TCP, für welche die Charte construiert wird, δ den Breitenabstand des Parallelkreises DE bezeichnet:

$$1) \quad Cd = CN. \text{ tang. } \frac{1}{2} ZD = r. \text{ tang. } \frac{1}{2} (\delta - \beta).$$

Der allgemeine Ausdruck des Halbmessers findet sich folgendergestalt:

$$\frac{1}{2} de = \frac{1}{2} (Ce - Cd) = \frac{1}{2} CN (\text{tang. } \frac{1}{2} ZE - \text{tang. } \frac{1}{2} ZD)$$

$$\text{und da } ZE = ZP + PE = (90^\circ - \beta) + (90^\circ - \delta),$$

$$\frac{1}{2} de = \frac{1}{2} r [\cotg. \frac{1}{2} (\beta + \delta) - \text{tang. } \frac{1}{2} (\delta - \beta)]$$

$$= \frac{1}{2} r \left\{ \frac{\cos. \frac{1}{2} (\beta + \delta). \cos. \frac{1}{2} (\delta - \beta) - \sin. \frac{1}{2} (\beta + \delta). \sin. \frac{1}{2} (\delta - \beta)}{\sin. \frac{1}{2} (\beta + \delta). \cos. \frac{1}{2} (\delta - \beta)} \right\}$$

d. i. zusammengezogen:

$$2) \quad \frac{1}{2} de = \frac{r. \cos. \delta}{2 \sin. \frac{1}{2} (\beta + \delta). \cos. \frac{1}{2} (\delta - \beta)} = \frac{r. \cos. \delta}{\sin. \beta + \sin. \delta}$$

Um die Meridiane der Hemisphäre stereographisch zu projectiren, denken wir uns ebenfalls in ihrem Umkreise die gerade Linie NM (Fig. 34.) umhergeführt, und dadurch eine conische Oberfläche erzeugt, welche durch die beiden, um den Winkel M C m gegen einander geneigten, Ebenen des Meridians und der Projection geschnitten wird. Um zu beweisen, daß dieses unter gleichen Winkeln, also in einem Wechselschnitt geschehe, legen wir durch die hier erzeugte Kegelfläche eine Durchschnittsebene MNQ. Zwei aus den Punkten Z und N auf den Meridian senkrecht gefällte Bögen ZM und NR bestimmen die Punkte, durch welche die Schenkel dieses Winkels führen. Die Richtungen, worin er von den Ebenen des Meridians und der Projection durchschnitten wird, sind MR und QC, die Winkel, unter welchen diese Ebenen die Kegeloberfläche durchschneiden, mithin RMN und mQN. Wir erkennen in beiden Complementary des Winkels ZNQ, und aus dieser Gleichheit folgt, was wir suchten, die Aehnlichkeit der Curven des Meridians und seiner Projection. Die letztere ist mithin ein Kreisbogen, dessen Halbmesser man entweder durch Berechnung des Werthes von $\frac{1}{2} Qm$ oder durch geometrische Construction eines Kreises findet, der durch den projectirten Punkt des Pols und die beiden Durchschnittspunkte des Meridians mit dem Horizont (K und L) gelegt werden soll. Die letzteren bestimmen sich durch die Werthe der Bögen HK = LT nach dem, schon früher gebrauchten, Ausdrucke:

$$\text{tang. HK} = \text{tang. } \gamma \cdot \sin. \beta;$$

der Pol aber projectirt sich in der Entfernung $cp = r \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} (90^\circ - \beta)$ vom Mittelpunkt der Charte, in der Richtung ht (Fig. 33.).

Als allgemeinen Ausdruck des Halbmessers der Meridian-Projectionen erhalten wir, da $mQN = ZNM = \frac{1}{2} ZM$, also $Qm \cdot \sin. \frac{1}{2} ZM = mN$, und $mN \cdot \cos. \frac{1}{2} ZM = r$:

$$\frac{1}{2} Qm = \frac{r}{2 \sin. \frac{1}{2} ZM \cdot \cos. \frac{1}{2} ZM} = \frac{r}{\sin. ZM}$$

ZM, als Seite des rechtwinklichten sphärischen Dreiecks ZMP, berechnet sich nach der Formel

$$\sin. ZM = \sin. ZP = \cos. \beta \cdot \sin. \gamma$$

mithin ist:

$$3) \frac{1}{2} QM = \frac{r}{\cos. \beta \cdot \sin. \gamma}$$

Modificiren wir die bisherige allgemeine Annahme dahin, daß die zu entwerfende Hemisphäre die nördliche oder südliche der Erdfugel seyn, und sich mithin vom Pol zum Aequator erstrecken soll, so wird die hier entstehende Polar-Projection sehr einfach ausfallen. Der Pol entwirft sich nämlich im Mittelpunkt der Charte, und concentrisch um ihn die ganze Anzahl der Parallelkreise, für deren Halbmesser wir durch die unmittelbare Betrachtung dieses Falls den Ausdruck

$$x = r \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} (90^\circ - \delta)$$

erhalten, gleichbedeutend mit dem oben in (2) ausgesprochenen Werthe $\frac{r \cdot \cos. \delta}{1 + \sin. \delta}$, nachdem $\beta = 90^\circ$ gesetzt worden. Diese Werthe lassen sich sehr leicht construiren, indem man auf einem Quadranten des Aequators, welcher den Umfang der Charte bildet, die Bögen abträgt, um welche die Parallelen auf der Kugel von einander entfernt angenommen werden, und dieselbe durch Chorden mit dem gegenüberstehenden Anfangspunkt des Durchmessers verbindet. Dadurch wird der, auf diesem Diameter senkrecht errichtete Radius in einzelnen Punkten durchschnitten, welche ebenfalls um $r \cdot \tan g. \frac{1}{2} (90^\circ - \delta)$ vom Mittelpunkt der Charte entfernt liegen, mithin Halbmesser der zu construiren den Projectionskreise sind. Man erkennt ferner ohne Mühe, daß die Meridiane sich hier als gerade Linien entwerfen werden, womit auch der Werth des Ausdrucks (3), wenn in demselben $\beta = 90^\circ$ gesetzt worden, übereinstimmt. Zugleich wird $\tan g. HK = \tan g. \gamma$, wornach die Meridiane sich im Planiglobium unter denselben Winkeln, wie auf der Halbkugel, durchkreuzen.

Geben wir hingegen β den speciellen Werth $= 0^\circ$, so entsteht uns die, für unsern gegenwärtigen Zweck gebräuchlichste, Entwerfungsart der Erd-Hemisphären: die stereographische Aequatorial-Projection. Die Pole treten hier an den Rand der Charte; der Aequator und der mittlere unter den Meridianen durchkreuzen einander geradlinigt. Die übrigen Parallelen erscheinen als Kreisbögen, und ihr Halbmesser nach (2) ausgedrückt durch

$$x = r \cdot \cot g. \delta.$$

Die Entfernung (vom Mittelpunkt der Charte), in welcher sie den mittlern Meridian durchschneiden, ist nach (1)

$$Cd = r \cdot \cot g. \frac{1}{2} \delta.$$

Daß $\tan g. LT = 0$ wird, die Projectionen der Meridiane also sämmtlich in den Endpunkten des mittlern, d. h. in den Polen zusammentreffen, ergiebt die unmittelbare Anschauung dieses Falls. Der Werth des Halbmessers, womit sie als Kreisbögen construirt werden müssen, ist nach (3)

$$\frac{1}{2} QM = \frac{r}{\sin. \gamma}$$

und die Projection des Aequators wird in Abständen $= r \cdot \tan g. \frac{1}{2} \gamma$, dem Princip dieser Entwerfungsart gemäß, durchschnitten.

Ein Umstand, der die stereographische Projection vor den beiden andern besonders empfiehlt, indem man dadurch größere Aehnlichkeit in dem geometrischen Bilde der darzustellenden Hemisphäre erreicht, besteht darin, daß Parallelen und Meridiane sich als einander rechtwinklicht durch-

schneidende Kreislınien auf die Projections-Ebene entwerfen. Den Beweis dieser Eigenschaft führen wir mit Hülfe einer geometrischen Construction, wie Fig. 35. sie darstellt, folgendergestalt.

Hier erscheinen zwei, einander rechtwinklicht durchkreuzende Kreise mit ihren, durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt D gelegten, Tangenten FD und GD, welche die erweiterte Projections-Ebene in den Punkten F und G antreffen. Da D sich in d projectirt, so ist FdG die Projection des Winkels FDG, und kann die Gleichheit dieser beiden Winkel nachgewiesen werden, so folgt, daß FdG ein rechter sey; d. h., daß die Projectionen der Tangenten, also auch der Kreise einander wirklich rechtwinklicht durchschneiden.

Die Lage der Berührungsebene ist bestimmt durch die Punkte D, F und G oder das, sie verbindende, Dreieck. Denken wir uns durch D und die Axe ZN der Kugel ebenfalls eine Ebene gelegt, so durchschneidet diese jene Berührungsebene in der Linie DE, Tangente des Kreises ZDN, welche senkrecht auf FG stehen wird. Es sind also FED und GED rechtwinklichte Dreiecke, vollkommen congruent mit ihren Projectionen, wenn $dE = D\bar{E}$ ist. Von der Gleichheit dieser Seiten überzeugt uns aber die Gleichheit der Winkel bei D und d in dem Dreieck DdE, indem jener erstere durch den halben Bogen DBN gemessen wird, und dieser als Complement des Winkels ZND eben denselben halben Bogen zum Maasse hat. Also ist $FED = FE d$ und $GED = GE d$, woraus die Gleichheit der Winkel in D und d, und endlich $FDG = FdG$ folgt.

Achtzehntes Capitel.

Construction der Land- und Seecharten.

Theils die Größe des darzustellenden Theils der Erdoberfläche, theils seine Lage, müssen die Grundsätze bestimmen, nach denen die gewölbte auf eine ebene Fläche am zweckmäßigsten entworfen werden kann. Je kleiner dieselbe, je geringer also ihre Krümmung ist, um so mehr nähert sie sich der Ebene und wird in dieser ohne merkliche Verletzung der geometrischen Treue darstellbar. Aber vom Maximum der Converität, welches uns die zu entwerfende Hemisphäre darbietet, bis zu ihrem Minimum, wo die Fläche von so geringem Umfange ist, daß sie mit der Horizontal-Ebene zusammenfällt, giebt es so viele Abstufungen der Wölbung, daß man bald zu der einen, bald zu der

andern Entwerfungsart, als der den Umständen angemessensten, veranlaßt wird. Von der andern Seite wird die Wahl derselben durch die Lage der darzustellenden Gegend bedingt, indem die Forderung, Meridiane und Parallelen zugleich einfach und zweckmäßig zu projectiren, bald dieser, bald jener Methode den Vorzug ertheilt, je nachdem man Erdstriche aus heißer, gemäßiger oder kalter Zone zu entwerfen hat.

Zur Darstellung der letztern können die im vorigen Capitel behandelten Entwerfungsarten sämmtlich angewandt werden, weil sowohl die orthographische als beide perspectivische Polar-Projectionen die den Pol umgebende Gegend mit ziemlicher Treue in Ansehung der wahren Ausdehnungen auf ebener Fläche entwerfen. Aber bei einiger Erweiterung der Circumpolar-Gegend wird die Verkürzung oder Verlängerung des, als $\sin. \alpha$. $\tan. \alpha$ oder $\tan. \frac{1}{2} \alpha$ entworfenen, Meridianbogens $PD = \alpha$ (Fig. 29.), d. h. die Unrichtigkeit in dem Verhältniß der Parallelkreise und ihres Abstands von einander, auffallend genug, um auch hier, wie beim Entwurf der Länder aus andern Zonen, uns zur Annahme des Princips der Abwicklung zu veranlassen.

Anstatt nämlich die gewölbte Erdoberfläche auf eine ebene Fläche zu projectiren, denke man sich das geographische Netz, welches sie überzieht, durch Ausdehnung der Meridiane und Parallelen in einer Ebene entwickelt, dergestalt, daß der Meridian des Mittelpunkts der Charte geradlinigt, die übrigen Meridiane und Parallelen hingegen als gerade oder als krumme Linien erscheinen. Dieses ist die allgemeine, der Construction geographischer Charten zum Grunde liegende Idee, wovon fast nur ausschließlich die Darstellungen ganzer Hemisphären oder der Circumpolar-Gegenden, aus Gründen, die wir oben kennen gelernt haben, eine Ausnahme machen. Die Unbestimmtheit, welche in dem obigen Begriffe der Abwicklung liegt, muß man zur Auffindung solcher Methoden benutzen, wodurch der Zweck: ein geometrisch treues Bild der Erdoberfläche zu liefern, das Linien und Flächenräume im richtigen Verhältniß darstellt, unter den gegebenen Umständen erreicht werde. Es ist auch hier freilich nur eine Näherung zu erwarten, aber begreiflich eine weit größere, als in der Darstellung der Hemisphären, die sich da, wo nur einzelne Forderungen, z. B. des richtigen Flächengehalts, gemacht werden, zu mathematischer Genauigkeit erhebt.

Zum Theil betrachtet man — weil diese Annahme Erleichterung der Construction verspricht — die Entwicklung der Oberfläche, welche einer bestimmten Zone der Kugel angehört, als diejenige einer Regelzone, wovon jene erstere näherungsweise ersetzt wird; und in der That ist bei diesem Verfahren eine merkliche Verunstaltung des geographischen Netzes und der in ihm verzeichneten Gränzen erst dann zu befürchten, wenn die Breite der Zone zu ausgedehnt ist. Sämmtliche Meri-

diane entwickeln sich nach dieser Ansicht als gerade Linien, welche nach dem Scheitelpunkt der ausgebreiteten Kegelfläche hin convergiren und von den, aus eben diesem Punkte als Kreisbögen construirten, Parallelen rechtwinklig durchschnitten werden. Für Länder unter dem Aequator verwandelt sich diese conische Oberfläche augenscheinlich in die eines Cylinders, welche als Ebene ausgebreitet, Parallelen, wie Meridiane, geradlinigt und parallel darstellen wird.

Die einfachste Entwicklung dieser Art beruhet auf der Vorstellung, daß die Oberfläche des Kegels die der Kugel in einem Parallellreise berühre, der in die Mitte der Charte fallen soll, oder die darzustellende Fläche in zwei Hälften theilt. Erstreckt sich diese von A bis B (Fig. 36.), d. h. vom Grade α bis zum Grade β der Breite, so ist diejenige des mittlern Parallels:

$$RD = AR + \frac{1}{2} (RB - AR) = \frac{1}{2} (\beta + \alpha).$$

Durch diesen Werth wird die Krümmung seiner Projection oder der Halbmesser, womit er in der Charte zu construiren ist, unabänderlich bestimmt; denn eine, im Punkt D an den Durchschnittskreis der Erde gelegte, Tangente, die in P mit der verlängerten Erbare zusammentrifft, stellt in PD die Erzeugungslinie eines Kegels dar, dessen Entwicklung in ebener Fläche als Kreissector erscheint, der mit PD, als Radius, beschrieben worden. Der Ausdruck

$$PD = CD. \tan g. PCD$$

$$= r. \tan g. [90^\circ - \frac{1}{2} (\beta + \alpha)] = r. \cot g. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

bestimmt die Länge, womit der mittlere Parallellkreis der Charte construirt werden muß. Der Punkt, aus welchem man ihn beschreibt, wird zugleich Centrum für die übrigen Kreisbögen und gemeinschaftlicher Richtungspunkt der geradlinigten Meridiane. Das Geschäft der Construction fängt damit an, daß man den mittlern derselben zieht, und mit dem Radius PD ebenfalls den mittlern Parallellkreis beschreibt, um auf diesen beiden Fundamentallinien die, zur Vollendung des geographischen Netzes nöthigen, Punkte demnächst festzulegen. Die auf PD abzulesenden Breitengrade sind in

Beziehung auf die Kugelfläche, als deren Entwicklung die Charte anzusehen ist, $x = \frac{2 r. \pi}{360}$,

und wenn nur von m zu m Graden Parallelen construirt werden sollen, $= \frac{2 m r. \pi}{360}$. Da aber r

hier nicht unmittelbar gegeben, sondern eine durch die beabsichtigte Dimension der Charte

$AB = r \pi \left(\frac{\beta - \alpha}{180^\circ} \right)$ bestimmte und wiederum bestimmende Länge ist, so substituiren wir für r

seinen Werth $= \frac{AB}{\pi} \left(\frac{180^\circ}{\beta - \alpha} \right)$, und erhalten $x = m \frac{BA}{(\beta - \alpha)}$.

Den Winkelabstand der Meridiane auf der Charte zu bestimmen, muß man ebenfalls den mittlern Parallelkreis zu beiden Seiten von D in gleiche Theile zerlegen, deren jeder einem Längengrade unter der Breite $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$, oder wenn die Meridiane von n zu n Graden gezogen werden sollen, dem n fachen desselben gleich ist. Der Ausdruck dieser Länge ist $= \frac{n}{360^\circ} \cdot 2 \text{ G D. } \pi$, mithin, wenn wir den Winkel, welchen zwei Meridiane der Charte in P einschließen werden, durch p andeuten:

$$\frac{n}{360} \cdot 2 \text{ G D. } \pi = \frac{p}{360} \cdot 2 \text{ P D. } \pi$$

und folglich

$$p = \frac{n \cdot \text{G D}}{\text{P D}} = n \frac{r \cdot \cos. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{r \cdot \cot. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)} = n \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha + \beta).$$

Die Sehne dieses Bogens endlich, mit deren Hülfe wir ihn auf d d abtragen, ist gegeben durch:

$$y = 2 \text{ P D. } \sin. \frac{1}{2} p = 2 \text{ P D. } \sin. \frac{1}{2} [n \cdot \sin. \frac{1}{2} (\alpha + \beta)].$$

Nach einer andern Vorstellungsart wird die, zu entwerfende Kugelzone, statt von dem Kegel berührt zu werden, in zwei Parallelkreisen geschnitten, und zwar so, daß die Kugelzone, wodurch sie in ebener Fläche entwickelt werden soll, mit ihr von gleichem Flächeninhalt sey. Diese Bedingung wird bekannten Lehrsätzen der Stereometrie gemäß, wenn h die Höhe der Kugelzone, s die Seite und ρ den Radius der Kugelzone bezeichnen, ausgesprochen durch die Gleichung:

$$2 r \pi \cdot h = 2 \rho \pi \cdot s$$

oder wenn h und s in Function des Kugelhalbmessers und der geographischen Breiten, α und β , welche die Gränzen der Zone bestimmen, ausgedrückt; d. h. (nach Fig. 37, welche den Durchschnitt beider Oberflächen darstellt) für beide Größen ihre Werthe:

$$h = r (\sin. \beta - \sin. \alpha)$$

$$s = \text{AB} = \left(\frac{\text{RB} - \text{RA}}{360} \right) \cdot 2 \text{ C R } \pi = \left(\frac{\beta - \alpha}{360} \right) 2 r \pi$$

substituirt werden:

$$2 r^2 \pi (\sin. \beta - \sin. \alpha) = 4 r \rho \pi^2 \left(\frac{\beta - \alpha}{360} \right)$$

$$\text{oder I) } \rho = \frac{r (\sin. \beta - \sin. \alpha)}{\pi} \cdot \frac{180}{(\beta - \alpha)}.$$

Die Neigung der Seite ab gegen die Erdaxe oder die von ihr abhängige Entfernung des Punktes P, aus welchem die Parallelkreise der Projection zu construiren sind, bestimmen wir durch die Annahme, daß Pa von dem Radius CD, dessen Breite $= \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ senkrecht durchschnitten

werde, weil die oben ausgesprochene Bedingung den Scheitelwinkel des Kegels ganz unbestimmt läßt. Die hier entstehenden Winkel CKG und PKG sind beide $= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, woraus sich als Werthe von CK und PK ergeben:

$$2) \text{ CK} = \frac{\rho}{\cos. \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

$$3) \text{ PK} = \frac{\rho}{\sin. \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}$$

Durch Construction der 37ten Figur nach diesen berechneten Werthen würde man die Lage der Durchschnittspunkte F und E auf geometrischem Wege finden. Arithmetisch wird dieselbe bestimmt, wenn s den Bogen DE = DF bezeichnet, durch die Gleichung:

$$4) \text{ KE} = \text{KF} = r. \sin. s$$

indem s gegeben ist durch

$$\text{CK} = r. \cos. s, \text{ also } 5) \cos. s = \frac{\rho}{r. \cos. \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}.$$

Soll eine Charte nach der vorstehenden (der sogenannten Murbach'schen) Projection entworfen werden, so wird durch den Mittelpunkt des Flächenraums, welcher sie aufzunehmen bestimmt ist, wie es bei der vorigen Entwicklungs-Projection ebenfalls geschah, eine gerade Linie als mittellster Meridian gezogen, und auf ihr die Länge eines Breitengrades wiederholt bis A und B abgetragen. Die letztere richtet sich nach der willkürlichen Dimension AB, welche $(\beta - \alpha)$ Grade enthalten soll, ist mithin durch $\frac{AB}{(\beta - \alpha)}$ gegeben. Auf der andern Seite ist ein Breitengrad, in Function des Ra-

dus der Kugel, von deren Oberfläche die Charte als Entwicklung betrachtet werden soll, $= \frac{2r\pi}{360}$, so daß die Länge dieses Halbmessers, dessen Werth überall in den obigen Ausdrücken erscheint, bestimmt wird durch die Gleichung:

$$r = \frac{180. AB}{(\beta - \alpha)\pi}.$$

Aus diesem Werthe von r wird nun zunächst derjenige von ρ nach (1), alsdann der Winkel s nach (5) und vermöge seiner der Abstand der Punkte E und F vom Mittelpunkt der Karte berechnet. Alsdann suchen wir nach (3) die Länge PK oder die Entfernung des Punktes P im mittlern Meridian, um aus ihm mit PE und PF, als Radien, die beiden Durchschnitts-Parallelen zu construiren. Zu beiden Seiten des Meridians werden auf diesen Fundamental-Linien der Projection die, nach dem oben beschriebenen Verfahren berechneten Sehnen abgesetzt, welche n Graden der Länge unter dieser geographischen Breite entsprechen, und die Theilungspunkte durch gerade Linien verbunden. Das auf diese Weise gebildete Netz zeigt allerdings mit dem auf der Kugel eine größere

Uebereinstimmung, als wenn man nur eine Berührung der conischen Oberfläche annimmt, weil die beiden Hauptparallelen ee und ff , als Entwicklungen von denen auf der Kugeloberfläche, in ihrer Ausdehnung und Eintheilung ihnen vollkommen gleich sind. Die Theilung der übrigen Parallelen, obgleich weniger übereinstimmend mit der auf der Kugelzone, wird nur dann eine auffallende Abweichung von der richtigen Ausdehnung der Längengrade zeigen, wenn die Charte sich sehr weit von Norden nach Süden erstreckt.

Will man aber eine noch größere Genauigkeit in der Projection erreichen, so verläßt man nach der Methode des Geographen *Bonne* die Vorstellung von einer Abwicklung der Kugeloberfläche, wobei die Meridiane sämmtlich gerade Linien bilden müssen, und trägt auf sämmtliche concentrisch beschriebene Parallelen die Längengrade in ihren Sehnen ab, um durch die gewonnenen Theilungspunkte krummlinigte Meridiane zu führen (s. Fig. 38.). Die Berechnung dieser Sehnen geschieht für sämmtliche Parallelen nach dem oben erhaltenen allgemeinen Ausdruck:

$$y = 2 P D. \sin. \frac{1}{2} (n. \sin. \frac{1}{2} \beta).$$

Diese Entwerfungsart läßt sich noch dadurch vervollkommen, daß man den Radius PD , womit nach der ersten, einfachen Vorstellung einer Berührung von Kegel- und Kugelzone der mittlere Parallelkreis beschrieben werden mußte, für alle von m zu m Graden auf der Charte zu ziehenden Parallelen besonders berechnet, so daß dieselben nicht als concentrische Kreisbögen, sondern als entwickelte Berührungslinien eben so vieler einzelnen Kugeloberflächen erscheinen. Doch wird man das hier beschriebene Verfahren nur dann anzuwenden nöthig haben, wenn das zu entwerfende geographische Netz von beträchtlicher Ausdehnung ist und daher sehr verschiedene Kugelzonen überzieht, wie in Fig. 39.

Endlich ist hier noch der sogenannten Plattcharten Erwähnung zu thun, in denen Parallelen und Meridiane einander geradlinigt und parallel durchkreuzen — eine Entwerfungsart, die ungeachtet ihrer Unvollkommenheit in Ansehung einer richtigen Darstellung der Gestalt der Gränzen, dennoch aus gewissen Gesichtspunkten betrachtet, sehr brauchbar erscheint.

An die Darstellung eines Landes kann nämlich, wenn man den Flächeninhalt seiner einzelnen Theile auszumitteln wünscht, die Forderung gemacht werden, daß sie nur in dieser Beziehung Genauigkeit gewähre, während man auf Aehnlichkeit der Configurationen gern verzichtet. Nun ist der Flächengehalt einer Kugelzone, $q = 2r\pi.h$, wenn dieselbe durch Parallelen der Breite α und β eingeschlossen wird:

$$q = 2r\pi (\sin. \beta - \sin. \alpha),$$

woraus hervorgeht, daß bei wachsenden Breiten die Flächenräume der verschiedenen Zonen auf der Erdkugel wie die Differenz der Sinus abnehmen. Dasselbe gilt von dem n ten Theile zweier Kugelzonen oder den, zwischen zwei Meridianen eingeschlossenen, Stücken derselben. Um also die Charte eines Landes so einzurichten, daß sie den Flächeninhalt der gekrümmten Erdoberfläche in dem

geographischen Netze richtig darstelle, brauchen wir nur die, in gleichen Entfernungen geradlinigt construirten, Meridiane dergestalt mit ebenfalls geradlinigten Parallelen zu durchziehen, daß die Abstände derselben wie die Differenz der Sinus ihrer Breiten abnehmen. Ist der Aequator unter ihnen, so verhalten sich — weil hier α und $\sin. \alpha = 0$ sind — die Entfernungen von demselben, wie die Sinus der Breiten (s. Fig. 40. A.).

Für Länder der heißen Erdzone wird diese Entwerfungsart augenscheinlich in jeder Hinsicht brauchbar seyn, weil bis zu einem Winkel von 30° Bögen und Sinus nicht auffallend von einander abweichen; soll die Charte sich aber bis zu höheren Breitengraden erstrecken, so werden hier die Parallelen so schnell und nahe zusammenrücken, daß die Gestalt der Länder bis zum Unkennlichen zusammengezogen und verunstaltet wird.

Das Umgekehrte des hier beschriebenen Verfahrens ist dasjenige, dessen man sich zur Construction der Seecharten bedient. Der Zweck derselben: den Lauf des Schiffes aufzunehmen, den der Seefahrer — wie wir an einem früheren Orte sahen — in Beziehung auf Parallelen und Meridiane, als rechtwinklichte Coordinaten, zu bestimmen gewohnt ist, erfordert eine solche Einrichtung, daß unter den einzelnen, zusammenstoßenden Stücken des geographischen Netzes das richtige Verhältniß herrsche, welches der Construction, in ihrem ganzen Umfange betrachtet, immerhin abgehen möge. Jenes Verhältniß wird, wenn m die Länge des, zwischen zwei Parallelen auf der Erdoberfläche enthaltenen, Bogens und β die Breite eines beliebigen Parallels ist, der bekannten Abnahme der Radien zufolge durch $m : m. \cos. \beta$ ausgesprochen, und dadurch in ein jedes Viereck des geographischen Netzes gebracht, daß man die Entfernungen der Parallelen von einander im umgekehrten Verhältniß der Cosinus ihrer geographischen Breiten abträgt (Fig. 40. B.), während die Meridiane, wie oben, geradlinigt und parallel in gleichen Abständen construiert sind. Ist z. B.

$$NM = \frac{1}{\cos. \beta} MO, \text{ so geht hieraus das oben geforderte Verhältniß } \frac{NM}{MO} = \frac{1}{m. \cos. \beta} \text{ hervor,}$$

und die Bedingung, daß jedes einzelne Viereck des entworfenen Netzes dem, auf der Kugeloberfläche ihm correspondirenden, ähnlich sey, erscheint hier auf die einfachste Weise in Erfüllung gebracht.

A n l a g e n.

I. Verzeichniß von 46 der vornehmsten Sterne.

Namen der S t e r n e.	A. R. in Zeit			A. R. in Bogen			Polar-Distanz								
	Am 1. Januar 1820		Jährliche Verd.	Am 1. Januar 1820		Jährliche Verd.	Am 1. Januar 1820		Jährliche Verd.						
	St.	M. S.		St.	M. S.		St.	M. S.							
γ Pegasus . .	0	3	58,8	+	3,08	0	59	42	+	46,2	75	49	0	-	20,20
α Cassiopeja . .	0	30	21,2		3,31	7	35	18		49,6	34	27	4		18,80
Polarstern . .	0	57	2,4		14,74	14	15	31		221,1	1	39	5		19,45
α Widder . .	1	57	3,0		3,35	29	15	45		50,2	67	23	27		17,40
α Wallfisch . .	2	52	9,0		3,12	43	2	15		46,8	86	37	18		14,75
α Perseus . .	3	11	31,7		4,20	47	52	65		63,0	40	47	18		13,50
Aldebaran . .	4	25	36,3		3,43	66	24	4		50,1	73	51	43		7,95
Capella . .	5	3	24,6		4,41	75	51	9		56,1	44	11	51		4,57
Rigel . .	5	5	53,6		2,88	76	28	24		43,2	98	25	0		4,92
β Stier . .	5	14	55,4		3,78	78	43	51		56,7	61	33	19		3,83
α Orion . .	6	45	25,9		3,25	86	21	28		48,7	82	38	8		1,37
Sirius . .	5	37	12,9		2,61	99	18	13		39,1	106	28	36	+	4,36
Castor . .	7	23	6,1		3,85	110	46	31		57,7	57	43	39		7,96
Procyon . .	7	29	52,7		3,15	112	28	10		47,2	84	19	19		8,54
Pollux . .	7	34	17,5		3,69	113	34	22		55,3	61	32	55		8,00
α Hydra . .	9	18	44,6		2,95	139	41	9		44,2	97	52	57		15,19
Regulus . .	9	59	46,7		3,21	149	56	40		48,1	77	9	24		17,33
α Gr. Bär . .	10	52	32,0		3,83	163	8	0		57,4	27	16	45		19,30
β Löwe . .	11	39	52,5		3,07	174	58	4		46,0	74	25	18		20,04
β Jungfrau . .	11	41	19,4		3,12	175	19	51		46,8	97	13	15		20,00
γ Gr. Bär . .	11	44	19,0		3,20	176	4	45		48,0	35	18	19		20,00
Spica . .	13	15	43,5		3,14	198	55	52		47,1	100	13	3		18,95
γ Gr. Bär . .	13	40	26,4		2,38	205	6	36		35,7	39	47	4		18,20

I.

Namen der S t e r n e .	A. R. in Zeit			A. R. in Bogen			Polar = Distanz								
	Am 1. Januar 1820			Am 1. Januar 1820			Am 1. Januar 1820								
	St.	M.	S.	St.	M.	S.	St.	M.	S.						
Arcturus . .	14	7	27,4	+	2,73	211	51	51	+	40,9	69	52	33	+	19,99
1 α Wage . .	14	40	45,8		3,29	220	14	27		49,3	105	14	26		15,20
2 α Wage . .	14	40	56,5		3,29	220	14	7		49,3	105	17	10		15,20
β Kl. Bär . .	14	51	20,4		0,32	222	50	6		4,8	15	6	31		14,70
α Krone . .	15	29	4,3		2,53	231	46	4		35,2	62	40	23		12,49
α Schlange . .	15	35	24,7		2,94	233	51	10		44,1	82	0	3		11,73
Antares . .	16	18	23,2		3,66	244	35	48		54,9	116	1	19		8,62
α Hercules . .	17	6	26,8		2,73	256	36	42		40,9	75	23	47		4,48
α Sphinchus . .	17	26	35,2		2,77	261	38	48		41,5	77	18	2		3,10
γ Drache . .	17	52	25,9		1,38	268	6	28		20,7	38	29	9		0,70
Wega . .	18	30	50,9		2,03	277	42	43		30,4	51	22	40	—	3,00
γ Adler . .	19	37	42,3		2,85	294	25	34		49,5	79	49	2		8,38
Altair . .	19	42	0,1		2,93	295	30	1		43,9	18	35	37		9,06
β Adler . .	19	46	28,4		2,95	296	37	6		44,2	84	2	4		8,57
1 α Steinbock . .	20	7	39,9		3,33	301	54	58		49,9	103	3	21		10,80
2 α Steinbock . .	20	8	3,7		3,33	302	0	55		49,9	103	5	37		10,80
α Deneb . .	20	35	18,1		2,04	308	49	31		30,6	45	21	30		12,63
α Cepheus . .	21	14	16,7		1,42	318	34	10		21,3	28	10	27		14,90
β Cepheus . .	21	26	18,0		0,81	321	34	30		12,1	20	13	40		15,70
α Wassermann . .	21	56	32,3		3,09	329	8	4		46,3	91	11	21		17,37
γ Fum-el-haut . .	22	47	41,0		3,34	341	55	15		50,1	120	34	26		19,10
α Pegasus . .	22	55	48,2		2,98	343	57	3		44,7	75	45	39		19,43
α Andromeda . .	22	59	6,4		3,08	359	46	36		46,2	61	54	13		19,99

II. Uebersicht des Sonnensystems.

Himmelskörper.	Siderische Umlaufs- Zeiten.	Halbe große Ase.	Durchmesser.	Körperliche Größe.	Zeit der Umdrehung.
I. Sonne	113	1442897	25 ^t 12 st 0'
II. Planeten . .					
Untere { Mercur . . .	87 ^t 969	0,387099	0,4012	0,041343	24 st 5' 30"
Venus . . .	224,701	0,723332	0,9593	0,871170	23 21 19
Erde . . .	365,256	1,000000	1,0000	1,000000	23 56 7
Dbere { Mars . . .	686,980	1,523692	0,5102	0,135881	24 39 21
Vesta . . .	1327,598	2,363198
Juno . . .	1593,942	2,670369
Ceres . . .	1681,401	2,767245
Pallas . . .	1682,545	2,768261
Jupiter . . .	4332,506	5,201161	11,3002	1103,450	9 55 33
Saturn . . .	10758,970	9,537813	9,5398	576,450	10 16 ...
Uranus . . .	30688,713	19,183277	4,2502	80,120
III. Nebenplaneten.					
Mond	27,32166	0,002515	0,2730	0,20351	27 7 43
Jupiter's- trabanten { I.	1,76914	0,002623	5,81296	Halbmessern der Hauptplaneten. in Halbe große Ase	81
II.	3,55118	0,004188	9,24868		81
III.	7,15455	0,006680	14,75240		81
IV.	16,68877	0,011749	25,94686		81
Saturn's- trabanten { I.	0,94271	0,001322	3,080		81
II.	1,37024	0,001645	3,952		81
III.	1,88780	0,002036	4,893		81
IV.	2,73948	0,002609	6,268		81
V.	4,51749	0,003643	8,754		81
VI.	15,94530	0,008447	20,295		81
VII.	79,32960	0,024621	59,154		81
Uranus's- trabanten { I.	8,8926	0,002369	13,120		81
II.	8,7068	0,003074	17,022		81
III.	10,9611	0,003583	19,845		81
IV.	13,4559	0,004109	22,752		81
V.	38,0750	0,008218	45,507		81
VI.	107,6944	0,016436	91,008		81

III a. Verwandlung der Stundenwinkel in Zeit.

o	St. M.	o	St. M.	o	St. M.	o	St. M.	o	St. M.	o	St. M.
'	M. S.	'	M. S.	o	St. M.	o	St. M.	o	St. M.	o	St. M.
"	S. Z.	"	S. Z.								
1	0 4	31	2 4	61	4 4	91	6 4	121	8 4	151	10 4
2	0 8	32	2 8	62	4 8	92	6 8	122	8 8	152	10 8
3	0 12	33	2 12	63	4 12	93	6 12	123	8 12	153	10 12
4	0 16	34	2 16	64	4 16	94	6 16	124	8 16	154	10 16
5	0 20	35	2 20	65	4 20	95	6 20	125	8 20	155	10 20
6	0 24	36	2 24	66	4 24	96	6 24	126	8 24	156	10 24
7	0 28	37	2 28	67	4 28	97	6 28	127	8 28	157	10 28
8	0 32	38	2 32	68	4 32	98	6 32	128	8 32	158	10 32
9	0 36	39	2 36	69	4 36	99	6 36	129	8 36	159	10 36
10	0 40	40	2 40	70	4 40	100	6 40	130	8 40	160	10 40
11	0 44	41	2 44	71	4 44	101	6 44	131	8 44	161	10 44
12	0 48	42	2 48	72	4 48	102	6 48	132	8 48	162	10 48
13	0 52	43	2 52	73	4 52	103	6 52	133	8 52	163	10 52
14	0 56	44	2 56	74	4 56	104	6 56	134	8 56	164	10 56
15	I 0	45	3 0	75	5 0	105	7 0	135	9 0	165	11 0
16	I 4	46	3 4	76	5 4	106	7 4	136	9 4	166	11 4
17	I 8	47	3 8	77	5 8	107	7 8	137	9 8	167	11 8
18	I 12	48	3 12	78	5 12	108	7 12	138	9 12	168	11 12
19	I 16	49	3 16	79	5 16	109	7 16	139	9 16	169	11 16
20	I 20	50	3 20	80	5 20	110	7 20	140	9 20	170	11 20
21	I 24	51	3 24	81	5 24	111	7 24	141	9 24	171	11 24
22	I 28	52	3 28	82	5 28	112	7 28	142	9 28	172	11 28
23	I 32	53	3 32	83	5 32	113	7 32	143	9 32	173	11 32
24	I 36	54	3 36	84	5 36	114	7 36	144	9 36	174	11 36
25	I 40	55	3 40	85	5 40	115	7 40	145	9 40	175	11 40
26	I 44	56	3 44	86	5 44	116	7 44	146	9 44	176	11 44
27	I 48	57	3 48	87	5 48	117	7 48	147	9 48	177	11 48
28	I 52	58	3 52	88	5 52	118	7 52	148	9 52	178	11 52
29	I 56	59	3 56	89	5 56	119	7 56	149	9 56	179	11 56
30	I 0	60	4 0	90	5 0	120	7 0	150	10 0	180	12 0

III b.

III b. Verwandlung der Zeit in Aequatorsbogen.

St.	Gr.	M.	o ' "		M.	o ' "		M.	o ' "		M.	o ' "		M.	o ' "	
		Gr.	'	"	Gr.	'	"	Gr.	'	"	Gr.	'	"	Gr.	'	"
1	15	1	0	15	13	3	15	25	6	15	37	9	15	49	12	15
2	30	2	0	30	14	3	30	26	6	30	38	9	30	50	12	30
3	45	3	0	45	15	3	45	27	6	45	39	9	45	51	12	45
4	60	4	1	00	16	4	00	28	7	00	40	10	00	52	13	00
5	75	5	1	15	17	4	15	29	7	15	41	10	15	53	13	15
7	90	6	1	30	18	4	30	30	7	30	42	10	30	54	13	30
8	105	7	1	45	19	4	45	31	7	45	43	10	45	55	13	45
8	120	8	2	00	20	5	00	32	8	00	44	11	00	56	14	00
9	135	9	2	15	21	5	15	33	8	15	45	11	15	57	14	15
10	150	10	2	30	22	5	30	34	8	30	46	11	30	58	14	30
11	165	11	2	45	23	5	45	35	8	45	47	11	45	59	14	45
12	180	12	3	00	24	6	00	36	9	00	48	12	00	60	15	00

IV a. Weite des Horizonts, in Meilen zu 3807 Toisen
für gegebene Höhen.

h	e	h	e	h	e	h	e	h	e	h	e
Toi- sen	Meilen	Toi- sen	Meilen	Toi- sen	Meilen	Toi- sen	Meilen	Toi- sen	Meilen	Toi- sen	Meilen
100	6,719	260	10,809	410	13,606	650	17,131	1050	21,773	1800	28,507
120	7,377	270	11,051	420	13,770	680	17,522	1100	22,285	1850	28,901
130	7,661	280	11,243	430	13,933	700	17,777	1150	22,786	1900	29,289
140	7,950	290	11,442	440	14,094	730	18,154	1200	23,277	1950	29,672
150	8,229	300	11,638	450	14,237	750	18,402	1250	23,756	2000	30,050
160	8,499	310	11,830	460	14,411	780	18,766	1300	24,227	2050	30,423
170	8,761	320	12,020	470	14,567	800	19,005	1350	24,688	2100	30,792
180	9,015	330	12,206	480	14,721	830	19,358	1400	25,142	2150	31,156
190	9,262	340	12,389	490	14,873	850	19,590	1450	25,587	2200	31,517
200	9,502	350	12,570	500	15,025	880	19,933	1500	26,024	2250	31,873
210	9,737	360	12,749	530	15,469	900	20,158	1550	26,454	2300	32,225
220	9,966	370	12,925	550	15,758	930	20,491	1600	26,877	2350	32,573
230	10,178	380	13,098	580	16,182	950	20,711	1650	27,294	2400	32,918
240	10,409	390	13,270	600	16,459	980	21,030	1700	27,704	2450	33,255
250	10,624	400	13,438	630	16,865	1000	21,248	1750	28,109	2500	32,597

IV b. Erniedrigung des scheinbaren Horizonts unter den wahren
für gegebene Höhen.

h	$\frac{1}{2} e$	h	$\frac{1}{2} e$	h	$\frac{1}{2} e$	h	$\frac{1}{2} e$	h	$\frac{1}{2} e$	h	$\frac{1}{2} e$
Par. Fuß	M. S.	Par. Fuß	M. S.	Par. Fuß	M. S.	Par. Fuß	M. S.	Par. Fuß	M. S.	Par. Fuß	M. S.
1	0. 33	11	1. 49	21	2. 31	32	3. 6	52	3. 58	72	4. 37
2	0. 46	12	1. 54	22	2. 34	34	3. 12	54	4. 2	74	4. 43
3	0. 57	13	1. 59	23	2. 38	36	3. 17	56	4. 6	76	4. 47
4	1. 6	14	2. 3	24	2. 41	38	3. 23	58	4. 11	79	4. 53
5	1. 13	15	2. 7	25	2. 45	40	3. 28	60	4. 15	82	4. 58
6	1. 21	16	2. 12	26	2. 48	42	3. 33	62	4. 19	85	5. 3
7	1. 27	17	2. 16	27	2. 51	44	3. 38	64	4. 23	88	5. 9
8	1. 33	18	2. 20	28	2. 54	46	3. 43	66	4. 27	91	5. 14
9	1. 38	19	2. 23	29	2. 57	48	3. 48	68	4. 31	94	5. 19
10	1. 44	20	2. 27	30	3. 0	50	3. 53	70	4. 35	98	5. 26

V. Höhen und geographische Lage einiger Berge.

Namen der Oerter.	Ueber der Meeresfläche		Länge		Breite	
	Toisen	Par. Fuß	G.	M.	G.	M.
Brocken im Harzgebirge . . .	561	3368	28	17	51	48
Schneekopf in Thüringen . . .	481	2886	28	25	50	42
Keulenberg in der Laufig . . .	206	1240	31	37	51	13
Fichtelberg am Böhmerwalde . .	622	3730	29	40	50	9
Urber in Böhmen	720	4320	30	46	49	7
Schneekoppe im Riesengebirge . .	823	4940	33	20	50	44
Glockner im Salzburg'schen . .	1998	11988	30	15	47	3
St. Gotthard in der Schweiz . .	1378	8268	26	14	46	34
St. Bernhard, ebendaselbst . .	1241	7446	24	50	45	52
Montblanc, ebendaselbst . . .	2391	14346	24	20	45	24
Mont Cenis in Savoyen . . .	434	2604	25	56	45	24
Puy de Dôme im südl. Frankr. .	790	4740	20	32	45	34
Rhodes, ebendaselbst	362	2172	20	14	44	21
Mont perdu in den Pyrenäen . .	1763	10578	17	54	42	41
Monte rotondo in Corsica . .	1371	8226	26	36	42	20
Vesuv in Neapel	584	3504	31	31	40	48
Epomeo auf der Insel Ischia . .	394	2364	32	6	40	40
Aetna in Sicilien	1713	10278	32	51	37	52
Pic auf den azor. Inseln . . .	1098	6588	352	0	37	50
Pic auf der Insel Teneriffa . .	1901	11406	1	8	28	13
Mexico in Nord-America. . .	1177	7062	277	34	19	26
Quito in Süd-America . . .	1506	9036	299	45	0	15. G.
Santa Fé, ebendaselbst . . .	1347	8082	304	30	4	10. G.
Cuenza, ebendaselbst	1290	7740	300	30	5	35. G.

VI. Tafel der mittlern Strahlenbrechung.

Höhe	Refr.	Höhe	Refr.	Höhe	Refr.	Höhe	Refr.
0° 0'	33' 0",0	10° 20'	5' 3",7	26° 0'	1' 56",4	58° 0'	0' 35",6
15	30 35,4	10 40	4 56,6	27 0	1 51,5	59 0	0 34,2
30	28 22,3	11 0	4 46,8	28 0	1 46,8	60 0	0 32,9
45	26 20,2	11 20	4 37,3	29 0	1 42,5	61 0	0 31,6
1 0	24 28,6	11 40	4 31,4	30 0	1 38,4	62 0	0 30,3
1 20	22 15,2	12 0	4 23,2	31 0	1 34,6	63 0	0 29,0
1 40	20 17,9	12 20	4 16,1	32 0	1 31,0	64 0	0 27,8
2 0	18 35,0	12 40	4 9,4	33 0	1 27,5	65 0	0 26,6
2 20	17 4,5	13 0	4 3,0	34 0	1 24,3	66 0	0 25,4
2 40	15 45,4	13 20	3 56,9	35 0	1 21,2	67 0	0 24,2
3 0	14 35,6	13 40	3 51,1	36 0	1 18,3	68 0	0 23,0
3 20	13 34,1	14 0	3 45,5	37 0	1 15,5	69 0	0 21,9
3 40	12 39,6	14 20	3 40,3	38 0	1 12,8	70 0	0 20,8
4 0	11 51,1	14 40	3 35,2	39 0	1 10,2	71 0	0 19,6
4 20	11 7,9	15 0	3 30,2	40 0	1 7,8	72 0	0 18,5
4 40	10 29,2	15 30	3 23,2	41 0	1 5,4	73 0	0 17,4
5 0	9 54,5	16 0	3 16,7	42 0	1 3,2	74 0	0 16,3
5 20	9 22,8	16 30	3 10,6	43 0	1 1,0	75 0	0 15,3
5 40	8 54,0	17 0	3 4,7	44 0	0 58,9	76 0	0 14,2
6 0	8 27,6	17 30	2 59,1	45 0	0 56,9	77 0	0 13,1
6 20	8 2,8	18 0	2 53,9	46 0	0 55,0	78 0	0 12,1
6 40	7 40,3	18 30	2 49,0	47 0	0 53,1	79 0	0 11,1
7 0	7 20,9	19 0	2 44,3	48 0	0 51,3	80 0	0 10,1
7 20	7 2,1	19 30	2 39,8	49 0	0 49,5	81 0	0 9,0
7 40	6 45,1	20 0	2 35,5	50 0	0 47,8	82 0	0 8,0
8 0	6 29,5	20 30	2 31,4	51 0	0 46,1	83 0	0 7,0
8 20	6 14,8	21 0	2 27,5	52 0	0 44,5	84 0	0 6,0
8 40	6 1,3	21 30	2 23,8	53 0	0 42,9	85 0	0 5,0
9 0	5 48,4	22 0	2 20,3	54 0	0 41,4	86 0	0 4,0
9 20	5 36,5	23 0	2 13,6	55 0	0 39,9	87 0	0 3,0
9 40	5 25,5	24 0	2 7,4	56 0	0 38,4	88 0	0 2,0
10 0	5 14,8	25 0	2 1,7	57 0	0 37,0	89 0	0 1,0

[illegible]

VIII. Verbesserung des Mittags aus corresp. Sonnenhöhen.

Länge der Sonne.	Halbe Zwischenzeit der Beobachtungen.											
	1 St. 30 M.		2 St.		2 St. 30 M.		3 St.		3 St. 30 M.		4 St.	
	tg. x	cos. y	tg. x	cos. y	tg. x	cos. y	tg. x	cos. y	tg. x	cos. y	tg. x	cos. y
0 G.	0,0	15,5	0,0	15,8	0,0	16,2	0,0	16,8	0,0	17,5	0,0	18,2
10	1,0	15,2	0,9	15,5	0,9	15,9	0,8	16,4	8,7	17,1	0,6	17,9
20	1,8	14,5	1,8	14,8	1,7	15,2	1,5	15,7	1,4	16,3	1,2	17,1
30	2,5	13,4	2,4	13,7	2,3	14,1	2,1	14,5	1,9	15,1	1,6	15,8
40	2,9	11,9	2,8	12,2	2,7	12,7	2,4	13,0	2,2	13,5	1,9	14,1
50	3,0	10,1	2,9	10,4	2,6	10,6	2,5	11,0	2,2	11,5	1,9	12,0
60	2,7	7,9	2,6	8,2	2,4	8,4	2,2	8,6	2,0	9,0	1,7	9,4
70	2,1	5,5	2,0	5,6	1,8	5,8	1,7	6,0	1,5	6,2	1,3	6,5
80	1,1	2,7	1,0	2,9	1,0	3,0	0,9	3,1	0,8	3,2	0,7	3,3
90	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
100	1,1	2,7	1,0	2,9	1,0	3,0	0,9	3,0	0,8	3,2	0,7	3,3
110	2,1	5,5	2,0	5,6	1,8	5,8	1,7	6,0	1,5	6,2	1,3	6,5
120	2,7	7,9	2,6	8,1	2,4	8,4	2,2	8,6	2,0	9,0	1,7	9,4
130	3,0	10,2	2,9	10,3	2,7	10,6	2,5	11,0	2,2	11,5	1,9	12,0
140	2,9	11,9	2,8	12,1	2,7	12,7	2,4	12,9	2,2	13,5	1,9	14,0
150	2,5	13,3	2,4	13,6	2,3	14,0	2,1	14,4	1,9	15,0	1,6	15,7
160	1,8	14,4	1,7	14,6	1,6	15,1	1,5	15,5	1,4	16,1	1,2	17,0
170	1,0	15,0	0,9	15,3	0,9	15,8	0,8	16,3	0,7	16,9	0,6	17,7
180	0,0	15,3	0,0	15,6	0,0	16,1	0,0	16,6	0,0	17,2	0,0	18,0
190	1,0	15,2	0,9	15,5	0,9	15,9	0,8	16,4	0,7	17,0	0,6	17,9
200	1,9	14,7	1,8	15,0	1,7	15,4	1,5	15,9	1,4	16,5	1,2	17,3
210	2,6	13,8	2,5	14,0	2,3	14,4	2,1	14,9	1,9	15,5	1,6	16,2
220	3,0	12,4	2,9	12,7	2,7	13,0	2,5	13,4	2,3	14,0	1,9	14,6
230	3,2	10,6	3,0	10,8	2,8	11,0	2,6	11,5	2,4	12,0	2,0	12,5
240	2,8	8,4	2,7	8,6	2,6	8,8	2,4	9,1	2,1	9,5	1,8	9,9
250	2,2	5,8	2,0	6,0	2,0	6,9	1,8	6,3	1,6	6,6	1,4	6,9
260	1,2	3,0	1,1	3,0	1,1	3,1	1,0	3,2	0,9	3,4	0,7	3,5
270	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
280	1,1	3,0	3,1	3,1	1,1	3,1	1,0	3,2	0,9	3,4	0,7	3,5
290	2,2	5,8	6,0	6,0	2,0	6,1	1,8	6,3	1,6	6,6	1,4	6,9
300	2,8	8,4	2,7	8,6	2,6	8,8	2,4	9,2	2,1	9,5	1,8	9,9
310	3,1	10,7	3,0	10,9	2,8	11,0	2,6	11,6	2,4	12,0	2,0	12,6
320	3,0	12,5	3,0	12,8	2,7	13,1	2,5	13,5	2,3	14,1	1,9	14,7
330	2,6	13,9	2,5	14,2	2,3	14,5	2,2	15,0	1,9	15,6	1,7	16,4
340	1,9	14,8	1,8	15,1	1,7	15,5	1,6	16,0	1,4	16,7	1,2	17,5
350	1,0	15,3	0,9	15,6	0,9	16,2	0,8	16,6	0,7	17,2	0,6	18,1

IX a. Ephemeriden.

(aus Bode's astron. Jahrbuche.)

Juni 1825.

Monats-Tage.	Morgen- = Tage.	Mittlere Zeit im wahren Mittag			Länge der Sonne 2. Z.			Abweichung der Sonne nördlich			Gerade Aufsteigung der Sonne			Rechter Abstand von der ☉ Sternzeit			Sternzeit im mittlern Mittag		
		U.	M.	S.	U.	M.	S.	U.	M.	S.	U.	M.	S.	St.	M.	S.	St.	M.	S.
1	☿	II	57	23,1	10	35	4	22	3	18	68	58	54	19	24	4,4	4	38	32,8
2	☿	II	57	32,1	11	32	29	22	11	19	70	0	17	19	19	58,9	4	42	29,3
3	☿	II	57	41,4	12	29	52	22	18	57	71	1	45	19	15	53,0	4	46	25,9
4	☿	II	57	51,0	13	27	15	22	26	10	72	3	17	19	11	46,9	4	50	22,4
5	☉	II	58	1,0	14	24	38	22	33	1	73	4	56	19	7	40,4	4	54	19,0
6	☉	II	58	11,5	15	22	1	22	39	27	74	6	42	19	3	33,2	4	58	15,5
9	☿	II	58	22,4	16	19	23	22	45	30	75	8	34	18	59	25,7	5	2	12,1
8	☿	II	58	33,5	17	16	44	22	51	10	76	10	30	18	55	18,0	5	6	8,6
7	☿	II	58	44,9	18	14	5	22	56	25	77	12	29	18	51	10,1	5	10	5,2
10	☿	II	58	56,5	19	11	25	23	1	17	78	14	32	18	47	1,9	5	14	1,7
11	☿	II	59	8,4	20	8	45	23	5	44	79	16	39	18	42	53,4	5	17	58,3
12	☉	II	59	20,5	21	6	6	23	9	46	80	18	51	18	38	44,6	5	21	54,9
13	☉	II	59	32,9	22	3	26	23	13	23	81	21	6	18	34	35,6	5	25	51,4
14	☿	II	59	45,4	23	0	45	23	16	37	82	23	23	18	30	26,1	5	29	48,0
15	☿	II	59	58,1	23	58	2	23	19	26	83	25	41	18	26	17,3	5	33	44,5
16	☿	II	0	10,8	24	55	18	23	21	50	84	28	0	18	22	8,1	5	37	41,1
17	☿	II	0	23,6	25	52	35	23	23	50	85	30	21	18	17	58,6	5	41	37,7
18	☿	II	0	36,6	26	49	53	23	25	25	86	32	45	18	13	49,0	5	45	34,3
19	☉	II	0	49,7	27	47	10	23	26	35	87	35	10	18	8	39,3	5	49	30,9
20	☉	II	1	2,8	28	44	26	23	27	20	88	37	36	18	5	29,6	5	53	27,4
21	☿	II	1	15,8	29	41	41	23	27	40	89	40	0	18	1	20,0	5	57	24,0
3. Z.																			
22	☿	II	1	28,8	0	38	55	23	27	36	90	42	23	17	57	10,5	6	1	20,5
23	☿	II	1	41,7	1	36	8	23	27	7	91	44	46	17	53	0,9	6	5	17,1
24	☿	II	1	54,5	2	33	21	23	26	12	92	47	7	17	48	51,5	6	9	13,6
25	☿	II	2	7,2	3	30	33	23	24	53	93	49	27	17	44	42,2	6	12	10,2
26	☉	II	2	19,9	4	27	45	23	23	10	94	51	45	17	40	33,0	6	17	6,8
27	☉	II	2	32,3	5	24	57	23	21	2	95	54	0	17	36	24,0	6	21	3,3
28	☿	II	2	44,5	6	22	8	23	15	30	96	56	12	17	32	15,2	6	24	59,9
29	☿	II	2	56,6	7	19	18	23	18	33	97	58	22	17	28	6,6	6	28	56,4
30	☿	II	2	8,5	8	16	28	23	12	11	99	0	29	17	23	58,1	6	23	52,9

(aus Bode's astron. Jahrbuche.)

Juniuß 1825.

Monats-Tage.	Länge des Mondes.				Stündliche Bewegung des ☾		Breite des Mondes		Stündliche Verände- rung der Breite.		Abweichung des Mondes		Horizon- taldurch- messer des ☾		Horizontal- Parallaxe des ☾			
	3.	6.	M.	6.	M.	6.	6.	M.	6.	M.	6.	M.	6.	M.	6.			
1	8	23	30	29	34	14	0	13	50 ^N	+	3	11	23	4 ⁶	31	48	58	22
2	9	7	2	4	33	21	1	27	39	+	2	59	21	49	31	24	57	37
3	9	20	12	12	32	28	2	34	48	+	2	38	19	23	30	59	56	52
4	10	3	1	48	31	38	3	32	25	+	2	10	16	3	30	35	56	8
5	10	15	33	3	30	55	4	18	20	+	1	38	12	4	30	14	55	28
6	10	27	47	40	30	20	4	51	22	+	1	6	7	41	29	57	54	57
7	11	9	50	51	29	56	5	10	46	+	0	32	3	5	29	45	54	35
8	11	21	46	47	29	43	5	16	54	—	0	2	1	36 ^N	29	38	54	24
9	0	3	39	55	29	42	5	9	20	—	0	36	6	11	29	37	52	22
10	0	15	34	47	29	52	4	48	33	—	1	8	10	34	29	42	55	31
11	0	27	35	34	30	12	4	14	52	—	1	38	14	35	29	52	54	48
12	1	9	46	4	30	41	3	29	25	—	2	7	18	4	30	6	55	14
13	1	22	9	23	31	16	2	33	28	—	2	28	20	47	30	23	55	45
14	2	4	47	57	31	56	1	28	57	—	2	50	22	34	30	42	56	20
15	2	17	42	43	32	39	0	18	33	—	3	1	23	12	31	2	56	57

IX. c.

(aus Bode's astron. Jahrbuche.)

Juniuß 1825.

T.	Stündliche Bewegung der ☾		Durchmesser der ☾		Dauer der Culmination der ☾		Hö. der Entf. der Erde von der ☾. die mittl.		Ort des ☾ ☾ 8 3.		T.	Mondsviertel.			
	M.	6.	M.	6.	M.	6.	0,0000000		6.	M.		☉	☾	☾	☾
5	2	23,5	31	34,1	2	16,6	0,0065097		21	26	1	☉	0	11	51' M.
10	2	23,3	31	33,0	2	17,0	0,0067710		21	10	8	☉	3	11	13' Ab.
15	2	23,1	31	32,0	2	17,3	0,0069751		20	54	16	☉	1	11	15' Ab.
20	2	23,0	31	31,6	2	17,4	0,0071160		20	38	23	☉	0	11	7' Ab.
25	2	23,0	31	31,3	2	17,4	0,0071843		20	22	30	☉	0	11	32' M.
30	2	23,0	31	31,1	2	17,3	0,0072193		20	6					

X. Berz

X. Verzeichniß der geographischen Längen und Breiten von 240 Punkten der Erdoberfläche.

(Sternwarten sind durch ein * angedeutet.)

I. In der nördlichen Hemisphäre.

Namen der Dörter.	Länge.			Breite.			Namen der Dörter.	Länge.			Breite.		
	G	M	S	G	M	S		G	M	S	G	M	S
Grünes Vorgebirge . . .	0	7	3	14	46	7	Algier	20	39	35	36	48	36
Drotava	1	15	49	28	23	27	Gent	21	23	26	51	3	14
Cap Bojador	3	15	0	26	29	0	* Haag	21	58	32	52	4	49
St. Clara I.	4	8	0	29	19	0	* Leyden	22	8	54	52	9	30
Castlebar	8	0	30	53	46	0	Löwen	22	21	32	50	53	26
Cap Finisterre	8	26	15	42	56	30	Amsterdam	22	24	20	52	22	33
Lissabon	8	31	18	38	42	50	Lyon	22	29	43	45	45	52
Lporto	8	58	45	41	11	15	* Utrecht	22	44	55	52	5	39
Corf	9	10	45	51	53	54	Marseille	23	2	8	43	17	45
Coimbra	9	13	30	40	14	0	Trier	24	18	5	49	46	37
Dublin	11	21	0	53	21	11	Bern	25	13	0	46	53	20
Cádiz	11	22	15	36	32	0	Basel	25	15	0	47	33	35
Gibraltar	12	18	44	36	6	30	Münster	25	16	7	51	58	13
Ceuta	12	23	36	35	48	40	* Mannheim	26	8	38	49	29	15
Cap Wrath	12	29	0	58	33	0	Zürich	26	11	27	47	22	10
Malaga	13	14	15	36	43	30	Bremen	26	28	6	53	4	50
Plymouth	13	21	15	50	26	0	Genua	26	33	30	44	25	0
Glasgow	13	23	8	55	51	32	Lüdingen	26	43	24	48	31	16
Madrid	13	57	45	40	25	18	* Mailand	26	51	15	45	28	10
Edinburgh	14	29	30	55	57	57	Biborg	27	6	5	56	27	11
Liverpool	14	43	30	53	27	0	Cassel	27	7	5	51	19	20
York	16	33	45	53	57	45	Hannover	27	22	40	52	22	25
Tombuctu	17	5	0	19	4	0	Hamburg	27	32	33	53	34	32
Bordeaux	17	5	11	44	50	18	* Göttingen	27	39	33	51	31	48
Valencia	17	21	15	39	28	50	Celle	27	43	54	52	37	12
London	17	34	45	51	31	0	Lüneburg	28	2	7	53	14	44
Cambridge	17	44	15	52	12	36	* Pisa	28	3	15	43	43	7
Boulogne	19	16	44	50	43	31	Braunschweig	28	12	12	52	15	35
Montserrat	19	18	45	41	35	30	Mantua	28	27	59	45	9	14
Calais	19	31	1	50	57	32	* Seeberg	28	23	45	50	56	8
Barcelona	19	50	15	41	23	8	Christiania	28	28	45	59	54	50
* Paris	20	0	0	48	50	14	* Verona	28	41	5	45	26	27
Dunkerque	20	2	23	51	2	9	Erlangen	28	43	39	49	35	36
Ostende	20	35	1	51	13	15	Florenz	28	55	30	43	46	30

I. In der nördlichen Hemisphäre.

Namen der Dörter.	Länge.			Breite.			Namen der Dörter.	Länge.			Breite.		
	G	M	S	G	M	S		G	M	S	G	M	S
* Bologna	29	1	15	44	29	36	Mietau	41	23	21	56	39	6
München	29	10	0	48	9	55	Riga	41	44	37	56	56	32
* Padua	29	32	53	45	23	40	Tornea	41	54	45	65	50	50
Halle	29	37	27	51	29	24	Hermannstadt	42	0	30	45	48	0
Regensburg	29	43	8	48	59	41	Candia	42	58	0	35	18	45
Dessau	29	56	46	51	50	6	Wilna	43	7	30	54	41	2
Venedig	30	0	49	45	25	35	Adrianopel	44	6	38	41	41	0
Leipzig	30	1	52	51	20	15	Tassy	45	9	45	47	8	30
Stock	30	6	15	54	22	0	Constantinopel	46	36	15	41	1	20
Rom (St. Peter)	30	7	40	41	53	54	Rhodus	46	52	15	36	36	30
Copenhagen	30	14	12	55	41	4	Alexandria	47	49	0	31	11	28
Landscrona	30	18	45	55	52	14	* Petersburg	47	57	54	59	56	23
Helsingborg	30	21	0	56	2	41	Uerman	48	23	45	46	12	0
Tripolis	30	45	15	32	53	40	Cairo	48	48	0	30	3	12
* Berlin	31	1	5	52	31	46	Cherson	50	36	15	46	38	30
* Palermo	31	1	32	38	6	44	Jerusalem	53	0	0	31	46	34
Dresden	31	22	19	51	2	55	Samara	53	0	0	48	29	35
Triest	31	29	0	45	45	15	Kaluga	53	45	0	54	30	0
* Neapel	31	56	2	40	50	15	Alexandrette	54	0	0	36	35	10
Prag	32	4	55	50	5	19	Aleppo	55	0	0	35	45	23
* Malta	32	10	30	35	53	41	Moskau	55	12	45	55	45	20
Carlsrona	33	12	33	56	10	0	Rakah	56	30	0	36	1	0
* Wien	34	2	30	48	12	36	Mecca	56	33	0	21	30	0
Breslau	34	45	0	51	6	30	Archangel	56	39	15	64	33	36
Presburg	34	46	0	48	8	50	Erzerum	58	0	0	39	56	35
Upsala	35	42	56	59	20	30	Bagdad	62	2	30	33	19	40
Stockholm	35	17	54	59	51	50	Saratow	63	40	0	51	31	28
Danzig	36	17	23	54	20	48	Astrachan	65	42	30	46	21	12
Marienburg	36	41	5	54	1	31	Casan	67	9	30	55	43	58
* Ofen	36	42	15	47	29	44	Isbahan	70	30	0	32	25	0
Pesth	36	44	0	47	31	40	Drenburg	72	44	30	51	46	5
Krakau	37	37	0	50	9	0	Cathrinenburg	78	30	0	56	50	15
Königsberg	38	10	5	54	42	12	Surata	90	2	30	21	10	0
Belgrad	38	15	30	44	52	40	Bombay	90	18	0	18	56	40
Warschau	38	42	32	52	14	28	Goa	91	25	0	15	31	0
Memel	38	45	5	55	42	15	Trinquebar	97	22	0	10	56	0
Patras	39	40	0	38	5	0	Pondichery	97	31	30	11	55	42
Carlsburg	41	14	20	46	4	21	Tomsk	102	39	30	56	30	0

I. In der nördlichen Hemisphäre.

Namen der Derter.	Länge.			Breite.			Namen der Derter.	Länge.			Breite.		
	G	M	S	G	M	S		G	M	S	G	M	S
Calicut	106	2	30	22	33	56	Hermogena I.	225	27	0	58	15	0
Jeniseisk	109	38	30	58	27	27	Acapulca	271	22	45	16	45	0
Malacca	119	45	0	2	12	0	Mexico	277	34	15	19	25	45
Srkuzk	122	13	30	52	18	15	Panama	297	19	0	8	57	48
Canton	130	42	30	23	8	9	Carthagena	302	13	45	10	26	35
Sypa	131	23	45	22	9	20	Philadelphia	302	25	45	39	56	55
Pekin	134	5	30	39	54	13	Neu-York	303	31	0	40	43	0
Nankin	136	27	0	32	4	40	Port au Prince	305	25	0	18	40	0
Day = Bam	137	35	20	23	0	0	Providence	306	20	0	41	50	40
Kam = Hay	139	11	45	31	16	0	Boston	307	2	45	42	25	0
Sakuzk	147	23	45	62	1	50	Duebeck	307	47	0	46	55	0
Schokk	160	53	30	59	20	10	Bermudas	314	12	0	32	35	0
Kwima	171	15	0	65	28	0	Cap St. Frangois	322	8	30	52	40	30
Tschukotskoi	195	51	0	64	14	30	Cap Reel	324	37	30	49	34	0
Cap Nord = Ost	198	28	30	68	56	0	St. John	325	14	0	47	32	0
Clerte I.	207	0	0	61	45	0	Gothaab	325	53	15	64	9	55
Noel I.	220	5	0	1	57	45	Lambhuus	355	49	0	64	6	17

II. In der südlichen Hemisphäre.

Cap Tafernia	7	54	0	30	57	0	Cap Sud	164	38	0	43	42	30
St. Helena I.	11	52	0	15	55	0	Cap Hood	165	3	50	9	58	6
Anniboni I.	23	25	0	1	25	0	Adventurebay	165	10	0	43	23	0
Hout = Bay	35	59	0	34	3	0	Cap Rodney	165	26	45	10	3	32
Vorgeb. der g. Hoffnung	36	4	0	34	29	0	Botany Bay	169	3	0	34	0	0
Cap St. Sebastian	64	5	0	12	30	0	Cap St. George	170	48	45	4	53	30
Assomption I.	64	55	0	9	47	0	Balabea I.	182	2	0	20	7	0
Foulpoint I.	67	30	0	17	40	14	Cap Coronation	184	48	0	22	5	0
Bourbon I.	73	10	0	20	51	43	Cap Sandwich	185	39	0	16	28	0
Rodrigo I.	80	51	30	19	40	40	Montagu I.	186	11	30	17	26	0
Bencola	119	50	30	3	49	16	Sandwich I.	186	13	0	17	41	0
Java I.	122	31	0	6	49	0	Cap Farewell	190	21	30	40	37	0
Lucipara I.	123	57	30	3	10	45	Cap Pallisse	193	3	12	41	38	0
Batavia	124	33	46	6	12	0	Portland I.	195	52	0	33	32	30
Timorland	149	34	0	8	15	0	Cap Ost	196	10	0	37	42	30
Cap York	159	20	0	10	37	0	Wallis I.	201	25	15	13	22	0
Cap Bedford	162	59	0	15	16	0	Danger I.	210	35	0	10	51	0

II. In der südlichen Hemisphäre.

Namen derörter.	Länge.			Breite.			Namen derörter.	Länge.			Breite.		
	G	M	S	G	M	S		G	M	S	G	M	S
Atowi I.	218	0	30	21	57	0	Ildefonso I.	308	12	0	55	51	0
Otahiti I.	227	6	0	14	30	0	Cap Horn	309	55	0	55	58	30
Bird I.	234	6	0	17	48	0	Cap St. Diego	312	26	0	54	33	0
Paques I.	267	59	0	27	7	0	Cap Blanco	312	58	0	47	20	0
Guayaquil	296	28	30	2	11	21	Monte Video	321	35	0	34	45	48
Cap St Laurent	297	23	0	1	2	0	Para	328	0	0	1	28	0
Duito	299	45	0	0	15	17	St. Catharina I.	328	23	0	27	35	0
Coquimbo	300	24	15	29	54	40	Rio Janeiro	334	22	10	22	54	13
Callao	300	42	0	12	1	53	Cap Frio	335	55	0	22	54	0
Cap Disseada	303	22	0	53	4	15	Willis I.	337	10	20	54	0	0
Conception	305	0	0	36	42	53	Olinda	342	32	30	8	13	0
Ylo	306	27	0	17	36	15	Ferdinand I.	345	2	0	3	56	20
Urica	307	15	0	18	26	40	Sandwichsland	349	56	0	59	34	0
Port de Noel	307	37	0	55	21	57	Cap Bristol	350	49	0	59	2	30

XI. Tafel der abnehmenden Längengrade.

Breite.	Längengrade in Meilen.	Breite.	Längengrade in Meilen.	Breite.	Längengrade in Meilen.	Breite.	Längengrade in Meilen.
0°	15,00	22°	13,90	45°	10,60	68°	5,63
1	14,99	23	13,80	46	10,41	69	5,38
2	14,98	24	13,70	47	10,23	70	5,13
3	14,96	25	13,60	48	10,03	71	4,88
4	14,95	26	13,48	49	9,83	72	4,63
5	14,93	27	13,36	50	9,63	73	4,38
6	14,91	28	13,24	51	9,43	74	4,13
7	14,89	29	13,11	52	9,23	75	3,88
8	14,85	30	12,98	53	9,03	76	3,63
9	14,80	31	12,95	54	8,81	77	3,38
10	14,76	32	12,71	55	8,60	78	3,13
11	14,71	33	12,55	56	8,38	79	2,86
12	14,66	34	12,43	57	8,16	80	2,60
13	14,61	35	12,28	58	7,95	81	2,33
14	14,55	36	12,13	59	7,73	82	2,08
15	14,48	37	11,98	60	7,50	83	1,83
16	14,41	38	11,81	61	7,26	84	1,56
17	14,35	39	11,65	62	7,03	85	1,30
18	14,26	40	11,48	63	6,80	86	1,05
19	14,18	41	11,31	64	6,56	87	0,78
20	14,10	42	11,15	65	6,33	88	0,51
21	14,00	43	10,96	66	6,10	89	0,26
22	13,90	44	10,78	67	5,86	90	0,00

XII. Geographische Längenmaasse.

Namen der Derter und Wegmaasse.	1 Grad enthält	Länge in Toisen.	Namen der Derter und Wegmaasse.	1 Grad enthält	Länge in Toisen.
Arabien, Meile	56,60	1008,9	Oestreich, Meile		
Armenien, Farsang			= 4000 Wiener Klafter	14,67	3892,0
= 30 griech. Stadien . .	24,97	2287,1	Persien, Farsang	22,22	2569,0
Batavia, Meile	15,00	3807,0	Pohlen, Meile	20,00	2855,0
Bayern, fl. Meile	14,13	4041,0	Portugal, —	18,00	3172,5
Böhmen, Meile	14,67	3892,0	Preußen, —		
Bologna, —	58,48	976,0	= 1800 Danz. Ruthen .	14,37	3975,3
Brabant, —	20,00	2855,2	Rom, Meile = 8 olymp.		
Burgund, —	19,70	2898,8	Stadien	74,90	762,3
China, neue Li	139,42	295,2	Rußland, Werst		
Dänemark, Meile			= 1500 Urßchin	104,33	547,5
= 24000 Rheinf. Fuß . .	14,77	3865,0	Sachsen, Meile		
Deutschland, Meile	15,00	3807,0	= 16000 Dresd. Ellen .	12,29	4646,7
Ferrara, —	83,90	680,5	Schlesien, Meile		
Flandern, —	17,73	3220,9	= 11250 Schlesiße Ellen	17,18	3324,5
Frankreich, gr. Lieue . . .	22,84	2500,0	Schottland, Meile	49,78	1147,1
— — fl. Lieue	28,55	2000,0	Schweden, Meile		
— — Seemeile	20,00	2855,0	= 18000 Ellen	10,41	5483,7
Hamburg, Meile	14,77	3865,0	Schweiz, Meile	13,30	4294,5
Hessen, —	11,27	5067,0	Spanien, —	26,60	2147,1
Irland, —	39,99	1427,7	Stadien, griech.	749,04	76,2
Italien, —	60,00	951,8	Surinam, Meile	26,84	2126,7
London, —	73,00	782,3	Türkey, Berri	66,67	856,5
Neapel, —	57,71	990,0	Ungarn, a. Meile	13,33	4283,3
Niederlande, Stunde . . .	19,65	2906,8	— — neue Meile	14,67	3892,0
— — Seemeile	20,00	2855,0	Westphalen, —	10,00	5710,4

Alphabetisches Verzeichniß

der im Buche vorkommenden Kunstwörter.

- Abendweite 33.
 Absehen 66.
 Abweichung 11.
 Abwicklung 135.
 Aequator 10.
 Aequatorial-Projection 127.
 Aequinoctialpunkte 41.
 Almucanthat 11.
 Anomalistisches Jahr 44.
 Aphelium 36.
 Apogäum 36.
 Apfidenlinie 44.
 Atmosphärische Strahlenbrechung 29.
 Arendrehung der Erde 22.
 Azimuth 11.
 Bonne'sche Projection 139.
 Borda'sche Formel 94.
 Breite (astronomische) 40.
 Breite (geographische) 75.
 Cardinalpunkte 31.
 Central-Projection 126. 129.
 Centrifugalkraft 108.
 Chronometer 89.
 Circummeridianhöhen 79.
 Circumpolarferne 75.
 Climata 53.
 Colure 41.
 Collimationsfehler 77.
 Compas 32.
 Coniglobium 124.
 Correction des Mittags 59.
 Dämmerungskreis 47. 55.
 Declination, Declinationskreis 11.
 Douwes Methode 83.
 Elliptik 34.
 Emerision 90.
 Ephemeriden 151.
 Erdare 22.
 Erdbahn 34.
 Erdkugel (künstliche) 123.
 Erdmeridian 24.
 Erleuchtungsgränze 46.
 Excentricität der Erdbahn 56. der Mondbahn 59.
 Gerade Aufsteigung 11.
 Gesichtswerte 27.
 Gradmessungen 101. 121.
 Halbschatten 72.
 Heliometer 35.
 Hel's Methode 79.
 Höhe 11. Höhenkreis 11.
 Höhenparallaxe 38. ρ . Parallaxe der Sonne 40. 149.
 des Mondes 70.
 Horizontal-Projection 127.
 Horrebow's Methode 79.
 Jahr 44. Jahreszeiten 47.
 Jährliche Aenderung der Rectascension und Declination 44.
 Immersion 90.
 Knoten, Knotenlinie 67.
 Länge (astronomische) 40.
 Länge (geographische) 24.
 Längengrade (abnehmende) 156.
 Längenunterschied 24.
 Legendre's Lehrsat 103.
 Log 32.
 Loxodromie 32.
 Maupertuis'sche Formel 115.
 Meridian 11.
 Metre 121.
 Mittag 58. Mittagshöhe 75.
 Mittagslinie 31.
 Mittlere Zeit 59.

Monat 67.
 Mondbahn 69.
 Mondsculminationen 97.
 Mondsdistanzen 92.
 Mondsfinsternisse 71.
 Mondsknoten 67.
 Murdoch'sche Projection 138.

Nachtgleichpunkte 41.
 Nadir 11.
 Nordpunkt 11. 31.
 Nutation 43.

Orthographische Projection 126.
 Ostpunkt 31.

Parallaxe 37. jährliche 18.
 Parallaxenbestimmung 38.
 Parallelkreise 10.
 Passageninstrument 58.
 Periodischer Mondsumlauf 67.
 Perspektivische Projectionen 126.
 Perigäum 36.
 Perihelium 35.
 Perturbationen 37.
 Phasen 71.
 Planeten, obere und untere 16. 143.
 Plattcharten 139.
 Polarkreis 49.
 Polarprojection 127.
 Pole 10.
 Polhöhe 74.
 Präcision der Fixsterne 43.
 Projectionen 125.

Quadrant eines Erdmeridians 121.
 Quadraturen des Mondes 70.

Rechtläufige Bewegung 16.
 Rectascension 11.
 Reduction auf den Horizont 102.
 Refraction (mittlere) 30.
 Rückläufige Bewegung 16.

Scheitelfreis 11.
 Schiefe der Ekliptik 34.
 Schifffahrt, ebene, 32.
 Schwungkraft 108.

Secuhr 89.
 Sextant 58. 65. 87. 93.
 Siderisches Jahr 44.
 Solstitialpunkte 41.
 Sonnenfinsternisse 70.
 Sonnendistanzen (correspondirende) 65.
 Sonnenhöhen (correspondirende) 58.
 Sonnenparallaxe 40.
 Sonnensystem 17. 143.
 Sonnenwendpunkte 42.
 Sphaera obliqua, parallela, recta 26.
 Stereographische Projection 127. 131.
 Sternentag, Sternzeit 56.
 Strahlenbrechung 29. 148.
 Stundenkreis 11.
 Stundenring, Stundenzeiger 124.
 Stundenwinkel 11.
 Südpunkt 11. 31.
 Synodischer Mondsumlauf 67.
 Syzigien 70.

Tagebogen 10. Tagebogen der Sonne 49.
 Tagekreis 10.
 Tageszeiten 47.
 Theodolit 65.
 Thierkreis 41.
 Timekeeper 89.
 Tropisches Jahr 44.

Uhr (astronomische) 56.

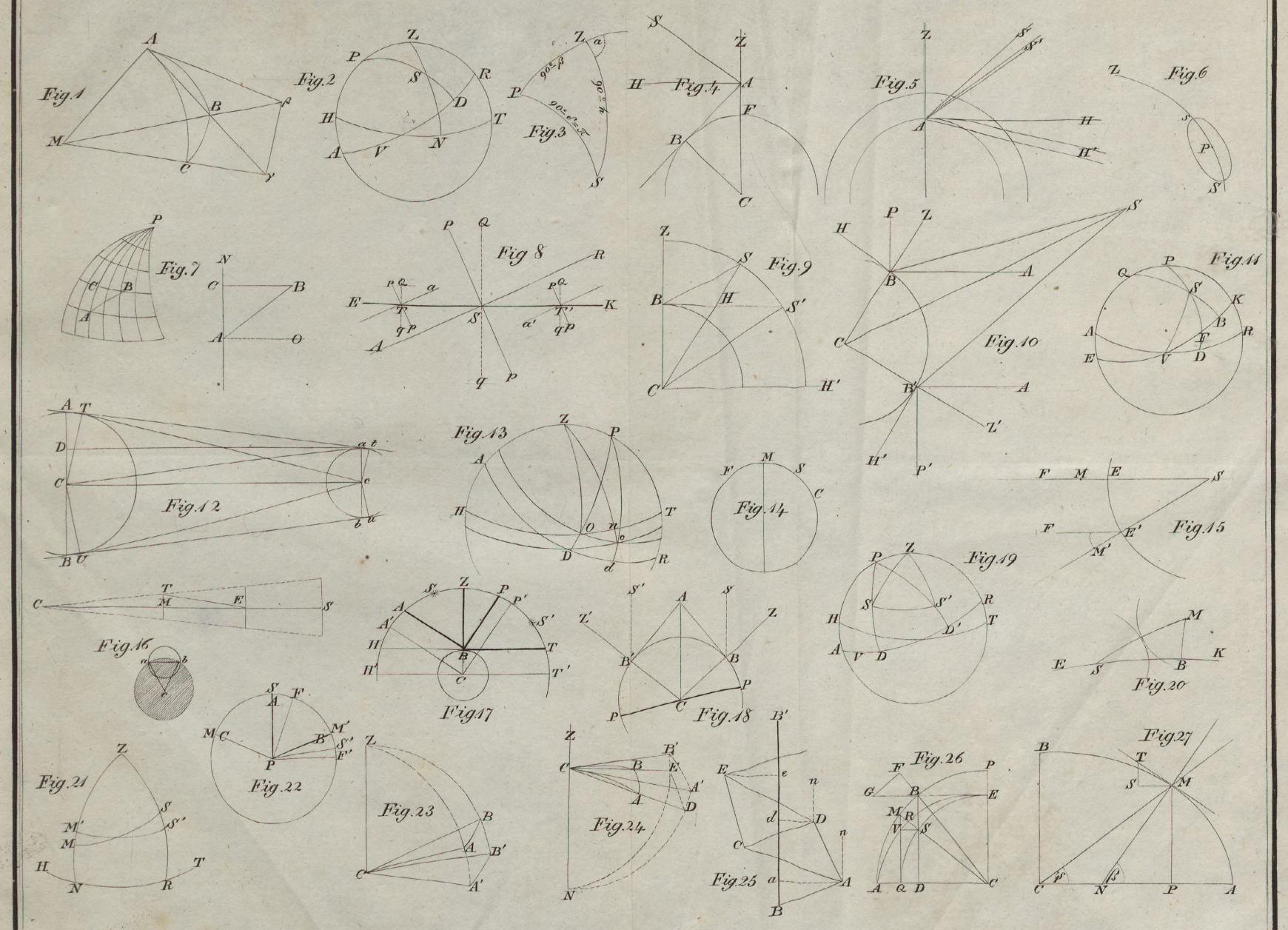
Vertikalkreis 11.
 Vorrückung der Nachtgleichen 43.

Wahre Zeit 57.
 Weite des Horizonts 27.
 Weltgegenden 31.
 Weltpole 10.
 Wendekreise 49.
 Westpunkt 31.
 Windrose 32.

Zeichen des Thierkreises 41.
 Zeitgleichung 60.
 Zenith 11.
 Zenithsector 81.
 Zodiacus 41.
 Zonen 54.

87.217-





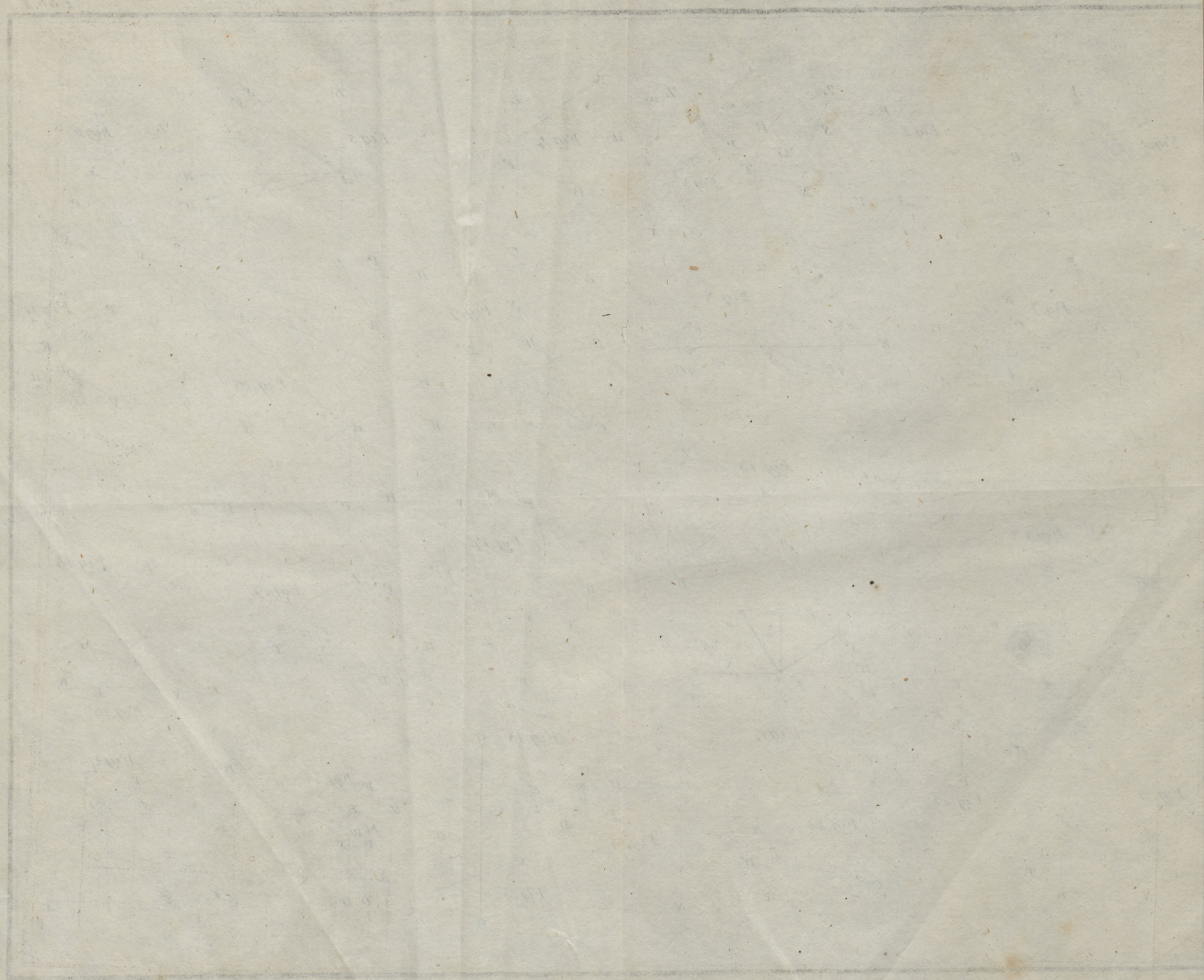


Fig. 28.

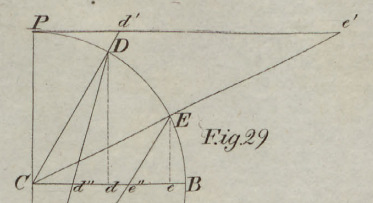
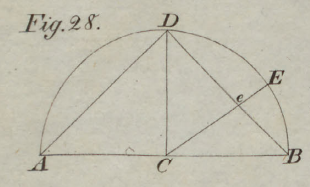


Fig. 29

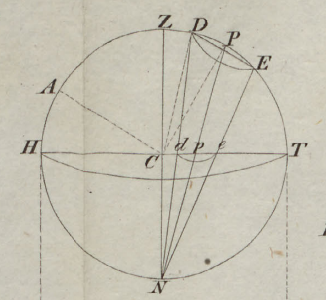


Fig. 33

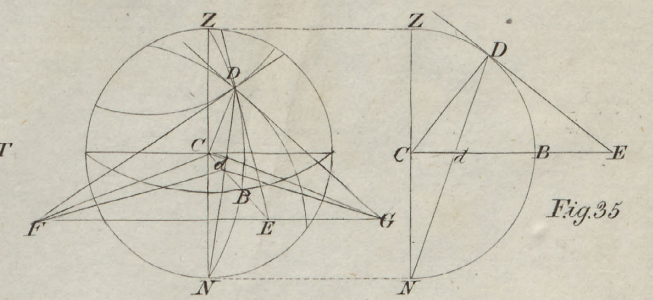


Fig. 35

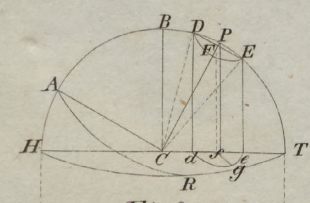


Fig. 30

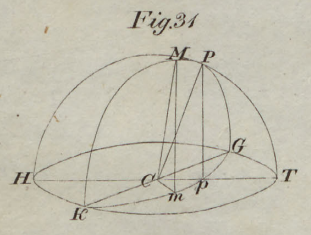


Fig. 34

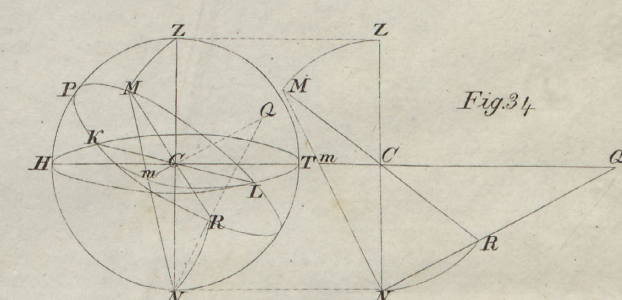
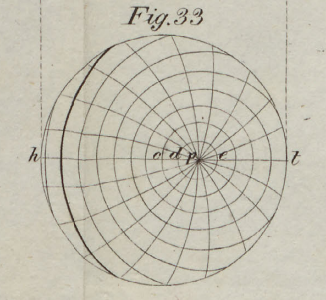


Fig. 34

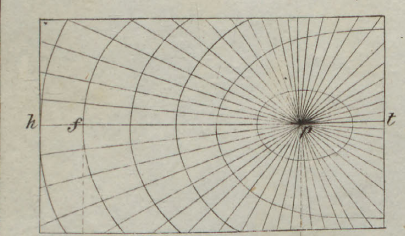
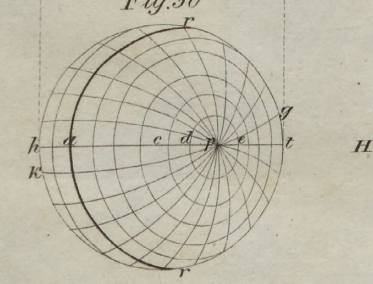


Fig. 32

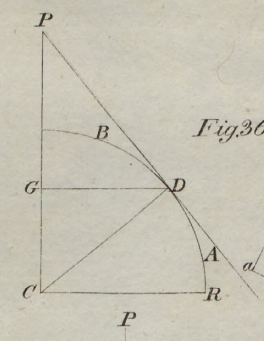


Fig. 36

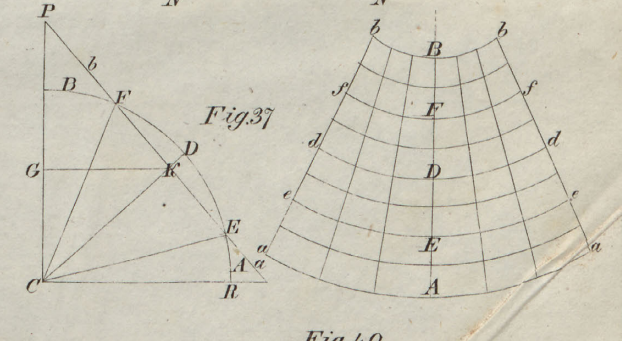
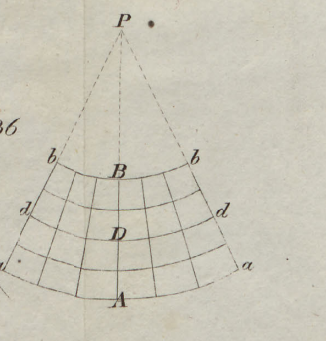


Fig. 37

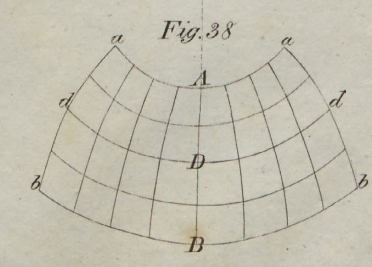
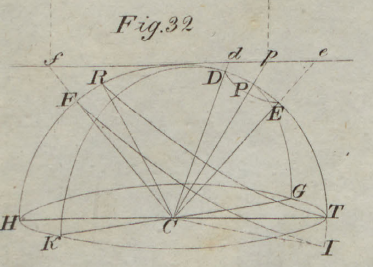


Fig. 38

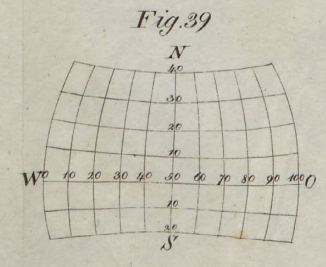
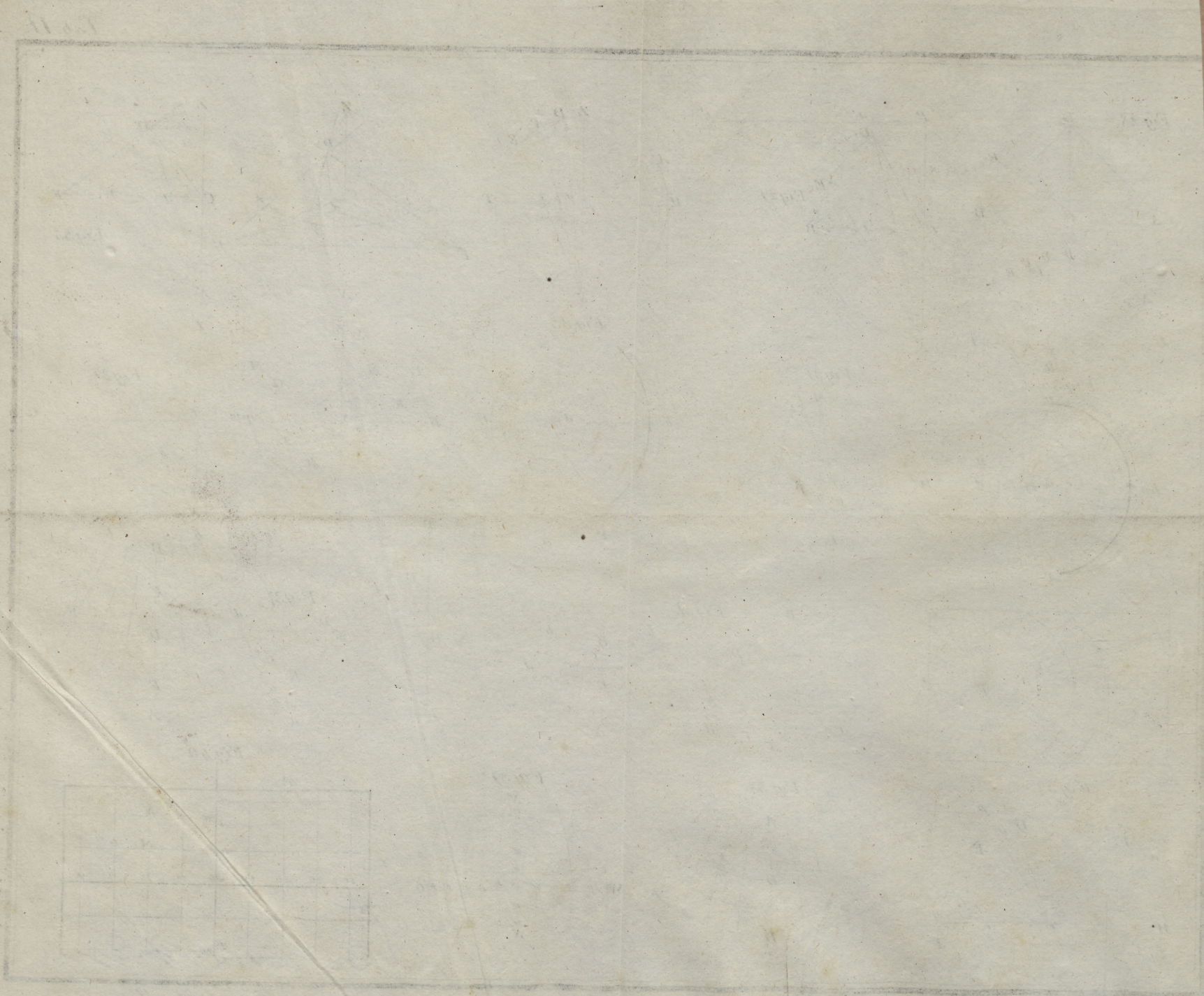


Fig. 39

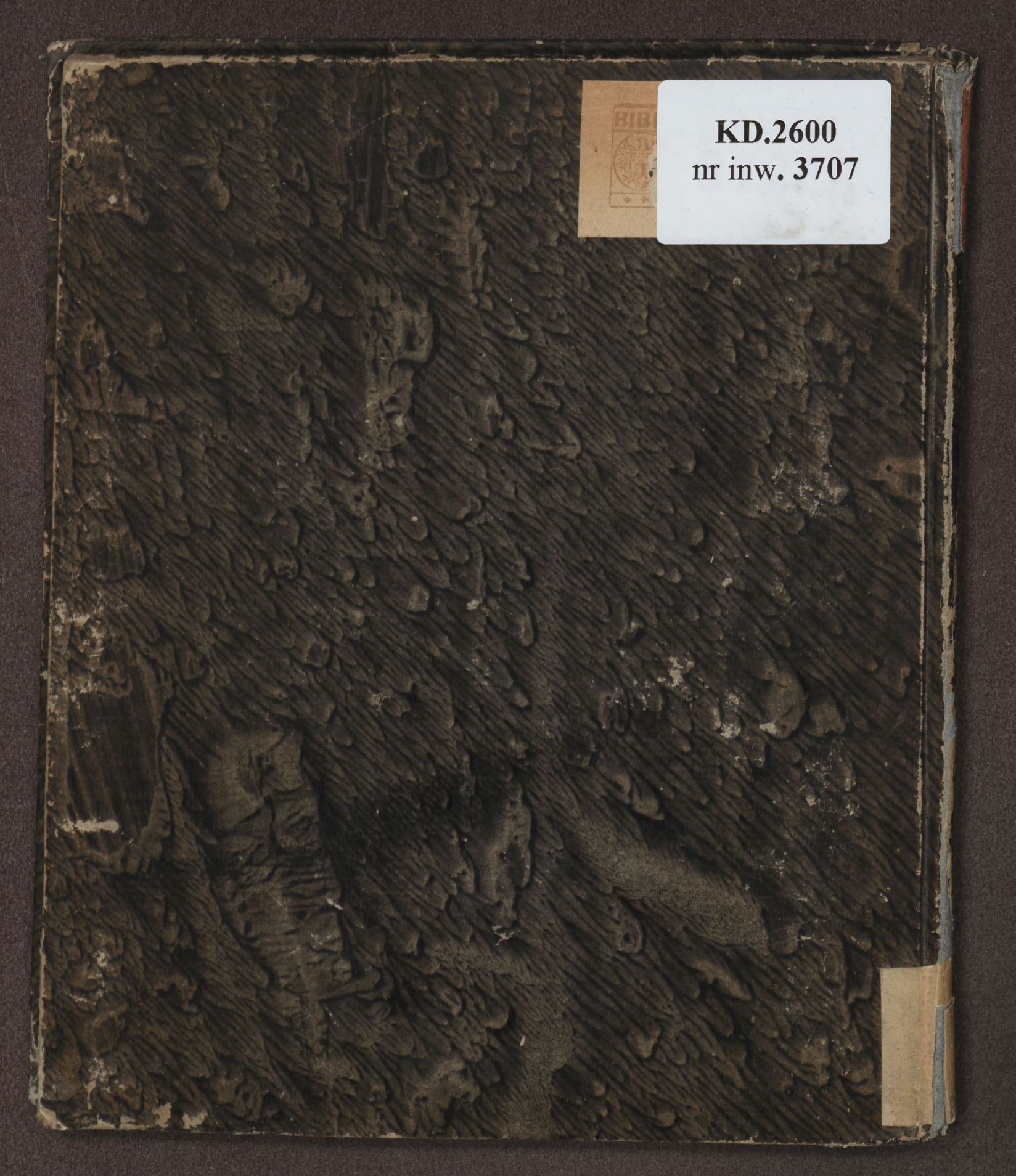
Fig. 40

A		B	
10	20	30	40
20	30	40	50
30	40	50	60
40	50	60	70
50	60	70	80
60	70	80	90
70	80	90	
80	90		
90			



ROTANOX
oczyszczanie
X 2008

27



KD.2600
nr inw. 3707