Aufgaben

über das

geradlinige Dreieck

trigonometrisch gelöst

von

August Richter.

Mit einer Tafel Figuren.

Elbing,
Hartmann'sche Buchdruckerei und Buchhandlung.

1835.

Sr. Hochwohlgeboren

dem Director und ersten Professor des Gymnasiums
zu Elbing

Herrn

J. G. MUND

seinem würdigen Vorgesetzten

bei

Seiner 25jährigen Jubelfeier

am 15ten August 1832

mit Hochachtung und Dankbarkeit

überreicht

von dem

Verfasser.

Vorrede.

Vor einigen Jahren war das vorliegende Werkchen bereits vollendet. Am 25. August 1832, wo das hiesige Gymnasium Gelegenheit fand, die Gefühle der Hochachtung und Liebe gegen seinen würdigen Director bei der Jubelfeier Seiner 25jährigen segensreichen Wirksamkeit im Schulwesen auszusprechen, vermochte ich meinem verehrten Vorgesetzten und väterlichen Freunde die Gefühle, welche mich so lebhaft an jenem Tage bewegten, nur durch Überreichung des handschriftlichen Werkes einigermaßen zu bezeugen. Die Gabe wurde in Liebe dargeboten und, so gering sie war, mit Liebe aufgenommen. Seitdem war mir die Herausgabe des Werkes zu einer theuern Pflicht geworden. Hindernisse mancherlei Art verzögerten aber die Ausführung und erst nach einem langen, über alle Erwartung langen Zeitraume sehe ich mich endlich am Ziele meiner Wünsche. Möchte es mir nun gelungen seyn, eine zweckmäßige Arbeit zu liefern. Es leitete mich bei ihrer Anfertigung die Ansicht, daß der trigonometrische Calcul in den beiden obern Klassen eines Gymnasiums das Fundament der Rechnung bildet, daß bei dem mehrjährigen Aufenthalte des Schülers in diesen Klassen eine reichhaltige Sammlung dem Lehrer wünschenswerth erscheinen möchte und daß selbst der fleißige und talentvolle Schüler sie bei seinen Privatstudien würde benutzen können. Das Werk zerfällt in zwei Theile. Der erste umfaßt die 3 ersten Abtheilungen und enthält solche Aufgaben, in welchen die in §. 1 aufgezählten Data vorkommen. Der zweite Theil oder die vierte Abtheilung beschäftigt sich mit Aufgaben über die Schwerlinie und über die Radien des um- und eingeschriebenen Kreises. Sollte sich die Masse der hier mitgetheilten Auflösungen auf einen verhältnißmäßig geringen Raum einschränken lassen, so durfte nicht jede Aufgabe einzeln und unabhängig von den übrigen behandelt, es mußten vielmehr die gewonnenen Gleichungen soviel als möglich für die Ableitung der folgenden benutzt werden.

Offenbar würde der Raum noch bedeutend vermindert worden seyn, wenn die mittelst eines Hilfswinkels bewirkte Transformation der Endgleichungen in den 3 ersten Abschnitten weggeblieben wäre. Es schien mir aber zweckmäßig diese Umformung hinzuzufügen, weil die logarithmische Rechnung dadurch sehr vereinfacht wird. Der Schüler, welcher diese Sammlung benutzt, wird sich überall zu eigener Thätigkeit aufgefordert finden, indem theils vor der Endgleichung mehrere Reductionen einzuschalten sind, theils jede Aufgabe aus den Fundamentalgleichungen entwickelt werden muß.

Zur vollständigen Behandlung einer Aufgabe gehört die Angabe der Determination d. h. die Bestimmung, ob die Construction bei jeder Relation der gegebenen Stücke möglich ist oder ob eine Gränze stattfinde, welche die Data nicht erreichen oder nicht überschreiten dürfen. Untersuchungen dieser Art finden sich bis jetzt nur in geometrischen Schriften, wiewohl nicht überall mit der nöthigen Vollständigkeit nnd Gründlichkeit; in arithmetischen Werken dagegen werden sie fast gänzlich vermißt, was um so weniger gebilligt werden darf, als man sich von ihrer Nützlichkeit und Nothwendigkeit leicht überzeugen kann. Bei der algebraischen Auflösung einer Aufgabe ist allemal eine numerische Berechnung erforderlich, damit für bestimmte Data die Bestandtheile der gesuchten Figur einzeln dargelegt werden. Sind nun nicht schon vorher die Gränzen für die Data festgestellt worden, so wird man öfters Gefahr laufen eine langwierige Rechnung vergeblich gemacht zu haben. Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, wähle ich die Aufgabe

$$B = 2\alpha,\ b^2 + (a - c)^2 = D,\ b - h,$$

welche durch die Gleichung (369) gelöst wird. Setzt man hier, wenn $2\alpha > 90^0$ ist, $\frac{\sqrt{[2D\cot\alpha(1 - \cot\alpha)]}}{b - h} = \sin M$, so findet man 1) $b = \cot\frac{1}{2}M\sqrt{\frac{\frac{1}{2}D\cot\alpha}{1 - \cot\alpha}}$ 2) $b = \text{tang}\,\frac{1}{2}M\sqrt{\frac{\frac{1}{2}D\cot\alpha}{1 - \cot\alpha}}$

Es werde nun gegeben

$$B = 130^0\,18',\ D = 63,\ b - h = 5{,}6$$

so erhält man

1) $b = 5{,}380225$	2) $b = 5{,}050493$
$b^2 = 28{,}94681$	$b^2 = 25{,}50748$
$(a-c)^2 = 34{,}05319$	$(a-c)^2 = 37{,}49252$

Es ist also in beiden Fällen $b < a - c$. Da nun dieses Resultat einer bekannten Eigenschaft des Dreiecks widerstreitet, so läßt sich aus den gegebenen Stücken kein Dreieck berechnen und die ziemlich weitläufige Arbeit ist vergeblich gemacht worden. Ferner wenn gegeben wird

$$B = 130^0\,18',\ D = 53,\ b - h = 5{,}6$$

so findet man

1) $b = 7{,}298701$	2) $b = 3{,}132016$
$b^2 = 53{,}27105$	$b^2 = 9{,}809524$
also $b^2 > D$	also $b < a - c$

Beide Werthe für b sind also ebenfalls unbrauchbar, mithin ist auch diese Rechnung vergeblich gewesen. Wer den ersten Werth ($b = 7{,}298701$) für zulässig halten wollte, weil ja, wofern man $(a-c)^2$ als negativ betrachtet, $b^2 > D$ gefunden werden könne, der berechne aus

$$b = 7{,}298701 \text{ und } b - h = 5{,}6$$

$h = 1{,}698701$ und suche nun den Winkel φ vermittelst der Gleichung 177. Es wird daselbst $M = 65^0\,5'\,40'', 27$ gefunden, also, weil $\alpha = 65^0\,9'$ ist, $\sin\alpha > \sin M$, mithin $\cos\varphi > 1$. Hätte man vor Anfang der Rechnung die Gränzen aufgesucht, so würde man beide Aufgaben als unmöglich erkannt und sich also eine vergebliche Mühe erspart haben. Man findet nämlich, daß für $B = 130^0\,18'$ und $b - h = 5{,}6$

$$D \overline{\overline{>}}\, 53{,}10781 \text{ und } D < 62{,}72$$

seyn müsse. Die Entwickelung der Determinationen liefert aber auch die richtige Antwort auf die Frage, ob beide Wurzeln der quadratischen Gleichung überall zulässig sind. Diese Frage muß, so scheint es mir, schlechterdings verneint werden. Um die Sache außer allen Zweifel zu setzen, werde ich diese Behauptung durch folgende Beispiele bestätigen.

Nimmt man in der vorigen Aufgabe

$$B = 130^0\,18',\ D = 62,\ b - h = 5{,}6$$

so erhält man 1) $b = 5{,}892485$ und 2) $b = 4{,}538234$. Hier ist der letzte Werth für b unbrauchbar, denn es ergiebt sich daraus ferner $b^2 = 20,59557$ und $(a-c)^2 = 41,40443$ also $b < a - c$. Die negative Wurzel also, welche diesen Werth für b liefert, ist für die obigen Data nicht zulässig.

Für die Aufgabe $A - C$, b, ac sind zwei Auflösungen durch die Gleichungen 161. 162 gegeben worden. Man nehme für diese Data was immer für Werthe an, so wird in Gleichung 161. $\cos 2\alpha > 1$ durch die negative Wurzel, und in Gleichung 162. $\sin \alpha > 1$ durch die positive Wurzel. Folglich sind die genannten Wurzeln unbrauchbar.

Die Aufgabe B, $a + c + b = p$, $b + h = f$ wird durch die Gleichung 307 gelöst. Ich behaupte, daß allemal, wenn $B \overline{\overline{>}} 53^0\, 7'\, 48'', 36$ ist, die positive Wurzel unbrauchbar sey. Denn man setze z. B.

$$B = 64^0, \quad p = 59, \quad f = 32$$

so giebt die positive Wurzel $b = 44,337\ldots$ also $b > a + c$, was nicht möglich ist.

Die angeführten Beispiele werden hinreichend beweisen, daß nicht immer beide Wurzeln der quadratischen Gleichung gebraucht werden können, und daß die Entwickelung der Determinationen, abgesehen von dem Interesse, welches Untersuchungen dieser Art gewähren, auch in praktischer Hinsicht nützlich und nothwendig ist. Hiervon überzeugt habe ich die Determinationen zu sämmtlichen in dem vorliegenden Werke enthaltenen Gleichungen, welche nicht den zweiten Grad übersteigen, ausgearbeitet und beabsichtige, wofern dieser Plan gebilligt wird, die Determinationen der gewöhnlicheren und wichtigeren Aufgaben als den zweiten Theil der gegenwärtigen Schrift nachfolgen zu lassen. Mit Dank würde ich es anerkennen, wenn mir diejenigen Aufgaben bezeichnet würden, welche zunächst eine Begränzung verdienen möchten. Schon im J. 1833 habe ich diesen Gegenstand in dem Michaelisprogramm des hiesigen Gymnasiums ausführlicher, als es hier geschehen konnte, besprochen und mehrere Determinationen mitgetheilt, denen ich jetzt in dem unten folgenden Anhange noch einige andere hinzufüge.

Elbing, im März 1835.

Der Verfasser.

Übersicht der Aufgaben.

№	Aufgabe.	Gleichung.
1.	B, A, b	1. 52. 54. 377. 450.
2.	B, A, $a+c+b$	21. 23. 24.
3.	B, A, $a+c-b$	22. 25.
4.	B, A, $(a+c)^2-b^2$	26.
5.	B, A, $b^2-(a-c)^2$	382.
6.	B, A, $a^2+c^2-b^2$	43.
7.	B, A, $a+c$	17. 45. 61. 105. 385.
8.	B, A, $a-c$	29. 46. 64. 109. 113. 374.
9.	B, A, a^2-c^2	49. 68.
10.	B, A, ac	39. 44. 58.
11.	B, A, $(a+c)a$	47.
12.	B, A, $(a-c)a$	48.
13.	B, A, $(a-c)c$	48.
14.	B, A, h	5. 53.
15.	B, A, $h+m$	71. 74. 76. 81. 83.
16.	B, A, $h-m$	72. 75. 77. 82. 85.
17.	B, A, h^2-m^2	73. 78. 89.
18.	B, A, h^2+mn	§. 36. A.
19.	B, A, h^2-mn	§. 36. A.
20.	B, A, m	9. 101.
21.	B, A, mn	91.
22.	B, A, s	4. 11. 124.
23.	B, A, μ	13. 129.
24.	B, A, $\mu-\nu$	128.
25.	B, A, F	54 403.
26.	B, A, ϱ	376.
27.	B, A, r	448. 449.
28.	B, b, a	1. 132. 293.
29.	B, b, $a+c$	18. 150. 301. 306 407.
30.	B, b, $a-c$	30. 152. 322. 338.
31.	B, b, a^2+c^2	42. 163. 343. 347.
32.	B, b, a^2-c^2	154.
33.	B, b, ac	160. 285.

№	Aufgabe.	Gleichung.
34.	B, b, (a+c)a	156. 157.
35.	B, b, (a—c)a	158. 159.
36.	B, b, a+c+h	200.
37.	B, b, a+c—h	201.
38.	B, b, h+(a—c)	202.
39.	B, b, h—(a—c)	203.
40.	B, b, h	57. 177. 178. 179. 466.
41.	B, b, s	125. 262.
42.	B, b, ϱ	388.
43.	B, b, f	464. 468.
44.	B, b+a, b+c	165.
45.	B, b+a, b—c	166.
46.	B, b—a, b+c	167.
47.	B, b—a, b—c	168.
48.	B, a+c+b, b+h	307.
49.	B, a+c+b, b—h	308.
50.	B, a+c+b, ac	27. 303.
51.	B, a+c+b, h	189. 305.
52.	B, a+c+b, F	195. 302.
53.	B, a+c+b, ϱ	386. 396.
54.	B, a+c+b, r	428.
55.	B, a+c—b, b+h	314.
56.	B, a+c—b, b—h	315.
57.	B, a+c—b, ac	311.
58.	B, a+c—b, h	192. 313.
59.	B, a+c—b, F	312.
60.	B, a+c—b, r	429.
61.	B, b+(a—c), b+h	327.
62.	B, b+(a—c), b—h	328.
63.	B, b+(a—c), h—b	329.
64.	B, b+(a—c), ac	324.
65.	B, b+(a—c), h	326.
66.	B, b+(a—c), F	325.
67.	B, b+(a—c), r	431.
68.	B, b—(a—c), b+h	333.
69.	B, b—(a—c), b—h	334.
70.	B, b—(a—c), h—b	335.
71.	B, b—(a—c), ac	330.
72.	B, b—(a—c), h	332.
73.	B, b—(a—c), F	331.
74.	B, b—(a—c), r	432.
75.	B, $(a+c)^2+b^2$, b+h	361.
76.	B, $(a+c)^2+b^2$, b—h	362.
77.	B, $(a+c)^2+b^2$, ac	360.
78.	B, $(a+c)^2+b^2$, h	198. 358.
79.	B, $(a+c)^2+b^2$, F	359.
80.	B, $(a+c)^2+b^2$, r	437.
81.	B, $(a+c)^2-b^2$, b+h	363.
82.	B, $(a+c)^2-b^2$, b—h	364.

№	Aufgabe.	Gleichung.
83.	$B,\ (a+c)^2-b^2,\ h$	196. 316.
84.	$B,\ (a+c)^2-b^2,\ r$	439.
85.	$B,\ b^2+(a-c)^2,\ b+h$	368.
86.	$B,\ b^2+(a-c)^2,\ b-h$	369.
87.	$B,\ b^2+(a-c)^2,\ ac$	367.
88.	$B,\ b^2+(a-c)^2,\ h$	365.
89.	$B,\ b^2+(a-c)^2,\ F$	366.
90.	$B,\ b^2+(a-c)^2,\ r$	441.
91.	$B,\ b^2-(a-c)^2,\ b+h$	370.
92.	$B,\ b^2-(a-c)^2,\ b-h$	371.
93.	$B,\ b^2-(a-c)^2,\ h$	337.
94.	$B,\ b^2-(a-c)^2,\ r$	443.
95.	$B,\ a^2+c^2+b^2,\ b+h$	354.
96.	$B,\ a^2+c^2+b^2,\ b-h$	355.
97.	$B,\ a^2+c^2+b^2,\ ac$	352.
98.	$B,\ a^2+c^2+b^2,\ h$	353.
99.	$B,\ a^2+c^2+b^2,\ F$	351.
100.	$B,\ a^2+c^2+b^2,\ r$	433.
101.	$B,\ a^2+c^2-b^2,\ b+h$	356.
102.	$B,\ a^2+c^2-b^2,\ b-h$	357.
103.	$B,\ a^2+c^2-b^2,\ h$	346.
104.	$B,\ a^2+c^2-b^2,\ r$	435.
105.	$B,\ b(a+c),\ \varrho$	399.
106.	$B,\ b+h,\ a+c$	318.
107.	$B,\ b+h,\ a-c$	340.
108.	$B,\ b+h,\ a^2+c^2$	349.
109.	$B,\ b+h,\ ac$	287.
110.	$B,\ b-h,\ a+c$	319.
111.	$B,\ b-h,\ a-c$	341.
112.	$B,\ b-h,\ a^2+c^2$	350.
113.	$B,\ b-h,\ ac$	288.
114.	$B,\ h-b,\ ac$	289.
115.	$B,\ b^2+h^2,\ ac$	290.
116.	$B,\ b^2-h^2,\ ac$	291.
117.	$B,\ a,\ c$	50. 282. 292. 310. 320. 451.
118.	$B,\ a,\ h$	5. 136.
119.	$B,\ a,\ h+m$	79. 214. 215.
120.	$B,\ a,\ h-m$	80. 217. 218.
121.	$B,\ a,\ h^2-m^2$	90.
122.	$B,\ a,\ hm$	220.
123.	$B,\ a,\ m$	9. 140.
124.	$B,\ a,\ s$	240. 241. 243. 244.
125.	$B,\ a,\ \mu$	13. 144.
126.	$B,\ a,\ F$	284.
127.	$B,\ a+c,\ h$	63. 170. 317.
128.	$B,\ a+c,\ m-n$	204.
129.	$B,\ a+c,\ mn$	236.
130.	$B,\ a+c,\ s$	246.
131.	$B,\ a+c,\ \mu-\nu$	266.

№	Aufgabe.	Gleichung.
132.	B, $a+c$, $\mu\nu$	279.
133.	B, $a+c$, F	309.
134.	B, $a+c$, ϱ	391. 408.
135.	B, $a+c$, r	415.
136.	B, $a-c$, h	67. 171. 339.
137.	B, $a-c$, $m-n$	206.
138.	B, $a-c$, mn	238.
139.	B, $a-c$, s	248.
140.	B, $a-c$, $\mu-\nu$	268.
141.	B, $a-c$, $\mu\nu$	281.
142.	B, $a-c$, F	321.
143.	B, $a-c$, ϱ	393. 394.
144.	B, $a-c$, r	419.
145.	B, a^2+c^2, h	348.
146.	B, a^2+c^2, F	344.
147.	B, a^2+c^2, r	422.
148.	B, a^2-c^2, $m-n$	209.
149.	B, a^2-c^2, r	426.
150.	B, ac, $an+cm$	228.
151.	B, ac, $an-cm$	230.
152.	B, ac, h	60. 174. 286.
153.	B, ac, hm	221. 223.
154.	B, ac, mn	118. 119. 235.
155.	B, ac, s	249.
156.	B, ac, $\mu\nu$	253.
157.	B, ac, ϱ	387.
158.	B, an, cm	232.
159.	B, h, m	7. 138.
160.	B, h, $m-n$	96. 185. 186.
161.	B, h, mn	93. 175.
162.	B, h, s	4. 135.
163.	B, h, ϱ	401.
164.	B, h, r	469.
165.	B, m, n	104. 187.
166.	B, $m-n$, $\mu-\nu$	270.
167.	B, s, μ	15. 146.
168.	B, s, $\mu-\nu$	265.
169.	B, s, $\mu\nu$	273.
170.	B, μ, ν	126. 131.
171.	B, F, ϱ	410.
172.	A, b, $a+c$	19. 20.
173.	A, b, $a-c$	31. 33.
174.	A, b, a^2+c^2	41.
175.	A, b, a^2-c^2	35. 37.
176.	A, b, ac	40.
177.	A, b, c	452.
178.	A, b, h	55. 56.
179.	A, b, ϱ	443.
180.	A, b, r	453.

№	Aufgabe.	Gleichung.
181.	A, $a+c+b$, ac	28.
182.	A, $b^2-(a-c)^2$, ϱ	448.
183.	A, $b(a-c)$, ϱ	451.
184.	A, a, h	5.
185.	A, a, $h+m$	79.
186.	A, a, $h-m$	80.
187.	A, a, h^2-m^2	90.
188.	A, a, m	9.
189.	A, $a+c$, h	62.
190.	A, $a+c$, m	107. 108.
191.	A, $a+c$, $m-n$	97.
192.	A, $a+c$, r	414.
193.	A, $a-c$, h	66.
194.	A, $a-c$, m	111. 112.
195.	A, $a-c$, $m-n$	99.
196.	A, $a-c$, n	114.
197.	A, $a-c$, ϱ	372.
198.	A, $a-c$, r	417.
199.	A, a^2+c^2, r	421.
200.	A, a^2-c^2, h	70.
201.	A, a^2-c^2, r	424.
202.	A, ac, h	59.
203.	A, ac, mn	117.
204.	A, c, $h+m$	87.
205.	A, c, $h-m$	88.
206.	A, c, f	454.
207.	A, h, m	7.
208.	A, h, $m-n$	94.
209.	A, h, mn	92.
210.	A, h, s	4.
211.	A, m, n	102. 103.
212.	A, s, μ	122. 123.
213.	A, μ, ν	130.
214.	$A-C$, b, a	148. 149.
215.	$A-C$, b, $a+c$	151.
216.	$A-C$, b, $a-c$	153.
217.	$A-C$, b, a^2+c^2	164.
218.	$A-C$, b, a^2-c^2	155.
219.	$A-C$, b, ac	161. 162.
220.	$A-C$, b, c	149.
221.	$A-C$, b, h	180. 181.
222.	$A-C$, b, s	258.
223.	$A-C$, b, ϱ	389. 390.
224.	$A-C$, b, f	465.
225.	$A-C$, $a+c+b$, h	190. 191.
226.	$A-C$, $a+c+b$, ϱ	397. 398.
227.	$A-C$, $a+c+b$, r	430.
228.	$A-C$, $a+c-b$, h	193. 194.
229.	$A-C$, $(a+c)^2+b^2$, h	199.

№	Aufgabe.	Gleichung.
230.	$A-C$, $(a+c)^2+b^2$, r	438.
231.	$A-C$, $(a+c)^2-b^2$, h	197.
232.	$A-C$, $(a+c)^2-b^2$, r	440.
233.	$A-C$, $b^2+(a-c)^2$, r	442.
234.	$A-C$, $b^2-(a-c)^2$, r	444.
235.	$A-C$, $a^2+c^2+b^2$, r	434.
236.	$A-C$, $a^2+c^2-b^2$, r	436.
237.	$A-C$, $b(a+c)$, ϱ	400.
238.	$A-C$, a, c	51.
239.	$A-C$, a, h	136.
240.	$A-C$, a, $h+m$	214. 216.
241.	$A-C$, a, $h-m$	217. 219.
242.	$A-C$, a, h^2-m^2	90.
243.	$A-C$, a, hm	220.
244.	$A-C$, a, m	140.
245.	$A-C$, a, s	142.
246.	$A-C$, a, μ	144.
247.	$A-C$, $a+c$, h	169.
248.	$A-C$, $a+c$, $m-n$	205.
249.	$A-C$, $a+c$, mn	237.
250.	$A-C$, $a+c$, s	245.
251.	$A-C$, $a+c$, $\mu-\nu$	267.
252.	$A-C$, $a+c$, $\mu\nu$	278.
253.	$A-C$, $a+c$, ϱ	395.
254.	$A-C$, $a+c$, r	416.
255.	$A-C$, $a-c$, h	172.
256.	$A-C$, $a-c$, $m-n$	207.
257.	$A-C$, $a-c$, mn	239.
258.	$A-C$, $a-c$, s	247.
259.	$A-C$, $a-c$, μ	255. 256.
260.	$A-C$, $a-c$, $\mu-\nu$	269.
261.	$A-C$, $a-c$, $\mu\nu$	280.
262.	$A-C$, $a-c$, ϱ	392.
263.	$A-C$, $a-c$, r	420.
264.	$A-C$, a^2+c^2, r	423.
265.	$A-C$, a^2-c^2, $m-n$	208.
266.	$A-C$, a^2-c^2, r	427.
267.	$A-C$, ac, $an+cm$	229.
268.	$A-C$, ac, $an-cm$	231.
269.	$A-C$, ac, h	173.
270.	$A-C$, ac, hm	222. 224.
271.	$A-C$, ac, $m-n$	227.
272.	$A-C$, ac, mn	234.
273.	$A-C$, ac, s	250.
274.	$A-C$, ac, $\mu\nu$	254.
275.	$A-C$, an, cm	233.
276.	$A-C$, c, h	137.
277.	$A-C$, c, n	141.
278.	$A-C$, c, s	143.

№	Aufgabe.	Gleichung.
279.	A—C, h, m	138.
280.	A—C, h, m—n	182—184.
281.	A—C, h, mn	176.
282.	A—C, h, n	139.
283.	A—C, h, ϱ	402.
284.	A—C, m, n	188.
285.	A—C, m—n, $\mu-\nu$	271.
286.	A—C, s, μ	257. 261.
287.	A—C, s, $\mu-\nu$	264.
288.	A—C, s, $\mu\nu$	272.
289.	A—C, s, ν	258. 260.
290.	A—C, μ, ν	127.
291.	C, b, a—c	32. 34.
292.	C, b, a^2-c^2	36. 38.
293.	C, b, h+m	71. 74. 76. 81.
294.	C, b, h—m	72. 75. 77.
295.	C, b, h^2-m^2	73. 78. 89.
296.	C, $b^2-(a-c)^2$, ϱ	381.
297.	C, b(a—c), ϱ	384.
298.	C, a, s	11.
299.	C, a+c, m	106.
300.	C, a+c, m—n	98.
301.	C, a—c, h	65.
302.	C, a—c, m	110.
303.	C, a—c, m—n	100.
304.	C, a—c, n	115. 116.
305.	C, a—c, ϱ	373.
306.	C, a—c, r	418.
307.	C, a^2-c^2, h	69.
308.	C, a^2-c^2, r	425.
309.	C, c, h+m	71. 74. 76. 81. 84.
310.	C, c, h—m	72. 75. 77. 86.
311.	C, c, h^2-m^2	73. 78. 89.
312.	C, h, m—n	95.
313.	C, s, μ	15. 120. 121.
314.	b, a, c	294—299. 405. 447. 460.
315.	b, a, h+m	79.
316.	b, a, h—m	80.
317.	b, a, h^2-m^2	90.
318.	b, a, r	455—459. 462.
319.	b, a+c, h	304.
320.	b, a+c, F	300.
321.	b, a+c, ϱ	406.
322.	b, a—c, h	336.
323.	b, a—c, F	323.
324.	b, a—c, ϱ	411. 412. 378. 379.
325.	b, a^2+c^2, h	345.
326.	b, a^2+c^2, F	342.
327.	b, ac, h	225.

№	Aufgabe.	Gleichung.
328.	b, ac, F	446.
329.	b, ac, r	445.
330.	b, h, f	467.
331.	a + c + b, ac, ϱ	409.
332.	a, c, h + m	79.
333.	a, c, h — m	80.
334.	a, c, $h^2 - m^2$	90.
335.	a, c, s	245.
336.	a, c, μ	252.
337.	a, c, F	283.
338.	a, c, ϱ	413.
339.	a, c, f	461. 463.
340.	a, μ, ν	251.
341.	a + c, h, m — n	210. 212.
342.	a — c, h, m — n	211. 213.
343.	ac, h, m — n	226.
344.	h, s, f	470.
345.	m — n, s, $\mu - \nu$	276.
346.	m — n, s, $\mu\nu$	275.
347.	m — n, μ, ν	277.
348.	m — n, $\mu - \nu$, $\mu\nu$	277.
349.	s, μ, ν	259. 274.
350.	s, $\mu - \nu$, $\mu\nu$	274.

Berichtigung.

Seite 16 §. 22 Z. 3 ist zu lesen:

$$\cos C = \frac{mn}{ac \,.\, \cos A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 117.$$

Seite 39 im Columnentitel lies:

Gleichung 257 — 269.

Erste Abtheilung.

Gleichungen, welche zwei Winkel des Dreiecks enthalten.

§. 1.

Im $\triangle$ ABC (Fig. 1. 2.) sey BD senkrecht auf AC, und BE halbire den $\angle$ ABC. Man bezeichne

die Winkel A, B, C mit	A, B, C
die Gegenseiten BC, AC, AB mit	a, b, c
die Höhe BD mit	h
die Höhenabschnitte CD, AD mit	m, n
die Halbirungslinie BE mit	s
die Abschnitte CE, AE mit	μ, ν
den Umfang des Dreiecks ABC mit	p
den Inhalt „ „ „ mit	F

Es ist bekanntlich $\angle\, DBE = \frac{1}{2}(A-C)$

$\angle\, BEC = A + \frac{1}{2}B$

$\angle\, BEA = C + \frac{1}{2}B$

Es ist aber $\cos DBE = \sin BEA = \sin BEC$; folglich

$$\cos\frac{A-C}{2} = \sin(C+\tfrac{1}{2}B) = \sin(A+\tfrac{1}{2}B).$$

Wird $A > C$ angenommen, so ist auch $A+\frac{1}{2}B > C+\frac{1}{2}B$.

Nun ist $(A+\frac{1}{2}B)+(C+\frac{1}{2}B) = 180^\circ$; folglich ist

$A+\frac{1}{2}B > 90$	$\cos(A+\frac{1}{2}B)$ negativ
$C+\frac{1}{2}B < 90$	$\cos(C+\frac{1}{2}B)$ positiv, und

$$\sin\frac{A-C}{2} = +\cos(C+\tfrac{1}{2}B) = -\cos(A+\tfrac{1}{2}B).$$

§. 2.

Aus den $\triangle\triangle$ ABC, CBD, ABD, DBE ergeben sich vermittelst bekannter Elementarsätze folgende Gleichungen:

1) $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

2) $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$

3) $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$

4) $\frac{h}{s} = \cos\frac{A - C}{2}$
$= \sin(A + \frac{1}{2}B)$
$= \sin(C + \frac{1}{2}B)$

5) $\frac{h}{a} = \sin C$

6) $\frac{h}{c} = \sin A$

7) $\frac{h}{m} = \operatorname{tang} C$ *)

8) $\frac{h}{n} = \operatorname{tang} A$ **)

9) $\frac{m}{a} = \cos C$ *)

10) $\frac{n}{c} = \cos A$ **)

11) $\frac{a}{s} = \frac{\sin(A + \frac{1}{2}B)}{\sin C}$
$= \frac{\sin(C + \frac{1}{2}B)}{\sin C}$

12) $\frac{c}{s} = \frac{\sin(A + \frac{1}{2}B)}{\sin A}$
$= \frac{\sin(C + \frac{1}{2}B)}{\sin A}$

13) $\frac{\mu}{a} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin(C + \frac{1}{2}B)}$

14) $\frac{\nu}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin(A + \frac{1}{2}B)}$

15) $\frac{\mu}{s} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin C}$

16) $\frac{\nu}{s} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin A}$

§. 3.

Aus (1) und (2) folgt durch Addition

$$\frac{a + c}{b} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin B}$$
$$= \frac{\sin A + \sin(A + B)}{\sin B}$$
$$= \frac{\sin(A + \frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$
$$b = \frac{(a + c)\sin\frac{1}{2}B}{\sin(A + \frac{1}{2}B)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 17.$$
$$\sin(A + \tfrac{1}{2}B) = \frac{a + c}{b}\cdot\sin\tfrac{1}{2}B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 18.$$
$$\sin A\cot\tfrac{1}{2}B + \cos A = \frac{a + c}{b}$$
$$\cot\tfrac{1}{2}B = \frac{(a + c) - b\cos A}{b\sin A} \quad \ldots\ldots\ldots 19.$$

*) Für $C > 90$ ist m negativ zu nehmen.
**) Für $A > 90$ ist n negativ zu nehmen.

Ferner ist die Gleichung (α) einerlei mit folgender

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$=\frac{1+\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C}{1-\tang\frac{1}{2}A\tang\frac{1}{2}C}$$

$$\frac{(a+c)-b}{(a+c)+b}=\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}C \;\ldots\ldots\; (\beta)$$

$$\tang\tfrac{1}{2}C=\frac{(a+c)-b}{(a+c)+b}.\cot\tfrac{1}{2}A \;\ldots\ldots\ldots\; 20.$$

$$a+c-b=(a+c+b)\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}C \;\ldots\ldots\; 21.$$

$$a+c+b=(a+c-b)\cot\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}C \;\ldots\ldots\; 22.$$

§. 4.

Addirt man 1 zur Gleichung (α) in §. 3, so ist

$$\frac{p}{b}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)+\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B} \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$$

$$b=\frac{p\sin\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C} \;\ldots\ldots\ldots\; 23.$$

Eben so, oder durch Analogie, erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{a}&=\frac{2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A}\\ \frac{p}{c}&=\frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; (\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{p\sin\frac{1}{2}A}{2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}\\ c&=\frac{p\sin\frac{1}{2}C}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\; 24.$$

Zieht man ferner 1 von Gleichung (α) in §. 3 ab, so ist

$$\frac{a+c-b}{b}=\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B)-\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B} \;\ldots\ldots\ldots\; (\gamma)$$

$$b=\frac{(a+c-b)\sin\frac{1}{2}B}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C} \;\ldots\ldots\ldots\; 25.$$

Multiplicirt man (α) mit (γ), so ist $\frac{(a+c)^2-b^2}{b^2}=\frac{\sin A\sin C}{\sin^2\frac{1}{2}B}$

$$b=\sin\tfrac{1}{2}B\sqrt{\frac{(a+c)^2-b^2}{\sin A\sin C}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 26.$$

Dividirt man aber (γ) durch (α), so erhält man die Gleichung (β) in §. 3.

§. 5.

Durch Multiplication der Gleichungen (β) in §. 4 erhält man

$$\frac{p^2}{ac}=\frac{4\cos\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C}{\tan\frac{1}{2}A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}B(\tan\frac{1}{2}A+\tan\frac{1}{2}B)}{\tan\frac{1}{2}A(1-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B)}$$

und hieraus

$$\tan^2\tfrac{1}{2}A-\frac{p^2-4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p^2\tan\frac{1}{2}B}.\tan\tfrac{1}{2}A+\frac{4ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p^2}=0 \quad 27.$$

Die beiden Werthe für $\tan\frac{1}{2}A$ geben beide Winkel A und C. Denn aus Gleichung (α) folgt $\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}C=\frac{4ac}{p^2}.\cos^2\frac{1}{2}B$ und dasselbe findet man, wenn man die beiden Werthe der Gleichung (27) multiplicirt.

Setzt man $\dfrac{\sin\frac{1}{2}B.\sqrt{ac}}{\frac{1}{4}p-\frac{ac.\cos^2\frac{1}{2}B}{p}}=\sin M$, so erhält man

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\frac{2\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{ac}}{p}.\cot\tfrac{1}{2}M \text{ durch die } + \text{ Wurzel}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\frac{2\cos\frac{1}{2}B.\sqrt{ac}}{p}.\tan\tfrac{1}{2}M \text{ durch die } - \text{ Wurzel.}$$

Um in der Aufgabe A, p, ac den Winkel B zu berechnen, setze man in der Gleichung (27) $\cos^2\frac{1}{2}B=\frac{1}{1+\tan^2\frac{1}{2}B}$, so findet man für $\tan\frac{1}{2}B=x$

$$x^3-\cot\tfrac{1}{2}A.x^2+\left(1+\frac{4ac}{p^2}.\cot^2\tfrac{1}{2}A\right).x-\frac{p^2-4ac}{p^2}.\cot\tfrac{1}{2}A=0 \quad 28.$$

§. 6.

Aus (1) und (2) folgt durch Subtraction

$$\frac{a-c}{b}=\frac{\sin A-\sin C}{\sin B}$$

$$=-\frac{\sin(A+B)-\sin A}{\sin B}$$

$$=-\frac{\cos(A+\frac{1}{2}B)}{\cos\frac{1}{2}B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

$$\frac{a-c}{b} = + \frac{\cos(C+\frac{1}{2}B)}{\cos\frac{1}{2}B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

$$b = \frac{(a-c)\cos\frac{1}{2}B}{\cos(C+\frac{1}{2}B)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 29.$$

$$\left.\begin{matrix} -\cos(A+\frac{1}{2}B) \\ +\cos(C+\frac{1}{2}B) \end{matrix}\right\} = \frac{a-c}{b}.\cos\frac{1}{2}B \quad \ldots\ldots\ldots 30.$$

Aus (α) folgt $\frac{a-c}{b} = -\cos A + \sin A \tang\frac{1}{2}B$

$$\tang\tfrac{1}{2}B = \frac{b\cos A + (a-c)}{b\sin A} \quad \ldots\ldots\ldots 31.$$

Eben so aus (β) $\tang\frac{1}{2}B = \frac{b\cos C - (a-c)}{b\sin C} \quad \ldots\ldots\ldots 32.$

Die Gleichung (β) ist ferner einerlei mit folgender

$$\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)} = \frac{\tang\frac{1}{2}A - \tang\frac{1}{2}C}{\tang\frac{1}{2}A + \tang\frac{1}{2}C}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}C = \frac{b-(a-c)}{b+(a-c)}.\tang\tfrac{1}{2}A \quad \ldots\ldots\ldots 33.$$

$$\tang\tfrac{1}{2}A = \frac{b+(a-c)}{b-(a-c)}.\tang\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots\ldots 34.$$

Durch Multiplication der Gleichungen (α) in §. 3 und §. 6 erhält man $\frac{a^2-c^2}{b^2} = -\frac{\sin(A+\frac{1}{2}B).\cos(A+\frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}B}$

$$= -\frac{\sin(2A+B)}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

$$= +\frac{\sin(2C+B)}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

$$= \frac{\sin(A-C)}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$$

Aus (γ) folgt $\frac{a^2-c^2}{b^2} = -\sin 2A\cot B - \cos 2A$

$$\left.\begin{aligned} \cot B &= -\frac{a^2-c^2}{b^2\sin 2A} - \cot 2A \\ &= -\cot 2A\left(\frac{a^2-c^2}{b^2\cos 2A}+1\right) \end{aligned}\right\} \ldots 35.$$

Eben so aus (δ) $\cot B = \frac{a^2-c^2}{b^2\sin 2C} - \cot 2C \quad \ldots\ldots\ldots 36.$

Setzt man in (ε) $\sin B = \sin(A+C)$, so ist

$$\frac{a^2-c^2}{b^2} = \frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)} = \frac{\tang A - \tang C}{\tang A + \tang C}$$

$$\tang C = \frac{b^2-(a^2-c^2)}{b^2+(a^2-c^2)}.\tang A \quad \ldots\ldots\ldots 37.$$

$$\tang A = \frac{b^2 + (a^2 - c^2)}{b^2 - (a^2 - c^2)} \,.\, \tang C \ldots\ldots\ 38.$$

§. 7.

Aus (1) und (2) folgt durch Multiplication

$$\frac{ac}{b^2} = \frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B}$$

$$b = \sin B \sqrt{\frac{ac}{\sin A \sin C}} \ldots\ldots\ 39.$$

$$\frac{ac.\sin^2 B}{b^2} = \sin A \sin(A + B)$$

$$= \sin^2 A \cos B + \sin A \cos A \sin B$$

$$\left(\frac{ac.\sin^2 B}{b^2} - \sin A \cos A \sin B\right)^2 = \sin^4 A \cos^2 B$$

woraus folgt, wenn $\sin B = x$ gesetzt wird,

$$x^4 - \frac{b^2 \sin 2A}{ac} . x^3 + \left(\frac{b^2 \sin A}{ac}\right)^2 . x^2 - \left(\frac{b^2 \sin^2 A}{ac}\right)^2 = 0 \quad 40.$$

§. 8.

Erhebt man die Gleichungen (1) und (2) aufs Quadrat, so erhält man durch Addition

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 C}{\sin^2 B} \ldots\ldots\ (\alpha)$$

$$= \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} + \frac{\sin^2 (A + B)}{\sin^2 B}$$

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2} = \sin^2 A(1 + \cot^2 B) + \sin^2 A \cot^2 B + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A \cot B$$

$$= 1 + 2 \sin^2 A \cot^2 B + 2 \sin A \cos A \cot B$$

$$\cot^2 B + \cot A . \cot B - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 b^2 \sin^2 A} = 0 \ldots\ldots\ (\beta)$$

$$\cot B = -\tfrac{1}{2} \cot A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} \cot^2 A + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 b^2 \sin^2 A}} \ldots\ 41.$$

Es sey $a^2 + c^2 = d$ und 1) wenn $d > b^2$ ist,

$$\frac{\sqrt{2(d - b^2)}}{b \cos A} = \tang M, \text{ so ist}$$

$$\cot B = \tang \tfrac{1}{2} M . \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}(d - b^2)}}{b \sin A} \text{ durch die + Wurzel}$$

2) wenn $d < b^2$ ist, sey

$$\frac{\sqrt{2(b^2 - d)}}{b \cos A} = \sin M, \text{ so erhält man}$$

$$\cot B = -\tang \tfrac{1}{2} M . \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2 - d)}}{b \sin A} \text{ durch die + Wurzel}$$

$$\cot B = -\cot \tfrac{1}{2} M . \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}(b^2 - d)}}{b \sin A} \text{ durch die − Wurzel}$$

Setzt man in (β) $\frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \cot^2 A$, so findet man

$$\cot^2 A - \frac{2b^2 \cot B}{a^2 + c^2 - b^2} . \cot A + \left(1 - \frac{2b^2 \cot^2 B}{a^2 + c^2 - b^2}\right) = 0 \quad . . \quad 42.$$

Die beiden Werthe der Gleichung geben beide Winkel A, C. Dieß erhellet, wenn man in (α) $\sin A = \sin(B + C)$ setzt, oder auch auf folgende Weise: Aus (α) folgt

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \sin^2 B &= \sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B \\ &= \sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 (A + C) \\ &= 2 \sin^2 A \sin^2 C - 2 \sin A \cos A \sin C \cos C \\ &= -2 \sin A \sin C \cos (A + C) \\ &= +2 \sin A \sin C \cos B \quad . . . . (\gamma)\end{aligned}$$

$$\frac{2b^2 \cot B}{a^2 + c^2 - b^2} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \frac{\sin (A + C)}{\sin A \sin C} = \cot A + \cot C$$

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung erhellet.

Aus (γ) folgt $\quad b = \sin B \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \sin A \sin C \cos B}}$ . . . . 43.

§. 9.

Weil $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{ac} = \frac{ac}{c^2}$, so folgt aus (3) $\frac{a^2}{ac} = \frac{ac}{c^2} = \frac{\sin A}{\sin C}$

$$a = \sqrt{\frac{ac . \sin A}{\sin C}}, \quad c = \sqrt{\frac{ac . \sin C}{\sin A}} . . . . 44.$$

Aus (3) ergeben sich ferner folgende Gleichungen

$$\frac{a + c}{c} = \frac{(a + c) c}{c^2} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}{\sin C} \quad . . . . . (\alpha)$$

$$\frac{a + c}{a} = \frac{(a + c) a}{a^2} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}{\sin A} \quad . . . . . (\beta)$$

$$\frac{a - c}{c} = \frac{(a - c) c}{c^2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}(A - C)}{\sin C} \quad . . . . . (\gamma)$$

$$\frac{a - c}{a} = \frac{(a - c) a}{a^2} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}(A - C)}{\sin A} \quad . . . . . (\delta)$$

Hieraus folgt:

$$a = \frac{(a + c) \sin A}{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}, \quad c = \frac{(a + c) \sin C}{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)} \quad . \quad 45.$$

$$a = \frac{(a - c) \sin A}{2 \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}(A - C)}, \quad c = \frac{(a - c) \sin C}{2 \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}(A - C)} \quad . \quad 46.$$

$$a = \sqrt{\frac{(a + c) a . \sin A}{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}}, c = \sqrt{\frac{(a + c) c . \sin C}{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}} \quad 47.$$

$$a=\sqrt{\frac{(a-c)\,a\,.\sin A}{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)}},\ c=\sqrt{\frac{(a-c)\,c\,.\sin C}{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)}} \quad 48.$$

Multiplicirt man (β) mit (δ), so ist

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{\sin B\sin(A-C)}{\sin^2 A}$$

$$a=\sin A\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\sin B\sin(A-C)}} \ldots\ldots\ldots\ldots 49.$$

$\frac{(\delta)}{(\beta)}$ giebt . . $\frac{a-c}{a+c}=\tang\frac{1}{2}B\tang\frac{1}{2}(A-C)\ldots\ldots\ldots\ldots(\varepsilon)$

$$\tang\tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{a-c}{a+c}.\cot\tfrac{1}{2}B\ldots\ldots\ldots\ldots 50.$$

$$\tang\tfrac{1}{2}B=\frac{a-c}{a+c}.\cot\tfrac{1}{2}(A-C)\ldots\ldots\ldots 51.$$

§. 10.

Multiplicirt man (1) mit (5), so ist

$$\frac{h}{b}=\frac{\sin A\sin C}{\sin B}\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$h=\frac{b\sin A\sin C}{\sin B}\ldots\ldots\ldots\ldots 52.$$

$$b=\frac{h\sin B}{\sin A\sin C}\ldots\ldots\ldots\ldots 53.$$

Weil $\frac{h}{b}=\frac{bh}{b^2}=\frac{2F}{b^2}$, so folgt aus ($\alpha$)

$$F=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B},\ b=\sqrt{\frac{2F\sin B}{\sin A\sin C}}\ldots\ldots\ldots\ldots 54.$$

Aus (α) folgt ferner

$$\frac{h}{b}=\frac{\sin A\sin C}{\sin(A+C)}=\frac{1}{\cot C+\cot A}\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta)$$

$$\cot C=\frac{b-h\cot A}{h}\ldots\ldots\ldots\ldots 55.$$

Setzt man ferner in (α) $\sin C=\sin(A+B)$, so ist

$$\frac{h}{b}=\sin^2 A\cot B+\sin A\cos A$$

$$\left.\begin{aligned}\cot B&=\frac{h}{b\sin^2 A}-\cot A\\&=\cot A\left(\frac{h}{b\sin A\cos A}-1\right)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots 56.$$

$$=\frac{\sin(A-M)}{\sin A\sin M},\ \text{für}\ \frac{h}{b\sin^2 A}=\cot M$$

$$\cot B=\frac{h}{b}(1+\cot^2 A)-\cot A$$

also . . . $\cot^2 A - \frac{b}{h} \cdot \cot A + (1 - \frac{b}{h} \cot B) = 0$

$$\cot A = \frac{b}{2h} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4h^2} + \frac{b}{h} \cot B - 1} \;\ldots\ldots\; 57.$$

Die beiden Wurzeln geben beide Winkel A, C. Denn aus (β) folgt $\cot A + \cot C = \frac{b}{h}$ und dasselbe findet man, wenn man die beiden Werthe der Gleichung (57) addirt.

§. 11.

Die Multiplication der Gleichungen (5) und (6) giebt

$$\frac{h^2}{ac} = \sin A \sin C \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$$

$$h = \sqrt{ac \cdot \sin A \sin C} \;\ldots\ldots\; 58.$$

$$\sin C = \frac{h^2}{ac \cdot \sin A} \;\ldots\ldots\ldots\; 59.$$

$$\frac{h^2}{ac} = \sin A \sin (A + B)$$

$$= \sin^2 A \cos B + \sin A \cos A \sin B$$

$$\left(\frac{h^2}{ac} - \sin^2 A \cos B\right)^2 = \sin^2 A \cos^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$$

also . . $\sin^4 A - \left(\frac{2h^2 \cos B}{ac} + \sin^2 B\right) \cdot \sin^2 A + \left(\frac{h^2}{ac}\right)^2 = 0$ 60.

§. 12.

Aus den umgekehrten Gleichungen (5) und (6) folgt

$$\frac{a+c}{h} = \frac{\sin A + \sin C}{\sin A \sin C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}{\sin A \sin C} \;\ldots\; (\alpha)$$

$$\frac{a-c}{h} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin A \sin C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}(A - C)}{\sin A \sin C} \;\ldots\; (\beta)$$

$$\frac{a^2 - c^2}{h^2} = \frac{\sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 A \sin^2 C} = \frac{\sin B \sin (A - C)}{\sin^2 A \sin^2 C} \;\ldots\ldots\; (\gamma)$$

Aus (α) folgt $h = \frac{(a+c) \sin A \sin C}{2 \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}(A - C)}$ . . . . 61.

$$\sin C = \frac{h \sin A}{(a+c) \sin A - h} \;\ldots\ldots\ldots\; 62.$$

und wenn man $\sin C = \sin (A + B)$ setzt und die Gleichung nach $\sin A = x$ ordnet,

$$x^4 - \frac{4h \cos^2 \frac{1}{2}B}{a+c} \cdot x^3 + \left(\frac{4h^2 \cos^2 \frac{1}{2}B}{(a+c)^2} - \sin^2 B\right) \cdot x^2$$

$$+ \frac{2h \sin^2 B}{a+c} \cdot x - \left(\frac{h \sin B}{a+c}\right)^2 = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; 63.$$

Aus (β) folgt $h = \dfrac{(a-c)\sin A \sin C}{2\sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}(A-C)}$ . . . . 64.

$$\sin A = \frac{h \sin C}{h-(a-c)\sin C} \quad \ldots\ldots 65.$$

$$\sin C = \frac{h \sin A}{h+(a-c)\sin A} \quad \ldots\ldots 66.$$

und für $\sin A = x$

$$x^4 + \frac{4h\sin^2\frac{1}{2}B}{a-c}\,.\,x^3 + \left(\frac{4h^2\sin^2\frac{1}{2}B}{(a-c)^2} - \sin^2 B\right).\,x^2$$

$$-\frac{2h\sin^2 B}{a-c}\,.\,x - \left(\frac{h\sin B}{a-c}\right)^2 = 0 \quad \ldots\ldots 67.$$

Aus (γ) folgt $h = \sin A \sin C \sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{\sin B \sin(A-C)}}$ . . . . . . 68.

$$\sin A = \frac{h\sin C}{\sqrt{[h^2-(a^2-c^2)\sin^2 C]}} = \frac{\sin C}{\sqrt{\left[1-\frac{a^2-c^2}{h^2}\sin^2 C\right]}} \quad 69.$$

$$= \frac{\sin C}{\sin M},\ \text{für}\ \frac{\sin C\sqrt{[a^2-c^2]}}{h} = \cos M;\ \text{und}$$

$$\sin C = \frac{h\sin A}{\sqrt{[h^2+(a^2-c^2)\sin^2 A]}} = \frac{\sin A}{\sqrt{\left[1+\frac{a^2-c^2}{h^2}\sin^2 A\right]}} \quad 70.$$

$$= \sin A \sin P,\ \text{für}\ \frac{\sin A\sqrt{[a^2-c^2]}}{h} = \cot P.$$

§. 13.

Aus (7) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\frac{h+m}{h} = \frac{\sin C + \cos C}{\sin C} = \frac{\cos(C-45).\sqrt{2}}{\sin C} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

$$\frac{h-m}{h} = \frac{\sin C - \cos C}{\sin C} = \frac{\sin(C-45).\sqrt{2}}{\sin C} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

$$\frac{h^2-m^2}{h^2} = \frac{\sin(2C-90)}{\sin^2 C} = -\frac{\cos 2C}{\sin^2 C}$$

$$\frac{h-m}{h+m} = \operatorname{tang}(C-45)$$

$$\frac{h+m}{m} = \frac{\sin C + \cos C}{\cos C} = \frac{\cos(C-45).\sqrt{2}}{\cos C}$$

$$\frac{h-m}{m} = \frac{\sin C - \cos C}{\cos C} = \frac{\sin(C-45).\sqrt{2}}{\cos C}$$

$$\frac{h^2-m^2}{m^2} = \frac{\sin(2C-90)}{\cos^2 C} = -\frac{\cos 2C}{\cos^2 C}$$

Aus diesen Gleichungen findet man

$$h = \frac{(h+m)\sin C}{\cos(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots\dots 71.$$

$$h = \frac{(h-m)\sin C}{\sin(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots\dots 72.$$

$$h = \sin C\sqrt{\frac{h^2-m^2}{\sin(2C-90)}} = \sin C\sqrt{\frac{m^2-h^2}{\cos 2C}} \dots 73.$$

$$h-m = (h+m).\tang(C-45) \dots\dots\dots 74.$$

$$h+m = (h-m).\cot(C-45) \dots\dots\dots 75.$$

$$m = \frac{(h+m)\cos C}{\cos(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots\dots 76.$$

$$m = \frac{(h-m)\cos C}{\sin(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots\dots 77.$$

$$m = \cos C\sqrt{\frac{h^2-m^2}{\sin(2C-90)}} = \cos C\sqrt{\frac{m^2-h^2}{\cos 2C}} \dots 78.$$

§. 14.

Multiplicirt man die Gleichungen (α) und (β) in §. 13 mit $\frac{h}{a} = \sin C$ und $\frac{h}{c} = \sin A$, so erhält man

$$\frac{h+m}{a} = \cos(C-45).\sqrt{2}, \quad \frac{h-m}{a} = \sin(C-45).\sqrt{2}$$

$$\frac{h+m}{c} = (1+\cot C)\sin A = \frac{\sin A\cos(C-45).\sqrt{2}}{\sin C}$$

$$\frac{h-m}{c} = (1-\cot C)\sin A = \frac{\sin A\sin(C-45).\sqrt{2}}{\sin C}$$

Hieraus folgt $\cos(C-45) = \dfrac{h+m}{a\sqrt{2}} \dots\dots\dots\dots 79.$

$$\sin(C-45) = \frac{h-m}{a\sqrt{2}} \dots\dots\dots\dots 80.$$

$$a = \frac{h+m}{\cos(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots 81.$$

$$a = \frac{h-m}{\sin(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots 82.$$

$$c = \frac{(h+m)\sin C}{\cos(C-45)\sin A.\sqrt{2}} \dots\dots 83.$$

$$\sin A = \frac{(h+m)\sin C}{c.\cos(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots 84.$$

$$c = \frac{(h-m)\sin C}{\sin(C-45)\sin A.\sqrt{2}} \dots\dots 85.$$

$$\sin A = \frac{(h-m)\sin C}{c.\sin(C-45).\sqrt{2}} \dots\dots\dots 86.$$

$$\cot C = \frac{h+m}{c.\sin A} - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 87.$$

$$\cot C = 1 - \frac{h-m}{c.\sin A} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 88.$$

und wenn man aus dem Producte der Gleichungen (81) und (82) die Wurzel auszieht

$$a = \sqrt{\frac{h^2 - m^2}{\sin(2C - 90)}} = \sqrt{\frac{m^2 - h^2}{\cos 2C}} \ldots\ldots\ldots \quad 89.$$

$$\cos 2C = \frac{m^2 - h^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90.$$

§. 15.

Multiplicirt man (7) mit (8), so ist

$$\frac{h^2}{mn} = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$h = \sqrt{mn \operatorname{tang} A \operatorname{tang} C} \ldots\ldots\ldots \quad 91.$$

$$\operatorname{tang} C = \frac{h^2}{mn} \cdot \cot A \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 92.$$

Aus (α) folgt $\frac{h^2}{mn} = -\operatorname{tang} A \operatorname{tang}(A+B)$

$$= \frac{\operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B - 1}$$

$$\operatorname{tang}^2 A - \frac{h^2 - mn}{mn} \operatorname{tang} B \cdot \operatorname{tang} A + \frac{h^2}{mn} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad 93.$$

Setzt man, wenn mn positiv ist,

$\frac{2h \cot B \sqrt{mn}}{h^2 - mn} = \sin M$, so erhält man

$$\operatorname{tang} A = \frac{h \cot \tfrac{1}{2}M}{\sqrt{mn}}, \qquad \operatorname{tang} C = \frac{h \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}M}{\sqrt{mn}}$$

Setzt man aber, wenn mn negativ ist,

$\frac{2h \cot B \sqrt{-mn}}{h^2 - mn} = \operatorname{tang} M$, so ist

$$\operatorname{tang} A = + \frac{h \cot \tfrac{1}{2}M}{\sqrt{-mn}}, \quad \operatorname{tang} C = - \frac{h \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}M}{\sqrt{-mn}}$$

§. 16.

Aus den umgekehrten Gleichungen (7) und (8) folgt

$$\frac{m-n}{h} = \cot C - \cot A \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\cot C = \frac{h \cot A + (m-n)}{h} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 94.$$

$$\cot A = \frac{h \cot C - (m-n)}{h} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 95.$$

Aus (α) folgt, weil $\cot C = -\cot(A+B)$ ist,

$$\frac{m-n}{h} = \frac{1-\cot A \cot B}{\cot A + \cot B} - \cot A$$

und hieraus, wenn $m-n=d$ gesetzt wird,

$$\cot^2 A + \frac{2h\cot B + d}{h} \cdot \cot A + \frac{d\cot B - h}{h} = 0 \;.\;.\;.\;.\; (\beta)$$

$$\cot A = -\frac{h\cot B + \frac{1}{2}d}{h} \pm \sqrt{\left(\frac{h\cot B + \frac{1}{2}d}{h}\right)^2 - \frac{d\cot B - h}{h}} \;.\; 96.$$

$$= -\frac{h\cot B + \frac{1}{2}d}{h} \pm \frac{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}d^2 \sin^2 B}}{h\sin B}$$

Setzt man in (β) für $\cot A$ den Werth aus (α), so ist

$$\cot^2 C + \frac{2h\cot B - d}{h} \cdot \cot C - \frac{d\cot B + h}{h} = 0$$

§. 17.

Aus (α) in §. 16 ergiebt sich

$$\frac{m-n}{h} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A-C)\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin A \sin C} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha)$$

und wenn man diese Gleichung durch (α) in §. 12 dividirt,

$$\frac{m-n}{a+c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}(A+C)}$$

$$= \frac{\tan\frac{1}{2}A - \tan\frac{1}{2}C}{\tan\frac{1}{2}A + \tan\frac{1}{2}C}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C = \frac{(a+c)-(m-n)}{(a+c)+(m-n)} \cdot \tan\tfrac{1}{2}A \;.\;.\;.\;.\;.\; 97.$$

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{(a+c)+(m-n)}{(a+c)-(m-n)} \cdot \tan\tfrac{1}{2}C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 98.$$

Dividirt man (α) durch die Gleichung (β) in §. 12, so ist

$$\frac{m-n}{a-c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}B} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+C)} \; ^{*)}$$

$$= \frac{1+\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}C}{1-\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}C}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C = \frac{(m-n)-(a-c)}{(m-n)+(a-c)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}A \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 99.$$

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{(m-n)-(a-c)}{(m-n)+(a-c)} \cdot \cot\tfrac{1}{2}C \;.\;.\;.\;.\;.\; 100.$$

---

*) folgt auch unmittelbar aus (α) in §. 3, weil $\frac{a+c}{b} = \frac{m-n}{a-c}$ ist.

§. 18.

Multiplicirt man (1) mit (9), so ist

$$\frac{m}{b} = \frac{\sin A \cos C}{\sin B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$b = \frac{m \sin B}{\sin A \cos C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 101.$$

$$\frac{m}{b} = -\frac{\sin A \cos (A+B)}{\sin B}$$

$$\frac{m}{b \sin A} = -\cos A \cot B + \sin A$$

$$\left.\begin{aligned} \cot B &= \tan A - \frac{m}{b \sin A \cos A} \\ &= \tan A \left(1 - \frac{m}{b \sin^2 A}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 102.$$

Bequemer wird die Rechnung, wenn man in der Aufgabe A, b, m oder A, m, n den Winkel C sucht. Dividirt man (8) durch (7), so ist $\frac{m}{n} = \frac{\tan A}{\tan C}$, also $\tan C = \frac{n}{m} \tan A$ .... 103.

Aus (102) folgt

$$\cot B = \frac{b \sin^2 A - m}{b \sin A \cos A} = \frac{n \tan^2 A - m}{(m+n) \tan A}$$

$$\tan^2 A - \frac{(m+n) \cot B}{n} . \tan A - \frac{m}{n} = 0$$

$$\tan A = \frac{(m+n) \cot B}{2n} \pm \sqrt{\frac{(m+n)^2 \cot^2 B}{4n^2} + \frac{m}{n}} \quad .. 104.$$

Setzt man hier, wenn 1) m und n positiv genommen werden,

$\frac{2 \tan B \sqrt{mn}}{m+n} = \tan M$, so giebt die + Wurzel

$$\tan A = \cot \tfrac{1}{2} M \sqrt{\frac{m}{n}}$$

Setzt man aber, wenn 2) m oder n negativ ist,

$\frac{2 \tan B \sqrt{-mn}}{m+n} = \sin M$, so erhält man

für tang A die Werthe

$+ \cot \tfrac{1}{2} M \sqrt{-\frac{m}{n}}$ und $+ \tan \tfrac{1}{2} M \sqrt{-\frac{m}{n}}$, wenn m negativ;

$- \tan \tfrac{1}{2} M \sqrt{-\frac{m}{n}}$ und $- \cot \tfrac{1}{2} M \sqrt{-\frac{m}{n}}$, wenn n negativ.

§. 19.

Dividirt man (β) in §. 9 durch die Gleichung (9), so ist

$$\frac{a+c}{m} = \frac{2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin A\cos C} = \frac{\sin A+\sin C}{\sin A\cos C} \quad \ldots (\alpha)$$

$$m = \frac{(a+c)\sin A\cos C}{2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}(A-C)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 105.$$

$$(a+c)\sin A\cos C = m\sin A + m\sin C \quad \ldots\ldots (\beta)$$

$$\sin A = \frac{m\sin C}{(a+c)\cos C - m} \quad \ldots\ldots \; 106.$$

$$\frac{(a+c)\sin A}{m}\cos C - \sin C = \sin A$$

und wenn $\frac{(a+c)\sin A}{m} = \tang M$ gesetzt wird,

$$\left.\begin{array}{r}\sin(M-C)\\ -\sin(C-M)\end{array}\right\} = \sin A\cos M \quad \ldots\ldots\ldots \; 107.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich C berechnen. Will man aber C gesondert, so erhebe man (β) aufs Quadrat und setze $\cos^2 C = 1 - \sin^2 C$, so findet man

$$\sin^2 C + \frac{2m^2\sin A}{(a+c)^2\sin^2 A + m^2}.\sin C - \frac{(a+c)^2 - m^2}{(a+c)^2\sin^2 A + m^2}\sin^2 A = 0 \quad 108.$$

§. 20.

Dividirt man (δ) in §. 9 durch Gleichung (9) so erhält man

$$\frac{a-c}{m} = \frac{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin A\cos C} = \frac{\sin A-\sin C}{\sin A\cos C} \quad \ldots (\alpha)$$

$$m = \frac{(a-c)\sin A\cos C}{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 109.$$

$$(a-c)\sin A\cos C = m\sin A - m\sin C \quad \ldots\ldots (\beta)$$

$$\sin A = \frac{m\sin C}{m-(a-c)\cos C} \quad \ldots\ldots \; 110.$$

$$\frac{(a-c)\sin A}{m}\cos C + \sin C = \sin A$$

und wenn $\frac{(a-c)\sin A}{m} = \tang M$ gesetzt wird,

$$\sin(M+C) = \sin A\cos M. \quad \ldots\ldots\ldots \; 111.$$

Will man für C eine besondere Gleichung haben, so erhebe man (β) aufs Quadrat und substituire $1-\sin^2 C$ für $\cos^2 C$, so findet man

$$\sin^2 C - \frac{2m^2\sin A}{m^2+(a-c)^2\sin^2 A}.\sin C + \frac{m^2-(a-c)^2}{m^2+(a-c)^2\sin^2 A}\sin^2 A = 0 \quad 112.$$

§. 21.

Dividirt man (γ) in §. 9 durch Gleichung (10), so ist

$$\frac{a-c}{n} = \frac{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\cos A\sin C} = \frac{\sin A - \sin C}{\cos A \sin C}$$

Hieraus findet man wie im vorigen §.

$$n = \frac{(a-c)\cos A\sin C}{2\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)} \ldots\ldots\ldots\ 113.$$

$$\sin C = \frac{n\sin A}{(a-c)\cos A + n} \ldots\ldots\ldots\ 114.$$

$$\left.\begin{array}{r}\sin(A-M)\\ -\sin(M-A)\end{array}\right\} = \sin C\cos M \ldots\ldots\ 115.$$

$$\text{für } \tan M = \frac{(a-c)\sin C}{n}; \text{ und}$$

$$\sin^2 A - \frac{2n^2\sin C}{n^2+(a-c)^2\sin^2 C}\cdot\sin A + \frac{n^2-(a-c)^2}{n^2+(a-c)^2\sin^2 C}\sin^2 C = 0\ \ 116.$$

§. 22.

Die Multiplication der Gleichungen (9) und (10) giebt

$$\frac{mn}{ac} = \cos A\cos C$$

$$\cos C = \frac{mn}{ac.\cos A}$$

$$\frac{mn}{ac} = -\cos A\cos(A+B)$$

$$= -\cos^2 A\cos B + \sin A\cos A\sin B$$

$$\left(\frac{mn}{ac} + \cos^2 A\cos B\right)^2 = \sin^2 A\cos^2 A\sin^2 B$$

Setzt man hier $1-\sin^2 A$ statt $\cos^2 A$, oder $1-\cos^2 A$ statt $\sin^2 A$, so erhält man geordnet

$$\sin^4 A - \left(1+\cos^2 B + \frac{2mn\cos B}{ac}\right).\sin^2 A + \left(\frac{mn+ac.\cos B}{ac}\right)^2 = 0\ \ 118.$$

$$\cos^4 A - \left(\sin^2 B - \frac{2mn\cos B}{ac}\right).\cos^2 A + \left(\frac{mn}{ac}\right)^2 = 0.\ldots\ 119.$$

§. 23.

Es ist ... $$\frac{\mu}{s} = \frac{\sin\frac{1}{2}B}{\sin C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+C)}{\sin C} \ldots\ldots\ (\alpha)$$

$$\cos\frac{A+C}{2} = \frac{\mu\sin C}{s} \ldots\ldots\ldots\ 120.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich der Winkel A finden. Will man A getrennt haben, so folgere man aus (α)

$$\frac{\mu}{s} = \frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C} \ldots\ldots\ (\beta)$$

$$2\mu \sin \tfrac{1}{2}C + s . \sin \tfrac{1}{2}A \tan g \tfrac{1}{2}C = s . \cos \tfrac{1}{2}A$$

Man erhebe diese Gleichung aufs Quadrat und setze $\cos^2 \frac{1}{2}A = 1 - \sin^2 \frac{1}{2}A$, so erhält man, für $\sin \frac{1}{2}A = x$

$$x^2 + \frac{4\mu \sin^2 \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}{s} . x + \left(\frac{4\mu^2 \sin^2 \frac{1}{2}C}{s^2} - 1\right) \cos^2 \tfrac{1}{2}C = 0 \quad . \ 121.$$

Ferner folgt aus (β)

$$s . \sin \tfrac{1}{2}A \sin \tfrac{1}{2}C = (s \cos \tfrac{1}{2}A - 2\mu \sin \tfrac{1}{2}C) \cos \tfrac{1}{2}C$$

Quadrirt man diese Gleichung und substituirt $1 - \sin^2 \frac{1}{2}C$ für $\cos^2 \frac{1}{2}C$, so erhält man, wenn $\sin \frac{1}{2}C = y$ und $\cos \frac{1}{2}A = u$ gesetzt wird,

$$y^4 - \frac{su}{\mu} . y^3 + \left(\frac{s^2}{4\mu^2} - 1\right) . y^2 + \frac{su}{\mu} . y - \left(\frac{su}{2\mu}\right)^2 = 0 \ . \ . \ . \ 122.$$

Aus (α) folgt

$$\frac{s . \sin \frac{1}{2}B}{\mu} = \sin C = \sin (A + B)$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\gamma)$$

$$= \sin A (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B) + 2 \cos A \sin \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}B$$

$$\frac{s . \sin \frac{1}{2}B}{\mu} - \sin A (1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}B) = 2 \cos A \sin \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}B$$

Man erhebe diese Gleichung aufs Quadrat und substituire $1 - \sin^2 \frac{1}{2}B$ für $\cos^2 \frac{1}{2}B$, so findet man, wenn $\sin \frac{1}{2}B = z$ und $\sin A = v$ gesetzt wird,

$$z^4 + \frac{sv}{\mu} . z^3 + \left(\frac{s^2}{4\mu^2} - 1\right) . z^2 - \frac{sv}{2\mu} . z + \frac{v^2}{4} = 0 \ . \ . \ 123.$$

Substituirt man in (γ) $\sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}$ für $\sin \frac{1}{2}B$, um eine Gleichung für $\sin B$ oder $\cos B$ abzuleiten, so erhält man eine noch weitläufigere Gleichung des 4ten Grades.

§. 24.

Durch Addition erhält man aus den Gleichungen (15) und (16)

$$\frac{b}{s} = \frac{(\sin A + \sin C) \sin \frac{1}{2}B}{\sin A \sin C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - C) \sin B}{\sin A \sin C} \ . \ . \ . \ . \ (\alpha)$$

$$b = \frac{s . \sin B \cos \frac{1}{2}(A - C)}{\sin A \sin C} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 124.$$

$$\frac{b}{s} = \frac{\sin (A + \frac{1}{2}B) \sin B}{\sin A \sin (A + B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos \frac{1}{2}B + \cos A \sin \frac{1}{2}B}{\sin^2 A \cot B + \sin A \cos A}$$

$$\left(\sin^2 A \cot B - \frac{s}{b} \sin A \cos \tfrac{1}{2}B\right)^2 = \left(\frac{s}{b} \sin \tfrac{1}{2}B - \sin A\right)^2 (1 - \sin^2 A)$$

Entwickelt man diese Gleichung, ordnet nach sin A und setzt sin A = x, sin B = u, sin ½B = v, cos ½B = w, so erhält man

$$x^4 - \frac{2suw}{b}.x^3 + \frac{(s^2-b^2)u^2}{b^2}.x^2 + \frac{2su^2v}{b}.x - \left(\frac{suv}{b}\right)^2 = 0 \quad 125.$$

Durch Subtraction folgt aus (15) und (16)

$$\frac{\mu-\nu}{s} = \frac{(\sin A - \sin C)\sin\frac{1}{2}B}{\sin A \sin C} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}(A-C)}{\sin A\sin C}$$

also, wenn durch (α) dividirt wird,

$$\frac{\mu+\nu}{\mu-\nu} = \frac{\cot\frac{1}{2}B}{\tang\frac{1}{2}(A-C)} = \frac{\tang\frac{1}{2}(A+C)}{\tang\frac{1}{2}(A-C)}$$

Diese Gleichung ergiebt sich auch unmittelbar aus (ε) in §. 9, weil $\frac{a}{c} = \frac{\mu}{\nu}$, also $\frac{a+c}{a-c} = \frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}$ ist.

Daher ist . . $\tang\frac{1}{2}(A-C) = \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}.\cot\frac{1}{2}B$ . . . . 126.

$\tang\frac{1}{2}B = \frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}.\cot\frac{1}{2}(A-C)$ . . . . . 127.

$\mu+\nu = (\mu-\nu).\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}(A-C)$ 128.

$\frac{(16)}{(15)}$ giebt . . . . $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sin C}{\sin A} = \cos B + \cot A \sin B$

$\nu = \frac{\mu\sin C}{\sin A}$ . . . . 129.

$\sin C = \frac{\nu}{\mu}\sin A$ . . . . 130.

$\cot A = \frac{\nu - \mu\cos B}{\mu\sin B}$ . . . . 131.

Zweite Abtheilung.

Gleichungen, welche einen Winkel des Dreiecks und die Differenz der beiden übrigen enthalten.

§. 25.

Mit Beibehaltung der übrigen Bezeichnungen in §. 1 setzen wir B = 2α, also A + C = 180 − 2α; und A − C = 2φ; so ist

$$\frac{A+C}{2} = 90-\alpha,\quad \frac{A-C}{2} = \varphi;\ \text{also}\ \ldots\ A = 90-(\alpha-\varphi),\quad C = 90-(a+\varphi)$$

Daher ist

$$\sin A = \cos(\alpha - \varphi) \qquad \sin C = \cos(\alpha + \varphi)$$
$$\cos A = \sin(\alpha - \varphi) \qquad \cos C = \sin(\alpha + \varphi)$$
$$\tang A = \cot(\alpha - \varphi) \qquad \tang C = \cot(\alpha + \varphi)$$
$$\cot A = \tang(\alpha - \varphi) \qquad \cot C = \tang(\alpha + \varphi)$$

Vermittelst dieser Formeln verwandeln sich die Gleichungen des §. 2 in folgende:

132. $\frac{a}{b} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha}$

133. $\frac{c}{b} = \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin 2\alpha}$

134. $\frac{a}{c} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)}$

135. $\frac{h}{s} = \cos\varphi$

136. $\frac{h}{a} = \cos(\alpha + \varphi)$

137. $\frac{h}{c} = \cos(\alpha - \varphi)$

138. $\frac{m}{h} = \tang(\alpha + \varphi)$

139. $\frac{n}{h} = \tang(\alpha - \varphi)$

140. $\frac{m}{a} = \sin(\alpha + \varphi)$

141. $\frac{n}{c} = \sin(\alpha - \varphi)$

142. $\frac{a}{s} = \frac{\cos\varphi}{\cos(a + \varphi)}$

143. $\frac{c}{s} = \frac{\cos\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$

144. $\frac{\mu}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}$

145. $\frac{\nu}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi}$

146. $\frac{\mu}{s} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + \varphi)}$

147. $\frac{\nu}{s} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha - \varphi)}$

§. 26.

Soll aus (132) der Winkel α berechnet werden, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$(2a\sin\alpha - b\cos\varphi)\cos\alpha = b\sin\alpha\sin\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\; (A)$$

$$\left(\sin\alpha - \frac{b}{2a}\cos\varphi\right)\cot\alpha = \frac{b}{2a}\sin\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 148.$$

Aus dieser Gleichung kann α vermittelst der Regula Falsi gefunden werden. Bequemer aber zu dieser Rechnung ist die Gleichung (132).

Erhebt man (A) aufs Quadrat, setzt $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ und ordnet nach $\sin\alpha = x$, so findet man

$$x^4 - \frac{b\cos\varphi}{a}.x^3 - \frac{4a^2 - b^2}{4a^2}.x^2 + \frac{b\cos\varphi}{a}.x - \left(\frac{b\cos\varphi}{2a}\right)^2 = 0 \quad 149.$$

In dieser Gleichung kann c statt a gesetzt werden.

§. 27.

Durch Addition folgt aus (132) und (133)

$$\frac{a+c}{b}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} \quad \ldots . \text{(A)}$$

$$\cos\varphi=\frac{a+c}{b}\sin\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots 150.$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{a+c}\cos\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots 151.$$

Aus denselben Gleichungen folgt

$$\frac{a-c}{b}=\frac{\cos(\alpha-\varphi)-\cos(a+\varphi)}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} \quad \ldots . \text{(B)}$$

$$\sin\varphi=\frac{a-c}{b}\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots 152.$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{a-c}\sin\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots 153.$$

Durch Multiplication der Gleichungen (A) und (B) ergiebt sich

$$\frac{a^2-c^2}{b^2}=\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin 2\varphi=\frac{a^2-c^2}{b^2}\sin 2\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots 154.$$

$$\sin 2\alpha=\frac{b^2}{a^2-c^2}\sin 2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots 155.$$

§. 28.

Multiplicirt man die Gleichung (A) in §. 27 mit (132) und setzt $(a+c)a=D$, so ist

$$\frac{D}{b^2}=\frac{\cos\varphi\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha+\cos(2\varphi-\alpha)}{2\sin\alpha\sin 2\alpha}$$

$$\left.\begin{matrix}\cos(2\varphi-\alpha)\\ \cos(\alpha-2\varphi)\end{matrix}\right\}=\frac{2D\sin\alpha\sin 2\alpha}{b^2}-\cos\alpha \ldots\ldots 156.$$

$$=\cos\alpha\left(\frac{4D\sin^2\alpha}{b^2}-1\right)$$

$$=\frac{\sin(\alpha-M)}{\sin M}=-\frac{\sin(M-\alpha)}{\sin M}$$

für $\frac{2D\sin 2\alpha}{b^2}=\cot M$.

Aus (156) folgt, wenn man mit $\cos\alpha$ dividirt,

$$\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\tang\alpha=\frac{4D\sin^2\alpha}{b}-1$$

Man setze die rechte Seite der Gleichung $=u$, so ist

$$\sin 2\varphi\tang\alpha=u-\cos 2\varphi$$

$$\tang^2\alpha - \tang^2\alpha\cos^2 2\varphi = u^2 + \cos^2 2\varphi - 2u\cos 2\varphi$$
$$(1+\tang^2\alpha).\cos^2 2\varphi - 2u.\cos 2\varphi + (u^2 - \tang^2\alpha) = 0$$
$$\cos^2 2\varphi - 2u\cos^2\alpha.\cos 2\varphi + (u^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0$$
$$\cos 2\varphi = u\cos^2\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{1 - u^2\cos^2\alpha} \ldots\ldots 157.$$

§. 29.

Multiplicirt man die Gleichung (B) in §. 27 mit (132) und setzt $(a-c)a = E$, so ist

$$\frac{E}{b^2} = \frac{\sin\varphi\cos(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\sin 2\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin(2\varphi-\alpha)}{2\cos\alpha\sin 2\alpha}$$
$$\left.\begin{matrix}\sin(2\varphi-\alpha)\\ -\sin(\alpha-2\varphi)\end{matrix}\right\} = \frac{2E\cos\alpha\sin 2\alpha}{b^2} - \sin\alpha \ldots\ldots 158.$$
$$= \sin\alpha\left(\frac{4E\cos^2\alpha}{b^2} - 1\right)$$
$$= \frac{\cos(\alpha+M)}{\sin M}$$
$$\text{für } \frac{2E\sin 2\alpha}{b^2} = \cot M$$

Aus (158) erhält man, wie im vorigen §., wenn $\frac{4E\cos^2\alpha}{b^2} - 1 = v$ gesetzt wird,

$$\cos 2\varphi = -v\sin^2\alpha \pm \cos\alpha\sqrt{1 - v^2\sin^2\alpha} \ldots\ldots 159.$$

§. 30.

Die Multiplication der Gleichungen (132) und (133) giebt

$$\frac{ac}{b^2} = \frac{\cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi}{2\sin^2 2\alpha} \ldots (A)$$
$$\cos 2\varphi = \frac{2ac.\sin^2 2\alpha}{b^2} - \cos 2\alpha \ldots\ldots\ldots 160.$$
$$= \cos 2\alpha\left(\frac{2ac.\sin 2\alpha\tang 2\alpha}{b^2} - 1\right)$$
$$= \frac{\sin(2\alpha - M)}{\sin M} = -\frac{\sin(M-2\alpha)}{\sin M}$$
$$\text{für } \frac{2ac.\sin 2\alpha}{b^2} = \cot M$$

Setzt man in (A) $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha$, so erhält man

$$\cos^2 2\alpha + \frac{b^2}{2ac}.\cos 2\alpha + \left(\frac{b^2\cos 2\varphi}{2ac} - 1\right) = 0 \ldots (B)$$
$$\cos 2\alpha = -\frac{b^2}{4ac} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4ac}\right)^2 + 1 - \frac{b^2\cos 2\varphi}{2ac}} \ldots 161.$$

Substituirt man in (B) $1-2\sin^2\alpha$ für $\cos 2\alpha$, so ist

$$\sin^4\alpha - \frac{4ac+b^2}{4ac}.\sin^2\alpha + \frac{b^2\cos^2\varphi}{4ac} = 0$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4ac+b^2}{8ac} - \sqrt{\left(\frac{4ac+b^2}{8ac}\right)^2 - \frac{b^2\cos^2\varphi}{4ac}} \quad . . \ 162.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{b\cos\varphi}{2\sqrt{ac}}}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{4b\cos\varphi\sqrt{ac}}{4ac+b^2} = \sin M$$

§. 31.

Aus (132) und (133) folgt ferner

$$\frac{a^2+c^2}{b^2} = \frac{\cos^2(\alpha-\varphi)+\cos^2(\alpha+\varphi)}{\sin^2 2\alpha} = \frac{1+\cos 2\alpha\cos 2\varphi}{\sin^2 2\alpha} \quad (A)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{(a^2+c^2)\sin^2 2\alpha - b^2}{b^2\cos 2\alpha} \quad . . . . \ 163.$$

Setzt man in (A) $\sin^2 2\alpha = 1-\cos^2 2\alpha$, so ist

$$\cos^2 2\alpha + \frac{b^2\cos 2\varphi}{a^2+c^2}.\cos 2\alpha + \left(\frac{b^2}{a^2+c^2}-1\right) = 0$$

also, wenn $a^2+c^2 = d$,

$$\cos 2\alpha = -\frac{b^2\cos 2\varphi}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2\cos 2\varphi}{2d}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{d}} \quad . . \ 164.$$

Setzt man hier, wenn 1) $d > b^2$ ist,

$$\frac{2\sqrt{(d-b^2)d}}{b^2\cos 2\varphi} = \operatorname{tang} M, \text{ so ist}$$

$$\cos 2\alpha = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{d-b^2}{d}} \text{ durch die + Wurzel}$$

Setzt man aber, wenn 2) $d < b^2$ ist,

$$\frac{2\sqrt{(b^2-d)d}}{b^2\cos 2\varphi} = \sin M, \text{ so findet man für } \cos 2\alpha \text{ die Werthe:}$$

$$1)\ -\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{b^2-d}{d}} \qquad 2)\ -\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{b^2-d}{d}}$$

§. 32.

Aus (132) und (133) folgt ferner

$$\frac{b\pm a}{b\pm c} = \frac{\sin 2\alpha \pm \cos(\alpha-\varphi)}{\sin 2\alpha \pm \cos(\alpha+\varphi)} \quad . . . . \ (A)$$

Setzt man nun . . . $b+a = k \qquad b-a = p$

$b+c = l \qquad b-c = q$, so ist

$$\frac{k}{l} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{2\sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi}$$

$$= \frac{2\sin\alpha + \cos\varphi + \operatorname{tang}\alpha\sin\varphi}{2\sin\alpha + \cos\varphi - \operatorname{tang}\alpha\sin\varphi}$$

$$\frac{k+1}{k-1} = \frac{2\sin\alpha + \cos\varphi}{\operatorname{tang}\alpha \sin\varphi}$$

$$2\sin\alpha = \frac{k+1}{k-1}\operatorname{tang}\alpha\sin\varphi - \cos\varphi$$

Es sey $\frac{k+1}{k-1}\operatorname{tang}\alpha = \cot M$, so erhält man

$$2\sin\alpha = \frac{\sin(\varphi - M)}{\sin M}, \text{ also}$$

$$\sin(\varphi - M) = 2\sin\alpha\sin M \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 165.$$

Eben so findet man aus (A)

$$2\sin\alpha = \frac{k+q}{k-q}\cos\varphi - \operatorname{tang}\alpha\sin\varphi$$

oder ..... $2\cos\alpha = \frac{k+q}{k-q}\cot\alpha\cos\varphi - \sin\varphi$

$$= \frac{\cos(\varphi + M)}{\sin M}$$

wenn $\frac{k+q}{k-q}\cot\alpha = \cot M$ ist.

also .... $\cos(\varphi + M) = 2\cos\alpha\sin M$ .... 166.

Eben so erhält man aus (A)

$$\sin(\varphi + M) = 2\cos\alpha\cos M \; \ldots\ldots\ldots \; 167.$$

für $\frac{1+p}{1-p}\cot\alpha = \operatorname{tang} M$

$$\sin(\varphi + M) = 2\sin\alpha\sin M \; \ldots\ldots\ldots \; 168.$$

für $\frac{q+p}{q-p}\operatorname{tang}\alpha = \cot M.$

§. 33.

Durch Addition folgt aus den umgekehrten Gleichungen (136) und (137)

$$\frac{a+c}{h} = \frac{\cos(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha + \varphi)\cos(\alpha - \varphi)}$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (A)$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (B)$$

Aus (A) folgt $\cos^2\alpha - \frac{2h\cos\varphi}{a+c}\cdot\cos\alpha - \sin^2\varphi = 0$

$$\cos\alpha = \frac{h\cos\varphi}{a+c} + \sqrt{\left(\frac{h\cos\varphi}{a+c}\right)^2 + \sin^2\varphi} \; \ldots\ldots \; 169.$$

$$= \sin\varphi\cot\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{a+c}{h}\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} M$$

Aus (B) folgt $\cos^2\varphi - \frac{2h\cos\alpha}{a+c}.\cos\varphi - \sin^2\alpha = 0$

$$\cos\varphi = \frac{h\cos\alpha}{a+c} + \sqrt{\left(\frac{h\cos\alpha}{a+c}\right)^2 + \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots 170.$$

$$= \sin\alpha\cot\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{a+c}{h}\tan\alpha = \tan M$$

§. 34.

Durch Subtraction der umgekehrten Gleichungen (136) und (137) erhält man

$$\frac{a-c}{h} = \frac{\cos(\alpha-\varphi) - \cos(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin\varphi}{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Aus (A) folgt $\sin^2\varphi + \frac{2h\sin\alpha}{a-c}.\sin\varphi - \cos^2\alpha = 0$

$$\sin\varphi = -\frac{h\sin\alpha}{a-c} + \sqrt{\left(\frac{h\sin\alpha}{a-c}\right)^2 + \cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots 171.$$

$$= \cos\alpha\tan\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{a-c}{h}\cot\alpha = \tan M$$

Aus (B) folgt $\sin^2\alpha + \frac{2h\sin\varphi}{a-c}.\sin\alpha - \cos^2\varphi = 0$

$$\sin\alpha = -\frac{h\sin\varphi}{a-c} + \sqrt{\left(\frac{h\sin\varphi}{a-c}\right)^2 + \cos^2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots 172.$$

$$= \cos\varphi\tan\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{a-c}{h}\cot\varphi = \tan M$$

§. 35.

Die Multiplication der Gleichungen (136) und (137) giebt

$$\frac{h^2}{ac} = \cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)$$

$$= \cos^2\varphi - \sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\varphi$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\cos^2\varphi - \frac{h^2}{ac}} \quad \ldots\ldots\ldots 173.$$

$$= \cos\varphi\sin M, \text{ für } \frac{h}{\cos\varphi\sqrt{ac}} = \cos M$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{h^2}{ac}} \quad \ldots\ldots\ldots 174.$$

$$= \cos\alpha\sin N, \text{ für } \frac{h}{\cos\alpha\sqrt{ac}} = \cos N$$

§. 36.

Durch Multiplication der Gleichungen (138) und (139) erhält man

$$\frac{mn}{h^2} = \operatorname{tang}(\alpha + \varphi)\operatorname{tang}(\alpha - \varphi) = \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\alpha}{\cos 2\varphi + \cos 2\alpha}$$

$$\frac{h^2 - mn}{h^2 + mn} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\cos 2\varphi = \frac{h^2 + mn}{h^2 - mn}\cos 2\alpha \ldots\ldots 175.$$

$$\cos 2\alpha = \frac{h^2 - mn}{h^2 + mn}\cos 2\varphi \ldots\ldots 176.$$

§. 37.

Addirt man (138) und (139), so ist

$$\frac{m + n}{h} = \operatorname{tang}(\alpha + \varphi) + \operatorname{tang}(\alpha - \varphi)$$

$$\frac{b}{h} = \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\varphi &= \sin^2\alpha\left(\frac{2h}{b}\cot\alpha + 1\right) \\ \cos\varphi &= \frac{\sin\alpha}{\sin M},\ \text{für}\ \cot M = \sqrt{\frac{2h}{b}\cot\alpha} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots 177.$$

Aus (A) folgt . . . $\cos 2\varphi = \frac{2h}{b}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \ldots\ldots 178.$

$$= \cos 2\alpha\left(\frac{2h}{b}\operatorname{tang} 2\alpha - 1\right)$$

$$= \frac{\sin(2\alpha - P)}{\sin P} = -\frac{\sin(P - 2\alpha)}{\sin P} \quad 179.$$

$$\text{für}\ \cot P = \frac{2h}{b}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(2\alpha - P) \\ -\sin(P - 2\alpha) \end{aligned}\right\} = \sin P\cos 2\varphi \ldots\ldots 180.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich 2α finden. Will man α getrennt, so folgt aus (A)

$$\cos 2\alpha = \frac{2h}{b}\sin 2\alpha - \cos 2\varphi$$

Erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat und setzt $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$, so findet man geordnet

$$\sin^2 2\alpha - \frac{4bh\cos 2\varphi}{b^2 + 4h^2}.\sin 2\alpha - \frac{b^2\sin^2 2\varphi}{b^2 + 4h^2} = 0$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2bh\cos 2\varphi}{b^2+4h^2} + \sqrt{\left(\frac{2bh\cos 2\varphi}{b^2+4h^2}\right)^2 + \frac{b^2\sin^2 2\varphi}{b^2+4h^2}} \;.\;.\; 181.$$

$$= \frac{b\sin 2\varphi}{\sqrt{[b^2+4h^2]}}.\cot\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \tan 2\varphi.\frac{\sqrt{[b^2+4h^2]}}{2h} = \tan M$$

§. 38.

Zieht man (139) von (138) ab, so ist

$$\frac{m-n}{h} = \tan(\alpha+\varphi) - \tan(\alpha-\varphi)$$

$$= \frac{2\sin 2\varphi}{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (A)$$

$$= \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (B)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \sin^2\varphi\left(\frac{2h}{m-n}\cot\varphi + 1\right) \\ \cos\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin M}, \text{ für } \cot M = \sqrt{\frac{2h}{m-n}\cot\varphi} \end{array}\right\} \;.\;.\;.\; 182.$$

Aus (A) folgt . . . $\cos 2\alpha = \frac{2h}{m-n}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi$ . . . . 183.

$$= \cos 2\varphi\left(\frac{2h}{m-n}\tan 2\varphi - 1\right)$$

$$= \frac{\sin(2\varphi - M)}{\sin M} = -\frac{\sin(M-2\varphi)}{\sin M} \quad 184.$$

$$\text{für } \frac{2h}{m-n} = \cot M$$

$$\left.\begin{array}{r} \sin(2\varphi - M) \\ -\sin(M - 2\varphi) \end{array}\right\} = \sin M\cos 2\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 185.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich 2φ berechnen. Will man φ gesondert haben, so folgt aus (A)

$$\cos 2\varphi = \frac{2h}{m-n}\sin 2\varphi - \cos 2\alpha$$

Man erhebe diese Gleichung aufs Quadrat und substituire $1-\sin^2 2\varphi$ für $\cos^2 2\varphi$, so findet man, wenn $m-n=d$ gesetzt wird,

$$\sin^2 2\varphi - \frac{4dh\cos 2\alpha}{d^2+4h^2}.\sin 2\varphi - \frac{d^2\sin^2 2\alpha}{d^2+4h^2} = 0$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2dh\cos 2\alpha}{d^2+4h^2} + \sqrt{\left(\frac{2dh\cos 2\alpha}{d^2+4h^2}\right)^2 + \frac{d^2\sin^2 2\alpha}{d^2+4h^2}} \;.\;.\; 186.$$

$$= \cot\tfrac{1}{2}M.\frac{d\sin 2\alpha}{\sqrt{[d^2+4h^2]}}, \text{ für } \tan 2\alpha.\frac{\sqrt{[d^2+4h^2]}}{2h} = \tan M$$

Dividirt man die Gleichungen (A) dieses und des vorigen §. durch einander, so erhält man

$$\frac{m+n}{m-n}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

$$\sin 2\varphi=\frac{m-n}{m+n}\sin 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 187.$$

$$\sin 2\alpha=\frac{m+n}{m-n}\sin 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 188.$$

§. 39.

Nach §. 27 ist $\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$. Man addire beiderseits 1,

so ist .... $\frac{p}{b}=\frac{\cos\varphi+\sin\alpha}{\sin\alpha}$ .... (A)

Multiplicirt man diese Gleichung mit (B) in §. 37, so ist

$$\frac{p}{h}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\varphi-\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\cos\varphi=\frac{2h}{p}\cos\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha\left(\frac{2h}{p}\cot\alpha+1\right) \quad \ldots\ldots 189.$$

$$=\frac{\sin(\alpha+M)}{\cos M}, \text{ wenn } \frac{2h}{p}=\operatorname{tang} M \text{ ist;}$$

$$\sin(\alpha+M)=\cos\varphi\cos M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 190.$$

Will man eine besondere Gleichung für α haben, so folgt aus (B)

$$\sin\alpha=\cos\varphi-\frac{2h}{p}\cos\alpha$$

woraus man findet

$$\cos^2\alpha-\frac{4hp\cos\varphi}{p^2+4h^2}.\cos\alpha-\frac{p^2\sin^2\varphi}{p^2+4h^2}=0$$

$$\cos\alpha=\frac{2hp\cos\varphi}{p^2+4h^2}+\sqrt{\left(\frac{2hp\cos\varphi}{p^2+4h^2}\right)^2+\frac{p^2\sin^2\varphi}{p^2+4h^2}} \quad \ldots\ldots 191.$$

$$=\frac{p\sin\varphi}{\sqrt{[p^2+4h^2]}}.\cot\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{[p^2+4h^2]}}{2h}=\operatorname{tang} M$$

Wenn man ferner von der Gleichung $\frac{a+c}{b}=\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$ auf beiden Seiten 1 abzieht und $a+c-b=q$ setzt, so ist

$$\frac{q}{b}=\frac{\cos\varphi-\sin\alpha}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

und wenn diese Gleichung mit (B) in §. 37 multiplicirt wird,

$$\frac{q}{h}=\frac{2\cos\alpha}{\cos\varphi+\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (D)$$

$$\cos\varphi = \frac{2h}{q}\cos\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha\left(\frac{2h}{q}\cot\alpha - 1\right) \quad \ldots\ldots 192.$$

$$= \frac{\sin(M-\alpha)}{\cos M}, \text{ wenn } \frac{2h}{q} = \tan M \text{ ist;}$$

$$\sin(M-\alpha) = \cos\varphi\cos M \quad \ldots\ldots\ldots 193.$$

Um für α eine besondere Gleichung zu erhalten, folgere man aus (D) ...... $\sin\alpha = \frac{2h}{q}\cos\alpha - \cos\varphi$

und hieraus $\cos^2\alpha - \frac{4hq\cos\varphi}{q^2+4h^2}.\cos\alpha - \frac{q^2\sin^2\varphi}{q^2+4h^2} = 0$

$$\cos\alpha = \frac{2hq\cos\varphi}{q^2+4h^2} + \sqrt{\left(\frac{2hq\cos\varphi}{q^2+4h^2}\right)^2 + \frac{q^2\sin^2\varphi}{q^2+4h^2}} \quad \ldots\ldots 194.$$

$$= \frac{q\sin\varphi\cot\frac{1}{2}M}{\sqrt{[q^2+4h^2]}}, \text{ für } \frac{\tan\varphi\sqrt{[q^2+4h^2]}}{2h} = \tan M$$

§. 40.

Multiplicirt man die Gleichungen (A) und (B) in §. 39, so erhält man, weil $bh = 2F$ ist,

$$\frac{p^2}{2F} = 2\cot\alpha.\frac{\cos\varphi+\sin\alpha}{\cos\varphi-\sin\alpha}$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha.\frac{p^2\tan\alpha+4F}{p^2\tan\alpha-4F} \quad \ldots\ldots\ldots 195.$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen (B) und (D) in §. 39, so ist, wenn $(a+c+b)(a+c-b) = (a+c)^2 - b^2 = Q$ gesetzt wird,

$$\frac{Q}{h^2} = \frac{4\cos^2\alpha}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi} \quad \ldots\ldots (A)$$

$$\sin\varphi = \cos\alpha\sqrt{1-\frac{4h^2}{Q}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 196.$$

$$= \cos\alpha\sin M, \text{ für } \frac{2h}{\sqrt{Q}} = \cos M$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\left(1-\frac{4h^2}{Q}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 197.$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\sin N}, \text{ für } \frac{2h}{\sqrt{Q}} = \cos N$$

Multiplicirt man endlich die Gleichungen (A) und (C) des vorigen §., so ist $\frac{(a+c)^2-b^2}{b^2} = \frac{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

und wenn man diese Gleichung mit der obigen (A) multiplicirt,

$$\left(\frac{(a+c)^2-b^2}{bh}\right)^2 = 4\cot^2\alpha$$

siehe Gleichung (B) in §. 65.

§. 41.

Aus $\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$ (§. 27) folgt $\frac{(a+c)^2 + b^2}{b^2} = \frac{\cos^2\varphi + \sin^2 a}{\sin^2\alpha}$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{b^2}{h^2} = \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\cos^2\varphi - \sin^2\alpha)^2}$ (§. 37. B), so erhält man, wenn $(a+c)^2 + b^2 = P$ gesetzt wird,

$$\frac{P}{h^2} = \frac{4\cos^2\alpha\,(\cos^2\varphi + \sin^2\alpha)}{(\cos^2\varphi - \sin^2\alpha)^2}$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\varphi + \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\varphi} \quad \ldots\ldots (A)$$

Hieraus findet man, wenn man

$\cos\varphi = x, \quad \sin\alpha = v, \quad \cos\alpha = w$ setzt,

$$x^4 - 2\left(v^2 + \frac{2h^2w^2}{P}\right).x^2 + v^2\left(v^2 - \frac{4h^2w^2}{P}\right) = 0 \;.\;.\; 198.$$

Substituirt man in (A) $1 - \sin^2\alpha$ für $\cos^2\alpha$, so erhält man, wenn . . $\sin\alpha = y$, $\sin\varphi = m$, $\cos\varphi = n$ gesetzt wird,

$$y^4 - \frac{2n^2P + 4h^2m^2}{P + 4h^2}.y^2 + \frac{n^2P - 4h^2}{P + 4h^2}n^2 = 0 \;.\;.\; 199.$$

§. 42.

Es ist . . . $\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\sin 2\alpha}$ (§. 27) . . . . . (A)

$$\frac{h}{b} = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} \text{ (§. 37. B) } \ldots\ldots\ldots (B)$$

folglich, wenn man addirt,

$$\frac{a+c+h}{b} = \frac{2\cos\alpha\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\cos^2\varphi + 2\cos\alpha.\cos\varphi = \frac{a+c+h}{b}\sin 2\alpha + \sin^2\alpha$$

$$\cos\varphi = -\cos\alpha + \sqrt{1 + \frac{a+c+h}{b}\sin 2\alpha} \;\ldots\ldots\; 200.$$

Durch Subtraction folgt aus (A) und (B)

$$\frac{a+c-h}{b} = \frac{2\cos\alpha\cos\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\cos^2\varphi - 2\cos\alpha.\cos\varphi = \sin^2\alpha - \frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha$$

$$\cos\varphi = \cos\alpha \pm \sqrt{1 - \frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha} \;\ldots\ldots\; 201.$$

Setzt man $\sqrt{\frac{a+c-h}{b}\sin 2\alpha} = \sin M$, so findet man

$$\cos\varphi = 2\cos\frac{M+\alpha}{2}\cos\frac{M-\alpha}{2} \text{ durch die } + \text{ Wurzel}$$

$$\cos\varphi = 2\sin\frac{M+\alpha}{2}\sin\frac{M-\alpha}{2} \text{ durch die } - \text{ Wurzel.}$$

§. 43.

Es ist $\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\sin\varphi}{\sin 2\alpha}$ (§. 27) . . . . (A)

und $\frac{h}{b} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi}{\sin 2\alpha}$ (§. 42. B). . . . . (B)

folglich, wenn man addirt,

$$\frac{h+(a-c)}{b} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi + 2\sin\alpha\sin\varphi}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin^2\varphi - 2\sin\alpha.\sin\varphi = \cos^2\alpha - \frac{h+(a-c)}{b}\sin 2\alpha$$

$$\sin\varphi = \sin\alpha \pm \sqrt{1 - \frac{h+(a-c)}{b}\sin 2\alpha} \;\ldots\ldots\; 202.$$

Setzt man $\sqrt{\frac{h+(a-c)}{b}\sin 2\alpha} = \cos M$, so findet man

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\alpha+M}{2}\cos\frac{\alpha-M}{2} \text{ durch die } + \text{ Wurzel}$$

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\alpha+M}{2}\sin\frac{\alpha-M}{2} \text{ durch die } - \text{ Wurzel.}$$

Zieht man ferner (A) von (B) ab, so ist

$$\frac{h-(a-c)}{b} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi - 2\sin\alpha\sin\varphi}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin^2\varphi + 2\sin\alpha.\sin\varphi = \cos^2\alpha - \frac{h-(a-c)}{b}\sin 2\alpha$$

$$\sin\varphi = -\sin\alpha + \sqrt{1 - \frac{h-(a-c)}{b}\sin 2\alpha} \;\ldots\ldots\; 203.$$

$$= 2\cos\frac{M+\alpha}{2}\sin\frac{M-\alpha}{2}$$

$$\text{wenn } \cos M = \sqrt{\frac{h-(a-c)}{b}\sin 2\alpha} \text{ ist.}$$

§. 44.

Multiplicirt man (A) in §. 27 mit (C) in §. 38, nämlich

$\frac{a+c}{b} = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$ mit $\frac{b}{m-n} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi}$ . . . . (A)

so ist . . . . $\frac{a+c}{m-n} = \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}$ . . . . (B)

$$\sin\varphi = \frac{m-n}{a+c}\cos\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 204.$$

$$\cos\alpha = \frac{a+c}{m-n}\sin\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 205.$$

Multiplicirt man $\frac{a-c}{b} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha}$ (B in §. 27) mit der obigen Gleichung (A), so ist

$$\frac{a-c}{m-n} = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (C)$$

$$\cos\varphi = \frac{m-n}{a-c}\sin\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 206.$$

$$\sin\alpha = \frac{a-c}{m-n}\cos\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 207.$$

Aus (205) und (207) folgt durch Multiplication

$$\sin 2\alpha = \frac{a^2-c^2}{(m-n)^2}\sin 2\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 208.$$

$$\sin 2\varphi = \frac{(m-n)^2}{a^2-c^2}\sin 2\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 209.$$

Aus (B) folgt $\frac{(a+c)^2-(m-n)^2}{(m-n)^2} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}$

also multiplicirt mit $\frac{m-n}{h} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi}$ (B in §. 38) . . . . (D)

$$\frac{(a+c)^2-(m-n)^2}{h(m-n)} = 2\cot\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 210.$$

Aus (C) folgt . . . $\frac{(m-n)^2-(a-c)^2}{(m-n)^2} = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}$

und wenn diese Gleichung mit (D) multiplicirt wird, weil $\cos^2\alpha - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\alpha$,

$$\frac{(m-n)^2-(a-c)^2}{h(m-n)} = 2\tang\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 211.$$

Aus (210) und (211) folgt

$$\frac{(a+c)^2-(m-n)^2}{h(m-n)} \cdot \frac{(m-n)^2-(a-c)^2}{h(m-n)} = 4$$

$$a-c = (m-n)\cdot\sqrt{1-\frac{4h^2}{(a+c)^2-(m-n)^2}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 212.$$

$$= (m-n)\sin M, \text{ für } \frac{4h^2}{(a+c)^2-(m-n)^2} = \cos^2 M;$$

$$a+c = (m-n)\cdot\sqrt{1+\frac{4h^2}{(m-n)^2-(a-c)^2}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 213.$$

$$= \frac{m-n}{\sin N}, \text{ für } \frac{4h^2}{(m-n)^2-(a-c)^2} = \tang^2 M.$$

§. 45.

Aus (136) und (140) folgt durch Addition

$$\frac{h+m}{a} = \sin(a+\varphi) + \cos(a+\varphi) \;\ldots\ldots\; (A)$$

$$= \cos(\alpha+\varphi-45) \cdot \sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha+\varphi-45) = \frac{h+m}{a\sqrt{2}} \;\ldots\ldots\ldots\; 214.$$

Eben so findet man aus (137) und (141)

$$\cos(45-\alpha+\varphi) = \frac{h+n}{c\sqrt{2}}$$

Aus (A) folgere man

$$\frac{h+m}{a} + \sin\varphi(\sin\alpha - \cos\alpha) = \cos\varphi(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

$$\frac{h+m}{a} + \sin\alpha(\sin\varphi - \cos\varphi) = \cos\alpha(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

Erhebt man diese Gleichungen aufs Quadrat und substituirt in der ersten $1-\sin^2\varphi$ für $\cos^2\varphi$, und in der zweiten $1-\sin^2\alpha$ für $\cos^2\alpha$, so findet man, wenn

$h+m=d$, $\sin\varphi = x$, $\sin\alpha = y$ gesetzt wird,

$$x^2 + \frac{d(\sin\alpha - \cos\alpha)}{a} \cdot x + \frac{d^2 - a^2(1+\sin 2\alpha)}{2a^2} = 0 \;\ldots\; 215.$$

$$y^2 + \frac{d(\sin\varphi - \cos\varphi)}{a} \cdot y + \frac{d^2 - a^2(1+\sin 2\varphi)}{2a^2} = 0 \;\ldots\; 216.$$

Eben so wird durch Subtraction aus den Gleichungen (136) und (140) folgen,

$$\left.\begin{array}{r}\sin(45-\alpha-\varphi)\\ -\sin(\alpha+\varphi-45)\end{array}\right\} = \frac{h-m}{a\sqrt{2}} \;\ldots\ldots\ldots\; 217.$$

und wenn man

$h-m=\delta$, $\sin\varphi = x$, $\sin\alpha = y$ setzt,

$$x^2 + \frac{\delta(\sin\alpha + \cos\alpha)}{a} \cdot x + \frac{\delta^2 - a^2(1-\sin 2\alpha)}{2a^2} = 0 \;\ldots\; 218.$$

$$y^2 + \frac{\delta(\sin\varphi + \cos\varphi)}{a} \cdot y + \frac{\delta^2 - a^2(1-\sin 2\varphi)}{2a^2} = 0 \;\ldots\; 219.$$

§. 46.

Die Multiplication der Gleichungen (136) und (140) giebt

$$\frac{hm}{a^2} = \sin(\alpha+\varphi) \cdot \cos(\alpha+\varphi)$$

$$\frac{2hm}{a^2} = \sin(2\alpha+2\varphi) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 220.$$

Eben so folgt aus (137) und (141)

$$\frac{2hn}{c^2} = \sin(2\alpha - 2\varphi)$$

Die Gleichungen (137) und (140) multiplicirt geben

$$\frac{hm}{ac} = \sin(\alpha + \varphi)\cos(\alpha - \varphi)$$

$$\frac{2\,hm}{ac} = \sin 2\alpha + \sin 2\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (A)$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\,hm}{ac} - \sin 2\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 221.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,hm}{ac} - \sin 2\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 222.$$

Eben so folgt aus (136) und (141)

$$\frac{2\,hn}{ac} = \sin 2\alpha - \sin 2\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (B)$$

$$\sin 2\varphi = \sin 2\alpha - \frac{2\,hn}{ac} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 223.$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\varphi + \frac{2\,hn}{ac} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 224.$$

Aus (A) und (B) endlich folgt

$$\sin 2\alpha = \frac{hm + hn}{ac} = \frac{bh}{ac} \text{ (vergl. A in §. 59.)} \;\ldots\ldots\; 225.$$

$$\sin 2\varphi = \frac{hm - hn}{ac} = \frac{(m-n)h}{ac} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 226.$$

$$h = \frac{ac}{m-n}\sin 2\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 227.$$

§. 47.

Durch Addition erhält man aus den Gleichungen (140) und (141)

$$\frac{cm + an}{ac} = 2\sin\alpha\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{cm + an}{2\,ac\,.\,\sin\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 228.$$

$$\sin\alpha = \frac{cm + an}{2\,ac\,.\,\cos\varphi} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 229.$$

Eben so durch Subtraction

$$\frac{cm - an}{ac} = 2\cos\alpha\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{cm - an}{2\,ac\,.\,\cos\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 230.$$

$$\cos\alpha = \frac{cm - an}{2\,ac\,.\,\sin\varphi} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 231.$$

$\frac{(230)}{(228)}$ giebt . . $\tan\varphi = \frac{cm - an}{cm + an}\tan\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 232.$

$$\tan\alpha = \frac{cm + an}{cm - an}\tan\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 233.$$

§. 48.

Die Multiplication der Gleichungen (140) und (141) giebt

$$\frac{mn}{ac} = \cos^2\varphi - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\varphi$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\cos^2\varphi - \frac{mn}{ac}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 234.$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{mn}{ac}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 235.$$

Ist in diesen Gleichungen 1) mn positiv, so erhält man

$$\cos\alpha = \cos\varphi \sin M, \quad \sin\varphi = \sin\alpha \sin N$$

für .... $\cos M = \frac{\sqrt{mn}}{\cos\varphi\sqrt{ac}}, \quad \cos N = \frac{\sqrt{mn}}{\sin\alpha\sqrt{ac}}$

Ist in den Gleichungen 2) mn negativ, so findet man

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi}{\cos M}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin N}$$

für $\operatorname{tang} M = \frac{\sqrt{-mn}}{\cos\varphi\sqrt{ac}}, \ \cot N = \frac{\sqrt{-mn}}{\sin\alpha\sqrt{ac}}$

§. 49.

Nach §. 27 (A) und §. 30 (A) ist

$$\frac{(a+c)^2}{b^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha} \text{ und } \frac{ac}{b^2} = \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi}{2\sin^2 2\alpha}, \text{ folglich}$$

$$\frac{(a+c)^2}{ac} = \frac{8\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{\cos 2\alpha + \cos 2\varphi} = \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \ldots\ldots (A)$$

Ferner ist nach §. 48 .... $\frac{mn}{ac} = \cos^2\varphi - \cos^2\alpha \ldots\ldots (B)$

$$\frac{(A)}{(B)} \text{ giebt } \frac{(a+c)^2}{mn} = \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{(\cos^2\varphi - \sin^2\alpha)(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha)}$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi - \cos^2\varphi + \sin^2\alpha\cos^2\alpha} \ldots\ldots (C)$$

$$= \frac{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi}{-\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha} \ldots (D)$$

Setzt man $a + c = d$, $\cos\varphi = x$, $\cos\alpha = y$, so folgt

aus (C) ... $x^4 - \left(1 + \frac{4mn\cos^2\alpha}{d^2}\right).x^2 + \frac{\sin^2 2\alpha}{4} = 0 \ . \ . \ 236.$

aus (D) ... $y^4 - \left(1 - \frac{4mn\cos^2\varphi}{d^2}\right).y^2 + \frac{\sin^2 2\varphi}{4} = 0 \ . \ 237.$

Setzt man $\sin M = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \frac{4mn}{d^2}\cos^2\alpha}$ (in 236) $= \frac{\sin 2\varphi}{1 - \frac{4mn}{d^2}\cos^2\varphi}$ (in 237)

so findet man, für $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \gamma$, $\frac{1}{2}\sin 2\varphi = \delta$

$$1)\ x = \sqrt{\gamma . \cot\tfrac{1}{2}M} \qquad 2)\ x = \sqrt{\gamma . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M}$$

$$1)\ y = \sqrt{\delta . \cot\tfrac{1}{2}M} \qquad 2)\ y = \sqrt{\delta . \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M}$$

§. 50.

Nach §. 27 (B) und §. 30 (A) ist

$$\frac{(a-c)^2}{b^2}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\alpha} \text{ und } \frac{ac}{b^2}=\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\varphi}{2\sin^2 2\alpha}\text{; folglich}$$

$$\frac{(a-c)^2}{ac}=\frac{8\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\cos 2\alpha+\cos 2\varphi}=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots (A)$$

Ferner nach §. 48 ...... $\frac{mn}{ac}=\sin^2\alpha-\sin^2\varphi$ ..... (B)

$$\frac{(A)}{(B)} \text{ giebt } \frac{(a-c)^2}{mn}=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{(\cos^2\varphi-\sin^2\alpha)(\sin^2\alpha-\sin^2\varphi)}$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha-\sin^4\alpha-\sin^2\varphi\cos^2\varphi} \quad \ldots\ldots (C)$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\varphi+\sin^4\varphi} \quad \ldots\ldots (D)$$

Setzt man $a-c=d$, $\sin\varphi=x$, $\sin\alpha=y$, so folgt

aus (D) ... $x^4-\left(1+\frac{4mn\sin^2\alpha}{d^2}\right).x^2+\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha=0$ .. 238.

aus (C) ... $y^4-\left(1-\frac{4mn\sin^2\varphi}{d^2}\right).y^2+\frac{1}{4}\sin^2 2\varphi=0$ .. 239.

Setzt man hier $\sin M=$

$$\frac{\sin 2\alpha}{1+\frac{4mn\sin^2\alpha}{d^2}} \text{ (in 238) } =\frac{\sin 2\varphi}{1-\frac{4mn\sin^2\varphi}{d^2}} \text{ (in 239)}$$

so findet man, für $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\gamma$, $\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\delta$

1) $x=\sqrt{\gamma.\cot\frac{1}{2}M}$ 2) $x=\sqrt{\gamma.\operatorname{tang}\frac{1}{2}M}$

1) $y=\sqrt{\delta.\cot\frac{1}{2}M}$ 2) $y=\sqrt{\delta.\operatorname{tang}\frac{1}{2}M}$

§. 51.

Aus Gleichung (142) folgt

$$\frac{s}{a}=\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}=\cos\alpha-\sin\alpha\operatorname{tang}\varphi$$

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{a\cos\alpha-s}{a\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 240.$$

Eben so aus (143) . $\operatorname{tang}\varphi=\frac{s-c.\cos\alpha}{c.\sin\alpha}$ .... 241.

$$\frac{a\cos\alpha-s}{a\sin\alpha}=\frac{s-c.\cos\alpha}{c.\sin\alpha}$$

$$ac.\cos\alpha-cs=as-ac.\cos\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{(a+c)s}{2ac} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 242.$$

$$c=\frac{as}{2a\cos\alpha-s} \quad \ldots\ldots\ldots 243.$$

$$a=\frac{cs}{2c.\cos\alpha-s} \quad \ldots\ldots\ldots 244.$$

§. 52.

Addirt man (142) und (143), so findet man

$$\frac{a+c}{s} = \cos\varphi \cdot \frac{\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$$

$$= \frac{2\cos\alpha\cos^2\varphi}{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi} = \frac{2\cos\alpha\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \; \ldots\ldots\ldots \; (A)$$

$$\cos^2\alpha - \frac{2s.\cos^2\varphi}{a+c}.\cos\alpha - \sin^2\varphi = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{s.\cos^2\varphi}{a+c} + \sqrt{\left(\frac{s.\cos^2\varphi}{a+c}\right)^2 + \sin^2\varphi} \; \ldots\ldots \; 245.$$

$$= \sin\varphi\cot\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{(a+c)\tan\varphi}{s.\cos\varphi} = \tan M$$

Ferner folgt aus (A)

$$\cos^2\varphi - \sin^2\alpha - \frac{2s.\cos\alpha}{a+c}.\cos^2\varphi = 0$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \frac{2s.\cos\alpha}{a+c}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 246.$$

$$\cos\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sin M}, \text{ für } \cos M = \sqrt{\frac{2s.\cos\alpha}{a+c}}$$

Zieht man (143) von (142) ab, so erhält man

$$\frac{a-c}{s} = \frac{2\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (B)$$

$$\sin^2\alpha + \frac{s.\sin 2\varphi}{a-c}.\sin\alpha - \cos^2\varphi = 0$$

$$\sin\alpha = -\frac{\frac{1}{2}s.\sin 2\varphi}{a-c} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}s.\sin 2\varphi}{a-c}\right)^2 + \cos^2\varphi} \; . \; 247.$$

$$= \cos\varphi\tan\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \tan M = \frac{a-c}{s.\sin\varphi}$$

Weil $\cos^2\varphi - \sin^2\alpha = \cos^2\varphi - \sin^2\alpha(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$

$$= \cos^2\alpha\cos^2\varphi - \sin^2\alpha\sin^2\varphi \; \ldots\ldots \; (C)$$

so folgt aus (B), wenn man durch $\cos^2\varphi$ hebt,

$$\frac{a-c}{s} = \frac{2\sin\alpha\tan\varphi}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\tan^2\varphi}$$

$$\tan^2\varphi + \frac{2s}{(a-c)\sin\alpha}.\tan\varphi - \cot^2\alpha = 0$$

$$\tan\varphi = -\frac{s}{(a-c)\sin\alpha} + \sqrt{\left(\frac{s}{(a-c)\sin\alpha}\right)^2 + \cot^2\alpha} \; . \; 248.$$

$$= \cot\alpha\tan\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{(a-c)\cos\alpha}{s} = \tan M$$

Endlich ist, wenn (142) mit (143) multiplicirt wird,

$$\frac{ac}{s^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha\sqrt{\frac{ac}{ac - s^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots 249.$$

$$\sin\alpha = \cos\varphi\sqrt{\frac{ac - s^2}{ac}} \ldots\ldots\ldots\ldots 250.$$

§. 53.

Aus (144) und (145) folgt $\frac{\mu}{a} = \frac{\nu}{c}$, also

$$c = \frac{a\nu}{\mu},\quad a = \frac{c\mu}{\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots 251.$$

$$\nu = \frac{c\mu}{a},\quad \mu = \frac{a\nu}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots 252.$$

Multiplicirt man (144) mit (145), so ist

$$\frac{\mu\nu}{ac} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha\sqrt{\frac{ac}{\mu\nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots 253.$$

$$\sin\alpha = \cos\varphi\sqrt{\frac{\mu\nu}{ac}} \ldots\ldots\ldots\ldots 254.$$

§. 54.

Dividirt man (B) in §. 52 durch (146), so erhält man

$$\frac{a - c}{\mu} = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\cos(\alpha + \varphi)}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

$$\cos(\alpha - \varphi) = \frac{\mu}{a - c}\sin 2\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots 255.$$

$$\cos\alpha\cos\varphi = \frac{\mu}{a - c}\sin 2\varphi - \sin\alpha\sin\varphi$$

Erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat und setzt $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, so findet man

$$\sin^2\alpha - \frac{2\mu\sin\varphi\sin 2\varphi}{a - c}.\sin\alpha + \left(\frac{\mu\sin 2\varphi}{a - c}\right)^2 - \cos^2\varphi = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{\mu\sin\varphi\sin 2\varphi}{a - c} \pm \cos\varphi\sqrt{1 - \left(\frac{\mu\sin 2\varphi}{a - c}\right)^2} \ldots\ldots 256.$$

$$= \sin(\varphi \pm M),\ \text{für}\ \frac{\mu\sin 2\varphi}{a - c} = \cos M.$$

§. 55.

Aus (146) folgt $\frac{s}{\mu}=\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}=\cot\alpha\cos\varphi-\sin\varphi$

$$\tang\alpha=\frac{\mu\cos\varphi}{s+\mu\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots 257.$$

Eben so aus (147) $\tang\alpha=\frac{\nu\cos\varphi}{s-\nu\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots 258.$

$$\frac{\mu\cos\varphi}{s+\mu\sin\varphi}=\frac{\nu\cos\varphi}{s-\nu\sin\varphi}$$

$$s\mu-\mu\nu\sin\varphi=s\nu+\mu\nu\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=\frac{s(\mu-\nu)}{2\mu\nu} \ldots\ldots\ldots\ldots 259.$$

$$\mu=\frac{s\nu}{s-2\nu\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots 260.$$

$$\nu=\frac{s\mu}{s+2\mu\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots 261.$$

§. 56.

Durch Addition folgt aus (146) und (147)

$$\frac{\mu+\nu}{s}=\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\varphi)}+\frac{\sin\alpha}{\cos(a-\varphi)}$$

$$\frac{b}{s}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

$$\cos^2\varphi-\frac{s.\sin 2\alpha}{b}\cos\varphi-\sin^2\alpha=0$$

$$\cos\varphi=\frac{s.\sin 2\alpha}{2b}+\sqrt{\left(\frac{s.\sin 2\alpha}{2b}\right)^2+\sin^2\alpha} \ldots\ldots 262.$$

$$=\sin\alpha\cot\tfrac{1}{2}M,\ \text{für}\ \tang M=\frac{b}{s.\cos\alpha}$$

Weil $\cos^2\varphi-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\cos^2\varphi-\sin^2\alpha\sin^2\varphi$ (§. 52. C), so folgt aus (A) ..... $\frac{b}{s}=\frac{2\cot\alpha\cos\varphi}{\cot^2\alpha\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}$

$$\cot^2\alpha-\frac{2s}{b\cos\varphi}.\cot\alpha-\tang^2\varphi=0$$

$$\cot\alpha=\frac{s}{b\cos\varphi}+\sqrt{\left(\frac{s}{b\cos\varphi}\right)^2+\tang^2\varphi} \ldots\ldots 263.$$

$$=\tang\varphi\cot\tfrac{1}{2}M,\ \text{für}\ \tang M=\frac{b\sin\varphi}{s}$$

Durch Subtraction folgt aus (146) und (147)

$$\frac{\mu-\nu}{s}=\frac{2\sin^2\alpha\sin\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha\sin\varphi}{\cos^2\alpha-\sin^2\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

also aus (B) . . . $\sin^2\alpha + \frac{2s.\sin\varphi}{\mu-\nu}.\sin^2\alpha - \cos^2\varphi = 0$

$$\sin^2\alpha = \frac{\cos^2\varphi}{1+\frac{2s.\sin\varphi}{\mu-\nu}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 264.$$

$$\sin\alpha = \cos\varphi\cos M, \text{ für } \sqrt{\frac{2s.\sin\varphi}{\mu-\nu}} = \tang M$$

aus (C) . . . . . . $\sin^2\varphi + \frac{2s.\sin^2\alpha}{\mu-\nu}.\sin\varphi - \cos^2\alpha = 0$

$$\sin\varphi = -\frac{s.\sin^2\alpha}{\mu-\nu} + \sqrt{\left(\frac{s.\sin^2\alpha}{\mu-\nu}\right)^2 + \cos^2\alpha} \ldots\ldots 265.$$

$$= \cos\alpha\,\tang\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \tang M = \frac{(\mu-\nu)\cot\alpha}{s.\sin\alpha}$$

$\frac{(A)}{(B)}$ giebt $\frac{b}{\mu-\nu} = \cot\alpha\cot\varphi$ (Siehe Gleichung 126) . . . . . (D)

und mit $\frac{a+e}{b} = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$ (§. 27. A) multiplicirt

$$\frac{a+e}{\mu-\nu} = \frac{\cos\alpha\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha\sin\varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Man setze $a+e=d$ und $\mu-\nu=\delta$, so ist

$$\frac{d.\sin\alpha}{\delta\cot\alpha}.\sin\varphi = \cos^2\varphi = 1-\sin^2\varphi$$

$$\sin\varphi = -\frac{d\sin\alpha}{2\delta\cot\alpha} + \sqrt{\left(\frac{d\sin\alpha}{2\delta\cot\alpha}\right)^2 + 1} \ldots\ldots\ldots 266.$$

$$= \tang\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \tang M = \frac{2\delta\cot\alpha}{d\sin\alpha}$$

Aus (E) folgt ferner, wenn $a+e=d$ und $\mu-\nu=\delta$ ist,

$$\frac{\delta\cos\varphi}{d\tang\varphi}.\cos\alpha = \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{\delta\cos\varphi}{2d\tang\varphi} + \sqrt{\left(\frac{\delta\cos\varphi}{2d\tang\varphi}\right)^2 + 1} \ldots\ldots 267.$$

$$= \tang\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \tang M = \frac{2d\tang\varphi}{\delta\cos\varphi}$$

Multiplicirt man (D) mit $\frac{a-e}{b} = \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha}$ (§. 27. B), so ist

$$\frac{a-e}{\mu-\nu} = \frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$$

$$\cos\varphi = \frac{a-e}{\mu-\nu}\sin\alpha \ldots\ldots\ldots 268.$$

$$\sin\alpha = \frac{\mu-\nu}{a-e}\cos\varphi \ldots\ldots\ldots 269.$$

Dividirt man endlich $\frac{b}{m-n} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi}$ (§. 38. C) durch die obige (D), so ist ...... $\frac{\mu - \nu}{m-n} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}$

$$\cos\varphi = \sin\alpha \sqrt{\frac{m-n}{\mu-\nu}} \quad \ldots\ldots\; 270.$$

$$\sin\alpha = \cos\varphi \sqrt{\frac{\mu-\nu}{m-n}} \quad \ldots\ldots\; 271.$$

§. 57.

Die Multiplication der Gleichungen (146) und (147) giebt

$$\frac{\mu\nu}{s^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos(a+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha} \quad \ldots (A)$$

$$\mu\nu\cos^2\varphi = (s^2 + \mu\nu)\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \cos\varphi \sqrt{\frac{\mu\nu}{s^2+\mu\nu}} \quad \ldots\ldots\; 272.$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha \sqrt{\frac{s^2+\mu\nu}{\mu\nu}} \quad \ldots\ldots\; 273.$$

Aus (273) und (270) folgt $\frac{m-n}{\mu-\nu} = \frac{s^2+\mu\nu}{\mu\nu}$

$$m-n = (\mu-\nu) \,.\, \frac{s^2+\mu\nu}{\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\; 274.$$

$$\mu - \nu = \frac{(m-n)\,.\,\mu\nu}{s^2+\mu\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\; 275.$$

$$\mu\nu = \frac{s^2(\mu-\nu)}{(m-n)-(\mu-\nu)} \quad \ldots\ldots\; 276.$$

$$s = \sqrt{\frac{(m-n)-(\mu-\nu)}{\mu-\nu} \,.\, \mu\nu} \quad \ldots\; 277.$$

§. 58.

Weil $\cos^2\varphi - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\varphi$, so folgt aus (A) in §. 52

$$\frac{(a+c)^2}{s^2} = \frac{4\cos^2\alpha\cos^4\varphi}{(\cos^2\varphi - \sin^2\alpha)^2}$$

und wenn durch (A) in §. 57 dividirt wird

$$\frac{(a+c)^2}{\mu\nu} = \frac{4\cos^2\alpha\cos^4\varphi}{\sin^2\alpha(\cos^2\varphi - \sin^2\alpha)} \quad \ldots\ldots (A)$$

$$= \frac{4\cos^4\varphi - 4\cos^4\varphi\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\varphi - \sin^4\alpha}$$

also, wenn $a+c = d$, $\sin\alpha = x$, $\cos\varphi = \delta$ gesetzt wird,

$$x^4 - \left(\frac{4\delta^2\,.\,\mu\nu}{d^2} + 1\right)\delta^2\,.\,x^2 + \frac{4\delta^4\,.\,\mu\nu}{d^2} = 0 \quad \ldots\; 278.$$

Setzt man $\frac{\sqrt{\mu\nu}}{\frac{\delta^2 . \mu\nu}{d} + \frac{1}{4}d} = \sin M$, so erhält man

$$1)\ x = \delta . \sqrt{\frac{2\sqrt{\mu\nu}}{d} . \cot \tfrac{1}{2}M} \qquad 2)\ x = \delta . \sqrt{\frac{2\sqrt{\mu\nu}}{d} . \tang \tfrac{1}{2}M}$$

Aus (A) folgt, wenn durch $\cos^2 \alpha$ gehoben, $a + c = d$ und $\cos \varphi = y$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2}{\mu\nu} = \frac{4y^4}{y^2 \tang^2 \alpha - \sin^2 \alpha \tang^2 \alpha}$$

$$y^4 - \frac{d^2 \tang^2 \alpha}{4\mu\nu} . y^2 + \frac{d^2 \sin^2 \alpha \tang^2 \alpha}{4\mu\nu} = 0 \ldots\ldots\ldots 279.$$

also, wenn $\frac{4 \cos \alpha \sqrt{\mu\nu}}{d} = \sin M$ gesetzt wird,

$$1)\ y = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\sin \frac{1}{2}M}} \qquad 2)\ y = \sqrt{\frac{\sin \alpha}{\cos \frac{1}{2}M}}$$

Aus (B) in §. 52 folgt $\frac{(a-c)^2}{s^2} = \frac{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha)^2}$, und wenn man diese Gleichung durch (A) in §. 57 dividirt,

$$\frac{(a-c)^2}{\mu\nu} = \frac{4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha} \ldots\ldots\ldots (B)$$

$$\sin \alpha = \cos \varphi \sqrt{1 - \frac{4\mu\nu \sin^2 \varphi}{(a-c)^2}} \ldots\ldots\ldots 280.$$

$$= \cos \varphi \sin M, \text{ wenn } \cos M = \frac{2 \sin \varphi \sqrt{\mu\nu}}{a-c}$$

Aus (B) folgt ... $\frac{(a-c)^2}{\mu\nu} = \frac{4 \cos^2 \varphi - 4 \cos^4 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}$

$$\cos^4 \varphi - \left(1 - \frac{(a-c)^2}{4\mu\nu}\right) . \cos^2 \varphi - \frac{(a-c)^2 \sin^2 \alpha}{4\mu\nu} = 0 \ldots\ldots 281.$$

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{(a-c) \sin \alpha}{2\sqrt{\mu\nu}} . \cot \tfrac{1}{2}M} \text{ durch die + Wurzel}$$

$$\text{wenn } \tang M = \frac{4(a-c) \sin \alpha \sqrt{\mu\nu}}{4\mu\nu - (a-c)^2}$$

Dritte Abtheilung.

Gleichungen, welche nur einen Winkel des Dreiecks enthalten.

§. 59.

Mit Beibehaltung der frühern Bezeichnungen werde (Fig. 3. 4) AD senkrecht auf BC gefällt, so ist, wenn der Inhalt des Dreiecks $= F$ gesetzt wird, $F = \frac{BC.AD}{2} = \frac{1}{2}a.AD$

Es ist aber $AD = AB.\sin B = c.\sin 2\alpha$; folglich

$$F = \frac{1}{2}ac.\sin 2\alpha \ldots\ldots 282.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2F}{ac}\,{}^{*)} \ldots\ldots 283.$$

$$c = \frac{2F}{a\sin 2\alpha} \ldots\ldots 284.$$

Da nun auch $F = \frac{1}{2}bh$, so folgt aus (282)

$$bh = ac.\sin 2\alpha$$

$$h = \frac{ac}{b}\sin 2\alpha \ldots\ldots 285.$$

$$b = \frac{ac}{h}\sin 2\alpha \ldots\ldots 286.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{bh}{ac} \text{ (Gleichung 225)} \ldots\ldots (A)$$

Aus (285) folgt . . $b + h = b + \frac{ac}{b}\sin 2\alpha$

$$(b+h)b = b^2 + ac.\sin 2\alpha$$

$$b = \frac{b+h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b+h}{2}\right)^2 - ac.\sin 2\alpha} \ldots\ldots 287.$$

Setzt man $\sin 2\alpha = \beta$ und $\frac{2\sqrt{[ac.\beta]}}{b+h} = \sin M$, so ist

1) $b = \cot\frac{1}{2}M\sqrt{ac.\beta}$ 2) $b = \tang\frac{1}{2}M\sqrt{ac.\beta}$

Aus (285) folgt . . . $b - h = b - \frac{ac}{b}\sin 2\alpha$

$$(b-h)b = b^2 - ac.\sin 2\alpha$$

$$b = \frac{b-h}{2} + \sqrt{\left(\frac{b-h}{2}\right)^2 + ac.\sin 2\alpha} \ldots\ldots 288.$$

$$= \cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{ac.\sin 2\alpha}, \text{ für } \frac{2\sqrt{[ac.\sin 2\alpha]}}{b-h} = \tang M$$

*) $ac : F = 1 : \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ (Eucl. Dat. 62. Zus.), vergl. Anm. zu §. 64.

Für h — b verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$b = -\frac{h-b}{2} + \sqrt{\left(\frac{h-b}{2}\right)^2 + ac.\sin 2\alpha} \text{ . . . . } 289.$$

$$= \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}M \sqrt{ac.\sin 2\alpha}, \text{ für } \frac{2\sqrt{[ac.\sin 2\alpha]}}{h-b} = \operatorname{tang} M$$

§. 60.

Aus (285) folgt . . . $h^2 = \frac{(ac.\sin 2\alpha)^2}{b^2}$ . . . . (A)

$$b^2 + h^2 = b^2 + \frac{(ac.\sin 2\alpha)^2}{b^2}$$

$$(b^2 + h^2)\,b^2 = b^4 + (ac.\sin 2\alpha)^2$$

$$b^2 = \frac{b^2+h^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2+h^2}{2}\right)^2 - (ac.\sin 2\alpha)^2} \text{ . . . . . } 290.$$

Setzt man $\sin 2\alpha = \beta$ und $\frac{2\,ac.\beta}{b^2+h^2} = \sin M$, so ist

1) $b = \sqrt{ac.\beta.\cot \tfrac{1}{2}M}$ 2) $b = \sqrt{ac.\beta.\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}M}$

Aus (A) folgt . . . . $b^2 - h^2 = b^2 - \frac{(ac.\sin 2\alpha)^2}{b^2}$

$$(b^2 - h^2)\,b^2 = b^4 - (ac.\sin 2\alpha)^2$$

$$b^2 = \frac{b^2-h^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2-h^2}{2}\right)^2 + (ac.\sin 2\alpha)^2} \text{ . . . . . } 291.$$

$$b = \sqrt{ac.\sin 2\alpha.\cot \tfrac{1}{2}M}, \text{ für } \frac{2\,ac.\sin 2\alpha}{b^2-h^2} = \operatorname{tang} M$$

§. 61.

Fällt man (Fig. 3) AD senkrecht auf BC, so ist bekanntlich

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2\,BC.BD$$

das ist, weil $BD = AB.\cos B = c.\cos 2\alpha$ ist,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac.\cos 2\alpha.$$

Ist $\angle$ ABC ein stumpfer (Fig. 4), so ist

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2\,BC.BD$$

In diesem Falle ist $BD = AB.\cos ABD = -AB.\cos ABC$; folglich gilt die obige Gleichung auch für diesen Fall. Es ist also

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\,ac.\cos 2\alpha} \text{ . . . . } 292.$$

$$c^2 - 2\,a\cos 2\alpha.c + (a^2 - b^2) = 0$$

$$c = a\cos 2\alpha \pm \sqrt{b^2 - a^2\sin^2 2\alpha} \text{ . . . . . . } 293.$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} \;{}^{*)} \text{ . . . . } 294.$$

*) $a^2 + c^2 - b^2 : ac = 2\cos 2\alpha : 1$, vergl. Anm. zu §. 64.

$$1 - \cos 2\alpha = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2 \sin^2 \alpha = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2ac} \; {}^{*)}$$

$$= \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2ac}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{(b+a-c)\,(b-a+c)}{4ac}} \; \ldots \; 295.$$

$$= \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p - a)\,(\frac{1}{2}p - c)}{ac}}$$

Aus (294) folgt $1 + \cos 2\alpha = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$2 \cos^2 \alpha = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{(a+c+b)\,(a+c-b)}{4ac}} \; \ldots \; 296.$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{2}p - b)}{ac}}$$

$\frac{(295)}{(296)}$ giebt . . . . $\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p - a)\,(\frac{1}{2}p - c)}{\frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{2}p - b)}}$ . . . . . 297.

Multiplicirt man (295) mit (296) und verdoppelt die Gleichung, so ist $\sin 2\alpha = \frac{2}{ac} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{2}p - a) \cdot (\frac{1}{2}p - b) \cdot (\frac{1}{2}p - c)}$. 298.

Multiplicirt man endlich diese Gleichung mit $\frac{1}{2}ac$, so ist wegen (282)

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{2}p - a) \cdot (\frac{1}{2}p - b) \cdot (\frac{1}{2}p - c)} \; \ldots \ldots \; 299.$$

§. 62.

Dividirt man (299) durch $\frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{2}p - b)$, so ist

$$\frac{F}{\frac{1}{2}p\,(\frac{1}{2}p - b)} = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p - a) \cdot (\frac{1}{2}p - c)}{\frac{1}{2}p \cdot (\frac{1}{2}p - b)}}$$

$= \operatorname{tang} \alpha$ (Gleichung 297) . . . . 300.

$$F = \tfrac{1}{2}p \cdot (\tfrac{1}{2}p - b) \cdot \operatorname{tang} \alpha \; \ldots\ldots\ldots \; 301.$$

$$b = \tfrac{1}{2}p - \frac{F}{\frac{1}{2}p \operatorname{tang} \alpha} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; 302.$$

$= \frac{1}{2}p - \frac{\frac{1}{2}ac \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2}p \operatorname{tang} \alpha}$ (Gleichung 282)

$$= \tfrac{1}{2}p - \frac{ac \cdot \cos^2 \alpha}{\frac{1}{2}p} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; 303.$$

*) $b^2 - (a-c)^2 : ac = 4 \sin^2 \alpha : 1$. Hieraus ergiebt sich eine ähnliche Bemerkung wie §. 64.

§. 63.

Setzt man in (300) $F = \frac{1}{2}bh$, so erhält man

$$\tan\alpha = \frac{bh}{p(\frac{1}{2}p - b)} = \frac{2bh}{p(p-2b)} \quad \ldots\ldots \; 304.$$

$$= \frac{2bh}{p^2 - 2bp}$$

$$p^2 - 2bp = 2bh\cot\alpha$$

$$b = \frac{p^2}{2(p + h\cot\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 305.$$

$$h = \frac{p(p-2b)}{2b}.\tan\alpha \ldots\ldots\ldots \; 306.$$

$$b + h = b + \frac{p(p-2b)}{2b}.\tan\alpha$$

$$(b+h)b = b^2 + \tfrac{1}{2}p^2\tan\alpha - bp.\tan\alpha$$

$$b^2 - [p\tan\alpha + (b+h)].b + \tfrac{1}{2}p^2\tan\alpha = 0$$

Hieraus folgt für $b + h = f$

$$b = \frac{p\tan\alpha + f}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p\tan\alpha + f}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2}p^2\tan\alpha} \; . \; . \; 307.$$

Setzt man hier $\dfrac{p\sqrt{[2\tan\alpha]}}{p\tan\alpha + f} = \sin M$, so findet man

1) $b = \frac{1}{2}p\cot\frac{1}{2}M\sqrt{2\tan\alpha}$ 2) $b = \frac{1}{2}p\tan\frac{1}{2}M\sqrt{2\tan\alpha}$

Aus (306) folgt ... $b - h = b - \dfrac{p(p-2b)}{2b}.\tan\alpha$

$$(b-h)b = b^2 - \tfrac{1}{2}p^2\tan\alpha + p\tan\alpha.b$$

$$b^2 + [p\tan\alpha - (b-h)].b - \tfrac{1}{2}p^2\tan\alpha = 0$$

also für $b - h = g$

$$b = -\frac{p\tan\alpha - g}{2} + \sqrt{\left(\frac{p\tan\alpha - g}{2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}p^2\tan\alpha} \; . \; . \; 308.$$

$= \frac{1}{2}p\tan\frac{1}{2}M\sqrt{2\tan\alpha}$, für $\dfrac{p\sqrt{[2\tan\alpha]}}{p\tan\alpha - g} = \tan M$

§. 64.

Aus (300) folgt $\tan\alpha = \dfrac{4F}{(a+c)^2 - b^2}$ (vergl. §. 40) . . (A)

$$b = \sqrt{(a+c)^2 - 4F\cot\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; 309.$$

$= (a+c)\sin M$, für $\dfrac{2\sqrt{[F\cot\alpha]}}{a+c} = \cos M$

Weil nun $F = \frac{1}{2}ac.\sin 2\alpha = ac.\sin\alpha\cos\alpha$, also

$$4F\cot\alpha = 4ac.\cos^2\alpha \ldots\ldots\ldots \; (B)$$

so ist . . . $b = \sqrt{(a+c)^2 - 4ac.\cos^2\alpha}$ . . . . 310.

$$= (a+c)\sin M,\ \text{für}\ \frac{2\cos\alpha\sqrt{ac}}{a+c} = \cos M$$

Aus (310) folgt . . . $b^2 = (a+c)^2 - 4ac.\cos^2\alpha$ . . . . . . (C)

Setzt man $a+c-b = k$, so ist $a+c = k+b$, also

$$b^2 = (k+b)^2 - 4ac.\cos^2\alpha$$

$$k^2 + 2bk = 4ac.\cos^2\alpha$$

$$b = \frac{ac.\cos^2\alpha}{\frac{1}{2}k} - \frac{1}{2}k \ldots\ldots\ldots\ 311.$$

$$= \frac{F\cot\alpha}{\frac{1}{2}k} - \frac{1}{2}k\ (\text{wegen B}) \ldots\ldots\ 312.$$

$$= \frac{bh}{k}.\cot\alpha - \frac{1}{2}k$$

$$bk = bh\cot\alpha - \frac{1}{2}k^2$$

$$b = \frac{\frac{1}{2}k^2}{h\cot\alpha - k} \ldots\ldots\ldots\ 313.$$

$$h = \frac{bk + \frac{1}{2}k^2}{b}.\tan\alpha \ldots\ldots\ldots\ (D)$$

$$b + h = b + \frac{bk + \frac{1}{2}k^2}{b}.\tan\alpha$$

$$(b+h)b = b^2 + bk\tan\alpha + \frac{1}{2}k^2\tan\alpha$$

also für $b + h = f$

$$b = \frac{f - k\tan\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f-k\tan\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}k^2\tan\alpha} \ldots\ 314.$$

Setzt man $\frac{k\sqrt{[2\tan\alpha]}}{f - k\tan\alpha} = \sin M$, so findet man

1) $b = \frac{1}{2}k\cot\frac{1}{2}M\sqrt{2\tan\alpha}$ 2) $b = \frac{1}{2}k\tan\frac{1}{2}M\sqrt{2\tan\alpha}$

Aus (D) folgt . . . $b - h = b - \frac{bk + \frac{1}{2}k^2}{b}\tan\alpha$

$$(b-h)b = b^2 - bk\tan\alpha - \frac{1}{2}k^2\tan\alpha$$

also für $b - h = g$

$$b = \frac{g + k\tan\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{g+k\tan\alpha}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k^2\tan\alpha} \ldots\ 315.$$

$$= \frac{1}{2}k\cot\frac{1}{2}M\sqrt{2\tan\alpha},\ \text{für}\ \frac{k\sqrt{[2\tan\alpha]}}{g + k\tan\alpha} = \tan M$$

Anmerkung. Aus (A) folgt $(a+c)^2 - b^2 : F = 4 : \tan\alpha$ (Eucl. Dat. 76). Von den Datis 2α, F, $(a+c)^2 - b^2$ bestimmen also je 2 das dritte und die Gleichung (A) dient daher unter andern zur Auflösung folgender Aufgaben

Gegeben	Gesucht
$B,\ F,\ a+c+b$	$a+c-b$
$B,\ F,\ a+c-b$	$a+c+b$
$B,\ F,\ (a+c)^2+b^2$	$(a+c)^2-b^2$
$A,\ F,\ (a+c)^2-b^2$	B
$A-C,\ F,\ (a+c)^2-b^2$	B

Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Proportion

$$(a+c)^2-b^2 : ac = 4\cos^2\alpha : 1$$

welche aus (C) folgt.

§. 65.

Es ist . . . $\tan g\,\alpha = \frac{4F}{(a+c)^2-b^2}$ (§. 64. A) $= \frac{2bh}{(a+c)^2-b^2}$

$$h = \frac{(a+c)^2-b^2}{2b} . \tan g\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$b = \frac{(a+c)^2-b^2}{2h} . \tan g\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 316.$$

$$2bh\cot\alpha = (a+c)^2-b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

$$b = -h\cot\alpha + \sqrt{h^2\cot^2\alpha+(a+c)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 317.$$

$$= (a+c)\tan g\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{a+c}{h}\tan g\,\alpha = \tan g\,M$$

Aus (A) folgt . . . $b+h = b + \frac{(a+c)^2-b^2}{2b} . \tan g\,\alpha$

$$2(b+h)b = 2b^2+(a+c)^2\tan g\,\alpha - b^2\tan g\,\alpha$$

$$b^2(2-\tan g\,\alpha) - 2(b+h)b + (a+c)^2\tan g\,\alpha = 0 \text{ *)}$$

$$b = \frac{b+h}{2-\tan g\,\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{b+h}{2-\tan g\,\alpha}\right)^2 - \frac{(a+c)^2\tan g\,\alpha}{2-\tan g\,\alpha}} \quad . . \quad 318.$$

Ist $\tan g\,\alpha > 2$, so setze $\frac{(a+c)\tan g\,\alpha}{b+h}\sqrt{1-2\cot\alpha} = \tan g\,M$, so ist

$$b = \frac{(a+c)\tan g\tfrac{1}{2}M}{\sqrt{[1-2\cot\alpha]}} \text{ durch die + Wurzel.}$$

Ist $\tan g\,\alpha < 2$, so setze $\frac{(a+c)\tan g\,\alpha}{b+h}\sqrt{2\cot\alpha-1} = \sin M$, so ist

1) $b = \frac{(a+c)\cot\tfrac{1}{2}M}{\sqrt{[2\cot\alpha-1]}}$ 2) $b = \frac{(a+c)\tan g\tfrac{1}{2}M}{\sqrt{[2\cot\alpha-1]}}$

Aus (A) folgt . . . $b-h = b - \frac{(a+c)^2-b^2}{2b} . \tan g\,\alpha$

$$2(b-h)b = 2b^2-(a+c)^2\tan g\,\alpha + b^2\tan g\,\alpha$$

*) Wenn $2\alpha = 126°\ 52'\ 11'', 62$ so ist $\tan g\,\alpha = 2$, also $b = \frac{(a+c)^2}{b+h}$

$$b = \frac{b-h}{2+\tan\alpha} + \sqrt{\left(\frac{b-h}{2+\tan\alpha}\right)^2 + \frac{(a+c)^2\tan\alpha}{2+\tan\alpha}} \quad \ldots\ 319.$$

$$= \frac{(a+c)\cot\frac{1}{2}M}{\sqrt{[2\cot\alpha+1]}}, \text{ für } \frac{(a+c)\tan\alpha}{b-h}\sqrt{2\cot\alpha+1} = \tan M$$

§. 66.

Es ist (§. 61. A) . . . $4ac.\sin^2\alpha = b^2-(a-c)^2$ . . . (A)

$$b = \sqrt{(a-c)^2+4ac.\sin^2\alpha} \quad \ldots\ 320.$$

$$= \frac{a-c}{\cos M}, \text{ für } \frac{2\sin\alpha\sqrt{ac}}{a-c} = \tan M$$

Nun ist . . . $F = \frac{1}{2}ac.\sin 2\alpha = ac.\sin\alpha\cos\alpha$, also

$$4F\tan\alpha = 4ac.\sin^2\alpha \quad \ldots\ (B)$$

folglich . . . . $b = \sqrt{(a-c)^2+4F\tan\alpha}$ . . . . . . 321.

$$= \frac{a-c}{\cos M}, \text{ für } \frac{2\sqrt{[F\tan\alpha]}}{a-c} = \tan M$$

$$F = \frac{b^2-(a-c)^2}{4}.\cot\alpha \quad \ldots\ 322.$$

$$\tan\alpha = \frac{b^2-(a-c)^2\ ^{*)}}{4F} \quad \ldots\ 323.$$

Setzt man $b+(a-c) = d$, so ist $a-c = d-b$, mithin aus (A)

$$4ac.\sin^2\alpha = b^2-(d-b)^2 = 2bd-d^2 \quad \ldots\ (C)$$

$$b = \tfrac{1}{2}d + \frac{ac}{\frac{1}{2}d}\sin^2\alpha \quad \ldots\ 324.$$

$$= \tfrac{1}{2}d + \frac{F\tan\alpha}{\frac{1}{2}d} \text{ (wegen B)} \quad \ldots\ 325.$$

$$= \tfrac{1}{2}d + \frac{bh.\tan\alpha}{d}$$

$$bd = \tfrac{1}{2}d^2 + bh.\tan\alpha$$

$$b = \frac{\frac{1}{2}d^2}{d-h\tan\alpha} = \frac{\frac{1}{2}d}{1-\frac{h\tan\alpha}{d}} \quad \ldots\ 326.$$

$$h = \frac{bd-\frac{1}{2}d^2}{b}.\cot\alpha \quad \ldots\ (D)$$

$$b+h = b + \frac{bd-\frac{1}{2}d^2}{b}.\cot\alpha$$

$$(b+h)b = b^2+bd.\cot\alpha-\tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha$$

also für $b+h = f$

$$b^2-(f-d\cot\alpha).b-\tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha = 0$$

---

*) $b^2-(a-c)^2 : F = 4\tan\alpha : 1$ (Eucl. Dat. 76. Zus.), vergl. Anm. zu §. 64.

$$b = \frac{f - d\cot\alpha}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(f - d\cot\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 327.$$

$$= \tfrac{1}{2}d\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}, \text{ für } \frac{d\sqrt{[2\cot\alpha]}}{f - d\cot\alpha} = \tang M$$

Aus (D) folgt ... $b - h = b - \frac{bd - \frac{1}{2}d^2}{b} \cdot \cot\alpha$

$$(b - h)b = b^2 - bd\cot\alpha + \tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha$$

also für $b - h = g$

$$b^2 - (g + d\cot\alpha) . b + \tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha = 0$$

$$b = \frac{g + d\cot\alpha}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(g + d\cot\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 328$$

Setzt man $\frac{d\sqrt{[2\cot\alpha]}}{g + d\cot\alpha} = \sin M$, so erhält man

1) $b = \frac{1}{2}d\cot\frac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}$ 2) $b = \frac{1}{2}d\tang\frac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}$

Für das Datum $h - b = g$ geht die Gleichung über in

$$b = \frac{d\cot\alpha - g}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}(d\cot\alpha - g)^2 - \tfrac{1}{2}d^2\cot\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 329.$$

$$= \tfrac{1}{2}d\tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}, \text{ für } \frac{d\sqrt{[2\cot\alpha]}}{d\cot\alpha - g} = \sin M.$$

§. 67.

Setzt man $b - (a - c) = e$, so ist $a - c = b - e$, mithin folgt aus der Gleichung (A) in §. 66

$$4ac . \sin^2\alpha = b^2 - (b - e)^2 = 2be - e^2$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (C) in §. 66, so erhellet, daß man in den Gleichungen 324 bis 329 überall e statt d setzen kann. Man findet also

$$b = \tfrac{1}{2}e + \frac{ac}{\frac{1}{2}e}\sin^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 330.$$

$$b = \tfrac{1}{2}e + \frac{F\tang\alpha}{\frac{1}{2}e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 331.$$

$$b = \frac{\frac{1}{2}e^2}{e - h\tang\alpha} = \frac{\frac{1}{2}e}{1 - \frac{h\tang\alpha}{e}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 332.$$

und für $b + h = f$, $b - h = g$

$$b = \frac{f - e\cot\alpha}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(f - e\cot\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}e^2\cot\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 333.$$

$$= \tfrac{1}{2}e\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}, \text{ für } \frac{e\sqrt{[2\cot\alpha]}}{f - e\cot\alpha} = \tang M$$

$$b = \frac{g + e\cot\alpha}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(g + e\cot\alpha)^2 - \tfrac{1}{2}e^2\cot\alpha} \;\ldots\ldots\; 334.$$

$$= \tfrac{1}{2}e\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}, \text{ für } \frac{e\sqrt{[2\cot\alpha]}}{g + e\cot\alpha} = \sin M$$

endlich für $h - b = g$

$$b = \frac{e\cot\alpha - g}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(e\cot\alpha - g)^2 - \tfrac{1}{2}e^2\cot\alpha} \;\ldots\ldots\; 335.$$

Setzt man hier $\dfrac{e\sqrt{[2\cot\alpha]}}{e\cot\alpha - g} = \sin M$, so erhält man

1) $b = \tfrac{1}{2}e\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}$ 2) $b = \tfrac{1}{2}e\tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{2\cot\alpha}$

§. 68.

Weil $4F = 2bh$, so folgt aus (323)

$$\tang\alpha = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2bh} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 336.$$

$$b = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2h}.\cot\alpha \;\ldots\ldots\ldots\; 337.$$

$$h = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2b}.\cot\alpha \;\ldots\ldots\ldots\; 338.$$

$$2bh\tang\alpha = b^2 - (a-c)^2 \;\ldots\ldots\ldots\; (A)$$

$$b = h\tang\alpha + \sqrt{h^2\tang^2\alpha + (a-c)^2} \;\ldots\ldots\; 339.$$

$$= (a-c)\cot\tfrac{1}{2}M, \text{ für } \frac{a-c}{h}\cot\alpha = \tang M$$

Aus (338) folgt ... $b + h = b + \dfrac{b^2 - (a-c)^2}{2b}.\cot\alpha$

$$2(b+h)b = 2b^2 + b^2\cot\alpha - (a-c)^2\cot\alpha$$

$$b = \frac{b+h}{2+\cot\alpha} + \sqrt{\left(\frac{b+h}{2+\cot\alpha}\right)^2 + \frac{(a-c)^2\cot\alpha}{2+\cot\alpha}} \;\ldots\; 340.$$

$$= \frac{(a-c)\cot\tfrac{1}{2}M}{\sqrt{[2\tang\alpha + 1]}}, \text{ für } \frac{(a-c)\cot\alpha}{b+h}\sqrt{2\tang\alpha + 1} = \tang M$$

Aus (338) folgt ... $b - h = b - \dfrac{b^2 - (a-c)^2}{2b}.\cot\alpha$

$$2(b-h)b = 2b^2 - b^2\cot\alpha + (a-c)^2\cot\alpha$$

$$b^2(2 - \cot\alpha) - 2(b-h)b + (a-c)^2\cot\alpha = 0 \text{ *)}$$

$$b = \frac{b-h}{2-\cot\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{b-h}{2-\cot\alpha}\right)^2 - \frac{(a-c)^2\cot\alpha}{2-\cot\alpha}} \;\ldots\; 341.$$

*) Wenn $2\alpha = 53^\circ 7' 48'', 36$ so ist $\cot\alpha = 2$, also $b = \dfrac{(a-c)^2}{b-h}$

Für $\cot\alpha > 2$ setze $\frac{(a-c)\cot\alpha}{b-h}\sqrt{1-2\tang\alpha} = \tang M$, so ist

$$b = \frac{(a-c)\tang\frac{1}{2}M}{\sqrt{[1-2\tang\alpha]}} \text{ durch die + Wurzel}$$

Für $\cot\alpha < 2$ setze $\frac{(a-c)\cot\alpha}{b-h}\sqrt{2\tang\alpha - 1} = \sin M$, so ist

$$1)\ b = \frac{(a-c)\cot\frac{1}{2}M}{\sqrt{[2\tang\alpha-1]}} \qquad 2)\ b = \frac{(a-c)\tang\frac{1}{2}M}{\sqrt{[2\tang\alpha-1]}}$$

§. 69.

Dividirt man die Gleichung (294) durch $\sin 2\alpha$, so ist

$$\cot 2\alpha = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac.\sin 2\alpha} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4F} \text{ (vergl. 282)}$$

$$\tang 2\alpha = \frac{4F}{a^2+c^2-b^2} \text{ *)} \quad \dots\dots\dots \ 342.$$

$$F = \tfrac{1}{4}(a^2+c^2-b^2)\tang 2\alpha \quad \dots\dots \ 343.$$

$$b = \sqrt{(a^2+c^2)-4F\cot 2\alpha} \quad \dots\dots \ 344.$$

Aus (342) folgt $\tang 2\alpha = \frac{2bh}{a^2+c^2-b^2}$ $\quad \dots\dots\dots\dots$ 345.

$$b = \frac{a^2+c^2-b^2}{2h}.\tang 2\alpha \quad \dots\dots \ 346.$$

$$h = \frac{a^2+c^2-b^2}{2b}.\tang 2\alpha \quad \dots\dots \ 347.$$

$$2bh\cot 2\alpha = a^2+c^2-b^2$$

$$b = -h\cot 2\alpha + \sqrt{h^2\cot^2 2\alpha + (a^2+c^2)} \quad \dots\dots\dots \ 348.$$

$$= \tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{a^2+c^2}, \text{ für } \frac{\tang 2\alpha\sqrt{[a^2+c^2]}}{h} = \tang M$$

Aus (347) folgt $b+h = b + \frac{a^2+c^2-b^2}{2b}.\tang 2\alpha$

$$2(b+h)b = 2b^2 + (a^2+c^2)\tang 2\alpha - b^2\tang 2\alpha$$

$$b^2(2-\tang 2\alpha) - 2(b+h).b + (a^2+c^2)\tang 2\alpha = 0 \text{ **)}$$

$$b = \frac{b+h}{2-\tang 2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{b+h}{2-\tang 2\alpha}\right)^2 - \frac{(a^2+c^2)\tang 2\alpha}{2-\tang 2\alpha}} \quad 349.$$

Für $2\alpha > 63^\circ\ 26'\ 5'',81$ setze

$$\frac{\tang 2\alpha\sqrt{[(a^2+c^2)(1-2\cot 2\alpha)]}}{b+h} = \tang M, \text{ so ist}$$

$$b = \tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{a^2+c^2}{1-2\cot 2\alpha}} \text{ durch die + Wurzel}$$

*) Eucl. Dat. 75. 74, vergl. Anm. zu §. 64.

**) Für $2\alpha = 63^\circ\ 26'\ 5'',81$ ist $\tang 2\alpha = 2$, also $b = \frac{a^2+c^2}{b+h}$

Für $2\alpha < 63^\circ\ 26'\ 5'', 81$ setze

$$\frac{\tang 2\alpha \sqrt{[(a^2+c^2)(2\cot 2\alpha - 1)]}}{b+h} = \sin M, \text{ so findet man}$$

$$1)\ b = \cot\tfrac{1}{2}M \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2\cot 2\alpha - 1}} \qquad 2)\ b = \tang\tfrac{1}{2}M \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2\cot 2\alpha - 1}}$$

Aus (347) folgt $b - h = b - \frac{a^2+c^2-b^2}{2b} . \tang 2\alpha$

$$2(b-h)b = 2b^2 - (a^2+c^2)\tang 2\alpha + b^2 \tang 2\alpha$$

$$b^2(2+\tang 2\alpha) - 2(b-h).b - (a^2+c^2)\tang 2\alpha = 0 \ ^{*)}$$

$$b = \frac{b-h}{2+\tang 2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{b-h}{2+\tang 2\alpha}\right)^2 + \frac{(a^2+c^2)\tang 2\alpha}{2+\tang 2\alpha}} \qquad 350.$$

§. 70.

Aus (342) folgt . . . $4F\cot 2\alpha = a^2 + c^2 - b^2$

$$2b^2 + 4F\cot 2\alpha = a^2 + c^2 + b^2$$

Man setze $a^2 + c^2 + b^2 = P$, so ist

$$b^2 + 2F\cot 2\alpha = \tfrac{1}{2}P \ \ldots\ldots\ldots \ (A)$$

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{2}P - 2F\cot 2\alpha} \ \ldots\ldots\ldots \ 351.$$

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{2}P - ac.\cos 2\alpha} \text{ (vergl. 282.) } \ldots \ 352.$$

Aus (A) folgt . . $b^2 + bh\cot 2\alpha - \tfrac{1}{2}P = 0 \ \ldots\ldots\ldots \ (B)$

$$b = -\tfrac{1}{2}h\cot 2\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2\cot^2 2\alpha + \tfrac{1}{2}P} \ \ldots\ldots \ 353.$$

$$= \tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{\tfrac{1}{2}P}, \text{ für } \frac{\tang 2\alpha\sqrt{2P}}{h} = \tang M$$

Aus (B) folgt . . . $h = \frac{\frac{1}{2}P - b^2}{b}\tang 2\alpha \ \ldots\ldots\ldots \ (C)$

$$b + h = b + \frac{\frac{1}{2}P - b^2}{b} . \tang 2\alpha$$

$$(b+h)b = b^2 + \tfrac{1}{2}P\tang 2\alpha - b^2\tang 2\alpha$$

$$b^2(1-\tang 2\alpha) - (b+h).b + \tfrac{1}{2}P\tang 2\alpha = 0 \ ^{**)}$$

$$b = \frac{b+h}{2-2\tang 2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{b+h}{2-2\tang 2\alpha}\right)^2 - \frac{P\tang 2\alpha}{2-2\tang 2\alpha}} \qquad 354.$$

Für $2\alpha > 45$ setze man $\tang M =$

$$\frac{\tang 2\alpha\sqrt{[2P(1-\cot 2\alpha)]}}{b+h} = \frac{\sqrt{[2P\sin 2\alpha \sin(2\alpha - 45).\sqrt{2}]}}{(b+h)\cos 2\alpha}$$

so findet man durch die + Wurzel

$$b = \tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\frac{1}{2}P}{1-\cot 2\alpha}} = \tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{P\sin 2\alpha}{2\sin(2\alpha-45).\sqrt{2}}}$$

*) Für $2\alpha = 116^\circ 33' 54'', 19$ ist $\tang 2\alpha = -2$, also $b = \frac{a^2+c^2}{b-h}$

**) Für $2\alpha = 45$ ist $\tang 2\alpha = 1$, also $b = \frac{\frac{1}{2}P}{b+h}$

Für $2\alpha < 45$ setze man $\sin M = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha \sqrt{[2P(\cot 2\alpha - 1)]}}{b+h} = \frac{\sqrt{[2P \sin 2\alpha \sin(45 - 2\alpha) . \sqrt{2}]}}{(b+h)\cos 2\alpha}$

so erhält man

$$1)\ b = \cot \tfrac{1}{2}M \sqrt{\frac{\frac{1}{2}P}{\cot 2\alpha - 1}} \qquad 2)\ b = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}M \sqrt{\frac{\frac{1}{2}P}{\cot 2\alpha - 1}}$$

Aus (C) folgt $b - h = b - \frac{\frac{1}{2}P - b^2}{b} . \operatorname{tang} 2\alpha$

$$(b-h)b = b^2 - \tfrac{1}{2}P \operatorname{tang} 2\alpha + b^2 \operatorname{tang} 2\alpha$$

$$b^2(1 + \operatorname{tang} 2\alpha) - (b-h) . b - \tfrac{1}{2}P \operatorname{tang} 2\alpha = 0 \ ^{*)}$$

$$b = \frac{b-h}{2 + 2\operatorname{tang} 2\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{b-h}{2 + 2\operatorname{tang} 2\alpha}\right)^2 + \frac{P \operatorname{tang} 2\alpha}{2 + 2\operatorname{tang} 2\alpha}} \quad 355.$$

§. 71.

Es ist . . . . . $h = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2b} \operatorname{tang} 2\alpha$ (Gleichung 347)

das ist, wenn $a^2 + c^2 - b^2 = Q$ gesetzt wird,

$$h = \frac{Q}{2b} \operatorname{tang} 2\alpha \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (A)$$

$$b + h = b + \frac{Q}{2b} \operatorname{tang} 2\alpha$$

$$(b+h)b = b^2 + \tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha$$

$$b = \frac{b+h}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b+h)^2 - \tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 356.$$

Setzt man $\frac{\sqrt{[2Q \operatorname{tang} 2\alpha]}}{b+h} = \sin M$, so findet man

$$1)\ b = \cot \tfrac{1}{2}M \sqrt{\tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha} \qquad 2)\ b = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}M \sqrt{\tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha}$$

Aus (A) folgt $b - h = b - \frac{Q}{2b} \operatorname{tang} 2\alpha$

$$(b-h)b = b^2 - \tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha$$

$$b = \frac{b-h}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(b-h)^2 + \tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 357.$$

$= \cot \tfrac{1}{2}M \sqrt{\tfrac{1}{2}Q \operatorname{tang} 2\alpha}$, für $\frac{\sqrt{[2Q \operatorname{tang} 2\alpha]}}{b-h} = \operatorname{tang} M$

§. 72.

Es ist . . . $2bh \cot \alpha = (a+c)^2 - b^2$ (§. 65. B)

$$2b^2 + 2bh \cot \alpha = (a+c)^2 + b^2$$

---

*) Für $2\alpha = 135$ ist $\operatorname{tang} 2\alpha = -1$, also $b = \frac{\frac{1}{2}P}{b-h}$

Man setze $(a+c)^2+b^2=H$, so ist

$$b^2+bh\cot\alpha=\tfrac{1}{2}H \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (A)$$

$$b=-\tfrac{1}{2}h\cot\alpha+\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2\cot^2\alpha+\tfrac{1}{2}H} \;\ldots\ldots\; 358.$$

$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\sqrt{2H},\text{ für }\frac{\operatorname{tang}\alpha\sqrt{2H}}{h}=\operatorname{tang}M$$

Weil $bh=2F$, so folgt aus (A)

$$b^2+2F\cot\alpha=\tfrac{1}{2}H$$

$$b=\sqrt{\tfrac{1}{2}H-2F\cot\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 359.$$

$$=\sin M\sqrt{\tfrac{1}{2}H},\text{ für }2\sqrt{\frac{F\cot\alpha}{H}}=\cos M$$

Ferner ist $F=ac.\sin\alpha\cos\alpha$, also $2F\cot\alpha=2ac.\cos^2\alpha$; folglich

$$b=\sqrt{\tfrac{1}{2}H-2ac.\cos^2\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 360.$$

$$=\sin M\sqrt{\tfrac{1}{2}H},\text{ für }2\cos\alpha\sqrt{\frac{ac}{H}}=\cos M$$

Aus (A) folgt .... $h=\dfrac{H-2b^2}{2b}.\operatorname{tang}\alpha$ .... (B)

$$b+h=b+\frac{H-2b^2}{2b}.\operatorname{tang}\alpha$$

$$(b+h)b=b^2+\tfrac{1}{2}H\operatorname{tang}\alpha-b^2\operatorname{tang}\alpha$$

$$b^2(1-\operatorname{tang}\alpha)-(b+h).b+\tfrac{1}{2}H\operatorname{tang}\alpha=0 \;{}^{*)}$$

$$b=\frac{b+h}{2-2\operatorname{tang}\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{b+h}{2-2\operatorname{tang}\alpha}\right)^2-\frac{H\operatorname{tang}\alpha}{2-2\operatorname{tang}\alpha}} \;\ldots\; 361.$$

Für $2\alpha>90$ setze man $\operatorname{tang}M=$

$$\frac{\sqrt{[2H(1-\cot\alpha)]}}{(b+h)\cot\alpha}=\frac{\sqrt{[2H\sin\alpha\sin(\alpha-45).\sqrt{2}]}}{(b+h)\cos\alpha}$$

so erhält man durch die + Wurzel

$$b=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}H}{1-\cot\alpha}}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}H\sin\alpha}{\sin(\alpha-45).\sqrt{2}}}$$

Für $2\alpha<90$ setze $\sin M=\dfrac{\sqrt{[2H(\cot\alpha-1)]}}{(b+h)\cot\alpha}$, so ist

$$1)\; b=\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}H}{\cot\alpha-1}} \qquad 2)\; b=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}H}{\cot\alpha-1}}$$

Aus (B) folgt ... $b-h=b-\dfrac{H-2b^2}{2b}.\operatorname{tang}\alpha$

$$(b-h)b=b^2-\tfrac{1}{2}H\operatorname{tang}\alpha+b^2\operatorname{tang}\alpha$$

$$b=\frac{b-h}{2+2\operatorname{tang}\alpha}+\sqrt{\left(\frac{b-h}{2+2\operatorname{tang}\alpha}\right)^2+\frac{H\operatorname{tang}\alpha}{2+2\operatorname{tang}\alpha}} \;\ldots\; 362.$$

---

*) Für $2\alpha=90$ ist $\operatorname{tang}\alpha=1$, also $b=\dfrac{\tfrac{1}{2}H}{b+h}$

§. 73.

Es ist (§. 65. A) . . . $h = \frac{(a+c)^2 - b^2}{2b} \cdot \operatorname{tang}\alpha$

das ist, wenn $(a+c)^2 - b^2 = K$ gesetzt wird,

$$h = \frac{K}{2b} \cdot \operatorname{tang}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$b + h = b + \frac{K}{2b} \cdot \operatorname{tang}\alpha$$

$$(b+h)b = b^2 + \tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha$$

$$b = \frac{b+h}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b+h)^2 - \tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 363.$$

Setzt man hier $\frac{\sqrt{[2K \operatorname{tang}\alpha]}}{b+h} = \sin M$, so findet man

$$1)\ b = \cot\tfrac{1}{2}M \sqrt{\tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha} \qquad 2)\ b = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}M \sqrt{\tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha}$$

Aus (A) folgt . . . $b - h = b - \frac{K}{2b} \cdot \operatorname{tang}\alpha$

$$(b-h)b = b^2 - \tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha$$

$$b = \frac{b-h}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}(b-h)^2 + \tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 364.$$

$$= \cot\tfrac{1}{2}M \sqrt{\tfrac{1}{2}K \operatorname{tang}\alpha}, \text{ für } \frac{\sqrt{[2K \operatorname{tang}\alpha]}}{b-h} = \operatorname{tang} M$$

§. 74.

Es ist (§. 68. A) . . . $2bh \operatorname{tang}\alpha = b^2 - (a-c)^2$

$$2b^2 - 2bh \operatorname{tang}\alpha = b^2 + (a-c)^2$$

Man setze $b^2 + (a-c)^2 = D$, so ist

$$b^2 - bh \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{1}{2}D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

$$b = \tfrac{1}{2}h \operatorname{tang}\alpha + \sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 \operatorname{tang}^2\alpha + \tfrac{1}{2}D} \quad \ldots\ldots \quad 365.$$

$$= \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}M \sqrt{2D}, \text{ für } \frac{\sqrt{2D}}{h \operatorname{tang}\alpha} = \operatorname{tang} M$$

Aus (A) folgt . . . $b^2 - 2F \operatorname{tang}\alpha = \tfrac{1}{2}D$

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{2}D + 2F \operatorname{tang}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 366.$$

$$= \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}D}}{\cos M}, \text{ für } 2\sqrt{\frac{F \operatorname{tang}\alpha}{D}} = \operatorname{tang} M$$

Ferner ist $F = ac \cdot \sin\alpha \cos\alpha$, also $2F \operatorname{tang}\alpha = 2ac \cdot \sin^2\alpha$; folglich

$$b = \sqrt{\tfrac{1}{2}D + 2ac \cdot \sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 367.$$

$$= \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}D}}{\cos M}, \text{ für } 2\sin\alpha \sqrt{\frac{ac}{D}} = \operatorname{tang} M$$

Aus (A) folgt . . . . $h = \left(b - \frac{D}{2b}\right) \cot\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$

$$b+h=b+\left(b-\frac{D}{2b}\right)\cot\alpha$$

$$(b+h)b=b^2+b^2\cot\alpha-\tfrac{1}{2}D\cot\alpha$$

$$b=\frac{b+h}{2+2\cot\alpha}+\sqrt{\left(\frac{b+h}{2+2\cot\alpha}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}D\cot\alpha}{1+\cot\alpha}} \quad \ldots\ldots 368.$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\frac{1}{2}D\cot\alpha}{1+\cot\alpha}}=\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{\frac{\frac{1}{2}D\cos\alpha}{\cos(45-\alpha)\,.\sqrt{2}}}$$

wenn man setzt $\tang M=$

$$\frac{\sqrt{[2D\cot\alpha(1+\cot\alpha)]}}{b+h}=\frac{\sqrt{[2D\cos\alpha\cos(45-\alpha)\,.\sqrt{2}]}}{(b+h)\sin\alpha}$$

Aus (B) folgt . . . $b-h=b-\left(b-\frac{D}{2b}\right)\cot\alpha$

$$(b-h)b=b^2-b^2\cot\alpha+\tfrac{1}{2}D\cot\alpha$$

$$b^2(1-\cot\alpha)-(b-h)\,.\,b+\tfrac{1}{2}D\cot\alpha=0 \text{ *)}$$

$$b=\frac{b-h}{2-2\cot\alpha}\pm\sqrt{\left(\frac{b-h}{2-2\cot\alpha}\right)^2-\frac{D\cot\alpha}{2-2\cot\alpha}} \quad \ldots\ldots 369.$$

§. 75.

Es ist (Gleichung 338) . . . . $h=\frac{b^2-(a-c)^2}{2b}\,.\cot\alpha$ das ist

für $b^2-(a-c)^2=E$ . . . . $h=\frac{E}{2b}\cot\alpha$ . . . . (A)

$$b+h=b+\frac{E}{2b}\cot\alpha$$

$$(b+h)b=b^2+\tfrac{1}{2}E\cot\alpha$$

$$b=\frac{b+h}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}(b+h)^2-\tfrac{1}{2}E\cot\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots 370.$$

Setzt man $\frac{\sqrt{[2E\cot\alpha]}}{b+h}=\sin M$, so findet man

1) $b=\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{\tfrac{1}{2}E\cot\alpha}$ 2) $b=\tang\tfrac{1}{2}M\sqrt{\tfrac{1}{2}E\cot\alpha}$

Aus (A) folgt . . . $b-h=b-\frac{E}{2b}\cot\alpha$

$$(b-h)b=b^2-\tfrac{1}{2}E\cot\alpha$$

$$b=\frac{b-h}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}(b-h)^2+\tfrac{1}{2}E\cot\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots 371.$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}M\sqrt{\tfrac{1}{2}E\cot\alpha}, \text{ für } \frac{\sqrt{[2E\cot\alpha]}}{b-h}=\tang M$$

*) Wenn $2\alpha=90$, so ist $\cot\alpha=1$, also $b=\frac{\frac{1}{2}D}{b-h}$

Vierte Abtheilung.

Aufgaben über den ein- und umgeschriebenen Kreis und über die Schwerlinie.

§. 76.

Es sey (Fig. 5.) $OG = OK = OH = \varrho =$ Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist $\angle\, OAG = \frac{1}{2}A$, $\angle\, OCG = \frac{1}{2}C$, $\angle\, OBK = \frac{1}{2}B$. Ferner ist $AG = AK$, $CG = CH$, $BK = BH$, also $CG - AG = a - c$.

Es ist also

$$\frac{CG}{\varrho} = \cot\tfrac{1}{2}C \;\ldots\; (A), \qquad \frac{AG}{\varrho} = \cot\tfrac{1}{2}A \;\ldots\ldots\ldots\; (B)$$

$$\frac{CG - AG}{\varrho} = \frac{a - c}{\varrho} = \cot\tfrac{1}{2}C - \cot\tfrac{1}{2}A \;\ldots\ldots\; (C)$$

$$\frac{CG + AG}{\varrho} = \frac{b}{\varrho} = \cot\tfrac{1}{2}C + \cot\tfrac{1}{2}A \;\ldots\ldots\; (D)$$

Eben so ...

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\varrho} &= \cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}C \\ \frac{c}{\varrho} &= \cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}A \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (E)$$

Die Gleichungen (D) und (E) sind einerlei mit folgenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{\varrho} &= \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}C} \\ &= \frac{\sin B}{2\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C} \\ \frac{a}{\varrho} &= \frac{\sin A}{2\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C} \\ \frac{c}{\varrho} &= \frac{\sin C}{2\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (F)$$

und auch einerlei mit folgenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{\varrho} &= \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha(\cos\varphi - \sin\alpha)} \\ \frac{a}{\varrho} &= \frac{\cos(a - \varphi)}{\sin\alpha(\cos\varphi - \sin\alpha)} \\ \frac{c}{\varrho} &= \frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha(\cos\varphi - \sin\alpha)} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (G)$$

Aus (C) folgt

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \cot\tfrac{1}{2}A + \frac{a - c}{\varrho} \;\ldots\ldots\ldots\; 372.$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \cot\tfrac{1}{2}C - \frac{a - c}{\varrho} \;\ldots\ldots\ldots\; 373.$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho &= \frac{a-c}{\cot\frac{1}{2}C - \cot\frac{1}{2}A}\\ &= \frac{(a-c)\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-C)}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 374.$$

Aus (D) folgt

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \frac{b}{\varrho} - \cot\tfrac{1}{2}A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 375.$$

$$\left.\begin{aligned}b &= \varrho(\cot\tfrac{1}{2}A + \cot\tfrac{1}{2}C)\\ &= \frac{\varrho\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 376.$$

$$\varrho = \frac{b\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 377.$$

Durch Addition und Subtraction folgt aus (C) und (D)

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \frac{b+(a-c)}{2\varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 378.$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \frac{b-(a-c)}{2\varrho} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 379.$$

also, wenn man (378) mit (379) multiplicirt,

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \frac{b^2-(a-c)^2}{4\varrho^2}.\tang\tfrac{1}{2}A \ldots\ldots\ldots 380.$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \frac{b^2-(a-c)^2}{4\varrho^2}.\tang\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots\ldots 381.$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{[b^2-(a-c)^2]\tang\tfrac{1}{2}A\tang\tfrac{1}{2}C} \;.\; 382.$$

Ferner folgt aus (C) und (D) durch Multiplication

$$\frac{b(a-c)}{\varrho^2} = \cot^2\tfrac{1}{2}C - \cot^2\tfrac{1}{2}A$$

$$\cot\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\cot^2\tfrac{1}{2}A + \frac{b(a-c)}{\varrho^2}} \ldots\ldots\ldots 383.$$

$$\cot\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\cot^2\tfrac{1}{2}C - \frac{b(a-c)}{\varrho^2}} \ldots\ldots\ldots 384.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (F) folgt

$$\frac{a+c}{\varrho} = \frac{\sin A + \sin C}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cot\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}(A-C)}{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}$$

$$\varrho = \frac{(a+c).\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C\tang\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}(A-C)} \ldots\ldots\ldots 385.$$

Addirt man die Gleichungen (F), so ist

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

Es ist aber ... $\sin A + \sin B + \sin C$

$$= \sin A + \sin C + \sin(A+C)$$

$$= 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} + 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}B.\left(\cos\frac{A-C}{2} + \cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}B.2\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C$$

folglich $\frac{p}{\varrho} = 2\cot\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}B\cot\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(H)}$

$$= \frac{2\tan\tfrac{1}{2}(A+B)}{\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B}$$

$$\frac{p}{\varrho}\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B = \frac{2\tan\tfrac{1}{2}A + 2\tan\tfrac{1}{2}B}{1-\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B}$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}A - \frac{p-2\varrho\cot\tfrac{1}{2}B}{p\tan\tfrac{1}{2}B}.\tan\tfrac{1}{2}A + \frac{2\varrho\cot\tfrac{1}{2}B}{p} = 0 \ldots . \quad 386.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (F) folgt durch Multiplication

$$\frac{ac}{\varrho^2} = \frac{\sin A\sin C}{(2\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C)^2} = \frac{\cot\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}C}{\sin^2\tfrac{1}{2}B}$$

$$\frac{ac.\sin^2\tfrac{1}{2}B}{\varrho^2}\tan\tfrac{1}{2}A = \cot\tfrac{1}{2}C = \tan\tfrac{1}{2}(A+B)$$

$$= \frac{\tan\tfrac{1}{2}A + \tan\tfrac{1}{2}B}{1-\tan\tfrac{1}{2}A\tan\tfrac{1}{2}B}$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}A + \left(\frac{\varrho^2\cot\tfrac{1}{2}B}{ac.\sin^2\tfrac{1}{2}B} - \cot\tfrac{1}{2}B\right).\tan\tfrac{1}{2}A + \frac{\varrho^2}{ac.\sin^2\tfrac{1}{2}B} = 0 \quad . \quad 387.$$

Aus (G) erhält man ... $\frac{b}{\varrho} = \frac{2\cos\alpha}{\cos\varphi - \sin\alpha} \ldots\ldots . \text{(K)}$

$$\cos\varphi = \frac{2\varrho\cos\alpha}{b} + \sin\alpha \ldots\ldots \quad 388.$$

$$= \frac{\sin(M+\alpha)}{\cos M}, \text{ für } \frac{2\varrho}{b} = \tan M.$$

$$\sin(M+\alpha) = \cos\varphi\cos M, \text{ für } \frac{2\varrho}{b} = \tan M \ldots\ldots \quad 389.$$

Aus (388) folgt ... $2\varrho\cos\alpha = b\cos\varphi - b\sin\alpha$

Erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat und setzt $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$, so findet man

$$\sin^2\alpha - \frac{2b^2\cos\varphi}{b^2+4\varrho^2}.\sin\alpha - \frac{4\varrho^2 - b^2\cos^2\varphi}{b^2+4\varrho^2} = 0 \ldots \quad 390.$$

Aus (G) folgt ferner ... $\frac{a+c}{\varrho} = \frac{2\cot\alpha\cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\alpha} \ldots\ldots \text{(L)}$

$$\cos\varphi = \frac{(a+c)\sin\alpha}{(a+c)-2\varrho\cot\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\frac{2\varrho}{a+c}\cot\alpha} \ldots\ldots \quad 391.$$

Eben so . . . . . . $\frac{a-c}{\varrho} = \frac{2\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\alpha}$

$$\sin\alpha = \cos\varphi - \frac{2\varrho}{a-c}\sin\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 392.$$

$$= \cos\varphi\left(1 - \frac{2\varrho}{a-c}\tang\varphi\right)$$

$$= \frac{\sin(M-\varphi)}{\sin M}, \text{ für } \frac{2\varrho}{a-c} = \cot M$$

$$\sin(M-\varphi) = \sin M \sin\alpha, \text{ für } \frac{2\varrho}{a-c} = \cot M \;\ldots\; 393.$$

Aus (392) folgt . . . $\cos\varphi = \sin\alpha + \frac{2\varrho}{a-c}\sin\varphi$

Erhebt man diese Gleichung aufs Quadrat und setzt $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$, so ist

$$\sin^2\varphi + \frac{4\varrho(a-c)\sin\alpha}{(a-c)^2 + 4\varrho^2}\,.\,\sin\varphi - \frac{(a-c)^2\cos^2\alpha}{(a-c)^2 + 4\varrho^2} = 0 \quad 394.$$

Erhebt man (L) aufs Quadrat, so ist

$$\frac{(a+c)^2}{\varrho^2} = \frac{4\cos^2\varphi\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\,(\cos\varphi - \sin\alpha)^2}$$

$$= \frac{4\cos^2\varphi - 4\cos^2\varphi\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi\sin^2\alpha + \sin^4\alpha - 2\cos\varphi\sin^3\alpha}$$

also, wenn $\sin\alpha = x$ gesetzt wird,

$$x^4 - 2\cos\varphi\,.\,x^3 + \cos^2\varphi\left(1 + \frac{4\varrho^2}{(a+c)^2}\right).\,x^2 - \left(\frac{2\varrho\cos\varphi}{a+c}\right)^2 = 0 \quad 395.$$

Durch Addition erhält man aus den Gleichungen (G)

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{2\cos\alpha + 2\cot\alpha\cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\alpha}$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha\,.\,\frac{p + 2\varrho\cot\alpha}{p - 2\varrho\cot\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 396.$$

$$= \sin\alpha\tang(45 + M)$$

$$\text{für } \frac{2\varrho\cot\alpha}{p} = \tang M$$

Aus (396) erhält man

$$p\sin\alpha(\cos\varphi - \sin\alpha) = 2\varrho(\sin\alpha + \cos\varphi)\cos\alpha$$

Quadrirt man die Gleichung und setzt $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, so ist

$$\sin^4\alpha - \frac{2(p^2 - 4\varrho^2)\cos\varphi}{p^2 + 4\varrho^2}\,.\sin^3\alpha + \frac{p^2\cos^2\varphi - 4\varrho^2\sin^2\varphi}{p^2 + 4\varrho^2}\,.\sin^2\alpha$$

$$- \frac{8\varrho^2\cos\varphi}{p^2 + 4\varrho^2}\,.\sin\alpha - \frac{4\varrho^2\cos^2\varphi}{p^2 + 4\varrho^2} = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 397.$$

Setzt man aber in (396) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{[1 + \cot^2\alpha]}}$, so findet man

$$\cot^4\alpha - \frac{p}{\rho}.\cot^3\alpha + \left(\frac{p^2}{4\rho^2} - \mathrm{tang}^2\varphi\right).\cot^2\alpha$$
$$-\frac{p}{\rho}(2+\mathrm{tang}^2\varphi).\cot\alpha - \left(\frac{p}{2\varrho}\mathrm{tang}\,\varphi\right)^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 398.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (K) und (L) und setzt $(a+c)b = d$, so ist
$$\frac{d}{\rho^2} = \frac{4\cos\alpha\cot\alpha\cos\varphi}{(\cos\varphi - \sin\alpha)^2}, \text{ also}$$
$$\cos^2\varphi - \left(2\sin\alpha + \frac{4\rho^2}{d}\cos\alpha\cot\alpha\right).\cos\varphi + \sin^2\alpha = 0 \;.\;.\;.\; 399.$$
hieraus aber folgt, wenn man mit $\sin\alpha$ multiplicirt und $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ setzt,
$$\sin^3\alpha - \frac{2d - 4\rho^2}{d}\cos\varphi.\sin^2\alpha + \cos^2\varphi.\sin\alpha - \frac{4\rho^2\cos\varphi}{d} = 0 \;.\; 400.$$
Multiplicirt man die Gleichung (F)
$$\frac{a}{\rho} = \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} \text{ mit } \frac{h}{a} = \sin C, \text{ so ist}$$
$$\frac{h}{\rho} = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (M)$$
$$= \frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (N)$$
$$\cos\varphi = \left(\frac{h}{\rho} - 1\right)\sin\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 401.$$
$$\sin\alpha = \frac{\varrho\cos\varphi}{h-\rho} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 402.$$
Ferner multiplicire die Gleichung (M) mit der Gleichung (F) für $\frac{b}{\rho}$, so ist $\quad \frac{bh}{\rho^2} = \frac{2F}{\rho^2} = 2\cot\frac{1}{2}A\cot\frac{1}{2}B\cot\frac{1}{2}C$
$$= \frac{p}{\rho} \text{ (siehe Gleichung II)}$$
$$\rho = \sqrt{F\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}A\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}C} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 403.$$
$$F = \tfrac{1}{2}p\varrho \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 404.$$
und wenn man für F den Werth aus (299) setzt
$$\rho = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}p - a)(\frac{1}{2}p - b)(\frac{1}{2}p - c)}{\frac{1}{2}p}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 405.$$
Dividirt man nun (404) durch $\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p - b)$, so erhält man
$$\frac{F}{\frac{1}{2}p(\frac{1}{2}p - b)} = \frac{\rho}{\frac{1}{2}p - b}, \text{ das ist (Gleichung 300)}$$
$$\mathrm{tang}\,\alpha = \frac{\rho}{\frac{1}{2}p - b} = \frac{2\rho}{a+c-b} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 406.$$

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(a+c-b)\tan\!g\,\alpha \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 407.$$

$$b = (a+c) - 2\varrho\cot\alpha \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 408.$$

Setzt man aber in (404) $F = \frac{1}{2}ac.\sin 2\alpha$, so ist

$$\sin 2\alpha = \frac{p\varrho}{ac} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 409.$$

Die Gleichung (N) mit der Gleichung (F) für $\frac{b}{\varrho}$ multiplicirt giebt

$$\frac{bh}{\varrho^2} = \frac{2F}{\varrho^2} = \frac{2\cot\alpha(\cos\varphi + \sin\alpha)}{\cos\varphi - \sin\alpha}$$

$$\cos\varphi = \sin\alpha . \frac{F + \varrho^2\cot\alpha}{F - \varrho^2\cot\alpha} \text{ (vergl. 396) } 410.$$

Aus Gleichung (153) folgt $\sin^2\alpha = 1 - \frac{b^2\sin^2\varphi}{(a-c)^2}$. Setzt man hier für $\sin\alpha$ den Werth aus (392), so ergiebt sich nach den nöthigen Reductionen

$$\cot\varphi = \frac{b^2 - (a-c)^2 + 4\varrho^2}{4\varrho(a-c)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 411.$$

Entwickelt man aus (394) den Werth für $\sin\varphi$ und setzt ihn $= \frac{a-c}{b}\cos\alpha$ (Gleichung 152), so folgt

$$\tan\!g\,\alpha = \frac{b^2 - (a-c)^2 - 4\varrho^2}{4b\varrho} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 412.$$

und wenn man hiermit (406) combinirt

$$b^3 - (a+c).b^2 + [4\varrho^2 - (a-c)^2].b + (a+c)[(a-c)^2 + 4\varrho^2] = 0 \quad 413.$$

§. 77.

Es sey (Fig. 5) O der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises, OG senkrecht auf AC, und AO $= r$, so ist AG $= \frac{1}{2}$AC $= \frac{1}{2}b$ und $\angle$ AOG $=$ ABC $= 2\alpha$, also $\frac{2\,AG}{2\,AO} = \sin AOG$, das ist

$$\frac{b}{2r} = \sin B = \sin 2\alpha \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Eben so ......
$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{2r} &= \sin A = \cos(\alpha - \varphi) \\ \frac{c}{2r} &= \sin C = \cos(\alpha + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

folglich ...
$$\frac{a+c}{2r} = \sin A + \sin C = 2\cos\alpha\cos\varphi \quad\ldots\ldots \quad (C)$$

$$\frac{a-c}{2r} = \sin A - \sin C = 2\sin\alpha\sin\varphi \quad\ldots\ldots \quad (D)$$

$$\frac{a^2+c^2}{4r^2} = \sin^2 A + \sin^2 C = 1 + \cos 2\alpha\cos 2\varphi \quad\ldots \quad (E)$$

$$\frac{a^2-c^2}{4r^2} = \sin^2 A - \sin^2 C = \sin 2\alpha\sin 2\varphi \quad\ldots \quad (F)$$

Daher ist aus (C)

$$\sin C = \frac{a+c}{2r} - \sin A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 414.$$

$$\cos\varphi = \frac{a+c}{4r\cos\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 415.$$

$$\cos\alpha = \frac{a+c}{4r\cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 416.$$

aus (D) . . . . . $\sin C = \sin A - \frac{a-c}{2r}$ . . . . 417.

$$\sin A = \sin C + \frac{a-c}{2r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 418.$$

$$\sin\varphi = \frac{a-c}{4r\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 419.$$

$$\sin\alpha = \frac{a-c}{4r\sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 420.$$

aus (E) . . . . . $\sin C = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{4r^2} - \sin^2 A}$ . . . . 421.

$$\cos 2\varphi = \frac{a^2+c^2-4r^2}{4r^2\cos 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 422.$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2+c^2-4r^2}{4r^2\cos 2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 423.$$

aus (F) . . . . . $\sin C = \sqrt{\sin^2 A - \frac{a^2-c^2}{4r^2}}$ . . . . 424.

$$\sin A = \sqrt{\sin^2 C + \frac{a^2-c^2}{4r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 425.$$

$$\sin 2\varphi = \frac{a^2-c^2}{4r^2\sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 426.$$

$$\sin 2\alpha = \frac{a^2-c^2}{4r^2\sin 2\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 427.$$

Aus (A) und (C) folgt, wenn man $a+c+b=p$ und $a+c-b=q$ setzt

$$\frac{p}{2r} = 2\cos\alpha\cos\varphi + \sin 2\alpha, \qquad \frac{q}{2r} = 2\cos\alpha\cos\varphi - \sin 2\alpha$$

$$\cos\varphi = \frac{p}{4r\cos\alpha} - \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 428.$$

$$\cos\varphi = \frac{q}{4r\cos\alpha} + \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 429.$$

Aus (428) folgt $\left(\frac{p}{4r\cos\alpha} - \cos\varphi\right)^2 = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, und

$$\cos^4\alpha - \sin^2\varphi \,.\, \cos^2\alpha - \frac{p\cos\varphi}{2r} \,.\, \cos\alpha + \frac{p^2}{16r^2} = 0 \quad . \quad 430.$$

Aus (A) und (D) folgt, wenn man $b+(a-c)=f$ und $b-(a-c)=g$ setzt,

$$\frac{f}{2r}=\sin 2\alpha+2\sin\alpha\sin\varphi,\qquad \frac{g}{2r}=\sin 2\alpha-2\sin\alpha\sin\varphi$$

$$\sin\varphi=\frac{f}{4r\sin\alpha}-\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 431.$$

$$\sin\varphi=\cos\alpha-\frac{g}{4r\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 432.$$

Aus (A) und (E) folgt, wenn man $a^2+c^2+b^2=P$ und $a^2+c^2-b^2=Q$ setzt,

$$\frac{P}{4r^2}=1+\cos 2\alpha\cos 2\varphi+\sin^2 2\alpha$$

$$=2+\cos 2\alpha\cos 2\varphi-\cos^2 2\alpha$$

$$\cos 2\varphi=\frac{P-4r^2(1+\sin^2 2\alpha)}{4r^2\cos 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 433.$$

$$\cos^2 2\alpha-\cos 2\varphi\,.\cos 2\alpha+\frac{P-8r^2}{4r^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 434.$$

$$\frac{Q}{4r^2}=1+\cos 2\alpha\cos 2\varphi-\sin^2 2\alpha$$

$$=\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha\cos 2\varphi$$

$$\cos 2\varphi=\frac{Q}{4r^2\cos 2\alpha}-\cos 2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 435.$$

$$\cos^2 2\alpha+\cos 2\varphi\,.\cos 2\alpha-\frac{Q}{4r^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 436.$$

Aus (A) und (C) folgt, wenn $(a+c)^2+b^2=H$ und $(a+c)^2-b^2=K$ gesetzt wird,

$$\frac{H}{4r^2}=4\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\sin^2 2\alpha$$

$$=4\cos^2\alpha(1+\cos^2\varphi)-4\cos^4\alpha$$

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{H}{16r^2\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 437.$$

$$\cos^4\alpha-(1+\cos^2\varphi)\,.\cos^2\alpha+\frac{H}{16r^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 438.$$

$$\frac{K}{4r^2}=4\cos^2\alpha\cos^2\varphi-\sin^2 2\alpha$$

$$=4\cos^4\alpha-4\sin^2\varphi\cos^2\alpha$$

$$\cos\varphi=\sqrt{\frac{K}{16r^2\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 439.$$

$$\cos^4\alpha-\sin^2\varphi\,.\cos^2\alpha-\frac{K}{16r^2}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 440.$$

Aus (A) und (D) folgt, wenn man $b^2 + (a-c)^2 = D$ und $b^2 - (a-c)^2 = E$ setzt,

$$\frac{D}{4r^2} = \sin^2 2\alpha + 4\sin^2\alpha \sin^2\varphi$$

$$= 4\sin^2\alpha(1+\sin^2\varphi) - 4\sin^4\alpha$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{D}{16r^2\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 441.$$

$$\sin^4\alpha - (1+\sin^2\varphi).\sin^2\alpha + \frac{D}{16r^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 442.$$

$$\frac{E}{4r^2} = \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha \sin^2\varphi$$

$$= 4\sin^2\alpha\cos^2\varphi - 4\sin^4\alpha$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{E}{16r^2\sin^2\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad 443.$$

$$\sin^4\alpha - \cos^2\varphi.\sin^2\alpha + \frac{E}{16r^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 444.$$

Es ist $\frac{b}{2r} = \sin 2\alpha$, also $\frac{abc}{2r} = ac.\sin 2\alpha = 2F$, folglich

$$F = \frac{abc}{4r} \quad \ldots\ldots \quad 445.$$

$$r = \frac{abc}{4F} \quad \ldots\ldots \quad 446.$$

$$r = \frac{abc}{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}} \quad \ldots \quad 447.$$

§. 78.

Im $\triangle$ ABC (Fig. 6.) sey BE die Schwerlinie, das ist BE halbire die AC. Man setze BE = f, $\angle$ ABE = x, CBE = y.

Aus den $\triangle\triangle$ ABE, CBE folgt

$$\frac{f}{\frac{1}{2}b} = \frac{\sin A}{\sin x}, \quad \frac{f}{\frac{1}{2}b} = \frac{\sin C}{\sin y}, \text{ also } \frac{\sin A}{\sin x} = \frac{\sin C}{\sin y},$$

mithin $\ldots\ldots$ $$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin x}{\sin y} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

oder $\ldots\ldots$ $$\frac{a}{c} = \frac{\sin x}{\sin y} \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Aus (α) folgt .. $$\frac{\sin A + \sin C}{\sin A - \sin C} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+C)\cot\tfrac{1}{2}(A-C) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x+y)\cot\tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\cot\tfrac{1}{2}B\cot\tfrac{1}{2}(A-C) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B\cot\tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}B\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-C) \quad .. \quad (\gamma)$$

Ferner folgt aus (α)

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(B-x)}{\sin x} = \sin B \cot x - \cos B$$

$$\cot x = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} + \cot B \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

Eben so ..... $\cot y = \dfrac{\sin A}{\sin B \sin C} + \cot B \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\varepsilon)$

Die Gleichungen ($\gamma - \varepsilon$) lehren die Winkel x, y berechnen, wenn die Winkel A, B, C bekannt sind. Sind nun die Winkel x, y gefunden, so hat man

$$b = \frac{2\,f\,.\sin x}{\sin A} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 448.$$

$$a = \frac{f\,.\sin(A+x)}{\sin C} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 449.$$

$$f = \frac{b \sin A}{2 \sin x} = \frac{a \sin C}{\sin(A+x)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots 450.$$

Aus (β) folgt ... $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\sin(B-x)}{\sin x} = \sin B \cot x - \cos B$

$$\cot x = \frac{c}{a \sin B} + \cot B \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\zeta)$$

Eben so ..... $\cot y = \dfrac{a}{c \sin B} + \cot B \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\vartheta)$

Ferner folgt aus (β)

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}B \cot \tfrac{1}{2}(x-y)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(x-y) = \frac{a-c}{a+c} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}B \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\mu)$$

Vermittelst der Gleichungen ($\zeta - \mu$) kann man in der Aufgabe B, a, c die Winkel x, y finden. Um nnn f zu berechnen schließe man (vergl. §. 61)

aus $\triangle$ ABE ... $\frac{1}{4}b^2 = c^2 + f^2 - 2cf.\cos x$

aus $\triangle$ CBE ... $\frac{1}{4}b^2 = a^2 + f^2 - 2af.\cos y$

also ..... $(2a.\cos y - 2c.\cos x).f + c^2 - a^2 = 0$

$$f = \frac{a^2 - c^2}{2a.\cos y - 2c.\cos x} = \frac{(a+c)(a-c)}{2a.\cos y\left(1 - \dfrac{c.\cos x}{a.\cos y}\right)} \;\ldots 451.$$

Man kann aber auch f aus Gleichung (450) finden, nachdem man vermittelst Gleichung (50) die Winkel A, C berechnet hat.

Aus $\triangle$ CBE folgt (vergl. §. 61)

$$f^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - ab.\cos C \;\ldots\ldots\ldots\ldots (\pi)$$

$$f = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}b^2 - ab.\cos C} \;\ldots\ldots\ldots 452.$$

$$a^2 - b\cos C.a - (f^2 - \tfrac{1}{4}b^2) = 0$$

$$a = \tfrac{1}{2} b \cos C \pm \sqrt{\mathfrak{f}^2 - \tfrac{1}{4} b^2 \sin^2 C} \;\ldots\ldots\ldots\; 453.$$

$$b^2 - 4a \cos C . b - 4(\mathfrak{f}^2 - a^2) = 0$$

$$b = 2a \cos C \pm 2\sqrt{\mathfrak{f}^2 - a^2 \sin^2 C} \;\ldots\ldots\ldots\; 454.$$

$$\cos C = \frac{a^2 + \tfrac{1}{4} b^2 - \mathfrak{f}^2}{ab} \;\ldots\ldots\ldots\; 455.$$

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\mathfrak{f} - \tfrac{1}{2} b + a)(\mathfrak{f} + \tfrac{1}{2} b - a)}{2ab}} \;\ldots\ldots\ldots\; 456.$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{2} b + a + \mathfrak{f})(\tfrac{1}{2} b + a - \mathfrak{f})}{2ab}} \;\ldots\ldots\ldots\; 457.$$

$$\sin C = \frac{1}{ab} \sqrt{(\tfrac{1}{2}b + a + \mathfrak{f})(\tfrac{1}{2}b + a - \mathfrak{f})(\mathfrak{f} - \tfrac{1}{2}b + a)(\mathfrak{f} + \tfrac{1}{2}b - a)} \; 458.$$

$$F = \tfrac{1}{2} \sqrt{(\tfrac{1}{2}b + a + \mathfrak{f})(\tfrac{1}{2}b + a - \mathfrak{f})(\mathfrak{f} - \tfrac{1}{2}b + a)(\mathfrak{f} + \tfrac{1}{2}b - a)} \; 459.$$

Ferner erhält man aus $\triangle$ ABC (nach §. 61)

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Combinirt man hiermit die Gleichung (455), so findet man

$$a^2 + \tfrac{1}{4} b^2 - \mathfrak{f}^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$\mathfrak{f} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + c^2) - \tfrac{1}{4} b^2} \;\ldots\ldots\; 460.$$

$$b = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - 4\mathfrak{f}^2} \;\ldots\ldots\; 461.$$

$$c = \sqrt{2\mathfrak{f}^2 + \tfrac{1}{2} b^2 - a^2} \;\ldots\ldots\; 462.$$

Die Wurzelgröße in Gleichung (459) läßt sich auch so schreiben

$$[(a + \mathfrak{f})^2 - \tfrac{1}{4} b^2]\,[\tfrac{1}{4} b^2 - (a - \mathfrak{f})^2]$$

Substituirt man nun für $\tfrac{1}{4} b^2$ den Werth aus (461), so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{(a + 2\mathfrak{f})^2 - c^2}{2} \cdot \frac{c^2 - (a - 2\mathfrak{f})^2}{2}$$

und die Gleichung (459) verwandelt sich also in

$$F = \tfrac{1}{4} \sqrt{(a + c + 2\mathfrak{f})(a + c - 2\mathfrak{f})(2\mathfrak{f} + a - c)(2\mathfrak{f} - a + c)} \quad 463.$$

Setzt man in (π)

$$\cos C = \sin(\alpha + \varphi) \text{ und } a = \frac{b \cos(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha} \quad (\S.\ 25)$$

so ist . . . $\mathfrak{f}^2 = \dfrac{b^2 \cos^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2 2\alpha} + \tfrac{1}{4} b^2 - \dfrac{b^2 \sin(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}{\sin 2\alpha}$

$$\frac{(\mathfrak{f}^2 - \tfrac{1}{4} b^2) \sin^2 2\alpha}{b^2} = \cos(\alpha - \varphi)\,[\cos(\alpha - \varphi) - \sin 2\alpha \sin(\alpha + \varphi)]$$

Nun ist

$$\cos(\alpha - \varphi) = \cos[2\alpha - (\alpha + \varphi)]$$
$$= \cos 2\alpha \cos(\alpha + \varphi) + \sin 2\alpha \sin(\alpha + \varphi)$$

also . . . $\cos(\alpha - \varphi) - \sin 2\alpha \sin(\alpha + \varphi) = \cos 2\alpha \cos(\alpha + \varphi)$

folglich $\frac{(f^2-\frac{1}{4}b^2)\sin^2 2\alpha}{b^2} = \cos(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)\cos 2\alpha$

$$= (\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\varphi = \frac{(4f^2+b^2)\sin^2 2\alpha - 2b^2}{2b^2\cos 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 464.$$

$$2b^2\cos 2\varphi . \cos 2\alpha = (4f^2+b^2)(1-\cos^2 2\alpha) - 2b^2$$

$$\cos^2 2\alpha + \frac{2b^2\cos 2\varphi}{4f^2+b^2} . \cos 2\alpha - \frac{4f^2-b^2}{4f^2+b^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad 465.$$

Setzt man die Werthe für $\cos 2\varphi$ aus den Gleichungen (178. 464) einander gleich, so ist

$$\frac{2h}{b}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{(4f^2+b^2)\sin^2 2\alpha - 2b^2}{2b^2\cos 2\alpha}$$

$$4bh\cot 2\alpha + b^2 = 4f^2$$

$$f = \tfrac{1}{2}\sqrt{b(b+4h\cot 2\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 466.$$

$$\cot 2\alpha = \frac{4f^2-b^2}{4bh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 467.$$

$$h = \frac{4f^2-b^2}{4b\cot 2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 468.$$

$$b = -2h\cot 2\alpha + 2\sqrt{f^2+h^2\cot^2 2\alpha} \quad \ldots\ldots \quad 469.$$

Aus §. 38. (B) folgt

$$\cos^2\alpha = \frac{2h\cos\varphi\sin\varphi}{m-n} + \sin^2\varphi$$

$$= \frac{h\cos\varphi\sqrt{[1-\cos^2\varphi]}}{\frac{1}{2}(m-n)} + 1 - \cos^2\varphi$$

Nun ist aber $\cos\varphi = \frac{h}{s}$ und $\frac{1}{2}(m-n) = \sqrt{f^2-h^2}$, folglich erhält man

$$\cos^2\alpha = \frac{h^2\sqrt{[s^2-h^2]}}{s^2\sqrt{[f^2-h^2]}} + \frac{s^2-h^2}{s^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 470.$$

Anhang
enthaltend Determinationen.

Gleichung 96.

Aufgabe B, h, $m-n=d$; gesucht A.

1) Wenn $B \overline{\gtrless} 90°$ ist,

so ist A ein spitzer Winkel, also $\cot A$ positiv. Da nun in diesem Falle das letzte Glied unter dem Wurzelzeichen positiv, also die Wurzel größer ist als das davorstehende Glied, so kann nur die positive Wurzel gebraucht werden. Es findet aber keine Determination statt. Denn weil der Werth der Gleichung $>-\cot B$ ist, wie sich leicht beweisen läßt, so erhält man $\cot A > -\cot B$ oder $>\cot(180-B)$, also $A < 180-B$, wie seyn muß.

2) Wenn $B < 90°$ ist,

so kann ebenfalls nur die positive Wurzel statt finden. Denn durch die negative Wurzel würde A ein stumpfer Winkel. Da nun $A < 180-B$, so ist $-\cot A < \cot B$; folglich müßte der absolute Werth der Gleichung durch die negative Wurzel $<\cot B$ seyn. Dieß ist aber nicht der Fall, weil schon das Glied vor dem Wurzelzeichen $>\cot B$ ist; mithin kann nur die positive Wurzel gebraucht werden.

Es wird nun $A \substack{> \\ = \\ <} 90°$ werden, jenachdem das letzte Glied unter dem Wurzelzeichen negativ, oder $=0$, oder positiv ist, das ist je nachdem

$$(m-n)\cot B \substack{> \\ = \\ <} h$$

$$m-n \substack{> \\ = \\ <} h \,.\, \tang B$$

ist. Eine Determination findet aber nicht statt, weil der Werth der Gleichung $>-\cot B$ ist.

Gleichung 165.

Aufgabe B, $b+a=k$, $b+c=l$; gesucht $A-C$.

Es ist . . . $\sin(\varphi - M) = 2\sin\alpha\sin M$, für $\frac{k+l}{k-l}\tang\alpha = \cot M$.

Vorausgesetzt wird natürlich $k \overline{\gtrless} l$.

1) Wenn $k=l$, so ist $\cot M = \infty$, also $M=0$ und $\varphi=0$.

2) Wenn $k>l$, so ist, weil $k+l > k-l$ ist, $\frac{k+l}{k-l}\tang\alpha$ $>\tang\alpha$, also auch $\cot M > \tang\alpha$, mithin $M < 90-\alpha$. Weil

nun $\varphi < 90 - \alpha$ ist, so ist $\varphi - \mathrm{M} < 90 - (\alpha + \mathrm{M})$, mithin $\sin(\varphi - \mathrm{M}) < \cos(\alpha + \mathrm{M})$; folglich muß seyn

$$
\begin{aligned}
2 \sin\alpha \sin \mathrm{M} &< \cos(\alpha + \mathrm{M}) \\
&< \cos\alpha \cos \mathrm{M} - \sin\alpha \sin \mathrm{M} \\
3 \sin\alpha \sin \mathrm{M} &< \cos\alpha \cos \mathrm{M} \\
3 \operatorname{tang}\alpha &< \cot \mathrm{M} \\
&< \frac{k+1}{k-1} \operatorname{tang}\alpha \\
3k - 3l &< k + l \\
k &< 2l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{D.}
\end{aligned}
$$

Gleichung 178.

Aufgabe B, b, h; gesucht A — C.

Da $\cos 2\varphi \leqq 1$ ist, so muß seyn

$$
\begin{aligned}
\frac{2h}{b} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha &\leqq 1 \\
h &\leqq b \,.\, \frac{1 + \cos 2\alpha}{2 \sin 2\alpha} \\
\text{oder } h &\leqq \tfrac{1}{2} b \cot\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{D.}
\end{aligned}
$$

Eine weitere Determination findet nicht statt. Denn der Werth der Gleichung ist in allen Fällen $> -\cos 2\alpha$; man findet also $\cos 2\varphi > -\cos 2\alpha$, mithin $2\varphi < 180 - 2\alpha$.

Anmerkung. Da $h \leqq \frac{1}{2} b \cot\alpha$ ist, so ist

$b - h \geqq b(1 - \frac{1}{2}\cot\alpha)$, also $b \leqq \dfrac{b-h}{1 - \frac{1}{2}\cot\alpha}$.

Gleichung 334.

Aufgabe B, $b - (a - c) = e$, $b - h = g$; gesucht b.

Ich behaupte zuerst, daß die negative Wurzel unbrauchbar sey. Denn weil $b \geqq e$ ist, so müßte seyn, wenn man $g + e \cot\alpha = 2m$ setzt,

$$
\begin{aligned}
m - \sqrt{m^2 - \tfrac{1}{2} e^2 \cot\alpha} &\geqq e \\
m - e &\geqq \sqrt{m^2 - \tfrac{1}{2} e^2 \cot\alpha} \\
e^2 - 2m \,.\, e &\geqq -\tfrac{1}{2} e^2 \cot\alpha \\
e + \tfrac{1}{2} e \cot\alpha &\geqq 2m \\
&\geqq g + e \cot\alpha \\
e &\geqq g + \tfrac{1}{2} e \cot\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\pi)
\end{aligned}
$$

Dieß ist nun offenbar nicht möglich, wenn $2\alpha \overline{\overline{<}} 53^\circ\, 7' 48'', 36$ ist, weil dann $\cot\alpha \overline{\overline{>}} 2$ ist. Wenn aber $2\alpha > 53^\circ\, 7' 48'', 36$ ist, so folgt aus (π)

$$e \overline{\overline{>}} \frac{b - h}{1 - \frac{1}{2}\cot\alpha}$$

Da nun $b \overline{\overline{>}} e$, so müßte auch seyn $b \overline{\overline{>}} \frac{b - h}{1 - \frac{1}{2}\cot\alpha}$. Dieß widerspricht aber dem Resultate in der Anmerkung zur vorigen Determination, folglich ist nur die positive Wurzel brauchbar.

Es muß also seyn

$$m + \sqrt{m^2 - \tfrac{1}{2} e^2 \cot\alpha} \overline{\overline{>}} e$$

$$m^2 - \tfrac{1}{2} e^2 \cot\alpha \overline{\overline{>}} (e - m)^2$$

woraus wie oben folgt

$$e \overline{\overline{<}} \frac{b - h}{1 - \frac{1}{2}\cot\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D.$$

Diese Determination ist jedoch nur nöthig für $2\alpha > 53^\circ\, 7' 48'', 36$.

Gleichung 386.

Aufgabe B, p, ϱ; gesucht A.

Setzt man der Kürze wegen $\frac{p - 2\varrho \cot\frac{1}{2}B}{p \tang\frac{1}{2}B} = 2m$, so ist

$$\tang\tfrac{1}{2}A = m \pm \sqrt{m^2 - \frac{2\varrho\cot\frac{1}{2}B}{p}}$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung geben beide Winkel A und C, wie man aus der Gleichung (II) in §. 76 leicht zeigen kann. Damit nun die Wurzel reell werde, muß seyn

$$m^2 \overline{\overline{>}} \frac{2\varrho\cot\frac{1}{2}B}{p}$$

$$p^2 + 4\varrho^2 \cot^2\tfrac{1}{2}B - 4p\varrho\cot\tfrac{1}{2}B \overline{\overline{>}} 8p\varrho\tang\tfrac{1}{2}B$$

$$p^2 - 4p\varrho(\cot\tfrac{1}{2}B + 2\tang\tfrac{1}{2}B) \overline{\overline{>}} -4\varrho^2\cot^2\tfrac{1}{2}B$$

Addire beiderseits $4\varrho^2(\cot\frac{1}{2}B + 2\tang\frac{1}{2}B)^2$ und ziehe die Wurzel aus, so ist

$$p - 2\varrho(\cot\tfrac{1}{2}B + 2\tang\tfrac{1}{2}B) \overline{\overline{>}} \frac{4\varrho}{\cos\frac{1}{2}B}$$

woraus man findet

$$p \overline{\overline{>}} 4\varrho \cdot \frac{(1 + \sin\frac{1}{2}B)^2}{\sin B} \ldots\ldots\ldots D.$$

Eine weitere Determination findet nicht statt. Denn da die positive Wurzel den größern Winkel A giebt und $\tan\frac{1}{2}A < \cot\frac{1}{2}B$ ist (denn es ist $A < 180 - B$ oder $\frac{1}{2}A < 90 - \frac{1}{2}B$), so muß seyn

$$m + \sqrt{m^2 - \frac{2\varrho\cot\frac{1}{2}B}{p}} < \cot\frac{1}{2}B$$

$$m^2 - \frac{2\varrho\cot\frac{1}{2}B}{p} < (\cot\frac{1}{2}B - m)^2$$

$$< \cot^2\frac{1}{2}B + m^2 - 2m\cot\frac{1}{2}B$$

$$2m\cot\frac{1}{2}B - \frac{2\varrho\cot\frac{1}{2}B}{p} < \cot^2\frac{1}{2}B$$

$$2mp - 2\varrho \quad < p\cot\frac{1}{2}B$$

also wenn man für $2m$ den Werth substituirt und mit $\tan\frac{1}{2}B$ multiplicirt

$$p - 2\varrho\cot\frac{1}{2}B - 2\varrho\tan\frac{1}{2}B < p$$

was immer der Fall ist. Da also der Werth der Gleichung durch die positive Wurzel $< \cot\frac{1}{2}B$ ist, so wird dieß um somehr durch die negative Wurzel seyn, und demnach findet keine weitere Determination statt.

Dieselbe Determination ergiebt sich auch aus der

Gleichung 396.

Aufgabe B, p, ϱ; gesucht A — C.

Da $\cos\varphi \overline{\overline{<}} 1$ ist, so muß seyn

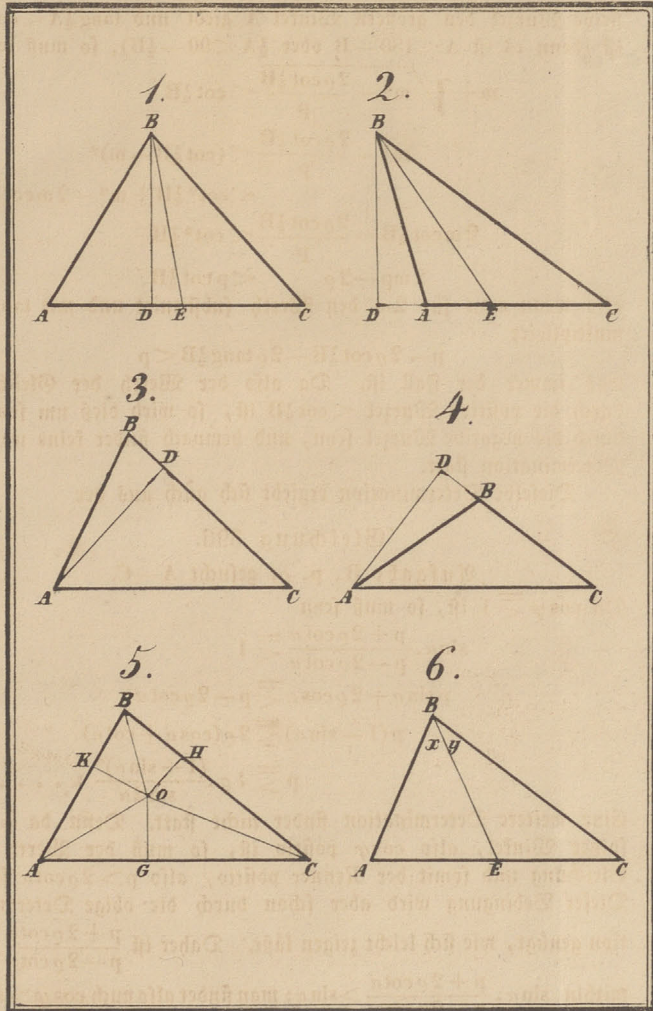
$$\sin\alpha . \frac{p + 2\varrho\cot\alpha}{p - 2\varrho\cot\alpha} \overline{\overline{<}} 1$$

$$p\sin\alpha + 2\varrho\cos\alpha \overline{\overline{<}} p - 2\varrho\cot\alpha$$

$$p(1 - \sin\alpha) \overline{\overline{>}} 2\varrho(\cos\alpha + \cot\alpha)$$

$$p \overline{\overline{>}} 4\varrho . \frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha} \quad \ldots\ldots D.$$

Eine weitere Determination findet nicht statt. Denn da φ ein spitzer Winkel, also $\cos\varphi$ positiv ist, so muß der Werth der Gleichung und somit der Nenner positiv, also $p > 2\varrho\cot\alpha$ seyn. Dieser Bedingung wird aber schon durch die obige Determination genügt, wie sich leicht zeigen läßt. Daher ist $\frac{p + 2\varrho\cot\alpha}{p - 2\varrho\cot\alpha} > 1$ mithin $\sin\alpha . \frac{p + 2\varrho\cot\alpha}{p - 2\varrho\cot\alpha} > \sin\alpha$; man findet also auch $\cos\varphi > \sin\alpha$ oder $\cos\varphi > \cos(90 - \alpha)$, also $\varphi < 90 - \alpha$, wie seyn muß.


1.
B
A
D
E
C
2.
B
D
A
E
C
3.
B
D
A
C
4.
D
B
A
C
5.
B
K
H
O
A
G
C
6.
B
x
y
A
E
C

ROTANOX
oczyszczanie
X 2008