Astronomie

von

J. G. F. Bohnenberger,

Professor zu Tübingen.

Mit acht Kupfertafeln.

Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.
1811.

Vorrede.

Ich habe gesucht, die Lehren der Astronomie in derjenigen Ordnung vorzutragen, in welcher sie erfunden worden sind, ohne dabey mehr als die Kenntniß der Elementargeometrie und einiger der bekanntesten Sätze von den Kegelschnitten vorauszusetzen. Was mit kleinerer Schrift gedruckt ist, und bey dem ersten Durchlesen überschlagen werden kann, setzt die Trigonometrie voraus, und enthält theils Berechnungen der in dem Text angezeigten geometrischen Construktionen, theils die Beweise der in dem Text entweder historisch angeführten, oder nur für besondere Fälle bewiesenen Sätze.

Die mit römischen und arabischen Zahlen angeführten Sätze beziehen sich auf Euklids Elemente, oder wenn ein K. vorangesetzt ist, auf H. Prof. Camerers Uebersetzung der drey ersten Bücher Simsons von den Kegelschnitten (Tübingen in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung, 1809.)

Tübingen den 1. October 1810.

J. G. F. Bohnenberger.

Inhaltsanzeige.

Erstes Buch.
Von den scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper.
(Sphärische Astronomie.)

Zweytes Buch.
Von den wahren Bewegungen der Himmelskörper.
(Theorische Astronomie.)

Drittes Buch.

Von den Gesetzen der Bewegung, und ihrer Anwendung auf die Bewegung der Himmelskörper.

(Physische Astronomie.)

Erstes Buch.

Von den scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper.

Erstes Capitel.

Von der täglichen Bewegung des Himmels.

§. 1. Die Himmelskörper scheinen sich an der holen Oberfläche eines grossen Gewölbes zu befinden, welches die Oberfläche der Erde zur Gränze hat. In einer ebenen Gegend oder auf der See erscheint uns dieselbe als ein Kreis, in dessen Mittelpunkt wir uns befinden, und heißt der Horizont oder Gesichtskreis, in unebenen Gegenden aber als eine irreguläre krumme Linie. Um an jedem Ort der Erde eine von den Irregularitäten ihrer Oberfläche unabhängige Gränze des Himmelsgewölbes zu erhalten, auf welche man die Lage der Himmelskörper beziehen kann, denkt man sich die Oberfläche des stillstehenden Wassers bis an die scheinbare Oberfläche des Himmels hinaus erweitert, wo sie denselben Kreis als Horizont bezeichnen wird, den man auf der See oder auf einer großen Ebene hat. Da die Richtung der Schwere, welche durch einen mit einem Gewicht beschwerten freyhängenden Faden im Zustand der Ruhe oder durch das sogenannte Loth bezeichnet wird, auf der Oberfläche des stillstehenden Wassers senkrecht ist; so wird man auch mittelst des Loths an jedem Ort der Erde so viele Punkte des Horizonts als man will, bestimmen können. Wird nemlich an einer senkrecht aufgestellten Axe ein Lineal unter einem rechten Winkel befestigt; so wird die Ziellinie an der Schärfe des Linials hin, Punkte des Horizonts bezeichnen, und bey der Umdrehung um die senkrecht stehende Axe nach und nach den ganzen Horizont beschreiben, welcher demnach überall 90 Grade von dem Punkt abstehen wird, wo die aufwarts verlängerte Richtung der Schwere das Himmelsgewölbe trift, und welcher der Scheitelpunkt oder das Zenith heißt. Man wird also den Horizont als einen grösten Kreis einer Kugel betrachten können, in deren Mittelpunkt sich der Beobachter befindet, und dessen einer Pol das Zenith ist. Der andere Pol desselben, welcher in die für uns unsichtbare Hälfte dieser Kugel fällt, heißt der Fußpunkt oder das **Nadir**.

§. 2. Man wird die Sterne nur kurze Zeit beobachten dürfen, um zu bemerken, daß sie ihre Lage gegen den Horizont alle Augenblicke verändern. Indem einige an dem Horizont sichtbar werden und sich immer mehr über denselben erheben, werden andere sich demselben nähern und wieder verschwinden. Einige werden den Horizont bey ihrem niedrigsten Stand kaum berühren, und wiederum anfangen sich über denselben zu erheben, andere werden selbst bey ihrem niedrigsten Stand noch beträchtlich über den Horizont erhaben seyn, und kleine Kreise um einen unbeweglichen Punkt zu beschreiben scheinen, in dessen Nähe man kaum noch einige Bewegung an den Sternen bemerkt. Endlich wird man finden, daß die Punkte, in welchen die Sterne ihre gröste und kleinste Höhe über den Horizont erreichen, in einem grösten Kreis der Sphäre liegen, welcher durch den Scheitelpunkt und denjenigen Punkt des Himmels durchgeht, in dessen Nähe die Bewegung der Sterne unmerklich wird. Weil die Sonne um die Mittagszeit sich in diesem Kreis befindet; so heißt er der **Mittagskreis** oder **Meridian**, und die Durchschnittslinie seiner Ebene mit der Ebene des Horizonts die **Mittagslinie**. Wird die Mittagslinie beyderseits bis an den Horizont verlängert; so bezeichnet sie auf derjenigen Seite des Himmels, wo sich die Sonne um die Mittagszeit befindet, den Mittags- oder Südpunkt, und auf der entgegengesetzten den Mitternachts- oder Nordpunkt. Zieht man in der Ebene des Horizonts eine gerade Linie auf die Mittagslinie senkrecht; so schneidet sie den Horizont in zwey Punkten, von welchen der auf der Seite des Aufgangs der Sonne liegende der Morgen- oder Ostpunkt, der entgegengesetzte der Abend oder Westpunkt heißt.

§. 3. Man wird bey dieser allen Sternen gemeinschaftlichen Bewegung, welche nach Verfluß eines Tags in derselben Ordnung wiederkehrt, und daher die tägliche Bewegung heißt, keine merkliche Veränderung in der gegenseitigen Lage der Sterne bemerken. Diese Erscheinungen sind also so beschaffen, als ob sich eine Kugel, an deren innerer Oberfläche die Sterne fest sind, und in deren Mittelpunkt sich das Auge des Beobachters befindet, um eine unbewegliche Axe drehte, welche die Weltaxe heißt, und in unseren Gegenden eine gegen den Horizont schiefe Lage hat. Die zwey Punkte, in welchen die Weltaxe der Himmelskugel begegnet, heißen ihre Pole, und zwar der über unserm Horizont erhabene der Nordpol, der entgegengesetzte der Südpol. Der Winkel, welchen die Weltaxe mit der Ebene des Horizonts macht, oder um welchen der Pol über den Horizont erhaben ist, heißt die Polhöhe.

Um nun zu zeigen, daß die Erscheinungen der täglichen Bewegung mit der Voraussetzung der Umdrehung einer Kugel um eine unbewegliche Axe übereinstimmen, sey *MAZPp* *Fig. 1.* ein größter Kreis der Sphäre, welcher durch das Zenith *Z*, das Nadir *z* und die Weltpole *P*, *p* durchgehe. Der scheinbare Weg *GSF*, *gsf* eines Sterns *S*, *s* wird unter dieser Voraussetzung ein Kreis seyn, dessen Ebene auf der Weltaxe *Pp* senkrecht steht. Der Stern *S* komme während seiner täglichen Bewegung in dem Punkt *F* in den größten Kreis *MAZPp* auf der Südseite des Scheitels *Z*. Man fälle aus *Z* das Perpendickel *ZR* auf die Ebene des Kreises *FSG*; so wird dieses in die gemeinschaftliche Durchschnittslinie *FG* der Ebene dieses Kreises und des grösten Kreises *MAZPp* fallen (*XI*, 38 E.) Man lege durch den Scheitelpunkt *Z* und den Stern *S* einen Bogen *ZS* eines grösten Kreises, welcher den Abstand des Sterns vom Scheitel messen wird, ziehe *RS* und die Chorden *ZS*, *ZF*. Da der Punkt *C*, in welchem die Weltaxe *Pp* die Ebene des Kreises *FSG* schneidet, der Mittelpunkt des leztern ist; so ist von allen geraden Linien, die von dem Punkt *R* an des Kreises *FSG* Umfang gehen, die *RF* die kleinste, *RG* die gröste (*III*, 7. E.) In den bey *R* rechtwinklichten Dreyecken *ZRF*, *ZRS*, welche die Seite *ZR* gemeinschaftlich haben, ist also $ZS > ZF$, mithin auch der Bogen $ZS >$ Bogen *ZF*. Der Stern ist also in *F* dem Scheitel *Z* am nächsten, und hat daselbst seine gröste Höhe. Es komme nun der Stern *s* in den Punkten *f* und *g* in den grösten Kreis *MAZPp* auf der Nordseite des Scheitels *Z*. Fällt man jezt aus dem Scheitelpunkt *Z* das Perpendickel *Zr* auf die erweiterte Ebene des von dem Stern beschriebenen Kreises *fsg*, und macht die fernere Construktion wie vorhin; so ist (*III*, 8. E.) *rf* die kleinste, *rg* die gröste der von *r* an diesen Kreis gehenden geraden Linien, mithin $Zs > Zf$, und Bogen $Zs >$ Bogen *Zf*, aber $< Zg$. Der Stern *s* hat also in *f* seine gröste, und in *g* seine kleinste Höhe über dem Horizont. Der gröste Kreis, welcher durch die Pole *P*, *p* der Himmelskugel und den Scheitelpunkt *Z* durchgeht, geht folglich durch alle diejenige Punkte, in welchen die Sterne ihre gröste und kleinste Höhe erreichen, und ist der Meridian. Diejenigen Sterne, deren Abstand vom Pol *Pg* kleiner als die Polhöhe *PN* ist, werden bey ihrem niedrigsten Stand in *g* den Horizont *MN* nicht erreichen, und die halbe Summe ihrer grösten Höhe *Nf* und der kleinsten *Ng* wird der Polhöhe *NP*, die halbe Differenz derselben aber dem Abstand *Pf* oder *Pg* des Sterns vom Pol *P* gleich seyn.

Ist der Abstand eines Sterns von dem über den Horizont erhabenen Pol *P* der Polhöhe gleich; so wird er bey seinem niedrigsten Stand den Horizont in dem Nordpunkt *N* berühren, und wenn jener Abstand grösser als die Polhöhe ist; so wird ein Theil seines scheinbaren Wegs unter den Horizont fallen. Steht ein Stern 90° von den Polen ab; so beschreibt er einen grösten Kreis *AQ*, welcher durch den Horizont halbirt wird, weil alle grösten Kreise einer Kugel sich halbiren, und da dieser Kreis so wie der Horizont auf der Ebene des Meridians senkrecht ist; so ist die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der erstern auf dem Meridian senkrecht (*XI*, 19. E.) und der Stern geht in dem Ostpunkt auf, in dem Westpunkt unter. Die Sonne beschreibt zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen diesen Kreis, und daher heißt derjenige gröste Kreis, dessen Pole die zwey Pole der Himmelskugel sind, der Aequator. Alle übrigen von den Sternen während der täglichen Bewegung beschriebenen kleineren Kreise heißen Parallelkreise des Aequators. So wie der Abstand der Sterne von dem über den Horizont erhabenen Pol wächst und größer als 90° wird, fällt immer ein größerer und größerer Theil ihrer Parallelkreise unter den Horizont, bis endlich diejenige, deren Abstand vom Pol *P* dem Bogen *PM*, welcher durch den *pM* oder die ihm gleiche Polhöhe *PN* (*I*, 15. E.) zu 180° ergänzt wird, den Horizont in dem Südpunkt *M* nur noch berühren, und nicht mehr über denselben sich erheben.

§. 4. Um die Lage des Meridians genauer als durch die Beobachtung der grösten oder kleinsten Höhe eines Sterns zu bestimmen, kann man sich einer der folgenden Methoden bedienen.

1.) Man wähle einen der nie untergehenden Sterne, und warte die Zeit ab, da er sich bey seiner täglichen Bewegung am weitesten auf der Ost- und Westseite von dem Meridian entfernt. In diesem Augenblik wird ein durch den Stern *R* oder *R'* Fig. 2. und den Scheitelpunkt *Z* gelegter gröster Kreis *ZRH*, *ZR'H'* den Parallelkreis *GRFR'*, welchen der Stern um den Pol beschreibt, berühren, und der zwischen den zwey berührenden Vertikalkreisen *ZRH*, *ZR'H'* in der Mitte liegende Vertikalkreis *ZPN* wird der Meridian seyn. Die zwey Vertikalebenen können durch Bleylothe bestimmt werden, hinter welchen man das Aug an einer bestimmten Stelle, z. B.

einer kleinen Oefnung in einem befestigten Stük Blech, hält, indem man die Bleylothe so lange verschiebt, bis sie den Stern bey seiner grösten Digression bedecken.

2. Unter der Voraussezung einer gleichförmigen Umdrehung der Himmelskugel wird die Zeit, welche von dem Durchgang eines Sterns durch den Meridian über dem Pol bis zu seinem nächstfolgenden Durchgang durch denselben unter dem Pol verfließt der Hälfte der vollen Umlaufszeit desselben um den Pol gleich seyn, weil die Ebene des Meridians durch die Weltaxe, mithin durch die Mittelpunkte aller Parallelkreise des Aequators geht, und daher dieselbige halbirt. Man hänge also ein Loth auf, halte das Aug an einer kleinen Oefnung, welche in einem horizontal hin und her beweglichen Blech angebracht ist, und beobachte, ohne das Blech zu verrücken die Zeiten des obern, untern und hierauf wieder des obern Durchgangs an dem Faden. Sind die Zwischenzeiten gleich; so ist die durch den Ort des Augs und das Bleyloth gelegte Ebene, die Ebene des Meridians. Sind sie aber ungleich; so muß die Vertikalebene gegen derjenigen Seite hingerükt werden, wo die Zwischenzeit größer war als auf der andern, d. i. man muß das Blech nach der entgegengesezten Seite hin bewegen, und dieses Verfahren so oft wiederholen, bis die Zwischenzeiten gleich werden.

3. Nimmt man auf dem Parallelkreis eines Sterns *S* Fig. 1. auf der andern Seite des Meridians von lezterem an einen Bogen dem *SF* gleich; so werden die von *R* aus an die Endpunkte dieser Bogen gezogenen geraden Linien einander gleich (*III*, 7. 8. E.) Daher sind auch die Abstände vom Scheitel auf beyden Seiten des Meridians einander gleich, und der Zeitpunkt des Durchgangs eines Sterns durch den Meridian fällt in die Mitte zwischen die zwey Zeitpunkte, da er gleiche Höhen vor und nach seinem Durchgang durch den Meridian hatte. Man kann also durch Beobachtung der Zeiten, da ein Stern auf beyden Seiten des Meridians gleiche Höhe hatte, die Zeit seines Durchgangs durch denselben finden, und diese mit derjenigen vergleichen, welche man auf ähnliche Art wie

in n. 2. bey dem Durchgang durch eine Vertikalebene beobachtet hat, und dadurch finden, ob diese Vertikalebene in oder ausserhalb des Meridians fällt. Diese Methode, die Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den Meridian zu finden, nennt man die Methode der correspondirenden Höhen.

4.) Auf einer horizontalen Ebene befestigt man einen Stift senkrecht, und bemerkt Vormittags von Zeit zu Zeit die Länge seines Schattens. Nachmittags wartet man die Zeiten ab, da der Schatten wieder dieselben Längen erhält. Nun verbindet man die Endpunkte gleicher Schattenlängen durch gerade Linien, halbirt sie und zieht durch den Fußpunkt des Stifts und die Halbirungspunkte gerade Linien. Diese werden, wenn man genau beobachtet hat auf einander fallen und die Mittagslinie bezeichnen. Weil, wie in der Folge wird gezeigt werden, die Sonne nicht genau einen Parallelkreis des Aequators beschreibt; so erfordert diese Methode, so wie die ihr ähnliche der correspondirenden Höhen bey Sonnenbeobachtungen eine Correktion.

§. 5. Mittelst der sphärischen Trigonometrie läßt sich das im vorhergehenden §. in n. 1. und 2. gezeigte Verfahren, die Lage des Meridians zu bestimmen, abkürzen.

Bey der Methode n. 1. berührt der Vertikalkreis ZRH Fig. 2. den Parallel des Sterns bey seiner grösten Digression in R. Man ziehe aus dem Pol P den grösten Kreis PR an den Berührungspunkt R; so ist der sphärische Triangel PZR bey R rechtwinklicht; und es verhält sich:

1.) Sin. PZ : Sin. PR = Sin. tot. : Sin. PZR;
2.) Cos. PZ : Cos. PR = Cos. ZR : Sin. tot.:
3.) Tang. PZ : Tang. PR = Sin. tot. : Cos. ZPR;

Kennt man die Polhöhe PN; folglich auch ihr Complement PZ, und die Polardistanz PR des Sterns: so findet man aus n. 1. den Winkel PZR, welcher durch den zwischen dem Vertikalkreis, in welchem man die gröste Digression des Sterns von dem Meridian beobachtete, und dem Meridian ZN begriffenen Bogen HN des Horizonts gemessen wird. Man kennt also die Abweichung dieses Vertikalkreises von dem Meridian. Aus eben diesen Stücken erhält man die Zenithdistanz ZR des Sterns bey seiner grösten Digression durch n. 2., und mittelst n. 3. den Winkel ZPR, oder die Anzahl Grade, welche auf den Bogen RF des Parallels gehen, und hieraus mittelst der Umlaufszeit des Sterns, die Zwischenzeit zwischen seinem obern Durchgang durch den Meridian und der Zeit seiner grösten Digression.

Bey der Methode n. 2. kennt man die Zeiten des Durchgangs des Sterns durch einerley Vertikalkreis Zh Fig. 2. in s und s', und seine Umlaufszeit, und hieraus den Winkel sPs', wenn man schließt: Umlaufszeit: Zeit von s bis $s' = 360° : sPs'$. Man ziehe aus dem Pol P den grösten Kreis Pr auf Zh senkrecht; so halbirt dieser den Winkel sPs' und man kennt sPr. In dem bey r rechtwinklichten Dreyeck Psr verhält sich Cosin. Ps : Cotang. rPs = Sin. tot : Tang. Psr, woraus man mittelst der Polardistanz Ps den Winkel Psr findet. Sodenn hat man in dem Dreyeck PsZ die Proportion Sin. PZ : Sin. Ps = Sin. Psr : Sin. PZs, woraus sich der Winkel PZr oder der Bogen Nh des Horizonts zwischen dem Vertikalkreis Zh und dem Meridian ZN ergiebt. Sind die zwey Zwischenzeiten nur wenig verschieden; so hat man sehr nahe. wenn man statt der Tangenten und Sinus der kleinen Winkel $90° - rPs$, Psr und PZs die Winkel oder Bogen selbst setzt

$$\begin{array}{l} \text{Cos. } Ps \quad \text{Sin. tot.} = 90° - rPs \quad : Psr \\ \text{Sin. } PZ : \text{Sin. } Ps = Psr \quad : PZs \\ \hline \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Sin. } PZ \,\text{Cos. } Ps : \text{Sin. } Ps \text{ Sin. tot.} \\ \text{Sin. } PZ : \dfrac{\text{Sin. } Ps \text{ Sin. tot.}}{\text{Cos. } Ps} \\ \text{d. i. Sin. } PZ : \text{Tang. } Ps \end{array}\right\} = 90° - rPs : PZs$$

und der Winkel $90° - rPs$ ergiebt sich unmittelbar, wenn man den Unterschied des vierten Theils der Umlaufszeit des Sterns und der halben Zwischenzeit zwischen einem obern und untern Durchgang durch den Vertikalkreis in Grade oder deren Unterabtheilungen verwandelt, indem man schließt:

$\frac{1}{4}$ Umlaufszeit : Unterschied = $90° : 90° - rPs$.

§. 6. Die nähere Bestimmung der Lage eines Sterns gegen den Horizont und seiner täglichen Bewegung ergiebt sich nun auf folgende Art. Es sey $MZPzp$ Fig. 3. der Meridian, MHN der Horizont, und ein Stern in S. Man lege durch den Scheitel Z und den Stern S einen grösten Kreis ZS, welcher dem Horizont in H begegne: so ist ZH ein Vertikalkreis, SZ des Sterns Abstand vom Scheitel, und HS seine Höhe über dem Horizont, gegen welche seine Lage bestimmt ist, wenn man seine Höhe HS, und den Bogen NH des Horizonts kennt, welcher von dem Nordpunkt N an durch den Vertikalkreis abgeschnitten wird, und das Azimuth des Sterns heißt. Ein Parallelkreis KSL des Horizonts heißt ein Höhenkreis (Almucantharat), und alle in demselben befindlichen Sterne haben einerley Höhe, welche durch die Bogen *SH* oder *MK*, *NL* gemessen wird. Man lege durch den Stern *S* auch noch einen Parallelkreis *FSG* des Aequators. Der Bogen *FS* dieses Parallelkreises mißt den Winkel *FPS* am Pol *P*, von welchem die Zeit zwischen seinem Durchgang durch den Meridian und dem Augenblick, da er in *S* war, abhängt, und welcher daher der Stundenwinkel heißt. Der Höhenkreis *KSL* ist als ein Parallelkreis des Horizonts auf der Ebene des Meridians senkrecht, und der Parallelkreis *FSG* des Aequators ist auf der Weltaxe *Pp*, und daher ebenfalls auf der Ebene des Meridians senkrecht. Folglich ist (XI, 19. E.) die gemeinschaftliche Durchschnittslinie *SR* der Ebenen *KSL* und *FSG* auf der Ebene des Meridians senkrecht, und der Punkt *R* fällt in den Durchschnittspunkt der Durchmesser *KL*, *FG* der Kreise *KSL*, *FSG*.

Ist nun 1.) die Polhöhe *PN*, Polardistanz *PS* und Höhe *SH* des Sterns gegeben, so findet man den Stundenwinkel *FPS*, wenn man auf dem Meridian von dem Horizont an *MK* der Höhe des Sterns gleich nimmt, durch *K* die *KL* mit *MN* parallel zieht, *PF* und *PG* durch eine gerade Linie *FG* miteinander verbindet. Dadurch erhält man den Punkt *R*, in welchem das von dem Stern auf die Ebene des Meridians gefällte Perpendikel *SR* dem Durchmesser *FG* seines Parallelkreises begegnet, und daher den Bogen *FS*, wenn man sich, wie in der 4ten Figur den Halbzirkel *FSG* auf die Ebene des Papiers, in welcher der Meridian *MZPzp* mit der Axe *Pp*, dem Durchmesser *MN* des Horizonts, der Vertikallinie *Zz*, und den Durchmessern *FG*, *KL* der Parallelkreise des Aequators und des Horizonts, verzeichnet angenommen wird, niedergelegt denkt, und in dem Punkt *R* auf der *FG* ein Perpendikel errichtet, welches dem über *FG* als Durchmesser beschriebenen Halbzirkel *FSG* in *S* begegnet, und den gesuchten Bogen *FS* abschneidet.

2.) Sucht man umgekehrt aus der Polhöhe, Polardistanz und dem Stundenwinkel die Höhe des Sterns; so bestimmt man *FG* wie vorhin, nimmt in dem über *FG* beschriebene Halbzirkel von F an den Bogen FS dem Stundenwinkel gleich, fällt von S das Perpendikel SR auf FG, und zieht durch R die Parallele KL mit MN. Diese wird auf dem Meridian den Bogen MK abschneiden, welcher des Sterns Höhe mißt.

3.) Für eine gegebene Polhöhe findet man aus dem Azimuth und der Höhe eines Stern seine Polardistanz und den Stundenwinkel durch eine ähnliche Construktion. Das Azimuth NH Fig. 3. wird sowohl durch den Bogen NH des Horizonts, als auch durch den zwischen dem Meridian und dem Vertikalkreis ZH begriffenen Bogen LS des Parallelkreises des Horizonts gemessen. Nimmt man also (Fig. 4.) $MK = NL =$ der Höhe des Sterns, zieht KL, beschreibt über KL einen Halbzirkel KsL, nimmt von L an den Bogen Ls dem Azimuth gleich, und fällt von s das Perpendikel sR auf KL; so hat man den Punkt R, in welchem die Durchmesser der durch den Stern gelegten Parallelkreise des Horizonts und des Aequators sich schneiden. Zieht man nun durch R die FG auf Pr senkrecht; so hat man die Polardistanz PF oder PG des Sterns, woraus sich hernach der Stundenwinkel wie vorhin ergiebt.

4.) Um aus der Polhöhe, Polardistanz und dem Stundenwinkel das Azimuth zu finden, macht man dieselbe Construktion wie in n. 2. beschreibt sodenn über KL einen Halbzirkel, und errichtet in R das Perpendikel Rs auf KL, welches von L an den Bogen Ls abschneidet, der dem Bogen NH Fig. 3 ähnlich ist, und daher eben so viele Grade enthält, als der Bogen NH, mithin das Azimuth bestimmt.

§. 7. Im Augenblick des Auf- oder Untergangs eines Sterns fällt sein Höhenkreis mit dem Horizont zusammen, der Punkt R Fig. 4. fällt in den Durchschnittspunkt W des Durchmessers FG seines Parallels mit dem Durchmesser MN des Horizonts, und der auf die Ebene des Meridians niedergelegte Höhenkreis fällt auf den Meridian selbst. Errichtet man also in dem Punkt W die Perpendikel WV, Wv auf den Linien FG, MN; so wird ersteres den Stundenwinkel FV, letzteres das Azimuth Nv für den Augenblick des Auf- oder Untergangs abschneiden. Dieser Stundenwinkel wird also durch die Hälfte der Anzahl Grade gemessen, welche auf den über dem Horizont liegenden Theil des Parallelkreises eines Sterns gehen, und heißt daher der halbe Tagbogen des Sterns. Wird die Zeit berechnet, welche der Stern gebraucht, um diesen Bogen zu durchlaufen, indem man schließt: $360°$: $\frac{1}{2}$ Tagbogen = Umlaufszeit des Sterns: gesuchten Zeit, und zu dem Augenblick des Durchgangs des Sterns durch den Meridian addirt und davon abgezogen; so hat man die Zeit seines Untergangs und Aufgangs.

Zieht man das Azimuth für den Augenblick des Aufgangs eines Sterns von $90°$ ab, oder nimmt seinen Ueberschuß über $90°$, wenn es $90°$ übersteigt; so hat man den zwischen dem Ost- oder Westpunkt und dem Punkt des Auf- oder Untergangs des Sterns liegenden Bogen des Horizonts, welchen man die Morgen- und Abendweite (amplitudo ortiva et occidua) des Sterns nennt. Diese wird also in der vorhin gezeigten Construktion durch den Bogen zv gemessen.

Wenn die Polardistanz eines Sterns = $90°$ ist, und er folglich den Aequator beschreibt; so fällt der Punkt W in O, das Azimuth für die Zeit des Auf- und Untergangs wird ebenfalls = $90°$, die Morgen- und Abendweite verschwindet, und er geht in dem Westpunkt unter. Die eine Hälfte seines scheinbaren Wegs fällt über, die andere Hälfte unter den Horizont, und unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Umdrehung der Himmelskugel verweilt er eben so lang über als unter dem Horizont.

Stehen zwey Sterne gleichweit von den ihnen zunächstliegenden Polen, folglich gleichweit von dem Aequator der eine gegen dem Nordpol, der andere gegen dem Südpol hin ab; so wird, wenn man $\left.\begin{matrix} pF \\ pG \end{matrix}\right\} = PF$ nimmt und die gerade Linie $F'G'$ zieht, $OC' = OC$ und $OW' = OW$. Diese Sterne haben also gleiche Morgen- und Abendweiten, nur fällt sie bey dem südlichen Sterne in die südliche, bey dem nördlichen in die nördliche Hälfte des Horizonts. Ferner werden CW und $C'W'$, mithin auch FW, und $G'W'$ GW und $F'W'$ einander gleich. Der südliche Stern verweilt also eben so lang unter dem Horizont, als der nördliche über demselben, und der halbe Tagbogen des nördlichen Sterns übertrift den halben Tagbogen eines im Aequator befindlichen, d. i. 90° um eben so viel, als dem südlichen zu 90° fehlt. Dieser Unterschied zwischen 90° und dem halben Tagbogen eines Sterns heißt seine Ascensionaldifferenz, (differentia ascensionalis) und wird also bey obiger Construktion durch den Bogen VX gemessen, wenn man OP bis an den Halbzirkel FSG hinaus verlängert.

§. 8. Die §. 6. und 7. gezeigte Construktionen können nun auf folgende Art mittelst der ebenen Trigonometrie berechnet werden. Man ziehe Rr und Kk auf MN senkrecht; so hat man

$$\left.\begin{array}{r} Rr \\ Kk \\ \text{Sin.}\, MK \end{array}\right\} : Rw = \left\{\begin{array}{l} \text{Sin.}\ RWr \\ \text{Cos.}\ COW \\ \text{Cos.}\ PN \end{array}\right\} : \text{Sin. tot.};\quad RW = \frac{\text{Sin.}\,MK\,\text{Sin.tot.}}{\text{Cos.}\ PN}$$

$$\left.\begin{array}{r} CO \\ \text{Cos.}\,PF \end{array}\right\} : CW = \left\{\begin{array}{l} \text{Cos.}\ COW \\ \text{Cos.}\ PN \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \text{Sin.}\ COW \\ \text{Sin.}\ PN \end{array}\right\};\quad CW = \frac{\text{Cos.}\ PF\,\text{Sin.}\ PN}{\text{Cos.}\ PN}$$

$$\text{also } CR = RW - CW = \frac{\text{Sin.}\ MK\ \text{Sin. tot.} - \text{Cos.}\ PF\ \text{Sin.}\ PN}{\text{Cos.}\ PN}$$

Man ziehe CS; so verhält sich in dem bey R rechtwinklichten.

$$\text{Dreyeck } RCS \quad \left.\begin{array}{r} CS \\ CF \\ \text{Sin.}\ PF \end{array}\right\} : CR = \text{Sin. tot.} \quad \text{Cos.}\ FS \quad \text{Also ist}$$

$$\text{Cos.}\ FS = \frac{CR\ \text{Sin. tot.}}{\text{Sin.}\ PF},$$ oder wenn man obigen Werth von CR substituirt

$$\text{Cos.}\ FS = \frac{\text{Sin.}\ MK\,\text{Sin. tot.} - \text{Cos.}\ PF\,\text{Sin.}\ PN}{\text{Sin.}\ PF\ \text{Cos.}\ PN}\ \text{Sin. tot.}$$

Setzt man zur Abkürzung die Polhöhe $= l$, die Polardistanz des Sterns $= d$, seine Höhe $= h$ und den Stundenwinkel $= t$; so wird:

$$1.)\ \text{Cos.}\ t = \frac{\text{Sin.}\ h\ \text{Sin. tot.} - \text{Cos.}\ d\ \text{Sin.}\ l}{\text{Sin.}\ d\ \text{Cos.}\ l}\ \text{Sin. tot.},$$ und hieraus

$$2.)\ \text{Sin.}\ h = \frac{\text{Sin.}\ l\ \text{Cos.}\ d\ \text{Sin. tot.} + \text{Cos.}\ l\ \text{Sin.}\ d\ \text{Cos.}\ t}{\text{Sin. tot.}^2}.$$

$$\text{Sin. tot.}^2\ \text{Sin.}\ h = \text{Sin.}\ l\ \text{Cos.}\ d\ \text{Sin. tot.} + \text{Cos.}\ l\ \text{Sin.}\ d\ \text{Sin. tot.} - \frac{2\,\overline{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}t}^2\ \text{Cos.}\ l\ \text{Sin.}\ d}{\text{Sin. tot.}}$$

$$= \text{Sin.}\ (l + d)\ \text{Sin. tot.}^2 - \frac{2\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}t^2\ \text{Cos.}\ l\ \text{Sin.}\ d}{\text{Sin. tot.}}$$

$$3.)\ \text{Sin.}\ h = \text{Sin.}\ (l + d) - 2\left(\frac{\text{Sin.}\ \tfrac{1}{2}t}{\text{Sin. tot.}}\right)^2 \frac{\text{Cos.}\ l\ \text{Sin.}\ d}{\text{Sin. tot.}}$$

$$2\left(\frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}t}{\text{Sin. tot.}}\right)\frac{\text{Cos.}\,l\ \text{Sin.}\,d}{\text{Sin. tot.}} = \text{Sin.}\,(l+d) - \text{Sin.}\,h$$

$$= \frac{2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,(l+d-h)\ \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(l+d+h)}{\text{Sin. tot.}}$$

4.) $$\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,t^2 = \frac{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,(l+d-h)\ \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(l+d+h)\ \text{Sin.tot.}^2}{\text{Cos.}\,l\ \text{Sin.}\,d},$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}\,s-h)\ \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,s\ \text{Sin. tot.}^2}{\text{Cos.}\,l\ \text{Sin.}\,d},$$ wenn man $l+d+h=s$ setzt.

Ferner verhält sich:

$\text{Cos.}\left.\begin{array}{r}CO\\ PF\end{array}\right\} : OW = \left\{\begin{array}{l}\text{Cos. } COW\\ \text{Cos. } PN\end{array}\right\} : \text{Sin. tot.}$; folglich ist $OW = \dfrac{\text{Cos.}\,PF\,\text{Sin. tot.}}{\text{Cos. }PN}$.

$\text{Sin.}\left.\begin{array}{r}Rr\\ Kk\\ MK\end{array}\right\} : rW = \left\{\begin{array}{l}\text{Sin. } rWR\ : \text{Sin. } rRW,\\ \text{Cosin. } PN\ : \text{Sin. } PN\end{array}\right.$; $rW = \dfrac{\text{Sin.}\,MK\,\text{Sin.}\,PN}{\text{Cos.}\,PN}$

Daher ist $\left.\begin{array}{l}rW - WO\\ rO\\ RE\end{array}\right\} = \dfrac{\text{Sin.}\,MK\,\text{Sin.}\,PN - \text{Cos.}\,PF\,\text{Sin.tot.}}{\text{Cos.}\,PN}$.

Und nun $\text{Cos.}\left.\begin{array}{r}sE\\ KE\\ MK\end{array}\right\} : RE = \text{Sin. tot.}\ \ \text{Cos.}\,Ks$ folglich ist

$\text{Cos.}\,Ks = \dfrac{RE\ \text{Sin.tot.}}{\text{Cos.}\,MK}$, und wenn man obigen Werth von RE substituirt

$$\text{Cos.}\,Ks = \frac{\text{Sin.}\,MK\,\text{Sin.}\,PN - \text{Cos.}\,PF\,\text{Sin. tot.}}{\text{Cos.}\,PN\ \text{Cos.}\,MK}\ \text{Sin. tot.}$$ mithin

$$\text{Cos.}\,Ls = -\,\text{Cos.}\,Ks = \frac{\text{Cos.}\,PF\,\text{Sin. tot.} - \text{Sin.}\,MK\,\text{Sin.}\,PN}{\text{Cos.}\,PN\ \text{Cos.}\,MK}\ \text{Sin. tot.},$$

oder wenn man das Azimuth $= a$ setzt, und die obigen Benennungen beybehält.

5.) $$\text{Cos.}\,a = \frac{\text{Cos.}\,d\,\text{Sin. tot.} - \text{Sin.}\,h\ \text{Sin.}\,l}{\text{Cos.}\,h\ \text{Cos.}\,l}\ \text{Sin. tot.}$$

Daher 6.) $$\text{Sin. tot.}^2\ \text{Cos.}\,d = \text{Sin.}\,h\,\text{Sin.}\,l\,\text{Sin. tot.} + \text{Cos.}\,h\,\text{Cos.}\,l\,\text{Cos.}\,a$$

$$= \text{Sin.}\,h\,\text{Sin.}\,l\,\text{Sin. tot} - \text{Cos.}\,h\,\text{Cos.}\,l\,\text{Sin.tot.} + 2\,\frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}a^2\ \text{Cos.}\,h\,\text{Cos.}\,l}{\text{Sin. tot.}}$$

$$= \frac{2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}a^2\ \text{Cos.}\,h\ \text{Cos.}\,l}{\text{Sin. tot.}} - \text{Sin. tot.}^2\ \text{Cos.}\,(l+h)$$

$$2\left(\frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}a}{\text{Sin. tot.}}\right)^2\frac{\text{Cos.}\,h\,\text{Cos.}\,l}{\text{Sin. tot.}} = \text{Cos.}\,d + \text{Cos.}\,(l+h)$$

$$= \frac{2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(l+h+d)\ \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,(l+h-d)}{\text{Sin. tot.}}.$$

7.) $\overline{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}a}^2 = \dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}(l+h+d)\,\text{Cos.}\,\frac{1}{2}\,(l+h-d)}{\text{Cos.}\,h\,\text{Cos.}\,l}\,\overline{\text{Sin. tot.}}^2$

$= \dfrac{\text{Cos.}\,\frac{1}{2}s\,\text{Cos.}\,(\frac{1}{2}s-d)}{\text{Cos.}\,h\,\text{Cos.}\,l}\,\text{Sin. tot.}$, wenn $l+h+d=s$.

Setzt man in n. 1. die Höhe $h = o$; so wird

$\text{Cos.}\,t = -\dfrac{\text{Cos.}\,d\,\text{Sin.}\,l}{\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,l}\,\text{Sin. tot.} = -\dfrac{\text{Cotang.}\,d\,\text{Tang}\,l}{\text{Sin. tot.}}$,

und der Stundenwinkel t ist dem halben Tagbogen gleich, welcher so lange $> 90^\circ$ ist, als die Polardistanz $d < 90^\circ$. Demnach ist

8.) $\text{Sin. diff. asc.} = \dfrac{\text{Cotang.}\,d\,\text{Tang}\,l}{\text{Sin. tot.}}$.

Für $h = o$ verwandelt sich die Formel n. 5. in folgende:

$\text{Cos.}\,a = \dfrac{\text{Cos.}\,d\,\text{Sin. tot.}}{\text{Cos.}\,l}$, und nun ist a das Azimuth für den Augenblick des Aufgangs oder Untergangs, mithin

9.) $\text{Sin. ampl. ort. aut. occid.} = \dfrac{\text{Cos.}\,d\,\text{Sin. tot.}}{\text{Cos.}\,l}$.

Aus n. 4. ergiebt sich, daß der Sinus der Höhe für $t = o$ am grösten und für $t = 180^\circ$, wo $\text{Sin.}\,\frac{1}{2}t = \text{Sin. tot.}$ wird, am kleinsten ist. Im ersten Fall ist $h = l+d$ oder $= 180^\circ - (l+d)$ je nachdem $l+d$ kleiner oder größer als 90° ist; folglich die Meridianhöhe des Sterns in den nördlichen oder südlichen Quadranten des Meridians fällt. Im zweyten Fall wird

$\text{Sin.}\,h = \text{Sin.}\,(l+d) - \dfrac{2\,\text{Cos.}\,l\,\text{Sin.}\,d}{\text{Sin. tot.}} = \dfrac{\text{Sin.}\,l\,\text{Cos.}\,d - \text{Cos.}\,l\,\text{Sin.}\,d}{\text{Sin. tot.}}$

$= \text{Sin.}\,(l-d)$, und daher die Höhe unter dem Pol $= l-d$, welche negativ wird, oder unter den Horizont fällt, wenn $d > l$.

Die Sterne erreichen also in dem Meridian ihre gröste und kleinste Höhe über dem Horizont, übereinstimmend mit §. 3. Für einerley Polhöhe, Polardistanz und Höhe werden vermöge n. 1. und 5. die Cos. t und a, also auch die Stundenwinkel und Azimuthe selbst auf beyden Seiten des Meridians einander, gleich, worauf sich die Methode der correspondierenden Höhen zur Bestimmung des Durchgangs eines Sterns durch den Meridian und der Lage der Mittagslinie gründet.

§. 9. Wenn der Beobachter seinen Standpunkt verändert, und gegen Norden fortgeht, so wird er finden, daß diejenigen Sterne, welche an seinem ersten Standpunkt bey ihrer kleinsten Höhe unter dem Pol den Horizont berührten, sich an seinem zweyten Standpunkt nicht mehr so tief gegen denselben herabsenken, und Sterne, welche vorher untergegangen sind, werden nun beständig über seinem Horizont bleiben. Auf der Südseite hingegen wird von dem über dem Horizont liegenden Theil des Parallels südlicher Sterne ein größerer Theil unter den Horizont fallen, und einige, die er vorher noch in kleinen Höhen in dem Meridian erblickte, werden für ihn ganz verschwunden seyn. Das Gegentheil wird Statt finden, wenn er gegen Süden fortgeht. Sterne, welche auf der Nordseite des Meridians beständig über dem Horizont blieben, werden jetzt untergehen, und auf der Südseite wird er Sterne sich über den Horizont erheben sehen, welche ihm an seinem ersten Standpunkt niemals zu Gesicht kamen. Hat der Beobachter an seinem ersten Standpunkt *A* Fig. 5. einen Stern *S* in seinem Scheitel *Z*, und einen andern gegen Süden an dem Horizont nach der Richtung *AM* stehen sehen; so wird er, wenn er gegen Süden nach *B* fortgegangen ist, den Stern, welcher in seinem Scheitel war, bey seiner Meridianhöhe gegen Norden von dem Scheitel abstehen sehen. Wären die Richtungen der Schwere, welche seine Vertikallinien bestimmen, mit einander parallel, und an seinem zweyten Standpunkt *B* die mit *AZ* gezogene Parallele *BS* seine Vertikallinie; so würde, wenn der Stern *S* sich in einer nicht sehr großen Distanz *AS* von der Erde befände, derselbe nun nach der Richtung *BS* von dem Standpunkt *B* aus gesehen werden, und folglich übereinstimmend mit der Beobachtung von dem Scheitel *S'* um den Winkel *S'Bs* gegen Norden abstehen. Alsdenn müßte aber der Winkel *SAM* zwischen dem am Scheitel und dem am Horizont befindlichen Stern, welcher also an seinem Standpunkt *A* ein rechter war, in den stumpfen Winkel *SBM* übergegangen seyn. Allein er wird an seinem Standpunkt *B* diesen Winkel noch einem rechten Winkel gleich finden, und daher werden die von *A* und *B* nach dem Stern gezogenen Gesichtslinien nicht bemerkbar von der parallelen Lage verschieden seyn. Sein Horizont wird nun in die Lage *Bm* gekommen seyn, und der vorher am Horizont befindliche Stern wird sich um eben so viel über den Horizont erhoben haben, als der am Scheitel gestandene von demselben gegen Norden hin abgerückt ist. Die Richtungen der Schwere sind also nicht mit einander parallel, und die Veränderung des Scheitelabstands der Sterne rührt allein von ihrer nicht parallelen Lage her. An dem Standpunkt *B* muß also, wenn man den Winkel $S'Bz$ dem in *B* beobachteten Scheitelabstand gleich macht, die Bz die Vertikallinie seyn, welche mit der erstern in einem Punkt *C* unterhalb der Erdoberfläche zusammenlauft. Hiezu kommt noch die Erfahrung, daß man auf der See von entfernten erhabenen Gegenständen zuerst nur die Spitzen erblickt, indem ihr unterer Theil durch die Oberfläche des Wassers bedeckt wird, und sie sich nach und nach immer mehr über dieselbe zu erheben scheinen, so wie man sich ihnen nähert. Die Oberfläche des stillstehenden Wassers und der Erde, so weit sie uns eben zu seyn scheint, ist also keine ebene, sondern eine krumme erhabene Fläche, und der Horizont ist eigentlich eine Ebene, welche die Oberfläche des stillstehenden Wassers berührt.

Wenn der Beobachter immer weiter nach der Richtung der Mittagslinie fortgeht; so wird er einen Stern, der vorher in seinem Scheitel stund, immer weiter von demselben nach einer Richtung abrücken sehen, welche der seiner Bewegung auf der Erdoberfläche entgegen gesetzt ist, und zwar bey gleichen auf der Erde zurückgelegten Wegen nahe um gleich viel, von welchem Ort der Erde man auch ausgehen mag. Die Gestalt der Erde muß also der Gestalt eines Körpers sehr nahe kommen, der allenthalben gleich starke Krümmung hat, d. i. einer Kugel. Unter dieser Voraussetzung werden die Richtungen der Schwere in dem Mittelpunkt der Erdkugel zusammenlaufen, und der Horizont wird eine die Erdkugel an dem Ort des Beobachters berührende Ebene seyn.

§. 10. Beobachtet man die Sterne vor dem Aufgang der Sonne; so bemerkt man, daß ihr Licht in dem Maas schwächer wird, als die Morgendämmerung anfangt stärker zu werden, und zuerst die kleineren, hernach bey dem Anbruch des Tags und dem Aufgang der Sonne die größeren ganz verschwinden. Der Mond, welcher vorher mit einem lebhaften Lichte glänzte, wird nach dem Aufgang der Sonne blaß erscheinen, und kaum noch sichtbar seyn. Des Abends

beob-

beobachtet man die umgekehrten Erscheinungen. So wie es anfängt dunkel zu werden, erscheinen die Sterne nach und nach wiederum, und glänzen mit einem desto lebhafteren Lichte, je grösser die Dunkelheit der Nacht wird. Der Mond, welcher neben dem Glanz der Sonne kaum sichtbar war, wird bey eintretender Nacht mit einem lebhafteren Lichte erscheinen. Daß wir die Sterne bey Tag nicht mehr sehen, kommt also nicht daher, daß sie aufhören zu leuchten, sondern von dem weit stärkeren Glanz der Sonne, welcher ihr Licht auslöscht. Die Fernröhren setzen uns in den Stand, dieses durch die Erfahrung zu bestätigen. Sie zeigen uns die Sterne selbst um die Mittagszeit, und diejenige, welche nahe genug bey dem Pol sind, um beständig über dem Horizont zu bleiben, können mittelst derselben zu jeder Tageszeit bey heiterem Himmel beobachtet werden.

Das Erscheinen und Verschwinden der Sterne bey ihrem Auf- und Untergang betreffend, ist es wahrscheinlich, daß sie unter dem Horizont ihre Parallelkreise nach demselben Gesetz wie oberhalb desselben fortbeschreiben. Die im vorhergehenden §. angeführten Erfahrungen bestätigen diese Vermuthung, indem sie uns einen vorher unsichtbar gewesenen Theil ihres scheinbaren Wegs zeigen, welcher nach demselben Gesetz als der anfangs sichtbare beschrieben wird. Die Himmelskugel umgiebt also die Erde von allen Seiten, und weil wir an jedem Ort der Erde die Sterne beständig in derselben Lage gegeneinander bemerken; so können wir voraussetzen, daß wir uns, wo auch unser Standpunkt auf der Erdoberfläche liegen mag, in dem Mittelpunkt dieser Kugel befinden, an deren Oberfläche die Sterne zu stehen scheinen. Man nennt daher auch denjenigen Theil der Astronomie, welcher die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper betrachtet, die sphärische Astronomie.

Uebrigens darf man aus den bisher angeführten Erscheinungen nicht schließen, daß man sich wirklich in dem Mittelpunkt der Himmelskugel befinde, und alle Sterne gleichweit von uns entfernt seyen. Denn es lehrt uns die Erfahrung, daß wir von der Entfernung der Gegenstände nicht mehr urtheilen können, sobald sie die Distanz betrift, auf welche unser Augenmaas in der Schätzung der Entfernungen reicht. Ueber diese Gränze hinaus können wir nur mittelst der bekannten wahren Größe der Gegenstände, oder der Veränderung ihrer Lage gegeneinander, welche entweder von ihrer wirklichen Bewegung oder der Veränderung unsers Standpunkts herrührt, von ihrer Entfernung urtheilen, und bestimmen, welche uns näher liegen oder entfernter seyen. Fallen aber, wie es bey dem ersten Anblick des Himmels der Fall ist, diese Mittel zur Schätzung der Entfernungen weg; so sind wir geneigt, alle dergleichen Gegenstände für gleich weit von uns entfernt zu halten. So scheinen demjenigen, der sich in einer großen Ebene befindet, die entfernten ihn umgebenden Gegenstände auf dem Umfang eines Kreises sich zu befinden, in dessen Mittelpunkt sein Standpunkt liegt. Die fernere Untersuchung wird zeigen, wie weit obige Voraussetzung richtig ist, und bey welchen Himmelskörpern sich eine merkliche Abweichung davon zeigt. Die genaue Beobachtung derselben wird uns in den Stand setzen ihre Entfernung zu bestimmen, und die Abweichungen selbst zu berechnen.

§. 11. Bey fortgesetzten Beobachtungen der Himmelskörper wird man zwey Arten derselben bemerken. Die meisten verändern ihre Lage nicht merklich gegeneinander, und heißen Fixsterne, andere, welche sich mit sehr ungleichen Geschwindigkeiten und bald nach dieser, bald nach einer andern Richtung an dem Fixsternhimmel hin zu bewegen, zuweilen auch einige Zeit stille zu stehen scheinen, heißen Planeten oder Irrsterne. Die ersteren wird man als feste Punkte der Himmelskugel betrachten können, auf welche man die Bewegung der letztern beziehen kann. Man hat daher von den ältesten Zeiten her ihre gegenseitige Lage so genau als möglich zu bestimmen gesucht, und sie nach der Lebhaftigkeit ihres Lichts in verschiedene Classen eingetheilt. Die hellsten nannte man Sterne der ersten Größe, die etwas minder hellen, Sterne der zweyten Größe, u. s. w. so, daß diejenige, welche man nur mit Mühe noch mit bloßen Augen sehen kann, Sterne von der sechsten Größe heißen. Um einen jeden Fixstern bequem bezeichnen zu können, ohne ihm, wie es bey den hellsten der Fall ist, einen besondern Namen zu geben, hat man sich an dem Himmel verschiedene Bilder verzeichnet gedacht, z. B. einen Bären, einen Stier, einen Herkules, u. s. w. so daß die Sterne bestimmten Theilen dieser Bilder entsprachen, und davon den Namen erhielten. So nannte man z. B. den Stern, welcher dem Auge des Stiers entsprach, das Stieraug, u. s. w. Hienach konnte man die Stellen am Himmel beyläufig bezeichnen, wo ein neuer Stern gesehen wurde, wenn man sagte: er stehe im Schwanz des großen Bären, am Kopf des Stiers, u. s. w. Die zu einem solchen Bild gehörige Sterne machen ein sogenanntes Sternbild oder eine Constellation aus. Die Astrognosie giebt eine ausführliche Beschreibung dieser Sternbilder, lehrt sie am Himmel aufsuchen, und die ihnen zugehörigen Sterne, welche zum Theil eigne Namen haben, grösstentheils aber mit Buchstaben bezeichnet werden, kennen *).

Zweytes Capitel.

Von der astronomischen Stralenbrechung und Parallaxe.

§. 12. Wir sind in dem vorhergehenden Capitel von solchen Beobachtungen ausgegangen, weil sich mit ganz einfachen Werkzeugen und zum Theil mit dem bloßen Auge anstellen lassen. Sie setzten uns in den Stand, die Gesetze der täglichen Bewegung der Himmelskörper im Allgemeinen zu bestimmen, und es ist jetzt zu untersuchen, welche Modifikationen dieselbige erleiden, wenn man sie genauer betrachtet.

1.) Man messe den Abstand zweyer Sterne, von welchen sich der eine in der Nähe des Horizonts, der andere in einerley Vertikalkreis mit dem ersteren sich befindet, und wiederhole die Beobachtung, wenn die zwey Sterne sich mehr über den Horizont erhoben haben; so wird man beständig den letzteren Abstand grösser finden, als den er-

*) Anleitung zur Kenntniß des gestirnten Himmels von J. E. Bode. 2te Auflage.

stern, und der Unterschied wird desto grösser seyn, je näher der eine Stern am Horizont steht, und je grösser ihr Abstand ist.

2.) Man beobachte die gröste und kleinste Höhe eines nicht untergehenden Sterns, und nehme ihre halbe Summe, oder die halbe Summe der kleinsten und die Ergänzung der grösten Höhe zu 180°, wenn leztere in den südlichen Quadraten des Meridians fällt; so ist diese halbe Summe der Polhöhe gleich (§.3.S.4.), welche desto grösser herauskommen wird, je grösser der Höhenunterschied der Sterne ist. Unter einer Polhöhe, welche grösser ist als 45° wird man einen Stern wählen können, dessen gröste Höhe nahe an den Scheitel fällt, und unter einer Polhöhe von $48\frac{1}{2}$° z. B. wird man mittelst eines solchen Sterns die Polhöhe um mehr als zwey Minuten grösser finden als diejenige, welche man aus den Höhen eines nahe beym Pol stehenden Sterns abgeleitet hat.

3.) Man lege eine Polhöhe zum Grund, welche man aus wenig von einander verschiedenen Sternhöhen abgeleitet hat, beobachte die Höhe eines nahe bey dem Scheitel vorübergehenden Sterns im Meridian, und ziehe von ihr, oder ihrer Ergänzung zu 180°, wenn die Höhe in den südlichen Quadranten des Meridians fiel, die Polhöhe ab; so wird der Rest die Polardistanz des Sterns seyn. Für beliebige Stundenwinkel berechne man nach §. 8. aus diesen Stücken das Azimuth und die Höhe dieses Sterns; so wird man, wenn man die Zeiten abwartet, da der Stern diese Höhen erreicht, zwar die Azimuthe mit den berechneten sehr nahe übereinstimmend finden, die Höhen aber werden desto grösser seyn als die berechneten, je kleiner sie sind. Macht man den Versuch mit anderen Sternen; so wird man wiederum die Azimuthe mit den berechneten übereinstimmend, und bey gleichen Höhen gleiche Unterschiede zwischen der Beobachtung und der Berechnung finden, welche nahe am Horizont bis auf einen halben Grad steigen werden.

Stellt man diese Untersuchungen an anderen Orten der Erde an; so wird man unter übrigens gleichen Umständen dieselben Resultate erhalten. Letzterer Umstand macht es wahrscheinlich, daß wir den Mittelpunkt der Himmelskugel in dem Mittelpunkt der Erde annehmen müssen, und die bemerkten Unterschiede vielleicht daher rühren, daß wir auf der Oberfläche der Erde uns ausserhalb des Mittelpunkts der Himmelskugel befinden.

§. 13. Um dieses zu untersuchen, sey *A* (Fig. 6.) ein Ort auf der Oberfläche der Erde, deren Mittelpunkt *C* sey; so wird der verlängerte Halbmesser *CA* der Erde durch das Zenith *Z* des Orts *A* gehen. Steht nun ein Stern in *S*, und zieht man *CS*, *AS*; so wird *ZAS* der ~~auf der~~ Oberfläche der Erde beobachtete Abstand vom Scheitel seyn, welcher von dem, vermöge der Voraussetzung, gemeinschaftlichen Mittelpunkt *C* der Erde und der Himmelskugel aus gesehen = *ZCS* seyn würde. Da nun die Punkte *C*, *A*, *S*, *Z* in einer durch die Vertikallinie *CZ* gehenden Ebene, mithin in einer Vertikalebene liegen; so wird der Winkel *ASC* der Ueberschuß des von einem Punkt der Erdoberfläche aus beobachteten Abstands vom Scheitel über den vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen seyn, welchen man die Parallaxe der Höhe nennt. Durch diese wird also das Azimuth mit den Beobachtungen §. 12. übereinstimmend, nicht geändert, die Höhen aber werden vermindert. Die im vorhergehenden §. angeführten Erscheinungen müssen also wenigstens zum Theil eine andere Ursache haben, wodurch die Höhe der Sterne einen größeren Zuwachs erhält, als sie durch die Parallaxe, wenn sie anders merklich ist, vermindert wird.

§. 14. Die Erfahrung, daß die Lichtstralen, wenn sie schief aus einem Mittel in ein anderes übergehen, an der sie von einander trennenden Fläche von ihrem geradlinigten Weg abgelenkt oder gebrochen werden, und wir daher die Gegenstände nach einer andern Richtung sehen, als wir sie ohne diese Brechung sehen würden, wird den Beobachter veranlassen zu untersuchen, ob nicht auch die von den Himmelskörpern zu uns kommende Lichtstralen eine solche Brechung leiden, und sich daraus die im 12. §. angeführten Erscheinungen erklären lassen.

Die Erde ist allenthalben von einem durchsichtigen und elastischen Fluidum, der Luft, umgeben, welches unsere Atmosphäre bildet. Die Luft ist, wie andere Körper, schwer, und der Druck der Atmosphäre hält an der Oberfläche der See mit der Quecksilbersäule des Barometers von 28 pariser Zollen bey der Temperatur des schmelzenden Eises das Gleichgewicht. Unter diesem Druck, und bey der Temperatur des schmelzenden Eises verhält sich die specifische Schwere der Luft zu der des Quecksilbers = 1 : 10477,9 *), mithin würde, wenn die Atmosphäre durchaus einerley Dichtigkeit hätte, ihre Höhe 28 . 10477,9 Zolle, d. i. 24448 pariser Fuß betragen. Die Dichtigkeit der Luft ändert sich aber, vermöge des Mariottischen Gesetzes, sehr nahe dem Druck oder den Barometerhöhen proportional: folglich müssen bey einerley Temperatur die unteren Schichten der Atmosphäre dichter seyn als die oberen, deren Gewicht die ersteren zusammendrückt. So wie man sich in der Atmosphäre erhebt, werden sie dünner und dünner, und wenn sie durchaus einerley Temperatur hätten; so würden ihre Dichtigkeiten mithin auch die Barometerhöhen in einer geometrischen Progression abnehmen, wenn die Höhen über der Erdoberfläche in einer arithmetischen Progression wachsen. Auf der andern Seite wird die Luft durch die Wärme ausgedehnt und zieht sich bey der Kälte wieder zusammen, so daß die Räume, welche sie bey der Temperatur des unter einer Barometerhöhe von 28 pariser Zollen siedenden Wassers und der des schmelzenden Eises einnimmt, sich verhalten wie 1,375 : 1, oder wie 11 : 8. Die in den obern Theilen der Atmosphäre herrschende Kälte wird also die Dichtigkeit der obern Schichten wieder vermehren, und vielleicht der Atmosphäre Gränzen

*) Biot und Arrago wogen bekannte Volumina von sehr trockener Luft und Quecksilber sehr genau ab, und fanden dadurch das Quecksilber 10466,6mal schwerer als die Luft. Obige Zahl gilt für die Luft der Atmosphäre bey ihrem mittleren Zustand, welche wegen der in ihr enthaltenen Wasserdämpfe die in dem Verhältniß von 5 : 7 leichter als die Luft sind, leichter als sehr trockene Luft ist, und ist aus Barometerbeobachtungen geschlossen.

setzen, welche nicht Statt finden würden, wenn das Mariottische Gesetz nach aller Schärfe wahr wäre, und sie durchaus einerley Temperatur hätte. Da das Gesetz der Wärmeabnahme in der Atmosphäre unbekannt, und beständigen Veränderungen unterworfen ist; so ist es nicht möglich, das Gesetz, nach welchem die Dichtigkeit der Luft sich mit der Höhe wirklich verändert, zu bestimmen. Den Beobachten zu Folge nimmt mit einer Erhöhung von 20,000 par. Fuß über die Oberfläche der Erde die Wärme um 30 Grade des Reaumurschen Thermometers im Mittel genommen ab.

Endlich hat die Luft die Eigenschaft, die Lichtstralen nach demselben Gesetz, wie die übrigen durchsichtigen Körper, zu brechen, daß nemlich der einfallende und gebrochene Stral mit dem Einfallsloth in einer Ebene liegen, und der Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels bey einerley Dichtigkeit der Luft ein constantes Verhältniß hat. Dieses Verhältniß ist beym Uebergang aus einem so viel als möglich luftleer gemachten Raum in Luft von derjenigen Dichtigkeit, welche sie bey 28 par. Zollen Barometerhöhe und der Temperatur des schmelzenden Eises hat, dem von $1,000294332 : 1$ gleich. Es verändert sich mit der Dichtigkeit der Luft, und ist, wenn man ihre obige Dichtigkeit $= 1$, bey einem anderen Barometer und Thermometerstand aber $= d$ setzt, dem Verhältniß von $\sqrt{1 + 0,0005887508\, d} : 1$, oder sehr nahe von $1 + 0,000294332\, d : 1$ gleich, und hängt nur in so fern von der Wärme ab, als dadurch die Dichtigkeit der Luft geändert wird. Für Luft in einem eingeschlossenen Raum bleibt das Brechungsverhältniß dasselbe, wenn gleich die Temperatur sich verändert.

§. 15. Es sey nun C (Fig. 7.) der Mittelpunkt der Erde, und CAZ die Vertikallinie des Orts A. Man denke sich eine beliebige Anzahl mit der Erde concentrischer Kugeloberflächen, deren Halbmesser Ca, Cb, u. s. w. seyen; so wird die Luft an jeder dieser Schichten einerley Dichtigkeit haben. Wir wollen zuerst annehmen, daß die Dichtigkeit der Luft in jeder der zwischen zwey unmittelbar auf einander folgenden Kugeloberflächen befindlichen Schichten gleichförmig, aber in jeder der Erde näher liegenden grösser als in der oberhalb ihr befindlichen sey. In der Ebene eines durch den Stern S gehenden Vertikalkreises falle ein Lichtstral Sa auf die äusserste Gränze der Atmosphäre in a auf; so wird die Verlängerung ap des an den Punkt a gezogenen Halbmessers des Einfallsloth seyn, und der Lichtstrahl bey seinem Uebergang in die erste Luftschichte so gebrochen werden, daß die Verlängerung ar des gebrochenen Strals ab zwischen dem einfallenden Stral und dem Einfallsloth liegen wird. Wegen der vermöge der Voraussetzung gleichförmigen Dichtigkeit der Schichten wird sein Weg ab in der ersten Schichte geradlinigt seyn, und Sa, ab, Ca werden in einer Ebene liegen. Eben so wird er ferner beym Eintritt in die zweyte Luftschichte gegen dem Einfallsloth Cbq hin gebrochen werden, und in derselben geradlinigt durch bc fortgehen, so daß ab, bc, Cq in einer Ebene liegen, u. s. w. bis er bey A in das Aug des Beobachters kommt. Der Lichtstral wird also unter dieser Voraussetzung eine aus geraden zusammengesetzte gebrochene Linie $abcA$ in der Atmosphäre beschrieben, welche ihre hole Seite gegen die Erde kehren, und ganz in einem durch den Stern gehenden Vertikalkreis liegen wird.

Vergrössert man die Anzahl der Schichten, und macht sie folglich dünner; so wird sich die Zunahme der Dichtigkeit der Luft von der obersten Schichte an immer mehr der in der Natur Statt findenden stetigen Zunahme, und die gebrochene Linie einer stetig krummen Linie nähern. Mithin wird der Weg eines Lichtstrahls durch die Atmosphäre eine gegen die Erde hole krumme Linie seyn, welche ganz in der Ebene des durch den Stern gehenden Vertikalkreises liegen wird. In A wird man den Stern nach der Richtung der Tangente At dieser krummen Linie, welche ebenfalls in der Ebene des Vertikalkreises liegen wird, erblicken, und ZAt wird sein scheinbarer Abstand vom Scheitel seyn. Um die Wirkung der Stralenbrechung von derjenigen, welche die Parallaxe (§. 13.) hervorbringt, zu trennen, ziehe man durch A die As mit Sa parallel; so wird ZAs derjenige Scheitelabstand seyn, welchen man bey unmerklicher Parallaxe finden würde, und der Winkel sAt, welcher die ganze Ablenkung des Lichtsstrals von seiner anfänglichen Richtung mißt, und die astronomische Stralenbrechung heißt, wird die Wirkung der Stralenbrechung allein angeben.

§. 16. Schon aus dieser allgemeinen Darstellung der astronomischen Stralenbrechung lassen sich folgende Schlüsse ziehen.

1.) Am Scheitel verschwindet die Stralenbrechung, weil daselbst der einfallende Stral mit dem verlängerten Halbmesser der Erde, oder dem Einfallsloth zusammenfällt.

2.) Die Stralenbrechung verändert, so wie die Parallaxe nur die Höhen den Sterne, ohne ihr Azimuth zu verändern, unterscheidet sich aber von letzterer darinn, daß sie die Höhen vergrößert, indeß die Parallaxe sie vermindert. (§. 13.). Denn der Weg des Lichtsstrals ist eine gegen die Erde hole, ganz in der Ebene eines Vertikalkreises liegende, krumme Linie.

3.) Mit dem Scheitelabstand wächst die Stralenbrechung beständig, weil der von einem niedriger stehenden Stern herkommende Lichtstral schiefer auf die Atmosphäre auffällt, mithin stärker gebrochen wird, und ein größerer Theil seines Wegs in derselben liegt, als wenn er von einem höheren Stern herkommt.

4.) Unter übrigens gleichen Umständen ist in gleichen Höhen die Stralenbrechung gleich groß, weil die Sterne weit ausserhalb unserer Atmospähre liegen müssen, und die Stralenbrechung allein von letzterer abhängt.

5.) Wenn zwey Sterne sich in einerley Vertikalkreis befinden; so wird ihr Abstand um den Ueberschuß der Stralenbrechung des niedriger stehenden über die des höheren vermindert. Erheben sie sich mehr über den Horizont, und kommen schief gegen denselben zu stehen; so werden die Stralenbrechungen geringer, und verkürzen überdieß die Distanz nicht mehr um die volle Differenz der Stralenbrechungen. Der scheinbare Abstand wird also mit der Höhe der Sterne nach und nach größer werden.

6.) Die Stralenbrechungen müssen mit dem Zustand der Atmosphäre sich beständig verändern, und insbesondere von dem Stand des Barometers und Thermometers abhängen, wovon die Dichtigkeit der Luft, und mithin die Größe der Brechung abhängt. In Höhen unterhalb eines Grads geht der Lichtstral nahe an der Oberfläche hin, und leidet in den unteren, oft mit vielen Dünsten angefüllten, Theilen der Atmosphäre irreguläre Brechungen, welche die Refraktion in der Nähe des Horizonts sehr veränderlich machen werden.

Man sieht, daß die Wirkungen der astronomischen Stralenbrechung die im 12. §. angeführten Erscheinungen im Allgemeinen erklären. Aber erst die genaue Bestimmung derselben für alle Höhen wird uns in den Stand setzen, zu beurtheilen, ob jene Erscheinungen in der täglichen Bewegung der Fixsterne sich vollständig daraus erklären lassen.

§. 17. Unter den im Anfang des 15. §. gemachten Voraussetzungen sey *c* (Fig. 8.) der Mittelpunkt der Erde, *a* ein Punkt auf ihrer Oberfläche, *caz* die Vertikallinie des Orts *a*, und *sbb'b''a* die aus geraden Linien zusammengesetzte Bahn des Lichts. Ferner seyen *cb*, *cb'*, *cb''* die Halbmesser der Kugeloberflächen, welche die Luftschichten von einander trennen, und die Einfallswinkel, wie z. B. *pbs*, seyen *b*, *b'*, *b''*, die ihnen entsprechende Brechungswinkel, wie *pbf*, seyen *e*, *e'*, *e''*. Bezeichnet man die Dichtigkeit der Schichten von oben an gerechnet mit *d*, *d'*, *d''*, und setzt in dem Ausdruck des Brechungsverhältnisses aus dem leeren Raum in Luft (§. 14.) die Zahl 0,0005887508 = *k*; so wird für den Uebergang aus dem leeren Raum in die erste Schichte das Brechungsverhältniß dem von $\sqrt{1+kd} : 1$, für den Uebergang aus der ersten in die zweyte dem von $\sqrt{1+kd'} : \sqrt{1+kd}$, u. s. w. gleich seyn, und man wird haben:

$$\begin{aligned}
\text{Sin.}\, b : \text{Sin.}\, e &= \sqrt{1+kd} : 1 \\
\text{Sin.}\, b' : \text{Sin.}\, e' &= \sqrt{1+kd'} : \sqrt{1+kd} \\
\text{Sin.}\, b'' : \text{Sin.}\, e'' &= \sqrt{1+kd''} : \sqrt{1+kd'};
\end{aligned}$$

folglich $\text{Sin.}\, b\, \text{Sin.}\, b'\, \text{Sin.}\, b'' : \text{Sin.}\, e\, \text{Sin.}\, e'\, \text{Sin.}\, e'' = \sqrt{1+kd''} : 1.$

Aber in den Dreyecken *bcb'*, *b'cb''* u. s. w. verhält sich

$$\begin{aligned}
\text{Sin.}\, e : \text{Sin.}\, b' &= cb' : cb \\
\text{Sin.}\, e' : \text{Sin.}\, b'' &= cb'' : cb' \\
\text{Sin.}\, e'' : \text{Sin.}\, zat &= ca : cb''
\end{aligned}$$

mithin $\text{Sin.}\, e\, \text{Sin.}\, e'\, \text{Sin.}\, e'' : \text{Sin.}\, b\, \text{Sin.}\, b'\, \text{Sin.}\, zat = ca : cb$

Verbindet man diese Proportion mit der oben gefundenen; so er-

hält man $\text{Sin.}\, b : \text{Sin.}\, zat = ca\, \sqrt{1 + kd''}\; cb$
Vergrößert man die Anzahl der Schichten, und vermindert folglich ihre Dicke; so bleibt diese Proportion, und zugleich nähert sich die Bahn des Lichts einer stetig krummen Linie, und die Dichtigkeit an der Oberfläche der untersten Schichte nähert sich der Dichtigkeit D der Luft an der Oberfläche der Erde.

Man verlänge die sb, bis sie der cz in q begegnet, und die verlängerte ab'' schneide die sq in r. Die Stralenbrechung arq oder srt setze man $= r$, und den Winkel $acb = c$; so wird $b = cbq = zqb - acb = zat + arq - acb = z + r - c$, wenn man den scheinbaren Abstand vom Scheitel $= z$ setzt. Für die stetige Zunahme der Dichtigkeit der Luft von der obersten Schichte an, und für die krummlinigte Bahn des Lichts wird man also haben

1.) $\text{Sin.}\,(z + r - c) : \text{Sin.}\, z = ca\, \sqrt{1 + kD}\;\; cb.$

Ferner verhält sich für eine beliebige der aufeinander folgenden Brechungen, z. B. an dem Punkt b', wenn man das daselbst statt findende Brechungsverhältniß dem von $f : g$ gleich setzt,

$$\text{Sin.}\, b' : \text{Sin.}\, e' = f \quad : g.$$

Aber $\text{Sin.}\, e' : \text{Sin.}\, b'' = cb'' : cb' :$

folglich $\text{Sin.}\, b' : \text{Sin.}\, b'' = f.\, cb'' : g.\, cb'.$

Man setze die Ergänzung des Winkels $bb'b''$ zu $180°$, oder den gebrochenen Winkel an dem Punkt b' gleich r', und den Winkel $b'cb'' = c'$; so ist $b'' = b' + c' - r'$, und daher

$$\text{Sin.}\, b' : \text{Sin.}\,(b' + c' - r') = f.\, cb'' : g.\, cb'$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sin.}\,(b' + c' - r') + \text{Sin.}\, b' : \text{Sin.}\,(b' + c' - r') - \text{Sin.}\, b' \\ \text{oder Tang}\left(b' + \frac{c' - r'}{2}\right) \quad \text{Tg.}\, \frac{c' - r'}{2} \end{array}\right\} = g.\, cb' + f.\, cb'' :$$

$g.\, cb' - f.\, cb'' = M : N$ zur Abkürzung, welches Verhältniß sich dem von $\text{Tg.}\, b' : \frac{c' - r'}{2}$ desto mehr nähert, je größer die Anzahl der Schichten genommen wird. Und da auf der andern Seite $\left\{\begin{array}{l}\text{Sin.}\, e' \\ \text{Sin.}\,(b' - r')\end{array}\right\} = f : g$; so wird man auf ähnliche Art haben $\text{Tg.}\, \frac{1}{2} r' : \text{Tg.}\,(b' - \frac{1}{2} r') = f - g : f + g$, und dieses Verhältniß wird sich dem von $\frac{1}{2} r' : \text{Tg.}\, b'$ desto mehr nähern, je größer man die Anzahl der Schichten nimmt. Da nun

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tg.}\, b' : \frac{c' - r'}{2} = M : N \\ \frac{1}{2} r' : \text{Tg.}\, b' = f - g : f + g \end{array}\right\} \text{desto genauer, je dünner die Schichten sind;}$$

so wird $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} r' : \frac{c' - r'}{2} \\ r' : c' - r' \end{array}\right\} = M\,(f - g) \quad N\,(f + g)$ desto genauer seyn, je mehr sich die gebrochene Bahn des Lichts einer stetig krummen Linie nähert. Es sey $p : q$ das Verhältniß, welchem sich das von $M\,(f - g) : N\,(f + g)$ bey der Verminderung der Schich-

ten beständig nähert; so wird für die krummlinigte Bahn des Lichts $r' : c'-r' = p : q$
also 2.) $r' : c' = p : p+q$ seyn.

Nun ist das Verhältniß von $M : N$, so wie das von $f : g$, mithin auch das von $p : p+q$ von den Einfallswinkeln unabhängig, und die Dichtigkeiten d, d' u. s. w. hängen von den Abständen cb, cb' u. s. w. ab. Folglich ist das Verhältniß der zusammengehörigen Veränderungen der Refraktion r und des Winkels c am Mittelpunkt der Erde ein von den Distanzen cb, cb' u. s. w. allein abhängiges Verhältniß. Wäre dieses Verhältniß constant; so wäre auch das Verhältniß von $r : c$ eben diesem constanten Verhältniß gleich. Da nun wegen der in Vergleichung mit dem Halbmesser der Erde nicht sehr bedeutenden Höhe der Atmosphäre, so weit sie die Stralen noch merklich bricht, die Distanzen cb, cb' u. s. w. nicht sehr von einander verschieden sind; so wird das Verhältniß von $r' : c'$ nahe einem constanten Verhältniß $1 : n$, mithin auch $r : c = 1 : n$, $c = nr$, $c-r = (n-1)r$, und, wenn man $n-1 = m$ setzt, vermöge der Proportion $n. 1$

3.) $\text{Sin.}(z-mr) : \text{Sin.}z = ca\sqrt{1+kD} : bc$ seyn, welches die Simpsonsche Regel für die Stralenbrechung ist, wenn man $m = \frac{11}{2}$ setzt.

Setzt man $z = 90^\circ$; so wird für die Horizontalrefraktion R werden

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin.}(90^\circ - mR)\\ \text{Cos.}\, mR\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Sin.}\,90^\circ\\ 1\end{matrix}\right\} = ca\sqrt{1+kD} : cb$$

Mithin ist 4.) $\text{Cos.}\, mR = \frac{ca}{cb}\sqrt{1+kD}$.

Aus n. 3. folgt also auch

$$\text{Sin.}\,z : \text{Sin.}(z-mr) = 1 : \text{Cos.}\,mR$$

$$\text{Sin.}\,z + \text{Sin.}(z-mr) : \text{Sin.}\,z - \text{Sin.}(z-mr) = 1+\text{Cos.}\,mR : 1-\text{Cos.}\,mR$$

oder 5.) $\text{Tang.}(z-\frac{1}{2}mr) : \text{Tg.}\frac{1}{2}mr = 1 : \overline{\text{Tg.}\frac{1}{2}mR}^2$.

Für eine andere Zenithdistanz z' sey die Refraktion $= r'$; so wird man haben

$$\text{Tg.}(z'-\tfrac{1}{2}mr') \quad \text{Tg.}\tfrac{1}{2}mr' = 1 \quad \overline{\text{Tg.}\tfrac{1}{2}mR}^2 \text{ : folglich}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Tang.}\frac{1}{2}mr \quad \text{Tg.}\frac{1}{2}mr'\\ \text{oder sehr nahe } \frac{1}{2}mr : \frac{1}{2}mr'\\ 6.)\quad r : r'\end{matrix}\right\} = \text{Tg.}(z-\tfrac{1}{2}mr) \quad \text{Tg.}(z'-\tfrac{1}{2}mr')$$

Mithin verhalten sich die Refraktionen wie die Tangenten der um das $\frac{m}{2}$ fache dieser Refraktionen verminderten scheinbaren Abstände vom Scheitel, welches die Bradleysche Regel ist, wenn man $\frac{m}{2} = 3$ setzt.

Da $1 : \overline{\text{Tg.}\frac{1}{2}mR}^2 = \text{Tg.}(z-\frac{1}{2}mr) \quad \text{Tg.}\frac{1}{2}mr$, (n. 5.)

$$= \text{Tg.}\,z - \text{Tg.}\tfrac{1}{2}mr : \text{Tg.}\tfrac{1}{2}mr + \text{Tg.}\,z\,\overline{\text{Tg.}\tfrac{1}{2}mr}^2$$

$$= 1 - \text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr\,\text{Cotg.}\,z : \text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr\,\text{Cotg.}\,z + \overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr}^2;$$

so ist $\left.\begin{matrix} 1+\overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2 \\ \overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2 \end{matrix}\right\} : 1 = 1+\overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr}^2 : 1-\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr\,\text{Cotg.}\,z$

$$1+\overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr}^2 = \overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2 - \overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2\,\text{Cotg.}\,z\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr$$

$$\overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr}^2 + \overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2\,\text{Cotg.}\,z\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr = \left\{\begin{matrix}\overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2 - 1 \\ \overline{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2\end{matrix}\right\};$$ folglich durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung

$$\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr = \tfrac{1}{2}\overline{\text{Sec.}\,\tfrac{1}{2}mR}^2\,\text{Cotang.}\,z\left(\sqrt{1+(\text{Sin.}\,mR\,\text{Tg.}\,z)^2}-1\right)$$

Sey 7.) $\text{Tang.}\,x = \text{Sin.}\,mR\,\text{Tang.}\,z$; so ist $\left.\begin{matrix}1+\overline{\text{Tg.}\,x}^2 \\ \overline{\text{Sec.}\,x}^2\end{matrix}\right\} =$

$= 1+(\text{Sin.}\,mR\,\text{Tg.}\,z)^2$, und $\sqrt{1+(\text{Sin.}\,mR\,\text{Tg.}\,z)^2}-1 = \text{Sec.}\,x - 1$
$= \text{Tg.}\,x\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}x = \text{Sin.}\,mR\,\text{Tg.}\,z\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}x = 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}mR\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}mR\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}x$
mithin $\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mr = \text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}mR\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}x$, oder sehr nahe

8.) $r = R\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}x$.

§. 18. Wenn 1.) die Horizontalrefraktion R und die zur Zeitdistanz z gehörige Refraktion r gegeben sind; so findet man

$\text{Tang}\,\tfrac{1}{2}x = \frac{r}{R}$ (§. 17. n. 8.), mithin x selbst.

Hieraus ferner $\text{Sin.}\,mR = \text{Tg.}\,x\,\text{Cotg.}\,z$, also mR; und damit m.

Oder: da $\text{Sin.}\,(z-mr) = \text{Cos.}\,mR\,\text{Sin.}\,z$ (§. 17. n. 3. und 4.): so ist sehr nahe $\text{Sin.}\,z - \tfrac{1}{2}m^2r^2\,\text{Sin.}\,z - mr\,\text{Cos.}\,z = \text{Sin.}\,z - \tfrac{1}{2}m^2R^2\,\text{Sin.}\,z$

$$mr^2\,\text{Sin.}\,z + 2r\,\text{Cos.}\,z = mR^2\,\text{Sin.}\,z$$

also $m = \frac{2r\,\text{Cotang.}\,z}{R^2-r^2}$, wo r und R in Theilen des Halbmessers auszudrücken sind. Sind R und r in Sekunden ausgedrückt: so hat man $m = \frac{2r\,\text{Cotang}\,z}{(R+r)(R-r)\,\text{Sin.}\,1''}$.

Sind 2) die den Zenithdistanzen z, z' entsprechende Refraktionen gegeben; so findet man m auf folgende Art:

Es ist $\frac{\text{Sin.}\,(z-mr)}{\text{Sin.}\,z} = \frac{\text{Sin.}\,(z'-mr')}{\text{Sin.}\,z'}$ (§. 17. n. 3.);

also $\frac{\text{Sin.}\,z\,\text{Cos.}\,mr - \text{Cos.}\,z\,\text{Sin.}\,mr}{\text{Sin.}\,z} = \frac{\text{Sin.}\,z'\,\text{Cos.}\,mr' - \text{Cos.}\,z'\,\text{Sin.}\,mr'}{\text{Sin.}\,z'}$

$$\text{Cos.}\,mr - \text{Sin.}\,mr\,\text{Cotg.}\,z = \text{Cos.}\,mr' - \text{Sin.}\,mr'\,\text{Cotg.}\,z'$$

Aber $\text{Cos.}\,mr = 1-\tfrac{1}{2}m^2r^2$, und $\text{Sin.}\,mr = mr - \tfrac{1}{6}m^3r^3$ sehr nahe; folglich ist, wenn man diese Ausdrücke der Sin. und Cos. von mr und mr' substituirt, und die gehörigen Reduktionen macht, unter der Voraussetzung, daß $r' > r$,

$$3m(r'^2-r^2) = 6(\text{Cotg.}\,z - r'\,\text{Cotg.}\,z') + m^2(r'^3\,\text{Cotg.}\,z' - r^3\,\text{Cotg.}\,z,$$

oder zur Abkürzung $3ma = 6c + bm^2$, woraus man erhält

$$\left(m-\tfrac{3}{2}\tfrac{a}{b}\right)^2 = \frac{6c}{b}\left(\tfrac{3}{8}\frac{a^2}{bc}-1\right)$$

$$m = \tfrac{3}{2}\frac{a}{b} \pm \sqrt{\frac{6c}{b}} \times \sqrt{\tfrac{3}{8}\frac{a^2}{bc}-1}$$

$$= \sqrt{\frac{6c}{b}}\left(\sqrt{\tfrac{3}{8}\frac{a^2}{bc}} \pm \sqrt{\tfrac{3}{8}\frac{a^2}{bc}-1}\right)$$

Man setze $\text{Sin.}\, x = \frac{2}{a}\sqrt{\tfrac{2}{3}bc}$; so wird

$$m = \sqrt{\frac{6c}{b}}\left(\frac{1}{\text{Sin.}x} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{Sin.}x^2}-1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{6c}{b}}\,(\text{Cosec.}\,x \pm \text{Cotg.}\,x)$$

$= \text{Tang.}\tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{6c}{b}}$, wenn man das untere Zeichen gebraucht.

Das obere Zeichen würde einen sehr großen Werth von m geben, und kann hier nicht gebraucht werden. In dem Ausdruck des Sinus des Hülfswinkels x kommen die Refraktionen r, r' im Zähler und Nenner mit einerley Abmessung vor, und daher können sie hier in Sekunden ausgedrükt, ohne Veränderung des Ausdruks gebraucht werden. Den Ausdruk für m hingegen muß man in diesem Fall in folgenden verwandeln $m = \frac{\text{Tg.}\tfrac{1}{2}x}{\text{Sin.}1''}\sqrt{\frac{6c}{b}}$.

Da in obiger quadratischen Gleichung der Coefficent von m^2 sehr klein ist; so ist auch nahe

$3ma = 6c$, $m = \frac{2c}{a} = \frac{2(r\,\text{Cotang}\,z - r'\,\text{Cotang}\,z')}{(r'+r)(r'-r)\,\text{Sin.}\,1''}$, wenn die Refraktionen in Sekunden ausgedrükt sind. Man setze diesen Werth von $m = m'$; so ist $m = m' + \frac{b}{3a}m^2$, sehr nahe $= m' + \frac{b}{3a}m'^2$

$= m' + m'^2\,\frac{(r'^3\,\text{Cotg.}\,z' - r^3\,\text{Cotg.}\,z)\,\text{Sin.}\,1''}{3(r'+r)(r'-r)}$

3.) Wenn m, und die zur Zenithdistanz z gehörige Refraktion r gegeben sind; so hat man

$\text{Cos.}\,mR = \frac{\text{Sin.}(z-mr)}{\text{Sin.}\,z}$ (§. 17. n. 3. und 4.) woraus man mR und R selbst findet.

Oder: $\left.\begin{matrix}1-\text{Cos.}\,mR\\ 2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}mR^2\end{matrix}\right\} = \frac{\text{Sin.}\,z - \text{Sin.}(z-mr)}{\text{Sin.}\,z} = \frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}mr\,\text{Cos.}(z-\tfrac{1}{2}mr)}{\text{Sin.}\,z}$.

$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}mR^2 = \frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}mr\,\text{Cos.}(z-\tfrac{1}{2}mr)}{\text{Sin.}\,z}$, woraus sich wiederum $\tfrac{1}{2}mR$; also auch R ergiebt.

4.) Wenn man die Refraktionen r, r' u. s. w. in einem gegebenen Verhältniß vergrößert oder vermindert; so gehen sie in die fr, fr' über, wenn dieses Verhältniß dem von $f : 1$ gleich ist. Alsdenn wird die Zahl m sich verwandeln in

$m' = \frac{2(fr \,\text{Cotg.}\, z - fr' \,\text{Cotg.}\, z')}{f2(r'+r)(r'-r)\,\text{Sin.}''}$, (n. 3.), $= \frac{m}{f}$. Folglich ist, wenn sich die Refraktionen in einerley Verhältniß verändern, der Coefficent m umgekehrt den Refraktionen proportional.

§. 19. Um die Stralenbrechung durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen, suche man die Polhöhe aus der größten und kleinsten Höhe eines nahe bey dem Pol stehenden Sterns, z. B. des Polarsterns, indem man die halbe Summe der beobachteten oder scheinbaren Höhen nimmt. Diese wird um die halbe Summe der den zwey Höhen entsprechenden Refraktionen zu groß seyn (§. 16.).

Man beobachte ferner die Mittagshöhe eines nahe am Scheitel vorübergehenden Stern, und leite daraus mittelst der vorhin gefundenen Polhöhe seinen Abstand vom Pol her, welcher um eben so viel zu klein seyn wird, als die beobachtete Polhöhe wegen der Refraktion zu groß ist, weil nahe am Scheitel die Refraktion unmerklich ist, und in demselben ganz verschwindet (§. 16.). Ist nun die Polhöhe größer als 45°; so wird man eben diesen Stern auch in seiner kleinsten Höhe unter dem Pol beobachten können, wo er nur eine kleine Höhe haben wird, wenn die Polhöhe nicht viel größer ist als 45°. Diese Höhe wird man größer finden, als den Ueberschuß der Polhöhe über die Polardistanz, welcher genau die kleinste Höhe des Sterns seyn würde, wenn die Polhöhe und Polardistanz richtig wären. Erstere ist aber wegen der Refraktion zu groß, und letztere um eben so viel zu klein; mithin ist die so gefolgerte kleinste Höhe um das Doppelte des in der Polhöhe steckenden Fehlers, d. i. um die zwey Refraktionen, welche die in der Nähe des Pols stehenden Sterne hatten, zu groß. Nimmt man sie als die wahre an, und zieht sie von der beobachteten ab; so wird die dieser Höhe entsprechende Refraktion um die Summe der in der Nähe des Pols Statt findenden Refraktionen zu klein heraus kommen. Weil aber die Refraktionen mit der Höhe abnehmen; so wird die in der Nähe des Pols Statt findende beträchtlich kleiner seyn, als diejenige, welche dem nahe am Horizont stehenden Stern zugehört, und daher leztere auf diesem Weg wenigstens beynahe gefunden werden.

Sey zum Beyspiel die gröste scheinbare Höhe des

Polarsterns	=	50°	14′	18″
kleinste „ „	=	46	49	45
so ist die Summe	=	97	4	3
also die scheinbare Polhöhe	=	48	32	1,5
Ferner: scheinb. Höhe α Perseus über dem Pol	=	89	20	40
mithin scheinbare Polardist. α Pers.	=	40	48	38,5
Polhöhe	=	48	32	1,5
beynahe wahre Höhe α Pers. u. d. P.	=	7	43	23,0
beobachte Höhe	=	7	48	28,0

folglich ist Refraktion für die Höhe 8° 9′ beynahe = 5 5

§. 20. Genauer erhält man die Refraktionen durch folgendes Verfahren. Es sey S die Summe der grösten und kleinsten Höhe eines Circumpolarsterns, oder die Summe der kleinsten und des Supplements der grösten Höhe, wenn leztere in den südlichen Quadranten des Meridians fiele, und s sey die Summe der diesen Höhen entsprechenden Refraktionen oder ihre Differenz, wenn die gröste Höhe in den südlichen Quadranten des Meridians fällt; so wird die scheinbare Polhöhe $= \frac{1}{2} S$, die wahre $= \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} s$ seyn. Für einen andern weiter vom Pol abstehenden Stern seyen diese Summen S' und s' beziehungsweise; so wird aus diesen die scheinbare Polhöhe $= \frac{1}{2} S'$ die wahre $= \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} s'$ seyn. Mithin muß seyn

$$\tfrac{1}{2} S' - \tfrac{1}{2} s' = \tfrac{1}{2} S - \tfrac{1}{2} s, \text{ und } S' - S = s' - s.$$

Aus den Beobachtungen ist der Unterschied $S' - S$ der scheinbaren Polhöhe gegeben: folglich kennt man den Ueberschuß $s' - s$ der Summe der lezteren zwey Refraktionen über die Summe der zwey erstern. In dem vorhergehenden Beyspiel ist

$$\begin{array}{rcl} S' & = & 97^\circ\ 9'\ 8' \\ S & = & \underline{97\ \ 4\ \ 3} \\ \left.\begin{array}{r} S' - S \\ s' - s \end{array}\right\} & = & 0\ \ 5\ \ 5. \end{array}$$

Wäre das Verhältniß dieser Refraktionen zu einander bekannt;

bekannt; so könnte man die Refraktionen selbst finden. Nun erhellt aber aus §. 17. n. 6. daß die Refraktionen in nicht zu kleinen Höhen wenigstens beynahe wie die Tangenten der scheinbaren Abstände vom Scheitel oder die Cotangenten der scheinbaren Höhen sich verhalten müssen, weil $\frac{1}{2}mr$, $\frac{1}{2}mr'$ klein sind; man wird also schließen: wie sich verhält der Ueberschuß der Summe der Tangenten der letztern zwey Scheitelabstände über die Summe der Tangenten der zwey ersten zur Tangente eines Scheitelabstandes, so verhält sich die Differenz $s'-s$ der zwey Refraktssummen zu der jenem Scheitelabstand zugehörigen Refraktion. In obigem Beyspiel ist

Die Cotangente der grösten Höhe des Polarsterns	= 0,832
— — kleinsten — —	= 0,938
Summe =	1,770
Die Cotangente der grösten Höhe α Perseus	= 0,011
— — kleinsten — —	= 6,976
Summe =	6,987
Ueberschuß der letztern Summe über die erste	= 5,217

$5{,}217 : 0{,}832 = \left\{\begin{matrix} 5'5'' \\ 305'' \end{matrix}\right\} : 48{,}6$ Refr. für 50° 14′ sch. H.

$5{,}217 : 0{,}938 = 305 : 54{,}8$ — 46 50

und eben so findet man 0,6 — 89 41

— — — 6′ 47,8 — 7 48

$s = 1\ 43{,}4$;

$s' = 6\ 48{,}4$;

$s = 97°\ 4\ 3{,}0$

$s' = 97\ 9\ 8{,}0$

$S - s = 97\ 2\ 19{,}6$

$S' - s' = 97\ 2\ 19{,}6$

Polhöhe = 48 31 9,8

gröste Höhe α Pers. = 89 20 40,0

Refr. — 0,6

wahre Höhe = 89 20 39,4

Polardistanz = 40 49 29,6

Fällt eine Höhe in den südlichen Quadranten des Meridians; so wird ihre Cotangente subtraktiv, und die Summe verwandelt sich in die Differenz.

§. 21. Hat man nun die Polhöhe und die Polardistanz gefunden; so kann man daraus für beliebige Höhen den Stundenwinkel oder das Azimuth des Sterns berechnen (§. 8. n. 4. 7.) Im ersten Fall beobachtet man zwey Durchgänge des Sterns durch den Meridian, welche man auch independent von den Refraktionen durch correspondirende Höhen finden kann (§. 4. n. 3.) da die Refraktion in gleichen Höhen gleich gros ist, und bestimmt daraus die Zeit, zu welcher der Stern die angenommene Höhe erreichen muß. Im zweyten Fall stellt man den Winkelmesser in die Ebene des bey dieser Höhe durch den Stern gehenden Vertikalkreises, dessen Lage durch das berechnete Azimuth gegeben ist, und durch die Refraktion nicht geändert wird. Man wartet die Zeit ab, welche der angenommenen Höhe entspricht, oder zu welcher der Stern in die Ebene des auf das berechnete Azimuth gestellten Winkelmessers kommt, und vergleicht die in diesem Augenblik beobachtete Höhe mit der vorausgesetzten; so wird man die dieser Höhe entsprechende Refraktion erhalten, welche der Differenz der beobachteten und der angenommenen Höhe gleich seyn wird. Hiedurch kann man also die den kleineren Höhen entsprechende Refraktionen finden, bey welchen man die Regel nicht mehr anwenden kann, daß die Refraktionen den Cotangenten der scheinbaren Höhen proportional seyen.

Wollte man diese Methode auch in dem Fall anwenden, wo man nur die scheinbare Polhöhe und die mittelst derselben gefundene scheinbare Polardistanz kennt; so würde man nur die den kleineren Höhen entsprechende Refraktionen beyläufig finden können, weil durch die in der Polhöhe und Polardistanz steckenden Fehler die voraus berechneten Höhen vergrößert werden, mithin die aus ihrer Vergleichung mit den beobachteten Höhen geschlossene Refraktionen zu klein heraus kommen. Mit der Höhe nimmt zwar dieser Fehler ab, aber in einem kleineren Verhältniß als die Refraktionen, so daß in einer der Polhöhe gleichen Höhe der Fehler eben so groß wird, als die dieser Höhe entsprechende Refraktion, mithin die Refraktion zu verschwinden scheint.

Sind nämlich l' die scheinbare Polhöhe, d' die scheinbare Polardistanz; so wird man für die dem Stundenwinkel t entsprechende Höhe h' haben (§. 8. n. 3.) $\text{Sin.}\, h' = \text{Sin.}\,(l' + d') - 2\overline{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} t}^2\, \text{Cos.}\, l'\, \text{Sin.}\, d'$ für den Halbmesser 1. Ist nun die der Polhöhe l' entsprechende Refraktion $= r$, und die Polardistanz d' aus der Höhe eines sehr nahe am Scheitel vorübergehenden Sterns abgeleitet; so wird die wahre Polhöhe $= l' - r$, die wahre Zenithdistanz $= d' + r$, und für die demselben Stundenwinkel t zugehörige wahre Höhe h wird seyn $\text{Sin.}\, h = \text{Sin.}\,(l' - r + d' + r) - 2\overline{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} t}^2\, \text{Cos.}\,(l' - r)\, \text{Sin.}\,(d' + r)$.

Aber $\text{Cos.}\,(l' - r) = \text{Cos.}\, l'\, \text{Cos.}\, r + \text{Sin.}\, l'\, \text{Sin.}\, r$
$\text{Sin.}\,(d' + r) = \text{Sin.}\, d'\, \text{Cos.}\, r + \text{Cos.}\, d'\, \text{Sin.}\, r$:

folglich
$$\begin{aligned}\text{Sin.}\,(d'+r)\,\text{Cos.}\,(l'-r) &= \text{Cos.}\, l'\, \text{Sin.}\, d'\, \overline{\text{Cos.}\, r}^2 + \text{Sin.}\, l'\, \text{Sin.}\, d'\, \text{Sin.}\, r\, \text{Cos.}\, r \\ &\quad + \text{Sin.}\, l'\, \text{Cos.}\, d'\, \overline{\text{Sin.}\, r}^2 + \text{Cos.}\, l'\, \text{Cos.}\, d'\, \text{Sin.}\, r\, \text{Cos.}\, r \\ &= \text{Cos.}\, l'\, \text{Sin.}\, d' - \text{Cos.}\,(l'+d')\, \overline{\text{Sin}\, r}^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\, \text{Sin}\, 2r\, \text{Cos.}\,(l'-d')\end{aligned}$$

und daher
$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}\, h' - \text{Sin.}\, h \\ 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(h'-h)\, \text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(h'+h)\end{array}\right\} = \text{Cos.}\,(l'-d')\, \overline{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} t}^2\, \text{Sin.}\, 2r - \text{Cos.}\,(l'+d')\, \overline{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} t}^2\, \overline{\text{Sin.}\, r}^2,$$
oder, weil r und $\tfrac{1}{2}(h' + h)$ hier sehr klein sind, und $l' + d'$ nahe $= 90$ ist, sehr nahe
$$h' - h = \frac{2r\, \text{Cos.}\,(l' - d')\, \overline{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2} t}^2}{\text{Cos.}\, h'}$$
die berechneten Höhen sind also beständig zu groß, wenn man die scheinbare Polhöhe und Polardistanz anwendet, und die Refraktionen werden zu klein gefunden.

§. 22. Um die Refraktionen noch genauer zu erhalten; suche man aus zwey nach §. 20. gefundenen Refraktionen, die beträchtlich verschiedenen Höhen zugehören, nach §. 17. n. 2. den Werth von m, und brauche jetzt bey der §. 20. gezeigten Berechnung statt der Tangenten der scheinbaren Zenithdistanzen die Tangenten der um das $\tfrac{1}{2}m$fache der ihnen entsprechenden Refraktionen, die man schon beynahe kennt, verminderten scheinbaren Abstände vom Scheitel, oder die Cotangenten der um eben diese Größen vermehrten scheinbaren Höhen. Mittelst der auf diesem Weg erhaltenen genaueren Refraktionen wiederhole man die Berechnung von m, und setze dieses Verfahren so lange fort, bis man zwey aufeinander folgende gleiche Werthe von m erhält. In den meisten Fällen wird der zweyte Werth von m hinreichend genau seyn.

Daß durch die Bradley'sche oder Simpson'sche Regel, von welchen die eine aus der andern abgeleitet werden kann, die

Refraktionen von 5° Höhe an sehr genau dargestellt werden, lehren die Beobachtungen. Es wird daher der Mühe Werth zu untersuchen, wie genau die auf die neuesten Untersuchungen von **La Place**, und die genauesten astronomischen Beobachtungen gegründeten Refraktionstafeln *) damit übereinstimmen. Nach diesen ist, wenn das Barometer auf 0,76$^{m.}$ oder 28 par. Zoll 0,93 Lin. steht und das Thermometer + 10$^{c.}$ oder + 8 Grade nach Reaumurs Scale zeigt, für $Z = 45°$; $r = 58',2$: für $Z' = 85$; $r' = 9' 54'',3$. Hieraus findet sich nach §. 18. n. 2. die Zahl $m = 7,31883$, $R = 30' 12'',4$; $mR = 3° 41' 4'',64$. Diese Horizontalrefraktion ist beträchtlich kleiner, als nach der Tafel, wo sie = 33 46'',3 ist. **Piazzi** setzt sie für denselben Zustand der Atmosphäre nur 32' 24'', 1. Die Uebereinstimmung der mit obigen Werthen von m und R nach den Formeln §. 17. n. 7. und 8. berechneten Refraktionen mit denenjenigen, welche **La Place's** Theorie und die Beobachtungen **Piazzi's** geben, zeigt folgende Tafel:

Scheinbare Zenithdist.	Refraktion La Place.		Refraktion Piazzi.		Refraktion Formel.	
10		10'',3		10'',3		10'',3
20		21,2		21,0		21,2
30		33,4		33,6		33,6
40		48,9		48,6		48,8
45		58,2				58,2
50	1'	9,3	1'	9,3	1'	9,3
60	1	40,6	1	40,9	1	40,6
70	2	38,8	2	39,6	2	38,8
80	5	19,8	5	19,5	5	19,9
85	9	54,3	9	51,8	9	54,3
87	14	28,1			14	20,6
90	33	46,3	32	24,1	30	12,4

Die Simpson'sche, und folglich auch die Bradley'sche Formel giebt also für Höhen, die nicht kleiner als 5 Grad sind, die Refraktionen innerhalb 0'',2 mit **La Place** übereinstimmend.

Legt man **La Place's** Horizontalrefraktion und die von 45° zum Grunde: so findet man nach §. 18. n. 1. die Zahl $m = 5,8503$, $mR = 3° 17' 38'',6$, und die Refraktionen stimmen mit **La Place** von 20° Höhe an innerhalb 0,2 Sek. überein. Bey 5 und 10 Graden Höhe giebt die Formel die Refraktionen um 11,6 und 2,0 Sek. beziehungsweise zu groß.

Setzt man endlich mit **Piazzi** die Horizontalrefraktion = 32' 24'', 1 und behält für 45° die 58,2 Sek. bey; so wird $m = 6,3581$;

*) Tables astronomiques publiées par le Bureau des Longitudes de France I. P. Tab. IX. des Tables de Refrations.

$mR = 3^\circ 6' 0'',86$, und die mit diesen Bestimmungsstücken nach §. 17. n. 7. 8. berechneten Refraktionen stimmen wiederum mit La Place von 20° Höhe an innerhalb 0,2 Sekunden überein, bey 3; 5; 10; Graden Höhe aber giebt diese Formel beziehungsweise 14'',0; 7,4''; 1'',6 zu viel.

Folgende Tafel giebt die in der Nähe des Horizonts Statt findende Refraktionen nach La Place, wenn das Barometer auf 28''0''',93 und das Reaumursche Thermometer auf + 48° steht:

scheinb. Zenithdist.	Refrakt.	scheinb. Zenithdist.	Refrakt.
85° 0'	9' 54'',3	88° 0'	18' 22'',2
10	10 10,9	10	19 11,5
20	10 28,3	20	20 4,8
30	10 46,7	30	21 1,9
40	11 6,1	40	22 3,4
50	11 26,6	50	23 9,6
86 0	11 48,3	89 0	24 21,2
10	12 11,3	10	25 38,6
20	12 35,6	20	27 2,2
30	13 1,3	30	28 32,0
40	13 28,5	40	30 9,3
50	13 57,3	50	31 54,3
87 0	14 28,1	90 0	33 46,3
10	15 0,9	10	35 45,9
20	15 36,0	20	37 53,6
30	16 13,4	90 30	40 10,0
40	16 53,2		
50	17 36,3		
88 0	18 22,2		

Für größere Höhen findet man die Refraktionen durch die Formeln §. 17. n. 7. 8. wie oben schon bemerkt wurde, innerhalb 0'',2 genau mit La Place übereinstimmend, wenn man setzt $m = 7,31883$; $mR = 3^\circ 41' 4'',64$; $R = 30' 12'',4 = 1812'',4$, Lg. Sin. $mR = 8,8079709$; Lg. $R = 3,2582538$.

$$\text{Tg.}\, x = \text{Sin.}\, mR\ \text{Tg.}\, Z$$

$$r = R\ \text{Tg}\, \tfrac{1}{2} x.$$

Oder da $\text{Tg.}\, \tfrac{1}{2} mr = \text{Tg.}\, \overline{\tfrac{1}{2} mR}^2\ \text{Tg.}\, (z - \tfrac{1}{2} mr)$ (§. 17. n. 5.)

so ist sehr nahe $\dfrac{2\,\text{Tg.}\, \overline{\tfrac{1}{2} mR}^2\ \text{Tg.}\, (z - \tfrac{1}{2} mr)}{m\, \text{Sin.}\, 1''}$

$$= 58'',317\ \text{Tang}\, (z - 3\ 659\, r)$$

§. 23. Sowohl die Theorie als die Beobachtungen zeigen, daß die Stralenbrechungen in größeren Höhen als 5° sehr nahe der Dichtigkeit der Luft an dem Beobachtungsort proportional sind. Man nennt die für eine gewiße Dichtigkeit der Luft, z. B. für diejenige, welche bey 28″ 0,‴93 Barometerstand und bey $+8^{\circ}$ Reaum. Statt findet, berechnete Refraktionen die mittlere, und verwandelt sie mittelst der durch das Barometer und Thermometer für die Zeit der Beobachtung gegebenen Dichtigkeit der Luft in die wahre. Obige Refraktionen entsprechen $+8^{\circ}$; folglich verhält sich bey einerley Barometerstand die Dichtigkeit der Luft d beym Eispunkt zu ihrer Dichtigkeit D bey $+8^{\circ}$, wie $1+\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{80} : 1 = 83 : 80$, (§. 14.) und ihre Dichtigkeit D' bey $+t^{\circ}$:

Dichtigkeit $d = 80 \quad 80+\frac{3t}{8}$

Mithin ist $D' : D = 83 : 80+\frac{3t}{8} = 1 \quad \frac{80}{83}+\frac{3t}{8.83}$

$$= 1 \quad 1-\frac{3}{83}+\frac{3t}{8.83}$$

$$= 1 \quad 1+\frac{3(t-8)}{8.83}$$

$$= 1 : 1+\frac{t-8}{221\frac{1}{3}}$$

und daher $D' = \frac{D}{1+\frac{t-8}{221}}$, wenn der Barometerstand sich nicht verändert. Verändert sich auch dieser, und wird $= b$ pariser Zollen; so wird die Dichtigkeit D' werden $= \frac{b}{28,00775}\cdot\frac{D}{1+\frac{t-8}{221}}$.

Folglich muß man die §. 22. angegebene Refraktionen mit $\frac{b}{28,00775\left(1+\frac{t-8}{221}\right)}$ multipliciren, um sie in die wahre zu verwandeln, welche dem Barometerstand b und Thermometerstand t zur Zeit der Beobachtung entsprechen.

Auf diese Veränderungen der Refraktionen muß man Rücksicht nehmen, wenn sie durch Beobachtungen bestimmt werden sollen. Kennt man die Refraktionen schon beynahe; so kann man ihre Veränderungen während der Zeit der Beobachtungen genau genug berechnen, und dadurch die beobachteten scheinbaren Höhen auf diejenigen reduciren, welche bey einem gewißen Barometer und Thermometerstand würden beobachtet worden seyn, und die aus den reducirten Beobachtungen abgeleitete Refraktionen werden eben diesem Stand des Barometers und Thermometers entsprechen, den man übrigens so wählt, daß er dem während der Beobachtungen Statt gehabten mittleren Stand nahe komt, um die Reduktionen zu vermindern.

§. 24. Die Atmosphäre der Erde ist ein Gemenge von verschiedenen Gasarten, welche bey einerley Dichtigkeit die Lichtstralen verschieden brechen. Aber das Verhältniß dieser Gasarten zu einander ist an sehr von einander entfernten Orten und zu verschiedenen Zeiten äusserst nahe immer dasselbe. Die atmosphärische Luft enthält in 100 Theilen 79 Theile **Stikgas** und 21 **Sauerstoffgas** oder **Lebensluft** den Volumen nach, und 3 oder 4 Theile **kohlensaures Gas** oder sogenannte fixe **Luft** sind in 1000 Theilen atmosphärischer Luft verbreitet. **Gay-Lussac** hat sich von **Paris** bis auf eine Höhe von 21487 par. Fuß über das Niveau der **Seine** erhoben, und die von dieser Höhe mitgebrachte Luft nach einer genauen Untersuchung mit der aus den niedrigsten Schichten der Atmosphäre genommenen übereinstimmend gefunden.

Endlich hat **La Place** noch Untersuchungen über den Einfluß der Feuchtigkeit der Luft auf ihre stralenbrechende Kraft angestellt, um wenn es nöthig wäre, auf das **Hygrometer** bey den Refraktionen Rüksicht zu nehmen. In Ermanglung direkter Versuche über diesen Gegenstand gieng er von der Hypothese aus, daß die Wirkungen des Wassers und seines Dampfs auf das Licht ihren Dichtigkeiten proportional seyen. Unter dieser Voraussetzung fand er mittelst des bekannten Brechungsverhältnißes für den Uebergang des Lichts aus Luft in Wasser, die stralenbrechende Kraft des Dampfs größer als die der Luft, wenn sie mit dem Dampf einerley Dichtigkeit hat. Aber bey einerley Druck übertrifft die Dichtigkeit der Luft die des Dampfs nahe in demselben Verhältniß: folglich ist die von dem in der Atmosphäre verbreiteten Wasserdampf herrührende Refraktion nahe dieselbe, welche die Luft hervorbringen würde, deren Stelle er einnimmt. **La Place** fand nemlich für 12; 16; 20; 24; 28; 32; Grade des Reaumurschen Thermometers über dem Gefrierpunkt die durch den Wasserdampf hervorgebrachte Vergrößerung der Refraktion in 45° scheinbarer Höhe beziehungsweise 0,182; 0,241; 0,316; 0,413; 0,535; 0,687 Sekunden, woraus man die einer gegebenen scheinbaren Höhe entsprechende Zunahme der Refraktion findet, wenn man obige Zahlen mit der Cotangente der scheinbaren Höhe multiplicirt. **Biot** hat dieses Resultat durch direkte Versuche bestätigt, welche zugleich zeigen, daß die Refraktion nur in so fern auf die Stralenbrechung Einfluß hat, als sie die Dichtigkeit der Luft verändert.

§. 25. Bringt man die Wirkungen der Stralenbrechung in Rechnung; so wird man die täglichen Bewegungen der Fixsterne sehr genau mit der Voraussetzung der Umdrehung der Himmelskugel um eine unbewegliche Axe überstimmend finden. Die scheinbaren Abstände zweyer Fixsterne von einander, wenn man sie auch in sehr verschiedenen Höhen dieser Sterne und an weit von einander entfernten Orten der Erde, beobachtet hat, werden, wenn man sie von der Einwirkung der Stralenbrechung befreyt, desto genauer einerley Resultat geben, je genauer die Beobachtungen sind. Die Parallaxe der Fixsterne ist also unmerklich, und die scheinbaren Irregularitäten ihrer täglichen Bewegung kommen allein von der Stralenbrechung her. Diese macht sie früher auf und später untergehen, als es nach den Gesetzen der täglichen Bewegung seyn sollte, und man kann mittelst der bekannten Stralenbrechung am Horizont berechnen, wie viel dieses für jeden gegebenen Stern unter einer gegebenen Polhöhe beträgt. Man findet nemlich den scheinbaren halben Tagbogen eines Sterns, wenn man nach §. 8. n. 1. oder 4. den Stundenwinkel sucht, für welchen der Stern eben so tief unter dem Horizont steht, als die Horizontalrefraktion beträgt.

Heißen der wahre und scheinbare halbe Tagbogen T, T', und die Horizontalrefraktion R; so ist (§. 8. n. 11.)

$$\text{Cos.}\,T' = \frac{-\text{Sin.}\,R\,\overline{\text{Sin. tot.}}^2}{\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,l} - \frac{\text{Cos.}\,d\,\text{Sin.}\,l\,\text{Sin. tot.}}{\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,l}$$

$$\text{Cos.}\,T = \quad - \frac{\text{Cos.}\,d\,\text{Sin.}\,l\,\text{Sin. tot.}}{\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,l}$$

folglich $\left.\begin{array}{l}\text{Cos.}\,T - \text{Cos.}\,T' \\ \text{oder } 2\,\text{Sin.}\,\frac{T'-T}{2}\,\text{Sin.}\,\frac{T'+T}{2}\end{array}\right\} = \frac{\text{Sin.}\,R\,\overline{\text{Sin. tot.}}^3}{\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,l}.$

Da nun R nur ungefähr einen halben Grad beträgt; so ist sehr nahe $T' - T = \frac{R\,\overline{\text{Sin. tot.}}^3}{\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,l\,\text{Sin.}\,T}$

§. 26. Man beobachte mehrere Höhen eines Fixsterns, dessen Polardistanz man kennt, und bemerke die Beobachtungszeiten nach einer Sekundenuhr. Die beobachteten Höhen vermindere man um die ihnen zugehörige Refraktionen, und diese seyen entweder durch Meridianhöhen der Circumpolarsterne allein, oder zum Theil durch Höhen ausser dem Meridian und die ihnen zugehörigen Azimuthe statt der Stundenwinkel bestimmt. Man berechne die diesen verminderten oder wahren Höhen zugehörige Stundenwinkel nach §. 8. n. 4.; so wird man die Differenz der Stundenwinkel, oder, wenn die Höhen auf verschiedenen Seiten des Meridians genommen worden sind, ihre Summe, desto genauer den Zwischenzeiten der Beobachtungen proportional finden, je mehrere Sorgfalt darauf verwendet worden ist, der zu den Beobachtungen gebrauchten Uhr einen gleichförmigen Gang zu geben. Die Fixsterne beschreiben also ihre Parallelkreise mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit, d. h. so, daß sie in gleichen Zeiten gleich große Winkel beschreiben, oder eine gleiche Anzahl Grade ihrer Parallelkreise durchlaufen, und die tägliche Umdrehung der Himmelskugel selbst, geschieht mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit.

Man kann sich von der Gleichförmigkeit der täglichen Bewegung der Himmelskugel auch noch auf folgende Art versichern. Aus dem scheinbaren Abstand AB zweyer Fixsterne (Fig. 9.) suche man ihren wegen der Stralenbrechung verbesserten Abstand ab, und aus diesem mittelst der Polardistanzen Pa, Pb dieser Sterne den Winkel aPb am Pol. Man messe ferner die Abstände sa, sb eines dritten Sterns s von den zwey erstern, und verbessere sie wegen der Refraktion; so ist dadurch die Lage dieses Sterns gegen die zwey vorhergehenden bestimmt, und daher kann der Winkel bPs gefunden werden, welchen am Pol die durch denselben und die Sterne b und s gelegten größten Kreise miteinander machen. So kann man fortfahren, und immer ein neues Dreyeck so an die vorhergehenden anhängen, daß es eine Seite mit einem der übrigen Dreyecke gemeinschaftlich hat. Durch dieses Verfahren kann man also die Lage der Fixsterne gegen einander an der Himmelskugel, und die ihnen zugehörigen Winkel am Pol oder die Unterschiede ihrer Stundenwinkel finden, die sich wiederum wie die Zwischenzeiten ihrer Durchgänge durch den Mittagskreis verhalten werden.

§. 27. Die Rechnungen, welche letzter Methode erfordert, können auf folgende Art geführt werden.

1. Reduktion der Distanzen. In dem sphärischen Dreyeck ABZ

kennt man die scheinbaren Zenithdistanzen ZA, ZB entweder durch Beobachtung oder Berechnung, und die scheinbare Distanz AB; folglich kann man den Winkel AZB finden. Es ist nemlich, wenn die scheinbaren Höhen H', h' und die scheinbare Distanz D' heißen

$$\text{Cos.}\, Z = \frac{\text{Sin. tot. Cos.}\, D' - \text{Sin.}\, H' \,\text{Sin.}\, h'}{\text{Cos.}\, H' \,\text{Cos.}\, h'} \,\text{Sin. tot.}$$

Sodenn kennt man in dem Dreyeck aZb die wahren Zenithdistanzen, oder ihre Complemente, nemlich die wahren Höhen H, h, mittelst der bekannten Refraktionen, und nach dem vorhergehenden den Winkel Z. Die wahre Distanz heiße D; so ist

$$\text{Sin. tot. Cos.}\, D = \text{Sin.}\, H \,\text{Sin.}\, h + \frac{\text{Cos.}\, H \,\text{Cos.}\, h \,\text{Cos.}\, Z}{\text{Sin. tot.}}$$

$$\text{Cos.}\, D = \frac{\text{Sin.}\, H \,\text{Sin.}\, h}{\text{Sin. tot.}} + \frac{\text{Cos.}\, H \,\text{Cos.}\, h}{\text{Cos.}\, H' \,\text{Cos.}\, h'} \left(\text{Cos.}\, D' - \frac{\text{Sin.}\, H' \,\text{Sin.}\, h'}{\text{Sin. tot.}}\right)$$

2.) Berechnung der Polardistanzen und der Winkel am Pol. In dem Dreyeck aPb kennt man die wahre Distanz $ab = D$ und die Polardistanzen $Pa = d$, $Pb = d'$; folglich ist, wenn man $D + d + d' = S$ setzt,

$$\overline{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}P}^2 = \frac{\text{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}S - d)\,\text{Sin.}\,(\tfrac{1}{2}S - d')}{\text{Sin.}\, d. \,\text{Sin.}\, d'} \,\overline{\text{Sin. tot.}}^2$$

und $\text{Sin.}\, Pba = \dfrac{\text{Sin.}\, d \,\text{Sin.}\, aPb}{\text{Sin.}\, D}$

$$\text{Sin.}\, Pab = \frac{\text{Sin}\, d' \,\text{Sin.}\, aPb}{\text{Sin.}\, D}$$

Wäre aber in diesem Dreyeck statt der Distanz ab der Winkel am Pol gegeben; so hätte man

$$\textit{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{Summe d. übr. Winkel} = \frac{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(d' - d)}{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}(d' + d)} \,\text{Cotg.}\,\tfrac{1}{2}\, aPb,$$

$$\textit{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,\text{Diff. d. übr. W.} = \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(d' - d)}{\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}(d' + d)} \,\text{Cotg.}\,\tfrac{1}{2}\, aPb,$$

woraus sich die zwey übrigen Winkel selbst, und die Seite ab ergeben.

In dem Dreyeck asb, dessen drey Seiten man kennt, sey das Perpendikel sp auf ab gefällt; so ist

$$\text{Tang}\,\frac{ap - pb}{2} = \frac{\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(as + bs)\,\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}(as - bs)\,\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}\, ab}{\overline{\text{Sin. tot.}}^2}$$

$$\text{und } ap = \tfrac{1}{2}\, ab + \frac{ap - pb}{2}$$

$$\text{Cos.}\, sab = \frac{\text{Tang.}\, ap \,\text{Cotang.}\, as}{\text{Sin. tot.}}$$

Man hat also auch $Pas = Pab - sab$, und, wenn sq senkrecht auf Pa gezogen wird

$$\text{Tang.}\, aq = \frac{\text{Tang.}\, as \,\text{Cos.}\, Pas}{\text{Sin. tot.}}$$

$$\text{mithin } Pq = \frac{Pa - aq}{,}$$

$$\text{und Tang.}\, aPs = \frac{\text{Tang.}\, Pas\, \text{Sin.}\, aq}{\text{Sin.}\, Pq}$$

$$\text{Cos.}\, Ps = \frac{\text{Cos.}\, as\, \text{Cos.}\, Pq}{\text{Cos.}\, aq}$$

Drittes Capitel.

Von den scheinbaren Bewegungen der Sonne und der Zeitmessung.

§. 28. Die Sonne hat ausser ihrer täglichen, mit den übrigen Himmelskörpern gemeinschaftlichen Bewegung, noch eine eigene Bewegung in Beziehung auf die Fixsterne von Abend gegen Morgen. Man bemerkt diese Bewegung leicht, wenn man auf diejenige Sterne Achtung giebt, welche sich am westlichen Theil des Horizonts in der Abend-Dämmerung zeigten. Man wird sie nach einiger Zeit nicht mehr finden, dagegen werden andere Sterne, welche vorher bald nach dem Untergang der Sonne noch eine beträchtliche Höhe über dem Horizont hatten, nur noch kurze Zeit in der Abend-Dämmerung sichtbar seyn, und nach einigen Tagen ebenfalls in den Sonnenstralen verschwinden. Nach Verfluß von etwa $1\frac{1}{2}$ Monaten wird man dieselben Sterne wieder in der Morgen-Dämmerung finden, die in der Abend-Dämmerung unsichtbar geworden waren, sie werden mit jedem Tage früher auf und später untergehen, bis sie nach Verfluß eines Jahres wieder am westlichen Horizont in den Sonnenstralen verschwinden.

Zu gleicher Zeit wird man aber auch eine Veränderung in den täglich von der Sonne beschriebenen Kreisen bemerken. Zweymal des Jahrs, nemlich in der zweyten Hälfte der Monate März und September sind Tag und Nacht einander gleich; folglich steht die Sonne um diese Zeit im Aequator. In der zweyten Hälfte des Junius wird der Tag am längsten, und nimmt von da an zuerst kaum merklich, hernach geschwinder in derselben Ordnung wieder ab, wie er vorher zugenommen hatte, und in der zweyten Hälfte des Decembers wird er am kürzesten, und eben so lang als vorher die Nacht zur Zeit des längsten Tages war. Die Sonne steht also zur Zeit des längsten Tags eben so weit vom Nordpol, als zur Zeit des kürzesten Tags vom Südpol ab (§. 7.) Von dem Zeitpunkt des kürzesten Tags an nimmt derselbe eben so zu, wie er vorher abgenommen hatte, und die Veränderungen der Tageslänge auf beyden Seiten des Zeitpunkts des längsten Tags, sind den correspondirenden Veränderungen derselben in dem südlich vom Aequator liegenden Theil der scheinbaren Sonnenbahn gleich. Die scheinbare jährliche Bahn der Sonne durchschneidet also den Aequator in zwey Punkten, und sie wird durch denselben in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt, welche wiederum durch die Punkte, in welchen sich die Sonne zur Zeit des längsten und kürzesten Tags befindet, halbirt werden.

§. 29. Man nennt diese scheinbare Bahn der Sonne die **Ekliptik**, die zwey Durchschnittspunkte derselben mit dem Aequator, die **Punkte der Tag- und Nachtgleichen** oder die **Aequinoktial-Punkte**, und unterscheidet sie durch die Benennungen **Frühlings- und Herbstpunkt**. Diejenigen Punkte ihrer Bahn aber, in welchen sie sich zur Zeit des längsten und kürzesten Tags befindet, heißen die **Sonnenstillstands- oder Solstitialpunkte**, weil um diese Zeit die Länge des Tags und die Mittagshöhe der Sonne sich nicht merklich verändert. Legt man durch den Pol P (Fig. 10.) und den Ort d des Mittelpunkts der Sonne einen grösten Kreis; so heißt das zwischen dem Aequator ABQ und der Ekliptik $AdDQ$ begriffene Segment bd desselben, welches den Abstand der Sonne von dem Aequator mißt, **Abweichung der Sonne**, und man nennt sie **nördlich** oder **südlich**, je nachdem dieses Segment von dem Aequator an gegen dem Nordpol oder Südpol hin liegt. Die Abweichung ergänzt also den Abstand von dem nächsten Pol zu 90°. Endlich heißt das zwischen dem Frühlingspunkt A und dem Punkt b, in welchem der durch den Pol und den Mittelpunkt d der Sonne gelegte gröste Kreis den Aequator trifft, liegende Segment desselben die **gerade Aufsteigung der Sonne**, welche von dem Frühlingspunkt A

an nach der Richtung der jährlichen Bewegung der Sonne bis auf 360° in einem fort gezählt wird. Eben so heißt Aq die gerade Aufsteigung, sq die Abweichung eines Sterns, und beyde zusammen bestimmen des Sterns Lage eben so in Beziehung auf den Aequator, wie Azimuth und Höhe in Beziehung auf den Horizont.

Zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen ist also die Abweichung der Sonne = 0, und ihre Mittagshöhe wird den Winkel AOM (Fig. 1.) messen, welchen der Aequator AQ mit dem Horizont macht, und die Höhe des Aequators heißt. Diese ist dem Complement der Polhöhe gleich, weil $NOP + AOP + AOM = 180°$ und $AOP = 90°$ ist; mithin durch die Polhöhe gegeben. Die Abweichung eines Sterns ist also auch dem Unterschied der Aequatorshöhe und der Mittagshöhe des Sterns gleich, und nördlich oder südlich, je nachdem letztere größer oder kleiner ist als die erstere.

§. 30. Um nun die jährliche scheinbare Bahn der Sonne genauer zu bestimmen, beobachte man öfters die Höhe ihres Mittelpunkts, indem man die halbe Summe der um die Stralenbrechung verminderten Höhen ihres oberen und unteren Randes nimmt, oder die beobachtete Höhe um ihren scheinbaren Halbmesser vermindert oder vermehrt, je nachdem man den oberen oder unteren Rand der Sonne genommen hat. (Sollte bey ferneren Beobachtungen die Parallaxe der Sonne merklich werden; so muß man auch diese in Rechnung bringen.) Zu gleicher Zeit beobachte man die Durchgangszeiten ihres Mittelpunkts und eines Sterns s (Fig. 10.) durch den Meridian. Aus den Mittagshöhen ergeben sich die Abweichungen bd, $b'd'$ u. s. w. der Sonne nach dem vorhergehenden §. und aus den Zwischenzeiten zwischen den Durchgängen des Sterns und der Sonne durch den Meridian findet man die Unterschiede bq, $b'q$ u. s. w. der geraden Aufsteigungen des Sterns und der Sonne für den Augenblick einer jeden dieser Beobachtungen. Denn wegen der gleichförmigen Umdrehung der Himmelskugel (§. 26.) verhält sich die tägliche Umlaufszeit des Sterns zur Zwischenzeit zwischen den Durchgängen des Sterns und der Sonne durch den Meridian, wie 360° zu dem Unterschied bq ihrer geraden Aufsteigungen. Dadurch wird also die Lage der Sonne gegen den Stern s bey jeder Beobachtung bestimmt. Man wird nun finden, daß alle Sonnenörter d, d' ꝛc. in einem größten Kreise der Sphäre liegen, welcher durch zwey dieser Punkte d, d' bestimmt ist, den Fall ausgenommen, wo d, d' genau um 180° von einander abstehen. Man wird also den Frühlingspunkt A, mithin die gerade Aufsteigung Aq des Sterns s, und die geraden Aufsteigungen der Sonne für jede der Beobachtungen haben, und dieser Punkt, welcher eben so wenig, als der Pol wirklich am Himmel durch einen daselbst stehenden Stern bezeichnet ist, und in welchem sich die Sonne in jedem Jahr nur einen Augenblick befindet, wird mittelst des Sterns s können aufgefunden werden.

§. 31. Es seyen bd, $b'd'$ (Fig. 10.) die beobachteten Abweichungen der Sonne, welche hier nördlich angenommen werden, und bb' sey die beobachtete Differenz ihrer geraden Aufsteigungen Ab, Ab': so verhält sich, unter der Voraussetzung, daß $Add'Q$ ein größter Kreis sey,

in dem sph. Dreyeck Abd $\quad \text{Tang.}\, bAd : \text{Tang.}\, bd = \text{Sin. tot.} : \text{Sin.}\, Ab$

u. in dem sph. Dreyeck $Ab'd'$ $\quad \text{Tg.}\, b'd' : \text{Tg.}\, bAd = \text{Sin.}\, Ab' : \text{Sin. tot.}$

folglich $\quad \text{Tg.}\, b'd' : \text{Tg.}\, bd = \text{Sin.}\, Ab' : \text{Sin.}\, Ab$

Es sey $b'd'$ die größere der beobachteten Abweichungen der Sonne; so ist

$$\text{Tg.}\, b'd' + \text{Tg.}\, bd : \text{Tg.}\, b'd' - \text{Tg.}\, bd = \text{Sin.}\, Ab' + \text{Sin.}\, Ab : \text{Sin.}\, Ab' : \text{Sin.}\, Ab$$

oder $\text{Sin.}\,(b'd' + bd) : \text{Sin.}\,(b'd' - bd) = \text{Tang.}\, \frac{Ab' + Ab}{2} : \text{Tg.}\, \frac{Ab' - Ab}{2}$

Man halbire bb' in c, AQ in B; so ist, weil vermöge der Voraussetzung ADQ ein größter Kreis ist, $AB = BQ = 90°$, und

$$\begin{aligned} \text{Sin.}\,(b'd' + bd) : \text{Sin.}\,(b'd' - bd) &= \text{Tang.}\, Ac : \text{Tg.}\, bc \\ &= \text{Cotang.}\, bc : \text{Cotang.}\, Ac \\ &= \text{Cotang.}\, bc : \text{Tang.}\, Bc. \end{aligned}$$

Man hat also 1.) $\left.\begin{array}{l} \text{Tang.}\, Bc \\ \text{Cotang.}\, Ac \end{array}\right\} = \frac{\text{Sin.}\,(b'd' - bd)}{\text{Sin.}\,(b'd' + bd)}\, \text{Cotang.}\, bc$

Hieraus ergiebt sich
$$\begin{aligned} Ab &= Ac - bc \\ Ab' &= Ac + bc \\ Aq &= Ab - bq: \end{aligned}$$

Mithin hat man auch mittelst obiger Proportionen

$$2.)\ \text{Tang.}\, bAd = \frac{\text{Tang.}\, bd\ \text{Sin. tot.}}{\text{Sin.}\, Ab} = \frac{\text{Tang.}\, b'd'\ \text{Sin. tot.}}{\text{Sin.}\, Ab'}.$$

Endlich kann man aus der bekannten geraden Aufsteigung Aq des Sterns s, und der beobachteten Differenz $b''q$ der geraden Aufsteigung des Sterns und der Sonne für jede der übrigen Beobachtungen die gerade Aufsteigung $Ab = Aq + b''q$ der Sonne, und mittelst des jetzt bekannten Winkels bAd ihre Abweichung finden durch die Formel

$$3.)\ \text{Tang.}\, b''d'' = \frac{\text{Sin.}\, Ab''\ \text{Tang.}\, bAd}{\text{Sin. tot.}}$$

welche der beobachteten Abweichung der Sonne gleich seyn muß, wenn alle Punkte der scheinbaren Sonnenbahn in einem grösten Kreis der Sphäre liegen.

Aus n. 1. ergiebt sich, daß es zur Verminderung der Fehler der Beobachtungen vortheilhaft ist, zwey nördliche oder zwey südliche Abweichungen zu gebrauchen, welche nahe bey den Aequinoktialpunkten beobachtet worden sind. Alsdenn wird nemlich bc einem rechten Winkel nahe kommen; folglich Cotang. bc klein werden. Zugleich wird die Differenz der Abweichungen der Differenz der Mittagshöhen der Sonne gleich, und daher von dem in der Bestimmung der Polhöhe begangenen Fehler unabhängig seyn, welcher nur auf den Nenner Sin. $(b'd' + bd)$ Einfluß hat, und den Werth dieses ächten Bruchs um weniger ändern wird, als der in seinem Nenner steckende Fehler beträgt. Sind die zwey Abweichungen der Sonne einander gleich; so wird $Ac = 90°$, $Bc = o$, und der Einfluß des Fehlers der Polhöhe verschwindet gänzlich.

Hingegen sieht man aus n. 2. daß es zur Bestimmung des Winkels, unter welchem die Ekliptik den Aequator durchschneidet, vortheilhaft ist, eine in der Nähe der Solstitien liegende Beobachtung zu wählen, weil alsdenn der Sinus der geraden Aufsteigung nahe dem Halbmesser gleich; folglich der Einfluß des in der Abweichung liegenden Fehlers vermindert wird.

§. 32. Da die Ekliptik ein gröster Kreis der Sphäre ist; so stehen ihre Durchschnittspunkte mit dem Aequator oder die Aequinoktialpunkte 180° von einander ab. Von dem Frühlingspunkt an wächst die nördliche Abweichung der Sonne, bis ihre gerade Aufsteigung = 90° wird, und das Sommersolstitium eintritt, wo sie am grösten ist, und den Winkel mißt, unter welchem die Ekliptik den Aequator durchschneidet, welcher die Schiefe der Ekliptik heißt. Von da an nimmt sie wieder ab, bis sie bey einer geraden Aufsteigung von 180° oder in dem Herbstpunkt wieder verschwindet. Sie wird jetzt südlich, und bey einer geraden

Aufsteigung der Sonne von 270° oder im Wintersolstitium wiederum der Schiefe der Ekliptik gleich, von welchem Punkt an die südliche Abweichung abnimmt, bis sie in dem Frühlingspunkt wieder verschwindet. Der Punkt D (Fig. 10.) des Sommersolstitiums steht von den Aequinoktialpunkten A, Q beyderseits um 90° ab, weil AB und $Ak = 90^\circ$ sind, und eben so verhält es sich mit dem Punkt des Wintersolstitiums. Mithin liegen die Solstitialpunkte in einem grösten Kreis, welcher durch die Pole des Aequators geht, und den durch diese und die Aequinoktialpunkte gelegten grösten Kreis rechtwinklicht schneidet. Der erstere heißt der Kolur der Solstitien oder Sonnenwenden (Colurus solstitiorum), letzterer der Kolur der Nachtgleichen (Colurus æquinoctiorum). Nimmt man auf beyden Seiten des Kolurs der Solstitien die Bogen Bb, Bb' des Aequators einander gleich; so werden auch die den Punkten b, b' entsprechende Abweichungen bd, $b'd'$ der Sonne einander gleich seyn.

Das hier gesagte folgt aus §. 31. n. 3. Setzt man nemlich die gerade Aufsteigung der Sonne $= \alpha$, ihre Abweichung $= \delta$, die Schiefe der Ekliptik $= \varepsilon$; so ist $\mathrm{Tang.}\,\delta = \frac{\mathrm{Tg}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin.}\,\alpha}{\mathrm{Sin.\,tot.}}$. Die Tangente der Abweichung wächst also dem Sinus der geraden Aufsteigung proportional, und wird am grösten, wenn $\mathrm{Sin.}\,\alpha = \mathrm{Sin.\,tot.}$, also wenn $\alpha = 90^\circ$ oder $= 270^\circ$ wird. Im letzteren Fall ist aber $\mathrm{Sin.}\,\alpha$ negativ, mithin die Abweichung südlich. Wird $\alpha > 90^\circ$; so nimmt $\mathrm{Sin.}\,\alpha$ wieder ab, und wird dem Sinus seines Supplements gleich. Nimmt man $Bb' = Bb$; so wird $Ab = b'Q$, $\mathrm{Sin.}\,Ab' = \mathrm{Sin.}\,b'Q = \mathrm{Sin.}\,Ab$, und $\mathrm{Tang.}\,b'd' = \frac{\mathrm{Tg.}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin.}\,Ab'}{\mathrm{Sin.\,tot.}} = \frac{\mathrm{Tg.}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,Ab}{\mathrm{Sin.\,tot.}} = \mathrm{Tg.}\,bd$. Mithin wird $b'd' = bd$ wenn $Bb' = Bb$.

§. 33. So wie man nun durch die Methode der correspondierenden Höhen die Lage des Meridians und den Augenblick des Durchgangs eines Sterns durch denselben bestimmen kann, eben so wird man durch Beobachtung gleicher Abweichungen der Sonne, wenn beyde nördlich, oder beyde südlich sind, die Lage des Kolurus der Sonnenwenden, und den Augenblick des Durchgangs der Sonne durch denselben bestim-

bestimmen können. Weil aber die genaue Bestimmung der Abweichung der Sonne Mittagshöhen erfordert; so wird sie bey der zweyten Beobachtung nur sehr selten eine Abweichung haben, welche der zuerst beobachteten gleich ist. Um diese Lücke auszufüllen, beobachte man in der Nähe der zwey Aequinoktialpunkte, wo sich die Abweichung der Sonne am geschwindesten verändert, folglich der Einfluß der Beobachtungsfehler auf die zu bestimmende Größen am kleinsten ist; mehrere Mittagshöhen der Sonne, und die Unterschiede zwischen ihrer geraden Aufsteigung und der eines Sterns, wie im 30. §. gezeigt wurde. Man wird um diese Zeit die tägliche Veränderung ihrer Abweichung sehr nahe der täglichen Veränderung ihrer geraden Aufsteigung proportional finden, und daher die Veränderung ihrer geraden Aufsteigung berechnen können, welche einer gegebenen Veränderung ihrer Abweichung, die nicht größer als die tägliche Veränderung derselben ist, entspricht, wenn man schließt: wie sich verhält die tägliche Veränderung der Abweichung zur vorgegebenen Veränderung derselben, so verhält sich die tägliche Veränderung der geraden Aufsteigung zur gesuchten Veränderung derselben. Wenn also z. B. von den in der Nähe des Herbstpunkts beobachteten Abweichungen die eine größer, die am folgenden Tag genommene aber kleiner gefunden wurde, als die im Frühjahr beobachtete; so wird man berechnen können, um wie viel die der größeren Abweichung zugehörige gerade Aufsteigung der Sonne vergrößert werden müsse, damit die der so vergrößerten geraden Aufsteigung entsprechende Abweichung der im Frühjahr beobachteten gleich werde. Man wird also den Unterschied bb' (Fig. 10.) der geraden Aufsteigungen der Sonne für die zwey Zeitpunkte haben, da sie gleiche Abweichungen $bd, b'd'$ hatte, und $\frac{1}{2}\,bb'$ zu bq addirt wird den Bogen Bq geben, dessen Ergänzung Aq zu 90° die gerade Aufsteigung des bey den Beobachtungen gebrauchten Sterns s seyn wird. Mithin wird die Lage der Solstitial- und Aequinoktialpunkte gegen diesen Stern gegeben seyn.

Man wird ferner finden, daß während eines Zeitraums von einem oder zwey Tagen, die gerade Aufsteigung der

Sonne sich sehr nahe der Zeit proportional verändert. Folglich kann man auf ähnliche Art wie vorhin die Zeiten finden, da die Sonne auf beyden Seiten des Kolurus der Sonnenwenden gleiche und gleichnamige Abweichungen hatte. Aber der Zeitpunkt des Solstitiums wird nur unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung der Sonne in der Ekliptik in die Mitte zwischen die zwey obige Zeitpunkte fallen. Folglich wird man, um diesen Zeitpunkt zu bestimmen, auch um die Zeit des Solstitiums die Unterschiede der geraden Aufsteigung der Sonne und des Sterns beobachten, aus der bekannten geraden Aufsteigung des Sterns die der Sonne für jede dieser Beobachtungen herleiten, und aus der täglichen Veränderung der leztern den Augenblick berechnen müssen, da die gerade Aufsteigung der Sonne = 90° oder = 270° war. Fällt dieser zwischen zwey nur um einen Tag von einander entfernte Beobachtungen; so wird der von der ungleichförmigen Veränderung der geraden Aufsteigung herrührende Fehler unbemerkbar. Eben so findet man den Augenblick der Frühlings- oder Herbstnachtgleiche, wenn man aus den in ihrer Nähe angestellten Beobachtungen den Augenblick sucht, da die gerade Aufsteigung der Sonne = 0 oder = 180° war, welcher am genauesten gefunden wird, wenn das Aequinoktium zwischen zwey nur einen Tag von einander entfernte Beobachtungen fällt.

Die Zeit des Aequinoktiums könnte man auch aus den beobachteten Abweichungen der Sonne unmittelbar finden wenn man den Augenblick suchte, da die Abweichung der Sonne = 0 ist. Aber ein kleiner in der Polhöhe liegender Fehler, mittelst welcher die Abweichungen bestimmt werden müssen, würde einen beträchtlichen Einfluß auf die Zeit des Aequinoktiums haben, welcher bey der vorhergehenden Methode wegfällt.

Wie man aus ungleichen Abweichungen die Lage der Aequinoktialpunkte unmittelbar finden könne, ist schon oben § 31. gezeigt worden.

§. 34. Weil die Schiefe der Ekliptik der grösten nördlichen oder südlichen Abweichung der Sonne gleich ist (§.

32.); so ist der Unterschied der grösten oder kleinsten Mittagshöhe der Sonne, (oder das Supplement ihrer Summe, wenn die eine in den südlichen, die andere in den nördlichen Quadranten des Meridians fällt,) der doppelten Schiefe der Ekliptik gleich, vorausgesetzt, daß die Solstitien zur Mittagszeit eintreten. Aber wegen der sehr geringen täglichen Veränderung der Abweichung der Sonne werden zwey Mittagshöhen derselben, zwischen welche der Augenblick des Solstitiums fällt, nur wenig unter sich und von der Solstitialhöhe verschieden seyn: folglich wird man mittelst dieser Höhen die Schiefe der Ekliptik wenigstens beynahe finden. Um sie genauer zu erhalten, beobachte man zugleich die gerade Aufsteigung der Sonne mittelst eines Sterns, dessen gerade Aufsteigung nach dem vorhergehenden §. bestimmt worden ist, berechne aus der schon nahe gefundenen Schiefe der Ekliptik und dem Abstand der Sonne von dem Kolur der Solstitien den Unterschied zwischen der beobachteten Abweichung der Sonne und der Schiefe der Ekliptik, und vergrößere die beyläufig gefundene Schiefe um die halbe Summe der bey den zwey Solstitien gefundenen Unterschiede.

Es ist nemlich $\text{Tang.}\,\varepsilon : \text{Tang.}\,\delta = \text{Sin. tot.} : \left\{\begin{matrix}\text{Sin.}\,\alpha \\ \text{Cos.}\,(90^\circ - \alpha)\end{matrix}\right\}$; folglich

$$\left.\begin{matrix}\text{Tg.}\,\varepsilon + \text{Tg.}\,\delta : \text{Tg.}\,\varepsilon - \text{Tg.}\,\delta \\ \text{Sin.}\,(\varepsilon+\delta) \quad \text{Sin.}\,(\varepsilon-\delta)\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Sin.tot.} + \text{Cos.}(90^\circ-\alpha) : \text{Sin.tot.} - \text{Cos.}(90^\circ-\alpha) \\ \overline{\text{Sin. tot.}}^2 \qquad\qquad \overline{\text{Tg.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)}^2\end{matrix}\right.$$

Daher in der Nähe des Sommersolstitiums

$$\text{Sin.}\,(\varepsilon-\delta) = \frac{\text{Sin.}\,(\varepsilon+\delta)\ \overline{\text{Tg.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)}^2}{\overline{\text{Sin. tot.}}^2},\ \text{für } \alpha < 90^\circ$$

$$= \text{Sin.}\,(\varepsilon+\delta)\ \overline{\text{Tang.}\,(\tfrac{1}{2}\alpha - 45^\circ)}^2,\ \text{für } \alpha > 90^\circ$$

und in der Nähe des Wintersolstitiums, wenn die südliche Abweichung als positiv betrachtet wird,

$$\text{Sin.}\,(\varepsilon-\delta) = \frac{\text{Sin.}\,(\varepsilon+\delta)\ \overline{\text{Tang.}\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha)}^2}{\overline{\text{Sin. tot.}}^2},\ \text{für } \alpha < 180^\circ$$

$$= \frac{\text{Sin.}\,(\varepsilon+\delta)\ \overline{\text{Tang.}\,(\tfrac{1}{2}\alpha - 90^\circ)}^2}{\overline{\text{Sin. tot.}}^2},\ \text{für } \alpha > 180^\circ.$$

Man sieht aus diesen Ausdrücken, daß bey kleinen Abständen von dem Kolur der Solstitien ein kleiner Fehler in der Schiefe der Ekliptik keinen merklichen Einfluß auf den Werth von $\epsilon - \delta$ hat. Hat man einmal die Schiefe der Ekliptik genauer bestimmt; so kann man weiter von dem Solstitium entfernte Mittagshöhen auf die Solstitialhöhe reduciren, und die Anzahl der Beobachtungen vervielfältigen, um ein genaueres Resultat zu erhalten.

§. 35. Eben diese Beobachtungen dienen nun auch zur Bestimmung der Polhöhe und zur ferneren Berichtigung der Refraktionen. Nemlich das arithmetische Mittel zwischen den zwey Solstitialhöhen der Sonne im Sommer und Winter wird der Aequatorshöhe gleich seyn, deren Complement die Polhöhe ist. Sind nun die Refraktionen zu groß; so wird die aus den Solstitialhöhen gefolgerte Aequatorshöhe zu klein, mithin die Polhöhe zu groß gefunden. Die im nördlichen Quadranten des Meridians angestellte Beobachtungen der Circumpolarsterne hingegen werden die Polhöhe zu klein geben, und die Differenz dieser zwey verschiedenen Resultate wird die Summe der zwey in den Polhöhen steckenden Fehler seyn. Da nun die Stralenbrechungen nahe den Cotangenten der scheinbaren Höhen proportional sind; so wird dieses um so genauer bey den kleinen Aenderungen der Refraktionen zutreffen, und man wird die Verbesserungen der zwey Polhöhen haben, wenn man obige Differenz in dem Verhältniß der Summe der Cotangenten der Solstitialhöhen zur Summe der Cotangenten der grösten und kleinsten Höhe des bey den Beobachtungen gebrauchten Circumpolarsterns theilt. Auf ähnliche Weise wird man verfahren, wenn die Refraktionen zu klein sind.

Wegen der Veränderlichkeit der Refraktionen in kleinen Höhen wird folgende Methode die Refraktionen zu berichtigen sicherer seyn. Um die Zeit der Nachtgleichen beobachte man die Mittagshöhe der Sonne und ihre gerade Aufsteigung. Aus letzterer und der Schiefe der Ekliptik berechne man ihre Abweichung, auf welche ein kleiner in der Schiefe der Ekliptik liegender Fehler keinen merklichen Einfluß haben wird. Man wird also die Aequatorshöhe haben, wenn man die Abweichung der Sonne von ihrer Mittagshöhe abzieht, oder sie dazu addirt, je nachdem die Abweichung nördlich oder südlich ist. Um eben diese Zeit suche man die Polhöhe aus der grösten und kleinsten Höhe des Polarsterns, welche die Aequatorshöhe zu 90° ergänzen muß. Kommt mehr oder weniger heraus; so sind die Refraktionen zu klein oder zu groß, und man vertheilt den Fehler im Verhältniß der Cotangente der scheinbaren Mittagshöhe der Sonne zur halben Summe der Cotangenten der grösten und kleinsten scheinbaren Höhe des Polarsterns, um die Verbesserungen der beobachteten Aequatorshöhe und Polhöhe zu erhalten. Hat sich die Dichtigkeit der Luft während der Beobachtungen geändert; so bringt man die daher rührende Aenderung der Refraktionen in Rechnung, wie §. 23. gezeigt wurde.

§. 36. Man bedient sich der Ekliptik auf eine ähnliche Art wie des Aequators, um die Lage der Himmelskörper gegen einander anzugeben. Der Abstand SL (Fig. 11.) eines Sterns S von der Ekliptik $D'AD$, welcher durch den Bogen SL eines grösten Kreises gemessen wird, der auf der Ekliptik senkrecht ist, und folglich durch den Pol E der Ekliptik geht, heißt die Breite des Sterns, welche nördlich oder südlich ist, je nachdem der Stern von der Ekliptik gegen ihren Nordpol oder Südpol hin absteht. Der Bogen AL der Ekliptik zwischen dem Punkt A der Frühlings-Nachtgleiche und dem Punkt L, wo der durch den Stern gelegte Breitenkreis $ESLe$ die Ekliptik schneidet, heißt die Länge des Sterns, welche man von A an nach der Richtung der jährlichen Bewegung der Sonne zählt. Eben so nennt man auch, wenn die Sonne in L steht, den Bogen AL der Ekliptik zwischen der Sonne und dem Frühlingspunkt die Länge der Sonne. Mithin bestimmen Länge AL und Breite SL die Lage eines Sterns eben so gegen die Ekliptik, wie gerade Aufsteigung AR und Abweichung RS gegen den Aequator $B'AB$. Letztere können bequemer unmittelbar beobachtet werden als die ersteren, und man berechnet die Länge und Breite aus der beobachteten geraden Aufsteigung und Abweichung. Wenn nemlich von den fünf Stücken: Länge, Breite, gerade Aufsteigung, Abweichung und Schiefe der Ekliptik drey gegeben sind; so lehrt die sphärische Trigonometrie die übrigen berechnen.

Es seyen die gerade Aufsteigung $AR = \alpha$, und $< 90^\circ$, die nördliche Abweichung $= RS = \delta$, die Länge $AL = \lambda$, die nördliche Breite $LS = \beta$, und die Schiefe BAD der Ekliptik $= \varepsilon$; so verhält sich, wenn man durch A und S den Bogen AS eines größten Kreises legt, und $RAS = x$, $LAS = y$ setzt,

$$\text{Sin. } AR : \text{Sin. tot.} = \text{Tang. } RS : \text{Tang. } RAS$$

woraus man erhält:

$$1)\ \text{Tang. } x = \frac{\text{Tang. } \delta \text{ Sin. tot.}}{\text{Sin. } \alpha}$$

Mithin hat man $LAS = x - \varepsilon$.

Sodenn ist

$$\text{Sin. } SL : \text{Sin. } SAL = \text{Sin. } AS : \text{Sin. tot.}$$
$$= \text{Sin. } RS : \text{Sin. } RAS;$$

also

$$2)\ \text{Sin. } \beta = \frac{\text{Sin. } \delta \text{ Sin. } (x - \varepsilon)}{\text{Sin. } x}$$

und weil

$$\text{Tang. } AS : \text{Tang. } AL = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } SAL$$
$$\text{Tang. } AR : \text{Tang. } AS = \text{Cos. } RAS : \text{Sin. tot.}$$

so ist

$$\text{Tang. } AR : \text{Tang. } AL = \text{Cos. } RAS : \text{Cos. } SAL;$$

daher

$$3)\ \text{Tang. } \lambda = \frac{\text{Tang. } \alpha \text{ Cos. } (x - \varepsilon)}{\text{Cos. } x}$$

Ferner ist $\text{Sin. } AL : \text{Sin. tot.} = \text{Tang. } SL : \text{Tang. } SAL$;

mithin

$$4)\ \text{Tang. } y = \frac{\text{Tang. } \beta \text{ Sin. tot.}}{\text{Sin. } \lambda},$$

und hieraus $RAS = \varepsilon + y$.

Mithin ist wie oben

$$5.)\ \text{Sin. } \delta = \frac{\text{Sin. } \beta \text{ Sin. } (\varepsilon + y)}{\text{Sin. } y}$$

und

$$6.)\ \text{Tang. } \alpha = \frac{\text{Tg. } \lambda \text{ Cos. } (\varepsilon + y)}{\text{Cos. } y}$$

Für einen Stern O in der Ekliptik oder auch für die Sonne hat man in dem rechtwinklichten Dreyeck ARO:

$$\text{Tang. AO} : \text{Tang. AR} = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. RAO}$$
$$\text{Sin. AO} : \text{Sin. OR} = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. RAO}$$
$$\text{Sin. AR} : \text{Sin. tot.} = \text{Tg. OR} : \text{Tg. RAO}$$

folglich ist

$$7.)\ \text{Tang. } \lambda = \frac{\text{Tg. } \alpha \text{ Sin. tot.}}{\text{Cos. } \varepsilon}$$

$$8.)\ \text{Sin. } \lambda = \frac{\text{Sin. } \delta \text{ Sin. tot.}}{\text{Sin. } \varepsilon}$$

$$9.)\ \text{Tang. } \delta = \frac{\text{Sin. } \alpha \text{ Tg. } \varepsilon}{\text{Sin. tot.}}$$

mittelst welcher Gleichungen man, wenn von den vier Größen λ, α, δ, ε zwey gegeben sind, die übrigen finden kann.

Um nun aus der geraden Aufsteigung α, Abweichung δ und der Schiefe der Ekliptik, die Länge λ und Breite β zu finden, suche man zuerst den Hülfswinkel x mit der Formel n. 1., indem man δ für eine südliche Abweichung negativ setzt, und nehme x negativ, wenn Tg. x negativ wird. Nach n. 2. berechnet man Sin. β, und nimmt immer den ihm zugehörigen spitzen Winkel; so hat man die Breite, welche nördlich oder südlich ist, je nachdem Sin. β positiv oder negativ ist. Nach n. 3. berechnet man Tg. λ. Der spitze Winkel, welcher dieser Tangente ohne Rücksicht auf ihr Zeichen in den Tafeln entspricht, heiße λ'; so ist, wenn in dem Ausdruck der Tangente der Länge

Zähler und Nenner positiv sind, $\lambda = \lambda'$;
Zähler positiv und Nenner negativ, $\lambda = 180^\circ - \lambda'$;
— negativ — — negativ, $\lambda = 180^\circ + \lambda'$;
— negativ — — positiv, $\lambda = 360^\circ - \lambda'$,

wie man leicht findet, wenn man für die übrigen Fälle die Figur construirt.

Sucht man aus der Länge λ, Breite β, und Schiefe der Ekliptik, die gerade Aufsteigung α, und Abweichung δ; so berechnet man zuerst den Hülfswinkel y nach n. 4. indem man β bey südlicher Breite negativ setzt, und y negativ nimmt, wenn seine Tangente negativ wird. Aus n. 5. ergiebt sich sodann Sin. δ, wo δ negativ oder südlich ist, wenn Sin. δ negativ ist, und mittelst n. 6. erhält man Tg. α. Es sey α' der spitze Winkel, welcher der Tangente der geraden Aufsteigung ohne Rücksicht auf ihr Zeichen in den Tafeln entspricht; so ist, wenn in ihrem Ausdruck

Zähler und Nenner positiv sind, $\alpha = \alpha'$;
Zähler positiv und Nenner negativ, $\alpha = 180^\circ - \alpha'$;
— negativ — — negativ, $\alpha = 180^\circ + \alpha'$;
— negativ — — positiv, $\alpha = 360^\circ - \alpha'$.

Steht der Stern in der Ekliptik; so sind immer λ und α von einerley Art. und die Abweichung δ wird negativ, wenn λ oder $\alpha > 180^\circ$ ist.

§. 37. Die neueren Beobachtungen geben die Länge der Fixsterne durchgehends größer als die ältern. Schon Hipparch bemerkte diese Zunahme der Länge der Fixsterne, als er seine 130 Jahr vor Christi Geburt angestellte Beobachtungen mit den 160 Jahre früheren des Timocharis verglich. Claudius Ptolemäus, welcher zwischen den Jahren 125 und 141 der christlichen Zeitrechnung zu Alexandria in Aegypten beobachtete, setzte der Vergleichung seiner Beobachtungen mit den ältern zu Folge die Zunahme der Länge der Fixsterne in hundert Jahren auf einen Grad, und weil er weder eine Veränderung in der gegenseitigen Lage der Fixsterne noch eine Veränderung ihrer Breite bemerkte; so schloß er daraus, daß sich die Sphäre der Fixsterne um die Pole der Ekliptik von Abend gegen Morgen in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte drehe. Man nennt diese Zunahme der Länge der Fixsterne die Präcession, und sie beträgt nach den neueren Beobachtungen jährlich 50,1 Sekunden; folglich in hundert Jahren $1^\circ 23' 30''$, und in $71\frac{4}{5}$ Jahren einen Grad. Man kann übrigens eben so gut annehmen, daß die Aequinoktialpunkte in der Ekliptik jährlich um 50,1 Sekunden nach einer der Richtung der jährlichen Bewegung der Sonne entgegengesetzten Richtung zurückweichen, und es wird erst in der Folge können ausgemacht werden, welche von beyden Bewegungen wirklich Statt findet. Da es für die sphärische Astronomie gleichgültig ist, welches von beyden man annimmt; so wird in der Folge ein Zurückweichen der Aequinoktialpunkte in der Ekliptik vorausgesetzt werden.

§. 38. Man theilte die Ekliptik von dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche an in 12 gleiche Theile ein, die man Zeichen (Signa) nannte, und jedes dieser Zeichen in 30 Grade, daß also auf den ganzen Umfang wieder 360 Grade kommen. Diese Zeichen bekamen nach den Sternbildern, welchen sie ehmals entsprachen, der Ordnung nach vom Frühlingspunkt an gerechnet, folgende Benennungen:

1.	Der Widder,	♈	7.	Die Wage,	♎
2.	Der Stier,	♉	8.	Der Scorpion,	♏
3.	Die Zwillinge,	♊	9.	Der Schüze,	♐
4.	Der Krebs,	♋	10.	Der Steinbok,	♑
5.	Der Löwe,	♌	11.	Der Wassermann,	♒
6.	Die Jungfrau,	♍	12.	Die Fische,	♓

Schon zu den Zeiten des Ptolemäus entsprachen die Zeichen nicht mehr ganz den Sternbildern, von welchen sie ihre Namen erhielten, und gegenwärtig sind die Aequinoktialpunkte um ein ganzes Zeichen verschoben; so daß das Zeichen des Widders in dem Sternbild der Fische, das Zeichen der Wage in dem Sternbild der Jungfrau sich befinden. Man hat die alten Benennungen beybehalten, und man muß daher Zeichen und Sternbild unterscheiden; folglich einen Stern, welcher in einem gewissen Zeichen steht, immer in dem nächstvorhergehenden Sternbild aufsuchen.

Diesen Eintheilungen der Ekliptik zu Folge giebt man die Länge eines Sterns auf folgende Art an. Man benennt das Zeichen in welchem er steht, und bemerkt noch die Anzahl Grade und deren Unterabtheilungen von dem Anfang dieses Zeichens an gerechnet, bis zu dem Punkt der Ekliptik, wo der durch den Stern gelegte Breitenkreis ihn trift. Ist z. B. die Länge eines Sterns $36^\circ 25' = 30^\circ + 6^\circ + 25'$; so ist seine Länge $6^\circ 25'$ im Stier, u. s. w. Gewöhnlich aber giebt man die Länge dadurch an, daß man die vollen Zeichen, welche auf die Länge gehen, und die noch darüber gehenden Grade und deren Unterabtheilungen zählt.

					Zeichen			
z. B.	25°	$13'$	$20''$	=	0	25°	$13'$	$20''$
	39	15	16	=	1	9	15	16
	183	23	19	=	6	3	23	19

Das Wintersolstitium tritt also ein, wenn die Sonne in das Zeichen des Steinboks übergeht, und ihre Länge = 9 Zeichen ist. Von diesem Punkt an nähert sie sich dem Nordpol des Aequators, ihre Mittagshöhe wächst, und die Tage werden länger, bis sie in das Zeichen des Krebses tritt. Man nennt daher die Zeichen Steinbock, Wassermann u. s. w. bis zu den Zwillingen inclusive aufsteigende, die übrige niedersteigende Zeichen. Die Parallelkreise des Aequators, welche durch die Anfangspunkte des Krebses und des Steinbocks oder durch die Solstitialpunkte gezogen werden, heißen Wendekreise, jener der Wendekreis des Krebses (tropicus cancri) dieser der Wendekreis des Steinbocks (tropicus capricorni). Der Abstand der Wendekreise ist folglich der doppelten Schiefe der Ekliptik gleich.

§. 39. Auch die Schiefe der Ekliptik ist einer, wie wohl beynahe hundertmal langsamern, Veränderung, als die der Lage der Aequinoktialpunkte unterworfen. Ptolemäus fand den Abstand der Wendekreise von einander = 47° 40' 45'', und bemerkte dabey, dieser Abstand sey nahe derselbe, welchen Eratosthenes (geb. im Jahr 276. vor C. G.) gefunden und Hipparch beybehalten habe *). Demnach war die Schiefe der Ekliptik = 23° 50' 22''. Im Anfang des Jahrs 1800 war sie = 23° 27' 57'', also um 22' 24'' kleiner, und so geben alle neuere Beobachtungen die Schiefe der Ekliptik kleiner als die älteren, wenn man sie so weit von einander entfernt nimmt, daß ihre Veränderung in der Zwischenzeit größer ist, als die Fehler der Beobachtungen, wie man aus folgender Tafel sieht.

		Schiefe der Ekliptik.		
Tcheou-Kong, 1100 Jahr v. C. Geb.		23°	54'	2''
Pytheas, 350 J. v. C. Geb.		23	49	20
Ebn-Junis, im Jahr 1000 n. C. G.		23	36	36
Cocheou-King,	1280.	23	33	30
Ulug-Beigh,	1437.	23	31	48
Delambre, 1. Jan.	1800.	23	27	57
Maskelyne —	—	23	27	56,6
Piazzi —	—	23	27	56,3

In gegenwärtigem Jahrhundert beträgt nach den neuesten Beobachtungen und Berechnungen die jährliche Abnahme der Schiefe der Ekliptik 0,521 Sekunden.

Wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte und der Veränderung der Schiefe der Ekliptik verändern sich sowohl die gerade Aufsteigung als auch die Abweichung der Fixsterne. Die Verzeichnisse, welche die Angaben der geraden Aufsteigung und Abweichung der Fixsterne enthalten, gelten also nur für die Epoche der Beobachtungen, durch welche man dieselbige bestimmt hat. Aber man kann sie auf folgende Art auf einen andern vorgegebenen Zeitpunkt reduciren. Aus der geraden Aufsteigung und Abweichung suche man mittelst derjenigen Schiefe der Ekliptik, welche der Epoche des Fixsternverzeichnisses entspricht, nach §. 36. die Länge und Breite, vergrößere oder vermindere die Länge um die der Zwischenzeit zwischen der Epoche und dem vorgegebenen Zeitpunkt zugehörige Bewegung der Aequinok-

*) Eratosthenes setzt das Verhältniß des Abstands der Wendekreise zum Umfang des Meridians dem von 11 : 83 gleich, woraus die Schiefe der Ekliptik = 23° 51' 19'',5 folgt.

tialpunkte, je nachdem die Epoche vor oder nach dem gegebenen Zeitpunkt fällt. Aus der unverändert beybehaltenen Breite und der veränderten Länge suche man sodenn mittelst derjenigen Schiefe der Ekliptik, welche dem gegebenen Zeitpunkt entspricht, nach §. 36. die gerade Aufsteigung und Abweichung, welche das verlangte seyn werden. Man hat auch allgemeine Formeln zur Berechnung der Veränderung der geraden Aufsteigung und Abweichung selbst, welchen aber die obige Berechnungsart vorzuziehen seyn möchte, wenn diese Veränderungen beträchtlich sind. Zu mehrerer Bequemlichkeit hat man den Fixsternverzeichnissen die jährliche Veränderung der geraden Aufsteigungen und Abweichungen beygefügt, mittelst deren man die Angaben des Verzeichnisses auf einen andern nicht zu weit entfernten Zeitpunkt reduciren kann.

Wie beträchtlich die Veränderung der Lage der Fixsterne gegen den Aequator werden könne, mag folgendes Beyspiel zeigen. Im Anfang des Jahrs 1800 war die gerade Aufsteigung des Polarsterns $= 13° 17' 10''$, und die Abweichung $= 88° 14' 25'',4$, woraus man für diesen Zeitpunkt mit der Schiefe der Ekliptik $23° 27' 57''$ erhält die Länge des Polarsterns $= 85° 46' 28'',4$ die Breite $= 66° 4' 18'',8$, und folglich seinen Abstand vom Pol der Ekliptik $= 23° 55' 41'',2$. Nimmt seine Länge um $4° 13' 31'',6$ zu, welches eine Zeit von 303,6 Jahren erfordert, wenn man 50,1 Sekunden auf ein Jahr rechnet; so fällt sein Breitenkreis mit dem Kolurus der Sonnenwenden zusammen, und sein Abstand vom Pol des Aequators wird am kleinsten und dem Ueberschuß seines Abstands vom Pol der Ekliptik über die alsdenn Statt findende Schiefe der Ekliptik gleich seyn, welche um $303,6 . 0,521$ oder 158 Sek. kleiner, folglich $= 23° 25' 19''$ seyn wird. Hienach würde im Jahr 2103 der Abstand des Polarsterns vom Pol des Aequators nur noch $30' 22''$ seyn. Zur Zeit des Ptolemäus betrug dieser Abstand gegen 12 Grade, und der Stern verdiente die Benennung Polarstern noch nicht.

§. 40. Die Zeit von einer Frühlingsnachtgleiche bis zu der nächstfolgenden Herbstnachtgleiche wird man um mehr als sieben Tage grösser finden, als die Zeit von der leztern bis wiederum zur erstern. Die Sonne durchlauft also die Ekliptik mit einer ungleichförmigen **Winkelgeschwindigkeit**, und wenn sie um die Erde einen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschreibt; so kann die Erde nicht in dem Mittelpunkt dieses Kreises seyn, und der durch den Mittelpunkt der Erde gezogene Durchmesser desselben wird die Bahn der Sonne in zwey Halbzirkel theilen, welche in gleichen Zeiten durchloffen werden. Man findet wirklich die Zwischenzeiten zwischen den Solstitien nur um ungefähr $\frac{1}{4}$ Tag voneinander verschieden, so daß jener Durchmesser nahe durch die Solstitialpunkte durchgehen muß. Durch Vergleichung einer Reihe von Beobachtungen der Sonne während eines Jahrs findet man, daß sie den Bogen von dem Punkt der Länge $3^{3 \cdot} 9^\circ \frac{1}{2}$ bis zu dem $9^{3 \cdot} 9^\circ \frac{1}{2}$ in derselben Zeit durchlauft, in welcher sie von dem lezteren Punkt bis wiederum zu dem ersten zurükkommt. An dem lezteren dieser Punkte durchlauft sie in einem Tag $1^\circ 1' 10'',3$, ihr scheinbarer Durchmesser ist am grösten, und beträgt $32' 35'',66$; folglich ist sie in diesem Punkt der Erde am nächsten. Er heißt die **Erdnähe** (Perigæum). Von der Erdnähe an nimmt die Winkelgeschwindigkeit der Sonne und ihr scheinbarer Durchmesser ab, bis sie zu dem gegenüberliegenden Punkt ihrer Bahn kommt, wo sie in einem Tag $57' 11'',4$ durchlauft, ihr scheinbarer Durchmesser $= 31' 30'',93$, und mit der Winkelgeschwindigkeit am kleinsten wird. Dieser Punkt entspricht also der grösten Entfernung der Sonne von der Erde, und heißt die **Erdferne** (Apogæum). Erdnähe und Erdferne haben den gemeinschaftlichen Namen Apsiden (Apsides, Auges), und der sie verbindende Durchmesser der Sonnenbahn heißt die Apsidenlinie (Linea apsidum). Von der Erdferne an nehmen die Winkelgeschwindigkeit und der Durchmesser der Sonne wieder eben so ab, wie sie vorher zugenommen hatten, so daß die Sonne auf beyden Seiten der Apsidenlinie in gleichen Abständen von derselben gleiche Winkelgeschwindigkeiten und gleiche scheinbare Durchmesser hat. Demnach theilt die Absidenlinie die Bahn der

Sonne um die Erde in zwey gleiche und ähnliche Theile, welche von ihr in gleichen Zeichen beschrieben werden. Man sieht, daß durch eine excentrische Kreisbewegung die veränderliche Geschwindigkeit und die verschiedene scheinbare Größe der Sonne im Allgemeinen dargestellt werden, und es wird in der Folge untersucht werden, wie weit diese Voraussetzung richtig ist.

§. 41. Wegen der ungleichförmigen Bewegung der Sonne in der Ekliptik, und der schiefen Lage der letzteren gegen den Aequator können die Zeiten von einem Mittag bis zu dem nächstfolgenden, oder die astronomischen Tage nicht unter sich gleich seyn. Es gehe neimlich zu einer gewißen Zeit die Sonne mit einem Fixstern zugleich durch den Meridian; so wird sie bis zu dem nächstfolgenden Mittag in der Ekliptik *NMB* (Fig. 12.) um den Bogen *NM* gegen Morgen fortgerückt seyn, welcher zwischen dem durch den Stern *s* gelegten Abweichungskreis *PsNq* und dem Meridian *PMAp* enthalten ist, und der astronomische Tag wird größer seyn, als die tägliche Umlaufszeit eines Fixsterns oder als ein Sterntag, um die Zeit, welche der Bogen *qA* des Aequators *DAB* gebrauchte, sich durch den Meridian durchzuschieben.

Man denke sich eine zweyte Sonne, welche die Ekliptik in derselben Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufe, in welcher die wahre Sonne einmal in der Ekliptik herumkommt, und mit letzterer zugleich durch den Punkt der Erdnähe, mithin auch (§. 40.) durch den Punkt der Erdferne gehe; so wird man dadurch die von der ungleichförmigen Bewegung der Sonne abhängende Ungleichheit der Tage verschwinden machen, aber es wird noch die von der schiefen Lage der Ekliptik gegen den Aequator abhängende Ungleichheit übrig bleiben. Denn nimmt man zwey gleiche Bogen *NM*, *mB* der Ekliptik, den ersten von einem Solstitialpunkt, den letzteren von einem Aequinoktialpunkt an, und legt durch ihre Endpunkte die Abweichungskreise *PNq*, *PMA*, *Pma*, *PB*; so wird der Bogen *Aq* des Aequators, welcher dem in der Nähe des Solstitiums liegenden Bogen

NM der Ekliptik entspricht, grösser als *NM*, der dem Aequinoktialpunkt *B* aber anliegende Bogen *Ba* kleiner als *Bm* oder *NM* seyn, weil der Bogen *NM* nahe mit einem Wendekreis zusammenfällt, dessen Halbmesser in dem Verhältniß des Cosinus der Schiefe der Ekliptik zum Sinus totus kleiner ist als der Halbmesser des Aequators, und der Bogen *mB* die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks *Bma* ist, welche wiederum in dem Verhältniß des Sinus totus zum Cosinus des Winkels *mBa* oder der Schiefe der Ekliptik grösser ist als der Bogen *Ba*. Um auch diese Ungleichheit verschwinden zu machen, lasse man die Bahn der sich gleichförmig bewegenden erdichteten Sonne mit dem Aequator zusammenfallen; so wird ihre gerade Aufsteigung gleichförmig wachsen, und die Zwischenzeiten zwischen zwey aufeinander folgenden Durchgängen dieser erdichteten Sonne durch den Meridian werden gleich groß seyn. Man nennt die Zeit, welche diese erdichtete Sonne zeigen würde, die mittlere Zeit, und diejenige, welche die Sonne wirklich zeigt, die wahre Zeit. Der Unterschied zwichen beyden heißt die Zeitgleichung, welche hienach gefunden wird, wenn man den Unterschied zwischen der wahren geraden Aufsteigung der Sonne und der geraden Aufsteigung der erdichteten Sonne in Zeit verwandelt, indem man 15° auf eine Stunde rechnet. Die astronomischen Kalender geben unter der Aufschrift **mittlere Zeit im wahren Mittag** an, was eine gleichförmig nach mittlerer Zeit gehende Uhr zeigen muß, wenn die Sonne durch den Meridian geht. Man bedient sich in der Astronomie dieser mittleren Zeit bey der Untersuchung der Bewegung der Himmelskörper, und sie dient eben so gut wie die Sternzeit zur Prüfung des gleichförmigen Gangs der Uhren.

§. 42. Zur Messung grösserer Zeiträume gebraucht man die Umlaufszeit der Sonne in der Ekliptik in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte, oder ihre tropische Umlaufszeit, welche der Zwischenzeit zwischen zwey aufeinander folgenden gleichnamigen Nachtgleichen gleich ist. Um sie genauer zu bestimmen, nimmt man zwey weit von einander entfernte Nachtgleichen, und dividirt die ganze Zwischenzeit mit der Anzahl der Umläufe. Auf diesem Weg fand man die tropische Umlaufszeit der Sonne = 365 Tagen, 5 St. 48 Min. 51,6 Sekunden. Wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte ist sie um 20 Min. 19,88 Sek. kleiner als die Zeit, welche die Sonne gebraucht, um wieder zu demselben Fixstern zu kommen, und die siderische Umlaufszeit heißt. Das Vorrücken der Nachtgleichen ist eigentlich die Zeit, um welche die Sonne früher wieder zu den Aequinoktialpunkten, als zu demselben Fixstern kommt. Man versteht aber auch zuweilen darunter das Zurückweichen der Aequinoktialpunkte selbst, in so fern es die Länge der Fixsterne vergrößert.

Weil von der tropischen Umlaufszeit der Sonne die Jahrszeiten abhängen; so bedient man sich derselben in der Zeitrechnung unter dem Namen eines Jahrs, welches demnach in runder Zahl 365 Tage enthält. Rechnete man nun das bürgerliche Jahr durchgehends zu 365 Tagen, so würde der Anfang des Jahrs beständig um 5 St. 48 M. 51,6 Sek. zu frühe gesetzt, und er würde nach und nach in einer Periode von 1508 Jahren alle Jahrszeiten rückwärts durchlaufen. Man schaltet daher alle 4 Jahre einen Tag ein, wodurch das bürgerliche Jahr auf $365\frac{1}{4}$ Tage gesetzt wird. Nun rechnet man aber mit jedem Jahr 11 Min. 8,4 Sek. zu viel, welches man dadurch wieder ausgleicht, daß man an dem Ende dreyer aufeinander folgender Jahrhunderte das Einschalten eines Tags unterläßt, und erst an dem Ende des vierten Jahrhunderts wieder einen Schalttag setzt, wodurch das Jahr auf $365\frac{1}{4} - \frac{3}{400}$ oder $365\frac{97}{400}$ Tage, d. i. auf 365 Tag 5 St. 49 Min. 12 Sek. gebracht wird. Den Ueberschuß 20,4 Sek. dieses Jahrs über das tropische kann man wiederum ausgleichen, indem man alle viertausend Jahre einen Schalttag unterdrückt, so daß auf viertausend Jahre 969 Schalttage kommen, und das Jahr = $365\frac{969}{4000}$ Tagen = 365 T. 5 St. 48 M. 50,4 Sek. wird. Nach der bey den Persern im eilften Jahrhundert eingeführten Einschaltungsmethode wird siebenmal nach einander alle vier Jahr und das achtemal nach fünf Jahren ein Tag eingeschaltet;

folglich kommen auf 33 Jahre 8 Schalttage, und das persische Jahr enthält 365 $\frac{8}{33}$ Tage, oder 365 T. 5 St. 49 Min. 5 $\frac{5}{11}$ Sek.

§. 43. Der bürgerliche Tag ist die Zeit von einer Mitternacht bis zu der nächstfolgenden, welchen man in 24 Stunden eintheilt, ohne 24 Stunden in einem fort zu zählen. Man zählt 12 Stunden von Mitternacht bis Mittag, und von da an 12 Stunden bis Mitternacht. Der astronomische Tag ist die Zeit von einem Mittag bis zu dem nächstfolgenden, welche ebenfalls in 24 Stunden eingetheilt wird. Man zählt die Stunden von Mittag an bis auf 24 in einem fort, und daher stimmt die astronomische Zeitangabe mit der bürgerlichen in den Nachmittagsstunden überein, zu den bürgerlichen Vormittagsstunden aber muß man 12 Stunden addiren, und dagegen einen Tag weniger zählen, um bürgerliche Zeit in astronomische zu verwandeln. Zum Beyspiel: 23. Sept. 5 Uhr 3 Min. Vormittags ist nach der bey den Astronomen gewöhnlichen Zeitangabe 22. Sept. 17 Uhr 3 Min. Jedoch ist in den neuesten astronomischen Tafeln *) die bürgerliche Art die Stunden zu zählen angenommen worden, welche übrigens wegen der Unterscheidung der Vor- und Nachmittagsstunden zu astronomischen Rechnungen weniger bequem zu seyn scheint, als diejenige, welcher sich bisher die Astronomen bedient haben.

Der Sterntag wird ebenfalls in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten u. s. w. eingetheilt. Man bedient sich der Sternzeit bey der Bestimmung der geraden Aufsteigung der Himmelskörper, und stellt deßwegen die nach Sternzeit gehenden Uhren so, daß sie 0 St. oder 24 St. zeigen, wenn der Punkt der Frühlingsnachtgleiche durch den Meridian geht. Im Augenblick des Durchgangs eines Sterns durch den Meridian wird also die Sternuhr unmittelbar die gerade Aufsteigung des Sterns in Zeit angeben, welche man in Grade verwandelt, indem man auf 1 Stunde 15 Grade,

auf

*) Tables astronomiques publiées par le bureau des longitudes de France. A Paris 1806.

auf 1 Minute 15 Minuten im Bogen, u. s. w. rechnet. Mithin wird man die Uhr nach Sternzeit richten können, wenn man die gerade Aufsteigung eines Fixsterns nach §. 33. bestimmt hat. Sie wird nemlich im Augenblick seines Durchgangs durch den Meridian seine in Zeit verwandelte gerade Aufsteigung angeben müssen, und wenn die Uhr mehr oder weniger zeigt; so wird durch diese Beobachtung die Voreilung der Uhr oder ihr Zurückbleiben in Beziehung auf Sternzeit gegeben seyn. Statt eines Fixsterns wird man auch einen andern Himmelskörper, z. B. die Sonne, gebrauchen können, wenn man seine gerade Aufsteigung für den Augenblick seines Durchgangs durch den Meridian mittelst der bekannten Gesetze seiner Bewegung anzugeben im Stande ist.

§. 44. Aus der bekannten Länge des tropischen Jahrs ergiebt sich leicht die Vergleichung mittlerer Sonnenzeit und Sternzeit. Nach Verfluß eines Jahrs wird nemlich ein Fixstern einen vollen Umlauf mehr gemacht haben, als die Sonne, und wenn man das Jahr = $365\frac{1}{4}$ Tagen setzt; so wird ein Fixstern $366\frac{1}{4}$ Umläufe gemacht haben, wenn die Sonne $365\frac{1}{4}$ Umläufe gemacht hat. Mithin wird sich verhalten

$$\text{Sonnentag} : \text{Sterntag} = 366\tfrac{1}{4} : 365\tfrac{1}{4}$$

$$\text{Sonnentag} - \text{Sterntag} : \text{Sterntag} = 1 : 365\tfrac{1}{4}$$

$$\text{oder in Sekunden} = \frac{86400}{365\frac{1}{4}} : 86400,$$

weil auf einen Tag 24. 60. 60 oder 86400 Sekunden gehen.

Eben so wird man haben

$$\text{Sonnentag} - \text{Sterntag} : \text{Sonnentag} = 1 : 366\tfrac{1}{4}$$

$$= \frac{86400}{366\frac{1}{4}} : 86400.$$

Gebraucht man bey dieser Berechnung die obige genaue Angabe des tropischen Jahrs (§. 42.); so findet man nach der ersten der oben angegebenen Proportionen den Ueberschuß eines Sonnentags über einen Sterntag = 236,555 Sek. Sternzeit.

Aus der zweyten Proportion ergiebt sich der Ueberschuß eines Sonnentags über einen Sterntag = 235,909 Sek. mittl. Sonnenzeit. Demnach ist ein mittlerer Sonnentag = 24 St. 3 Min. 56,555 Sek. Sternzeit, und die erdichtete sich gleichförmig in dem Aequator bewegende Sonne, welche die mittlere Zeit zeigt (§. 41.), kommt mit jedem Tag nach einer auf Sternzeit gestellten Uhr um 3′56″,555 später in den Meridian.

Ein Sterntag aber beträgt 24 St. — (3′55,909″) oder 23 St. 56 M. 4,091 Sek. mittlerer Sonnenzeit, und die Fixsterne kommen mit jedem Tag nach einer die mittlere Zeit zeigenden Uhr um 3′55″,909 früher in den Meridian. Diese tägliche Voreilung der Fixsterne dient also zur Prüfung des Gangs einer auf mittlere Zeit gestellten Uhr.

Noch findet wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte ein kleiner Unterschied zwischen eigentlicher Sternzeit und der vorhin betrachteten Statt, welche der Punkt der Frühlingsnachtgleiche zeigt. Man setze bey der oben gezeigten Berechnung statt des tropischen Jahrs das siderische; so findet man den Ueberschuß eines mittleren Sonnentags über einen Sterntag = 3′56″,546 Sternzeit = 3′55″,900 mittlerer Sonnenzeit, und der eigentliche Sterntag beträgt 23 St. 56 Min. 4,1 Sek. mittlerer Sonnenzeit. Wegen des oben gezeigten Gebrauchs der Uhren zur Bestimmung der geraden Aufsteigung der Sterne bedient man sich in der praktischen Astronomie derjenigen Zeit, welche der Frühlingspunkt zeigt, und bringt die Veränderung der geraden Aufsteigung der Sterne in Rechnung.

§. 45. Wegen der kugelförmigen Gestalt der Erde können zwey Orte, von welchen der eine östlicher liegt als der andere, nicht in einerley Augenblick Mittag haben. Die Vergleichung der an verschiedenen Orten angestellten Beobachtungen erfordert also die Kenntniß ihrer gegenseitigen Lage. Um diese zu bestimmen, denke man sich den Mittelpunkt C (Fig. 13.) der Erde $ampqp'$ in dem Mittelpunkt der Himmelskugel $AMPQP'$. Die Axe PP' der letztern wird der Oberfläche der Erde in den Punkten p, p' begegnen, welche die Erdpole heißen, und das innerhalb der Erde fallende Stück pp' der Weltaxe wird die Erdaxe seyn. Die Durchschnittslinie der Ebene des Aequators ABQ der Himmelskugel mit der Erdoberfläche wird den Aequator abq der Erde bilden, welcher sie in die nördliche und südliche Halbkugel theilt. Man ziehe den Halbmesser Cm an einen beliebigen Ort m der Erde; so wird seine Verlängerung das Zenith M dieses Orts treffen, und ein durch den Pol P der Himmelskugel und das Zenith gelegter gröster Kreis wird sein Meridian seyn (§. 3.), dessen Ebene die Erdoberfläche in dem Meridian $pmap'$ der Erde schneiden wird. Der Abstand des Orts m vom Erdäquator wird durch den Bogen am dieses Meridians gemessen, welcher die geographische Breite heißt. Man ziehe in der Ebene dieses Erdmeridians eine gerade Linie mt auf den Halbmesser Cm senkrecht; so ist diese als eine in der Ebene des Meridians liegende Horizontallinie die Mittagslinie des Orts m (§. 2.), und, wenn man mP zieht, der Winkel tmP die Polhöhe desselben. Nun ist sowohl $aCm + mCt$, als $Ctm + mCt = 90°$; folglich $aCm = Ctm = tmP + mPt$ (I, 32.) Aber wegen der in Vergleichung mit dem Halbmesser der Erde sehr großen Entfernung der Fixsterne ist der Winkel mPt unmerklich (§. 25.) Mithin ist die geographische Breite aCm der Polhöhe tmP gleich.

Es sey n ein anderer Ort der Erde, N sein Zenith, $PNBP'$ sein Meridian und $pnbp'$ der correspondierende Erdmeridian, so wird bn die geographische Breite oder Polhöhe desselben seyn. Die Lage dieses Orts gegen den ersteren wird gegeben seyn, wenn man die Polhöhen am, bn derselben, und den Winkel apb kennt, unter welchem die durch sie gelegten Erdmeridiane pmp', pnp' sich schneiden, und welcher durch den Bogen ab des Erdäquators gemessen wird. Dieser Bogen heißt der Unterschied der geographischen Länge der zwey Orte, welchen man durch die Benennungen östlich oder westlich unterscheidet, je nachdem der Ort auf der Ost- oder Westseite desjenigen Orts liegt, dessen Lage man als gegeben betrachtet. Der Punkt des Aequators, von welchem an die Längen selbst gerechnet werden, ist willkührlich. Man legt durch einen merkwürdigen Ort der

Erde, z. B. den Pik von Teneriffa, oder die westliche Küste der Insel Ferro einen Meridian, welcher der erste Meridian heißt, und zählt die Länge in der Richtung von Abend gegen Morgen von dem Punkt an, in welchem er den Aequator schneidet. Gewöhnlich nimmt man denjenigen Meridian als den ersten an, welcher von dem Meridian der pariser Sternwarte in runder Zahl 20 Grade gegen Westen liegt, und zwischen der westlichen Küste der Insel Ferro und der Stadt auf derselben durchgeht, so daß die geographische Länge jener Sternwarte zwanzig Grade beträgt. Länge und Breite bestimmen also die geographische Lage eines Orts.

§. 46. Es befinde sich nun die Sonne S (Fig. 13.) in dem Meridian PBP' des östlich von dem Ort m liegenden Orts n; so wird die Sonne noch den Stundenwinkel APB, welcher durch den Bogen AB des Aequators, oder den Bogen ab des Erdäquators gemessen wird, beschreiben müssen, um in den Meridian $PMAP'$ des Orts m zu kommen. Der östlich liegende Ort n wird also früher Mittag haben, als der Ort m, und der Unterschied, welcher der Unterschied der Meridiane oder der Mittagsunterschied heißt, wird dem in Zeit verwandelten Längenunterschied ab gleich seyn, indem man eine Stunde auf 15 Grade rechnet.

Der Mittagsunterschied zweyer Orte wird also durch die Beobachtung einer an den zwey Orten sichtbaren und für beyde in einerley Augenblick sich ereignenden Erscheinung unmittelbar gefunden werden können. An jedem der zwey Orte befinde sich ein Beobachter mit einer nach der Zeit seines Orts gestellten oder um eine gegebene Größe davon abweichenden Uhr, um den Augenblick der Erscheinung genau angeben zu können. Liegen nun die zwey Orte nicht einerley Meridian; so werden die an denselben beobachtete Zeiten der Erscheinung ungleich, und ihr Unterschied wird der Mittagsunterschied der zwey Orte seyn. Eben dieses kann auch mittelst einer gleichförmig gehenden und während des Transports von einem Ort an den andern diesen gleichförmigen Gang beybehaltenden Uhr geschehen, welche dazu dienen wird, die Zeit eines Orts an einen andern überzutragen, und so die vorher berichtigten Uhren der zwey Orte mit einander zu vergleichen. Man nennt dergleichen tragbare Uhren Längen- oder Seeuhren, weil man sich derselben auf der See zur Bestimmung der Länge bedient. Aus dem Mittagsunterschied ergiebt sich sodenn der Unterschied der Länge, wenn man auf eine Stunde 15 Grade rechnet, und derjenige Ort wird eine größere Länge haben, dessen Uhr früher geht.

§. 47. Es wird jezt noch nöthig seyn, zu untersuchen, ob die Sonne eine merkliche Parallaxe hat. Man beobachte zu dem Ende um die Zeit des Sommersolstitiums, wo die Sonne in unsern Gegenden die gröste Mittagshöhe hat, folglich ihre Höhenparallaxe gering ist, die Mittagshöhe derselben, und leite daraus ihre Abweichung her. Die tägliche Veränderung der leztern wird man, ohne die Schiefe der Ekliptik genau zu kennen, sehr genau berechnen (§. 34.) und dadurch die Abweichung, mithin auch die Polardistanz der Sonne für nicht weit von dem Solstitium entfernte Zeitpunkte angeben können. Nach §. 8. suche man für beliebige Stundenwinkel mittelst der alsdenn Statt findenden Polardistanz und der Polhöhe die Höhe der Sonne. Man warte die Zeiten ab, da die Sonne diese voraus berechnete Höhen erreicht, beobachte dieselben, vermindere sie um die Refraktion, und bringe den scheinbaren Halbmesser der Sonne gehörig in Rechnung; so wird man nur bey kleinen Höhen einen Unterschied von einigen Sekunden zwischen den berechneten und den beobachteten Höhen, und zwar die leztern beständig kleiner finden als die erstern. Man wird daraus schließen, daß die Parallaxe der Sonne zwar merklich, aber so klein sey, daß sie durch dieses Verfahren wegen der Unbeständigkeit der Refraktionen in sehr kleinen Höhen, welche zu ihrer genauen Bestimmung tauglicher wären, nicht mit der erforderlichen Genauigkeit ausgemittelt werden könne.

§. 48. Da die Höhenparallaxe dem Winkel *ASC* (Fig. 6.) gleich ist, unter welchem die von dem Himmelskörper *S* in der Ebene des durch ihn gelegten Vertikalkreises *ZSH* nach dem Mittelpunkt *C* und dem Ort *A* auf der Oberfläche der Erde gezogenen geraden Linien *SC*, *SA* sich schneiden, (§. 13.) und dieser Winkel gegeben ist, wenn man das Verhältniß von *SC* : *CA* und den Winkel *ZCS* oder *ZAS*, d. i. den wahren oder scheinbaren Abstand vom Scheitel kennt; so wird es bey der Bestimmung der Parallaxe darauf ankommen, das Verhältniß zu finden, in welchem der Halbmesser zu der Entfernung des Himmelskörpers von dem Mittelpunkt der Erde steht, dessen Parallaxe gesucht wird. Man wird dieses Verhältniß durch ein Verfahren finden, welches demjenigen ähnlich ist, dessen man sich in der praktischen Geometrie zur Bestimmung der Entfernung unzugänglicher Gegenstände bedient.

An zwey unter einerley Meridian *pap'* (Fig. 14.) liegenden Orten *b*, *d* beobachte man zu gleicher Zeit die Abstände des Himmelskörpers *s* von den Scheiteln *z*, *v* dieser Orte im Augenblick seines Durchgangs durch den Meridian, und verbessere dieselben wegen der Refraktion; so wird man die Winkel *zbs*, *vds* haben, welche die von den Beobachtungsorten *b*, *d*, nach dem Körper *s* gezogenen geraden Linien mit den Vertikallinien *cbz*, *cdv* der zwey Orte einschließen. Es sey *acq* der Aequator der Erde; so werden die Bogen *ab*, *ad* des Erdmeridians die geographischen Breiten oder Polhöhen (§. 45.) der zwey Orte messen, welche durch Beobachtungen der Fixsterne gefunden werden können. Man ziehe die Chorde *bd*; so kennt man in dem gleichschenklichten Dreyeck *bcd* den Winkel *bcd*, welcher im Fall der Figur der Summe der Polhöhen, aber wenn die zwey Orte auf einerley Seite des Aequators liegen, ihrer Differenz gleich ist. Mithin kennt man auch die zwey einander gleichen Winkel *dbc*, *bdc* an der Grundlinie *bd*, (I, 5, 32.) und damit das Verhältniß von *cb* : *bd*, oder man kann, wenn man *cb* als gegeben betrachtet, und z. B. = 1 setzt, *bd* finden. Zieht man die Summe der bekannten Winkel *cbd* und *zbs* von zwey rechten Winkeln ab; so erhält man den Winkel *sbd*, und eben so mittelst der Winkel *bdc* und *vds* den Winkel *bds*, mithin auch den Winkel *bsd* (I, 32.) Da nun bd in Theilen des zur Einheit angenommenen Erdhalbmessers ausgedrückt gegeben ist; so findet man durch Auflösung des Dreyecks bds die Distanzen bs, ds durch dieselben Theile ausgedrückt. Man ziehe cs; so kennt man in dem Dreyeck cbs die Seiten bc, bs und ihren Zwischenwinkel cbs, welcher mit dem durch Beobachtung gefundenen zbs zwey rechte Winkel macht; folglich kann man cs in Theilen des Erdhalbmessers ausgedrückt, oder das Verhältniß von cs zu cb finden. Hieraus ergiebt sich endlich die gröste Höhenparallaxe AHC (Fig. 6.), welche am Horizont H Statt findet, und daher die Horizontalparallaxe heißt, durch Auflösung des bey A rechtwinklichten Dreyecks AHC, in welchem das Verhältniß von $CH : CA$ gegeben ist, und die einem beobachteten Scheitelabstand ZAS entsprechende Höhenparallaxe ASC findet man durch die Auflösung des Dreyecks ASC, in welchem man den Winkel CAS als Supplement des beobachteten Scheitelabstands und das Verhältniß von CS oder $CH : CA$ kennt.

§. 49. Setzt man nemlich die Horizontalparallaxe $AHC = p$, die dem scheinbaren Abstand ZAS oder z zugehörige Höhenparallaxe $ASC = p'$, und den wahren Abstand $ZCS = z'$; so hat man

$$1.)\ CH \quad CA = \text{Sin. tot.} : \begin{Bmatrix} \text{Sin. } AHC \\ \text{Sin. } p \end{Bmatrix};$$

also sind die Sinus der Horizontalparallaxen ungleich entfernter Himmelskörper umgekehrt ihren Abständen vom Mittelpunkt der Erde proportional, und da die Sinus kleiner Winkel sich beynahe wie die Winkel selbst verhalten; so sind kleine Horizontalparallaxen nahe im umgekehrten Verhältniß der Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde.

Ferner ist $\left.\begin{matrix} \text{Sin. } CAS \\ \text{Sin. } ZAS \end{matrix}\right\} \quad \text{Sin. } ASC = \begin{Bmatrix} CS \\ CH \end{Bmatrix} : CA$, oder nach n. 1. ist

$$2.)\ \text{Sin. } z : \text{Sin. } p' = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } p$$

Der Sinus der Höhenparallaxe ist also dem Sinus des scheinbaren oder des wegen der Refraktion allein verbesserten beobachteten Abstands vom Scheitel proportional, und man kann hier wiederum, wenn die Parallaxen klein sind, statt der Sinus die Winkel selbst setzen.

Da $ZAS = ZCS + ASC$, oder $z = z' + p'$; so ist

$$\begin{aligned} \text{Sin. } p : \text{Sin. tot.} &= \text{Sin. } p' : \text{Sin. } (z' + p').\ (\text{n. } 2.) \\ &= \text{Sin. tot. Sin. } p' : \text{Sin. } z' \,\text{Cos. } p' + \text{Cos. } z' \,\text{Sin} \\ &= \text{Tg. } p' \quad \text{Sin. } z' + \text{Tg. } p' \,\frac{\text{Cos. } z'}{\text{Sin. tot.}} \end{aligned}$$

Daher 3.) $\text{Tang.}\,p' = \dfrac{\text{Sin.}\,p\ \text{Sin.}\,z'\ \text{Sin. tot.}}{\text{Sin. tot.}^2 - \text{Sin.}\,p\ \text{Cos.}\,z'}$,
mittelst welcher Formel man die einem gegebenen wahren Abstand z' vom Scheitel zugehörige Parallaxe finden kann.

Ferner verhält sich in dem Dreyeck ASC

$$\left.\begin{matrix}CS\\CH\end{matrix}\right\} : AS = \left\{\begin{matrix}\text{Sin.}\,CAS\\\text{Sin.}\,ZAS\end{matrix}\right\}\ \ \text{Sin.}\,ZCS$$
$$= \text{Sin.}\,z\ \ \ \text{Sin.}\,z'$$
$$= \text{Sin.}\,z\ \ \ \text{Sin.}\,(z-p'),$$

also ist 4.) $= \dfrac{CH}{AS} = \dfrac{\text{Sin.}\,z}{\text{Sin.}\,z'} = \dfrac{\text{Sin.}\,z}{\text{Sin.}\,(z-p')}$

Ein Himmelskörper, der eine merkliche Parallaxe hat, wird also dem auf der Erdoberfläche liegenden Beobachtungsort A desto näher seyn, als dem Mittelpunkt C der Erde, je größer seine Höhe ist. Mithin wird sein scheinbarer Halbmesser mit seiner Höhe wachsen. Es sey nemlich ca (Fig. 15.) die gerade Linie, welche den Beobachtungsort a mit dem Mittelpunkt c eines kugelförmigen Körpers verbindet, ab berühre diese Kugel in b, und an den Berührungspunkt sey der Halbmesser cb gezogen; so ist der Winkel cab der von a aus gesehene scheinbare Halbmesser der Kugel, und eben so ist, wenn ed eben diese Kugel in d berührt, und cd gezogen wird, ced der scheinbare von e aus gesehene Halbmesser derselben. In den rechtwinklichten Dreyecken abc, edc verhält sich nun

$$ca : cb = \text{Sin. tot.}\ \ \ \text{Sin.}\,cab$$
$$\left.\begin{matrix}cd\\cb\end{matrix}\right\} : ce = \text{Sin.}\,ced\ \ \ \text{Sin. tot.};$$

folglich 5.) $ca\ \ \ ce = \text{Sin.}\,ced : \text{Sin.}\,cab.$

Mithin sind die Sinus der scheinbaren Halbmesser einer Kugel, und, wenn die scheinbaren Halbmesser klein sind, sehr nahe diese selbst umgekehrt den Abständen ihres Mittelpunkts vom Auge des Beobachters proportional.

Eine Kugel, deren Halbmesser $= gf$ sey, befinde sich in der Entfernung $ag = ac$ von dem Punkt a; so verhält sich, wenn af diese Kugel berührt,

$$ag : fg = \text{Sin. tot.} : \text{Sin.}\,gaf$$
aber $cb \cdot \left\{\begin{matrix}ca\\ag\end{matrix}\right\} = \text{Sin.}\,cab : \text{Sin. tot.}$

folglich 6.) $cb\ \ \ fg = \text{Sin.}\,cab\ \ \ \text{Sin.}\,gaf.$

Also verhalten sich die Sinus der scheinbaren Halbmesser gleich weit entfernter Kugeln wie ihre wahren Halbmesser. Sind die scheinbaren Halbmesser klein; so verhalten sich sehr nahe die scheinbaren Halbmesser selbst wie die wahren.

§. 50. Um die Sonnenparallaxe mit der zur Verwandlung der beobachteten Sonnenhöhen in wahre erforderlichen Genauigkeit zu finden, möchte zwar die im 48ten §. gezeigte Methode hinreichend seyn, aber das Verhältniß des Abstands der Sonne von der Erde zu dem Halbmesser der letztern, wird selbst durch kleine in der Bestimmung der Parallaxe begangene Fehler beträchtlich geändert werden, und daher kommen die so verschiedenen Angaben des Abstands der Sonne von der Erde. Der Einfluß der Sonnenparallaxe auf einige andere astronomische Erscheinungen dient, wie man in der Folge sehen wird, zu ihrer genaueren Bestimmung. Man weißt jetzt, daß die Horizontalparallaxe der Sonne, wenn sie sich in ihrer mittleren Entfernung von der Erde, d. i. derjenigen, welche der halben Summe ihrer grösten und kleinsten Entfernung gleich ist, befindet, sehr nahe 8,8 Sekunden beträgt, woraus die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde = 23439 Erdhalbmessern folgt. Nimmt man sie nur um $\frac{1}{10}$ Sek. kleiner; so wird dieser Abstand schon um 215 Erdhalbmesser grösser, woraus sich die Verschiedenheit älterer und neuerer Bestimmungen desselben leicht wird erklären lassen.

§. 51. Von der jährlichen Bewegung der Sonne in einem gegen den Aequator geneigten grösten Kreis hängt, wie wir gesehen haben, die Veränderung der Mittagshöhe der Sonne, der Dauer von Tag und Nacht, und die Abwechslung der Jahrszeiten ab. Eben diese Bewegung verbunden mit der verschiedenen geographischen Lage der Orte, bringt sehr merkwürdige und mannigfaltige Erscheinungen in den täglichen Bewegungen der Sonne hervor, die man bey dem ersten Anblick nicht erwartet hätte, und jetzt, doch ohne Rücksicht auf die Refraktion, betrachtet werden sollen.

Liegt ein Ort unter dem Aequator; so fallen die Pole in den Horizont, und dieser halbirt alle von den Himmelskörpern bey ihrer täglichen Bewegung beschriebenen Parallelkreise. Folglich sind hier Tag und Nacht beständig einander gleich, und alle sowohl auf der nördlichen als südlichen Hälfte der Himmelskugel befindlichen Sterne kommen während eines Sterntags über den Horizont. Der Aequator der Himmelskugel geht, weil seine Pole in den Horizont fallen, durch den Scheitelpunkt, und die Sonne erhebt sich zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen bis zu dem Scheitel; so daß zu dieser Zeit ein senkrecht stehender Stab keinen Schatten wirft. Zur Zeit des Sommer- und Wintersolstitiums steht also die Sonne im Mittag am weitesten von dem Scheitel, im ersten Fall gegen Norden, im zweyten gegen Süden ab, ihre Mittagshöhe ist am kleinsten und dem Complement der Schiefe der Ekliptik gleich, und die Schatten fallen im Sommersolstitium auf die Südseite, im Wintersolstitium auf die Nordseite der Körper, welche ihn werfen. Versteht man, wie in unsern Gegenden, unter dem Sommer die Zeit der größten, und unter dem Winter die Zeit der kleinsten Mittagshöhe der Sonne; so giebt es an einem unter dem Aequator liegenden Ort in jedem Jahr zwey Sommer und zwey Winter. Aehnliche Erscheinungen müssen sich an jedem Ort der Erde zeigen, dessen Polhöhe kleiner als die Schiefe der Ekliptik ist, weil alsdenn der Durchschnittspunkt des Aequators mit dem Meridian einen kleineren Abstand vom Scheitel hat, als die größte Abweichung der Sonne oder die Schiefe der Ekliptik beträgt.

Wird die nördliche Breite oder Polhöhe der Schiefe der Ekliptik, folglich die Aequatorshöhe (§. 29.) ihrem Complement gleich; so steht der im Meridian befindliche Punkt des Aequators um die Schiefe der Ekliptik vom Zenith gegen Süden ab. Folglich geht die Sonne im Sommersolstitium durch den Scheitel, und steht im Wintersolstitium um die doppelte Schiefe der Ekliptik von dem Scheitel gegen Süden ab. Eben so verhält es sich bey einer der Schiefe der Ekliptik gleichen südlichen Breite, wenn man Sommer und Wintersolstitium miteinander verwechselt. Zwey Parallelkreise des Erdäquators, welche beyderseits um die Schiefe der Ekliptik von ihm abstehen, und, wie die ihnen ähnlich liegenden an der Himmelskugel (§. 38.), **Wendekreise** heißen, schließen also eine Zone der Erdoberfläche ein, auf welcher alle diejenige Orte liegen, deren Scheitel die Sonne erreichen kann, und die man daher den **heißen Erdstrich** (Zona torrida) nennt.

Ist die Polhöhe grösser als die Schiefe der Ekliptik, mithin die Aequatorshöhe kleiner als das Complement dieser Schiefe; so ist die gröste Mittagshöhe der Sonne, welche der Summe der Aequatorshöhe und der Schiefe der Ekliptik gleich ist, kleiner als 90°. Die Sonne erreicht also den Scheitel niemals, und es giebt des Jahrs nur einen Sommer und Winter. Mit der Polhöhe wächst der längste Tag, und wenn sie dem Complement der Schiefe der Ekliptik gleich wird; so berührt die Sonne, wenn sie unter dem Pol durch den Meridian geht, den Horizont zur Zeit des Sommersolstitiums, wenn die Polhöhe nördlich ist, weil alsdenn die Polardistanz der Sonne dem Complement der Schiefe der Ekliptik, mithin auch, vermöge der Voraussetzung, der Polhöhe gleich wird (§. 3.). Alsdenn dauert also der bürgerliche Tag 24 Stunden. Und da die Aequatorshöhe in dem hier betrachteten Fall der Schiefe der Ekliptik gleich ist; so wird die Sonne im Wintersolstitium gar nicht aufgehen; sondern nur noch den Horizont berühren, und die Nacht wird 24 Stunden dauern.

Eben so verhält es sich auf der Südseite der heißen Zone, wo sich nur die Jahrszeiten miteinander verwechseln. Zwey Parallelkreise des Erdäquators, welche um einen der Schiefe der Ekliptik gleichen Bogen von den Erdpolen abstehen, und die Polarkreise heißen, schließen also, jeder mit dem ihm zunächst liegenden Wendekreis, auf beyden Seiten des heißen Erdstrichs zwey Kugelzonen ein, auf welcher alle diejenigen Orte liegen, deren Scheitel die Sonne niemals erreicht, über deren Horizont aber sie sich zu jeder Jahrszeit erhebt. Sie heißen die **gemäßigten Erdstriche** (Zonæ temperatæ). Auf den nördlichen dieser Erdstriche beziehen sich die bisher angeführten astronomischen Beobachtungen, und auch die noch ferner anzuführenden werden als in eben diesem Erdstrich angestellt vorausgesetzt werden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird.

Wird endlich die Polhöhe größer als das Complement der Schiefe der Ekliptik, oder als die Polardistanz der Sonne zur Zeit der Solstitien; so geht die Sonne, wenn die Polhöhe nördlich ist, um die Zeit des Sommersolstitiums so lange nicht unter, als ihre Polardistanz kleiner als die Polhöhe ist (§. 3.) und um die Zeit des Wintersolstitiums so lange nicht auf, als bis ihre südliche Abweichung der Aequatorshöhe gleich, oder kleiner als dieselbe, mithin ihr Abstand vom Südpol der Polhöhe gleich oder größer als dieselbe wird. Bey südlicher Polhöhe findet dasselbe Statt, nur verwechseln sich Sommer und Winter. Am Pol der Erde selbst fällt der Pol der Himmelskugel in den Scheitel; folglich der Aequator mit dem Horizont zusammen. Die Parallelkreise der Sterne werden Parallelkreise des Horizonts, und die Sonne geht dem am Nordpol liegenden Ort so lange nicht auf, als sie eine südliche Abweichung hat. Mit der Tag- und Nachtgleiche erscheint sie am Horizont, und bleibt so lange über demselben, als sie eine nördliche Abweichung hat. Hier ist also die Dauer des Tags der Zeit von der Frühlingsnachtgleiche bis zu der des Herbsts, und die Dauer der Nacht der Zeit gleich, welche von letzterer bis wiederum zu ersterer verfließt. Am Südpol findet dasselbe Statt, wenn man nördliche Abweichung der Sonne statt südlicher setzt. Diejenigen Orte, welche einen mehr als 24 Stunden betragenden Tag haben, und an welchen auf der andern Seite die Nacht länger als 24 St. dauert, liegen also innerhalb der von den Polarkreisen eingeschlossenen Theilen der Erdoberfläche, und diese heißen die **kalten Erdstriche** (Zonæ frigidæ).

§. 52. Durch die Wirkung der Atmosphäre der Erde, erhalten wir schon vor Aufgang und noch nach dem Untergang der Sonne einiges Licht von ihr, welches die **Morgen- und Abend-Dämmerung** ausmacht. Die Erfahrung lehrt, daß, wenn die Sonne 18° unter dem Horizont steht, die kleinsten mit bloßen Augen sichtbaren Sterne sich zeigen, und, wenn sie dem Horizont näher rückt, diese nach und nach verschwinden. Steht sie um weniger als 18° unter dem Horizont; so bemerkt man in ihrer Nähe einen Theil der Atmosphäre erleuchtet, welcher durch einen Bogen begränzt erscheint. Bey einer Tiefe von $6° 23' \frac{1}{2}$ unter dem Horizont zieht sich dieser Bogen in der Gestalt eines größten

Kreises durch den Scheitel, die grösseren Sterne fangen an der Ostseite des Himmels an sichtbar zu werden, während die noch starke Abend-Dämmerung dieß an der Westseite verhindert, und man ist in Wohnungen, welche nicht gerade gegen den Ort der auf- oder untergehenden Sonne gekehrt sind, genöthigt, ein Licht anzuzünden. Man nennt daher diese Dämmerung die bürgerliche.

Die Dauer der Dämmerung ergiebt sich aus der Zeit, welche die Sonne gebraucht, um aus einem in einer Tiefe von 18° mit dem Horizont parallel gezogenen Kreis in den Horizont zu kommen, und hängt also von der Polhöhe und der Abweichung der Sonne ab. Unter dem Aequator durchschneidet zur Zeit der Nachtgleichen der Tagkreis der Sonne, welcher in diesem Fall mit dem Aequator der Himmelskugel zusammenfällt, den Horizont und die Parallelkreise desselben rechtwinklicht; mithin ist daselbst zur Zeit der Nachtgleichen, die Dauer der Dämmerung der Zeit gleich, welche die Sonne bey ihrer täglichen Bewegung gebraucht, um einen Bogen von 18° zu beschreiben, welches 1 St. 12 Min. beträgt. Je grösser die Abweichung der Sonne wird, desto kleiner wird der Halbmesser ihres Tagekreises, und desto grösser die Dauer der Dämmerung, welche also zur Zeit der Solstitien am grösten wird. Um für eine gegebene Polhöhe und Abweichung oder Polardistanz der Sonne die Dauer der Dämmerung zu finden, suche man nach §. 8. n. 1. oder 4. den Stundenwinkel, welcher einer Tiefe von 18° unter dem Horizont, oder einer negativen Höhe von 18° zugehört, ziehe von demselben den halben Tagbogen, welchen man nach §. 8. n. 8. findet, ab, und verwandle den Rest in Zeit, indem man auf 15° eine Stunde rechnet; so wird diese die gesuchte Dauer der Dämmerung seyn. Eben so findet man die Dauer der bürgerlichen Dämmerung, wenn man die negative Sonnenhöhe = 6° 23′ 30″ setzt. Kommt die Sonne nicht bis auf eine Tiefe von 18° unter den Horizont; so dauert die Dämmerung die ganze Nacht hindurch. Unter einer Polhöhe von 48° 39′ z. B. senkt sich die Sonne um Mitternacht 18° tief unter den Horizont, wenn ihre Polardistanz die Polhöhe um 18° übertrifft; also = 66°

$39'$ wird. Mithin wird zur Zeit des Sommersolstitiums, wo die Polardistanz der Sonne $= 66° 32'$ wird, die Dämmerung die ganze Nacht hindurch dauern. Man sieht aber, daß, wenn diß möglich seyn soll, die Polhöhe nicht kleiner seyn darf, als der Ueberschuß des Complements der Schiefe der Ekliptik über $18°$, d. i. nicht kleiner als $48° 32'$. Soll die bürgerliche Dämmerung die ganze Nacht hindurch dauern können; so darf die Polhöhe nicht kleiner seyn als $60° 9'$. Die Bestimmung der Zeit der kürzesten Dämmerung erfordert die Auflösung der Aufgabe, die Polardistanz eines Sterns zu finden, bey welcher er unter einer gegebenen Polhöhe in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Parallelkreis des Horizonts in diesen selbst kommt. Man kann im Allgemeinen beweisen, daß die Zeit, innerhalb welcher ein Stern von einem gegebenen Parallelkreis des Horizonts in einen andern gegebenen Parallel desselben kommt, am kleinsten ist, wenn der Parallelkreis des Sterns die zwey gegebenen Parallelkreise des Horizonts unter gleichen Winkeln durchschneidet, oder die zwey Winkel einander gleich sind, welche die von den Durchschnittspunkten des von dem Stern beschriebenen Parallels mit den zwey gegebenen Almucantharat an das Zenith und den Pol des Aequators gezogenen grösten Kreise miteinander einschließen.

§. 53. Es sey nemlich z (Fig. 16.) das Zenith, p der Pol, zs, zh die gegebenen zwey Zenithdistanzen, welche die Abstände der zwey gegebenen Almucantharat vom Scheitel messen, s und h die zwey Punkte, in welchen der um $ps = ph$ vom Pol abstehende Parallelkreis eines Sterns den zwey Almucantharat so begegne, daß $psz = phz$. Ein anderer Stern s', dessen Polardistanz $= ps'$ sey, stehe in s' um $zs' = zs$ vom Scheitel ab. Man mache den Winkel $s'ph' = sph$, $ph' = ps'$ und ziehe die Bogen gröster Kreise ss', hh'. Da nun $sph = s'ph'$; so ist auch $sps' = hph'$, und weil $ph = ps$, $ph' = ps'$; so sind die Dreyecke pss' und phh' congruent, und daher $phh' = pss'$. Aber $zhp = zsp$ (Voraussetz.); folglich $zhh' = zss'$. Man nehme $sv = zh$, und ziehe vs'; so congruiren auch die Dreyecke zhh' und vss', und es ist $vs' = zh'$.

Nun ist $\left.\begin{matrix} zs \\ zv + vs \\ zv + zh \end{matrix}\right\} = zs' < zv + vs' < zv + zh'$:

folglich ist $zh < zh'$. Da nun $s'ph' = sph$; so erhebt sich der Stern s von der Zenithdistanz zs auf die zh in derselben Zeit, in welcher sich der Stern s' von derselben Zenithdistanz zs' auf die zh', welche größer als zh ist, erhebt, und gebraucht also, um sich vollends auf eine der zh gleiche Zenithdistanz zu erheben, eine größere Zeit, als der Stern s, dessen Polardistanz $= ps$. Eben so wird der Beweiß für einen Stern geführt, dessen Polardistanz $> ps$ ist. Ein Stern erhebt sich also in der kürzesten Zeit von zs auf zh, wenn $psz = phz$ ist.

Da $zh = sv$, $ph = ps$, und $zhp = zsp$; so sind, wenn man pv zieht, die Dreyecke zhp, vsp congruent. Mithin ist $pv = pz$, $zph = vps$, und das Perpendickel pr auf zv halbiert sowohl den Winkel zpv, als die Grundlinie zv des gleichschenklichten Dreyecks zpv. Ferner ist $\left.\begin{matrix} zph + hpv \\ zpv \end{matrix}\right\} = vps + hpv = hps$; folglich $\frac{1}{2} zpv = zpr = \frac{1}{2} hps$. Und nun verhält sich

$$\begin{aligned} \text{Sin.}\, pz : \text{Sin. tot.} &= \text{Sin.}\, zr \quad \text{Sin.}\, zpr \\ &= \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}(zs - vs) : \text{Sin.}\, zpr \\ &= \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2}(zs - zh) \quad \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} hps \end{aligned}$$

Daher ist 1.) $\text{Sin.}\, \frac{1}{2} hps = \dfrac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2}(zs - zh)\ \text{Sin. tot.}}{\text{Sin.}\, pz}$.

Da pr auf der Grundlinie zs senkrecht ist; so verhält sich in dem Dreyeck zps

$$\begin{aligned} \text{Cos.}\, pz : \text{Cos,}\, ps &= \text{Cos.}\, zr : \text{Cos.}\, sr \\ &= \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2}(zs - zh) \quad \text{Cos,}\, \tfrac{1}{2}(zs + zh)\,; \end{aligned}$$

Also ist 2.) $\text{Cos.}\, ps = \dfrac{\text{Cos.}\, pz\ \text{Cos.}\, \frac{1}{2}(zs + zh)}{\text{Cos.}\, \frac{1}{2}(zs - zh)}$

Aus n. 1. ergiebt sich der Winkel hps mittelst der gegebenen Abstände zs, zh der zwey Almucantharet vom Scheitel und des Complements pz der Polhöhe, und, wenn man diesen Winkel in Zeit verwandelt, die kürzeste Zeit, in welcher sich ein Stern von dem einen Almucantharat in den andern erhebt. Aus eben diesen Stücken erhält man nach n. 2. die Polardistanz ps des Sterns.

In Beziehung auf die Bestimmung der kürzesten Dämmerung sey m die Tiefe der Sonne unter dem Horizont, bey welcher die Dämmerung anfängt und aufhört; so wird man haben $zs = 90° + m$; $zh = 90°$, und, wenn die Polhöhe $= l$, die Polardistanz $= d$ gesetzt wird,

$$4.)\ \text{Sin,}\, \tfrac{1}{2} hps = \frac{\text{Sin.}\, \frac{1}{2} m\ \text{Sin. tot.}}{\text{Cos.}\, l},$$

$$5.)\ \text{Cos.}\, d = - \frac{\text{Tg.}\, \frac{1}{2} m\ \text{Sin.}\, l}{\text{Sin. tot.}}.$$

Für $m = 18°$, $l = 48° 31' 10''$ erhält man $\frac{1}{2} hps = 13° 39' 39''$, $d = 96° 48' 53''$. Die Dauer der kürzesten Dämmerung beträgt also 1 St. 49 M. 17,2 Sek. und diese findet Statt, wenn die südliche Abweichung der Sonne $= 6° 48' 53''$ ist, welche sie zwischen dem 3. und 4. März und dem 10. und 11. October hat.

§. 54. Man hat sich der Dämmerung bedient, um die Höhe der Atmosphäre, so weit sie noch die Sonnenstralen merklich zurückwirft, zu bestimmen. Es sey *ca* (Fig. 17.) der Halbmesser der Erde, und *ef* der Halbmesser der mit der Erde concentrischen sphärischen Oberfläche der Atmosphäre. Die Tangente *da* an dem Punkt *a* treffe in dem Punkt *d* die Oberfläche der Atmosphäre. Man ziehe *cd*, welche der Erdoberfläche in *g* begegne, nehme in der durch *ac* und *cd* gelegten Ebene $gb = ga$, und ziehe *cb*, *bd*; so wird auch die *db* den aus *c* mit dem Halbmesser *ca* in der Ebene *acd* beschriebenen Kreis in dem Punkt *b* berühren, und $bdc = adc$ seyn. Ein Sonnenstral *cbd* wird also noch eben an der Oberfläche der Erde bey *b* vorübergehen, und an dem Punkt *d* der Gränze der Atmosphäre nach der Richtung der Horizontallinie *da* des Orts *a* zurückgeworfen werden; folglich wird, wenn die Sonne um den Winkel *eds* unter dem Horizont des Orts *a* stehet, die Dämmerung anfangen oder sich endigen. Da in dem Viereck *acbd* sowohl *dac* als $dbc = 90°$; so ist $eds = acb$, und $acd = \frac{1}{2} eds = 9°$, weil nach den Beobachtungen $eds = 18°$. Mithin ist in dem rechtwinklichten Dreyeck *acd* das Verhältniß von *cd* : *ac* gegeben, welches dem vom 1,0124651 : 1 gleich ist. Bey dieser Berechnung sind aber die Wege *ad*, *db* des Lichtstrals durch die Atmosphäre als gerade Linien angenommen, welche wegen der Refraktion krumme gegen die Erde hole Linien sind (§. 15.). Man findet daher auf dem oben gezeigten Weg die Höhe der Atmosphäre noch etwas zu groß. Indessen können mehrere Zurückwerfungen des Sonnenlichts nach einander Statt finden, wodurch diese Methode, die Höhe der Atmosphäre zu bestimmen, unsicher gemacht wird.

§. 55. In kleinen Massen ist die atmosphärische Luft

unsicht-

unsichtbar, aber die von allen Schichten der Atmosphäre zurückgeworfenen Lichtstralen machen einen merklichen Eindruck, und zeigen sie mit einer blauen Farbe, welche sich auch über sehr entfernte Gegenstände der Erde verbreitet, und dem Himmel das Ansehen eines blauen Gewölbes giebt. Könnten wir die Gränze der Atmosphäre sehen, und die Entfernungen der an ihrer äußern Oberfläche befindlichen Punkte beurtheilen; so würde uns der Himmel als die Oberfläche eines Kugelabschnitts erscheinen, welcher durch den Horizont des Beobachtungsorts oder durch eine die Erdoberfläche berührende Ebene abgeschnitten wird. Ob wir aber gleich die äußerste Oberfläche der Atmosphäre nicht unterscheiden können; so müßen wir doch, da die horizontalen Lichtstralen, welche sie uns zusendet, aus einer größeren Tiefe kommen, als die vertikalen, die Ausdehnung der Atmosphäre nach der horizontalen Richtung für größer halten, als nach der vertikalen. Hiezu kommen noch unsere Erfahrungen über die Entfernung irdischer Gegenstände, welche nur in horizontaler Richtung beträchtlich werden kann. Erscheinen uns die auf der Erde befindlichen Gegenstände in einiger Höhe über dem Horizont; so wissen wir schon, daß sie nicht sehr entfernt seyn können, und wir sind daher geneigt, auch die höher über dem Horizont liegende Punkte des scheinbaren Himmelsgewölbes für näher zu halten, als die am Horizont befindlichen, zwischen welchen und unserm Aug noch überdiß gewöhnlich eine Menge Gegenstände liegen, wodurch wir veranlaßt werden, den an den Horizont angränzenden Theil des Himmels für entfernter zu halten. Der Himmel muß uns also als ein zusammengedrücktes Gewölbe, oder als ein Kugelabschnitt erscheinen, welcher durch den Horizont gebildet wird, und seine Gestalt muß sich mit den Ursachen der optischen Täuschungen, welche hier im Spiel sind, verändern. Im Mittel genommen scheint uns ein Punkt, welcher 23 Grade über den Horizont erhaben ist, den vom Scheitel bis an den Horizont gehenden Bogen zu halbiren, woraus folgt, daß, wenn dieser Bogen ein Kreisbogen ist, dessen Mittelpunkt in den der Erde fällt, der Halbmesser des Kugelabschnitts sich zu seiner Höhe wie 3,36 : 1 verhält.

§. 56. Um diß zu zeigen, sey aba' (Fig. 18.) ein Durchschnitt des Himmelsgewölbes mit einer Vertikalebene, und c der gemeinschaftliche Mittelpunkt der scheinbaren Himmelskugel und der Erde. Auf dem vertikalen Durchmesser bd wird also ein Punkt e so zu bestimmen seyn, daß, wenn man ae auf bd senkrecht und die ne an die Mitte n des Bogens ab zieht, der Winkel aen = 23 Gr. wird. Man ziehe noch nf auf bd senkrecht; setze $\left.\begin{matrix} aen \\ enf \end{matrix}\right\} = a$, und den Bogen $\left\{\begin{matrix} an \\ nb \end{matrix}\right\} = y$; so ist, für den Halbmesser 1, die gerade Linie $cf = \mathrm{Cos.}\, y$

— — — $ce = \mathrm{Cos.}\, 2y$

mithin $fe = \mathrm{Cos.}\, y - \mathrm{Cos.}\, 2y$,

und die $nf = \mathrm{Sin.}\, y$.

Daher $\left.\begin{matrix} fn : fe \\ 1 : \mathrm{Tg}\, a \end{matrix}\right\} = \mathrm{Sin.}\, y : \left\{\begin{matrix} \mathrm{Cos.}\, y - \mathrm{Cos.}\, 2y \\ \mathrm{Cos.}\, y - 2\,\overline{\mathrm{Cos.}\, y}^2 + 1 \\ (1 - \mathrm{Cos.}\, y)\,(1 + 2\,\mathrm{Cos.}\, y) \end{matrix}\right.$

$$1 \quad \overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2 = \overline{\mathrm{Sin.}\, y}^2 \quad (1 - \mathrm{Cos.}\, y)^2\,(1 + 2\,\mathrm{Cos.}\, y)^2$$
$$= (1 - \mathrm{Cos.}\, y)\,(1 + \mathrm{Cos.}\, y) : (1 - \mathrm{Cos.}\, y)^2\,(1 + 2\,\mathrm{Cos.}\, y)^2$$
$$= 1 + \mathrm{Cos.}\, y : (1 - \mathrm{Cos.}\, y)\,(1 + 2\,\mathrm{Cos.}\, y)^2$$

also $(1 + \mathrm{Cos.}\, y)\,\overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2 = 1 + 3\,\mathrm{Cos.}\, y - 4\,\overline{\mathrm{Cos.}\, y}^3$,

oder $4\,\overline{\mathrm{Cos.}\, y}^3 - 3\,(1 - \tfrac{1}{3}\,\overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2)\,\mathrm{Cos.}\, y = 1 - \overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2$

Aber in einem Kreis, dessen Halbmesser $= r$, ist für einen beliebigen Winkel z

$$4\,\overline{\mathrm{Cos.}\, z}^3 - 3\,r^2\,\mathrm{Cos.}\, z = r^2\,\mathrm{Cos.}\, 3z:$$

folglich ist der Cosinus des Bogens y für den Halbmesser 1 dem Cosinus des dritten Theils eines Winkels in einem Kreise gleich, welcher $\sqrt{1 - \tfrac{1}{3}\,\overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2}$ zum Halbmesser, und $\dfrac{1 - \overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2}{1 - \tfrac{1}{3}\,\overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2}$ zum Cosinus in eben diesem Kreise hat.

Setzt man diesen Winkel = 3z; so ist

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{Cos.}\, 3z = \dfrac{1 - \overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2}{(1 - \tfrac{1}{3}\,\overline{\mathrm{Tg.}\, a}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \text{und } \mathrm{Cos.}\, y = \mathrm{Cos.}\, z\,\sqrt{1 - \tfrac{1}{3}\,\overline{\mathrm{Tg.}\, a}} \end{matrix}\right\} \text{für den Halbm.} = 1.$$

Man ziehe ab, ad; so verhält sich

$$ae \quad eb = de : ae$$
$$= 1 : \mathrm{Tg.}\, y$$
$$= \mathrm{Cotg.}\, y \quad 1$$

Für a = 23 Gr. erhält man nun

$$3z = 25^\circ \; 53' \; 21'',2$$
$$y = 16 \quad 33 \quad 30,7$$

$$\text{Cotg. } y' = 3,3633243 = \frac{ae}{be}.$$

Da $1 \quad \text{Tg. } a = \overline{\text{Sin. } y} \quad (1 - \text{Cos. } y)\,(1 + 2\,\text{Cos. } y)$;

so ist $\text{Sin. } y : \text{Tg. } a = \overline{\text{Sin. } y}^2 \quad (1 - \text{Cos. } y)\,(1 + 2\,\text{Cos. } y)$

$$= 1 + \text{Cos. } y : 1 + 2\,\text{Cos. } y$$
$$\text{Sin. } y : \tfrac{1}{2}\,\text{Tg. } a = 1 + \text{Cos. } y \quad \tfrac{1}{2} + \text{Cos. } y$$
$$\text{Sin. } y - \tfrac{1}{2}\,\text{Tg. } a : \tfrac{1}{2}\,\text{Tg. } a = \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} + \text{Cos. } y$$

Man ziehe den Durchmesser *gh* auf den *bd* senkrecht, nehme $ck = \text{Tg. } a$ für den zur Einheit angenommenen Halbmesser *cd*, halbire *ck* in *l*, *cd* in *r*, und ziehe durch *l* und *r* die *pq* mit *bd*, die *sqr* mit *gh* parallel. Es begegne die *pq* der *nf* in *p*; so ist

$$\left.\begin{matrix} nf - cl \\ nf - pf \\ np \end{matrix}\right\} : \begin{Bmatrix} cl \\ lk \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cr \\ ql \end{Bmatrix} \quad \left\{\begin{matrix} cr + cf \\ rf \\ pq \end{matrix}\right.$$

also $np \times pq = ql \times lk$. Demnach liegt der Punkt *n* auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten *gh*, *pq* sind, und welche durch den gegebenen Punkt *k* geht, mithin gegeben ist. Der Punkt *n*, und daraus ferner das Verhältniß von $ae : eb$ kann also auch mittelst des Durchschnitts einer gleichseitigen Hyperbel und des Kreises *abdg* gefunden werden.

§. 57. Es ist eine bekannte Erfahrung, daß uns die Sonne und der Mond, wenn sie am Horizont stehen, viel größer zu seyn scheinen, als wenn sie beträchtlich über denselben sich erhoben haben. Die wirkliche Messung zeigt bey der Sonne keinen merklichen Unterschied, wenn man auf den Einfluß der Stralenbrechung Rücksicht nimmt, und der Durchmesser des Monds wird sogar desto größer gefunden, je größer seine Höhe wird. Ein Himmelskörper, welcher eine merkliche Parallaxe hat, muß wirklich einen desto größern scheinbaren Halbmesser haben, je größer seine Höhe ist (§. 49.). Diese Vergrößerung ist bey der Sonne wegen ihrer sehr kleinen Parallaxe nicht merklich, und da sie bey dem Mond merklich wird; so muß er der Erde beträchtlich näher seyn, als die Sonne. Die scheinbare Vergrößerung des Mondes und der Sonne am Horizont ist also ebenfalls eine optische Täuschung. Diese Himmelskörper scheinen uns an der Oberfläche des zusammengedrückten Gewölbes des Himmels zu stehen, und wir halten sie daher am

Horizont für entfernter als in der Höhe. Ihre scheinbaren Durchmesser, d. h. die Winkel, unter welchen sie erscheinen, sind in beyden Fällen nahe dieselben. Wir halten sie also am Horizont, wo sie uns weiter entfernt zu seyn scheinen, für größer, als in der Höhe, wo wir sie uns näher glauben. Das Dazwischenliegen mehrerer Gegenstände trägt, wie bey der eingedrückten Gestalt des Himmels, vieles dazu bey, die horizontalen Abstände für größer zu halten als die schiefen, woher es kommt, daß der aufgehende Mond ungewöhnlich groß erscheint, wenn man ihn durch eine lange Straße oder Allee, oder auch hinter einer Reihe weit entfernter Berge erblickt. Betrachtet man ihn durch eine Röhre ohne Gläser; so fällt die Täuschung großen Theils weg, und er erscheint verkleinert.

§ 59. Gewöhnlich erblickt man auf der Sonne einzelne oder mehrere schwarze Flecken, welche alle eine gemeinschaftliche Bewegung vom östlichen Rand der Sonne gegen den westlichen haben. Wenn die Länge der Sonne = 2 Z. 10° ist; so sind die Wege der Flecken miteinander parallele gerade Linien, welche um einen Winkel von $7\frac{1}{2}$ Graden gegen die Ekliptik geneigt sind, und zwar so, daß der auf der Südseite der Ekliptik liegende Theil zuerst beschrieben wird. So wie die Länge der Sonne wächst, fangen die Wege der Flecken an, sich in elliptische Bogen zu krümmen, welche ihre erhabene Seite gegen Norden kehren, und wenn die Länge der Sonne = 5 Z. 10°; so ist die Krümmung am stärksten. Sie nimmt jetzt nach und nach wieder ab, bis die Wege der Sonnenflecken bey einer Länge der Sonne von 8 Z. 10° wieder geradlinigt, und um $7\frac{1}{2}$ Gr. gegen die Ekliptik geneigt erscheinen, wo nun die Bewegung von der Nordseite der Ekliptik in die südliche geschieht. Dann fangen die Wege der Flecken wieder an, sich zu krümmen, und zwar gegen Norden, die Krümmung wird bey einer Länge der Sonne von 11 Z. 10° am stärksten, und nimmt von da an beständig ab, bis die Länge der Sonne wiederum = 2 Z. 10° wird. Die Geschwindigkeit mit welcher diese Wege beschrieben werden, ist in der Mitte am größten, an den Rändern der Sonne am kleinsten, und zugleich scheinen die Flecken an den Rändern der Sonne schmäler, als wenn sie auf der Mitte ihres Wegs sind. Die Zeit der Sichtbarkeit eines Sonnenfleckens beträgt gegen 14 Tage, und ungefähr eben so lang ist er unsichtbar, worauf er wiederum anfängt, am östlichen Sonnenrande zu erscheinen. Uebrigens verändern die Sonnenflecken oft ihre Gestalt in kurzer Zeit, zertheilen sich in mehrere, oder verschwinden auch gänzlich. Die Sonne dreht sich also um eine gegen die Ekliptik unter einem Winkel von 82 $\frac{1}{2}$ Gr. geneigte Axe nach derselben Richtung, nach welcher sie ihre jährliche Bewegung macht, und die durch ihre Umdrehungsaxe gelegte Ebene schneidet die Ekliptik in den Punkten 5 Z. 10° und 11 Z. 10° so, daß auf der Seite des letztern Punkts der spitze Winkel liegt, unter welchem ihre Umdrehungsaxe gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist. Die Veränderlichkeit der Sonnenflecken, und zuweilen auch ihre eigene Bewegung auf der Oberfläche der Sonne gestatten keine sehr genaue Bestimmung der Lage ihrer Axe und ihrer Umdrehungszeit. Letztere fällt zwischen 25 Tag 10 St. und 25 T. 14 St. Da die Sonne bey der Umdrehung um ihre Axe beständig kreisförmig erscheint; so ist sie eine Kugel. Man nennt den größten Kreis der Sonne, welcher auf ihrer Umdrehungsaxe senkrecht ist, den Sonnenäquator, dessen Neigung gegen die Ekliptik also 7 $\frac{1}{2}$ Gr. beträgt, und dessen Ebene die Ekliptik in den Punkten 2 Z. 10 Gr. und 8 Z. 10 Gr. durchschneidet.

§. 59. Die Aufgabe, die Lage der Umdrehungsaxe der Sonne durch die Beobachtung der auf ihrer Oberfläche befindlichen Flecken zu bestimmen, zerfällt in die zwey folgende. Erstlich die Punkte bestimmen, wo die von dem Mittelpunkt der Sonne an ihre Flecken gezogene und verlängerte gerade Linien die Himmelskugel treffen, und zweytens aus drey vom Mittelpunkt der Sonne aus gesehenen (heliocentrischen) Lagen eines Sonnenfleckens den Punkt bestimmen, in welchem die verlängerte Umdrehungsaxe der Sonne der Himmelskugel begegnet. In Beziehung auf die erste dieser Aufgaben sey *acbd* (Fig. 19.) der Umkreis der Sonne, welcher ihre gegen die Erde gekehrte Hälfte von der andern trennt, *c* der Mittelpunkt der Sonne, *ab* die Durchschnittslinie der Ebene der Ekliptik und der Oberfläche der Sonne, welche dem Beobachter auf der Erde als eine gerade Linie erscheint. Fernet sey durch den Beobachtungsort und den Mittelpunkt der Sonne eine auf die Ekliptik senkrechte Ebene gelegt, welche der Oberfläche der Sonne in einem grösten Kreis begegnen, und ebenfalls als eine gerade auf der ab senkrechte Linie ed erscheinen wird. Man beobachte die scheinbaren Größen der senkrechten Abstände fh, fk eines Sonnenfleckens f von den Durchmessern ab, de; so ergiebt sich durch Auflösung des bey h rechtwinklichten geradlinigten Dreyecks cfh die Hypotenuse cf und der Winkel hcf. Durch die auf der Oberfläche der Sonne liegenden, dem Beobachter aber in der Ebene des Kreises $aebd$ zu liegen scheinende Punkte c und f, e und f seyen gröste Kreise gelegt, und letzterer begegne dem grösten Kreis ab in g. Der Bogen cf wird wiederum als eine gerade Linie erscheinen, welche dem Sinus desselben für den Halbmesser ca gleich seyn wird, und man wird mittelst des scheinbaren Halbmessers der Sonne und der aus Beobachtungen gefundenen scheinbaren Grösse von cf das Verhältniß von $cf : ca$, also den Sinus des Bogens cf und den Bogen cf selbst haben. Und da vermöge der Voraussetzung die Ebene $aebd$ auf der vom Auge des Beobachters an den Mittelpunkt der Sonne gezogenen geraden Linie senkrecht steht, so ist der oben gefundene geradlinigte Winkel hcf dem Winkel fcg des bey g rechtwinklichten sphärischen Dreyecks cfg gleich, dessen Hypotenuse cf ebenfalls gegeben ist. Und nun verhält sich

$$\text{Sin. tot.} \quad \text{Sin. } fcg = \text{Sin. } cf : \text{Sin. } fg,$$
$$\text{Sin. tot.} : \text{Cos. } fcg = \text{Tg. } cf : \text{Tg. } cg.$$

Der Bogen fg mißt die heliocentrische Breite des Sonnenfleckens, und der Bogen cg den Unterschied der heliocentrischen Länge der Erde und des Sonnenfleckens. Letztere ist der um 180° oder 6 Zeichen vergrößerten Länge der Sonne für den Augenblick der Beobachtung gleich, und man findet also die heliocentrische Länge des Sonnenfleckens, wenn man zu der um 6 Z. vermehrten Sonnenlänge den Bogen cg addirt, oder davon abzieht, je nachdem cg westlich oder östlich vom Mittelpunkt c fällt.

Es seyen nun f, f', f'' (Fig. 20.) die drey Punkte der Himmelskugel, in welchen derselben die von dem Mittelpunkt der Sonne an einen ihrer Flecken gezogenen geraden Linien nach und nach bey der ersten, zweyten und dritten Beobachtung begegneten, und e sey der Nordpol der Ekliptik, p der Punkt, wo die verlängerte Sonnenaxe auf der Nordseite die Himmelskugel trifft.

Man ziehe die grösten Kreise $ef, ef', ef'', pf, pf', pf''$, wo die drey letzteren Bogen einander gleich seyn werden. In den Dreyecken $fep, f'ep, f''ep$ kennt man die Unterschiede der heliocentrischen Längen $fef' = a$, $fef'' = a'$, und die Complemente $fe =$

d, $f'e = d'$, $f''e = d''$ der heliocentrischen Breiten des Sonnenfleckens. Man setze $fep = x$, und $ep = y$; so ist in den Dreyecken pef, pef', pef''

1.) $\text{Cos.}\, pf = \text{Cos.}\, y\, \text{Cos.}\, d + \text{Sin.}\, y\, \text{Sin.}\, d.\, \text{Cos.}\, x$,

2.) $\text{Cos.}\, pf' = \text{Cos.}\, y\, \text{Cos.}\, d' + \text{Sin.}\, y\, \text{Sin.}\, d'\, \text{Cos.}\, (x - a)$,

3.) $\text{Cos.}\, pf'' = \text{Cos.}\, y\, \text{Cos.}\, d'' + \text{Sin.}\, y\, \text{Sin.}\, d''\, \text{Cos.}\, (x - a')$. Da nun $pf' = pf$; so ist $\text{Cos.}\, y (\text{Cos.}\, d - \text{Cos.}\, d') = \text{Sin.}\, y\, \text{Sin.}\, d'\, \text{Cos.}\, (x-a) - \text{Sin.}\, y\, \text{Sin.}\, d\, \text{Cos.}\, x$,

$$\text{Cotg.}\, y\, (\text{Cos.}\, d - \text{Cos.}\, d') = \text{Sin.}\, d'\, \text{Cos.}\, (x - a) - \text{Sin.}\, d\, \text{Cos.}\, x$$

$$= \frac{\text{Sin.}\, d' + \text{Sin.}\, d}{2} (\text{Cos.}\, (x - a) - \text{Cos.}\, x)$$

$$+ \frac{\text{Sin.}\, d' - \text{Sin.}\, d}{2} (\text{Cos.}\, (x - a) + \text{Cos.}\, x)$$

$$2 \text{Sin.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cotg.}\, y = 2 \text{Sin.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Sin.}\, (x - \tfrac{1}{2} a)$$

$$+ 2 \text{Sin.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Cos.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Cos.}\, (x - \tfrac{1}{2} a)$$

$$\text{Cotg.}\, y = \text{Cotg.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Sin.}\, (x - \tfrac{1}{2} a) + \text{Cotg.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Cos.}\, (x - \tfrac{1}{2} a)$$

$$= A\, \text{Sin.}\, m\, \text{Sin.}\, (x - \tfrac{1}{2} a) + A\, \text{Cos.}\, m\, \text{Cos.}\, (x - \tfrac{1}{2} a),$$

wenn man $A\, \text{Sin.}\, m = \text{Cotg.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a$

$A\, \text{Cos.}\, m = \text{Cotg.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} a$,

folglich $\text{Tg.}\, m = \text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} a\, \text{Cotg.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Tg.}\, \frac{d' + d}{2}$

und $A = \dfrac{\text{Cotg.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2} a}{\text{Sin.}\, m}$

$= \dfrac{\text{Cotg.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2} a}{\text{Cos.}\, m}$ setzt.

Daher ist 4.) $\text{Cotang.}\, y = A\, \text{Cos.}\, (x - \tfrac{1}{2} a - m)$

$= A\, \text{Cos.}\, (x - c)$, wenn $\tfrac{1}{2} a + m = c$.

Eben so erhält man durch die Verbindung der Gleichungen n. 1. und 3, wenn man

$A'\, \text{Sin.}\, m' = \text{Cotg.}\, \frac{d'' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} a'$

$A'\, \text{Cos.}\, m' = \text{Cotg.}\, \frac{d'' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} a'$;

folglich $\text{Tang.}\, m' = \text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} a'\, \text{Cotg.}\, \frac{d'' - d}{2}\, \text{Tg.}\, \frac{d'' + d}{2}$

und $A' = \dfrac{\text{Cotg.}\, \frac{d'' - d}{2}\, \text{Sin.}\, a'}{\text{Sin.}\, m'}$

$= \dfrac{\text{Cotg.}\, \frac{d'' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2} a'}{\text{Cos.}\, m'}$ setzt, 5.) $\text{Cotang.}\, y = A' \,\text{Cos.}\, (x - c')$, wenn $\frac{1}{2}\, a' + m' = e'$.

Daher ist $\text{Cos.}\,(x - c) \quad \text{Cos.}\,(x - c') = A' \quad A$ (n. 4. und 5.)

$$= 1 \;:\; \frac{A}{A'}$$

$$= 1 \quad \text{Tg.}\, z, \text{ wenn } \text{Tg.}\, z = \frac{A}{A'}.$$

$\text{Cos.}\,(x - c) + \text{Cos.}\,(x - c') : \text{Cos.}\,(x - c) - \text{Cos.}\,(x - c') = 1 + \text{Tg.}\, z : 1 - \text{Tg.}\, z$,

oder 6.) $\text{Cotg.}\, \frac{c - c'}{2} \quad \text{Tg.}\,(x - \frac{c + c'}{2}) = 1 \quad \text{Tg.}\,(45^\circ - z)$.

Da die Winkel m, m' durch ihre Tangenten gegeben sind; so bleibt im Allgemeinen die Wahl zwischen dem ersten und dritten Quadranten, wenn die Tangenten positiv, und zwischen dem zweyten und vierten, wenn sie negativ sind. Man bestimmt hier diese Winkel immer so, daß $\text{Sin.}\, m$ mit $\text{Cotg.}\, \frac{d' - d}{2}\, \text{Sin.}\, \frac{1}{2} a$, und $\text{Cos.}\, m$ mit $\text{Cotg.}\, \frac{d' + d}{2}\, \text{Cos.}\, \frac{1}{2} a$ einerley Zeichen bekommen, mithin A positiv wird. Ebenso verhält es sich mit m'. Bey der Berechnung von A gebraucht man denjenigen Ausdruck, welcher $\text{Sin.}\, m$ enthält, wenn $m > 45^\circ$, den andern aber wenn $m < 45^\circ$. Endlich nimmt man bey der Berechnung des Winkels $x - \frac{c + c'}{2}$ immer den seiner Tangente entsprechenden spitzen Winkel positiv oder negativ, je nachdem seine Tangente positiv oder negativ ist. Hat man x gefunden, so ergiebt sich y durch n. 4. oder 5, welches aus beyden Gleichungen einerley Werth erhalten muß. Den Abstand pf des Sonnenfleckens vom Pol der Sonne kann man durch n. 1, 2 oder 3 finden, welcher aus jeder dieser Gleichungen gleich groß herauskommen muß *). Endlich hat man in dem Dreyeck fep

$$\text{Sin.}\, pf : \text{Sin.}\, ef = \text{Sin.}\, fep : \text{Sin.}\, fpe$$

woraus sich der Winkel fpe ergiebt, und eben so findet man die Winkel $f'pe, f''pe$. Man kennt also auch fpf', fpf'', und da die Zwischenzeiten t, t' der Beobachtungen gegeben sind; so erhält man hieraus die Umdrehungszeit, wenn man schließt:

$\left.\begin{matrix} fpf' : t \\ fpf'' : t' \end{matrix}\right\} = 360^\circ$: Umdrehungszeit. Hat der Sonnenfleck nahe einen vollen Umlauf, oder darüber gemacht; so dienen die Winkel am Pol der Sonne dazu, zu bestimmen, wie viel noch zu einem vollen Umlauf fehlte, oder wie viel Grade darüber von dem Sonnenflecken durchloffen wurden. Heißt nun der in

*) Die hier gezeigte Methode, aus den Gleichungen, 1, 2 und 3. die unbekannten Winkel x und y zu finden, ist diejenige, welche H. Prof. Gauß in der Monatl. Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, Oct. 1808. pag. 282 u. f. bey der Auflösung einer astronomischen Aufgabe gelehrt hat, die auf der Entwicklung dreyer ähnlichen Gleichungen beruht.

der Zwischenzeit T der Beobachtungen beschriebene Winkel $360^\circ \mp n.$; so verhält sich $360^\circ \mp n. : 360 = T :$ Umdrehungszeit.

Nach Lalande (Astronomie, III edit. n. 3260.) waren im Junius 1775 die heliocentrischen Längen und Breiten eines Sonnenfleckens folgende:

Jun. 14.	7 Z.	8°	34′	21″	0°	38′	6″	südlich
— 18.	9	5	48	51	7	30	8	—
— 21.	10	19	0	14	11	35	16	—

also $\frac{1}{2} a = 28^\circ\ 37'\ 15$; $d = 90^\circ\ 38'\ 6''$
$\frac{1}{2} a' = 30\ \ 12\ \ 56{,}5$; $d' = 97\ \ 30\ \ 8$
$d'' = 101\ \ 35\ \ 16.$

Hieraus Lg Tg. $m = 12{,}1067424$
Lg Tg. $m' = 12{,}0681433.$

Da nun Cotg. $\frac{d'+d}{2}$ Cos. $\frac{1}{2} a$ negativ, und Cotg. $\frac{d'-d}{2}$ Sin. $\frac{1}{2} a$ positiv ist; so fällt m in den zweyten Quadranten, und es ist

$m = 90^\circ\ 26'\ 53'',14$
Eben so $m' = 90\ \ 29\ \ 23{,}08$
Mithin $c = 119\ \ 4\ \ 8{,}14$
$c' = 140\ \ 42\ \ 19{,}58$
$\frac{c-c'}{2} = -10\ \ 49\ \ 5{,}72$
$\frac{c+c'}{2} = 129\ \ 53\ \ 13{,}86$

Lg Tg. $z = 9{,}9982706$; $z = 44^\circ\ 53'\ 9'',31$

Lg Tg. $(x - \frac{c+c'}{2}) = 8{,}0171606$; $x - \frac{c+c'}{2} = -0^\circ\ 35'\ 45'',7$

$\frac{c+c'}{2} = 129\ 53\ \ 13{,}9$

$x = 129\ \ 17\ \ 28{,}2$
$= 4$ Z. $9\ \ 17\ \ 28{,}2$
erste Länge des Sonnenfl. $= 7\ \ 8\ \ 34\ \ 21$

Länge des Nordpols der Sonne $= 11\ \ 17\ \ 51\ \ 49{,}2.$

Endlich nach n. 4. und 5. wird $y = \left\{\begin{matrix} 7^\circ & 15' & 11'',7 \\ 7^\circ & 15 & 11{,}5 \end{matrix}\right\} =$ dem Winkel, unter welchem der Sonnenäquator die Ekliptik schneidet.

Viertes Capitel.

Von den Bewegungen des Monds, seinen Lichtgestalten, und den Finsternissen.

§. 60. Der Mond hat mit der Sonne eine beynahe gleiche scheinbare Größe, und zeichnet sich durch die Veränrung seiner Lichtgestalten (Phases) aus, welche nach bestimmten Perioden wiederkehren, und schon in den ältesten Zeiten zu Unterabtheilungen des Jahrs gedient haben. Wenn der Mond kurz nach Untergang der Sonne in der Abend-Dämmerung sich zeigt; so erscheint er in einer sichelchelförmigen Gestalt erleuchtet, und die Ergänzung der Figur zu einem Kreis hat ein bey heiterem Himmel bemerkbares mattes aschenfarbiges Licht. An dem folgenden Tag wird er später nach der Sonne untergehen, von ihr um ungefähr zwölf Grade, von einem Fixstern aber, bey dem er am ersten Tage befindlich war, um etwas über dreyzehn Grade gegen Morgen fortgerückt seyn, und die Breite seines erleuchteten Theils wird zugenommen haben. Mit jedem Tag wird er um nahe 50 Min. später in den Meridian kommen, sein erleuchteter Theil wird wachsen, und, wenn er Abends um 6 Uhr durch den Meridian geht, mithin sein östlicher Abstand von der Sonne 90° beträgt, die Gestalt eines Halbzirkels angenommen haben, welches das erste Viertel (Quadratura prima) heißt. Von diesem Zeitpunkt an geht die Linie, welche den erleuchteten Theil des Monds von dem übrigen trennt, oder die Lichtgränze, wieder in eine krumme Linie über, welche aber nun ihren erhabenen Theil von der Sonne und dem hellen Rande des Monds abkehrt. Geht der Mond um Mitternacht durch den Meridian; so erscheint als eine ganz erleuchtete Scheibe, und diese Lichtgestalt heißt der Vollmond (Plenilunium). Von da an nimmt sein heller Theil nach und nach wieder ab, wie er vorher zugenommen hatte, er erscheint als ein Halbzirkel, wenn er Morgens um 6 Uhr durch den Meridian geht, mithin sein östlicher Abstand von der Sonne 270° und sein westlicher 90° beträgt, welches man das letzte Viertel (Quadratura ultima) nennt, zeigt sich sodenn wieder in einer sichelförmigen Gestalt, bis er in den Sonnenstralen verschwindet, und hierauf mit der Sonne zusammenkommt, was wir den Neumond (Novilunium) nennen. Der Neumond heißt auch die Zusammenkunft (Conjunctio), der Vollmond der Gegenschein (Oppositio), welche mit ☌ und ☍ bezeichnet werden, und den gemeinschaftlichen Namen Syzygien (Syzygiæ) führen. Zwey bis drey Tage nach dem Neumond zeigt er sich wieder in der Abend-Dämmerung sichelförmig, und die erwähnten Erscheinungen kehren in derselben Ordnung wieder. Der helle Theil des Mondes ist beständig der Sonne zugekehrt, die Lichtgränze ist an dem Rand des Mondes stärker gekrümmt, als in der Mitte, und ihre Chorde steht nahe auf der Ebene der Ekliptik senkrecht.

§. 61. Die Zeit zwischen zwey zunächst auf einander folgenden Voll- oder Neumonden heißt ein **synodischer Monat**, und dieser muß schon wegen der ungleichförmigen Bewegung der Sonne (§. 40.) von verschiedener Dauer seyn. Man findet aber größere Unterschiede, als diejenige sind, welche von der ungleichförmigen Bewegung der Sonne allein herrühren können; folglich muß die Bewegung des Monds ebenfalls ungleichförmig seyn. Nimmt man zwey weit von einander entfernte Voll- oder Neumonde, und dividirt die Zwischenzeit mit der Anzahl der verflossenen Monate; so heben sich in der Zwischenzeit die Irregularitäten des Sonnen- und Mondslaufs nicht allein größtentheils gegeneinander auf, sondern es wird auch der noch übrig bleibende Theil mit den Beobachtungsfehlern zugleich durch diese Division vermindert, und man erhält den sogenannten **mittleren synodischen Monat**, welcher 29 Tage, 12 St. 44 Min. 2,82 Sek. beträgt. Hieraus ergiebt sich die Umlaufszeit des Monds in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte, oder die **periodische Umlaufszeit** mittelst des bekannten tropischen Sonnenjahrs. Man bezeichne das tropische Sonnenjahr mit T, die periodische und synodische Umlaufszeiten des Monds aber beziehungsweise mit t und

S; so durchlauft der Mond in der Zeit S so viel über 360 Grade, als der in eben dieser Zeit S von der Sonne beschriebene Bogen enthält, welcher also $\frac{360 . S}{T}$ Grade beträgt. Man wird daher die Proportion haben

$$\left.\begin{matrix} 360 + \frac{360 . S}{T} : 360 \\ T + \;\; S \quad\quad T \end{matrix}\right\} = S : t$$

woraus $t = \frac{T . S}{T+S}$ folgt.

Demnach ist, wenn man obigen Werth von S und den §. 42. angegebenen Werth von T gebraucht, die periodische Umlaufszeit des Monds = 27 T. 7 St. 43 Min. 4,68 Sek. Setzt man in obiger Formel die siderische Umlaufszeit der Sonne statt T; so erhält man die Umlaufszeit des Mondes in Beziehung auf die Fixsterne, oder seine siderische Umlaufszeit = 27 T. 7 St. 43 Min. 11,51 Sek.

Eine Periode von zwölf synodischen Monaten macht ein Mondjahr aus, welches demnach 354 T. 8 St. 48 M. 33,84 Sek. beträgt, und um 10 T. 21 St. 0 M. 17,76 Sek. kürzer ist als das tropische Sonnenjahr. Wenn also ein Jahr mit einem Neumond anfängt; so sind im Anfang des nächstfolgenden Jahrs ungefähr 11 Tage von dem nächstvorhergehenden Neumond an verflossen, und die Mondsveränderungen fallen jetzt auf andere Tage des Jahrs. Aber 19 tropische Sonnenjahre machen beynahe 235 synodische Monate; folglich fallen nach Verfluß dieser Periode die Neu- und Vollmonde wieder nahe auf dieselben Tage des Jahrs.

§. 62. Der Mond zeigt in seinen täglichen Bewegungen ähnliche Veränderungen wie die Sonne. Zur Zeit des Vollmonds nimmt er nahe denselben Weg am Himmel, welchen die Sonne ein halbes Jahr vorher genommen hat, und verweilt z. B. um die Zeit des Wintersolstitiums ungefähr eben so lang über dem Horizont, als die Sonne im Sommersolstitium. Im ersten Viertel ist sein Tagbogen nahe derselbe, welchen die Sonne ein Vierteljahr nachher beschreibt, im letzten Viertel kommt er nahe mit demjenigen überein, welchen die Sonne ein Vierteljahr vorher beschrieben hat. Die Bahn des Monds kann also nicht sehr von der jährlichen Bahn der Sonne oder der Ekliptik verschieden seyn. Eben dieses wird man auch finden, wenn man auf diejenigen Sterne Achtung giebt, an welchen der Mond nach und nach vorüber geht, oder welche er bedeckt. Sie werden sämmtlich in der Nähe der Ekliptik stehen. Hienach kann man durch eine ganz einfache Rechnung die Zeiten des Auf- und Untergangs des Monds beyläufig finden, wenn man zuerst die Zeit seines Durchgangs durch den Meridian, hernach seinen halben Tagbogen mittelst der in jedem Kalender stehenden Länge des Tages sucht, welche demjenigen Punkt der Ekliptik entspricht, in dessen Nähe sich der Mond befindet. Nun geht der Neumond mit der Sonne zugleich durch den Meridian, und in einem synodischen Monat ist die Anzahl der täglichen Umläufe des Monds um eine Einheit kleiner als die Anzahl der verflossenen Tage; folglich verhält sich

tägl. Uml. Zeit ☽ : mittl. ⊙T. $= 29^{T.}\ 12^{St.}\ 44'\ 2'',82 : 28^{T.}\ 12^{St.}\ 44'\ 2'',82$,

woraus sich wie im §. 44. der Ueberschuß der täglichen Umlaufszeit des Monds über einen mittleren Sonnentag $= 50'\ 28'',32872$ mittlerer Sonnenzeit ergiebt. Mithin geht der Mond am ersten Tag nach dem Neumond um 0 U. $50\frac{1}{2}$ Min., am zweyten um 1 U. 41 M. am dritten um 2 U. $31\frac{1}{2}$ Min. Nachmittags u. s. w. durch den Meridian. Eben so kann man vom ersten Viertel, dem Vollmond und dem letzten Viertel an zählen, wenn man statt Mittag beziehungsweise 6 Uhr Ab. Mitternacht, und 6 U. Morg. setzt. Da ferner der Mond in ungefähr $29\frac{1}{2}$ Tagen einen Umlauf in Beziehung auf die Sonne macht; so entfernt er sich von der Sonne in 5 Tagen um beyläufig 60 Grade, welche die Sonne in zwey Monaten durchlauft. Folglich muß man für jede 4 von dem Neumond an verflossene Tage 2 Monate rechnen, und diese Zeit zu der des Neumondes hinzufügen, um die Zeit zu erhalten, da die Sonne denselben Weg an dem Himmel nimmt. Man nimmt die halbe Tageslänge, welche diesem Zeitpunkt entspricht, addirt sie zur Durchgangszeit des Monds durch den Meridian, und zieht sie davon ab; so hat man die Zeit des Untergangs und Aufgangs des Monds. Zählt man von dem Vollmond an; so gebraucht man statt der Länge des Tags die Nachtlänge, und rechnet wiederum für jede 5 vom Vollmond an verflossene Tage 2 Monate.

§. 63. Beobachtet man die täglichen Bewegungen des Monds genauer; so findet man, daß seine tägliche Umlaufszeit bald größer, bald kleiner ist als 24 St. 50 28″,3, welche bey einer gleichförmigen Bewegung des Monds in dem Aequator Statt finden würde, und daß die Unterschiede öfters über eine Viertelstunde betragen. Indessen kann man dennoch den Stundenwinkel des Monds für eine gegebene Zeit ziemlich genau finden, wenn man mehrere Tage nacheinander die tägliche Umlaufszeit des Monds beobachtet hat, wenn man der durch diese Beobachtungen bestimmten Ungleichförmigkeit dieser Bewegung Rechnung trägt. Demnach wird man über die Parallaxe des Monds ähnliche Untersuchungen anstellen können, wie in §. 47. über die Sonnenparallaxe, welche wenigstens zeigen, daß der Mond der Erde viel näher seyn muß, als die Sonne. Aber ohne das Gesetz der Mondsbewegungen zu kennen, wird man auf diesem Weg die Mondsparallaxe nur durch Vervielfältigung der Beobachtungen mit einiger Genauigkeit bestimmen können.

Die Methode des 48. §. welche zwey Beobachter an sehr von einander entfernten Orten der Erde, die genau oder nahe unter einerley Meridian liegen, erfordert, ist genauer. De la Lande und de la Caille haben dergleichen Beobachtungen, ersterer in Berlin, letzterer auf dem Vorgebürg der guten Hoffnung angestellt, welchen zufolge die mittlere Mondsparallaxe unter dem Aequator 57′ 5″ ist *). Nach den neuesten Untersuchungen von Prof. Bürg **) ist die

*) Astronomie par la Lande. n. 1701. Edit. 3.

**) Man sehe in den oben S. 64 angeführten astr. Tafeln feuille k. pag. 8. und feuille m pag. 1. nach.

mittlere Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator = 57′ 1″; folglich sein mittlerer Abstand von der Erde = 60,2965 Halbmessern des Erdäquators, und der Halbmesser des Monds erscheint, wenn er am Horizont steht, und die obige Parallaxe hat, unter einem Winkel von 15′ 33″,7.

Da sowohl die Horizontalparallaxe als der scheinbare Halbmesser des Monds umgekehrt dem Abstand des Monds von der Erde proportional sind (§. 49. n. 1. und 5.); so ist die Horizontalparallaxe des Monds seinem scheinbaren Halbmesser proportional, wenn er am Horizont steht, welcher aus dem in einer gegebenen Höhe beobachteten Halbmesser nach §. 49. n. 4. kann gefunden werden, und dieses Mittels könnte man sich bedienen, um die Horizontalparallaxe des Monds, welche er bey einer gewißen Beobachtung hatte, und daraus ferner seine Höhenparallaxe nach §. 49. n. 2. zu berechnen.

Weil, wie man in der Folge sehen wird, die Erde etwas von der Kugelgestalt abweicht; so ist die Horizontalparalaxe des Monds bey gleichen Abständen von der Erde nicht überall gleich groß, und man muß daher bey schärferen Rechnungen darauf Rücksicht nehmen.

§. 64. Die gröste Mittagshöhe des Monds wird man zuweilen um mehr als 5 Grade größer, zuweilen um eben so viel kleiner finden, als die gröste Mittagshöhe der Sonne; folglich fällt die Bahn des Mondes nicht mit der Ekliptik zusammen, wie es den ersten gröberen Beobachtungen zufolge (§. 62.) den Anschein hatte. Beobachtet man ferner die gerade Aufsteigung und Abweichung des Monds in verschiedenen Punkten seiner Bahn, und sucht daraus nach §. 36. n. 1, 2. und 3. seine Länge und Breite; so wird man finden, daß er bald eine nördliche, bald eine südliche Breite hat, und daß die Punkte, in welchen seine Bahn die Ekliptik schneidet, um 180° unter sich, und 90° von denjenigen Punkten entfernt sind, wo er seine gröste nördliche und südliche Breite hat. Seine Bahn könnte also wohl ein gröster Kreis seyn, welcher die Ekliptik unter einem Winkel schneidet, der durch die gröste Breite des Monds gemessen wird. Die Lage der Mondsbahn gegen die Ekliptik würde also durch zwey Oerter des Monds gegeben seyn, wenn sie nur nicht gerade einander gegenüber liegen. Man wird die Punkte haben, in welchen die Mondsbahn die Ekliptik schneidet und den Winkel finden, welchen diese zwey Ebenen miteinander machen. Hieraus wird man die Breite des Monds herleiten können, welche den aus andern Beobachtungen der geraden Aufsteigung und Abweichung des Monds abgeleiteten Längen entsprechen, und den aus den leztern allein gefolgerten Breiten gleich seyn müssen, wenn die scheinbare Bahn des Monds wirklich ein gröster Kreis ist. Ueberhaupt wird durch dasselbe Verfahren die Lage der Mondsbahn gegen die Ekliptik bestimmt, und die Hypothese, daß sie ein gröster Kreis sey, geprüft werden können, dessen man sich oben (§. 30. bis 34.) bey der Bestimmung der Lage der Ekliptik gegen den Aequator bedient hat, wenn man Breite statt Abweichung, und Unterschied der Länge statt Unterschied der geraden Aufsteigungen sezt.

§. 65. Die zwey Punkte, in welchen die Bahn des Monds die Ekliptik durchschneidet, heißen die **Knoten** (nodi), und zwar derjenige, in welchem er sich gegen dem Nordpol der Ekliptik erhebt, der **aufsteigende Knoten** (nodus ascendens), der andere der **niedersteigende Knoten** (nodus descendens). Jenen bezeichnet man mit ☊, diesen mit ☋, und die sie verbindende gerade Linie nennt man die **Knotenlinie**. Diese Punkte sind aber nicht fest am Himmel, wie man leicht ohne genaue astronomische Beobachtungen findet, wenn man auf diejenige in der Nähe der Ekliptik stehende Sterne, z. B. auf den **Regulus** (α leonis), Achtung giebt, welchen der Mond bey seiner Bewegung begegnet. Nach vier bis fünf Jahren wird man den Mond in einem Abstand von 5° neben denjenigen Sternen vorüber gehen sehen, welche er vorher bedeckte, oder mit welchen er sehr nahe zusammen kam, und er wird nun andern in der Nähe der Ekliptik stehenden Sternen begegnen, deren

Länge

Länge um 80 bis 90 Grade kleiner ist. Die Mondsknoten bewegen sich also nach einer den eigenen Bewegungen der Sonne oder des Monds entgegengesetzten Richtung, oder von Morgen gegen Abend. Bestimmt man die Lage der Knoten nach dem vorhergehenden §. zu verschiedenen Zeiten genauer; so findet man, daß ihre Bewegung nicht gleichförmig, und periodischen Veränderungen unterworfen ist. Durch die Vergleichung weit von einander entfernter Beobachtungen erhält man diese Bewegung nicht allein genauer, sondern es heben sich auch die periodischen Ungleichheiten derselben zum Theil gegeneinander auf. Auf diesem Weg hat man gefunden, daß die mittlere Bewegung der Mondsknoten, welche bald größer, bald kleiner ist als die wahre, aber von Zeit zu Zeit wieder mit der letzteren zusammentrifft, in einem gemeinen Jahr von 365 Tagen $19^\circ\ 19'\ 43'',36$ in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte, mithin (§. 37.) $19^\circ\ 20'\ 33'',46$ in Beziehung auf die Fixsterne beträgt. Demnach ist die tropische Umlaufszeit der Mondsknoten = 6798 T. 4 St. 14 M. 56 Sek. und die siderische = 6793 T. 6 St. 51 M. 39 S. Am ersten Januar 1801 um Mitternacht nach dem Pariser Meridian war die mittlere Länge des aufsteigenden Mondsknotens = 0 Z. $13^\circ\ 54'\ 21'',2$.

Auch die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik ist veränderlich. Im Mittel beträgt sie $5^\circ\ 8'\ 47''$.

Da die Neigung der Mondsbahn veränderlich ist; so wird man sie durch die Beobachtung der größten Breite des Monds genauer finden, als wenn man nach §. 64. zwey Oerter des Monds zum Grund legt, welches eine unveränderliche Neigung erfordert. Die Länge des Knotens kann man auch dadurch finden, daß man mehrere Längen und Breiten des Monds durch die Beobachtung seiner geraden Aufsteigung und Abweichung zu derjenigen Zeit bestimmt, da er sich in der Nähe eines seiner Knoten befindet. Der Mond wird nemlich durch seinen aufsteigenden Knoten gegangen seyn, wenn seine südliche Breite in eine nördliche übergieng, und man wird aus der täglichen Veränderung seiner Länge und Breite durch Interpolation die Länge finden, bey welcher seine Breite = o war, welche der Länge des aufsteigenden Knotens gleich seyn wird. Eben so wird man verfahren, wenn sich der Mond in der Nähe seines niedersteigenden Knotens befindet.

§. 66. So wohl die Ungleichheit der Bewegung der Knoten des Monds, als die Veränderung der Neigung seiner Bahn hängen grösstentheils von der Lage der Sonne gegen die Knoten ab. Denn die Ungleichheit der Bewegung der Mondsknoten verschwindet, wenn der Ort der Sonne in einen der zwey Knoten fällt, oder 90° davon entfernt ist. Uebertrifft die Länge der Sonne die des aufsteigenden Knotens um 45°, so ist die wahre Länge des leztern um 1° 30′ 26″ grösser, als die mittlere, und zugleich die Ungleichheit am grösten. Sie nimmt jezt ab, verschwindet bey 90° Abstand der Sonne vom aufsteigenden Knoten, wird sodenn subtraktiv, und am grösten, wenn die Länge der Sonne die des aufsteigenden Knotens um 135° übertrifft, worauf sie bey 180° Abstand der Sonne vom aufsteigenden Knoten, also wenn sie sich im niedersteigenden Knoten befindet, verschwindet. Von da an kommen die Erscheinungen in derselben Ordnung wieder. Die Beobachtungen zeigen, daß diese Ungleichheit dem Sinus des doppelten Ueberschußes der Länge der Sonne über die des aufsteigenden Knotens proportional ist.

Die Veränderung der Neigung ist dem Cosinus eben dieses doppelten Abstands der Sonne vom aufsteigenden Knoten proportional, und steigt bis auf 8′ 47″. Befindet sich die Sonne in einem der Knoten; so ist die Neigung = 5° 17′ 34″, und wenn sie 90° von den Knoten absteht; so beträgt sie nur noch 5°. Sie wird der mittlern Neigung gleich, wenn die Sonne 45° von einem der Knoten entfernt ist.

Man muß übrigens diese Darstellung der Bewegungen des Monds in der Breite blos als eine geometrische Hypothese betrachten, welcher man sich bey ihrer Berechnung bedienen kann. Man kann auch eben so gut die Breite des Monds suchen, welche er bey der mittleren Neigung seiner

Bahn und der mittleren Länge seines Knotens haben würde, und hernach berechnen, um wie viel diese wegen der Ungleichheit der Bewegung der Knoten und der Veränderung der Neigung vermehrt oder vermindert werden müße, um die wahre Breite zu erhalten.

§. 67. Kennt man die Lage der Mondsbahn gegen die Ekliptik; so kann man aus der beobachteten Länge des Monds seinen Ort in der veränderlichen Ebene seiner Bahn finden. Sey nemlich Vl (Fig. 21.) ein Bogen der Ekliptik, V der Punkt der Frühlingsnachtgleiche, N der Ort des aufsteigenden Knotens, und NL die Bahn des Monds, Vl seine Länge, lL seine Breite; so kennt man in dem bey l rechtwinklichten sphärischen Dreyeck NlL den Bogen Nl = dem Ueberschuß der Länge des Monds über die Länge des aufsteigenden Knotens, und die Neigung LNl der Mondsbahn, woraus man den Bogen NL berechnen kann. Addirt man zu NL die Länge VN des aufsteigenden Knotens; so hat man die sogenannte Länge des Monds in seiner Bahn. In eben diesem Dreyeck kann man aus Nl und dem Winkel N die Breite Ll finden, welche mit der beobachteten übereinstimmen muß, wenn die Lage der Bahn richtig bestimmt ist.

Es verhält sich Tg. NL : Tg. Nl = Sin. tot. : Cos. LNl
und Sin. tot. : Sin. Nl = Tg. LNl : Tang. Ll.

Setzt man zur Abkürzung $NL = l$, $Nl = l'$, und die Neigung $LNl = i$; so ist für den Halbmesser 1

$$\text{Tg. } l = \frac{\text{Tg. } l'}{\text{Cos. } i}$$

$$\text{Tg. } l - \text{Tg } l' = \frac{\text{Tg. } l'}{\text{Cos. } i} - \text{Tg. } l' = \frac{2\,\overline{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} i}^2\ \text{Tg. } l'}{\text{Cos. } i}$$

$$\text{Tg. } l\ \text{Tg. } l' = \frac{\overline{\text{Tg. } l'}^2}{\text{Cos. } i}$$

$$\text{also Tg. } (l - l') = \frac{2\,\overline{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} i}^2\ \text{Tang. } l'}{\text{Cos. } i + \overline{\text{Tg. } l'}^2}$$

$$= \frac{2\,\overline{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} i}^2\ \text{Sin. } l'\ \text{Cos. } l'}{\text{Cos. } i\ \overline{\text{Cos. } l'}^2 + \overline{\text{Sin. } l'}^2}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Sin.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2\ \mathrm{Sin}\ 2\,l'}{1+\mathrm{Cos.}\,i-(1-\mathrm{Cos.}\,i)\,\mathrm{Cos.}\,2\,l'}$$

$$= \frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2\ \mathrm{Sin.}\ 2\,l'}{1-\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2\ \mathrm{Cos.}\ 2\,l'}$$

woraus man durch Auflösung in eine Reihe erhält

$$l-l' = \frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2}{\mathrm{Sin.}\,1''}\,\mathrm{Sin.}\ 2\,l' + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^4}{\mathrm{Sin.}\,1''}\,\mathrm{Sin.}\,4\,l' + \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^6}{\mathrm{Sin.}\,1''}\,\mathrm{Sin.}\,6\,l' + \&c.$$

und eben so findet sich

$$\mathrm{Tang.}\ (l-l') = \frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2\ \mathrm{Sin.}\ 2\,l}{1+\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2\ \mathrm{Cos.}\ 2\,l}$$

$$l-l' = \frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^2}{\mathrm{Sin.}\,1''}\,\mathrm{Sin.}\ 2\,l - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^4}{\mathrm{Sin.}\,1''}\,\mathrm{Sin.}\,4\,l + \frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{Tg.}\,\overline{\tfrac{1}{2}\,i}^6}{\mathrm{Sin.}\,1''}\,\mathrm{Sin.}\,6\,l - \&c.$$

Diese Ausdrücke geben den Unterschied zwischen der Länge in der Bahn und der Länge in der Ekliptik, welchen man die **Reduktion auf die Ekliptik** nennt.

Ist die Länge in der Bahn gegeben; so findet man das sogenannte **Argument der Breite** (argumentum latitudinis) $\left\{ \begin{matrix} NL \\ l \end{matrix} \right\}$ = Länge in der Bahn — Länge des aufst. Knotens, und hieraus

$$\mathrm{Sin}\ Ll = \mathrm{Sin.}\ l\ \mathrm{Sin.}\ i$$

§. 68. Die Bewegung des Monds in seiner Bahn ist sehr ungleichförmig, und der jährlichen Bewegung der Sonne in so fern ähnlich, als seine gröste und kleinste Winkelgeschwindigkeit in diejenigen Punkte seiner Bahn fällt, wo sein scheinbarer Halbmesser am grösten und kleinsten, mithin sein Abstand von der Erde am kleinsten und grösten ist. Man nennt diese Punkte, wie bey der Sonne, die **Erdnähe** und **Erdferne** des Monds, und die sie verbindende gerade Linie die Apsidenlinie. Von der Erdnähe an nimmt seine Winkelgeschwindigkeit, und sein scheinbarer Halbmesser bis zu der Erdferne ab, und von da an bis zu der Erdnähe eben so wieder zu, wie sie vorher abgenommen hatten. Mithin wird seine Bahn durch die Apsidenlinie in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt, so daß diese ungleichförmige Bewegung des Monds auf ähnliche Art, wie die der Sonne im Allgemeinen durch eine excen=

trische Kreisbewegung dargestellt werden kann (§. 40.). Wiederholt man nach einiger Zeit die Beobachtungen über die gröste und kleinste Winkelgeschwindigkeit des Monds; so wird man finden, daß die Punkte seiner Erdnähe und Erdferne nach eben der Richtung in seiner Bahn fortgerückt sind, nach welcher seine Bewegnng geschieht. Die Apsidenlinie des Monds hat also eine eigene vorwarts gehende Bewegung, welche in einem gemeinen Jahr von 365 Tagen 40° 39′ 45″,79 in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte, und 40° 38′ 55″,69 in Beziehung auf die Fixsterne beträgt. Hienach ist die tropische Umlaufszeit der Apsidenlinie des Monds = 3231 T. 11 St. 4 M. 7,3 S. und die siderische = 3232 T. 13 St. 37 M. 14,6 S. Am ersten Januar 1801 um Mitternacht war die Länge der Erdnähe des Monds in seiner Bahn = 8 Z. 26° 6′ 46″,4.

§. 69. Der Mond zeigt aber in seinen Bewegungen noch andere Ungleichheiten, welche nicht von seiner Lage gegen die Apsidenlinie abhängen, sondern offenbare Beziehungen auf die Lage der Sonne haben. Die beträchtlichste ist diejenige, welche die **Evektion** (Evectio) heißt, und zuerst bemerkt worden ist. Sie kann sich auf 1° 20′ 29″,5 belaufen, ist dem Sinus des Ueberschußes des doppelten Abstands des Monds von der Sonne über den Abstand des Monds von seiner Erdnähe proportional, und additiv oder subtraktiv, je nachdem dieser Sinus positiv oder negativ ist. In den Syzygien hängt also diese Ungleichheit von dem Abstand des Monds von seiner Erdnähe allein ab, und vermengt sich mit der §. 68. bemerkten Ungleichheit seiner Bewegung. Mithin wird die leztere Ungleichheit, wenn man nur die Beobachtungen der Neu- und Vollmonde bey ihrer Bestimmung gebraucht, um die Evektion zu klein gefunden.

Ferner beobachtet man eine Ungleichheit in der Mondsbewegung, welche in den Syzygien und Quadraturen verschwindet, und ihren grösten Werth von 35′ 41″,7 erhält, wenn der Mond 45° von einem dieser Punkte absteht, oder sich in den Oktanten befindet, woraus man geschlossen hat, daß sie dem Sinus des doppelten Abstands des Monds von der Sonne proportional sey. Diese Ungleichheit, welche die Variation (Variatio) heißt, hat mit dem Sinus, von welchem sie abhängt, einerley Zeichen, und konnte, da sie in den Syzygien verschwindet, durch die Beobachtungen der Neu- und Vollmonde nicht entdekt werden.

Endlich beschleunigt sich die Bewegung des Monds, wenn die der Sonne sich verzögert, und umgekehrt, woraus eine unter dem Namen der jährlichen Gleichung (Aequatio annua) bekannte Ungleichheit entsteht, welche mit der jährlichen Ungleichheit der Bewegung der Sonne genau einerley Gesetz befolgt, und das entgegengesetzte Zeichen von jener hat. Ihr größter Werth beträgt 11′ 7″,8.

Man sieht leicht ein, daß eine lange Reihe von Beobachtungen dazu erfordert wurde, alle diese Ungleichheiten der Mondsbewegungen zu entdecken, sie von einander abzusondern, und das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich jede derselben richtet. Genauere Beobachtungen zeigen noch eine Menge kleiner Ungleichheiten, deren Gesetz man allein durch die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper ausfindig machen konnte, von welcher in der sogenannten physischen Astronomie die Rede seyn wird.

§. 70. Die Vergleichung der neueren Beobachtungen mit den alten beweißt eine Beschleunigung in der mittleren Bewegung des Monds, welche mit der Zeit beträchtlich werden wird. Die wegen dieser Beschleunigung erforderliche Verbesserung der mittleren Länge des Monds nennt man, weil sie erst nach Jahrhunderten merklich wird, die Seculargleichung des Monds; welche den Beobachtungen zufolge nahe dem Quadrat der Zeit proportional wächst. La Place aber hat gezeigt, daß auch diese Ungleichheit periodisch, mithin die mittlere Bewegung des Monds constant ist. Aehnlichen Seculargleichungen sind die mittleren Bewegungen der Knoten und der Apsidenlinie unterworfen, deren Bewegungen sich verzögern, indem die des Monds sich beschleunigt. Wenn i die Anzahl der von 1700 an verflossenen Jahrhunderte bezeichnet; so ist die Seculargleichung für die mittlere Länge des Monds $= + 10'',18\,621268\, i^2 + 0'',0185384408\, i^3$, welcher Ausdruck zwar nur eine

Näherung, aber für 2000 Jahre vor und nach 1700 hinreichend genau ist. Die Seculargleichungen der mittleren Länge des Monds, seiner Erdnähe und seines Knotens verhalten sich wie die Zahlen 1; 3,00052; 0,735452, und also sind die zwey leztern durch die erste gegeben.

Am ersten Januar 1801 um Mitternacht war nach den S. 64. angeführten astronomischen Tafeln die mittlere Länge des Monds in seiner Bahn = 3 Z. 21° 36′ 30″,6, zu welcher man die Seculargleichung 10″,2 addiren muß. Zu der §. 65. angegebenen Länge des aufsteigenden Knotens muß man, weil seine retrograde Bewegung sich verzögert, 7″,5 addiren, und von der §. 68. angegebenen Länge der Erdnähe 30″,6 abziehen.

Nach eben diesen Tafeln war am 25. Jan. 1800 um 11 U. 0 M. 22,4 S., Vormittags die mittlere Länge der Sonne der mittleren Länge des Monds gleich, nemlich = 10 Z. 4° 29′ 59″,7, und am 2. Dec. 1880 um 1 U. 7 M. 51,9 S. nach Mitternacht wird so wohl die mittlere Länge der Sonne als die des Monds = 8 Z. 11° 14′ 26″,3 seyn. Die Zwischenzeit beträgt, weil 20 Schalttage in diese Periode fallen, 29530 Tage 14 St. 7 M. 29,5 S. und ist 1000 synodischen Monaten gleich. Mithin ist der eigentliche mittlere synodische Monat = 29 T. 12 St. 44 M. 2,8495 Sek. Bringt man aber die Seculargleichung, und zugleich noch eine andere, welche eine Periode von 185 Jahren hat, in Rechnung; so ist die Länge des Monds zur Zeit des ersteren der oben angegebenen mittleren Neumonde um 11″,7, und zur Zeit des zweyten um 26″,1 größer; folglich tritt der erste dieser Neumonde um 23″,03 der zweyte um 51″,36 früher ein, die Periode wird um 28″,33, und ein synodischer Monat um 0″,0283 kürzer, dessen mittlere Dauer also in diesem Jahrhundert = 29 T. 12 St. 44 M. 2,8212 Sek. ist.

§. 71. Der Mond erscheint uns zwar als eine platte Scheibe, aber die §. 00. angeführte Veränderungen seiner Lichtgestalten zeigen, daß seine Oberfläche nicht eben seyn kann. Diese Erscheinungen beweisen offenbar, daß der Mond kein selbstleuchtender Körper ist, sondern sein Licht von der Sonne empfängt. Wäre seine uns zugekehrte Oberfläche eben; so müßte sie auf einmal ganz von der Sonne beleuchtet werden, welches nur nach und nach geschiehet. Die Sonne beleuchtet den ihr zugekehrten Theil des Monds, und wir sehen diesen beleuchteten Theil ganz, wenn er zugleich gegen die Erde gekehrt ist, welches Statt findet, wenn die Sonne 180° Grad von dem Mond absteht. In den übrigen Stellungen sehen wir auch einen Theil der dunkeln Seite, und da die Lichtgränze nicht als ein Kreisbogen, sondern als ein an den Rändern des Monds stärker als in der Mitte gekrümmter elliptischer Bogen, und nur in den Quadraturen als eine gerade Linie erscheint; so muß seine uns zugekehrte Oberfläche nahe kugelförmig seyn. Unter dieser Voraussetzung ist die Lichtgränze ein Kreis, dessen Ebene auf der von der Sonne nach dem Mittelpunkt des Monds gezogenen geraden Linie senkrecht ist, welcher dem auf der Erde befindlichen Beobachter nur zur Zeit des Vollmonds, wo die Gesichtslinie ebenfalls nahe auf der Ebene dieses Kreises senkrecht steht, als ein Kreis, in den Quadraturen als eine gerade Linie, und in den übrigen Lagen des Monds als eine Ellipse erscheint. Es sey *E* (Fig. 22.) der Mittelpunkt der Erde, 1; 2; 3; 4 die Bahn des Monds um die Erde, welche mit der Sonne *S* beynahe in einer Ebene liegt. Die Lichtgränze *ab* ist ein Kreis, dessen Ebene auf der die Mittelpunkte der Sonne und des Monds verbindenden geraden Linie *Se* senkrecht ist, und ein größter Kreis *ca* der Mondskugel, dessen Ebene auf der von dem Mittelpunkt der Erde *E* an den Mittelpunkt *e* des Monds gezogenen geraden Linie senkrecht steht, wird den gegen die Erde gekehrten Theil der Oberfläche des Monds von dem übrigen trennen. Befindet sich der Mond in n. 1. auf der geraden Linie zwischen *S* und *E*; so wird die Nachtseite des Monds ganz gegen die Erde gekehrt seyn, und man wird vor der Sonne eine dunkle Scheibe erblicken, welches bey einer sogenannten Sonnenfinsterniß Statt findet. Hat aber der Mond zu dieser Zeit eine nördliche oder südliche Breite, welche größer ist, als die Summe der scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Monds; so wird der Mond oberhalb oder unterhalb der Sonne vorübergehen. Steht der Mond in n. 2., wo die Linien *Se*, *Ee* am Mittelpunkt *e* des Monds einen rechten Winkel miteinander machen; so fällt die Gesichtslinie *Ee* in die Ebene der Lichtgränze *ab*, diese erscheint also als ein Durchmesser des Monds, und man hat, wenn der Mond nach der Richtung 1; 2; 3; 4 um die

Erde lauft, das erste Viertel. Zu dieser Zeit ist die Elongation des Monds von der Sonne dem Winkel SEe gleich, welcher um den Winkel ESe kleiner ist als ein rechter. Es verhält sich aber $SE : Ee$ im Mittel wie 388,75 : 1 (§. 50. und 63.), und daher ist der Winkel ESe zur Zeit der Quadraturen $= 8' 50'',6$, und $SEe = 89° 51' 9'',4$. Mithin hat der Mond noch um diesen Bogen sich von der Sonne weiter zu entfernen, wozu er beyläufig $17\frac{1}{2}$ Min. gebraucht, in welcher Zeit die Veränderung seiner Lichtgestalt kaum merklich ist. Folglich wird er bey 90° Elongation von der Sonne noch sehr nahe halb erleuchtet erscheinen. Eben so verhält es sich in dem Punkt n. 4., wo der Winkel $EeS = 90°$ ist, und das letzte Viertel eintritt. Steht der Mond in n. 3. mit der Erde und der Sonne in einer geraden Linie; so fällt der Schatten, welchen die Erde als ein dunkler Körper wirft, auf den Mond, und verursacht eine **Mondsfinsterniß**, wie hernach wird gezeigt werden. Ist aber die Breite des Monds grösser, als die Summe der Halbmesser des Monds und des Erdschattens; so geht der Mond unverfinstert vorüber, und man sieht seine ganze gegen die Erde gekehrte Seite beleuchtet. Beträgt die Elongation des Monds von der Sonne weniger als 89° 51′ 9″, wie in n. 5.; so ist der gegen die Sonne gekehrte Theil ac seiner uns sichtbaren Hälfte cad beleuchtet. Und da so wohl aev als $ceE = 90°$; so ist $aec = Eev = SEe + ESe$, wo in der hier betrachteten Lage der Winkel $ESe < 8' 50''$, also nahe $aec =$ der Elongation SEe des Monds von der Sonne ist. Man ziehe af auf Ee senkrecht; so verhält sich der Abstand der Lichtgränze von dem Mittelpunkt des Monds zu seinem Halbmesser, wie $af : ae$, d. i. wie der Cosinus der Elongation des Monds von der Sonne zum Sinus totus. Steht endlich der Mond in n. 6., wo seine Elongation von der Sonne mehr als 90° beträgt, so fällt die Lichtgränze a zwischen den Mittelpunkt des Monds und seinen dunkeln Rand d, wie sich auch aus obiger Regel ergiebt, weil jetzt der Cosinus der Elongation negativ wird, und man sieht leicht daß zwischen n. 3. und 4. die Erscheinungen der Lichtgestalten denen zwischen n. 2. und 3., so wie die zwischen n. 4. und 1. denen zwischen n. 1. und 2. ähnlich sind.

Hienach kann man für jede gegebene Elongation des Monds seine Lichtgestalt verzeichnen, wenn man mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis *odwe* (Fig. 23.) beschreibt, zwey Durchmesser *wo*, *de* desselben auf einander senkrecht zieht, von dem Punkt *w* an, den man als den westlichen Mondrand betrachtet, den Bogen *wa* der Elongation des Monds von der Sonne gleich nimmt, *af* auf *wo* senkrecht zieht, und um *de* als große Axe eine halbe Ellipse durch den Punkt *f* beschreibt, deren halbe kleine Axe der *cf* gleich ist. Die Uebereinstimmung der nach dieser Regel bestimmten Lichtgestalten des Monds mit den §. 60. angeführten Erscheinungen zeigt, daß die uns zugekehrte Oberfläche des Monds nahe sphärisch ist.

§. 72. Wegen der Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik erfordert die genauere Bestimmung der Mondsphasen noch folgende Betrachtungen. Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Erde und des Monds miteinander verbindet, ist gegen die Ekliptik um einen Winkel geneigt, dessen Maas die Breite des Monds ist, und der Neigungswinkel der von dem Mittelpunkt des Monds an den Mittelpunkt der Sonne gezogenen geraden Linie ist der von der Sonne aus gesehenen Breite des Monds gleich, welcher übrigens unbeträchtlich ist, da vermöge des vorhergehenden §. der Halbmesser der Mondsbahn von der Sonne aus gesehen nur unter einem Winkel von etwa 9 Min. erscheint. Demnach kann letztere Linie als in der Ekliptik liegend angenommen werden, und alsdenn ist, wenn *VS* (Fig. 21.) die Länge der Sonne, *Vl* die Länge des Monds, und *Ll* seine Breite ist, der Bogen *SL* eines größten durch die Sonne und den Mond gelegten Kreises der Abstand des Monds von der Sonne. In dem sphärischen Dreyeck *SLl* verhält sich nun

$$\text{Sin. tot.} : \text{Cos. } Ll = \text{Cos. } Sl : \text{Cos. } SL$$

wodurch man mittelst des Ueberschußes *Sl* der in der Ekliptik gerechneten Länge des Monds über die der Sonne und der Mondsbreite den Bogen *SL* findet. Zu diesem muß man noch den Winkel *ESe* (Fig. 22.) hinzufügen, welcher nahe

$$= (8'50'',6)\ \frac{\text{Sin. } SEe}{\text{Sin. tot.}}$$ ist, weil

$$Se : Ee = \text{Sin. } SEe \quad \text{Sin. } ESe$$

also nahe $ES\varepsilon = \frac{E\varepsilon}{S\varepsilon \text{ Sin. } 1''} \text{ Sin. } SE\varepsilon$

beynahe $= \frac{E\varepsilon}{SE \text{ Sin. } 1''} \text{ Sin. } SE\varepsilon$ ist.

Man setze die Länge der Sonne $= \odot$, die Länge des Monds ☽, seine Breite $= b$, und $SL = E$; so ist

$$\text{Cos. } E = \frac{\text{Cos. } (☽ - \odot) \text{ Cos. } b}{\text{Sin. tot.}}$$

und die halbe kleine Axe der elliptischen Lichtgränze verhält sich zu ihrer halben großen Axe oder dem Halbmesser des Monds wie $\text{Cos.} \left(E + (8'50'',6) \frac{\text{Sin. } (☽ - \odot)}{\text{Sin. tot.}}\right)$ Sin. tot. Wenn der Ueberschuß der Länge des Monds über die Länge der Sonne $= \left\{ \begin{matrix} 90^\circ \\ 270 \end{matrix} \right\}$ ist; so wird dieses Verhältniß dem von Sin. 8′50″,6 : Sin. tot. gleich, und die kleine Axe der Ellipse erscheint, wenn der Mond in seinem mittleren Abstand von der Erde, mithin sein scheinbarer Halbmesser = 15′33″,7 ist, unter einem Winkel von 2″,4, so daß die Krümmung der Lichtgränze kaum bemerkbar ist.

In den Syzygien verhält sich die halbe kleine Axe zur halben großen Axe wie Cos. b : Sin. tot., weil $E = b$ wird. Daher erscheint, wenn der Mond in seiner mittleren Distanz von der Erde, und seine Breite $= 5^\circ 17' \frac{1}{2}$, also am grösten ist, die erstere unter einem Winkel von 15′29″,7, welcher um 4 Sekunden kleiner ist, als der scheinbare Halbmesser des Monds, und es wird, je nachdem die Mondsbreite nördlich oder südlich ist, selbst im Neumond ein kleiner Theil seiner beleuchteten Hälfte, dessen Breite höchstens 4 Sekunden beträgt, an dem südlichen oder nördlichen Rande auf die der Erde zugekehrte Seite fallen, aber diese sehr schmale sichelförmige Gestalt nicht wohl bemerkbar seyn. Im Vollmond hingegen wird ein kleiner Theil des nördlichen oder südlichen Randes dunkel seyn, je nachdem die Breite des Monds südlich oder nördlich ist. Wenn nemlich (Fig. 24.) SEV die Ekliptik, die Erde in E, und der Mond in L ist; so ist der auf LE senkrechte Kreis cd der Mondskugel um den Winkel LVE gegen die Ekliptik geneigt, welcher die Breite LEV des Monds zu einem rechten Winkel ergänzt, und weil die von L nach der Sonne gezogene LS' nahe mit der Ebene der Ekliptik parallel ist; so steht die Ebene der Lichtgränze ab auf der Ekliptik senkrecht. Man ziehe bf auf LE senkrecht; so ist bf die halbe kleine Axe der Lichtgränze, und wenn sich die Sonne auf der Seite S' befindet, ein kleiner Theil des südlichen Randes dunkel, hingegen erleuchtet, wenn sie auf der Seite S'' steht. Umgekehrt verhält es sich bey einer südlichen Breite des Monds.

Um endlich noch die Lage der elliptischen Gränze der Beleuchtung gegen den durch den Mittelpunkt des Monds gelegten Breitenkreis zu bestimmen, sey *olwk* (Fig. 25.) der kreisförmige Umfang des Monds, dessen Ebene folglich auf der von dem Mittelpunkt der Erde an den des Monds gezogenen geraden Linie senkrecht steht, und um das Complement der Mondsbreite gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist. Der durch den Mittelpunkt *c* des Monds gelegte Breitenkreis sey *lk*, welcher dem Beobachter als eine gerade Linie erscheint, und *dfef'* sey die Lichtgränze, *dfe* ihre sichtbare, *df'e* ihre unsichtbare Hälfte. Da so wohl die Ebene der letztern, als die des Breitenkreises auf der Ebene der Ekliptik senkrecht sind; so steht ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie *ab*, welche hier scheinbar mit dem Breitenkreis zusammenfällt, auf der Ebene der Ekliptik senkrecht (XI, 19.). Da ferner die von dem Mittelpunkt der Erde an den des Monds gezogene gerade Linie auf der Ebene *olwk* senkrecht ist; so steht der Breitenkreis *lk* ebenfalls auf dieser Ebene senkrecht (XI, 18.). Mithin ist das sphärische Dreyeck *adl*, dessen Seiten *la* und *ad* bey der in der Figur vorausgesetzten nördlichen Mondsbreite in die von der Erde abgekehrte Hälfte des Monds fallen, bey *l* rechtwinklicht, seine Seite *la* ist der Breite des Monds, und der Winkel *lda* oder *fdw* ist dem Winkel an dem Mittelpunkt des Monds gleich, unter welchem die von der Erde an den Mond gezogene gerade Linie die Verlängerung der geraden Linie schneidet, welche die Mittelpunkte der Sonne und des Monds miteinander verbindet, also = $E + (8'\,50'',6)\,\frac{\text{Sin.}\,(☽ - \odot)}{\text{Sin. tot.}}$. Endlich ergänzt der Winkel *lad* den Winkel $☽ - \odot + (8'\,50'',6)\,\frac{\text{Sin.}\,(☽ - \odot)}{\text{Sin. tot.}}$ zu einem rechten. Man wird also den Bogen *dl* mittelst einer der zwey Proportionen erhalten

$$\text{Sin. tot.} \quad \text{Cotg.}\, lda = \text{Tg.}\, al \quad \text{Sin.}\, dl$$
$$\text{Sin. tot.} \quad \text{Tg.}\, dal = \text{Sin.}\, al \quad \text{Tg.}\, dl.$$

Nach der letztern ist $\text{Tg.}\, dl = \frac{\text{Sin.}\, al\ \text{Tg.}\, dal}{\text{Sin. tot.}}$

$$= \frac{\text{Sin.}\, b}{\text{Sin. tot.}}\ \text{Cotg.} \left(☽ - \odot + (8'\,50'',6)\,\frac{\text{Sin.}\,(☽ - \odot)}{\text{Sin. tot.}}\right)$$

nahe $= \frac{\text{Sin.}\, b\ \text{Cotg.}\,(☽ - \odot)}{\text{Sin. tot.}}$

Demnach ist in den Quadraturen die Chorde der Lichtgränze auf der Ebene der Ekliptik senkrecht, in den Oktanten ist ihr Winkel mit dem durch den Mond gehenden Breitenkreis nahe der Mondsbreite gleich, und zwey Tage vor oder nach dem Neumond kann er bis auf 12 Grade sich belaufen. In der Nähe des Vollmonds ist ohne wirkliche Messungen die Lage der Chorde der Lichtgränze nicht bemerkbar. Folglich steht wenigstens alsdenn, wo man den Mond theils bequem beobachten, theils ohne wirkliche Messungen die Abweichung seiner Lichtgestalt von einem Kreis bemerken kann, jene Chorde nahe auf der Ekliptik senkrecht, übereinstimmend mit den §. 60. angeführten Erfahrungen.

Wollte man noch darauf Rücksicht nehmen, daß der Beobachter nicht in den Mittelpunkt der Erde, sondern auf ihrer Oberfläche sich befindet; so müßte man statt der vom Mittelpunkt der Erde aus gesehenen Länge und Breite des Monds seine scheinbare von dem Beobachtungsort gesehene Länge und Breite setzen. Aber diese von der Mondsparallaxe herrührenden Unterschiede werden nicht sehr merklich seyn.

§. 73. In dem Dreyeck *ESe* (Fig. 22.), an dessen Spitzen sich die Erde, die Sonne und der Mond befinden, ist, wenn der Mond halb erleuchtet erscheint, der Winkel *e* an dem Mond ein rechter. Hierauf gründet sich Aristarchs Methode, das Verhältniß der Abstände der Sonne und des Monds von der Erde zu finden. Man beobachtet in dem Augenblick, da die Lichtgränze gerade erscheint, den scheinbaren Abstand des Monds von der Sonne, oder den Winkel *SEe* (n. 2.). Alsdenn ist der Winkel *e* an dem Mond ein rechter, und da auch der Winkel *E* gegeben ist; so ist das Verhältniß von *SE* : *Ee* gegeben, welches dem Verhältniß des Sinus totus zu dem Cosinus des beobachteten Winkels *SEe*, oder der Sekante eben dieses Winkels zum Sinus totus gleich ist. Diese sehr einfache Methode ist zwar wegen der Schwierigkeit, den Augenblick genau anzugeben, da die Lichtgränze als eine gerade Linie erscheint, wenig genau, aber man verdankt ihr die erste richtigere Begriffe von der sehr großen Entfernung der Sonne von der Erde. Man findet nemlich immer den Winkel an der Erde in dem Augenblick, da der Mond halb erleuchtet erscheint, nahe einem rechten gleich. Nach der Angabe einiger älteren Astronomen ist er $= 89^\circ 30'$, oder $89^\circ 45'$; folglich wäre nach der ersteren der Abstand der Sonne von der Erde 114,59, nach der zweyten 229,18 mal größer, als der Abstand des Monds von der Erde. Diese Winkel sind aber noch beträchtlich zu klein, weil in den mittleren Abständen der Winkel an der Erde 89° 51′ 9″,4 ist (§. 71.)

§. 74. Von dem Mond aus gesehen muß die Erde Veränderungen in ihren Lichtgestalten zeigen, welche denjenigen ganz ähnlich sind, die wir an dem Mond bemerken. Zur Zeit des Neumonds (Fig. 22. n. 1.) ist die ganze erleuchtete Hälfte *ADB* der Erde gegen der Nachtseite des Monds gekehrt, und umgekehrt verhält es sich zur Zeit des Vollmonds n. 3, wo die Nachtseite der Erde gegen die beleuchtete Hälfte des Monds gekehrt ist. Zwischen dem Neumond und dem ersten Viertel in n. 5. fällt, wenn man *DC* auf *Ee* senkrecht zieht, der Bogen *AC* der Nachseite der Erde in die dem Mond zugekehrte Hälfte *DAC* ihrer Oberfläche, welcher den Winkel *AEC* oder den ihm gleichen *SEe* mißt. Man ziehe *AF* auf *Ee* senkrecht; so ist *AF* die halbe kleine Axe der elliptischen Lichtgränze der Erde, und da *ES*, *Se*, mithin auch *AB* und *ab* beynahe einander parallel sind (§. 71.); so ist das Axenverhältniß der Lichtgränze des Monds und der Erde nahe dasselbe. Aber von dem Mond ist ein eben so großer Theil *aa* dunkel, als der beleuchtete *AD* der Erde beträgt. Die gleichzeitigen Lichtgestalten des Monds und der Erde sind also einander gerade entgegengesetzt, und wenn der Mond zunimmt; so nimmt vom Mond aus gesehen die Lichtgestalt der Erde ab, und umgekehrt. So wie nun der Mond unsere Nächte beleuchtet, eben so beleuchtet die Erde die Nachtseite des Monds, und zwar zur Zeit des Neumonds am stärksten, welches wir aber wegen der Sonne nicht bemerken können. Von da an nimmt zwar die Beleuchtung des Monds durch die Erde ab, aber der Mond entfernt sich von der Sonne, das schwache Licht auf der Nachtseite des Monds wird nach Untergang der Sonne sichtbar, und gegen dem dritten Tag nach dem Neumond am merklichsten. In der Mitte des Mai nimmt der Mond, wenn drey Tage von Neumond an verfloßen sind, nahe denselben Weg am Himmel, welchen die Sonne im Sommersolstitium nimmt (§. 62.), und wenn er zugleich 90° von seinem aufsteigenden Knoten entfernt ist, also seine gröste nördliche Breite hat; so wird bey seinem hohen Stand am Himmel das aschenfarbichte Licht des Monds uns am lebhaftesten erscheinen. In den Quadraturen verschwindet es beynahe gänzlich, theils weil jetzt die Erde vom Mond aus gesehen nur halb erleuchtet erscheint, und daher den Mond schwächer beleuchtet, theils weil die von der Sonne beleuchtete Hälfte des Monds den Eindruck jenes schwachen Lichts vermindert. Von dem lebhaften Eindruck des von der Sonne beleuchteten Theils auf unser Aug kommt es auch her, daß uns dieser Theil des Monds zu einer größeren Kugel zu gehören scheint, als der übrige, welcher nur das von der Erde zurückgeworfene Licht uns zusendet.

§. 75. Zur Zeit einer Sonnenfinsterniß sieht man eine schwarze Scheibe von nahe gleicher scheinbarer Größe mit der Sonne vor der letztern von Abend gegen Morgen mit einer Geschwindigkeit sich vorüber bewegen, welche dem Ueberschuß der scheinbaren Geschwindigkeit des Monds über die der Sonne gleich ist. Diese Erscheinung ereignet sich nur zur Zeit des Neumonds, und wenn zugleich die Sonne nahe bey einem der Mondsknoten steht, mithin die Mondsbreite klein ist. Man findet ferner, daß der Ort des Mittelpunkts dieser schwarzen Scheibe mit dem Ort des Mittelpunkts des Monds übereinstimmt, den man für den Augenblick der Beobachtung berechnet hat. Folglich ist es der Mond, welcher uns die Sonne oder einen Theil von ihr zu bedecken scheint, und die Sonne wird nicht wirklich verfinstert. Wenn der scheinbare Halbmesser des Monds dem der Sonne gleich, oder noch größer ist; so kann der Mond die Sonne ganz bedecken, und eine sogenannte totale Sonnenfinsterniß Statt finden, im ersten Fall ohne, im letztern mit Dauer, (Eclipsis solis totalis sine mora, cum mora), und der scheinbare Abstand der Mittelpunkte der Sonne und des Monds darf nicht größer seyn, als die Differenz ihrer scheinbaren Halbmesser. Ist der scheinbare Halbmesser des Monds kleiner als der scheinbare Sonnenhalbmesser, und wird der scheinbare Abstand der Mittelpunkte kleiner als die Differenz derselben; so bleibt rund um die Sonne herum ein heller Ring übrig, und die Finsterniß heißt eine ringförmige (annularis). Man beobachtet aber auch bey den totalen Sonnenfinsternissen einen hellen Ring um deu Mond, welcher von der Ablenkung der Lichtstralen herrührt, die sie beym Vorübergehen an der Oberfläche des Monds leiden. Wenn endlich der scheinbare Abstand der Mittelpunkte der Sonne und des Monds größer wird, als die Differenz ihrer scheinbaren Halbmesser; so wird nur ein Theil der Sonnenscheibe von dem Mond bedeckt, und die Finsterniß heißt eine partiale (Eclipsis solis partialis). Soll überhaupt eine Sonnenfinsterniß möglich seyn; so muß der scheinbare Abstand der Mittelpunkte der Sonne und des Monds kleiner seyn, als die Summe ihrer Halbmesser. Nun kann der vom Mittelpunkt der Erde gesehene Abstand der Mittelpunkte durch die Parallaxe höchstens um den Ueberschuß der Horizontalparallaxe des Monds über die Horizontalparallaxe der Sonne vermindert werden; folglich darf der von dem Mittelpunkt der Erde gesehene Abstand der Mittelpunkte der Sonne und des Monds, welcher nahe der wahren Mondsbreite zur Zeit des Neumonds gleich ist, nicht größer seyn als die Summe der scheinbaren Halbmesser der Sonne und des Monds samt der Differenz der Horizontalparallaxe des Monds und der Sonne, welches in den mittleren Distanzen $16' \, 1'',4 + 15' \, 33'',7 + 57' \, 1'' - 8'',8$ oder 1° 28 $27'',3$ ausmacht, und diese Breite hat der Moud, wenn er $16^\circ \frac{2}{3}$ von einem seiner Knoten entfernt ist. Ueberhaupt findet sich, daß, wenn zur Zeit eines mittleren Neumonds der Abstand des Monds, und folglich auch der Sonne von dem nächsten Mondsknoten kleiner als $13\frac{1}{2}$ Grade ist, eine Sonnenfinsterniß gewiß, hingegen unmöglich ist, wenn dieser Abstand 19 Grade übertrifft. Zwischen $13\frac{1}{2}$ und 19 Graden Abstand vom nächsten Mondsknoten bleibt es zweifelhaft, und man muß die wahren Oerter der Sonne und des Monds, ihre scheinbaren Halbmesser und Parallaxen berechnen, um auf die oben gezeigte Art beurtheilen zu können, ob eine Sonnenfinsterniß möglich ist.

Die

Die Größe einer Sonnenfinsterniß bestimmt man gewöhnlich dadurch, daß man den Durchmesser der Sonne in 12 gleiche Theile, die man Zolle nennt, jeden dieser in 60 Minuten eintheilt, und in solchen Theilen die Breite des verfinsterten Theils der Sonne angiebt.

§. 76 Die Mondsfinsterniße ereignen sich nur zur Zeit des Vollmonds, und wenn der Mond zugleich in der Nähe eines seiner Knoten, mithin die Sonne nahe bey dem gegenüberliegenden Mondsknoten sich befindet. Eine dunkle nicht scharf begränzte Scheibe scheint sich von Morgen gegen Abend mit einer Geschwindigkeit vor dem Mond vorüber zu bewegen, welche dem Ueberschuß der scheinbaren Geschwindigkeit des Monds über die der Sonne gleich ist. So wohl aus der Krümmung des auf den Mond fallenden Theils dieser Scheibe, als auch daraus, daß der Mond zuweilen über $1\frac{2}{3}$ Stunden lang ganz verdunkelt erscheint, ergiebt sich, daß ihre von der Erde aus gesehene scheinbare Größe die des Monds beträchtlich übersteigen muß. Es wird sich nun leicht zeigen lassen, daß der Erdschatten noch weit über den Mond hinausreicht, und in der Gegend des Monds einen Durchmesser hat, welcher mit der beobachteten Dauer seiner gänzlichen Verdunklung übereinstimmt. Durch die Mittelpunkte *s* und *e* (Fig. 26.) der Sonne und der Erde sey eine Ebene gelegt, und *rt*, *pq* seyen die grösten Kreise der Sonne und der Erde, welche durch den Schnitt dieser Ebene mit den Oberflächen der letzteren entstehen. Da der Halbmesser der Erde kleiner ist als der Halbmesser der Sonne; so werden die geraden in der erwähnten Ebene liegenden Linien *rp*, *tq*, welche die Kreise *rt*, *pq* berühren, sich in einem Punkt *c* schneiden, und dieser wird auf der Verlängerung *ec* der geraden Linie *es* liegen, welche die Mittelpunkte der Sonne und des Monds miteinander verbindet. Man lasse sich das Dreyeck *crs* um *cs* als um eine Axe drehen; so wird die *cr* eine Kegeloberfläche beschreiben, deren Spitze in *c* ist, und welche die Oberflächen der Sonn und der Erde berührt. Innerhalb des durch die Erdoberfläche abgeschnittenen Theils *pcq* dieses Kegels wird nichts von der Sonne können gesehen werden, und er wird den sogenannten wahren Schatten bilden. Zieht man die Halbmesser sr, ep an die Berührungspunkte; so verhält sich $rs : ep = cs : ce$, und $rs - ep$ $ep = cs - ce$ oder $se : ce$. Aber der von der Sonne aus gesehene scheinbare Halbmesser der Erde ist der Horizontalparallaxe der Sonne gleich; folglich verhält sich in den mittleren Distanzen $rs : ep = 16' 1'',4 : 8'',8$ (§. 49. n. 6.), und $\left\{ \begin{matrix} rs - ep : ep \\ se : ce \end{matrix} \right\} = 15' 52'',6 : 8'',8 = 4763 : 44$. Es ist aber $cs = 23439$ Erdhalbmesser (§. 50.), mithin $ce = 216,5$ Erdhalbmesser, welches nach §. 63. über das Dreyfache des Abstands des Monds von der Erde beträgt. Um jetzt noch den von der Erde gesehenen scheinbaren Halbmesser des Erdschattens zu finden, sey aus dem Mittelpunkt e der Erde in der durch cr und ct gelegten Ebene mit einem Halbmesser, welcher der Distanz em des Monds von der Erde gleich sey, ein Kreisbogen klm beschrieben, welcher der cr in l begegne. Man ziehe len und er; so ist der Winkel pre dem von dem Punkt r der Sonne, mithin auch sehr nahe dem aus dem aus ihrem Mittelpunkt s gesehenen scheinbaren Halbmesser der Erde, oder der Horizontalparallaxe der Sonne, und der Winkel ple der Horizontalparallaxe des Monds gleich. Man kennt also den Winkel $ren = ple + pre$ (I, 32.), und da der scheinbare Sonnenhalbmesser res ebenfalls gegeben ist; so hat man $\left\{ \begin{matrix} sen \\ lem \end{matrix} \right\} = ple + pre - res$. Demnach ist der aus dem Mittelpunkt der Erde gesehene scheinbare Halbmesser des Schattens an der Stelle, wo ihn die Mondsbahn durchschneidet, dem Ueberschuß der Summe der Horizontalparallaxen des Monds und der Sonne über den scheinbaren Halbmesser der letzteren gleich, welcher also in den mittleren Distanzen $57' 1'' + 8'',8 - 16' 1,4''$ oder $41' 8'',4$ beträgt. Da nun die Axe des Schattenkegels der Erde in der Ebene der Ekliptik liegt, so muß der Vollmond von dem Erdschatten getroffen werden, wenn die Breite des Monds kleiner ist als die Summe der Halbmesser des Schattens und des Monds, welche in den mittleren Distanzen $41'$

$8'',4 + 15' 33'',7$ oder $56' 42'',1$ ausmacht. Folglich wird eine Mondsfinsterniß eintreffen, wenn der Vollmond weniger als $10^\circ 35'$ von einem seiner Knoten, also die Sonne weniger als $10^\circ 35'$ von dem gegenüberliegenden Knoten entfernt ist, und Sonne und Mond in den mittleren Distanzen von der Erde sich befinden. Bey einer Veränderung dieser Distanzen ändern sich die Parallaxen und die scheinbaren Halbmesser, mithin auch die Gränzen, innerhalb welcher eine Mondsfinsterniß möglich ist. Wenn zur Zeit des mittleren Vollmonds der Abstand der Sonne von einem der Mondsknoten kleiner ist als 9 Grade; so ist eine Mondsfinsterniß gewiß. Ist aber dieser Abstand größer als 12 Grade 36 Minuten; so ist keine Mondsfinsterniß möglich. Zwischen 9° und $12^\circ 36'$ ist sie zweifelhaft, und man muß durch eine genauere Rechnung untersuchen, ob die Breite des Monds zur Zeit seiner wahren Opposition kleiner ist, als die Summe der alsdenn Statt findenden Halbmesser des Monds und des Erdschattens.

Die Dauer einer totalen Mondsfinsterniß wird am größten seyn, wenn der Vollmond in einem der Mondsknoten eintrifft, mithin die Mittelpunkte des Monds und des Erdschattens zusammenfallen, und die Finsterniß central ist. Im Augenblick des Anfangs und des Endes der totalen Verfinsterung ist der Abstand der Mittelpunkte des Monds und des Erdschatten der Differenz ihrer Halbmesser, also in den mittleren Distanzen $= 41' 8'',4 - 15' 33'',7 = 25' 34'',7$. Die relative Bewegung des Monds in Beziehung auf den Mittelpunkt des Schattens, der mit derselben Geschwindigkeit von Abend gegen Morgen fortrückt, welche die Sonne hat, beträgt also während der Dauer der totalen Verfinsterung $51' 9'',4$. Da nun der Mond in einem synodischen Monat 360° in Beziehung auf die Sonne durchlauft; so gebraucht er zu einem Grad 1,9687 Stund, zu 1 Min. eine Zeit von 1,9687 Min. u. s. w. und daher zu $51' 9'',4$ eine Zeit von 1 St. 40 Min. 42,7 Sek. welches im Mittel genommen die Dauer einer totalen und centralen Mondsfinsterniß ist, und mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Weil der Mittelpunkt des Erdschattens von Abend gegen Morgen mit der scheinbaren Geschwindigkeit der Sonne in der Ekliptik fortrückt, und diese kleiner ist, als die scheinbare Geschwindigkeit des Monds; so muß der Mond an der Ostseite zuerst verfinstert werden, und daher eine dunkle Scheibe mit den Beobachtungen übereinstimmend sich von Morgen gegen Abend vor dem Mond vorüber zu bewegen scheinen.

§. 77. Man ziehe die gerade Linie kt' (Fig. 26.) welche die Erde und die Sonne auf entgegengesetzten Seiten der Axe es in p' und t' berühre, und lasse sich die Figur um es als Axe drehen; so wird eine Kegeloberfläche beschrieben werden, deren Spitze zwischen e und s in dem Punkt l der Axe liegt, wo sie von der kt' geschnitten wird. In dem Punkt k dieser Linie, in welchem sie dem mit dem Halbmesser me beschriebenen Kreisbogen begegnet, wird man die Ränder t' und p' der Sonne und der Erde sich nur noch berühren sehen, einem zwischen k und l befindlichen Auge wird aber ein Theil der Sonne von der Erde bedeckt erscheinen. Demnach wird in dem Raum, welcher zwischen der kegelförmigen Oberfläche des Erdschattens, und der hier betrachteten Kegeloberfläche auf der von der Sonne abgekehrten Seite der Erde liegt, ein Theil des Sonnenlichts von der Erde aufgefangen, und es entsteht zwischen k und l der sogenannte Halbschatten (Penumbra), welcher von k gegen l hin immer dunkler wird. Zieht man ke; so ist, weil lp und kp' die Erde berühren, und $ek = el$ ist, der Winkel $p'ke$ dem Winkel ple, und daher sehr nahe der Winkel kel $= kpl = rpt'$ = dem von der Erde gesehenen scheinbaren Durchmesser der Sonne. Also ist die von der Erde gesehene scheinbare Größe kem des Halbmessers des Halbschattens um den scheinbaren Sonnendurchmesser größer als der scheinbare Halbmesser des wahren Schattens, und daher der Summe der Horizontalparallaxen des Monds und der Sonne samt dem scheinbaren Halbmesser der letztern gleich, demnach im Mittel $= 57' 1'' + 8'',8 + 16' 1'',4 = 1^\circ 13' 11'',2$. Dieser Halbschatten ist bey den Mondsfinsternißen nur daran bemerkbar, daß er vor dem Anfang und nach dem Ende der eigentlichen Finsterniß die Flecken des Monds etwas unkenntlich macht. Die nicht scharfe Begränzung des wahren Schattens kommt zum Theil von dem Halbschatten, zum Theil von der Brechung der Sonnenstralen in der Atmosphäre der Erde her. Wegen dieser Brechung fallen auch noch Sonnenstralen auf den beschatteten Theil des Monds, so daß dieser nur sehr selten bey einer totalen Verfinsterung ganz unsichtbar wird, und gewöhnlich, wenn er ganz in dem Schatten der Erde sich befindet, wie eine hell = oder dunkelrothe Scheibe erscheint. So lange der Mond nur zum Theil verfinstert ist, scheint der Schatten, wahrscheinlich wegen des anliegenden stark von der Sonne beleuchteten Theils, schwärzer zu seyn.

Die Brechung der Lichtstralen vergrößert auch den scheinbaren Halbmesser des wahren Schattens, wozu noch der Halbschatten, welcher in der Nähe des ersteren ziemlich dunkel seyn muß, etwas beytragen mag. Die Beobachtungen zeigen, daß man zu dem nach der Regel des vorhergehenden §. gefundenen Halbmesser des wahren Schattens den sechzigsten Theil des letztern, oder eben so viele Sekunden addiren müße, als er Minuten enthält, welches im Mittel 41″ ausmacht.

Die Mondsfinsterniße theilt man ebenfalls in centrale, totale und partiale ein, je nachdem zur Zeit der größten Verfinsterung die Mittelpunkte des Monds und des Erdschattens zusammenfallen, oder ihr Abstand kleiner oder größer ist, als die Differenz ihrer Halbmesser. Die Größe der Verfinsterung pflegt man in Zwölftheilen des Mondsdurchmessers anzugeben, die man auch hier Zolle nennt und in 60 Minuten eintheilt. Die totale Verfinsterung beträgt also zwölf Zolle, zu welchen man aber noch die Anzahl Zolle hinzufügt, um welche sich der Mond noch weiter, als bey dem Anfang der totalen Verfinsterung in den Schatten einsenkt. Die Verfinsterung geschiehet an dem nördlichen oder südlichen Theil des Monds, je nachdem seine Breite südlich oder nördlich ist.

§. 78. Ungeachtet die Gränzen der Möglichkeit der

Mondsfinsterniße enger sind, als die der Sonnenfinsternisse; so sind doch die ersteren öfter als die letztern an einem gegebenen Ort der Erde sichtbar. Da nemlich die Mondsfinsterniße wirkliche Verdunklungen des Monds durch den Schatten der Erde sind; so sind sie an jedem Ort sichtbar, über dessen Horizont sich der Mond zur Zeit der Finsterniß befindet. Die Sonnenfinsterniße hingegen sind keine wirkliche Verdunklungen der Sonne, sondern eigentlich Erdfinsterniße, bey welchen uns der zwischen der Erde und der Sonne befindliche Mond des Lichts der letztern ganz oder zum Theil beraubt. Wegen der beträchtlichen Mondsparallaxe kann daher der Mond von vielen Orten der Erde aus gesehen neben der Sonne vorübergehen, und man wird nur an denjenigen, auf der Tagseite der Erde befindlichen Orten eine Sonnenfinsterniß sehen können, an welchen der scheinbare durch die Parallaxe geänderte Abstand der Mittelpunkte der Sonne und des Monds kleiner ist, als die Summe ihrer Halbmesser.

Da die Möglichkeit der Sonnen- und Mondsfinsterniße von dem Abstand abhängt, welchen die Sonne zur Zeit des Neu- und Vollmonds von einem der Mondsknoten hat; so wird im Allgemeinen die Periode ihrer Wiederkehr von der Umlaufszeit der Sonne in Beziehung auf einen der Mondsknoten, und von der synodischen Umlaufszeit des Monds zugleich abhängen. Nun durchlauft die Sonne in 365 Tagen 11 Z. $29^\circ\,45'\,40'',4$, und die Knotenlinie bewegt sich in eben dieser Zeit rückwarts oder der Sonne entgegen um $19^\circ\,19'\,43'',36$ (§. 68.); folglich durchlauft die Sonne in Beziehung auf einen der Knoten des Monds in 365 Tagen 12 Z. $19^\circ\,5'\,23'',76$, woraus die Zeit zwischen zwey aufeinander folgenden Zusammenkünften der Sonne mit demselben Knoten = 346 T. 14 St. 52 M. 13,2 S. folgt, welche sich zu einem synodischen Monat nahe wie 223 : 19 verhält. Mithin befinden sich nach einer Periode von 223 synodischen Monaten, oder nach 18 Jahren (worunter 4 Schaltjahre sind) 11 T. 7 St. 42 M. 28,86 S. die Sonne und der Mond wiederum beynahe in derselben Lage gegen den Mondsknoten, und folglich müßen die

Finsterniße ungefähr in derselben Ordnung wiederkehren, welches ein einfaches Mittel giebt, sie vorherzusagen. Uebrigens erfordern 19 Umläufe der Sonne in Beziehung auf den Mondsknoten eine Periode, welche um 10 St. 49 M. 42 S. größer ist, als 223 synodische Monate, dieser Unterschied häuft sich mit der Länge der Zeit an, und verändert die Ordnung der während einer dieser Perioden beobachteten Finsterniße. Schon die alten Astronomen bemerkten diese Wiederkehr der Finsterniße, und bedienten sich obiger und anderer genauer zutreffender Perioden, um sie vorherzusagen. Aber die Ungleichheiten der Bewegungen der Sonne und des Monds müßen merkliche Unterschiede hervorbringen, und was die Sonnenfinsterniße betrifft, so kann nur von ihrer Wiederkehr für die ganze Erde, nicht aber für einen bestimmten Ort die Rede seyn, weil im letzteren Fall ihre Möglichkeit auch noch von der Parallaxe, mithin von der Höhe des Monds und der Sonne über dem Horizont dieses Orts, oder von der Tageszeit abhängt.

§. 79. Die Mondsfinsterniße gehören zu denjenigen Erscheinungen, durch deren Beobachtung man den Unterschied der Meridian zweyer Orte unmittelbar finden kann (§. 46.). Der Anfang so wohl als das Ende derselben ereignen sich als Veränderungen, welche auf der Oberfläche des Monds selbst vorgehen, für verschiedene Orte der Erde in einerley Augenblick, aber die Beobachter zählen verschiedene Zeiten an ihren Uhren, wenn die Beobachtungsorte nicht unter einerley Meridian liegen. Schon Ptolemäus macht auf diese Unterschiede der Beobachtungszeiten aufmerksam, und bemerkt dabey, daß, weil man an den östlicher liegenden Orten in demselben Verhältniß mehr zähle als an den westlichen, in welchem die östlichen Entfernungen größer sind, die Erde in der Richtung von Abend gegen Morgen gleich stark gekrümmt seyn, und daher eine kugelförmige Oberfläche haben müße. Diese kugelförmige Gestalt der Erde haben auch die Astronomen aus der kreisförmigen Begränzung des Schattens der Erde auf dem Mond geschlossen, welcher bey allen Lagen des Monds gegen den Horizont und an allen Orten der Erde beständig diese Figur behält.

Wegen der undeutlichen Begränzung des Erdschattens ist es nicht möglich, den Augenblick des Anfangs oder des Endes einer Mondsfinsterniß genau anzugeben, und daher können die Mondsfinsterniße nur zur ersten genäherten Bestimmung des Mittagsunterschieds gebraucht werden. Die Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsterniß verstatten eine größere Genauigkeit, erfordern aber wegen des Einflußes der Parallaxe eine vorläufige Reduktion auf den Mittelpunkt der Erde, welche hier noch nicht vollständig kann gezeigt werden.

Durch die Beobachtungen der Mondsfinsterniße hat **Hipparch** die Entfernung der Sonne von der Erde zu bestimmen gesucht. Da nemlich der scheinbare Halbmesser des Erdschattens dem Ueberschuß der Summe der Horizontalparallaxen des Monds und der Sonne über den Halbmesser der leztern gleich ist (§. 77.); so übertrifft die Summe der Halbmesser der Sonne und des Erdschattens die Horizontalparallaxe des Monds um die Horizontalparallaxe der Sonne, und die leztere ist durch die drey erstern gegeben. Da aber der Anfang und das Ende einer Mondsfinsterniß, mithin auch ihre Dauer, von welcher die Bestimmung des Halbmessers des Erdschattens abhängt, nicht genau können beobachtet werden; so ist diese Methode sehr unsicher. Wollte man aus der Chorde des verfinsterten Theils des Monds, der Breite des hellen Theils, und aus dem Mondshalbmesser den Halbmesser des Erdschattens ableiten; so würde wegen der Schwierigkeit, die zwey ersteren Grössen genau zu messen, wiederum der Halbmesser des Schattens nicht mit der hier erforderlichen Genauigkeit gefunden werden. **Ptolemäus** sezt den Halbmesser des Erdschattens $= 40' \, 45''$, den Halbmesser der Sonne $= 15' \, 40''$ und die Horizontalparallaxe des Monds, wenn er in der Erdferne ist, $= 53' \, 35''$. Hienach wäre die Sonnenparallaxe $= 40' \, 45'' + 15' \, 40'' - 53' \, 35'' = 2' \, 50''$, und der Abstand der Sonne von der Erde = 1213 Erdhalbmessern, welcher beynahe zwanzigmal kleiner ist, als der §. 50. aus der genaueren Angabe der Sonnenparallaxe gefolgerte.

§. 80. Der Mond zeigt schon dem unbewafneten Auge, noch mehr aber durch Fernröhren eine große Anzahl unveränderlicher Flecken, welche man sorgfältig beobachtet und abgebildet hat. Da ihre Lage gegen den Mittelpunkt des Monds beständig nahe dieselbe bleibt; so kehrt er uns immer nahe dieselbe Seite zu, und nur von dieser wissen wir aus den §. 71. angeführten Erscheinungen, daß sie sphärisch ist. Er dreht sich also in Beziehung auf die Fixsterne in derselben Zeit einmal um seine Axe, in welcher er in Beziehung auf dieselbige einen Umlauf am Himmel macht, mithin in 27 T. 7 St. 43 M. 11,51 S. (§. 61.). Auf dem uns zugekehrten Mittelpunkt der Mondscheibe ist es zur Zeit des Neumonds Mitternacht, und zur Zeit des Vollmonds Mittag. Da nun dieser Punkt beständig nahe derselbe Punkt der Oberfläche des Monds ist; so ist die Zeit von Mitternacht bis Mittag einem halben synodischen Monat, und die Dauer eines astronomischen Tags auf dem Mond dem synodischen Monat gleich.

Uebrigens bemerkt man bey fortgesetzten genauen Beobachtungen der Mondsflecken kleine periodische Veränderungen in ihrer Lage gegen den scheinbaren Mittelpunkt und den Rand des Monds. Die nahe an dem Rand liegende Flecken verschwinden und erscheinen wechselsweise, und die in der Nähe des Mittelpunkts liegende stehen bald auf dieser, bald auf jener Seite desselben. Die letzteren Bewegungen sind größer als die ersteren, man findet aber, daß dieser Unterschied allein von der schiefen Richtung der Bewegung am Rand gegen das Aug des Beobachters herrührt, und von dem Mittelpunkt des Monds gesehen die Bewegungen der Flecken gleich groß erscheinen, mithin ihre gegenseitige Lage sich nicht verändert. Man nennt diese periodischen Oscillationen die Libration des Monds, und zwar diejenigen, welche nach einer mit der Ekliptik parallelen Richtung geschehen; die Libration in der Länge, die darauf senkrechten aber die Libration in der Breite.

Die Libration in der Länge hängt mit der ungleichförmigen Bewegung des Monds in seiner Bahn zusammen, und ist vom Mittelpunkt des Monds aus gesehen dem Unterschied der wahren und mittleren Länge desselben gleich. Der Mond dreht sich also mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit nach derselben Richtung um seine Axe, nach welcher er sich um die Erde bewegt. Es sey nemlich *e* (Fig. 27.) der Mittelpunkt der Erde, *em* die nach dem Mittelpunkt des Monds *m* gezogene gerade Linie, welche seiner Oberfläche in *n* begegne, und *ab* sey die durch den Mittelpunkt des Monds gelegte auf *me* senkrecht stehende Ebene, welche durch ihren Schnitt mit der Oberfläche des Monds den scheinbaren Umfang der Mondscheibe bildet; so wird der in *n* liegende Flecken in dem scheinbaren Mittelpunkt des Monds erscheinen. Der Mond sey nach *l* gerückt; so wird, wenn man *gd* auf *el* senkrecht und *hl* mit *me* parallel zieht, der Punkt n', in welchem *el* die Oberfläche des Monds schneidet, in der Mitte der Mondscheibe, und der Punkt *k* seiner Oberfläche um den Bogen $n'k$ gegen Morgen vom Mittelpunkt abstehen. Drehte sich der Mond in Beziehung auf die Fixsterne nicht um seine Axe; so würde *k* derselbe Punkt der Mondsoberfläche seyn, welcher in der ersten Stellung des Monds in seiner Mitte erschien. Demnach müßte sich der Mond nach der Richtung dkn' um den Winkel $kln' = mel$ gedreht haben, wenn derjenige Mondsfleck, welcher anfangs in der Mitte der Mondscheibe zu stehen schien, jezt wieder daselbst erscheinen sollte. Man findet aber, daß, wenn der Mond in der Zwischenzeit den Winkel *mel* um die Erde beschrieben hat, und dieser größer ist, als derjenige, welchen er mit seiner mittleren Geschwindigkeit beschrieben haben würde, der Flecken in *f* östlich von n' steht, und der Winkel fln' dem Ueberschuß der wahren Bewegung des Monds über seine mittlere in der Zwischenzeit der Beobachtungen gleich ist. Das Gegentheil beobachtet man, wenn die mittlere Bewegung des Monds der wahren voreilt. Die größte scheinbare Bewegung eines Mondsfleckens in der Länge kann also doppelt so viel betragen, als die wahre Länge des Monds von seiner mittleren kann verschieden seyn, weil derselbe um eben so viel bald östlich, bald westlich von demjenigen Ort absteht, wo er alsdenn erscheint, wenn die mittlere Länge des Monds der wahren gleich ist.

Die Libration in der Breite kommt von der Neigung der Mondsbahn gegen die Ebene der Ekliptik her, und macht die an dem nördlichen und südlichen Rand befindlichen Flecken bald verschwinden, bald wieder erscheinen. Es ist schon oben §. 72. aus Veranlassung der Mondsphasen gezeigt, daß bey nördlicher Mondsbreite am südlichen Rand ein kleiner Theil derjenigen Hälfte sichtbar wird, welche durch die Beleuchtungsebene, mithin durch eine auf der Ekliptik senkrechte Ebene abgeschnitten wird. In Fig. 24. wird z. B. der Punkt *d* des Monds am südlichen Rande sichtbar, wenn die Erde in *E* steht, welcher um den Bogen *bd*, der die Mondsbreite mißt, von dem Punkt *b* absteht. Letzterer Punkt erscheint am Rand, wenn der Mond in einem seiner Knoten sich befindet, und verschwindet bey südlicher Breite. Die Libration in der Breite kann also auf beyden Seiten so viel betragen, als die größte Breite des Monds beträgt.

Endlich finden noch kleine tägliche Librationen Statt, welche daher kommen, daß der Beobachter nicht in dem Mittelpunkt, sondern auf der Oberfläche der Erde ist, und also von dem Einfluß der Parallaxe auf die Länge und Breite abhängen. Man kann sie mit den obigen zugleich in Rechnung nehmen, wenn man statt der geocentrischen Länge und Breite des Monds seine scheinbare von dem Beobachtungsort gesehene Länge und Breite setzt.

Alle diese Ursachen bringen nur eine scheinbare Libration des Monds hervor, und haben keinen Einfluß auf seine wirkliche Umdrehungsbewegung. Nicht so verhält es sich mit den Veränderungen der Lage seines Aequators, oder des durch seinen Mittelpunkt gelegten und auf seiner Umdrehungsaxe senkrechten Kreises. Die Umdrehungsaxe des Monds steht nemlich nicht auf der Ebene der Ekliptik senkrecht, und bleibt sich auch nicht beständig parallel. Man kann zur Bestimmung ihrer Lage die §. 59. gezeigte Methode anwenden, welche nur wegen der Breite des Monds in der Berechnung der aus seinem Mittelpunkt gesehenen Länge und Breite eines Fleckens eine kleine Aenderung erfordert. Man hat gefunden, daß der Mondäquator gegen die Ebene der Ekliptik um $1^\circ 29'$, mithin die Umdrehungsaxe um $88^\circ 31'$, geneigt, und die gerade Linie, in welcher eine durch den Mittelpunkt des Monds mit der Ekliptik parallel gelegte Ebene von der Ebene seines Aequators geschnitten wird, beständig mit der geraden Linie parallel ist, welche die mittleren Orte der Mondsknoten mit einander verbindet, und dabey immer die der Ekliptik parallel gelegte Ebene zwischen die des Mondäquators und die Ebene der Mondsbahn fällt.

Bey den Beobachtungen der Mondsfinsterniße pflegt man auch die Zeiten der Ein- und Austritte der kenntlichsten Mondsflecken in und aus dem Erdschatten zu bemerken, welche so wie der Anfang und das Ende der Finsterniß, wenn man correspondirende Beobachtungen von zwey Orten hat, zur genaueren Bestimmung des Mittagsunterschieds derselben dienen, weil man aus vielen Beobachtungen ein Mittel nehmen kann, wo sich die Beobachtungsfehler zum Theil gegen einander aufheben.

§. 81. Durch Fernröhren gesehen erscheint die Lichtgränze des Monds, besonders zur Zeit der Quadraturen ausgezackt, und man bemerkt zuweilen einzelne Punkte in der Nachtseite des Monds, welche schon von der Sonne beleuchtet sind, so wie sich die Lichtgränze ihnen nähert, grösser werden, und endlich mit dem hellen Theil des Monds zusammenfließen. Auf der Oberfläche des Monds müßen sich also viele Erhöhungen befinden, deren Spitzen von den Sonnenstralen erleuchtet werden, während die niedriger liegenden Theile seiner Oberfläche noch im Schatten sind, so wie die Sonne die Spitzen der Berge unserer Erde zuerst, und hernach die Ebenen und Thäler beleuchtet. Ferner beobachtet man kleine schwarze Flecken, welche sich verkürzen, so wie die Lichtgränze von ihnen weiter abrückt, im Vollmond verschwinden, und durch die Veränderungen ihrer Größe und Lage deutlich genug zeigen, daß sie die Schatten von Bergen sind. Vertiefungen, dergleichen es auf dem

Mond ebenfalls giebt, unterscheiden sich von den Bergen theils durch Lage des Schattens an ihren Rändern, theils dadurch, daß ihr Grund noch dunkel ist, wenn die rund um liegende Theile schon beleuchtet sind.

Aus dem Abstand der in der Nachseite liegenden hellen Punkte von der Lichtgränze kann man das Verhältniß der Erhöhungen dieser Punkte über die Oberfläche des Monds zu seinem Halbmesser finden. Der einfachste Fall ist, wenn der helle Punkt in der Nähe des Mittelpunkts liegt, mithin der Mond ungefähr halb erleuchtet ist. Sey *ahk* ein durch den scheinbaren Mittelpunkt *a* der Mondscheibe und den leuchtenden Punkt *b* gelegter gröster Kreis des Monds; so berührt, wenn zur Zeit einer Quadratur die Spitze *b* des Bergs *bh* eben von der Sonne beschienen wird, die gerade Linie *ab* jenen Kreis in *a*. Man ziehe die *bk* durch den Mittelpunkt *c*; so ist (III, 36.) $kb \times bh = \overline{ab}^2$, und $bh = \frac{\overline{ab}^2}{bk}$ sehr nahe $= \frac{\overline{ab}^2}{hk}$. Nun ist durch die Beobachtungen das Verhältniß von *ab* zu *ch* gegeben; folglich kennt man das Verhältniß von *bh* zu *ch*. Hevel fand z. B. den Abstand eines solchen Punkts von der Lichtgränze $= \frac{1}{13}$ des Halbmessers des Monds; folglich ist hier $bh = \frac{ch}{338}$. Es giebt aber noch höhere Berge auf dem Mond, wie Schröter durch sehr sorgfältige Beobachtungen gefunden hat *).

Es ist im 72. §. gezeigt worden, daß, wenn der Vollmond eine große nördliche oder südliche Breite hat, ein schmaler Theil seines südlichen oder nördlichen Randes noch in die Nachtseite fällt. Die Unebenheiten auf der Oberfläche des Monds machen dieses dadurch sehr merklich, daß der südliche oder nördliche Rand ausgezackt erscheint, je nachdem die Mondsbreite nördlich oder südlich ist.

*) Schröters selenotopographische Fragmente. 1791. welches interessante Werk eine genaue Beschreibung und Abbildung der Oberfläche der Monds und der darauf befindlichen Merkwürdigkeiten enthält.

Fünftes Capitel.

Von den Bewegungen der Planeten.

§. 82. Die Planeten, von welchen hier die Rede seyn wird, entfernen sich niemals um mehr als 8 bis 9 Grade von der Ekliptik, und befinden sich folglich beständig auf einer Zone der Himmelskugel, welche durch zwey auf beyden Seiten der Ekliptik mit ihr in einem Abstand von 9 Graden gezogene Parallelkreise eingeschlossen wird, und der Thierkreis (Zodiacus) heißt. Die Planetenbahnen liegen also beynahe in der Ebene der Ekliptik, weswegen man bey der ersten Untersuchung dieser Bahnen sie als in der Ebene der Ekliptik liegend wird annehmen können.

Zwey der Planeten entfernen sich niemals über gewiße Gränzen von der Sonne, der eine höchstens um 29, der andere um 48 Grade, und daher ist der erstere, welchen man den Merkur nennt, nur in der Morgen- und Abenddämmerung, und zwar wegen seines kleinen scheinbaren Durchmessers nicht ohne einige Anstrengung mit dem unbewafneten Auge sichtbar. Von demjenigen Zeitpunkt an gerechnet, da sich der Merkur zuerst in der Morgendämmerung zeigt, entfernt er sich mit beständig abnehmender scheinbarer Geschwindigkeit immer weiter gegen Abend hin von der Sonne, bis er bey seiner grösten Digression einige Zeit hindurch seinen Abstand von der Sonne nicht merklich verändert. Er nähert sich jezt der Sonne wieder, anfangs kaum merklich, mit beständig zunehmender Geschwindigkeit, bis er in den Sonnenstralen unsichtbar wird. Nach einiger Zeit bemerkt man in der Abenddämmerung einen ähnlichen Stern, welcher sich eben so nach und nach immer weiter von der Sonne entfernt, wie sich der in der Morgendämmerung verschwundene ihr genähert hatte, eine gröste Digression erreicht, welche der bey jenem beobachteten nahe gleich ist, und sich hierauf mit zunehmender Geschwindigkeit der Sonne nähert, bis er in ihren Stralen verschwindet. Da nicht beyde Sterne zugleich sich zeigen, und alle übrigen Umstände dieser Erscheinungen auf der Ost- und Westseite der

Sonne dieselben sind; so ist der Merkur selbst der Stern, welcher in der Abenddämmerung sich zeigte.

§. 83. Diese Bewegungen des Merkurs in Beziehung auf die Sonne sind denjenigen ganz ähnlich, welche man beobachtet, wenn ein Körper sich in einem Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit nach einerley Richtung herum bewegt, und der Ort des Augs ausserhalb des Kreises in seiner erweiterten Ebene, oder wenigstens nahe bey derselben liegt. Es sey *e* (Fig. 29.) der Mittelpunkt der Erde, und die gerade Linie *ecb* sey beständig gegen die Sonne hin gerichtet. Um den Punkt *c* dieser Linie als Mittelpunkt sey ein Kreis mit dem Halbmesser *ca*, welcher kleiner als *ce* sey beschrieben, in welchem sich der Merkur nach der Richtung m, m', m'' herumbewege. Man ziehe aus dem Mittelpunkt *e* der Erde die Tangenten em', em'' an diesen Kreis, und die Halbmesser cm', cm'' an die Berührungspunkte; so werden die Winkel cem', cem'' die grösten Digressionen des Merkurs von der Sonne seyn. Da man diese aus den Beobachtungen kennt; so wird in dem bey m' rechtwinklichten Dreyeck ecm' das Verhältniß von $ce : cm'$ oder von $ce : ca$ gegeben seyn, und man wird daher, wenn man *ce* nach Belieben nimmt, den Halbmesser *ca* so bestimmen können, daß die beobachteten grösten Digressionen dem Winkel cem' gleich werden. So wie nun der Merkur von dem Punkt *m* an weiter gegen m' fortrückt, wird die Richtung seiner Bewegung immer schiefer gegen die von der Erde *e* gezogenen Gesichtslinien *em*, also seine scheinbare Geschwindigkeit, mit welcher er von der Sonne sich entfernt, immer kleiner, bis sie bey seiner grösten Digression in m', wo die Richtung seiner Bewegung mit der Richtung der seine Bahn berührenden Gesichtslinie em' zusammenfällt, verschwindet, und er in Beziehung auf die Sonne stille zu stehen scheint. Bey fortgesetzter Bewegung gegen *n* wird er sich der Sonne nähern, und die Geschwindigkeit dieser Annäherung wird wachsen, weil sich jetzt der Winkel, welchen die Richtung seiner Bewegung mit der Gesichtslinie *ne* macht, einem rechten nähert. Da nun, wenn der Merkur in der Morgendämmerung zuerst erscheint, er gegen Abend hin von der Sonne sich entfernt, und sich ihr nach seiner grösten westlichen Digression von Abend gegen Morgen nähert; so geht die angenommene Richtung seiner Bewegung von a nach m, m' u. s. w. von Abend gegen Morgen. In der anderen Hälfte $bm''a$ werden die Erscheinungen in umgekehrter Ordnung wiederkehren, und in m'' wird die gröste östliche Digression von der Sonne eintreffen. Demnach wird man die scheinbare Bewegung des Merkurs im Allgemeinen dadurch darstellen können, daß man ihn von Abend gegen Morgen sich in einem Kreis bewegen läßt, dessen Mittelpunkt beständig auf der geraden Linie liegt, welche die Mittelpunkte der Erde und der Sonne mit einander verbindet, und dessen Halbmesser sich zu dem Abstand seines Mittelpunkts von der Erde wie der Sinus der grösten östlichen oder westlichen Digression des Merkurs von der Sonne zum Sinus totus verhält.

§. 84. Der Merkur zeigt, wenn man ihn durch Fernröhren beobachtet, ähnliche Veränderungen in seinen Lichtgestalten, wie der Mond. Bey seinem ersten Erscheinen in der Morgendämmerung hat er eine sichelförmige Gestalt, wie der Mond zwischen dem Neumond und dem ersten oder letzten Viertel. Er erscheint halb erleuchtet, wie der Mond in den Vierteln, wenn er in seiner grösten Digression von der Sonne ist. Nähert er sich nach seiner grösten westlichen Digression der Sonne wiederum; so wächst sein heller Theil, und hat die Gestalt des Monds zwischen dem Vollmond und den Quadraturen. Bey seinem Wiedererscheinen in der Abenddämmerung nimmt seine Lichtgestalt ab, er erscheint halb erleuchtet, wenn er in seiner grösten östlichen Digression ist, und zeigt sich hernach wieder sichelförmig. Da nun zur Zeit der grösten Digressionen der Halbmesser cm' oder cm'' der kreisförmigen Bahn des Merkurs auf der geraden Linie em' oder em'' senkrecht ist, welche seinen Mittelpunkt mit dem der Erde verbindet, eben dieser Halbmesser aber, weil die Lichtgränze als eine gerade Linie erscheint, gegen den Mittelpunkt der Sonne muß gerichtet seyn; so fällt unter der Voraussetzung einer kreisförmigen Bahn des Merkurs ihr Mittelpunkt in den der Sonne, und das Verhältniß von cm' : ce ist dem Verhältniß des Abstands des Merkurs von der Sonne zu dem Abstand der leztern von der Erde gleich. Schon der Anblick der 29. Fig. zeigt, wenn man die Sonne in c sezt, die mit den Beobachtungen übereinstimmende Veränderungen der Lichtgestalten des Merkurs nach seinen verschiedenen Stellungen gegen die Sonne, welche man nach Anleitung dessen, was §. 71. und 72. über die Bestimmung der Lichtgestalten des Monds gesagt worden ist, für jede gegebene Lage des Merkurs gegen die Sonne und die Erde verzeichnen oder berechnen kann.

Die grösten Digressionen des Merkurs von der Sonne sind veränderlich und fallen zwischen $28^\circ\,48'$ und $16^\circ\,12'$, im Mittel genommen sind sie $= 22^\circ\,46'\,27''$. Sie müssen sich zwar schon wegen der ungleichen Entfernungen der Sonne von der Erde verändern, und gröſser oder kleiner werden, je nachdem jene Entfernungen abnehmen oder wachsen, aber diese Veränderungen können, den kleinen Unterschieden der Sonnenhalbmesser in der Erdnähe und Erdferne (§. 40.) nach zu urtheilen, nicht so beträchtlich seyn. Folglich müßen sich die Abstände des Merkurs von der Sonne selbst verändern, und daher, wenn eine kreisförmige Bahn beybehalten werden soll, die Sonne ausserhalb des Mittelpunkts dieses Kreises gesezt werden. Aus obiger mittlerer Digression folgt das Verhältniß der mittleren Abstände des Merkurs und der Erde von der Sonne 387 : 1000.

Der Merkur hat während eines Umlaufs in Beziehung auf die Sonne oder eines synodischen Umlaufs, wozu er nahe 115 T. 21 St. gebraucht, von der Erde aus gesehen mit der Sonne zweymal einerley Länge, oder kommt mit ihr zweymal in Conjunktion, nemlich in a und b (Fig. 29.), und man nennt jene, in welcher er der Erde am nächsten ist, die untere, diese, bey welcher sein Abstand von der Erde am grösten wird, die obere Conjunktion.

Die Veränderungen des scheinbaren Durchmessers des Merkurs stimmen mit den hier angenommenen Bewegungen überein. Von seinem Erscheinen in der Morgendämmerung an, bis er bey seiner oberen Conjunktion in den Sonnenstralen verschwindet nimmt sein scheinbarer Durchmesser beständig ab, und auf der andern Seite eben so wieder zu, wie er abgenommen hatte. In seiner mittleren Distanz von der Erde, welche der mittleren Distanz der Sonne von der Erde gleich ist, beträgt sein scheinbarer Durchmesser 6 Sekunden.

§. 85. Der zweyte der §. 82. erwähnten Planeten ist der hellste unter allen, und führt den Namen **Venus**. Sie bietet dieselben Erscheinungen dar, wie der Merkur, nur daß ihre Digressionen von der Sonne beträchtlicher und von längerer Dauer sind. Die Zeit ihrer Wiederkehr zu derselben Lage in Beziehung auf die Sonne, oder ihre synodische Umlaufszeit beträgt nahe 583 T. 22 St. Die Veränderungen ihrer Lichtgestalten, welche wegen ihres grössern scheinbaren Durchmessers und ihrer größeren Digressionen von der Sonne leichter als bey dem Merkur beobachtet werden können, zeigen, daß sie ihr Licht von der Sonne empfängt, und der Mittelpunkt ihrer Bahn, wenn sie ein Kreis ist, in den Mittelpunkt der Sonne fällt. Da aber die größten Digressionen der Venus von 45 bis auf 48 Grade sich verändern, und auch diese Veränderungen, wie wohl sie beträchtlich kleiner als bey dem Merkur sind, nicht von den kleinen Veränderungen des Abstands der Sonne von der Erde allein herrühren können; so muß ihr Abstand von der Sonne selbst veränderlich seyn, und, wenn anders die Venusbahn kreisförmig ist, die Sonne etwas ausserhalb des Mittelpunkts dieser Bahn sich befinden. Im Mittel ist die gröste Digression der Venus $= 46° \, 19' \, 49''$, und daher verhält sich der mittlere Abstand der Venus von der Sonne zu dem mittleren Abstand der Erde von der Sonne wie 723 : 1000.

Der scheinbare Durchmesser der Venus nimmt von der unteren Conjunktion an bis zu der oberen beständig ab, und von dieser bis zu der ersteren wieder eben so zu, übereinstimmend mit III, 8. und §. 49. n. 5. In ihrer mittleren Distanz von der Erde, welche der mittleren Distanz der Sonne von der Erde gleich ist, belauft sich ihr scheinbarer

Durchmesser auf 16,6 Sekunden, in der Nähe ihrer unteren Conjunktion aber beyläufig auf 1 Minute.

Man nennt die Venus auch den **Morgen-** und **Abendstern**, je nachdem sie vor dem Aufgang oder nach dem Untergang der Sonne sichtbar ist, mithin eine westliche oder östliche Digression hat. In ihrer oberen Conjunktion kehrt sie ihre ganze erleuchtete Hälfte der Erde zu, und ihre Lichtgestalt nimmt von da an ab. Zu gleicher Zeit nähert sie sie sich aber der Erde, und rückt von der Sonne ab, weswegen ihr scheinbarer Glanz zunimmt. Nach ihrer grösten Digression, nemlich wenn ihr scheinbarer Abstand von der Sonne $= 44^\circ\ 37'\ 36''$ ist, wird ihr Glanz am stärksten *), worauf er ihrer Annäherung an die Erde ungeachtet wieder abnimmt, weil ihre Phasen kleiner werden. Zur Zeit ihres grösten Glanzes ist sie am hellen Tage mit bloßen Augen sichtbar.

§. 86. Wenn die Bahnen des Merkurs und der Venus in der Ebene der Ekliptik lägen; so müßte man diese Planeten bey jeder unteren Conjunktion als eine schwarze Scheibe vor der Sonne von Morgen gegen Abend vorübergehen sehen. Es zeigen aber die Beobachtungen, daß sie bald eine nördliche, bald eine südliche Breite haben; folglich können sich diese Erscheinungen nur alsdenn ereignen, wenn ihre Breite kleiner ist als der Halbmesser der Sonne. Den Merkur hat man schon oft vor der Sonne beobachtet, die Venus aber nur dreymal, nemlich in den Jahren 1639, 1761, und 1769. Der nächste Durchgang der Venus vor der Sonne wird erst am 6. December 1882 eintreffen.

Da die Venus in ihrer unteren Conjunktion um den Halbmesser ihrer Bahn näher bey der Erde ist als die Sonne, mithin alsdenn ihr Abstand von der Erde zu dem Abstand der Sonne von der Erde sich wie 277 : 1000 verhält (§. 85.); so muß ihre Parallaxe, wenn sie vor der Sonne vorübergeht über $3\frac{1}{2}$ mal größer seyn, als die Parallaxe der Sonne (§. 49. n. 1.), und daher einen beträcht-

*) Mém. de l'Académie de Prusse pour 1750. Astron. Jahrbuch für 1780. S. 59. Astron. Jahrb. für 1803. S. 123.

lichen Einfluß auf die Dauer ihres Vorübergangs vor der Sonne haben, welche demnach an verschiedenen Orten der Erde nicht gleich lang wird gefunden werden. Denn wegen der Parallaxe sehen verschiedene Beobachter die Venus an verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe, auf welcher sie kürzere oder längere Chorden des Umkreises der Sonne zu beschreiben scheinen wird. Auf den Mittelpunkt der Erde reducirt muß die Dauer des Vorübergangs aus allen Beobachtungen gleich heraus kommen. Legt man bey diesen Reduktionen eine schon beynahe gefundene Parallaxe der Sonne, wodurch zugleich die Parallaxe der Venus wegen des bekannten Verhältnißes ihrer Abstände von der Erde gegeben ist (§. 49. n. 1.); so wird man finden, um wie viel die angenommene Sonnenparallaxe vermehrt oder vermindert werden müsse, damit die auf den Mittelpunkt der Erde reducirte Dauer des Vorübergangs aus den Beobachtungen, welche an weit von einander entfernten Orten angestellt wurden, gleich lang herauskomme. Auf die Beobachtungen des Durchgangs der Venus vor Sonne im Jahr 1769 gründet sich die genauere Angabe der Sonnenparallaxe im 50ten §.

§. 87. Es giebt noch einige andere Arten die scheinbaren Bewegungen des Merkurs und der Venus um die Erde aus zwey Umlaufsbewegungen zusammenzusetzen. Man hat angenommen, um die Erde e' (Fig. 30.) beschreibe die Sonne s' eine beynahe kreisförmige Bahn $s'r$, und zugleich bewege sich einer der genannten Planeten, z. B. der Merkur m' um die Sonne s' in einer ebenfalls nahe kreisförmigen Bahn $a'm'b'$ nach derselben Richtung, nach welcher die Sonne sich um die Erde zu bewegen scheint, nemlich nach der Richtung der beygesetzten Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. Man verbinde die gleichzeitigen Orte des Merkurs m', der Sonne s' und den Mittelpunkt e' der Erde durch die geraden Linien $m's'$, $s'e'$ und $m'e'$; so wird der Winkel $s'e'm'$ die Elongation des Merkurs von der Sonne, die gerade Linie $e'm'$ sein Abstand von der Erde, und, wenn $e'v'$ an den Punkt der Frühlingsnachtgleiche gezogen wird, $v'e's'$ die Länge der Sonne, $v'e'm'$ die Länge des Merkurs seyn, wie sie von der Erde aus erscheinen. Anstatt die Erde ruhen zu lassen, nehme man jetzt an, die Sonne sey unbeweglich in s (Fig. 31.), ziehe durch s die se, sm mit $s'e'$, $s'm'$ in Fig. 30. beziehungsweise parallel, und nehmen auf diesen Parallelen von s an und auf derselben Seite von s, auf welcher e',m' in Fig. 30. in Beziehung auf s' liegen, die se, sm den Linien $s'e'$, $s'm'$ gleich, so daß $ss'e'e$, $ss'm'm$ Parallelogramme bilden. Man ziehe mr; so sind die Dreyecke sem, $s'e'm'$ congruent (I, 4.), und daher die em der $e'm'$ gleich und parallel. Da nun se der $s'e'$ beständig gleich und parallel ist; so wird die Erde e um die als unbeweglich angenommene Sonne s in derselben Zeit und nach derselben Richtung die Bahn eqp beschreiben, in welcher man sie vorher um die Erde sich bewegen ließ, und die Bahn der Erde um die Sonne wird der in Fig. 30. angenommenen Bahn der Sonne um die Erde gleich und ähnlich seyn. Eben so, weil sm der $s'm'$ beständig gleich und parallel ist; so wird der Merkur m um die ruhende Sonne s die Bahn amb beschreiben, welche der $a'm'b'$ (Fig. 30.) gleich und ähnlich ist, und da immer, wenn $e'm's'$ in einer geraden Linie liegen, auch ems (Fig. 31.) vermöge der Construktion in einer geraden Linie liegen müssen, so wird die synodische Umlaufszeit des Merkurs um die Sonne s seiner synodischen Umlaufszeit in der Bahn $e'm'b'$ (Fig. 30.) gleich seyn. Folglich werden auch in beyden Fällen die tropischen Umlaufszeiten einander gleich seyn, und beyde Bahnen werden nach einerley Richtung beschrieben werden. Endlich weil die von der Erde nach dem Merkur gezogene gerade Linie em in Fig. 31. der ihr in Fig. 30. entsprechenden $e'm'$ beständig gleich und parallel ist; so wird der Beobachter, welcher sich auf der Erde in Ruhe glaubt, dieselben scheinbaren Bewegungen des Merkurs bemerken, welche er in dem Fig. 30. angenommenen Fall wahrgenommen haben würde. Wenn man also den Merkur und die Venus sich um die in Ruhe angenommene Sonne in derselben Bahn und mit derselben Geschwindigkeit bewegen läßt, die man bey der ersten Hypothese gefunden hatte, und annimmt, die Erde bewege sich um die Sonne in derselben Bahn, in welcher man sich die

Sonne um die Erde bewegen ließ, so daß beyde Bahnen mit beziehungsweise gleichen Geschwindigkeiten beschrieben werden; so werden die aus den Bewegungen des Merkurs und der Venus um die Sonne und aus der eignen Bewegungen der Erde zusammengesetzte relative Bewegungen dieser Planeten für einen Beobachter, der sich auf der Erde in Ruhe glaubt, dieselben seyn, welche er unter der ersten Voraussetzung beobachtet haben würde.

§. 88. Um diese relative Bahn zu verzeichnen, nehme man einen Punkt *E* (Fig. 32.) als Mittelpunkt der Erde an, verbinde in Fig. 31. zwey gleichzeitige Orte *e* der Erde und *m* des Planeten durch eine gerade Linie *me*, ziehe mit dieser durch *E* (Fig. 32. eine Parallele *EM*, und nehme auf derselben von dem Punkt *E* an die *EM* der *em* in Fig. 31. gleich, so daß *EM* und *em* sich nach einerley Seite hin von *E* und *e* an sich erstrecken. Eben so verfahreman mit den übrigen gleichzeitigen Orten der Erde und des Planeten, welche in der Figur mit denselben Zahlen bezeichnet sind; so wird man in Fig. 32. die relative Bahn *M*, 1, 2, 3, u. s. w. des Planeten um die in dem Punkt *E* als unbeweglich angenommene Erde erhalten. Und da vermöge der in dem vorhergehenden §. gezeigten Ableitung der Anordnung der Bahnen in Fig. 31. aus der in Fig. 30. angenommenen beständig die geraden Linien, welche zwey gleichzeitige Orte der Erde und des Planeten in Fig. 30. und 31. mit einander verbinden, wie z. B. *e'm'* und *em*, einander gleich und parallel sind; so wird die erste Hypothese, nach welcher die 30ste Figur entworfen ist, dieselbe relative Bahn des Planeten um die Erde *E* geben, welche man aus Fig. 31. abgeleitet hat. Man sieht, daß der Planet in *M*, wo die Gesichtslinie *EM* seine Bahn berührt, mithin die Richtung seiner Bewegung mit der Richtung der Gesichtslinie zusammenfällt, seine geocentrische Länge während einiger Zeit nicht merklich ändern, und daher stille zu stehen scheinen wird. Von da an wird er sich von Abend gegen Morgen bewegen, sein Abstand von der Erde wird wachsen, bis er zwischen 6 und 7 bey seiner oberen Conjunktion mit der Sonne am grösten wird. Sein Abstand von der Erde wird wieder abnehmen, bey 13 wird er stille zu stehen scheinen, von da an bis 16 sich von Morgen gegen Abend bewegen, oder rückläufig werden, und während dieser Zeit zwischen 14 und 15 in seiner unteren Conjunktion der Erde am nächsten kommen. Von 16 an, wo ein Stillstandspunkt eintrifft, wird er sich wieder von Abend gegen Morgen zu bewegen scheinen, oder rechtläufig werden, wobey seine Bahn einen Knoten bilden wird. Die Bewegungen des Merkurs und der Venus zeigen wirklich diese Erscheinungen, wenn man sie nicht auf die Sonne, sondern auf die Fixsterne oder die Aequinoktialpunkte bezieht. Nimmt man die Bahnen als kreisförmig, und in Fig. 31. als concentrisch mit dem Mittelpunkt der Sonne, in Fig. 30. aber die Erde im Mittelpunkt der kreisförmigen Bahn der Sonne, und leztere im Mittelpunkt der Bahn des Planeten an; so ist die relative Bahn Fig. 32. um die Erde diejenige krumme Linie, welche ein Punkt beschreibt, der sich in einem Kreis bewegt, dessen Mittelpunkt wiederum den Umfang eines Kreises durchlauft, und welche man eine **Epicycloide** nennt.

§. 89. Man vollende das Parallelogramm $e's'm'k$ (Fig. 30.); so ist $e'k = s'm'$, und $e's' = m'k$ (I, 34.). Nimmt man, wie in der ersten Hypothese, die Erde in e' unbeweglich an; so beschreibt der Punkt k um e dieselbe Bahn, welche man den Punkt m' um s' hat beschreiben lassen, und wegen der Parallelen $s'm'$ und $e'k$ werden auch die Umlaufszeiten in diesen zwey Bahnen einander gleich, und die Richtungen der Bewegungen dieselben seyn. Ferner, weil km' beständig der $e's'$ gleich und parallel ist; so beschreibt m' um den sich bewegenden Punkt k eine Bahn, welche der zuerst angenommenen Bahn des Punkts s' um e' gleich und ähnlich ist, und es werden auch die Umlaufszeiten in diesen zwey Bahnen einander gleich seyn. Demnach kann man z. B. die scheinbaren Bewegungen des Merkurs auch dadurch darstellen, daß man einen Punkt k um die ruhende Erde e' dieselbe Bahn beschreiben läßt, welche man vorher dem

Merkur um die Sonne angewiesen hatte, und annimmt, der Merkur beschreibe um den beweglichen Punkt k während eines Jahrs eine Bahn, welche der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde gleich und ähnlich sey, so daß km' der $e's'$ beständig parallel bleibt.

§. 90. Die Stillstandspunkte, welche §. 88. aus der Betrachtung der relativen Bahn um die Erde hergeleitet wurden, können unter der Voraussetzung gleichförmiger Kreisbewegungen auf folgende Art gefunden werden. Um die Sonne s (Fig. 31.) als Mittelpunkt seyen die Kreise amb, eqp beschrieben, und der erstere sey die Bahn des Merkurs oder der Venus, der letztere die Bahn der Erde, welche beyde nach der Richtung von Abend gegen Morgen vermöge der hier gemachten Voraussetzung mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben werden. Man setze $se = R$, $sm = r$, die Umlaufszeit der Erde $= T$, die Umlaufszeit des Planeten $= t$; so durchlauft die Erde in der Zeiteinheit, durch welche diese Umlaufszeiten ausgedrückt sind $\frac{360}{T}$ und der Planet $\frac{360}{t}$ Grade, und ihre Geschwindigkeiten v und V sind beziehungsweise $\frac{360\,R}{T}$ und $\frac{360\,r}{t}$. Sind nun die Umlaufszeiten und die mittleren Distanzen gegeben; so kennt man das Verhältniß der Geschwindigkeit V des Planeten zu der Geschwindigkeit v der Erde, welches dem Verhältniß von $\frac{r}{t} : \frac{R}{T}$ oder dem von $rT : Rt$ gleich ist. Es stehe zur Zeit des Stillstands die Erde in e, der Planet in m, man ziehe se, sm, me und an die Punkte m und e die Tangenten mt, et', welche die Richtungen bezeichnen, nach welchen sich der Planet und die Erde bewegen. Man nehme auf diesen Tangenten von den Berührungspunkten an auf derselben Seite von se, nach welcher sich die Erde und der Planet bewegen, also von Abend gegen Morgen, die mt und et' so, daß $mt : et' = V : v = rT : Rt$, und ziehe tt'. Da nun in dem Punkt m der Planet stille zu stehen scheinen, oder seine geocentrische Länge nicht ändern soll; so muß die Gesichtslinie *em* sich selbst parallel fortrücken, und daher *tt'* mit *me* parallel seyn. Man verlängere *mt* und *et'*, bis sie sich schneiden in *l*, die *lm* und ihre Verlängerung begegne der Erdbahn in *p* und *q*, und es seyen *ls* und *sp* gezogen. Wegen der Parallelen *me* und *tt'* verhält sich

$$\left.\begin{matrix} mt & et' \\ V : & v \end{matrix}\right\} = ml \quad le$$

also $V^2 : v^2 = \overline{ml}^2 : \overline{le}^2$

$$= ql \times lp + \overline{pm}^2 \quad ql \times lp; \text{ (II, 6 u. III, 36.)}$$

mithin $V^2 \quad V^2 - v^2 = \overline{ml}^2 : \overline{pm}^2$.

Betrachtet man den Punkt *m* als gegeben; so ist die *pm*, und, weil man ihr Verhältniß zu *ml* kennt, die *ml* gegeben. Folglich findet man den correspondirenden Ort *e* der Erde, wenn man aus dem gegebenen Punkt *l* eine Tangente *le* an die Erdbahn zieht.

Da $\overline{pm}^2 = \overline{ps}^2 - \overline{sm}^2$ (I, 47.) $= R^2 - r^2$; so verhält sich

$R^2 - r^2 \quad r^2 = \overline{pm} \quad \overline{sm}$

aber $V^2 : V^2 - v^2 = \overline{ml}^2 : \overline{pm}^2$

folglich $V^2 (R^2 - r \;) : r^2 (V^2 - v^2) = \overline{ml}^2 : \overline{sm}^2$

und $V\sqrt{R^2 - r^2} \quad r\sqrt{V^2 - v^2} = ml : sm$.

In dem bey *m* rechtwinklichten Dreyeck *lms* kennt man also das Verhältniß der zwey um den rechten Winkel liegenden Seiten, und daher ist der Winkel *slm* gegeben. Da nun so wohl *lms* als *les* ein rechter Winkel ist; so geht ein über *ls* beschriebener Halbzirkel durch die Punkte *m* und *e*. Folglich ist $slm = sem$ (III, 27.), woraus sich die Elongation des Planeten von der Sonne zur Zeit seines Stillstands ergiebt.

Soll ein Stillstand möglich seyn; so darf v nicht grösser als V, oder, weil $v : V = Rt : rT$, Rt nicht $> rT$, $R : r$ nicht $> T : t$ seyn. Ist $R : r = T : t$; so verschwindet der Winkel *sem*, und der Stillstandspunkt fällt mit der unteren Conjunktion zusammen. Ist aber $R : r < T : t$; so finden zwey Stillstände, der eine vor, der andere nach der unteren Conjunktion in gleichen östlichen und westlichen Elongationen von der Sonne Statt. Nun ergeben sich aus den synodischen Umlaufszeiten des Merkurs und der Venus (§. 84. und 85.) und der Umlaufszeit der Sonne mittelst der Proportion §. 61. ihre periodischen Umlaufszeiten 87 T. 23 $\frac{1}{4}$ St. und 224 T. 16 $\frac{2}{3}$ St. folglich verhält sich bey dem Merkur $T : t = 1000 : 241$, bey der Venus $= 1000 : 615$. Für den Merkur ist aber $R : r = 1000 : 387$, und für die Venus $= 1000 : 723$ (§. 84. und 85.). Mithin finden wirklich bey diesen zwey Planeten Stillstandspunkte auf beyden Seiten ihrer unteren Conjunktion Statt, welches mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Da $V : v = rT : Rt$; so verhält sich

$$V^2 \quad v^2 = r^2T^2 \quad R^2t^2$$

$$V^2 \quad V^2 - v^2 = r^2T^2 \quad r^2T^2 - R^2t^2$$

$$(R^2 - r^2)\, V^2 \quad r^2 (V^2 - v^2) = (R^2 - r^2)\, T^2 \quad r^2T^2 - R^2t^2$$

Mithin verhält sich auch vermöge des bewiesenen

$$\left.\begin{array}{l} \overline{ml}^2 : \overline{sm}^2 \\ \text{oder } \overline{\text{Sin. tot.}}^2 \quad \text{Tg. } \overline{mls}^2 \end{array}\right\} = (R^2 - r^2)\, T^2 \quad r^2T^2 - R^2t^2$$

$$\text{Sin. tot.} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Tg. } mls \\ \text{Tg. } sem \end{array}\right\} = T\sqrt{R^2 - r^2} \quad \sqrt{r^2T^2 - R^2t^2}$$

Es ist aber, wie Kepler gefunden hat, und es sich auch für die Venus und den Merkur aus den oben angegebenen Umlaufszeiten und mittleren Entfernungen ergiebt,

$$R^3 \quad r^3 = T^2 \quad t^2$$

also $R \quad r = r^2T^2 \quad R^2t^2$

$$\left.\begin{array}{l} R - r \quad R \\ R^2 - r^2 : R(R+r) \end{array}\right\} = r^2T^2 - R^2t^2 : r^2T^2$$

$$(R^2 - r^2)\, T^2 \quad T^2R(R+r) = r^2T^2 - R^2t^2 \quad r^2T^2$$

$$\left.\begin{array}{l} (R^2 - r^2)\, T^2 \quad r^2T^2 - R^2t^2 \\ \overline{\text{Sin. tot.}}^2 \quad \text{Tg. } \overline{sem}^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} T^2R(R+r) \quad r^2T^2 \\ R(R+r) \quad r^2 \end{array}\right\}$$

mithin $\text{Sin. tot.} \quad \text{Tg. } sem = \sqrt{R(R+r)} : r$

$$\text{Tang. } sem = \frac{r \text{ Sin. tot.}}{\sqrt{R(R+r)}} = \frac{\frac{r}{R} \text{ Sin. tot.}}{\sqrt{1 + \frac{r}{R}}}$$

$$= \frac{0{,}387 \text{ Sin. tot.}}{\sqrt{1{,}387}} \text{ für den Merkur,}$$

$$= \frac{0{,}723 \text{ Sin. tot.}}{\sqrt{1{,}723}} \text{ für die Venus.}$$

Merkur und Venus scheinen also stille zu stehen, wenn ihre östlichen oder westlichen Elongationen von der Sonne beziehungsweise 18° 11′ und 28° 51′ sind.

§. 91. Auf der Venus hat man Flecken beobachtet, deren scheinbare Bewegungen den §. 58. beschriebenen scheinbaren Bewegungen der Sonnenflecken ähnlich waren, und woraus man die Umdrehung der Venus von Abend gegen Morgen um eine gegen die Ebene der Ekliptik geneigte Axe geschlossen hat. Cassini setzte ihre Umdrehungszeit zu 23 St. 20 Minuten, Bianchini zu 24 T. 8 St. an. Letzterer hat wahrscheinlich 25 Umdrehungen der Venus mit einer Umdrehung verwechselt. Schröter setzt sie nahe mit Cassini übereinstimmend zu 23 St. 21 Min. an. Nach Schröters Beobachtungen dreht sich auch Merkur in 24 St. von Abend gegen Morgen um seine Axe.

Die Lichtgränze dieser Planeten ist so wie die des Monds ausgezackt, und daher giebt es Berge auf ihrer Oberfläche, welche nach Cassini und Schröter noch höher als die Berge des Monds sind. Die Art der Berechnung ist der im 81sten §. gezeigten ähnlich.

§. 92. Die zwey Planeten, welche wir bisher betrachtet haben, scheinen die Sonne beständig zu begleiten, die übrigen hingegen nehmen in Absicht auf die Sonne jede mögliche Stellung an dem Himmel ein. Die scheinbaren Bewegungen der letztern sind aber einander so ähnlich, daß es hinreichend seyn wird, die Bewegung eines derselben genauer zu betrachten, um einzusehen, wie man auch diese aus zwey Umlaufsbewegungen um verschiedene Mittelpunkte zusammensetzen könne.

Unter diesen Planeten ist der Mars an seinem röthlichten Lichte kenntlich. Wenn man ihn des Morgens bey seinem Heraustreten aus den Sonnenstralen erblickt; so bewegt er sich am geschwindesten, und von Abend gegen Morgen. Seine Geschwindigkeit nimmt nach und nach ab, und er scheint in Beziehung auf die Fixsterne stille zu stehen, wenn er sich um 137 Grade von der Sonne entfernt hat, Nun wird er rückläufig, und die Geschwindigkeit seiner retrograden Bewegung wächst, bis er sich um 180 Grade von der Sonne entfernt hat, wo er mit ihr in Opposition kommt, und er sich am geschwindesten von Morgen gegen Abend bewegt. Seine Geschwindigkeit nimmt nach der Opposition nach und nach wieder ab, bis er bey seiner Annäherung zu der Sonne nur noch 137 Grade von ihr entfernt ist, und er wieder in Beziehung auf die Fixsterne stille zu stehen scheint. Nachdem er ungefähr 73 Tage rückwärts sich bewegt, und während dieser Zeit von Morgen gegen Abend einen Bogen von etwa 16 Graden beschrieben hat, wird er wiederum rechtläufig, und seine Geschwindigkeit wächst, bis er in den Sonnenstralen verschwindet. Diese Erscheinungen kommen bey jeder Opposition des Mars in derselben Ordnung wieder. Während dieser Bewegungen verändert sich sein scheinbarer Durchmesser beträchtlich. Er ist in der Opposition am grösten, und am kleinsten in der Nähe der Sonne.

Man sieht hieraus, daß die scheinbare Bewegung des Mars um die Erde überhaupt von Abend gegen Morgen gerichtet ist, dieser Planet aber außer dieser Bewegung noch eine andere haben muß, welche bald mit der Richtung seiner Bewegung von Abend gegen Morgen übereinstimmend, bald ihr entgegen ist, und jener ersteren Bewegung gleich seyn, oder sie übertreffen kann, je nachdem der Planet stillstehend ist, oder sich rückwarts bewegt. Diese letztere Bewegung kann wiederum im Allgemeinen durch eine Kreisbewegung dargestellt werden, wenn man annimmt, daß die Erde sich beständig außerhalb des Umfangs dieses Kreises sich befinde. Die relative Bahn des Mars um die Erde wird alsdenn so wie die relative Bahnen des Merkurs und der Venus, eine Epicycloide werden, welche, wie §. 88. gezeigt worden ist, von der Erde aus gesehen, mit eben solchen Veränderungen in der Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung wird beschrieben werden, dergleichen man in der scheinbaren Bewegung des Mars um die Erde beobachtet.

§. 93. Es sey nun *SS'* (Fig. 33.) die scheinbare Bahn der Sonne um die Erde E und der Mars beschreibe einen Kreis MN, dessen Mittelpunkt C in einer kreisförmigen Bahn CC' sich um die Erde E von Abend gegen Morgen bewege. Da der Mars zur Zeit seiner Opposition sich am geschwindesten rückwarts bewegt, und zugleich sein scheinbarer Durchmesser am grösten ist; so müssen, wenn er in M mit der Sonne S in Opposition ist, so wohl M, E, S, als C, M, E (III, 8.) in einer geraden Linie liegen, und er muß von C aus betrachtet den Kreis MN ebenfalls in der Richtung von Abend gegen Morgen beschreiben, damit er zur Zeit seiner Opposition von E aus gesehen rückläufig erscheine. Bey der nächstfolgenden Opposition befinde er sich in M' die Sonne in S', und der Mittelpunkt des sich fortbewegenden Kreises sey in C'; so müssen wiederum C', M', E, S' in einer geraden Linie liegen, und die Zeit von einer Opposition bis zu der nächstfolgenden wird der synodischen Umlaufszeit des Punkts C in Beziehung auf die Sonne gleich seyn. Demnach sind wenigstens in den Oppositionen die Halbmesser CM, CM' nach der Sonne gerichtet. Eben dieses muß in der Nähe der Conjunktionen Statt finden, weil alsdann der scheinbare Durchmesser des Mars am kleinsten ist. Man lasse daher den Mars den beweglichen Kreis MN in derselben Zeit beschreiben, in welcher die Sonne ihren scheinbaren Umlauf um die Erde vollendet; so wird er, wenn er bey einer Opposition der Erde am nächsten war, auch bey jeder der übrigen ihr am nächsten, und bey jeder Conjunktion von ihr am weitesten entfernt seyn.

Die Umlaufszeit des Punkts C wird sich aus der synodischen Umlaufszeit dieses Punkts, und der Dauer des Jahrs ergeben. Man findet nemlich auf ähnliche Art, wie §. 61. für die Sonne und den Mond bewiesen worden ist, daß, wenn T, t die zwey Umlaufszeiten sind, T die größere, S die synodische Umlaufszeit ist, und beyde Körper sich nach einerley Richtung bewegen, $T + S : S = T : t$, mithin auch $S : T = S - t : t$ sich verhält. Also ist durch die synodische Umlaufszeit und eine der zwey periodischen Umlaufszeiten die andere gegeben, wenn man weiß, ob die gegebene Umlaufszeit die größere oder die kleinere ist. Da nun der Mars schon bey einer Elongation von 137° von der Sonne stillstehend, und von da an rückläufig ist; so muß, weil $CE > CM$ und vermöge eines ähnlichen Beweises wie in §. 90. die Umlaufszeit des Punkts C um die Erde grösser seyn, als die Umlaufszeit des Mars in dem Kreis MN, oder als die Umlaufszeit der Sonne, und man wird die zweyte der oben angegebenen Proportionen anwenden müssen, um die Umlaufszeit T des Punkts C zu finden, zu deren Bestimmung jetzt noch die Zwischenzeit zwischen zwey zunächst aufeinander folgenden Oppositionen des Mars erfordert wird. Man findet aber, wenn man verschiedene Oppositionen mit einander vergleicht, Unterschiede in den Zwischenzeiten, welche zu beträchtlich sind, als daß sie der ungleichförmigen Bewegung der Sonne allein könnten zugeschrieben werden; folglich muß auch die Bewegung des Punkts C ungleichförmig seyn. Im Mittel genommen wird man die synodische Umlaufszeit des Mars = 779 T. 22 St. finden, welche sich zu der Umlaufszeit der Sonne nahe wie 32 zu 15 verhält. Um sie genauer zu bestimmen, nehme man eine Periode von 15 synodischen Umläufen des Mars, welche hienach 32 Jahre ausmachen wird; so wird die auf das Ende dieser Periode fallende Opposition des Mars wiederum nahe in demselben Punkt der Ekliptik Statt finden, in welchem man die erste Opposition beobachtete, und die von der ungleichförmigen Bewegung der Sonne herrührenden Unterschiede müssen sich während dieser Periode gegen einander aufheben, weil die Sonne in denselben Punkten ihrer Bahn dieselben Ungleichheiten in ihrer Bewegung zeigt (§. 40.). Eben dieses muß auch bey der Bewegung des Punkts C der Fall seyn, weil die Periode von 15 synodischen Umläufen des Mars sehr nahe gleich lang gefunden wird, wenn man zwey andere nahe in einerley Punkt der Ekliptik sich ereignende Oppositionen beobachtet welcher von demjenigen verschieden ist, in welchem die zwey ersteren sich ereigneten. Aus einer grossen Anzahl von Beobachtungen hat man die mittlere synodische Umlaufszeit des Mars = 779 T. 22 St. 28 M. 32,56 S. gefunden, woraus sich, wie oben gezeigt wurde, die tropische Umlaufszeit von $C = 686$ T. 22 St. 18 M. 43,73 S. und die siderische $= 686$ T. 23 St. 30 M. 39,05 S. ergiebt, je nachdem man der tropischen oder siderischen Umlaufszeit der Sonne gleich setzt.

§. 94. Nachdem man die Länge des Mars zur Zeit seiner Opposition in M beobachtet hat, bestimme man seine Länge wiederum, wenn von dem Augenblick dieser Opposition an ein Zeitraum verfloßen ist, welcher der Umlaufszeit von C gleich ist, mithin der Punkt C sich wiederum an demselben Ort befindet, wo er bey der Opposition sich befand. Da man nun die Umlaufszeit des Mars in dem Kreis MN, welche der Umlaufszeit der Sonne gleich ist, kennt; so wird man unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung den Ort m des Mars in diesem Kreis angeben können, wenn man schließt: wie sich verhält die Umlaufszeit der Sonne zu der Umlaufszeit von C, so verhalten sich $360°$ zu der Anzahl Grade, welche der Mars von dem Punkt M an in der Zwischenzeit der Beobachtungen durchloffen hat. Man wird $677° 4' 13''$ oder $360 + 317° 4' 13''$ finden, und daher wird, wenn der Mars zur Zeit der zweyten Beobachtung in m war, der Winkel $ECm = 42° 55' 47''$ seyn. Da man die Länge des Mars so wohl in der Opposition, als da er in m war beobachtet hat; so kennt man auch den Unterschied CEm der Längen, welcher $= 40° 46' 50''$ sey. Mithin kennt man die Winkel ECm, CEm des Dreyecks ECm, also auch das Verhältniß von $CE : Cm$, welches hier dem Verhältniß von $1,52179 : 1$ gleich seyn wird. Wenn der Punkt C von der Opposition an gerechnet zwey Umläufe gemacht hat, beobachte man wiederum die Länge des Mars, welcher jetzt in n stehe. In dem Dreyeck ECn wird der Winkel $ECn = 2\,ECM = 85° 51' 34''$, und der Winkel Cen, welcher dem Unterschied der Längen des Mars bey dieser Beobachtung und bey seiner Opposition gleich seyn wird, gegeben seyn. Folglich wird man das Verhältniß von $EC : Cn$ angeben können, und dadurch wird auch das Verhältniß von $Cm : Cn$ gegeben seyn, weil man das Verhältniß von $CE : Cm$ kennt. Eben so kann man die Zeiten abwarten, da der Punkt C

drey, vier Umläufe u. s. w. von der Opposition an gerechnet gemacht hat, und dadurch die Verhältnisse der Abstände des Mars von dem Punkt C an mehreren Stellen bestimmen. Man wird finden, daß diese Abstände sich nur wenig verändern, und daher die Bahn MN einem Kreis nahe kommt, dessen Mittelpunkt in C fällt. Sie werden am kleinsten seyn, wenn der scheinbare Halbmesser der Sonne am größten, und am größten, wenn dieser am kleinsten ist. Wegen dieses genaueren Zusammenhangs der Bahn MN mit der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde, lasse man jetzt den Mars diese Bahn nicht mehr gleichförmig, sondern mit denselben Veränderungen der Geschwindigkeit beschreiben, welche die Sonne in ihrer jährlichen Bewegung zeigt, bestimme daher den Ort m des Mars immer so, daß Cm mit der an den gleichzeitigen Ort s der Sonne gezogenen Es parallel sey, und beobachte um den Winkel ECm zu erhalten, jedesmal auch die Länge der Sonne. Man wird alsdenn den Unterschied SEs der Länge der Sonne bey der Opposition und derjenigen, welche sie in s hatte, mithin auch den Winkel $ECm = SEs$ haben, und wie vorhin das Verhältniß von $EC : Cm$ finden. Unter dieser Voraussetzung werden die Abstände des Mars von dem Punkt C sehr nahe den correspondirenden scheinbaren Halbmessern der Sonne umgekehrt, mithin ihren Abständen von der Erde direkt (§. 49. n. 5.) proportional gefunden werden; folglich ist die Bahn MN der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde ähnlich.

§. 95. Um jetzt noch die Bahn CC' genauer zu bestimmen, gehe man von einer andern Opposition M' des Mars aus, und stelle ähnliche Untersuchungen, wie im vorhergehenden §. an. Wenn von dieser Opposition an die Umlaufszeit von C verflossen ist, stehe die Sonne in s', man ziehe $C'm'$ mit der Es' parallel, welche der Bahn $M'N'$ in m' begegne; so steht vermöge des vorhergehenden §. der Mars in m', und man erhält wie vorhin aus den Beobachtungen den Winkel $EC'm' = S'Es'$, und, wenn Em' gezogen wird, den Winkel $C'Em'$. Hieraus ergiebt sich das Ver-

hältniß

hältniß von EC' : $C'm'$, und, weil $C'm' : Cm = Es' : Es$, das Verhältniß von $EC' : Cm$. Man hat aber das Verhältniß von $Cm : CE$ gefunden; folglich kennt man das Verhältniß von $C'E : CE$. Diese Untersuchungen zeigen, daß die Bahn CC' beträchtlich von einem mit der Erde E concentrischen Kreis abweicht, und der Abstand CE bey einer Länge von 11 Z. $2° \frac{1}{2}$ am kleinsten, bey 5 Z. $2° \frac{1}{2}$ am grösten ist. Die gerade Linie, welche diese zwey Punkte mit einander verbindet, ist also die Apsidenlinie dieser Bahn, und da diejenigen Abstände, welche auf beyden Seiten gleiche Winkel mit der Apsidenlinie machen, einander gleich sind; so wird sie durch die Apsidenlinie in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt. Wenn die Sonne sich in ihrem mittleren Abstand von der Erde befindet, verhält sich $CE : Cm = 1,6656012 : 1$, wenn CE am grösten, und wie $1,3817858 : 1$, wenn CE am kleinsten ist, und daher verhält sich der mittlere Werth von CE zu dem mittleren Werth von $Cm = 1,5236935 : 1$.

§. 96. Man ziehe durch den Ort m (Fig. 33.) des Mars eine Parallele mk mit CE, welche der von der Erde E an den gleichzeitigen Ort s der Sonne gezogenen Es in k begegne. Da vermöge des vorhergehenden §. immer Cm mit Es parallel ist; so ist $ECmk$ ein Parallelogramm, und daher $mk = CE$, $Cm = kE$ (I, 34.). Die scheinbaren Bewegungen des Mars um die Erde werden also dieselben wie vorhin seyn, wenn man den Punkt k um die Erde eine Bahn beschreiben läßt, welche der MN, mithin auch, vermöge des vorhergehenden §. der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde ähnlich ist, und mit dieser in gleicher Zeit beschrieben wird, und annimmt, daß der Mars um den sich fortbewegenden Punkt k dieselbe Bahn beschreibe, welche man dem Punkt C um die Erde E angewiesen hatte, so daß diese zwey leztern Bahnen in gleichen Zeiten beschrieben werden. Aber wenn man EC und Cm oder mk und kE in einerley Verhältniß vergrössert oder vermindert, so bleiben die Winkel CEm, sEm, mithin auch die scheinbaren Bewegungen des Mars, dieselben wie vorhin. Man kann also den Punkt *k* mit dem gleichzeitigen Ort *s* der Sonne zusammenfallen lassen, und alsdenn wird das Verhältniß von *Cm* : *CE*, oder von *mk* : *Ek* dem Verhältniß des Abstands der Sonne von der Erde zu dem Abstand des Mars von der Sonne gleich werden, welches in den mittleren Distanzen dem Verhältniß von 1 : 1,5236935 gleich seyn wird (§. 95.). Von dem Merkur und der Venus wissen wir schon aus §. 84. und 85. daß sie um die Sonne sich bewegen, man wird also der Analogie nach auch den Mars seine Bahn um die Sonne beschreiben lassen, und der Hauptunterschied zwischen den zwey ersteren Bahnen und der Bahn des letzteren wird blos darinn bestehen, daß die Bahnen des Merkurs und der Venus von der Bahn der Sonne um die Erde eingeschlossen werden, die Bahn des Mars aber größer ist als die letztere. Man nennt daher auch diejenige Planeten, deren Bahnen kleiner sind, als die Sonnenbahn, die **unteren**, diejenige aber, deren Bahnen größer als die Bahn der Sonne um die Erde sind, die **oberen Planeten.**

§. 97. Daß die zwey unteren Planeten um die Sonne laufen, hat man §. 84. und 85. aus den Veränderungen ihrer Lichtgestalten geschlossen. Auch der Mars zeigt solche Veränderungen, nur mit dem Unterschied, daß er niemals sichelförmig, sondern, wenn seine Lichtgestalt am kleinsten ist, ungefähr so, wie der Mond vier Tage vor oder nach dem Vollmond erscheint. Zur Zeit seiner Opposition zeigt er sich als eine ganz beleuchtete Scheibe, und dieser Gestalt nähert er sich wieder, wenn er von da an bis auf die erwähnte Gränze abgenommen hat, bey seinem Verschwinden in den Stralen der Sonne. Sein scheinbarer Durchmesser ist zu klein, als daß man aus seinen Phasen mit einiger Genauigkeit den Winkel finden könnte, welchen die aus seinem Mittelpunkt an die Erde und an die Sonne gezogenen geraden Linien mit einander einschließen. Indessen liegen die Abweichungen der Beobachtungen und Berechnungen innerhalb der Gränzen der Fehler, welchen man bey dieser Art von Beobachtungen ausgesetzt ist. Man messe z. B. wenn man den Mars nach seiner Opposition, und nachdem der Punkt C von da an einen Umlauf gemacht hat, beobachtet, seinen grössten und kleinsten Durchmesser, und man wird finden, daß sie sich nahe wie 7 : 8 verhalten. Hienach verhält sich der Abstand der Lichtgränze von dem Mittelpunkt des Mars zu seinem Halbmesser = 3 : 4, und der Winkel, unter welchem die von dem Mars an die Erde E und die Sonne s gezogenen geraden Linien mE, ms sich schneiden, wird ungefähr 41 Grade betragen (§. 71.). Man hat aber zu dieser Zeit den Winkel $CEm = 40° \, 46' \, 50''$ gefunden (§. 94.), und daher sind ms und CE einander so nahe parallel, als man von dergleichen Beobachtungen erwarten kann. Der Winkel Ems wird unter der Voraussetzung, daß ms und CE parallel seyen, am grössten, wenn mE den Kreis MN berührt, und das Verhältniß von $CE : Cm$ am kleinsten ist. Mithin kann dieser Winkel nicht grösser werden als $47° \, 23'$, woraus mit den Beobachtungen übereinstimmend folgt, daß die Phasen des Mars nicht kleiner werden können, als die Phasen des Monds sind, wenn er um $47° \, 23'$ von der Opposition absteht, also sein Durchmesser zu der Breite des beleuchteten Theils wie 200 : 1677 oder nahe wie 6 : 5 sich verhält.

§. 98. Man setze jetzt, wie es §. 87. bey den unteren Planeten geschehen ist, die Sonne unbeweglich in s (Fig. 34.), ziehe durch s die Parallelen se, sm mit den Linien kE, km in Fig. 33., und nehme auf diesen Parallelen von dem Punkt s an immer $se = kE$, $sm = km$; so wird die me in Fig. 34. der correspondirenden mE in Fig. 33. beständig gleich und parallel, mithin die scheinbare Bahn des Mars von e aus gesehen dieselbe wie vorhin seyn Und da man den Punkt k (Fig. 33.) in einer beliebigen Distanz von E nehmen darf, wenn man nur zugleich die mk oder CE so nimmt, daß das Verhältniß von $kE : km$ oder CE das vorige bleibt (§. 96.); so wird, wenn man den Punkt k mit der Sonne s zusammenfallen läßt, welches ohnehin wenigstens sehr nahe Statt finden muß (§. 97.), der Punkt e in Fig. 34. eine Bahn um die ruhende Sonne s beschreiben, welche der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde in Fig. 33. gleich und ähnlich ist, und die Bahn der Erde um die Sonne seyn wird, und zugleich wird der Mars m (Fig. 34.) um die Sonne in der Bahn mpq sich herum bewegen, welche der Bahn CC' in Fig. 33. ähnlich seyn, und mit ihr in gleicher Zeit beschrieben werden wird. Vergleicht man hiemit das, was §. 87. von den unteren Planeten bewiesen worden ist; so wird sich um die ruhende Sonne zunächst der Merkur, hierauf die Venus, hernach die Erde, und nach dieser der Mars in beynahe kreisförmigen Bahnen bewegen, welche in desto größeren Zeiten beschrieben werden, je größer die mittleren Abstände von der Sonne sind. Von der Sonne aus gesehen werden diese Planeten mit der Erde beständig nach einerley Richtung sich bewegen, nemlich von Abend gegen Morgen.

§. 99. Die Stillstandspunkte eines oberen Planeten werden auf eine ähnliche Art gefunden, wie es §. 90. bey den unteren Planeten gezeigt worden ist, wenn man auch hier die Bahnen kreisförmig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben voraussetzt. Es seyen nemlich mpq, aeb die kreisförmigen Bahnen eines obern Planeten m und der Erde e um den Mittelpunkt s, in welchem sich die Sonne befinde. Zur Zeit eines Stillstands befinde sich der Planet in m, die Erde in e. Man ziehe die Tangenten ml, el an m und e, welche die Richtungen der Bewegung des Planeten und der Erde bestimmen, und auf denselben seyen von m und e an die mt, et' auf einerley Seite der geraden Linie me so genommen, daß mt zu et' sich verhalte wie die Geschwindigkeit V des Planeten zu der Geschwindigkeit v der Erde. Man ziehe tt', und die Tangente mt schneide die et' in l, letztere begegne der Planetenbahn in p, und ihre Verlängerung begegne ihr in q. Endlich seyen sl, sp gezogen. Da der Planet seine geocentrische Länge nicht verändern soll; so müssen me und tt' parallel seyn, und es wird sich verhalten

$$\left.\begin{matrix} et' : mt \\ v : V \end{matrix}\right\} = le : ml$$

$v^2 : V^2 = \overline{le}^2 : \overline{ml}^2$

$= ql \times lp + \overline{pe}^2 : ql \times lp$ (II, 6. u. III, 36.)

$v^2 : v^2 - V^2 = \overline{le}^2 : \overline{pe}^2$

Betrachtet man den Punkt e als gegeben; so ist die pe, mithin auch die le gegeben, deren Verhältniß zu pe dem gegebenen von $v : \sqrt{v^2 - V^2}$ gleich ist. Man findet also den Ort m des Planeten, wo er stehen muß, wenn er von dem gegebenen Ort e der Erde gesehen stillstehend erscheinen soll, wenn man aus dem gegebenen Punkt l eine Tangente lm an die Planetenbahn zieht.

Aus obiger Proportion folgt ferner

$V^2 : v^2 - V^2 = \overline{ml}^2 : \overline{pe}^2$

Es ist aber, wenn man $se = R$, sm oder $sp = r$ setzt

$\overline{pe}^2 = \overline{ps}^2 - \overline{se}^2 = r^2 - R^2$ (I, 47.);

$r^2 - R^2 : r^2 = \overline{pe}^2 : \overline{sm}^2$

$V^2 (r^2 - R^2) : r^2 (v^2 - V^2) = \overline{ml}^2 : \overline{sm}^2$

und $V\sqrt{r^2 - R^2} : r\sqrt{v^2 - V^2} = ml : sm$.

Demnach kennt man in dem bey m rechtwinklichten Dreyeck lms das Verhältniß der um den rechten Winkel liegenden Seiten, woraus man den Winkel lsm findet, welcher dem Winkel lem gleich ist, weil so wohl lms als les rechte Winkel sind, und sich daher ein Kreis um das Viereck $lmes$ beschreiben läßt. Man addire 90° zu dem Winkel lsm oder lem; so erhält man den Winkel mes, welcher der Elongation des Planeten von der Sonne zur Zeit des Stillstands gleich ist.

Heißt die Umlaufszeit der Erde oder die Zeit eines scheinbaren Umlaufs der Sonne T, und die Umlaufszeit des Planeten t; so verhält sich, wie in §. 90.

$v : V = Rt : rT$

$v^2 : V^2 = R^2t^2 : r^2T^2$

$V^2 : v^2 - V^2 = r^2T^2 : R^2t^2 - r^2T^2$

$$\left.\frac{V^2 (r^2 - R^2)}{\overline{ml}^2} : \frac{r^2 (v^2 - V^2)}{\overline{sm}^2}\right\} = (r^2 - R^2)\, T^2 : R^2t^2 - r^2T^2$$

Da in gegenwärtigem Fall $r > R$; so darf, wenn ein

Stillstand möglich seyn soll Rt nicht kleiner als rT, mithin $R : r$ nicht $< T : t$ seyn. In Beziehung auf den Mars ist $R : r = 1000 : 1524$, und $T : t = 10000 : 18807$, also $R : r > T : t$, und daher finden wirklich auf beyden Seiten der Opposition Stillstände des Mars Statt, welches mit den §. 92. angeführten Erfahrungen übereinstimmt.

Weil $ml : sm =$ Sin. tot. : Tang. mls

$= $ Sin. tot. $\quad$ Tg. (180° − mes), (III, 22.);

so verhält sich auch

$$T\sqrt{r^2 - R^2} : \sqrt{R^2t^2 - r^2T^2} = \text{Sin. tot.} : \text{Tg.}\ (180^\circ - mes),$$

woraus sich die Elongation *mes* des Planeten von der Sonne zur Zeit seines Stillstands ergiebt.

Unter der Voraussetzung, daß $r^3 : R^3 = t^2 : T^2$, welche auch bey dem Mars zutrifft, verhält sich

$$r : R = R^2t^2 \quad r^2T^2$$

$$\left.\begin{array}{l} r - R \quad R \\ r^2 - R^2 : R(r + R) \\ T^2(r^2 - R^2) \quad T^2R(r + R) \end{array}\right\} = R^2t^2 - r^2T^2 : r^2T^2$$

$$T^2(r^2 - R^2) \quad R^2t^2 - r^2T^2 = T^2R(r + R) : r^2T^2,$$

oder $\overline{ml}^2 \quad \overline{sm}^2 = R(r + R) \quad r^2$

$$= \frac{r}{R} + 1 \quad \frac{r^2}{R^2};$$

folglich Sin. tot. $\quad$ Tg. (180° − mes) $= \sqrt{\frac{r}{R} + 1} \quad \frac{r}{R}$

Demnach ist, wenn man die mittleren Distanzen nimmt, für den Mars

$$\text{Tg.}\ (180^\circ - mes) = \frac{1{,}5236935}{\sqrt{2{,}5236935}}\ \text{Sin. tot.}$$

$$= \text{Tang.}\ 43^\circ\ 48'\ 18''$$

$$mes = 136^\circ\ 11'\ 42''.$$

Wegen der ungleichförmigen Bewegung des Mars und der Ungleichheit seiner Abstände von der Sonne, verändern sich diese Elongationen von der Sonne beträchtlich, und fallen zwischen 130 und 146 Gr.

§. 100. Die beträchtlichen Veränderungen des scheinbaren Durchmessers des Mars stimmen genau mit den Veränderungen seines Abstands von der Erde, welche sich aus den §. 95. und 96. angeführten Verhältnißen ergeben. In der Opposition steigt er bis auf 24,7 Sekunden, in der Nähe seiner Conjunktion aber beträgt er nur noch 4 Sekunden. Setzt man den mittleren Abstand der Sonne von der Erde = 1; so ist der kleinste Abstand des Mars von der Sonne = 1,3817858, und daher sein Abstand von der Erde in der Opposition = 0,3817858, wenn die letztere in ihrem mittleren Abstand von der Sonne ist. Dieser ist aber um 0,0168532 kleiner als der gröste Abstand der Sonne von der Erde, und daher wird der kleinste Abstand des Mars von der Erde = 0,3649326 seyn. Der gröste Abstand des Mars von der Erde findet in der Conjunktion mit der Sonne Statt, wenn er und die Erde zugleich am weitesten von der Sonne abstehen, und ist demnach = 2,6824544. In dieser Distanz beträgt also der scheinbare Durchmesser des Mars nur noch 3″,35, und in einer Distanz, welche dem mittleren Abstand der Sonne von der Erde gleich ist, 9″, (§. 49. n. 5.)

Wenn der Mars der Erde am nächsten ist; so muß seine Horizontalparallaxe 2,74 mal größer seyn, als die mittlere Parallaxe der Sonne (§. 49. n. 1.), mithin nahe = 24″,1. Man hat daher seine Parallaxe, wenn er in Opposition mit der Sonne war, nach der §. 48. gezeigten Methode bestimmt, und aus dieser mittelst des bekannten Verhältnißes seines Abstands von der Erde zu dem mittleren Abstand der Sonne von der Erde nach §. 49. n. 1. die mittlere Sonnenparallaxe geschlossen, welche man auf diesem Weg schon genauer, als durch die Beobachtungen der Sonne selbst, gefunden hat, weil ein in der Bestimmung der Parallaxe des Mars begangener Fehler einen ungefähr $2\frac{3}{4}$ mal kleineren Fehler in der Parallaxe der Sonne hervorbringt.

Da der Mars der Erde in seiner Opposition so nahe kommen kann; so fragt es sich, ob er nicht wie der Mond von dem Schatten der Erde, getroffen werden könne? Es ergiebt sich aber aus dem in Halbmessern der Erde ausgedrückten mittleren Abstand der Sonne von der Erde, und aus dem oben angegebenen Verhältniß dieses Abstands zu dem kleinsten Abstand des Mars von der Erde, dieser letztere = 8553 Halbmessern der Erde, da hingegen der Schatten der Erde sich nur auf eine Distanz von etwa 216 Erdhalbmessern sich erstreckt (§. 76.). Folglich kann der Mars niemals von dem wahren Schatten der Erde getroffen werden. Wenn er zur Zeit seiner Opposition eine geringe Breite hat; so muß man auf ihm die Erde als eine dunkle Scheibe, deren scheinbarer Durchmesser nicht über 48″,2 gehen kann, vor der Sonne vorübergehen sehen, und daher kann auch der Halbschatten der Erde von dieser aus nicht bemerkbar seyn.

§. 101. Durch Fernröhren beobachtet man auf der Scheibe des Mars große dunkle Flecken, welche nicht immer deutlich begränzt sind, und ihre Gestalt öfters verändern. Aus ihren Bewegungen ergiebt sich, daß dieser Planet in 24 St. 39 M. 21 S. sich von Abend gegen Morgen um seine Axe dreht, und er folglich, wie auch schon aus den Veränderungen seiner Lichtgestalt erhellt, ein kugelförmiger Körper ist, welcher vermöge der Veränderung seiner Phasen sein Licht von der Sonne erhält. Seine Umdrehungsaxe ist gegen die Ebene der Ekliptik um einen Winkel von 59° 42′ geneigt, und die Durchschnittslinie der Ebene seines Aequators mit einer Ebene, welche durch seinen Mittelpunkt mit der Ekliptik parallel gelegt ist, ist einer geraden Linie parallel, welche die Punkte ♒ Z. 17° 47′ und ♌ Z. 17° 47′ der Ekliptik mit einander verbindet, so daß dem ersteren dieser Punkte derjenige Punkt entspricht, von welchem bey der Axendrehung die Bewegung der unter seinem Aequator liegenden Punkte aus der südlichen Seite der Ekliptik gegen die nördliche geschieht. Der Mars hat übrigens nicht genau die Gestalt einer Kugel, sondern ist unter den Polen etwas zusammengedrückt. Seine Umdrehungsaxe verhält sich zu dem Durchmesser seines Aquators nahe wie 15 : 16.

§. 102. Der glänzendste Planet nach der Venus ist der Jupiter, welcher sie zuweilen noch an Helligkeit übertrifft. Ehe er mit der Sonne in Opposition kommt, und wenn er ungefähr 116 Grade von ihr absteht, wird er stillstehend, und fängt hernach an, sich rückwarts zu bewegen. Die Geschwindigkeit dieser retrograden Bewegung wächst bis zu dem Augenblick der Opposition, worauf er sich nach und nach langsamer bewegt, bis er auf der andern Seite nur noch 116 Grade von der Sonne absteht, wo er wiederum stille zu stehen scheint. Von diesem Punkt an wird er wieder rechtläufig, bis er in den Sonnenstralen verschwindet. Die Dauer der retrograden Bewegung, so wie der ganze Bogen des Rückgangs sind aber merklich ungleich, und im Mittel beträgt die erstere 119 Tage, der letztere 10 Grade. Es folgt aus diesen Erscheinungen daß die Bewegung des Jupiters im Allgemeinen von Abend gegen Morgen gerichtet ist, und man sie, wie die des Mars, in zwey Umlaufsbewegungen zerfällen kann, nemlich in eine kreisförmige Bewegung MNm (Fig. 33.), welche zu einem Umlauf ein Jahr erfordert, und in eine fortrückende Bewegung des Mittelpunkts C dieses Kreises in der Bahn CC' um die Erde E. Die Umlaufszeit in der Bahn CC' ergiebt sich, wie bey dem Mars gezeigt wurde, aus der Zeit zwischen zwey zunächst aufeinander folgenden Oppositionen des Jupiters und der Umlaufszeit der Sonne. Die erstere ist im Mittel = 398 T. 21 St. 12 M. 58,41 S. woraus sich die tropische Umlaufszeit von C = 4330 T. 14 St. 39 M. 6 S. und die siderische = 4332 T. 14 St. 18 M. 41 S. ergiebt. Sodenn findet sich, daß die Bahn MN der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde ähnlich, und die an den Ort m des Jupiters gezogene Cm beständig mit der von der Erde E an den gleichzeitigen Ort s der Sonne gezogenen Es parallel ist, endlich daß die Bahn CC' von einem mit der Erde concentrischen Kreis merklich, aber nicht so beträchtlich, wie bey dem Mars verschieden ist. Im Mittel ist das Verhältniß von $Cm : CE$ dem von 1 : 5,2027911 gleich, wenn aber die Sonne in ihrer mittleren Entfernung von der Erde sich befindet; so verhält sich $Cm : CE$ = 1 : 5,4534532, und wie 1 : 4,9521290, je nachdem CE am grösten oder am kleinsten ist.

Der scheinbare auf der Ekliptik senkrechte Durchmesser des Jupiters ist in der Opposition am grösten, wo er bis auf 47″,0 steigt, in der Nähe seiner Conjunktion mit der Sonne beträgt er noch 28″,7.

§. 103. Um den Jupiter beobachtet man vier kleine Sterne, welche ihn beständig begleiten, und daher seine Trabanten (Satellites) heißen. Sie verändern jeden Augenblick ihre Lage unter sich und gegen den Jupiter, und stehen bald auf dieser, bald auf jener Seite desselben, jeder entfernt sich aber von ihm nur bis auf gewisse Gränzen. Man nennt denjenigen Trabanten den ersten bey welchem diese Gränzen am engsten sind, und bestimmt nach ihren grösten Digressionen von dem Jupiter ihren Rang. Sie scheinen sich nahe in einer mit der Ekliptik parallen geraden Linie, oder in einer sehr schmalen Ellipse hin und her zu bewegen, in der Nähe ihrer grösten Digressionen in Beziehung auf den Jupiter stille zu stehen, und mit ihrer Annäherung zu dem Jupiter ihre relative Bewegungen zu beschleunigen. Jeder der Trabanten entfernt sich auf beyden Seiten nahe gleich weit von dem Jupiter, und überhaupt sind ihre Bewegungen um den Jupiter denjenigen ähnlich, welche man bey den unteren Planeten um die Sonne beobachtet. Folglich bewegen sie sich nahe in concentrischen Kreisen um den Jupiter als Mittelpunkt, deren Ebenen nur wenig gegen die Ebene der Ekliptik geneigt sind.

Man sieht die Trabanten des Jupiters, wenn sie sich ihm nähern, oft verschwinden, ob sie gleich noch weit von ihm abstehen, der dritte und vierte erscheinen zuweilen wieder ehe sie noch die Scheibe des Jupiters erreichen, sehr selten beobachtet man dieses auch bey dem zweyten. Zuweilen sieht man sie auch bey ihrem Abrücken von dem Jupiter in einem kleinen Abstand von ihm verschwinden, und nach einiger Zeit in einem grösseren Abstand wieder zum Vorschein kommen. Diese Verschwindungen sind den Mondsfinsternissen vollkommen ähnlich, und die sie begleitende Umstände lassen in dieser Hinsicht keinen Zweifel übrig. Man sieht die Jupiterstrabanten beständig auf derjenigen Seite des

Jupiters verschwinden, welche der Sonne entgegengesetzt ist, und folglich auf derselben Seite, auf welche, wenn der Jupiter ein dunkler Körper ist, der Schattenkegel fällt, welchen er wirft. Je näher der Jupiter seiner Opposition kommt, desto näher bey ihm ereignen sich die Verfinsterungen. Endlich entspricht die Dauer ihrer Verfinsterungen genau der Zeit, welche sie gebrauchen müssen, um diesen Schattenkegel zu durchlaufen. Daß aber der Jupiter so wohl als seine Trabanten dunkle Körper seyen, welche nur von der Sonne ihr Licht empfangen, erhellt daraus, daß man einigemal seine Trabanten hat vor seiner Scheibe vorübergehen, und auf sie ihren Schatten werfen sehen, welcher während ihrer Bewegung eine mit der Richtung derselben parallele Chorde der Jupitersscheibe beschrieb. Herschel sahe den 6. April 1780 den Schatten des dritten Trabanten und den Trabanten selbst auf der Jupitersscheibe. Der Schatten war so schwarz und scharf begränzt, daß er seinen scheinbaren Durchmesser messen konnte, welchen er $= 1'',562$ fand *). Wenn diese Trabanten zwischen den Jupiter und die Sonne zu stehen kommen; so bilden sie also auf ihm wahre Sonnenfinsterniße, welche denenjenigen vollkommen ähnlich sind, die der Mond auf der Erde verursacht.

Da die Jupiterstrabanten um die Zeit ihrer Verfinsterungen sich in dem von der Erde abgekehrten Theil ihrer Bahnen befinden, und diesen in der Richtung von Abend gegen Morgen durchlaufen; so bewegen sie sich um den Jupiter nach eben dieser Richtung.

§. 104. Die Beobachtung der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten ist das sicherste Mittel, ihre Bewegungen zu bestimmen. Man erhält ihre synodischen Umlaufszeiten um den Jupiter sehr genau, wenn man weit von einander entfernte in der Nähe der Opposition des Jupiters beobachtete Finsterniße mit einander vergleicht, und die Zwischenzeit mit der Anzahl der synodischen Umläufe dividirt.

*) Philos. Trans. 1794.

Die synodischen Umlaufszeiten der vier Trabanten des Jupiters sind folgende:

	T.	St.	M.	S.
I.	1	18	28	35,9454
II.	3	13	17	53,7309
III.	7	3	59	35,8251
IV.	16	18	5	7,0210

Hieraus ergeben sich mittelst der Proportion §. 61. die siderischen Umlaufszeiten, wenn man T' der siderischen Umlaufszeit des Jupiters gleich setzt,

	T.	St.	M.	S.
I.	1	18	27	33,5049
II.	3	13	13	42,0399
III.	7	3	42	33,3605
IV.	16	16	32	11,2712

Eben so finden sich die periodischen Umlaufszeiten in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte, wenn man T der periodischen Umlaufzeit des Jupiters gleich setzt,

	T.	St.	M.	S.
I.	1	18	27	33,4763
II.	3	13	13	41,9483
III.	7	3	42	32,8924
IV.	16	16	32	8,7244

Dividirt man 360° mit den periodischen Umlaufszeiten; so erhält man folgende Bewegungen der Trabanten in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte während eines mittleren Sonnentags:

I.	6$^{S.}$	23°	29′	20″,375652
II.	3	11	22	29,148068
III.	1	20	19	3,534822
IV.	0	21	34	15,988200

Die tägliche siderische Bewegung erhält man aus der hier angegebenen, wenn man die Bewegung der Aequinoktialpunkte in einem Tag, d. i. 0″,137166 davon abzieht.

Zwischen den Bewegungen der Jupiterstrabanten finden folgende merkwürdige Verhältniße Statt. Nimmt man 247 synodische Umläufe des ersten Jupiterstrabanten, 123 des zweyten, 61 des dritten und 26 des vierten; so erhält man folgende Perioden:

	T.	St.	M.	S.
247 Uml. d. I. =	437	3	43	58,51
123 — — II. =	437	3	41	8,90
61 — — III. =	437	3	35	25,33
26 — — IV. =	435	14	13	2,55.

Also kommen nach Verfluß von 437 Tagen $3\frac{2}{3}$ St. die drey ersten Trabanten des Jupiters wiederum sehr nahe in dieselbe Lage so wohl unter sich, als in Beziehung auf die Sonne und Jupiter.

Es seyen die täglichen Bewegungen des ersten, zweyten und dritten Trabanten beziehungsweise n', n'', n'''; so ist

$$\begin{array}{rcrrrl} n' &=& 6^{\text{S.}} & 23^{\circ} & 29' & 20'',375652 \\ 2n''' &=& 3 & 10 & 38 & 7,069644 \\ \hline n'+2n''' &=& 10 & 4 & 7 & 27,445296 \\ 3n'' &=& 10 & 4 & 7 & 27,444204 \\ \hline n'+2n'''-3n'' &=& 0 & 0 & 0 & 0,001092, \end{array}$$

welcher Unterschied nach 100 Jahren noch nicht ganz 40 Sekunden ausmacht.

§. 105. Um die aus dem Mittelpunkt des Jupiters gesehene (jovicentrische) Länge der Trabanten zu bestimmen, beobachte man, wenn sie von dem Jupiter bedeckt werden, oder vor demselben vorübergehen, die Zeiten der Eintritte und Austritte an der Jupitersscheibe; so wird der in die Mitte zwischen die zwey Beobachtungen fallende Augenblick sehr nahe die Zeit seyn, wo der Trabant mit dem Jupiter von der Erde aus gesehen einerley Länge hatte. Beobachtet man auch die Länge des Jupiters; so wird man zugleich die jovicentrische Länge des Trabanten haben, welche der geocentrischen Länge des Jupiters gleich, oder um 180° davon verschieden seyn wird, je nachdem der Trabant von dem Jupiter bedeckt wurde, oder vor demselben vorübergieng, welche zwey Fälle leicht dadurch von einander zu unterscheiden sind, daß der Trabant im ersten Fall von Abend gegen Morgen, im letztern von Morgen gegen Abend sich bewegt. Da man nun die Bewegungen der Trabanten kennt; so kann man ihre Länge, wenn sie einmal für irgend einen Zeitpunkt bestimmt ist, für eine andere gegebene Zeit unter der Voraussetzung berechnen, daß sie sich gleichförmig um den Jupiter bewegen, welche den Beobachtungen ihrer Verfinsterungen zu Folge wenigstens beynahe richtig ist.

Hieraus ergiebt sich eine einfache Methode, das Verhältniß des Abstands des Jupiters von der Sonne zu dem Abstand der Erde von der Sonne zu finden. Zu einer Zeit, da der Jupiter ungefähr 90 Grade von der Sonne absteht, beobachte man eine Verfinsterung des dritten Trabanten des Jupiters, wo so wohl der Anfang als das Ende derselben sichtbar seyn wird. Die Erde sey in *E* (Fig. 35.) die Sonne in *S*, der Jupiter in *J*, und man ziehe *SE*, *EJe*, *SJ*. Der zwischen den Anfang und das Ende der Verfinsterung in die Mitte fallende Augenblik wird sehr nahe die Zeit seyn, da der Trabant in *m* mit dem Mittelpunkt *S* der Sonne und dem Mittelpunkt *J* des Jupiters in einer geraden Linie stund. Von der Erde *E* sey die *EV* nach dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche hin und durch *J* die *Jv* mit *EV* parallel gezogen; so ist *VEJ* die geocentrische Länge des Jupiters, *VES* die Länge der Sonne, welche beyde durch Beobachtungen, die man um die Zeit der Finsterniß angestellt hat, können gefunden werden, und daher ist der Punkt *SEJ* als Unterschied dieser Längen gegeben. Vermöge des vorhergehenden kann man für den Augenblik der Mitte der Verfinsterung des Trabanten seine jovicentrische Länge *vJm* berechnen, und da man *vJe* = *VEJ* (I, 29.) hat; so kennt man den Winkel *mJe* oder *EJS* = *VEJ* - *vJm*. Mithin sind die Winkel des Dreyecks *SEJ*, und dadurch das Verhältniß von *SE* : *SJ* gegeben. Man wird finden, daß dieses Verhältniß, wie auch schon aus §. 102. erhellt, veränderlich ist, und der mittlere Abstand des Jupiters von der Sonne zu dem mittleren Abstand der Erde von der Sonne sich wie 5,20279 : 1 verhält.

§. 106. Man hat im 102ten §. gefunden, daß, wenn man die Bewegung des Jupiters um die Erde aus den zwey kreisförmigen Bewegungen in der Bahn MN und in der Bahn CC' zusammensetzt, immer die von C an den Jupiter m gezogene Cm mit der von der Erde E an den gleichzeitigen Ort s der Sonne gezogenen Es parallel seyn muß, und sich im Mittel $CE : Cm$ wie $5{,}20279 : 1$ sich verhält; folglich ist, weil auch $ms : sE = 5{,}20279 : 1$, $ms : sE = CE : Cm$. Da nun wegen der Parallelen Cm und Es die Winkel CmE und mEs gleich, und wegen $CE > Cm$, $ms > sE$ die zwey übrigen Winkel der Dreyecke CEm, Ems nothwendig spitz sind; so sind diese Dreyecke gleichwinklicht (VI, 7.), und wegen der gemeinschaftlichen Seite mE einander gleich (I, 26.). Folglich ist $CmsE$ ein Parallelogramm, und die Bahn MN der scheinbaren Bahn sSS' der Sonne um die Erde gleich und ähnlich, welches in §. 95. auch von dem Mars bewiesen worden ist. Demnach werden auch die scheinbaren Bewegungen des Jupiters dieselben seyn, wie unter der im 102ten §. gemachten Voraussetzung, wenn man die Sonne um die Erde sich bewegen, und den Jupiter um die Sonne eine Bahn beschreiben läßt, welche der Bahn CC' gleich und ähnlich ist, und in einerley Zeit mit dieser beschrieben wird. Nimmt man aber die Erde als beweglich an; so wird der Jupiter um die ruhende Sonne dieselbe Bahn beschreiben, welche man ihm unter der vorhergehenden Voraussetzung um die sich bewegende Sonne angewiesen hatte, wie dieses §. 98. von dem Mars bewiesen worden ist.

§. 107. Man beobachte, wenn der Jupiter sich in der Nähe seiner Opposition mit der Sonne befindet, die Verfinsterung eines seiner Trabanten, und berechne mittelst der bekannten synodischen Umlaufszeit dieses Trabanten (§. 104.) die Zeiten der folgenden Verfinsterungen desselben, indem man zu der beobachteten Zeit einen, zwey, drey u. s. w. synodische Umläufe addirt. Man wird finden, daß die Verfinsterungen immer später und später als nach der Berechnung eintreffen, so wie der Jupiter von seiner Opposition abrückt, mithin sein Abstand von der Erde wächst. In der Nähe seiner Conjunktion mit der Sonne wird der

Unterschied am grösten seyn, und beynahe auf 16 Minuten steigen. Nach der Conjunktion wird der Unterschied bey gleicher Entfernung des Jupiters von der Erde eben so groß wie vorher seyn, mit der Annäherung des Jupiters zu seiner Conjunktion nach und nach eben so wieder abnehmen, wie er vorher zugenommen hatte, und in der Conjunktion selbst wieder verschwinden. Diese Erscheinungen beobachtet man auch bey den übrigen Trabanten, die Unterschiede sind bey jedem derselben in gleichen Abständen des Jupiters von der Erde gleich groß, und den Veränderungen der Abstände proportional. Olaus Römer äusserte zuerst im Jahr 1675 die Vermuthung, daß diese Verspätigung der Finsterniße der Jupiterstrabanten in der Nähe der Conjunktionen, und ihre Voreilung in der Nähe der Oppositionen ihren Grund in der nicht augenbliklichen Fortpflanzung des Lichts habe, und daß dieses eine merkliche Zeit gebrauche, um den Durchmesser der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde zu durchlaufen, weil der Jupiter in seiner Opposition der Erde um diese Distanz näher ist, als in der Conjunktion. Unter dieser Voraussetzung müssen uns die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten im ersteren Fall früher erscheinen, als im leztern, um die ganze Zeit, welche das Licht gebraucht, um den Durchmesser der Sonnenbahn zu durchlaufen. Das Gesetz der Verzögerungen dieser Finsterniße entspricht dieser Hypothese so genau, daß man sie nicht verwerfen kann. Es folgt daraus, daß das Licht eine Zeit von 8 Minuten 13,2 Sekunden gebraucht, um von der Sonne zu der Erde zu kommen, und diesen Raum mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit durchlauft.

§. 108. Da man jezt das Verhältniß der Abstände des Jupiters und der Erde von der Sonne kennt (§. 105.); so können die jovicentrischen Längen der Jupiterstrabanten mittelst der Beobachtungen ihrer Verfinsterungen genauer bestimmt werden. Zur Zeit des Mittels der Finsterniß steht der Trabant in *m* (Fig. 35.) mit der Sonne *S* und dem Jupiter *J* in einer geraden Linie. Durch die Beobachtung der Längen der Sonne und des Jupiters erhält man

den

den Winkel SEJ an der Erde E, welcher dem Unterschied derselben gleich ist, und überdieß kennt man das Verhältniß von SJ zu SE. Folglich kann der Winkel SJE gefunden werden, welcher spitz seyn muß, da $SJ > SE$ ist. Man ziehe Jv mit der von E nach dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche gezogenen EV parallel; so ist $eJv = JEV =$ der beobachteten Länge des Jupiters, und daher die jovicentrische Länge vJm des Trabanten $= eJv - eJm = JEV - SJE$.

Weil man so wohl den Eintritt als den Austritt des Trabanten um so viel zu spät sieht, als das Licht Zeit gebrauchte, um den Raum JE zu durchlaufen; so muß man noch das Verhältniß von $SE : EJ$ suchen, mittelst dessen man diese Zeit $= \frac{EJ}{SE}$ (8′ 13″,2) findet, welche von dem Augenblik des aus den Beobachtungen abgeleiteten Mittels der Finsterniß abgezogen werden muß, um den Augenblik zu finden, da der Trabant die beobachtete jovicentrische Länge hatte. Die jovicentrischen Längen der vier Trabanten für den ersten Januar 1750 und 1801 um Mitternacht nach dem Pariser Meridian sind folgende:

1. Januar 1750.	I.	0ˢ·	15°	0′	46″
	II.	10	11	50	25
	III.	0	10	15	15
	IV.	11	0	11	9
1. Januar 1801.	I.	10ˢ·	24°	29′	23″
	II.	1	29	33	26
	III.	6	17	5	38
	IV.	0	15	12	41

Man setze die Epoche der Länge des ersten Trabanten $= a'$, des zweyten $= a''$, des dritten $= a'''$; so ist für den ersten Januar 1801

$$\begin{array}{rcrrrr}
a' & = & 10^{s.} & 24^{\circ} & 29' & 23'' \\
2a''' & = & 1 & 4 & 11 & 16 \\
\hline
a' + 2a''' & = & 11 & 28 & 40 & 39 \\
3a'' & = & 5 & 28 & 40 & 18 \\
\hline
a' + 2a''' - 3a'' & = & 6 & 0 & 0 & 21
\end{array}$$

Aber nach Verfluß von t Tagen von dem ersten Januar 1801 an gerechnet ist mit Beybehaltung der §. 104. gebrauchten Benennungen

$$
\begin{aligned}
\text{Die Länge } l' \text{ des ersten Trab.} &= a' + n't \\
\text{— — } l'' \text{ — — —} &= a'' + n''t \\
\text{— — } l''' \text{ — — —} &= a''' + n'''t; \text{ folglich}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l' + 2l''' - 3l'' &= a' + n't + 2a''' + 2n'''t - 3a'' - 3n''t \\
&= a' + 2a''' - 3a'' + (n' + 2n''' - 3n'')t \\
&= 6^{S.}\ 0^{\circ}\ 0'\ 21'' + 0'',001092.t \ (\S\ 104.)
\end{aligned}
$$

Mithin ist die jovicentrische Länge des ersten Trabanten samt der doppelten Länge des dritten weniger die dreyfache Länge des zweyten selbst nach mehreren Jahrhunderten nahe $= 180^{\circ}$, und daher können wenigstens in einer sehr langen Periode die drey ersten Trabanten des Jupiters nicht zugleich verfinstert werden. Denn wenn der erste und dritte gleiche Länge haben; so beträgt ihre Entfernung von dem zweyten 60°. Haben der erste und zweyte einerley Länge; so sind sie von dem dritten um 90° entfernt. Endlich wenn der zweyte nnd dritte gleiche Länge haben; so steht der erste ihnen gerade gegenüber. Man kann mittelst obiger Gleichungen die Zeiten dieser Zusammenkünfte finden. Für den letzten Fall z. B. muß $l'' = l'''$, mithin

$a'' + n''t = a''' + n'''t$, $(n'' - n''')\,t = a''' - a''$, oder auch $= a''' - a'' + 360^{\circ}$, oder $= a''' - a'' + 2.\,360^{\circ}$, u. s. w.

mithin $t = \dfrac{a''' - a''}{n'' - n'''}$

oder $\dfrac{a''' - a''}{n'' - n'''} + \dfrac{360}{n'' - n'''}$ u. s. w. seyn.

Der erste Ausdruck wird die Zeit der nächsten Zusammenkunft von dem 1. Januar 1801 an gerechnet geben, der nächstfolgende die zweyte u. s. w. und $\dfrac{360}{n'' - n'''}$ wird die Zeit zwischen zwey zunächst aufeinander folgenden Zusammenkünften des zweyten Trabanten mit dem dritten seyn.

Da die oben angegebene jovicentrische Längen der Jupiterstrabanten diejenige sind, welche man beobachten würde, wenn das Licht augenblicklich sich fortpflanzte; so muß man, um für eine gegebene Zeit diejenige Länge zu finden, welche sie zu haben scheinen, von derselben die Zeit abziehen, welche das Licht gebraucht, um von dem Jupiter zu der Erde zu gelangen, und die man findet, wenn man für den mittleren Abstand der Sonne von der Erde = 1 den Abstand des Jupiters von der Erde sucht, und mit diesem 8′ 13″,2 multiplicirt. *).

§. 109. Man beobachtet auf dem Jupiter mehrere dunkle nahe mit der Ekliptik parallele Streifen, welche jedoch bey gleich heiterem Himmel und gleicher Distanz des Jupiters sich nicht gleich deutlich zeigen, und daher veränlich zu seyn scheinen. Ueberdiß beobachtet man auch auf seiner Scheibe andere schwarze Flecken, aus deren Bewegung man eine Umdrehung des Jupiters um eine auf der Ekliptik beynahe senkrecht stehende Axe von Abend gegen Morgen geschlossen hat. Die Umdrehungszeit beträgt 9 St. 55 M. 50 S. Der Jupiter ist also ein kugelförmiger Körper, welcher übrigens eine schon durch das Augenmaaß bemerkbare Abweichung von der genauen Kugelgestalt zeigt. Genauen Messungen zufolge verhält sich der Durchmesser des Aequators zu der Umdrehungsaxe sehr nahe wie 14 : 13, und wenn sich der Jupiter in seiner mittleren Distanz von der Erde, welche seiner mittleren Distanz von der Sonne gleich ist, befindet; so erscheint der Durchmesser seines Aequators unter einem Winkel von 38″,2, und der auf diesem senkrechte Durchmesser oder seine Axe unter einem Winkel von 35″.5. Auf den letzteren kleinsten Durchmesser beziehen sich die Angaben seines scheinbaren Durchmessers §. 107.) in seiner kleinsten und grösten Entfernung von der Erde.

An dem Jupiter bemerkt man keine Veränderung seiner Lichtgestalt. Wenn der Winkel, welchen die von seinem Mittelpunkt m (Fig. 33.) nach der Erde E und der Sonne s gezogenen geraden Linien mE, ms mit einander

*) In dem III Band der Sammlung astr. Tafeln (Berlin 1776.) beziehen sich die Epochen auf diejenigen Längen, welche man beobachten würde, wenn sich der Jupiter in seiner mittleren Distanz von der Erde befände, oder die wirklichen Längen sind um so viel vermindert, als die Bewegung der Trabanten in 42′ 46″ beträgt, in welcher Zeit das Licht jene Distanz durchlauft.

einschließen, am grösten ist; so berührt mE die Bahn MN in m. Es ist aber der gröste Werth von Cm oder der ihr gleichen sE (§. 106.) = 1,0168532 und der kleinste Werth von CE = 4,9521290 (§. 102.); mithin der gröste Werth des Winkels $smE = 11° 50' 57''$. Der Durchmesser des Aequators des Jupiters erscheint alsdenn unter einem Winkel von 42,16 Sekunden, und die Breite seines erleuchteten Theils unter einem Winkel von 41,71 Sekunden (§. 71.), welcher kleine Unterschied unmerklich ist.

§. 110. Aus den grösten Digressionen der Trabanten des Jupiters, von seinem Mittelpunkt und dem zu gleicher Zeit gemessenen scheinbaren Durchmesser seines Aequators ergeben sich die Abstände der Trabanten von dem Mittelpunkt des Jupiters in Halbmessern seines Aequators ausgedrückt. Da nemlich bey den grösten Digressionen die von der Erde an die Trabanten gezogene gerade Linien ihre beynahe kreisförmige und wenig gegen die Ekliptik geneigte Bahnen berühren; so werden auch hier, wie in §. 49. n. 6. die scheinbaren Halbmesser dieser Bahnen und des Aequators des Jupiters sich verhalten wie ihre wahren Halbmesser, wenn sie bey einerley Abstand des Jupiters von der Erde sind beobachtet worden. Die gröste Digression des vierten Jupiterstrabanten ist = $8' 16''$, wenn der Jupiter in seiner mittleren Distanz von der Erde ist. In eben dieser Distanz ist der scheinbare Halbmesser seines Aequators = $19'',1$ (§. 109.); folglich ist der vierte Jupiterstrabant $\frac{496}{19,1}$ oder 25,96859 Halbmesser des Aequators des Jupiters von seinem Mittelpunkt entfernt. So ergeben sich folgende Abstände der Trabanten von seinem Mittelpunkt in Halbmessern seines Aequators ausgedrückt:

I.	5,81783
II.	9,25642
III.	14,76475
IV.	25,96859

§. 111. Wegen der geringen Neigung der Bahnen der Jupiterstrabanten und ihrer in Vergleichung mit dem

Durchmesser des Jupiters kleinen Abstände von seinem Mittelpunkt werden die drey ersten Trabanten bey jeder Opposition mit der Sonne verfinstert, der vierte geht öfters neben dem Schatten des Jupiters vorbey. Wenn die Trabanten durch die Axe des Schattenkegels gehen; so ist nach den Beobachtungen die halbe Dauer der Verfinsterung

			St.	M.	S.
bey dem I.	Trab.	=	1	7	52
II.	—	=	1	26	2
III.	—	=	1	46	50
IV.	—	=	2	22	25

Sie verschwinden bey dem Eintritt in den Schatten nach und nach, welches theils von dem Halbschatten, theils von dem Durchmesser der Trabanten herrührt. Man hat die Größe ihrer Durchmesser durch die Zeit zu bestimmen gesucht, welche sie gebrauchen, um sich in den Schatten des Jupiters einzusenken; aber die Beobachtungen zeigen in dieser Hinsicht große Verschiedenheiten, welche die Unterschiede der Stärke der Fernröhren, der Schärfe der Augen des Beobachters, des Zustands der Atmosphäre, der Höhe des Jupiters über dem Horizont, des scheinbaren Abstands der Trabanten von dem Jupiter, und die Veränderung der Halbkugeln, die sie uns zukehren, hervorbringen. Die Vergleichung der Helligkeit der Trabanten ist von den vier ersteren Ursachen unabhängig, welche ihr Licht nur verhältnißmäßig verändern, und sie kann uns daher Aufschluß über die Wiederkehr der Flecken geben, welche die Rotationsbewegung dieser Körper nach und nach auf die der Erde zugekehrte Seite bringen muß; folglich über diese Bewegung selbst. Herschel, welcher sich mit dieser feinen Untersuchung beschäftigt hat, hat beobachtet, daß sie sich wechselsweise an Helligkeit übertreffen, welcher Umstand zur Beurtheilung ihres größten und kleinsten Glanzes sehr tauglich ist. Durch die Vergleichung ihres größten und klein- Glanzes mit ihren gegenseitigen Stellungen fand er, daß sie sich in derselben Zeit um sich selbst drehen, in welcher sie einen Umlauf um den Jupiter machen, und daher demselben, wie der Mond der Erde, beständig einerley Seite zukehren.

La Place findet unter der Voraussetzung, daß die Jupiterstrabanten mit dem Jupiter gleiche Dichtigkeiten haben, folgende aus dem Mittelpunkt des Jupiters gesehene scheinbare Durchmesser der Trabanten, wenn sie sich in ihren mittleren Entfernungen von ihm befinden:

I.	30'	21"
II.	21	38
III.	21	11
IV.	9	27

§. 112. Unter den Planeten, welche schon die Alten kannten, und mit unbewafnetem Auge sichtbar sind, ist jetzt noch der Saturn übrig. Er unterscheidet sich von den Fixsternen durch sein mattes röthlicht-gelbes Licht, und durch seine Bewegungen, welche den Bewegungen des Mars und Jupiters ähnlich sind. Er wird rückläufig, wenn er vor seiner Opposition etwa 109 Grade von der Sonne entfernt ist, und fängt wieder an, sich von Abend gegen Morgen zu bewegen, wenn er nach seiner Opposition sich der Sonne bis auf 109 Grade genähert hat. Diese retrogade Bewegung dauert ungefähr 137 Tage, während welcher Zeit er $6\frac{3}{4}$ Grade durchlauft. Seine scheinbare Größe verändert sich nicht beträchtlich, und daher müssen seine Abstände von der Erde zur Zeit der Opposition und Conjunktion weniger, als bey den übrigen Planeten von einander verschieden seyn. Im Augenblick der Opposition ist der scheinbare Durchmesser des Saturns am grösten, und beträgt 20",6, seine mittlere Größe ist = 17",6.

Die mittlere synodische Umlaufszeit des Saturns ist = 378 T. 2 St. 12 M. 49,57 S. woraus, wie bey dem Mars und Jupiter, die siderische Umlaufszeit = 10758 T. 23 St. 16 M. 34 S. und die tropische oder periodische = 10746 T. 17 St. 34 M. 42 S. sich ergiebt. Die scheinbaren Bewegungen des Saturns können, wie die des Mars und Jupiters in zwey Bewegungen zerfällt werden, wenn man einen Punkt C (Fig. 33.) von Abend gegen

Morgen in der periodischen Umlaufszeit des Saturns eine kreisförmige Bahn CC' um die in Ruhe angenommene Erde E, den Saturn selbst aber um den beweglichen Punkt C eine Bahn MN beschreiben läßt, welche der scheinbaren Bahn sSS' der Sonne um die Erde ähnlich ist, so daß immer die an den Ort m des Saturns gezogene Cm mit der an den gleichzeitigen Ort s der Sonne gezogenen Es parallel ist. Im Mittel verhält sich $CE : Cm = 9{,}5387705 : 1$. Der Abstand des Punkts C von der Erde E ist veränderlich. Wenn die Sonne in ihrem mittleren Abstand von der Erde sich befindet; so verhält sich $CE : Cm = 10{,}0745470 : 1$ wenn CE am grösten, und wie $9{,}0029940 : 1$, wenn CE am kleinsten ist.

§. 113. Der Saturn bietet eine merkwürdige Erscheinung dar, welche man an keinem der übrigen Himmelskörper beobachtet. Man sieht ihn beynahe immer zwischen zwey kleineren Körpern, welche mit ihm zusammenzuhängen scheinen, und deren Gestalt und Größe sehr veränderlich sind. Zuweilen scheinen sie den Planeten zu umgeben, zuweilen bilden sie zwey Henkel an dem Saturn, zu andern Zeiten verschwinden sie gänzlich, und der Saturn erscheint alsdenn rund, wie die übrigen Planeten. Huygens fand durch sorgfältige um das Jahr 1655 angestellte Beobachtungen dieser sonderbaren Erscheinungen, und durch ihre Vergleichung mit den Stellungen des Saturns gegen die Erde und die Sonne, daß sie durch einen breiten und dünnen Ring hervorgebracht werden, welcher mit dem Saturn concentrisch ist, und ihn so umgiebt, daß zwischen ihm und dem Ring ein Zwischenraum von etwa $\frac{1}{3}$ des Durchmessers des Saturns übrig bleibt. Dieser Ring, welcher gegen die Ebene der Ekliptik um $31^\circ\ 20'$ geneigt ist, zeigt sich dem Beobachter auf der Erde in einer schiefen Lage unter der Gestalt einer Ellipse Fig. 36., deren Breite, wenn sie am grösten ist, ungefähr die Hälfte ihrer Länge beträgt. Die Ellipse verschmälert sich immer mehr und mehr, so wie die von dem Saturn nach der Erde gezogene Gesichtslinie mit der Ebene des Rings einen kleineren und kleineren Winkel macht. Der jenseits des Saturns liegende Bogen des Rings wird von dem Planeten bedeckt, und der disseits liegende fließt mit der Scheibe des Planeten zusammen Fig. 37. Aber man beobachtet auf dieser durch stark vergrößernde Ferröhren den Schatten welchen der Ring auf Saturn wirft, als einen dunkeln Streifen, woraus folgt, daß der Saturn und sein Ring undurchsichtige Körper sind, welche von der Sonne beleuchtet werden. Jetzt kann man nur noch diejenigen Theile des Rings unterscheiden, welche auf jeder Seite des Saturns hervorragen, ihre Breite nimmt nach und nach ab, und sie verschwinden endlich, wenn die Erde sich in der erweiterten Ebene des Rings befindet, dessen Dicke zu klein ist um bemerkt werden zu können. Der Ring verschwindet aber auch noch aus einer andern Ursache, nemlich wenn die erweiterte Ebene des Rings durch die Sonne geht, welche in diesem Fall nur seine dünne Kante beleuchtet. Er bleibt so lange unsichtbar, als seine Ebene zwischen der Erde und der Sonne durchgeht, mithin seine beleuchtete Seite von der Erde abgekehrt ist, und wird erst alsdenn wieder sichtbar, wenn die Erde und die Sonne vermöge der relativen Bewegungen der letztern und des Saturns sich wieder auf einer Seite dieser Ebene befinden. Durch sehr starke Teleskope kann man übrigens den Ring auch alsdenn noch sehen, wenn er nur seine beleuchtete Kante der Erde zukehrt. Herschel hat ihn im Jahr 1789, als er für alle übrigen Beobachter verschwunden war, beständig durch sein vierzigfüßiges Teleskop als eine sehr feine Linie gesehen, welche auf beyden Seiten des Saturns hervorragte.

§. 114. Diese Phänomene des Verschwindens und Wiedererscheinens des Rings ereignen sich alle fünfzehn Jahre, oder nach Verfluß der halben siderischen Umlaufszeit des Saturns; folglich bleibt der Ring in Beziehung auf die Fixsterne beständig in einer sich selbst parallelen Lage. Die Durchschnittspunkte seiner Ebene mit der Ekliptik, oder seine Knoten, kann man dadurch finden, daß man die Länge des Saturns zu derjenigen Zeit beobachten, da die Erde sich in der erweiterten Ebene des Rings befindet, mithin die nach dem Saturn gezogene Gesichtslinie mit der Knotenlinie zusammenfällt. Da nun der Saturn, wie die übrigen Planeten, sich bald vor, bald rückwärts bewegt, und seine scheinbare Bahn um die Erde, wie die des Mars eine Epicycloide ist (§. 88. und 112.); so kann er von der Erde aus gesehen in einem Jahr dreymal einerley Länge haben, weil in der Nähe der Opposition eine von der Erde *E* (Fig. 32.) nach dem Saturn gezogene gerade Linie seiner scheinbaren Bahn in drey Punkten auf einerley Seite von *E* begegnen kann. Aber man wird den Uebergang des Rings in eine gerade Linie immer bey einerley Lage des Saturns gegen die Fixsterne beobachten, wenn diese Erscheinung daher rührt, daß die Ebene des Rings durch die Erde geht, hingegen in einer andern Lage des Saturns gegen die Fixsterne, wenn die Ebene des Rings durch die Sonne geht. Auf diesem Weg hat man gefunden, daß der aufsteigende Knoten des Rings im Jahr 1803 in 5 Z. 17° 19' der Ekliptik fiel. Wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte nimmt seine Länge jährlich um 50",1 zu (§. 37.) Man hat also an dem Ort des Saturns ein Kennzeichen, ob das Wiedererscheinen oder Verschwinden des Rings von dem Zusammentreffen seiner Ebene mit der Erde oder mit der Sonne abhänge.

§. 115. Hienach kann man das Verhältniß der Abstände des Saturns und der Erde von der Sonne auf eine ähnliche Art beyläufig finden, wie man in §. 106. den Abstand des Jupiters von der Sonne mittelst der Verfinsterungen seiner Trabanten bestimmt hat. Wenn der Ring des Saturns sich verschmälert, und bis auf eine gerade Linie abgenommen hat, oder verschwunden ist, und zugleich diese Erscheinung sich an einem andern Ort des Himmels ereignet, als in dem aufsteigenden oder niedersteigenden Knoten des Rings, beobachte man die Länge des Saturns und der Sonne. In diesem Fall geht die Ebene des Rings durch die Sonne, und die Länge eines seiner Knoten ist der aus dem Mittelpunkt der Sonne gesehenen (heliocentrischen)

Länge des Saturns gleich, mithin vermöge des vorhergehenden §. gegeben. Der Winkel, unter welchem die von dem Saturn *J* (Fig. 35.) an die Sonne *S* und Erde *E* gezogenen geraden Linien *JS*, *JE* sich schneiden ist dem Unterschied der Länge eines der Knoten und der beobachteten geocentrischen Länge des Saturns gleich, wo man immer denjenigen Knoten zu nehmen hat; dessen Länge der beobachteten Länge des Saturns am nächsten kommt. Der Winkel an der Erde *E* ist dem Unterschied der Länge der Sonne und der geocentrischen Länge des Saturns gleich. Folglich kennt man in dem Dreyeck *SEJ* zwey Winkel, und daher auch das Verhältniß von *SJ* : *SE*. Es findet sich, daß im Mittel genommen der Saturn ungefähr neun und ein halb mal so weit von uns entfernt ist als die Sonne, woraus, wie im §. 106. bey dem Jupiter gezeigt wurde, folgt, daß die Bahn *MN* (Fig. 33.), welche man den Saturn um den beweglichen Punkt *C* in §. 112. hat beschreiben lassen, der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde nicht allein ähnlich, sondern auch gleich, und *CmsE* ein Parallelogramm seyn muß.

Da nun die gerade Linie *ms*, welche die gleichzeitigen Orte *m* und *s* des Saturns und der Sonne miteinander verbindet, der *CE* beständig gleich und parallel ist; so werden die scheinbaren Bewegungen des Saturns dieselben, wie in §. 112. seyn, wenn man ihn die Bahn *CC'* um die Sonne *s* beschreiben, und die letztere sich um die Erde *E* in der Bahn *sSS'* bewegen läßt. Oder man kann auch mit Beybehaltung der hier angenommenen Bewegung des Saturns um die Sonne diese als unbeweglich annehmen, und dagegen die Erde um die Sonne in einer Bahn sich bewegen lassen, welche der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde gleich und ähnlich ist, wie dieses bey den übrigen Planeten gezeigt worden ist.

§. 116. Um den Saturn sieht man sieben Trabanten von Abend gegen Morgen in beynahe kreisförmigen Bahnen sich bewegen. Man nennt auch hier denjenigen Trabanten den ersten, der sich bey seiner grösten Digression am wenigsten von dem Saturn entfernt, dessen Bahn also am kleinsten ist, den nächstfolgenden den zweyten, u. s. w. Die zwey zunächst um den Saturn sich bewegenden Trabanten hat Herschel im Jahr 1789 durch sein vierzigfüßiges Teleskop entdeckt, weswegen der ehmalige erste Trabant nun der dritte, der zweyte der vierte u. s. w. ist. Huygens entdeckte den ehmaligen vierten Trabanten im Jahr 1655 mit Fernröhren von 12 und 23 Fuß. Cassini sahe den ehmaligen fünften im Jahr 1671 mit einer Fernröhre von 17 Fuß, im Jahr 1672 den dritten mit Fernröhren von 35 und 70 Fuß, endlich im Jahr 1684 mit Fernröhren, wovon die gröste 136 Fuß lang war, den ehmaligen ersten und zweyten. Pound sahe im Jahr 1718 durch eine 123 Fuß lange Fernröhre die fünf alten Trabanten auf einmal, welche nach Wargentin's Versicherung auch durch eine zehnfüßige achromatische Fernröhre sichtbar seyn sollen. Herschel sahe sie durch sein 10 füßiges Teleskop schon bey sechzigmaliger Vergrößerung am 19. Decemb. 1793. Durch eine $3\frac{1}{2}$ füßige achromatische Fernröhre erkennt man höchstens drey dieser Trabanten.

Wenn der Ring des Saturns unsichtbar ist; so erscheinen die Bahnen der sechs ersten Trabanten als gerade Linien, hingegen als Ellipsen, wenn der Ring sichtbar ist, und diese sind der elliptischen Gestalt des Rings ähnlich. Folglich bewegen sich diese Trabanten nahe in der Ebene des Rings. Der siebente bewegt sich in einer weniger gegen die Ekliptik geneigten Ebene, und sein Licht wird, wenn er auf der Ostseite des Saturns steht, so schwach, daß er sehr schwer zu erkennen ist. Herschel hat aus dieser periodischen Lichtveränderung gefolgert, daß der siebente Trabant dem Saturn beständig einerley Seite zukehre, und sich daher während eines Umlaufs um den Saturn einmal um seine Axe drehe. Dieser Trabant ist also hierin dem Mond (§. 80.) und den Jupiterstrabanten (§. 111.) ähnlich; mithin scheint die Gleichheit der Zeiten der Axendrehung und des Umlaufs ein allgemeines Gesetz der Bewegung der Trabanten zu seyn.

§. 117. Die Bewegungen der Saturnstrabanten sind wegen der Schwierigkeit der Beobachtungen lange nicht so genau bekannt, wie die der Jupiterstrabanten. Nur bey dem ehmaligen vierten, oder dem jetzigen sechsten Trabanten, welcher am leichtesten zu beobachten ist, hat man seine Verfinsterung durch den Schatten des Saturns beobachtet. Die Verfinsterungen seiner Trabanten ereignen sich überhaupt wegen der beträchtlichen Neigung ihrer Bahnen selten. Ihre Abstände von dem Saturn ergeben sich, wie in §. 110. die Abstände der Jupiterstrabanten, aus ihren größten Digressionen von dem Saturn und aus dem gleichzeitigen scheinbaren Halbmesser des letztern. Nimmt man diesen zur Einheit an, so sind die mittleren Abstände der Trabanten des Saturns von seinem Mittelpunkt, und ihre siderischen Umlaufszeiten folgende:

		Abstände	sid. Uml. Zeiten. T.	St.	M.	S.
ehmals.	I.	3,080	0	22	37	30
	II.	3,952	1	8	53	9
I.	III.	4,893	1	21	18	26
II.	IV.	6,268	2	17	44	51
III.	V.	8,754	4	12	25	11
IV.	VI.	20,295	15	22	41	14
V.	VII.	59,154	79	7	54	37

Die aus dem Mittelpunkt des Saturns gesehene Längen der fünf älteren Trabanten am 1. Januar 1801 um Mitternacht nach dem Pariser Meridian sind:

III.	$1^{Z.}$	15°	$23'$
IV.	0	27	0
V.	2	8	2
VI.	1	10	33
VII.	4	28	29

welche dazu dienen können, die gegenseitige Lage der Trabanten beyläufig zu bestimmen, und sie von einander zu unterscheiden.

§. 118. Nach Herschels Beobachtungen dreht sich sowohl der Saturn als sein Ring um eine auf der Ebene des letztern senkrecht stehende Axe von Abend gegen Morgen. Die Umdrehungszeit des Saturns ist 10 St. 16' 0",4, seines Rings 10 St. 32' 15". Auch beobachtete er fünf mit dem Aequator des Saturns parallel laufende veränderliche denen des Jupiters ähnliche Streifen.

Die Durchmesser des Saturns sind ungleich, und der Durchmesser seines Aequators ist grösser als der auf diesem senkrechte Durchmesser oder als die Umdrehungsaxe. Aber es zeigt sich hier eine merkliche Abweichung von der abgeplatteten Gestalt des Mars und Jupiters. Bey diesen nehmen die Durchmesser von den Polen an bis sie mit dem Aequator zusammenfallen beständig, wie in einer Ellipse zu, bey dem Saturn hingegen ist nach Herschels Beobachtungen derjenige Durchmesser, welcher mit seinem Aequator einen Winkel von 43° 20' macht, der gröste, und dieser Durchmesser, der Durchmesser des Aequators und die Umdrehungsaxe verhalten sich wie 36, 35 und 32.

Die Oberfläche des Rings des Saturns ist nicht zusammenhängend; ein mit ihm concentrischer schwarzer Streifen, welchen man so wohl auf der Nord- als Südseite des Rings beobachtet, theilt ihn in zwey Theile, welche zwey abgesonderte Ringe zu bilden scheinen. Mehrere schwarze Streifen, welche einige Beobachter bemerkt haben, scheinen eine grössere Anzahl concentrischer nahe in einer Ebene liegender Ringe anzuzeigen. Nach Herschel sind die zwey Saturnsringe und der dazwischen liegende Raum nahe in folgenden Verhältnißen zu einander:

Innerer Durchmesser des kleinsten Rings	5900	Theile
Aeusserer — — — —	7510	
Innerer Durchmesser des grösten Rings	7740	
Aeusserer — — — —	8300	
also Breite des inneren Rings	805	
— — äusseren —	280	
Breite des Zwischenraums	115	

Der Durchmesser des Rings verhält sich zu dem Durchmesser des Saturns nahe wie 7 : 3; mithin kommen auf den Durchmesser des Saturns 3557 der obigen Theile. Die Dicke des Rings muß in Vergleichung mit seiner Breite sehr gering seyn. Wenn die Erde in seiner Ebene sich befand sahe Herschel die Saturnstrabanten auf beyden Seiten desselben hervorragen, wie Perlen, die an einen Faden gereihet sind. Der Ring erschien ihm als eine feine Linie, deren Dicke kaum den vierten Theil des scheinbaren Durchmessers eines Trabanten, den er auf eine Sekunde schätzte, ausmachte.

Uebrigens scheinen nicht alle Punkte des Rings, oder der verschiedenen Ringe in einer Ebene zu liegen. Denn man hat den östlichen Theil des Rings früher verschwinden sehen, als den westlichen, und umgekehrt. Schröter *) hat in den Jahren 1789, 1790 und 1803 den östlichen Theil früher verschwinden und später wieder erscheinen sehen, als den westlichen, wenn die Südseite des Rings gegen die Erde gekehrt war, aber das Gegentheil beobachtet, wenn das Aug gegen die nördliche Fläche des Rings sahe, und theils aus diesen Beobachtungen, theils aus der Beobachtung heller Punkte des Rings gefolgert, daß der Saturnsring in Beziehung auf die Sonne sich nicht um seine Axe drehe, sondern ihr beständig einerley Punkt seiner Oberfläche zukehre, mithin in Beziehung auf die Fixsterne während eines Umlaufs des Saturns um die Sonne eine Umdrehung um seine Axe vollende. Vielleicht lassen sich diese Beobachtungen mit Herschels Behauptung einer Axendrehung des Rings vereinigen, wenn man annimmt, daß jeder der Saturnsringe in einer Ebene liege, die Ebenen der verschiedenen Ringe aber etwas gegen einander geneigt seyen, so daß durch das Hervorragen eines Endes des inneren Rings über den äussern jene von Schröter beobachtete helle Punkte oder Knoten entstehen, welche der Axendrehung der Ringe ungeachtet ihre Lage gegen den Saturn nicht verändern werden.

Zur Bestimmung der Dicke des Rings hat Schröter am 25. Junius 1803, als er verschwunden war, die scheinbare Breite seines als eine sehr feine Linie auf der Scheibe des Saturns sich zeigenden Schattens gemessen, welche er

*) Kronographische Fragmente zur genauen Kenntniss des Planeten Saturn. Göttingen. 1808.

$= 0'',158$ fand. Hieraus fand er nach Abzug des Halbschattens und einer Verminderung wegen der schiefen Beleuchtung die scheinbare Dicke des Rings $= 0'',126$. An demselben Abend hatte er den scheinbaren Durchmesser des Aequators des Saturns gefunden $= 18'',075$; folglich beträgt diese Dicke kaum 25 solcher Theile, deren 3557 auf den Durchmesser des Saturns, oder 8300 auf den grösten Durchmesser des äusseren Rings gehen. Es ergiebt sich hieraus, daß bey schon sehr kleinen Neigungen der Ringe gegen einander der eine über den anderen mit seinem Ende hervorragen und den oben erwähnten ähnliche Erscheinungen verursachen kann.

§. 119. Ausser den bisher betrachteten schon den Alten bekannten Planeten kannte man bis zu dem Jahr 1781 keinen Planeten mehr. Am 13. März dieses Jahrs entdeckte Herschel zwischen den Hörnern des Stiers und den Füßen der Zwillinge, mit einem siebenfüßigen Teleskop einen Stern, welcher sich von den benachbarten Fixsternen durch einen merklichen scheinbaren Durchmesser unterschied. Er bemerkte nach einigen Tagen eine Veränderung seiner Lage gegen die Fixsterne. Der Stern rückte mit zunehmender Geschwindigkeit gegen Morgen nahe mit der Ekliptik parallel unter einer geringen nördlichen Breite fort, bis er im May in der Abenddämmerung unsichtbar wurde. In den ersten Tagen des Augusts erschien er wieder in der Morgendämmerung, er rückte immer langsamer gegen Morgen fort, ward zu Anfang des Oktobers stillstehend, fieng hierauf an mit zunehmender Geschwindigkeit, welche am 22. December bey seiner Opposition am grösten wurde, sich von Morgen gegen Abend zu bewegen, seine retrograde Bewegung wurde nach und nach langsamer, und er schien im März 1782 wiederum stille zu stehen.

Es können hier noch nicht die Methoden erklärt werden, welcher man sich bedient hat, um die Laufbahn dieses Sterns aus wenigen nicht sehr von einander entfernten Beobachtungen zu bestimmen. Man fand daß man seine scheinbaren Bewegungen, wie die der oberen Planeten, nahe durch eine wenig gegen die Ekliptik geneigte mit der Sonne concentrische kreisförmige Bahn darstellen könne, welche der Stern in einem Abstand von der Sonne, der 19mal grösser als der Abstand der Erde von der Sonne ist, in der Richtung von Abend gegen Morgen in einer Zeit von 83 Jahren durchlauft. Er gehört also zu den so genannten oberen Planeten. Gewöhnlich führt er den Namen Uranus.

§. 120. Wenn der Uranus vor seiner Opposition $103\frac{1}{2}$ Grade von der Sonne entfernt ist; so fängt er an, rückläufig zu werden, und er wird wieder rechtläufig, wenn er nach der Opposition nur noch $103\frac{1}{2}$ Grade von der Sonne absteht. Die Dauer seiner rückgängigen Bewegung ist von ungefähr 151 Tagen, und der ganze Bogen des Rückgangs beträgt $3\frac{1}{2}$ Grade. Seine mittlere synodische Umlaufszeit ist = 369 T. 15 St. 44 M. 40 S. und die siderische = 30688 T. 17 St. 6 M. 16 S. Der mittlere Abstand des Uranus von der Sonne verhält sich zu dem mittleren Abstand der Erde von der Sonne wie 19,1835050 : 1, der gröste wie 20,0836211 : 1, und der kleinste wie 18,2930399 : 1. Sein scheinbarer Durchmesser beträgt in seiner mittleren Entfernung von der Sonne oder von der Erde nur 3,9 Sekunden. Er gleicht ungefähr einem Fixstern der sechsten Größe, und ist daher noch mit dem bloßen Auge sichtbar.

§. 121. Zu der genaueren Bestimmung der Bahn dieses Planeten hat die von Bode gemachte Bemerkung sehr viel beygetragen, daß er zwar in früheren Zeiten von einigen Astronomen könnte beobachtet, aber seiner langsamen Bewegung und seiner geringen scheinbaren Größe wegen als ein Fixstern in die Verzeichniße eingetragen worden seyn. Er fand wirklich den Stern n. 964 in Tobias Mayers Verzeichniß nicht mehr am Himmel, und da Mayer diesen Stern am 25. Sept. 1756 auf der Göttinger Sternwarte im Meridian beobachtet hatte; so konnte man für diesen Zeitpunkt den scheinbaren Ort des Uranus mittelst der schon gefundenen Bestimmungsstücke seiner Bahn berechnen, welcher

cher mit dem beobachteten Stern so nahe zusammentraf, daß kein Zweifel über die Identität dieses Sterns mit dem neuen Planeten übrig blieb. Bode fand nachher, daß schon im Jahr 1690 Flamstead in Greenwich eben diesen Planeten beobachtet und unter n. 34. im Stier als einen Fixstern in sein Verzeichniß eingetragen hatte. Auch le Monnier in Paris hatte den Uranus im Jahr 1769 beobachtet, aber ebenfalls für einen Fixstern gehalten.

§. 122. Herschel hat in den Jahren 1787, 90 und 94 sechs Trabanten um den Uranus entdeckt, welche sich in beynahe auf der Ebene der Ekliptik senkrechten kreisförmigen Bahnen um diesen Planeten nach einer den Bewegungen der übrigen Himmelskörper entgegengesetzten Richtung, nemlich von Morgen gegen Abend bewegen. Den Neigungswinkel der Bahnen gegen die Ekliptik fand er = 89° 48′ ½. Diese Bahnen müßen also als gerade beynahe auf der Ekliptik senkrechte Linien erscheinen, wenn ihre erweiterte Ebene durch die Erde geht, hingegen nahe als Kreise, wenn die Erde 90 Grade von der Knotenlinie derselben absteht. Machten die Ebenen dieser Bahnen mit der Ebene der Ekliptik genau einen rechten Winkel; so würde man die Bewegung der Trabanten weder rechtläufig, noch rückläufig nennen können. Bey der senkrechten Lage der Bahnen geschieht also der Uebergang aus der einen Richtung der Bewegung in die entgegengesetzte blos durch die Veränderung des Neigungswinkels, und wenn die Trabanten von der Erde aus gesehen in der Richtung von Abend gegen Morgen um den Planeten ihre Umläufe zu machen scheinen; so werden sie sich von dem Planeten aus gesehen nach derselben Richtung bewegen, wenn der spitze Winkel, unter welchem der nördliche Theil der Ebene ihrer Bahnen gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist, von der Erde abgekehrt ist, aber nach der entgegengesetzten Richtung, oder von Morgen gegen Abend, wenn eben dieser Winkel seine Oefnung gegen die Erde kehrt.

Die Abstände der sechs Trabanten des Uranus von seinem Mittelpunkt in Halbmessern des Uranus ausgedrückt, und ihre siderischen Umlaufszeiten sind folgende:

		T.	St.	M.	S.
I.	13,120	5	21	25	20,6
II.	17,022	8	16	57	47,5
III.	19,845	10	23	3	59,0
IV.	22,752	13	10	56	29,8
V.	45,507	38	1	48	0
VI.	91,008	107	16	39	56

§. 123. In dem gegenwärtigen Jahrhundert sind noch vier neue Planeten entdeckt worden, welche die Namen Ceres, Pallas, Juno und Vesta erhalten haben. La Place *) nennt sie, weil sie nur durch Fernröhren gesehen werden können, teleskopische Planeten. Sie zeigen sich übrigens zuweilen als Sterne der fünften oder sechsten Größe. Piazzi in Palermo entdeckte die Ceres am 1. Januar 1801, Olbers in Bremen am 28. März 1802 die Pallas, Harding in Lilienthal am 1. Sept. 1804 die Juno, und wiederum Olbers am 29. März 1807 die Vesta. Diese vier Planeten kommen mit der Sonne in Opposition, und gehören daher zu den oberen Planeten. Ihre Bahnen sind von Prof. Gauß in Göttingen der kurzen seit ihrer Entdeckung verflossenen Zeit ungeachtet schon so genau bestimmt worden, daß man sie zu jeder Zeit am Himmel auffinden und von einander und den Fixsternen unterscheiden kann. Er hat seine Methoden, deren Anwendung auf diese vier neue Planeten ihre Brauchbarkeit an den Tag legt, in einem eigenen Werk ausführlich bekannt gemacht **).

Die mittleren Abstände von der Sonne und die tropischen Umlaufszeiten der vier neuen Planeten sind, wenn man den mittleren Abstand der Erde von der Sonne = 1 setzt, folgende:

*) Exposition du Système du Monde. III edit. Paris 1808.

**) Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium, auctore Carolo Friderico Gauss. Hamburgi. 1809.

	Abstände	trop. Uml. Zeiten.		
Ceres	2,76725	1681 T.	2 St.	27 M.
Pallas	2,76895	1682	15	36
Juno	2,66801	1581	12	6
Vesta	2,36208	1325	19	26

Die Bahnen der vier neuen Planeten fallen also zwischen die Bahnen des Mars und des Jupiters. Alle vier bewegen sich im Allgemeinen von Abend gegen Morgen, wie die übrigen Planeten, scheinen sich wie diese zuweilen, namentlich in ihrer Opposition, rückwarts zu bewegen, und haben ihre Stillstandspunkte. Die Pallas kann sich beträchtlich weiter als die übrigen Planeten von der Ekliptik entfernen, und man muß den Thierkreis (§. 82.) beträchtlich breiter machen, um sie zu fassen.

§. 124. Die Charaktere, womit die Sonne, die Erde, der Mond und die Planeten gewöhnlich bezeichnet werden, sind folgende:

Sonne ⊙	Merkur ☿	Ceres ⚳	Jupiter ♃
Erde ♁	Venus ♀	Pallas ⚴	Saturn ♄
Mond ☽	Mars ♂	Juno ⚵	Uranus ⛢
		Vesta ⚶	

§. 125. Man beobachtet sehr oft Sterne, welche, wie die Planeten ihre Lage gegen die Fixsterne verändern, anfangs kaum sichtbar sind, an Größe und Geschwindigkeit der Bewegung zunehmen, hernach wieder abnehmen, sich langsamer bewegen, und ehe sie einen vollen Umlauf am Himmel gemacht haben, wieder verschwinden. Diese Sterne, welche gewöhnlich in einen Nebel gehüllt sind, der sich zuweilen in einen hellen durchsichtigen Schweif, durch welchen man sehr kleine Fixsterne noch sehen kann, ausbreitet, scheinen sich, wie die Planeten, abwechslend vor und rückwarts zu bewegen, aber nicht wie diese nur in der Nähe der Ekliptik, sondern sie durchlaufen den Himmel nach allen möglichen Richtungen, und ihre Bewegungen sind nicht, wie die Bewegungen der Planeten, im Allgemeinen von Abend gegen Morgen gerichtet. Man beobachtet viele, welche sich nach der entgegengesetzten Richtung bewegen. Sie werden Cometen genannt, und haben mit den übrigen Sternen die tägliche Bewegung gemein, welches verbunden mit der Kleinheit ihrer Parallaxe beweißt, daß sie keine in der Atmosphäre der Erde erzeugte Meteore sind. Wenn sie sich dem unbewafneten Auge bereits entzogen haben, entdeckt man sie noch durch Fernröhren, mit deren Stärke die Zeit ihrer Sichtbarkeit wächst. Mithin muß ihre größere Entfernung von der Erde sie nach und nach unseren Augen entziehen, und ihre Bahnen müßen sich dadurch von den Bahnen der Planeten unterscheiden, daß ihre Abstände von der Sonne und der Erde sehr groß werden können, da hingegen die Planeten sich in beynahe kreisförmigen Bahnen um die Sonne oder die Erde bewegen. Die bey den sorgfältigsten Beobachtungen sich noch einschleichenden Fehler gestatten es nicht, aus dem kleinen Theil der Bahnen der Cometen, in welchem sie uns sichtbar sind, die ganze Bahn so genau zu bestimmen, daß man ihre Wiederkehr vorhersagen könnte. Aber die Bestimmung des kleinen Theils ihrer Bahnen, in welchem sie uns sichtbar sind, wird dazu dienen, sie von einander zu unterscheiden, und so ihre Umlaufszeit zu bestimmen. Man hat wirklich einen derselben schon eilfmal beobachtet, nemlich in den Jahren 1006, 1080, 1155, 1230, 1305, 1380, 1456, 1531, 1607, 1682 und 1759, welcher also eine Umlaufszeit von 75 bis 76 Jahren hat.

§. 186. Nehmen wir die in diesem Capitel gezeigten geometrischen Darstellungen der Bewegung der Planeten zusammen; so werden sie sich unter folgende Gesichtspunkte bringen lassen.

Wenn es erstlich nur darauf ankommt, die scheinbaren Bewegungen zu bestimmen, und nicht zugleich die Erscheinungen der verschiedenen Lichtgestalten des Merkurs, der Venus und des Mars, der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten und des Rings des Saturns, welche man erst seit der Erfindung der Fernröhren hat kennen gelernt, zu erklären; so bleibt die Entfernung dieser Planeten von der als ruhend angenommenen Erde unbestimmt. Man wird also um die in Ruhe befindliche Erde zuerst den Mond wegen seiner beträchtlichen Parallaxe in einer beynahe kreisförmigen Bahn sich bewegen lassen. Hierauf kommen der Merkur und die Venus in unbestimmten Entfernungen von der Erde, welche sich um diese in kreisförmigen Bahnen, aber nicht unmittelbar, sondern in Epicykeln bewegen, deren Mittelpunkte diese Bahnen so beschreiben, daß die von der Erde durch den Mittelpunkt des Epicykels gezogene gerade Linie beständig durch die Sonne geht, und deren Halbmesser zu den Halbmessern der Kreise, in welchen sich ihre Mittelpunkte um die Erde bewegen, ein durch die grösten Elongationen dieser Planeten von der Sonne gegebenes Verhältniß haben. (§. 83. 85.) Ptolemäus ließ auf den Mond zunächst den Merkur, hierauf die Venus folgen. Nun wird die Bahn der Sonne um die Erde kommen, alsdenn in unbestimmten Entfernungen die mit der Erde nahe concentrischen Bahnen der oberen Planeten, welche von diesen wiederum nicht unmittelbar, sondern durch Epicykel beschrieben werden, deren Mittelpunkte diese Kreise beschreiben, und es wird allein das Verhältniß des Halbmessers des Epicykels zu den Halbmessern des seinen Mittelpunkt fortführenden Kreises gegeben seyn. Alle diese Epicykel der oberen Planeten müßen so beschrieben werden, daß ihre an den Ort des Planeten gezogene Halbmesser mit dem an den gleichzeitigen Ort der Sonne gezogenen Halbmesser der Sonnenbahn parallel sind (§. 95. 102. 112.). Ptolemäus nahm die Halbmesser der Planetenbahnen desto grösser an, je grösser die Umlaufszeiten waren, und ließ daher auf die Sonne den Mars, hierauf den Jupiter und endlich den Saturn folgen. Diese Hypothese macht das ptolemäische System aus (Fig. 38.). Das sogenannte ägyptische System unterscheidet sich von dem ptolemäischen blos darinn, daß in demselben die Mittelpunkte der Epicykel des Merkurs und der Venus in den Mittelpunkt der Sonne selbst gesetzt werden, statt sie in unbestimmter Entfernung auf dem an die Sonne gezogenen Halbmesser ihrer Bahn um die Erde anzunehmen. Sollen aber in diesem System die zugleich oben erwähnten durch Fernröhren beobachteten Erscheinungen erklärt werden; so muß man, wie in dem ägyptischen System, die unteren Planeten ihre Epicykel um die Sonne beschreiben lassen (§. 84. 85.), und die Epicykel der oberen Planeten der Bahn der Sonne um die Erde gleich und ähnlich nehmen, wodurch das Verhältniß der Halbmesser ihrer Bahnen zu dem Halbmesser der Erdbahn bestimmt wird (§. 97. 106. 115.). Noch erhellet aus §. 89. daß man auch die Bewegungen der unteren Planeten auf eine ähnliche Art wie die der oberen darstellen kann, wie man ihre Epicykel der Sonnenbahn gleich und ähnlich nimmt, und die Mittelpunkte derselben um die ruhende Erde diejenige Bahnen beschreiben läßt, welche man vorher ihren Epicykeln angewiesen hatte. In diesem Fall werden die Bahnen der oberen und der unteren Planeten nach einerley Gesetz beschrieben werden.

§. 127. Man nehme zweytens die Sonne in Ruhe, und die Erde in Bewegung an; so wird die letztere eine der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde gleiche und ähnliche Bahn beschreiben (§. 87.). Um die ruhende Sonne wird sich zunächst der Merkur, in einem größeren Abstand die Venus, hierauf die Erde bewegen. Sodenn werden die Bahnen des Mars, der vier neuen Planeten, des Jupiters, des Saturns und des Uranus kommen (§. 98. 106. 115. 119. 123.), und alle diese Bahnen werden in der Richtung von Abend gegen Morgen in denjenigen Zeiten um die Sonne beschrieben werden, in welchen im ptolemäischen System die unteren Planeten ihre Epicykel durchliefen, die Mittelpunkte der Epicykel der oberen Planeten aber ihre Umläufe um die Erde vollendeten. Endlich werden der Mond um die Erde als Mittelpunkt, und die Trabanten des Jupiters, Saturns und Uranus um ihre Planeten sich in beynahe kreisförmigen Bahnen bewegen, und nur diese so genannte Nebenplaneten werden wirklich Epicykloiden beschreiben. In dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Bewegungen der Hauptplaneten wird sich ein großer Körper, die Sonne, befinden, von deren Mittelpunkt aus ihre Bahnen, ganz einfach als größte nahe in einer

Ebene liegende Kreise der Sphäre erscheinen werden. Diese Anordnung der Planetenbahnen und ihre Uebereinstimmung mit den Erscheinungen lehrte Nikolaus Copernicus in seinem um das Jahr 1530 vollendeten aber erst im Jahr 1543 zu Nürnberg gedruckten Werk (De orbium coelestium revolutionibus libri VI.), welche daher das copernicanische System heißt. Man sehe die 39ste Figur.

§. 128. Drittens nehme man wie in dem ptolemäischen System die Erde als unbeweglich an, und behalte die Bewegungen der unteren Planeten um die Sonne und dieser um die Erde bey, wie in dem ägyptischen System. Die oberen Planeten kann man ebenfalls um die Sonne sich bewegen, und dieselbe Bahnen um sie beschreiben lassen, welche man in dem copernicanischen System angenommen hatte (§. 96. 106. 115.). Bey dieser Anordnung wird sich zunächst um die Erde der Mond, und um eben diese in einer nahe vierhundertmal größeren Entfernung (§. 50. 63.) die Sonne bewegen, um welche die Planeten ihre Bahnen wie in dem copernicanischen System beschreiben werden. Endlich werden die Jupiters- und Saturnstrabanten um ihre Hauptplaneten die in eben diesem System angenommenen Bahnen beschreiben, und man wird das tychonische System haben (Fig. 40.), welches Tycho de Brahe in seiner Schrift De mundi ætherei recentioribus phænomenis L. II. Uranib. 1588. aufgestellt hat. In diesem System sind also die Bahnen der Planeten in Beziehung auf die Fixsterne Epicykloiden (§. 88.), wie in dem ptolemäischen System, es ist aber einfacher als dieses, und es kommen hier keine Bewegungen von geometrischen Punkten, und von Körpern um diese Punkte mehr vor, weswegen es, wenn von den wahren Bewegungen, und nicht blos von einer zu ihrer Berechnung dienenden geometrischen Hypothese oder Construktion die Rede ist, dem ptolemäischen vorzuziehen seyn wird. Tycho hat von dem copernicanischen System, welches sich durch seine Einfachheit empfehlen mußte, so viel beybehalten, als ihm einige buchstäblich erklärte Stellen der heiligen Schrift zu erlauben schienen.

§. 129. Aus jeder der drey Hypothesen über die Anordnung der Planetenbahnen ergeben sich, wie in diesem Capitel gezeigt worden ist, dieselben scheinbaren Bewegungen der Planeten in Beziehung auf die Fixsterne, und selbst die im 126ten §. erwähnte nur durch Fernröhren bemerkbare Erscheinungen, welche Ptolemäus noch nicht kannte, lassen sich ebenfalls in seinem System erklären, wenn man den von ihm angenommenen Bahnen und Epicykeln die §. 126. bestimmte Größe giebt. Nun bleiben aber noch die allen Himmelskörpern gemeinschaftliche tägliche Bewegungen übrig, von welchen im ersten Capitel (§. 25. und 26.) gezeigt worden ist, daß sie sich aus einer gleichförmigen Umdrehung der scheinbaren Himmelskugel von Morgen gegen Abend um eine unbewegliche durch den Mittelpunkt der Erde gehende Axe erklären lassen. Wollte man annehmen, diese Umdrehung finde wirklich Statt, so würde man die Sonne samt allen Planeten und Trabanten mit Beybehaltung ihrer relativen Bewegungen in jedem der drey Systeme täglich einen Umlauf um die Erde müssen machen lassen. Weit einfacher erklären sich aber diese Erscheinungen, wenn man annimmt, die Erde drehe sich in der Richtung von Abend gegen Morgen um eine mit der Axe der Himmelskugel zusammenfallende oder parallele Axe mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit während eines Sterntags. Unter dieser Voraussetzung werden die Sterne ihre täglichen Bewegungen mit den Beobachtungen übereinstimmend von Morgen gegen Abend zu machen scheinen, und die Sonne, welche scheinbar oder wirklich in Beziehung auf die Fixsterne von Abend gegen Morgen fortrückt, wird mit jedem Tag, weil sich die Erde vermöge der Voraussetzung nach derselben Richtung um ihre Axe dreht, später als die Fixsterne in den Meridian kommen. In dem ptolemäischen und tychonischen System wird nun die Axe der Erde unbeweglich angenommen werden müssen, welche Veränderung Longomontan *) mit dem tychonischen System vorgenommen hat. In dem copernicanischen System hingegen wird sich die Erde während ihrer Bewegung um die Sonne, um eine sich

*) Astronomia Danica. Amst. 1622.

selbst immer nahe parallel bleibende und mit ihr zugleich fortrückende Axe umdrehen müssen, welche Bewegungen Copernicus auch wirklich angenommen hat. Alsdenn wird aber ihre Umdrehungsaxe bey ihrer Bewegung um die Sonne nach und nach verschiedenen Fixsternen entsprechen, und wenn die Verlängerung derselben bey einer gewißen Lage der Erde genau auf einen Fixstern traf; so wird dieses nach einiger Zeit nicht mehr Statt finden und erst alsdenn wieder zutreffen, wenn die Erde in denselben Punkt ihrer Bahn zurückgekommen ist. Vielleicht sind aber die Fixsterne so weit von uns entfernt, daß diese Abweichungen unbemerkbar sind, und unter dieser Voraussetzung wird das copernicanische System ebenfalls mit den Erscheinungen übereinstimmen, welches neben einer einfacheren Erklärung derselben auch noch die Analogie für sich hat. Denn es ist in diesem Capitel gezeigt worden, daß diejenige Planeten sich nach derselben Richtung um ihre Axen drehen, nach welcher sie um die Sonne laufen, an welchen es noch möglich war, diese Bewegung zu bemerken, nur die Umdrehungszeit des Uranus und der vier neuen Planeten ist noch unbekannt. Ihre Umdrehungsaxen bleiben sich während ihrer Bewegungen um die Sonne, so weit die Beobachtungen reichen, nahe parallel, und sind bey einigen gegen die Ebene ihrer Bahnen geneigt, welches auch bey der Erde wird angenommen werden müssen, weil der Pol des Aequators von dem Pol der Ekliptik um die Schiefe der Ekliptik absteht. Endlich wird sich das Zurückweichen der Aequinoktialpunkte (§. 37.) ergeben, wenn man die Erdaxe nicht sich beständig parallel bleiben läßt, sondern annimmt, sie beschreibe die Oberfläche eines auf der Ekliptik senkrecht stehenden Kegels, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Erde fällt, und dessen Seitenlinien gegen seine Axe um die Schiefe der Ekliptik geneigt sind, in derselben Zeit und nach derselben Richtung, welche man bey der scheinbaren Bewegung der Aequinoktialpunkte gefunden hat. An dem Mond haben wir ein Beyspiel einer ähnlichen Bewegung, dessen gegen die Ekliptik und gegen seine Bahn geneigte Umdrehungsaxe sich nicht parallel bleibt, sondern in derselben Zeit einen Umlauf von Morgen gegen Abend macht, in welcher sein Knoten einen Umlauf vollendet (§. 80.).

Nun fragt es sich: welche unter den verschiedenen Bewegungen, aus denen man sich die scheinbaren Bewegungen der Himmelskörper zusammengesetzt denken kann, sind die wahren, und welche sind blos scheinbar? Lassen sich wirklich alle Erscheinungen der täglichen Bewegung, die Abwechslungen der Jahrszeiten, des scheinbaren Laufs der Sonne u. s. w. aus der Umdrehung der Erde um ihre Axe und ihrer Bewegung um die Sonne vollständig erklären? Welches ist die wahre Gestalt der Planetenbahnen, und nach welchen Gesetzen werden sie beschrieben? Die theorische Astronomie beschäftigt sich mit der Beantwortung dieser Fragen, welche den Gegenstand des zweyten Buchs ausmachen wird.

Zweytes Buch.

Von den wahren Bewegungen der Himmelskörper.

Erstes Capitel.

Von der Gestalt und Größe der Erde.

§. 130. Daß die Erde eine beynahe kugelförmige Gestalt habe, ist schon aus dem 9ten §. bekannt. Aber man wird jetzt ihre Gestalt und Größe genauer bestimmen müssen, ohne deren Kenntniß es nicht möglich ist, die an verschiedenen Punkten ihrer Oberfläche angestellten Beobachtungen auf einen gemeinschaftlichen Standpunkt zu reduciren, welchen man in dem Mittelpunkt der Erde annimmt. In diesem Punkt laufen die auf der Oberfläche der Erde senkrechte Richtungen der Schwere nur unter der Voraussetzung einer genauen Kugelgestalt zusammen, in anderen Fällen hingegen nicht, und man wird bestimmen müßen, welche Winkel die verschiedenen Halbmesser der Erde mit den Richtungen der Schwere machen. Sodenn werden auch ihre Abmessungen in einem bekannten Längenmaas zu der Bestimmung der Größe und Entfernungen der Himmelskörper in eben diesem Maas dienen, deren Verhältniße zu einander in dem ersten Buch gefunden worden sind. Da man z. B. das Verhältniß des Abstands des Monds von der Erde zu dem Halbmesser des Erdäquators kommt (§. 63.); so wird man seinen Abstand von der Erde nach dem pariser Fuß angeben können, wenn man die Anzahl pariser Fuß kennt, welche auf den Halbmesser des Aequators der Erde gehen. Und da die unter dem Aequator Statt findende Horizontalparallaxe des Monds der scheinbaren Größe des aus dem Mond gesehenen Halbmessers des Erdäquators gleich ist, und der scheinbare Halbmesser des Monds durch Beobachtungen gefunden wird; so kennt man das Verhältniß der wahren Halbmesser (§. 49. n. 6.), mithin den Halbmesser des Monds, wenn der Halbmesser des Erdäquators gegeben ist.

§. 131. Die Bestimmung der Größe der Erde wird sich unter der Voraussetzung einer genauen Kugelgestalt auf die Auflösung folgender zwey Aufgaben zurückführen lassen: Erstlich einen Theil des Umfangs der Erde, z. B. einen Bogen eines Meridians der Erde zu messen, und zweytens den Winkel zu finden, unter welchem die an die Endpunkte dieses Bogens gezogenen Halbmesser der Erde sich schneiden. Dieser Winkel wird sich verhalten zu 360 Gr. wie der gemessene Bogen zu dem Umfang der Erde (VI, 33.), woraus mittelst des bekannten Verhältnißes des Umfangs eines Kreises zu seinem Halbmesser der Erdhalbmesser gefunden wird. Die Auflösung der ersteren Aufgabe erfordert geometrische Operationen auf der Oberfläche der Erde, bey welchen man auf die Erhöhungen der verschiedenen Standpunkte über die erweiterte Oberfläche der See Rücksicht zu nehmen hat, um denjenigen Bogen zu finden, den man erhalten haben würde, wenn die Meßungen unmittelbar auf der erweiterten Oberfläche der See wären vorgenommen worden. Die zweyte Aufgabe kann nur durch astronomische Beobachtungen, und am einfachsten in demjenigen Fall aufgelößt werden, wenn der gemeßene Bogen ein Stück eines Meridians der Erde ist. Es seyen a, b (Fig. 41.) zwey unter einerley Meridian liegende Orte der Oberfläche der Erde, und faz, fbv die in dem Punkt f zusammenlaufenden Richtungen der Schwere an diesen Orten. Man beobachte in a und b die Abstände zas, vbs' eines gewißen Fixsterns von den Scheiteln z und v, wenn er durch den Meridian geht; so werden fb, fa, bs' und as in einer Ebene liegen. In dieser Ebene sey bz' mit az parallel gezogen. Da die Linien as und bs' nicht bemerkbar von der parallelen Lage abweichen (§. 25.); so wird $zas = z'bs'$, und $vbs' - zas = vbs' - z'bs' = vbz' = bfa$ seyn. Demnach ist der Winkel, unter welchem die an die Endpunkte a, b des Bogens ab eines Erdmeridians gezogenen Vertikallinien faz, *fbv* sich schneiden, dem Unterschied der an diesen Punkten beobachteten Zenithdistanzen eines und desselben Fixsterns gleich, wenn, wie im Fall der Figur, beyde Zenithdistanzen auf einerley Seite der zwey Scheitelpunkte *z* und *v* liegen. Im entgegengesetzten Fall verwandelt sich die Differenz der Zenithdistanzen in ihre Summe. Nun wird sich verhalten *afb* : 180° = *ab* : halben Umfang des Erdmeridians, und, wenn der Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser wie $\pi : 1$ sich verhält; so wird der Halbmesser *af* oder *bf* der Erde = $\frac{180}{\pi} \cdot \frac{ab}{afb}$ seyn.

§. 132. Eben diese Meßungen dienen aber auch zugleich zu der Bestimmung der Gestalt der Erde. Wenn man an andern Orten der Erde ähnliche Untersuchungen anstellt, und immer gleich große Halbmesser herauskommen, oder wenigstens ihre Unterschiede nicht größer sind, als die Fehler, welchen man bey diesen Meßungen ausgesetzt ist; so wird die Erde sehr nahe kugelförmig seyn. Findet man hingegen größere Unterschiede, und nehmen die auf diesem Weg gefundenen Halbmesser von dem Aequator an bis zu dem Pol beständig zu; so wird die Erde unter dem Aequator nach der Richtung des Meridians stärker gekrümmt seyn, als unter den Polen, und der Durchmesser ihres Aequators wird ihre Axe übertreffen. Nehmen hingegen jene Halbmesser von dem Aequator an bis zu dem Pol beständig ab; so wird der Durchmesser des Aequators kleiner seyn, als die Erdaxe. Um dieses zu zeigen, sey *ap* ein Quadrant des Erdmeridians, *a* ein Punkt des Aequators, und es seyen die Bogen *ab*, *bd de*, *ep* desselben gemeßen; so werden vermöge der im vorhergehenden §. angezeigten Art der Meßung und Berechnung die Richtungen *af*, *bf*, *dg*, *eh*, *pk* der Schwere auf den an die Punkte *a*, *b*, *d*, *e*, *p* dieser Bogen gezogenen Tangenten senkrecht seyn. Aus dem Bogen *ab* ergebe sich der Halbmesser *af*, aus dem Bogen *bd* ein größerer Halbmesser *bg*, und *g* sey der Mittelpunkt des als kreisförmig angenommenen Bogens *bd*, welcher auf der Verlängerung von *bf* liegen wird (III, 19.), weil vermöge der Voraussetzung ab und bd in b eine gemeinschaftliche Tangente haben. Eben so seyen dh oder he, ek oder pk die aus den Bogen de, ep gefundenen Halbmesser, $pk > he$, und h, k die Mittelpunkte der Bogen de, ep. Die Verlängerung von af schneide die dg, he, pk in den Punkten l, m, c. Nun ist (I, 20.) $fg < fl + lg$

mithin $fg + gh < fl + lh$

und um so mehr $< fl + lm + mh$

$fg + gh + hk < fl + lm + mk$

um so mehr $< fl + lm + mc + ck$

oder $fg + gh + hk < fc + ck$.

Es ist aber

$$pk = ek = \left\{ \begin{matrix} eh \\ dh \end{matrix} \right\} + hk = \left\{ \begin{matrix} dg \\ bg \end{matrix} \right\} + gh + hk = \left\{ \begin{matrix} bf \\ af \end{matrix} \right\} + fg + gh + hk.$$

folglich ist $\left. \begin{matrix} pk \\ pc + ck \end{matrix} \right\} < af + fc + ck$

und $pc < ac$.

Wenn aber die Halbmesser der verschiedenen Bogen des Meridians von dem Aequator an bis zu dem Pol abnehmen; so nehme man den Punkt p unter dem Aequator, folglich a als Pol an, und es wird wie vorhin folgen, daß $pc < ac$.

§. 133. Weil der einem beliebigen Bogen ab des Erdmeridians zugehörige Halbmesser $af = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{ab}{afb}$ ist; so verhalten sich diese Halbmesser, wenn die den Endpunkten der Bogen entsprechende Richtungen der Schwere gleiche Winkel mit einander machen, wie die Längen der Bogen. Nun kann man aus der Länge ab eines Bogens und dem ihm zugehörigen Winkel afb diejenige Länge desselben finden, welche einem Winkel von 1 Grad entspricht, wenn man die Länge des gemeßenen Bogens ab mit der Anzahl der auf den Winkel afb gehenden Grade dividirt. Man nennt diese Bogen des Erdmeridians, welche einem Winkel der an ihre Endpunkte gehenden Vertikallinien von einem Grad entsprechen, oder um welche man in der Richtung des Meridians fortgehen muß, bis sich die Polhöhe oder die geographische Breite um einen Grad verändert, nach der Analogie des Kreises Grade des Erdmeridians, und die zur Bestimmung dieser Grade angestellten Meßungen Gradmeßungen. Aus der Vergleichung der unter verschiedenen Breiten gemeßenen Grade eines Erdmeridians wird sich also leicht ergeben, ob der Durchmesser des Aequators der Erde größer oder kleiner ist, als ihre Axe. Wenn nemlich diese Grade von dem Aequator an bis zu dem Pol wachsen; so wird der Durchmesser des Aequators größer, und wenn sie beständig abnehmen kleiner seyn als die Erdaxe. Und wenn unter verschiedenen geographischen Längen die unter gleichen nördlichen oder südlichen Breiten gemeßenen Grade einander gleich gefunden werden; so werden alle Meridiane der Erde einander gleich und ähnlich, und die Erde wird ein Körper seyn, welcher durch die Umdrehung eines dieser Meridiane um die Erdaxe beschrieben, und durch den Aequator in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird.

Da $pk = af + fg + gh + hk$ (§. 132.); so wird, wenn man sich in dem Punkt k das eine Ende eines Fadens, dessen Länge $= pk$, befestigt, und diesen auf die gebrochene Linie $fghk$ aufgewickelt denkt, sein nach der Richtung fa ausgespanntes Stück mit seinem Ende in den Punkt a treffen. Wird nun dieser Faden, indem man ihn beständig gespannt erhält, nach und nach von der gebrochenen Linie $fghk$ abgewickelt; so wird sein bewegliches Ende zuerst den Kreisbogen ab, hernach den Kreisbogen bd, sodenn den Kreisbogen de u. s. w. beschreiben, weil von a bis b der abgewickelte Theil des Fadens $= af$, von b bis $d = fg$, von d bis $e = dh$ u. s. w. ist. Man lasse die gebrochene Linie $fghk$ in eine stetig krumme Linie übergehen, welche die Linien ac und pk berühre; so werden sich die Halbmesser der Kreisbogen stetig ändern, und es wird nun durch das Ende des Fadens eine stetig krumme Linie beschrieben werden, von welcher kein Theil mit einem Kreisbogen genau zusammenfällt, welche aber in jedem ihrer Punkte der Krümmung desjenigen Kreises am nächsten kommen wird, dessen Mittelpunkt in den von dem Faden berührten Punkt der krummen Linie fällt, von welcher der Faden abgewickelt wird, und dessen Halbmesser dem abgewickelten Theil des

Fadens, oder der zwischen jenem Berührungspunkt und dem Erdmeridian liegenden geraden Linie gleich ist. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis (circulus curvaturæ, circulus osculator) der krummen Linie, sein Halbmesser heißt der Krümmungshalbmesser (radius curvaturæ sive osculi), welchem die nach der Regel des 132ten §. gefundenen Halbmesser desto näher kommen werden, je kleiner die Bogen des Erdmeridians sind, aus welchen man sie ableitet. Auf der andern Seite dürfen aber auch diese Bogen nicht zu klein genommen werden, damit die in der Bestimmung des Unterschieds der Polhöhen begangenen Fehler keinen zu großen Einfluß auf die Krümmungshalbmesser haben.

§. 134. Es würde sehr beschwerlich, und in manchen Gegenden unmöglich seyn, so große Stück eines Erdmeridians unmittelbar zu messen. Es ist viel einfacher und genauer, nach der von Snellius zuerst gebrauchten Methode *) die in der Nähe des zu meßenden Bogens liegende, sich auszeichnende oder durch besondere Signale in der Ferne sichtbar gemachte Punkte durch eine Reihe von Dreyecken so mit einander zu verbinden, daß jedes dieser Dreyecke mit dem nächstfolgenden eine Seite gemeinschaftlich hat. Alsdenn wird man nur eine Seite dieser Dreyecke und ihre Winkel zu messen haben, um die Seiten der übrigen Dreyecke berechnen zu können. Mißt man ferner den Winkel, welchen eine der Seiten dieser Dreyecke mit dem Meridian macht; so wird man mittelst der bekannten Seiten der Dreyecke und dieses Winkels die Länge des zu meßenden Bogens des Meridians durch Rechnung herleiten können. Es sey nemlich *AM* (Fig. 42.) ein Bogen eines Meridians der Erde, *A*, *B*, *C*, *D*, u. s. w. seyen auf diesem Meridian oder in seiner Nähe liegende Punkte, welche durch die gerade Linien *AB*, *BC*, *AC* u. s. w. mit einander verbunden seyen, und eine Reihe an einander hängender Dreyecke bilden.

*) Eratosthenes Batavus s. de terræ ambitus vera quantitate. Lugd. Bat. 1617.

den. Man messe eine Seite BC dieser Dreyecke, und die Winkel so wohl des Dreyecks ABC, als aller übrigen; so findet man aus der Basis BC und den Winkeln die Seiten AB, AC. Eben so in dem Dreyeck BCD aus der Seite BC die Seiten BD, CD. In dem anliegenden Dreyeck CDE kennt man wiederum eine Seite CD, und die Winkel, woraus sich die Seiten DE und EC ergeben. Endlich findet man in dem Dreyeck EDF aus der nun bekannten Seite DE und den Winkeln die Seiten DF und FE. Mithin werden die geraden Linien, aus welchen die gebrochene Linie $ACEF$ zusammengesetzt ist, und die Winkel ACE, CEF, welche sie mit einander machen, durch die gemeßene Winkel der Dreyecke gegeben seyn. Man beobachte noch den Winkel CAM, welchen die Seite CA mit der an dem Ort A gezogenen Mittagslinie AM macht, fälle von C, E und F die Perpendickel Cc, Ee, Ff auf AM, und ziehe durch die Punkte C und E die Parallelen Cg, Eh mit AM, welche den wo nöthig verlängerten Perpendikeln Ee, Ff in g und h begegnen. Da man in dem bey c rechtwinklichten Dreyeck ACc den Winkel CAc und seine Hypotenuse AC kennt; so kann man die Seite Ac finden. Nun macht der Winkel gCA mit dem gegebenen CAM zwey rechte Winkel, und der Winkel ACE ist durch die Winkel der Dreyecke gegeben; folglich kennt man ihren Unterschied gCE. Man kann also die Seite Cg oder die ihr gleiche ce durch die Auflösung des bey g rechtwinklichten Dreyecks CEg finden. Endlich ist der Winkel $CEh = 2R - gCE$, und der Winkel CEF ist gegeben; folglich kennt man den Winkel FEh des rechtwinklichten Dreyecks FEh, dessen Hypotenuse ebenfalls gegeben ist, und kann daher hE oder die ihr gleiche ef finden. Aus diesen Stücken des zu meßenden Bogens ergiebt sich nun der Bogen $Af = Ac + ce + ef$, und die Meßung kann auf ähnliche Art weiter fortgesetzt werden, wobey man nichts als Winkel von Dreyecken zu meßen hat.

§. 135. Picard, welcher nach dieser von Snellius gezeigten Methode die erste genauere Meßung eines Bogens des durch die pariser Sternwarte gezogenen Meridians zwischen Paris und Amiens mit vollkommeneren Hülfsmitteln im Jahr 1669 unternahm, fand den zwischen seinem nördlichsten und südlichsten Standpunkt liegenden Bogen = 78850 Toisen (jede zu 6 pariser Fuß), und durch astronomische Beobachtungen ergab sich der Unterschied der Polhöhen der zwey Endpunkte des Bogens = 1° 22′ 55″. Hienach wäre in dieser Gegend ein Grad des Meridians = 57057 Toisen. In den Jahren 1683, 1700 und 1718 wurden diese Meßungen durch die beyden Cassini und Maraldi wiederholt, und durch ganz Frankreich fortgesetzt. Es ergab sich die Entfernung von der Sternwarte bis an den Parallelkreis von Collioure an der spanischen Gränze = 360614 Toisen, der Unterschied der Polhöhen = 6° 18′ 57″, und die Länge eines Grads = 57097 Toisen. Ferner fand man Dünkirchen um 125454 T. nördlicher als die pariser Sternwarte, und den Unterschied der Polhöhen = 2° 12′ 9″,5, woraus die Größe eines Grads = 56960 sich ergiebt. Hienach müßte die Erdaxe größer seyn als der Durchmesser des Aequators (§. 133.) Allein andere Gründe, von welchen in der Folge die Rede seyn wird, machten es gewiß, daß die Erde eine unter den Polen zusammengedrückte Gestalt haben müße, und da schon diesen Meßungen nach zu urtheilen ihre Gestalt nicht beträchtlich von einer Kugel verschieden seyn, mithin leicht die Fehler der Meßungen größer werden konnten, als die Unterschiede dieser nicht sehr weit von einander entfernt liegenden Grade; so war es nöthig, zwey Grade, den einen so nahe als möglich bey dem Pol, den andern unter dem Aequator zu messen. Bouguer, de la Condamine, Godin, Jussieu und Couplet begaben sich nach Peru; Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, Outhier und Celsius nach Lappland. Die letzteren vollendeten ihre Meßungen unter dem Polarkreis in den Jahren 1736 und 1737, nach welchen Maupertuis den Grad unter 66° 19′ Breite auf 57438 Toisen setzte. La Place brachte, indem er ein Mittel aus den verschiedenen Reihe von Dreyecken, und auf die Refraktion Rücksicht nahm, 57405 T. heraus. Die Gradmeßung unter dem Aequator wurde im Jahr 1741 vollendet. Nach Bouguer's Angabe ist ein

Grad des Meridians unter dem Aequator = 56753 T. mithin um 652 T. kleiner als der Grad unter dem Polarkreis. Die unter den Polen zusammengedrückte oder abgeplattete Gestalt der Erde war also erwiesen. Seit dieser Zeit sind in verschiedenen Ländern mehrere Grade gemeßen worden, und insbesondere haben Mechain und Delambre einen Bogen des pariser Meridians zwischen Dünkirchen und Barcelona 1792 und in den folgenden Jahren mit einer großen Genauigkeit gemeßen. Die Resultate dieser Meßungen sind, wenn man unter einer Toise diejenige Länge versteht, welche die zu der Gradmeßung in Peru gebrauchte eiserne Toise bey einer Temperatur von + 13 *R* hat, folgende:

beobachtete Polhöhen.				Bogen des Meridians zwischen Montjouy und	Tois.
Montjouy .	41°	21′	44″,96		
Carcassonne .	43	12	54,30	Carcassonne	105498,96
Evaux . . .	46	10	42,54	Evaux	274348,06
Pantheon in Paris	48	50	49,37	Pantheon	426639,54
Dünkirchen . .	51	2	9,20	Dünkirchen	551584,72

Auch die Gradmeßung unter dem Polarkreis ist in den Jahren 1801, 2 und 3 durch Svanberg wiederholt worden. Dieser fand die Größe eines Grads unter einer Breite von 66° 20′ = 57188,42 Toisen, also um 216 Toisen kleiner, als ihn Maupertuis in eben dieser Gegend gefunden hatte, doch noch immer um 435,42 Tois. größer, als den Grad unter dem Aequator. Wenn man bedenkt, daß diesen Größen der Grade des Erdmeridians zufolge ein Fehler von 1 Sekunde in der Differenz der Polhöhen an den zwey Endpunkten eines Grads beynahe einen Fehler von 16 Tois. in der Länge des Grads hervorbringt, und die bey der ersten lappländischen Gradmeßung gebrauchte lästige Instrumente über hohe Berge geschleppt werden mußten, ferner, daß diese Meßungen in einem sehr kalten Clima angestellt wurden; so wird man sich die Abweichungen der zwey Meßungen von einander einigermaßen erklären können.

Bey allen diesen Meßungen bleibt noch immer einige Ungewißheit wegen der nicht genau bekannten Stralenbrechung, welche auf den Unterschied der Polhöhen Einfluß hat, und wegen der durch die Veränderung der Temperatur geänderten Länge der Meßstangen übrig, woher es kommt, daß man verschiedene Angaben der aus einerley Meßung abgeleiteten Grade bey verschiedenen Schriftstellern findet. Die folgende Tafel zeigt die unter verschiedenen Polhöhen gemeßenen Grade, unter welchen die in Frankreich und Lappland gemeßenen diejenige sind, welche sich aus den neuesten Meßungen ergeben haben.

	mittlere Breiten.			Grade.
Peru	0°	0'		56753 Tois.
Ostindien, a.	12	5		56761
——— b.	13	18		56726
Cap	33	18	südl.	57037
Pensylvanien	39	12		56888
Italien	43	1		56979
Frankreich	46	11	57"	57020,77
Oestreich	47	47		57066
England	52	2	20	57068,7
Lappland	66	20	10	57188,42

§. 136. Aus der Vergleichung dieser Grade ergiebt sich, daß, wie schon oben bemerkt worden, die Erde von der Kugelgestalt, aber nicht sehr beträchtlich, abweicht. Legt man den in Frankreich gemeßenen Grad zum Grund, und nimmt fürs erste die Erde kugelförmig an; so wird ihr halber Umfang = 57020,77 . 180 = 10263738,6 Tois. und ihr Halbmesser = 3266842 T.

Ferner sieht man, daß die Grade von dem Aequator an gegen die Pole hin abnehmen, wenn die ihnen entsprechende Breiten beträchtlich von einander verschieden sind, dazwischen hinein aber einige Grade bey zunehmender Breite abnehmen, welches anzuzeigen scheint, daß die Erde kein regulärer Körper ist. Der auf dem Cap gemeßene Grad ist größer als die unter größeren Breiten in Pensylvanien, Italien und Frankreich gemeßenen Grade, und daher scheint die südliche Hälfte der Erde der nördlichen nicht ähnlich zu seyn, wenn anders diese Abweichungen nicht von

Fehlern der Meßungen herrühren. Indessen kann man eine reguläre krumme Linie suchen, welche durch zwey auf einander senkrechte Durchmesser in vier gleiche und ähnliche Theile getheilt wird, und der Gestalt eines Meridians der Erde wenigstens nahe kommt. Die Ellipse hat die erstere dieser Eigenschaften, und wenn sich diese um ihre kleine Axe dreht; so wird ein runder, unter den Polen der Umdrehungsaxe zusammengedrückter Körper beschrieben, welcher mit der Gestalt der Erde einige Aehnlichkeit hat. Zwey unter verschiedenen Breiten gemeßene Grade sind hinreichend, unter dieser Voraussetzung die große und kleine Axe eines elliptischen Meridians der Erde, oder die Erdaxe und den Durchmesser des Aequators zu bestimmen. Dividirt man den Ueberschuß des Halbmessers des Aequators über die halbe Erdaxe mit dem Halbmesser des Aequators; so erhält man die so genannte Abplattung der Erde. Aus den gefundenen Abmeßungen eines Meridians kann man hernach die Größe der Grade unter anderen Breiten berechnen, deren Vergleichung mit den wirklich gemeßenen die Abweichung eines Erdmeridians von der elliptischen Gestalt zeigen wird.

§. 137. Es sey AMB (Fig. 43.) ein elliptischer Quadrant, die halbe große Axe $CA = a$, die halbe kleine Axe $CB = b$, CM ein an den Punkt M gehender Halbmesser der Ellipse, MN eine Normallinie an M, und MP auf CA senkrecht. Die Normallinie MN wird auf der Oberfläche des durch die Umdrehung der Figur um die Axe CB beschriebenen halben elliptischen Sphäroids senkrecht, und daher die Richtung der Schwere auf demselben seyn. Die gerade Linie CA wird die Ebene des Aequators beschreiben; folglich der Winkel ANM die geographische Breite des Orts M seyn, welche mit l bezeichnet werde, und ACM sey $= l'$. Vermöge der Eigenschaften der Ellipse wird sich verhalten

$$CP \quad PN = \overline{CA}^2 \quad \overline{CB}^2 = a^2 \quad b^2.$$

Aber $CP \quad PN = \text{Tang. } PMC \quad \text{Tang. } PMN$
$= \text{Cotg. } ACM \quad \text{Cotg. } ANM;$

folglich 1.)
$$\left.\begin{array}{l} \text{Cotg. } ACM : \text{Cotg. } ANM \\ \text{Cotg. } l' : \text{Cotg. } l \\ \text{Tg. } l : \text{Tg. } l' \end{array}\right\} = a^2 \quad b$$

Mithin ist $a^2\,\text{Tg.}\,l' = b^2\,\text{Tg.}\,l$

$$\left.\begin{matrix} a^4(1+\overline{\text{Tg.}\,l'}^2) \\ a^4\overline{\text{Sec.}\,l'}^2 \end{matrix}\right\} = a^4 + b^4\,\overline{\text{Tg.}\,l}^2$$

$$\overline{\text{Sec.}\,l'}^2 = \frac{a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2 + b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2}{a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2}$$

oder 2.) $\overline{\text{Cos.}\,l'}^2 = \dfrac{a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2}{a^4\text{Cos.}\,l^2 + b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2}$,

und weil $b^2\text{Cotg.}\,l' = a^2\text{Cotg.}\,l$ (n. 1.);

so ist $\left.\begin{matrix} b^4(1+\overline{\text{Cotg.}\,l'}^2) \\ b^4\overline{\text{Cosec.}\,l'}^2 \end{matrix}\right\} = b^4 + a^4\overline{\text{Cotg.}\,l}^2$

$$\overline{\text{Cosec.}\,l'}^2 = \frac{b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2 + a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2}{b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2};$$

also 3.) $\overline{\text{Sin.}\,l'}^2 = \dfrac{b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2}{b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2 + a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2}$.

Ferner ist vermöge der Eigenschaften der Ellipse

$$\overline{PM}^2 = \overline{CB}^2 - \frac{\overline{CB}^2}{\overline{CA}^2}\,\overline{CP}^2$$

oder, wenn man zur Abkürzung den Halbmesser $CM = Z$ setzt,

$$Z^2\overline{\text{Sin.}\,l'}^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,Z^2\overline{\text{Cos.}\,l'}^2$$

und $Z^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\overline{\text{Sin.}\,l'}^2 + b^2\overline{\text{Cos.}\,l'}^2}$,

woraus man mittelst der Ausdrücke n. 2. und 3. erhält

$$4.)\ \left.\begin{matrix} Z^2 \\ \overline{CM}^2 \end{matrix}\right\} = \frac{b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2 + a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2}{b^2\overline{\text{Sin.}\,l}^2 + a^2\overline{\text{Cos.}\,l}^2}.$$

Sodenn verhält sich in dem Dreyeck CMN

$$CM : MN = \text{Sin.}\ CNM : \text{Sin.}\ NCM = \text{Sin.}\,l : \text{Sin.}\,l';$$

daher ist $\overline{MN}^2 = \dfrac{\overline{CM}^2\ \overline{\text{Sin.}\,l'}^2}{\overline{\text{Sin.}\,l}^2}$

$$= \frac{b^4\overline{CM}^2}{b^4\overline{\text{Sin.}\,l}^2 + a^4\overline{\text{Cos.}\,l}^2},\ \text{(n. 3.)}$$

$$= \frac{b^4}{b^2\overline{\text{Sin.}\,l}^2 + a^2\overline{\text{Cos.}\,l}^2},\ \text{(n. 4.)}$$

$$= \frac{b^4}{a^2 - (a^2 - b^2)\ \overline{\text{Sin.}\ l}^2},$$

oder, wenn man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, und den halben Parameter der großen Axe $= p$ setzt,

$$5.)\ \overline{MN}^2 = \frac{p^2}{1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ l}^2}.$$

Nun verhält sich aber der Krümmungshalbmesser der Ellipse an dem Punkt M zu der Normallinie $MN = \overline{MN}^2 : p^2$ (Kegelschn. II, 36. Zus. 7.); folglich ist, wenn dieser Krümmungshalbmesser $= R$ gesetzt wird,

$$6.)\ R = \left(\frac{MN}{p}\right)^2 \times MN$$

$$= \frac{p}{(1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ l}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Es seyen die den Polhöhen L, l zugehörigen Grade des Meridians G und g; so wird sich verhalten (§. 133.)

$$G : g = \frac{p}{(1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ L}^2)^{\frac{3}{2}}} : \frac{p}{(1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ l}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= (1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ l}^2)^{\frac{3}{2}} : (1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ L}^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$G^{\frac{2}{3}} : g^{\frac{3}{2}} = 1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ l}^2 : 1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\ L}^2 :$$

also wird man haben

$$G^{\frac{2}{3}} - e^2 G^{\frac{2}{3}} \overline{\text{Sin.}\ L}^2 = g^{\frac{2}{3}} - e^2 g^{\frac{2}{3}} \overline{\text{Sin.}\ l}^2,$$

oder $7.)\ e^2 = \frac{G^{\frac{2}{3}} - g^{\frac{2}{3}}}{G^{\frac{2}{3}} \overline{\text{Sin.}\ L}^2 - g^{\frac{2}{3}} \overline{\text{Sin.}\ l}^2}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(1 - \left(\frac{\text{Sin.}\ l}{\text{Sin.}\ L}\right)^2 \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \overline{\text{Sin.}\ L}^2}$$

Sucht man zwey Hülfswinkel durch die Formeln

$\text{Cos.}\ x = \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $\text{Cos.}\ y = \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\text{Sin.}\ l}{\text{Sin.}\ L}$; so wird

$$e = \frac{\text{Sin.}\ x}{\text{Sin.}\ L\ \text{Sin.}\ y}.$$

Liegt der kleinere Grad g unter dem Aequator; so ist $l = 0$, und daher

$$8.)\quad e^2 = \frac{1 - \left(\frac{g}{G}\right)^{\frac{2}{3}}}{\text{Sin.}\,L^2}$$

Hat man e^2 gefunden; so wird, weil $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ ist, $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$, und man hat das Axenverhältniß $b : a = \sqrt{1 - e^2} : 1$.

Endlich da der dem Grad G entsprechende Krümmungshalbmesser $= \frac{180}{\pi}\,G$ ist; so hat man aus der Gleichung n. 6. weil $\frac{b}{a}$ und e gefunden worden sind,

$$\text{oder}\ \left.\begin{matrix} p \\ \frac{b^2}{a} \end{matrix}\right\} = \frac{180 G}{\pi}\,(1 - e^2\text{Sin.}\,\overline{L^2})^{\frac{3}{2}};$$

$$\text{also}\ 9.)\quad a = \frac{180 G}{\pi}\,\frac{a^2}{b^2}\,(1 - e^2\text{Sin.}\,\overline{L^2})^{\frac{3}{2}},$$

und wenn der Grad g unter dem Aequator liegt,

$$10.)\quad a = \frac{180 \cdot g}{\pi} \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

Da $\text{Tg.}\,l : \text{Tg.}\,l' = a^2 : b^2$ (n. 1.); so verhält sich

$$\left.\begin{matrix} \text{Tang.}\,l - \text{Tg.}\,l' : \text{Tg.}\,l + \text{Tg.}\,l' \\ \text{Sin.}\,(l - l') : \text{Sin.}\,(l + l') \end{matrix}\right\} = a^2 - b^2 : a^2 + b^2.$$

Der Winkel CMN, welchen die Richtung der Schwere MN mit dem Halbmesser CM der Erde macht, wird also am größten, wenn $l + l' = 90^\circ$, $\text{Tg.}\,l' = \text{Cotg.}\,l$ ist. Für diese Breite wird man daher haben

$$\left.\begin{matrix} \text{Tg.}\,l : \text{Cotg.}\,l \\ \text{Tang.}\,l^2 : 1 \end{matrix}\right\} = a^2 : b^2,$$

$$11.)\quad \text{Tg.}\,l : 1 = a : b,$$

und den größten Winkel NMC wird man durch die Formel erhalten

$$12.)\quad \text{Sin.}\,(l - l') = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Weil}\ \text{Sin.}\,(l - l') = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\text{Sin.}\,(l + l')$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\text{Sin.}\,(2\,l - (l - l'));\ \text{so wird}$$

$$13.)\quad \text{Tg.}\,(l - l') = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\text{Sin.}\,2\,l}{1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\text{Cos.}\,2\,l},$$ welcher Ausdruck in

eine Reihe aufgelöst giebt

14.) $l - l'$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{\text{Sin. } 2l}{\text{Sin. } 1''} - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\frac{\text{Sin. } 4l}{\text{Sin. } 1''} + \frac{1}{3}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^3\frac{\text{Sin. } 6l}{\text{Sin. } 1''} - \&c.$$

Aus n. 4. folgt

$$\left(\frac{CM}{CA}\right)^2 = \frac{1 - \frac{a^4-b^4}{a^4}\,\overline{\text{Sin. } l}^2}{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\,\overline{\text{Sin. } l}^2},$$

oder, weil $\frac{a^4-b^4}{a^4} = \frac{a^2+b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2} = (2-e^2)\,e^2$ ist,

$\left(\frac{CM}{CA}\right)^2 = \frac{1-(2-e^2)\,e^2\overline{\text{Sin. } l}^2}{1-e^2\overline{\text{Sin. } l}^2}$, woraus man durch Entwicklung in eine Reihe erhält

15.) $\frac{CM}{CA} = 1 - \frac{1}{2}e^2(1-e^2)\overline{\text{Sin. } l}^2 - \frac{5}{8}e^4(1-e^2)(1-\frac{1}{5}e^2)\overline{\text{Sin. } l}^4 - \&c:$

Man setze $\frac{G-g}{3G} = D$, und $\frac{\text{Sin. } l}{\text{Sin. } L}\sqrt[3]{\frac{g}{G}} = \text{Cos. } u$; so verwandelt sich der Ausdruck n. 7. in folgenden

$$e^2\overline{\text{Sin. } L}^2\ \overline{\text{Sin. } u}^2 = 1-(1-3D)^{\frac{2}{3}}$$
$$= 2D + D^2 + \tfrac{4}{3}D^3 + \&c.:$$ folglich ist

16.) $e^2 = 2D\,\overline{\text{Cosec. } L}^2\,\overline{\text{Cosec. } u}^2 + D^2\,\overline{\text{Cosec. } L}^2\,\overline{\text{Cosec. } u}^2 + \&c.:$ wodurch e^2 genauer, als durch n. 7. wird gefunden werden können, wenn man bey der Berechnung nur die gewöhnlichen Logarithmen von sieben Decimalstellen gebraucht. Sodenn hat man

17.) $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$

18.) $\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2.4}e^4 - \frac{1.3}{2.4.6}e^6 - \&c.$

19.) $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2.4}e^4 + \frac{1.3}{2.4.6}e^6 + \&c.$

Setzt man in n. 6. die Breite $l = 0$; so erhält man den Krümmungshalbmesser des Meridians unter dem Aequator $= p$, und da die Grade den Krümmungshalbmessern proportional sind; so verhält sich ein Grad g' des Meridians unter dem Aequator zu einem Grad g unter der Breite l, wie $p : R$, folglich ist

20.) $g = g'\frac{R}{p} = \frac{g'}{(1-e^2\overline{\text{Sin. } l}^2)^{\frac{3}{2}}}$, (n. 6.)

$$= g' \left(1 + \frac{3}{2}\, e^2 \overline{\text{Sin.}\, l}^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}\, e^4 \overline{\text{Sin.}\, l}^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, e^6 \overline{\text{Sin.}\, l}^6 + \text{\&c:}\right),$$

und umgekehrt

$$21.)\ g' = g \frac{p}{R} = g\, (1 - e^2 \overline{\text{Sin.}\, l}^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= g\left(1 - \frac{3}{2}\, e^2 \overline{\text{Sin.}\, l}^2 + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}\, e^4 \overline{\text{Sin.}\, l}^4 + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 6}\, e^6 \overline{\text{Sin.}\, l}^6 + \text{\&c.}\right)$$

§. 138. Um jetzt die Abmeßungen eines Meridians der Erde unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß die Erde ein durch die Umdrehung einer Ellypse um ihre kleine Axe beschriebenes Sphäroid sey, nehme man zwey unter beträchtlich verschiedenen Breiten gemeßenen Grade, z. B. die in Frankreich und Lappland gemeßenen; so ist

$G = 57188{,}42$ Lg. $= 4{,}7573080$
$g = 57020{,}77$ Lg. $= 4{,}7560330$

Lg. $\frac{g}{G} = 9{,}9987250$

$\frac{1}{3}$ Lg. $\frac{g}{G} = 9{,}9995750$

$l = 46^\circ\, 11'\, 57''$; Lg. Sin. $= 9{,}8583870$

$19{,}8579620$

$L = 66\ 20\ 10$; Lg. Sin. $= 9{,}9618555$

Lg. Cos. $u = 9{,}8961065$; $u = 38^\circ\ 4'\ 18''{,}4$

$G - g = 167{,}65$

$\frac{G - g}{3} = 55{,}8833$; Lg. $= 1{,}7472822$

Lg. $G = 4{,}7573080$

Lg. $D = 6{,}9899742 - 10$
Lg. $2 = 0{,}3010300$

Lg. $2\,D = 7{,}2910042 - 10$

Lg. $D^2 = 3{,}9799484 - 10$

Lg. $\overline{\text{Sin.}\, L}^2 = 9{,}9237110$
Lg. $\overline{\text{Sin.}\, u}^2 = 9{,}5800750$

$9{,}5037860$

$7{,}7872182$; $0{,}00612658$

$4{,}4761624$; $0{,}00000299$

$$e^2 = 0{,}00612957$$

$$\frac{1}{2}e^2 = 0{,}003064785$$
$$\frac{1}{8}e^4 = 0{,}000004697$$

$$\frac{a-b}{a} = 0{,}00306948$$
$$= \frac{1}{325{,}788}$$

Vergleicht man die in Lappland und Peru gemeßenen Grade mit einander; so hat man

$G = 57188{,}42$; $L = 66^\circ\ 20'\ 10''$
$g' = 56753$; $\quad l' = 0$ und $u = 90^\circ$.

Hieraus findet man auf ähnliche Art wie vorhin

$$e^2 = 0{,}006058268$$
$$\frac{a-b}{a} = 0{,}00303372 = \frac{1}{329{,}628}.$$

Eben so erhält man durch die Vergleichung der Grade in Frankreich und Peru

$$\frac{a-b}{a} = 0{,}00301178 = \frac{1}{332{,}029}.$$

§. 139. Da die aus den Graden unter dem Aequator und unter dem Polarkreis abgeleitete Abplattung nahe in die Mitte zwischen die zwey übrige fällt, und der Unterschied der Breiten, unter welchen diese Grade liegen, größer ist, als bey den übrigen; so behalte man diese Abplattung bey, und suche mittelst derselben und des französischen Grades den Grad unter dem Aequator nach §. 137. n. 21.

Es ist Lg. $e^2 = 7{,}7823485 - 10$
Lg. $g = 4{,}7560330$
Lg. $\overline{\mathrm{Sin.}\ l}^2 = 9{,}7167740$
Lg. $\frac{3}{2} = 0{,}1760913$

$2{,}4312468$; $\quad 269{,}927$

Lg. $g = 4{,}7560330$
Lg. $e^4 = 5{,}5646970 - 10$
Lg. $\overline{\mathrm{Sin.}\ l}^4 = 9{,}4335480$
Lg. $\frac{3}{8} = 9{,}5740313 - 10$

$9{,}3283093 - 10$; $\quad 0{,}213$

$269{,}714$

$g = 57020{,}77$

$g' = 56751{,}06$

Dieser Grad ist also nur um zwey Toisen kleiner als der gemeßene.

Unter eben dieser Voraussetzung wird nach n. 20. §. 137. ein Grad unter der Breite l

$$g = 56751{,}06 + 515{,}72\ \overline{\mathrm{Sin.}\ l}^2 + 3{,}905\ \overline{\mathrm{Sin.}\ l}^4 \text{ Toif.}$$

Ferner $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = 0{,}99394173 2$, und nach n. 10. §. 137.

$$\left.\begin{array}{l} a = 3271415 \\ b = 3261490 \end{array}\right\} \text{Toif.}$$

Die unter dieser Voraussetzung berechneten Grade und ihre Abweichungen von den gemeßenen enthält folgende Tafel:

	berechnete Grade.	Abw. v. d. Meßungen.
Peru	56751,06	— 1,94
Ostindien. a.	56773,7	+ 11,8
——— b.	56831,8	+ 105,1
Cap	56906,9	— 130,1
Pensylvanien	56957,7	+ 6 ,7
Italien	56991,9	+ 12,9
Frankreich	57020,77	0
Oestreich	57035,1	— 30,9
England	57073,1	+ 4,4
Lappland	57186,4	— 2,0

Man sieht aus dieser Tafel, daß mit Ausnahme des zweyten ostindischen und des auf dem Cap gemeßenen Grads die übrigen Grade ziemlich nahe in die gefundene Ellipse passen, und und insbesondere die mit großer Genauigkeit in Frankreich, England und Lappland gemeßenen Grade eine Abweichung von vier Toisen geben, welche innerhalb der Gränzen der bey diesen Meßungen möglichen Fehler liegt. Ob die beträchtlichen Abweichungen des auf dem Cap und des zweyten in Ostindien gemeßenen Grads Irregularitäten der Erde oder Fehlern in den Meßungen oder beyden zugleich zuzuschreiben seyen, wird ohne eine Wiederholung der Meßungen nicht können ausgemacht werden. Uebrigens zeigen die neuesten in Frankreich und England angestellte Meßungen offenbar, daß die Erde kein regulärer Körper ist. Die folgende Tafel enthält diejenigen Grade, welche sich aus den vier Stücken des ganzen in Frankreich gemeßenen Bogens ergeben, und die nach der Formel dieses §. berechnete Grade:

mittlere Breite			gemeßene Gr.	berechn. Gr.	Untersch.
42°	17′	19″,6	56946,62	56985,35	+ 38,73
44	41	48,4	56978,17	57007,15	+ 28,98
47	30	46,0	57068,72	57032,66	— 36,06
49	56	29,3	57082,81	57054,52	— 28,29

Ungeachtet die Formel, nach welcher diese Grade berechnet sind, den aus dem ganzen in Frankreich gemeßenen Bogen gefolgerten Grad genau giebt, und die dabey gebrauchte Abplattung zwischen mehreren nicht viel von einander abweichenden das Mittel hält; so zeigen sich hier doch sehr beträchtliche Unterschiede, welche nicht auf Fehler der Meßungen können geschoben werden. Man müßte die Breite von **Dünkirchen** und **Montjouy** um nahe 5 Sek. vergrößern, die von **Evaux** um eben so viel vermindern, und die des **Pantheons** um $\frac{1}{2}$ Sek., die von **Carcassone** um 1 Sek. vergrößern, wenn die gemeßenen Grade in diese Ellipse passen sollten. Auf der andern Seite können aber die beobachteten Polhöhen nicht um mehr als eine Sekunde, und die auf der Erde gemeßenen Bogen höchstens um einige Toisen ungewiß seyn; folglich kommen die obige Unterschiede wenigstens grösten Theils von Unregelmäßigkeiten der Figur der Erde her.

Eben diese Meßungen zeigen ferner, wie unsicher die aus Gradmeßungen gefolgerte Abplattungen seyen, wenn man sie auch mit der grösten Sorgfalt angestellt hat. Wir wollen annehmen, daß in Frankreich nur der Bogen von **Dünkirchen** bis zum **Pantheon** in **Paris** gemeßen worden sey, welcher übrigens schon am Himmel einem Bogen von mehr als zwey Graden entspricht; so würde man aus diesem und dem in **Peru** gemeßenen die Abplattung $= \frac{1}{398,755}$ gefunden haben. Ferner giebt der zwischen **Evaux** und **Carcassone** gemeßene Bogen mit dem Grad unter dem Aequator verglichen die Abplattung $= \frac{1}{291,176}$, ungeachtet die Differenz der Polhöhen an seinen Endpunkten beynahe drey Grade beträgt. Man würde also um die Abplattung der Erde durch Gradmeßungen mit größerer Genauigkeit zu erhalten, unter einer Breite, welche von der mittleren Breite des durch Frankreich gehenden Bogens beträchtlich verschieden wäre, einen ungefähr eben so großen Bogen des Meridians meßen müssen, wobey die Unregelmäßigkeiten der Erde keinen so großen Einfluß auf die Bestimmung der Abplattung haben würden.

§. 140. Bey der Ungewißheit über das Axenverhältniß derjenigen Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Axe ein Körper beschrieben wird, welcher der Gestalt der Erde am nächsten kommt, kann man dasjenige Axenverhältniß wählen, durch welches die Summe der positiven sowohl als der negativen Abweichungen der berechneten Grade von den gemeßenen am kleinsten, und die Summe der positiven der Summe der negativen gleich wird. **Hr. von Lindenau** fand unter dieser Bedingung das Axenverhältniß wie 303 : 304 *). Einige in der

*) Monatl. Corresp. August 1806. pag. 133.

Folge anzuführende von der abgeplatteten Gestalt der Erde abhängende Ungleichheiten in der Bewegung des Monds und eine periodische Veränderung in der Schiefe der Ekliptik geben sehr nahe miteinander übereinstimmend das Verhältniß 304 : 305.

Nimmt man nun den ganzen in Frankreich gemeßenen Bogen samt seiner Verlängerung bis auf die Insel **Formentera** im mittelländischen Meere; so hat man einen Bogen von 705188.71 Toisen. Der Unterschied der Breite seiner Endpunkte ist 12° 22′ 13″,395, und daher die Größe eines Grads = 57006,195. Ferner ist die Breite von **Formentera** = 38° 39′ 55″,16; also die mittlere Breite des Bogens = 44° 51′ 2″. Weil nun die Erde von der Kugelgestalt nur wenig abweicht; so übertrifft ein Grad an dem nördlichen Ende dieses Bogens den mittleren Grad sehr nahe um eben so viel, als dieser den am südlichen Endpunkt übertrifft, wovon man sich leicht durch die für g in 139 §. gegebene Formel überzeugen kann. Mithin ist der gefundene Grad sehr nahe ein Grad des Krümmungskreises unter der Breite 44° 51′ 2″. Unter der Voraussetzung des Axenverhältnisses 304 : 305 ist nun

$$1 - \frac{b}{a} = \frac{1}{305}$$

$$1 + \frac{b}{a} = 2 - \frac{1}{305} = \frac{609}{305}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ e^2 \end{array}\right\} = \frac{609}{93025}$$

folglich hat man nach §. 137. n. 20.

den Grad unter dem Aequator = 56727,983 Tois.

Halbmesser des Aequators = 3271692

halbe Erdaxe = 3260966

Ferner findet sich unter der Breite l ein Grad des Meridians

$$g = 56727{,}983 + 557{,}065\ \overline{\text{Sin.}\ l}^2 + 4{,}558\ \overline{\text{Sin.}\ l}^4 \text{ Tois.}$$

nach welchem Ausdruck folgende Grade berechnet sind

	mittl. Breite.			berechnete Gr.	Abweich.
Peru	0°	0′		56728,0	− 25,0
Ostindien a.	12	5		56752,4	− 9,5
——— b.	23	18		56815,2	+ 88,5
Cap	33	18	südl.	56896,3	− 140,7
Pensylvanien	39	12		56951,2	+ 63,2
Italien	43	1		56988,2	+ 9,3
Frankreich	46	11	57″	57019,4	− 1,4
Oestreich	47	47		57034,9	− 31,1
England	52	2	20	57076,0	+ 7,3
Lappland	66	20	10	57198,5	+ 10,1

wo der berechnete Grad größer oder kleiner ist als der gemeßene, je nachdem die Abweichung mit + oder — bezeichnet ist.

§. 141. Sucht man di Abmeßungen eines elliptischen Meridians, in welchen der lappländische und der aus dem ganzen von Dünkirchen bis Formentera gemeßenen Bogen geschloßene Grad genau passen; so findet sich

$$e^2 = 0{,}00620428$$

$$\frac{a-b}{a} = 0{,}00310695 = \frac{1}{321{,}859}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3271404 \\ b = 3261240 \end{array}\right\} \text{Tois.}$$

$$g = 56742{,}520 + 528{,}070\ \overline{\text{Sin.}\ l}^2 + 4{,}095\ \overline{\text{Sin.}\ l}^4.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Tafel:

	berechn. Grade	Abweich.
Peru	56742,5	— 10,5
Ostindien a.	56765,7	+ 3,8
——— b.	56835,2	+ 108,5
Cap	56902,1	— 134,9
Pensylvanien	56954,1	+ 66,1
Italien	56988,6	+ 9,6
Frankreich a.	57018,7	— 2,1
——— b.	57006,2	0,0
Oestreich	57033,4	— 32,6
England	57072,4	+ 3,7
Lappland	57188,4	0,0

Der mit a. bezeichnete französische Grad ist aus dem Bogen von Dünkirchen bis Montjouy, der b. aus dem Bogen von Dünkirchen bis Formentera geschloßen.

§. 142. Setzt man einen Bogen des als elliptisch angenommenen Meridians $= s$; so ist vermöge der Gründe der Differentialrechnung $\frac{ds}{dl} =$ Krümmungshalbmesser, woraus man durch Integration die Länge eines Bogens des Meridians von dem Aequator an bis zu der Breite l erhält. Es findet sich

$$s = \frac{a\pi l}{180}\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 e^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 e^4 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 e^6 - \&c.\right)$$

$$- a\left(3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 e^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 e^4 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 e^6 - \&.\right) \text{Sin.}\, l\, \text{Cos.}\, l$$

$$- \tfrac{3}{2}\, a\left(5\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 e^4 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{5}{4.6}\right)^2 e^6 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{5.7}{4.6.8}\right)^2 e^8 - \&c.\right) \overline{\text{Sin.}\, l}^3\, \text{Cos.}\, l$$

$$- \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} a\left(7\cdot(\tfrac{1}{6})^2 e^6 - \tfrac{1}{7}\left(\frac{7}{6\cdot 8}\right)^2 e^8 - \&c.\right) \overline{\text{Sin.}\, l}^5 \,\text{Cos.}\, l$$

$$- \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} a\left(9\cdot(\tfrac{1}{8})^2 e^8 - \&c.\right) \overline{\text{Sin.}\, l}^7 \,\text{Cos.}\, l$$

$- \&.$

Wird $l = 90$ Gr. genommen; so fallen alle auf das erste folgende Glieder weg, und daher drückt das erste Glied der Reihe die Länge eines Quadranten des Meridians aus. Der Halbmesser r eines Kreises, welcher mit dem Meridian einen gleichen Umfang hat, wird also seyn

$$= a(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4 - \&c.)$$

Es ist aber $\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{b}{a}\right) = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{16}e^4 - \&c.\right)$

folglich ist $r = \frac{a+b}{2}\left(1 + \frac{1}{64}e^4 + \frac{3}{256}e^6 \; \&c.\right)$,

also, weil ein sehr kleiner Bruch ist, sehr nahe = der halben Summe der halben Erdaxe und des Halbmessers des Aequators.

Ferner ist, wenn man in dem Ausdruck n. 6 §. 157. die Breite $l = 45^\circ$ setzt, und ihn in eine Reihe entwickelt, der Krümmungshalbmesser des Meridians unter dem 45sten Grad der Breite.

$$R' = a\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{9}{32}e^4 - \&c.\right);$$

daher $r = R' + a\left(\frac{15}{64}e^4 + \frac{45}{256}e^6 + \&c.\right)$

$$= R'\left(1 + \frac{15}{64}e^4 + \frac{15}{64}e^6 + \&c.\right)$$

Demnach ist der Halbmesser eines Kreises, welcher mit dem elliptischen Meridian einen gleichen Umfang hat, sehr nahe dem Krümmungshalbmesser unter dem 45sten Grad der Breite, und der Quadrant des Meridians nahe dem neunzigmal genommenen Grad des Meridians unter der mittleren Breite von 45° gleich.

Endlich weil der Inhalt eines zusammengedrückten elliptischen Sphäroids zu dem Inhalt einer um das Sphäroid beschriebenen Kugel sich wie die halbe Axe zu dem Halbmesser des Aequators verhält; so ist der Halbmesser r' einer Kugel, welche mit dem Sphäroid einerley Inhalt hat $= a \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$

$= a\left(1 - \frac{a-b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 \; \&c.\right)$. Vergleicht man diesen

sen

sen Ausdruck mit der Formel n. 15. §. 137. für den Halbmesser des Sphäroids unter der Breite l; so findet man, wenn man die vierte und höhere Potenzen von e wegläßt, $\overline{\text{Sin.} l}^2 = \frac{1}{3}$. Folglich ist ein abgeplattetes elliptisches wenig von der Kugelgestalt abweichendes Sphäroid sehr nahe einer Kugel gleich, deren Oberfläche, wenn sie mit dem Sphäroid concentrisch angenommen wird, der Oberfläche des letztern unter einem Parallelkreis begegnet, dessen Quadrat des Sinus der Breite dem dritten Theil des Quadrats des Sinus totus gleich ist.

Man sieht hieraus, daß der Umfang eines Meridians der Erde, so wie die halbe Summe der halben Erdaxe und des Halbmessers des Aequators, durch die Größe eines Grads unter einer Breite von 45° genauer bestimmt wird, als der Inhalt der Erde, weil die Ausdrücke von r und $\frac{a+b}{2}$ durch R' nur noch die vierte und höhere Potenzen von e enthalten; und daher die in der Größe der Abplattung der Erde noch übrig bleibende Ungewißheit keinen beträchtlichen Einfluß auf die Bestimmung jener Größen haben kann. Der Ausdruck von r' hingegen durch R' wird noch die Quadrate von e enthalten, und kleine Unterschiede in der Abplattung oder Excentricität werden merklich verschiedene Werthe von r' geben.

Mittelst der im Anfang dieses §. für den Bogen eines Meridians gegebenen Formel könnte man, wenn aus einem großen gemeßenen Bogen der Krümmungshalbmesser nicht sicher sollte abgeleitet werden können, die Rechnung genauer führen. Es wird aber wegen der Irregularitäten der Erde kaum der Mühe werth seyn, die Rechnung so genau zu führen. Um zu zeigen, daß selbst bey einem Bogen von zwölf Graden der Fehler sehr klein ist, wenn man den aus ihm, wie es hier geschehen ist, durch die Division mit dem Unterschied der Breiten gefundenen Halbmesser als den Krümmungshalbmesser betrachtet, nehme man die Abplattung wie vorhin $= \frac{1}{305}$; so findet man aus obigem allgemeinen Ausdruck des Meridianbogens, wenn man den mit eben dieser Abplattung gefundenen Werth von a gebraucht, und die Potenzen der Sinus der Breite und ihre Produkte durch den Cosinus derselben durch die Sinus der vielfachen der Breite ausdrückt

$$s = 57008{,}236 . l - 8045{,}146 \text{ Sin. } 2l + 8{,}258 \text{ Sin. } 4l - 0\,010 \text{ Sin. } 6l$$

Setzt man zuerst l = der Breite von **Formentera** = 38° 39′ 55″,16, hernach = der Breite von **Dünkirchen** = 51° 2′ 8″,555 *); und zieht die erstere Gleichung von der letztern ab;

*) Diese neuere Angabe der Breite von Dünkirchen gründet sich auf den bey obiger Rechnung gebrauchten Unterschied der Breite von Dünkirchen und Formentera, und die Breite des letztern Orts, so wie sie von **Delambre** in der Connais. de temps pour l'an 1810 angegeben sind.

so erhält man den Bogen des Meridians zwischen diesen zwey Orten $= 705189{,}07$ Tois.
die Meßung gab $\underline{705188{,}71}$
der Unterschied beträgt also nur $0{,}36$

Da nun bey einerley Abplattung der Bogen s dem Halbmesser a des Aequators proportional ist; so darf man nur den bey dieser Rechnung gebrauchten Halbmesser des Aequators in dem Verhältniß des gemeßenen Bogens zu dem berechneten vermindern, um auch diesen Unterschied vollends verschwinden zu machen. Nach dieser Verbesserung wird seyn

der Halbmesser des Aequators $= 3271690{,}887$ Tois.
die halbe Erdaxe $= 3260964{,}032$

$$s = 57008{,}2069 \cdot l - 8045{,}142 \text{ Sin. } 2l + 8{,}258 \text{ Sin. } 4l - 0{,}010 \text{ Sin. } 6l.$$

und wenn man $l = 90°$ setzt; so erhält man die Länge eines Quadrantens des Meridians $= 5130738{,}6$ Tois.

Ferner findet sich ein Grad des Meridians

$$g = 56727{,}954 + 557{,}065 \; \overline{\text{Sin. } l}^2 + 4{,}558 \; \overline{\text{Sin. } l}^4 + 0{,}035 \; \overline{\text{Sin. } l}^6,$$

und nach §. 137. n. 14. der Winkel des Erdhalbmessers mit der Richtung der Schwere

$$l - l' = 677'',388 \text{ Sin. } 2l - 1'',112 \text{ Sin. } 4l,$$

welcher nach §. 137. n. 11. und 12. unter einer Breite von $45° \; 5' \; 38'',7$ am größten und $= 11' \; 17'',386$ wird.

Endlich ist nach §. 137. n. 15. der Exponent des Verhältnisses des Erdhalbmessers zu dem Halbmesser des Aequators

$$\frac{CM}{CA} = 1 - 0{,}00325188 \; \overline{\text{Sin. } l}^2 - 0{,}00002658 \; \overline{\text{Sin. } l}^4.$$

§. 143. Es ergiebt sich aus den bisherigen Untersuchungen, daß die Erde ein von der Kugelgestalt zwar nicht viel abweichender unter den Polen zusammengedrückter, aber genau genommen ein irregulärer Körper ist. Sie kommt einem elliptischen Sphäroid nahe, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe beschrieben wird, und dessen Abmeßungen folgende sind:

Verhältniß der Axen	$= 304 : 305$
Halbmesser des Aequators	$= 3271691$ Tois.
halbe Erdaxe	$= 3260964$
Halbmesser eines Kreises welcher mit dem Meridian einerley Umfang hat	$= 3266330$

Halbmesser einer Kugel, welche mit der Erde einerley Inhalt hat	= 3268111
Ein Grad unter den Polen	= 57289,615
Ein Grad des Meridians unter dem Aequator,	= 56727,954
und unter einer Breite von 45 Gr.	= 57007,626
Der neunzigste Theil eines Quadranten des Meridians	= 57008,2069
Ein Grad des Umfangs des Aequators	= 57101,778
Der fünfzehnte Theil hievon, oder eine geographische Meile	= 3806,7852
	= 23628,322 rheinl. Fuß*)

§. 144. Auf die Meßung des durch Paris gehenden Bogens eines Meridians der Erde gründet sich das neue französische Maaß- und Gewichts-System, welches man wenigstens zum Theil kennen muß, um die Angaben der französischen Astronomen verstehen und in die alten verwandeln zu können. Die Einheit des Längenmaaßes ist der zehnmillionste Theil eines Quadranten eines Erdmeridians, und heißt ein Mètre. Man hat im 142ten §. gesehen, daß aus der Länge eines Bogens des Erdmeridians unter einer mittleren Breite von 45 Gr. die Länge des Meridianquadrantens auch bey nicht genau bekannter Abplattung der Erde sehr genau kann gefunden werden. Durch die im vorhergehenden §. gefundene in Toisen ausgedrückte Größe des Erdmeridians ist das Verhältniß der zu der Gradmeßung in Peru gebrauchten Toise zu dem Mètre gegeben, und es wird seyn

1 Mètre = 0,513073862 Tois.
= 443,2958168 . . . paris. Linien.

Man setzte hienach in runder Zahl ein Mètre auf 443,296 Linien der eisernen Toise, wenn die letztere eine

*) Unter der Voraussetzung, daß 1392 par. Fuß = 1440 rheinl. Fuß, oder 29 p. F. = 30 rheinl. Fuß.

Temperatur von 13 Reaum. Graden über dem Eispunkt hat. Da aber die von irgend einer Materie verfertigten Maaßstäbe mit der Temperatur ihre Länge verändern; so ist man übereingekommen, die Temperatur des schmelzenden Eises als die Normaltemperatur anzunehmen, so daß der materielle Mètre der zehnmillionste Theil des Meridianquadranten ist, wenn er diese Temperatur hat. Demnach ist ein materieller Mètre nur alsdenn = 443,296 Linien der eisernen Toise von Peru, wenn er die Temperatur 0, und zugleich die letztere die Temperatur + 13 R. oder + 16 $\frac{1}{4}$ der hunderttheiligen Scale hat *). La Place setzt in runder Zahl 1 Mètre = 0,513074 Tois. und bedient sich dieser Länge des Mètre in seiner Mécanique céleste.

Sodenn wurden zur Bequemlichkeit der Rechnung alle Maaße nach dem Decimalsystem eingetheilt. Der Quadrant nemlich in 100 Grade, ein Grad in 100 Minuten, eine Minute in 10 Sekunden, so daß ein Decimalgrad = 54 Minuten, eine Decimalminute = 32,4 Sek. und eine Decimalsekunde = 0,324 Sek. der alten Eintheilung ist. Ein Tag wurde eingetheilt in 10 Stunden, eine Stunde in 100 Minuten, eine Minute in 100 Sekunden. Hienach ist eine Decimalstunde = 2 St. 24 Minuten, eine Decimalminute = 1 M. 26,4 Sekunden, eine Decimalsekunde = 0,864 Sek. der alten Eintheilung. Der Raum des Thermometers zwischen dem Punkt des schmelzenden Eises und dem Punkt des unter einer Barometerhöhe von 0,76 *M.* oder 28 Z. 0,9 Lin. siedenden Wassers wurde in 100 Grade eingetheilt, und daher sind 5 Grade des hunderttheiligen Thermometers 4 Graden der achtzigtheiligen Scale gleich.

Um ein Beyspiel der Verwandlung der auf das neue

*) Svanberg findet unter der Voraussetzung, daß der ihm von dem Nationalinstitut zu der Gradmeßung in Lappland mitgetheilte eiserne Mètre nach diesem Gesetz bestimmt worden sey, den lappländischen Grad = 57196,159 Tois. welcher nur um 2,35 Tois kleiner ist, als der mit der Abplattung $\frac{1}{305}$ im 142. §. berechnete. Exposition des opérations faites en Lapponie &c. par *Svanberg*. pag. 191, 192. Die oben angegebene Länge dieses Grads ist diejenige, welche man in der Exposition du Système du Monde par Laplace, III édit. pag. 59 findet, und wegen einiger von Svanberg a. a. O. geäußerten Zweifel beybehalten worden ist.

französische Maaßsystem sich beziehenden Angaben in die älteren Maaße zu geben, nehme ich den von Svanberg in Lappland gemeßenen Grad, welchen la Place auf 100316^{me},1 setzt *). Multiplicirt man diese Zahl mit 0,513074; so erhält man 51469,58269 Tois. für die Größe eines Decimalgrades, welche mit 0,9 dividirt die Größe eines Grades nach der alten Eintheilung = 57188,425 Tois. giebt, wie er §. 135. angegeben ist.

Da ein Mètre = $\frac{1}{10000000}$ des Meridianquadranten; so ist, wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser dem Halbmesser eines Kreises gleich ist, welcher mit dem Meridian einerley Umfang hat, ein Mètre = 0,1 Decimalsekunde, 1000^{me} sind = 1 Decimalminute, u. s. w. wodurch sich leicht die in diesem Längenmaaß ausgedrückte Entfernung zweyer Orte der Erde in Decimalgrade eines grösten Kreises, und umgekehrt, verwandeln läßt. Eine ähnliche Bequemlichkeit gewähren die geographischen Meilen, deren 15 einen Grad des Aequators ausmachen. Eine geographische Meile macht hienach 4 Sexagesimalminuten aus. Man könnte auch zu mehrerer Genauigkeit fünfzehn geographische Meilen auf den neunzigsten Theil des Meridianquadranten, oder auf 57008,2069 Tois. (§. 143.) rechnen; so würde eine geographische Meile = 3800,54713 Toisen, 5400 geogr. Meilen würden dem Umfang des Meridians, und 1718,87 g. M. dem Halbmesser eines mit dem Meridian gleichen Umfang habenden Kreises, oder sehr nahe der halben Summe des Halbmessers des Aequators und der halben Erdaxe gleich seyn (§. 142.)

§. 145. Wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde erfordert die im 48sten §. gezeigte Methode, den Abstand eines Himmelskörpers von dem Mittelpunkt der Erde zu finden, so wie die im 49 §. gelehrte Berechnung der Höhenparallaxe eine Verbesserung, welche übrigens nur bey der Parallaxe des Monds merklich seyn wird. Es sey $aphp'$ (Fig. 44.) ein elliptischer Meridian der Erde, in dessen erweiterten Ebene ein Himmelskörper s stehe. Der Durchmesser des Ae-

*) Exposition du système du monde. pag. 59.

quators sey ab, die Erdaxe pp', und $mn, m'n'$ seyen die Richtungen der Schwere an den unter diesem Meridian liegenden Orten m, m', welche den Durchmesser des Aequators in n, n' treffen, und verlängert die Scheitelpunkte v, v' dieser Orte bezeichnen. Wenn nun die zwey Orte ungleiche Polhöhen haben; so werden die Richtungen der Schwere sich in einem ausserhalb des Durchmessers ah des Aequators liegenden Punkt o schneiden, und es wird der Winkel mom' $= an'm' + \left\{\begin{matrix} onn \\ anm \end{matrix}\right\}$ oder der Summe der Polhöhen der zwey Orte, wenn sie, wie in der Figur auf verschiedenen Seiten des Aequators liegen, im entgegengesetzten Fall aber ihrer Differenz gleich seyn. Mittelst dieses Winkels und der beobachteten von der Stralenbrechung befreyten Abstände $vms, v'm's$ des Himmelskörpers s von den Scheiteln v, v' hat man in §. 48. das Viereck $msm'o$ aufgelöst, indem man $mo = om'$ setzte, und also statt der Distanz sc die so, und selbst diese nur in dem Fall genau erhalten, wenn die zwey Orte gleiche Polhöhen hatten.

Um nun die von der abgeplatteten Gestalt der Erde herrührenden Fehler jener Methode zu vermeiden, ziehe man die Halbmesser cm, cm' der Erde, und verlängere sie nach z und z'. Mittelst der bekannten Polhöhen findet man die Winkel acm, acm' (§. 137. n. 1.) und die Halbmesser cm, cm' (137. n. 4. oder 15.). Man kennt also auch die Winkel $\left\{\begin{matrix} cmn \\ vmz \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} cm'n' \\ v'm'z' \end{matrix}\right\}$ als die Unterschiede der Polhöhen und der vorhin gefundenen Winkel. Zieht man diese Winkel von den Scheitelabständen des Himmelskörpers ab, so hat man die Winkel $zms, z'm's$. Mithin kennt man in dem Viereck $cmsm'$ zwey aneinander liegende Seiten mc und cm' sammt dem Winkel, welchen sie mit einander machen, weil $mcm' = acm + acm'$, und zwey seiner äusseren Winkel, wodurch die Seiten ms, sm' und die Diagonale sc gefunden werden können. Da man jetzt das Verhältniß von $cs : ca$ kennt; so kann man auch die Horizontalparallaxe des Himmelskörpers unter dem Aequator nach §. 48. finden.

Aus der Horizontalparallaxe unter dem Aequator findet man die Horizontalparallaxe an einem gegebenen Ort der Erde, wenn man die erstere in dem Verhältniß des an diesen Ort gezogenen Erdhalbmessers zu dem Halbmesser des Aequators vermindert, welches nach §. 137. n. 4. oder 15. kann berechnet werden. Sodenn kann die einer beobachteten Mittagshöhe entsprechende Höhenparallaxe eben so leicht, wie unter der Voraussetzung einer Kugelgestalt der Erde, gefunden werden, wenn man zu der wegen der Refraktion verbesserten Mittagshöhe den Winkel *cmn* oder *vmz* addirt, oder ihn von dem Scheitelabstand abzieht, wodurch man den Winkel *zms* erhält. Alsdenn kennt man in dem Dreyeck *cms* das Verhältniß von *cm* : *cs* mittelst der Horizontalparallaxe für diesen Ort, und den Winkel $cms = 180^\circ - zms$; folglich findet sich die Höhenparallaxe *msc* wie in §. 48. und 49. Wird dieser Winkel von den Winkeln *vms* und *zms* abgezogen; so erhält man die Winkel, welche die von dem Mittelpunkt der Erde nach dem Himmelskörper gezogene gerade Linie mit der Richtung der Schwere an dem Ort *m*, und mit dem an diesen Ort gezogenen Erdhalbmesser macht.

Befindet sich ein Himmelskörper nicht im Meridian; so liegen *cm*, *mn* und *ms* nicht in einer Ebene, und es findet auch eine kleine Parallaxe des Azimuths Statt, in so fern man unter dem wahren Ort eines Himmelskörpers denjenigen versteht, an welchem er aus dem Mittelpunkt der Erde, und nicht aus dem Punkt *n*, in welchem die Richtung der Schwere die Ebene des Aequators trifft, gesehen erscheinen würde.

Man ziehe *mq* senkrecht auf *ca*; so verhält sich, wenn man die §. 137. gebrauchte Benennungen beybehält, $cn : cq = a^2 - b^2 : a^2 = e^2 : 1 = 0{,}0065466 : 1$ für die Abplattung $\frac{1}{305}$, woraus folgt, daß die Parallaxe des Azimuths nicht beträchtlich, und nur bey dem Mond merklich werden kann. In dem Meridian verschwindet diese Parallaxe, und es bleibt nur die Höhenparallaxe übrig, welche nach den §. 49. gegebenen Regeln berechnet werden kann, wenn man statt der Abstände vom Scheitel *v* die Abstände von dem Punkt *z* setzt, in welchem der verlängerte Erdhalbmesser der Himmelskugel begegnet, und unter der Horizontalparallaxe diejenige versteht, deren Sinus zu dem Sinus der Horizontalparallaxe unter dem Aequator wie der Erdhalbmesser *cm* zu dem Halbmesser *ca* des Aequators sich verhält. Der

Sinus der Horizontalparallaxe für einen gegebenen Ort der Erde wird also gefunden werden, wenn man den Sinus der Horizontalparallaxe unter dem Aequator mit der in §. 137. n. 15. gegebenen Reihe multiplicirt, welche man in dem 142. §. für die Abplattung $\frac{1}{305}$ berechnet findet. Die Berechnung der Parallaxen ausser dem Meridian, und in Beziehung auf Länge und Breite, gerade Aufsteigung und Abweichung wird weiter unten gezeigt werden.

§. 146. Aus der bekannten Grösse der Erde ergeben sich jezt leicht die Grössen derjenigen Himmelskörper, deren scheinbare Halbmesser in dem ersten Buch angegeben sind, und die Höhen der Mondsberge, deren Verhältniß zu dem Halbmesser des Monds man bestimmt hat. Vermöge des 63. §. ist die Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator, oder der aus dem Mittelpunkt des Monds gesehene scheinbare Halbmesser des Aequators der Erde $= 57' 1''$, wenn der aus dem Mittelpunkt der Erde gesehene Halbmesser des Monds $= 15' 33'',7$ ist. Folglich verhält sich der Halbmesser des Aequators der Erde zu dem Halbmesser des Monds $= 57' 1'' : 15' 33'',7 = 1 : 0,27293$ oder nahe $= 11 : 3$ (§. 49. n. 6.), und daher ist, wenn man den Halbmesser des Aequators nach §. 143. nimmt, der Halbmesser des Monds = 892949 Toiſ.

Nach §. 81. giebt es Berge auf dem Mond, deren Höhe $\frac{1}{338}$ seines Halbmessers beträgt, welches nach dem hier gefundenen Halbmesser des Monds 2642 Toisen ausmacht. Schröter hat einige über 4000 Toisen hoch gefunden. Der Chimboraço erhebt sich nur 3358 Toiſ. über die Meeresfläche.

Nach §. 50. ist die Horizontalparallaxe der Sonne in ihrer mittleren Entfernung von der Erde, oder der in dieser Distanz gesehene scheinbare Halbmesser der Erde $= 8'',8$, und der scheinbare Halbmesser Sonne ist in eben dieser Distanz $= 16' 1'',38$; folglich verhält sich nach §. 49. n. 6. der Halbmesser der Erde zu dem Halbmesser der Sonne $= 1 : 109,25$.

Der scheinbare Durchmesser des Aequators des Jupiters ist in seiner mittleren Distanz von der Sonne $= 38'',2$

(§. 109.), und da sich diese zu dem mittleren Abstand der Sonne von der Erde = 5,20279 : 1 verhält (§. 105.); so ist nach §. 49. n. 5. der in der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde gesehene scheinbare Durchmesser des Aequators des Jupiters = 198″,75, und sein Halbmesser = 99″,375. Dieser verhält sich also zu dem Halbmesser des Erdäquators = 11,30 : 1 (§. 49. n.). Hienach ist folgende Tafel berechnet:

	Scheinbare Halbmesser in der mittl. Entfern. der Sonne von der Erde.	Halbmesser in Halbmessern des Erdäquators ausgedrückt.
Sonne	16′ 1″,38	109,25
Merkur	3,00	0,34
Venus	8,30	0,93
Erde	8,80	1,00
Mars	4,50	0,51
Jupiter	99,375	11,30
Saturn	83,94	9,54
Uranus	37,40	4,25
Mond	2,40	0,27

Nun kann man den Halbmesser des Aequators der Erde in irgend einem Längenmaaß ausdrücken, dessen Verhältniß zu der Toise gegeben ist, und durch Multiplikation dieses Halbmessers mit den in der dritten Columne angegebenen Zahlen, die ihnen entsprechende Halbmesser in eben diesem Längenmaas finden.

Die scheinbaren Durchmesser der neuen Planeten sind noch nicht genau bekannt. Herschel setzt in der mittleren Distanz der Sonne von der Erde den scheinbaren Durchmesser der Ceres auf 0″,14, der Pallas auf 0″,08, Schröter hingegen den ersteren auf 2″,44, den letzteren auf 3″,12. Den Durchmesser der Vesta, welche der hellste unter den vier neuen Planeten ist, fand Schröter am 26. Apr. 1807 nur von 0″,48. Wären Herschels Meßungen richtig; so würde der Durchmesser der Ceres = 35, und der Durchmesser der Pallas = 15 geogr. Meilen seyn. Wegen dieser geringen Größe rechnet Herschel diese Wandelsterne nicht unter die Hauptplaneten, und nennt sie Asteroiden *).

*) Monatl. Corresp. Jul. 1802. pag. 89. u. f.

Die Größe der Nebenplaneten oder Trabanten kann ebenfalls noch nicht genau angegeben werden. Als ein Beyspiel der Berechnung nehme ich den ersten Trabanten des Jupiters. Setzt man nach la Place den aus dem Mittelpunkt des Jupiters gesehenen scheinbaren Durchmesser dieses Trabanten = 30′ 21″ (§. 111.); also den Halbmesser = 15′ 10″,5; so findet sich, weil er 5,81783 Halbmesser des Aequators des Jupiters von ihm absteht, der Halbmesser des Trabanten = 0,02568 Halbm. des Jupiters = 11,3 × 0,02568 = 0,29 Erdhalbmessern, und daher wäre dieser Trabant etwas größer als der Mond.

Auf ähnliche Art können die Abmeßungen des Rings des Saturns gefunden werden. Es verhält sich z. B. die Dicke des Rings zu dem Durchmesser des Saturns wie 25 : 3557 (§. 118.). Aber der Durchmesser des Saturns verhält sich zu dem Durchmesser der Erde wie 9,54 : 1; folglich verhält sich die Dicke des Rings zum Erddurchmesser = 238,5 : 3557 und zu dem Halbmesser der Erde = 477 : 3557 = 0,134 : 1. Die Dicke des Rings beträgt also nur 115 geogr. Meilen, oder etwa den vierten Theil des Durchmessers des Monds.

Endlich kann man die wahre Größe der Gegenstände finden, welche durch eine gegebene Fernröhre auf einem gegebenen Himmelskörper, dessen Entfernung man kennt, noch bemerkbar sind. Schröter konnte mit seinem siebenfüßigen Herschelschen Teleskop Gegenstände bemerken, deren scheinbare Größe 0″,2, und ihre Figur unterscheiden, wenn ihre scheinbare Größe 0″,7 war. Die erstere verhält sich zu dem scheinbaren Halbmesser des Monds wie 1 : 4668, die letztere wie 1 : 1334. Da nun der Halbmesser des Monds = 892949 Tois. ist; so konnte er auf dem Mond einen Gegenstand bemerken, dessen wahre Größe = 191 Toisen war, und seine Figur unterscheiden, wenn er 669 Toisen im Durchmesser hatte.

Zweytes Capitel.

Von den Bewegungen der Erde, und den davon abhängenden Erscheinungen.

§. 147. Es ist schon im 129. §. im Allgemeinen bemerkt worden, daß sich die täglichen Bewegungen der Himmelskörper aus einer Umdrehung der Erde um ihre Axe von Abend gegen Morgen erklären lassen. Die genauere Untersuchung der aus dieser Umdrehung folgenden scheinbaren Bewegungen der Sterne wird zeigen, daß sie vollkommen mit den im ersten Capitel des ersten Buchs gefundenen Gesetzen der täglichen Bewegungen übereinstimmen.

Es sey pp' (Fig. 45.) die Erdaxe, deren Verlängerungen in P und P' der Himmelskugel begegnen. Durch einen Stern S und die Axe PP' sey eine Ebene gelegt, welche die Himmelskugel in einem grösten Kreis PSP' und die Oberfläche der Erde in dem Erdmeridian pmp' schneiden wird. Dreht sich nun die Erde um die Axe pp'; so würde ein in dem Punkt P stehender Fixstern aus dem Mittelpunkt C der Erde gesehen beständig an diesem Punkt zu stehen scheinen, und dasselbe wird man an jedem Punkt der Oberfläche der Erde beobachten, weil die Parallaxe der Fixsterne unmerklich ist (§. 25.). Die Punkte P und P' der Himmelskugel werden also ihre Pole seyn. Man setze, der Ort m der Erde befinde sich in einem gewißen Augenblick in der Ebene des grösten Kreises PSP', und die Verlängerung des an m gezogenen Halbmessers Cm begegne diesem Kreis in Z; so wird für diesen Augenblick der durch das Zenith Z des Orts m und die Pole P, P' der Himmelskugel gelegte gröste Kreis PZP' der Meridian der Himmelskugel seyn (§. 3.), und das Complement des Bogens ZS wird die Mittagshöhe des Sterns messen. Man nehme den Stern S, mithin auch den Kreis PSP' als unbeweglich an, lasse sich aber die Erde um die unbewegliche Axe pp' nach der Richtung mvm' von Abend gegen Morgen drehen; so wird der verlängerte Halbmesser Cm der Erde nach und nach verschiedenen Punkten V, Z' der Himmelskugel begegnen, welche in einem Parallelkreis ZVZ liegen werden, dessen Abstand vom Pol P durch den Bogen PZ gemessen wird. Eben dieser Bogen mißt aber den Winkel pCm, welchen der Halbmesser Cm des Orts m mit der Erdaxe pp' macht. Folglich ist die Aequatorshöhe dieses Orts $= PZ$. Man lege durch P und V einen grösten Kreis PVP', so wird dieser für den Augenblick, da der verlängerte Erdhalbmesser in den Punkt V trifft, und der Ort m der Erde nach v gerückt ist, der Meridian seyn, welcher mit dem durch den Ort v gelegten Erdmeridian in einer Ebene liegen wird. Der Meridian wird also in Beziehung auf die Erde seine Lage nicht verändern, aber in Beziehung auf die unbewegliche Himmelskugel nach und nach von Abend gegen Morgen fortrücken, und den weiter gegen Morgen liegenden Sternen, z. B. S', begegnen, welche sich daher dem Beobachter, der seinen Meridian für unbeweglich hält, von Morgen gegen Abend zu bewegen scheinen werden. Und da vermöge der Voraussetzung die Pole P, P' und der Stern S unbeweglich sind; so wird der Abstand PS des Sterns vom Pol aus dem Mittelpunkt C der Erde, und wegen der unmerklichen Parallaxe der Fixsterne auch von Punkten ihrer Oberfläche aus gesehen beständig gleich groß erscheinen. Mithin wird dieser Stern einen Parallelkreis zu beschreiben scheinen, der um den Bogen PS von dem Pol absteht. Eben dieses kann von jedem anderen Stern gezeigt werden; folglich werden übereinstimmend mit den Gesetzen der täglichen Bewegungen die Sterne Parallelkreise zu beschreiben scheinen, deren Pole die Punkte der Himmelskugel sind, in welchen ihr die verlängerte Erdaxe begegnet. Ein Sterntag wird also jetzt der Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe gleich seyn, welche 23 St. 56 M. 4,1 S. mittlerer Sonnenzeit ausmachen wird (§. 44.). Wegen der Gleichförmigkeit der täglichen Bewegung (§. 26.) muß, wenn diese Bewegung blos scheinbar ist, und ihren Grund in einer Umdrehung der Erde um ihre Axe hat, die Erde sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit um ihre Axe drehen.

Diejenigen Himmelskörper, welche in Beziehung auf die Fixsterne von Abend gegen Morgen fortrücken, müßen zu einem scheinbaren täglichen Umlauf mehr als einen Sterntag gebrauchen, weil die einem Ort der Erde entsprechende Meridianebene bey der Umdrehung der Erde um ihre Axe den östlicher liegenden Punkten der Himmelskugel später begegnet, als denjenigen. welche nicht so weit gegen Osten liegen. Es wird also mit den Beobachtungen übereinstimmend ein Sonnentag, die tägliche Umlaufszeit des Monds, u. s. w. größer seyn als ein Sterntag. Man setze die Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe $= t$, die Umlaufszeit eines von Abend gegen Morgen in Beziehung auf die Fixsterne fortrückenden Himmelskörpers $= T$, und die Zwischenzeit zwischen zwey zunächst auf einander folgenden Durchgängen desselben durch den Meridian $= S$; so wird dieser unter der Voraussetzung einer gleichförmigen mit dem Aequator parallelen Bewegung in der Zeit S gegen Morgen fortrücken um $\frac{360.S}{T}$ Grade. Mithin wird die Erde in der Zeit S eine Umdrehung müßen gemacht, und noch $\frac{360.S}{T}$ Grade darüber müßen beschrieben haben. Es wird sich also wegen der gleichförmigen Axendrehung der Erde verhalten

$$\left.\begin{matrix} 360 + \frac{360.S}{T} & 360 \\ T + S & T \end{matrix}\right\} = S : t$$

$$T : S = T - t : t$$

und man wird haben $t = \frac{ST}{T+S}$

$$S = \frac{Tt}{T-t},$$

woraus sich dieselben Verhältniße der mittleren Sonnenzeit und Sternzeit zu einander ergeben, welche man im 26. §. gefunden hat, wenn man $S =$ einem mittleren Sonnentag, $T =$ einem Jahr, und $t =$ einem Sterntag setzt.

§. 148. Die Abstände eines Sterns von dem Scheitel eines Orts der Erde werden sich unter der Voraussetzung einer Axendrehung der Erde nach demselben Gesetz verändern, welches man unter der Voraussetzung einer Umdrehung der Himmelskugel gefunden hat. Wenn nemlich durch die Umdrehung der Erde der Ort m auf die Ostseite der Ebene des durch den Stern S und die Pole P, P' der Himmelskugel gelegten grösten Kreises nach v gekommen ist, und der diesem Ort entsprechende Scheitelpunkt nun in den Punkt V fällt; so wird der Stern S von dem Meridian PVP' des Orts v um den Stundenwinkel SPV gegen Abend abzustehen scheinen, und eben dieser Winkel wird den Winkel mpv meßen, um welchen sich die Erde von Abend gegen Morgen gedreht hat. Man lege durch S und V einen Bogen SV eines grösten Kreises; so wird für den Augenblick, da der Beobachtungsort in v ist, der Abstand des Sterns vom Scheitel $= SV$ seyn. Nun ist aber der Punkt V beweglich, und es rückt eigentlich, wenn die Zenithdistanz des Sterns wächst, der Scheitelpunkt von dem Stern ab, und nähert sich demselben, wenn die Zenithdistanz abnimmt. Es kann aber auf ähnliche Art, wie in §. 3. gezeigt werden, daß unter allen von dem Stern S an den Parallelkreis ZVZ' gezogenen Bogen gröster Kreise der SZ am kleinsten, der SZ' aber am grösten ist. Mithin wird die Höhe des Sterns S am grösten oder am kleinsten, wenn der Beobachtungsort in der Ebene des grösten Kreises PSP' liegt, und die Ebene des Erdmeridian mit der Ebene eben dieses Kreises zusammenfällt. Die Sterne werden also wie unter der Voraussetzung einer täglichen Umdrehung der Himmelskugel ihre gröste oder kleinste Höhe über dem Horizont des Beobachtungsorts erreichen, wenn sie durch den Meridian desselben gehen.

Der Abstand ZS eines gegebenen Sterns S vom Scheitel V eines gegebenen Orts der Erde wird sich nun für jede gegebene Zeit durch die Auflösung des sphärischen Dreyecks PS bestimmen lassen. In diesem kennt man die Polardistanz PS des Sterns, die Seite $PV = PZ =$ dem Complement der Polhöhe des Orts und den Stundenwinkel $SPV = mpv$, welcher durch die Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe und die Zwischenzeit zwischen dem Durchgang des Sterns durch den Meridian und dem gegebenen Zeitpunkt, für welchen man den Scheitelabstand sucht, gegeben ist. Man sieht, daß sich diese Aufgabe nach §. 6, 7. und 8. entweder durch Construktion oder durch Berechnung auflösen läßt, und man einerley Resultat erhalten wird, man mag, wie im ersten Capitel des ersten Buchs die Himmelskugel, oder wie hier die Erde sich drehen lassen.

In dem sphärischen Dreyeck SPV ist

$$\text{Sin.}\overline{\quad .}^{2}\,\text{Cos.}\,SV = \text{Sin. tot. Cos.}\,PV\,\text{Cos.}\,PS + \text{Sin.}\,PV\,\text{Sin.}\,PS\,\text{Cos.}\,SPV,$$

oder, wenn man wie in §. 8. die Polhöhe $= l$, die Polardistanz $= d$, die Höhe des Sterns $= h$, und den Stundenwinkel $= t$, mithin $SV = 90° - h$, $PV = 90° - l$, $PS = d$, $SPV = t$ setzt,

$$\text{Sin.}\,\overline{\text{tot.}}^{2}\,\text{Sin.}\,h = \text{Sin. tot. Sin.}\,l\,\text{Cos.}\,d + \text{Cos.}\,l\,\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,t,$$

welcher Ausdruck mit dem §. 8. gegebenen n. 2. übereinstimmt. Folglich wird sich die Höhe eines Sterns unter beyden Voraussetzungen nach einerley Gesetz verändern, wenn der Stundenwinkel sich ändert, und die Erscheinungen der täglichen Bewegung werden sich vollständig durch eine gleichförmige Umdrehung der Erde von Abend gegen Morgen um eine mit der Axe der Himmelskugel zusammenfallende Axe erklären lassen.

§. 149. Man hat in dem fünften Capitel des ersten Buchs gesehen, daß sich die jährliche Bewegung der Sonne in der Ekliptik und die Bewegungen der Planeten auf eine sehr einfache Art erklären lassen, wenn man die Erde um die ruhende Sonne in einem Jahr und in der Richtung von Abend gegen Morgen eine Bahn beschreiben läßt, welche der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde gleich und ähnlich ist. Es werden also jetzt noch diejenigen Erscheinungen zu untersuchen seyn, welche sich zeigen, wenn man die Erde um die Sonne laufen, und sie zugleich um ihre sich drehen läßt. Was nun die Lage dieser Umdrehungsaxe betrifft, so wird, weil die auf ihr senkrechte Ebene des Aequators um die Schiefe der Ekliptik gegen die Ebene der letztern geneigt ist, die Umdrehungsaxe der Erde mit der Ebene der Ekliptik oder der Erdbahn einen Winkel machen müßen, welcher die Schiefe der Ekliptik zu neunzig Graden ergänzt. Es sey $ABCD$ (Fig. 46.) die Bahn der Erde um die Sonne S, und A der Ort der Erde zur Zeit der Frühlingsnachtgleiche, die Aequinoktialpunkte werden fürs erste als ruhend angenommen; so wird derjenige gröste Kreis der Erde, dessen Ebene auf dem Halbmesser SA der Erdbahn senkrecht ist, und welcher daher die Tagseite der Erde von ihrer Nachtseite scheidet, durch die zwey Erdpole p, p' durchgehen müssen, weil um diese Zeit auf der ganzen Erde Tag und Nacht einander gleich sind. Wenn die Erde von dem Punkt A an um die Sonne einen Winkel ASB von 90 Grad beschrieben hat; so wird der Winkel PBS, welchen die Erdaxe pp' mit dem Halbmesser BS der Erdbahn macht, und welcher die Polardistanz der Sonne mißt, am kleinsten und dem Complement der Schiefe der Ekliptik gleich seyn müssen, weil um diese Zeit die Abweichung der Sonne am größten ist (§. 32.). Vermöge eben dieses § muß die durch $P'B$ und BS gelegte Ebene, welche nun mit der Ebene des Colurus der Solstitien zusammenfällt, auf der Ebene der Ekliptik, mithin auf der Ebene der Erdbahn $ABCD$ senkrecht seyn. Folglich wird ein von A auf die durch BP' und BS gelegte Ebene gefälltes Perpendickel in die Linie BSD (XI, 38.) und wegen des rechten Winkels ASB (Voraussetz.) auf die SA fallen. Es ist aber die SA auch auf der Ebene des grösten Kreises senkrecht, welcher, als die Erde in A war, ihren beleuchteten Theil von der Nachtseite trennte; folglich ist die Ebene dieses Kreises mit der durch PB und BS gelegten Ebene parallel (XI, 14.), und in diesen einander parallelen Ebenen muß die Erdaxe liegen, wenn die Erde in B und A ist. Eben so kann gezeigt werden, daß auch in C und D, wo die verlängerten AS, BS die Erdbahn treffen, die Erdaxe in Ebenen liegen muß, welche mit den vorhin genannten Ebenen parallel sind. Ueberdiß muß in D der Winkel $P'DS$, welcher die Polardistanz der Sonne zur Zeit des Wintersolstitiums mißt, am grösten seyn, und einen rechten Winkel um die Schiefe der Ekliptik übertreffen (§. 32.). Folglich wird der Winkel $P'DF$, welchen die Erdaxe pp' mit der Verlängerung DF von SD macht, dem Complement der Schiefe der Ekliptik, d. h. dem Winkel PBS gleich, und die Erdaxe pp', wenn die Erde in D ist mit der Erdaxe pp', wenn sie in B ist, parallel seyn. Man lasse nun auch in den übrigen Lagen der Erde ihre Axe sich beständig parallel bleiben; so wird, wenn sie aus A in E rückt die Polardistanz der Sonne nach und nach

abneh-

abnehmen. Fällt man neinlich, wenn die Erde in E zwischen A und B ist, von einem beliebigen auf der Erdaxe oder ihrer Verlängerung genommenen Punkt P''' ein Perpendickel $P'''Q$ auf die Ebene ihrer Bahn, und zieht die EQ; so ist vermöge der Voraussetzung die Ebene $P'''EQ$ mit der Ebene $P'BS$, und daher EQ mit BS parallel (XI, 16.). Mithin ist $QES = BSE < R$, und ein von Q auf SE gefälltes Perpendickel QR fällt zwischen E und S. Man ziehe $P'''R$. Vermöge der Construktion und XI, 18. sind die Dreyecke $P'''QE$, $P'''QR$ bey Q rechtwinklicht; folglich ist (I, 47.) das Quadrat von $P'''E$ = Quadr. von $P'''Q$ + Quadr. von EQ = Quadr. von $P'''Q$ + Quadr. von QR + Quadr. von RE = Quadr. von $P'''R$ + Quadr. von RE. Daher ist der Winkel $P'''RE$ ein rechter (I, 48.), und der Winkel PER spitz, aber grösser als $P'''EQ$, weil $P'''R > P'''Q$. So wie die Erde weiter gegen B hin rückt, nimmt der Winkel BSE oder der ihm gleiche Winkel QER ab, und da vermöge der Voraussetzung der Winkel PEQ sich nicht verändert; so wird QR und zugleich $P'''R$ abnehmen, und sich der PQ nähern, welcher sie, wenn die Erde in B kommt, gleich werden wird. Die Polardistanz der Sonne, welche bey A 90 Grade betrug, wird also während der Bewegung der Erde von A gegen B beständig abnehmen, ihre Abweichung wird wachsen, und in B am grösten werden. Von da an wird sie, wie auf ähnliche Art gezeigt werden kann, abnehmen, in C verschwinden, und in D ihren grösten Werth auf der Südseite des Aequators erhalten, von welchem Punkt an sie abnehmen wird, bis sie in A wieder verschwindet.

Wenn die Erde in A ist, so sieht man die Sonne nach der Richtung AC in dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche, und wenn sie in E steht, nach der Richtung EE'. Folglich ist der Winkel CSE' der Sonnenlänge gleich, wenn die Erde in E sich befindet. Man setze die Länge der Sonne $= \lambda$, ihre Abweichung $= \delta$, die Schiefe der Ekliptik $= \epsilon$; so ist für den Halbmesser oder Sinus totus $P'''E$

$EQ = \text{Cos. } P'''EQ = \text{Sin. } \epsilon$

$ER = \text{Cos. } P'''ER = \text{Sin. } \delta$, und es verhält sich

$\text{Sin } \delta : \text{Sin } \epsilon = ER : EQ$

$= \text{Cos.}\, QER : \text{Sin. tot.}$, weil $QRE = R$

$= \text{Sin.}\, \lambda : \text{Sin. tot.}$, weil $QER = DSE' = 90^0 - \left\{ \begin{matrix} CSE' \\ \lambda \end{matrix} \right\}$.

Folglich findet wirklich dieselbe Beziehung zwischen der Schiefe der Ekliptik, der Länge und Abweichung der Sonne Statt, welche man in §. 36. n. 8. aus der Betrachtung der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde abgeleitet hat.

§. 150. Wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte (§. 37.) tritt das Aequinoktium wieder ein, ehe die Sonne wieder nach der Richtung *AS* erscheint, oder ehe die Erde den Punkt *A* wieder erreicht hat. Da nun um diese Zeit die von der Sonne an den Mittelpunkt der Erde gezogene gerade Linie auf der Ebene senkrecht seyn muß, welche durch die Erdaxe und auf die Ebene der Erdbahn senkrecht gelegt ist; so muß die Erdaxe nach und nach von ihrer parallelen Lage um eben so viel abweichen, als die Bewegung der Aequinoktialpunkte beträgt. Man wird also auch das Zurückweichen der Aequinoktialpunkte und die dadurch verursachte Voreilung der Nachtgleichen ganz einfach darstellen können, wenn man die Durchschnittslinie der durch die Erdaxe auf die Ebene der Erdbahn senkrecht gelegten Ebene mit der Ebene der Erdbahn von Morgen gegen Abend mit derselben Geschwindigkeit sich bewegen läßt, mit welcher die Aequinoktialpunkte nach eben dieser Richtung sich zu bewegen scheinen. Unter dieser Voraussetzung wird die Erdaxe in derselben Zeit, in welcher die Aequinoktialpunkte ihren scheinbaren Umlauf in Beziehung auf die Fixsterne machen, die Oberfläche eines Kegels beschreiben, dessen Axe auf der Ebene der Erdbahn senkrecht steht, und dessen Seitenlinien gegen seine Axe um die Schiefe der Ekliptik geneigt sind.

Um endlich die Veränderung der Schiefe der Ekliptik (§. 39.) darzustellen, wird man den Winkel der Erdaxe mit der Ebene der Erdbahn um eben so viel müssen zunehmen lassen, als die Schiefe der Ekliptik abnimmt, d. i. jährlich um 0,521 Sekunden, oder man wird die Lage der Ebene der Erdbahn sich müssen um eben so viel verändern lassen.

§. 151. Da aus der Voraussetzung der Umdrehung der Erde um eine gegen die Ebene der Bahn, welche sie um die Sonne beschreibt, geneigte Axe sich dasselbe Gesetz für die Veränderung der Abweichung der Sonne ergiebt, welches man aus der scheinbaren Bewegung der Sonne in der Ekliptik abgeleitet hat (§. 149); so ist klar, daß auch die im 51. §. betrachteten Veränderungen der Jahrszeiten und die Verschiedenheiten des Clima's aus dieser Voraussetzung eben so sich ergeben werden, wie man sie im 51. §. gefunden hat. Sie folgen aber auch unmittelbar aus der Betrachtung der 40ten Figur. Wenn die Erde in *A* ist, und die Sonne nach der Richtung *AS* in dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche zu stehen scheint; so fallen die Pole p, p' der Erde auf den Umfang des Kreises, welcher die Nachtseite der Erde von der Tagseite scheidet, und der Beleuchtungskreis heißen mag. Alsdenn sind auf der ganzen Erde Tag und Nacht einander gleich, weil der Beleuchtungskreis durch die Pole der Erde geht, und daher die von allen Orten der Erde während ihrer Umdrehung beschriebenen Parallelkreise halbirt, und eben dieses findet Statt, wenn die Erde in *C* ist, und das Herbstäquinoktium eintritt. Die erweiterte Ebene des Erdäquators geht durch die Sonne, und unter dem Aequator geht alsdenn die Sonne im Scheitel durch den Meridian. Unter den Polen hingegen, welche auf dem Beleuchtungskreis selbst liegen, erscheint die Sonne am Horizont. Die Erde befinde sich jetzt in *E* zwischen *A* und *B*. Man denke sich durch *SE* und EP''' eine Ebene gelegt, welche der Ebene des Beleuchtungskreises in der geraden Linie *dE* begegne; so wird die Ebene *SEd* auf der Ebene des Beleuchtungskreises senkrecht (XI, 18.), *SEd* $= R$ und dEP''' der Abweichung der Sonne gleich seyn. Weil nun die Ebene dEP''' auf der Ebene des Beleuchtungskreises senkrecht ist, so ist unter allen von dem Pol *p* an dem Umfang des Beleuchtungskreises gehenden Bogen größter Kreise der Erde der in der Ebene $P'''Ed$ liegende *pd* der kleinste. Folglich mißt die Abweichung der Sonne den kleinsten Abstand des beleuchteten Erdpols von dem Umfang des Beleuchtungskreises. Der entgegengesetzte Pol *p* wird in die Nachtseite fallen, und eben so weit von dem Beleuchtungskreis abstehen. Demnach werden alle Parallelkreise des Erdäquators, deren Abstände von den Polen nicht grösser als die Abweichung der Sonne sind, ganz auf der Tagseite, oder ganz auf der Nachtseite der Erde liegen, je nachdem der ihnen zunächst liegende Erdpol beleuchtet ist oder nicht, und daher wird an denjenigen Orten, deren Polhöhen nicht kleiner als das Complement der Abweichung der Sonne sind, die Sonne nicht unter oder nicht aufgehen, je nachdem die Abweichung der Sonne mit diesen Polhöhen einerley oder verschiedene Benennungen, nördlich und südlich hat.

Die durch *SE* und *P''E* gelegte Ebene schneide die Oberfläche der Erde in dem Meridian *dpab'*, welchem die *SE* in *o* begegne. Da $PES < R$; so ist der Bogen *po* < 90 Gr. Man nehme $pa = 90°$; so liegt der Ort *a* unter dem Aequator, die Polhöhe des Orts *o* ist $= ao =$ der Abweichung der Sonne, und diese geht in dem Scheitel dieses Orts, so wie aller derjenigen, deren Polhöhe der Abweichung der Sonne gleich ist, durch den Meridian. Mit der Abweichung der Sonne wächst die Polhöhe derjenigen Orte, deren Scheitel die Sonne erreichen kann, und die Polhöhe derjenigen welchen die Sonne nicht unter- oder aufgeht nimmt ab, bis sie am grösten und der Schiefe der Ekliptik gleich wird, wo die äussersten Parallelkreise, unter welchen diese Erscheinungen noch Statt finden, in die Wendekreise und Polarkreise übergehen, und die Erde in die verschiedenen Zonen eintheilen, wie man im 51sten §. gesehen hat.

Aus der Sonne gesehen erscheint der Meridian *pop'* der Erde, in dessen erweiterten Ebene die Sonne steht, als eine gerade auf die Durchschnittslinie *dE* dieses Meridians mit der Beleuchtungsebene fallende Linie. Da so wohl *QRS* (Constr.) als *P'''RS* (Bew. §. 150.) $= R$; so ist die Ebene *P'''RQ* auf *RS* senkrecht, und daher diese Ebene mit der Ebene des Beleuchtungskreises parallel (XI, 14.). Folglich ist auch die *dE* mit *P'''R* parallel (XI. 16.). Man errichte in *E* ein Perpendickel *En* auf der Ebene der Erdbahn, welches in der auf eben dieser Ebene senkrechten Ebene des Beleuchtungskreises liegen, und (XI, 6.) der *P'''Q* parallel seyn wird. Mithin wird der Winkel *nED* dem Winkel *RP'''Q* gleich seyn (XI, 10.). Es ist aber, wenn man die in §. 150. gebrauchte Bewegungen beybehält, für den Halbmesser *P'''Q*.

$$EQ = \text{Tg. } QP'''E = \text{Tg. } \epsilon$$
$$QR = \text{Tg. } QP'''R = \text{Tg. } qED,$$

folglich verhält sich Tg. ϵ Tg. $nEd = EQ : QR$

$$= \text{Sin. tot. } \text{Sin. } QER$$
$$= \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } \lambda,$$

weil $QER = DSE' = 90^\circ - CSE' = 90^\circ - \lambda$.

Demnach ist $\text{Tang. } nEd = \dfrac{\text{Tg. } \epsilon \text{ Cos. } \lambda}{\text{Sin. tot.}}$.

Der Winkel nEd, welchen der nördliche Theil des durch den scheinbaren Mittelpunkt der Erde gehenden Meridians mit nE, oder dem durch die Erde gelegten Breitenkreises, von der Sonne aus gesehen zu machen scheint, fällt, wie im Fall der Figur, westlich vom Breitenkreis, wenn Cos. λ positiv, und östlich, wenn dieser Cosinus negativ ist.

§. 152. Die Bewegung der Erde um die Sonne und ihre Axendrehung werden schon dadurch sehr wahrscheinlich, daß unter dieser Voraussetzung die täglichen Bewegungen der Himmelskörper, die jährliche Bewegung der Sonne und die davon abhängende Verschiedenheit der Jahrszeiten, und die verwickelt scheinende Bewegung der Planeten nicht allein vollständig und weit einfacher, als in dem ptolemäischen und tychonischen System, erklärt werden können, sondern auch ganz ähnliche Bewegungen an den Planeten, in deren Classe die Erde zu gehören scheint, beobachtet werden. Gegen die Bewegung der Erde wird man aber noch die Einwendung machen können, daß, wenn sie wirklich sich um die Sonne bewegte, die Fixsterne ihre Lage so wohl unter sich, als in Beziehung auf die Ekliptik verändern müssen, und diese scheinbare Bewegung der Fixsterne wegen des mehr 23000 Erdhalbmesser betragenden Abstands der Erde von der Sonne §. 50.) nicht unbemerkt bleiben könne, wenn gleich, so lange nur von verschiedenen Punkten der Oberfläche der Erde die Rede ist, die Parallaxe der Fixsterne für uns verschwindet (§ 25.). Es wird also, wenn anders der Halbmesser der Erdbahn in Vergleichung mit der Entfernung der Fixsterne nicht für uns verschwindet, eine von der Bewegung der Erde um die Sonne abhängende Ortsveränderung der Fixsterne Statt finden müssen, welche man die jährliche Parallaxe der Fixsterne nennt. Man setze die Sonne unbeweglich in *C* (Fig. 47.) um welche die Erde die beynahe kreisförmige Bahn *ABDE* beschreibe, in deren erweiterten Ebene ein Stern *S* stehe. Steht die Erde in *B* auf der geraden Linie *SC*, welche von der Sonne *C* an den Stern *S* gezogen ist; so sieht der Beobachter den Stern an derselben Stelle des Himmels, wo er aus dem Mittelpunkt der Sonne gesehen erscheinen würde. Bewegt sich die Erde nach *D*; so wird die Gesichtslinie *DS* mit der vorigen *CS* den Winkel *CSD* machen, welcher am größten seyn wird, wenn die *SD* die Erdbahn in *D* berührt. Bey der Bewegung der Erde von *D* gegen *E* wird dieser Winkel wieder abnehmen, in *E* auf der Verlängerung von *SC* verschwinden, von *E* bis *A*, wo die *SA* die Erdbahn berührt, wachsen, hernach abnehmen, und in *B* verschwinden. Die in der Ekliptik stehende Sterne werden also in derselben eine vor- und rückwarts gehende Bewegung zu haben scheinen, und sie werden sich in der Mitte der von ihnen beschriebenen Bogen der Ekliptik befinden, wenn sie in Conjunktion oder Opposition mit der Sonne sind, an ihren Endpunkten aber, wenn ihre scheinbaren Abstände von der Sonne = 90 Gr. sind.

Bey dem ersten Anblick scheint es unmöglich, diese scheinbaren Bewegungen zu bestimmen, weil die Fixsterne selbst die als unbeweglich betrachtete Punkte der Himmelskugel sind, auf welche wir die Bewegungen beziehen, und durch dieselbe die Lage des Aequinoktialpunkts gegeben ist, von welchem an die Längen gerechnet werden. Aber diese Bewegungen müßten, wenn sie anders merklich sind, sich zeigen, wenn man zwey Sterne zu verschiedenen Jahrszeiten mit einander vergleicht. Man meße, wenn die Erde in *B* auf der geraden Linie zwischen *S* und *E* ist, den Abstand *SBs* eines zweyten ebenfalls in der Nähe der Ekliptik stehenden Fixsterns *s* von dem *S*, welcher ungefähr 90° betrage. Wenn die Erde nach *e* gekommen ist, wird man durch Fernröhren den Stern *S* bey Tag und ziemlich nahe bey der Sonne beobachten können, wo der Winkel *BSe* sehr klein seyn wird. Man wird also auch den scheinbaren Abstand *Ses* der zwey Sterne, wenn die Erde in *e* ist, beobachten können. Es sey g der Durchschnittspunkt der geraden Linien Bs und Se; so wird $Sgs = Ses + Bse = SBs + BSe$ (I, 32.), und daher $Bse = SBs - Ses + BSe$ seyn. Der letztere dieser Winkel ist zwar unbekannt, aber er muß in Vergleichung mit dem Winkel Bse, welcher nahe seinen grösten Werth erhält, sehr klein seyn, den Fall ausgenommen, wo der Stern s sehr viel weiter von der Sonne entfernt wäre, als der Stern S, und er seinen Abstand von dem leztern nicht merklich ändern würde. Alsdenn wird man die Abstände des Sterns S von dem s zu beobachten haben, wenn der leztere in Opposition und nahe in der Conjunktion mit der Sonne ist. Findet sich jezt der Unterschied der scheinbaren Abstände grösser, als im ersten Fall, so wird der Stern S der Sonne näher seyn, als der Stern s, und man wird den lezteren gebrauchen müssen, um die Ortsveränderung des Sterns S zu bestimmen.

§. 153. Steht ein Stern nicht in der Ekliptik; so wird sich so wohl seine Länge als seine Breite verändern müssen. Es sey $GVBAB'$ (Fig. 48.) die Ekliptik, in deren Ebene die Erde T ihre Bahn TMF um die Sonne C beschreibe, und E sey der Nordpol der Ekliptik, V der Punkt der Frühlingsnachtgleiche. Von der Sonne C sey die gerade Linie CO nach einem ausserhalb der Ebene der Ekliptik liegenden Stern O gezogen, welche der Himmelskugel in S begegne, und durch den Pol E der Ekliptik und den Punkt S sey der gröste Kreis $GESH$ gelegt; so wird VA die wahre Länge dieses Sterns, AS seine wahre Breite seyn. Der Beobachter auf der Erde T sieht den Stern nach der Richtung TO, und sezt ihn, weil er seinen Standpunkt beständig in dem Mittelpunkt C der Himmelskugel annimmt, in den Punkt s, in welchem die durch C mit der TO parallel gezogene CN ihrer Oberfläche begegnet. Man lege durch die Parallelen TO, CN eine Ebene, welche die Oberfläche der Himmelskugel in einem grösten durch die Punkte S und s gehenden Kreis $BsSB'$ schneiden wird. Zieht man noch durch den Pol E der Ekliptik und den scheinbaren Ort s des Sterns einen grösten Kreis $A'sE$; so wird VA' die scheinbare Länge, *A's* die scheinbare Breite des Sterns seyn.

Man ziehe durch den Ort *O* des Sterns die Parallele *ON* mit *TC*, welche der *Cs* in *N* begegne. Bey der Bewegung der Erde um die Sonne wird die *NO* um den Punkt *O* eine der Erdbahn gleiche und ähnliche Bahn beschreiben, welche in einer mit der Ekliptik parallelen Ebene liegen wird. Unter der Voraussetzung einer kreisförmigen Bahn der Erde wird also der Punkt *N* um den Punkt *O* einen der Ebene der Ekliptik parallelen Kreis, mithin die nach dem scheinbaren Ort des Sterns gezogene *Cs* die Oberfläche eines schief stehenden Kegels beschreiben, dessen Spitze in *C* liegt und dessen Axe die nach dem wahren Ort des Sterns *S* gezogene *CS* ist. Wird diese Kegeloberfläche mit einer die Oberfläche der Himmelskugel in *S* berührenden oder auf des Kegels Axe *CS* senkrechten Ebene geschnitten; so wird die Durchschnittslinie ein Ellipse seyn, deren große Axe mit der Ebene der Ekliptik parallel, deren kleine Axe also auf der Ekliptik senkrecht seyn wird. Mithin wird jeder Fixstern vermöge der jährlichen Parallaxe, wenn sie merklich ist, um seinen wahren Ort als Mittelpunkt in einem Jahr eine Ellipse zu beschreiben scheinen, welche, wenn der Stern im Pol der Ekliptik steht, in einen Kreis, und, wenn er sich in der Ekliptik befindet, in eine gerade Linie übergeht. Wenn der Stern mit der Sonne in Conjunktion oder Opposition ist; so fällt der Kreis *BSB'* auf den *AEG*, mithin der scheinbare Ort des Sterns auf die Endpunkte der kleinen Axe dieser Ellipse, und er steht im ersten Fall am weitesten von dem Nordpol *E* der Ekliptik ab, im letzteren ist er ihm am nächsten. In den Quadraturen wird sich der Stern an den Endpunkten der großen Axe befinden.

§. 154. In dem Dreyeck *CTO* verhält sich $CO : CT = \text{Sin. } CTO : \text{Sin. } COT$, und daher wird der Winkel *COT* am größten, wenn *CTO*, oder die scheinbare Breite des Sterns $= 90$ Gr. wird. Setzt man diesen größten Werth der Parallaxe $= p$; so verhält sich $CO : CT = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } p = \text{Sin. } CTO : \text{Sin. } COT$.

In dem bey A rechtwinklichten sphärischen Dreyeck ASB verhält sich

$$\text{Sin. } ASB : \text{Sin. } AB = \text{Sin. tot.} \quad \text{Sin. } BS$$
$$\text{nahe} = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } Bs$$
$$= \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } CTO$$
$$= \text{Sin. } p \quad \text{Sin. } COT$$
$$= \text{Sin. } p \quad \text{Sin. } Ss$$

folglich ist 1.) $\text{Sin. } Ss \ \text{Sin. } ASB = \text{Sin. } p \ \text{Sin. } AB$

In eben diesem sphärischen Dreyeck verhält sich

$$\text{Sin. tot.} \quad \text{Sin. } ABS = \text{Sin. } BS : \text{Sin. } AS$$
und $$\text{Cos. } AB \quad \text{Cos. } ASB = \text{Sin. tot.} \quad \text{Sin. } ABS$$

folglich $$\text{Cos. } AB \quad \text{Cos. } ASB = \text{Sin. } BS : \text{Sin. } AS$$
da nun $$\text{Sin } p \quad \text{Sin. } Ss = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } BS$$

so ist 2.) $\text{Sin. } p \ \text{Cos. } AB : \text{Sin. } Ss \ \text{Cos. } ASB = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } AS$

Man ziehe den Bogen sR auf AE senkrecht; so kann man das bey R rechtwinklichte sphärische Dreyeck wegen der Kleinheit des Winkels p als ein geradlinigtes betrachten, und man wird haben

$$sR = Ss \frac{\text{Sin. } ASB}{\text{Sin. tot.}} = \frac{p \ \text{Sin. } AB}{\text{Sin. tot.}} \ (\text{n. } 1.)$$

$$SR = Ss \frac{\text{Cos. } ASB}{\text{Sin tot.}} = \frac{p \ \text{Sin. } AS \ \text{Cos. } AB}{\text{Sin. tot.}^2} \ (\text{n. } 2.)$$

Sey die Länge VA des Sterns $= l$, die Länge VB der Sonne $= \odot$, die Breite AS des Sterns $= b$; so hat man

$$3.) \ sR = \frac{p \ \text{Sin. } (l - \odot)}{\text{Sin. tot.}},$$

$$4.) \ SR = \frac{p \ \text{Sin. } b \ \text{Cos. } (l - \odot)}{\text{Sin. tot.}^2}.$$

Vermöge n. 3. verschwindet sR, wenn der Stern in Conjunktion und Opposition mit der Sonne ist, und SR wird nach n. 4. im ersten Fall $= \frac{p \ \text{Sin. } b}{\text{Sin. tot.}}$, im letzteren $= - \frac{p \ \text{Sin. } b}{\text{Sin. tot.}}$. Mithin liegt der scheinbare Ort des Sterns, wenn seine Breite nördlich ist, im ersten Fall, wie in der Figur, südlich von dem wahren Ort, im letzteren nördlich, und umgekehrt bey südlicher Breite, aber jedesmal in dem durch den wahren Ort, gehenden Breitenkreis. Die Längenparallaxe verschwindet also, und die Breitenparallaxe wird am größten.

Ist der Ueberschuß der Länge des Sterns über die Länge der Sonne $= 90$ oder 270 Graden; so wird sR am größten, nemlich $= p$, und im ersten Fall positiv, im letzteren Fall negativ, oder die wahre Länge ist im ersteren Fall grösser, im letzteren kleiner als die scheinbare. Hingegen verschwindet jetzt SR, und die scheinbare Breite wird der wahren gleich.

Man ziehe zwey gerade Linien Ee, ab (Fig. 49. a) aufeinander senkrecht, ihr Durchschnittspunkt S sey der wahre Ort des Sterns, und SE ein Stük des durch ihn gezogenen Breitenkreises, welches dem Beobachter als eine gerade Linie erscheint. Von S an seyen Sd und $Se = p$ Sin. b, und $Sa = Sb = p$ genommen, wenn man zur Abkürzung den Sinus totus $= 1$ setzt. Ferner nehme $SR = p$ Sin. b Cos. $(l - \odot)$, und senkrecht auf de die $sR = p$ Sin. $(l - \odot)$; so wird

$$\overline{sR}^2 = p^2 \overline{\text{Sin.}\ (l - \odot)}^2 = p^2 - p^2 \overline{\text{Cos.}\ (l - \odot)}^2$$

$$\overline{sR}^2\ \overline{\text{Sin.}\ b}^2 = p^2\ \text{Sin.}\ b^2 - p^2 \overline{\text{Sin.}\ b}^2\ \overline{\text{Cos.}\ (l - \odot)}^2$$

$$= \overline{Se}^2 - \overline{SR}^2$$

$$= eR \times Rd\ \text{(II, 5.)}$$

Daher verhält sich $\overline{sR}^2 : eR \times Rd = \overline{Sa}^2\ \ \overline{Se}^2$,

und der Stern scheint um seinen wahren Ort eine Ellipse zu beschreiben, deren große mit der Ekliptik parallele Axe ab die scheinbare Größe $2p$ hat, und sich zu der kleinen de, wie der Sinus totus zu dem Sinus der Breite des Sterns verhält. Demnach ist die gröste Parallaxe eines Fixsterns durch seine gröste Breitenparallaxe gegeben.

§. 155. Vor der Erfindung der Fernröhren konnte man keine solche mit den Jahrszeiten in derselben Ordnung wiederkehrende Ortsveränderungen der Fixsterne bemerken. Aber am Ende des Jahrs 1725 fiengen **Molineux** und **Bradley** ihre Beobachtungen mit vollkommeneren Werkzeugen, welche einen Winkel von $\frac{1}{2}$ Sekunde merklich machten an, und lezterer fand wirklich eine kleine scheinbare Bewegung der Fixsterne, welche zwar, wie es bey einer jährlichen Parallaxe seyn mußte, eine Periode von einem Jahr hatten, hingegen ein ganz anderes Gesez befolgten. Die Sterne auf der Nordseite der Ekliptik hatten ihre gröste und kleinste Breite, wenn sie Abends und Morgens um 6 Uhr durch den Meridian giengen, oder 90° östlich und westlich von der Sonne abstunden, um die Zeit der Conjunktion und Opposition mit der Sonne befanden sie sich an ihrem mittleren Ort. Diese Erscheinungen waren also denenjenigen gerade entgegengesetzt, welche sich bey einer jährlichen Parallaxe hätten zeigen müßen. Ueberdieß bemerkte er, daß die ganze Veränderung der Breite mit der Breite selbst zunahm, und ihrem Sinus proportional war, welches unter der Voraussetzung einer jährlichen Parallaxe nur alsdenn Statt finden könnte, wenn alle Fixsterne gleich weit von der Sonne entfernt wären. Die ganze Veränderung der Breite verhält sich nach Bradley's Beobachtungen zu 40 Sekunden wie der Sinus der Breite zu dem Sinus totus, welche demnach bey einem im Pol der Ekliptik stehenden Fixstern 40 Sekunden beträgt.

§. 156. Bradley fand nach mehrere Jahre fortgesetzten Beobachtungen die Ursache dieser durch eine jährliche Parallaxe unerklärbaren Erscheinungen in der von Römer entdeckten succeßiven Fortpflanzung des Lichts (§. 107.), verbunden mit der Bewegung der Erde um die Sonne. Das Licht durchlauft den Halbmesser der Erdbahn in einer Zeit von 8' 13",2, und in eben dieser Zeit durchlauft die Erde, weil sie in einem Jahr einen Umlauf um die Sonne macht, einen Bogen von 20,25 Sekunden, dessen Länge sich also zu seinem Halbmesser wie 1 : 10186 verhält. Mithin verhält sich die Geschwindigkeit der Erde zu der Geschwindigkeit des Lichts wie 1 : 10186. Es seyen nun *ST*, *S'K* (Fig. 50.) die von einem Stern herkommende Lichtstralen, welche mit Beyseitsetzung einer Parallaxe hier als miteinander parallel angenommen werden. Das Auge des Beobachters bewege sich nach der Richtung *AN* gleichförmig mit einer Geschwindigkeit, welche sich zu der Geschwindigkeit des Lichts verhalte wie *AT* : *TQ*. Man ziehe *AQ*, und lasse sich diese Linie mit sich selbst parallel so fortbewegen, daß ihr Endpunkt *A* mit der Geschwindigkeit des Auges fortrücke; so wird ein von dem Stern herkommender Lichtstral, welcher in dem Augenblick, als das Auge in *A* war; in *Q* ankam, in derselben Zeit, in welcher das Auge in *T*, und die Linie *AQ* in die Lage *TL* gekommen ist, den Weg *QT* gemacht haben, und sich also an dem Ende der parallel fortrückenden Linie *AQ* befinden. Man ziehe *QL* mit AN, und durch einen zwischen A und T liegenden Punkt a die ab mit AQ parallel, welche der TQ in q, der LQ in b begegne; so verhält sich $Aa : Qq = AT : TQ$ = Geschwindigkeit des Auges zu der Geschwindigkeit des Lichts. Folglich sind Aa und Qq die in einerley Zeit zurückgelegten Wege des Auges und des Lichts, welches sich beständig an der mit sich selbst parallel fortrückenden geraden Linie AQ hin zu bewegen scheinen wird. Der Beobachter wird also den Stern nach der Richtung AQ, ab, TL u. s. w. zu sehen glauben, welchen er, wenn er in Ruhe wäre, nach den Richtungen TQ, KL sehen würde. Die ersteren Linien machen mit den letzteren einen Winkel $= AQT$, welchen man die Aberration des Lichts nennt. Unter der Voraussetzung der Bewegung der Erde um die Sonne verhält sich nun die Geschwindigkeit des Lichts zu der Geschwindigkeit des Auges wie $10186 : 1 = TQ : AT$; folglich ist, wenn der Winkel TAQ ein rechter ist, die Aberration AQT $= 20,25$ Sekunden. Ist aber der Winkel TAQ ein schiefer; so ist die Aberration in demselben Verhältniß kleiner als $20'',25$, in welchem sein Sinus kleiner ist, als der Sinus totus.

§. 157. Es sey nun, wie im 154. §. TMF Fig. 51. die in der Ebene GVA der Ekliptik liegende als kreisförmig angenommene Bahn der Erde um die Sonne C als Mittelpunkt, E der Nordpol der Ekliptik. Die Erde befinde sich in dem Punkt T ihrer Bahn, und von ihr sey die gerade Linie TO nach dem wahren Ort eines Sterns gezogen. Man ziehe die Tangente TK an die Erdbahn, welche unter der hier gemachten Voraussetzung einer kreisförmigen Bahn auf dem Halbmesser CT senkrecht seyn, und die Richtung der Bewegung der Erde bezeichnen wird. Man nehme auf dieser Tangente von dem Berührungspunkt T an nach der Richtung der Bewegung der Erde die TK und auf der TO die TQ so, daß sich $TK : TQ$ wie die Geschwindigkeit der Erde zu der Geschwindigkeit des Lichts verhalte, vollende das Parallelogramm $TKLQ$, und ziehe die Diagonale TL; so wird der Beobachter in T vermöge des vorhergehenden §. den Stern nach der Richtung TL sehen. Man ziehe die Halbmesser CS, Cs der Himmelskugel mit TO, TL beziehungsweise parallel; so wird S der wahre, s der scheinbare Ort des Sterns seyn, wenn die Aberration allein, und keine Parallaxe Statt fände. Zieht man durch den Pol E der Ekliptik und durch die Punkte S, s die grösten Kreise $GESA$, EsA'; so wird, wenn V der Aequinoktialpunkt ist, VA die wahre, VA' die scheinbare Länge des Sterns, AS seine wahre, $A's$ seine scheinbare Breite seyn. Wegen der Parallelen TQ und CS, TL und Cs wird nun der Winkel QTL dem Winkel SCs gleich (XI, 10.), und die Ebene des ersteren Winkels oder des Parallelogramms KQ der Ebene des letztern oder der Ebene des durch S und s gelegten grösten Kreises SsB parallel seyn (XI, 15.). Demnach wird auch die Durchschnittslinie CB, welche die Ebene des letztern mit der Ebene der Ekliptik macht, mit der Tangente TK der Erdbahn parallel seyn (XI, 16.). Auf der CS sey $Cq = TQ$ genommen, und in der Ebene BCS die ql mit CB parallel gezogen; so werden auch ql, TK, QL parallel (XI, 9.), und wegen der gleichwinklichten Dreyecke qCl, QTL einander gleich seyn. Bey der Bewegung der Erde um die Sonne wird nun die mit der Tangente TK parallel gezogene ql sich um den Punkt q in einer mit der Ekliptik parallelen Ebene herumbewegen, und unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung der Erde wird der Endpunkt l der ql einen mit der Ekliptik parallelen Kreis beschreiben, welcher, wenn der Stern im Pol der Ekliptik steht, dem Beobachter auch als ein Kreis unter einem scheinbaren Durchmesser von $40'',5$ erscheinen wird, weil in eben diesem Fall qCl oder $QTL = 20'',25$ wird (§. 150.).

Da alle an den scheinbaren Ort s des Sterns gezogene Gesichtslinien, wie die Cs, durch den Umfang dieses Kreises gehen; so wird, wie bey einer jährlichen Parallaxe jeder Fixstern um seinen wahren Ort eine Ellipse zu beschreiben scheinen, deren große mit der Ekliptik parallele Axe unter einem Winkel von $40'',5$ erscheinen, und deren kleine Axe mit der Breite des Sterns, und zwar im Verhältniß des Sinus der Breite, abnehmen, und, wenn der Stern in der Ekliptik steht, verschwinden wird. Demnach müßen alle nicht in der Ekliptik stehende Sterne übereinstimmend mit Bradley's Beobachtungen wegen der Aberration des Lichts eine Veränderung in der Breite zeigen, welche am Pol der Ekliptik auf $40''5$ steigt, für andere Sterne aber im Verhältniß des Sinus ihre Breite zu dem Sinus totus kleiner als $40'',5$ ist. Aber nicht allein die Größe dieser scheinbaren Bewegungen, sondern auch das Gesetz, nach welchem sie sich richten müßen, stimmt genau mit Bradley's Beobachtungen überein. Weil nemlich die TK die Erdbahn berührt; so ist wegen der geringen Abweichung der Erdbahn von einem mit der Sonne concentrischen Kreis der Winkel CTK nahe ein rechter. Man verlängere TC bis an die Ekliptik nach D; so scheint die Sonne in D zu stehen, wenn die Erde in T ist, und es ist wegen der Parallelen CB und TK der Winkel $DCB = CTK$ nahe gleich einem rechten Winkel, oder die Länge der Sonne ist beständig um 90 Gr größer, als die Länge des Punkts B. Wenn nun B in A fällt; so fällt s auf den Breitenkreis AE unterhalb S und die scheinbare Breite des Sterns ist um Ss kleiner als die wahre. Die Sonne steht alsdenn 90 Grade von A oder dem Stern gegen Morgen ab, und der Stern geht Morgens um 6 Uhr durch den Meridian. Fällt B auf G, so fällt s auf den Breitenkreis AE oberhalb S, und die scheinbare Breite ist um Ss größer als die wahre. Die Sonne steht jetzt $90°$ von G gegen Morgen, und daher von A um $90°$ gegen Abend ab. Mithin geht der Stern, wenn seine Breite am grösten ist, Abends um 6 Uhr durch den Meridian. Im Allgemeinen sieht man, daß unter übrigens gleichen Umständen die Aberration eben so von der Lage des Punkts B abhängt, wie die jährliche Parallaxe von der Lage des mit eben diesem Buchstaben bezeichneten Punkts in der 48sten Figur. Dieser Punkt ist in der 48sten Figur der Ort der Sonne, in der 51sten hingegen ist die Sonne dem Punkt B beständig um 90 Grade voraus, woher es kommt, daß die Erscheinungen der Aberration denenjenigen, welche bey einer merklichen jährlichen

Parallaxe sich zeigen müßten, entgegengesetzt sind. Demnach stimmt auch das aus der Theorie der Aberration gefundene Gesetz, nach welchem sie sich verändert, mit Bradley's Beobachtungen überein.

§. 158. Nimmt man, wie im 154. §. jede der Seiten des sphärischen Dreyecks *ASB* (Fig. 51.) kleiner als 90 Grad, und setzt den Winkel, dessen Sinus zu dem Sinus totus sich wie die Geschwindigkeit der Erde zu der Geschwindigkeit des Lichts verhält, und welcher nach §. 156. für die mittlere Geschwindigkeit der Erde 20″,25 beträgt, gleich a; so hat man, wie im 154. §. wenn sR auf AE senkrecht gezogen wird,

$$1.)\ sR = \frac{a \text{ Sin. } AB}{\text{Sin. tot.}} = \frac{a \text{ Cos. } AD}{\text{Sin. tot.}}$$

$$2.)\ SR = \frac{a \text{ Sin. } AS \text{ Cos. } AB}{\text{Sin. tot.}^2} = \frac{a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } AD}{\text{Sin. tot.}^2}$$

woraus wiederum folgt, daß wegen der Aberration jeder nicht in der Ekliptik stehende Fixstern um seinen wahren Ort als Mittelpunkt eine Ellipse zu beschreiben scheint, deren große Axe unter dem Winkel $2a$ erscheint, und den durch den wahren Ort des Sterns gelegten Breitenkreis senkrecht durchschneidet. Die große Axe der Aberrationsellipse verhält sich zu der kleinen, wie der Sinus totus zu dem Sinus der Breite des Sterns. Steht der Stern in der Ekliptik; so geht die Ellipse in eine gerade Linie über, und die Aberration der Breite verschwindet.

Es ist $\text{Cos. } AD = \text{Cos. } (VD - VA) = \text{Cos. } (VA - VD)$

$\text{Sin. } AD = \text{Sin. } (VD - VA) = - \text{Sin. } (VA - VD)$;

also, wenn man die Bezeichnungen des 154. §. beybehält, und den Sinus totus $= 1$ setzt,

$$3.)\ sR = a \text{ Cos. } (l - \odot)$$

$$4.)\ SR = - a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } (l - \odot)$$

Man setze diejenigen Abstände vom Breitenkreis und dem durch ihn in dem wahren Ort des Sterns gezogenen Perpendikel, welche wegen der jährlichen Parallaxe und der Aberration zugleich Statt finden würden, seyen sR' und SR' Fig. 49. b; so wird man haben

$$sR' = a \text{ Cos. } (l - \odot) + p \text{ Sin. } (l - \odot)$$

$$SR' = - a \text{ Sin. } b \text{ Sin. } (l - \odot) + p \text{ Sin. } b \text{ Cos. } (l - \odot)$$

Man setze $\frac{p}{a} = \text{Tg. } z$; so wird $\frac{a}{\text{Cos. } z} = a \text{ Sec. } z = \sqrt{a^2 + p^2}$,

und $sR' = \sqrt{a^2 + p^2}\,(\text{Cos. } (l - \odot) \text{ Cos. } z + \text{Sin. } (l - \odot) \text{ Sin. } z)$

$SR' = -\text{Sin.}\, b \sqrt{a^2 + p^2}\, (\text{Sin.}\, (l - \odot)\, \text{Cos.}\, z - \text{Cos.}\, (l - \odot)\, \text{Sin.}\, z)$,

oder 5.) $sR' = \sqrt{a^2 + p^2}\, \text{Cos.}\, (l - \odot - z)$

6.) $SR' = -\text{Sin.}\, b \sqrt{a^2 + b^2}\, \text{Sin.}\, (l - \odot - z)$.

Hieraus folgt auf ähnliche Art, wie in §. 154, daß die scheinbare Bahn eines Sterns um seinen wahren Ort wegen der jährlichen Parallaxe und Aberration zugleich wiederum eine Ellipse ist, deren große Axe zur kleinen wie der Sinus totus zu dem Sinus der Breite des Sterns sich verhält, und auf dem durch den wahren Ort des Sterns gelegten Breitenkreis senkrecht steht. Die Veränderungen der Breite und Länge werden grösser, und richten sich nach der Länge eines Punkts, der in der Ekliptik beständig um den Winkel z der Sonne voraus ist. Wegen der genauen Uebereinstimmung der Bradleyschen Beobachtungen mit der Theorie der Aberration allein, kann der Winkel z nur wenige Grade betragen, und die jährliche Parallaxe der Fixsterne muß beträchtlich kleiner als 20 Sekunden seyn.

§. 159. Durch die Bradleysche Entdeckung der Aberration wurde zwar die Bewegung der Erde um die Sonne bestätigt, aber die Entfernung der Fixsterne blieb wegen der Kleinheit ihrer jährlichen Parallaxe unbestimmt. Man konnte nur die Gränzen angeben, ausserhalb welcher die Fixsterne nothwendig sich befinden müssen, weil sie innerhalb dieser Gränzen eine Parallaxe zeigen müßten, welche nicht unbemerkt bleiben könnte. Bradley behauptete, daß die Parallaxe der von ihm zu ihrer Bestimmung beobachteten Fixsterne nicht zwey Sekunden betragen könne. Folglich müssen diese Fixsterne um mehr als 103132 Halbmesser der Erdbahn von der Erde und der Sonne entfernt seyn. Indessen leitete **Maskelyne** aus den von **La Caille** auf dem Vorgebürg der guten Hoffnung beobachteten Zenithdistanzen des Sirius, welche unter dieser Breite nur $17\frac{1}{2}$ Gr. betragen, und daher den Anomalien der Refraktion nicht unterworfen sind, eine jährliche Parallaxe desselben von 4 Sekunden her. In den neuern Zeiten haben sich **Piazzi** in **Palermo** und **Calandrelli** in **Rom** mit der Untersuchung der jährlichen Parallaxe der Fixsterne beschäftigt *). Ersterer setzt die Parallaxe des Sirius auf 4, des **Procyon** auf

*) Monatl. Corresp. Nov. 1808. pag. 401. Jan. 1809. pag. 38.

auf 3, des Aldebaran auf 1,6 Sekunden. An der Wega glaubte er eine Parallaxe von 2 Sek. bemerkt zu haben, was sich aber bey fortgesetzten Beobachtungen nicht bestätigte. Letzterer setzt die Parallaxe dieses Sterns auf 4″4. Unter diesen Sternen wäre uns also die Wega am nächsten, aber sie wäre noch immer 46878 Halbmesser der Erdbahn von uns entfernt, und ein von diesem Stern ausgehender Lichtstral würde nach §. 107. eine Zeit von 267 T. 14 St. 20 M. gebrauchen, um bis zu uns zu gelangen. Jedoch scheinen nach Bessel's Untersuchungen *) die Parallaxen der Fixsterne noch viel kleiner zu seyn und man wird in den meisten Fällen keinen merklichen Fehler begehen, wenn man die ganze Erdbahn in Vergleichung mit der Entfernung der Fixsterne als einen Punkt betrachtet.

§. 160. Die Beobachtungen, welche Bradley zur Bestimmung der Parallaxe und Aberration der Fixsterne anstellte, leiteten ihn noch auf eine andere Entdeckung. Er bemerkte, daß zwar nach Verfluß eines Jahrs die Erscheinungen der Aberration in derselben Ordnung wiederkehrten, aber nach mehreren Jahren sich beträchtliche Unterschiede zwischen den beobachteten und den nach der Theorie der Aberration berechneten scheinbaren Abweichungen der Fixsterne zeigten, und daß diese scheinbaren Bewegungen eine Periode von etwa 18 Jahren hatten. Er fand ferner, daß diese Erscheinungen von der Lage der Mondsknoten gegen die Aequinoktialpunkte abhiengen, und der Abstand der Sterne von der Ekliptik, oder ihre Breite unverändert blieb, ihre Länge und gerade Aufsteigung aber sich ebenfalls veränderten, und der gröste Unterschied der Abweichungen in 9 Jahren auf 18″ stieg. Durch eine Menge an verschiedenen Sternen angestellte Beobachtungen wurde er endlich auf folgende Hypothese geleitet, welche alle diese Erscheinungen erklärt. Wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte (§. 37.) beschreibt erstlich der Pol des Aequators um den Pol der

*) Monatl. Corresp. Febr. 1809. pag. 183.

Ekliptik einen um die Schiefe der letztern von ihm abstehenden Parallelkreis gleichförmig von Morgen gegen Abend, so daß er jährlich 50″,1 zurücklegt, oder die Erdaxe beschreibt um eine auf der Ebene der Ekliptik senkrecht stehende Linie als Axe die Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Winkel an der Spitze die doppelte Schiefe der Ekliptik ist. Der hienach für eine gegebene Zeit, und mittelst der diesem Zeitpunkt entsprechenden Schiefe der Ekliptik bestimmte Pol des Aequators heißt der mittlere. Es sey nun P (Fig. 52.) der mittlere Ort des Pols des Aequators, E der Pol der Ekliptik, und EPa der durch beyde gelegte größte Kreis oder der Kolur der Solstitien. Man denke sich eine Ebene, welche die Oberfläche der Himmelskugel in dem mittleren Ort P des Pols berühre, und in dieser um P als Mittelpunkt eine Ellipse $bdae$ so beschrieben, daß ihre große unter einem Winkel von 18″ erscheinende Axe ab in der Ebene des Kolurus der Solstitien liege, und die kleine Axe de zur großen wie 8 : 9 sich verhalte. Um diese Ellipse sey ein Kreis abq beschrieben, und von dem der Ekliptik zunächst liegenden Endpunkt a der großen Axe an sey der Bogen aq der mittleren Länge des aufsteigenden Mondsknotens, und zwar nach derselben Richtung, nach welcher dieser sich bewegt, d. h. gegen die Ordnung der Zeichen (§. 65.), genommen; so wird ein von q auf die große Axe ab der Ellipse gefälltes Perpendickel qr ihrem Umfang in dem wahren Ort p des Pols des Aequators begegnen. Diese Bewegung des wahren Pols um den mittleren nennt man die **Nutation** oder das **Schwanken der Erdaxe**. Man hat theils durch genauere Berechnung der Bradleyschen Beobachtungen, theils durch neue Beobachtungen die große Axe der Nutationsellipse genauer bestimmt, und auf 19,26 Sekunden gesetzt. Das Axenverhältniß, über welches Bradley's Beobachtungen noch einige Ungewißheit übrig ließen, ist von d'Alembert durch die Theorie genauer bestimmt worden, nach welcher sich die große Axe zur kleinen wie der Cosinus der Schiefe der Ekliptik zu dem Cosinus der doppelten Schiefe verhalten muß. Wenn also die große Axe der

Nutationsellipse = 19,36 Sekunden ist; so ist die kleine Axe = 14,34 Sekunden *).

Wegen dieser Nutation der Erdaxe ist sowohl die Schiefe der Ekliptik als die Bewegung der Aequinoktialpunkte einer kleinen von der Länge des aufsteigenden Mondsknotens abhängenden Ungleichheit unterworfen, und man nennt auch hier die mit der jährlichen Abnahme von 0,521 Sekunden für eine gegebene Zeit berechnete Schiefe der Ekliptik ihre mittlere Schiefe, und diejenige, welche wegen der Nutation wirklich Statt findet, die wahre, oder, weil man die letztere wirklich beobachtet, auch die scheinbare Schiefe. Ferner heißt der mit der jährlichen gleichförmigen Bewegung von 50",1 berechnete Ort des Aequinoktialpunkts der mittlere, der wegen der Nutation wirklich Statt findende Ort aber der scheinbare.

§. 161. Auch für die Umdrehung der Erde um ihre Axe hat man einen deutlichen Beweiß an der Zunahme der Schwere von dem Aequator an gegen die Pole, dessen weitere Ausführung in dem dritten Buch vorkommen wird. Richer machte im Jahr 1672 auf der Insel Cayenne nahe unter dem Aequator die Beobachtung, daß seine von Paris mitgenommene und daselbst auf mittlere Zeit regulirte sehr genaue Pendeluhr in Cayenne täglich um 2 Min. 28 Sek. zurückblieb, und ein in Cayenne seine Schwingungen in einer Sekunde machendes Pendel um $1\frac{1}{4}$ Linie kürzer war, als das Sekundenpendel in Paris. Seit dieser Zeit hat man unter sehr verschiedene Breiten die Länge des einfachen Sekundenpendels bestimmt, welche zeigen, daß die Zunahme der Pendellängen vom Aequator gegen die Pole hin sehr nahe dem Quadrat des Sinus der Breite proportional ist, und unter dem Pol auf $2\frac{1}{2}$ pariser Linien steigen würde. Es verhält sich aber die halbe Länge des einfachen Sekundenpendels zu der freyen Fallhöhe in einer Sekunde wie das

*) Schon Römer hat um das Jahr 1693 die von der Nutation herrührende scheinbare Bewegungen der Firsterne bemerkt, und gehofft, sie aus einer Schwankung (vacillatio) des Erdpols erklären zu können. Basis Astronomiæ a P. Horrebow. Cap. X. §. 157. pag. 66.

Quadrat des Durchmessers eines Kreises zu dem Quadrat seines Umfangs. Folglich nimmt die freye Fallhöhe in einer Sekunde, und daher auch die Schwere der auf der Erdoberfläche befindlichen Körper von dem Aequator gegen die Pole hin zu. Aus mechanischen Gründen entsteht aber durch die Axendrehung der Erde in allen auf ihr sich befindenden Körpern ein Schwung, der sie von dem Mittelpunkt des Kreises, welchen sie beschreiben, zu entfernen strebt, und wegen der gleichen Umlaufszeiten desto kleiner ist, je kleiner der Halbmesser dieses Kreises ist. Unter dem Aequator muß daher die Schwungkraft am größten seyn, und zugleich wirkt sie der Richtung der Schwere gerade entgegen; folglich ist daselbst die Verminderung der Schwere am größten. Von dem Aequator gegen die Pole hin ist diese Verminderung aus einem doppelten Grund geringer, einmal nemlich, weil die Halbmesser der Parallelkreise des Aequators kleiner werden, sodenn weil die Schwungkraft, deren Richtung in die Ebene der Parallelkreise fällt, nun schief gegen die Richtung der Schwere wirkt. Hieraus ergiebt sich das oben angegebene mit den Beobachtungen nahe übereinstimmende Gesetz der Zunahme der Schwere vom Aequator an gegen die Pole. Es zeigen sich freylich auch hier, wie bey den Gradmeßungen kleine Irregularitäten, welche beweisen, daß die Erde weder ein gleichförmig dichter, noch ein geometrisch regulärer Körper ist.

§. 162. Gegen die Umdrehung der Erde um ihre Axe hat man unter andern auch die Einwendung gemacht, daß ein frey von einer beträchtlichen Höhe herab fallender Körper nicht an dem senkrecht unter seinem anfänglichen Ort im Augenblick des Anfangs des Falls befindlichen Punkt die Oberfläche der Erde treffen könne, wenn sie sich um ihre Axe drehe, weil während der Fallzeit jener Punkt weit gegen Osten sich bewege, so daß der Körper westlich von demselben niederfallen sollte. Allein der Körper hat mit den übrigen auf der Erde befindlichen, schon vor dem Fall die von der Axendrehung der Erde herrührende Bewegung gemein, und setzt diese während des Falls fort, so daß er mit dem Punkt der Erdoberfläche, welchem er vor dem Anfang seines Falls entsprach, zugleich gegen Morgen fortrückt. Genau genommen hat übrigens der Körper in einer beträchtlichen Höhe eine größere Geschwindigkeit, als der senkrecht unter ihm befindliche Punkt der Erdoberfläche, und zwar in demselben Verhältniß, in welchem das von ihm auf die Erdaxe gefällte Perpendickel größer ist, als dasjenige, welche von dem correspondirenden Punkt der Erdoberfläche auf die Erdaxe gefällt wird. Daher muß der Körper vielmehr etwas weniges östlicher fallen, als wenn die Erde sich nicht um ihre Axe drehte. Guglielmini *) und Benzenberg **) haben hierüber genaue Versuche angestellt. Ersterer fand bey einer Fallhöhe von 241 par. Fuß eine Abweichung gegen Osten von 8,375 Lin., gegen Süden 5,272 Lin. letzterer bey einer Fallhöhe von 235 p. F. eine östliche Abweichung von 3,99 Lin. und eine südliche von 1,5 Lin. Nach der Theorie sollte, wenn der Widerstand der Luft bey Seite gesetzt wird, die östliche Abweichung = 4,8 Lin. bey einer Fallhöhe von 241 Fuß, und = 3,95 Lin. für die Fallhöhe von 235 Fuß, die südliche Abweichung hingegen unmerklich seyn. Wird ein Körper vertikal aufwarts geworfen; so kann gezeigt werden, daß er nun westlich von dem Punkt, an welchem der Wurf geschah, niederfallen muß. La Place findet die westliche Abweichung = 128,9$^{\text{mèt.}}$ (396,8 par. Fuß), wenn der Körper mit einer Geschwindigkeit von 500$^{\text{mèt.}}$ (1539,2 p. F.) senkrecht in die Höhe geworfen, und der Widerstand der Luft bey Seite gesetzt wird ***). Es ist sehr schwer, diese Versuche mit Genauigkeit anzustellen.

*) J. B. *Guglielmini* de diurno terræ motu experimentis physico-mathematicis confirmato opusculum. Bononiæ 1792.

**) Benzenberg Versuche über die Umdrehung der Erde. Dortmund 1804.

***) Mécanique céleste. T. IV. pag. 304. 305.

Drittes Capitel.

Von den Gesetzen der Bewegung der Planeten um die Sonne, und der Gestalt ihrer Bahnen.

§. 163. Wir haben in dem fünften Capitel des ersten Buchs gesehen, daß die Bewegungen der Planeten aus dem Mittelpunkt der Sonne betrachtet eben so einfach, als die scheinbare Bewegung der Sonne erscheinen würden, wenn man die Erde um die Sonne sich bewegen läßt. Da nun die wirkliche Bewegung der Erde um die Sonne es ist, welche den scheinbaren Lauf der Planeten so verwickelt macht; so wird man, um die Gesetze ihrer Bewegung um die Sonne zu entdecken, aus den beobachteten scheinbaren Bewegungen der Planeten diejenigen abzuleiten suchen müßen, welche man in dem Mittelpunkt der Sonne wahrgenommen haben würde. Hiezu wird aber erfordert, daß der Beobachter für jede gegebene Zeit die Lage seines Standpunkts gegen den Mittelpunkt der Sonne, das ist, den Ort der Erde anzugeben im Stande sey. Nun ist die Bahn der Erde um die Sonne der scheinbaren Bahn der Sonne um die Erde gleich und ähnlich, und man findet immer aus der scheinbaren Länge der ersteren die gleichzeitige heliocentrische Länge der Erde, wenn man 180° zu der Sonnenlänge addirt. Folglich wird es zuerst darauf ankommen, die scheinbare Bahn der Sonne um die Erde genauer zu bestimmen, und nicht allein das Gesetz ausfindig zu machen, nach welchem die beschriebenen Winkel von der Zeit abhängen, sondern auch die Figur dieser Bahn auszumitteln, weil zu gewärtigem Zweck auch die Entfernungen der Erde von der Sonne, oder wenigstens ihre Verhältniße zu einander, bekannt seyn müssen.

§. 164. Aus den im dritten Capitel des ersten Buchs über die scheinbare Bahn der Sonne angestellten Untersuchungen ist bekannt, daß alle Punkte dieser Bahn in einer durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebene liegen; folglich liegen auch alle Punkte der Bahn der Erde um die Sonne in einer durch den Mittelpunkt der letztern gelegten Ebene. Wir kennen ferner die Umlaufszeit der Sonne, mithin auch die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, und aus dem 40sten §. die Veränderungen der Winkelgeschwindigkeit der scheinbaren jährlichen Bewegung der Sonne, woraus folgt, daß die Erde in gleichen Zeiten ungleiche Winkel um die Sonne beschreibt, und die Winkelgeschwindigkeiten von demjenigen Punkt an, in welchem sie der Sonne am nächsten ist, beständig bis zu dem gerade gegenüberliegenden Punkt, in welchem sie ihre größte Entfernung von der Sonne erreicht, abnehmen, von diesem Punkt an aber wieder eben so wachsen, wie sie vorher abgenommen hatten. Nehmen wir nun an, *NAn Mm* (Fig. 53.) sey die Bahn eines Planeten um die Sonne *S*, dessen Umlaufszeit man kennt, *P* die Sonnennähe (Perihelium) *A* die Sonnenferne (Aphelium), welche so beschaffen sey, daß *A*, *S* und *P* in einer geraden Linie (der Apsidenlinie §. 40.) liegen, und von dem Planeten mit einer vom Perihelium *P* an beständig bis zum Aphelium *A* abnehmenden, auf der anderen Seite aber bis zum Perihelium wieder eben so wachsenden Winkelgeschwindigkeit beschrieben werde; so werden sich die Verzögerungen auf der einen Seite der Apsidenlinie gegen die Beschleunigungen auf der anderen Seite aufheben, und die Zeit von *P* bis *A* wird der Zeit von *A* bis *P*, demnach jede der halben Umlaufszeit gleich, mithin gegeben seyn. Es seyen *M* und *N* zwey einander gegenüberliegende Orte des Planeten, *M* in der Nähe des Peerihelium *P*, und vor dem Durchgang durch dasselbe, *N* in der Nähe des Apheliums *A*; so wird vermöge der Voraussetzung die Winkelgeschwindigkeit von *M* bis *P* größer als die Winkelgeschwindigkeit von *N* bis *A*, und daher die Zeit, in welcher der Winkel *PSM* beschrieben wird, kleiner als die Zeit seyn, welche der Planet zu der Beschreibung des Winkels *NSA* gebraucht. Man addire zu jeder dieser Zeiten die Zeit, welche der Planet gebraucht, um von *P* nach *N* bey seiner Bewegung nach der Richtung *PmN* zu kommen; so wird die erste dieser Summen kleiner als die zweyte, und daher die Zeit welche der Planet gebraucht, um von *M* an den gegenüberliegenden Punkt N seiner Bahn zu kommen kleiner als die halbe Umlaufszeit seyn, wenn er in der Zwischenzeit durch das Perihelium gegangen ist. Man nehme nun den Punkt m nach dem Durchgang durch das Perihelium, und den ihm gegenüberliegenden Punkt n; so wird die Zeit von A bis n größer als die Zeit von P bis m, und, wenn man beyderseits die Zeit von m bis A addirt, die Zeit, welche der Planet gebraucht, um von einem Punkt seiner Bahn an den gegenüberliegenden zu kommen, größer als die halbe Umlaufszeit seyn, wenn er in der Zwischenzeit durch das Aphelium A gegangen ist.

§. 165. Hienach kann man durch eine Reihe von Beobachtungen der Sonne die Lage der Apsidenlinie ihrer scheinbaren Bahn um die Erde, mithin auch die Lage der Apsidenlinie der Erdbahn, und die Durchgangszeit der Sonne oder der Erde durch dieselbe finden. Man sucht unter den beobachteten Sonnenlängen diejenige aus welche nahe um 180 Gr. von einander verschieden sind. Die Beobachtungen geben die tägliche Veränderung der Länge, welche man in kleinen Zwischenzeiten nahe der Zeit proportional finden wird. Man wird also die Zeit berechnen können, da die Länge der Sonne genau um 180 Gr. von einer vorgegebenen verschieden war, und dadurch die Zeit finden, welche die Sonne bey ihrem scheinbaren Umlauf gebrauchte, um 180° zurückzulegen. Ist diese Zeit größer als die halbe Umlaufszeit der Sonne; so ist sie schon durch das Perigäum, oder eigentlich die Erde durch das Perihelium gegangen. Man vergleiche auf ähnliche Art zwey frühere Beobachtungen miteinander, bis man eine Zwischenzeit findet, welche kleiner als die halbe Umlaufszeit ist; so wird der Durchgang der Sonne durch das Perigäum zwischen zwey gegebene Paare von Beobachtungen fallen, und man wird die Durchgangszeit selbst auf folgende Art finden können. Heißen die Zeiten, in welchen die gleichen Winkel PSM, ASN beschrieben werden, t und t'; so ist die halbe Umlaufszeit = Zeit durch $PmN + t'$, und die Zeit durch MPN = der Zeit durch $PmN + t$. Mithin ist $t' - t$ dem Ueberschuß der halben Umlaufszeit über die Zeit durch *MPN* gleich, und daher gegeben. Vermöge der Beobachtungen verändern sich aber die täglichen scheinbaren Bewegungen v, v' der Sonne um die Punkte der Erdnähe P und der Erdferne A herum nicht merklich, und man wird daher sehr nahe setzen können

$$1.)\quad v : PSM = 1\ \text{Tag} : \text{Zeit}\ t$$
$$2.)\quad \left.\begin{matrix}ASN\\PSM\end{matrix}\right\} : v' = \text{Zeit}\ t' : 1\ \text{Tag} :$$

$$\text{folglich}\quad v \quad v' = t' : t$$
$$\text{und } 3.)\quad v - v' : \left\{\begin{matrix}v'\\v\end{matrix}\right\} = t' - t : \left\{\begin{matrix}t\\t'\end{matrix}\right\}$$

Aus den Beobachtungen hat man $v = 1^\circ\ 1'\ 10'',3$, $v' = 0^\circ\ 57'\ 11'',4$ (§. 40.), und $t' - t$ kann ebenfalls durch die Beobachtungen gefunden werden: folglich kann man t oder t' berechnen, und dadurch die Zeit des Durchgangs durch den Punkt P der Erdnähe oder den Punkt A der Erdferne finden. Mittelst der Zeit t findet man sodenn durch die erste Proportion den Winkel *PSM*, oder mittelst t' und der zweyten Proportion den Winkel *ASN*, und dadurch die Lage der Apsidenlinie *AP*.

Durch die Vergleichung weit von einander entfernter Beobachtungen hat man gefunden, daß die Apsidenlinie der Erdbahn eine langsame vorwarts gehende Bewegung hat, welche in 100 Jahren $1^\circ\ 43'\ 11''$ in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte, mithin (§. 37.) $19'\ 41''$ in Beziehung auf die Fixsterne beträgt. Bewegt sich nun die Apsidenlinie; so wird die auf diese beziehende Umlaufszeit eines Planeten, nach deren Verfluß die Ungleichheiten seiner Bewegung in derselben Ordnung wiederkehren, und welche daher die anomalistische Umlaufszeit heißt, von seiner tropischen oder siderischen Umlaufszeit verschieden seyn. Bey der Sonne oder der Erde macht der Unterschied zwischen der anomalistischen und tropischen Umlaufszeit $25'\ 7'',5$ aus, und daher ist die erstere = 365 Tag 6 St. $13'\ 59'',1$. Man muß nun, um dieser Bewegung der Apsidenlinie bey der Bestimmung ihrer Lage Rechnung zu tragen, fürs erste statt die Zeit zu suchen, welche ein Planet gebraucht, um an den gegenüberliegenden Punkt seiner Bahn zu kommen, diejenige Zeit suchen, welche er gebraucht, um 180° und noch den in der Zwischenzeit von der Apsidenlinie beschriebenen Winkel zurückzulegen. Zweytens muß man statt der halben tropischen Umlaufszeit die halbe anomalistische Umlaufszeit gebrauchen, und daher durch weit von einander entfernte Beobachtungen die Bewegung der Apsidenlie, auf welche der Fehler der Berechnung so wohl als der Beobachtungen keinen großen Einfluß haben kann, vorläufig bestimmen.

Man findet z. B. unter den in Greenwich angestellten Beobachtungen folgende, wovon nach §. 40. die erste nicht weit von der Zeit der Erdnähe, die zweyte nicht weit von der Zeit der Erdferne fallen kann.

	mittl. Zeit.	Länge der Sonne
1775. d. 30. Dec.	$0^{U.}\ 2'\ 58''$	$9^{S.}\ 8^{\circ}\ 43'\ 33'',8$
1776. d. 29. Jun.	0 2 58	3 8 9 16,6
Ueberschuß der zweyten über die erste	=	5 29 25 42,8
180 Gr. + Beweg. der Apsidenlinie in der Zwischenzeit	=	6 0 0 31,0
Unterschied	=	0 0 34 48,2

Die Sonne gebrauchte aber, um diesen Winkel mit ihrer täglichen scheinbaren Bewegung von $57'\ 11'',4$ in der Erdferne zu beschreiben 14 St. $36'\ 20''$; folglich kam sie am 30. Jun. um 2 Uhr 39 M. 18 S. Morgens in die Distanz $180^{\circ}\ 0'\ 31''$ von demjenigen Ort, wo sie am 30. December des vorhergehenden Jahrs um 0 Uhr 2 M. 58 S. war. Die Zwischenzeit dieser Momente beträgt 182 Tage 14 St. 36 M. 20 S. und ist um 30 M. 39,5 S. kleiner als die halbe anomalistische Umlaufszeit. Folglich hatte die Sonne am 30 Dec. um 0 U. $2'\ 58''$ den Punkt ihrer Erdnähe noch nicht erreicht, und man findet die Zeit t, welche sie noch gebrauchte, um vollends an diesen Punkt zu kommen, durch die dritte der oben gefundenen Proportionen

$$v' - v \ :\ v' = t' - t : t$$

$$238'',9 : 3441'',4 = 1839'',5 : 26421'' \text{ oder } 7 \text{ St. } 20'\ 21''$$

In dieser Zeit hat sie mit der täglichen Bewegung 1°

1' 10",3 im Perigão einen Winkel von 18' 42",4 beschrieben. Die Sonne kam also in den Punkt der Erdnähe am 30. December 1775 um 7 Uhr 23' 19" mittlerer Zeit zu Greenwich, oder weil Greenwich 9' 20" westlich von der pariser Sternwarte liegt, um 7 Uhr 32' 39" mittlerer Zeit des pariser Meridians, und ihre Länge war in diesem Augenblick = 9Z. 9° 2' 16",2 = der Länge der Erdnähe der Sonne am Ende des Jahrs 1775 *). Addirt man hiezu 180 Grade; so erhält man die heliocentrische Länge des Periheliums der Erde für eben diesen Zeitpunkt = 3Z. 9° 2' 16".

§. 166. Zieht man an den wahren Ort K (Fig. 53.) eines Planeten in seiner Bahn aus dem Mittelpunkt der Sonne S eine gerade Linie SK; so heißt diese der Radius vector des Planeten, und der Winkel PSK, welchen der Radius vector von dem Perihelium P an um den Mittelpunkt der Sonne beschrieben hat, die wahre Anomalie des Planeten **), weil von diesem Winkel die Ungleichheit der Bewegung abhängt. Der Winkel PSk, welchen der Planet von seinem Durchgang durch das Perihelium an beschrieben haben würde, wenn er sich beständig mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit um die Sonne bewegte heißt die mittlere Anomalie, und der Unterschied KSk der wahren und mittleren Anomalie heißt die Gleichung des Mittelpunkts (æquatio centri, prostaphæresis.). Da die mittlere Anomalie für jede gegebene Zeit mittelst der Durchgangszeit durch das Perihelium und der Umlaufszeit des Planeten leicht gefunden werden kann, wenn man zu dieser, zu der vom Durchgang durch das Perihelium an verfloßenen Zeit, und zu 360 Graden die vierte Proportionalzahl sucht, und die Bewegung der Apsidenlinie in der Zwischenzeit davon abzieht, oder sie dazu addirt, je nachdem sie mit der Bewegung des Planeten einerley oder die entgegengesetzte Richtung hat; so wird es jetzt noch darauf ankommen, die Gleichung des Mittelpunkts für jede gegebene mittlere Ano-

*) Nach den pag. 64. angeführten astronomischen Tafeln sollte sie seyn = 9 Z. 9° 4' 17".

**) Man rechnete ehmals die Anomalie gewöhnlich von dem Aphelium an.

malie zu finden. Weil nun in dem Perihelium und Aphelium der wahre Ort des Planeten mit seinem mittleren zusammenfällt; so muß die mittlere Anomalie bey der Bewegung von dem ersteren Punkt an anfangs kleiner als die wahre seyn, und der Unterschied zwischen beyden muß so lange wachsen, als die mittlere Winkelgeschwindigkeit kleiner als die wahre ist. Werden diese einander gleich; so wird die Gleichung des Mittelpunkts am grösten seyn. Denn so lange die wahre Winkelgeschwindigkeit grösser ist als die mittlere, wird die wahre Bewegung der mittleren voreilen, und daher die Gleichung des Mittelpunkts wachsen, aber sie wird wieder abnehmen, wenn die mittlere Winkelgeschwindigkeit anfängt, der wahren vorzueilen, welches nothwendig zwischen P und A geschehen muß, weil in A der mittlere Ort mit dem wahren wieder zusammenfällt. Nun ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit durch die Umlaufszeit gegeben; folglich kann man aus gegebenen heliocentrischen Längen eines Planeten diejenige heraussuchen, bey welchen die Mittelpunktsgleichung am grösten war. Es sey K der Ort des Planeten zu der Zeit, da seine tägliche Bewegung der mittleren täglichen Bewegung gleich, oder die Gleichung des Mittelpunkts am grösten ist. Man nehme auf der andern Seite der Apsidenlinie den Winkel $PSL = PSK$ und $PSl =$ der mittleren Anomalie PSk, welche der wahren PSK entspricht; so wird, weil vermöge der Voraussetzung die Winkelgeschwindigkeit in L der Winkelgeschwindigkeit in K wiederum gleich wird, $KSk = LSl =$ der grösten Gleichung des Mittelpunkts, und der Ueberschuß des auf der Seite des Periheliums von dem Planeten beschriebenen Winkels LSK über den auf derselben Seite liegenden Winkel lsk, welchen er mit seiner mittleren Geschwindigkeit in derselben Zeit beschrieben haben würde, in welcher er den Bogen LPK seiner Bahn wirklich beschrieben hat, wird die doppelte gröste Gleichung des Mittelpunkts seyn.

§. 167. Was nun hier von der Bahn eines Planeten um die Sonne gezeigt worden ist, kann auf die scheinbare Bahn der Sonne um die Erde angewendet werden, weil die beobachtete Länge der Sonne der um sechs Zeichen vermehrten heliocentrischen Länge der Erde gleich ist, und vermöge der Beobachtungen die Ungleichheiten der scheinbaren Bewegung der Sonne in gleichen Abständen von der Apsidenlinie dieselben sind (§. 40.). Aus der tropischen Umlaufszeit erhält man die tägliche mittlere Bewegung der Sonne = $59' \, 8'',33$, mittelst welcher diejenigen Sonnenlängen können ausgesucht werden, bey welchen die Mittelpunktsgleichung nahe am grösten ist. Es wurden z. B. in Greenwich beobachtet folgende Längen der Sonne:

	mittl. Zeit			Länge der Sonne			
1778. Sept. 30.	$11^{u.}$	$49'$	$49''$ Morg.	$6^{z.}$	$7°$	$22'$	$38'',2$
Okt. 1.	11	49	30 —	6	8	21	41,6
Unterschied	$23^{St.}$	59	41	0	0	59	3,4
1779. März. 30.	0	4	30	0	9	38	21,3
— 31.	0	4	12	0	10	37	24,8
Unterschied	$23^{St.}$	59	42	0	0	59	3,5

Die Bewegung der Sonne in 24 St. mittl. Sonnenzeit betrug also vom 30. Sept. bis 1. Okt. $59' \, 4'',2$ und vom 30. bis 31. März $59' \, 4'',3$. Da diese zwey tägliche Bewegungen noch etwas kleiner als die mittlere sind, und die Sonne zwischen dem Oktober 1778 und März 1779 durch den Punkt der Erdnähe gehen muß; so wird man die zweyte Beobachtung mit der dritten verbinden müssen. Nimmt man die halbe Summe der am 30. März und am 1. Okt. beobachteten Längen; so erhält man $3^{z} \, 9° \, 0' \, 16'',5$, welches nahe die geocentrische Länge der Erdferne der Sonne oder die heliocentrische Länge des Periheliums der Erde ist, und folglich stehen diese zwey Sonnenörter wirklich beynahe gleich weit von der Apsidenlinie ab, wie es seyn muß. Zieht man von der am 30. März beobachteten Länge die vom 1. Oktober ab; so erhält man $6^{z.} \, 1° \, 16' \, 39'',7$, welche die Sonne, oder vielmehr die Erde in der Zwischenzeit der zwey Beobachtungen beschrieben hat. Mit ihrer mittleren Bewegung hätte sie aber in eben dieser Zeit beschrieben $5^{z} \, 27° \, 25' \, 36'',3$, also $3° \, 51' \, 3'',4$ weniger, als mit der wahren Bewegung. Folglich wäre hienach die gröste Mittelpunktsgleichung der Erdbahn gleich der Hälfte dieses Unterschieds, oder $= 1° 55' 31'',7$ *).

§. 168. Hat man die Lage der Apsidenlinie und die gröste Gleichung des Mittelpunkts einer Planetenbahn gefunden; so kann man leicht untersuchen, ob sich die Bewegung des Planeten um die Sonne durch eine gleichförmige, aber excentrische Kreisbewegung darstellen läßt. Es sey $ANPM$ (Fig 54.) die gleichförmig um den Mittelpunkt C beschriebene Bahn, die Sonne befinde sich ausserhalb des Mittelpunkts C in S, und der Durchmesser ASP gehe durch den Mittelpunkt der Sonne; so wird P das Perihelium, A das Aphelium seyn (III, 7.). Zieht man an einen beliebigen Ort M des Planeten die geraden Linien CM, MS; so wird, weil vermöge der Voraussetzung der Planet sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in seiner Bahn bewegt, der Winkel PCM der Zeit proportional wachsen, und daher der mittleren Anomalie, der Winkel PSM aber der wahren Anomalie gleich seyn. Der Unterschied CMS dieser zwey Winkel, oder die Gleichung des Mittelpunkts wird in P und A verschwinden, und zwischen P und A in den Punktan L, l am grösten werden, wo der Radius Vektor SL, Sl auf der Apsidenlinie senkrecht steht. Denn ein um CL als Durchmesser beschriebener Kreis geht durch S, weil $CSL = R$, und berührt die Planetenbahn in L. Nimmt man einen anderen Ort N des Planeten zwischen L und A; so schneidet SN den um CL beschriebenen Kreis innerhalb der Planetenbahn in n. Man ziehe CN, Cn; so ist $SLC = SnC$ (III, 27.) $> SNC$ (I, 16.). Eben so kann gezeigt werden, daß $SLC > SN'C$: folglich ist die Gleichung des Mittelpunkts in dem Punkt L am grösten. Da man nun die gröste Gleichung CLS des Mittelpunkts kennt; so ist in dem rechtwinklichten Dreyeck CLS das Verhältniß von $CL : CS$ oder von $CA : CS$ gegeben. Demnach kann man ferner für jede gegebene mittlere Anomalie PCM die Mittel-

*) Nach den französischen astron. Tafeln ist sie für diese Zeit $= 1° 55' 32'',1$, und nach von Zach's Tabul. motuum Solis (Gothæ, MDCCCIV.) $= 1° 55' 31'',8$.

punktsgleichung CMS finden, weil man in dem Dreyeck CMS das Verhältniß der Seiten CM, CS, und ihren Zwischenwinkel SCM kennt. Endlich ist $CM = CP = \frac{1}{2}AP = \frac{AS+SP}{2}$ = der mittleren Entfernung des Planeten von der Sonne, und in dem Dreyeck CSM ist auch das Verhältniß von $SM : CM$ gegeben; folglich kann man auch für jede gegebene mittlere Anomalie das Verhältniß des Radius Vektors SM zu der mittleren Distanz CM oder CA bestimmen. Demnach wird man unter dieser Voraussetzung für jede gegebene Zeit die wahre Länge des Planeten berechnen können, deren Vergleichung mit den Beobachtungen zeigen wird, wie weit diese Voraussetzung richtig ist.

§. 169. Nun ist die größte Mittelpunktsgleichung der Erdbahn = $1° 55' 32''$ (§. 167.); folglich verhält sich unter der im vorhergehenden §. gemachten Voraussetzung die Excentricität CS zu der mittleren Distanz CA wie 0,033601 : 1. Hieraus findet man für die mittlere Anomalie = $45°$ die Gleichung des Mittelpunkts = $1° 23' 38''$, mithin die wahre Anomalie = $46° 23' 38''$. Die Beobachtungen geben $46° 22' 55''$; also 43 Sek. weniger. Bey einer mittleren Anomalie von $135°$ wird man den Fehler ungefähr eben so groß, in den übrigen Punkten der Bahn aber kleiner finden. Folglich giebt diese Hypothese die Länge der Erde, also auch die Länge der Sonne ziemlich nahe, und daher hat Ptolemäus, welcher so kleine Unterschiede nicht bemerken konnte, diese gleichförmige excentrische Kreisbewegung der Sonne um einen ausserhalb ihres Mittelpunkts liegenden Punkt beybehalten.

Allein es zeigen sich beträchtliche Unterschiede, wenn man die den verschiedenen Distanzen entsprechende scheinbare Halbmesser der Sonne mit den Beobachtungen vergleicht. Es verhält sich der scheinbare Halbmesser der Sonne in der Erdnähe zu ihrem scheinbaren Halbmesser in der Erdferne wie $AS : SP$ (§. 49. n. 5.) = $AC + CS : \left\{ \begin{matrix} CP - CS \\ AC - CS \end{matrix} \right\}$; also in obiger Hypothese = 1,0336 : 0,9664. Mithin müßte, wenn nach §. 40. der scheinbare Sonnendurchmesser in der Erdnähe = $32' 35'',69$ ist, der scheinbare Durchmesser in der

Erdferne = $30' \, 28'' 5$ seyn, welcher vermöge der Beobachtungen $31' \, 30'',93$ ist. Man muß also um die Veränderungen des scheinbaren Durchmessers der Sonne mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung zu bringen, die Excentricität vermindern. Man setze die Durchmesser der Sonne in der Erdnähe und Erdferne D und d; so wird man haben $D : d = AS : SP$ und $D + d : D - d = AS + SP : AS - SP = AP : 2CS = AC : CS$, und wenn man die §. 40. angegebene Werthe von D und d in die Proportion setzt, $AC : CS = 1 : 0{,}0168$. Demnach darf man die Excentricität nur ungefähr halb so groß nehmen, als sie aus der größten Mittelpunktsgleichung unter der im 168 §. gemachten Voraussetzung einer gleichförmigen Kreisbewegung folgt. Alsdenn wird aber die Gleichung des Mittelpunkts ebenfalls nahe auf die Hälfte ihrer vorigen Größe heruntergesetzt; folglich wird man, wenn die kreisförmige Bahn beybehalten werden soll, wenigstens annehmen müssen, daß die Bewegung im Kreise selbst ungleichförmig sey, so daß die Ungleichheiten der scheinbaren Bewegung der Sonne eine optische und eine physische Ursache zugleich haben. Eben dieses ergiebt sich auch unmittelbar aus der Vergleichung der täglichen Bewegungen der Sonne mit ihren scheinbaren Durchmessern in der Erdnähe und Erdferne. Wenn nemlich die scheinbare Sonnenbahn die Apsidenlinie rechtwinklicht durchschneidet, und die Ursache der Ungleichheiten ihrer scheinbaren Bewegung blos optisch ist; so müssen ihre tägliche Bewegungen in der Erdnähe und Erdferne umgekehrt den Distanzen, und daher direkt den scheinbaren Durchmessern der Sonne proportional seyn. Folglich müßte sich nach den im 40ten §. angegebenen täglichen Bewegungen und Durchmessern der Sonne verhalten $32' \, 35'',66$ zu $31' \, 30'',93$ wie $1° \, 1' \, 10'',3$ zu der täglichen Bewegung der Sonne in der Erdferne, und diese müßte hienach $= 59' \, 8'',8$ seyn. Sie ist aber nur $= 57' \, 11'',4$; mithin wird durch die größere Entfernung die tägliche scheinbare Bewegung der Sonne nur um $2' \, 5''$ vermindert, und es bleiben noch $1' \, 57'',4$ übrig, um welche sie noch überdiß muß vermindert werden, damit sie mit der beobachteten übereinstimme.

§. 170.

§. 170. Noch können die verschiedenen Abstände der Erde von der Sonne und die Excentricität der Erdbahn in der Kreishypothese, unabhängig von den Veränderungen des Sonnendurchmessers, auf folgende Art gefunden werden. Es sey ATP (Fig. 55.) die Erdbahn um die Sonne , AP die Apsidenlinie derselben. Man beobachte die Opposition eines Planeten, z. B. des Mars, wenn er zugleich eine geringe Breite hat; so liegt SM nahe in der Ebene der Ekliptik, und geht durch den gleichzeitigen Ort der Erde T. Da man die Lage der Apsidenlinie schon kennt (§. 165.) und die Länge des Mars zur Zeit seiner Opposition durch Beobachtung gefunden wird; so ist der Winkel MSP gegeben. Ferner: da man die siderische Umlaufszeit des Mars kennt (§. 93.); so kann man die Zeiten bestimmen, da der Mars in demselben Punkt M seiner Bahn war, und für eben diese Zeiten die Winkel PSt, PSt', welche die an die gleichzeitigen Orte t, t' der Erde gezogene Radii Vectores St, St' mit der Apsidenlinie machen, d. i. die wahren Anomalien der Erde, vermöge des vorhergehenden wenigstens mit einer Genauigkeit von einer Minute berechnen. Man kennt also die Winkel $MSt = PSt - PSM$, $MSt' = PSM - PSt'$, und durch die Beobachtungen der geocentrischen Länge des Mars und der Länge der Sonne erhält man für eben diese Zeit die Winkel StM, $St'M$. Man nehme SM als gegeben an, oder setze diese Distanz einer beliebigen Zahl gleich; so kann man die Seiten St, St' der Dreyecke SMt, SMt', deren Winkel man kennt, finden. In dem Dreyeck tSt' kennt man jetzt zwey Seiten St, St' und den Zwischenwinkel tSt', und hieraus findet man den Winkel Stt' und die Seite tt'. Man halbire tt' in R und errichte auf ihr in diesem Punkt ein Perpendickel RC, welches die Apsidenlinie in dem Mittelpunkt C der kreisförmig angenommenen Erdbahn schneiden wird (III, 1.). Zieht man durch S die Parallele SQ mit CR, und durch C die Parallele Cr mit Tt; so kann man in dem rechtwinklichten Dreyeck tSQ die SQ und tQ, mithin auch die $QR = tQ - tR = tQ - \frac{1}{2}tt'$, oder die ihr gleiche Cr finden. Es sind aber auch die Winkel $ASt = 2R - PSt$ und Stt' bekannt; folglich kennt man ihre Differenz, welche dem

Winkel gleich seyn wird, unter welchem die Apsidenlinie PA und die Chorde tt', wo nöthig verlängert, sich schneiden. Demnach kennt man in dem rechtwinklichten Dreyeck CSr den Winkel SCr, welcher dem so eben gefundenen Winkel gleich ist, und die Seite Cr, woraus man CS und Sr, und mittelst der oben gefundenen SQ die $SQ - Sr = Qr = CR$ findet. Endlich hat man in dem rechtwinklichten Dreyeck CRt die Ct nach I, 47. oder die ihr gleiche CA; folglich, weil CS gefunden ist, auch das Verhältniß der Excentricität CS zu der mittleren Distanz CA der Erde von der Sonne. Zugleich hat man auch das Verhältniß des Abstands SM des Mars zu dem mittleren Abstand CA der Erde von der Sonne, so wie die Verhältniße von St und St' zu CA gefunden. Auf ähnliche Art kann man, wenn der Mars zum dritten, viertenmal, u. s. w. in demselben Punkt M seiner Bahn war, mittelst der für diesen Zeitpunkt berechneten Winkel PSt'' u. s. w. und der beobachteten Winkel $St''M$ u. s. w. das Verhältniß von $SM : St''$, mithin auch weil man das Verhältniß von $SM : CA$ schon gefunden hat, das Verhältniß von $St'' : CA$ finden, und untersuchen, ob auch die übrigen Punkte der Erdbahn in den gefundenen Kreis passen.

Kepler bediente sich folgender Methode. Statt der durch die Beobachtung einer Opposition des Mars gefundenen heliocentrischen Länge desselben gebrauchte er eine aus seiner beyläufig bekannten Bahn berechnete, und bestimmte auf ähnliche Art wie vorhin drey Radios Vektores St, St', St'' der Erde. Durch die drey Punkte t, t', t'' war der Mittelpunkt C der als kreisförmig angenommenen Erdbahn (III, 1.); folglich auch die Excentricität CS, und die Apsidenlinie AP der Lage nach gegeben. Weil er diese schon kannte; so veränderte er die angenommene heliocentrische Länge des Mars so lange, bis die durch diese Rechnung bestimmte Lage der Apsidenlinie mit der nach §. 165. gefundenen übereinstimmte. Eine vierte Beobachtung diente zur ferneren Berichtigung.

Auch diese Berechnungen geben die Excentricität = 0,0168, oder halb so groß, als man sie unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Kreisbewegung aus der grösten Mittelpunktsgleichung findet.

§. 171. Es sey nun $ALPM$ (Fig. 56.) die noch immer als kreisförmig vorausgesetzte Bahn eines Planeten um die ausserhalb ihres Mittelpunkts C befindliche Sonne S, und $ACSP$ die Apsidenlinie. Man nehme $CE = CS$, und lasse den Planeten seinen Kreis so durchlaufen, daß die um den Punkt E beschriebene Winkel der Zeit proportional seyen; so werden die während einer gewißen Zeit in der Nähe des Periheliums beschriebene Bogen größer seyn als diejenigen, welche er in eben dieser Zeit in der Nähe des Apheliums durchlauft, und seine Bewegung wird aus des Kreises Mittelpunkt C gesehen ungleichförmig seyn. Zieht man an den wahren Ort des Planeten die EM, CM, SM; so wird sich die Ungleichheit seiner Bewegung in die physische CME und die optische CMS zerfällen lassen, und die ganze Gleichung des Mittelpunkts wird der Summe von beyden oder dem Winkel SME gleich seyn. In P und A wird die Gleichung des Mittelpunkts verschwinden, und wenn die CM auf die Apsidenlinie AP senkrecht zu stehen kommt, wie in L, am grösten werden. Denn es ist das Dreyeck SLE gleichschenklicht, ein um dasselbe beschriebener Kreis berührt die Planetenbahn in L, und fällt ganz innerhalb derselben. Folglich fällt jeder von L verschiedene Ort N des Planeten ausserhalb des um das Dreyeck SEL beschriebenen Kreises, und die von E und S an N gezogenen geraden Linien EN, SN schließen einen Winkel ENS ein, welcher kleiner als der in dem Kreisabschnitt liegende EnS oder ELS ist. Durch die gröste Mittelpunktsgleichung ELS ist also wiederum das Verhältniß der Excentricität CS zu der mittleren Distanz CL oder CA gegeben, weil in dem rechtwinklichten Dreyeck CLS der Winkel CLS = der halben grösten Gleichung des Mittelpunkts gegeben ist. Hat man diese gefunden; so kann man leicht für jede gegebene Zeit den wahren heliocentrischen Ort des Planeten unter dieser Voraussetzung berechnen. Man sucht zuerst die mittlere Anomalie PEM, indem man schließt: wie sich verhält die siderische Umlaufszeit des Planeten zu der Zwischenzeit zwischen seinem nächstvorhenden Durchgang durch das Perihelium und dem vorgegebenen Zeitpunkt, so verhalten sich 360° zu einem Winkel, welchen man um die siderische Bewegung der Apsidenlinie in der Zwischenzeit zu vermindern oder zu vermehren hat, je nachdem sie mit der Bewegung des Planeten einerley oder verschiedene Richtung hat. In dem Dreyeck CEM, kennt man das Verhältniß von $CM : CE$ und den Winkel CEM, welcher der größeren Seite CM gegenüber liegt, und hieraus findet sich der Winkel CME, oder die physische Ungleichheit. In dem Dreyeck SCM kennt man das Verhältniß von CM zu CS und den Zwischenwinkel $SCM = PEM + EMC$, woraus man den Winkel SMC oder die optische Ungleichheit erhält. Folglich hat man die Gleichung des Mittelpunkts $SME = SMC + CME$ und die wahre Anomalie $PSM = PEM + SME$. Endlich kann man in dem letzteren Dreyeck SCM das Verhältniß von SM zu MC oder zu der mittleren Distanz CA des Planeten finden.

§. 172. Macht man hievon eine Anwendung auf die Erdbahn; so findet sich aus der grösten Gleichung des Mittelpunkts die Excentricität $CS = 0,010805$, übereinstimmend mit derjenigen, welche aus den Sonnendurchmessern in der Erdnähe und Erdferne folgt (§. 169.). Sodenn findet sich für die mittlere Anomalie von 45 Gr. die physische Ungleichheit $CME = 40' \, 51'',00$, und die optische $CMS = 41' \, 49'',35$; mithin die Gleichung des Mittelpunkts $= 1° \, 22' \, 40'',35$, welche nach den Beobachtungen $= 1° \, 22' \, 54'',9$ seyn sollte. Der Fehler beträgt also nur noch $14'',55$ bey einer mittleren Anomalie von 45 Graden. Wenn diese 135 Grade beträgt; so wird der Fehler wiederum nahe von der vorigen Größe, in den übrigen Punkten dieser Hälfte der Bahn wird er noch kleiner gefunden, und eben so verhält es sich in der andern Hälfte der Planetenbahn. Mithin ist dadurch, daß man die Kreisbewegung selbst als ungleichförmig angenommen, und die Distanzen in der Erdnähe und Erdferne mit den beobachteten Veränderungen des scheinbaren Sonnendurchmessers in Uebereinstimmung gebracht hat, zugleich der Fehler in der Länge auf den dritten Theil seiner Größe, welche er in der Hypothese einer gleichförmigen Kreisbewegung hatte, heruntergebracht worden.

§ 173. Da man jetzt den scheinbaren Ort der Sonne in der Ekliptik und ihren Abstand von der Erde, mithin auch den Ort der letztern in ihrer Bahn um die Sonne vermöge des vorhergehenden §. sehr nahe für jede gegebene Zeit berechnen kann; so wird man den heliocentrischen Ort eines Planeten und seinen Abstand von der Sonne auf folgende Art finden können, wenn man ihn zweymal in demselben Punkt seiner Bahn beobachtet hat, wozu weiter nichts, als seine siderische Umlaufszeit als bekannt vorausgesetzt wird, welche nach den im ersten Buch gezeigten Regeln bestimmt werden kann. Es sey TT' (Fig. 57.) die Bahn der Erde um die Sonne S, und die Erde sey in T, wenn der Planet in P ist. Man ziehe PR auf die Ebene der Erdbahn oder der Ekliptik senkrecht, und verbinde die Punkte S, T, P, R durch die gerade Linien ST, TP, TR, SR, SP; so kennt man den Winkel STR, welcher dem Unterschied der geocentrischen Länge des Planeten und der Länge der Sonne zur Zeit der ersten Beobachtung gleich ist, und die geocentrische Breite PTR des Planeten. Nach Verfluß der siderischen Umlaufszeit, wo der Planet wieder in P ist, sey die Erde in T'. Man ziehe ST', $T'P$, $T'R$; so hat man wiederum aus den Beobachtungen den Winkel $ST'R$, und die geocentrische Breite $RT'P$, welche übrigens nur bey einer der zwey Beobachtungen bekannt seyn darf. Ferner hat man entweder aus den Beobachtungen, oder durch Berechnung nach §. 172. die Sonnenlänge zur Zeit der ersten und zweyten Beobachtung, mithin auch ihren Unterschied, welcher dem Winkel TST' gleich seyn wird, und nach eben diesem §. kann man die Distanzen ST, ST' berechnen. Daher sind in dem Viereck $STRT'$ zwey an einander liegende Seiten ST, ST' und drey Winkel gegeben, und man kann die zwey übrigen Seiten TR, $T'R$, die Diagonale SR und den Winkel TSR finden. In dem bey R rechtwinklichten Dreyeck PTR kennt man daher die Seite TR und den Winkel

PTR = der geocentrischen Breite des Planeten, woraus man das Perpendickel *PR* findet. Endlich sind in dem rechtwinklichten Dreyeck *SPR* die zwey um den rechten Winkel liegende Seiten *SR*, *RP* bekannt; folglich ist die heliocentrische Breite *PSR* und die Entfernung *SP* des Planeten von der Sonne gegeben. Der ebenfalls gefundene Winkel *TSR* ist der Unterschied der heliocentrischen Länge des Planeten und der Erde, und letzterer ist der um 180 Gr. vermehrten Länge der Sonne zu der Zeit, wo die Erde in *T* war, gleich; folglich kennt man die heliocentrische Länge und Breite des Planeten, und seinen Abstand von der Sonne.

Man sieht, daß die Auflösung der Aufgabe, die Entfernung eines Planeten zu finden, wiederum auf die Bestimmung der Entfernung eines unzugänglichen Gegenstands aus einer gegebenen Grundlinie und den an ihren Endpunkten gemeßenen Winkeln hinauslauft. Die Grundlinie ist hier die gerade Linie *TT'*, welche die zwey Orte der Erde mit einander verbindet, und der Beobachter wird von dem einen Endpunkt der Grundlinie an den andern durch die Bewegung der Erde um die Sonne gebracht. Weil aber der Planet in der Zwischenzeit sich ebenfalls bewegt; so wartet man die Zeit ab, da er einen siderischen Umlauf gemacht hat, und wieder an den vorigen Ort zurückgekommen ist. Die Stellungen der Erde gegen den Planeten müssen so gewählt werden, daß der Winkel am Planeten nicht zu spitz ausfällt, damit kleine in der Meßung der Winkel begangene Fehler keinen zu starken Einfluß auf die berechnete Distanzen haben. Es ist klar, daß man zu diesem Ende die Zwischenzeit der Beobachtungen auch zwey oder mehreren siderischen Umläufen des Planeten gleich nehmen kann. Eben so kann man die heliocentrische Länge und Breite eines Planeten und seinen Abstand von der Sonne finden, wenn er in einem anderen Punkt seiner Bahn sich befindet.

Fällt eine der Beobachtungen in die Opposition des Planeten; so fällt der correspondirende Ort der Erde, z. B. *T'* in die *SR*, und man hat statt eines Vierecks blos Dreyeck *STR* aufzulösen, in welchen man *ST*, *TR* und den Zwischenwinkel kennt, woraus man *SR* findet, und die heliocentrische Länge des Planeten ist unmittelbar durch die Beobachtungen gegeben.

§. 174. Wenn man nach dem vorhergehenden §. zwey mit dem Mittelpunkt der Sonne nicht in einer geraden Linie liegende Oerter eines Planeten gefunden hat; so ist die durch den Mittelpunkt der Sonne und durch die zwey leztern gelegte Ebene der Lage nach gegeben. Es seyen P, p (Fig. 58. die zwey Planetenörter, und aus denselben die Perpendickel PR, pr auf die Ebene der Ekliptik gefällt. Aus dem Mittelpunkt S der Sonne ziehe man SP, SR, Sp, Sr. Vermöge XI, 6, und 18. liegen die Perpendickel PR, pr in einer auf der Ekliptik senkrechten Ebene, und die gemeinschaftlichen Durchschnittlinien Pp, Rr dieser Ebene mit der Ebene PSp und der Ebene RSr der Ekliptik werden sich, wenn die Perpendickel PR, pr ungleich sind, in einem Punkt N auf der Seite des kleineren Perpendickels schneiden. Man ziehe SN; so wird diese die Durchschnittslinie der Ebenen PSp und RSr seyn. Da SR, Sr und die heliocentrischen Breiten PSR, pSr, so wie der Unterschied RSr der heliocentrischen Längen gegeben sind; so kann man PR, pr, Rr und den Winkel SRr finden. Es verhält sich aber

$$PR : pr = RN : rN$$

und $PR - pr : PR = Rr : RN$;

folglich kennt man in dem Dreyeck RSN die zwey Seiten SR, RN und den Zwischenwinkel SRN, woraus man den Winkel RSN findet.

Sind aber die zwey auf die Ekliptik gefällte Perpendickel einander gleich; so begegnet die durch ihre obere Endpunkte gezogene gerade Linie der ihre Fußpunkte verbindenden Rr, mithin auch der Ebene der Ekliptik nicht, und die Rr wird der Durchschnittslinie SN der Ebene PSp und der Ebene der Ekliptik parallel, also wiederum die SN der Lage nach gegeben seyn.

Man ziehe rq auf SN senkrecht, und in der Ebene pSq die pq, welche (S. den Bew. XI, 35.) ebenfalls auf Sq senkrecht seyn wird. Daher ist pqr der Neigungswinkel der durch die zwey Punkte P, p der Planetenbahn gelegten Ebene mit der Ebene der Ekliptik. Da der Winkel rSq bekannt ist; so ist das Verhältniß von qr zu Sr gegeben. Man kennt aber auch das Verhältniß von $Sr : rp$; folglich ist in dem rechtwinklichten Dreyeck pqr das Verhältniß von $qr : rp$, und dadurch der Neigungswinkel pqr gegeben.

Um zu untersuchen, ob auch die übrigen Punkte der Planetenbahn in der gefundenen Ebene PSN liegen, sey p' ein dritter Ort des Planeten, welcher mit dem Mittelpunkt der Sonne und einem der zwey ersteren P und p nicht in einer geraden Linie liege. Man ziehe $p'r'$ auf die Ebene der Ekliptik senkrecht, und construire das Dreyeck $p'q'r'$ wie vorhin das Dreyeck pqr; so wird der Winkel $p'q'r'$ dem schon gefundenen Neigungswinkel pqr gleich und das Verhältniß von $p'r'$ zu $q'r'$ gegeben seyn. Es ist aber wegen der bekannten Winkel rSq, $r'Sr$ der Winkel $r'Sq'$, und daher das Verhältniß von $q'r' : Sr'$ gegeben. Folglich kennt man das Verhältniß von $p'r' : Sr'$, woraus man die heliocentrische Breite $Sr'p'$ findet, welche mit der nach §. 173. aus den Beobachtungen abgeleiteten übereinstimmen muß, wenn der Punkt p' der Planetenbahn mit den zwey ersteren und dem Mittelpunkt der Sonne in einer Ebene liegen soll. Man wird finden, daß die so berechnete heliocentrische Breiten der übrigen Punkte der Planetenbahn mit den aus den Beobachtungen gefundenen sehr nahe übereinstimmen, und jeder Planet sich nach diesem Gesetz um die Sonne bewegt. Demnach liegt jede Planetenbahn sehr nahe in einer durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene.

Die Durchschnittslinie NN' der Ebene der Planetenbahn mit der Ebene der Ekliptik heißt auch hier, wie bey dem Mond die Knotenlinie, und der Punkt n in welchem sich der Planet von der Südseite der Ekliptik auf die Nordseite erhebt, der aufsteigende, der entgegengesetzte n' der niedersteigende Knoten. Die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens ist der Winkel VSn, welchen die aus dem Mittelpunkt der Sonne nach dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche und dem aufsteigenden Knoten n gezogene gerade Linien SV, Sn von Abend gegen Morgen hin einschließen.

Durch die Vergleichung weit von einander entfernter

Beobachtungen hat man gefunden, daß die Knotenlinien der Planetenbahnen sehr langsam sich in der Ekliptik rückwarts bewegen, und auch die Neigungen ihrer Bahnen kleinen Veränderungen unterworfen sind, wie man schon früher an dem Mond bemerkt hat (§. 65.), bey welchem diese Bewegungen weit beträchtlicher sind.

§. 175. Setzt man die heliocentrische Länge Vsq des aufsteigenden Knotens $= n$, den Neigungswinkel $pqr = i$, die heliocentrische Länge des Planeten $VSr = l$, und seine heliocentrische Breite $pSr = b$; so ist $qSr = VSr - VSq = l - n$, und es verhält sich

$$\begin{aligned} pr : Sr &= \text{Tg. } b : \text{Sin. tot.} \\ Sr : rq &= \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } (l-n) \end{aligned}$$

folglich 1.) $\left. \begin{array}{l} pr : rq \\ \text{Tg. } i : \text{Sin. tot.} \end{array} \right\} = \text{Tg. } b : \text{Sin. } (l-n)$

Eben so findet sich für eine andere Breite B und die ihr zugehörige Länge L

$\text{Tang. } i : \text{Sin. tot.} = \text{Tg. } B : \text{Sin. } (L-n)$; mithin verhält sich

$\text{Tg. } B : \text{Tg. } b = \text{Sin. } (L-n) : \text{Sin. } (l-n)$

und $\text{Tg. } B - \text{Tg. } b : \text{Tg. } B + \text{Tg. } b = \text{Sin. } (L-n) - \text{Sin. } (l-n) : \text{Sin. } (L-n) + \text{Sin. } (l-n)$

oder 3.) $\text{Sin. } (B - b) : \text{Sin. } (B+b) = \text{Tg. } \tfrac{1}{2}(L-l) : \text{Tg. } (\tfrac{1}{2}(L-l)-n)$

Sind B, b, L und l gegeben; so findet man durch diese Proportion die Tangente eines Winkels, welchen man um den halben Unterschied der heliocentrischen Längen vergrößern oder vermindern muß, um $L-n$ oder $l-n$ zu erhalten, wodurch die Länge n des Knotens gegeben ist. Mittelst eben dieser Winkel und der Proportion n. 2. oder 1. findet man sodann die Neigung i der Planetenbahn gegen die Ekliptik.

Sind B und b einander gleich, und von einerley Zeichen; so wird $\text{Tg. } (\tfrac{1}{2}(L-l)-n)$ unendlich, und $\tfrac{1}{2}(L-l)-n = 90°$.

Zu der Bestimmung der Lage des Knotens ist es vortheilhaft, die Breiten klein, auf einerley Seite der Ekliptik und einander nahe gleich zu nehmen. Die Neigung der Bahn hingegen wird desto genauer gefunden, je größer die Breite ist. Man wird daher drey heliocentrische Längen und Breiten nöthig haben, um die Lage der Bahn mit Genauigkeit zu bestimmen.

Nachdem die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn gefunden worden sind, kann man nach n. 1. die einer gegebenen heliocentrischen Länge entsprechende Breite finden, und durch ihre Vergleichung mit der nach §. 173. aus den Beobachtungen abgeleiteten untersuchen, ob auch die übrigen Punkte der Bahn in der gefundenen Ebene liegen.

§. 176. Wenn ein Planet in einem seiner Knoten sich befindet; so ist so wohl seine heliocentrische als geocentrische Breite = 0. Ist er zu gleicher Zeit in Opposition oder Conjunktion mit der Sonne; so ist die Lage der Knotenlinie unmittelbar durch die Beobachtung der Länge des Planeten gegeben. Da aber diese zwey Umstände nicht leicht zusammentreffen; so kann man wenigstens eine Opposition beobachten, bey welcher die Breite des Planeten sehr klein ist und aus der täglichen Veränderung derselben den Augenblick suchen, da die Breite = 0 war. Nun kennt man die Länge des Planeten in seiner Opposition, welche seiner heliocentrischen Länge gleich ist, und aus seiner Umlaufszeit seine heliocentrische mittlere Bewegung. Da nun die Zeit zwischen dem Durchgang durch den Knoten und dem Augenblick der Opposition gegeben ist; so wird man den in dieser Zwischenzeit von dem Planeten um die Sonne beschriebenen Winkel, und daher die Länge des Knotens haben, wenn die mittlere Bewegung des Planeten seiner wahren um die Zeit der Opposition gleich wäre. Diese Länge des Knoten wird aber niemals viel von der wahren abweichen können, wenn der Durchgang durch den Knoten nahe zu der Zeit der Opposition fällt, und wenn man einmal die wahre Bewegung des Planeten beynahe gefunden hat; so wird man die Ungleichförmigkeit seiner Bewegung können in Rechnung nehmen.

Diese Methode kann auch bey den unteren Planeten, wenn sie vor der Sonne vorübergehen, vortheilhaft angewendet werden, weil man alsdenn ihre Conjunktion beobachten kann, welche nahe bey den Knoten eintritt.

Um hernach die Neigung der Bahn zu finden, warte man die Zeit ab, da die scheinbare Länge der Sonne der gefundenen heliocentrischen Länge des auf- oder niedersteigenden Knotens gleich ist; so befindet sich die Erde T (Fig. 57.) in der Knotenlinie TN. Man beobachte die Breite PTR des Planeten, und den Unterschied STR der Länge des Planeten und der Sonne. Aus dem Ort des Planeten P sey ein Perpendickel PR auf die Ebene der Ekliptik gefällt, RQ auf die Knotenlinie TN senkrecht, und die PQ gezogen, welche ebenfalls auf NQ senkrecht seyn wird. Daher ist der

Winkel PQR die Neigung der Bahn. In dem rechtwinklichten Dreyeck PTR ist durch die geocentrische Breite das Verhältniß von $PR : RT$, und in dem rechtwinklichten Dreyeck RTQ durch den beobachteten Winkel STR dessen Nebenwinkel RTQ ebenfalls bekannt ist, das Verhältniß von $RT : RQ$ gegeben. Folglich kennt man in dem rechtwinklichten Dreyeck PRQ das Verhältniß von $PR : RQ$, und daher kann der Neigungswinkel PQR gefunden werden. Ist der Winkel STR ein rechter; so ist die beobachtete Breite der Neigung der Bahn gleich. **Kepler** bediente sich dieser indirekten Methode.

Es verhält sich
$$\begin{array}{l} QR \quad RT = \text{Sin.}\, STR : \text{Sin. tot.} \\ \underline{RT : PR = \text{Sin. tot.} : \text{Tg.}\, PTR} \end{array}$$

folglich
$$\left.\begin{array}{c} QR : PR \\ \text{Sin. tot.} \quad \text{Tg.}\, PQR \end{array}\right\} = \text{Sin.}\, STR \quad \text{Tg.}\, PTR$$

§. 177. Unter der Voraussetzung der Construktion des 174sten §. ist in dem bey r rechtwinklichten Dreyeck pSr durch die heliocentrische Breite das Verhältniß von Sp zu Sr gegeben. In dem bey q rechtwinklichten Dreyeck Srq ist der Winkel qSr = dem Unterschied der heliocentrischen Länge des Planeten und der Länge des Knoten gegeben; folglich kennt man auch das Verhältniß von Sr zu Sq. Demnach ist in dem bey q rechtwinklichten Dreyeck Spq das Verhältniß der Hypotenuse Sp zu der Seite Sq, und daher der Winkel pSq gegeben. Eben so findet man, wenn P ein anderer Ort des Planeten in seiner Bahn ist, den Winkel PSq. Nun können aber die Abstände Sp, SP des Planeten von der Sonne, und die heliocentrischen Längen und Breiten nach §. 173. und die Lage der Knotenlinie nach §.§. 174. 175. 176. gefunden werden. Folglich sind die Radii Vectores Sp, SP u. s. w. der Größe und Lage nach gegeben. Da die Radien ungleich gefunden werden; so kann die Bahn des Planeten kein mit dem Mittelpunkt der Sonne concentrischer Kreis seyn. Man wird ferner finden, daß die um die Sonne beschriebenen Winkel nicht der zu ihrer Beschreibung gebrauchten Zeit proportional sind; mithin muß, wenn man die Bahn des Planeten als kreisförmig annimmt, die Sonne ausserhalb des Mittelpunkts derselben gesetzt werden.

Unter dieser Voraussetzung wird man die Bahn des Planeten haben, wenn man durch drey nach dem vorhin gezeigten Verfahren bestimmte Punkte der Bahn einen Kreis beschreibt. Der durch den Mittelpunkt der Sonne gezogene Durchmesser wird die Apsidenlinie, der Halbmesser des Kreises die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne, und der Abstand seines Mittelpunkts von der Sonne die Excentricität der Bahn seyn.

Hat man die Lage der Apsidenlinie gefunden; so suche man unter den gefundenen heliocentrischen Längen des Planeten in seiner Bahn diejenige aus, welche in der Nähe der Apsidenlinie liegen. Weil nun in kleinen Zwischenzeiten die um die Sonne beschriebenen Winkel sehr nahe der Zeit proportional sind; so wird man aus der Veränderung der Länge in einer gegebenen Zeit und aus dem Abstand des Planeten von dem Punkt des Apheliums oder Periheliums die Zeit seines Durchgangs durch einen dieser Punkte, und mittelst seiner bekannten Umlaufszeit für jeden gegebenen Zeitpunkt die mittlere Anomalie finden können (§ 166.). Die gefundenen heliocentrischen Längen des Planeten und die Lage der Apsidenlinie bestimmen die wahre Anomalie; folglich wird man die diesen Punkten der Bahn entsprechende Gleichung des Mittelpunkts haben. Berechnet man diese zuerst nach §. 168. in der Hypothese einer gleichförmigen excentrischen Kreisbewegung aus der gefundenen Excentricität; so wird die berechnete Gleichung des Mittelpunkts nur ungefähr die Hälfte der beobachteten seyn. Die Ungleichheit der Bewegung des Planeten in seiner Bahn muß also, wie bey der Bewegung der Erde um die Sonne gezeigt worden ist (§. 169.), eine optische und eine physische Ursache zugleich haben, und man wird den Punkt der Bahn, aus welchem die Winkelbewegung gleichförmig erscheint, auf dem an das Aphelium gezogene Halbmesser nahe in einem eben so großen Abstand von des Kreises Mittelpunkt nehmen müßen, als die gefundene Excentricität beträgt. Man wird also wiederum die im 170sten §. betrachtete Hypothese einer ungleichförmigen und zugleich excentrischen Kreisbewegung haben, welche schon Ptolemäus bey den Planeten, deren Bahnen, die der Venus ausgenommen, eine größere Excentricität als die Erdbahn haben, zu machen genöthigt war, um die berechneten Oerter der Planeten mit den Beobachtungen in eine genauere Uebereinstimmung zu bringen. Nur die scheinbare Bahn der Sonne um die Erde stellte er in der Hypothese einer gleichförmigen excentrischen Kreisbewegung nach §. 169 dar, weil die Beobachtungen damals noch nicht genau genug waren, um die Abweichungen der Hypothese von den Beobachtungen, welche wegen der kleinen Excentricität unbeträchtlich sind, zu entdecken. Kepler zeigte zuerst, daß die Erdbahn hierinn keine Ausnahme mache, und die Hypothese des 170sten §. auch hier müße angewendet werden, um die Berechnungen mit den Beobachtungen in eine bessere Uebereinstimmung zu bringen.

§. 178. Noch stimmten in keiner der §. 168. und 170. betrachteten Hypothesen über die Bewegung der Planeten die Berechnungen mit den Beobachtungen überein. Tycho und Copernikus glaubten dadurch eine größere Genauigkeit zu erreichen, daß sie die Abstände des Mittelpunkts der kreisförmigen Bahn von der Sonne und von dem Punkt, in welchem die Bewegung gleichförmig erscheint, ungleich nahmen. Kepler untersuchte alle diese Hypothesen mittelst der von Tycho angestellten Beobachtungen des Mars mit einer größeren Genauigkeit, als es vor ihm geschehen war, und machte seine Entdeckungen in einem besonderen Werk bekannt *), wodurch der Grund zu der neueren Astronomie gelegt wurde. Es war ein glüklicher Zufall, daß er von Tycho eine große Anzahl Beobachtungen gerade des Planeten Mars erhielt, welcher zu der Bestimmung der Erdbahn nach der §. 170. gezeigten Methode am tauglichsten ist, und dessen Bahn nach der Bahn des Merkurs die gröste Excentricität hat, bey welcher die Abweichungen von der Kreishypothese merklich werden mußten. Er fand, daß durch die ungleiche Thei-

*) Astronomia nova *αἰτιολογητὸς*. seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellæ Martis, ex observationibus *Tychonis Brahe*: jussu et sumptibus *Rudolphi* II. Romanorum Imperatoris &c. plurium annorum pertinaci studio elaborata Pragæ, a *S. C. M. Mathematico Joanne Keplero*. 1609.

lung der Excentricität zwar die Fehler der in den Oppositionen beobachteten Längen vermindert, die Fehler der Breiten aber vergrößert wurden, und versuchte daher die Berechnung nach der Hypothese der gleichen Theilung der Excentricität (§. 170). Die 90° von der Apsidenlinie fallende Oppositionen zeigten einen Unterschied von nicht mehr als 2 Minuten zwischen der Rechnung und der Beobachtung, aber 45° von der Apsidenlinie stieg der Unterschied auf 8 Minuten, welcher nicht auf die Fehler der Beobachtungen geschoben werden konnte, und eben dieses war der Grund, warum Kepler seine Untersuchungen weiter fortsetzte *). Er bestimmte durch die ausserhalb der Oppositionen angestellte Beobachtungen des Mars die verschiedenen Entfernungen des Planeten von der Sonne, wobey diejenigen Fehler merklich werden mußten, welche in den Oppositionen, wo der Radius Vector nahe mit der von der Erde nach dem Planeten gezogenen geraden Linie zusammenfällt, verschwanden. Diese fanden sich auf beyden Seiten der Apsidenlinie kleiner, als nach der Berechnung in der Kreishypothese, wie man aus folgender Tafel sieht **):

wahre Anomalie	berechnete Distanz	nach den Beobacht.
a.) 191° 10′ 28″	166605	106255
b.) 218 15 45	163883	163100
c.) 77 8 16	148539	147750

Kepler schloß hieraus, daß die Bahn des Planeten kein Kreis, sondern eine Art von Ovallinie sey ***), welche er nach seinen eigenen Ideen über die physische Ursachen dieser Abweichung des Planeten von einem Kreis zu con-

*) In dem angezeigten Werk, pag. 114. Sola igitur hæc octo minuta viam præiverunt ad totam Astronomiam reformandam.

**) Im angeführten Werk pag. 213. Kepler sagt auf eben dieser Seite: Vobiscum mihi sermo est, periti rerum Astronomicarum, qui Sophistica effugia cæteris disciplinis creberrima, in Astronomia nulli patere scitis. Vos apello. Videtis in (a) defectum a circulo parvum; in (b, c), ex utroque quidem latere, magnum admodum, quantum per observandi incertitudinem (ob quam 200 fortassis aut summum 300 particulas in dubio pono) excusare non possumus.

***) pag. 213. Itaque plane hoc est: Orbita Planetæ non est circulus, sed ingrediens ad latera utraque paulatim, iterumque ad circuli amplitudinem in perigæo exiens. cujusmodi figuram lineam *ovalem* appellitant.

struiren und zu berechnen suchte. Nun kamen aber die Abstände des Planeten von der Sonne auf beyden Seiten der Apsidenlinie kleiner heraus, als sie David Fabricius, welchem Kepler diese neue Hypothese mitgetheilt hatte, durch Beobachtungen fand, und sie mußte daher verworfen werden *). Nach vielen vergeblichen Versuchen verfiel endlich Kepler auf die Ellipse, deren Mittelpunkt nun an die Stelle des Mittelpunkts der vorher angenommenen kreisförmigen Bahn kam, und deren einen Brennpunkt er in den Mittelpunkt der Sonne, den anderen Brennpunkt aber in denjenigen Punkt setzte, um welchen er die Bewegung gleichförmig angenommen hatte, so daß ihre große Axe die Apsidenlinie wurde. Die Beoachtungen stimmten jetzt genau mit den Berechnungen überein, und die wahre Bahn des Mars mußte eine Ellipse seyn, in deren einem Brennpunkt die Sonne ist.

Kepler wandte nun diese bey dem Mars durch eine Menge von Beobachtungen bestätigte Theorie auch auf die übrigen Planeten an, und fand sie auch hier mit den Beobachtungen übereinstimmend, woraus sich das erste keplerische Gesetz ergiebt: **Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne ist.**

§. 179. Nun fragt es sich aber, nach welchem Gesetz

*) pag. 246. Dum in hunc modum de Martis motibus triumpho, eique ut plane devicto, Tabularum carceres, et æquationum eccentri compedes necto, diversis nuciatur locis, futilem victoriam, et bellum tota mole recrudescere. Nam domi quidem hostis, ut captivus, contemptus, rupit omnia æquationum vincula, carceresque tabularum effregit. Nulla enim methodus ex præscripto opinionis cap. XLV. (De causis naturalibus deflexionis planetæ a circulo) administrata Geometrice, vicariam hypothesin (die ungleiche Theilung der Excentricität) capitis XVI. (quæ veras habet æquationes ex falsa causa manantes) propinquitate numerorum potuit æmulari. Foris vero speculatores per totum eccentri circuitum dispositi, distantiæ inquam genuinæ, profligarunt meas causarum Physicarum ex cap. XLV accersitas copias, earumque jugum excusserunt, resumpta libertate. Jamque parum abfuit, quin hostis fugitivus sese cum rebellibus suis conjungeret, meque in desperationem adigeret: nisi raptim nova rationum Physicarum subsidia, fusis et palantibus veteribus, submisissem; et qua sese captivus proripuisset, omni diligentia edoctus, vestigiis ipsis nulla mora interposita inhæssissem. Ferner pag. 266. Itaque causæ physicæ cap. XLV. in fumos abeunt.

wird die elliptische Bahn beschrieben? Es sey *AP* Fig. 59. die große Axe der Ellipse, *C* ihr Mittelpunkt, *S* und *F* ihre Brennpunkte, und die Sonne sey in dem Brennpunkt *S*. Nach Kepler erscheint die Winkelbewegung in dem anderen Brennpunkt *F* sehr nahe gleichförmig, wenn der Planet nicht weit von der Apsidenlinie *AP* absteht. Man ziehe durch *F* die gerade Linie *mFn*, welche mit der großen Axe einen sehr kleinen Winkel mache; so werden *AFn*, *PFm* in gleichen Zeiten um den Punkt *F* mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit beschrieben, und der Planet wird in eben dieser Zeit den elliptischen Bogen *mP* in der Sonnennähe, und den Bogen *nA* in der Sonnenferne durchlaufen. Man ziehe *Sm*, *Sn*; so verhält sich nahe

der Wink. ASn : W. $AFn = AF : AS$
$ = PS : FP$

$\left.\begin{array}{l}\text{W. } PFm \\ \text{W. } AFm\end{array}\right\}$: W. $PSm = PS : FP$

folglich W. ASn : W. $PSm = \overline{PS}^2 : \overline{FP}^2$
$ = \overline{PS}^2 : \overline{AS}^2$

Mithin sind die in gleichen Zeiten im Perihelio und Aphelio beschriebenen Winkel desto genauer umgekehrt den Quadraten der Abstände des Planeten von der Sonne proportional, je kleiner die beschriebenen Winkel sind, oder es verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten in diesen Punkten der Bahn umgekehrt, wie die Radii Vectores des Planeten.

Vermöge der Beobachtungen ist aber dieser Satz auch in anderen Punkten der Planetenbahnen richtig. Wenn nemlich *M* ein beliebiger ausserhalb der Apsidenlinie *AP* liegender Punkt der Bahn ist; so sind die in gleichen Zeiten um die Sonne beschriebene kleine Winkel *PSm*, *MSN* desto genauer den Quadraten der Abstände des Planeten von der Sonne umgekehrt proportional, je kleiner sie genommen werden. Man beschreibe aus *S* als Mittelpunkt mit den Halbmessern *SP*, *SM*, welche beziehungsweise kleiner als *Sm*, *SN* sind, die Kreisbogen *Pq*, *Mr* und es verhalte sich

der W. PSm : W. MSN = Quadr. v. MS : Quadr. v. PS;

$\left.\begin{array}{l}\text{so ist auch } PS \times PSm : MS \times MSN \\ \text{d. i. Bogen } Pq : \text{Bogen } Mr\end{array}\right\} = MS : PS.$

Folglich ist das Rechteck aus *PS* und *Pq* dem Rechteck

aus

aus MS und Mr, oder der doppelte Kreisausschnitt PSq i dem doppelten Kreisausschnitt MSr gleich. Die in gleichen Zei ten beschriebenen Kreisausschnitte sind daher desto genauer ein. n- der gleich, je kleiner ihre Winkel, oder je kleiner in Vergl. ei- chung mit der Umlaufszeit des Planeten die Zeiten sind, in welchen sie beschrieben werden. Mit der Verminderung der Winkel nähern sich aber die Kreisausschnitte den ihnen entspr e- chenden elliptischen Ausschnitten Psm, MSN der Ellipse, u. es wird sich die Summe aller in gleichen Zeiten beschriebenen elliptischen Ausschnitte der ganzen Ellipse, oder ihr Flächenin- halt, zu der Summe der in den Ausschnitt PSM fallenden, oder zu dem Ausschnitt PSM, verhalten, wie sich die Summe der zur Beschreibung der erstern erforderlichen Zeiten, oder die Umlaufszeit des Planeten, zu der Summe der Zeiten, wel- che auf die Beschreibung der letzteren verwendet wurden, oder zu der Zeit verhält, welche der Planet gebrauchte, um den Ausschnitt PSM zu beschreiben. Kepler entdeckte die- ses Gesetz, daß nemlich die elliptischen Sectoren, welche die Radii Vectores der Planeten um die Sonne beschreiben, den Zeiten proportional sind, in welchen sie beschrieben werden, zugleich mit dem ersten, und man nennt es gewöhn- lich das zweyte keplerische Gesetz, welches sich durch seine ge- naue Uebereinstimmung mit den Beobachtungen bestätigt hat.

§. 180. Nachdem Kepler die wahre Gestalt der Pla- netenbahnen, und das Gesetz, nach welchem sie beschrieben werden, gefunden hatte; so fieng er an, auch die verschie- denen Bahnen der Planeten mit einander zu vergleichen. Ptolemäus hatte die Planetenbahnen desto größer angenom- men, je größer die Umlaufszeiten waren, ihre Verhältniße zu einander aber unbestimmt gelassen. Diese Voraussetzung fand sich bestätigt, aber man konnte leicht bemerken, daß die Umlaufszeiten in einem größeren Verhältniß wachsen, als die Entfernungen von der Sonne. Jupiter z. B. steht 5,2 mal weiter von der Sonne ab, als die Erde, und ge- braucht zu seinem Umlauf um die Sonne 11 $\frac{6}{7}$ mal so viel Zeit (§. 102.) Am 8. März 1618 kam Kepler auf den Einfall, statt der Verhältniße der Entfernungen selbst die

Verhältniße ihrer Quadrate, Würfel u. s. w. mit den Verhältnißen gewißer Potenzen der Umlaufszeiten zu vergleichen, und unter diesen verglich er auch die Quadrate der Umlaufszeiten mit den Würfeln der mittleren Entfernungen, aber ein Rechnungsfehler machte, daß er die Gleichheit der Verhältniße der Quadrate der Umlaufszeiten und der Würfel der mittleren Entfernungen dießmal nicht bemerken konnte. Am 15. May desselben Jahrs kam er wieder darauf, und fand eine so genaue Uebereinstimmung der letzteren Verhältniße, daß er anfangs glaubte, das Gesuchte schon vorausgesetzt haben *). **Nach diesem dritten keplerischen Gesetz verhalten sich die Quadrate der siderischen Umlaufszeiten der Planeten wie die Würfel ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne, oder wie die Würfel der halben großen Axen ihrer elliptischen Bahnen.**

Es verhält sich z. B. die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne zu der mittleren Entfernung des Jupiters von der Sonne nahe = 1 : 5,2, und das Verhältniß der Würfel dieser Zahlen ist wie 1 : 140,61. Ihre Umlaufszeiten verhalten sich nahe wie 1 : 11,86, und die Quadrate derselben wie 1 : 140,66. Also verhalten sich hier wirklich die Quadrate der Umlaufszeiten sehr nahe wie die Würfel der mittleren Entfernungen. Die Abweichungen werden noch geringer, wenn man die genaueren Angaben der Umlaufszeiten und Entfernungen statt obiger genäherten Zahlen gebraucht, und zugleich auf eine kleine Modification dieses Gesetzes Rücksicht nimmt, welche von dem Verhältniß der Masse der Planeten zu der Masse der Sonne abhängt, wie in dem dritten Buch wird gezeigt werden.

*) Inventis veris Orbium intervallis, per observationes Brahei, plurimi temporis labore continuo; tandem, tandem genuina proportio Temporum periodicorum ad proportionem Orbium
— *sera quidem respexit inertem,*
Respexit tamen et longo pòst tempore venit;
eaque si temporis articulos petis, 8. Mart. 1618 animo concepta, sed infoeliciter ad calculos vocata, eòque pro falsâ rejecta, denique 15 Maji reversa, novo capto impetu, expugnavit Mentis meæ tenebras; tanta comprobatione et laboris mei septendecennalis in observationibus Braheanis, et meditationis hujus, in unum conspirantium, ut somniare me et præsumere quæsitum inter principia primo crederem (Harmonices Mundi libr. V. Lincii Austriæ. 1619. pag. 189.)

§. 181. Unter der Voraussetzung des ersten keplerischen Gesetzes (§. 178.) kann die elliptische Bahn eines Planeten auf folgende Art gefunden werden. Man bestimme die Lage der Ebene der Bahn nach §. 174. 175. 176. und in derselben drey Radios Vectores SM, SM', SM'' (Fig. 60.) der Größe und der Lage nach, wie im 173. und 177 §. gezeigt worden ist. Es sey $PMM'A$ die gesuchte Ellipse, AP ihre große Axe; C ihr Mittelpunkt, S, F ihre Brennpunkte, in deren einem S die Sonne sich befinde. Die große Axe sey über den Brennpunkt S hinaus so nach G verlängert, daß $CS : CP = CP : CG$ sich verhalte, und durch G die HL auf GA senkrecht gezogen (welche die Directrix der Ellipse heißt). Zieht man durch irgend einen Punkt M der Ellipse eine Parallele MQ mit AG; so verhält sich der Abstand MQ dieses Punkts von der Directrix zu seinem Abstand SM von dem der Directrix zunächst gelegenen Brennpunkt S wie $CS : CP$ (Kegelschn. II, 6.), und eben so $M'Q' : SM' = CS : CP$. Folglich $MQ : SM = M'Q' : S'M'$, und verwechselt $MQ : M'Q' = SM : SM'$. Sind nun SM und SM' einander gleich; so werden auch MQ und MQ' einander gleich, und die Chorde MM' wird mit der Directrix LH parallel, oder auf der großen Axe senkrecht, mithin diese der Lage nach gegeben seyn. Sind aber SM, SM' ungleich; so wird die verlängerte Chorde MM' der Directrix in einem Punkt K begegnen, und es wird sich verhalten $SM' : SM = M'Q' : MQ = M'K : MK$. Also ist das Verhältniß von $M'K$ zu MK, und, weil die Punkte M, M' gegeben sind, der Punkt K der Directrix gegeben. Eben so ist, wenn man die Chorde MM'' bis an die Directrix nach K' verlängert, das Verhältniß von $M''K' : MK'$ dem gegebenen Verhältniß von $SM'' : SM$ gleich, und daher auch der Punkt K' der Directrix gegeben. Demnach ist die Directrix selbst, und daher auch die große Axe der Ellipse der Lage nach gegeben. Da nun die Lage der Directrix gegeben ist; so ist auch die MQ, mithin das Verhältniß von $SM : MQ$ gegeben. Es verhält sich aber so wohl $SP : PG$ als $SA : AG$ wie $SM : MQ$ vermöge des oben angeführten Satzes. Folglich sind, weil GS gegeben ist, die Endpunkte P und A der großen Axe, mithin auch ihr Mittelpunkt C, und der andere Brennpunkt F gegeben, und die Ellipse kann beschrieben werden.

Hieraus ergiebt sich folgende Construktion. Wenn zwey Radii Vectores einander gleich sind; so bestimmt die durch den Brennpunkt gezogene gerade Linie, welche ihren Zwischenwinkel halbirt, die Lage der großen Axe. Sind alle drey ungleich; so schneide man von den größeren SM', SM'' die Sm, Sm' dem kleinsten SM gleich ab, ziehe Mm, Mm', und mit diesen durch den Brennpunkt S die Parallelen SK, SK', welche den Chorden MM', MM'' beziehungsweise in K, K' begegnen werden. Durch K und K' ziehe man eine gerade Linie LH von unbestimmter Länge, und durch den Brennpunkt S eine gerade Linie GN auf LH senkrecht. Durch einen der gegebenen Punkte M der Ellipse ziehe man die MQ mit GN parallel, verlängere die SM beyderseits so, daß $Mg = Mh = MQ$, ziehe ferner Gg, Gh, und mit diesen durch M die Parallelen MP, MA, welche die GN in P und A schneiden werden. Man halbire AP in C, nehme $CF = CS$, und beschreibe mit der großen Axe AP um die Brennpunkte S und F eine Ellipse, welche durch die gegebene Punkte M, M', M'' gehen wird. Denn es verhält sich

$$\begin{aligned} GA \quad AS &= Mh : MS \\ &= Mg : MS \\ &= GP : PS \end{aligned}$$

und
$$\left.\begin{matrix} GA + GP \\ 2GC \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} GA - GP \\ 2CP \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} AS + PS \\ 2CP \end{matrix}\right\} \quad \left\{\begin{matrix} AS - PS \\ 2CS \end{matrix}\right\}$$
$$GC \qquad CP \quad = \quad CP \qquad CS;$$

folglich ist LH die Directrix dieser Ellipse.

Ferner folgt aus obiger Proportion

$$\begin{aligned} \begin{matrix} GA - GP \\ 2CP \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} AS - PS \\ 2CS \end{matrix}\right\} &= GP : PS \\ &= Mg : MS \\ &= MQ : MS, \end{aligned}$$

und daher geht die Ellipse durch M. Endlich ist

$$\begin{aligned} SM' : \left\{\begin{matrix} Sm \\ SM \end{matrix}\right\} &= M'K : MK \\ &= M'Q' : MQ \\ SM' : \quad M'Q' &= SM \quad MQ \\ &= CS \quad CP. \end{aligned}$$

Daher geht die Ellipse auch durch den Punkt M', und eben so wird der Beweiß für den Punkt M'' geführt.

Demnach kann, wenn drey heliocentrische Längen und Breiten eines Planeten sammt seinen Abständen von der Sonne gegeben sind, seine elliptische Bahn beynahe eben so leicht gefunden werden, als der excentrische Kreis.

§. 182. Diese Construktion kann nun auf folgende Art berechnet werden. Es seyen die drey Radii Vectores $SM = r$, $SM' = r'$, $SM'' = r''$, und die Winkel $MSM' = w$, $MSM'' = w'$, der gesuchte Winkel $PSM = v$; so ist in dem gleichschenklichten Dreyeck MSm die Seite $Mm = 2r \,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} w$, und eben so $Mm' = 2r' \,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} w'$, für den Halbmesser $= 1$. Da nun

$$M'm : Mm = SM' : SK$$
$$r' - r : 2r \,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} w = r' : SK;$$

so ist $SK = \dfrac{2rr' \,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} w}{r' - r}$

Eben so $SK' = \dfrac{2rr'' \text{Sin.}\, \frac{1}{2} w'}{r'' - r}$

Wegen der Parallelen Mm und SK, Mm' und SK', ist der Winkel $KSK' = mMm' = (90^\circ - \frac{1}{2} w) - (90^\circ - \frac{1}{2} w') = \dfrac{w' - w}{2}$ gegeben. Folglich kennt man in dem Dreyeck KSK' das Verhältniß der Seiten SK, SK', und ihren Zwischenwinkel. Man suche einen Hülfswinkel x durch die Formel

1.) $\text{Tang.}\, x = \dfrac{r''(r' - r) \,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} w'}{r'(r'' - r) \,\text{Sin.}\, \frac{1}{2} w}$; so ist, wenn die halbe Differenz der zwey übrigen Winkel dieses Dreyecks $= y$ gesetzt wird,

2.) $\text{Tg.}\, y = \text{Cotg.}\, \dfrac{w' - w}{4} \,\text{Tg.}\, (x - 45^\circ)$,

und $GKS = 90^\circ - \dfrac{w' - w}{4} + y$;

oder 3.) $GSK = \dfrac{w' - w}{4} - y$.

Hieraus findet sich $GSM = KSM - GSK = SMm - GSK = 90^\circ - \frac{1}{2} w - GSK$, mithin

4.) $v = 90^\circ + y - \dfrac{w + w'}{4}$

Man ziehe MR auf AG senkrecht; so ist $SR = SM \,\text{Cos.}\, SPM = r \,\text{Cos.}\, v$. Ferner ist $GS = SK \,\text{Cos.}\, GSK$;

folglich $MQ = GR = SK \text{ Cos. } GSK - r \text{ Cos. } v = Mg = Mh$

$$Sg = SK \text{ Cos. } GSK + r - r \text{ Cos. } v$$
$$= SK \text{ Cos. } GSK + 2r \overline{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} v}^2$$
$$Sh = SK \text{ Cos. } GSK - r - r \text{ Cos. } v$$
$$= SK \text{ Cos. } GSK - 2r \overline{\text{Cos. } \tfrac{1}{2} v}^2$$

Aber $Sg : GS = SM : SP$
$Sh : GS = SM : SA$;

folglich ist, wenn man

5.) $q = \dfrac{r' - r}{r' \text{ Sin. } \frac{1}{2} w \text{ Cos. } \left(\frac{w' - w}{4} - y\right)}$ setzt,

6.) $SP = \dfrac{r}{1 + q \overline{\text{Sin. } \frac{1}{2} v}^2}$,

7.) $SA = \dfrac{r}{1 - q \overline{\text{Cos. } \frac{1}{2} v}^2}$

Alsdenn ist die große Axe $= SP + SA$, der Exponent des Verhältnißes der Excentricität zu der halben großen Axe, oder $e = \dfrac{SA - SP}{SA + SP}$, und der halbe Parameter $= (1 + e)\, SA$.

In dem Dreyeck KSK' ist $\left.\begin{matrix}\text{Cotg. } GKS \\ \text{Tg. } GSK\end{matrix}\right\} = \dfrac{SK}{SK'} \text{ Cosec. } KSK'$ $- \text{Cotg. } KSK'$; folglich kann man PSM oder v auch so finden. Man suche einen Winkel z durch die Formel

$$\text{Cotg. } z = \frac{r'(r'' - r) \text{ Sin. } \frac{1}{2} w}{r''(r' - r) \text{ Sin. } \frac{1}{2} w'} \text{ Cosec. } \frac{w' - w}{2} - \text{Cotg. } \frac{w' - w}{2};$$ so ist

$v = z - \frac{1}{2} w$.

Sodenn hat man $q = \dfrac{r' - r}{r' \text{ Sin. } \frac{1}{2} w \text{ Sin. } z}$, und das übrige wie vorhin.

Es seyen z. B. folgende Abstände des Mars von der Sonne, und die Zwischenwinkel gegeben:

$r = 1{,}399200$	$w =$	$106°$	$59'$ $40''$
$r' = 1{,}623448$	$w' =$	249	59 50
$r'' = 1{,}483355$			
$r' - r = 0{,}224248$;	$\frac{1}{2} w =$	53	29 50
$r'' - r = 0{,}084155$;	$\frac{1}{2} w' =$	124	59 55
$\text{Lg. } r'' = 0{,}1712452$		71	30 50
		178	29 45
$\text{Lg. } (r' - r) = 9{,}3507286$;	$\frac{w' - w}{4} =$	35	45 $2{,}5$
$\text{Lg. Sin. } \frac{1}{2} w' = 9{,}9133719$;	$\frac{w' + w}{4} =$	89	14 $52{,}5$

$$9{,}4353457$$
$$\text{Lg. } r' = 0{,}2104384$$
$$\text{Lg. } (r''-r) = 8{,}9250799$$
$$\text{Lg. Sin. } \tfrac{1}{2}w = 9{,}9051631$$
$$9{,}0406814$$
$$\text{Lg. Tg. } x = 0{,}3946643; \qquad x = 68\ \ 2\ \ 57$$
$$45$$
$$9{,}6288872 = \text{Lg. Tg. } 23\ \ 2\ \ 57$$
$$\text{Lg. Cotg. } \frac{w'-w}{4} = 0{,}1427185 \qquad 90$$
$$\text{Lg. Tg. } y = 9{,}7716057; \qquad y = 30\ \ 35\ \ 2{,}9$$
$$\text{Lg. } r' = 0{,}2104384 \qquad 120\ \ 35\ \ 2{,}9$$
$$\text{Lg. Sin. } \tfrac{1}{2}w = 9{,}9051631 \qquad v = 31\ \ 20\ \ 10{,}4$$
$$9{,}9982319 = \text{Lg. Cos. } 5\ \ 9\ \ 59{,}6$$
$$0{,}1138334$$
$$\text{Lg. } (r'-r) = 9{,}3507286$$
$$\text{Lg. } q = 9{,}2368952 \qquad \tfrac{1}{2}v = 15\ \ 40\ \ 5{,}2$$
$$2\,\text{Lg. Sin. } \tfrac{1}{2}v = 8{,}8629353$$
$$2\,\text{Lg. Cos. } \tfrac{1}{2}v = 9{,}9671102$$
$$8{,}0998305; \qquad 0{,}0125843$$
$$9{,}2040054; \qquad 0{,}1599578$$
$$0{,}0054311 = \text{Lg. } 1{,}0125843$$
$$9{,}9243011 = \text{Lg. } 0{,}8400422$$
$$\text{Lg. } r = 0{,}1458798$$
$$\text{Lg. } SP = 0{,}1404487; \quad SP = 1{,}381811$$
$$\text{Lg. } SA = 0{,}2215787; \quad SA = 1{,}665631$$
$$AP = 3{,}047442$$
$$CA = 1{,}523721$$
$$e = 0{,}093134.$$

Um die hier gegebene Regeln auf alle Fälle anwenden zu können, rechne man immer die Winkel w, w' von dem kleinsten Radius Vector r an nach der Richtung der Bewegung des Planeten und wähle unter den zwey Winkeln y, $y+180^\circ$, welche der gefundenen Tangente derselben entsprechen, denjenigen, bey welchem die zwey Winkel $v+w$, $v+w'$ zwischen v und $360-v$ fallen. Eben dieses ist bey der anderen Auflösungsart mittelst des Hülfswinkels z, welcher auch $= 180^\circ + z$ seyn kann, zu beobachten. Kommt z kleiner als $\frac{1}{2}w$ heraus; so addirt man 360 Gr. zu z, und zieht von der Summe den Winkel $\frac{1}{2}w$ ab.

Es seyen z. B. r, r', r'' wie vorhin, aber $w = 169^\circ 40' 0''$; $w' = 312^\circ 40' 10''$. Hier findet sich $x = 44^\circ 27' 31'',26$; also wird $x - 45^\circ$, und dadurch Tg. y negativ. Die zwey Werthe von y sind daher $179^\circ 14' 53'',17$ und $359^\circ 14' 53'',17$. Man wird finden, daß in gegenwärtigem Fall der zweyte dieser Werthe gebraucht werden muß, welcher $v = 328^\circ 39' 50'',67$ giebt.

Eben dieser Werth findet sich nach der zweyten Auflösungsart so:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Lg. } r' & = & 0{,}2104384 \\
\text{Lg. } (r''-r) & = & 8{,}9250799 \\
\text{Lg. Sin. } \tfrac{1}{2} w' & = & 9{,}9982318 \\
\hline
 & & 9{,}1337501 \\
\hline
\text{Lg. } r'' & = & 0{,}1712452 \\
\text{Lg. } (r'-r) & = & 9{,}3507286 \\
\text{Lg. Sin. } \tfrac{1}{2} w' & = & 9{,}6035696 \\
\text{Lg. Sin. } \frac{w'-w}{2} & = & 9{,}9769601 \\
\hline
 & & 9{,}1025035 \\
 & & 0{,}0312466; \quad 1{,}0745995 \\
\text{Cotg. } \frac{w'-w}{2} & = & 0{,}3345683 \\
\hline
\text{Cotg. } z & = & 9{,}7400312 \\
z & = & 53^{\circ}\ 29'\ 50'',66 \\
 & & 360 \\
\hline
 & & 413\ \ 29\ \ 50{,}66 \\
\tfrac{1}{2} w & = & 84\ \ 50\ \ 0 \\
\hline
v & = & 328\ \ 39\ \ 50{,}66
\end{array}$$

Findet sich $q\,\overline{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}\,v}^2 = 1$ oder > 1 so liegen die drey gegebene Punkte im ersten Fall auf einer Parabel, im zweyten auf einer Hyperbel, und der Punkt S ist der Brennpunkt der Parabel, oder einer der Brennpunkte der Hyperbel.

§. 183. Mittelst des zweyten keplerischen Gesetzes (§. 179.) wird die Gleichung des Mittelpunkts auf folgende Art gefunden. Es sey AP (Fig. 61.) die große, BD die kleine Axe der elliptischen Bahn, und die Sonne in einem der Brennpunkte S. Der Planet befinde sich in M, und es sey der Radius Vector SM gezogen; so ist PSM die wahre Anomalie, und es verhält sich die Umlaufszeit T des Planeten zu der Zeit t, welche er gebrauchte, um den elliptischen Bogen PM zu durchlaufen, wie sich die Fläche der Ellipse zu dem Flächeninhalt des Sectors PSM verhält. Aus dem Mittelpunkt C der Ellipse sey mit einem Halbmesser, welcher der halben großen Axe CP der Ellipse gleich sey, ein Kreis beschrieben, und aus dem Ort M des Planeten ein Perpendickel MQ auf die große Axe AP gefällt, welches über M hinaus verlängert dem Kreis in m begegne. Man ziehe Sm, Cm. und Sr auf Cm senkrecht.

Nun verhält sich so wohl die Fläche der Ellipse zu der Fläche des um ihre große Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises, als die Fläche PMQ zu der correspondirenden Fläche PmQ des Kreises wie die kleine Axe BD zu der großen AP (Regelschn. II, 37.), und das Dreyeck SQM verhält sich zu dem Dreyeck $SQm = MQ : mQ$ (VI, 1.), oder ebenfalls wie $BD : AP$ (Regelschn. II, 7. Zus. 2.). Folglich verhält sich der elliptische Ausschnitt PSM zu dem correspondirenden Ausschnitt PSm des Kreises wie $BD : AP$ oder wie der Inhalt der Ellipse zu der Fläche des um sie beschriebenen Kreises, und verwechselt die Fläche der Ellipse: Sector PSM, oder $T : t$, wie die Kreisfläche zu dem Sector PSm. Man nehme den Winkel PCn so, daß $T : t = 360° : PCn$; so wird sich auch verhalten die Kreisfläche zu dem Sector PCn wie $T : t$, d. i. wie die Kreisfläche zu dem Sector PSm. Mithin muß der Sector PSm dem Sector PCn, und, wenn man jeden derselben von dem Sector PCm hinwegnimmt, das Dreyeck CSm dem Sector mCn gleich seyn. Daher muß $Cn \times Sr = Cm \times mn$, und das Perpendickel Sr dem Kreisbogen mn gleich seyn. Ist die Excentricität CS klein; so ist der Bogen mn wenig von dem Perpendickel Sr verschieden, und daher die Sn nahe mit der Cm parallel.

Es sey nun der wahre Ort M des Planeten gegeben, und man soll die Zeit finden, welche er gebrauchte, um den elliptischen Bogen PM zu beschreiben. Von dem Punkt M fälle man zu dem Ende des Perpendickel MQ auf AP, verlängere es über M hinaus bis an den Kreis nach m, ziehe den Halbmesser Cm, und durch S die Sn, so daß der Bogen mn dem Perpendickel Sr gleich werde, oder, wenn man die Aufgabe nur durch Näherung auflösen will, die Sn mit Cm parallel, welche dem Kreis in n begegne. Alsdenn wird sich verhalten der Umfang des Kreises zu dem Kreisbogen Pn, oder 360° zu dem Winkel PCn wie die Umlaufszeit des Planeten zu der gesuchten Zeit.

Umgekehrt, wenn die von dem Durchgang durch das Perihelium an verfloßene Zeit gegeben ist, und der wahre Ort des Planeten gesucht wird, bestimme man den Bogen Pn oder den Winkel PCn durch die Proportion $T : t = 360° :$

PCn, ziehe sodenn den Halbmesser *Cm* so, daß der Bogen *nm* dem Perpendickel *Sr* gleich werde, oder, wenn man sich mit einer Näherung begnügen will, die *Cm* mit der *Sn* parallel. Von *m* fälle man ein Perpendickel *mQ* auf die große Axe *AP*; so wird dieses der Ellipse in dem gesuchten Punkt *M* begegnen. Der Beweiß ergiebt sich in beyden Fällen leicht aus der vorausgeschikten Analyse.

Die Bestimmung von *M* durch *m*, und umgekehrt, hat keine Schwierigkeit. Aber der Bogen *mn* kann aus dem Bogen *Pm* nur mittelst der trigonometrischen Linien, und des Verhältnißes des Kreisumfgngs zu seinem Durchmesser, und aus dem Bogen *Pn* der *mn* selbst mittelst dieser nicht direkt, und ohne unendliche Reihen zu gebrauchen, gefunden werden. Die auf den zweyten Fall sich beziehende Aufgabe, aus dem Winkel *PCn* den Winkel *PCm* zu finden, heißt das keplerische Problem, welches, wie man sieht, darauf hinauslauft, die Fläche des Halbkreises *AbP* durch eine aus dem gegebenen Punkt *S* seines Durchmessers gezogene gerade Linie *Sm* in einem gegebenen Verhältniß zu theilen, nemlich so, daß die Fläche *AbP* zu der Fläche *SmP* sich wie $\frac{1}{2}T : t$ verhalte *).

§. 184. Die vierte geometrische Proportionalzahl zu der siderischen, oder wenn die Apsidenlinie sich bewegt, zu der anomalistischen Umlaufszeit *T*, zu der von dem nächstvorhergehenden Durchgang durch das Perihelium an bis zu einem gewißen Zeitpunkt verfloßenen Zeit *t* und zu 360 Graden heißt auch hier die mittlere Anomalie für diesen Zeitpunkt, welche also der Zeit proportional wächst. Denkt man sich den Flächeninhalt der Ellipse in 360 gleiche Theile getheilt; so drückt diese Zahl den Inhalt des elliptischen Sectors *SMP*; welcher in der Zeit *t* beschrieben wurde, in eben diesen Theilen aus. Und eben so drükt die mittlere Anomalie den Inhalt des Sectors *SmP* in solchen Theilen

*) *Kepler* de motibus stellæ Martis, pag. 300. — adhortor Geometras, ut mihi solvant hoc problema: — Aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione secare. Mihi sufficit credere, solvi a priori non posse, propter arcus et sinus *ἑτερογένειαν*.

aus, deren 360 auf den Flächeninhalt des um die Ellipse beschriebenen Kreises gehen. In so fern nun das Verhältniß der mittleren Anomalie zu 360 Gr. dem Verhältniß des Sectors *SMP* zu dem Flächeninhalt der Ellipse, oder des Sectors *SmP* zu der Fläche des um die Ellipse beschriebenen Kreises gleich ist, kann man sagen, der Sector *SMP* sey die mittlere Anomalie, wenn das andere Glied des Verhältnißes die Fläche der Ellipse ist, oder sie sey der Fläche *SmP* gleich, wenn man die Fläche des Kreises *AbPd* als zweytes Glied des Verhältnißes betrachtet. Versteht man aber unter der mittleren Anomalie einen Winkel; so wird sie dem Winkel *PCn* gleich seyn, welcher sich zu 360 Gr. wie $t : T$ verhält. Zieht man durch *S* die Parallele *Sn'* mit *Cn*; so wird auch die mittlere Anomalie dem Winkel gleich seyn, welchen der Planet von dem Perihelio an in der Zeit *t* beschrieben haben würde, wenn er sich mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit um die Sonne bewegte.

Der um die große Axe der Ellipse als Durchmesser beschriebene Kreis *AbPd* heißt der excentrische Kreis. Der Winkel *PCm*, welchen der an den Durchschnittspunkt *m* des excentrischen Kreises und des auf der Seite des Planeten verlängerten von seinem wahren Ort *M* auf die große Axe *AP* gefällten Perpendickels *QMm* gezogene Halbmesser *Cm* mit der großen Axe einschließt, heißt die excentrische Anomalie (Anomalia eccentri).

Endlich heißt der Winkel *PSM*, welchen der Radius Vector des Planeten mit der Apsidenlinie macht, die wahre Anomalie (Anomalia vera, coæquata). Diese drey Anomalien werden von dem Perihelium an nach der Richtung der Bewegung des Planeten bis auf 360° in einem fort gezählt. Der Unterschied zwischen der mittleren und wahren Anomalie heißt wie bey der excentrischen Kreisbewegung die Gleichung des Mittelpunkts.

§. 185.) Es seyen die halbe große Axe *CP* (Fig 61.) der Ellipse $= a$, ihr halber Parameter $= p$, die halbe kleine Axe *CB* $= b$, $CS : CA = e : 1$, oder $CS = ae$, die wahre Anomalie $PSM = v$, die excentrische Anomalie $PCm = u$, die mittlere Anomalie $PCn = m$, der Radius Vector $SM = r$, und das

Verhältniß des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser $= \pi : 1$; so ergeben sich aus der im 183sten §. gezeigten Construction folgende Ausdrücke.

Weil $mn = Sr = CS \text{ Sin. } PCm$ (f. d. Halbm. 1.)
$= ae \text{ Sin. } u$

und 180° : W. $mCn = a\pi : \left\{ \begin{matrix} mn \\ ae \text{ Sin. } u \end{matrix} \right\}$

$= \pi : \; e \text{ Sin. } u$;

so ist der Winkel $mCn = \frac{180}{\pi} e \text{ Sin. } u$ Gr.

$$= \frac{180.60.60}{\pi} e \text{ Sin. } u \text{ Sekunden,}$$

$= 206264,806 \; e \text{ Sin. } u$ Sek.

$= e' \text{ Sin. } u$ zur Abkürzung.

Aber $PCn = PCm - mCn$; folglich

1.) $m = u - e' \text{ Sin. } u$

ferner ist $mQ = Cm \text{ Sin. } PCm = a \text{ Sin. } u$

$$MQ = \frac{b}{a} mQ = b \text{ Sin. } u$$

$$SQ = CQ - CS = a \text{ Cos. } u - ae$$

$$\overline{SM}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{SQ}^2 = b^2 \overline{\text{Sin. } u}^2 + a\ (\text{Cos. } u - e)^2$$

$$= b^2 \overline{\text{Sin. } u}^2 + a^2 \overline{\text{Cos. } u}^2 - 2a^2 e \text{ Cos. } u + a^2 e^2$$

$$= b + (a^2 - b^2) \overline{\text{Cos. } u}^2 - 2a^2 e \text{ Cos. } u + a^2 e^2$$

$$= a^2 - 2a^2 e \text{ Cos. } u + a^2 e^2 \overline{\text{Cos. } u}^2, \text{ weil } a^2 - b^2 = a^2 e^2$$

$$= a^2 (1 - e \text{ Cos. } u)^2, \text{ und daher}$$

2.) $r = a (1 - e \text{ Cos. } u)$

Sodenn 3.) $\text{Sin. } v = \frac{MQ}{SM} = \frac{b \text{ Sin. } u}{a(1 - e \text{ Cos. } u)} = \frac{\text{Sin. } u \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \text{ Cos. } u}$

4.) $\text{Cos. } v = \frac{SQ}{SM} = \frac{a \text{ Cos. } u - ae}{a(1 - e \text{ Cos. } u)} = \frac{\text{Cos. } u - e}{1 - e \text{ Cos. } u}$,

und hieraus folgt umgekehrt

5.) $\text{Cos. } u = \frac{\text{Cos. } v + e}{1 + e \text{ Cos. } v}$.

Daher $1 - \text{Cos. } u = \frac{1 + e \text{ Cos. } v - \text{Cos. } v - e}{1 + e \text{ Cos. } v}$

$$= \frac{(1 - e)(1 - \text{Cos. } v)}{1 + e \text{ Cos. } v}$$

oder 6.) $\overline{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} u}^2 = \frac{(1 - e) \overline{\text{Sin. } \tfrac{1}{2} v}^2}{1 + e \text{ Cos. } v}$.
4

Eben so $1 + \text{Cos.}\, u = \dfrac{(1+e)(1+\text{Cos.}\, v)}{1 + e\, \text{Cos.}\, v}$;

also 7.) $\overline{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} u}^2 = \dfrac{(1+e)\, \overline{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} v}^2}{1 + e\, \text{Cos.}\, v}$, und mittelst n. 6.

$$\overline{\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} u}^2 = \frac{1-e}{1+e}\, \overline{\text{Tg.}\, \tfrac{1}{2} v}^2$$

oder 8.) $\text{Tang.}\, \tfrac{1}{2} u = \text{Tg.}\, \tfrac{1}{2} v \sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$

Aus n. 5. folgt $1 - e\,\text{Cos.}\, u = \dfrac{1 - e2}{1 + e\,\text{Cos.}\, v}$; daher ist vermöge n. 2.

$$9.)\ r = \frac{a(1-e2)}{1 + e\,\text{Cos.}\, v} = \frac{p}{1 + e\,\text{Cos.}\, v},\ \text{weil}\ p = \frac{b^2}{a} = a(1-e2).$$

Durch die Verbindung dieses Ausdruks mit n. 6. und 7. erhält man

$$\overline{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} u}^2 = \frac{(1-e)\, r\, \overline{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} v}^2}{p} = \frac{r\, \overline{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} v}^2}{a(1+e)}$$

$$\overline{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} u}^2 = \frac{(1-e)\, r\, \overline{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} v}^2}{p} = \frac{r\, \overline{\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} v}^2}{a(1-e)},$$

daher 10.) $\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} u = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} v \sqrt{\dfrac{r}{a(1+e)}} = \text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} v \sqrt{\dfrac{r(1-e)}{p}}$

$$11.)\ \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} u = \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} v \sqrt{\frac{r}{a(1-e)}} = \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} v \sqrt{\frac{r(1+e)}{p}}$$

$$12.)\ \text{Sin.}\, u = \frac{r\,\text{Sin.}\, v}{a\sqrt{1+e^2}},\ \text{weil}\ 2\,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} u\, \text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} u = \text{Sin.}\, u.$$

$$= \frac{r\,\text{Sin.}\, v \sqrt{1-e^2}}{p}$$

Multiplicirt man die Gleichung n. 10. mit $2\,\text{Cos.}\, \tfrac{1}{2} v$, die n. 11. mit $2\,\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} v$, und zieht von dem zweyten Produkt das erste ab; so erhält man

$$13.)\ 2\,\text{Sin.}\, \frac{v-u}{2} = \text{Sin.}\, v\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}\right)\sqrt{\frac{r}{p}}$$

$$= \text{Sin.}\, u\left(\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}\right)\sqrt{\frac{a}{r}}\ \ (\text{n. 12.})$$

Mehrere dieser Ausdrücke werden einfacher, wenn man $e = \text{Sin.}\, k$ setzt *). Alsdenn werden $\text{Cos.}\, k = \sqrt{1-e^2}$; $1 - \text{Cos.}\, k = 1 - \sqrt{1-e^2}$; $4\,\overline{\text{Sin.}\, \tfrac{1}{2} k}^2 = 2 - 2\sqrt{1-e^2} = (\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e})^2$;

*) Theoria motus corporum cœlestium auctore C. F. Gauſs. Hamburgi 1809. §. 8. pag. 8.

$2\,\mathrm{Sin.}\,\frac{1}{2}k = \sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}$. Ferner $\frac{1-e}{1+e} = \frac{1-\mathrm{Sin.}\,k}{1+\mathrm{Sin.}\,k} = \mathrm{Tg.}\,(45^\circ - \frac{1}{2}k)^2$.

Mithin $\mathrm{Sin.}\,u = \frac{r\,\mathrm{Sin.}\,v}{a\,\mathrm{Cos.}\,k} = \frac{r\,\mathrm{Sin.}\,v\,\mathrm{Cos.}\,k}{p}$

$$\mathrm{Sin.}\,\frac{v-u}{2} = \mathrm{Sin.}\,v\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}k\,\sqrt{\frac{r}{p}},$$

$$= \mathrm{Sin.}\,u\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}k\,\sqrt{\frac{a}{r}}.$$

$$\mathrm{Tg.}\,\tfrac{1}{2}u = \mathrm{Tg.}\,\tfrac{1}{2}v\,\mathrm{Tg.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}k)$$

Beyspiel. In §. 182. hat man gefunden $e = 0{,}093134$. Man sucht die mittlere Anomalie m für die wahre $v = 31^\circ\,20'\,10''$.

$1+e = 1{,}093134$ Lg. $= 0{,}0386734$
$1-e = 0{,}906866$ Lg. $= 9{,}9595431$

$\mathrm{Lg.}\,\frac{1-e}{1+e} = 9{,}9188697$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{Lg.}\,\frac{1-e}{1+e} = 9{,}9594348.5$

$\mathrm{Lg.\,Tg.}\,\frac{1}{2}v = 9{,}4479109$

$\mathrm{Lg.\,Tg.}\,\frac{1}{2}u = 9{,}4073457.5$

$\frac{1}{2}u = 14^\circ\,19'\,51'',67$
$u = 28\;\;39'\;43,34$ Lg. Sin. $= 9{,}6809174$
Lg. $e = 8{,}9691083$
Lg. $206264{,}8 = 5{,}3144251$
Lg. e' Sin. $u = 3{,}9644508$
e' Sin. $u = \;\;2\;\;33\;\;34{,}05$
$m = 26\;\;\;6\;\;\;9{,}29$
$v = 31\;\;20\;\;10{,}00$
$v - m = \;\;5\;\;14\;\;\;0{,}71$,

Berechnung von u nach n. 13. In §. 182. hat man gefunden $a = 1{,}52372$, und für die vorige wahre Anomalie ist $r = 1{,}399200$.

$\left.\begin{array}{r}\mathrm{Lg.}\,e\\ \mathrm{Lg.\,Sin.}\,k\end{array}\right\} = 8{,}9691082$; $k = 5^\circ\;20'\;38'',15$

Lg. Cos. $k = 9{,}9981033$
2 Lg. Cos. $k = 9{,}9962166$
Lg. $a = 0{,}1820052$
Lg. $p = 0{,}1791218$
Lg. $r = 0{,}1458798$

$\mathrm{Lg.}\,\frac{r}{p} = 9{,}9667580$

$\frac{1}{2}\,\mathrm{Lg.}\,\frac{r}{p} = 9{,}9833790$

Lg. Sin. $v = 9{,}7160514$

$$\text{Lg. Sin.}\ \tfrac{1}{2}k = \underline{8{,}6685507}$$

$$\text{Lg. Sin.}\ \frac{v-u}{2} = 8{,}3679811\,;\quad \frac{v-u}{2} = 1^\circ\ 20'\ 13'',33$$

$$v - u = 2\ 40\ 26{,}66$$

$$\text{Lg. Sin.}\ v = 9{,}7160514 \qquad v = \underline{31\ 20\ 10{,}00}$$

$$\text{Lg. Cos.}\ k = 9{,}9981083 \qquad u = 28\ 39\ 43{,}34$$

$$\text{Lg.}\ r = \underline{0{,}1458798}$$

$$\text{Lg.}\ p = \underline{0{,}1791218}$$

$$\text{Lg. Sin.}\ u = 9{,}6809177$$

$$\text{Lg.}\ e' = \underline{4{,}2835334}$$

$$3{,}9644511\,;\ e'\,\text{Sin.}\ u = \underline{2\ 33\ 34{,}06}$$

$$m = 27\ 6\ 9{,}28$$

In der §. 182. gefundenen Ellipse macht der Radius Vector r' mit dem r einen Winkel von $160^\circ\ 59'\ 40''$, und da die dem letzteren zugehörige wahre Anomalie $= 31^\circ\ 20'\ 10''$ ist; so ist die dem ersteren entsprechende $= 138^\circ\ 19'\ 50''$. Man sucht diesen Radius Vector aus v und p nach n. 9.

$$\text{Lg.}\ e = 8{,}9691083$$

$$\text{Lg. Cos.}\ v = \underline{9{,}8733164}\,;\ \text{negativ.}$$

$$\underline{8{,}8424247}\,;\ e\,\text{Cos.}\ v = -0{,}0695704$$

$$\text{Lg.}\,(1 + e\,\text{Cos.}\ v) = 9{,}9686835 \qquad 0{,}9304286$$

$$\text{Lg.}\ p = \underline{0{,}1791218}$$

$\text{Lg.}\ r' = 0{,}2104383\,;$ $\quad r' = 1{,}623448$, wie man ihn im 182ten §. angenommen hat.

§. 186. Um aus der mittleren Anomalie die excentrische und wahre Anomalie zu finden, hat man aus der transcendenten Gleichung $m = u - e'\,\text{Sin.}\ u$ (§. 185. n. 1.) den Winkel u durch m und e' zu bestimmen, worin eigentlich die Schwierigkeit der Auflösung des keplerischen Problems liegt. Die direkte Auflösung kann nur durch Näherung mittelst unendlicher Reihen geschehen, welche aber, bey einer beträchtlichen Excentricität so langsam convergiren, daß die indirekte Auflösung bequemer ist. Es ist $u = m + e'\,\text{Sin.}\ u$; folglich ist u zwischen den Gränzen $m \pm e'$ enthalten, wo das obere Zeichen für den ersten und zweyten, das untere für den dritten und vierten Quadranten gilt. Setzt man zuerst in dem zweyten Glied der Gleichung $u = m$; so erhält man einen ersten genäherten Werth von u. Diesen setzt man in die Gleichung, und findet dadurch einen genaueren Werth von u. Man setzt dieses Verfahren so lange fort, bis zwey zunächst aufeinander folgende Werthe von u um weniger als um $1''$ oder $0'',1$ von einander verschieden sind, je nachdem man u innerhalb jener oder dieser Gränze genau bestimmen will.

Diese indirekte Auflösung kann noch beträchtlich abgekürzt werden *). Es sey u' ein genäherter Werth von u, und x die ihm noch beyzufügende in Sekunden ausgedrükte Verbesserung, so daß der Werth $u' + x$ von u der Gleichung Gränze leiste. Man berechne e' Sin. u' durch Logarithmen, und bemerke zugleich aus den Tafeln die Veränderung des Lg. Sin. u' für eine Sekunde Veränderung von u', und die Veränderung des Lg. e' Sin. u' für eine Einheit oder eine Sekunde Veränderung in der Zahl e' Sin. u'. Es seyen diese Veränderungen ohne Rücksicht auf ihre Zeichen beziehungsweise f und g. Wenn nun u' schon so nahe zu dem wahren Werth von u fällt, daß die Veränderungen des Logarithmen des Sinus von u' bis $u' + x$, und die Veränderungen des Logarithmen der Zahl von e' Sin. u' bis e' Sin. $(u' + x)$ als gleichförmig können angenommen werden; so wird man setzen können e' Sin. $(u' + x) = e'$ Sin. $u \pm \frac{fx}{g}$, wo das obere Zeichen im ersten und vierten, das untere im zweyten und dritten Quadranten gilt. Da nun vermöge der Voraussetzung $u' + x = m + e'$ Sin. $(u' + x)$; so wird seyn $u' + x = m + e'$ Sin. $u' \pm \frac{fx}{g}$, und $\frac{g \mp f}{g}\, x = m + e'$ Sin. $u' - u'$, $\frac{fx}{g} = \frac{f}{f \mp g}\, (m + e'$ Sin. $n' - u')$. Folglich der wahre Werth von u oder $u + x = m + e'$ Sin. $u' \pm \frac{f}{g \mp f}\, (m' + e'$ Sin. $u' - u')$. Wenn aber der angenommene Werth von u noch zu sehr von dem wahren verschieden war, als daß die obige Voraussetzung für hinreichend genau dürfte erhalten werden; so wird wenigstens durch diese Methode ein viel näherer Werth gefunden werden, mit welchem dieselbe Operation zu wiederholen seyn wird, u. s. w. Die erste Berechnung darf nicht scharf geführt werden, und man kann dabey immer solche Werthe von u wählen, deren Lg. Sin. aus den Tafeln ohne Interpolation können genommen werden.

Sey z. B. $m = 26° \, 6' \, 9'',28$, $e = 0,093134$; also $e' = 19210,26$ Sekunden.

Weil Sin. $m = 0,44$; so wird man als einen ersten genäherten Werth von u annehmen können $m + 0,44\, e'$ oder $28° \, 30' = u'$. Demnach

Lg. Sin. $u' = 9,6786626$; Veränd. für $1'' = 38,8 = f$
Lg $e' = 4,2835334$

Lg. e' Sin. $n' = 3,9621963$; Veränd. für $1'' = 480 = g$
e' Sin.. $u' = 9166'' = 2° \; 32' \; 46''$
$= 26 \;\; 6 \;\; 9$

$m + e'$ Sin. $u' = 28 \;\; 38 \;\; 55$
$u' = 28 \;\; 30$

*) Gauss Theoria mot. corp. c. 9. 11. 12.

$m + e'$

$$m + e' \text{Sin.} u' - u' = \quad 8' \, 55'' = 535,$$

daher $x = \frac{38,8}{441,2} \cdot 535 = 47''$, und der verbesserte Werth von u $= 28^\circ \, 38' \, 55'' + 47'' = 28^\circ \, 39' \, 42''$, mit welchem man jetzt die Rechnung genauer wiederholt.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Lg. Sin.} u' & = & 9,6809123; \; f = 38,5 \\
\text{Lg.} e' & = & \underline{4,2835334} \\
\text{Lg.} e' \text{Sin.} u' & = & 3,9644457; \; g = 471 \\
e' \text{Sin.} u' & = & 9213,95 = 2^\circ \; 33' \; 33'',95 \\
m & = & 26 \quad 6 \quad 9,28 \\
m + e' \text{Sin.} u' & = & 28 \quad 39 \quad 43,23 \\
u' & = & 28 \quad 39 \quad 42,00 \\
m + e' \text{Sin.} u' - u' & = & 0 \quad 0 \quad 1,23
\end{array}$$

daher $x = \frac{38,5}{432,5} \cdot 1,23 = 0'',11$, und der neue verbesserte Werth von u ist $28^\circ \, 39' \, 43'',23 + 0'',11$ oder $28^\circ \, 39' \, 43'',34$, genau derjenige, aus welchem man in dem 185. §. die oben angegebene mittlere Anomalie abgeleitet hat.

Hätte man als einen ersten genäherten Werth von u die gegebene mittlere Anomalie selbst angenommen; so würde man die Verbesserung $x = 12' \, 52''$, und den verbesserten Werth von u $= 28^\circ \, 39' \, 50''$ (in runder Zahl) gefunden haben. Mittelst dieses wird man finden $u' = 28^\circ \, 39' \, 43'',88$, um $6'',12$ größer, als der verbesserte Werth, und die neue Verbesserung $x = - 0'',54$; folglich wie vorhin $u = 28^\circ \, 39' \, 43'',34$. Die gewöhnliche Methode würde eine viermalige Wiederholung der ersten genäherten Berechnung erfordern, um diese Genauigkeit zu erreichen.

§. 187. Die größte Gleichung des Mittelpunkts fällt, wie im 106. §. gezeigt worden ist, in diejenige Punkte der Bahn, in welchen zwischen dem Perihelium und Aphelium die mittlere Winkelbewegung der wahren, oder zwischen dem Aphelium und Perihelium die wahre der mittleren anfangt vorzueilen. Um diese Punkte der elliptischen Bahn zu bestimmen, sey AP (Fig. 62.) die große, BD die kleine Axe der Ellipse, welche der Planet um die in einem ihrer Brennpunkte S befindliche Sonne nach der Richtung $PMAM'$ beschreibt. Ferner sey der Winkel MSm, welchen der Planet von einem zwischen dem Perihelium P und dem Aphelium A liegenden Punkt M an während der Zeit t beschrieben hat, genau demjenigen Winkel gleich, welchen er in derselben Zeit t um die Sonne beschrieben haben würde, wenn er sich beständig mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit um die Sonne bewegte; so wird, wenn des Planeten Umlaufszeit T heißt, sich verhalten $t : T =$ Wink. MSm : 4 rechten Winkeln. Weil nun die Radii Vectores von dem Perihelium an bis zu dem Aphelium beständig wachsen; so wird ein aus S als Mittelpunkt mit dem Halbmesser SM beschriebener Kreis dem größeren Radius Vector in r, ein mit dem Halbmesser Sm beschriebener der Verlängerung des kleineren in q begegnen, und der Kreissector rMS kleiner, der Kreissector mqS größer als der correspondirende Sector der Ellipse seyn. Es verhält sich aber

Sect. rMS : Kreisfläche = Wink. MSm : 4 recht. W.
= t : T (Vorauss.)
= Sect. mMS : Fläche d. Ell. (II. kepl. Gesz.),

und verwechselt

Sect. rMS : Sect. mMS = Kreisfl. : Fläche d. Ell.
= Quadr. v. SM : Recht. $AC \times CB$ (Kegelsch. II, 38.)

Aber Sect. mqS : Sect. rMS = Quadr. v. Sm : Quadr. v. SM

Folglich Sect. mqS : Sect. mMS = Quadr. v. SM : Rechteck $AC \times CB$.

Demnach ist das Quadrat von SM kleiner, und das Quadrat von Sm größer als das Rechteck aus der halben großen und der halben kleinen Axe der Ellipse, oder es ist der kleinere Radius Vector kleiner, der größere hingegen größer als die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der halben großen und der halben kleinen Axe.

Da nun der Planet den Winkel MSm mit seiner beständig abnehmenden Winkelgeschwindigkeit in derselben Zeit beschrieben hat in welcher er eben diesen Winkel mit seiner mittleren Winkelgeschwindigkeit gleichförmig beschrieben haben würde (Vorauss.); so wird die wahre Bewegung von M an zuerst der mittleren voreilen, und zwischen M und m wiederum gegen die mittlere zurückbleiben müssen, damit der mit einer abnehmenden Winkelgeschwindigkeit sich bewegende Radius Vector am Ende der Zeit t wieder auf den sich gleichförmig fortbewegenden Radius zu liegen kommt. Die größte Mittelpunktsgleichung wird also an einem zwischen M und m liegenden Punkt der Bahn eintreffen, wo der Radius Vector größer als SM aber kleiner als Sm ist. Zwischen eben diese Gränzen fällt aber auch vermöge des bewiesenen die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der halben großen und der halben kleinen Axe der Ellipse, und diese Gränzen werden desto enger, je kleiner man die Zeit t annimmt. Folglich wird die Gleichung des Mittelpunkts am größten seyn, wenn der Radius Vector die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der halben großen und der halben kleinen Axe der Ellipse ist.

Man beschreibe also aus dem Mittelpunkt der Sonne S als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, welcher der mittleren geometrischen Proportionallinie zwischen CA und CB gleich sey einen Kreis, welcher, weil sein Halbmesser $< \left\{ \begin{matrix} CA \\ SB \end{matrix} \right\}$ aber $> CB$ und um so mehr größer als der auf AP senkrechte Radius Vector GS ist, die Ellipse zwischen B und G schneiden wird. Es geschehe in M; so wird in diesem Punkt die Gleichung des Mittelpunkts am größten seyn. Denn nimmt man auf beyden Seiten von M die Winkel MSn, MSn' der mittleren Bewegung während einer beliebigen Zeit t gleich; so verhält sich $\left. \begin{matrix} MSn \\ MSn' \end{matrix} \right\}$: 4 recht. W. $= t : T$, und, wenn die geraden Linien Sn, Sn' dem Kreis und der Ellipse in r, r' und m, m' begegnen; so wird der Sector $MmS >$ Sect. MrS, aber der Sector $Mm'S <$ Sect. $Mr'S$ seyn. Es sey z die Zeit, in welcher der Bogen Mm von dem Planeten mit seiner veränderlichen Geschwindigkeit wirklich beschrieben wird, und die Fläche des mit dem Halbmesser SM beschriebenen Kreises, welche der Fläche der Ellipse gleich seyn wird (Kegelschn. II, 38.) heiße A; so wird seyn

$z : T =$ Sect. MmS : Fläche d. Ell. (II, kepl. Gesz.)

$>$ Sect. MrS : $\left\{ \begin{matrix} \text{Fl. d. Ell.} \\ A \end{matrix} \right.$

$>$ Bogen Mr : Umfang d. Kreises

$>$ Wink. MSr : 4 recht. W.

$$> \quad t \quad : T \text{ (Constr.)},$$

und daher $z > t$.

Eben so ist, wenn z' die Zeit ist, in welcher der Planet den Bogen $m'M$ wirklich beschreibt,

$$z' : T = \text{Sect. } Mm'S : \text{Fläche d. Ellipse}$$

$$< \text{Sect. } Mr'S : \left\{\begin{matrix}\text{Fläche d. Ell.} \\ A\end{matrix}\right.$$

$$< \left\{\begin{matrix}\text{Bogen } Mr' \\ \text{Bogen } Mr\end{matrix}\right\} \text{ Uml. d. Kreises}$$

$$< \quad t \quad : \quad T,$$

mithin $z' < t$.

Demnach ist zwischen dem Perihelium und dem Punkt M die Zeit, welche der Planet gebraucht, den Winkel $m'SM$ zu beschreiben, beständig kleiner als die Zeit, welche er zur Beschreibung eben dieses Winkels mit seiner mittleren Winkelgeschwindigkeit gebrauchen würde, die wahre Bewegung eilt der mittleren vor, und die Gleichung des Mittelpunkts wächst bis zu dem Punkt M. Zwischen diesem Punkt und dem Aphelium hingegen ist die Zeit, in welcher der Planet den Winkel MSm beschreibt, größer als die Zeit, in welcher der Planet eben diesen Winkel mit seiner mittleren Winkelgeschwindigkeit beschreiben würde, die mittlere Bewegung eilt der wahren vor, und die Gleichung des Mittelpunkts nimmt von dem Punkt M an wieder ab. Folglich ist sie in dem Punkt M, wo der Radius Vector der mittleren geometrischen Proportionallinie zwischen der halben großen und der halben kleinen Axe der Ellipse gleich ist, am grösten.

§. 188. Behält man die im 185. §. gebrauchte Benennungen bey; so ist die halbe kleine Axe der Ellipse $= a \text{ Cos. } k$, wenn $\text{Sin. } k = e$. Daher ist die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen der halben großen und kleinen Axe $= a \sqrt{\text{Cos. } k}$ Soll nun der Radius Vector dieser Größe gleich werden; so muß seyn $a \sqrt{\text{Cos. } k} = a\,(1 - e \text{ Cos. } u)$ (§. 185. n. 2.)

$$e \text{ Cos. } u = 1 - \sqrt{\text{Cos. } k}$$

$$\text{Sin. } k\,(1 + \sqrt{\text{Cos. } k}) \text{ Cos. } u = 1 - \text{Cos. } k$$

$$\text{Cos. } u = \frac{\text{Tg. } \frac{1}{2} k}{1 + \sqrt{\text{Cos. } k}}.$$

Ferner (§. 185. n. 9.) $a\sqrt{\text{Cos.}\,k} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\,\text{Cos.}\,v}$

$$1+e\,\text{Cos.}\,v = \frac{1-e^2}{\sqrt{\text{Cos.}\,k}} = \frac{\overline{\text{Cos.}\,k}^2}{\sqrt{\text{Cos.}\,k}}$$

$$\text{Cos.}\,u = -\frac{1-\overline{\text{Cos.}\,k}^{\frac{3}{2}}}{\text{Sin.}\,k}.$$

Nach eben diesem §. ist $\text{Sin.}\,\frac{v-u}{2} = \text{Sin.}\,u\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{a}{r}}$; also hier

$$\text{Sin.}\,\frac{v-u}{2} = \frac{\text{Sin.}\,u\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}k}{\sqrt[4]{\text{Cos.}\,k}}.$$

Die Gleichung des Mittelpunkts ist $= v - m = v - u + e'\,\text{Sin.}\,u$ (§. 185. n. 1.); folglich ist die gröste Gleichung des Mittelpunkts

$$= 2\left(\text{Bogen dessen Sin.} = \frac{\text{Sin.}\,u\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}k}{\sqrt[4]{\text{Cos.}\,k}}\right) + e'\,\text{Sin.}\,u.$$

Wenn die Excentricität e klein ist; so ist Cos. u ebenfalls klein, und daher Sin. u nahe $= 1$. Ferner ist der Sin. $\frac{1}{2}k$ nahe seinem Bogen, als der ihm entsprechende in Sekunden ausgedrükte Winkel nahe $= \frac{1}{2}e'$ und Cos. k nahe $= 1$. Folglich die gröste Gleichung des Mittelpunkts beynahe $= 2e'$.

Hienach kann aus der grösten Gleichung des Mittelpunkts G die Excentricität auf folgende Art gefunden werden. Man wird zuerst, wenn G in Sekunden ausgedrükt wird, haben $2e'$ nahe $= G$, und e nahe $= \frac{\frac{1}{2}G}{206264,8}$, weil $e' = 206264,8\,e$. Mittelst dieses genäherten Werths von e, welcher E heisse, berechne man nach obigem Ausdruk die gröste Mittelpunktsgleichung. Wenn nun diese von der vorgegebenen nur wenig verschieden und $= G+D$, die wahre Excentricität aber $= E-x$ ist; so wird sich nahe verhalten

$$G+D : G = E : E-x$$
$$G+D : D = E : x.$$

Findet sich aber ein beträchtlicher Unterschied; so wird man wenigstens einen genaueren Werth von e erhalten, mit welchem die Rechnung zu wiederholen ist.

Es ist z. B. die gröste Mittelpunktsgleichung der Erdbahn $= 1^\circ\ 55'\ 32''$ (§. 167.).

$$G = 3466;\ \text{Lg.} = 3,5398286$$
$$\text{Lg.}\ 206264,8 = 5,3144251$$
$$\text{Lg.}\ E = 8,2254035 = \text{Lg. Sin.}\ K.$$
$$E = 0,01680364$$

$$
\begin{array}{rcll}
K & = & 0^\circ\,57'\,46'',163 & \\
\frac{1}{2}K & = & 0\;\;28\;\;53,081 & \\
\text{Lg. Cos. } K & = & 9,9999387 & \quad 1, \\
\frac{1}{2}\text{ Lg. Cos. } K & = & 9,9999693; & \quad 0,999929 \\
 & & 0,3010147 & = \text{Lg. } 1,999929 \\
\text{Lg. Tg. } \frac{1}{2}K & = & 7,8244039 & \\
\text{Lg. Cos. } U & = & 7,6233892; & U = 89^\circ\,45'\,33'',406 \\
\text{Lg. Sin. } U & = & 9,9999961 & \\
\text{Lg. Sin. } \frac{1}{2}K & = & 7,9243886 & \\
 & & 7,9243847 & \\
\frac{1}{4}\text{ Lg. Cos. } K & = & 9,9999847 & \\
\text{Lg. Sin. } \frac{V-U}{2} & = & 7,9244000; & \qquad\qquad 0\;\;28\;\;53,126 \\
\text{Lg. } E' & = & 3,5398286 & V-U = 0\;\;57\;\;46,252 \\
\text{Lg. } E' \text{ Sin. } U & = & 3,5398247; & E' \text{Sin. } U = 0\;\;57\;\;45,970 \\
 & & & G+D = 1\;\;55\;\;32,222 \\
 & & & D = \qquad\quad 0,222
\end{array}
$$

6932 : 0,222 = 0,01680364 : 0,0000054. Mithin ist die verbesserte Excentricität = 0,01680310.

Die gröste Mittelpunktsgleichung für die Bahn der Juno ist = 29° 30′ 16″,96 *). Hieraus findet sich der erste genäherte Werth von e = 0,2574772, mittelst dessen man die gröste Mittelpunktsgleichung 29° 44′ 13″,56 findet, welche um 13′ 56″,6 zu groß ist. Die Verbesserung findet sich = 0,0020121 und der verbesserte Werth von e = 0,2554651. Aus diesem ergiebt sich die gröste Mittelpunktsgleichung = 29° 30′ 2″,41, welche jetzt um 14″,55 zu klein ist. Die als subtractiv vorausgesetzte Verbesserung wird also negativ, oder man muß die bey dieser Berechnung angenommene Excentricität vergrößern. Man wird x = - 0,00003467 finden, und daher ist der neue verbesserte Werth von e = 0,25549977. Der genaue Werth ist 0,2554996.

Durch die Entwiklung der in diesem §. gegebenen Ausdrücke in Reihen findet man, wenn die Hälfte der in Sekunden ausgedrükten grösten Gleichung des Mittelpunkts mit 206264,806 dividirt, und der Quotient = E gesetzt wird, die Excentricität

$$e = E - \frac{11}{96} E^3 - \frac{587}{30720} E^5 - \frac{40583}{20643840} E^7 - \text{\&c.} \;{}^{**}).$$

§. 189. Damit man nun im Stande sey, den heliocentrischen Ort eines Planeten für einen gegebenen Zeitpunkt angeben zu können, werden folgende sieben Bestim-

*) Gauss Theor. mot. corp. c. pag. 16.

**) Camerer in Astr. Jahrbuch für 1790. S. 242.

mungsstücke oder **Elemente der Planetenbahn** gegeben seyn müßen.

1.) Die Lage der Durchschnittslinie NN' (Fig. 58.) der Ebene der Bahn mit der Ebene der Ekliptik, oder die Lage der Knotenlinie, welche durch den Winkel VSN oder durch die Länge des aufsteigenden Knotens bestimmt wird.

2.) Der Neigungswinkel der Ebene der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik. Diese zwey Stücke bestimmen die Lage der Ebene der Planetenbahn.

3.) Die Dauer der siderischen Umlaufszeit.

4.) Die halbe große Axe der elliptischen Bahn, oder die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne.

5.) Die Excentricität, oder der Exponent des Verhältnißes des halben Abstands der Brennpunkte der Ellipse zu ihrer halben großen Axe.

6.) Die mittlere Länge des Planeten für einen gegebenen Zeitpunkt, welcher die **Epoche** heißt. Mit eben diesem Namen bezeichnet man auch öfters die mittlere Länge selbst. Diese wird in der Ebene der Bahn von einem Punkt an gerechnet, welcher von dem aufsteigenden Knoten um eben so viel rükwarts absteht, als die Länge des letzteren beträgt. Ist P der mittlere Ort des Planeten; so wird seine mittlere Länge auch der Summe der Winkel VSN und NSP gleich seyn. Aber man wird diese Summe nicht dem Winkel VSP gleich setzen dürfen, weil der eine Winkel in der Ebene der Ekliptik, der andere in der Ebene der Bahn liegt.

7.) Die Länge des Periheliums für dieselbe Epoche. Diese wird ebenfalls von einem Punkt an gerechnet, welcher von dem aufsteigenden Knoten um die Länge des letztern rükwarts absteht. Wenn p' das Perihelium ist; so ist hienach die Länge desselben auch der Summe der Winkel VSN und NSp' gleich.

Ist die Zeit des Durchgangs des Planeten durch das Perihelium gegeben; so kennt man eben daher die mittlere so wohl als die wahre Länge des Planeten für diesen Augenblick, weil in der Apsidenlinie die mittlere Länge der wahren gleich ist. Folglich kann dieses Element die Stelle des sechsten vertreten.

Von diesen Elementen bestimmen das dritte und vierte einander gegenseitig vermöge des dritten keplerischen Gesetzes, wenn man den mittleren Abstand eines andern Planeten von der Sonne und seine Umlaufszeit kennt. Allein die genauere Berechnung erfordert, wie man in dem dritten Buch sehen wird, daß man die Verhältniße der Massen der Planeten zu der Masse der Sonne kenne, und folglich werden auch in diesem Fall sieben Stücke zu der Bestimmung einer Planetenbahn erfordert.

Wenn die Elemente einer Planetenbahn sich verändern; so muß noch das Gesetz bekannt seyn, nach welchem diese Veränderungen von der Zeit abhängen, um die Elemente der Bahn für eine jede gegebene Zeit aus den für eine gewiße Epoche geltenden ableiten zu können.

§. 190. Mittelst dieser Elemente kann sodenn der heliocentrische Ort eines Planeten für einen gegebenen Zeitpunkt auf folgende Art gefunden werden.

1.) Man sucht die mittlere Länge des Planeten für den gegebenen in mittlerer Sonnenzeit ausgedrükten Zeitpunkt, indem man zugleich auf den Mittagsunterschied des Orts, für welchen die Epochen gelten, und desjenigen, für welchen man den Ort des Planeten sucht, Rücksicht nimmt. Man berechnet nemlich die mittlere siderische Bewegung während der zwischen dem vorgegebenen Zeitpunkt und der Epoche verfloßenen Zeit t aus der siderischen Umlaufszeit T durch die Proportion $T : t = 360$: der gesuchten mittleren Bewegung, welche $= \frac{360}{T} t$ seyn wird. Sind t und T in Tagen ausgedrückt; so ist $\frac{360}{T}$ die in Graden ausgedrückte mittlere tägliche siderische Bewegung, und, wenn man diese mit n bezeichnet, die mittlere Bewegung in t Tagen $= nt$. Daher ist die gesuchte mittlere Länge = der Länge für die Epoche $\pm\, nt$, je nachdem der Zeitpunkt, für welchen man die Länge sucht, nach oder vor der gegebenen Epoche fällt, wenn man die Aequinoktialpunkte als ruhend betrachtet.

2.) Von der wo nöthig um 360 Gr. vergrößerten mittleren Länge zieht man die Länge des Periheliums ab; so hat man die mittlere Anomalie des Planeten, aus welcher man mittelst der Excentricität die excentrische Anomalie nach §. 186. und den Radius Vector nach §. 185. n. 2. findet. Hieraus ergiebt sich ferner die wahre Anomalie nach §. 185. n. 8. oder 13, und, wenn man zu ihr die Länge des Periheliums addirt, die wahre Länge des Planeten in seiner Bahn, d. i. wenn p (Fig. 58.) der wahre Ort des Planeten ist, die Summe der Winkel VSN und NSp.

3.) Von der wo nöthig um 360 Gr. vergrößerten Länge des Planeten in seiner Bahn zieht man die Länge VSN des aufsteigenden Knotens ab; so erhält man den Winkel NSp, welchen der Radius Vector mit der Knotenlinie von dem aufsteigenden Knoten an nach der Richtung der Bewegung des Planeten gerechnet einschließt, oder das Argument der Breite.

4.) Unter der Voraussetzung der im 174sten §. gezeigten Construktion ist in dem bey r rechtwinklichten Dreyeck pqr, in welchem der Winkel pqr dem gegebene Neigungswinkel der Bahn gleich ist, das Verhältniß der Hypotenuse pq zu der Seite pr gegeben, und in den zwey bey q rechtwinklichten Dreyecken Sqp, Sqr, welche die Seite Sq gemeinschaftlich haben, ist durch den in n. 3. gefundenen Winkel pSq der Winkel rSq gegeben. Folglich hat man den Winkel VSr = der Länge VSN des aufsteigenden Knotens + rSq, oder die wahre heliocentrische Länge des Planeten von dem für die Epoche geltenden Aequinoktialpunkt an gerechnet, zu welcher man daher noch die retrograde Bewegung dieses Punkts in der Zwischenzeit wird addiren müssen, wenn die Länge wie gewöhnlich auf denjenigen Punkt der Ekliptik sich beziehen soll, in welchem sich der Punkt der Frühlingsnachtgleiche in dem vorgegebenen Augenblick befindet.

5.) In dem bey q rechtwinklichten Dreyeck Spq ist durch das

Argument der Breite das Verhältniß von $Sp : pq$, und in dem rechtwinklichten Dreyeck pqr durch die Neigung der Bahn das Verhältniß von $pq : pr$; folglich in dem bey r rechtwinklichten Dreyeck Spr das Verhältniß von $Sp : pr$, und dadurch der Winkel pSr oder die heliocentrische Breite gegeben.

6.) In dem letzteren Dreyeck ist auch das Verhältniß von $Sp : Sr$, und, weil man in n. 2. den Radius Vector Sp schon gefunden hat, die Sr selbst gegeben. Dieser auf die Ebene der Ekliptik projicirte Radius Vector Sr heißt die abgekürzte Distanz (distantia curtata.).

Gebraucht man bey der Berechnung der mittleren Länge in n. 1. statt der siderischen Umlaufszeit die auf die Aequinoktialpunkte sich beziehende tropische Umlaufszeit, oder statt der täglichen siderischen Bewegung, die tägliche tropische Bewegung; so erhält man in n. 4. sogleich die von demjenigen Punkt der Ekliptik an gerechnete Länge, in welchem sich der Aequinoktialpunkt in dem vorgegebenen Augenblick befinden würde, wenn er sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit rükwarts bewegte, welchen man den mittleren Aequinoktialpunkt nennt. Alsdenn muß aber auch statt der siderischen Bewegung des Knotens und des Periheliums die tropische Bewegung derselben gebraucht werden. Wegen der Nutation (§. 160.) erfordert dieser Punkt noch eine kleine Reduktion auf denjenigen, welchen man durch die Beobachtung finden würde.

Die astronomischen Tafeln enthalten neben den Epochen der Länge für den Anfang der Jahre noch die mittlere tägliche tropische Bewegungen der Planeten, ihrer Sonnennähen und aufsteigenden Knoten für alle Tage des Jahrs, sodenn eben diese Bewegungen für Stunden, Minuten und Sekunden, mittelst deren man die mittleren Längen der Planeten, ihrer Sonnennähen und Knoten durch bloße Addition finden kann. Ferner geben sie für alle Grade der mittleren Anomalie und so kleine Unterabtheilungen derselben die Gleichung des Mittelpunkt und den Radius Vector, daß die in der Tafel nicht unmittelbar vorkommende Größen durch Proportionaltheile gefunden werden können. Diejenigen Grössen, von welchen die in einer Tafel vorkommende abhängen, heissen ihre Argumente. Z. B. das Argument der Mittelpunktsgleichung und des Radius Vector ist die mittlere Anomalie. Auch die heliocentrische Breite kann aus einer Tafel entweder unmittelbar genommen, oder durch Proportionaltheile leicht gefunden werden, deren Argument das Argument der Breite ist.

Die so genannten Sonnentafeln sind eigentlich Tafeln für die Bewegung der Erde um die Sonne, welche aber statt der Länge der Erde die Länge des ihr gegenüberliegenden Punkts der Ekliptik, oder die scheinbare Länge der Sonne angeben.

In den bey q rechtwinklichten Dreyecken Spq, Srq verhält sich

$$\text{Tang.}\, pSq : \text{Tang.}\, rSq = pq : qr$$
$$= \text{Sin. tot.} : \text{Cos.}\, pqr;$$

also verhält sich 1.) der Sinus totus zu dem Cosinus der Neigung der Bahn, wie die Tangente des Arguments der Breite zu der Tangente eines Winkels, welcher um die Länge des aufsteigenden Knotens vermehrt, die heliocentrische auf die Ebene der Ekliptik reducirte Länge des Planeten giebt, und zwar muß immer derjenige Winkel genommen werden, welcher mit dem Argument der Breite in denselben Quadranten fällt.

Ferner verhält sich

$$\text{Sin.}\, pSq : \text{Sin. tot.} = pq : Sp$$
$$\underline{\text{Sin. tot.} : \text{Sin.}\, pSr = Sp : pr}$$
$$\text{Sin.}\, pSq : \text{Sin.}\, pSr = pq : pr$$
$$= \text{Sin. tot.} : \text{Sin.}\, pqr,$$

oder es verhält sich 2.) der Sinus totus zu dem Sinus der Neigung, wie der Sinus des Arguments der Breite zu dem Sinus der heliocentrischen Breite.

§. 191. Die folgende Tafel enthält die Elemente der elliptischen Bewegung der sieben älteren Planeten, welche aus der Exposition du Système du Monde par *Laplace*, III. Edit. 1808. pag. 116-119. genommen, und in die gewöhnliche Eintheilungen des Tages und des Kreises übersetzt sind, samt den daraus abgeleiteten mittleren siderischen Bewegungen. Nur die Excentricität der Erdbahn, welche a. a. O. pag 117. wahrscheinlich durch einen Druckfehler $= 0{,}01685318$ für das Jahr 1801 gesetzt ist, ist nach den Tables astronomiques publiées par le Bureau des Longit. de France, I. P. angegeben.

Siderische Umlaufszeiten.

	Tage.	T.	St.	M.	S.
Merkur.	87,96925804	87	23	15	43,89
Venus.	224,70082309	224	16	49	11,19
Erde.	365,25638350	365	6	9	11,53
Mars.	686,9796186	686	23	30	39,05
Jupiter.	4332,5963070	4332	14	18	41,0
Saturn.	10758,9698400	10758	23	16	34
Uranus.	30688,7126872	30688	17	6	16

Halbe große Axen der Bahnen, oder mittlere Entfernungen.

Merkur.	—	0,3870981
Venus.	—	0,7233323
Erde.	—	1,0000000
Mars.	—	1,5236935
Jupiter.	—	5,2027911
Saturn.	—	9,5387705
Uranus.	—	19,1833050

Exponenten der Verhältniße der Excentricitäten zu den halben großen Axen für den 1. Jan. 1801, und Veränderungen derselben in 100 Jahren. (Das Zeichen — zeigt eine Verminderung.)

	Excentric.	Secular-Veränd.
Merkur.	0,20551494	0,000003867
Venus.	0,00685298	— 0,000062711
Erde.	0,01679435	— 0,000041632
Mars.	0,09313400	0,000090176
Jupiter.	0,04817840	0,000159350
Saturn.	0,05616830	— 0,000312402
Uranus.	0,04667030	— 0,000025072

Mittlere Längen für die Mitternacht zwischen dem 31. December 1800 und dem 1. Januar 1801 mittlerer Zeit zu Paris, und mittlere siderische Bewegungen in einem Tag.

	Z.				mittl. sid. Bew. in 1 T.
Merkur.	5	13°	56'	27''	14732'',419357
Venus.	0	10	44	35	5767,669103
Erde.	3	10	9	13	3548,192008
Mars.	2	4	7	2	1886,518850
Jupiter.	3	22	12	36	299,127800

	Z.	mittl. sid. Bew. in 1 T.
Saturn.	4 15° 20' 31"	120",457629
Uranus.	5 27 47 17	42,230510

Mittlere siderische Bewegungen in einem gemeinen Jahr von 365 Tagen.

Merkur.	4 Umläufe	1^{Z}	23°	42'	13",06543
Venus.	1 Umlauf	7	14	46	39,22268
Erde.		11	29	44	50,30196
Mars.		6	11	16	19,38022
Jupiter.		1	0	19	41,64685
Saturn.		0	12	12	47,03467
Uranus.		0	4	16	54,13629

Mittlere Längen der Perihelien für dieselbe Epoche, und mittlere siderische Secularbewegungen derselben.

	Länge des Perih.	sid. Secularbew.
Merkur.	2^{Z} 14° 21' 47"	583",556
Venus.	4 8 37 1	— 267,828
Erde.	3 9 30 5	1179,814
Mars.	11 2 24 24	1582,432
Jupiter.	0 11 8 35	663,860
Saturn.	2 29 8 58	1937,066
Uranus.	5 17 21 42	239,335

Längen der aufsteigenden Knoten und Neigungen der Bahnen für den 1. Jan. 1801, siderische Secularbewegungen der Knoten in der Ekliptik, und Veränderungen der Neigungen in 100 Jahren.

	Länge des ☊.	sid. Bew. in 100 J.	Neigung	Veränd. in 100 J.
Merkur.	1^{Z} 15° 57' 31"	— 782",269	7° 0' 9",1	+ 18",283
Venus.	2 14 52 39	— 1869,801	3 23 32,7	— 4,552
Erde.	— —	— —	0 0 0	0
Mars.	1 18 1 28	— 2328,463	1 51 3,5	— 0,152
Jupiter.	3 8 25 34	— 1577,569	1 18 51,5	22,009
Saturn.	3 21 55 46	— 2200,401	2 29 38,1	— 15,513
Uranus.	2 12 51 14	— 3597,958	0 46 20,0	+ 3,133

Aus den hier angegebenen siderischen Bewegungen erhält man die tropischen, wenn man die denselben entsprechende mittlere Bewegung der Aequinoktialpunkte, welche in 365¼ Tagen 50″,1, mithin in 365 Tagen 50,06571; in 1 Tag 0,137166, in 100 julianischen Jahren 1° 23′ 30″ beträgt, dazu addirt. Die tropischen Bewegungen der Perihelien und Knoten werden alsdenn alle direkt.

§. 192. Die Elemente der vier neuen Planeten sind von Prof. Gauß berechnet, und folgen hier unverändert, um sie leichter mit den noch zu erwartenden verbesserten Elementen vergleichen zu können. Die Epochen gelten für den Göttinger Meridian, und den mittleren Mittag des 31. Decembers des nächstvorhergehenden Jahrs, oder für den ersten Januar, wenn das Jahr ein Schaltjahr ist.

Ceres *).

Mittlere Länge 1809.	143°	2′	33″,4
Länge des Periheliums 1809.	146	42	10,7
Jährl. Bew. des Perih.	+	2	1,32
Tägl. mittl. trop. Beweg. ⚳			770″,9230
Excentricität 1806.			0,0785048
Jährliche Abnahme			0,00000583
Logarithme der halben großen Axe			0,4420486
Länge des ☊ 1806.	80°	53′	41″,3
Jährliche Bewegung			+ 1″,48
Neigung der Bahn 1806	10	37	31,2
Jährliche Abnahme			0,44

Pallas **).

Mittlere Länge 1807.	174°	14′	10″,0
— — 1808.	252	32	28,5
Länge des Periheliums 1803.	121	3	11,4
Tägl. mittl. trop. Beweg. ⚴			770″,2143
Excentricität			0,2450198
Log. d. halb. großen Axe			0,4423149
Länge ☊ 1803.	172°	28′	50″,9
Neigung der Bahn	34	37	41,0

*) Monatl. Co[illegible] May. 1809. pag. 506.

**) Mon. Co[illegible] br. 1808. pag. 184.

Juno *).

Mittlere Länge 1809.	13°	3'	55",8
— — 1810.	95	37	44,1
Länge des Periheliums 1805.	53	10	53,9
Tägl. mittl. trop. Bew ⚵			814",324
Excentricität			0,2554521
Log. d. halb. gr. Axe			0,4261883
Länge ☊ 1805.	171°	4'	11",3
Neigung der Bahn	13	4	11,0

Vesta **).

Mittlere Länge 1807.	168°	16'	35",5
— — 1809.	6	46	4,2
— — 1811.	204	59	15,3
Länge des Perih. 1807.	249	52	23,8
Tägl. mittl. trop. Beweg. ⚶			977",5221
Excentricität			0,0887809
Log. d. halb. gr. Axe			0,3732940
Länge ☊	103°	13'	11",2
Neigung der Bahn	7	8	18,8

Wo noch keine Bewegung des Periheliums und des aufsteigenden Knotens angegeben ist, werden diese Punkte als siderisch ruhend vorausgesetzt, so daß man bey der Berechnung ihrer Längen für eine gegebene Zeit nur das Zurückweichen der Aequinoktialpunkte in der von der Epoche ihrer Länge an gerechneten Zeit zu den angegebenen Längen zu addiren hat.

§. 193. **Erstes Beyspiel.** Man verlangt die heliocentrische Länge der Erde am 30. März 1810 Abends um 8 Uhr mittlerer Zeit zu **Tübingen.**

Da die im 191. §. angegebenen Epochen für den **Pariser** Meridian gelten, und Tübingen 26' 53",6 in Zeit östlich von Paris liegt; so ist es in obigem Augenblick erst 7 U. 33' 6",4 zu Paris. Von dem ersten Januar 1801 um Mitternacht bis zu dem 30. März 1810 um Mitternacht sind verflossen 9 Jahre (worunter 2 Schaltjahre) und 88 Tage, und hiezu kommen noch

*) Mon. Corresp. Sept. 1808. pag. 270.

**) M. C. April. 1809. pag. 409.

12 St. + 7 St. 33′ 6″,4 bis zu dem vorgegebenen Zeitpunkt. Folglich muß man zu der Epoche der Länge der Erde addiren ihre Bewegung in 9 × 365 T. + 2 T. + 88$^{T.}$ 19$^{St.}$ 33′ 6″,4 oder in 9 × 365 T. + 90,814657 T.

Um das Zurückweichen des Aequinoktialpunkts mit in Rechnung zu bringen, addire man seine Bewegungen zu den angegebenen siderischen Bewegungen der Erde und ihres Periheliums; so erhält man

die mittlere tropische Bewegung der Erde	= 359° 45′ 40″,36767	in 365 Tagen
	= 3548″,329774	in 1 Tag.
die mittlere tropische Bew. d. Periheliums	= 6189″,814	in 100 jul. Jahren.

Demnach ist, wenn man die ganze Umläufe wegwirft,

die mittl. trop. Bew. der Erde	in 9 × 365 T. =	357°	51′	3″,309
	in 90,814657 T. =	89	30	40,351
mittl. Bew. in der ganzen Zwischenzeit	=	447	21	43,66
		360		
		87	21	43,66
Länge für die Epoche	=	100	9	13,00
Gesuchte mittlere Länge der Erde	=	187	30	56,66

Die tropische Bewegung des Periheliums findet sich in der ganzen von der Epoche an verflossenen Zeit auf ähnliche Art

	=	0°	9′	32″,12
Länge des Perih. 1801.	=	99	30	5,00
Länge des Perih. 30. März 1810.	=	99	39	37,12
Länge d. ♂ - L. d. Perih. oder mittl. Anomalie	=	87	51	19,54

Die Excentricität hat von der Epoche an abgenommen um 0,00000385, und daher ist sie für den gegebenen Zeitpunkt = 0,01679050. Mittelst dieser und der mittleren Anomalie erhält man nach §. 186. die excentrische Anomalie = 88° 49′ 2″,09, den Radius Vector der Erde nach §. 185. n. 2. = 0,99965342 für $a = 1$, und die wahre Anomalie nach §. 185. n. 8. oder 13.

	=	89°	46′	45″,46
Aber Länge des Perih.	=	99	39	37,12
mithin die Länge der Erde	=	189	26	22,58

Zweytes Beyspiel. Man verlangt für denselben Zeitpunkt den heliocentrischen Ort der Ceres. Da Tübingen 3′ 27″,4 in Zeit westlich von Göttingen liegt; so ist es an letzterem Ort 8 U. 3′ 27″,4, oder 0,335734 St. nach Mittag, wenn es in Tübingen 8 Uhr ist. Von dem Mittag des 31. Decembers 1808 (dem Augenblick der Epoche) bis zu dem Mittag des 31. Decembers

1809

1809 sind verflossen 365 Tage, und von da an bis zu dem 30. März Abends 8 U. 3′ 27″,4 noch 89,335734 Tage. Die mittlere tropische Bewegung der Ceres in 365 Tagen ist

	=	78°	9′	46″,895
in 89,335734 T.	=	19	7	50,972
		97	17	37 867
m. Länge der Ceres 1809.	=	343	2	33,4
		440	20	11,27
Länge Perih. 30. März 1810	=	146	44	41,68
mittlere Anomalie	=	293	35	29,59

Die Excentricität findet sich für den gegebenen Zeitpunkt = 0,0784780, die Länge des aufsteigenden Knotens = 80° 53′ 47″,6, und die Neigung der Bahn = 10° 37′ 29″,3.

Aus diesen Stücken ergiebt sich nach §. 186. die excentrische Anomalie = 280° 20′ 56″,63; nach §. 185. n 2. der Logarithme des Radius Vector = 0,4306069, und nach §. 185. n. 13. $v - u$ = - (4° 18′ 11″06), mithin die wahre Anomalie

	=	285°	2′	45″.58
Da nun die Länge des Perihel.	=	146	44	41,68
so ist die wahre Länge der Ceres in der Bahn	=	{431 / 71}	47	27,26
ferner ist die Länge ☊	=	80	53	47,6;
folglich das Argument der Breite	=	350	53	39,7

Berechnung der Reduktion auf die Ebene der Ekliptik und der heliocentrischen Breite nach §. 190.

Lg. Tg. d. Arg. der Breite	= 9,2048657 neg.				
Lg. Cos. der Neigung	= 9,9924895	359°	59′	60″,00	
	9,1973552;	8	57	7,46	
		351	2	52,54	
Länge des Knotens	=	80	53	47,6	
Wahre helioc. Länge der Ceres in der Ekliptik	=	{431 / 71}	56	40,14	

Lg. Sin. d. Arg. der Breite = 9,1993581 neg.
Lg. Sin. der Neigung = 9,2657109

8,4650690 neg.

Heliocentrische Breite der Ceres = 1° 40′ 19″,4 südlich.

Lg. des Rad. Vect. = 0,4306069
Lg. Cos. der Breite = 9,9998150

Lg. d. abgekürzten Distanz = 0,4304219

§. 194. Um endlich noch zu zeigen, wie aus dem heliocentrischen Ort eines Planeten und dem gleichzeitigen

Ort der Erde in ihrer Bahn sein geocentrischer Ort gefunden werden kann, sey die Sonne in S (Fig. 63.), die Erde in T, der Planet in P, aus welchem das Perpendickel PR auf die Ebene der Erdbahn oder der Ekliptik gefällt sey. Man verbinde die Mittelpunkte der Sonne, des Planeten, und der Erde durch die geraden Linien ST, SP, PT, und ziehe aus dem Mittelpunkt S der Sonne und dem Mittelpunkt T der Erde an den Fußpunkt R des Perpendickels die geraden Linien SR, TR. Die Linie SV gehe aus dem Mittelpunkt der Sonne an den Punkt der Frühlingsnachtgleiche, und mit ihr sey durch den Mittelpunkt T der Erde die Parallele TV' gezogen; so wird $V'TR$ die geocentrische Länge, und RTP die geocentrische Breite des Planeten seyn. In dem Dreyeck RST kennt man den Radius Vector ST der Erde, die abgekürzte Distanz SR des Planeten, und den Zwischenwinkel RST, welcher dem Unterschied der heliocentrischen Länge des Planeten und der Länge der Erde gleich ist, und der Commutationswinkel heißt. Man kann also den Winkel STR finden, welcher der abgekürzten Distanz SR gegenüber liegt, und der Elongationswinkel genannt wird. Man kennt aber auch den Winkel $V'TS$, welcher der Länge der Sonne oder der um 180 Grade vermehrten Länge der Erde gleich ist; folglich hat man auch den Winkel $V'TR = V'TS - STR$ (im Fall der Figur) oder die geocentrische Länge des Planeten. Weil nun die Winkel STR, RST des Dreyecks STR gegeben sind; so ist in den zwey bey R rechtwinklichten Dreyecken, welche die Seite PR gemeinschaftlich haben, das Verhältniß der Seiten ST und TR, mithin, weil die heliocentrische Breite PSR gegeben ist, der Winkel PTR oder die geocentrische Breite des Planeten gegeben, welche nördlich oder südlich ist, je nachdem die heliocentrische Breite nördlich oder südlich ist. Endlich findet man durch die Auflösung des Dreyecks RST die Seite TR, und daraus ferner die Hypotenuse TP des rechtwinklichten Dreyecks PTR, oder den Abstand des Planeten von der Erde.

Rechnet man immer den Commutationswinkel TSR von dem Ort der Erde T an, nach der Richtung ihrer Bewegung, welches geschiehet, wenn man von der wo nöthig um 360 Grade vergrößerten heliocentrischen Länge des Planeten die Länge der Erde abzieht; so muß man den Elongationswinkel *STP* von der Länge der Sonne abziehen, wenn der Commutationswinkel kleiner ist als 180°, hingegen ihn zu der Länge der Sonne addiren, wenn der Commutationswinkel größer als 180° ist, um die geocentrische Länge des Planeten zu erhalten, wie man leicht findet, wenn man die Figur für diesen Fall entwirft.

§. 195. Sey die heliocentrische Länge des Planeten $= l$, seine heliocentrische Breite $= b$ sein Radius Vector $= r$, die Länge der Erde $= E$, ihr Radius Vector $= R$; so ist der Commutationswinkel $= l - E$, welcher, wie in dem Fall der Figur kleiner als 180° sey. Sucht man einen Hülfswinkel x durch die Formel

$$\text{Tang. } x = \frac{r \text{ Cos. } b}{R}$$

so ist die Tangente der halben Summe y der zwey übrigen Winkel des Dreyecks *STR*

$= \text{Cotang. } \frac{l-E}{2} \text{ Tg.} (x - 45°)$ für den Halbmesser 1, wenn $r \text{ Cos.} b > R$, und der Elongationswinkel $= 90° - \frac{1}{2}(l-E) + y$, welcher in gegenwärtigem Fall von der Länge der Sonne abgezogen werden muß, um die geocentrische Länge des Planeten zu erhalten. Wendet man diese Formel auf den Fall an, wo $r \text{ Cos.} b < R$; so wird $x < 45°$ und daher y negativ. Der Elongationswinkel wird $= 90° - \frac{1}{2}(l-E) - y$ oder dem kleineren der zwey übrigen Winkel des Dreyecks *STR* gleich, wie es für den Fall seyn muß, wo $SR < ST$.

Wenn der Commutationswinkel größer als 180 Gr. wird; so werden y und $90° - \frac{1}{2}(l-E)$, mithin auch der Elongationswinkel negativ, welcher nun zu der Länge der Sonne addirt werden muß, um die geocentrische Länge des Planeten zu erhalten, und man findet leicht, wenn man die Figur für diesen Fall entwirft, daß die Formel allgemein ist.

Da die astronomischen Tafeln statt der Längen der Erde die Länge der Sonne geben; so setze man die Länge der letzteren $= \odot$; alsdenn ist

$$E = 180° + \odot$$

$l - E = l - \odot - 180$; $\frac{l-E}{2} = \frac{l-\odot}{2} - 90$, und die Regel zur Berechnung der geocentrischen Länge verwandelt sich in die folgende:

Man suche die Winkel x und z durch die Formeln

1.) $\text{Tang.}\, x = \frac{r\,\text{Cos.}\, b}{R}$

2.) $\text{Tang.}\, z = \text{Tg.}\, \frac{l-\odot}{2}\, \text{Tg.}\, (x - 45^\circ)$; so ist die geocentrische Länge des Planeten $= \odot + \frac{l-\odot}{2} + z$. Wenn $l < \odot$; so addirt man 360° zu l, um abziehen zu können. Man nimmt immer die spitzen Winkel, welche den Tangenten von x und z in den Tafeln entsprechen, und giebt denselben mit den Tangenten einerley Zeichen. Der Winkel $\frac{l-\odot}{2} + z$ ist alsdenn die Elongation des Planeten von der Sonne, und zwar von dieser an nach der Ordnung der Zeichen bis auf 360° in einem fort gezählt.

Zu der Berechnung der geocentrischen Breite hat man die Proportion

$$\left.\begin{matrix} SR : TR \\ \text{oder Tg.}\, PTR : \text{Tg.}\, PSR \end{matrix}\right\} = \text{Sin.}\, STR : \text{Sin.}\, RST$$

$$\text{Tang}\, PTR : \text{Tg.}\, b = \text{Sin.}\left(\frac{l-\odot}{2} + z\right) : \text{Sin.}\,(l-\odot);$$

daher ist 3.) Tang. der geoc. Breite $= \dfrac{\text{Tang.}\, b\, \text{Sin.}\left(\frac{l-\odot}{2} + z\right)}{\text{Sin.}\,(l-\odot)}$

Endlich da $SR \quad TR = \text{Sin.}\left(\frac{l-\odot}{2} + z\right) \quad \text{Sin.}\,(l-\odot)$

$$TR : PT = \text{Cos.}\, PTR : 1$$

so ist 4.) $\left.\begin{matrix} SR \\ r\,\text{Cos.}\, b \end{matrix}\right\} : PT = \text{Sin.}\left(\frac{l-\odot}{2} + z\right) \text{Cos.}\, PTR : \text{Sin.}\,(l-\odot)$

woraus sich der Abstand des Planeten von der Erde ergiebt.

Noch ist zu bemerken, daß wegen der Aberration (§. 156.) die scheinbare Länge der Sonne um 20″,25 kleiner ist, als die wahre. Die astronomischen Tafeln geben die scheinbare wegen der Aberration verminderte Länge der Sonne, und daher muß man zu der aus den Tafeln gefundenen Länge der Sonne 180° 0′ 20″,25 addiren, um die wahre Länge der Sonne zu erhalten. Eben so muß man zu der mittelst der Elemente §. 191. gefundenen Länge der Erde 180° 0′ 20″,25 addiren, um die wahre Länge der Sonne zu erhalten. Gebraucht man bey der Berechnung des geocentrischen Orts eines Planeten die Länge der Sonne, so vergrößert man die aus den Tafeln gefundene um 20″,25.

Beyspiel. Man verlangt den geocentrischen Ort der **Ceres** am 30. März 1810 Ab. um 8 Uhr mittlerer Zeit nach dem Meridian von **Tübingen**.

Für diese Zeit ist nach §. 193. Beysp. 1. und 2.

Die heliocentr. Länge der Ceres	=	71°	56′	40″,14
Länge der Erde	=	189	26	22,58
		180	0	20.25
Länge der Sonne	=	9	26	42,83
$l - \odot$	=	62	29	57,31
$\frac{l-\odot}{2}$	=	31	14	58,65

Lg. r Cos. b = 0,4304219 (2 Beysp.)
Lg. R = 9,9998495 (1 Beysp.)
Lg. Tg. x = 0,4305724; x = 69° 38′ 34″,21
45
9,6615670 = Lg. Tg. 24 38 34,21
Lg. Tg. $\frac{l-\odot}{2}$ = 9,7830498; $\frac{l-\odot}{2}$ = 31 14 58,65
Lg. Tg. z = 9,4446168; z = 15 33 19,50
Elongationswink. = 46 48 18,15
$\odot$ = 9 26 42,83
Geoc. Länge der Ceres = 56 15 0,98
Lg. Tg. b = 8,4652514 neg.
Lg. Sin. Elong. = 9,8627447
18,3279961
Lg. Sin. $(l-\odot)$ = 9.9479260
Lg. Tg. geoc. Br. = 8,3800701; geoc. Breite der Ceres } = − 1° 22′ 27″,8

Lg. r Cos. b = 0,4304219
Lg. Sin. $(l-\odot)$ = 9,9479260
C.Lg. Cos. geoc. B. = 0,0001250
C. Lg. Sin. Elong. 0,1372553
0,5157282; Abstand der Ceres von der Erde } = 327890

§. 196. Daß die Elemente der Bahnen des Uranus und der vier neuen Planeten nicht nach der bisher gezeigten Methode haben gefunden werden können, erhellet aus der langen Reihe von Beobachtungen, welche diese Methode erfordert. Unter der Voraussetzung der keplerischen Gesetze ist eine kleine Anzahl von Beobachtungen zu der Bestimmung der elliptischen Bahn eines Planeten hinreichend, und wenn man eine größere Anzahl von Beobachtungen hat, als zu der Bestimmung der elliptischen Elemente erfordert werden; so wird man für die Zeiten der übrigen Beobachtungen nach §. 190. und 194. die geocentrischen Oerter des Planeten berechnen, und durch die Vergleichung derselben mit den beobachteten die Richtigkeit dieser Voraussetzung prüfen können.

Um hievon einen Begriff zu geben, sey a und b die halben Axen der elliptischen Bahn, welche durch die als Einheit angenommene mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ausgedrückt seyen. Die siderische Umlaufszeit des Planeten sey $= T'$, die Zeit, in welcher er einen Sector von dem Flächeninhalt A beschreibt sey $= t$, und die siderische Umlaufszeit der Erde $= T$. Vermöge II, 38. Kegelsch. wird, wenn der halbe Umfang eines Kreises zu seinem Halbmesser sich wie $\pi : 1$ verhält, der Flächeninhalt der Ellipse $= ab\pi$, und nach dem zweyten keplerischen Gesetz (§. 179.)

$T' : t = ab\pi : A$ seyn.

Aber $T : T' = 1 : a\sqrt{a}$ (III, kepl. Gesetz. §. 180.)

folglich $T : t = b\pi : A\sqrt{a}$

$$= \pi\sqrt{\frac{b^2}{a}} : A$$

$= \pi\sqrt{p} : A$, wenn der halbe Parameter der Ellipse $= p$ ist.

Daher ist $t = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{A}{\sqrt{p}}$. (Vergl. §. 204. n. 9. u. 10.)

Demnach ist, weil T und π bekannt sind, durch den Inhalt des Sectors und den halben Parameter der Ellipse die Zeit gegeben, in welcher derselbe von dem Planeten beschrieben wird.

Nun wird durch jede geocentrische Länge und Breite eines Planeten die gerade Linie der Lage nach bestimmt, auf welcher sein wahrer Ort liegen muß, weil man für den Augenblick der Beobachtung den Ort der Erde mittelst der bekannten Elemente ihrer Bahn berechnen kann, von welchem jene gerade Linie ausgeht. Wäre die Ebene der Planetenbahn der Lage nach gegeben; so würde jede ausserhalb der Knotenlinie beobachtete geocentrische Länge und Breite des Planeten seinen wahren Ort bestimmen *). Dieser muß nem-

*) Apollonius ebene Oerter, übersetzt von Camerer, zweyter Anhang, 10 Aufgabe, S. 421. u. f.

lich in den Punkt fallen, in welchem die nach dem Planeten gezogene Gesichtslinie der Ebene seiner Bahn begegnet. Man nehme eine Länge des aufsteigenden Knotens und eine Neigung der Bahn nach Belieben an, wodurch die Lage der Ebene der Bahn bestimmt ist; so wird jede ausserhalb der Knotenlinie beobachtete geocentrische Länge und Breite einen in der angenommenen Ebene liegenden Radius Vector der Lage und der Grösse nach bestimmen, und durch drey solche geocentrische Längen und Breiten werden drey Radii Vectores der Grösse und der Lage nach gegeben seyn. Mithin wird (§. 181. und 182.) die Ellipse gegeben seyn, welche den Mittelpunkt der Sonne zu einem ihrer Brennpunkte hat, und durch die drey in der angenommenen Ebene liegende Oerter des Planeten geht. Man berechne den Inhalt der von der ersten zur zweyten, und von der ersten zur dritten Beobachtung beschriebenen Sectoren; so hat man, weil die Ellipse, und daher auch ihr halber Parameter gegeben ist, vermöge des oben bewiesenen die Zeiten, in welchen sie beschrieben wurden. Diese Zeiten sind aber auch durch die Beobachtungen gegeben; folglich wird die Planetenbahn durch drey geocentrische Längen und Breiten, welche ausserhalb der Knotenlinie beobachtet worden sind, bestimmt. Die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn müßen nemlich so gewählt werden, daß die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweyten und zwischen der ersten und dritten Beobachtung mit den beobachteten übereinstimmen. Hat man einmal eine Neigung der Bahn und eine Länge des Knotens gefunden, bey welchen die berechneten Zwischenzeiten nahe mit den beobachteten zutreffen; so kann man die Bahn unter zwey Hypothesen, das einemal mit einer etwas geänderten Neigung, das anderemal mit einer etwas geänderten Länge des Knotens berechnen, die Unterschiede der anfangs und der unter jeder dieser Hypothesen berechneten Zwischenzeiten den Unterschieden der Neigungen und der Längen des Knotens proportional setzen, und durch Interpolation finden, um wie viel die angenommenen Elemente der Bahn geändert werden müßen, damit die Unterschiede zwischen den beobachteten und berechneten Zwischenzeiten verschwinden.

§. 197. Um aus der gegebenen Lage der Ebene der Bahn und einer ausserhalb der Knotenlinie beobachteten geocentrischen Länge und Breite eines Planeten die Lage und Grösse seines Radius Vector zu finden, sey NN' (Fig. 64) die Knotenlinie, S die Sonne, T die Erde, P der wahre Ort des Planeten. Man ziehe ST, SP, PT, fälle aus dem Ort P des Planeten das Perpendickel PR auf die Ebene der Ekliptik, und von R die Perpendickel RH, RJ auf ST, NN'. Zieht man die geraden Linien PJ, PH; so werden auch diese auf den geraden Linien NN', ST beziehungsweise senkrecht (Bew. XI, 35.), und die Winkel PJR, PHR die Neigungswinkel der Ebene der Bahn und der Ebene SPT gegen die Ebene NST der Ekliptik seyn. Man kennt nun den Radius Vector ST der Erde, die geocentrische Breite PTR des Planeten $= b$, den Winkel $STR =$ dem Ueberschuß der geocentrischen Länge l des Planeten über die Länge $\odot$ der Sonne $= l - \odot$, den Winkel $NST =$ dem Ueberschuß der Länge der Erde über die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens, und den Neigungswinkel $PJR = i$. Alle diese Winkel werden, wie in der Figur, spitz angenommen. Noch ziehe man SR, und setze die Winkel $RSJ = a$, $RST = b$, $NSP = x$, $TSP = y$.

$$\begin{array}{rl}
\text{Da Sin. tot.} : \text{Cotg.}\, PHR & = PR : RH \\
\text{Sin.}\, RTS : \text{Sin. tot.} & = RH : TR \\
\hline
\text{so ist Sin.}\, RTS : \text{Cotg.}\, PHR & = PR : TR \\
& = \text{Sin. tot.} \quad \text{Cotg.}\, PTR;
\end{array}$$

Daher 1.) $\text{Cotang.}\, H = \dfrac{\text{Sin.}\,(l - \odot)\ \text{Cotg.}\, b}{\text{Sin. tot.}}$, für Sin. tot. = 1.

$$\begin{array}{ll}
\text{Ferner Sin.}\, NSP \quad \text{Sin.}\, TSP & = PJ \quad PH \\
\text{oder 2.) Sin.}\, x : \text{Sin.}\, y & = \text{Sin.}\, H : \text{Sin.}\, i. \\
\text{Sodenn Cos.}\, NSP : \text{Cos.}\, TSP & = SJ : SH, \\
\text{oder 3.) Cos.}\, x : \text{Cos.}\, y & = \text{Cos.}\, a : \text{Cos.}\, b. \\
\text{Endlich Tg.}\, H \quad \text{Tg.}\, J & = RJ : RH \\
\text{oder 4.) Tg.}\, H : \text{Tg.}\, i & = \text{Sin.}\, a \quad \text{Sin.}\, b.
\end{array}$$

Aus der letzten Proportion folgt

$$5.)\ \text{Sin.}\,(H + i) : \text{Sin.}\,(H - i) = \text{Tg.}\, \frac{a+b}{2} \quad \text{Tg.}\, \frac{a-b}{2}$$

Aus n. 3. erhält man

$$\text{Cotg.}\, \frac{x+y}{2} \quad \text{Tang.}\, \frac{x-y}{2} = \text{Cotg.}\, \frac{a+b}{2} : \text{Tg.}\, \frac{a-b}{2},$$

$$\text{oder Tg.}\, \frac{a+b}{2} \quad \text{Tg.}\, \frac{x+y}{2} = \text{Tg.}\, \frac{x-y}{2} : \text{Tg.}\, \frac{a-b}{2},$$

$$\text{folglich auch Tg.}\, \overline{\frac{a+b}{2}}^{2} \quad \text{Tg.}\, \frac{x+y}{2}\ \text{Tg.}\, \frac{x-y}{2} = \text{Tg.}\, \frac{a+b}{2} \quad \text{Tg.}\, \frac{a-b}{2}$$

$$= \text{Sin.}(H+i) : \text{Sin.}(H-i), \text{ n. 5.}$$

$$= \text{Sin.}\frac{H+i}{2}\,\text{Cos.}\frac{H+i}{2} : \text{Sin.}\frac{H-i}{2}\,\text{Cos.}\frac{H-i}{2}$$

Aber aus n. 2. folgt

$$\text{Tg.}\frac{x+y}{2} \quad \text{Tg.}\frac{x-y}{2} = \text{Tg.}\frac{H+i}{2} \quad \text{Tg.}\frac{H-i}{2}$$

also ist $\overline{\text{Tg.}\frac{a+b}{2}}^2 : \overline{\text{Tg.}\frac{x-y}{2}}^2 = \overline{\text{Sin.}\frac{H+i}{2}}^2 \quad \overline{\text{Sin.}\frac{H-i}{2}}^2$

und 6.) $\text{Tg.}\frac{a+b}{2} \quad \text{Tg.}\frac{x-y}{2} = \text{Sin.}\frac{H+i}{2} : \text{Sin.}\frac{H-i}{2}$

Weil nun $\text{Tg.}\frac{x-y}{2} : \text{Tg.}\frac{x+y}{2} = \text{Tg.}\frac{H-i}{2} \quad \text{Tg.}\frac{H+i}{2}$

$$= \text{Cotg.}\frac{H+i}{2} \quad \text{Cotg.}\frac{H-i}{2}$$

so ist 7.) $\text{Tg.}\frac{a+b}{2} : \text{Tg.}\frac{x+y}{2} = \text{Cos.}\frac{H+i}{2} : \text{Cos.}\frac{H-i}{2}$

Durch die Proportionen n. 6. und 7. erhält man die halbe Differenz und die halbe Summe der Winkel NSP und TSP; folglich diese Winkel selbst. Um den Radius Vector des Planeten zu finden, suche man noch den Winkel STP.

Es verhält sich

$$\text{Sin. tot.} : \text{Cos.}\,STP = PT : TH$$
$$\text{Cos}\;PTR : \text{Sin. tot.} = TR : PT$$

folglich $\text{Cos.}\,PTR \quad \text{Cos.}\,STP = TR : TH$

$$= \text{Sin. tot.} : \text{Cos.}\,STR$$

Demnach hat man 8.) $\text{Cos.}\,STP = \frac{\text{Cos.}\,b\;\text{Cos.}\,(l-\odot)}{\text{Sin. tot.}}$.

Man kennt also in dem Dreyeck STP die Seite ST, und die ihr anliegende Winkel, woraus man die Seite SP, oder den Radius Vector des Planeten erhält.

Weil $a+b = NST = 180^\circ + \odot - ☊$; so ist $\frac{a+b}{2} = 90^\circ - \frac{☊\;\odot}{2}$, und daher werden die zu der Auflösung der Aufgabe erforderliche Formeln folgende seyn:

I. $\text{Cotg.}\,H = \frac{\text{Sin.}\,(l-\odot\;\text{Cotg.}\,b}{\text{Sin. tot.}}$

II. $\text{Cos.}\,T = \frac{\text{Cos.}\,(l-\odot)\;\text{Cos.}\,b}{\text{Sin. tot.}}$

III. $\text{Tg.}\frac{x-y}{2} = \frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(H-i)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(H+i)}\;\text{Cotg.}\frac{☊-\odot}{2}$

IV. $\text{Tg.}\ \frac{x+y}{2} = \frac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(H-i)}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(H+i)}\ \text{Cotg.}\ \frac{☊ - ☉}{2}$

Alsdenn ist das Argument der Breite des Planeten oder der Winkel NSP

$$= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2},$$

$\left.\begin{matrix} TSP \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$, und der Radius Vector des Planeten.

V. $SP = \frac{ST\ \text{Sin.}\ T}{\text{Sin.}\ (T+y)}$ *).

§. 198. Die Aufgabe, aus drey der Größe und Lage nach gegebenen Radiis vectoribus die Ellipse zu finden, ist schon oben §. 182. aufgelöst worden. Man kann aber auch ihren halben Parameter p unmittelbar durch die gegebenen Größen ausdrücken. Es ist, wenn man die in dem 182. und 185sten §. gebrauchte Benennungen beybehält, vermöge der Gleichung n. 9. §. 185. der Radius Vector.

$$r = \frac{p}{1 + e\ \text{Cos.}\ v}, \text{ und daher}$$

1.) $e\ \text{Cos.}\ v = \frac{p}{r} - 1$, und eben so

2.) $e\ \text{Cos.}\ (v+w) = \frac{p}{r'} - 1$

3.) $e\ \text{Cos.}\ (v+w') = \frac{p}{r''} - 1.$

Dividirt man die zweyte Gleichung mit der ersten; so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{Cos.}\ (v+w)}{\text{Cos.}\ v} \\ \frac{\text{Cos.}\ v\ \text{Cos.}\ w - \text{Sin.}\ v\ \text{Sin.}\ w}{\text{Cos.}\ v} \\ \text{4.) Cos.}\ w - \text{Tg.}\ v\ \text{Sin.}\ w \end{array}\right\} = \frac{\frac{p}{r'} - 1}{\frac{p}{r} - 1}$$

und eben so durch die Division der dritten Gleichung mit der ersten.

5.) $\text{Cos.}\ w' - \text{Tg.}\ v\ \text{Sin.}\ w' = \frac{\frac{p}{r''} - 1}{\frac{p}{r} - 1}.$

*) Olbers zeigte zuerst diese Auflösungsart in seiner Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen (Weimar 1797.) mittelst der sphärischen Trigonometrie. Andere Auflösungsarten findet man in der Theoria mot. corp. coel. auctore Gaufs, §. 74.

Man multiplicire die Gleichung n. 4. mit Sin. w', die n. 5. mit Sin. w; und ziehe von dem ersteren Produkt das zweyte ab; so erhält man nach der Multiplication mit $\frac{p}{r} - 1$ die Gleichung

$$\left(\frac{p}{r} - 1\right) \text{Sin.}\,(w'-w) = \left(\frac{p}{r'} - 1\right) \text{Sin.}\,w' - \left(\frac{p}{r''} - 1\right) \text{Sin.}\,w,$$

und aus dieser

$$6)\ p = \frac{\text{Sin.}\,w - \text{Sin.}\,w' + \text{Sin.}\,(w'-w)}{\frac{\text{Sin.}\,w}{r''} - \frac{\text{Sin.}\,w'}{r'} + \frac{\text{Sin.}\,(w'-w)}{r}}\ ^{*)}.$$

Hat man den halben Parameter gefunden; so erhält man aus n. 4.

$$7.)\ \text{Tang.}\,v = \text{Cotang.}\,w - \frac{r\,(p-r')}{r'\,(p-r)}\,\text{Cosec.}\,w,$$

und aus einer der drey ersten Gleichungen, z. B. aus der ersten,

$$8.)\ e = \frac{p-r}{r\,\text{Cos.}\,v}$$

In Beziehung auf das §. 182. gegebene Beyspiel ist

$w = 106^\circ\ 59'\ 40''$; Sin. $w = 0{,}9563331.4$
$w' = 249\ \ 59\ \ 50$; Sin. $w' = -0{,}9396760.2$
$w'-m = 143\ \ 0\ \ 10$; Sin. $(w'-w) = 0{,}6017762.8$
Sin. w − Sin. w' + Sin. $(w'-w)$ = 2,4977854.4

Lg. Sin. w = 9,9806092
Lg. r'' = 0,1712452
9,8093640; 0,6447093

Lg. Sin. w' = 9,9729782 neg.
Lg. r' = 0,2104384
9,7625398; 0,5788150

Lg. Sin. $(w'-w)$ = 9,7794351
Lg. r = 0,1458798
9,6335553; 0,4300860
1,6536103

$p = \frac{2{,}4977854}{1{,}6536103} = 1{,}510504.$
r' = 1,623448; Lg. = 0,2104384
r = 1,399200; Lg. = 0,1458798
$p-r$ = 0,111304; Lg. = 9,0465108
$p-r'$ = − 0,112944; Lg. = 9,0528632
Lg. Sin. w − 9,9806092
Lg. $r\,(p-r')$ = 9,1987430
Lg. $r'\,(p-r)$ Sin. w = 9,2375584
9,9611846

*) Olbers a. a. O. pag. 104.

$$\frac{r(p-r')}{r'(p-r)} \text{ Cosec. } w = -0{,}9145019$$

$$\text{Cotang. } w = -0{,}3056247$$

$$\text{Tang. } v = +0{,}6088772$$

$$v = 31^\circ\ 20'\ 10'',6,$$ nahe wie in §. 182.

$$\text{Lg. } r = 0{,}1458798$$

$$\text{Lg. Cos. } v = 9{,}9315238$$

$$0{,}0774036$$

$$\text{Lg. } (p-r) = 9{,}0465108$$

$$\text{Lg. } e = 8{,}9691072$$

$$e = 0{,}0931377.$$

Unter den zwey Winkeln, welche der Tangente von v entsprechen, wählt man denjenigen, durch welchen e positiv wird, oder man bestimmt v nach der im 182sten §. gegebenen Regel.

§. 199. Wenn die Bahn eines Planeten mit der Ekliptik zusammenfällt; so kann die im 196sten §. angezeigte Methode nicht angewendet werden. In diesem Fall bleiben weil die Lage der Ebene der Planetenbahn gegeben ist, noch vier Elemente der Bahn zu bestimmen übrig, wozu vier geocentrische Längen erfordert werden. Eben dieser Methode wird man sich wegen der beschränkten Genauigkeit der Beobachtungen nicht bedienen können, wenn die Neigung der Planetenbahn gegen die Ekliptik sehr klein ist. Dieser Fall trat bey der Bahn des Uranus ein, welche nur um 46' 26″ gegen die Ekliptik geneigt ist (§ 191.). Unter der Voraussetzung, daß der Planet um die Sonne als Mittelpunkt einen Kreis beschreibe, kann seine Bahn leicht aus zwey geocentrischen Längen gefunden werden, und man hat auf diesem Weg eine die ersten genäherten Bestimmungen der Entfernung des Uranus und seiner Umlaufszeit erhalten *). Es seyen P, Q (Fig. 65.) zwey Oerter des Planeten in seiner kreisförmigen Bahn, deren Mittelpunkt in den Mittelpunkt S der Sonne falle, E, E' die correspondirende Oerter der Erde, und die Punkte P, S, E und Q, S, E' seyen durch gerade Linien mit einander verbunden. Durch die zwey beobachtete Längen des Planeten sind die Winkel $PES = E$, $QE'S = E'$ gegeben, und den Winkel

*) Klügel in Astr. Jahrb. für 1785. pag. 193, und in Jahrb. für 1786 pag. 238.

$ESE' = S$ kann man ebenfalls durch die Beobachtung der Sonne finden, oder man kann ihn mittelst der bekannten Elemente der Erdbahn berechnen. Er ist nemlich dem Unterschied der Längen der Sonne zur Zeit der ersten und zweyten Beobachtung gleich. Endlich kennt man die Abstände $SE = R$, $SE' = R'$ der Erde von der Sonne. Da vermöge der Voraussetzung die Planetenbahn kreisförmig und mit der Sonne concentrisch ist; so wachsen die Sectoren, welche der Planet um die Sonne beschreibt, den Winkeln proportional, und da die ersteren den Zeiten proportional sind (II. kepl. Gesetz.), so bewegt sich der Planet mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit um die Sonne. Heißt nun die siderische Umlaufszeit der Erde T, des Planeten T' sein Abstand von der Sonne x, und die Zwischenzeit der Beobachtungen t; so verhält sich

$$T' : t = 360 : \text{Wink. } PSQ$$

Aber $T : T' = 1 : x\sqrt{x}$ (III. kepl. Gesetz.)

folglich $T : t = 360^\circ : PSQ\, x\sqrt{x}$,

und daher 1.) $PSQ = \frac{360t}{Tx\sqrt{x}}$ Gr. $= \frac{2\pi t}{Tx\sqrt{x}}$ in Theilen des Halbmessers. Betrachtet man die Entfernung SP oder x als gegeben; so kennt man in dem Dreyeck PES zwey Seiten PS, SE und den Gegenwinkel E der ersteren; folglich kann man den Winkel EPS oder P finden, welcher nothwendig spitz ist, wenn $SP > SE$. Eben so findet sich der Winkel SQE' oder Q. Und nun ist

$$\begin{aligned} \text{2.) der Wink. } PSQ &= PSE - QSE' \\ &= PSE + S - QSE' \\ &= 180^\circ - (P+E) + S - (180^\circ - (Q+E')) \\ &= S - P - E + Q + E' \end{aligned}$$

Die Entfernung x ist also so zu bestimmen, daß der Winkel PSQ aus den Gleichungen n. 1. und 2. gleich groß herauskommt.

Es ist $\text{Sin.}\, P = \frac{R \,\text{Sin.}\, E}{x}$ und $\text{Sin.}\, Q = \frac{R' \,\text{Sin.}\, E'}{x}$. Wenn nun x in Vergleichung mit R sehr groß ist; so hat man nahe

$P = \frac{R \,\text{Sin}\, E}{x}$; $Q = \frac{R' \,\text{Sin.}\, E'}{x}$ in Theilen des Halbmessers, und daher vermöge der Gleichung n. 2, wenn S, E und E' in eben solchen Theilen ausgedrückt werden

$$PSQ = S + E' - E + \frac{R' \text{Sin.}\, E' - R \text{Sin.}\, E}{x}$$

Aber $PSQ = \frac{2\pi t}{Tx\sqrt{x}}$ aus n. 1.; folglich

$$S + E' - E + \frac{R' \text{Sin.}\, E' - R \text{Sin.}\, E}{x} = \frac{2\pi t}{Tx\sqrt{x}},$$ und wenn man $\sqrt{x} = y$ setzt, die Gleichung y^3 multiplicirt und sie mit dem Coefficienten von y^3 dividirt,

$$y^3 + \frac{R' \text{Sin.}\, E' - R \text{Sin.}\, E}{S + E' - E}\, y = \frac{2\pi t}{T(S + E' - E)}.$$

Durch die Auflösung dieser Gleichung erhält man y, und $x = y^2$, welcher genäherte Werth von x noch so zu verbessern ist, daß, wenn man die Winkel P und Q nach den genauen Formeln berechnet, die Gleichungen n. 1. und 2. einerley Werth von PSQ geben, wie man leicht durch einige Versuche und durch Interpolation findet. Hat man x gefunden; so erhält man durch das dritte keplerische Gesetz die siderische Umlaufszeit des Planeten. Ferner sind die Winkel P und Q die Unterschiede der geocentrischen und heliocentrischen Länge des Planeten; folglich ist auch seine heliocentrische Länge zur Zeit der ersten oder zweyten Beobachtung gegeben, und dadurch die ganze Bahn sammt der Epoche der Länge bestimmt. **Klügel** fand nach dieser Methode den Abstand des Uranus von der Sonne = 18,974 *), welcher von seinem mittleren Abstand 19,183 (§. 191.) nicht sehr verschieden ist. Die Bahn wird am sichersten durch zwey Beobachtungen bestimmt, wovon die eine vor, die andere nach der Opposition in der Nähe der Quadratur angestellt ist.

§. 200. Soll die Bahn als eine Ellipse betrachtet werden; so werden ausser der mittleren Distanz noch zwey Elemente, nemlich die Lage der Apsidenlinie und die Excentricität, und daher zu ihrer Bestimmung zwey geocentrische Längen mehr als in der Kreishypothese erfordert. Nimmt man die mittlere Distanz, die Excentricität und die Länge des Periheliums als gegeben an; so ist dadurch, wenn die Bahn in der Ebene der Ekliptik liegt, die elliptische Bahn der Größe und der Lage nach gegeben. Jede geocentrische Länge bestimmt einen Ort eines oberen Planeten in

*) Astr. Jahrbuch für 1786. pag. 240.

dieser Ellipse, welcher dahin fällt, wo die nach dem Planeten gezogene Gesichtslinie die Ellipse schneidet. Gehört der Planet zu den unteren; so kann die Ellipse von der Gesichtslinie in zwey Punkten auf einerley Seite der Erde geschnitten werden, und man muß anderswoher wissen, welcher von den zwey Durchschnittspunkten genommen werden muß. Durch vier geocentrische Längen werden vier von der Sonne ausgehende Radii Vectores der Lage nach bestimmt. Man kennt also, weil die Länge des Periheliums gegeben ist, die wahren Anomalien für die vier Beobachtungszeiten, woraus man mittelst der Excentricität die mittleren Anomalien (§. 185.) und die Zwischenzeiten der Beobachtungen findet. Es sind aber drey von einander independente Zwischenzeiten, z. B. zwischen jeder der Beobachtungen und der nächstfolgenden gegeben; folglich werden die drey angenommene Elemente der Bahn so zu bestimmen seyn, daß die drey Zwischenzeiten mit den beobachteten übereinstimmend heraus kommen, und die Bahn des Planeten wird durch vier geocentrische Längen gegeben seyn.

Ist aber die Bahn gegen die Ebene der Ekliptik geneigt; so werden, weil jetzt zwey neue Elemente, nemlich die Länge des Knotens und die Neigung hinzukommen, ausser den vier geocentrischen Längen zwey geocentrische Breiten des Planeten zu der Bestimmung seiner Bahn erfordert. Man würde bey der Anwendung der hier angezeigten indirekten Methoden eine große Anzahl vergeblicher Versuche machen müßen, um die Elemente der Bahn zu finden, wenn man kein Mittel hätte, sie durch einige wenige Beobachtungen direkt näherungsweise zu bestimmen. Prof. Gauß lösete zuerst die Aufgabe auf aus einigen wenigen keinen grossen Zeitraum umfassenden und also keine Auswahl zur Anwendung specieller Methoden verstattenden Beobachtungen die Bahn eines Planeten zu bestimmen, und machte seine Methoden in dem §. 123. angeführten Werk bekannt. In diesem lehrt er zuerst die Elemente der Bahn aus Beobachtungen, welche weder zu nahe bey einander liegen, noch zu weit von einander entfernt seyn dürfen, weil im ersten Fall die unvermeidlichen Fehler der Beobachtungen einen zu grossen Einfluß auf die Elemente haben, im zweyten aber die Kunstgriffe einer Approximation nicht anwendbar seyn würden, bestimmen. Aus der Anwendung seiner Methode auf die Bahnen der Juno und Ceres ergiebt sich übrigens, daß eine heliocentrische Bewegung der ersten von nicht mehr als 7° 35' schon zu einer sehr nahen Bestimmung der Elemente hinreichend, und eine heliocentrische Bewegung der letztern von 62° 55' nicht zu groß war, um auch hier noch die Approximationen gebrauchen zu können. Sodenn zeigt er, wie durch eine größere Anzahl von Beobachtungen die Elemente der Bahn auf die bequemste Art immer mehr können berichtiget werden.

Viertes Capitel.

Von den Bahnen der Cometen.

§. 201. Da die Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet; so ist es natürlich, auch die Bahnen der Cometen als Ellipsen anzunehmen, in deren einem Brennpunkt die Sonne ist. Da aber diese Himmelskörper nur alsdenn für uns sichtbar sind, wenn sie den in der Nähe der Sonne liegenden Theil ihrer Bahnen beschreiben; so müssen ihre Bahnen sehr ablang, oder ihre Excentricitäten in Vergleichung mit den Excentricitäten der Planetenbahnen sehr beträchtlich seyn. Vergrößert man die Excentricität einer Ellipse, ohne den Abstand eines ihrer Scheitel von dem ihm zunächst gelegenen Brennpunkt zu verändern; so wird die große Axe und zugleich die Umlaufszeit (III. kepl. Gesetz.) wachsen, und der um den unbeweglich angenommenen Brennpunkt liegende Theil der Ellipse wird sich bey der Vergrößerung ihrer Excentricität immer mehr einer Parabel nähern, welche mit der Ellipse einerley Brennpunkt und Scheitel hat. Wenn nun die Bahn eines Cometen sehr ablang ist; so wird man den in die Nähe der Sonne und der Erde fallenden Theil derselben, welchen er während seiner Sichtbarkeit beschreibt, ohne einen beträchtlichen Fehler als eine Parabel betrachten kön-

können, deren Brennpunkt in dem Mittelpunkt der Sonne liegt, und welche die Ellipse in ihrem Scheitel berührt. Der Parameter der Ellipse wird beständig kleiner seyn als der Parameter der Parabel, aber sich demselben bey der Vergrößerung der Excentricität der Ellipse immer mehr nähern. Nimmt man ferner an, daß das keplerische Gesetz der Flächenräume auch für die Parabel gelte; so werden die Zeiten, in welchen die parabolischen Sectoren beschrieben werden, im zusammengesetzten Verhältniß aus den direkten ihrer Flächenräume und dem umgekehrten der Quadratwurzeln aus den Parametern der Parabeln seyn, welchen sie zugehören (§. 196.). Demnach wird, wenn die siderische Umlaufszeit der Erde $= T$, ihr mittlerer Abstand von der Sonne $= 1$, der halbe Parameter der Parabel, in Theilen jenes mittleren Abstands ausgedrückt, $= p$, der Inhalt des parabolischen Sectors $= A$, und die Zeit, in welcher er beschrieben wird, $= t$ ist, $t = \frac{T}{\pi} \cdot \frac{A}{\sqrt{p}}$ seyn *).

§. 202. Eine Parabel ist gegeben, wenn man ihren Brennpunkt, Parameter, und die Lage ihrer Axe kennt; folglich ist die Größe und Lage einer parabolischen Cometenbahn bestimmt, wenn man die Länge des aufsteigenden Knotens, die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik, die Länge des Periheliums (welcher Punkt in den Scheitel der Parabel fällt) und den Parameter (oder den vierten Theil desselben, welcher dem kleinsten Abstand des Cometen von der

*) Hevelius nahm nach der Analogie der geworfenen Körper die Bahnen der Cometen als Parabeln an, und Dörfel, ein Geistlicher zu Planen im Vogtlande, zeigte, daß der im Jahr 1680 erschienene Comet um die Sonne als Brennpunkt eine Parabel beschrieben habe. (Astronomische Betrachtungen des großen Cometen, welcher 1680 und 1681 erschienen, dessen zu Planen angestellte *Observationes*, von M. G. S. D. (örfel) 1681.) Histoire de l'Acad. roy. des sc. de Berlin. 1745. pag. 48. Kästner in den Schriften der Leipziger Ges. der fr. K. III. Th. Newton bewies in seinen 1687 zuerst erschienenen Principien, daß auch die Radii Vectores der Cometen den Zeiten proportionale Flächenräume ihrer um die Sonne als Brennpunkte beschriebenen parabolischen Bahnen abschneiden, und zeigte die genaue Uebereinstimmung seiner Theorie mit den Beobachtungen eben dieses Cometen, dessen Bahn er bestimmte. (Philosophiæ naturalis principia mathem. L. III. prop. XL, XLI, XLII.)

Sonne gleich ist) kennt. Zu diesen vier Stücken muß noch die Zeit des Durchgangs durch das Perihelium hinzukommen, um den Ort des Cometen für jede gegebene Zeit berechnen zu können. Diese fünf Stücke heißen die **parabolischen Elemente der Cometenbahn**, bey welchen man noch zu bemerken hat, ob der Comet von der Sonne aus gesehen sich mit den Planeten nach einer, oder nach der entgegengesetzten Richtung bewege, oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, ob der Comet rechtläufig oder rückläufig sey.

Es sey nun AMM' (Fig. 66.) eine Parabel, deren Brennpunkt F, Scheitel A, und deren Axe die gerade Linie APP' sey. Verlängert man die Axe über den Scheitel hinaus nach G so, daß $AG = AF$, und zieht durch G eine gerade Linie HH' auf GP senkrecht; so heißt diese die Directrix der Parabel. Zieht man durch beliebige Punkte M, M' der Parabel die Parallelen $MQ, M'Q'$ mit der Axe AP bis an die Directrix; so messen diese die Abstände jener Punkte der Parabel von der Directrix, welche beständig den Abständen FM, FM' eben dieser Punkte von dem Brennpunkt F gleich sind (Kegelsch. I, 1.). Man ziehe $MP, M'P'$ auf die Axe senkrecht, und verlängere durch den Endpunkt des kleineren Perpendickels gehende Parallele QM bis an das größere Perpendickel nach R; so ist $FM' - FM = M'Q' - MQ = RQ - QM = MR$. Sind zwey Punkte M, M' der Parabel und ihr Brennpunkt gegeben; so ist die MR, und weil der Winkel MRM' ein rechter ist, der Punkt R gegeben, welcher gefunden wird, wenn man um die Chorde MM' als Durchmesser einen Kreis beschreibt, und in denselben von dem Endpunkt des größeren Radius Vector an eine Chorde $M'R$ trägt, welche seinem Ueberschuß über den kleineren Radius Vector gleich ist. Mithin ist auch die MR, und daher die Axe AF der Lage nach gegeben. Nimmt man nun auf der über M hinaus verlängerten RM die $MQ = MF$, zieht durch Q die Parallele HH' mit $M'R$, welche der verlängerten PF in G begegnet, und halbirt GF in A; so ist A der Scheitel der Parabel, welche also durch zwey der Größe und Lage nach gegebene Radius Vectoren gegeben ist. Da man aber von dem Punkt M' an zwey Chorden $M'R$,

$M'R'$ in den über MM' als Durchmesser beschriebenen Kreis tragen kann; so können durch die zwey gegebene Punkte M, M' zwey Parabeln beschrieben werden, welche den gemeinschaftlichen Brennpunkt F haben, wie man in der Figur siehet, in welcher die auf die zwey Parabeln sich beziehende Axen und Scheitel mit denselben Buchstaben, aber in Beziehung auf die andere Parabel mit einem beygefügten Strich bezeichnet sind. Um also die Parabel ganz zu bestimmen, muß man wissen, ob der auf der Seite des Perihelinms liegende Winkel, welchen die Radii Vectores mit einander machen, kleiner oder größer als 180 Gr. werden soll. Im ersten Fall wird der Scheitel der gesuchten Parabel in A, im zweyten in A seyn. Eben diese Figur zeigt, daß die Construktion der Parabel dieselbe bleibt, wenn, wie es bey der zweyten dieser Parabeln der Fall ist, die gegebenen Punkte auf entgegengesetzte Seiten der Axe $A'p'$ fallen. Wenn die zwey Radii Vectores einander gleich sind; so fällt die ihren Zwischenwinkel halbirende gerade Linie mit der Axe zusammen, und die fernere Construktion bleibt wie vorhin.

§. 203. Ist die Parabel gegeben; so findet man leicht den Inhalt des Sectors, welchen zwey der Lage nach gegebene Radii Vectores FM, FM abschneiden. Es ist nemlich die Fläche $AMP = \frac{2}{3}\, AP \times PM$ (Kegelsch. I, 36.) und der Inhalt des Dreyecks $FPM = \frac{1}{2}\, FP \times PM$; folglich Sect. $AFM = (\frac{2}{3}\, AP + \frac{1}{2}\, FP)\, PM = (\frac{1}{2}\, AF + \frac{1}{6}\, AP)\, PM$. Eben so findet sich der Sect. AFM' = Fläche $AM'P'$ - Dreyeck $FP'M' = (\frac{1}{2}\, AF + \frac{1}{6}\, AP')\, P'M'$. Folglich ist der Inhalt des Sectors MFM' = dem Unterschied der gefundenen zwey Sectoren gegeben, wenn sie wie hier auf einerley Seite der Axe AP' liegen. Fallen sie auf verschiedene Seiten; so nimmt man ihre Summe. Demnach kennt man auch die Zeit, in welcher dieser Sector ist beschrieben worden (§. 201.). Hieraus erhellt die Möglichkeit, die Bahn eines Cometen durch einige wenige Beobachtungen unter der Voraussetzung einer Parabel zu bestimmen. Nimmt man die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn als gegeben an; so ist durch jede ausserhalb der Knotenlinie beobachtete geocentrische Länge und Breite des Cometen sein Radius Vector für die Zeit der Beobachtung der Größe und Lage nach gegeben (§. 196.). Durch zwey Längen und Breiten des Cometen sind zwey Radii Vectores gegeben, und durch diese ist die Parabel bestimmt. Man wird den Flächeninhalt des zwischen denselben liegenden Sectors und daraus ferner die Zeit, in welcher er beschrieben wurde, berechnen, welche mit der beobachteten übereinstimmen muß. Da man aber zwey der gesuchten Elemente der Bahn als gegeben angenommen hat; so wird zu ihrer Bestimmung noch eine Beobachtung erfordert, welche übrigens nicht mehr vollständig seyn darf. Kennt man z. B. nur noch eine Länge; so ist die Lage einer auf der Ebene der Ekliptik senkrechten Ebene gegeben, in welcher der wahre Ort des Cometen liegen muß. Dieser Ort muß aber auch auf der gefundenen Parabel liegen; folglich ist er mittelst des Durchschnitts der Parabel und jener Ebene gegeben. Ist aber statt der Länge eine Breite gegeben; so muß der wahre Ort des Cometen auf der Oberfläche eines auf der Ekliptik senkrecht stehenden geraden Kegels liegen, dessen Seitenlinie gegen seine Axe um das Complement der beobachteten geocentrischen Breite geneigt ist, und daher ist der Ort des Cometen in seiner Bahn mittelst des Durchschnitts dieser Kegeloberfläche und der Parabel gegeben. Alsdenn ist noch ein Radius Vector der Größe und Lage nach, mithin der von der zweyten Beobachtung an beschriebene Sector und die Zeit, in welcher er beschrieben wurde, gegeben, welche der zwischen der zweyten und dritten Beobachtung verfloßenen Zeit gleich seyn muß, wenn die angenommene Länge des Knotens und die Neigung der Bahn richtig sind. Findet sich ein Unterschied; so muß man diese Stücke so lange verändern, bis die beobachteten Zwischenzeiten mit den berechneten übereinstimmen. Da zur Bestimmung einer Cometenbahn nur fünf Elemente erfordert werden, so sind dazu fünf von einander independente durch die Beobachtungen gefundene Stücke, z. B. drey Längen und zwey Breiten, oder zwey Längen und drey Breiten, hinreichend. Diese Rechnungen lassen sich aber noch beträchtlich abkürzen. Man hat nemlich nicht nöthig, die Parabel zu bestimmen, um die Zeit zu finden, in welcher ein Sector derselben beschrieben wird, denn diese ist, wie hernach gezeigt werden soll, durch zwey Radios Vectores und die ihre Endpunkte verbindende Chorde der Parabel unmittelbar gegeben. Hat man nun die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn so bestimmt; daß die berechneten Zwischenzeiten mit den beobachteten übereinstimmen; so berechnet man, wenn drey vollständige Beobachtungen gegeben sind, die durch den ersten und dritten Ort des Cometen gehende Parabel. Der erste und zweyte Ort giebt eine zweyte, und der zweyte und dritte eine dritte Parabel. Die zwey letzteren müssen mit der ersten einerley Länge und Abstand des Periheliums haben, wenn die drey Oerter des Cometen in einer Parabel liegen sollen, oder die Unterschiede dürfen wenigstens nicht größer seyn, als die von den Beobachtungsfehlern herrührenden Abweichungen. Oder man berechnet mittelst der ersten Parabel die geocentrische Länge und Breite des Cometen für die Zeit der mittleren Beobachtung, welche mit den beobachteten übereinstimmen müssen, und so dient eine größere Anzahl von Beobachtungen, als zu der Bestimmung der parabolischen Elemente erfordert werden, zur Prüfung der Hypothese einer parabolischen Bahn. Endlich kann man durch drey nicht zu weit von einander entfernte Beobachtungen der Länge und Breite eines Cometen seine parabolische Bahn näherungsweise bestimmen, wodurch das vorhin gezeigte Verfahren abgekürzt wird, weil man aus diesen vorläufig gefundenen Elementen die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn schon nahe kennt, und dadurch eine Menge vergeblicher Versuche erspart wird.

§. 203. Die Bahn eines Cometen kann durch drey nicht zu weit von einander liegende geocentrische Oerter desselben mittelst einer geometrischen Construktion bestimmt werden. Als Vorbereitung auf dieselbe werden folgende Sätze vorausgeschickt. Es sey *anqm* (Fig. 67.) eine Parabel, deren Scheitel *a*, Axe *ah*, und Brennpunkt *f* seyen. Man ziehe eine Chorde *mn*, halbire sie in *g*, ziehe durch *g* die Parallele *gw* mit der Axe *ah*, welche der Parabel in *q* begegne, und durch *q* die Parallele *qt* mit *mn*;

so berührt diese die Parabel in dem Punkt q (Kegelsch. I, 12. Zus. 5.), und schneidet die verlängerte Axe in t so, daß, wenn man das Perpendickel qr auf die Axe fällt, $ra = at$ (K. I, 1. Zus. 8.). Man ziehe fq; so ist $fq = ar + af$ (K. I, 1. Zus. 3.) $= at + af = ft$.

Die fq begegne der Chorde mn in e; so sind wegen der Parallelen mn und tq die Dreyecke gqe und fqt gleichwinklicht, und daher ist

1.) $gq = qe$.

Man halbire den Winkel qft durch die fs; so halbirt diese die qt in s und schneidet sie senkrecht. Weil nun auch $ra = at$; so ist die durch a und s gezogene as mit qr parallel, und daher auf der Axe senkrecht. Folglich verhält sich $\left.\begin{matrix} ft \\ fq \end{matrix}\right\} : fs = fs : af$, $\overline{fq}^2 : \overline{fs}^2 = fq : af$, oder

2.) $fq : fs = \sqrt{fq} : \sqrt{af}$.

Man ziehe $m'n'$ durch e senkrecht auf fq, und nehme auf beyden Seiten von e die em', $en' = gm$ oder gn; so ist das Quadrat von $m'e$ oder $n'e$ = Quadr. von $gm = 4fq \times qg$ (Kegelsch. I, 14.) $= 4fq \times qe$ (n. 1.). Daher liegen die Punkte $m'qn'$ auf einer Parabel, deren Scheitel q, Brennpunkt f und Parameter $= 4fq$ ist. Mithin ist (K. I, 1. Zus. 3.)

3.) $\left.\begin{matrix} fm' \\ fn' \end{matrix}\right\} = fq + qe = fe + 2eq$.

Man ziehe durch m, g, n die Parallelen mh, gi, nk mit qr, und an den Punkt g', in welchem die verlängerte gi der Parabel begegnet, den Radius Vector fg'. Alsdenn ist (Kegelsch. I, 1. Zus. 3.)

$fm = ah + af = ai + ih + af$
$\quad = ai + ik + af$, (weil $ng = gm$)
und $fn = ak + af$; folglich ist

4.) $fm + fn = \left\{\begin{matrix} 2ai + 2af \\ 2fg' \text{ (weil } ai + af = fg'\text{)} \end{matrix}\right.$

Ferner $fm' = fq + qe = fq + qg = fq + ri$
$\quad fg' = ai + af = ar + ri + af = fq + ri$ (weil $ar + af = fq$)

Also ist $fm' = fg'$, und daher

5.) $2fm' = 2fg' = fm + fn$ (n. 4.)

Es begegne die wo nöthig verlängerte Chorde mn der fs in v; so sind sv und qe die Höhen der parabolischen Abschnitte nmq, $n'm'q$. Also verhält sich (Kegelsch. I, 36. Zus.)

Abschn. $n'm'q$: Abschn. $nmq = qe : sv$
$\quad = fe : fv$
$\quad =$ Dreyeck $m'fn'$: Dreyeck mfn.

Folglich verhält sich auch die Summe der Vorderglieder zu der Summe der Hinterglieder wie $fe : fv$, das ist

$$\text{Sector } m'n'f : \text{Sect. } mnf = fe : fv$$
$$= fq : fs$$
$$= \sqrt{fq} : \sqrt{af} \text{ (n. 2.)}$$

Also ist 6.) $\dfrac{\text{Sector } mnf}{\sqrt{af}} = \dfrac{\text{Sector } m'n'f}{\sqrt{fq}}$.

Vermöge I, 36. Kegelschn. ist
d. Abschnitt $nmq = \frac{4}{3}\, m'e \times eq = \frac{2}{3}\, m'e\,(fm' - fe)$ (n. 3.)
Da nun das Dreyeck $m'fn' = m'e \times fe$
so ist der Sector $m'fn' = \frac{1}{3}(2fm' + fe)\, m'e$

$$= \tfrac{1}{3}(2fm' + fe)\sqrt{2fq\,(fm' - fe)}, \text{ weil } \overline{me}^2 = 4fq \times qe$$
$$= 2fq\,(fm' - fe) \text{ (n. 3.)}$$

$$\frac{3\,\text{Sector } m'fn'}{\sqrt{fq}} = (2fm' + fe)\sqrt{2\,(fm' - fe)}$$
$$= fm'\sqrt{2\,(fm' - fe)} + \sqrt{2(fm' + fe)(fm' + fe)(fm' - fe)}$$
$$= fm'\sqrt{2\,(fm' - fe)} + m'e\sqrt{2\,(fm' + fe)}$$

Aber $2\,(fm' \pm fe) = 2fm' \pm 2\sqrt{(fm' + m'e)\,(fm' - m'e)}$,

$$= fm' + m'e + fm' - m'e \pm 2\sqrt{(fm' + m'e)\,(fm' - m'e)}$$
$$= \left(\sqrt{fm' + m'e} \pm \sqrt{fm' - m'e}\right)^2$$

$$\sqrt{2\,(fm' \pm fe)} = \sqrt{fm' + m'e} \pm \sqrt{fm' - me}.$$

Folglich $\dfrac{3\,\text{Sector } m'fn'}{\sqrt{fq}} = fm'\sqrt{fm' + m'e} - fm'\sqrt{fm' - m'e}$

$$+ m'e\sqrt{fm + m'e} + m'e\sqrt{fm' - me'}$$
$$= (fm' + m'e)\sqrt{fm' + m'e} - (fm' - m'e)\sqrt{fm' - m'e}.$$

Daher ist vermöge der Gleichung n. 6.

$$\frac{3\,\text{Sector } mnf}{\sqrt{af}} = (fm' + m'e)^{\frac{3}{2}} - (fm' - m'e)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \left(\frac{fm + fn + mn}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{fm + fn - mn}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ (n. 5.)},$$

und, weil der halbe Parameter der Parabel $anm = 2af$ ist, vermöge §. 196. die Zeit, in welcher der parabolische Sector mfn beschrieben wird,

$$7.)\ t = \frac{T}{3\pi\sqrt{2}}\left(\left(\frac{fm + fn + mn}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{fm + fn - mn}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Eben so kann gezeigt werden, daß, wenn der Winkel, welchen die Radii Vectores auf der Seite des Periheliums mit einander machen, größer als 180° ist,

$$8.)\ t = \frac{T}{3\pi\sqrt{2}}\left(\left(\frac{fm + fn + mn}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{fm + fn - mn}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Also kann die Zeit, in welcher ein Sector der Parabel beschrieben wird, unmittelbar aus den zwey Radiis vectoribus und der ihre Endpunkte verbindenden Chorde der Parabel gefunden werden *).

In Beziehung auf den Faktor $\frac{T}{\pi}$ ist noch zu bemerken, daß er wegen der Masse der Erde und des Cometen eine kleine Modification leidet. Es ist nemlich, wie in der physischen Astronomie gezeigt wird, wenn die siderische Umlaufszeit der Erde $= T$, die eines Planeten $= T'$, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $= 1$, des Planeten $= \mu'$, und die Masse der Sonne $= 1$ gesetzt wird, statt der aus dem dritten keplerischen Gesetz sich ergebenden in §. 169. gebrauchten Proportion zu setzen $T : T' = \sqrt{1+\mu'} : a^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\mu}$. Alsdenn wird sich der im 169. §. gegebene Ausdruck der Zeit durch den Inhalt A des elliptischen Sectors und den halben Parameter p der Ellipse in folgenden verwandeln.

$$9.)\ t = \frac{T}{\pi}\sqrt{1+\mu} \times \sqrt{\frac{A}{p(1+\mu')}},$$

welcher auch für parabolische Bahnen gilt. Bey einer ersten Annäherung setzt man $\mu = 0$, und man kann überhaupt, wenn es um die Bestimmung der Bahn eines Cometen zu thun ist, immer seine Masse vernachläßigen; folglich hat man nur die Zahl $\frac{T}{\pi}$ mit $\sqrt{1+\mu}$ zu multipliciren, um die Masse der Erde in Rechnung zu nehmen, welche übrigens hier keinen sehr merklichen Einfluß hat. Es ist nach Laplace **) die Masse der Erde $= \frac{1}{337086}$ der Masse der Sonne, und daher

$$\begin{aligned}
\text{Lg.}\,(1+\mu) &= 0{,}0000012884 \\
\tfrac{1}{2}\,\text{Lg.}\,(1+\mu) &= 0{,}0000006442 \\
\text{Lg.}\,T &= 2{,}5625978148 \quad \text{nach §. 191.} \\
&\ 2{,}5625984590 \\
\text{Lg.}\,\pi &= 0{,}4971498727 \\
10.)\ \text{Lg.}\,\frac{T}{\pi}\sqrt{1+\mu} &= 2{,}0654485863 \\
\text{Lg.}\,3 &= 0{,}4771212547 \\
\text{Lg.}\,\sqrt{2} &= 0{,}1505149978 \\
&\ 0{,}6276362525 \\
11.\ \text{Lg.}\,\frac{T}{3\pi}\sqrt{\frac{1+\mu}{2}} &= 1{,}4378123338
\end{aligned}$$

*) Der Erfinder dieses merkwürdigen Satzes ist Lambert. S. J. H. *Lambert* insigniores orbitæ cometarum proprietates. *Augustae Vindelic.* MDCCLXI. Probl. XV. §. 83.

**) Exposition du Syst. du monde, III edit. pag. 208.

§. 205. 1.) Man ziehe drey Radios Vectores fn, fq, fm (Fig. 68.) einer Parabel, und die Chorden mq, qn, mn; so verhält sich sowohl das Dreyeck fme zu dem Dreyeck fne, als das Dreyeck mqe zu dem Dreyeck nqe, wie me zu en. Folglich verhält sich auch das Dreyeck fmq zu dem Dreyeck fnq wie me zu en. Wenn nun die parabolischen Abschnitte, welche durch die Chorden mq, nq gebildet werden, klein sind; so wird sich auch nahe verhalten $me : en$ = Sector mfq : Sector nfq, oder die Chorde mn wird von dem mittleren Radius Vector fq in dem Punkt e nahe im Verhältniß der Zeiten geschnitten, welche der Comet gebrauchte, um die Sectoren mfq, nfq zu beschreiben *).

2.) Aus den Punkten m, f, n, e, q seyen die Perpendickel mm', ff' u. s. w. auf eine beliebige Ebene gefällt; so liegen auch $m'e'n'$, $f'e'q'$ in einer geraden Linie. Und da die Perpendickel einander parallel sind (XI 6.); so verhält sich $me : en = m'e' : e'n'$. Folglich wird auch die orthographische Projection $m'n'$ der Chorde mn von der Projection $f'q'$ des mittleren Radius Vector fq in demselben Verhältniß, wie die Chorde selbst von dem mittleren Radius Vector, und daher ebenfalls nahe im Verhältniß der Zeiten geschnitten.

3.) Es sey $DEFG$ (Fig. 69.) eine der Lage nach gegebene auf der Ebene RED der Ekliptik senkrechte Ebene, BP eine nach dem Ort eines Himmelskörpers von der in B befindlichen Erde gezogene Gesichtslinie, auf welcher von B an die BP von beliebiger Größe abgeschnitten sey. Man fälle von P das Perpendickel PR auf die Ebene der Ekliptik, und das Perpendickel Pp auf die Ebene DF. Durch R und B seyen die Rr und CBb auf die D[illegible]schnittslinie DE der Ebenen DF und der Ekliptik senkrecht gezogen; so wird die gerade Linie bp die auf die Ebene DF [illegible]raphisch projicirte Gesichtslinie seyn. Da die Ebene DF [illegible] Lage nach gegeben ist; so ist die Cb der Lage nach ge[illegible] Ferner sind durch die geocentrische Länge und Breite [illegible] Himmelskörpers die Winkel CBR und PBR gegeben, denn [illegible] ist dem Unterschied der Länge des Himmelskörpers und [illegible] des Punkts der Ekliptik gleich, auf welchen die Linie [illegible] trifft. Man kennt also, wenn Bc mit DE parallel gezogen [illegible] dem bey c rechtwinklichten Dreyeck BcR das Verhält[illegible] $\left\{ \begin{matrix} B \\ \; \end{matrix} \right\}$ zu BR, und in dem rechtw. Dreyeck BRP das [illegible]tniß von $BR : \left\{ \begin{matrix} RP \\ rp \end{matrix} \right\}$; folglich ist in dem bey r rechtwink[illegible]

[illegible] Fall betreffend, in welchem der mittlere Radius Vector die Chor[illegible] ganzen Bogens genau im Verhältniß der Zeiten schneidet, s. [illegible] principia, L. III. lemma VIII. corol. Lambert's Beyträge [illegible] Gebrauche der Mathematik, III Th. S. 261. u. f. §. 74. 75.

lichten Dreyeck brp das Verhältniß von $br : rp$, und dadurch die Projection bp der Gesichtslinie der Lage nach gegeben, deren Winkel mit der DE so gefunden wird:

$$\begin{array}{rl} \text{Es verhält sich } & Bc : BR = \text{Sin. } BRc : \text{Sin. tot.} \\ & BR : RP = \text{Sin. tot.} : \text{Tg. } PBR \\ \hline & Bc : RP = \text{Sin. } BRc : \text{Tg. } PBR \\ \text{oder } & \left.\begin{array}{r} br : rp \\ \text{Sin. tot.} : \text{Tg. } rbp \end{array}\right\} = \text{Sin. } RBC : \text{Tg. } PBR. \end{array}$$

4.) Es sey CP' eine von einem beliebigen Punkt C der auf DE senkrechten Cb nach dem wahren Ort P' des Himmelskörpers gezogene gerade Linie; so liegt diese, weil Pp und Cb einander parallel sind, in der durch die zwey letzteren gelegten Ebene, und ihre Projection auf die Ebene DF fällt mit der Projection bp der Gesichtslinie BP zusammen.

5.) Wenn (Fig. 70.) drey sich in D, E schneidende in einer Ebene liegende gerade Linien AD, BD, CE der Lage nach gegeben sind; so kann man durch jeden auf einer derselben AD gegebenen von D verschiedenen Punkt a eine gerade Linie abc so ziehen, daß das Verhältniß der Segmente ab, bc einem gegebenen Verhältniß $t' : t''$ gleich wird. Denn zieht man von a an einen beliebigen Punkt e der BD eine gerade Linie ae, verlängert sie nach f so, daß $ae : ef = t' : t''$, und zieht durch f eine Parallele fg mit BD; so wird diese, weil BD und CE nicht parallel sind (Voraussſ.) der CE in c begegnen. Man ziehe ac; so verhält sich $ab : bc = ae : ef = t' : t''$. Das Verhältniß der Abstände Da und Ec kann auf folgende Art gefunden werden:

$$\begin{array}{rl} \text{Es verhält sich } & ab : aD = \text{Sin. } ADB : \text{Sin. } abD \\ & cE : bc = \left\{\begin{array}{l} \text{Sin. } cbE \\ \text{Sin. } abD \end{array}\right\} : \text{Sin. } BEC \\ \text{und } & bc : ab = t'' : t' \\ \hline \text{folglich } & cE : aD = t''\text{Sin. } ADB : t'\text{Sin. } BEC \end{array}$$

6.) Es sey eine zweyte Linie AC so gezogen, daß $AB : BC = t' : t''$; so wird sich verhalten

$$\begin{array}{rl} CE : AD = & t''\text{Sin. } ADB : t'\text{Sin. } BEC \\ = & cE \;.\; aD \quad (\text{n. } 5.) \\ \hline \end{array}$$

also auch $\left.\begin{array}{c} CE - cE \\ Cc \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c} AD - aD \\ Aa \end{array}\right\} = t'\text{Sin. } ADB : t''\text{Sin. } BEC$

oder, wenn man Winkel FAD, FBE, FCE mit b', b'', b''' bezeichnet,

$$Cc : Aa = t''\text{Sin. } (b'' - b') : t'\text{Sin. } (b''' - b'').$$

§. 206. Mittelst dieser Sätze wird sich nun die Cometenbahn, wenn drey nicht zu weit von einander entfernte geocentrische Längen und Breiten des Cometen gegeben sind, auf folgende Art construiren lassen. An einen nach Belieben angenomnenen Punkt S (Fig. 71.), welcher den Mittelpunkt der Sonne vorstelle, und an eine beliebige von diesem Punkt ausgehende gerade Linie SA lege man die Winkel ASB, ASC gleich dem Unterschied der Längen der Sonne zur Zeit der ersten und zweyten, und der ersten und dritten Beobachtung, und nehme die SA, SB, SC den Abständen der Erde von der Sonne zur Zeit der ersten, zweyten, und dritten Beobachtung gleich. Man mache die Winkel SAa', SBb', SCc' den Längenunterschieden der Sonne und des Cometen für jede der drey Beobachtungszeiten gleich, ziehe GE auf den mittleren Radius Vector SB der Erde senkrecht, und fälle von den zwey übrigen Oertern A, C der Erde die Perpendickel AE, CF auf die FE. Man denke sich die nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien auf eine Ebene projicirt, welche auf den mittleren Radius Vector SA der Erde, mithin auch auf der Ebene der Ekliptik senkrecht sey; so wird GE ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der Ekliptik seyn, und man wird nach §. 205. n. 3. die Winkel bestimmen können, welche die Projectionen der nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien auf die erwähnte Ebene mit der Durchschnittslinie GE machen. Diesen Winkeln mache man die Winkel GEa, GBd, GFc gleich, indem man sich die auf der Ekliptik senkrechte Projectionsebene auf die Ebene der Ekliptik niedergelegt denkt. Die Projection Bd der mittleren Gesichtslinie wird, weil SB auf GE senkrecht ist, zugleich die Projection des mittleren Radius Vector des Cometen (§. 205. n. 4.) seyn, und daher durch die Projection des Punkts gehen, in welchem der mittlere Radius Vector die Chorde des ganzen von dem Cometen zwischen der ersten und dritten Beobachtung durchlaufenen Bogens schneidet.

Man nehme jetzt die abgekürzte Distanz des Cometen von der Erde zur Zeit der ersten Beobachtung als gegeben an, und gleich Aa'; so wird, wenn man durch a' eine Parallele $a'a$ mit SB zieht, welche der GE in e, der Ea in a begegnet, der Punkt a die Projection des ersten Cometenorts auf die den mittleren Radius Vector der Erde senkrecht schneidende Ebene seyn. Es sey c die Projection des Orts des Cometen zur Zeit der dritten Beobachtung. Man ziehe die gerade Linie ac, welche von der Bd in d abschnitten werde; so wird diese die Projection der Chorde des von dem Cometen zwischen der ersten und dritten Beobachtung durchlaufenen Bogens, und d die Projection des Punkts seyn, in welchem der Radius Vector jene Chorde schneidet. Unter der Voraussetzung §. 205. n. 1. wird also das Verhältniß von $ad : dc$, dem gegebenen Verhältniß der Zwischenzeiten t' und t'' zwischen der ersten und zweyten, und der zweyten und dritten Beobachtung gleich, und, weil der Punkt a (Voraussf.) gegeben ist, der Punkt c gegeben seyn (§. 205. n. 5.)

Man ziehe durch c die Parallele cc' mit SB, welche der Projection Gc' der dritten nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinie auf die Ebene der Ekliptik in c' begegne; so wird Sc' die abgekürzte Distanz des Cometen von der Sonne zur Zeit der dritten Beobachtung, $a'c'$ die Projection der Chorde des ganzen von dem Cometen beschriebenen Bogens auf die Ebene der Ekliptik, und ihr Durchschnittspunkt d' mit einer durch d mit SB gezogenen Parallele die Projection desjenigen Punkts derselben seyn, in welchem sie von dem mittleren Radius Vector geschnitten wird. Da nun $ad : dc = a'd' : d'c'$; so wird (§. 205. n. 5.) die Zeit zwischen der ersten und zweyten, und zwischen der zweyten und dritten Beobachtung nahe den in diesen Zeiten beschriebenen Sectoren proportional seyn. Nun sind aber ae und cg die aus dem ersten und dritten Ort des Cometen auf die Ebene der Ekliptik gefällten Perpendickel (§. 205. n. 3.); folglich sind die Radii Vectores des Cometen zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung als Hypotenusen rechtwinklichter Dreyecke, deren um den rechten Winkel liegende Seiten beziehungsweise Sa' und ae, Sc' und gc sind, und die Chorde des ganzen beschriebenen Bogens als Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen um den rechten Winkel liegende Seiten $a'c'$ und $ae - cg$ sind, gegeben. Mithin ist auch die zwischen der ersten und dritten Beobachtung verflossene Zeit gegeben (§. 204. n. 7. oder 8.). Die abgekürzte Distanz Aa' muß also so bestimmt werden, daß die mittelst derselben gefundene Zwischenzeit der ersten und dritten Beobachtung der beobachteten gleich wird, wie man leicht durch einige Versuche findet. Hat man diese Bedingung erfüllt; so wird die Bahn des Cometen gegeben seyn. Denn man kennt die abgekürzte Distanzen Sa', Sc' des Cometen von der Sonne, und die von ihm auf die Ebene der Ekliptik gefällten Perpendickel ae, cg, mithin die zwey heliocentrischen Breiten desselben zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung, und den Unterschied $a'Sc'$ seiner heliocentrischen Längen, so wie die Radios Vectores selbst. Und weil die Sa' der Lage nach gegeben ist; so kennt man den Winkel ASa', mithin mittelst der bekannten Länge der Erde zur Zeit der ersten Beobachtung die heliocentrische Länge des Cometen für die Zeit dieser Beobachtung. Folglich ist (§. 174. und 175.) die Ebene seiner Bahn der Lage nach gegeben. Da nun zwey Radii Vectores der Größe und Lage nach gegeben sind; so ist die durch ihre Endpunkte gehende Parabel gegeben, welche den Mittelpunkt der Sonne zum Brennpunkt hat (§. 202.). Hieraus ergiebt sich der Inhalt des zwischen dem Perihelium und dem ersten Radius Vector liegenden Sectors der Parabel, und die Zeit zwischen dem Durchgang durch das Perihelium und dem Augenblick der ersten Beobachtung, also die Zeit des Periheliums selbst, wodurch vollends die ganze Bahn bestimmt ist.

Zieht man noch an den Punkt d', in welchem die durch d mit SB parallel gezogene dd' der $a'c'$ begegnet, die Sd', welche die der Lage nach gegebene Bb' in b' schneide, und durch b' die die Parallele $b'k$ mit dd'; so ist auch die abgekürzte Distanz Sb' des Cometen von der Sonne, und das von ihm auf die Ekliptik gefällte Perpendickel kh zur Zeit der zweyten Beobachtung, und daher der mittlere Radius Vector der Größe und Lage gegeben. Demnach sind drey Punkte und der Brennpunkt gegeben, wodurch die Ellipse gegeben ist, auf deren Umfang die drey Punkte liegen (§. 181. 182. 198.), welche aber auf diesem Weg nicht sicher gefunden wird, theils weil die Voraussetzung §. 205. n. 1. nur eine Näherung ist, theils weil kleine Beobachtungsfehler einen sehr großen Einfluß auf die Bestimmung der sehr ablangen Bahnen der Cometen haben. Uebrigens ergiebt sich hieraus, daß durch drey geocentrische Längen und Breiten eines Cometen seine parabolische Bahn mehr als bestimmt wird.

Diese Construktion lehrt **Lambert** in der oben angeführten Schrift: Insigniorss orbitæ cometarum proprietates. Probl. XXXI. pag. 83. sq. und ausführlicher in seinen **Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik.** III. Th. S. 270. §. 82. u. f.

§. 207. Berechnung der lambertischen Construktion unter der von **Olbers** gemachten Voraussetzung, daß auch die Chorde AC des von der Erde zwischen der ersten und dritten Beobachtung beschriebenen Bogens von dem mittleren Radius Vector SB der Erde in C im Verhältniß der zwischen der ersten und zweyten, und der zweyten und dritten Beobachtung verflossenen Zeiten geschnitten werde *).

Es seyen A', A'', A''' die drey Längen der Sonne zur Zeit der ersten, zweyten und dritten Beobachtung, R', R'', R''' die correspondirende Abstände der Erde von der Sonne. α', α'', α''' die drey geocentrischen Längen des Cometen, β', β'', β''' seine geocentrische Breiten, t', t'' die Zeiten zwischen der ersten und zweyten, und der zweyten und dritten Beobachtung, die ganze Zwischenzeit zwischen der ersten und dritten, oder $t' + t''$ sey $= T$. Die drey abgekürzten Distanzen des Cometen von der Erde Aa', Bb', Cc' seyen ϱ', ϱ'', ϱ'''.

Die Winkel, welche die Projectionen der nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien auf die Ekliptik mit dem mittleren Radius Vector der Erde machen, werden nun nach der Ordnung der Beobachtungen seyn $A''-\alpha'$, $A''-\alpha''$, $A''-\alpha'''$, und daher, wenn man $GEa = b'$, $GBd = b''$, $GFc = b'''$ setzt, vermöge §. 205. n. 3.

*) Olbers Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen. §. 33. 38. u. f.

$$\text{Tang. } b' = \frac{\text{Tg. } \beta'}{\text{Sin. } (A'' - \alpha')}$$

$$\text{Tg. } b'' = \frac{\text{Tg. } \beta''}{\text{Sin. } (A'' - \alpha'')}$$

$$\text{Tg. } b''' = \frac{\text{Tg. } \beta'''}{\text{Sin. } (A'' - \alpha''')}$$

Vermöge der Voraussetzung ist so wohl $ad : dc$ als $AD : DC = t' : t''$, und wegen der Parallelen AE, DB, CF, auch $EB : BF = t' : t''$; folglich (§. 205. n. 6.)

$$cF : aE = t'' \text{Sin.} (b'' - b') : t' \text{Sin.} (b''' - b'').$$

Nun verhält sich aber in dem rechtwinklichten Dreyeck aEe

$$aE : Ee = 1 : \text{Cos. } b',$$

und wegen der Parallelen $AE, a'e$

$$\begin{aligned} Ee : Aa' &= \text{Sin. } ea'A : 1 \\ &= \text{Sin. } (A'' - \alpha') : 1 \end{aligned}$$

$$\text{also } aE : Aa' = \text{Sin. } (A'' - \alpha') : \text{Cos. } b'.$$

$$\text{Eben so } Cc' : cF = \text{Cos. } b''' : \text{Sin. } (A'' - \alpha''')$$

$$\text{da nun } cF : aE = t'' \text{Sin.} (b'' - b') : t' \text{Sin.} (b''' - b'')$$

$$\text{so ist } \left. \begin{matrix} Cc' : Aa' \\ \rho''' : \rho' \end{matrix} \right\} = \text{Sin. } (A'' - \alpha') \text{ Sin. } (b'' - b') \text{ Cos. } b''' \, t'' : \text{Sin.} (A'' - \alpha''') \text{ Sin.} (b''' - b'') \text{ Cos.} b' \, t'$$

$$= M : 1 \text{ zur Abkürzung.}$$

$$\text{Es ist aber } \frac{\text{Sin.} (b'' - b')}{\text{Cos.} b' \text{ Cos.} b''} = \text{Tg.} b'' - \text{Tg.} b'$$

$$\frac{\text{Sin.} (b''' - b'')}{\text{Cos.} b'' \text{ Cos.} b'''} = \text{Tg.} b''' - \text{Tg.} b''$$

$$\text{folglich } M = \frac{\text{Sin.} (A'' - \alpha') (\text{Tg. } b'' - \text{Tg.} b') \, t''}{\text{Sin.} (A'' - \alpha''') (\text{Tg.} b''' - \text{Tg.} b'') \, t'}$$

und, wenn man die vorhin gefundene Ausdrücke der Tangenten von b', b'', b''' substituirt,

$$1.) \; M = \frac{(\text{Tg.} \beta'' \text{Sin.} (A'' - \alpha') - \text{Tg.} \beta' \text{Sin.} (A'' - \alpha'')) \, t''}{(\text{Tg.} \beta''' \text{Sin.} (A'' - \alpha'') - \text{Tg.} \beta'' \text{Sin.} (A'' - \alpha''')) \, t'}.$$

Ferner ist in dem Dreyeck SAa'

$$\overline{Sa'}^2 = R'^2 + \rho'^2 - 2 R' \rho' \text{Cos.} (A' - \alpha'),$$

und das aus dem ersten Cometenort auf die Ekliptik gefällte Perpendickel ist $= \rho' \text{Tg.} \beta'$; folglich ist das Quadrat des demselben entsprechenden Radius Vector des Cometen

$$\begin{aligned} 2.) \; r'^2 &= R'^2 + \rho'^2 + \rho'^2 \overline{\text{Tg.} \beta'}^2 - 2 R' \rho' \text{Cos.} (A' - \alpha') \\ &= R'^2 + \rho'^2 \overline{\text{Sec.} \beta'}^2 - 2 R' \rho' \text{Cos.} (A' - \alpha') \end{aligned}$$

Eben so findet sich das Quadrat des Radius Vector des Cometen zur Zeit der dritten Beobachtung

3.) $r'''^2 = R'''^2 + \rho'''^2 \overline{\text{Sec.}\,\beta'''}^2 - 2R'''\rho'''\,\text{Cos.}(A''' - \alpha''')$

$= R'''^2 + M^2\rho'^2\,\overline{\text{Sec.}\,\beta'''} - 2MR'''\rho'\,\text{Cos.}(A''' - \alpha''')$

Man ziehe $a'k$ und $c'l$ auf SB senkrecht; so ist

$a'c'^2 = (Sk - Sl)^2 + (c'l - a'k)^2$, und die Differenz der aus dem ersten und dritten Ort des Cometen auf die Ekliptik gefällten Perpendickel ist $= \rho'\,\text{Tg.}\,\beta' - \rho'''\,\text{Tg.}\,\beta' = \rho'\,\text{Tg.}\,\beta' - M\rho'\,\text{Tg.}\,\beta'''$; folglich ist wenn man das Quadrat der letztern zu dem Quadrat von $a'c'$ addirt, das Quadrat der Chorde k'' des ganzen von dem Cometen zwischen der ersten und dritten Beobachtung beschriebenen Bogens

$$\begin{aligned}
k''^2 &= \overline{Sk}^2 - 2Sk \times Sl + \overline{Sl}^2 \\
&+ \overline{a'k}^2 - 2a'k \times c'l + \overline{c'l}^2 \\
&+ \rho'^2\,\text{Tg.}\,\beta'^2 \quad + \rho'''^2\,\text{Tg.}\,\beta'''^2 - 2\rho'\rho'''\,\text{Tg.}\,\beta'\,\text{Tg.}\,\beta''' \\
&= r'^2 - 2Sk \times Sl - 2a'k \times c'l + r'''^2 - 2M\rho'^2\,\text{Tg.}\,\beta'\,\text{Tg.}\,\beta'''.
\end{aligned}$$

Aber $Sk = R'\,\text{Cos.}(A'' - A') - \rho'\,\text{Cos.}(A'' - \alpha')$

$Sl = R'''\,\text{Cos.}(A''' - A'') - \rho'''\,\text{Cos.}(A'' - \alpha''')$

$a'k = \rho'\,\text{Sin.}(A'' - \alpha') - R'\,\text{Sin.}(A'' - A')$

$c'l = \rho'''\,\text{Sin.}(A'' - \alpha''') + R'''\,\text{Sin.}(A''' - A'')$:

folglich ist, wenn man diese Werthe in dem obigen Ausdruck des Quadrats von k'' substituirt, und die gehörigen Reduktionen macht,

$$\begin{aligned}
4.)\quad k''^2 &= r'^2 + r'''^2 - 2R'R'''\,\text{Cos.}(A''' - A') \\
&+ 2R'''\rho'\,\text{Cos.}(A''' - \alpha') + 2MR'\rho'\,\text{Cos.}(A' - \alpha''') \\
&- 2M\rho'^2\,\text{Cos.}(\alpha''' - \alpha') - 2M\rho'^2\,\text{Tg.}\,\beta'\,\text{Tg.}\,\beta'''
\end{aligned}$$

$= F + G\rho' + H\rho'^2$ zur Abkürzung, wo F, G und H gegebene Zahlen sind.

Endlich ist, wenn man die constante Zahl $\frac{T}{3\pi}\sqrt{\frac{1+\mu}{2}} = K$ setzt.

5.) $\left.\frac{t' + t''}{T}\right\} = K\left(\left(\frac{r' + r''' + k''}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r' + r''' - k''}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$ (§. 204. n. 7.)

Mittelst dieser Ausdrücke kann nun die abgekürzte Distanz ρ' des Cometen von der Erde zur Zeit der ersten Beobachtung und daraus ferner r', r''', k'' auf folgende Art durch einige wenige Versuche gefunden werden. Man sucht zuerst den Werth von M nach n. 1. und berechnet sodenn die Coefficienten von ρ' und die Quadrate von R', R''' in den Formeln n. 2. und 3., und die Zahlen F, G, H in der Formel n. 4. Man wird also nur noch eine unbekannte Größe, nemlich ρ' in den Gleichungen haben, welche so zu bestimmen ist, daß die mittelst derselben durch die Formeln n. 2, 3. und. 4. gefundenen Werthe von r', r''', k'' in die Formel n. 5. gesetzt die Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung eben so groß geben, als man sie wirklich beobachtet hat. Zu dem Ende nimmt man einen Werth von ϱ' nach Belieben an, und sucht mittelst desselben die Zeit, welche zwischen der ersten und dritten Beobachtung hätte verfließen müssen, und deren Vergleichung mit der beobachteten zeigen wird, ob der angenommene Werth von ϱ' vermehrt oder vermindert werden müsse, um eine der beobachteten Zwischenzeit näher kommende zu erhalten. Hat man einmal durch eine gröbere Berechnung einen nahen Werth von ϱ' gefunden; so berechnet man für zwey wenig unter sich und von dem vorhergehenden verschiedene Werthe von ϱ' die Zwischenzeit genauer, und sucht sodenn den genauen Werth von ϱ' und die ihm entsprechende Werthe von r', r''', k'' durch Interpolation. Aus ϱ' findet sich $\varrho''' = M\varrho'$.

Wenn in dem Ausdruck von M (§. 207. n. 1.) die Coefficienten von t'' und t' im Zähler und Nenner zugleich verschwinden, oder zugleich sehr klein werden; so kann im ersten Fall die Cometenbahn auf diesem Weg gar nicht, im zweyten nicht sicher gefunden werden. Die Projectionen der nach dem Cometen gezogenen Gesichtslinien auf die den mittleren Radius Vector der Erde senkrecht schneidende Ebene sind alsdenn genau oder nahe einander parallel, und das Verhältniß von $\varrho' : \varrho'''$ bleibt unbestimmt, oder wird nicht sicher gefunden. In diesem Fall muß man, wenn diese Methode beybehalten werden soll, eine andere mittlere Beobachtung wählen *).

§. 208. Hat man ϱ', ϱ''', r', r''' und k'' gefunden; so ergeben sich die Elemente der Bahn auf folgende Art. Es ist, wenn (Fig. 63.) die Sonne, die Erde und der Comet in S, T, P sind, unter der Voraussetzung der Construktion im 194sten §.

$$\begin{array}{l} SP : PR = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. } PSR \\ \underline{PR : RT = \text{Tg. } PTR : \text{Sin. tot.}} \\ \text{also } SP : RT = \text{Tg. } PTR : \text{Sin. } PSR, \end{array}$$

und, wenn man die heliocentrische Breiten des Cometen zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung $= \lambda'$ und λ''' setzt,

$$1.)\ \text{Sin. } \lambda' = \frac{\varrho' \text{Tg. } \beta'}{r'}$$

$$2.)\ \text{Sin. } \lambda''' = \frac{\varrho''' \text{Tg. } \beta'''}{r'''}$$

Ferner ist in dem Dreyeck ASa' (Fig. 71.)

$$Sa' : Aa' = \text{Sin. } SAa' : \text{Sin. } ASa'$$

oder

*) Olbers in Astr. Jahrb. für 18.9. pag. 1

oder $r' \text{Cos.}\, \lambda' : \rho' = \text{Sin.}\,(A'-\alpha') : \text{Sin.}\, ASa'$

Heißen nun die Unterschiede ASa', CSc' der heliocentrischen Längen des Cometen und der Erde zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung ε', ε'''; so hat man

$$3.)\ \text{Sin.}\, \varepsilon' = \frac{\rho' \,\text{Sin.}\,(A'-\alpha')}{r' \,\text{Cos.}\, \lambda'}$$

$$4.)\ \text{Sin.}\, \varepsilon''' = \frac{\rho''' \,\text{Sin.}\,(A'''-\alpha''')}{r''' \,\text{Cos.}\, \lambda'''},$$

wo die Winkel ε'. ε''' so zu bestimmen sind, daß in den Dreyecken ASa', CSc', deren Seiten man kennt, immer der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüberliegt. Addirt man diese Winkel zu den correspondirenden Längen der Erde, oder zieht sie davon ab, je nachdem ihre Sinus positiv oder negativ sind; so erhält man die heliocentrischen Längen C', C''' des Cometen für die erste und dritte Beobachtung. Die auf die Ekliptik reducirte Bewegung des Cometen wird nun direkt oder retrograd seyn, je nachdem C''' grösser oder kleiner ist als C', weil man hier weiß, daß der Comet in der Zwischenzeit nicht den Winkel $360^\circ - (C'''-C')$ kann um die Sonne beschrieben haben.

Aus den zwey gefundenen heliocentrischen Längen und Breiten erhält man nach §. 175. n. 3.

$$5.)\ \text{Tg.}\,(\tfrac{1}{2}(C'''+C') - ☊) = \frac{\text{Sin.}\,(\lambda'''+\lambda')}{\text{Sin.}\,(\lambda'''-\lambda')}\ \text{Tg.}\,\tfrac{1}{2}(C'''-C'),$$

woraus sich die Länge des aufsteigenden Knotens ergiebt. Man ziehe von dem Winkel $\frac{1}{2}(C'''+C') - ☊$ den Winkel $\frac{1}{2}(C'''-C')$ ab; so erhält man $C'-☊$, und sodenn die Neigung i der Cometenbahn mittelst des Ausdrucks.

$$6.)\ \text{Tg.}\, i = \frac{\text{Tg.}\,\lambda'}{\text{Sin.}\,(C'-☊)}\ (\S.\ 175.\ \text{n. } 1.)$$

Der Winkel $\frac{1}{2}(C'''+C') - ☊$ muß so bestimmt werden, daß die nach n. 6. gefundene Tangente der Neigung positiv oder negativ wird, je nachdem die auf die Ekliptik reducirte Bewegung des Cometen direkt oder retrograd ist, und man hat nicht nöthig die direkte und retrograde Bewegung zu unterscheiden, wenn man im letzteren Fall die Neigung nicht wie gewöhnlich durch den spitzen Winkel, sondern durch seinen Nebenwinkel mißt, so daß die Neigung der Bahn grösser als 90° wird *).

Nun ist unter der Voraussetzung der §. 174. und 177. gezeigten Construktion

$$\begin{aligned} Sp : Sq &= \text{Sin. tot.} : \text{Cos.}\, pSq \\ Sq : Sr &= \text{Cos.}\, qSr : \text{Sin. tot.} \end{aligned}$$

folglich $\left.\begin{array}{l} Sp : Sr \\ \text{oder Sin. tot. Cos.}\, pSr \end{array}\right\} = \text{Cos.}\, qSr : \text{Cos.}\, pSq.$

*) Gauſs Theor. mot. corp. coel. §. 50. 110.

Daher ist, wenn die heliocentrische Entfernungen des Cometen von dem aufsteigenden Knoten in der Ebene seiner Bahn, oder die Argumente der Breite, u' und u''' heißen,

$$7.)\ \text{Cos.}\ u' = \text{Cos.}\ \lambda'\ \text{Cos.}\ (C' - ☊)$$
$$\text{Cos.}\ u''' = \text{Cos.}\ \lambda'''\ \text{Cos.}\ (C''' - ☊)$$

oder auch $8.)\ \text{Tg.}\ u' = \frac{\text{Tg.}\ (C' - ☊)}{\text{Cos.}\ i}$ (§. 190. n. 1.)

$$\text{Tg.}\ u''' = \frac{\text{Tg.}\ (C''' - ☊)}{\text{Cos.}\ i},$$

wo die Winkel u', u''' im ersten oder zweyten Halbzirkel zu nehmen sind, je nachdem die correspondirende Breiten nördlich oder südlich sind.

Man kennt also jetzt den Winkel $u''' - u'$ oder w'', welchen der erste Radius Vector des Cometen mit dem dritten macht. Die dem ersten Radius Vector r' entsprechende wahre Anomalie heiße v, und der Abstand des Periheliums des Cometen von der Sonne heiße D. Da (Fig. 66.) $FM = MQ = GP = 2AF - FM$ Cos. AFM; so ist $r'(1 + \text{Cos.}\ v) = 2D$

oder $9.)\ r'\,\overline{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} v}^2 = D.$

Eben so ist $10.)\ r'''\,\overline{\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}(v + w'')}^2 = D$, und daher

$\text{Cos.}\ \tfrac{1}{2} v : \text{Cos.}\ \tfrac{1}{2}(v + w'') = \pm \sqrt{\frac{r'''}{r'}} : 1$, wo das untere Zeichen für den Fall gilt, in welchem w'' größer ist, als 180°. In Beziehung auf das obere Zeichen, ist, wenn man

$11.)\ \text{Tang.}\ x = \sqrt{\frac{r'''}{r'}}$ macht,

$\text{Cotg.}\ \tfrac{1}{4} w'' : \text{Tg.}\ (\tfrac{1}{4} w'' + \tfrac{1}{2} v) = \text{Sin. tot.} : \text{Tg.}\ (x - 45^\circ)$, und daher

$$12.)\ \text{Tg.}\ (\tfrac{1}{4} w'' + \tfrac{1}{2} v) = \text{Cotang.}\ \tfrac{1}{4} w''\ \text{Tg.}\ (x - 45^\circ)$$

Wenn $w'' > 180^\circ$ ist; so hat man

$$\text{Tg.}\ (\tfrac{1}{4} w'' + \tfrac{1}{2} v) = -\ \text{Cotg.}\ \tfrac{1}{4} w''\ \text{Tg.}\ (x + 45^\circ)$$

Mittelst der wahren Anomalie v erhält man die Länge des Periheliums $= ☊ + u' - v$. Endlich ist (Fig. 66.) $AP = GP - GA = MQ - GA = FM - AF = \frac{D}{\overline{\text{Cos.}\ \frac{1}{2} u}^2} - D$ (n. 9.) $= D\,\overline{\text{Tg.}\ \tfrac{1}{2} v}^2$, und $\overline{PM}^2 = 4D \times AP = 4D^2\,\overline{\text{Tg.}\ \tfrac{1}{2} v}^2$; mithin $PM = 2D\ \text{Tg.}\ \tfrac{1}{2} v$. Da nun der Sector $AFM = \tfrac{2}{3} AP \times PM + \tfrac{1}{2} FP \times PM = (\tfrac{2}{3} AP + \tfrac{1}{2} AF - \tfrac{1}{2} AP)\, PM = (\tfrac{1}{6} AP + \tfrac{1}{2} AF)\, PM$; so wird, wenn man obige Werthe von AP und PM substituirt, der Sector $AFM = D^2 (\tfrac{1}{3}\,\overline{\text{Tg.}\ \tfrac{1}{2} v}^2 + 1)\ \text{Tg.}\ \tfrac{1}{2} v$

$$\frac{\text{Sector } AFM}{\sqrt{\text{halb. Param.}}} = \frac{D^{\frac{3}{2}}(\text{Tg.} \tfrac{1}{2} v^3 + 3\,\text{Tg.} \tfrac{1}{2} v)}{3\sqrt{2}}.$$

Folglich ist, wenn man die constante Zahl $\frac{T}{3\pi\sqrt{2}} \sqrt{1+\mu}$ $= K$, und die Zeit, in welcher die wahre Anomalie v beschrieben wird, gleich t setzt,

13.) $t = D^{\frac{3}{2}} K (\text{Tg.} \tfrac{1}{2} v^3 + 3\,\text{Tg.} \tfrac{1}{2} v)$

Hieraus ergiebt sich also die zwischen der ersten Beobachtung und dem Durchgang des Cometen durch das Perihelium verflossene Zeit. Aus der Vergleichung der Länge des Periheliums mit der heliocentrischen Länge des Cometen zur Zeit der ersten Beobachtung findet sich aber, ob der Comet schon durch das Perihelium gegangen ist, oder sich demselben nähert; folglich ist die Zeit des Periheliums gegeben, und die ganze Bahn bestimmt.

§. 209. Anwendung dieser Methode auf den im Jahr 1807 erschienenen Cometen.

mittl. Zeit zu Tübingen.			beob. geoc. Länge des Cometen.			beob. geoc. Br.		
	U.	M.						
Oct. 6	7	27	224°	18′	15″	24°	36′	4″ nördlich.
15	6	55	231	47	39	34	27	26
26	6	34	242	8	12	44	44	20

$t' = 8{,}977778$ T.
$t'' = 10{,}985417$

Für diese drey Beobachtungen finden sich folgende, wegen der Aberration um 20″,25 vergrößerte (§. 195.) Längen der Sonne, und Logarithmen von R:

$A' = 192^\circ\ 34'\ 48''$	Lg. $R' = 9{,}9995149$	$R'^2 = 0{,}997768$
$A'' = 201\ \ 28\ \ 9$	Lg. $R'' = 9{,}9983754$	
$A''' = 212\ \ 24\ \ 15$	Lg. $R''' = 9{,}9970808$	$R'''^2 = 0{,}986646$

Hienach Lg. Tg. $\beta'' = 9{,}8364394$
Lg Tg. $\beta' = 9{,}6607319$

$A''-\alpha' = 337^\circ\ 9'\ 54''$ Lg. Sin. $= 9{,}5889197$ neg.
$A'-\alpha'' = 329\ \ 40\ \ 30$ Lg. Sin. $= 9{,}7032091$ neg.

$9{,}4253591$; $-\ 0{,}2662925$
$9{,}3639410$; $-\ 0{,}2311751$
$-\ 0{,}0351174$

Lg. Tg. $\beta''' = 9{,}9960416$
Lg. Tg. $\beta'' = 9{,}8364394$
Lg. Sin. $(A''-\alpha'') = 9{,}7032091$ neg.
$A''-\alpha''' = 319\ \ 19\ \ 57$ Lg. Sin. $= 9{,}8140265$ neg.

$$9{,}6992507\,;\ -\ 0{,}5003233$$
$$9{,}6504659\,;\ -\ \underline{0{,}4471631}$$
$$-\ 0{,}0531602$$

$$M = \frac{351174}{531602} \cdot \frac{t''}{t'}\,;\ \text{Lg.}\, M = 9{,}9075834.$$

Ferner erhält man nach §. 207. n. 2, 3, 4. folgende drey Gleichungen:

1.) $r'^2 = 0{,}997768 - 1{,}699280\ \varrho' + 1{,}209635\ \varrho'^2$
2.) $r'''^2 = 0{,}986646 - 1{,}394406\ \varrho' + 1{,}294960\ \varrho'^2$
3.) $k''^2 = 0{,}117629 - 0{,}102241\ \varrho' + 0{,}232147\ \varrho'^2$

Setzt man nun $\varrho' = 1$; so werden $r'^2 = 0{,}5081$; $r' = 0{,}71$
$r'''^2 = 0{,}8872$; $r''' = 0{,}94$
$k''^2 = 0{,}2475$; $k'' = 0{,}50$,

und daher nach §. 207. n. 5. $\left.\frac{t'+t''}{T}\right\} = 18{,}596$. Es ist aber $T = 19{,}96319$; folglich giebt diese Voraussetzung die ganze Zwischenzeit um 1,367 Tage zu klein. Man setze $\varrho' = 1{,}1$; so werden $r' = 0{,}77$; $r''' = 1{,}01$; $k'' = 0{,}53$ und $T = 20{,}507$, mithin um 0,544 Tage zu gros. Folglich fällt ϱ' zwischen 1 und 1,1. Da nun der Unterschied der unter diesen Voraussetzungen gefundenen Zeiten = 1,91 T. und der Unterschied der zwey Werthe von ϱ' gleich 0,1 ist; so wird, wenn man die Unterschiede der Zeiten den Unterschieden der Werthe von ϱ' proportional setzt, sich verhalten 1,9 : 0,544 = 0,1 zu der Zahl, welche von 1,1 hinweggenommen werden muß, um einen genaueren Werth von ϱ' zu erhalten. Man wird diese Verminderung = 0,03 finden, und ϱ' wird daher nicht sehr von 1,1 - 0,03 oder von 1,07 verschieden seyn. Setzt man hienach $\varrho' = 1{,}07$; so erhält man aus obigen Gleichungen, wenn man jetzt die Rechnung genauer führt,

$$r' = 0{,}751299\,;\quad k'' = 0{,}523465$$
$$r''' = \underline{0{,}988550}$$
$$r' + r''' = \underline{1{,}737849}$$
$$\frac{r'+r'''}{2} = 0{,}869924.5$$
$$\tfrac{1}{2}k'' = \underline{0{,}261732.5}$$

Summe $s = 1{,}131657$; Lg. $s = 0{,}0537148$; Lg. $d = 9{,}7840407$
Differenz $d = 0{,}608192$; $\frac{1}{2}$Lg. $s = 0{,}0268574$; $\frac{1}{2}$Lg. $d = 9{,}8920203.5$
Lg. $K = \underline{1{,}4378123}$; Lg. $K = \underline{1{,}4378123}$

$$\underline{1{,}5183845} \qquad \underline{1{,}1138733.5}$$
$$32{,}99017 \qquad 12{,}99790$$
$$\underline{12{,}99790}$$

berechnete Zeit $T = 19{,}99227$ T.
beobachtete Zeit $= \underline{19{,}96319}$
Unterschied $= 0{,}02908$

Der angenommene Werth 1,07 von ϱ' ist also noch um etwas zu groß. Man setze daher $\varrho' = 1{,}065$; so werden $r' = 0{,}748350$; $r''' = 0{,}985079$; $k'' = 0{,}521583$, und $T = 19{,}88358$, um 0,07961 T. zu klein.

Folglich fällt ϱ' zwischen 1,07 und 1,065. Der Unterschied der Werthe von ϱ' ist 0,05, und der Unterschied der correspondirenden Zeiten ist 0,10869 T. Daher wird sich nahe verhalten

$$\left.\begin{matrix} 0{,}10869 : 0{,}02908 \\ 10869 : 2908 \end{matrix}\right\} = 0{,}005$$

zu der Zahl, um welche man den Werth 1,07 von ϱ' noch vermindern muß. Man findet 0,001338, und daher ist der verbesserte Werth von $\varrho' = 1{,}068662$. Nun werden auch die Veränderungen von ϱ' nahe den correspondirenden Veränderungen von r', r''', k'' proportional seyn; mithin wird sich nahe verhalten 0,005 : 0,001338 oder 1 : 0,2676, wie die Unterschiede 0,002949; 0,003471; 0,001882 der unter den zwey Voraussetzungen gefundenen Werthe von r', r''', k'', zu den Verbesserungen derjenigen Werthe derselben, welche man mit $\varrho' = 1{,}07$ gefunden hat, und um welche die letztern müssen vermindert werden. Multiplicirt man jene Unterschiede mit 0,2676; so erhält man die Verbesserungen 0,000789; 0,000929; 0,000504, und die verbesserten Werthe $r' = 0{,}750510$; $r''' = 0{,}987621$; $k'' = 0{,}522961$.

Zur Versicherung der Rechnung kann man mit dem verbesserten Werth von ϱ' die Werthe von r', r''', k'' unmittelbar aus den Gleichungen n. 1, 2, 3. suchen, und mittelst dieser die Zeit T berechnen. Man wird finden

Lg. $r' = 9{,}8753552$; $r' = 0{,}750508$
Lg. $r''' = 9{,}7945889$; $r''' = 0{,}987618$
Lg. $k'' = 9{,}7184700$; $k'' = 0{,}522962$, nahe wie durch die Interpolation. T findet sich $= 19{,}96316$, nur um 0,00003 T. oder 2,6 Sek. zu klein.

§. 210. Berechnung der Elemente der Bahn nach §. 208.

		Lg. M	$= 9{,}9075834$
			$0{,}0288403$
Lg. ϱ'	$= 0{,}0288403$	Lg. ϱ'''	$= 9{,}9364237$
Lg. Tg. β'	$= 9{,}6607319$	Lg. Tg. β'''	$= 9{,}9960416$
	$9{,}6895722$		$9{,}9324653$
Lg. r'	$= 9{,}8753552$	Lg. r'''	$= 9{,}9945889$
Lg. Sin. λ'	$= 9{,}8142170$	Lg. Sin. λ'''	$= 9{,}9378764$
λ'	$= 40^\circ\, 41',21''$	λ'''	$= 60^\circ\, 4'\, 45''$
Lg. ϱ'	$= 0{,}0288403$	Lg. ϱ'''	$= 9{,}9364237$
Lg. Sin. $(A'-\alpha')$	$= 9{,}7208458$ neg.	Lg. Sin. $(A'''-\alpha''')$	$= 9{,}6954390$ neg.
	$9{,}7496861$		$9{,}6318627$

$\text{Lg. } r' = 9{,}8753552$
$\text{Lg. Cos. } \lambda' = 9{,}8798168$
$9{,}7551720$
$\text{Lg. Sin. } \iota' = 9{,}9945141 \text{ neg.}$
$\iota' = -\ 80^\circ\ 54'\ 44''$
$A' + 180 = 372\ 34\ 48;$
$C' = 291\ 40\ 4;$
$\lambda''' = 60\ 4\ 45$
$\lambda' = 40\ 41\ 21$
$\lambda''' + \lambda' = 100\ 46\ 6$
$\lambda''' - \lambda' = 19\ 23\ 24$

$\text{Lg. Sin.} (\lambda''' + \lambda') = 9{,}9922842$
$\text{Lg. Tg.} \frac{C''' - C'}{2} = 9{,}5648073{\cdot}3$
$9{,}5570915{\cdot}3$
$\text{Lg. Sin.} (\lambda''' - \lambda') = 9{,}5211335{\cdot}2$
$0{,}0359580{\cdot}1;$

$\text{Lg. Tg. } \lambda' = 9{,}9344009$
$\text{Lg. Sin.} (C' - \Omega) = 9{,}6601567$
$\text{Lg. Tg. } i = 0{,}2742442;$
$\text{Lg. Tg.} (C' - \Omega) = 9{,}7110906$
$\text{Lg. Tg.} (C''' - \Omega) = 0{,}3833834$
$\text{Lg. Cos. } i = 9{,}6716727$
$\text{Lg. Tg. } u' = 0{,}0394179$
$\text{Lg. Tg. } u''' = 0{,}7117107$
$\text{Lg. } r''' = 9{,}9945889{\cdot}5$
$\text{Lg. } r' = 9{,}8753552$
$0{,}1192337{\cdot}5$
$\text{Lg. Tg. } x = 0{,}0596168{\cdot}7;$
$\text{Lg. Tg.} (x - 45^\circ) = 8{,}8358730$
$\text{Lg. Cotg. } \tfrac{1}{4} w'' = 0{,}8603524$
$\text{Lg. Tg.} (\tfrac{1}{4} w'' + \tfrac{1}{2} v) = 9{,}6962254;$
$2 \text{ Lg. Cos. } \tfrac{1}{2} v = 9{,}9535701$
$\text{Lg. } r' = 9{,}8753652$
$\text{Lg. } D = 9{,}8289253$

$\text{Lg. } r''' = 9{,}9945889$
$\text{Lg. Cos. } \lambda''' = 9{,}6979290$
$9{,}6925179$
$\text{Lg. Sin. } \iota''' = 9{,}9393448 \text{ neg.}$
$\iota''' = -\ 60^\circ\ 25'\ 5''$
$A''' + 180 = 392\ 24\ 15$
$C''' = 331\ 59\ 10$
$291\ 40\ 4$
$623\ 39\ 14$
$40\ 19\ 6$
$\frac{C''' + C'}{2} = 311\ 49\ 37$
$\frac{C''' - C'}{2} = 20\ 9\ 33$

$\frac{C''' + C'}{2} - \Omega = 47\ 22\ 9$
$\Omega = 264\ 27\ 28$
$C' - \Omega = 27\ 12\ 36$
$i = 61\ 59\ 44$
$C''' - \Omega = 67\ 31\ 42$

$u' = 47\ 35\ 48$
$u''' = 79\ 0\ 32$
$w'' = 31\ 24\ 44$
$\tfrac{1}{4} w'' = 7\ 51\ 11$
$x = 48\ 55\ 13{,}01$
$x - 45 = 3\ 55\ 13{,}01$
$\tfrac{1}{4} w'' + \tfrac{1}{2} v = 26\ 25\ 14$
$\tfrac{1}{2} v = 18\ 34\ 3$
$v = 37\ 8\ 6$
$\Omega + u' = 312\ 3\ 16$
Länge des Perih. $274\ 55\ 10$
Abst. $= 0{,}674412$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,\text{Lg.}\,D &= 9{,}9144626\\
\text{Lg.}\,K &= 1{,}4378123\\
&\quad \underline{1{,}1812002}\\
\text{Lg. Tg.}\,\tfrac{1}{2}\,v &= 9{,}5262175\\
3\,\text{Lg. Tg.}\,\tfrac{1}{2}\,v &= 8{,}5786525\\
\text{Lg.}\,3 &= 0{,}4771213\\
&\quad 1{,}1845390; \qquad 15{,}29463\\
&\quad 9{,}7598527; \qquad \underline{0{,}57524}\\
t &= 15{,}86987
\end{aligned}
$$

Zeit der ersten Beob. Oct. 6. od. Sept. 36,31042

Zeit des Perihellums 20,44055

oder 1807. Sept. 20. Ab. um 10 U. 34′ 24″ mittl. Zeit zu Tübingen.

§. 211. Die gefundenen Elemente kann man nun dadurch prüfen, daß man für die drey Beobachtungszeiten die geocentrische Länge und Breite des Cometen berechnet, und diese mit den beobachteten vergleicht. Dabey wird es aber hauptsächlich auf die zweyte Beobachtung ankommen. Denn die Uebereinstimmung der zwey übrigen mit den Beobachtungen zeigt nur, daß in den Berechnungen des 210. §. kein Fehler begangen worden ist, die mittlere Beobachtung hingegen wird nur alsdenn mit den Berechnungen übereinstimmen können, wenn die Chorden der in der ganzen Zwischenzeit der Beobachtungen von der Erde und dem Cometen beschriebenen Bogen von den mittleren Radiis vectoribus sehr nahe im Verhältniß der Zeiten geschnitten werden.

Um nun für eine gegebene Zeit den heliocentrischen Ort eines Cometen zu finden, suche man zuerst die Zwischenzeit t zwischen dem gegebenen Zeitpunkt und der Zeit des Periheliums. Mittelst dieser erhält man aus der cubischen Gleichung §. 208. n. 13., welche nur eine mögliche Wurzel hat, die wahre Anomalie v auf folgende Art. Man bestimme die Hülfswinkel m, n so, daß

$$\text{Tg.}\, m = \frac{2KD^{\frac{3}{2}}}{t}; \ \text{Tang.}\, n = \sqrt[3]{\text{Tg.}\,\tfrac{1}{2} m}; \text{ so ist}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2} v = 2\ \text{Cotg.}\ 2\,n.$$

Es ist z. B. die Zeit der zweyten Beobachtung §. 209. Oct. 15,28819 oder Sept. 45,28819

Zeit des Perih. 20,44055 Sept.

$$
\begin{aligned}
t &= 24{,}84764\ \text{T.}\\
\text{Lg.}\,2 &= 0{,}3010300\\
\text{Lg.}\,K &= 1{,}4378123\\
\text{Lg.}\,D^{\frac{3}{2}} &= 9{,}7433879\\
&\quad 1{,}4822302
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
\text{Lg. } t & = \underline{1,3952851} & & \\
\text{Lg. Tg. } m & = \underline{0,0869451}; & m & = 50^\circ\ 41'\ 50'',4 \\
\text{Lg. Tg. } \tfrac{1}{2} m & = 9,6755377; & \tfrac{1}{2} m & = 25\ \ 20\ \ 55,2 \\
\text{Lg. Tg. } n & = \underline{9,8918459}; & n & = 37\ \ 56\ \ 17,95 \\
\text{Lg. Cotg. } 2n & = 9,4007385; & 2n & = \underline{75\ \ 52\ \ 35,9} \\
\text{Lg. } 2 & = \underline{0,3010300} & & \\
\text{Lg. Tg. } \tfrac{1}{2} v & = 9,7017685; & \tfrac{1}{2} v & = 26\ \ 42\ \ 46,9
\end{array}
$$

wahre Anomalie für die zweyte Beobachtung $\Big\} = 53\ \ 25\ \ 33,8$

Die fernere Berechnung des heliocentrischen Orts des Cometen geschieht, wie in dem 190. §. bey den Planeten gezeigt worden ist

Es ist die Länge des Perih.	=	274 55 10
wahre Anomalie	=	53 25 34
Länge in der Bahn	=	328 20 44
Länge ☊	=	264 27 28
Argument der Breite	=	63 53 16

Hieraus findet sich die heliocentrische Länge des Cometen $= 308^\circ\ 13'\ 37''$, und seine heliocentrische Breite $= 52^\circ\ 26'\ 51''$.

Den Logarithmen des Radius Vector erhält man mittelst der Gleichung n. 9. §. 208. $= 9,9269605$, und alsdenn nach den §. 195. gegebenen Regeln

die geocentrische Länge $= 231^\circ\ 39'\ 45''$; geoc. Breite $= 34^\circ\ 20'\ 26''$
Aber nach den Beob. $\alpha'' = 231\ \ 47\ \ 39$; $\beta'' = 34\ \ 27\ \ 26$

Unterschiede 7 44 7 0.

Diese beträchtliche Unterschiede rühren daher, daß die Coefficienten von t' und t'' in dem Ausdruck von M (§. 207. n. 1.) ziemlich klein sind, wo eine geringe Abweichung des Verhältnisses der Segmente der Chorden von dem Verhältniß der Zeiten einen beträchtlichen Einfluß auf die Elemente der Bahn hat.

§. 212. Zur bequemeren Auflösung der Aufgaben, aus der gegebenen Zeit die wahre Anomalie eines Cometen, und aus der wahren Anomalie die Zeit zu finden, in welcher sie der Comet beschrieben hat, hat man Tafeln berechnet. Die bequemste ist die Barkerische *). Diese enthält für die wahren Anomalien von 5 zu 5 Minuten die Zahlen $N = 25\,(\overline{\text{Tg.}\tfrac{1}{2}v}^3 + 3\,\text{Tg.}\tfrac{1}{2}v)$ bis zu einer Anomalie von 45°, und von da an die Logarithmen derselben. Diese Zahlen N drücken also den Inhalt der parabolischen Sectoren einer Parabel aus, für welche der Abstand des Periheliums $= 1$ ist, wenn man den Inhalt des einer Anomalie von 90 Gr. entsprechenden Sectors $= 100$ setzt, und

*) Sie ist Olbers Abhandlung angehängt.

heißen die **mittlere Bewegung.** Vermöge der Gleichung n. 13 wird für einen Cometen, dessen Abstand von der Sonne im Perihelium $= D$ ist, seyn $t = \frac{KD^{\frac{3}{2}}N}{25}$, und $\frac{25}{K} \cdot \frac{t}{D^{\frac{3}{2}}} = N$.

Die constante Zahl $\frac{25}{K}$ heiße B; so ist aus §. 204. n. 11. der Lg. $B = 9{,}9601276749$. Die Zahl $\frac{B}{D^{\frac{3}{2}}}$ heißt die **mittlere tägliche Bewegung** des Cometen, deren Logarithme gefunden wird, wenn man von dem constanten Lg. B die Summe des Logarithmen des kleinsten Abstands D und der Hälfte eben dieses Logarithmen abzieht. Setzt man die mittlere tägliche Bewegung $= B'$; so ist $B't = N$. Ist nun v gegeben; so findet man mittelst der Tafel den correspondirenden Werth von N oder Lg. N, und $t = \frac{N}{B'}$. Ist aber t gegeben, so hat man $N = B't$, und findet mittelst der Tafel die zu der gefundenen Zahl N oder ihrem Logarithmen gehörige wahre Anomalie v.

Es ist z. B. für die §. 210. gefundene Elemente

$$\begin{array}{rcl}
\text{Lg. } D & = & 9{,}8289253 \\
\frac{1}{2}\text{ Lg. } D & = & \underline{9{,}9144626} \\
 & & 9{,}7433879 \\
\text{Lg. } B & = & \underline{9{,}9601277} \\
\text{Lg. } B' & = & 0{,}2167398.
\end{array}$$

Sey $t = 24{,}84764$ Tagen; so ist

$$\begin{array}{rcl}
\text{Lg. } t & = & \underline{1{,}3952852} \\
\text{Lg. } N & = & 1{,}6120250,
\end{array}$$

hiezu gehört in der Tafel $v = 53^\circ\ 25'\ 33''{,}8$, wie man in dem 211ten §. gefunden hat.

§. 213. Wenn man die Cometenbahn schon beyläufig kennt; so kann man leicht untersuchen, wie weit die Voraussetzung richtig ist, daß so wohl die Chorde der Cometenbahn als die Chorde der Erdbahn von den mittleren Radiis vectoribus im Verhältniß der Zwischenzeiten geschnitten werde, und also eben dadurch die Genauigkeit der Elemente prüfen. In Beziehung auf die Erde hätte man wegen der bekannten Elemente ihrer Bahn die Untersuchung gleich anfangs anstellen können. Es ist nemlich (Fig. 71.)

$$\begin{aligned} AD : DC = EB : BF &= AS \text{ Sin. } ASB : CS \text{ Sin. } BSC \\ &= R' \text{ Sin.} (A'' - A') : R''' \text{Sin.} (A''' - A''). \end{aligned}$$

In Beziehung auf die Cometenbahn findet sich eben so, wenn w, w' die in den Zwischenzeiten t', t'' von dem Cometen um die Sonne beschriebene Winkel, und r', r''' wie vorhin die Radii Vectores desselben für die erste und dritte Beobachtung sind, das Verhältniß der Segmente der Chorde oder ihrer Projectionen

$$\left.\begin{matrix} ad : dc \\ a'd' \quad d'c' \end{matrix}\right\} = r'\text{Sin.}\, w : r'''\text{Sin.}\, w'.$$

Um dieses Verhältniß berechnen zu können, muß man die wahre Anomalie des Cometen für die mittlere Beobachtung nach den beyläufig bekannten Elementen berechnen (§. 211. oder 212.). Hieraus ergiebt sich der Winkel w gleich der Differenz oder Summe der wahren Anomalien zur Zeit der zweyten und ersten Beobachtung, je nachdem die zwey Cometenörter auf einerley, oder auf verschiedenen Seiten des Periheliums liegen, und $w' = w'' - w$, wo der w'' schon gefundene Winkel ist, welchen der Comet zwischen der ersten und dritten Beobachtung um die Sonne beschrieben hat.

Nun findet man für die §. 209. angeführte Beobachtungen

$$\frac{DC}{AD} = \frac{R'''\text{Sin.}\,(A'''-A'')}{R'\text{Sin.}\,(A''-A')} = 1{,}220753$$

$$\text{Aber } \frac{t''}{t'} = 1{,}223623$$

$$\text{Unterschied } = 0{,}002870$$

Für den Cometen hat man in dem 211. §. gefunden die wahre Anomalie zur Zeit der zweyten Beob. $= 53^\circ\ 25'\ 34''$

— — — ersten — $= 37\ \ 8\ \ 6$ (§. 210.)

also ist $w = 16\ \ 17\ \ 28$

da nun $w'' = 31\ \ 24\ \ 44$ (§. 210.)

so ist $w' = 15\ \ 7\ \ 16.$

Mittelst dieser Winkel, und der §. 209. gefundenen Werthe von r' und r''' erhält man

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{dc}{ad} \\ \dfrac{d'c'}{a'd'} \end{matrix}\right\} = \frac{r'''\text{Sin.}\, w'}{r'\text{Sin.}\, w} = 1{,}223717$$

$$\frac{t''}{t'} = 1{,}223623$$

$$\text{Unterschied} = 0{,}000094$$

Demnach weicht das Verhältniß der Segmente der Chorde der Erdbahn in gegenwärtigem Fall beträchtlich von dem Verhältniß der Zeiten ab, bey dem Cometen hingegen ist die Abweichung sehr klein. Aus dem ersteren Unterschied ergiebt es sich schon, daß die gefundenen Elemente der Cometenbahn nicht genau seyn können. Da man aber jetzt die Verhältnisse der Segmente der Chorden sehr nahe kennt; so kann man nach der bequemen von Olbers gezeigten Methode *) die gefundenen Elemente leicht verbessern.

*) In der angeführten Abhandl. Abschn. IV. §. 54. u. f.

Es ist in Beziehung auf die 70. Figur, wenn man statt des Verhältnißes von $t'' : t'$ das Verhältniß der Segmente der Chorde der Cometenbahn $= p'' : p'$ setzt,

$cE : aD = p''\text{Sin.}\, ADB \quad p'\text{Sin.}\, BEC$ (§. 205. n. 5.)

also $cE = \frac{p''}{p'} \frac{\text{Sin.}\, ADB}{\text{Sin.}\, BEC} aD$. Eben so ist, wenn das Verhältniß der Segmente der Chorde der Erdbahn dem Verhältniß von $P'' : P'$ gleich ist,

$$CE = \frac{P''}{P'} \frac{\text{Sin.}\, ADB}{\text{Sin.}\, BEC} AD$$

folglich $Cc = \left(\frac{P''}{P'} AD - \frac{p''}{p'} (AD - Aa)\right) \frac{\text{Sin.}\, ADB}{\text{Sin.}\, BEC}$,

$$= \left(\left(\frac{P''}{P'} - \frac{p''}{p'}\right) \frac{AD}{Aa} + \frac{p''}{p'}\right) Aa \frac{\text{Sin.}\, ADB}{\text{Sin.}\, BEC}.$$

Man setze $\frac{p''}{p'} = \frac{t''}{t'} + p$; $\frac{P''}{P'} = \frac{t''}{t'} + q$, $AD = f$; so ist

$f = \frac{AB\,\text{Sin.}\, ABD}{\text{Sin.}\, ADB} = \frac{AB\,\text{Sin.}\, b''}{\text{Sin.}\, (b''-b')}$, oder in Beziehung auf die 71ste Figur $= \frac{BE\,\text{Sin.}\, b''}{\text{Sin.}\, (b''-b')} = \frac{R'\text{Sin.}\, (A''-A')\,\text{Sin.}\, b''}{\text{Sin.}\, (b''-b')}$, und in Beziehung auf eben diese Figur

$$cF = \left(\frac{t''}{t'} + p + (q-p)\frac{f}{aE}\right) aE \frac{\text{Sin.}\, (b''-b')}{\text{Sin.}\, (b'''-b'')}$$

$$= \left(1 + p\frac{t'}{t''} + (q-p)\frac{t'}{t''} \cdot \frac{f}{aE}\right) \frac{t''\text{Sin.}\, (b''-b')}{t'\text{Sin.}\, (b'''-b'')} aE$$

Es ist aber $aE = \frac{Aa'\text{Sin.}\, (A''-\alpha')}{\text{Cos.}\, b'}$ (§. 207.)

$$\text{folglich } \frac{f}{aE} = \frac{R'\text{Sin}\, (A''-A')\ \text{Sin.}\, b''\,\text{Cos.}\, b'}{Aa'\text{Sin.}\, (A''-\alpha')\ \text{Sin.}\, (b''-b')}$$

$$= \frac{R'\text{Sin.}\, (A''-A')}{\varrho'\text{Sin.}\, (A''-\alpha')} \frac{\text{Tg.}\, b''}{\text{Tg.}\, b''-\text{Tg.}\, b'}$$

$$= \frac{R'\text{Sin.}\, (A''-A')}{\varrho'\text{Sin.}\, (A''-\alpha')} \times \frac{\text{Tg.}\, \beta''\,\text{Sin.}\, (A''-\alpha')}{\text{Tg.}\, \beta''\,\text{Sin.}\, (A''-\alpha') - \text{Tg.}\, \beta'\,\text{Sin.}\, (A''-\alpha'')}$$

$$= \frac{R'}{\varrho'} \cdot \frac{\text{Tg.}\, \beta''\,\text{Sin.}\, (A''-A')}{\text{Tg.}\, \beta''\,\text{Sin.}\, (A''-\alpha') - \text{Tg.}\, \beta'\,\text{Sin.}\, (A''-\alpha'')}.$$

Man berechne also

1.) $p = \frac{r'''\text{Sin.}\, w'}{r'\text{Sin.}\, w} - \frac{t''}{t'}$

2.) $q = \frac{R''\text{Sin.}\, (A'''-A'')}{R'\text{Sin.}\, (A''-A')} - \frac{t''}{t'}$

3.) $g = \frac{R'\mathrm{Sin.}(A''-A')(q-p)\,\mathrm{Tg.}\,\beta.''t'}{(\mathrm{Tg.}\beta''\mathrm{Sin.}(A''-\alpha')-\mathrm{Tg.}\beta\,\mathrm{Sin.}(A''-\alpha''))t''}$, wo der Nenner dem schon gefundenen Zähler in dem Ausdruck von M (§. 207. n. 1.) gleich ist; so ist

$$cF = \left(1 + \frac{t'}{t''}p + \frac{g}{\varrho'}\right)\frac{t''\mathrm{Sin.}(b''-b')}{t\,\mathrm{Sin.}(b'''-b'')}\,aE, \text{ und daher}$$

$$4.)\ \varrho''' = \left(1 + \frac{t'}{t''}p + \frac{g}{\varrho'}\right) M\varrho'$$

Nun kann aber der vorhin gefundene genäherte Werth von ϱ', welcher mit (ϱ) bezeichnet werde, nur sehr wenig von seinem wahren Werth verschieden seyn, und daher wird, weil $q-p$, mithin auch g sehr klein sind (den Fall ausgenommen, wo der Nenner in dem Ausdruck von g sehr klein wäre, und, wie schon oben bemerkt wurde, schon die erste Approximation unsicher würde), ohne merklichen Fehler seyn

$$5.)\ \varrho''' = \left(1 + \frac{t'}{t''}p + \frac{g}{(\varrho)}\right) M\varrho'.$$

Die Gleichung n. 2. §. 207. wird also unverändert bleiben, und um die Gleichungen n. 3. und 4. eben dieses §. zu verbessern, wird man nur diejenigen Coefficienten, welche M und M^2 enthalten, mit $1 + \frac{t'}{t''}p + \frac{g}{(\varrho)}$ und mit dem Quadrat dieser Zahl beziehungsweise zu multipliciren haben, welches sehr leicht geschehen kann, da man aus der vorhergehenden Rechnung die Logarithmen dieser Coefficienten hat.

Nach §. 213. ist $p = 0{,}000094$
$q = -\ 0{,}002870$

$$
\begin{array}{rcll}
q-p & = & -\ 0{,}002964.\ \mathrm{Lg.} = & 7{,}4718782 \\
 & & \mathrm{Lg.}\,R'\mathrm{Sin.}(A''-A') = & 9{,}1885097\ (\S.\ 213.) \\
 & & \mathrm{Lg.\ Tg.}\,\beta'' = & 9{,}8364394 \\
 & & \mathrm{Lg.}\ t' = & 0{,}9531689 \\
\hline
 & & & 7{,}4499962 \\
 & & \mathrm{Lg.}\ 0{,}0351175 = & 8{,}5455236\ \text{neg.}\ (\S.\ 209.) \\
 & & \mathrm{Lg.}\ t'' = & 1{,}0408165 \\
 & & \mathrm{Lg.}\ (\varrho) = & 0{,}0288403 \\
\hline
 & & & 9{,}6151804 \\
\hline
 & & & 7{,}8348158;\ \frac{g}{(\varrho)} = +0{,}0068362 \\
 & & & \frac{t'}{t''}p = 0{,}0000768 \\
\hline
 & & & \phantom{7{,}8348158;\ \frac{g}{(\varrho)} = +}0{,}0069130
\end{array}
$$

$\varrho''' = (1{,}006913)\,M\varrho'$; Lg. $1{,}006913 = 0{,}0029919$; demnach darf man, um die verbesserten Coefficienten in den Gleichungen für r''' und k'' zu erhalten, zu den Logarithmen der Coefficienten welche M enthalten, nur 0,0029919, und zu denjenigen, welche M^2 enthalten, 0,0059838 addiren, und die den so verbesserten Logarithmen entsprechende Zahlen aufsuchen. Die fernere Berechnung geschieht sodenn nach §. 209. und 210.

Will man mit **Lambert** voraussetzen, daß allein die Chorde des von dem Cometen in der Zwischenzeit der ersten und dritten Beobachtung beschriebenen Bogens von dem mittleren Radius Vector in Verhältniß der Zeiten geschnitten werde; so setze man in den Gleichungen n. 3. und 4. die Zahl $p = o$. Es sey g' der Werth von g unter dieser Voraussetzung; so wird man haben

$$\varrho''' = \left(1 + \frac{g'}{\varrho'}\right) M\varrho' = M\varrho' + Mg'.$$

Multiplicirt man nun die Coefficienten der Gleichungen n. 3. und 4. des 207. §. welche M enthalten, mit $1 + \frac{g'}{\varrho'}$, und diejenige, welche das Quadrat von M enthalten, mit dem Quadrat von $1 + \frac{g'}{\varrho'}$; so wird man genau die in Formeln gebrachte lambertische Construktion haben. Die Gleichungen n. 3. und 4. werden ihre vorige Form beybehalten, und die fernere Berechnung der Cometenbahn wird von der oben gezeigten nicht verschieden seyn. Eben dieses ergiebt sich auch aus der Betrachtung der 71sten Figur. Ist nemlich das Verhältniß von $ad : dc$ oder von t' zu t'' dem Verhältniß von $AD : DC$ oder von $EB : BF$ nicht gleich; so sey durch den gegebenen Punkt E die gerade Linie $EB'F'$ so gezogen, daß $EB' : B'F'$ wie $t' : t''$. Alsdenn wird sich nach §. 295. n. 6. verhalten $aE : cF' = t' \text{Sin.}(b''' - b'') : t'' \text{Sin.}(b'' - b') = 1 : N$ zur Abkürzung, und es wird $cF' = N.aE$, $cF = N.aE + FF'$ seyn. Und da die Verhältniße von $aE : Aa'$ und von $cF : Cc'$ gegeben sind: so wird man die nach der von **Olbers** gemachten Voraussetzung gefundene abgekürzte Distanz des Cometen von der Erde in der dritten Beobachtung um eine gegebene Größe zu vermehren oder zu vermindern haben, je nachdem F zwischen c und F oder auf die Verlängerung von cF fällt, um genau bey **Lamberts** Construktion zu bleiben. Indessen wird die Rechnung beträchtlich abgekürzt werden, wenn man bey der bequemen von **Olbers** gezeigten Auflösungsart bleibt, und die Verbesserungen wegen der Erde und des Cometen zugleich nach seiner Methode nachholt. Da es, wie schon oben bemerkt wurde, einige Fälle giebt, wo die bisher gezeigte Methode nicht sicher angewendet werden kann, oder auch die Berechnung sich noch mehr abkürzen läßt; so betrachtet diese Olbers besonders, worüber man seine Abhandlung nachsehen kann.

§. 214. Nachdem man die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn beyläufig gefunden hat; so kann die Cometenbahn nach der §. 203. im allgemeinen angezeigten Newtonschen Methode *). noch genauer bestimmt werden. Es werden dazu drey geocentrische Längen und Breiten des Cometen erfordert, um zugleich die elliptische Bahn bestimmen zu können, wenn sich die Beobachtungen nicht durch eine Parabel sollten darstellen lassen. Je weiter die Beobachtungen von einander entfernt sind, desto genauer werden die Elemente der Bahn bestimmt. Nur darf die Neigung der Bahn nicht sehr klein, und die Erde nicht zu nahe bey der Knotenlinie zur Zeit der drey Beobachtungen seyn. Es seyen ☊ und i die beyläufig bekannte Länge des Knotens und die Neigung der Bahn. Man berechne nach §. 197. für jede der drey Beobachtungen, und unter folgenden drey Hypothesen:

1ste Hyp.	2te Hyp.	3te Hyp.
☊	☊ $+ p$	☊
i	i	$i + q$,

wo p und q von 10, 15, 20 oder mehreren Minuten genommen werden dürfen,

die Argumente der Breite des Cometen u' u'' u'''

und die Radios Vectores r' r'' r''', und aus diesen die Chorden k', k'' der zwischen der ersten und zweyten, und der ersten und dritten Beobachtung von dem Cometen beschriebenen Bogen mittelst der bekannten trigonometrischen Gleichungen

$$k'^2 = (r''-r')^2 + 4r'r''\overline{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(u''-u')}^2$$

$$k''^2 = (r'''-r')^2 + 4r'r'''\overline{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(u'''-u')}^2$$

Oder: man suche die Hülfswinkel z, z' durch

$$\text{Cos.}\, z' = \frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(u''-u')\sqrt{r'r''}}{r''+r'}$$

$$\text{Cos.}\, z'' = \frac{2\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(u'''-u')\sqrt{r'r'''}}{r'''+r'};$$ so ist $k' = (r''+r')\,\text{Sin.}\, z'$

$k'' = (r'''+r')\ \text{Sin.}\, z''$.

Aus k', k'', r', r'', r''' erhält man unmittelbar nach §. 207. n. 5. die Zeiten, welche zwischen der ersten und zweyten, und der ersten und dritten Beobachtung hätten verstreichen sollen. Diese seyen:

*) Philosoph. nat. princ. mathem. L. III. prop. XLII. probl. XXII. Ihre Anwendung auf die Parabel wird durch das Lambertische Theorem (§. 204. n. 8.) sehr vereinfacht. Vergl. die Abhandl. von *Olbers* §. 68. u. f.

	1ste Hyp.	2te Hyp.	3te Hyp.
	τ'	$\tau'+l$	$\tau'+m$
und	τ''	$\tau''+o$	$\tau''+s$,

die beobachteten Zwischenzeiten aber seyen t' und t''. Die wahre Länge des Knotens sey ☊ $+x$, die wahre Neigung der Bahn $i+y$. Wenn nun x und y klein sind; so werden die Veränderungen der berechneten Zwischenzeiten nahe den correspondirenden Veränderungen von ☊ und i proportional seyn, und man wird setzen können $p:x=l$ zu der Veränderung des von der Verbesserung x abhängenden Theils der ersten Zwischenzeit, und $q:m=y$ zu dem von der Verbesserung y abhängenden Theil der Verbesserung der Zwischenzeit. Daher wird seyn müssen

$$\frac{lx}{p}+\frac{my}{q}+\tau'=t'$$

eben so $\frac{ox}{p}+\frac{sy}{q}+\tau''=t''$;

mithin $x=\dfrac{(t''-\tau'')mp-(t'-\tau')sp}{mo-ls}$

$$y=\frac{(t'-\tau')oq-(t''-\tau'')lq}{mo-ls}$$

Hat man x und y gefunden; so ergeben sich die verbesserten Werthe von r', r'', r''', u', u'', u''' durch Interpolation. Denn wenn die Werthe irgend einer dieser Größen in den drey Hypothesen sind B, $B+f$, $B+g$; so wird man für die von den Veränderungen der Länge des Knotens und der Neigung abhängende Verbesserungen derselben nahe die Proportionen haben

$p:f=x$: dem ersten Theil der Verbess.

$q:g=y$: dem zweyten — —

und es wird daher der verbesserte Werth von B nahe $=B+\frac{fx}{p}+\frac{gy}{q}$ seyn. Finden sich x und y beträchtlich größer als p und q; so muß man um eine größere Genauigkeit zu erreichen, die Rechnung nach drey neuen der Wahrheit näher kommenden Hypothesen wiederholen.

Eben diese Methode ist auch auf die Ellipse anwendbar. Denn durch r', r'', r''' und u', u'', u''' ist für jede der drey Hypothesen die Ellipse gegeben, welche der Comet hätte beschreiben müssen (§. 182. und 198.). Hieraus findet sich nach dem angeführten §. die wahre Anomalie für jede der drey Beobachtungen, und nach §. 185. die mittlere Anomalie, mithin auch die Zwischenzeit zwischen der ersten und zweyten, und zwischen der ersten und dritten Beobachtung, mittelst welcher man wie vorhin die zwey Gleichungen zur Bestimmung von x und y erhält.

Als Beyspiel mögen die §. 209. angeführten Beobachtungen dienen, ob es gleich vortheilhaft ist, weiter von einander entfernte Beobachtungen zu wählen. Die Länge des Knotens sey $= 264^\circ 55' 6'' =$ ☊, die Neigung der Bahn $62^\circ 16' 19'' = i$, wie sich diese aus denselben Beobachtungen nach den §. 213. gezeigten Verbesserungen ergeben haben. Man suche nach §. 197. die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ mittelst der Gleichungen

1.) $\text{Cotg.}\ \mathfrak{A} = \text{Sin.}\ (\alpha - A)\ \text{Cotg.}\ \beta$

2.) $\text{Cos.}\ \mathfrak{B} = \text{Cos.}\ (\alpha - A)\ \text{Cos.}\ \beta$

3.) $\text{Tg.}\ \mathfrak{C} = \dfrac{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - i)}{\text{Cos.}\ \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + i)}\ \text{Cotg.}\ \dfrac{\text{☊} - A}{2}$

4.) $\text{Tg.}\ \mathfrak{D} = \dfrac{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - i)}{\text{Sin.}\ \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + i)}\ \text{Cotg.}\ \dfrac{\text{☊} - A}{2}$

in welchen α die geocentrische Länge des Cometen, β seine geocentrische Breite, und A die Länge der Sonne bezeichnen; so ist das Argument u der Breite $= \mathfrak{C} + \mathfrak{D}$, und der Radius Vector des Cometen

$r = \dfrac{R\ \text{Sin.}\ \mathfrak{B}}{\text{Sin.}\ (\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D})}$, wenn der Radius Vector der Erde $= R$ ist.

Die auf die erste, zweyte und dritte Beobachtung sich beziehende Größen unterscheide man von einander durch einen, zwey oder drey Striche.

Erste Hypothese ☊ $= 264^\circ 55' 6''$; $i = 62^\circ 16' 19''$

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha' & = & 224^\circ\ 18'\ 15'' \\
A' & = & 192\ \ 34\ \ 48 \\
\alpha' - A' & = & 31\ \ 43\ \ 27 \\
\beta' & = & 24\ \ 36\ \ \ 4 \\
\text{☊} & = & 264\ \ 55\ \ \ 6 \\
\text{☊} - A' & = & 72\ \ 20\ \ 18 \\
\dfrac{\text{☊} - A'}{2} & = & 36\ \ 10\ \ \ 9
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\text{Lg. Sin.} = 9{,}7208458;\ \text{Lg. Cos.} = 9{,}9297200 \\
\text{Lg. Cotg.} = 0{,}3392681;\ \text{Lg. Cos.} = 9{,}9586728 \\
\qquad\qquad\ 0{,}0601139 \qquad\qquad\qquad\quad 9{,}8883928 \\
\mathfrak{A}' = 41^\circ\ 2'\ 50'',0 \quad \mathfrak{B}' = 39^\circ\ 20'\ 29'',9
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
i & = & 62\ \ 16\ \ 19{,}0 \\
\mathfrak{A}' - i & = & -\ 21\ \ 13\ \ 29{,}0 \\
\mathfrak{A}' + i & = & 103\ \ 19\ \ \ 9{,}0 \\
\dfrac{\mathfrak{A}' - i}{2} & = & -\ 10\ \ 36\ \ 44{,}5 \\
\dfrac{\mathfrak{A}' + i}{2} & = & 51\ \ 39\ \ 34{,}5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\text{Lg. Cotg.}\ \dfrac{\text{☊} - A'}{2} & = & 0{,}1360450 & \qquad\qquad 0{,}1360450 \\
\text{Lg. Sin.}\ \dfrac{\mathfrak{A}' - i}{2} & = & 9{,}2652033 & \text{neg. Lg. Cos.} = 9{,}9925074 \\
 & & 9{,}4012483 & \qquad\qquad 0{,}1285524
\end{array}
$$

Lg.

$$\text{Lg. Sin.}\ \frac{\mathfrak{A}'+i}{2} = 9{,}8945038 \quad \text{Lg. Cos.} = 9{,}7926245$$

$$\text{Lg. Tg.}\ \mathfrak{D}' = 9{,}5067445;\ \text{Lg. Tg.}\ \mathfrak{E}' = 0{,}3359279$$
$$\mathfrak{D}' = -\ 17^\circ\ 48'\ 20'',97$$
$$\mathfrak{E}' = 65\ \ 13\ \ 54{,}03$$
$$u' = 47\ \ 25\ \ 33{,}06$$
$$\mathfrak{E}'-\mathfrak{D}' = 83\ \ 2\ \ 15{,}0 \quad \text{Lg.}\ R' = 9{,}9995149$$
$$\mathfrak{B}' = 39\ \ 20\ \ 29{,}9 \quad \text{Lg. Sin.}\ \mathfrak{B}' = 9{,}8020502$$
$$122\ \ 22\ \ 44{,}9 \qquad 9{,}8015651$$
$$\text{Lg. Sin.} = 9{,}9266115$$
$$\text{Lg.}\ r' = 9{,}8749536$$
$$r' = 0{,}749814$$

Eben so finden sich $u'' = 63^\circ\ 38'\ 10'',84;\ r'' = 0{,}8490846$

$u''' = 78\ \ 36\ \ 32{,}9;\quad r''' = 9{,}9911930;$

und hieraus $k' = 0{,}246309;\quad k'' = 0{,}522522$

$\tau' = 9{,}04957$ T. $\quad \tau'' = 19{,}96323$

aber $t' = 8{,}97777 \quad t'' = 19{,}96319$

also $t'-\tau' = -\ 0{,}07180 \quad t''-\tau'' = -\ 0{,}000044$

Zweyte Hypothese ☊ $+ p = 265^\circ\ 15'\ 6''$; $p = 20'$; $i = 62^\circ\ 16'\ 19''$.

Man findet wie vorhin $u' = 47^\circ\ 23'\ 38'',9;\quad r' = 0{,}7478773$

$u'' = 63\ \ 34\ \ 39{,}9;\quad r'' = 0{,}8483256$

$u''' = 78\ \ 30\ \ 34{,}45;\quad r''' = 0{,}9901080$

$k' = 0{,}2457026;\quad k'' = 0{,}521291$

$\tau' + l = 9{,}01387;\quad \tau'' + o = 19{,}89901$

und da $\tau' = 9{,}04957;\quad \tau'' = 19{,}96323$

so ist $l = -\ 0{,}03570,\quad$ und $o = 0{,}06422$

Für die dritte Hypothese ☊ $= 264^\circ\ 55'\ 6''$; $i + q = 62^\circ\ 36'\ 19''$; $q = 20'$ finden sich

$u' = 47^\circ\ 16'\ 27'',81;\quad r' = 0{,}752223$

$u'' = 63\ \ 24\ \ 58{,}97;\quad r'' = 0{,}853810$

$u''' = 78\ \ 17\ \ 53{,}1;\quad r''' = 0{,}997342$

$k' = 0{,}2469022;\quad k'' = 0{,}5241830$

$\tau' + m = 9{,}08575;\quad \tau'' + s = 20{,}074237$

$\tau' = 9{,}04957\quad \tau'' = 19{,}96323$

$m = 0{,}03618 \quad s = 0{,}111007$

Daher ist $x = 1^\circ\ 37'\ 14''$; $\quad y = 0^\circ\ 56'\ 15'',6$

und weil ☊ $= 264\ \ 55\ \ 6 \quad i = 62\ \ 16\ \ 19$

so ist ☊ $+ x = 266\ \ 32\ \ 20$; $i + y = 63\ \ 12\ \ 35$.

Weil hier x und y beträchtlich größer geworden sind als p und q; so muß man mittelst der verbesserten Werthe von ☊ und i die Rechnung wiederholen. Man wird jetzt $x = +\ 2'\ 1''$ und $y = -\ 1'\ 3''$ finden, und daher wird die Länge des ☊ sehr nahe $= 266^\circ\ 34'\ 21''$ und die Neigung der Bahn $i = 63^\circ\ 11'\ 32''$ seyn. Ferner findet man durch Interpolation

$u' = 46^\circ\ 51'\ 47'',73$; $r' = 0,7466947$
$u'' = 62\ \ 45\ \ 53,81$; $r'' = 0,8519866$
$u''' = 77\ \ 18\ \ \ 5,77$; $r''' = 1,0023152$

und, wenn man mittelst u', u''', r', r''' die durch die zwey äussersten Punkte gehende Parabel nach §. 208. n. 12. und 9. bestimmt,

d. wahre Anom. f. d. erste Beob. $= 42^\circ 23' 47'',36$; $D = 0,6490632$.
Da nun $u' = 46\ \ 51\ \ 47,73$
so ist $u' - v = \ \ 4\ \ 28\ \ \ 0,37$
und weil ☊ $= 266\ \ 34\ \ 21$
so ist die Länge des Periheliums $= 271\ \ \ 2\ \ 21$

Die zwischen der ersten Beobachtung und dem Durchgang durch das Perihelium verflossene Zeit ergiebt sich nach §. 208. n. 13. oder §. 212.

= 17,509032 Tagen.
Die Zeit der ersten Beob. ist 36,310416 Sept.
also die Zeit des Perih. 18,801384 Sept.

Die Elemente der Bahn dieses Cometen wären demnach folgende:

Länge des ☊	= 266° 34′ 21″
Neigung der Bahn	= 63 11 32
Länge des Periheliums	= 271 2 21
Abstand des Perih.	= 0,6490632

Zeit des Perih. 1807. Sept. 18 um 19 U. 14′ } mittl. Zeit
oder Sept. 19. Morg. um 7 U. 14′ } zu Tübingen.

Auf eine Reihe vom 22. Sept. 1807 bis zu dem 28. Febr. 1808 sich erstreckender Beobachtungen dieses Cometen gründen sich folgende von Bessel *) gefundene Elemente seiner elliptischen Bahn:

Durchgangszeit durchs Perihelium Sept. 18,73709 Pariser Merid.

Neigung	= 63° 10′ 10″,9	
Länge ☊	= 266 48 9,3	} vom mittl.
—	= 270 53 50,6	} Aequinokt.
kleinster Abstand	= 0,645872	
Log. d. kleinst. Abst.	= 9,8101466	
Log. d. mittl. tägl. Bew.	= 0,2442084	
Excentricität	= 0,99503415	
Halbe große Axe	= 130,063	
Umlaufszeit	= 1483,3 Jahren.	
Richtung des Laufs	direct.	

die halbe kleine Axe dieser elliptischen Bahn ist also = 12,9457; folglich mehr als zehnmal kleiner als die halbe große Axe.

§. 215. Die Berechnung der elliptischen Elemente erfor-

*) Astr. Jahrb. für 1811. S. 158.

dert sehr genaue Beobachtungen, und eine vorläufige Reduktion derselben wegen der Parallaxe, Aberration und Nutation. Die erstere ergiebt sich mittelst der aus den beyläufig gefundenen Elementen berechneten Entfernungen des Cometen von der Erde, wodurch das Verhältniß seiner Horizontalparallaxe zu der Horizontalparallaxe der Sonne gegeben ist (§. 49. n. 1.). Sodenn kann man die Aberration in Rechnung bringen, wenn man die Zeit t berechnet, welche das Licht gebrauchte, um von dem Cometen zu der Erde zu gelangen. Ist nemlich *t* die Zeit der Beobachtung; so wird der beobachtete Ort dem von der Aberration befreyten Ort entsprechen, welchen man zu der Zeit *t* - t beobachtet haben würde, wenn die Erde in dem der Zeit *t* - t zugehörigen Punkt ihrer Bahn gewesen wäre, und das Licht sich augenblicklich fortpflanzte. Die Zeit t findet sich, wenn man 8′ 13″,2 oder 493″,2 mit dem Abstand des Cometen von der Erde multiplicirt. Man sucht aus den astronomischen Tafeln die Länge der Sonne für die Zeit *t* - t, und addirt zu derselben 180° 0′ 20″,25; so hat man den correspondirenden Ort der Erde. Aus den beobachteten von der Refraktion und Parallaxe befreyten geraden Aufsteigungen und Abweichungen sucht man mittelst der scheinbaren Schiefe der Ekliptik die Längen und Breiten, und leitet aus diesen diejenige her, welche man bey einer für eine gewiße Epoche geltenden mittleren Schiefe der Ekliptik gefunden haben würde. Bey der Berechnung des Orts der Sonne aus den Tafeln läßt man daher die Nutation weg. Endlich vermindert oder vermehrt man die nach oder vor der angenommenen Epoche beobachteten und reducirten Oerter und die berechneten Längen der Sonne um die mittlere Bewegung der Aequinoktialpunkte in der zwischen der Epoche und der Zeit der Beobachtung verfloßenen Zeit. Die aus den so reducirten Beobachtungen gefundene Elemente beziehen sich alsdenn auf eine unveränderliche Ebene, nemlich auf die mittlere Ebene der Ekliptik für die angenommene Epoche, und die Längen sind von dem mittleren für eben diese Epoche geltenden Aequinoktialpunkt an gerechnet.

§. 216. Weil das in der Nähe der Sonne liegende Stück einer Cometenbahn in den meisten Fällen nicht merklich von einer Parabel abweicht; so sind die parabolischen Elemente der Cometenbahnen hinreichend, um einen Cometen, welcher schon einmal beobachtet worden ist, wieder zu erkennen. Wenn die Länge und der Abstand des Periheliums, die Länge des Knotens und die Neigung der Bahn sammt der Richtung der Bewegung nahe dieselben sind; so ist es sehr wahrscheinlich, daß der erschienene Comet derselbe sey, welchen man vorher schon beobachtet hat. Wegen der großen Umlaufszeit und des Mangels älterer genauen Beobachtungen der Cometen findet sich unter 98 bis jetzt beobachteten und berechneten Cometen nur einer, dessen Umlaufszeit man mit Gewißheit kennt, nemlich der im 185sten §. angeführte, welcher im Jahr 1450 zum erstenmal astronomisch beobachtet wurde. Seine früheren Erscheinungen sind zweifelhaft. Halley fand nemlich, daß unter 24 von ihm berechneten Cometen drey sehr nahe einerley Elemente hatten, die von den Jahren 1531, 1607, und 1682, woraus er schloß, daß dieß ein und derselbe Comet seyn könne. Er sagte daher die Wiederkunft dieses Cometen auf das Ende des Jahrs 1758 oder auf den Anfang des Jahrs 1759 voraus. Er erschien auch wirklich im Jahr 1759, und Clairaut hatte im Jahr 1758 noch vor seiner Wiedererscheinung gezeigt, daß wegen der Einwirkung des Jupiters, welcher schon Halley die Irregularitäten in den zwischen seinen Wiedererscheinungen verfloßenen Perioden *) zugeschrieben hatte, der Comet dießmal um ungefähr 618 Tage später durch das Perihelium gehen würde, als es vermöge der zwischen 1607 und 1682 verfloßenen Periode hätte geschehen sollen. Er setzte die Durchgangszeit durch das Perihelium auf die Mitte des Aprils 1758, und bemerkte zugleich, daß die kleinen in seinen Approximationen vernachläßigten Größen diesen Zeitpunkt um einen Monat früher herbeyführen oder weiter würden hinausschieben können. Der Comet gieng durch das Perihelium am 12. März 1759, welcher Zeitpunkt innerhalb der von Clairaut festgesetzten Gränzen liegt. Die elliptischen Elemente dieses sogenannten Halley'schen Cometen sind nach **Klinkenberg** **) folgende:

Zeit des Periheliums 1759 März 12. um 13 U. 7 M. 35 S. mittlerer Zeit zu **Paris**:

*) Die zwischen den Durchgängen durch das Perihelium in den Jahren 1456, 1531, 1607, 1682 verfloßene Perioden sind nemlich 75 Jahre 77 T.; 76 J. 53 T.; 74 J. 323 T.

**) S. Olbers Abhandlung, welcher von Zach ein genaues Verzeichniß der Elemente aller seit dem Jahr 837. nach C. G. bis zum Mai 1797 berechneten Cometenbahnen, 89 an der Zahl, beygefügt hat.

Länge des ☊	= 53° 45′ 35″,4
Neigung der Bahn	17 40 5
Länge des Perih.	303 19 18
Abstand des Perih.	0,5829726
Halbe große Axe	18,018467
Halbe kleine Axe	4,546272
Die Bewegung	rückläufig.

§. 217. Ob die Cometen ein eigenes Licht haben, oder nur, wie die Planeten, von der Sonne beleuchtet werden, scheint noch nicht durch die Beobachtungen entschieden zu seyn. Wenn man sie durch stark vergrößernde Teleskope in solchen Stellungen gegen die Sonne und die Erde beobachtet, wo sie uns nur einen Theil derjenigen Hälfte ihrer Oberfläche zukehren, welche von den Sonnenstralen getroffen werden kann; so bemerkt man keine Phasen, und allein der Comet vom Jahr 1744 scheint Veränderungen in seinen Lichtgestalten gezeigt zu haben. Allein die Beobachtungen sind zweifelhaft. Herschel *) beobachtete den im Jahr 1807 erschienenen Cometen vom 4. bis zum 19. Okt. durch seine Teleskope, welche ihm denselben beständig als eine scharf begränzte ganz beleuchtete Scheibe zeigten, ungeachtet am 4. Okt. der Bogen des von der Sonne beleuchteten Theils nur 119° 45′ 9″, und am 19. Okt. 124° 22′ 40″ betrug, woraus er glaubt folgern zu können, daß das Licht des Cometen nicht von dem Sonnenlicht allein herrühren könne, weil er sonst die Abweichung seiner Lichtgestalt von einer ganz beleuchteten Scheibe hätte bemerken müssen. Vielleicht ist aber der sogenannte Kern der Cometen nur der dichteste Theil des sie umgebenden Nebels, durch welchen man schon Fixsterne beobachtet hat, und welcher daher von dem Sonnenlicht ganz durchdrungen wird. Der Comet selbst kann so klein seyn, daß es nicht möglich ist, seine Phasen zu bemerken, welche noch überdiß durch das von dem beleuchteten Nebel auf den Cometen zurückgeworfene Licht undeutlich gemacht werden müssen.

Herschel hat auch Beobachtungen zur Bestimmung der wahren Größe des Cometen vom Jahr 1807 angestellt. Er schäzte seinen scheinbaren Durchmesser am 19. Okt. etwas

*) Philosoph. Transact. 1808. P. II.

kleiner, als den des dritten Jupiterstrabanten, und setzt ihn hienach auf eine Sekunde. Der Abstand des Cometen von der Erde zur Zeit der Beobachtung war 1,169192, (die mittl. Distanz der Erde von der Sonne = 1 gesetzt). Demnach wäre sein wahrer Durchmesser = 0,0664 des Erddurchmessers = 114 geogr. Meilen.

Fünftes Capitel.

Von der Bahn des Monds um die Erde, und den Bahnen der übrigen Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten.

§. 218. Es ist in dem vierten Capitel des ersten Buchs gezeigt worden, daß man die Bewegung des Monds um die Erde als eine Bewegung in einer durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebene betrachten kann, welche theils durch die Veränderung der Länge des aufsteigenden Knotens, theils durch die beständige Veränderung der Neigung der Mondsbahn mit jedem Augenblick in eine andere Lage gegen die Ekliptik gebracht wird. Seine Bewegungen in dieser veränderlichen Ebene zeigen neben der von seiner Lage gegen die Apsidenlinie abhängenden Ungleichheit eine große Anzahl kleinerer Ungleichheiten von verschiedenen Perioden, unter welchen die im 69sten §. bemerkten, nemlich die Evection, Variation und die jährliche Gleichung die beträchtlichsten sind. Man findet, daß die von der Lage des Monds gegen die Apsidenlinie abhängende Ungleichheit sehr nahe dasselbe Gesetz befolgt, welches man in den elliptischen Bewegungen der Planeten um die Sonne beobachtet, und sich durch eine Bewegung des Monds in einer Ellipse darstellen läßt, welche den Mittelpunkt der Erde zu einem ihrer Brennpunkte hat. Der Radius Vector des Monds schneidet den Zeiten proportionale Flächenräume ab, die Excentricität ist = 0,0550268, und daher die größte Gleichung des Mittelpunkts des Monds = $6^\circ\ 18'\ 28'',1$ (§. 188.). Die große Axe der Ellipse, oder die Apsidenlinie der Mondsbahn hat eine vorwärts gehende Bewegung, so daß sie in 3231 T.

11 St. 4 Min. 7,3 S. einen Umlauf in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte macht. Diese Bewegung ist aber nicht gleichförmig, und einer Ungleichheit unterworfen, welche auf 22' 17" steigt, und dem Sinus der mittleren Anomalie der Sonne proportional ist. Die wahre Länge des Perigäums des Monds ist größer oder kleiner als die mittlere unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung der Apsidenlinie berechnete, je nachdem die mittlere Anomalie der Sonne kleiner oder größer als 180 Gr. ist.

§. 219. Will man nur auf die bisher betrachteten Ungleichheiten der Mondsbewegungen Rücksicht nehmen; so wird man den geocentrischen Ort des Monds für eine gegebene Zeit auf folgende Art berechnen können. Man suche für den vorgegebenen Zeitpunkt die wahre Länge ☉ der Sonne, ihre mittlere Anomalie a, die mittlere Länge ☽ des Monds und seine mittlere Anomalie A unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Bewegung der Apsidenlinie nach den §. 190. für die Planeten gegebenen Regeln. Man setze ☽ - ☉ = D; so ist die wegen der **Evection** und der **jährlichen Gleichung** verbesserte Länge des Monds

☽' = ☽ + (1° 20' 29",5) Sin. $(2D - A)$ - (11' 11",8) Sin. a (§. 68.).

Man verbessere die mittlere Anomalie des Monds durch eben diese zwey Gleichungen, und ziehe von ihr noch ferner wegen der ungleichförmigen Bewegung der Apsidenlinie (22' 17") Sin. a ab; so hat man die verbesserte mittlere Anomalie des Monds

$A' = A$ + (1° 20' 29",5) Sin. $2D - A$) - (11' 11",8) Sin. a - (22' 17") Sin. a.

Mittelst der verbesserten mittleren Anomalie A' und der Excentricität der Mondsbahn suche man nach §. 186. den Ueberschuß Q der wahren Anomalie über die mittlere (wenn die erstere kleiner ist als die letztere; so wird Q negativ), und setze ☽' + Q = ☽", D' = ☽" - ☉. Man verbessere noch diese Länge des Monds wegen der **Variation**; so erhält man die Länge des Monds in seiner Bahn

☽''' = ☽" + (35' 41",7) Sin. $2D'$.

Endlich sey die unter der Voraussetzung einer gleichförmigen retrograden Bewegung berechnete mittlere Länge des aufsteigenden Mondsknotens = ☊; so ist seine verbesserte Länge

☊' = ☊ + (1° 30' 26") Sin. 2 (☉ - ☊)

und die verbesserte Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik

i = 5° 8' 47" + (8' 47") Cos. 2 (☉ - ☊) (§. 66.),

woraus sich nach den §. 190. S. 299. gegebenen Formeln n. I.

und 2. die Länge des Monds in der Ekliptik und seine Breite ergiebt.

Diese Correktionen sind übrigens zu einer genaueren Bestimmung des geocentrischen Orts des Monds noch nicht hinreichend, und der Fehler kann sich zuweilen auf 8 bis 10 Minuten belaufen.

§. 220. Die Bahnen der vier Trabanten des Jupiters liegen in Ebenen, welche nur wenig gegen die Ebene der Ekliptik geneigt sind (§. 103.). Ihre Neigungen gegen die Ebene der Bahn des Jupiters um die Sonne können also ebenfalls nicht beträchtlich seyn, da diese nur um $1^\circ 18' 51''.5$ (§. 191.) gegen die Ekliptik geneigt ist. Die Verschiedenheiten, welche man in der Dauer ihrer Verfinsterungen beobachtet, zeigen, daß sie nicht immer durch die Axe des Schattens gehen, welchen der Jupiter auf sie wirft, und da der vierte Trabant öfters unverfinstert vorüber geht; so muß seine jovicentrische Breite zuweilen grösser seyn, als der aus dem Mittelpunkt des Jupiters gesehene scheinbare Halbmesser des Durchschnitts des Schattenkegels mit einer durch den Mittelpunkt dieses Trabanten auf die Axe des Kegels senkrecht gelegten Ebene. Wenn die Dauer der Verfinsterungen am grösten ist (S. §. 111.); so muß die Axe des Schattenkegels in der Ebene der Bahn des Trabanten liegen, und folglich in die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Ebene der Bahn des Jupiters fallen. Zur Zeit des Mittels der Verfinsterung ist der Trabant in Opposition, und daher seine jovicentrische Länge der heliocentrischen Länge des Jupiters gleich, welche man für diesen Zeitpunkt berechnen kann. Mithin wäre hiedurch die Lage der Durchschnittslinie, in welcher die Ebene der Bahn des Trabanten die Ebene der Jupitersbahn durchschneidet, oder die Knotenlinie gegeben. Diese Beobachtungen können bey dem dritten und vierten Trabanten angestellt werden, von dem ersten und zweyten aber kann man, wenn sie in der Nähe ihrer Knoten sind, niemals die Eintritte und Austritte zugleich beobachten, und man ist daher genöthigt, die einige Tage vor der Opposition des Jupiters beobachteten Eintritte dieser Trabanten in den Schatten mit den einige Tage nach derselben beobachteten Austritten zu vergleichen, indem man von den Zeiten der Austritte die zwischen diesen und den Eintritten verfloßene synodische Umlaufszeiten abzieht. Die Dauer der Verfinsterungen findet sich bey allen vier Trabanten am grösten, wenn die heliocentrische Länge des Jupiters ungefähr 10 Z. 14 Gr. oder 4 Z. 14 Gr. ist; folglich können die jovicentrischen Längen der Knoten der Jupiterstrabanten nicht sehr von einander verschieden seyn. Man bemerkt, daß, wenn die Trabanten in ihrer Opposition nördlich von dem Mittelpunkt des Jupiters sich befinden, und die Dauer ihrer Verfinsterungen abnimmt, die heliocentrische Länge des Jupiters von 10 Z. 14 Gr. in 1 Z. 14 Gr. übergeht; folglich fällt der aufsteigende Knoten der Bahnen der Jupiterstrabanten in den Punkt der Ekliptik, dessen Länge ungefähr 10 Z. 14 Gr. ist.

§. 221. Die Neigungen der Bahnen des ersten und zweyten Trabanten des Jupiters ergeben sich aus der grösten Dauer ihrer Verfinsterungen auf folgende Art. Es sey *AFB* (Fig. 72.) der hier als kreisförmig angenommene Durchschnitt des Schattenkegels des Jupiters mit einer auf seiner Axe senkrechten und die Bahn des Trabanten berührenden Ebene, und *C* der Mittelpunkt des Schattens. Der Weg *mn* des Trabanten durch den Schatten kann ohne merklichen Fehler als eine Chorde des Kreises *AFB* betrachtet werden, welche durch das auf sie aus dem Mittelpunkt *C* gefällte Perpendickel *CR* in *R* halbirt wird. Man ziehe den Halbmesser *Cm* an den Punkt des Eintritts *m*; so verhält sich *Cm* zu *mR* wie die halbe gröste Dauer der Verfinsterung zu der beobachteten halben kleinsten Dauer. In dem bey *R* rechtwinklichten Dreyeck *CmR*, welches man als ein geradlinigtes betrachten kann, ist also das Verhältniß von *Cm* zu *mR*, mithin auch das Verhältniß von *Cm* : *CR* gegeben. Sucht man nun zu der synodischen Umlaufszeit des Trabanten zu der halben grösten Dauer seiner Verfinsterung und zu 360° die vierte geometrische Proportionalzahl; so erhält man die scheinbare aus dem Mittelpunkt des Jupiters gesehene Größe des Halbmessers *CA* oder *Cm* des Schattens, und weil das Verhältniß von *Cm* : *CR* gefunden worden ist, die scheinbare Grösse von CR. Diese Linie steht aber, wenn die Dauer der Verfinsterung am kleinsten ist, so wohl auf AB, als auf mn senkrecht; folglich mißt die scheinbare Grösse von CR die gröste jovicentrische Breite des Trabanten, oder die Neigung seiner Bahn gegen die Bahn des Jupiters. Wegen der unter den Polen zusammengedrückten Gestalt des Jupiters (§. 109.) sind aber diese Neigungen zu groß. Unter der Voraussetzung, daß der Jupiter ein elliptisches Sphäroid sey, wird der Durchschnitt des Schattenkegels mit einer auf seiner Axe senkrechten und die Bahn des Trabanten berührenden Ebene sehr nahe eine Ellipse seyn, deren kleine Axe sich zu ihrer großen Axe wie die Umdrehungsaxe des Jupiters sich zu dem Durchmesser seines Aequators, d. i. wie 13 : 14 (§. 109.) verhält. Und weil die Umdrehungsaxe des Jupiters nahe auf der Ekliptik senkrecht ist; so werden die während der Verfinsterung von den Trabanten beschriebene Chorden des elliptischen Umfangs des Schattens nahe mit der großen Axe des elliptischen Schnitts parallel seyn. Es sey also $adbe$ (Fig. 73.) der elliptische Durchschnitt des Schattens, mn die von dem Trabanten beschriebene mit der großen Axe ab parallele Chorde. Man ziehe nq auf die große Axe ab senkrecht, und verlängere sie über n hinaus, bis sie dem um die große Axe als Durchmesser beschriebenen Kreis in n' begegnet. Man ziehe den Halbmesser Cf auf mn senkrecht, welcher der mn in r begegne, und durch n' die Parallele $n'r'$ mit mn. Unter der Voraussetzung, daß der Umfang des Schattens ein Kreis sey, hat man Cr' statt Cr gefunden. Es verhält sich aber $Cr' : Cr = n'q : nq = Ca : Cd$ (Kegelschn. II, 7. Zus. 2.) $= 14 : 13$. Folglich muß man die unter der Voraussetzung eines kreisförmigen Umfangs des Schattens gefundene Neigungen der Bahnen in dem Verhältniß von 13 : 14 vermindern.

Die Neigungen der Bahnen des dritten und vierten Trabanten können nicht unmittelbar wie die der zwey vorhergehenden gefunden werden, weil sie, wenn sie ihre gröste Breite haben, unverfinstert vorüber gehen. Beobachtet man aber die Dauer einer Verfinsterung, und bestimmt daraus wie vorhin die scheinbare Größe des Perpendickels CR (Fig. 72.); so kennt man, wenn die Bahn $nmrN$ des Trabanten die Ebene CAN der Bahn des Jupiters in N schneidet, in dem bey R rechtwinklichten sphärischen Dreyeck CRN die Seite CR, und die Hypotenuse CN, welche dem Unterschied der schon beyläufig bekannten Länge des Knotens und der heliocentrischen Länge des Jupiters zur Zeit des Mittels der Verfinsterung gleich ist, woraus man den Neigungswinkel N findet.

Es verhält sich nemlich Sin. CN : Sin. CR = Sin. tot. : Sin. N. Will man die Länge des Knotens noch nicht als bekannt voraussetzen; so sey zu einer anderen Zeit der Jupiterstrabant bey dem Mittel der Verfinsterung in r. Man bestimme wie vorhin die jovicentrische scheinbare Größe des Perpendickels cr auf die Bahn des Trabanten; so verhält sich in dem sphärischen Dreyeck cNr wiederum Sin. cN : Sin. cr = Sin. tot. : Sin. N und daher

$$\text{Sin. } CN : \text{Sin. } cN = \text{Sin. } CR \quad \text{Sin. } cr,$$

mithin $\text{Tg.}\ \frac{CN + cN}{2} : \text{Tg.}\ \frac{CN - cN}{2} = \text{Tg.}\ \frac{CR + cr}{2} : \text{Tg.}\ \frac{CR - cr}{2}$.

Es ist aber der Bogen $CN - cN$ dem Unterschied der heliocentrischen Längen des Jupiters zur Zeit des Mittels der zwey Verfinsterungen gleich, und daher gegeben; folglich erhält man durch diese Proportion mittelst der Tafel der Tangenten die halbe Summe der zwey unbekannten Bogen CN, cN, deren Unterschied Cc man kennt, und hieraus diese Bogen selbst. Hat man diese gefunden; so ergiebt sich aus der ersten oder zweyten Proportion die Neigung der Bahn. Man wird hiedurch die Lage der Knoten genauer als durch die Beobachtungen der grösten Dauer der Verfinsterungen bestimmen können, weil die Trabanten schon merklich von ihren Knoten entfernt seyn können, ohne daß man einen Unterschied in der Dauer ihrer Verfinsterungen bemerkt. Zu der Bestimmung der Länge des Knotens muß man diejenige Beobachtungen wählen, bey welchen sich die Dauer der Verfinsterungen nicht zu langsam verändert.

§. 222. Die Neigung der Bahn des ersten Jupiterstrabanten gegen die Bahn des Jupiters ist beynahe unveränderlich, und = $3° \, 5' \, 24''$, die Neigungen der übrigen aber sind kleinen periodischen Veränderungen unterworfen, welche ungefähr auf $30'$ steigen. Die Länge des aufsteigenden Knotens des ersten Trabanten ist $= 314^\circ\ 27'\ 54''$ in der Bahn des Jupiters gerechnet. Die aufsteigenden Knoten der übrigen schwanken um diesen Punkt hin und her, von welchem sie sich zuweilen um 8 bis 9 Graden entfernen. Die Vergleichung weit von einander entfernter Beobachtungen zeigt, daß diese mittlere Knotenlinie gegen die Fixsterne ihre Lage nicht merklich verändert, und man hat daher, um die Länge des mittleren aufsteigenden den vier Bahnen gemeinschaftlichen Knotens zu finden, zu der für irgend einen Zeitpunkt bestimmten Länge desselben nur die Bewegung der Aequinoktialpunkte zu addiren, oder sie davon abzuziehen, je nachdem der vorgegebene Zeitpunkt nach oder vor die Epoche fällt, für welche man die mittlere Länge des aufsteigenden Knotens bestimmt hat. Die mittleren Neigungen der Bahnen der Jupiterstrabanten gegen die Ebene der Bahn des Jupiters sind folgende:

I.	$3^\circ\ 5'\ 24''$	III.	$3^\circ\ 0'\ 28''$
II.	$3\ \ 4\ \ 45$	IV.	$2\ \ 40\ \ 58$

und die mittlere Länge ihres aufsteigenden Knotens in der Bahn des Jupiters ist für den 1. Jan. 1801 $= 314^\circ\ 27'\ 54''$.

§. 223. Aus den Neigungen der Bahnen der Trabanten des Jupiters gegen seine Bahn und der Länge ihres aufsteigenden Knotens ergeben sich ihre Neigungen gegen die Ekliptik und die Länge ihres Knotens in derselben durch die Auflösung eines sphärischen Dreyecks. Es sey BAR (Fig. 74.) ein Bogen eines grösten in der Ebene der Bahn des Jupiters liegenden Kreises. BCE ein Bogen der Ekliptik, und der Bogen CAM liege in der Ebene der Bahn eines Trabanten. In dem Dreyeck ABC kennt man den Ueberschuß AB der Länge n des aufsteigenden Knotens A des Trabanten in Beziehung auf die Bahn des Jupiters über die Länge N des aufsteigenden Knotens B des Jupiters, die Neigung $ABC = J$ der Jupitersbahn gegen die Ekliptik, und die Neigung $BAC = i$ der Bahn des Trabanten gegen die Bahn des Jupiters. Es sey $BA < 90^\circ$, und von B auf die Verlängerung von A des Perpendickel BD gefällt; so verhält sich Cotg. BAC : Sin. tot. $=$ Cos. AB : Cotg. ABD, woraus man $CBD = ABD - ABC$ findet. Sodenn hat man

$$\text{Sin.}\,ABD : \text{Sin.}\,CBD = \text{Cos.}\,A : \text{Cos.}\,BCD \text{ oder Cos.}\,ACE, \text{ und}$$
$$\text{Cos.}\,CBD : \text{Cos.}\,ABD = \text{Tg.}\,AB : \text{Tg.}\,BC.$$

Man suche also einen Hülfswinkel durch die Formel

1.) $\text{Tg.}\, z = \text{Tg.}\, i\, \text{Cos.}\, (n - N)$; so ist

2.) $\text{Cos.}\, ACE = \frac{\text{Cos.}\, i\, \text{Cos.}\, (\mathfrak{J} + z)}{\text{Cos.}\, z}$, und 3.) $\text{Tg.} BC = \frac{\text{Tg.} (n - N) \text{Sin.}\, z}{\text{Sin.} (\mathfrak{J} + z)}$.

Man nehme immer den Winkel z spitz und mit demselben Zeichen, welches seine Tangente hat, und bestimme den Bogen BC so, daß sein Sinus mit dem Zähler, und sein Cosinus mit dem Nenner in dem Ausdruck seiner Tangente einerley Zeichen erhält. Aus n. 2. erhält man die Neigung der Trabantenbahn gegen die Ekliptik, und der aus der Gleichung n. 3. gefundene Bogen BC zu der Länge N des aufsteigenden Knotens des Jupiters addirt giebt die Länge des auf die Ekliptik sich beziehenden aufsteigenden Knotens des Trabanten.

In dem Dreyeck ABC findet man ferner die Seite AC mittelst der Proportion $\text{Sin.}\, A : \text{Sin.}\, B = \text{Sin.}\, BC : \text{Sin.}\, AC$, und daher, wenn man zu dem auf die Bahn des Jupiters sich beziehenden Argument AM der Breite des Trabanten den Bogen AC addirt, das Argument der Breite CM desselben in Beziehung auf die Ekliptik, woraus sich seine jovicentrische Breite ME über der Ekliptik ergiebt. Eben diese kann auch dadurch gefunden werden, daß man zuerst die jovicentrische Breite MR über die Bahn des Jupiters, und den Bogen AR sucht. Addirt man zu diesem den Bogen AB; so ergeben sich aus BR und RM die Bogen BE und EM nach denselben Regeln, nach welchen man aus der geraden Aufsteigung und Abweichung eines Sterns seine Länge und Breite berechnet (§. 36.)

Weil die Winkel A und B klein sind; so kann die Breite ME näherungsweise kürzer berechnet werden. Wenn nemlich der Bogen ME von dem Bogen AR in r geschnitten wird; so ist nahe $MR = Mr$, und daher beynahe $ME = MR + rE$. Aber $\text{Sin.}\, AM : \text{Sin.}\, MR = \text{Sin. tot.} : \text{Sin.}\, A$, und $\text{Sin.}\, Br : \text{Sin.}\, rE = \text{Sin. tot.} : \text{Sin.}\, B$; folglich ist, wenn man statt der Sinus der kleinen Winkel A, B, und der Sinus von MR und rE die Bogen selbst, und die jovicentrische Länge des Trabanten in seiner Bahn $= l$ setzt, weil AM und Ar wenig von einander verschieden sind, sehr nahe

4.) $ME = i\, \text{Sin.}\, (l - n) + \mathfrak{J}\, \text{Sin.}\, (l - N)$.

Es ist auch $ME = i\, \text{Sin.}\, l\, \text{Cos.}\, n - i\, \text{Cos.}\, l\, \text{Sin.}\, n + \mathfrak{J}\, \text{Sin.}\, l\, \text{Cos.}\, N - \mathfrak{J}\, \text{Cos.}\, l\, \text{Sin.}\, N$

$= (i\, \text{Cos.}\, n + \mathfrak{J}\, \text{Cos.}\, N)\, \text{Sin.}\, l - (i\, \text{Sin.}\, n + \mathfrak{J}\, \text{Sin.}\, N)\, \text{Cos.}\, l$

Aber, wenn die Länge des auf die Ebene BE der Ekliptik sich beziehenden Knotens C der Bahn des Trabanten $= N'$, und ihre Neigung MCE gegen die Ekliptik $= J'$ gesetzt wird, ist ebenfalls nahe

$ME = \mathfrak{J}'\, \text{Sin.}\, (l - N') = \mathfrak{J}'\, \text{Cos.}\, N'\, \text{Sin.}\, l - \mathfrak{J}'\, \text{Sin.}\, N'\, \text{Cos.}\, l$.

Vergleicht man die Coefficienten von $\text{Sin.}\, l$ und $\text{Cos.}\, l$ in den zwey Ausdrücken der Breite ME mit einander; so erhält man

5.) $J' \text{Cos.} N' = i \text{Cos.} n + J \text{Cos.} N$

6.) $J' \text{Sin.} N' = i \text{Sin.} n + J \text{Sin.} N$, und daher

7.) $\text{Tg.} N' = \dfrac{i \text{Sin.} n + J \text{Sin.} N}{i \text{Cos.} n + J \text{Cos.} N}$.

Man bestimmt die Länge N' des aufsteigenden Knotens in der Ekliptik mittelst ihrer Tangente so, daß ihr Sinus mit dem Zähler, und ihr Cosinus mit dem Nenner in dem Ausdruck derselben einerley Zeichen bekommt. Hat man N gefunden; so erhält man J' durch eine der zwey Gleichungen n. 5. und 6.

§. 224. Von der Erde aus gesehen erscheinen die Bahnen der Trabanten des Jupiters als schmale Ellipsen oder als gerade Linien. Um ihre Gestalt und Lage für jede gegebene Zeit zu bestimmen; denke man sich eine mit dem Mittelpunkt des Jupiters concentrische Kugel (Fig. 75.) welche von der Ebene der Ekliptik in dem grösten Kreis DNB geschnitten werde. Es sey E der Pol dieses Kreises, und P der Pol des grösten Kreises MNQ, in dessen Ebene die Bahn eines der Trabanten liege. Die durch den Mittelpunkt des Jupiters mit der von der Erde an den Punkt der Frühlingsnachtgleiche gehenden geraden Linie gezogene Parallele treffe den Kreis DB in V, die gerade Linie, welche die Mittelpunkte des Jupiters und der Erde mit einander verbindet, schneide die Oberfläche der Kugel in T, und der auf die Ekliptik bezogene aufsteigende Knoten der Bahn des Trabanten sey in N. Man lege durch P, E und T die Bogen PE, ET gröster Kreise der Kugel; so ist VR die jovicentrische Länge der Erde = der um 180 Grade vermehrten geocentrischen Länge l des Jupiters, RT die (in der Figur südlich angenommene) jovicentrische Breite der Erde = der geocentrischen Breite b des Jupiters mit entgegengesetzten Zeichen genommen, und VN die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens der Bahn des Trabanten in der Ekliptik, gegen welche sie um einen Winkel i geneigt ist, dessen Maaß der Bogen PE ist. Da der Bogen TAP durch den Pol P des Kreises MNQ geht; so steht er in A auf der Bahn des Trabanten senkrecht, und mißt daher die Neigung der von der Erde an den Mittelpunkt des Jupiters gezogenen Gesichtslinie gegen die Ebene der Bahn des Trabanten. Folglich verhält sich die große Axe der dem Beobachter auf der Erde als eine Ellipse erscheinenden Bahn des Trabanten zu ihrer kleinen Axe wie der Sinus totus zu dem Sinus von AT. Ferner ist der Winkel ETP dem Winkel gleich, welchen die kleine Axe dieser Ellipse mit dem durch den Jupiter gehenden Breitenkreis macht; mithin bestimmen AT und ETP die Gestalt und Lage derselben. Endlich mißt der Bogen NA den jovicentrischen Abstand des Trabanten, wenn er sich in dem gegen die Erde gekehrten Endpunkt der kleinen Axe der Ellipse befindet, von seinem auf die Ekliptik bezogenen aufsteigenden Knoten N, mittelst dessen man den Ort des Trabanten in der Ellipse wird bestimmen können. Um nun aus NR und RT, NA und AT zu finden, betrachte man NR und RT als Länge und Breite, NA und AT als gerade Aufsteigung und Abweichung des Punkts T; so hat man nach §. 36., wenn man den Bogen NT zieht, und den Hülfswinkel $RNT = y$ setzt,

$$1.)\ \text{Tg.}\, y = \frac{\text{Tg.}\, RT}{\text{Sin.}\, RN} = \frac{\text{Tg.}\, b}{\text{Sin.}\, (☊ - l)}$$

$$2.)\ \text{Sin.}\, AT = \frac{\text{Sin.}\, RT\, \text{Sin.}\, (ANR + y)}{\text{Sin.}\, y} = \frac{\text{Sin.}\, b\, \text{Sin.}\, (i + y)}{\text{Sin.}\, y}$$

$$3.)\ \text{Tg.}\, NA = \frac{\text{Tg.}\, RN\, \text{Cos.}\, (ANR + y)}{\text{Cos.}\, y} = - \frac{\text{Tg.}\, (☊ - l)\, \text{Cos.}\, (i + y)}{\text{Cos.}\, y},$$

und weil $\left.\begin{matrix}\text{Sin.}\, PT \\ \text{Cos.}\, AT\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Sin.}\, PET \\ \text{Cos.}\, RN\end{matrix}\right\} = \text{Sin.}\, PE : \text{Sin.}\, PTE$; so ist

$$4.)\ \text{Sin.}\, PTE = - \frac{\text{Sin.}\, i\, \text{Cos.}\, (☊ - l)}{\text{Cos.}\, AT}.$$

Aus n. 2. und 3. erhält man auch, wenn man den Sinus und Cosinus von $i + y$ entwickelt die Divisionen mit Sin. y und Cos. y wirklich macht, und aus n. 1. den Werth von Tg. y statt $\frac{\text{Sin.}\, y}{\text{Cos.}\, y}$ substituirt,

$$5.)\ \text{Sin.}\, AT = \text{Sin.}\, i\, \text{Cos.}\, b\, \text{Sin.}\, (☊ - l) + \text{Sin.}\, b\, \text{Cos.}\, i$$

$$6.)\ \text{Tg.}\, NA = \frac{\text{Sin.}\, i\, \text{Tg.}\, b}{\text{Cos.}\, (☊ - l)} - \text{Cos.}\, i\, \text{Tg.}\, (☊ - l)$$

Wenn die geocentrische Breite des Jupiters südlich ist; so setzt man b negativ. Wenn Tg. NA positiv ist; so nimmt man den Bogen NA im ersten oder dritten Quadranten, je nachdem $☊ - l$ in den ersten und vierten, oder in den zweyten und dritten Quadranten fällt. Ist aber Tg. NA negativ; so nimmt man den Bogen NA im zweyten oder vierten Quadranten, je nachdem $☊ - l$ in den ersten und vierten, oder in den zweyten und dritten Quadranten fällt.

Um die scheinbare Bahn des Trabanten zu verzeichnen, beschreibe man mit einem beliebigen zur Einheit angenommenen Halbmesser einen Kreis (Fig. 76.) und ziehe den Durchmesser EE', welcher ein Stück des durch den Mittelpunkt des Jupiters gehenden, als eine gerade Linie erscheinenden Breitenkreises vorstelle. Man nehme an, der Halbzirkel EGE' falle auf diejenige Seite des Breitenkreises, nach welcher hin man die directen Bewegungen rechnet, und der Punkt E liege nördlich von C. Man nehme den Winkel ECP dem mittelst seines Sinus nach n. 4. gefundenen spitzen Winkel gleich, und zwar auf der Seite

G von E, wenn sein Sinus das Vorzeichen — behält; auf der Seite F hingegen, wenn er positiv wird, ziehe den Durchmesser PP' und auf diesen den Durchmesser DF senkrecht. Von C an nehme man auf dem Durchmesser PP' beyderseits $CA = CB =$ dem nach n. 5. gefundenen Sinus von AT (Fig. 75.), und beschreibe mit den Axen DF und AB eine Ellipse, welche die von der Erde aus gesehene scheinbare Bahn des Trabanten seyn wird. Findet sich der Sinus von AT positiv; so fällt der zwischen C und P liegende Endpunkt A der kleinen Axe zwischen die Erde und den Jupiter, hingegen fällt der andere Endpunkt B zwischen die Erde und dem Jupiter, wenn der Sinus von AT negativ wird. Um noch die scheinbare Lage des Trabanten in seiner Bahn zu bestimmen, berechne man seine jovicentrische Länge, und ziehe von ihr (wo nöthig um 360° vergrößert) die Summe der Länge seines aufsteigenden Knotens in der Ekliptik und des nach n. 6. gefundenen Bogens NA ab. Von P an nehme man den Bogen PM' nach der Richtung $PFP'G$ dem gefundenen Ueberschuß gleich, wenn Sin. AT positiv, hingegen von P' an nach der Richtung $P'FG$, wenn Sin. AT negativ ist, und ziehe durch M' die Parallele $M'O$ mit PP'; so wird der mit dem Punkt M' auf einerley Seite der grosen Axe DF liegende Durchschnittspunkt M der Ellipse und der Parallele der Ort des Trabanten in seiner scheinbaren Bahn seyn.

Beschreibt man aus C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser Cr einen Kreis, welcher sich zu CF verhält, wie der Halbmesser des Jupiters zu dem mittleren Abstand des Trabanten von seinem Mittelpunkt, und bestimmt den Ort des Trabanten in seiner scheinbaren Bahn für den Augenblick des Anfangs und des Endes einer Verfinsterung; so werden nur diejenige Eintritte und Austritte sichtbar seyn, für welche die scheinbaren Oerter des Trabanten ausserhalb des Umfangs jenes Kreises fallen, und man wird hienach beurtheilen können, ob bey einer Verfinsterung der Eintritt, oder der Austritt, oder beyde zugleich sichtbar seyen.

§. 225. Die grösseren Ungleichheiten, welche man in den Bewegungen der Jupiterstrabanten beobachtet hat, sind folgende. Erstlich zeigen ihre Umlaufszeiten in Beziehung auf die Scheibe des Jupiters eine Ungleichheit, welche von dem Winkel abhängt, unter welchem die von dem Mittelpunkt des Jupiters an die Mittelpunkte der Erde und der Sonne gezogenen geraden Linien sich schneiden. Dieser beträgt in den mittleren Distanzen des Jupiters und der Erde von der Sonne 11° 4′ 53″, und daher können jene Zusammenkünfte um so viel früher oder später eintreffen, als die Zeit ausmacht, welche die Trabanten zu der Beschreibung jenes Winkels gebrauchen. Es gründet sich hierauf die im 105ten §. gezeigte Methode den Abstand des Jupiters von der Sonne zu finden. Auf die Zeiten der Verfinsterungen und auf die synodischen Umlaufszeiten der Trabanten hat übrigens diese Ungleichheit keinen Einfluß.

Die zweyte Ungleichheit hängt von der ungleichförmigen Bewegung des Jupiters um die Sonne ab, und hat einen beträchtlichen Einfluß auf die synodischen Umlaufszeiten der Trabanten. Denn die synodische Umlaufszeit eines Trabanten übertrifft die periodische Umlaufszeit desselben um die Zeit, welche der Trabant gebrauchte, um den während der ersteren von dem Jupiter durchlaufenen Bogen zu beschreiben, und da dieser nach der größeren oder kleineren Geschwindigkeit des Jupiters bald größer, bald kleiner ist; so werden die synodischen Umlaufszeiten ungleich seyn, und der Unterschied zwischen der mittleren und wahren aus dem Jupiter gesehenen Opposition des Trabanten mit der Sonne kann so viel betragen, als der Trabant Zeit gebraucht, um einen Winkel zu beschreiben, welcher der größten Gleichung des Mittelpunkts des Jupiters gleich ist. Diese Ungleichheit hängt also von der mittleren Anomalie des Jupiters ab, und bringt eine scheinbare Irregularität in die Zeiten der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten.

Die dritte Ungleichheit rührt von der nicht augenblicklichen Fortpflanzung des Lichts her (§. 107.), wegen welcher die Verfinsterungen sich verzögern, wenn der Abstand des Jupiters von der Erde wächst, und wiederum früher eintreten, wenn jener Abstand abnimmt. Man nennt die deswegen nöthige Correction der berechneten Verfinsterungen die große Lichtgleichung, welche man für die verschiedenen Stellungen der Erde gegen den Jupiter und die Sonne unter der Voraussetzung eines unveränderlichen Abstands des Jupiters von der Sonne berechnet hat. Wegen der Excentricität der Bahn des Jupiters verändert sich aber dieser Abstand um 0,0481784 der mittleren Distanz dieses Planeten von der Sonne (S. 300.) oder sehr nahe um den vierten Theil des mittleren Abstands der Erde von der Sonne, wozu das Licht eine Zeit von 4' 3",3 gebraucht (§. 107.). Folglich wird noch eine Verbesserung der berechneten Zeiten der Verfinsterungen erfordert, welche man die kleine Lichtgleichung nennt, und welche von der mittleren Anomalie des Jupiters abhängt. Alle diese Ungleichheiten beziehen sich also nicht auf die wahren Bewegungen der Jupiterstrabanten.

§. 226. Es zeigen sich aber auch merkliche Ungleichheiten in den Bewegungen dieser Trabanten selbst, welche sich gröstentheils nach ihren verschiedenen Stellungen gegen einander richten. Der erste und zweyte Trabant bewegen sich sehr nahe in kreisförmigen Bahnen um den Jupiter, und, wenn man die von den verschiedenen Lagen der Trabanten gegeneinander abhängende Ungleichheiten vorläufig in Rechnung bringt, nahe mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, und daher sind die Sectoren, welche ihre Radii Vectores beschreiben, der Zeit proportional. Die Bahn des dritten Trabanten zeigt eine kleine Excentricität, und die davon abhängende Mittelpunktsgleichung richtet sich nach den keplerischen Gesetzen der elliptischen Bewegung. Nach den Beobachtungen ist diese Excentricität veränderlich. Um das Jahr 1682 war nemlich die gröste Gleichung des Mittelpunkts = 13' 16", und hatte ihren grösten Werth. Im Jahr 1777 war sie am kleinsten, und = 5' 7". Die Bahn des vierten Trabanten ist sehr merklich elliptisch. Ihre gröste Mittelpunktsgleichung ist = 50' 2". Auch diese hängt von der Anomalie des Trabanten nach dem keplerischen Gesetz der elliptischen Bewegung der Planeten ab; so daß die Radii Vectores den Zeiten proportionale Flächenräume beschreiben.

Endlich beobachtet man die keplerische Proportion zwischen den Würfeln mittleren Entfernungen der Trabanten von dem Jupiter und den Quadraten ihrer siderischen Umlaufszeiten. Setzt man den Abstand des ersten Trabanten von dem Jupiter = 1; so sind die Abstände der Trabanten von dem Mittelpunkt des Jupiters *)

*) *Newtoni* philos. nat. princ. math. L. III. Phænom. I.

nach den	I.	II.	III.	IV.
Beobachtungen Borelli's	1	1,53	2,47	4,35
Townlei mit dem Mikrom.	1	1,59	2,44	4,18
Cassini's mit dem Teleskop	1	1,60	2,60	4,60
— aus den Verfinster. der Trabanten *)	1	1,59	2,69	4,46
nach dem dritten keplerischen Gesetz	1	1,59	2,54	4,46

Die gröſte heliocentrische Elongation des vierten Trabanten des Jupiters von seinem Mittelpunkt fand Pound mit dem Mikrometer einer fünfzehn Fuß langen Fernröhre in der mittleren Distanz des Jupiters von der Erde oder der Sonne = 8' 16", die des dritten in derselben Distanz mit dem Mikrometer einer 123 Fuß langen Fernröhre = 4' 42", und mittelst eben dieser Fernröhre den scheinbaren Durchmesser des Jupiters in seiner mittleren Entfernung von der Sonne beständig kleiner als 40", aber niemals kleiner als 38" **). Setzt man den scheinbaren Durchmesser des Aequators des Jupiters in seiner mittleren Entfernung nach §. 109. auf 38",2; so wären hienach die mittleren Abstände des dritten und vierten Trabanten in Halbmessern des Aequators des Jupiters ausgedrückt 14,7644 und 25,96859. Aus dem letztern folgt nach dem dritten keplerischen Gesetz der Abstand des dritten Trabanten = 14,76475, sehr nahe mit diesen Messungen übereinstimmend.

§. 227. Die Bewegungen der sieben Trabanten des Saturns sind noch nicht genau bekannt. Wegen der Schwierigkeit, ihre Elongationen von dem Saturn zu messen, kennt man nur ihre Umlaufszeiten und ihre mittleren Entfernungen mit

*) Cassini schloß aus der Hälfte der gröſten Dauer der Verfinsterung mittelst der synodischen Umlaufszeit des Trabanten die jovicentrische scheinbare Größe des Halbmessers des Schattens, dessen wahren Halbmesser er dem Halbmesser des Jupiters gleich setzte. Unter dieser Voraussetzung ist der scheinbare Halbmesser des Schattens dem scheinbaren Halbmesser des Jupiters von dem Trabanten aus gesehen gleich, woraus sich das Verhältniß seines Abstands von dem Jupiter zu dem Halbmesser des Jupiters ergiebt.

**) A. a. O. der Princip.

einiger Genauigkeit, und selbst über die letzteren bleibt noch einige Ungewißheit übrig. Man weiß nur so viel, daß ihre Bahnen nahe kreisförmig sind, und nur die Ellipticität der Bahn des sechsten (oder des ehmaligen vierten) merklich ist. Die Bahnen der sechs ersten Trabanten liegen nahe in der erweiterten Ebene des Rings, welcher den Saturn umgiebt. Denn sie scheinen sich in geraden Linien hin und her zu bewegen, wenn der Ring verschwindet, und in den übrigen Fällen Ellipsen zu beschreiben, welche der elliptischen Figur des Rings ähnlich sind. Die Bahnen dieser Trabanten sind daher um 30° 20′ (§. 113) gegen die Ekliptik geneigt. Die Länge des aufsteigenden Knotens des Rings in der Ekliptik war im Jahr 1803 nach Schröters *) Beobachtungen = 167° 19′, und da der Knoten dieses Rings keine merkliche siderische Bewegung hat; so findet man hieraus seine Länge für eine andere gegebene Zeit, wenn man das Zurückweichen der Aequinoktialpunkte in Rechnung bringt. Mittelst der §. 191. angegebenen Länge des aufsteigenden Knotens der Saturnsbahn und ihrer Neigung gegen die Ekliptik findet man nach §. 223. die Länge des aufsteigenden Knotens des Rings und der Bahn der sechs ersten Saturnstrabanten in der Bahn des Saturns für das Jahr 1803 = 170° 51′, und die Neigung desselben gegen die Bahn des Saturns = 29° 58′ 51″. Gewöhnlich setzt man diese Neigung in runder Zahl auf 30° 0′.

Die Bahn des siebenten (oder des ehmaligen fünften) Saturnstrabanten liegt nicht in der Ebene des Rings. Cassini beobachtete im Jahr 1714, daß die Bahn dieses Trabanten als eine gerade Linie erschien, als der Ring noch eine elliptische Gestalt hatte. Aus diesen Beobachtungen fand Lalande **) die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des siebenten Trabanten in der Ekliptik = 150° 27′, ihre Neigung gegen die Ekliptik = 24° 45′, und die Länge ihres aufsteigenden Knotens in der Bahn des Saturns = 154° 10′. Aus den von Bernard im Jahr 1787 zu Marseille angestellten Beobachtungen berechnete Lalande ***) die Län-

*) Kronographische Fragmente, pag. 210.
**) Astronomie, T. III. pag. 209. n. 3074. III. édit.
***) Ebendaselbst.

ge des aufsteigenden Knotens des Trabanten in der Ekliptik $= 145° 5'$, die Neigung gegen die Ekliptik $= 24° 45'$, die Länge des aufsteigenden Knotens des Trabanten in der Saturnsbahn $= 148° 20'$, und die Neigung gegen die letztere $= 22° 42'$. Mittelst der von Schröter gefundenen Länge des aufsteigenden Knotens des Rings findet man die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des siebenten Saturnstrabanten in der Ekliptik $= 144° 57' 8''$, die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik $= 24° 45' 17''$, die Länge ihres aufsteigenden Knotens in der Bahn des Saturns $= 148° 11' 42'$, und die Neigungen gegen die letztere $= 22° 42'$. Die Knotenlinie dieses Trabanten hat also eine merkliche retrograde Bewegung.

§. 228. Die von der Erde aus gesehene Gestalt und Lage der Bahnen der Saturnstrabanten können nach den im 224ten §. für die Jupiterstrabanten gegebenen Regeln gefunden werden, wenn man statt der geocentrischen Länge und Breite des Jupiters, der Neigungen der Bahnen seiner Trabanten gegen die Ekliptik und der Längen ihrer aufsteigenden Knoten die auf den Saturn und seine Trabanten sich beziehende gleichnamige Größen setzt. Nach eben diesen Regeln findet man für jede gegebene Zeit die von der Erde aus gesehene Gestalt und Lage des Rings des Saturns, wenn man in den Formeln n. 4. und 5. des 224ten §. die geocentrische Länge des Saturns $= l$, seine geocentrische Breite $= b$ (südliche Breite negativ), die Länge des aufsteigenden Knotens des Rings in der Ekliptik $= \Omega$, und seine Neigung gegen die Ekliptik $= i$ setzt. Es verhalte sich die kleine Axe der elliptischen Figur des Rings zur großen wie $n : 1$; so ist nach n. 5.

1.) $n = \text{Sin.}\, i \,\text{Cos.}\, b \,\text{Sin.}\, (\Omega - l) + \text{Sin.}\, b \,\text{Cos.}\, i$, und zwar ist die Südseite des Rings gegen die Erde gekehrt, wenn n positiv, die Nordseite hingegen, wenn n negativ herauskommt.

Setzt man die heliocentrische Länge des Saturns $= l'$, und seine heliocentrische Breite $= b'$; so hat man für die aus der Sonne gesehene Gestalt des Rings

2.) $n' = \text{Sin.}\, i \,\text{Cos.}\, b' \,\text{Sin.}\, (\Omega - l') + \text{Sin}\, b' \,\text{Cos.}\, i$, und es ist die Südseite oder die Nordseite des Rings von der Sonne beleuchtet, je nachdem n' positiv oder negativ ist.

Der Ring verschwindet nun, oder zeigt sich durch starke Teleskope nur noch als eine gerade Linie, erstlich, wenn $n = 0$, oder $\text{Sin.}\, (l - \Omega) = \text{Tg.}\, b \,\text{Cos.}\, i$ wird, wo seine erweiterte Ebene durch den Mittelpunkt der Erde geht.

Zweytens, wenn $n' = 0$, oder $\text{Sin.}\, (l' - \Omega) = \text{Tg.}\, b' \,\text{Cos.}\, i$

wird, wo seine erweiterte Ebene durch die Sonne geht, und nur noch seine schmale Kante beleuchtet wird.

Drittens, wenn n und n' verschiedene Zeichen haben, weil alsdenn die von der Sonne beleuchtete Seite des Rings von der Erde abgekehrt ist. Man sieht alsdenn durch starke Teleskope den Schatten des Rings auf dem Saturn, und zwar auf der Süd- oder Nordseite des Rings, je nachdem n' negativ oder positiv ist.

Wenn $☊ - l = 90^\circ$ oder $= 270^\circ$; so wird $n = \text{Sin.}(i + b)$ oder $= - \text{Sin.}(i - b)$. Im ersten Fall ist $l = ☊ - 90^\circ = 2\,Z.\,17^\circ\,19'$, im zweyten $l = ☊ - 270^\circ = 8\,Z.\,17^\circ\,19'$, und daher, weil die Länge des aufsteigenden Knotens des Saturns 3 Z. 21° 57′ ist, im ersten Fall die Breite des Saturns südlich, im zweyten nördlich. Mithin wird die gröste Breite des Rings in beyden Fällen durch die Breite des Saturns vermindert. Dividirt man die kleine Axe des Rings, wenn er am breitesten erscheint, mit seiner großen Axe, und addirt zu dem Winkel, welcher diesem Quotienten als Sinus für den Halbmesser 1 betrachtet entspricht, die gleichzeitige geocentrische Breite des Saturns; so hat man nahe den Neigungswinkel i des Rings gegen die Ekliptik. Wenn der Ring aus der ersten der oben angeführten Ursachen verschwindet; so findet man $\text{Sin.}(l - ☊) = \text{Tg.}\,b\,\text{Cotg.}\,i$ mittelst der beobachteten geocentrischen Breite b des Saturns, woraus sich die Länge des aufsteigenden Knotens des Rings in der Ekliptik mittelst der beobachteten geocentrischen Länge des Saturns ergiebt. Hat man einmal die Länge des Knotens des Rings nahe gefunden; so findet man aus der beobachteten grösten Breite des Rings und der geocentrischen Länge und Breite des Saturns nach n. 1. die Neigung i genauer, mittelst welcher wiederum die Länge des aufsteigenden Knotens des Rings, wenn seine Breite verschwindet, berichtigt werden kann.

§. 229. Vergleicht man die siderischen Umlaufszeiten der Saturnstrabanten mit ihren mittleren Entfernungen von dem Mittelpunkt des Saturns; so findet man wiederum, daß nach dem dritten keplerischen Gesetz die Quadrate der erstern den Würfeln der letztern proportional sind. Setzt man den Abstand des dritten (oder des ehmaligen ersten) Trabanten von dem Mittelpunkt des Saturns = 1; so sind die Abstände der fünf älteren Trabanten *)

	III.	IV.	V.	VI.	VII.
nach den Beobachtungen	1	1,282	1,795	4,102	12,308
nach dem 3ten kepl. Gesetz	0,989	1,267	1,770	4,102	11,956

*) Newtoni princip. L. III. Phænom. II.

Die Unterschiede sind kleiner, als die Fehler, welchen man bey diesen Beobachtungen ausgesetzt ist. Die in dem 117ten §. angegebenen Abstände des ersten und zweyten Trabanten sind, so wie die übrigen, aus dem Abstand des sechsten nach der keplerischen Regel mittelst ihrer siderischen Umlaufszeiten berechnet.

Was man bis jezt von den sechs Trabanten des Uranus weiß, ist schon oben in dem 122sten §. angeführt worden. Die daselbst angegebenen Umlaufszeiten sind, mit Ausnahme der des zweyten und vierten Trabanten, aus den beobachteten grösten Elongationen nach der keplerischen Regel berechnet, welche durch die Beobachtungen des zweyten und vierten Trabanten auch hier bestätigt wird, so daß sie als ein allgemeines Gesez angesehen werden muß, welches die um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt laufende Körper beobachten.

Drittes Buch.

Von den Gesetzen der Bewegung, und ihrer Anwendung auf die Bewegung der Himmelskörper.

Erstes Capitel.

Von den Gesetzen der Bewegung.

§. 230. Wenn ein Körper sich bewegt; so kann man die Bewegung eines Punkts desselben besonders betrachten, und sodenn die Bewegungen seiner übrigen Punkte in Beziehung auf diesen bestimmen. Ist der Körper ein fester, und gehen alle Punkte desselben nach parallelen Richtungen fort; so ist die Bewegung des Körpers bestimmt, wenn man die Bewegung eines seiner Punkte kennt. Befindet sich aber einer seiner Punkte in Ruhe, während andere Punkte desselben sich bewegen; so wird dadurch eine Umdrehung des Körpers um eine durch den ruhenden Punkt gehende Axe entstehen, welche bestimmt ist, wenn man die Lage der Umdrehungsaxe, und die Bewegung eines ausserhalb derselbigen befindlichen Punkts des Körpers kennt. Finden beyde Bewegungen zugleich statt; so kann die ganze Bewegung des Körpers in zwey Bewegungen zerfällt werden, nemlich in die progressive Bewegung eines seiner Punkte, und in die drehende Bewegung eines anderen Punkts desselben um eine durch den ersteren gehende Axe. So ist die Bewegung der Planeten um die Sonne aus einer fortschreitenden Bewegung ihrer Mittelpunkte und einer Umdrehungsbewegung um ihre Axen zusammengesetzt. Dadurch, daß man jede dieser Bewegungen besonders betrachtet, wird die Untersuchung derselben sehr vereinfacht, und auf die Betrachtung der Bewegung von Punkten zurückgeführt, welche geradlinigt oder krummlinigt ist, je nachdem der sich bewegende Punkt eine gerade oder krumme Linie beschreibt. Im ersteren Fall versteht man unter der Richtung der Bewegung die Richtung der beschriebenen geraden Linie selbst, im letztern aber die Richtung der geraden Linie, welche den krummlinigten Weg in demjenigen Punkt berührt, in welchem sich der Körper in dem Augenblick befindet, für welchen man die Richtung seiner Bewegung angiebt.

§. 231. Die einfachste Bewegung ist diejenige, wenn ein Punkt in einer geraden Linie sich so bewegt, daß er in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, und heißt eine gleichförmige Bewegung. Es seyen die in den Zeiten t und T mit einer gleichförmigen Bewegung beschriebenen Wege a und A, und m, n zwey beliebige ganze Zahlen; so wird $ma \gtreqless nA$ seyn, je nachdem $mt \gtreqless nT$ ist. Folglich sind bey jeder gleichförmigen Bewegung die Räume den Zeiten proportional, in welchen sie beschrieben worden sind, oder es ist

1.) $a : A = t : T$.

Der mit einer anderen gleichförmigen Bewegung in der Zeit T' beschriebene Weg sey A', so wird man den in der Zeit t durch diese Bewegung beschriebenen Weg a' durch die Proportion finden $T' : t = A' : a'$. Dadurch ist das Verhältniß der mit den zwey Bewegungen in einerley Zeit t beschriebenen Räume a und a' gegeben, welches man das Verhältniß der Geschwindigkeit dieser Bewegungen nennt. Da die Zeit t bey der Berechnung dieser Räume nach Belieben angenommen werden kann; so kan man sie auch der Zeiteinheit gleich setzen, durch welche man die Zeiten der Bewegungen mißt, zum Beyspiel = 1 Sekunde, und alsdenn heißen die in der angenommenen Zeiteinheit beschriebenen Räume die Geschwindigkeiten der Bewegungen. Demnach wird seyn, wenn man sich die Zeiten durch Zahlen ausgedrückt denkt,

$T : 1 = A$: Geschwindigkeit c der ersten Bewegung,

$T' : 1 = A'$: Geschwindigkeit c' der zweyten Bewegung,

Oder 2.) $c = \frac{A}{T}$; $c' = \frac{A'}{T'}$.

Hieraus folgt 3.) $A = cT$; $A' = c'T'$

und 4.) $A : A' = cT : c'T'$,
oder die mit ungleichen Geschwindigkeiten und in ungleichen Zeiten beschriebenen Räume sind im zusammengesetzten Verhältniß der Zeiten und der Geschwindigkeiten. Ferner ist aus n. 2.

5.) $c : c' = \frac{A}{T} : \frac{A'}{T'} = AT' : A'T$, oder die Geschwindigkeiten sind im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der Räume und dem umgekehrten der Zeiten, in welchen sie beschrieben wurden. Endlich folgt aus n. 3.

6.) $T = \frac{A}{c}$; $T' = \frac{A'}{c'}$, und

$T : T' = \frac{A}{c} : \frac{A'}{c'} = Ac' : A'c$, oder die Zeiten, in welchen ungleiche Räume beschrieben werden, sind im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der beschriebenen Räume und dem umgekehrten der Geschwindigkeiten.

§. 232. Eine Bewegung heißt ungleichförmig, wenn in gleichen Zeiten ungleiche Räume beschrieben werden, und zwar nennt man sie eine beschleunigte oder verzögerte, je nachdem in jedem nächstfolgenden Zeittheilchen ein größerer oder kleinerer Raum beschrieben wird, als in dem vorhergehenden gleich grossen Zeittheilchen. Sind die in gleichen Zeiten beschriebenen Räume beständig ungleich, wie klein man auch die Zeiten nehmen mag; so heißt die Bewegung eine stetig ungleichförmige oder sich stetig verändernde Bewegung. In diesem Fall wird man fürs erste, wenn von der Geschwindigkeit der Bewegung die Rede ist, die Zeit oder den Endpunkt des beschriebenen Wegs angeben müssen, welchen die gesuchte oder gegebene Geschwindigkeit entsprechen soll, und fürs zweyte wird man sie nicht mehr, wie bey der gleichförmigen Bewegung, dadurch bestimmen können, daß man zu irgend einer von einem gegebenen Zeitpunkt an verfloßenen Zeit, zu der Zeiteinheit und zu dem in der ersteren Zeit beschriebenen Raum die vierte geometrische Proportionalgröße sucht, oder, den Raum mit der die Zeit messenden Zahl dividirt, weil man eben so viele verschiedene Resultate erhalten wird, als man verschiedene von dem gegebenen Punkt an beschriebene kleinere oder größere Räume mit der zu ihrer Beschreibung gebrauchten Zeit verglichen hat. Sind nemlich die in einerley Zeit z unmittelbar nach einander beschriebene Räume a, und $a+b$; so wird der in der Zeit $2z$ beschriebene Raum $= 2a+b$, und $\frac{2a+b}{2z} = \frac{a}{z} + \frac{b}{2z}$ seyn, welcher Ausdruck nur alsdenn $= \frac{a}{z}$ wird, wenn b verschwindet, mithin die Bewegung gleichförmig ist. Die Geschwindigkeit einer sich stetig verändernden Bewegung kann also nicht durch die unmittelbare Vergleichung des wirklich beschriebenen Raums mit der dazu gebrauchten Zeit nach §. 231. n. 2. gefunden werden, aber man kann den Raum zu bestimmen suchen, welcher von einem gegebenen Punkt an in einer gegebenen Zeit würde beschrieben worden seyn, wenn von diesem Punkt an die Bewegung gleichförmig wäre fortgesetzt worden, und diesen Raum mit dem von einer gegebenen gleichförmigen Bewegung beschriebenen Raum vergleichen. Man versteht daher unter der Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung in einem gegebenen Punkt oder zu einer gegebenen Zeit den Raum, welcher von da an in einem gegebenen Zeitraum, z. B. in der zur Einheit angenommenen Zeit, würde beschrieben worden seyn, wenn der sich bewegende Punkt diejenige Bewegung gleichförmig fortgesetzt hätte, welche er in dem gegebenen Zeitpunkt hatte. Zu ihrer Bestimmung werden folgende vier Grundsätze erfordert:

1.) Der mit einer stetig beschleunigten Bewegung in einer gegebenen Zeit beschriebene Raum ist größer als der Raum, welcher während derselben Zeit mit der ihrem Anfang entsprechenden Geschwindigkeit gleichförmig würde beschrieben worden seyn.

2.) Der mit einer stetig beschleunigten Bewegung in einer gegebenen Zeit beschriebene Raum ist kleiner als der Raum, welcher während derselben Zeit mit der ihrem Ende entsprechenden Geschwindigkeit gleichförmig würde beschrieben worden seyn.

3.) Der mit einer stetig verzögerten Bewegung in einer gegebenen Zeit beschriebene Raum ist kleiner als der Raum, welcher während derselben Zeit mit der ihrem Anfang entsprechenden Geschwindigkeit gleichförmig würde beschrieben worden seyn.

4. Der mit einer stetig verzögerten Bewegung in einer gegebenen Zeit beschriebene Raum ist größer als der Raum, welcher während derselben Zeit mit der ihrem Ende entsprechenden Geschwindigkeit gleichförmig würde beschrieben worden seyn.

§. 233. Es seyen z. B. die beschriebenen Räume den Quadraten der von Anfang der Bewegung an verflossenen Zeiten proportional; so wird, wenn die Zeit in Sekunden ausgedrückt wird, und der in der ersten Sekunde beschriebene Raum g heißt, der in der Zeit t beschriebene Raum $S = gt^2$ seyn. Setzt man ferner die in den Zeiten $t-z$ und $t+z$ beschriebene Räume $= S-s'$ und $S+s$; so wird man haben

$$S-s' = g(t-z)^2 = gt^2 - 2gtz + gz^2$$
$$S+s = g(t+z)^2 = gt^2 + 2gtz + gz^2$$

und die unmittelbar vor und nach dem Zeitpunkt, welcher dem Ende der Zeit t entspricht, während des Zeittheilchens z beschriebenen Räume werden, weil $S = gt^2$ ist, beziehungsweise $s' = 2gtz - gz^2$
und $s = 2gtz + gz^2$ seyn.

Die Bewegung ist in diesem Fall eine stetig beschleunigte Bewegung, weil s beständig größer ist als s', wie klein man auch das Zeittheilchen z annimmt. Die am Ende der Zeit t erreichte Geschwindigkeit der Bewegung heiße v; so wird der mit dieser Geschwindigkeit in der Zeit z gleichförmig beschriebene Raum $= vz$ (§. 231. N. 3.), und vermöge des ersten und zweyten Grundsatzes des vorhergehenden §. beständig

$vz < s$ oder $2gtz + gz^2$
aber $> s'$ oder $2gtz - gz^2$, mithin

I. $v < 2gt + gz$

II. $v > 2gt - gz$ seyn, wie klein man auch das Zeittheilchen z nehmen mag.

Da nun die Geschwindigkeit v beständig zwischen die zwey Größen $2gt + gz$ und $2gt - gz$ fallen muß, deren Unterschied $= 2gz$ ist, welcher durch die Verminderung von z kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden kann; so wird die gesuchte Geschwindigkeit selbst weder grösser noch kleiner als $2gt$ seyn können, und daher $= 2gt$ seyn. Wäre nemlich fürs erste $v > 2gt$; so sey $v = 2gt + a$. Man nehme die Zeit z kleiner als $\frac{a}{g}$; so wird $gz < a$, und $2gt + gz < 2gt + a$ seyn. Es ist aber vermöge der Voraussetzung $v = 2gt + a$; folglich müßte $v > 2gt + gz$ seyn, welches gegen n. I. ist. Wäre aber zweytens $v < 2gt$; so sey $v = 2gt - b$. Man nehme $z < \frac{b}{g}$; so wird $gz < b$, $2gt - gz > 2gt - b$ seyn. Da nun $v = 2gt - b$ (Voraussſ.); so müßte gegen n. II. die Geschwindigkeit $v < 2gt - gz$ seyn. Demnach kann v weder grösser noch kleiner als $2gt$ seyn, und daher ist $v = 2gt$, oder die Geschwindigkeit wächst der Zeit proportional. Wenn, wie in dem hier betrachteten Fall, die Geschwindigkeit der Zeit proportional wächst; so heißt die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte. Eine gleichförmig verzögerte Bewegung ist diejenige, bey welcher die Geschwindigkeit der Zeit proportional abnimmt.

§. 234. Umgekehrt, wenn die Geschwindigkeit der Zeit proportional wächst, oder die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist; so verhalten sich die ganzen beschriebenen Räume wie die Quadrate der vom Anfang der Bewegung an verflossenen Zeiten. Man denke sich die vom Anfang der Bewegung an verflossene Zeit t in n gleiche Theile getheilt; und die am Ende der ersten Sekunde erhaltene Geschwindigkeit sey $= k$; so werden die am Ende des ersten, zweyten, dritten ---- $n$ten Zeittheilchens erhaltene Geschwindigkeiten $\frac{kt}{n}$, $\frac{2kt}{n}$, $\frac{3kt}{n}$ ------ $\frac{nkt}{n}$ seyn. Die in dem ersten, zweyten, dritten, ----- $n$ten Zeittheilchen beschriebenen Räume seyen s', s'', s''', ---- s^N, und der ganze vom Anfang der Bewegung an während der Zeit t beschriebene Raum sey $= S$. Vermöge §. 231. n. 3. und des ersten Grundsatzes des 232 sten §. wird man haben

$$s' < \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

$$s'' < \frac{2kt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

$$s''' < \frac{3kt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

$$\vdots$$

$$s^N < \frac{nkt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

also $\left.\begin{matrix} s'+s''+\cdots+s^N \\ \text{oder } S \end{matrix}\right\} < \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n} (1+2+3+\cdots+n)$

$$< \frac{kt^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1)}{2} < \frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Vermöge des zweyten Grundsatzes aber

$$s' > 0$$

$$s'' > \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

$$s''' > \frac{2kt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

$$\vdots$$

$$s^N > \frac{(n-1)kt}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

also $\left.\begin{matrix} s'+s''\cdots+s^N \\ \text{oder } S \end{matrix}\right\} > \frac{kt}{n}\frac{t}{n} (1+2+3+\cdots+n-1)$

$$> \frac{kt^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} > \frac{1}{2}kt^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Mithin ist beständig, wie klein man auch die Zeittheilchen, wie groß man folglich n nehmen mag,

I. $S < \frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$

II. $S > \frac{1}{2}kt^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$,

und daher wird $S = \frac{1}{2}kt^2$ seyn. Wäre nemlich fürs erste $S > \frac{1}{2}kt^2$; so sey $S = \frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{r}\right)$. Man nehme $n > r$; so ist $\frac{1}{n} < \frac{1}{r}$, $1+\frac{1}{n} < 1+\frac{1}{r}$, und $\frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{r}\right)$. Die letztere Größe soll aber vermöge der Voraussetzung $= S$ seyn; folglich müßte $S > \frac{1}{2}kt^2(1+\frac{1}{n})$ seyn, welches gegen n. I. ist. Wäre aber $S < \frac{1}{2}kt^2$; so sey $S = \frac{1}{2}kt^2(1-\frac{1}{q})$. Man nehme $n > q$; so ist $\frac{1}{n} < \frac{1}{q}$; $1-\frac{1}{n} > 1-\frac{1}{q}$, und $\frac{1}{2}kt^2(1-\frac{1}{n}) > \frac{1}{2}kt^2(1-\frac{1}{q})$. Die letztere Größe ist aber vermöge der Voraussetzung $= S$; folglich müßte gegen n. II. der Raum S kleiner als $\frac{1}{2}kt^2(1-\frac{1}{n})$ seyn. Daher ist $S = \frac{1}{2}kt^2$, und der Raum S wächst weil k eine gegebene Größe ist, dem Quadrat der von Anfang der Bewegung an verflossenen Zeit proportional. Setzt man den in der ersten Sekunde beschriebenen Raum $\frac{1}{2}k = g$; so hat man wie in dem vorhergehenden §. $S = gt^2$.

Bey jeder gleichförmig beschleunigten Bewegung ist daher, wenn man den in der ersten Sekunde beschriebenen Raum $= g$, die vom Anfang der Bewegung an verflossene Zeit $= t$ Sekunden, die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit $= v$, und den in der Zeit t beschriebenen Raum $= s$ setzt,

1.) $s = gt^2$
2.) $v = 2gt$,
3.) $v^2 = 4g^2t^2 = 4gs$ (n. 1.)

§. 235. Die Bewegung sey wiederum eine gleichförmig beschleunigte, aber es sey jetzt im Anfang der Zeit t die Geschwindigkeit einer gegebenen Größe c gleich; so wird am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit $= c + kt$ seyn. Man wird nun auf ähnliche Art, wie in dem vorhergehenden §. wenn der in der Zeit t beschriebene Raum S heißt, erhalten,

$$S < n.c.\frac{t}{n} + \frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$< ct + \frac{1}{2}kt^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

und $S > ct + \frac{1}{2}kt^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$, woraus wiederum folgt

$S = ct + \frac{1}{2}kt^2 = ct + gt^2$, wenn $\frac{1}{2}k = g$ gesetzt wird.

Die Bewegung sey eine gleichförmig verzögerte, und im Anfang der Zeit t die Geschwindigkeit $= c$, der in der Zeit t beschriebene Raum sey $= S$; so wird am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit $= c - kt$ seyn, welche verschwindet, wenn $t = \frac{c}{k}$ wird. Es sey $t < \frac{c}{k}$, und man denke sich die Zeit t in n gleiche Theile getheilt; so werden die am Ende des ersten, zweyten, dritten, --- $n$ten Zeittheilchens erhaltene Geschwindigkeiten $c - \frac{kt}{n}$, $c - \frac{2kt}{n}$, $c - \frac{3kt}{n}$, --- $c - \frac{nkt}{n}$ seyn. Die nach einander in jedem der Zeittheilchen wirklich beschriebenen Räume seyen s', s'', s''' - s^N; so wird man vermöge des dritten Grundsatzes des 232sten §. haben

$$
\begin{aligned}
s' &< \frac{ct}{n} \\
s'' &< \frac{ct}{n} - \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n} \\
s''' &< \frac{ct}{n} - \frac{2kt}{n} \cdot \frac{t}{n} \\
&\vdots \\
s^N &< \frac{ct}{n} - \frac{(n-1)kt}{n} \cdot \frac{t}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{array}{c} s' + s'' + \cdots + s^N \\ \text{oder } S \end{array}\right\} < \frac{nct}{n} - \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n}\,(1 + 2 + \cdots + n - 1)
$$

$$
< ct - \frac{kt^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}
$$

$$
< ct - \tfrac{1}{2}kt\left(1 - \frac{1}{n}\right)
$$

und vermöge des vierten Grundsatzes

$$
\begin{aligned}
s' &> \frac{ct}{n} - \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n} \\
s'' &> \frac{ct}{n} - \frac{2kt}{n} \cdot \frac{t}{n} \\
&\vdots \\
s^N &> \frac{ct}{n} - \frac{nkt}{n} \cdot \frac{t}{n}
\end{aligned}
$$

also $\left.\begin{array}{c} s' + s'' + \cdots + s^N \\ \text{oder } S \end{array}\right\} > \frac{nct}{n} - \frac{kt}{n} \cdot \frac{t}{n}\,(1 + 2 + \cdots + n)$

$$
> ct - \tfrac{1}{2}kt^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)
$$

Und

Und nun kann wie in dem 234sten §. gezeigt werden, daß S weder kleiner noch größer seyn könne, als $ct - \frac{1}{2}kt^2$. Folglich ist $S = ct - \frac{1}{2}kt^2 = ct - gt^2$, wenn $k = 2g$ gesetzt wird.

§. 236. Lemma. Wenn a und b zwey Bogen eines mit dem Halbmeßer 1 beschriebenen Kreises bezeichnen, deren Summe kleiner als der vierte Theil seines Umfangs oder $\frac{1}{2}\pi$ ist; so ist für eben diesen Kreis

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sin.}(a+b) - \text{Sin.}\,a \\ \text{oder } 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Cos.}(a+\tfrac{1}{2}b)\end{array}\right\} < b\,\text{Cos.}\,a,\ \text{aber} > b\,\text{Cos.}(a+b)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{und Cos.}\,a - \text{Cos.}(a+b) \\ \text{oder } 2\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}b\,\text{Sin.}(a+\tfrac{1}{2}b)\end{array}\right\} > b\,\text{Sin.}\,a,\ \text{aber} < b\,\text{Sin.}(a+b)$$

Bew. Es seyen AA', BB' (Fig. 77.) zwey sich senkrecht schneidende Durchmesser des mit dem Halbmesser $CA = 1$ beschriebenen Kreises, und von den Punkten M, m des Bogen AB seyen die Perpendickel MP, mp auf CA, und die Perpendickel MQ, mq auf CB gefällt. Man ziehe an die Punkte M, m die Halbmesser CM, Cm, und die Tangenten MTS, tms Die erstere Tangente schneide den verlängerten Halbmesser CB in S, und die verlängerte qm in T, die letztere begegne der Verlängerung von QM in t, der Tangente MS in e, und dem verlängerten Halbmesser CB in s. Endlich ziehe man die Chorde Mm; so ist (Archimedes über Kugel und Cyl. Ax. 2.) Der Bogen $Mm >$ Chorde Mm, und um so mehr $> MT$ (I, 19.), auf der andern Seite aber Bog. $Mm < me + eM$, und um so mehr $< me + et$ (I, 19.) $< mt$.

$$\begin{aligned}\text{Da nun } MT : Qq &= MS : SQ \\ &= CM : MQ \ (\text{VI}, 8.) \\ \text{und } mt : Qq &= ms : sq \\ &= Cm : Mq \ (\text{VI}, 8.);\end{aligned}$$

$$\text{so ist } Qq = \frac{MQ}{CM}\,MT < \frac{MQ}{CM}\ \text{Bogen } Mm$$

$$= \frac{mq}{Cm}\,mt > \frac{mq}{Cm}\ \text{Bogen } Mm,$$

d. i. wenn man $AM = a$; $Mm = b$ setzt

$$\begin{aligned}\text{Sin.}(a+b) - \text{Sin.}\,a &< b\,\text{Cos.}\,a \\ &> b\,\text{Cos.}(a+b)\end{aligned}$$

Rechnet man aber die Bogen a und b von B an gegen A hin, und setzt $Bm = a$, $mM = b$; so ist

$$\begin{aligned}\text{Cos.}\,a - \text{Cos.}(a+b) &< b\,\text{Sin.}(a+b) \\ &> b\,\text{Sin.}\,a.\end{aligned}$$

Der Satz ist auch auf diejenigen Fälle anwendbar, in welchen $a + b$ größer als $\frac{1}{2}\pi$ ist, wenn b ganz in einerley Quadranten fällt, und man auf die algebraischen Zeichen Achtung giebt. Setzt man z. B. den Bogen $A'm = a'$, den Bogen $mM = b$, mithin $A'M = a' + b$; so ist $Qq = pm - PM = \text{Sin.}\,a' - \text{Sin.}(a' + b)$, $MQ = \text{Cos.}(\pi - (a' + q))$, $mq = \text{Cos.}(\pi - a')$, und vermöge des bewiesenen

$$\text{Sin.}\,a' - \text{Sin.}(a' + b) > b\,\text{Cos.}(\pi - a')$$
$$\text{Sin.}\,a' > \text{Sin.}(a + b) + b\,\text{Cos.}(\pi - a') > \text{Sin.}(+a'b) - b\,\text{Cos.}\,a'$$
$$\text{Sin.}\,a' + b\,\text{Cos.}\,a' > \text{Sin.}(a' + b)$$

und eben so $\text{Sin.}\,a' + b'\,\text{Cos.}(a' + b) < \text{Sin.}(a' + b)$

Mithin ist wiederum $\text{Sin.}(a' + b) - \text{Sin.}\,a' \begin{array}{l} < b\,\text{Cos.}\,a' \\ > b\,\text{Cos.}(a' + b) \end{array}$

welches dem Gang des algebraischen Calculs gemäß ist, indem man dabey kleinere negative Größen als größere, und größere negative Größen als kleinere betrachtet.

§. 237. Es sey nun der in der Zeit t beschriebene Raum
1.) $S = ct + b\,\text{Sin.}(a + mt)$, wo a, b, c, und m gegebene Zahlen seyen. Ferner bedeute $a + mt$ die Länge eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens, und der Sinus beziehe sich auf eben diesen Halbmesser. Man verlangt die dem Ende der Zeit t entsprechende Geschwindigkeit v dieser Bewegung.

Heißen die in den Zeiten $t - z$ und $t + z$ beschriebenen Räume $S - s'$ und $S + s$; so wird man haben

$$S - s' = c(t - z) + b\,\text{Sin.}(a + mt - mz)$$
$$S + s = c(t + z) + b\,\text{Sin.}(a + mt + mz)$$

also $s' = cz + b(\text{Sin.}(a + mt) - \text{Sin.}(a + mt - mz))$
$= cz + 2b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}mz\,\text{Cos.}(a + mt - \tfrac{1}{2}mz)$

ebenso $s = cz + 2b\,\text{Sin.}\tfrac{1}{2}mz\,\text{Cos.}(a + mt + \tfrac{1}{2}mz)$

Es sey $a + mt + \tfrac{1}{2}mz$ nicht größer als $\tfrac{1}{2}\pi$; so ist $s' > s$, und die Bewegung eine verzögerte.

Nun ist $\left.\begin{array}{l} s' < cz + mbz\,\text{Cos.}(a + mt) \\ s > cz + mbz\,\text{Cos.}(a + mt + mz) \end{array}\right\}$ §. 236.

Folglich kann v nicht größer seyn als $c + mb\,\text{Cos.}(a + mt)$, sonst wäre $vz > cz + mbz\,\text{Cos.}(a + mt)$, und um so mehr $vz > s'$, welches gegen den vierten Grundsatz des 232sten §. ist.

Die Geschwindigkeit v kann aber auch nicht kleiner seyn, als $c + mb\,\text{Cos.}(a + mt)$. Wäre sie nemlich kleiner als diese Größe; so sey sie $= c + mb\,\text{Cos.}(a + mt + q)$. Man nehme $z < \frac{q}{m}$; so ist $mz < q$, und $\text{Cos.}(a + mt + q) < \text{Cos.}(a + mt + mz)$. Folglich müßte seyn

$\left.\begin{array}{l} (c + mb\,\text{Cos.}(a + mt + q))\,z \\ \quad\text{oder}\quad vz \end{array}\right\} < cz + mbz\,\text{Cos.}(a + mt + mz)$,

und um so mehr $vz < s$, welches dem dritten Grundsatz §. 232. widerspricht. Daher ist die am Ende der Zeit t erreichte Geschwindigkeit $v = c + mb\,\text{Cos.}(a + mt)$.

2.) Sey $S = ct + b\,\text{Cos.}(a + mt)$; so sind
$$S - s' = c(t - z) + b\,\text{Cos.}(a + mt - mz)$$

$$S + s = c(t+z) + b\,\mathrm{Cos.}(a+mt+mz)$$
also $$s' = cz - b\,(\mathrm{Cos.}(a+mt-mz) - \mathrm{Cos.}(a+mt))$$
$$= cz - 2b\,\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}mz\,\mathrm{Sin.}(a+mt-\tfrac{1}{2}mz)$$
$$s = cz - 2b\,\mathrm{Sin.}\tfrac{1}{2}mz\,\mathrm{Sin.}(a+mt+\tfrac{1}{2}mz)$$

Man nehme wiederum an, $a+mt+\frac{1}{2}mz$ sey nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$; so ist $s' > s$, und die Bewegung eine verzögerte. Vermöge §. 236. ist
$$s' < cz - mbz\,\mathrm{Sin.}(a+mt-mz)$$
und $$s > cz - mbz\,\mathrm{Sin.}(a+mt);$$
folglich kann v nicht kleiner seyn, als $c - mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$, sonst wäre $vz < cz - mbz\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$, und um so mehr $< s$, gegen den dritten Grundsatz §. 232.

Wäre aber $v > c - mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$; so sey $v = c - mb\mathrm{Sin.}(a+mt-q)$. Man nehme $z < \frac{q}{m}$; so ist $mz < q$, $a+mt-mz > a+mt-q$, $c-mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt-mz) < c - mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt-q)$. Folglich müßte seyn $cz - mbz\,\mathrm{Sin.}(a+mt-mz) < vz$, und um so mehr $s' < vz$, welches gegen den vierten Grundsatz §. 232. ist. Daher ist $v = c - mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$.

Vergrößert man in n. 1. den Bogen a um den vierten Theil des Umfangs oder um $\frac{1}{2}\pi$; so wird $S = ct + b\,\mathrm{Cos.}(a+mt)$, und der Ausdruck für die Geschwindigkeit v wird $c - mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$, welcher mit dem in n. 2. gefundenen Ausdruck übereinstimmt.

In dem n. 1. betrachteten Fall ist die Bewegung in dem ersten Halbzirkel eine verzögerte, in dem zweyten Halbzirkel aber eine beschleunigte, und es kann auf ähnliche Art mittelst des ersten und zweyten Grundsatzes des 232sten §. gezeigt werden, daß der gefundene Ausdruck der Geschwindigkeit auch in dem zweyten Halbzirkel gilt.

In dem n. 2. betrachteten Fall ist die Bewegung in dem ersten und dritten Quadranten eine verzögerte, in dem zweyten und vierten eine beschleunigte, und man beweißt mittelst des ersten und zweyten Grundsatzes, daß der für die Geschwindigkeit in dem ersten Quadranten gefundene Ausdruck auch für die drey übrigen Quadranten richtig ist.

Wenn m negativ ist; so hat man $\mathrm{Sin.}(a-mt) = -\mathrm{Sin.}(2\pi - a + mt)$, und $\mathrm{Cos.}(a-mt) = \mathrm{Cos.}(2\pi - a + mt)$. Mithin darf man nur in den bisher gefundenen Ausdrücken $2\pi - a$ statt a setzen, und das Vorzeichen der Sinus umkehren.

Aus den für die Geschwindigkeiten gefundenen Ausdrücken ergiebt sich, daß die Bewegung beständig nach einerley Richtung geschieht, so lange mb nicht größer ist als c. Wird mb größer als c; so geht die Bewegung in eine retrograde über, wenn $mb\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$ oder $mb\,\mathrm{Cos.}(a+mt)$ negativ, und $\mathrm{Sin.}(a+mt)$ oder $\mathrm{Cos.}(a+mt) > \frac{c}{mb}$ wird.

Die Ungleichheiten dieser Bewegungen haben eine Periode von $\frac{2\pi}{m}$ Sekunden, Minuten, u. s. w. je nachdem die Zeit t in Sekunden, Minuten, u. s. w. ausgedrückt ist. Ist nemlich $t = \frac{2\pi}{m} + t'$; so wird $a + mt = a + 2\pi + mt'$, und $\text{Sin.}(a + mt) = \text{Sin.}(a + mt')$, $\text{Cos.}(a + mt) = \text{Cos.}(a + mt')$.

§. 238. Die umgekehrte Aufgabe, aus dem Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit von der Zeit abhängt, den in einer gegebenen Zeit beschriebenen Raum zu finden, könnte auf ähnliche Art, wie in dem 234. und 235sten §. aufgelöst werden, wenn nicht die Summation der dabey vorkommenden Reihen in den meisten Fällen grosse Schwierigkeiten hätte. Kürzer läßt sich die Aufgabe auflösen, wenn man den gegebenen Ausdruck der Geschwindigkeit mit denjenigen Ausdrücken vergleicht, welche man aus gegebenen Ausdrücken der Räume durch die Zeiten abgeleitet hat. Wenn z. B. $v = C + B\,\text{Cos.}(A + Mt)$ wäre, wo A, B, C und M gegebene Größen bedeuten; so würde dieser Ausdruck mit dem §. 237. n. 1. gefundenen Ausdruck der Geschwindigkeit einerley Form haben, wenn B den Faktor M hätte. Man bringt ihn aber leicht auf diese Form, wenn man $M.\frac{B}{M}$ statt B schreibt. Aus der Vergleichung des §. 237. n. 1. gefundenen Ausdrucks der Geschwindigkeit mit Ausdruck des Raums S aus welchem er abgeleitet wurde, ergiebt sich in Beziehung auf den hier vorgegebenen Ausdruck der Geschwindigkeit der in der Zeit t beschriebene Raum $S = Ct + \frac{B}{M}\,\text{Sin.}(A + Mt)$.

Sucht man hieraus nach dem vorhergehenden §. die der Zeit t entsprechende Geschwindigkeit; so erhält man $v = C + B\,\text{Cos.}(A + Mt)$, übereinstimmend mit dem vorgegebenen Ausdruck der Geschwindigkeit, woraus folgt, daß der mit der vorgegebenen veränderlichen Geschwindigkeit in der Zeit t beschriebene Raum $S = Ct + \frac{B}{M}\,\text{Sin.}(A + Mt)$ ist. Wenn nemlich die Geschwindigkeiten zweyer Bewegungen beständig einander gleich sind; so sind die mit diesen Bewegungen in einerley Zeit beschriebenen Räume ebenfalls einander gleich. Um dieses zu beweisen *), seyen R und S die mit den zwey Bewegungen in der Zeit t beschriebene Räume. Die sich bewegende Punkte mögen P und Q heißen.

Erster Fall. Wenn die Geschwindigkeiten constant, oder die zwey Bewegungen gleichförmig sind; so muß die Geschwindigkeit c von P der Geschwindigkeit c' von Q gleich, $ct = c't$ und $R = S$ seyn.

*) Treatise of Fluxions by Colin Maclaurin. Book I. Theor. IV. pag. 66.

Zweyter Fall. Wenn die Bewegung von P während einer gewißen Zeit t eine beschleunigte ist; so muß auch die Bewegung von Q innerhalb desselben Zeitraums eine beschleunigte seyn. Wäre nun S nicht gleich R; so sey 1.) $S < R$. Man nehme von dem Ende des Raums R ein Stück D hinweg, so daß $S = R - D$ werde, und theile die Zeit t in so viele gleiche Theile, bis eines dieser Zeittheilchen z kleiner sey, als die Zeit, welche der Punkt P zur Beschreibung des Raums D gebraucht. Es seyen die nach einander während der Zeittheilchen z beschriebene Räume

in Beziehung auf P } p', p'', p''', p'''';

in Beziehung auf Q } q', q'', q''', q'''';

und die dem Anfang eines jeden dieser Zeittheilchen entsprechende Geschwindigkeiten, welche vermöge der Voraussetzung in den zwey Bewegungen beständig einander gleich sind, seyen

v, v', v'', v'''; so werden (1. Grundſ. §. 232.)

$q'''' > v'''z$ und (2. Grundſ.) um so mehr $> p'''$

$q''' > v''z$ — — — $> p''$

$q'' > v'z$ — — — $> p'$

$q' > vz$ seyn.

folglich wäre $q' + q'' + \cdots + q''''$ oder S } $> p' + p'' + p'''$.

Es ist aber z kleiner gemacht, als die Zeit, welche der Punkt P zur Beschleunigung des Raums D gebrauchte, und daher $D > p''''$. Mithin mußte um so mehr

$S + D > p' + p'' + p''' + p''''$, d. i. $> R$

und $S > R - D$ seyn.

Man hat aber angenommen $S = R - D$; folglich kann S nicht kleiner als R seyn. Wäre aber 2.) $S > R$; so müßte $R < S$ seyn. Und nun kann wie vorhin gezeigt werden, daß R nicht kleiner seyn kann als S. Daher muß $R = S$ seyn.

Dritter Fall. Die Bewegung von P, mithin auch die Bewegung von Q, sey während der Zeit t beständig verzögert. Wäre S nicht gleich R; so sey von den zwey Räumen S und R der Raum S der kleinere. Man nehme von dem Anfang des Raums R ein Stück D hinweg, so daß $S = R - D$ werde, und theile die Zeit t in so viele gleiche Theile, daß die Zeit, welche P zu der Beschreibung des Raums D gebraucht, kleiner als eines dieser Zeittheilchen z werde. Unter der Voraussetzung der vorhin gebrauchten Benennungen werden nun

$q''' > v'''z$ (4. Grundſ.), und um so mehr $> p''''$ (3. Grundſ.)

$q'' > v''z$ — — — $> p'''$ —

$q' > v'z$ — — — $> p''$

$$\left.\begin{array}{l}\text{folglich } q' + q'' + q''' \\ \text{und um so mehr } q' + q'' + q''' + q'''' \\ \qquad\qquad \text{oder } S\end{array}\right\} > p'' + p''' + p''''$$

und weil $D > p'$; so müßte um so mehr

$$S + D > p' + p'' + p''' + p'''', \text{ d. i.} > R,$$

mithin $S > R - D$ seyn.

Man hat aber angenommen $S = R - D$; folglich kann S nicht kleiner als R seyn. Eben so kann gezezeigt werden, daß R nicht kleiner S, mithin S nicht grösser als R seyn könne. Daher ist $S = R$.

Wenn eine Bewegung abwechslungsweise beschleunigt und verzögert ist; so kann man die mit einer beschleunigten und die mit einer verzögerten Bewegung beschriebenen Räume besonders betrachten, und durch die Verbindung des zweyten Falls mit dem dritten den aufgestellten Satz auch für diesen Fall beweisen.

§. 239. Wenn eine Bewegung gleichförmig ist; so ist durch die Geschwindigkeit derselben der während eines gegebenen Zeitraums beschriebene Raum gegeben, weil die in gleichen Zeiten beschriebene Räume einander gleich sind. Nicht so verhält es sich mit den ungleichförmigen Bewegungen. Wenn nemlich das Gesetz gegeben ist, nach welchem die Geschwindigkeit von der Zeit abhängt; so kann nach dem vorhergehenden §. der während einer gegebenen Zeit beschriebene Raum nur alsdenn gefunden werden, wenn der Anfang oder das Ende der während der Bewegung verflossenen Zeit gegeben ist. In beyden Fällen aber muß, um den Raum bestimmen zu können, welcher bis zu einem gegebenen Zeitpunkt hin beschrieben worden ist, der im Anfang der Zeit schon zurückgelegte Raum gegeben seyn. In dem besonderen Fall, wo die Zeit vom Anfang der Bewegung an gerechnet wird, muß der Ausdruck für den beschriebenen Raum so beschaffen seyn, daß er verschwindet, wenn man die Zeit $= 0$ setzt.

Sey z. B. $v = c + mb \operatorname{Cos.}(a + mt)$; so ist, wenn A eine von den Veränderungen der Zeit independente oder constante Größe bezeichnet, im allgemeinen $S = A + ct + b \operatorname{Sin.}(a + mt)$. Denn man erhält hieraus nach §. 237. n. 1, weil A aus den Ausdrücken von s' und s herausfällt, den vorgegebenen Ausdruck der Geschwindigkeit v, und daher ist der zwischen zwey gegebenen Zeitpunkten beschriebene Raum gegeben (§. 238.). Soll nun für $t = 0$ der Raum $S = f$ seyn; so wird man haben $f = A + b \operatorname{Sin.} a$ für $t = 0$, und daher $f - b \operatorname{Sin.} a = A$. Für diesen Fall ist also $= S = f - b \operatorname{Sin.} a + ct + b \operatorname{Sin.}(a + mt)$. Soll aber für $t = 0$ auch $S = 0$ seyn, so wird $A = - b \operatorname{Sin.} a$, und $S = ct + b \operatorname{Sin}(a + mt) - b \operatorname{Sin.} a$.

Vermöge §. 237. und 238. wird man haben

1.) Wenn $v = c + mb \operatorname{Cos.}(a + mt)$; $S = \text{Const.} + ct + b \operatorname{Sin.}(a + mt)$

2.) $v = c - mb\,\mathrm{Sin.}(a + mt)$; $S = \mathrm{Const.} + ct + b\,\mathrm{Cos.}(a + mt)$
wo die constante Größe durch die Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen ist.

§. 240. Es seyen CA und CB (Fig. 78.) zwey sich in C schneidende der Lage nach gegebene gerade Linien, und ausserhalb derselben, aber in der durch sie gelegten Ebene, befinde sich ein Punkt M, durch welchen die Parallelen MQ und MP mit CA und CB gezogen seyen; so ist die Lage des Punkts M gegeben, wenn die Seiten CP und PM des Parallelogramms PQ gegeben sind. Wenn sich nun der Punkt M in der Ebene ACB nach einer weder mit CA noch mit CB parallel laufenden Richtung fortbewegt; so werden CP und CQ sich verändern, und, wenn der Punkt M nach M' rückt, in CP' und CQ' übergehen. Dadurch wird die Bewegung des Punkts M in zwey geradlinigte Bewegungen nach den Richtungen CA und CB zerfällt, welche gegeben seyn wird, wenn die Bewegungen der Punkte P und Q in den geraden Linien CA und CB gegeben sind.

Die Bewegungen von P und Q seyen erstlich gleichförmig, ihre Geschwindigkeiten c und c', die Bewegung von M gehe durch den Punkt C, und die von dem Augenblick an, da der Punkt M in C war, bis zu den Zeitpunkten, da er in M und M' war, verfloßene Zeiten seyen t und T; so wird man haben $CP = ct$, $CP' = c.T$, $CQ = c't$, $CQ' = c'.T$, und daher

$$CP : CQ = CP' : CQ';$$

folglich wird die Diagonale CM' des Parallelogramms $P'Q'$ durch den Punkt M gehen (VI, 26.), und die Bewegung von M geradlinigt seyn. Man nehme auf den geraden Linien CA und CB die Linien Ca und Cb den Geschwindigkeiten c und c' der Punkte P und Q gleich, und vollende das Parallelogramm $Cafb$. Da so wohl $Ca : CP$ als $Cb : CQ$ wie die Zeit durch Ca zu der Zeit durch CP (§. 231. n. 1.); so verhält sich $Ca : Cb = CP : CQ$. Folglich liegen C, f, M in einer geraden Linie (VI, 26.), und die Diagonale Cf des Parallelogramms ab fällt mit der Richtung der Bewegung des Punkts M zusammen. Und weil $Cf : CM$

$= Ca : CP =$ Zeit durch Ca oder 1 zu der Zeit durch CP oder t; so mißt zugleich die Diagonale Cf des Parallelogramms ab die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung des Punkts M nach der Richtung CfN. Sind die Geschwindigkeiten Ca und Cb sammt den Richtungen CA, CB der zwey Bewegungen gegeben; so ist die Diagonale Cf des Parallelogramms aus Ca und Cb der Größe und Lage nach gegeben, welche die mittlere aus Ca und Cb zusammengesetzte Geschwindigkeit heißt. Umgekehrt kann jede gleichförmige geradlinigte Bewegung, deren Geschwindigkeit Cf gegeben ist in zwey andere gleichförmige geradlinigte Bewegungen nach gegebenen Richtungen CA und CB zerfällt werden, deren Geschwindigkeiten Ca und Cb man erhält, wenn man durch den Punkt f die Parallelen fa und fb mit den Linien CB und CA zieht.

Zweytens sey die Bewegung von P (Fig. 79.) auf der geraden Linie CA gleichförmig, die Bewegung von Q aber auf der geraden Linie CB stetig beschleunigt. Man nehme auf beyden Seiten von P die Pp und Pp' einander gleich, und es befinde sich der Punkt Q in q' und q, wenn P in p' und p kommt; so werden $p'P$, Pp, $q'Q$, Qq in gleichen Zeiten von P und Q beschriebene Räume seyn. Man vollende die Parallelogramme $p'q'$, PQ, pq, so wird man die den Punkten p, P, p entsprechende Punkte m', M, m der Linie haben, welche der Punkt M beschreibt, während die Punkte P und Q die geraden Linien $p'p$ und $q'q$ beschreiben. Man ziehe die gerade Linie $m'm$, welche von der durch den Punkt M mit CB parallel gezogenen PS in k geschnitten werde, und durch k die Parallele ko mit CA. Da $p'P = Pp$; so ist $m'k = km$, und $q'o = oq$. Und weil die Bewegung von Q nach der Richtung CB eine stetig beschleunigte ist (Voraussf.); so ist beständig $q'Q < Qq$, und daher $\left.\begin{matrix} Co \\ Pk \end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix} CQ \\ PM \end{matrix}\right.$. Der Punkt M beschreibt also eine stetig krumme Linie $m'Mm$, welche ihre erhabene Seite gegen die Linie CA kehrt. An den Punkt M dieser krummen Linie sey eine Tangente $t't$ gezogen, welche der pm in t, der $p'm'$ in t' begegne. Die Verlängerung von $p'm'$ begegne der QM in K', und die Verlängerung von QM begegne der pm in R; so verhält sich die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung von P zu der Geschwindigkeit von Q in dem Punkt Q oder zu der Geschwindigkeit von M nach der mit CB parallelen Richtung, wie $MR : Rt$. Denn der Raum, welcher mit der letzteren Geschwindigkeit in der Zeit beschrieben wird, in welcher der Punkt P den Raum $p'P$ oder Pp zurücklegt, muß (1. und 2 Grundsf. §. 232.) kleiner als Rm aber größer als $R'm'$ seyn. Wäre nun die Geschwindigkeit von Q in dem Punkt Q, oder die Geschwindigkeit von M nach der mit CB parallelen Richtung größer als Rt; so seye sie $= Rs > Rt$ aber $< Rm$. Man ziehe Ms; so wird diese, weil s zwischen t und m liegt, und Mt die krumme Linie in M berührt, dem Bogen Mm zwischen M und m in n begegnen. Man ziehe ln mit CB parallel, welche der MR in r begegne; so wird sich verhalten $\left.\begin{matrix}MR\\Pp\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}Mr\\Pl\end{matrix}\right\} = Rs : rn$. Mithin müßte der Raum, welchen der Punkt M nach einer mit CB parallelen Richtung mit seiner Geschwindigkeit in M, während der von P zur Beschreibung des Raums Pl gebrauchten Zeit gleichförmig beschrieben haben würde, eben so groß seyn, als der Raum rn welchen eben dieser Punkt nach derselben Richtung und während derselben Zeit mit seiner beschleunigten Bewegung wirklich zurücklegt, welches dem ersten Grundsatz §. 232. widerspricht. Wäre aber jene Geschwindigkeit kleiner als Rt oder $R't'$; so sey sie $= R's' > R'm'$. Da s' zwischen m' und t' liegt; so wird die gerade Linie Ms' dem Bogen Mm' in n' begegnen. Man ziehe durch n' die Parallele $r'n'l'$ mit CB; so wird sich verhalten $\left.\begin{matrix}MR'\\Pp'\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}Mr'\\Pl'\end{matrix}\right\} = R's' : r'n'$, und es müßte der Raum, welcher von dem Punkt M nach der mit CB parallelen Richtung während der Zeit, in welcher der Punkt P den Raum $l'P$ beschrieben hat, gleichförmig mit seiner Geschwindigkeit in M beschrieben haben würde dem Raum $r'n'$ gleich seyn, welchen er in derselben Zeit wirklich beschrieben hat, welches gegen den zweyten Grundsatz §. 232. ist.

Unter derselben Voraussetzung wird die Bewegung von M in der krummen Linie $m'Mm$ eine stetig beschleunigte seyn. Denn verlängert man die $q'm'$, bis sie der Tangente Mt' in e begegnet; so ist, weil für jeden zwischen m' und M liegenden Punkt n' des Bogens $m'M$ die $l'n' > p'm'$ ist, der Bogen Mm' kleiner als $Me+em'$, und (I, 19.) um so mehr $< \left\{ \begin{matrix} Me+et' \\ Mt' \end{matrix} \right\}$ oder Mt, mithin um so mehr kleiner als die Chorde Mm (I, 19.). Folglich ist um so so viel mehr der Bogen Mm' kleiner als der Bogen Mm, und daher die Bewegung des Punkts M in der krummen Linie $m'Mm$ eine beschleunigte. Man ziehe die Chorde $M'm'$; so ist die Chorde $M'm'+t'm' > Mt'$, Chorde $M'm' > Mt'-t'm'$, und um so mehr der Bogen $Mm' > Mt'-t'm'$. Hingegen ist der Bogen Mm kleiner als $Mt+tm$. Folglich muß die Geschwindigkeit der Bewegung des Punkts M in der krummen Linie, wenn er sich in M befindet, kleiner als $Mt+tm$, aber größer als $Mt'-t'm'$ oder größer als $Mt-t'm'$ seyn (1. und 2. Grundsſ. §. 232.), wenn die Geschwindigkeit von P durch die Pp gemessen wird. In dem Punkt M wird also die Geschwindigkeit der krummlinigten Bewegung $= Mt$ seyn. Wäre sie nemlich größer als Mt; so sey sie $= Mt+ts$. Da diese Geschwindigkeit kleiner ist als $Mt+tm$; so muß $ts < tm$ seyn, und eine durch M und s gezogene gerade Linie Ms dem Bogen Mm zwischen M und m in n begegnen. Man ziehe durch n die Parallele nl mit CB, welche der Tangente Mt in h begegne; so verhält sich $Mt : st = Mh : hn$, $Mt+st : Mh+hn = Mt : Mh = MR : Mr = Pp : Pl$. Folglich müßte der mit der Geschwindigkeit $Mt+st$ der krummlinigten Bewegung in dem Punkt M gleichförmig beschriebene Raum $= Mh+hn$, und daher $>$ Bogen Mn, d. i. größer als der während derselben Zeit mit der beständig beschleunigten Bewegung beschriebene Raum seyn, welches gegen den ersten Grundsſ. §. 232. ist. Wäre aber die Geschwindigkeit der krummlinigten Bewegung kleiner als $\left\{ \begin{matrix} Mt \\ Mt' \end{matrix} \right\}$; so sey sie $= Mt-t's'$, wo s' zwischen m' und t' fallen muß, weil diese Geschwindigkeit, wie oben gezeigt wurde, größer als $Mt'-t'm'$ ist. Die gerade Linie Ms' wird also dem Bogen Mm' in n' zwischen M und m' begegnen. Man ziehe durch n' die $r'l'$ mit CB parallel, welche der Tangente Mt' in h begegne; so wird sich verhalten $Mt' : s't' = Mh' : h'n'$, $Mt' - s't' : Mh' - h'n' = Mt' : Mh = Pp' : Pt'$. Folglich müßte der mit der Geschwindigkeit $Mt' - s't'$ der krummlinigten Bewegung in dem Punkt M gleichförmig beschriebene Raum $= Mh' - h'n'$, und daher kleiner als der Bogen $n'M$, d. i. kleiner als der Raum seyn, welcher während derselben Zeit mit einer beschleunigten Bewegung wirklich beschrieben wird, welches dem zweyten Grundsatz §. 232. widerspricht. Daher verhält sich die Geschwindigkeit der krummlinigten Bewegung in dem Punkt M zu der Geschwindigkeit von P wie $Mt : MR$.

Drittens sey die Bewegung von P (Fig. 80.) gleichförmig, die Bewegung von Q aber verzögert; so wird unter der Voraussetzung der vorigen Construktion $q'o = oq$, $qQ > Qq$, und $\left.\begin{matrix}CQ\\PM\end{matrix}\right\} > \left\{\begin{matrix}Co\\Pk\end{matrix}\right\}$, und daher die von dem Punkt M beschriebene Linie eine gegen CA hole stetig krumme Linie seyn. Und wenn tt' die krumme Linie in M berührt, so wird sich an dem Punkt M verhalten die Geschwindigkeit von M nach der Richtung CA zur Geschwindigkeit von M nach der Richtung CB wie $MR : Rt$. Denn der mit der letzteren Geschwindigkeit in der Zeit, während welcher P den Raum Pp durchlauft, gleichförmig beschriebene Raum muß größer als Rm, aber kleiner als $R'M'$ seyn (3. u. 4. Grundsatz. §. 232.), und daher müßte, wenn die Geschwindigkeit von M nach der mit CB parallelen Richtung kleiner als Rt, z. B. $= Rs$ wäre, der Punkt s zwischen m und t fallen, und die gerade Linie Ms dem Bogen Mm in n zwischen M und m begegnen, und es würde sich verhalten $\left.\begin{matrix}MR\\Pp\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}Mr\\Pt\end{matrix}\right\} = Rs : rn$. Demnach müßte der Raum, welchen der Punkt M nach der mit CB parallelen Richtung mit der Geschwindigkeit, welche er in M hat, gleichförmig zurücklegen würde, eben so groß seyn, als der in derselben Zeit mit der verzögerten Bewegung wirklich in derselben Zeit beschriebene Raum rn, welches gegen den dritten Grundsatz (§. 232.) ist. Wäre aber die Geschwindigkeit von M nach der mit CB parallelen Richtung größer als Rt oder $t'R'$, und z. B. $= R's'$; so müßte der Punkt s' zwischen t' und m' fallen, mithin die gerade Linie Ms dem Bogen Mm' in n' zwischen M und m' begegnen. Alsdenn würde sich aber verhalten $\left.\begin{matrix}MR'\\Pp'\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}Mr'\\Pt'\end{matrix}\right\} = R's' : r'n'$, und es müßte der Raum welchen der Punkt M nach der mit CB parallelen Richtung mit seiner Geschwindigkeit in M gleichförmig zurücklegen würde, eben so groß seyn als der Raum $n'r'$, welchen er in derselben Zeit mit seiner verzögerten Bewegung wirklich zurücklegt, welches gegen den vierten Grundsatz ist.

Ferner wird die krummlinigte Bewegung von M eine stetig verzögerte Bewegung seyn. Denn es ist der Bogen Mm kleiner als $Me + em$, und um so mehr kleiner als $Me + et$, d. i. $< Mt$ oder Mt', und um so mehr kleiner als die Chorde Mm', also um noch viel mehr kleiner als der Bogen Mm'. Und weil $tm +$ Chorde $Mm > Mt$; so ist die Chorde $Mm > Mt - tm$, und um so mehr der Bogen $Mm > Mt - tm$, der Bogen Mm' hingegen $< Mt' + t'm'$ oder $< Mt + t'm'$. Daher muß die Geschwindigkeit der krummlinigten Bewegung in dem Punkt M größer als $Mt - tm$, und kleiner als $Mt' + t'm'$ oder als $Mt + t'm'$ seyn. Man beweißt nun wie in dem vorhergehenden Fall, mittelst des dritten und vierten Grundsatzes, daß diese Geschwindigkeit weder kleiner noch größer als Mt seyn könne. Mithin verhält sich die Geschwindigkeit der krummlinigten Bewegung in dem Punkt M zu der Geschwindigkeit des Punkt P wie $Mt : MR$.

Auf ähnliche Art kann gezeigt werden, daß, wenn die zwey Bewegungen nach den Richtungen CA und CB ungleichförmig sind, und die tt' die krumme Linie in M berührt, die Geschwindigkeiten von M nach der mit CB parallelen Richtung sich zu der Geschwindigkeit des Punkts P, wenn er in P ist, sich verhalte wie $Rt : MR$, und die Geschwindigkeit der krummlinigten Bewegung zu der Geschwindigkeit von P wie $Mt : MR$ *).

In dem besonderen Fall, wo die Geschwindigkeiten von P und Q zwar veränderlich sind, aber ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, wird die Bewegung von M geradlinigt; wie in dem ersten Fall, aber wie die Bewe-

*) Maclaurin Treatise of fluxions, Book I. Prop. XIV.

gungen von P und Q ungleichförmig, so daß (Fig. 78.) $CM : CM' = CP : CP'$.

§. 241. Umgekehrt folgt aus den im vorhergehenden §. bewiesenen Eigenschaften der krummlinigten Bewegung, daß, wenn ein Punkt M (Fig. 79. und 80.) eine krumme Linie beschreibt, und man $MR : Rt$ in dem Verhältniß der Geschwindigkeit von P zu der Geschwindigkeit von Q nimmt, die gerade Linie Mt die krumme in dem Punkt M berührt. Wo nicht; so berühre sie die Ms in dem Punkt M. Alsdenn müßte sich nach dem vorhergehenden §. verhalten die Geschwindigkeit von P zu der Geschwindigkeit von Q wie $MR : Rs$. Mithin müßte $Rt = Rs$ seyn, welches unmöglich ist.

Man vollende das Parallelogramm $MRtS$; so bestimmt die Diagonale Mt die Richtung der krummlinigten Bewegung in dem Punkt M, und mißt zugleich die Geschwindigkeit derselben. Es verhalten sich nemlich die Geschwindigkeiten nach den Richtungen MS, MR und Mt, wie die Seiten MS und MR des Parallelogramms und seine Diagonale Mt.

Die krummlinigte Bewegung ist gegeben, wenn man für jeden Abschnitt CP der CA den dazu gehörigen Abschnitt CQ der CB oder die PM bestimmen kann, und umgekehrt, wenn die krumme Linie in Mm gegeben ist, so sind die den Abscissen CP, Cp, u. s. w zugehörige CQ, Cq, u. s. w. gegeben. Läßt man die CP immer um gleich große Stücke wachsen, oder den Punkt P sich mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit fortbewegen; so kann man die den Veränderungen von CP entsprechende Veränderungen von CQ, und die Geschwindigkeit bestimmen, welche der Punkt Q in einem gegebenen Punkt der CB hat. Dadurch wird das Verhältniß von $MR : Rt$ gefunden, und die Lage der geraden Linie bestimmt, welche die krumme in einem gegebenen Punkt berührt. Sey z. B. die krumme Linie AMm (Fig. 81.) so beschaffen, daß, wenn a eine gegebene Größe bezeichnet, beständig $a.\ CQ =$ dem Quadrat von CP sey; so wird, wenn man CP gleichförmig wachsen läßt, und die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt P nach der Richtung CA fortrückt, $= c$ setzt, ferner die Zeit t der Bewegung von dem Augenblick an rechnet, da der Punkt P in C war, der in der Zeit t beschriebene Raum $CP = ct$ seyn. Man wird also haben $a.CQ = c^2t^2$, und $CQ = \frac{c^2}{a}t^2$. Die Bewegung von Q ist also eine gleichförmig beschleunigte (§. 233.), und nach eben diesem §. die Geschwindigkeit von $Q = \frac{2c^2}{a}t$. Daher verhält sich die Geschwindigkeit von Q zu der Geschwindigkeit von $P = \frac{2c^2}{a}t : c = \frac{2c^2t^2}{a} : ct = 2CQ : CP$ oder, wenn man $CT = CQ$ nimmt, die Geschwindigkeit von Q zu der Geschwindigkeit von $P = TQ : \left\{\begin{matrix}CP\\QM\end{matrix}\right\}$. Aber, wenn die Mt die krumme Linie in M berührt, und durch einen beliebigen von dem Berührungspunkt M verschiedenen Punkt t der Tangente eine Parallele tR mit CB gezogen wird, welche der QM oder ihrer Verlängerung in R begegnet, so verhält sich $Rt : MR$ wie die Geschwindigkeit von Q zu der Geschwindigkeit von P (§. 240.) Folglich verhält sich $Rt : MR = TQ : QM$, und die Punkte T, M, t liegen in einer geraden Linie. Nimmt man also $CT = CQ$, und zieht die TM; so berührt diese die krumme Linie in M. Die hier betrachtete krumme Linie ist eine Parabel (Kegelschn. I, 19. Zus. 1.), deren Durchmesser CB ist, und die gefundene Eigenschaft der Tangente stimmt mit Kegelschn. I, 7. Zus. 8. überein.

Um an eine gegebene krumme Linie eine Tangente zu ziehen, welche mit einer in ihrer Ebene liegenden der Lage nach gegebenen geraden Linie GH parallel sey, ziehe man durch einen beliebigen Punkt K der GH die gerade Linie KJ mit CB parallel. Da die Winkel AGH, und $AJK = ACB$ gegeben sind; so ist das Verhältniß von $KJ : GJ$ gegeben. Es sey dem Verhältniß von $m : n$ gleich, und Mt sey die gesuchte Tangente; so wird sich verhalten müßen $Rt : MR = KJ : JG = m : n$. Man suche also aus den Eigenschaften der vorgegebenen krummen Linie das Gesetz, nach welchem das Verhältniß der Geschwindigkeiten von Q und P, d. i. das Verhältniß von $Rt : MR$ sich mit den Abschnitten CP

der CA oder der zu ihrer Beschreibung gebrauchten Zeit verändert, und bestimme CP oder die Zeit so, daß das Verhältniß von $Rt : MR$ dem gegebenen Verhältniß von $m : n$ gleich werde; so wird man CP, und dadurch den gesuchten Berührungspunkt M haben. In dem vorhin gewählten Beyspiel hatte man gefunden $Rt : MR = \frac{2c^2t}{a} : c = 2ct : a = 2CP : a$, weil $ct = CP$. Folglich wird sich verhalten müssen $2CP : a = m : n$, wodurch, weil a, m und n gegeben sind, die CP, mithin auch der Berührungspunkt M gegeben ist. Algebraisch betrachtet wird $\frac{Rt}{MR}$ ein Ausdruck seyn, welcher die unbekannte Größe t, oder die ihr proportionale CP und gegebene von der krummen Linie abhängende Größen enthalten wird. Dieser Ausdruck $= \frac{m}{n}$ gesetzt giebt eine Gleichung, aus deren Auflösung man die unbekannte Größe t oder CP erhält, und man wird eine, oder mehrere, oder gar keine Tangente ziehen können, welche mit der GH parallel ist, je nachdem die Gleichung eine, oder mehrere, oder gar keine mögliche Wurzel hat.

§. 242. Ein ruhender Körper kann sich nicht von selbst in Bewegung setzen, und ein sich bewegender Körper kann weder die Geschwindigkeit, noch die Richtung seiner Bewegung von selbst verändern. Wenn also ein ruhender Körper sich zu bewegen strebt, oder ein in Bewegung gesetzter Körper die Geschwindigkeit oder die Richtung seiner Bewegung oder beyde zugleich ändert; so schreibt man dieses dem Einfluß einer Kraft zu, welche die Veränderungen in dem Zustand der Ruhe oder der Bewegung des Körpers hervorzubringen strebt oder wirklich hervorbringt. So ruht z. B. ein Körper, welcher durch eine horizontale Ebene unterstützt ist, und wir fühlen, daß eine gewiße Kraft angewendet werden muß, um ihn auf dieser Ebene fortzubewegen. Ist aber der Körper einmal in Bewegung gesetzt, so behält er die ihm mitgetheilte Geschwindigkeit und Richtung seiner Bewegung eine desto längere Zeit hindurch unverändert bey, je mehr man alle Ursachen der Veränderungen seiner Bewegung hinwegzuräumen sucht. Man findet, daß eine Kraft angewendet werden muß, um den in Bewegung gesetzten Körper in Ruhe zu bringen, oder die Geschwindigkeit und Richtung seiner Bewegung zu verändern. Dieses allgemeine Phänomen der Körper, nach welchem sie in dem Zustand ihrer Ruhe oder Bewegung zu beharren streben, nennt man ihre Trägheit (inertiam oder vim inertiæ *).

§. 243. Die Kräfte, welche die Bewegungen der Körper verändern, bringen in gleichen Zeiten entweder gleiche, oder ungleiche Veränderungen der Geschwindigkeiten hervor. Jene heißen unveränderliche, diese veränderliche Kräfte. Man mißt sie durch die Geschwindigkeiten, welche sie in einer gegebenen Zeit, im Fall sie unveränderlich sind, wirklich erzeugen, oder, im Fall sie veränderlich sind, erzeugt haben würden, wenn sie von dem Augenblick an, für welchen man ihre Größe bestimmt, mit gleicher Stärke auf den Körper fortgewirkt hätten. Wenn z. B. die beschriebenen Räume den Quadraten der vom Anfang der Bewegung an verfloßenen Zeiten proportional sind; so wächst die Geschwindigkeit der Zeit proportional (§. 233.) und erhält also in gleichen Zeiten gleichen Zuwachs. Die Kraft, welche diese Bewegung beschleunigt, ist daher eine unveränderliche Kraft. Wenn aber die Geschwindigkeit nicht der Zeit proportional wächst; so wird man die Kraft eben so wenig durch die in einer gegebenen Zeit wirklich erzeugte Geschwindigkeit messen können, als man die Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung durch den in einer gegebenen Zeit wirklich beschriebenen Raum messen kann (§. 232.). In diesem Fall mißt man daher die Kraft nicht durch die in einer gegebenen Zeit wirklich erzeugte Geschwindigkeit, sondern durch die Geschwindigkeit, welche sie in einer gegebenen Zeit erzeugt haben würde, wenn sie von dem Augenblick an, für welchen man ihre Größe angiebt, gleichförmig fortgewirkt hätte, oder auch durch den Zuwachs an Geschwindigkeit

*) *Newtoni* princ. L. I. Lex I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur illum statum mutare.

digkeit, welchen die Bewegung während einer gegebenen Zeit erhalten haben würde, wenn sie von jenem Augenblick an in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung übergegangen wäre. Unter der Richtung der Kraft versteht man die Richtung der geraden Linie, nach welcher sie einen Körper bewegt, oder zu bewegen strebt. Wenn eine Kraft die Bewegung eines Körpers vermindert; so heißt sie eine verzögernde Kraft.

Wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem die Räume von den zu ihrer Beschreibung erforderlichen Zeiten abhängen; so können die Kräfte, welche die Bewegungen stetig verändern, auf ähnliche Art wie die Geschwindigkeit mittelst folgender Grundsätze gefunden werden:

1. und 2. Die Geschwindigkeit, welche eine stetig zunehmende Kraft während einer gegebenen Zeit wirklich erzeugt, ist $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als die Geschwindigkeit, welche während derselben Zeit würde erzeugt worden seyn, wenn die Kraft beständig mit derjenigen Stärke gewirkt hätte, welche sie am $\left\{\begin{matrix}\text{Anfang}\\ \text{Ende}\end{matrix}\right\}$ jenes Zeitraums hatte.

3. und 4. Die Geschwindigkeit, welche eine stetig abnehmende Kraft während einer gegebenen Zeit wirklich erzeugt, ist $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ als die Geschwindigkeit, welche während derselben Zeit würde erzeugt worden seyn, wenn die Kraft beständig mit derjenigen Stärke gewirkt hätte, welche sie am $\left\{\begin{matrix}\text{Anfang}\\ \text{Ende}\end{matrix}\right\}$ jenes Zeitraums hatte.

§. 244. Es sey nun das Gesetz gegeben, nach welchem die Kraft mit dem beschriebenen Raum sich verändert, und man soll das Gesetz finden, nach welchem die Geschwindigkeit der Bewegung von dem beschriebenen Raum abhängt.

Wäre die Kraft constant, oder die Bewegung gleichförmig beschleunigt; so würde, wenn der von der Ruhe an durchlaufene Raum $= s$, die Kraft $= 2g$, und die erhaltene Geschwindigkeit $= v$ gesetzt wird, $v^2 = 4gs$ seyn (§. 234. n. 3.). Die dem Raum $s + y$ entsprechende Geschwindigkeit heiße v'; so wird man haben $v'^2 = 4g(s + y)$, und daher

$v'^2 - v^2 = 4gy$. Wenn aber die Kraft, während der Raum y beschrieben wird, stetig wächst, und am Ende desselben $= 2g'$ wird; so wird die in der zur Beschreibung des Raums y gebrauchten Zeit erzeugte Geschwindigkeit größer seyn als diejenige, welche die Kraft $2g$ als constant betrachtet in derselben Zeit erzeugt haben würde, aber kleiner als die durch die Kraft $2g'$ in eben dieser Zeit erzeugte Geschwindigkeit (1. und 2. Grundſ. §. 243.). Demnach wird seyn

$$\left.\begin{array}{ll} 1.) & v'^2 - v^2 > 4gy \\ 2.) & < 4g'y \end{array}\right\} \text{wenn die Kraft wächst.}$$

Eben so findet sich mittelst des dritten und vierten Grundsatzes des vorhergehenden §.

$$\left.\begin{array}{ll} 3.) & v'^2 - v^2 < 4gy \\ 4.) & > 4g'y \end{array}\right\} \text{wenn die Kraft abnimmt.}$$

Man theile den Raum s in n gleiche Theile, deren jeder $= y$ sey, und es seyen die am Ende der Räume

$$y,\ 2y,\ 3y \text{---} (n-1)\,y,\ \left\{\begin{matrix} ny \\ s \end{matrix}\right\} \text{ wirklich}$$

erreichte Geschwindigkeiten beziehungsweise

v', v'', v''' --- V', V, und die

eben diesen Punkten entsprechende Kräfte

$2g'$, $2g''$, $2g'''$, --- $2G'$, $2G$; so wird man, wenn am Anfang des Raums s die Kraft $= 2g$, die Geschwindigkeit $= c$, und die Kraft eine stetig wachsende ist, nach n. 1. und 2. haben

$$\begin{array}{l} v'^2 - c^2 > 4gy < 4g'y \\ v''^2 - v'^2 > 4g'y < 4g''y \\ v'''^2 - v''^2 > 4g''y < 4g'''y \\ \vdots \\ V^2 - V'^2 > 4G'y < 4Gy \end{array}$$

und daher
$$\begin{array}{ll} 5.) & V^2 - c^2 > 4y\,(g + g' + g'' \text{--} + G') \\ 6.) & < 4y\,(g' + g'' + g''' \text{--} + G). \end{array}$$

Eben so findet sich, wenn die Kraft stetig abnimmt, nach n. 3. und 4.

$$\begin{array}{ll} 7.) & V^2 - c^2 < 4y\,(g + g' + g'' + \text{--} + G') \\ 8.) & > 4y\,(g' + g'' + g''' + \text{--} + G) \end{array}$$

Mithin ist die Auflösung dieser Aufgabe wie die des 234sten §. auf die Summation der Reihen zurückgeführt.

§. 245. Eine veränderliche Kraft wirke z. B. auf einen Körper P (Fig. 82.) beständig nach der Richtung der geraden Linie AC, welche direkt der Entfernung CP des Körpers von dem gegebenen Punkt C proportional, und in der gegebenen Distanz $CA = 2f$ sey. Der Körper ruhe anfangs in B in der gegebenen Distanz $CB = b$. Man sucht seine Geschwindigkeit in dem Augenblick, da er in P ankommt, und von der Ruhe an den Weg $BP = s$ beschrieben hat.

Da die Kraft in A oder $2f$: Kraft in $P = CA : CP = a : b - s$; so ist in dem Punkt P die Kraft $= \frac{2f}{a}(b - s)$, und in dem Punkt $B = \frac{2fb}{a}$. Man theile s in n gleiche Theile, deren jeder $= y$ sey; so ist die Kraft an dem Endpunkt des ersten Theilchens $= \frac{2f}{a}(b - y)$, am Ende des zweytens $= \frac{2f}{a}(b - 2y)$, u. s. w. Weil nun die Kraft abnimmt, indem s wächst, und $c = 0$ ist; so ist nach n. 7. des vorhergehenden §.

$$V^2 < \frac{4fy}{a}(nb - (1 + 2 + 3 + - - + (n-1)y)$$
$$< \frac{4fy}{a}\left(nb - \frac{n(n-1)}{2}y\right)$$
$$< \frac{2fs}{a}\left(2b - \left(1 - \frac{1}{n}\right)s\right), \text{ weil } ny = s.$$
$$< \frac{2f}{a}(2b - s)s + \frac{2fs^2}{na}$$

und nach n. 8.

$$V^2 > \frac{4fy}{a}(nb - (1 + 2 + - - + ny))$$
$$> \frac{2f}{a}(2b - s)s - \frac{2fs^2}{na}.$$

Nun kann durch die Vergrösserung von n die Grösse $\frac{2fs^2}{na}$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden; folglich kann wie in §. 233. u. f. gezeigt werden, daß V^2 weder grösser noch kleiner seyn könne, als $\frac{2f}{a}(2b - s)s$, und daher ist $V^2 = \frac{2f}{a}(2b - s)s$.

Man beschreibe aus C als Mittelpunkt mit einem Halbmesser $= CB$ einen Kreis, welcher der über C hinaus verlängerten BC in E begegne, und errichte auf seinem Durchmesser BE in dem Punkt P ein Perpendickel PM, welches dem Kreis in M begegne; so ist das Quadrat von $PM = EP \times PB = (2b - s)\, s$, und daher die Geschwindigkeit V der Ordinate PM proportional. Der Körper erhält also in dem Punkt C, wo $s = b$ wird, seine gröste Geschwindigkeit $= b\sqrt{\frac{2f}{a}}$. Mit dieser Geschwindigkeit würde er vermöge des Gesetzes der Trägheit (§. 242.) nach der Richtung CE fortgehen, wenn die Kraft nicht auf ihn wirkte. Da diese beständig gegen den Punkt C hin wirkt; so verzögert sie seine Bewegung von C bis E, wo seine Geschwindigkeit mit der Ordinate des Kreises, welcher sie proportional ist, zugleich verschwindet. Von E an bewegt sich der Körper wiederum gegen B hin, wie er sich zuerst von B nach E bewegte, und geht also zwischen den Punkten B und E hin und her.

Indem der Punkt P die gerade Linie BE beschreibt, beschreibt der Punkt M den Halbzirkel BDE, und wenn der Punkt M in den anderen Halbzirkel EFB übergeht; so bewegt sich der Punkt P wiederum gegen B hin. Es sey die Geschwindigkeit von P in dem Punkt $P = Pp$, in dem Punkt C aber $= Cc$. Man ziehe durch p eine Parallele pt mit PM, welche der an den Punkt M des Kreises gezogenen Tangente TMt in t begegne; so verhält sich an den Punkten P und M die Geschwindigkeit von P zu der Geschwindigkeit der kreisförmigen Bewegung von $M = Pp : Mt$ (240.)

$$= PT : TM = PM \quad \left\{ \begin{matrix} CM \\ CD \end{matrix} \right.$$

$$= \text{Geschw. von } P \text{ in } M : \left\{ \begin{matrix} \text{Geschw. von } P \text{ in } C \\ \text{oder } Cc \end{matrix} \right.$$

folglich ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt M in dem Kreis fortrückt, der gegebenen Geschwindigkeit Cc oder $b\sqrt{\frac{2f}{a}}$ gleich, welche der Punkt P hat, wenn er in C ankommt, und daher die Bewegung von M gleichförmig.

Es verhalte sich die Umlaufszeit von M zu der Zeit, in welcher der Raum Cc oder $b\sqrt{\frac{2f}{a}}$ beschrieben wird $= T : 1$, d. i. die Zeit T sey in Sekunden oder Minuten u. s. w. ausgedrückt, wenn die Geschwindigkeit durch den in einer Sekunde oder Minute u. s. w. beschriebenen Raum gemessen wird; so wird sich verhalten $b\sqrt{\frac{2f}{a}} : 2b\pi = 1 : T$, und die Umlaufszeit T wird $= 2\pi\sqrt{\frac{a}{2f}}$ seyn. Mithin ist die Zeit, in welcher der Punkt P den Weg BC beschreibt $= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2f}}$, und die Zeit durch $BE = \pi\sqrt{\frac{a}{2f}}$.

Die Zeiten durch BC und BE hängen also allein von a und f ab, und bleiben daher unverändert, die anfängliche Entfernung b des Körpers von dem Punkt C mag groß oder klein seyn, welches daher rührt, daß die Geschwindigkeit von M sowohl als der Raum welchen der Punkt M zu beschreiben hat, d. i. der vierte Theil oder die Hälfte des Umfangs des Kreises $BDEF$ dem Halbmesser CB oder b proportional sind.

§. 246. Zur ferneren Erläuterung der bisherigen Sätze dienen folgende geometrische Darstellungen derselben. Es sey $BACB$ (Fig. 83.) eine durch die krumme Linie AB und durch die geraden auf einander senkrechten Linien AC, CB begränzte Fläche. Man theile AC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, ziehe durch die Theilungspunkte a, c, P u. s. w. die Parallelen ab, cd, PM u. s. w. mit CB und vollende die Rechtecke Ab, cb, ad, Pd, cM u. s. w.; so ist die Summe der in die Figur beschriebenen Rechtecke cb, Pd --- Cf kleiner als der Flächeninhalt der Figur, die Summe der um dieselbige beschriebenen Rechtecke Ab, ad, --- eB größer als ihr Flächeninhalt. Verlängert man die mit AC parallelen Seiten der Rechtecke bis an die CB; so sind die Rechtecke Ab, bd, dM --- mf den Rechtecken eb', $b'd'$, $d'M'$ --- $m'f'$ gleich, und daher ist der Ueberschuß der Summe der um die Figur beschriebenen Rechtecke über die Summe der in die Figur beschriebenen Rechtecke der Summe der Rechtecke eb', $b'd'$, --- $f'g$, d. i. (II, 1.) dem letzten um die Figur beschriebenen Rechteck Cg gleich. Dieser Ueberschuß kann durch die Vergrößerung der Anzahl der gleichen Theile der CA kleiner als jeder gegebene Raum B gemacht werden. Man suche nemlich zu CB und der Seite Q des Quadrats, dessen Inhalt dem gegebenen Raum *B* gleich ist, die dritte geometrische Proportionallinie *q*, theile die *AC* durch fortgesetzte Halbirungen in so viele gleiche Theile, bis jeder derselben, wie CC' kleiner als *q* sey, und beschreibe wie vorhin die Rechtecke in und um die Figur; so wird der Ueberschuß der letzteren über die ersteren dem Rechteck aus *BC* und CC' gleich, und, weil $CC' < q$ ist, kleiner als das Rechteck aus *BC* und *q*, d. i. kleiner als das Quadrat von *Q*, oder kleiner als der Raum *B* seyn. Folglich kann um so mehr der Ueberschuß der um die Figur beschriebenen Rechtecke über den vermischtliniгten Raum *ABCA*, oder der Ueberschuß des letztern über die Summe der in die Figur beschriebenen Rechtecke kleiner gemacht werden, als jeder gegebene Raum.

§. 247. Es sey die Linie *AMB* (Fig. 83.) so beschrieben, daß die Abscissen *AP*, *Ap*, *AC* den vom Anfang einer Bewegung in *A* verfloßenen Zeiten, und die Ordinaten *PM*, *pm*, *CB* den am Ende der Zeiten *AP*, *Ap*, *AC* erlangten Geschwindigkeiten proportional seyen. Man nehme die gerade Linie *CF* der Geschwindigkeit *c* einer gegebenen gleichförmigen Bewegung proportional, vollende das Rechteck *CG*, theile die *AC* in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und beschreibe wie vorhin die Rechtecke *cb*, *Pd*, --- *Cf* in, und die Rechtecke *Ab*, *ad*, *eB* um die Figur.

Die Bewegung sey erstlich eine stetig beschleunigte; also $cd > ab$, $PM\,cd > cd$ u. s. w. Da die mit gleichförmigen Bewegungen beschriebenen Räume im zusammengesetzten Verhältniß aus den Zeiten und den Geschwindigkeiten sind (§. 231. n. 4.); so wird sich der während der Zeit *Aa* mit der am Ende derselben erlangten Geschwindigkeit *ab* gleichförmig beschriebene Raum zu dem in derselben Zeit mit der gegebenen Geschwindigkeit *CF* oder *c* beschriebenen Raum verhalten, wie das erste um die Figur beschriebene Rechteck *Ab* zu dem Rechteck aus *Aa* und *CF* (VI, 23.), und eben so der mit der Geschwindigkeit *cd* in der Zeit $ac = Aa$ gleichförmig beschriebene Raum zu dem in derselben Zeit mit der gegebenen Geschwindigkeit *CF* beschriebenen, wie das zweyte um die Figur beschriebene Rechteck ad zu dem Rechteck aus ac und CF, u. s. w. Folglich wird sich (V, 24. Coroll.) die Summe der ersteren Räume zu der Summe der letzteren, d. i. zu dem mit der Geschwindigkeit CF in der Zeit AC beschriebenen Raum verhalten, wie die Summe der um die Figur beschriebenen Rechtecke zu der Summe der Rechtecke aus Aa und CF, ac und CF --- eC und CF, d. i. (II, 1.) zu dem Rechteck CG. Aber die mit der stetig beschleunigten Bewegung in den Zeittheilchen Aa, ac u. s. w. wirklich beschriebenen Räume sind kleiner als die mit den am Ende eines jeden derselben erlangten Geschwindigkeiten ab, cd u. s. w. gleichförmig beschriebenen Räume (2. Grunds. §. 232.); folglich ist, wenn der ganze in der Zeit AC mit der beschleunigten Bewegung wirklich beschriebene Raum $= S$, der mit der Geschwindigkeit CF in derselben Zeit gleichförmig beschriebene Raum $= \mathfrak{S}$, die Summe der in die Figur beschriebenen Rechtecke $= R$, das letzte um die Figur beschriebene Rechteck $eB = r$, mithin die Summe der um die Figur beschriebenen $= R + r$ gesetzt wird (§. 246.),

1.) $S : \mathfrak{S} \lessdot R + r : CG$.

Ferner verhalten sich die in den Zeittheilchen ac, cP --- eC mit den am Anfang eines jeden derselben erhaltenen Geschwindigkeiten ab, cd, --- ef, gleichförmig beschriebenen Räume zu den in denselben Zeittheilchen mit der Geschwindigkeit CF beschriebenen, wie die Rechtecke cb, Pd, PM --- Cf in der Figur zu den Rechtecken aus ac und CF, cP und CF, --- eC und CF; also wiederum (V, 24. Coroll.) die Summe der ersteren, oder, weil unter dieser Voraussetzung der während des ersten Zeittheilchen Aa beschriebene Raum $= 0$ ist, der in der Zeit AC mit der stoßweise wachsenden Geschwindigkeit beschriebene Raum zu der Summe der letzteren, d. i. zu dem in der Zeit ac mit der Geschwindigkeit CF beschriebenen, wie R zu dem Rechteck aus Ca und CF. Und weil die mit einerley Geschwindigkeit CF in den Zeiten Ca und CA beschriebenen Räume sich verhalten wie $Ca : CA =$ Rechteck aus Ca und CF : Rechteck aus CA und CF oder zu CG; so verhält sich die Summe der in den Zeiten Aa, ac, --- eC mit den Geschwindigkeiten 0, ab, --- ef gleichförmig beschriebenen Räume zu dem mit der Geschwindigkeit CF in derselben Zeit AC beschriebenen Raum $\mathfrak{S}$, wie R: CG. Aber die mit der stetig beschleunigten Bewegung in den Zeiten Aa, ac u. s. w. wirklich beschriebenen Räume sind größer als die Räume, welche während derselben Zeittheilchen mit den am Anfang derselben erhaltenen Geschwindigkeiten gleichförmig würden beschrieben worden seyn (1. Grundſ. §. 232.); folglich ist

2.) $S : \mathfrak{S} > R : CG$.

Das Verhältniß von $S : \mathfrak{S}$ fällt also, wie das Verhältniß der Fläche $AMBC$ zu dem Rechteck CG (§. 246.), beständig zwischen die zwey Verhältniße $R + r : CG$ und R : CG, und, da durch die Vergrößerung der Anzahl der gleichen Theile von AC das Rechteck r oder Cg kleiner gemacht werden kann, als jeder gegebene Raum; so wird sich verhalten $S : \mathfrak{S} = \left\{ \begin{matrix} AMBC \\ A \end{matrix} \right\} : CG$. Denn wäre 1.) $S : \mathfrak{S} > A : CG$; so sey $S : \mathfrak{S} = A + q : CG$. Man theile AC in so viele gleiche Theile, daß das letzte um die Figur beschriebene Rechteck CB' oder r kleiner als q werde (§. 246.); so wird $R + r < R + q$, und um so mehr $< A + q$, mithin $A + q : CG > R + r : CG$ seyn. Folglich müßte, weil S: $\mathfrak{S} = A + q : CG$ (Voraussſ.), $S : \mathfrak{S} > R + r : CG$ seyn, gegen die Proportion n. 1. Wäre 2.) $S : \mathfrak{S} < A : CG$; so sey $S : \mathfrak{S} = A - q : CG$. Man mache wiederum $r < q$; so wird $R + r < R + q$, und um so mehr $A < R + q$, $A - q < R$, mithin $A - q : CG < R : CG$. Folglich müßte $S : \mathfrak{S} < R$: CG seyn, welches der Proportion n. 2. widerspricht. Daher ist $S : \mathfrak{S} = \left\{ \begin{matrix} A \\ AMBC \end{matrix} \right\} : CG$. Man setze den mit der stetig beschleunigten Bewegung in der Zeit AP beschriebenen Raum $= S'$, und den in derselben Zeit mit der Geschwindigkeit CF beschriebenen $= \mathfrak{S}'$; so verhält sich ebenfalls

$$\begin{array}{rl} & S' : \mathfrak{S}' = AMP : PG \\ \text{aber} & \mathfrak{S}' : \mathfrak{S} = PG : CG \\ \hline \text{folglich} & S' : \mathfrak{S} = AMP : CG \\ \text{da nun} & \mathfrak{S} : S = CG : AMBC \\ \hline \text{so verhält sich} & S' : S = AMP : AMBC. \end{array}$$

Ebenso wird zweytens für eine stetig verzögerte Bewegung der Beweiß mittelst des dritten und vierten Grundsatzes des 232sten §. geführt, indem man die Bewegung in dem Punkt C anfangen läßt.

Wenn z. B. die Geschwindigkeiten den Zeiten proportional wachsen; so wird AMB eine gerade Linie (Fig. 84.), und es verhält sich die Fläche AMP zu der Fläche ABC wie das Quadrat von AP zu dem Quadrat von AC (VI, 19.). Folglich sind die beschriebenen Räume den Quadraten der vom Anfang der Bewegung verfloßenen Zeiten proportional, wie man §. 234. gefunden hat. Ferner verhält sich der mit der gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Zeit AP beschriebene Raum zu dem in derselben Zeit mit der Geschwindigkeit PM gleichförmig beschriebenen Raum, wie das Dreyeck APM zu dem Rechteck $PN = 1 : 2$; folglich ist, wenn der in der ersten Sekunde mit der gleichförmig beschleunigten Bewegung beschriebene Raum $= g$ ist, die am Ende der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit $= 2g$. Und weil das Quadrat von PM zu dem Quadrat von BC sich verhält wie das Dreyeck APM zu dem Dreyeck ABC; so verhalten sich die Quadrate der erlangten Geschwindigkeiten wie die vom Anfang der Bewegung an beschriebenen Räume. Also ist, wenn die am Ende des beschriebenen Raums s erlangte Geschwindigkeit $= v$ gesetzt wird, $v^2 : 4g^2 = s : g = 4gs : 4g^2$, mithin $v^2 = 4gs$, übereinstimmend mit §. 234. n. 3.

§. 248. Wenn die Abscissen AP, Ap (Fig. 83.) den Zeiten, und die Ordinaten AD, PQ, pq der Linie DNE den beschleunigenden Kräften proportional sind; so wird sich unter der Voraussetzung der im vorhergehenden §. gemachten Construktion, wenn die Kraft stetig wächst, die in der Zeit Aa durch die Kraft ah gleichförmig erzeugte Geschwindigkeit zu der in derselben Zeit durch eine gegebene Kraft CF erzeugten sich verhalten wie $ah : CF =$ das erste um die Figur $ADEC$ beschriebene Rechteck hA zu dem Rechteck aus Aa und CF, und eben so wird es sich verhalten, wenn man während eines jeden der folgenden Zeittheilchen die Kraft beständig mit derjenigen Stärke wirken läßt, welche sie am Ende derselben hatte. Folglich wird sich die Summe aller auf diese Art erzeugten Geschwindigkeiten zu der Summe aller durch die Kraft CF erzeugten, d. i. zu der durch die letztere in der Zeit AC erzeugten Geschwindigkeit verhalten, wie die Summe aller um die Figur beschriebenen Rechtecke zu der Summe der Rechtecke aus Aa und CF, ac und CF --- eC und CF, d. i. zu dem Rechteck CC (V, 24. Coroll.). Läßt man aber die Kraft während eines jeden der Zeittheilchen mit derjenigen Stärke wirken, welche sie am Anfang derselben hatte; so wird sich die Summe aller so erzeugten Geschwindigkeiten zu der durch die Kraft CF in der Zeit AC erzeugten verhalten, wie die Summe der in die Figur beschriebenen Rechtecke zu dem Rechteck CG. Heißt nun die in der Zeit AC durch die stetig wachsende Kraft wirklich erzeugte Geschwindigkeit V, und die in derselben Zeit durch die Kraft CF erzeugte 𝔙; so wird (1. u. 2. Grunds. §. 245.)

1.) V : 𝔙 $> R : CG$

2.) V : 𝔙 $< R + r : CG$ seyn, wenn man die Summe der in die Figur beschriebenen Rechtecke $= R + r$, mithin r dem Ueberschuß des letzten um die Figur beschrieben Ee über das erste in dieselbe beschriebene Da oder dem Rechteck aus C und der gegebenen ED' gleich setzt. Da nun r durch die Vermehrung der Anzahl der gleichen Theile von CA kleiner als jeder gegebene Raum gemacht werden kann; so kann, wie in dem vorhergehenden §. gezeigt werden, daß V : 𝔙 = die Fläche $ADFC$: Rechteck CG, woraus ferner folgt, daß die Geschw. V : Geschw. V' in P $\left.\begin{array}{l}\\ CB : \quad PM\end{array}\right\} = ADEC : ADQP$.

Eben so wird der Satz mittelst des dritten und vierten Grundsatzes des 245sten §. bewiesen, wenn die Kraft stetig abnimmt.

§. 249. Es seyen die Abscissen AP, Ap den beschriebenen Räumen, die Ordinaten PM, pm den in P, p erlangten Geschwindigkeiten, und die Ordinaten AD, PQ, pq den Geschwindigkeiten gleich, welche die Kraft in einer gegebenen Zeit erzeugen würde, wenn sie während derselben beständig mit derjenigen Stärke wirkte, welche sie in A, P, p hat, so daß also diese Ordinaten den beschleunigenden Kräften in

A, P, p proportional seyen. Wäre nun die Bewegung durch $A1$ eine gleichförmig beschleunigte; so würde (§. 247. Beysp.) das Quadrat der Geschwindigkeit, welche die Kraft AD in der zur Beschreibung von Aa gebrauchten Zeit erzeugt haben würde, $= 2AD \times A1 = 2$ Rechteck Da seyn. Eben so würde, wenn die Bewegung von A bis c durch die Kraft ha gleichförmig beschleunigt würde, das Quadrat der in a erlangten Geschwindigkeit $= 2ha \times Aa$, das Quadrat der in c erlangten $= 2ha \times Ac$, und der Unterschied dieser Quadrate $= 2ha \times ac = 2$ Rechteck hc seyn, u. s. w. Wenn aber die Kraft stetig zunimmt; so werden vermöge des ersten und zweyten Grundsatzes §. 245.

$$\overline{ab}^2 > 2\,\text{Rk.}\ Da < 2\,\text{Rk.}\ hA$$

$$\overline{cd}^2 - \overline{ab}^2 > 2\,\text{Rk.}\ ch < 2\,\text{Rk.}\ ai$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\overline{fe}^2 - \overline{pm}^2 > 2\,\text{Rk.}\ eq < 2\,\text{Rk.}\ pk$$

$$\overline{BC}^2 - \overline{fe}^2 > 2\,\text{Rk.}\ Ck < 2\,\text{Rk.}\ Ee \text{ seyn.}$$

folglich ist $\overline{BC}^2 > 2\,(Da + ch + \cdots + eq + Ck)$

$$< 2\,(hA + ai + \cdots + pk + Ee),$$

das ist, $\overline{BC}^2 > 2R$
$< 2(R+r)$. Da nun das Quadrat der in C erlangten Geschwindigkeit, so wie $2ADEC$, beständig zwischen die zwey Flächenräume $2R$ und $2(R+r)$ fällt, und r durch die Vergrößerung der Anzahl der gleichen Theile der AC kleiner als jeder gegebene Raum gemacht werden kann (§. 246.); so ist das Quadrat der in C erlangten Geschwindigkeit $= 2$ Fläche $ADEC$. Eben so ist das Quadrat der in P erlangten Geschwindigkeit $= 2$ Fläche $ADQP$; folglich verhält sich

$$\overline{PM}^2 \quad \overline{CB}^2 = 2\,ADQP : 2\,ADEC = ADQP : ADEC.$$

Wenn die Kraft stetig abnimmt; so wird der Beweiß eben so mittelst des 3. und 4ten Grundſ. §. 245. geführt.

Die Geschwindigkeit PM in P ist also der Seite eines Quadrats proportional, dessen Inhalt dem Flächenraum $ADQP$ gleich ist (velocitas in P est ut recta, quæ *potest* aream curvilineam $ADQP$. *Newt.* princ. L. I. prop. XXXIX.)

Es sey z. B. die Kraft PQ dem Abstand CP proportional; so wird die Linie DQ eine durch C gehende gerade Linie DQC (Fig. 85.), und es verhält sich, wenn man $CE = CA$ nimmt, und über AE einen Halbzirkel beschreibt,

$$\text{die Fläche } ACD : \text{Fl. } PCD = \overline{AC}^2 \quad \overline{CP}^2$$
$$= AP \times PE + \overline{CP}^2 \quad \overline{CP}^2 \text{ (II, 5.)}$$
$$\text{folglich } ADQP \quad ACD = AP \times PE \quad \overline{AC}^2$$
$$= \overline{PM}^2 : \overline{CB}^2.$$

Mithin verhält sich die Geschwindigkeit in P zu der Geschwindigkeit in C wie $PM : CB$, übereinstimmend mit §. 245.

§. 250. Endlich seyen die Abscissen AP, Ap, AC (Fig. 86.) den beschriebenen Räumen, die Ordinaten PM, pm, CB den Geschwindigkeiten, und die Ordinaten PQ, pq, CE umgekehrt den Geschwindigkeiten proportional. Es verhalte sich die Geschwindigkeit in C zu der Geschwindigkeit einer gegebenen gleichförmigen Bewegung wie $CB : CF$, und es sey die CH so genommen, daß $CF : CB = CE : CH$; so verhält sich die Zeit, in welcher der Raum Pp mit der seinem Anfang entsprechenden Geschwindigkeit PM gleichförmig beschrieben wird zu der Zeit, in welcher derselbe Raum mit der gegebenen Geschwindigkeit CF beschrieben wird, wie $Pp \times CF : Pp \times PM$ (§. 231. n. 6.) $= Pp \times PQ : Pp \times CH$, weil $CF : PM = PQ : CH$ (Constr.). Daher wird sich die Summe jener ersteren dem beschriebenen Weg aC entsprechenden Zeittheilchen zur Summe der zweyten, d. i. zu der Zeit Z der gleichförmigen Bewegung von a bis C verhalten, wie die Summe der Rechtecke aus ab und ac, dc und ce - - - Ch und hi, zu der Summe der Rechtecke aus ac und CH, ce und CH, - - - hC und CH, d. i. (wenn die Geschwindigkeit wächst, mithin die Ordinaten PQ, pq u. s. w. abnehmen, indem AP zunimmt) wie die Summe $R + r$ der um die Figur $abEC$ beschriebenen Rechtecke zu dem Rechteck Cg. Aber jedes der ersteren Zeittheilchen ist wegen der stetig beschleunigten Bewegung größer, als die wirklich zur Beschreibung der Räume ac, ce u. s. w. gebrauchten Zeiten; folglich ist, wenn die zur Beschreibung von aC gebrauchte Zeit $= Z$ gesetzt wird, 1.) $Z : \mathfrak{Z} < R + r : Cg$,

und ebenso findet sich, wenn man jeden der Räume ac, ce u. s. w. mit den ihren Endpunkten entsprechenden Geschwindigkeiten gleichförmig beschrieben voraussetzt, und die Summe der in die Figur $abEC$ beschriebenen Rechtecke R nennt,

2.) $Z : \mathfrak{Z} > R \quad Cg$.

Mithin ist $Z : \mathfrak{Z} = abEC : Cg$, und, wenn die zur Beschreibung von aP gebrauchte Zeit Z' heißt

$$Z' : Z = abQP : abEC.$$

Ebenso wird der Beweiß geführt, wenn die Bewegung stetig verzögert ist.

§. 251. Wenn auf einen Körper zwey constante Kräfte zugleich nach einerley Richtung wirken, und die erste in einer gegebenen Zeit die Geschwindigkeit K, die zweyte in derselben Zeit die Geschwindigkeit K' einzeln genommen erzeugt haben würde; so wird die Geschwindigkeit, welche beyde zugleich erzeugen der Summe $K + K'$ jener Geschwindigkeiten gleich seyn. Da nemlich vermöge der Voraussetzung die Kräfte constant sind, und daher in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten erzeugen, der Körper mag in Ruhe oder in Bewegung seyn; so wird, wenn die erste Kraft die Geschwindigkeit K erzeugt hat, die Bewegung durch die Wirkung der zweyten Kraft einen ferneren Zuwachs an Geschwindigkeit erhalten, welcher eben so groß seyn wird, als wenn diese Kraft auf den anfangs in Ruhe befindlichen Körper gewirkt hätte. Nun werden aber constante Kräfte durch die Geschwindigkeiten gemeßen, welche sie in einer gegebenen Zeit erzeugen; folglich ist die ganze erzeugte Geschwindigkeit $K + K'$ eben so groß, als wenn eine Kraft, welche der Summe der zwey Kräfte gleich ist, auf den Körper gewirkt hätte. Wirken die zwey Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen; so wird durch ihre gleichzeitige Wirkung nach der Richtung der größeren Kraft während einer gegebenen Zeit eine Geschwindigkeit erzeugt, welche eben so groß ist, als wenn eine der Differenz der zwey Kräfte gleiche Kraft während derselben Zeit auf den Körper gewirkt hätte.

Weil ferner veränderliche Kräfte durch die Geschwindigkeiten gemeßen werden, welche sie in einer gegebenen Zeit erzeugt haben würden, wenn sie beständig mit derjenigen Stärke gewirkt hätten, welche sie im Anfang dieser Zeit hatten (§. 243.); so wird die Summe oder die Differenz der Geschwindigkeiten welche zwey nach einerley ~~oder~~ nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte in einer gegebenen Zeit erzeugt haben würden, eben so groß seyn, als wenn eine der Summe oder Differenz der zwey Kräfte im Anfang jener Zeit gleiche Kraft während derselben Zeit die Bewegung des Körpers gleichförmig beschleunigt hätte.

Hieraus folgt, daß, wenn mehrere Kräfte nach einerley oder zum Theil nach entgegengesetzten Richtungen auf einen Körper wirken, alle diese Kräfte zusammengenommen einer Kraft äquipollent sind, welche dem Ueberschuß der Summe der nach der einen Richtung wirkenden Kräfte über die Summe der nach der andern Richtung wirkenden gleich ist, und deren Richtung mit der Richtung derjenigen Kräfte zusammenfällt, welche die größere Summe ausmachen.

§. 252. Wenn auf einen anfänglich in C (Fig. 78.) ruhenden Körper zwey constante Kräfte A und B beständig mit den der Lage nach gegebenen geraden Linien CA und CB parallel wirken; so wird sich der Körper weder nach der Richtung CA, noch nach der Richtung CB bewegen können, sondern eine gewiße mittlere Richtung CN annehmen. Es seyen CP', CQ' die Geschwindigkeiten, welche jede der zwey Kräfte A und B einzeln genommen in einer gegebenen Zeit t erzeugen würden. Man halbire CP' und CQ' in P und Q; so werden (§. 247. Beysp.) CP und CQ die Räume seyn, welche der Körper in der Zeit t zurückgelegt haben würde, wenn entweder die Kraft A oder die Kraft B allein auf ihn gewirkt hätte. Da nun die Kraft A beständig mit der CA parallel wirkt (Vorauss.); so kann diese Kraft die Bewegung in der mit CB parallelen Richtung nicht verändern, welche die Kraft B hervorzubringen strebt, und der Körper muß sich am Ende der Zeit t auf einer durch Q mit CA parallel gezogenen QM befinden. Eben so muß sich der

Körper, weil seine Bewegung nach der Richtung CA durch die Kraft Q nicht verändert wird, am Ende der Zeit auf der geraden PM befinden, welche durch P mit CB parallel gezogen wird, und daher wird er am Ende der Zeit t in die Ecke M des Parallelogramms $CPMQ$ gekommen seyn. Man vollende das Parallelogramm $CP'M'Q'$, und ziehe seine Diagonale CM'; so wird diese, weil CP' und CQ' in P und Q halbirt sind, durch M gehen (VI, 26.), und, weil CP' : $\left\{ {CQ' \atop PM'} \right\} = A : B$, die Bewegung des Körpers geradlinigt und gleichförmig beschleunigt seyn. Endlich ist $CM' = 2CM$, weil $CP' = 2CP$; mithin CM' die in der Zeit t nach der Richtung CMN erzeugte Geschwindigkeit. Folglich bewegt sich der Körper nach der Richtung CN ebenso, als wenn er durch eine constante Kraft beschleunigt würde, welche sich zu den Kräften A und B verhält wie CM zu CP und CQ'. Man nehme auf den geraden Linien CA und CB die Ca zu der Cb wie $A : B$, vollende das Parallelogramm $Cafb$, und ziehe seine Diagonale Cf; so wird diese die Richtung der Bewegung bestimmen, und eine Kraft C, welche nach dieser Richtung wirkt, und sich zu A oder B wie Cf zu Ca oder Cb verhält wird dieselbe Wirkung hervorbringen, welche durch die gleichzeitige Wirkung der Kräfte A und B hervorgebracht wird. Diese Kraft heißt die mittlere aus den Kräften A und B zusammengesetzte Kraft. Umgekehrt kann eine nach der gegebenen Richtung CN wirkende Kraft C als aus zwey anderen Kräften A und B, welche nach den gegebenen Richtungen CA und CB wirken, zusammengesetzt betrachtet, und in diese zerfällt werden, wenn man auf der CN die Cf nach Belieben nimmt, und durch f die Parallelen fb und fa mit CA und CB zieht. Alsdenn verhalten sich nemlich die Kräfte A, B und C wie Ca, Cb und Cf.

Wenn die zwey Kräfte veränderlich sind, aber beständig nach Richtungen wirken, welche mit zweyen der Lage gegebenen geraden Linien parallel laufen; so wird, weil veränderliche Kräfte nicht durch die wirklich erzeugte Geschwindigkeiten, sondern durch diejenige Geschwindigkeiten gemeßen werden, welche diese Kräfte von einem gegebenen Zeitpunkt an in einer gegebenen Zeit erzeugt haben würden, wenn sie während dieser Zeit gleichförmig fortgewirkt hätten, dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt. In dem besonderen Fall, wo die Kräfte ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, wird das Verhältniß von $Ca : af$ diesem gegebenen Verhältniß gleich, und daher die Bewegung von C geradlinigt seyn.

Endlich weil constante Kräfte auf einen ruhenden Körper eben so wirken wie auf einen schon in Bewegung befindlichen; so wird die Kraft Cf sich bestreben, dem in Bewegung gesetzten Körper dieselbe Geschwindigkeit nach der Richtung CN mitzutheilen, welche sie dem in C ruhenden Körper mitgetheilt haben würde. Aber die Bewegung des Körpers selbst wird nur in dem Fall geradlinigt bleiben, wenn die Richtung CN der mittleren Kraft mit der Richtung seiner anfänglichen Bewegung zusammenfällt, in den übrigen Fällen aber krummlinigt, und z. B. aus einer geradlinigten gleichförmigen und aus einer gleichförmig beschleunigten nach einer mit CN parallelen Richtung zusammengesetzt seyn, wenn die Kraft Cf constant ist, welche Bewegungen in der Folge werden betrachtet werden.

Es seyen drey Kräfte A, B, D gegeben, welche nach den gegebenen Richtungen CA, CB, CD (Fig. 87.) wirken. Man nehme nach den Richtungen der Kräfte die Ca, Cb, Cd so, daß $Ca : Cb = A : B$, $Ca : Cd = A : D$, und vollende das Parallelogramm $Cbfa$; so ist die Kraft Cf, den Kräften Ca und Cb äquipollent, und es sind noch die zwey Kräfte Cf und Cd übrig. Man vollende das Parallelogramm $fCde$; so kann man statt der Kräfte Cd und Cf die Kraft Ce setzen, welche nun dieselbe Wirkung hervorbringen wird, als die drey Kräfte Ca, Cb und Cd. So kann man fortfahren, und eine beliebige Anzahl von Kräften, welche nach gegebenen Richtungen auf einen gegebenen Punkt wirken, die Richtungen mögen in einer, oder in verschiedenen Ebenen liegen, auf eine Kraft reduciren. Denn es liegen die Richtungen von je zwey Kräften in einer durch den gegebenen Punkt gehenden Ebene, und man findet nach dem vorhergehenden §. die mittlere Kraft, welche statt der zwey Kräfte

sub-

substituirt werden kann. Dadurch reducirt man z. B. vier Kräfte auf drey, und diese drey, wie so eben gezeigt worden ist, auf eine, und ebenso verfährt man, wenn fünf, sechs Kräfte u. s. w. auf einen Körper wirken.

Zweytes Capitel.

Von den Wirkungen der Schwere.

§. 253. Nach den Beobachtungen verhalten sich die Höhen, von welchen die Körper frey und von der Ruhe an fallen, wie die Quadrate der vom Anfang des Falls verflossenen Zeiten, wenn man den Widerstand der Luft, und alle fremde Ursachen der Veränderung der Bewegung zu beseitigen sucht. Folglich ist die Bewegung der frey fallenden Körper, so weit die Genauigkeit der Beobachtungen reicht, eine gleichförmig beschleunigte §. 233.), oder die Schwere theilt den Körpern Geschwindigkeiten mit, welche der Zeit proportional wachsen. Man beobachtet ferner, daß große oder kleine Körper in gleichen Zeiten von gleichen Höhen mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung fallen; folglich wirkt die Schwere auf alle Theilchen der Materie mit gleicher Stärke, die Körper mögen in Ruhe oder in Bewegung seyn. Mithin finden hier die §. 233. bis 235. von der gleichförmig beschleunigten Bewegung bewiesenen Sätze in so fern ihre Anwendung, als man den Widerstand der Luft und andere Störungen dieser Bewegungen bey Seite setzt. Sey die Fallhöhe in der ersten Sekunde $= g$, die nach Verfluß von t Sekunden erlangte Geschwindigkeit $= v$, die der Zeit t zugehörige Fallhöhe $= h$; so hat man nach §. 234. n. 1. 2. 3.

1.) $h = gt^2$
2.) $v = 2gt$
3.) $v^2 = 4gh$

Aus n. 3. erhält man 4.) $h = \frac{v^2}{4g}$, oder die Höhe, von welcher ein Körper fallen muß, um eine gegebene Geschwindigkeit v zu erlangen. Diese Höhe heißt die der Geschwindigkeit v zugehörige Fallhöhe (altitudo celeritati v debita).

Wenn einem Körper nach der Richtung der Schwere eine Geschwindigkeit c mitgetheilt wird; so würde er mit dieser Geschwindigkeit in der Zeit t den Weg ct zurücklegen. Wegen der durch die Schwere hervorgebrachten Beschleunigung legt aber der Körper noch überdiß in der Zeit t den Raum gt^2 nach derselben Richtung zurück; folglich ist der ganze in der Zeit t beschriebene Raum $= ct + gt^2$ (§. 235.). Wird aber ein Körper mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen; so wirkt die Schwere der dem Körper mitgetheilten Bewegung entgegen, und der Körper steigt mit einer gleichförmig verzögerten Bewegung, so daß am Ende der Zeit t seine Geschwindigkeit $= c - 2gt$ ist. Diese verschwindet, wenn $t = \frac{c}{2g}$ wird. Alsdenn ist aber $c^2 = 4g^2t^2 = 4gh$ (n. 1.); folglich ist die Höhe h, auf welche der Körper steigt, $= \frac{c2}{2g} =$ der Höhe, von welcher der Körper hätte fallen müssen, um die ihm anfänglich mitgetheilte Geschwindigkeit c zu erlangen (n. 4.). Und da $4g^2t^2 = 4gh$; so ist $gt^2 = h$, und daher die Zeit, welche der Körper gebraucht, um auf seine gröste Höhe zu steigen, ebenso groß als die Zeit, welche er gebraucht haben würde, um von eben dieser Höhe zu fallen.

§. 254. Ein Körper K (Fig. 88.) falle jetzt auf einer gegen die Horizontalebene BC um den Winkel ABC geneigten Ebene AC. Es sey KG die Geschwindigkeit, welche die Schwere in einer gegebenen Zeit nach einer vertikalen oder auf BC senkrechten Richtung erzeugen würde, wenn die geneigte Ebene AC nicht da wäre. Man ziehe durch K die gerade Linie NL mit AC parallel, und auf diese durch G die GL senkrecht. Wird das Parallelogramm $GLKR$ vollendet; so sind die Kräfte KL und KR der Kraft KG äquipollent (§. 252.). Die leztere, welche vermöge der Construktion auf NL oder AC senkrecht ist, wird durch den Widerstand der geneigten Ebene aufgehoben, und es bleibt nur die Kraft KL übrig, welche den Körper längst der Ebene AC herunterbewegt, und in derselben Zeit die Geschwindigkeit KL erzeugt, in welcher die Schwere nach der vertikalen Richtung KG die Geschwindigkeit KG erzeugt haben würde. Man ziehe AB auf BC senkrecht; so verhält sich, weil GK auf BC, und GL auf AC senkrecht, mithin die Dreyecke ABC und GKL ähnlich sind, $GK : KL = AC : AB$. Folglich verhält sich die constante Kraft der Schwere zu der mit der geneigten Ebene AC parallel wirkenden Kraft wie die Länge AC der geneigten Ebene zu ihrer Höhe AB, und der Körper fällt auf derselben mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung. Nun ist das Quadrat der durch den freyen Fall von der Höhe AB erlangten Geschwindigkeit $= 2GK \times AB$, und das Quadrat der durch den Fall von A bis C auf der geneigten Ebene erlangten Geschwindigkeit $= 2KL \times AC$ (§. 234. n. 3.), d. i. weil $GK : KL = AC : AB$ sich verhält, ebenfalls dem Rechteck aus $2GK$ und AB gleich; folglich erlangt

1.) ein Körper durch den Fall auf der geneigten Ebene AC dieselbe Geschwindigkeit, welche er durch den senkrechten freyen Fall von der Höhe AB der geneigten Ebene erhalten haben würde.

Ferner, weil der Körper mit der in C erlangten Geschwindigkeit den Weg $2AC$ in derselben Zeit gleichförmig zurückgelegt haben würde, in welcher er mit seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung durch AC gefallen ist (§. 247. Beysp.); so ist die Zeit des Falls durch AC der Zeit gleich, in welcher der Körper den Raum $2AC$ mit der in C erlangten Geschwindigkeit gleichförmig beschrieben haben würde, und ebenso ist die Zeit des Falls durch AB der Zeit gleich, in welcher der freyfallende Körper den Weg $2AB$ mit der in B erlangten Geschwindigkeit gleichförmig würde beschrieben haben. Da nun die Geschwindigkeiten in C und in B einander gleich sind (n. 1.); so verhalten sich die Zeiten der gleichförmigen Bewegungen mit den in C und B erlangten Geschwindigkeiten durch die Räume $2AC$ und $2AB$, d. i. die Fallzeiten durch AC und AB wie die Räume $2AC$ und $2AB$ oder wie $AC : AB$. Mithin verhält sich

2.) Die Fallzeit auf der geneigten Ebene AC zur Fallzeit durch ihre Höhe AB wie die Länge AC der geneigten Ebene zu ihrer Höhe AB. Hieraus folgt

3.) Daß die Fallzeiten von gleich hohen geneigten Ebenen ihren Längen proportional sind.

Von den Endpunkten A, B (Fig. 89.) des vertikalen Durchmessers AB eines Kreises seyen die Chorden AC, BC gezogen. Man ziehe CD auf AB senkrecht; so verhält sich $AB : BC = BC : BD$, mithin

$$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = AB : BD$$
$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{Quadr. d. Fallzeit} \\ \text{durch } AB \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{c} \text{Quadr. d. Fallz.} \\ \text{durch } BD \end{array} \right\}$$
$$AB \quad BC = \text{Fallz. d. } AB : \text{Fallz. d. } BD$$
$$\text{Aber} \begin{array}{cc} BC & BD \\ AB & BC \end{array} \Big\} = \text{Fallz. d. } BC : \text{Fallz. d. } BD \text{ (n. 2.)}$$

Folglich ist die Fallzeit durch BC = der Fallzeit durch AB. Ebenso kann gezeigt werden, daß die Fallzeit durch die Chorde AC der Fallzeit durch den Durchmesser AB gleich ist. Also sind

4.) Die Zeiten einander gleich, welche ein Körper gebraucht, um durch die von dem unteren oder oberen Endpunkt des vertikalen Durchmessers eines Kreises ausgehende Chorden zu fallen. Diese Zeiten sind nemlich der Fallzeit durch den vertikalen Durchmesser des Kreises gleich.

§. 255. Es seyen AD, DC (Fig. 90.) zwey Ebenen, welche in D einen stumpfen Winkel ADC mit einander machen, und ein von A nach D sich bewegender Körper komme in D mit der Geschwindigkeit Dq an, mit welcher er sich, wenn keine Kraft auf ihn wirkte, und die Ebene DC nicht da wäre, nach der Verlängerung von AD gleichförmig fortbewegen würde. Man ziehe qp auf DC senkrecht, und vollende das Parallelogramm $Dpqr$; so zerfällt die Geschwindigkeit Dq in die Geschwindigkeiten Dp und Dr. Die letztere wird durch den Widerstand der Ebene DC aufgehoben, und es bleibt nur die Geschwindigkeit Dp übrig, mit welcher der Körper auf der Ebene DC gleichförmig fortgehen würde. Folglich leidet der Körper an der Ecke D einen Verlust an seiner Geschwindigkeit, welcher sich zu der Geschwindigkeit, mit welcher er in D ankommt, wie der Ueberschuß von Dq über Dp zu Dq verhält.

Es sey z. B. BDC eine horizontale Ebene, AB die Höhe der geneigten Ebene AD, und Dq die durch den Fall auf der geneigten Ebene AD erlangte Geschwindigkeit; so wird, weil die Wirkung der Schwere durch die horizontale Ebene DC aufgehoben wird die Bewegung auf DC gleichförmig, und ihre Geschwindigkeit $= Dp$ seyn.

Die Zeit, welche ein von A aus fallender Körper gebraucht, um auf dem gebrochenen Weg ADC an einen gegebenen Punkt C der über D hinaus verlängerten Horizontallinie BC zu kommen, wird also aus einem doppelten Grund grösser seyn als die Zeit, welche er gebraucht haben würde, um auf der über D hinaus nach H verlängerten geneigten Ebene AH zu fallen, deren Länge $AH = AD + DC$ ist, einmal, weil die Bewegung auf DC durch die Schwere nicht weiter beschleunigt wird, sodenn, weil die Geschwindigkeit Dp dieser Bewegung kleiner als die in D erlangte Geschwindigkeit Dq ist. Nichts desto weniger kann die Zeit der Bewegung auf dem gebrochenen Weg ADC kleiner seyn, als die Zeit des Falls auf der geneigten Ebene AC, deren Länge kleiner ist als $AD + DC$ (I, 20.) Da nemlich die Zeit des Falls auf AD der Zeit einer gleichförmigen Bewegung mit der in D erlangten Geschwindigkeit Dq durch den Raum $2AD$ gleich, und $Dq : Dp = AD : DB$ ist; so verhält (§. 231. n. 6.)

die Zeit durch $CD : \left\{ \begin{array}{l} \text{Zeit durch } 2AD \\ \text{Fallzeit d. } AD \end{array} \right\} = CD \times AD : 2AD \times DB$
$= CD : 2BD,$

und die Zeit durch ADC : Fallzeit d. $AD = CD + 2BD : 2BD$
$= CF : DF$ (wenn $BF = BD$)
$= CG : AD$ (wenn man FAG,

und durch C die Parallele CG mit AD zieht)

Aber Fallzeit d. AD : Fallzeit d. $AC = AD : AC$ (§. 254. n. 3.)

---

folglich Zeit d. ADC : Fallzeit d. $AC = CG : AC$.

Demnach ist die Zeit durch $ADC \overset{<}{\underset{>}{=}}$ Fallzeit durch AC,

je nachdem $CG \overset{<}{\underset{>}{=}} AC$, $\left. \begin{array}{l} GAC \\ EAF \end{array} \right\} \overset{<}{\underset{>}{=}} \left\{ \begin{array}{l} AGC \\ FAD \\ 2BAD \end{array} \right.$.

$\left.\begin{matrix} EAF + FAB \\ EAB \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \leq \\ = \\ > \end{matrix} \left\{\begin{matrix} 2BAD + FAB \\ 3BAD \end{matrix}\right\}$ ist.

Wenn der Winkel $BAD > \frac{1}{3}R$ aber $< \frac{1}{2}R$ ist; so kann man immer eine geneigte Ebene AC finden, so daß die Zeit durch ADC der Fallzeit durch AC gleich wird, wenn man den Winkel $BAE = 3BAD$ macht, und die gerade Linie EAC zieht, welche in diesem Fall der über D hinaus verlängerten BD begegnen wird.

§. 256. Der seiner mancherley Anwendungen wegen wichtigste Fall der Bewegung auf vorgeschriebenen Wegen ist derjenige, wenn ein Körper durch äussere Hindernisse genöthigt wird, sich in einer krummen Linie, z. B. in einem gekrümmten Canal, zu bewegen. Es sey AFG (Fig. 91.) eine in einer Ebene liegende krumme Linie, deren Bogen nach einerley Seite hol, und so beschaffen sey, daß die an seine Endpunkte A, F gezogene Tangenten AN, FO sich auf der erhabenen Seite dieses Bogens in O schneiden. Ein Körper komme in A mit einer gegebenen Geschwindigkeit v nach der Richtung AN an, und treffe daselbst auf die krumme Linie AFG, so daß er seinen Weg nicht anders, als in dieser krummen Linie fortsetzen könne. Während seiner Bewegung durch AF wirke weiter keine Kraft auf ihn. Man sucht die Geschwindigkeit, mit welcher er in dem gegebenen Punkt F der krummen Linie ankommt.

Man theile den Winkel FON durch fortgesetzte Halbierungen in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile durch die geraden Linien OB', OC', OD', und ziehe mit diesen parallel die Tangenten bC, cD, dE an die krumme Linie (§. 241.); so werden diese ein um den Bogen AF beschriebenes gleichwinklichtes Vieleck $ABCDEF$ bilden, welches ebenso viele Ecken haben wird, als die Anzahl n der gleichen Theile des Winkel FON ausmacht. Man bezeichne zur Abkürzung die äusseren Winkel ABb, BCc u. s. w. des Vielecks mit B, C, D, E; so ist (I, 32.) $FON = OdE + E = dcD + D + E$ $B + C + D + E$; mithin der Winkel FON immer gleich der Summe der äusseren Winkel des Vielecks, und jeder der letzteren Winkel $= \frac{FON}{n}$.

Ueber einer nach Belieben angenommenen geraden Linie ab (Fig. 92) als Durchmesser sey ein Halbzirkel afb beschrieben, und der Winkel acf sey dem gegebenen Winkel FON (Fig. 91.) gleich gemacht. Man theile den Bogen af in ebenso viele gleiche Theile, als den Winkel FON, ziehe an den ersten Theilungspunkt e von a an gerechnet den Halbmesser ce, und ea auf ab senkrecht. Da vermöge dieser Construktion der Winkel $ace = NOB' = cBC$; so würde der Körper, wenn er sich in dem Vieleck bewegte, an der Ecke B einen Verlust an seiner anfänglichen Geschwindigkeit erleiden, welcher sich zu dieser wie $ce : ce - cd$ oder zu ad verhält (§. 255), und daher dieser Verlust $= \frac{da}{a} v$ seyn. Mit der um diese Größe verminderten Geschwindigkeit v' würde sich der Körper auf der zweyten Seite BC des Vielecks gleichförmig fortbewegen, und an der Ecke C einen zweyten Verlust an seiner Geschwindigkeit leiden, welcher $= \frac{da}{ac} v'$, mithin kleiner als $\frac{da}{ac} v$ seyn wird. An jeder folgenden Ecke wird der Verlust um so mehr kleiner als $\frac{da}{ac} v$, und daher wenn das Vieleck n Ecke hat, der ganze Verlust an Geschwindigkeit, welche der Körper bey seiner Bewegung auf dem Vieleck leiden würde, kleiner als $\frac{nda}{ac} v$ seyn. Es verhält sich aber, wenn man die Chorden ae und eb zieht, $da : ae = ae : ab$

$$\text{folglich } da : \left\{\frac{ab}{2ac}\right\} = \overline{ae}^2 : \left\{\frac{\overline{ab}^2}{4\overline{ac}^2}\right\}$$

$$da \quad ac = \overline{ae}^2 \quad 2\overline{ac}^2;$$

mithin ist der gesammte Verlust an Geschwindigkeit, welche der Körper bey seiner Bewegung durch das Vieleck leidet $< \frac{nv}{2}\left(\frac{ae}{ac}\right)^2$, und um so mehr $< \frac{nv}{2}\left(\frac{\text{Bogen } ae}{ac}\right)^2$

$< \frac{v}{2n}\left(\frac{n . \text{Bogen } ae}{ae}\right) < \frac{v}{2n}\left(\frac{af}{ac}\right)^2$, weil $n$mal der Bogen $ae =$ Bogen af ist. Da nun der Winkel $acf = FON$ gegeben ist; so wird der ganze Verlust an Geschwindigkeit desto kleiner, je größer n wird, je mehr sich folglich das Vieleck einer stetig krummen Linie nähert, und dieser Verlust kann durch die Vergrößerung von n kleiner gemacht werden, als jede gegebene Größe.

Unter der Voraussetzung des Grundsatzes, daß der Verlust an Geschwindigkeit, welchen ein Körper bey seiner Bewegung auf einer stetig krummen Linie leidet, kleiner sey als derjenige, welchen er bey seiner Bewegung auf einem um die krumme Linie beschriebenen gleichwinklichten Vieleck leiden würde, wird nun gezeigt werden können, daß der auf der krummen Linie sich bewegende Körper mit derselben Geschwindigkeit v in F ankomme, welche er in A nach der Richtung AV der Tangente der krummen Linie hatte. Hätte nemlich der Körper den Verlust u an seiner Geschwindigkeit erlitten; so theile man den Winkel FON durch fortgesetzte Halbierungen in so viele gleiche Theile, daß ihre Anzahl m größer als $\frac{v}{2u}\left(\frac{af}{ac}\right)^2$, werde, und beschreibe wie vorhin ein Vieleck von m Ecken um den Bogen AF der krummen Linie. Alsdenn wird vermöge des oben bewiesenen der Verlust an Geschwindigkeit, welchen der Körper bey seiner Bewegung auf dem Vieleck leiden würde, kleiner als $\frac{v}{2m}\left(\frac{af}{ac}\right)^2$ seyn. Man hat aber m größer als $\frac{v}{2u}\left(\frac{af}{ac}\right)^2$ gemacht, und daher müßte $u > \frac{v}{2m}\left(\frac{af}{ac}\right)^2$, d. i. der Verlust an Geschwindigkeit, welchen der Körper bey seiner Bewegung auf der stetig krummen Linie leidet, größer als der Verlust seyn, welchen er bey seiner Bewegung auf dem Vieleck gelitten haben würde, gegen den aufgestellten Grundsatz. Der Körper durchlauft also den Bogen AF mit einer gleichförmigen Bewegung. Und wenn der vorgeschriebene Weg eine in sich selbst zurückkehrende krumme Linie ist; so durchlauft er jeden gegebenen Bogen derselben gleichförmig mit derjenigen Geschwindigkeit, welche er am Anfang dieses Bogens hatte. Folglich durchlauft er den Umfang der krummen Linie gleichförmig, und kommt, wenn er einen Umlauf gemacht hat, wieder mit derselben Geschwindigkeit an, welche er im Anfang seiner Bewegung hatte. Diese Umlaufsbewegung würde also beständig fortdauern, wenn nicht die Friction und der Widerstand der Luft nach und nach seine Geschwindigkeit verminderten.

Ebenso kann gezeigt werden, daß, wenn ein Körper bey seiner Bewegung auf der krummen Linie und auf dem um die krumme Linie beschriebenen Vieleck durch die Wirkung einer Kraft beschleunigt oder verzögert wird, und seine gröste Geschwindigkeit auf dem Vieleck, welche er ohne an den Ecken desselben einen Verlust zu erleiden erlangt haben würde, gleich v gesetzt wird, der gesammte von den Brechungen dieses Wegs herrührende Verlust an Geschwindigkeit kleiner sey als $\frac{v}{2n}\left(\frac{af}{ac}\right)^2$, und daher die Bewegung des Körpers auf der krummen Linie nur in so fern eine Veränderung leide, als sie durch den mit der Tangente an jedem Punkt des krummlinigten Wegs parallel wirkenden Theil der Kraft beschleunigt oder verzögert wird.

§. 257. Ein Körper falle aus der Ruhe in A (Fig. 93.) auf der in einer Vertikalebene liegenden krummen Linie AKD, und es werde seine Geschwindigkeit gesucht, wenn er durch den Bogen AD gefallen ist. Man beschreibe um die krumme Linie ein gleichwinklichtes Vieleck $ABCD$, ziehe durch die Berührungspunkte A, D, und die Ecken B, C die Horizontallinien Aa, Dd, Bb, Cc, welche der Vertikallinie ad in a, d, b, c begegnen, und verlängere CB, DC, bis sie der ersten Horizontallinie Aa in E und F begegnen. Fiele nun der Körper auf dem Vieleck; so würde er in B mit der Geschwindigkeit ankommen, welche er durch den freyen Fall von der Höhe ab erlangt haben würde (§. 254. n. 1.), und, wenn er an der Ecke B kein Verlust an seiner Geschwindigkeit statt fände, mit dieser Geschwindigkeit auf BC fortgehen, mithin in C mit der Geschwindigkeit ankommen, welche er durch den Fall auf EC oder durch den freyen Fall von der Höhe ac erlangt haben würde. Demnach würde er, wenn an den Ecken nichts von seinen Geschwindigkeiten verlohren gienge, in D mit der durch den Fall von FD, oder durch den freyen Fall von der Höhe ad erlangten Geschwindigkeit ankommen. Nun kann aber durch die Vergrößerung der Anzahl der Seiten des Vielecks der gesammte Verlust an Geschwindigkeit kleiner gemacht werden, als jede gegebene Größe (§. 256.); folglich kommt der Körper wenn er auf der krummen Linie gefallen ist, in D mit einer Geschwindigkeit an, welche er durch den freyen Fall von der Höhe ad erlangt haben würde. Wenn die an den Punkt H der krummen Linie gezogene Tangente Hh eine Horizontallinie ist; so kommt der Körper in H mit einer Geschwindigkeit an, welche er durch den freyen Fall von der Höhe ah erlangt haben würde, mit welcher er sich nach der Richtung der Verlängerung HT dieser Tangente auf der durch den Berührungspunkt H gelegten Horizontalebene gleichförmig fortbewegen würde.

Es sey ABA' (Fig. 94.) eine gegen die Horizontallinie BH erhabene in einer Vertikalebene liegende krumme Linie, welche von der BH in B berührt werde, und ein Körper falle aus der Ruhe in A auf der krummen Linie AB. Man ziehe durch A die Horizontallinie AA', welche der krummen Linie in A' begegne, und durch B die Vertikallinie CB; so wird der Körper in B eine der Fallhöhe CB zugehörige Geschwindigkeit erlangt haben, mit welcher er durch den Bogen BA', auf welchem nun die Schwere seine Bewegung verzögert, so lange steigen wird, bis seine in B erlangte Geschwindigkeit zernichtet ist. Dieß wird in dem Punkt A' geschehen, wo er sich auf eine Höhe erhoben hat, welche der Höhe seines Falls von A bis B gleich ist. Von A' an wird er wiederum gegen B fallen, und mit seiner in B erlangten Geschwindigkeit auf A steigen, und so beständig zwischen den Punkten A und A' hin und her oscilliren.

Beyspiel. Die krumme Linie sey ein Kreis (Fig. 95.), dessen vertikaler Durchmesser BA sey, und ein Körper sey von D aus der Ruhe auf dem Bogen DA gefallen. Man ziehe DE auf AB senkrecht; so gehört die in A erlangte Geschwindigkeit der Höhe AE zu. Mithin verhält sich (§. 234. n. 3.) das Quadrat der durch den Fall von der Höhe AB erlangten Geschwindigkeit zu dem Quadrat der durch den Fall von der Höhe AE oder durch den Bogen DA erlangten Geschwindigkeit wie $AB : AE = \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2$, weil $AB : AD = AD : AE$. Folglich verhält sich die durch den freyen Fall von einer dem Durchmesser des Kreises gleichen Höhe erlangte Geschwindigkeit zu der durch den Fall auf dem Bogen DA in A erlangten Geschwindigkeit wie des Kreises Durchmesser zu der Chorde DA dieses Bogens, und daher verhalten sich die durch den Fall auf verschiedenen Bogen des Kreises an dem unteren Endpunkt A seines vertikalen Durchmessers erlangten Geschwindigkeiten wie die Chorden dieser Bogen.

§. 258. Man denke sich den einen Endpunkt eines Fadens in C (Fig. 95.) und an seinem anderen Endpunkt A einen schweren Körper befestigt; so wird der Körper, wenn man ihn von der Vertikallinie CA um den Winkel ACD ablenkt, und ihn hierauf sich selbst überläßt, anfangen, um C als Mittelpunkt ein Kreisbogen DA zu beschreiben, in A seine gröste Geschwindigkeit erlangen, und mit dieser auf der anderen Seite der Vertikallinie so lange steigen, bis er in die durch D gezogene Horizontallinie DED' kommt, wo seine Ablenkung ACD' von der Vertikallinie $= ACD$ wird. Der Faden nöthigt jetzt den Körper, einen Kreisbogen zu beschreiben, welchen er ebenso beschrieben haben würde, wenn ein nach diesem Bogen gekrümmter Canal angebracht, und der Faden weggenommen worden wäre. Der Körper wird also, wie in dem vorhergehenden §. gezeigt worden ist, beständig zwischen den Punkten D und D' hin und her schwingen. Man nennt diese Vorrichtung ein Pendel, und zwar ein einfaches Pendel, wenn man sich den Faden ohne Schwere und die ganze Masse des angehängten Körpers in einem Punkt vereinigt denkt. Dieses einfache Pendel kann man ebenso wenig verfertigen, als den mathematischen Hebel, aber man kann, wie hernach gezeigt werden soll, die Bewegungen eines aus schweren Körpern zusammengesetzten Pendels auf die des einfachen Pendels reduciren, welchem letzteren man sich übrigens in der Ausübung desto mehr nähert, je leichter und biegsamer der Faden, und je kleiner die Ausdehnung des angehängten schweren Körpers ist.

Man ziehe durch irgend einen Punkt d des Bogens DA die Parallele dh mit der Vertikallinie BCA, nehme auf ihr die dg von beliebiger Länge, ziehe an d die Tangente dt, durch g die Parallele gt mit Cd, und vollende das Parallelogramm $dtgr$; so zerfällt die nach der Richtung dg wirkende Kraft der Schwere in die zwey Kräfte dr und dt (§. 252.), von welchen die erstere nach der Richtung des Halbmessers dC wirkende blos den Faden spannt, und keinen Einfluß auf die Winkelbewegung des Pendels hat. Die zweyte dt wirkt nach der Richtung der Bewegung des Körpers von D gegen A, und verhält sich wenn man de auf CA senkrecht zieht, zu der Kraft der Schwere, wie $dt : dg = de : Cd$, weil $gdr = ACd$ (I, 29.), mithin die rechtwinklichten Dreyecke gdt und Cde einander ähnlich sind. Daher ist die nach der Richtung der Bewegung wirkende beschleunigende Kraft an jedem Punkt d des Bogen DA dem von diesem Punkt auf den vertikalen Halbmesser CA gefällten Perpendickel de proportional. In D ist diese Kraft für den gegebenen Bogen DA am grösten, sie verschwindet in A und geht bey der Bewegung des Pendels von A gegen D' in eine verzögernde über. Wenn der Bogen DA oder der Winkel ACD sehr klein ist; so verhält nahe $DE : de =$ Bogen DA : Bogen dA. Man hat also, wenn man das Verhältniß der beschleunigenden Kraft in D zu der beschleunigenden Kraft in d dem Verhältniß des Bogens DA zu dem Bogen dA gleich setzt, den im 245sten §. betrachteten Fall einer stetig beschleunigten Bewegung. Es ist nemlich die nach der Richtung der Bewegung wirkende Kraft an jeder Stelle d dem noch bis zu demjenigen Punkt A zu durchlaufenden Weg dA proportional, in welchem die beschleunigende Kraft verschwindet. Folglich ist nach dem angeführten §. die Zeit der Bewegung durch den Bogen DA der Zeit gleich, welche ein Punkt gebraucht, um den vierten Theil des Umfangs eines Kreises, dessen Halbmesser dem von der Ruhe in D an bis an den Punkt A beschriebenen Weg DdA gleich ist, gleichförmig mit der in A erlangten Geschwindigkeit zu durchlaufen. Man setze die durch den Fall von der Höhe $2AC$ oder BA erlangte Geschwindigkeit $= V$, die durch den Fall auf dem Bogen DA erlangte Geschwindigkeit $= v$, die Fallzeit durch $BA = T$, die Zeit der Bewegung durch $DA = t'$, und das Verhältniß des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser $= \pi : 1$; so ist die Fallzeit T durch BA der Zeit einer gleichförmigen Bewegung durch $2BA$ mit der Geschwindigkeit V, und die Zeit t' durch DbA der Zeit einer gleichförmigen Bewegung durch den vierten Theil des Umfangs eines Kreises mit der Geschwindigkeit v gleich, dessen Halbmesser $= DdA$ oder in gegenwärtigem Fall nahe $=$ der Chorde DA dieses Bogens ist. Der vierte Theil des Umfangs dieses Kreises ist $= \frac{1}{2} \pi\ AD$; folglich ist nach §. 231. n. 6.

$t' : T$ im zusammenges. Verhältn. von $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi . AD : 2AD \\ AD : AD \end{pmatrix}$

oder von $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\pi . AD : 2AD \\ AB : AD \end{pmatrix}$ (§. 257. Beysp.)

Daher verhält sich $t' : T = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\pi & 2 \\ \frac{1}{4}\pi & 1 \end{Bmatrix}$, oder wie der vierte Theil des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser.

Es ist aber die Fallzeit durch BA der Fallzeit durch die Chorde DA gleich; (§. 254. n. 4.); folglich ist die Zeit des Falls durch einen kleinen Kreisbogen DA in demselben Verhältniß kleiner als die Fallzeit durch seine Chorde, in welchem der Umfang eines Kreises kleiner als das vierfache seines Durchmessers. Also ist, wie man schon §. 255. gesehen hat, die gerade Linie, welche zwey gegebene weder in einerley Horizontalebene noch in einerley Vertikallinie liegende Punkte mit einander verbindet, nicht die Linie auf welcher ein fallender Körper in der kürzesten Zeit von dem einen Punkt an den andern kommt.

§. 259. Die Schwingungszeit eines Pendels durch den Bogen DAD' ist der doppelten Zeit des Falls durch den Bogen DA gleich; folglich verhält sich

1.) Die Schwingungszeit t eines einfachen Pendels durch einen sehr kleinen Bogen DAD' zu der Zeit T des freyen

Falls eines Körpers von einer Höhe AB, welche der doppelten Pendellänge gleich ist, nahe wie der halbe Umfang eines Kreises zu seinem Durchmesser. Denn es verhält sich nach dem vorhergehenden §. nahe $t' : T = \frac{1}{4}\pi : 1$; folglich $\left.\begin{matrix}2t'\\ t\end{matrix}\right\} : T = \frac{1}{2}\pi : 1$.

2.) Die Länge eines einfachen Pendels verhält sich zu der doppelten Höhe, von welcher ein Körper während der Zeit t einer sehr kleinen Schwingung fällt, wie das Quadrat des Durchmessers eines Kreises zu dem Quadrat seines Umfangs. Heißt nemlich die der Zeit t zugehörige Fallhöhe h; so verhält sich

$$\left.\begin{matrix}h & AB\\ 2h & 4AC\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}t^2 & T^2 & (\text{§. 253.})\\ 1 & 4\pi^2 & (\text{n. 1.})\end{matrix}\right.$$

$$2h : AC = 1 : \pi^2$$

$$AC : 2h = \pi^2 : 1.$$

Insbesondere verhält sich die Länge des einfachen Sekundenpendels zu der doppelten Fallhöhe in der ersten Sekunde wie $\pi^2 : 1$, welches der §. 161. angeführte Satz ist.

3.) Die Quadrate der Schwingungszeiten ungleicher einfacher Pendel verhalten sich wie ihre Längen. Denn wegen des constanten Verhältnißes von $\frac{1}{2}\pi : 1$ verhalten sich die Quadrate der Schwingungszeiten wie die Quadrate der Zeiten des freyen Falls durch die doppelte Pendellängen (n. 1.), und diese Quadrate sind (§. 253.) den Fallhöhen, mithin auch ihren Hälften, d. i. den Pendellängen proportional.

4.) Wenn mehrere Pendel ihre Schwingungen in gleichen Zeiten machen, aber von ungleichen Schweren getrieben werden; so verhalten sich die Pendellängen wie die Schweren. Denn die Längen der Pendel sind vermöge n. 2. den doppelten Fallhöhen während der Zeit einer Schwingung, mithin den in dieser Zeit durch die Schweren erzeugten Geschwindigkeiten proportional, welche sie wie die Kräfte verhalten.

5.) Die Schweren verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten gleich langer Pendel, oder direct, wie die Quadrate der Anzahl der Schwingungen, welche sie in einer gegebenen Zeit machen. Denn die Schweren verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten, in welchen sie die Körper von gleichen Höhen fallen machen, also auch (vermöge n. 1.) umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

Die Sätze n. 3. 4. und 5. sind auf große und kleine Schwingungen anwendbar, wenn die Pendel durch ähnliche Bogen schwingen.

§. 260. Wenn die Kraft, welche auf den in der krummen Linie *DdA* (Fig. 95.) sich bewegenden Körper nach der Richtung der Tangente *dt* wirkt, genau dem Bogen *dA* proportional wäre; so würde die Zeit des Falls durch den Bogen *DA* nach §. 245. genau angegeben werden können, und für große und kleine Bogen von gleicher Dauer seyn. Diese Eigenschaft hat die **Cykloide** *FamC* (Fig. 96.), welche krumme Linie von einem Punkt *m* des Umfangs eines an einer geraden Linie *FbC* sich so hinwälzenden Kreises *fmk* beschrieben wird, daß der Kreis beständig die gerade Linie *FC* berührt, und nach und nach die Theile seines Umfangs an dieselbige anlegt. Man setze, der beschreibende Punkt *m* habe zuerst die gerade Linie *FC* in dem Punkt *C* berührt; so wird, wenn der Kreis sich nach der Richtung *CF* fortgewälzt hat, und der Punkt *m* wieder mit der geraden Linie *CF* in dem Punkt *F* in Berührung gekommen ist, die gerade Linie *CF*, welche man die **Basis** der Cykloide nennt, dem Umfang des Kreises gleich seyn, welcher durch seine Bewegung die Cykloide beschreibt, und der **erzeugende Kreis** (circulus generator) heißt. Man halbire *FC* in *b*, ziehe durch diesen Punkt auf derjenigen Seite der *FC*, auf welcher der Kreis sich wälzt, die gerade Linie *ba* auf *FC* senkrecht, und mache *ba* dem Durchmesser *fk* des erzeugenden Kreises *fmk* gleich; so wird, weil die gerade Linie *bC* dem halben Umfang des Kreises gleich ist, wenn der Kreis einen halben Umlauf gemacht hat, und daher die *FC* in *b* berührt, der beschreibende Punkt in *a*, und dieser Punkt der Cykloide, welchen man ihren **Scheitel** nennt, am weitesten von der Basis entfernt seyn. Die gerade Linie *ba* heißt die **Axe** der Cykloide, und theilt sie in zwey gleiche und ähnliche Theile.

Einige der merkwürdigsten geometrischen Eigenschaften dieser krummen Linie sind folgende:

1.) Wenn man von einem beliebigen Punkt *m* der Cykloide ein Perpendickel *mp* auf die Axe *ab* fällt, welches dem um *ab* als Durchmesser beschriebenen Kreis in *n* begegnet; so ist die Chorde *na* dieses Kreises mit der an den Punkt *m* der Cykloide gezogen Tangente *mT* parallel.

2.) Der Bogen *am* der Cykloide ist das Doppelte der Chorde *an*.

3.) Wenn man auf der Tangente *mT* von dem Berührungspunkt *m* an die $mD = 2na$ oder = dem Bogen *am* (n. 2.) nimmt; so liegt der Punkt *D* auf einer der *FaC* gleichen Cykloide *aAa'*, deren Basis aa' gefunden wird, wenn man das Parallelogramm $abCc$ vollendet, und auf der über c hinaus verlängerten ac die $ca' = ca$ nimmt. Ihr Scheitel A fällt auf die Verlängerung von Cc, so daß $cA = Cc$.

4.) Hieraus folgt, daß, wenn das eine Ende eines in C befestigten Fadens, dessen Länge $= CA$ ist, auf die Cykloide Ca aufgewickelt wird, der andere Endpunkt desselben die Cykloide aDA beschreibt. Ein zwischen den in C sich berührenden Cykloiden aC, Ca' aufgehängtes Pendel, dessen Länge $= CA$ ist, wird also seine Schwingungen in der Cykloide aAa' machen, indem sich der Faden desselben abwechslungsweise auf die Cykloiden aC und Ca auf, und wieder davon abwickelt.

Es sey nun die Basis aa' der Cykloide aAa' horizontal, und ein Körper fange in D an auf dieser Cykloide zu fallen. Durch einen beliebigen Punkt d des Bogens DA sey eine Parallele dh mit CA oder eine Vertikallinie gezogen, und die nach der Richtung dh wirkende Kraft der Schwere dg sey in die Kräfte dt und dr zerfällt (§. 252.), wovon die erste in der Richtung der Tangente dt der Cykloide, die letztere senkrecht auf die Tangente wirke, welche durch den Widerstand des nach der Cykloide gekrümmten Canals oder des Fadens des Pendels ganz aufgehoben wird. Man beschreibe über cA als Durchmesser auf derjenigen Seite von cA, auf welcher d liegt, einen Halbzirkel, ziehe de auf cA senkrecht, und an den Punkt q, in welchem dieses Perpendickel dem Halbzirkel begegnet, die Chorden Aq, cq; so ist Aq mit dt parallel (n. 1.), und daher das Dreyeck Aqc dem Dreyeck gdt ähnlich. Folglich verhält sich

$$dt : dg = Aq : Ac = 2Aq : 2Ac$$
$$= \text{Bogen } Ad : \text{Bogen } Aa \text{ (n. 2.)}.$$

Mithin ist die Kraft, welche den Körper nach der Richtung seiner Bewegung auf dem Bogen DA beschleunigt an jedem Punkt d seines Wegs dem Bogen dA proportional, und in dem Punkt a der Schwere gleich. Man setze den Bogen aDA oder die ihm gleiche gerade Linie CA (n. 2.) $= a$; so ist nach §. 245. u. 256. die Fallzeit durch den Bogen $DA = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, und die Schwingungszeit t durch den Bogen $DAD' = \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$. Es ist aber das Quadrat der Zeit T des freyen Falls von der Höhe $2a$ oder $2AC$ nach §. 253. n. 1. gleich $\frac{2a}{g}$. Folglich verhält sich die Schwingungszeit t zu der Zeit T des freyen Falls von der Höhe $2AC = 1 : \frac{1}{2}\pi$. Die Schwingungszeiten des Pendels in der Cykloide sind also von gleicher Dauer, die Schwingungen mögen groß oder klein seyn. Wegen dieser von **Huygens** entdekten Eigenschaft hat die Cykloide die Benennung tavtochrona oder isochrona.

Ein

Ein aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CA beschriebener Kreis berührt die Cykloide in A, fällt aber auf beyden Seiten von A ganz ausserhalb der Cykloide. Zieht man nemlich von C an einen beliebigen von A verschiedenen Punkt D der Cykloide eine gerade Linie CD und aus D eine Tangente Dm an die Cykloide Ca, sodenn die Chorde Cm an den Berührungspunkt m; so ist $CD < Dm +$ Chorde mC (I, 20.), und um so mehr $< Dm$ $+$ Bogen mC, d. i. $< CA$ (n. 4.). Je kleiner aber der Bogen DA wird, desto kleiner ist der auf die Cykloide amC aufgewickelte Theil des Fadens, und desto mehr nähert sich der Bogen DA einem aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CA beschriebene Kreisbogen. Folglich nähert sich die Zeit, in welcher ein Pendel seine Schwingungen in den mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreisbogen macht, desto mehr der Zeit der Schwingungen in einer Cykloide, welche die halbe Pendellänge cA zum Durchmesser ihres erzeugenden Kreises hat, je kleiner die Schwingungen des ersteren Pendels werden, woraus sich wiederum der Satz §. 259. n. 1. ergiebt.

§. 261. Mittelst der höheren Analyse findet man die Zeit des Falls durch den Kreisbogen DA (Fig. 95.), wenn man $BA = d$ und $AE = b$ setzt, gleich

$$\left(1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{d} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{d}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{d}\right)^3+\cdots\right)\tfrac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Man setze die in die Parenthese eingeschloßene Reihe $= S$, die Länge des einfachen Pendels $= p$, und seine Schwingungszeit $= t$; so ist $t = \frac{1}{2}\pi S\sqrt{\frac{2p}{g}}$. Folglich wird die Schwingungszeit desto größer, je größer der Bogen DA wird. Aber wenn mehrere Pendel durch ähnliche Bogen schwingen; so ist für diese das Verhältniß von $a : b$ dasselbe, und S erhält in den Ausdrücken der Schwingungszeiten einerley Werth, woraus folgt, daß die Sätze n. 3. 4. und 5. §. 259. für große und kleine Kreisbogen gelten, wenn die Pendel durch ähnliche Bogen schwingen.

Für den Quadranten des Kreises wird $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$, und daher $S < 1 + \frac{1}{8}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots)$, und um so mehr $< 1 + \frac{1}{8}.2 < \frac{5}{4}$. Es ist aber $\pi < \frac{22}{7}$; folglich ist $\frac{1}{4}\pi S < \frac{55}{56}$, und daher $\frac{1}{4}\pi S\sqrt{\frac{d}{g}}$ $< \sqrt{\frac{d}{g}}$, oder die Zeit des Falls durch den Quadranten eines Kreises ist kleiner als die Zeit des freyen Falls durch seinen Durchmesser, mithin auch (§. 254. n. 4.) kleiner als die Zeit des Falls durch die Chorde des Quadranten. Eben dieses gilt um so mehr von jedem Kreisbogen, welcher kleiner als ein Quadrant ist, und in seinem unteren Endpunkt von einer Horizontallinie berührt wird

Die Linie, auf welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von einem gegebenen Punkt in einen andern gegebenen Punkt fällt, welcher mit dem ersteren weder in einerley Vertikallinie, noch in einerley Horizontallinie liegt, ist ebenfalls eine durch die zwey Punkte gehende Cykloide deren Basis eine durch den höher liegenden Punkt gezogene Horizontallinie ist, wie Johann Bernoulli gefunden hat, Daher heißt die Cykloide brachystochrona. Einen geometrischen Beweis dieser Eigenschaft der Cykloide findet man in Treatise of Fluxions by Maclaurin. Vol. II. Chap. XIII.

§. 262. Die Schwere wirkt, wie schon in dem 253sten §. bemerkt worden ist, auf alle materielle Theile der Körper gleich stark, und bringt, wenn sich dieselbige frey nach der Richtung von Vertikallinien bewegen können, in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten hervor, so daß die erzeugte Geschwindigkeit von der Masse des bewegten Körpers unabhängig, und dieselbe ist, als wenn die Masse auf einen Punkt reducirt wäre. Anders verhält es sich aber, wenn die Schwere gehindert wird, auf die ganze in Bewegung zu setzende Masse ihre Wirkung zu äussern. Wenn z. B. an einen durch eine horizontalebene unterstützten Körper ein Faden befestigt, dieser mit jener Ebene parallel über eine Rolle geführt, und an seinem Ende ein anderer Körper angehängt wird; so wird dieser nur in dem Fall ebenso tief in einer Sekunde sinken können, als die freye Fallhöhe der Körper in der ersten Sekunde beträgt, wenn auch auf alle Theile des durch die horizontale Ebene unterstützten Körpers eine constante der Schwere gleiche Kraft nach der Richtung seiner Bewegung wirkte. Da nun die Schwere auf die Horizontalebene senkrecht wirkt; so kann sie nichts zu der Bewegung des auf ihr liegenden Körpers beytragen, und es wird die ganze zu bewegende Masse, nemlich der auf der Horizontalebene liegende sammt dem angehängten Körper, nur durch den auf den letzteren wirkenden Theil der Schwere beschleunigt werden, mithin die Tiefe, auf welche dieser in einer gegebenen Zeit herab sinkt, kleiner seyn, als wenn der erstere Körper nicht da wäre. Ebenso verhält es sich mit allen denjenigen Kräften, welche nicht in das Innere der Körper eindringen, und nur auf das Aeussere wirken. Es seyen nun

1.) F und f zwey Kräfte, welche derselben Masse M in einer gegebenen Zeit die Geschwindigkeiten V und v mittheilen, oder mitgetheilt haben würden, wenn sie während jener Zeit constant geblieben wären, und R, r zwey beliebige ganze Zahlen; so wird $RV \gtreqless rv$ seyn, je nachdem $RF \gtreqless rf$ ist, und daher $F : f = V : v$ seyn.

2.) Wenn eine Kraft F der Masse M die Geschwindigkeit V in einer gegebenen Zeit mittheilt; so theilt die Kraft mF der Masse mM dieselbe Geschwindigkeit in eben dieser Zeit mit.

3.) Wenn zwey gleiche Kräfte, jede $= F$, auf ungleiche Massen M und m wirken; so erhält die letztere während einer gegebenen Zeit eine größere Geschwindigkeit, als die erstere. Es sey nemlich $M = m + n$; so theilt die Kraft F der Masse $m + n$ dieselbe Geschwindigkeit mit, wie der Masse M. Wird nun die Masse n weggenommen; so wird der Theil der Kraft F, welche vorher auf n wirkte, auch noch auf die Bewegung von m verwendet, mithin die Geschwindigkeit von m vergrößert.

4.) Wenn auf ungleiche Massen M und m gleiche Kräfte wirken; so sind die in einer gegebenen Zeit erzeugte Geschwindigkeiten umgekehrt den Massen proportional.

Bew. Die Kraft F theile der Masse M die Geschwindigkeit V mit; so theilt die Kraft $r.F$ der Masse rM dieselbe Geschwindigkeit V (n. 2), und die Kraft $R.r.F$ der Masse rM die Geschwindigkeit RV mit (n. 1). Ferner theile die Kraft F der Masse m die Geschwindigkeit v mit; so theilt die Kraft RF der Masse Rm dieselbe Geschwindigkeit v (n. 2.), und die Kraft $r.R.F$ der Masse Rm die Geschwindigkeit rv mit (n. 1.). Da nun die gleichen Kräfte $R.r.F$ und $r.R.F$ auf die Massen rM, Rm wirken; so ist (n. 3.) $RV \gtreqless rv$, je nachdem $Rm \gtreqless rM$ ist, und daher $M : m = v : V$.

5.) Umgekehrt: wenn $M : m = v : V$; so sind die Kräfte gleich, durch welche die Geschwindigkeiten v und V in einer gegebenen Zeit erzeugt werden.

Bew. Wären die Kräfte F und f, welche den Massen

M und m die Geschwindigkeiten V und v in einerley Zeit mittheilen, ungleich; so sey $F > f$. Alsdenn würde die Kraft f der Masse M eine Geschwindigkeit V' mittheilen, welche kleiner seyn müßte als V, und es würde sich verhalten $M:m = v:V'$ (n. 4.). Aber vermöge der Voraussetzung ist $M:m = v:V$; folglich müßte $V' = V$ seyn, welches unmöglich ist.

6.) Wenn die Kraft F der Masse M die Geschwindigkeit V, und die Kraft f der Masse m die Geschwindigkeit v mittheilt; so ist $F:f = M.V : m.v$.

Bew. Man bestimme die Geschwindigkeit V' so, daß $M:m = v:V'$; so wird die Kraft, welche der Masse M die Geschwindigkeit V' mittheilt, der Kraft f gleich seyn (n. 5.). Da nun die Kräfte F, f derselben Masse M die Geschwindigkeiten V und V' mittheilen; so verhält sich $F:f = V:V'$ (n. 1.), $= M.V : M.V'$. Es ist aber $M:m = v:V'$; folglich $MV' = mv$, und $F:f = M.V : m.v$.

7.) Unter derselben Voraussetzung verhält sich $m.F : M.f = V:v$.

Bew. Es sey wiederum $M:m = v:V'$; so verhält sich wie vorhin $F:f = V:V'$ (n. 1.)

aber $m:M = V':v$;

folglich $m.F : Mf = V:v$.

Beyspiel. An einem um die in C (Fig. 97.) unterstützte Rolle AB gehenden Faden hängen zwey Gewichte P und Q; und es sey P größer als Q; so wird P sinken, und Q um eben so viel steigen, und daher, wenn man das Gewicht der Rolle und des Fadens bey Seite setzt, die ganze zu bewegende Masse $= P + Q$ seyn. Auf der Seite von P wird ein Uebergewicht $= P - Q$ seyn, welchem die Schwere die Geschwindigkeit $2g$ in einer Sekunde mitzutheilen strebt. Dieselbe Kraft wird aber jetzt auf die Bewegung der Masse $P+Q$ verwendet; folglich verhält sich, wenn die am Ende der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit, mit welcher P sinkt und Q steigt, $= v$ gesetzt wird, $P+Q : P-Q = 2g : v$ (n. 4.). Die constante Kraft der Schwere wird also in dem gegebenen Verhältniß $P-Q : P+Q$ vermindert; folglich sinkt P mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, so daß die Tiefe, auf welche das Gewicht P in einer gegebenen Zeit sinkt sich zu der freyen Fallhöhe der Körper in eben dieser Zeit verhält, wie die Differenz der zwey Gewichte zu ihrer Summe. Hierauf gründet sich die Atwoodische Maschine *), mittelst welcher man die Fallhöhe in einer gegebenen Zeit nach Belieben vermindern, und die Gesetze der gleichförmig beschleunigten und verzögerten Bewegung durch Versuche erläutern kann. Galilei, der Erfinder der Gesetze des freyen Falls der Körper, bediente sich zur Prüfung derselben, da er den freyen Fall seiner zu großen Geschwindigkeit wegen unzuverläßig fand, der geneigten Ebene, auf welcher ein Körper in einer gegebenen Zeit einen in demselben Verhältniß kleineren Raum durchlauft, als die freye Fallhöhe in derselben Zeit beträgt, in welchem die Höhe der geneigten Ebene kleiner ist, als ihre Länge (§. 254.).

§. 263. Wir wollen nun von den im vorhergehenden §. vorgetragenen Sätzen eine Anwendung auf die Bestimmung der Länge des einfachen Pendels machen, welches seine Schwingungen mit einem gegebenen zusammengesetzten Pendel in gleichen Zeiten macht. An der geraden unbiegsamen Linie cb (Fig. 98.), welche sich um den Punkt c frey drehen kann, und von der Vertikallinie um den Winkel acb abgelenkt ist, befinden sich mehrere kleine Körper m, m', m''. Man beschreibe aus c als Mittelpunkt durch die Punkte m, m', m'' die Kreisbogen $mn, m'n', m''n''$, und ziehe an dieselbige die Tangenten $mt, m't', m''t''$. Auf der durch m'' gezogenen Vertikallinie $m''h$ sey $m''g$ der Geschwindigkeit gleich genommen, welche die Schwere in einer gegebenen Zeit erzeugt, ferner sey gt'' auf die Tangente $m''t''$ senkrecht gezogen, und das Parallelogramm $m''t''gr$ vollendet; so würde die Schwere nach der Richtung der Tangente $m''t''$ in derselben Zeit die Geschwindigkeit $m''t''$ erzeugen, wenn sie auf den Körper m'' mit derjenigen Stärke fortwirkte, welche sie in diesem Punkt nach der Richtung der Tangente hat, und die übrigen Körper nicht da wären. Der nach der Richtung $m''r$

*) Einfache Einrichtung der Atwoodischen Fallmaschine von *Fischer*, in *Gilberts* Annalen der Physik. B. XIV. S. 1. u. f.

wirkende Theil der Schwere wird nur einen Druk auf den Punkt c hervorbringen, und keinen Einfluß auf die Bewegung des Pendels haben. Dieselben Geschwindigkeiten würden auch den übrigen Körpern einzeln genommen in derselben Zeit mitgetheilt worden seyn, so daß, wenn man durch t'' die Parallele $t''t$ mit cb zieht, welche die übrigen Tangenten in t' und t schneidet, diese Geschwindigkeiten $m't'$ und mt seyn würden. Aber weil die Körper sich an einer unbiegsamen geraden Linie befinden, so muß die Geschwindigkeit der dem Punkt c näher liegenden kleiner seyn, als die der entfernteren. Es sey ms die Geschwindigkeit, welche der Punkt m der geraden Linie cb erhalten würde, wenn die Schwere auf die mit einander verbundenen Körper m, m', m'' zugleich mit derjenigen Stärke nach der Richtung der Tangenten fortwirkte, welche sie bey der angenommenen Lage der cb hatte. Man ziehe die gerade Linie css'', welche den Tangenten mt, $m't'$, $m''t''$ und ihren Verlängerungen in s, s', s'', und der tt'' in k begegne, und fälle von k das Perpendickel ko auf cb; so wird o der Punkt seyn, welcher durch die Wirkung der Schwere auf die mit einander verbundene Massen zugleich dieselbe Beschleunigung erhält, als durch ihre Wirkung auf jede einzelne Masse. Dabey müssen die zwischen o und c liegende Massen m und m die Geschwindigkeiten st, und $s't'$ verlieren, und die weiter, als der Punkt o, von c entfernte Masse m'' muß die Geschwindigkeit $t''s''$ gewinnen, und die Verzögerungen st, $s't'$ auf der einen Seite müssen sich gegen die Beschleunigung $s''t''$ auf der anderen Seite aufheben, sonst würde die Beschleunigung des Punkts o größer oder kleiner als ok oder $m''t''$ seyn, gegen die Voraussetzung. Wenn auf beyden Seiten von o mehrere Körper wären; so würde ebenfalls die Summe dieser Beschleunigungen auf der einen Seite der Summe der Verzögerungen auf der anderen Seite gleich seyn müssen. Die hieraus entstehende Kräfte sind im zusammengesetzten Verhältniß aus den Massen m, m', m'', und den Geschwindigkeiten st, $s't'$, $s''t''$ (§. 262. n. 6.), und da sie sich gegen einander aufheben müssen; so müssen vermöge des Gesetzes des Hebels ihre Momente gleich seyn. Man wird also haben

$$cm.m.st + cm'.m'.s't' = cm''.m''.s''t''.$$

Es ist aber wegen der ähnlichen Dreyecke skt, $s'kt'$, u. s. w.

$$st : s't' = kt : kt' = mo : m'o$$
$s't' : s''t'' = kt' : kt'' = m'o : m''o$; folglich muß
$cm.m.mo + cm'.m'.m'o = cm''.m''.m''o$, oder
$cm.m.(co - cm) + cm'.m'.(co - cm') = cm''.m''.(cm'' - co)$ seyn,

woraus man erhält $co = \dfrac{\overline{cm}^2\,m + \overline{cm'}^2.m' + \overline{cm''}^2.m''}{cm.m + cm'.m' + cm''.m''}$.

Der Schwerpunkt der Massen falle in p, und ihre Summe sey $= M$; so ist vermöge der Eigenschaften dieses Punkts der Nenner des für co gefundenen Ausdrucks $= M.cp$.

Es seyen nun m, m', m'' (Fig. 99.) mehrere nicht in einer geraden Linie aber in der Ebene des Schwungs liegende fest mit einander verbundene Massen, deren Summe mit M bezeichnet werde, und p ihr Schwerpunkt, durch welche aus dem Aufhängungspunkt c die gerade Linie cb gezogen sey. Wenn diese mit der Vertikallinie ca zusammenfällt; so ruht das Pendel, und daher hängt die Kraft, mit welcher das zusammengesetzte Pendel zu sinken strebt, von dem Ablenkungswinkel acb der an den Schwerpunkt p gezogenen geraden Linie von der Vertikallinie ca ab. Die gleichen Geschwindigkeiten, welche die Schwere einer jeden dieser Massen besonders, wenn sie frey fallen könnten in vertikaler Richtung während einer gegebenen Zeit mittheilen würde, seyen durch die gleiche mit ca parallele gerade Linien mh, $m'h'$, $m''h''$ ausgedrückt. Man ziehe mt auf cm senkrecht, durch h die Parallele ht mit cm, und vollende das Parallelogramm $mdht$; so zerfällt die Kraft mh in die auf cm senkrechte nach der Richtung der Bewegung von m wirkende Kraft mt, und in die Kraft md welche wegen des Widerstands des Aufhängungspunkts c keinen Einfluß auf die Bewegung haben kann. Ebenso seyen die Kräfte mh, $m'h'$, $m''h''$ in die auf cm', cm'' senkrechte $m't'$, $m''t''$, und in die auf c wirkende $m'd'$, $m''d''$ zerfällt; so werden mt, $m't'$, $m''t''$ die Geschwindigkeiten seyn, welche die Schwere jeder dieser Massen besonders nach der Richtung ihrer Bewegungen um den Punkt c in einerley Zeit mittheilen würde, wenn sie während dieser Zeit mit derjenigen Stärke fortwirkte, welche sie in m, m', m'' nach jenen Richtungen hatte. Es sey auf der durch den Schwerpunkt p gehenden geraden Linie cb die co der Länge des einfachen Pendels gleich genommen, welches mit dem zusammengesetzten seine Schwingungen in gleichen Zeiten macht; so muß, wenn man durch o die go mit ca parallel, und den Linien mh, oder $m'h'$ u. s. w. gleich nimmt, und die Kraft der Schwere go in die auf co senkrechte ot, und die nach c wirkende or zerfällt, die Geschwindigkeit ot, welche die Schwere einer einzelnen in dem Punkt o befindlichen Masse nach der Richtung ot der Bewegung mittheilen würde, dieselbe seyn, welche eben dieser Punkt durch die Wirkung der Schwere auf das ganze System der mit einander verbundenen Massen erhält.

Man mache den Winkel $mcs = oct$; so wird, weil die Massen mit einander verbunden sind, die Geschwindigkeit der Masse $m = ms$ seyn, welche sich zu ot verhalten wird, wie cm zu co. Ebenso wird, wenn $m's'$, $m''s''$ die Geschwindigkeiten der übrigen Massen sind, $m's' : m''s'' = cm' : cm''$ seyn. Die Massen m, m' verlieren an den Geschwindigkeiten $mt, m't'$, welche ihnen die Schwere mitzutheilen strebt, die Geschwindigkeiten st, $s't'$, und die Masse m'' gewinnt die Geschwindigkeit $t''s''$; folglich muß wie in dem zuerst betrachteten Fall vermöge §. 262. n. 6. und des Gesetzes des Hebels

$$cm.m.st + cm'.m'.s't' = cm''.m''.s''t'',$$

oder $cm.m.(mt - ms) + cm'.m'(m't' - m's') = cm''.m''(m''s'' - m''t'')$,

mithin 1.) $cm.m.mt + cm'.m'.m't' + cm''.m''.m''t''$
$= cm.m.ms + cm'.m'.m's' + cm''.m''.m''s''$ seyn.

Man fälle aus den Punkten m, m', p, o und m'' die Perpendickel mn, $m'n'$ u. s. w. auf ca; so sind die Dreyecke mht und cmn, $m'h't'$ und $cm'n'$ u. s. w. ähnlich, und es verhält sich

$$mt : \left\{ \begin{matrix} mh \\ go \end{matrix} \right\} = mn : cm.$$

Daher ist $cm.m.mt = mn.m.go$
ebenso $cm'.m'.m't' = m'n'.m'.go$
$cm''.m''.m''t'' = m''n''.m''.go$;

folglich 2.) $cm.m.mt + cm'.m'.m't' + cm''.m''.m''t''$
$= (mn.m + m'n'.m' + m''n''.m'')\,go$,
$= (m + m' + m'')\,pf.go$, weil p der Schwerpunkt ist
$= M.cp.ot$, weil $go : ot = co : ol = cp : pf$.

Ferner verhält sich $cm : ms = co : ot$, also auch $m.\overline{cm}^2 \quad cm.m.ms = co : ot$

ebenso $m'.\overline{cm'}^2 : cm'.m'.m's' = co : ot$

$m''.\overline{cm''}^2 : cm''.m''.m''s'' \; co : ot.$

Man setze die Summe der ersten Glieder $= S$; so verhält sich, weil die Summe der zweyten Glieder $= M.\,cp.\,ot$ ist (n. 1. und 2.),

$$S \quad M.cp.ot = co : ot \;(\mathrm{V}, 12.)$$
$$= M.cp.co : M.cp.ot$$

Folglich ist $M.cp.co = S$,

oder 3.) $co = \frac{S}{M.cp}$.

Endlich befinde sich eine Masse i ausserhalb der Ebene acb des Schwungs. Man fälle von ihr ein Perpendickel im auf die Ebene des Schwungs, welches dieser Ebene in m begegne; so wird die Geschwindigkeit von i beständig der Geschwindigkeit von m gleich seyn, und die Schwere auf die Masse i mit derselben Stärke wirken, mit welcher sie auf die Masse m wirkt. Mithin kann man statt der Masse i eine ihr gleiche in m substituiren, und die in n. 3. gegebene Regel zur Bestimmung der Länge co des einfachen Pendels ist auch auf diesen Fall anwendbar, wenn man unter cm, cm' u. s. w. die senkrechten Abstände der Massen von der Axe ce des Schwungs, und unter cp den senkrechten Abstand des Schwerpunkts aller Massen von eben dieser Axe versteht.

§. 264. Der Abstand des Punkts m von dem Schwerpunkt p ist der Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks gleich, dessen Seiten um den rechten Winkel $cf - cn$ und $mn - pf$ sind. Folglich ist (I, 47.)

$$\overline{pm}^2 = (cf - cn)^2 + (mn - pf)^2,$$
$$= \overline{cf}^2 - 2cf.cn + \overline{cn}^2 + \overline{mn}^2 - 2pf.mn + \overline{pf}^2$$
$$= \overline{cp}^2 + \overline{cm}^2 - 2cf.\,cn - 2pf.\,mn;$$

also $m.\overline{pm}^2 = m.\overline{cp}^2 + m.\overline{cm}^2 - 2m.\,cf.cn - 2m.pf.\,mn$,

ebenso $m'.\overline{pm'}^2 = m'.\overline{cp}^2 + m'.\overline{cm'}^2 + m'.cf.\,cn' - 2m'.pf.\,m'n'$

$m''.\overline{pm''}^2 = m''.\overline{cp}^2 + m''.\overline{cm''}^2 - 2m''.cf.\,cn'' - 2m''.pf.\,m''n''.$

Man addire diese Ausdrücke; so giebt die Summe der vor dem Gleichheitszeichen stehenden Glieder die Summe der Produkte der Massen in die Quadrate ihrer Abstände von einer durch den Schwerpunkt p gehenden mit der Axe ce des Schwungs parallelen Axe, welche Summe mit S' bezeichnet werde. Die Summe der ersten Glieder hinter dem Gleichheitszeichen giebt die Summe der Produkte der Massen in das Quadrat des Abstands cp des Schwerpunkts von der Axe ce des Schwungs, oder $M.\overline{cp}^2$. Die Summe der zweyten Glieder giebt die Summe S der Produkte der Massen in die Quadrate ihrer Abstände von der Axe des Schwungs. Die Summe der dritten Glieder giebt das Produkt von $2cf$ in die Summe der Produkte $m.cn, m'.cn'$, $m''.cn''$, welche vermöge der Eigenschaften des Schwerpunkts $= M.cf$ ist, und ebenso giebt die Summe der vierten Glieder das Produkt von $2pf$ in $M.pf$. Daher ist

$$S' = M.\overline{cp}^2 + S - 2M.\overline{cf}^2 - 2M.\overline{pf}^2$$
$$= M.\overline{cp}^2 + S - 2M.\overline{cp}^2, \text{ (weil } \overline{cf}^2 + \overline{pf}^2 = \overline{cp}^2)$$
$$= S - M.\overline{cp}^2$$

oder 1.) $S = + M.\overline{cp}^2 + S'$.

Hieraus folgt vermöge §. 263. n. 3.

2.) $co = cp + \frac{S'}{M.cp}$.

Wenn man also die gerade Linie cp, welche durch den Schwerpunkt p des zusammengesetzten Pendels auf die Schwingungsaxe ce senkrecht gezogen wird, so über p hinaus verlängert, daß $po = \frac{S'}{M.cp}$ wird; so ist co die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten seine Schwingungen in gleichen Zeiten macht. Diesen Endpunkt o des einfachen Pendels nennt man den **Mittelpunkt des Schwungs** (centrum oscillationis) des zusammengesetzten Pendels, und den Punkt c den Aufhängungspunkt (centrum suspensionis). Man ziehe in der Ebene des Schwungs durch den Schwerpunkt p die Parallele pv mit ot, welche der ct in v begegne; so ist die Geschwindigkeit pv des Schwerpunkts in demselben Verhältniß kleiner als die Geschwindigkeit ot des Mittelpunkts des Schwungs, in welchem cp kleiner ist als co. Die Schwere des ganzen Systems der mit einander verbundenen Massen, welche man sich in dem Schwerpunkt p desselben vereinigt denken kann, theilt also diesem Punkt nicht diejenige Geschwindigkeit mit, welche sie erzeugen würde, wenn alle Punkte des Systems nach parallelen Richtungen sich fortbewegen könnten, und die Bewegung ist so beschaffen, als ob dieselbe Kraft, welche vorher auf die Masse M wirkte, jetzt auf eine in dem Verhältniß von $ot : pv$ größere Masse wirkte (§. 262. n. 4.). Es verhält sich aber $ot : pv = co : cp = S : M . cp^2$ (§. 263. n. 3.), und daher nennt man die Summe S der Produkte aller der kleinen Massen eines Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von einer mit dem Körper verbundenen Axe das **Moment der Trägheit** oder der **Masse** (momentum inertiæ s. massæ) des Körpers in Beziehung auf diese Axe.

Man erhält also die Länge des einfachen Pendels, dessen Schwingungen mit den Schwingungen eines gegebenen festen Körpers um eine gegebene Axe von gleicher Dauer sind, wenn man das Moment der Trägheit dieses Körpers um die Schwingungsaxe mit dem Produkt aus der Masse des Körpers in den Abstand seines Schwerpunkts von eben dieser Axe dividirt (§. 263. n. 3.). Nach n. 3. des gegenwärtigen §. erhält man auch den Ueberschuß der Länge des einfachen Pendels über den Abstand des Schwerpunkts des zusammengesetzten Pendels von der Axe des Schwungs, wenn man das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende mit der Axe des Schwungs parallel laufenden Axe, mit dem Produkt aus der Masse des Körpers in den Abstand seines Schwerpunkts von der Axe des Schwungs dividirt, woraus sich wiederum die Länge des einfachen Pendels ergiebt.

Man dividire die Summe S der Produkte aller der kleinen Massen in die Quadrate ihrer Abstände von der Axe des Schwungs mit der Summe M dieser Massen oder mit der Masse des Körpers, und setze den Quotienten $= h^2$; so ist das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die Axe des Schwungs $= M . h^2$. Eben so ist, wenn man $\frac{S'}{M} = k^2$ setzt, das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunkt gehende mit der Axe des Schwungs parallel laufende Axe $= M.k^2$. Setzt man nun den Abstand des Schwerpunkts des Körpers von der Axe des Schwungs $= f$, und den Abstand des Mittelpunkts des Schwungs von eben dieser Axe oder die Länge des einfachen Pendels $= l$; so wird

$$3.)\ l = \frac{M.h^2}{M.f}\ (\text{§. 263. n. 3.}),\ = \frac{h^2}{f}$$

$$\text{und } 4.)\ l = f + \frac{M.k^2}{M.f}\ (\text{n. 2. d. gegenw. §.}),\ = f + \frac{k^2}{f}.$$

Der Mittelpunkt des Schwungs fällt also desto näher zu dem Schwerpunkt, je kleiner k^2, oder je kleiner das Moment der Trägheit des zusammengesetzten Pendels in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe ist.

Aus n. 4. folgt $fl = f^2 + k^2$, also ist

$$5.)\ f\,(l - f) = k^2.$$

Mithin ist für alle einander parallele Schwingungsaxen eines Körpers das Rechteck aus den Abständen seines Schwerpunkts von der Axe des Schwungs und dem Schwingungspunkt einer gegebenen Größe gleich.

Aus n. 1. dieses §. folgt $Mh^2 = Mf^2 + M.k^2$, oder

$$6.)\ h^2 = f^2 + k^2.$$

Man erhält also das Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine gegebene nicht durch seinen Schwerpunkt gehende Axe, wenn man zu seinem Moment der Trägheit für eine durch seinen Schwerpunkt gehende mit der gegebenen parallel laufende Axe das Produkt aus seiner Masse in das Quadrat des Abstands seines Schwerpunkts von der gegebenen Axe hinzufügt.

§. 265. Bey der Bestimmung des Moments der Trägheit eines Systems mehrerer mit einander verbundener Massen hat man in dem 263sten §. die Massen m, m', u. s. w. so klein angenommen, daß sie als Punkte können betrachtet werden. Nun sey aber eine Masse M gleichförmig auf der geraden Linie CA (Fig. 100.) verbreitet, so daß, wenn man die CA in a, b, c in eine beliebige Anzahl gleicher Thei-

le theilt, alle diese Theilchen gleiche Gewichte haben. Man setze jedes der einander gleichen Theilchen, in welche die Masse M durch die Theilung der geraden Linie CA getheilt wird, $= m$; so wird das Moment der Trägheit des ersten Theilchens in Beziehung auf eine durch C gehende auf CA senkrechte Axe $> o$ aber $< m.\overline{Ca}^2$, das Moment der Trägheit des zweyten $> m.\overline{Ca}^2$, aber $< m.\overline{Cb}^2$, u. s. w. das Moment der Trägheit des letzten $> m.\overline{Cc}^2$, aber $< m.\overline{CA}^2$ seyn. Man ziehe durch C eine gerade Linie CB unter einem beliebigen spitzen Winkel mit CA, und errichte in den Punkten a, b, c, A die Perpendickel ae, bf, cg, AB auf AC, welche der CB in $, f, g, B$ begegnen. In einer durch den Punkt A auf CA senkrecht gelegten Ebene denke man sich ein Dreyeck verzeichnet, welches die gerade Linie AB zu einer seiner Seiten habe, und auf diesem Dreyeck als Grundfläche eine Pyramide errichtet, deren Spitze in C falle. Auf eben dieser Grundfläche sey ein gerade stehendes Prisma AD errichtet, welches mit der Pyramide einerley Höhe AC habe. Durch die Punkte a, b, c seyen die Ebenen aa', bb', cc' mit der Grudfläche AB parallel gelegt; so werden die Durchschnitte dieser Ebenen mit den Seitenflächen der Pyramide Dreyecke seyn, welche der Grundfläche AB ähnlich sind, und ähnlich liegen, die Durchschnitte derselben mit den Seitenflächen des Prismas aber werden der Grundfläche AB gleiche Dreyecke seyn, und das Prisma wird dadurch in ebenso viele gleiche Prismen Ca', ab' u. s. w. getheilt werden, als die CA gleiche Theile enthält. Endlich denke man sich die Prismen ad, be u. s. w. um, und die Prismen be, cf u. s. w. in die Pyramide beschrieben. Man setze die Summe der letzteren $= P$; so wird, wenn das letzte in die Pyramide beschriebene Prisma $Ag = p$ gesetzt wird, die Summe der um die Pyramide beschriebenen $= P + p$ seyn. Da nun $Ca : CA = ae : AB$; so verhält sich $\overline{Ca}^2 : \overline{CA}^2 = \overline{ae}^2 : \overline{AB}^2 =$ Fläche ae : Fläche AB (VI, 19.), und daher $m.\overline{Ca}^2 : m\,\overline{CA}^2 =$
Ca. Fläche $ae : Ca$. Fläche AB

$= \text{Prisma } ad : \text{Prisma } Ca'$

ebenso $m.\overline{Cb}^2 : m.\overline{CA}^2 =$ Prisma af : Prisma ab'

$$m.\overline{CA}^2 : m.\overline{CA}^2 = \text{Prisma}\, cB : \text{Prisma}\, cB$$

folglich verhält sich (V, 24. Coroll.) $m.\overline{Ca}^2 + m\,\overline{C}^2 + \cdots + m.\overline{CA}^2 : M.\overline{CA}^2 = P + p :$ Prisma AD. Ebenso findet sich $m.0 + m.\overline{Ca}^2 + \cdots + m.\overline{Cc}^2 : M\,\overline{CA}^2 = P :$ Prisma AD. Mithin ist, wenn man das Moment der Trägheit der Linie CA mit $M.h^2$ bezeichnet,

1.) $\left.\begin{array}{r} Mh^2 : M.\overline{CA}^2 \\ h^2 : \overline{CA}^2 \end{array}\right\} < P + p$ Prisma AD

2.) $h^2 : \overline{CA}^2 > P$ Prisma AD

Es ist aber $P + p$ größer und P kleiner als der Inhalt der Pyramide; folglich ist das Verhältniß von h^2 zu dem Quadrat von $\overline{CA}^2$ beständig kleiner als ein Verhältniß welches größer ist, als das Verhältniß des Inhalts der Pyramide zu dem Inhalt eines mit der Pyramide einerley Grundfläche und Höhe habenden Preißmas, oder als das Verhältniß von 1 : 3 (XII, 7.), aber beständig größer als ein Verhältniß, welches kleiner ist als das Verhältniß von 1 : 3. Da nun p durch die Vergrößerung der Anzahl der gleichen Theile von CA kleiner gemacht werden kann, als jeder gegebene Raum; so folgt auf ähnliche Art, wie §. 2,7.

$h^2 : \overline{CA}^2 = 1 : 3$, und daher ist das Moment der Trägheit der Linie CA um die durch C gehende auf CA senkrechte Axe $= \frac{1}{3}\, M.\overline{CA}^2$. Auf ähnliche Art kann man von Linien auf Flächen, und von Flächen auf Körper übergehen, indem man die Bestimmung des Moments der Trägheit auf die Bestimmung des Inhalts gewißer Körper zurückführt, deren Figur von der Figur des gegebenen Körpers abhängt *). Die algebraische Auflösung dieser Aufgabe erfordert höhere Analysis.

Die gerade Linie CA schwinge um den Punkt C als ein Pendel. Da ihr Schwerpunkt in ihre Mitte fällt; so ist der Abstand CO des Mittelpunkts des Schwungs von dem

*) *Hugenii* Horologium oscillatorium. P. IV.

Aufhängungspunkt $C = \frac{\frac{1}{3}\overline{CA}^2}{\frac{1}{2}CA}$ (§. 264. n. 3.) $= \frac{2}{3}CA$. Eine cylindrische oder prismatische gleichförmig dichte an dem einen ihrer Endpunkte aufgehängte Stange nähert sich diesem zusammengesetzten Pendel desto mehr, je geringer ihre Dicke ist.

Das Moment der Trägheit einer Kugel, deren Halbmesser $= r$ und deren Masse $= M$ ist, findet man $= \frac{2}{5} M.r^2$ *). Ihr Schwerpunkt fällt in ihren Mittelpunkt, und daher ist, wenn die Kugel an einen feinen Faden aufgehängt wird, dessen Gewicht man in Vergleichung mit dem Gewicht der Kugel vernachläßigen kann, und der Abstand des Mittelpunkts der Kugel von dem Aufhängungspunkt $= f$ gesetzt wird, die Länge des einfachen Pendels, welches mit diesem zusammengesetzten Pendel seine Schwingungen in gleicher Zeit vollbringt, $= f + \frac{2}{5}\frac{r^2}{f}$ (§. 264. n. 4.).

§. 266. Es sey das Moment der Trägheit eines Körpers (Fig. 101.) für eine durch seinen Schwerpunkt p gehende Axe $= Mk^2$, und A der Mittelpunkt des Schwungs um eine durch C gehende mit jener parallel laufende Axe; so ist

1.) $CA = Cp + \frac{k^2}{Cp}$ (§. 264. n. 4.)

Man nehme in der Ebene des Schwungs $pc = pA$, und lasse den Körper um eine durch c gehende Axe schwingen, welche mit der ersteren durch den Punkt C gehenden parallel sey. Der Mittelpunkt des Schwungs falle jetzt in a; so ist $ca = cp + \frac{k^2}{cp}$ (§. 264. n. 4.), $= pA + \frac{k^2}{pA}$ (weil $cp = pA$), $= pA + Cp$ (weil $Cp.pA = k^2$ (§. 264. n. 5.)) $= CA$. Mithin sind die Schwingungen um die einander parallen durch C und c gehende Axen von gleicher Dauer. Namentlich können der Aufhängungspunkt und der Mittelpunkt des Schwungs mit einander verwechselt werden, und die Schwingungen um die durch diese Punkte gehende einander parallele Axen bleiben von gleicher Dauer **).

*) Ebendaselbst Prop. XXII.
**) — — Prop. XX.

Umgekehrt, wenn um zwey einander parallele durch beliebige Punkte C und c eines Körpers gehende Axen die Schwingungen von gleicher Dauer sind; so muß, wenn die Mittelpunkte des Schwungs beziehungsweise in A und a fallen, $CA = ca$, mithin nach §. 264. n. 4.

$$Cp + \frac{k^2}{Cp} = cp + \frac{k^2}{cp}$$

$$cp.\overline{Cp}^2 + cp.k^2 = \overline{cp}^2.Cp + Cp.k^2$$

$$cp.Cp\,(Cp - cp) = (Cp - cp)\,k^2,$$ und daher

entweder $Cp = cp$, oder $cp.Cp = k^2$ seyn. Weiß man nun, daß Cp und cp ungleich sind; so ist $cp \times Cp = k^2$, $cp = \frac{k^2}{Cp}$, und $Cp + cp = Cp + \frac{k^2}{Cp} =$ der Länge des einfachen um C schwingenden Pendels, welches mit dem zusammengesetzten seine Schwingungen in gleichen Zeiten macht (§. 264. n. 4.). Insbesondere ist, wenn der Schwerpunkt eines Körpers in die Ebene zweyer einander parallelen Schwingungsaxen fällt, aber ungleich von denselben absteht, und die Schwingungen des Körpers um diese Axen von gleicher Dauer sind, die Länge des correspondirenden einfachen Pendels dem Abstand der Schwingungsaxen gleich. Demnach kann man die Länge des einfachen mit einem gegebenen zusammengesetzten seine Schwingungen in gleichen Zeiten vollbringenden Pendels durch Versuche bestimmen. An einer cylindrischen oder prismatischen Stange CA (Fig. 102.) seyen bey C und c zwey keilförmige Zapfen angebracht, deren Schneiden gegen einander gekehrt, auf der Stange senkrecht und einander parallel seyen. Die eine befinde sich an dem Ende C der Stange, die andere in c um etwas über $\frac{2}{3}$ der Länge der Stange von C entfernt, so daß der Mittelpunkt o des Schwungs um die Schneide C zwischen C und c falle (§. 265.). Auf dem übrigen Theil cA der Stange lasse sich ein kleines Gewicht π hin und her schieben. Nun kann man durch die Verminderung der Masse der Stange auf der einen oder der anderen Seite es leicht dahin bringen, daß, wenn dieses Pendel mit seiner Schneide C aufgehängt wird, ein von dieser herabhängendes Lot auf die Schneide c trifft, mithin der Schwerpunkt des Pendels in die Ebene der Schwin-

gungs-

gungsaxen fällt. Durch das Verschieben des Gewichts n kann man ferner machen, daß der Mittelpunkt der Schwingung um C in die Schneide c fällt, welches man daran erkennt, wenn die Schwingungen um C und c isochronisch sind. Alsdenn ist der Abstand der Schneiden der Länge des einfachen Pendels gleich, welches mit diesem zusammengesetzten isochronisch ist.

§. 267. Weil die Schwingungszeiten eines in Kreisbogen schwingenden Pendels von einer desto größeren Dauer sind, je größere Schwingungen es macht (§. 261.); so muß man, um verschiedene Pendel mit einander vergleichen zu können, aus den beobachteten Schwingungszeiten diejenige ableiten, welche man beobachtet haben würde, wenn die Pendel ähnliche Kreisbogen beschrieben hätten. Man ist übereingekommen, unter der Schwingungszeit eines Pendels diejenige zu verstehen, welcher sich die Schwingungszeiten eines Pendels desto mehr nähern, je kleiner sie werden, oder die Zeit, in welcher ein Pendel eine Schwingung in einer Cykloide machen würde, deren beschreibender Kreis die halbe Länge des Pendels zum Durchmesser hat. Diese Zeit wird aus der beobachteten Schwingungszeit mittelst der Größe der Schwingungen gefunden, wenn man die beobachtete Zeit einer Schwingung mit der §. 261. angegebenen durch S bezeichneten Reihe dividirt. Aus der so reducirten Zeit und der Länge des einfachen Pendels ergiebt sich sodenn nach der Proportion n. 3. §. 259. die Länge eines einfachen Pendels, welches seine Schwingungen in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Sekunde mittlerer Sonnenzeit macht. Endlich muß noch eine kleine Verbesserung wegen des Widerstands der Luft angebracht werden, welcher die Bewegungen des Pendels verzögert, so daß die beobachtete Pendellänge größer ist, als diejenige, welche man im leeren Raum würde beobachtet haben.

Bouguer setzt die Länge des auf den leeren Raum reducirten einfachen Sekundenpendels in Paris = 440,67 par. Linien, unter dem Aequator aber = 439,21 Linien. Das Pendel, welches er gebrauchte, bestund aus einer kupfernen

Kugel, welche an einem Faden von einer Aloeribbe hieng. Nach sehr genauen von Borda angestellten Versuchen ist die Länge des einfachen Decimalsekunden-Pendels in Paris $= 0^{me},741887$, woraus sich mittelst der Proportion n. 3. und des §. 144. angegebenen Verhältnißes der Decimalsekunde zu der Sexagesimalsekunde die Länge des gewöhnlichen Sekundenpendels $= (\frac{1000}{864})^2 \cdot 0^{me},741887 = \frac{513074}{864^2}\, 0,741887$ Tois. (§. 144.), $= \frac{513074}{864}\cdot 0,741887$ par. Lin. $= 440,559$ Lin. ergiebt. Zu Formentera unter einer Breite von $38^\circ\, 39'\, 55''$ fand man nach der Borda'schen Methode die Länge des einfachen Sekundenpendels (Decimalsek.) $= 0^{me},7412061$, welches für die Länge des gewöhnlichen Sekundenpendels unter dieser Breite 440,154 par. Lin. giebt. Setzt man die von Borda gefundene Länge des Sekundenpendels $= 1$; so ist die Länge des Sekundenpendels zu Formentera $= \frac{7412061}{7418870} = 0,99908$. Vergleicht man ebenso die an anderen Orten der Erde nach Bouguer's Methode gefundenen auf den leeren Raum reducirten Pendellängen mit der von eben diesem angegebenen Länge des Sekundenpendels in Paris; so erhält man folgende Tafel *)

Beobachter	Ort	Breite	Verhältn. d. Sek. Pend. zum pariser
Bouguer	Peru	0° 0'	0,99669
— —	Portobello	9 34	0,99689
Le Gentil	Pondichery	11 56	0,99710
Campbell	Jamaica	18 0	0,99745
Bouguer	klein Goava	18 27	0,99728
de la Caille	Cap	33 55	0,99877
	Formentera	38 40	0,99908
Darquier	Toulouse	43 36	0,99950
Liesganig	Wien	48 13	0,99987
Bouguer	Paris	48 50	1,00000
v. Zach	Gotha	50 56	1,00006
Graham	London	51 31	1,00018
Grischow	Arensberg	58 15	1,00074
Mallet	Petersburg	59 56	1,00101
Maupertuis	Pello	66 48	1,00137
Mallet	Ponoi	67 5	1,00148

*) Mécaniqne céleste. T. II. L. III. n. 42. pag. 147.

Die vierte und die fünf lezten Pendellängen sind mittelst eines unveränderlichen Pendels durch die Beobachtung seiner Schwingungszeiten zu London und Jamaica, London und Paris, Paris und den übrigen Orten bestimmt, wodurch das Verhältniß der Schweren an diesen Orten (§. 259. n. 5.), mithin auch das Verhältniß der Pendellängen gegeben ist (§. 259. n. 4.). Multiplicirt man die Verhältnißzahlen dieser Tafel mit 440,67; so erhält man die in pariser Linien ausgedrükte Pendellängen mit Ausnahme von Formentera, weil diese Pendellänge mit der Borda'schen verglichen worden ist.

§. 268. Man sieht aus dieser Tafel, daß die Pendellängen vom Aequator an gegen die Pole hin beständig zunehmen, mit Ausnahme der vierten und fünften, wo übrigens die Breiten so wenig verschieden sind, daß der von dem Unterschied der Breiten herrührende Unterschied der Pendellängen kleiner seyn kann, als die Fehler, welchen man bey diesen Beobachtungen ausgesezt ist. Eine genauere Vergleichung der Zunahmen der Pendellängen mit den Breiten zeigt, daß sie von dem Aequator an gerechnet nahe den Quadraten der Sinus der Breiten proportional sind. Unter dieser Voraussezung würden zwey unter verschiedenen Breiten beobachtete Pendellängen hinreichend seyn, um einen allgemeinen Ausdruck für die Länge des Sekundenpendels unter einer gegebenen Breite zu bestimmen. Allein die Beobachtungsfehler machen einen solchen auf wenige Beobachtungen sich gründenden Ausdruck unsicher. Um den wahrscheinlichsten Ausdruck zu finden, bestimme man die Pendellänge unter dem Aequator und ihre Zunahme von dem Aequator an bis zu den Polen so, daß, wenn man die Zunahmen der Pendellängen den Quadraten der Sinus der Breiten proportional sezt, die Summe der unter dieser Voraussezung gefundenen positiven Abweichungen der berechneten Pendellängen von den beobachteten der Summe der negativen Abweichungen gleich, und die Summe aller Abweichungen als positiv betrachtet am kleinsten werde *). Un-

*) Méc. cél. T. II. L. III. Chap. V. n. 40. pag. 135.

ter dieser Bedingung wird, wenn man die in der Tafel §. 267. stehende Zahlen statt der Pendellängen gebraucht, die Pendellänge unter der Breite l zu der Pendellänge unter dem Aequator sich verhalten, wie

$$0{,}996868 + 0{,}0054160\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2 : 0{,}996868.$$

Setzt man l der Breite der pariser Sternwarte gleich; so erhält man das Verhältniß der Pendellänge in Paris zu der Pendellänge unter dem Aequator = 999937 : 996868o, und, wenn man die erstere nach Borda = 440,559 setzt, die Länge des Sekundenpendels unter dem Aequator = 439,2066. Demnach verhält sich die Pendellänge unter der Breite l zu der Pendellänge 439,2066 = $0{,}996868 + 0{,}0054160\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2 : 0{,}996868$, und es ist die Länge des einfachen Sekundenpendels unter der Breite l und im Vacuo

$$= 439{,}2066 + 2{,}3862\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2 \text{ par. Linien.}$$

Die Länge des einfachen Pendels, welches eine Schwingung in einer Decimalsekunde macht, findet sich ebenso = $0^{\text{me}}{,}7396100 + 0^{\text{me}}{,}0040183\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2$ *).

§. 269. Die Uebereinstimmung des in dem vorhergehenden §. gefundenen Ausdrucks $0{,}996868 + 0{,}005416\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2$

*) La Place fand aus den §. 267. angeführten Beobachtungen, mit Ausnahme der neueren zu Formentera, $0^{\text{me}}{,}739502 + 0^{\text{me}}{,}004208\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2$ (Méc. cél. T. II. pag. 151.). Es ist aber der Coefficient von y in der zehnten der mit A'' bezeichneten Gleichungen (a. a. O. pag. 148.) welche sich auf die Gothaische Pendellänge bezieht, unrichtig. Verbessert man diesen Fehler; so wird $x^{(15)} = 0$; $y = 0{,}0054806$; $z = 0{,}99683$. Die Summe der positiven sowohl als der negativen Fehler wird 0,00056, und mittelst der Borda'schen Pendellänge für Paris die Länge des Decimalsekunden-Pendels = $0^{\text{me}}{,}739582 + 0^{\text{me}}{,}004066\ \overline{\text{Sin.}\, l}^2$. Hieraus findet sich die Länge des Pendels unter der Breite von Formentera = $0^{\text{me}}{,}741179$, nur um $0^{\text{me}}{,}000271$, oder um $\frac{1}{83}$ Lin. kleiner, als nach der Beobachtung. Mithin stimmt diese Pendellänge sehr genau mit Borda's Bestimmung der pariser Pendellänge überein, auf welche sich in obiger Formel die Länge des Pendels unter dem Aequator gründet. Daß die älteren Angaben der Pendellängen nicht sehr zuverläßig seyen, sieht man aus der Vergleichung der an einerley Ort gefundenen Pendellängen. Mairan fand für Paris 440,5666, und nach einer Berichtigung von Lalande (Astron. T. III. n. 2649. pag. 12.), weil Mairan sich einer unrichtigen Toise bediente, 440,52. La Caille fand 440,55, und Bouguer 440,67.

mit den in der Tafel §. 267. nach den Beobachtungen angegebenen Verhältnißen der Pendellängen zeigt folgende Tafel:

Ort	Verhältniße der Pendellängen nach den Beob.	nach d. Formel	Unterschiede
Peru	0,99669	0,99687	+ 0,00018
Portobello	0,99689	0,99702	+ 13
Pondichery	0,99710	0,99710	0
Jamaica	0,99745	0,99738	— 7
klein Goava	0,99728	0,99741	+ 13
Cap	0,99877	0,99855	— 22
Formentera	0,99908	0,99898	— 10
Toulouse	0,99950	0,99944	— 6
Wien	0,99987	0,99988	+ 1
Paris	1,00000	0,999937	— 6
Gotha	1,00006	1,00013	+ 7
London	1,00018	1,00019	+ 1
Arensberg	1,00074	1,00078	+ 4
Petersburg	1,00101	1,00092	— 9
Pello	1,00137	1,00144	+ 7
Ponoi	1,00148	1,00146	— 2

Folglich sind die Zunahmen der Pendellängen von dem Aequator an gegen die Pole hin sehr nahe den Quadraten der Sinus der Breiten proportional, und wenn man von Borda's Bestimmung der Pendellänge zu Paris ausgeht; so ist die Länge des einfachen Sekundenpendels an einem Ort der Erde, dessen Breite $= l$ ist,

$= 0{,}508341 + 0{,}0027618\ \overline{\mathrm{Sin.}\,l}^2$ Tois.

$= 439{,}2066 + 2{,}3862\ \overline{\mathrm{Sin.}\,l}^2$ pariser Linien,

und unter den Polen $= 441{,}5928$. Lin.

Für die Breite von Formentera erhält man 440,138, welches nur um 0,016 par. Linien von dem abweicht, was die Beobachtungen (§. 267.) gegeben haben.

Bey der Vergleichung der übrigen Pendellängen mit der hier gegebenen Formel ist zu bemerken, daß dieselben entweder nach Bouguers Methode mittelst eines Aloefadens, welcher seiner Biegung einen kleinen Widerstand an dem Aufhängungspunkt entgegensetzt, und daher den eigentlichen

Aufhängungspunkt etwas tiefer fallen macht, mithin die Pendellänge zu groß giebt, bestimmt, oder aus der von Bouguer für Paris angegebenen Pendellänge mittelst der in Paris und an anderen Orten beobachteten Schwingungszeiten unveränderlicher Pendel geschlossen sind. Hätte man bey der Bestimmung der letzteren die Borda'sche Pendellänge zum Grund gelegt; so würden sie in dem Verhältniß von 440,559 zu 440,67 oder um 0,111 Lin. kleiner herausgekommen seyn, und die so verminderten Pendellängen wird man gebrauchen müßen, wenn man eine Vergleichung der auf Borda's Pendellänge sich gründenden Formel mit den Beobachtungen anstellen will. Die folgende Tafel, welche in der ersten Columne die nach Bouguers Methode beobachteten, in der zwey die nach Borda's Methode bestimmten, und aus den Schwingungszeiten mittelst der Borda'schen Pendellänge geschlossenen, in der dritten die nach der Formel berechneten Pendellängen enthält, dient zur Vergleichung der berechneten Pendellängen mit den beobachteten.

Ort.	beobachtete Pendellängen nach Bouguer	Borda.	Formel
Peru	439,21		439,21
Portobello	439,30		439,27
Pondichery	439,39		439,31
Jamaica		439,44	439,43
klein Goava	439,47		439,45
Cap	440,13		439,95
Formentera		440,15	440,14
Toulouse	440,45		440,34
Wien	440,61		440,53
Paris	440,67	440,56	440,56
Gotha	440,69		440,64
London		440,64	440,67
Arensberg		440,89	440,93
Petersburg		441,00	440,99
Pello		441,16	441,22
Ponoi		441,21	441,23

§. 270. Aus der Länge des einfachen Sekundenpendels ergiebt sich nun die freye Fallhöhe der Körper in der ersten Sekunde weit genauer, als man sie durch die unmittelbare Beobachtung würde bestimmen können. Drückt man die Länge des einfachen Sekundenpendels in pariser Fuß aus, und multiplicirt sie mit $\frac{1}{2}\pi^2$ oder die §. 269. in Toisen ausgedrückte Pendellänge mit $3\pi^2$; so erhält man nach §. 259. n. 2. die freye Fallhöhe in der ersten Sekunde mittlerer Sonnenzeit

$$= 15{,}05138 + 0{,}08177 \, \mathrm{Sin.} \overline{l}^2 \text{ par. Fuß.}$$

Unter den Polen ist also die Höhe des freyen Falls in der ersten Sekunde nur um 0,08177 Fuß oder nicht ganz um einen Zoll größer als unter dem Aequator, woraus man sieht, daß die Verschiedenheit der Schwere an verschiedenen Orten der Erde durch die unmittelbare Beobachtung der Fallhöhen nicht würde haben bemerkt werden können.

Die Beobachtungen, welche Bouguer in verschiedenen Höhen über der Meeresfläche angestellt hat, zeigen eine merkliche Abnahme der Schwere in beträchtlichen Höhen. Er fand die auf den leeren Raum reducirte Länge des einfachen Sekundenpendels unter dem Aequator

in einer Höhe v. 2434 Tois. über d. Meeresfläche = 438,69 Lin.
— — 1466 — — — = 438,88
in gleicher Höhe mit der Meeresfläche = 439,21

welche Unterschiede zu beträchtlich sind, als daß sie auf Beobachtungsfehler könnten geschoben werden *).

Die Pendelversuche zeigen ferner, daß große und kleine Körper an einerley Ort der Erde in gleichen Zeiten von gleichen Höhen fallen. Verfertigt man nemlich aus einerley Materie mehrere dem Gewicht und der Ausdehnung nach verschiedene Pendel, bestimmt die Längen der mit ihnen isochronischen einfachen Pendel, und leitet daraus nach §. 259.

*) Das Gegentheil hievon wollte ein gewisser Coultoud im Jahr 1768 auf den Alpen beobachtet haben, weil das Pendel in einer Höhe von 1085 Toisen dem am tieferen Standort in zwey Monaten um 27. Min. 20 Sek. vorgeeilt sey. Bey genauer Nachfrage fand es sich, daß die angeführten Versuche niemals angestellt worden seyen, und das ganze eine Erdichtung sey. Man sehe de Lüc Briefe über die Geschichte der Erde. I Th. 45 Brief.

n. 2. die freyen Fallhöhen her; so finden sich diese den Quadraten der Schwingungszeiten der Pendel proportional. Mithin sind, wenn man den Widerstand der Luft in Rechnung nimmt, an einerley Ort der Erde die Höhen einander gleich, von welchen große oder kleine Körper von der Ruhe an in gleichen Zeiten fallen.

Newton stellte auch mit ungleichartigen Körpern hierüber genaue Versuche an *). Er nahm zwey hölzerne runde und einander gleiche Büchsen, füllte die eine mit Holz, und hieng in dem Oscillationspunkt der andern (so genau als möglich) ebenso viel Gold dem Gewicht nach auf. Die an Fäden von eilf Fuß Länge aufgehängten Büchsen bildeten zwey Pendel, welche in Hinsicht auf das Gewicht, die Figur und den Widerstand der Luft einander gleich waren. Er setzte diese nebeneinander aufgehängte Pendel in Bewegung, so daß ihre Schwingungen in einerley Zeit auf einerley Seite der Vertikallinie anfiengen und gleich groß waren. Sie setzten ihre Schwingungen sehr lange und mit einander übereinstimmend fort, und waren daher isochronisch. Hieraus folgt, daß das Gold durch die Schwere ebenso beschleunigt wird, wie das Holz, und, wenn man den Widerstand der Luft beseitigt, eine Masse Gold in einer gegebenen Zeit von einer eben so großen Höhe fällt, als eine dem Gewicht nach ebenso große Masse Holz. Er stellte die Versuche mit Gold, Silber, Bley, Glas, Sand, Kochsalz, Holz, Wasser und Waizen an, und fand beständig dieselben Resultate, so, daß, wenn auch ein kleiner, durch diese Versuche nicht bemerkbarer Unterschied statt finden sollte, dieser nach der von Newton angegebenen Gränze der Genauigkeit weniger als den tausendsten Theil des Ganzen hätte betragen müßen. Ungleichartige Körper von gleichem Gewicht würden also im leeren Raum und an einerley Ort der Erde in gleichen Zeiten von gleichen Höhen fallen, oder es können wenigstens die Fallhöhen nicht um ihren tausendsten Theil von einander verschieden seyn. Demnach wird man die Geschwindigkeit, welche die Schwere den Körpern in einer gegebenen Zeit und an einem gegebenen Ort, wenn der Widerstand der Luft und

*) Philos. nat. princ. mathem. L. III. prop. VI. theor. VI.

andere Störungen der Bewegung beseitigt werden, mittheilen würde, so lange als eine bey allen Körpern gleich bleibende Größe zu betrachten haben, als man nicht durch genauere Versuche eine Verschiedenheit in den erzeugten Geschwindigkeiten dargethan hat.

Drittes Capitel.

Von der Theorie der Bewegung der Himmelskörper, und der allgemeinen Schwere.

§. 271. Wenn auf einen in Bewegung gesetzten Körper eine Kraft wirkt, deren Richtung nach einem gewißen unveränderlichen Punkt hin geht; so wird seine Bewegung nur in dem besondern Fall geradlinigt seyn können, wo die anfängliche Richtung seiner Bewegung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt. In den übrigen Fällen wird sich der Körper in einer gebrochenen aus geraden Linien zusammengesetzten, oder in einer stetig krummen Linie bewegen, je nachdem die Kraft stoßweise oder stetig wirkt. Der Körper habe nemlich während eines gewißen Zeittheilchens die gerade Linie MA (Fig. 103) beschrieben, und S sey ein ausserhalb der MAF liegender Punkt. Man nehme auf der Verlängerung AF von MA die $AG = MA$; so würde der Körper in dem nächstfolgenden gleich großen Zeittheilchen den Weg AG zurücklegen, wenn keine Kraft auf ihn wirkte (§. 242.). In dem Augenblick da er in A ankommt, theile ihm eine gegen S hin wirkende Kraft die Geschwindigkeit Aa mit; so hat er in A die zwey Geschwindigkeiten AG und Aa, und er geht nun durch die Diagonale AB des Parallelogramms $AGBa$ in derselben Zeit, in welcher er den Weg AG zurückgelegt haben würde. Man ziehe SG; so ist das Dreyeck $MSA = ASG = ASB$ (I, 38. 37.). Mit der Geschwindigkeit seiner Bewegung durch AB würde er ferner nach der Verlängerung BH von AB fortgehen, und in dem nächstfolgenden gleich großen Zeittheilchen den Weg $BH = AB$ zurücklegen, so daß, wenn man SH zieht, das Dreyeck $BSH = ABS = ASM$ seyn würde. Aber in dem Augenblick da er in B ankommt, theile ihm die Kraft die Geschwindigkeit Bb gegen den Punkt S hin mit; so wird er die Diagonale BC des Parallelogramms $BHCb$ durchlaufen, und das Dreyeck BCS wird dem Dreyeck BCH, mithin wiederum dem Dreyeck ASM gleich seyn. Eben so wird der Körper, wenn er ferner in dem Anfang eines jeden der folgenden Zeittheilchen durch die stoßweise wirkende gegen den Punkt S gerichtete Kraft von seinen in den unmittelbar vorhergehenden Zeittheilchen beschriebenen Wegen abgelenkt, und ihm die Geschwindigkeiten Cc, Dd, Ee mitgetheilt würden, die Diagonalen CD, DE, EF der Parallelogramme Jc, Kd, Le in gleichen Zeiten durchlaufen, und die Radii Vectores SA, SB, SC u. s. w. werden die unter sich und dem Dreyeck ASM gleiche Dreyecke ASB, BSC u. s. w. in gleichen Zeiten beschreiben, so daß der ganze von A bis F beschriebene Flächenraum ASF das ebenso vielfache des Flächenraums ASB seyn wird, das wie vielfache die zur Beschreibung der Fläche ASF gebrauchte Zeit von derjenigen Zeit ist, in welcher die Fläche ASB beschrieben wurde. Die Flächenräume, welche die von S ausgehende Radii Vectores abschneiden wachsen also der Zeit proportional. Ferner liegen die Dreyecke ASG und ASB wegen der Parallelen AG, Ba in einer Ebene, sodenn, weil ABH eine gerade Linie ist, liegen auch die Dreyecke ASB und BSH, mithin auch wegen der Parallelen BH, Cb die Dreyecke BSC und BSH, und daher ASB und BSC in einer Ebene. Ebenso kann gezeigt werden, daß jedes der beschriebenen Dreyecke mit dem unmittelbar vorhergehenden in einer Ebene liegt; folglich liegt die Bahn des Körpers in einer durch den Punkt S und durch die anfängliche Richtung MAT der Bewegung des Körpers gelegten Ebene, in welcher er unter der Voraussetzung einer stoßweise gegen S hin wirkenden Kraft ein Vieleck $ABCDEF$ so beschreiben wird, daß sich der Flächenraum ASD zu dem Flächenraum ASF verhält wie die Zeit durch ASD zu der Zeit durch ASF. Der Punkt S, gegen welchem der Körper beständig hin getrieben wird, heißt der Mittelpunkt der Kräfte (centrum virium), die Kraft, welche ihn dahin treibt, die Centripetalkraft (vis centripeta), und die Bewegung selbst heißt eine Centralbewegung.

§. 272. Umgekehrt, wenn ein Körper ein in einer Ebene liegendes Vieleck so beschreibt, daß die Flächenräume, welche die von einem gegebenen in der Ebene des Vielecks liegenden Punkt S ausgehende Radii Vectores abschneiden, den Zeiten proportional sind, in welchen sie beschrieben wurden; so ist der Punkt S der Mittelpunkt der Kräfte. Sind nemlich CSD, DSE die in zwey gleichen unmittelbar auf einander folgenden Zeittheilchen beschriebenen Flächenräume; so müßen die Dreyecke CSD, DSE einander gleich seyn. Man verlängere CD nach K so, daß $DK = CD$ und ziehe CK; so würde der Körper, wenn in D die Centralkraft nicht auf ihn gewirkt hätte, in dem zweyten Zeittheilchen das Dreyeck $DSK = CDS$ beschrieben haben. Nun soll aber auch das Dreyeck $DSE = CDS$ seyn; folglich müßen die Dreyecke DSE und DSK einander gleich seyn, mithin ihre Spitzen K, E auf einer mit der DS parallel laufenden geraden Linie KE liegen I, 39.). Man ziehe noch durch E die Parallele Ed mit DK; so ist $DKEd$ ein Parallelogramm, und die Geschwindigkeit DE kann als aus den zwey Geschwindigkeiten DK und Dd zusammengesetzt betrachtet werden (§. 240.). Die erstere ist diejenige, mit welcher der Körper in D ankam, und mit welcher er sich gleichförmig nach der Verlängerung DK von CD fortbewegt haben würde. Die letztere Dd muß von einer nach der Richtung Dd wirkenden Kraft herrühren, weil man unter der Richtung einer Kraft die Richtung versteht, nach welcher sie einen Körper zu bewegen strebt (§. 243.). Folglich ist der Punkt S, von welchem die Radii Vectores ausgehen, der Mittelpunkt der Kräfte.

Man fälle aus dem Mittelpunkt S der Kräfte die Perpendickel SR, SP auf die Richtungen MA, DE der Bewegung des Körpers von M bis A und von D bis E; so verhält sich, weil die Dreyecke AMS und DSE einander gleich sind, $MA : DE = SP : SR$. Aber MA und DE sind in gleichen Zeiten beschriebene Wege; folglich verhält sich die

Geschwindigkeit der Bewegung von *M* bis *A* zu der Geschwindigkeit der Bewegung von *D* bis *E* (§. 231.), wie das aus dem Mittelpunkt *S* der Kräfte auf die letztere Richtung der Bewegung gefällte Perpendickel *SP* zu dem Perpendickel *SR* auf die erstere Richtung.

Je kleiner man nun die Zeittheilchen nimmt, in welchen die Stöße der Centripetalkraft aufeinander folgen, desto mehr nähert sich die stoßweise wirkende Kraft einer stetig wirkenden, und zu gleicher Zeit nähert sich das Vieleck einer stetig krummen Linie. Dabey bleiben beständig die Flächenräume den Zeiten proportional, in welchen sie beschrieben wurden. Man lasse die Kraft stetig nach einem gegebenen Punkt *S* hin wirken; so wird das Vieleck in eine gegen den Mittelpunkt *S* der Kraft hole stetig krumme Linie übergehen, und die Sectoren, welche die von *S* ausgehende Radii Vectores abschneiden, werden den Zeiten proportional seyn, in welchen sie beschrieben wurden. Und umgekehrt, wenn ein frey sich bewegender Körper eine in einer Ebene liegende krumme Linie so beschreibt, daß die von einem in dieser Ebene liegenden Punkt ausgehende Radii Vectores den Zeiten proportionale Flächenräume abschneiden; so ist der erwähnte Punkt der Mittelpunkt der Kräfte. Die Centripetalkraft kann übrigens aus mehreren nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften zusammengesetzt seyn, nur muß die aus allen diesen Kräften zusammengesetzte Kraft gegen den gegebenen Punkt hin gerichtet seyn, von welchem die Radii Vectores ausgehen.

Die Perpendickel *SR*, *SP* aus dem Mittelpunkt *S* der Kraft auf die Richtungen *MA*, *DE* der Bewegung des Körpers werden im Fall der stetig krummlinigten Bewegung in diejenigen Perpendickel übergehen, welche aus dem Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangenten der krummlinigten Bahn gefällt werden. Bey jeder freyen krummlinigten Centralbewegung werden also die aus dem Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangenten der Bahn gefällten Perpendickel umgekehrt den Geschwindigkeiten proportional seyn, welche der Körper in den Berührungspunkten hat.

§. 273. Vermöge des zweyten keplerischen Gesetzes (§. 179.) sind die elliptischen Sectoren, welche die aus dem Mittelpunkt der Sonne an einen Planeten gezogene Radii Vectores abschneiden, den Zeiten proportional, in welchen sie beschrieben werden; folglich ist die Kraft, welche die Planeten nöthigt, um die Sonne ihre krummlinigte Bahnen zu beschreiben, gegen den Mittelpunkt der Sonne hin gerichtet. Das zweyte keplerische Gesetz ist ein allgemeines Gesetz der freyen Centralbewegung. Jeder Körper, welcher durch eine, oder durch eine aus mehreren zusammengesetzte Kraft beständig gegen einen unbeweglichen Punkt hin getrieben wird, und nach einer Richtung, welche weder mit der Richtung der Centripetalkraft zusammenfällt, noch ihr entgegengesetzt ist, auf irgend eine Weise in Bewegung gesetzt worden ist, wird, wenn keine Hinderniße der Bewegung vorhanden sind, eine gegen den Mittelpunkt der Kräfte hole krumme Linie beschreiben, so daß die Flächenräume, welche die aus dem Mittelpunkt der Kräfte ausgehende Radii Vectores abschneiden, den Zeiten proportional wachsen, nach welchem Gesetz auch die Centripetalkraft mit der Veränderung des Abstands des Körpers von dem Mittelpunkt der Kräfte sich verändern mag.

Um nun das Gesetz zu finden, nach welchem die Centripetalkraft von der Entfernung des Körpers vom Mittelpunkt der Kraft abhängt, und die Größe der Kraft selbst angeben zu können, welche den Körper von seinem geradlinigten Weg beständig ablenkt, wird man die Größe der Ablenkung von der Tangente der krummen Linie, welche der Körper beschreibt, zu bestimmen haben, und zwar wird, weil die Kräfte durch diejenige Geschwindigkeit gemeßen werden, welche sie nach einer gegebenen Richtung in einer gegebenen Zeit erzeugen würden, wenn sie während dieser Zeit constant blieben, diejenige Ablenkung von der Tangente auszumitteln seyn, welche die Centralkraft in einer gegebenen Zeit hervorbringen würde, wenn sie während dieser Zeit nach ihrer anfänglichen Richtung mit gleicher Stärke fortwirkte. Der einfachste Fall ist derjenige, wenn ein Körper einen Kreis beschreibt, und des Kreises Mittelpunkt der

Mittelpunkt der Kraft ist. In diesem Fall sind die aus dem Mittelpunkt der Kraft auf die Tangenten des Kreises gefällten Perpendickel dem Halbmesser des Kreises gleich, und folglich ist diese Centralbewegung gleichförmig (§. 272.). Es sey AB (Fig. 104.) der Bogen, welchen der in dem aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreis sich bewegende Körper in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Sekunde beschreibt, und AG sey die Höhe, von welcher der Körper von dem Punkt A aus gegen C in derselben Zeit, in welcher der Bogen AB beschrieben wird, fallen würde, wenn auf ihn die Centralkraft mit derjenigen Stärke, welche sie in A hat, fortwirkte, und der Körper keine Geschwindigkeit nach der Richtung der Tangente AT gehabt hätte, oder anfänglich in Ruhe gewesen wäre. Man theile die Zeit, in welcher der Bogen AB beschrieben wird, so wie den Bogen AB selbst in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, welche $= n$ sey. Es sey $AE = \frac{1}{n} AB$. Man ziehe EP auf den durch A gehenden Durchmesser AD senkrecht, vollende das Parallelogramm $APEH$ und ziehe die Chorden AE, ED. Wirkte die Centralkraft stoßweise, und theilte sie dem Körper in dem Punkt A plözlich die Geschwindigkeit AP mit, so würde er, wenn er nach der Richtung der Tangente AT die Geschwindigkeit AH hätte, am Ende der Zeit, in welcher er den Bogen AE wirklich beschrieben hat, durch die Bewegung auf der Chorde AE des Kreises an demselben Punkt E gekommen seyn.

Es verhält sich aber $\left.\begin{matrix} AD \\ 2AC \end{matrix}\right\}$: Chorde AE = Chorde $AE : AP$;

folglich ist $AP = \frac{\text{dem Quadr. d. Chorde } AE}{2AC}$

Da nun der Weg, welchen der Körper nach der Richtung AT der Tangente in $\frac{1}{n}$tel Sekunde zurücklegen würde dem Bogen AE gleich, und daher größer als AH ist; so muß der Raum, durch welchen die Centralkraft den Körper in $\frac{1}{n}$ Sekunde fallen machen würde, größer AP seyn, und weil vermöge der Geseze der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Fallhöhe in $\frac{1}{n}$ Sekunde zu der Fallhöhe in 1 Sek. sich verhält, wie $\frac{1}{n^2} : 1 = 1 : n^2$; so wird die Fallhöhe in 1 Sekunde, d. i. $AG \gtrdot n^2 . AP$ oder $\gtrdot \frac{n\,\overline{\text{Chorde}\,AE}^2}{2AC}$

$\gtrdot \frac{n^2.\overline{AE}^2}{2AC}\left(\frac{\text{Chorde}\,AE}{\text{Bogen}\,AE}\right)^2$, oder auch, weil $n.AE = AB$ ist (Constr.),

$$AG \gtrdot \frac{\overline{AB}^2}{2AC}\left(\frac{\text{Chorde}\,\frac{1}{n}\,AB}{\text{Bogen}\,\frac{1}{n}\,AB}\right)^2 \text{ seyn.}$$

Man ziehe an den anderen Endpunkt E des Bogens AE den Durchmesser FE, dessen Verlängerung der Tangente AT in T begegne, und vollende das Parallelogramm $AQET$; so würde der Körper, wenn er nach der Richtung der Tangente eine Geschwindigkeit gehabt hätte, mit welcher er in $\frac{1}{n}$ Sekunde den Weg AT gleichförmig hätte zurücklegen können, und zugleich in A nach der mit TE parallelen Richtung AQ die Geschwindigkeit AQ erhalten hätte, die Diagonale AE des Parallelogramms $AQET$ in $\frac{1}{n}$ Sekunde beschrieben haben, und am Ende dieses Zeittheilchens in dem Endpunkt E des Bogens AE angekommen seyn, welchen er in dieser Zeit wirklich beschrieben hat. Dieser Bogen ist aber kleiner als AT; folglich muß der Raum, durch welchen die Centralkraft den Körper in $\frac{1}{n}$ Sek. fallen machen würde kleiner als TE, und die Fallhöhe AG in 1 Sek. kleiner als $n^2 . TE$ seyn. Es ist aber (III, 36.) $FT \times TE = \overline{AT}^2$, und daher $TE = \frac{\overline{AT}^2}{FT} \lessdot \frac{\overline{AT}^2}{FE}$, $n^2 . TE \lessdot \frac{n^2.\overline{AT}^2}{2AC}$; folglich muß um so mehr

$$AG \lessdot \frac{n^2.\overline{AT}^2}{2AC} \lessdot \frac{n^2.\overline{AE}^2}{2AC}\left(\frac{AT}{AE}\right)^2 \lessdot \frac{\overline{AB}^2}{2AC}\left(\frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{n}\,AB}{\text{Bogen}\,\frac{1}{n}\,AB}\right) \text{ seyn.}$$

Nun ist die Geschwindigkeit, welche eine constante Kraft während einer gegebenen Zeit erzeugt das Doppelte des Raums, durch welchen sie einen Körper während derselben Zeit fallen machen würde; folglich ist die Geschwindigkeit, welche die Centralkraft während der Zeit, in welcher der im Kreis sich bewegende Körper den Bogen AB beschreibt, erzeugen würde, wenn sie beständig mit derjenigen Stärke fortwirkte, welche sie in A hat, beständig

$$> \frac{\overline{AB}^2}{AC}\left(\frac{\text{Chorde}\,\frac{1}{n}\;AB}{\text{Bogen}\,\frac{1}{n}\;AB}\right)^2,$$

$$\text{aber} < \frac{\overline{AB}^2}{AC}\left(\frac{\text{Tang.}\,\frac{1}{n}\;AB}{\text{Bogen}\,\frac{1}{n}\;AB}\right)^2.$$

Diese zwey Ausdrücke können aber durch die Vergrößerung der Anzahl n der gleichen Theile, in welche man den Bogen AB eintheilt, um weniger als jede gegebene Größe von einander verschieden gemacht werden; folglich kann die Centripetalkraft weder größer noch kleiner seyn als $\frac{\overline{AB}^2}{AC}$, wenn sie nemlich wie gewöhnlich durch die Geschwindigkeit gemeßen wird, welche sie als constant betrachtet in einer gegebenen Zeit erzeugen würde.

Man setze die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Körper im Kreis bewegt, gleich v, seinen Halbmesser $= r$, und die Geschwindigkeit, welche die Centralkraft in der Zeiteinheit erzeugen würde $= k$; so wird man haben

1.) $k = \frac{v^2}{r}$,

wo k die in einer Sekunde, Minute, u. s. w. erzeugte Geschwindigkeit seyn wird, je nachdem v den Weg bezeichnet, welchen der Körper in einer Sekunde, Minute, u. s. w. beschreiben würde, wenn die Centralkraft aufhörte zu wirken.

Es sey die Umlaufszeit des Körpers $= t$; so durchlauft er in dieser Zeit den Umfang des Kreises oder den Raum $2r\pi$, wenn der Umfang zum Durchmesser sich wie $\pi : 1$ verhält. Da nun der Körper den Kreis mit einer

gleich-

gleichförmigen Bewegung durchlauft; so wird seine Geschwindigkeit $v = \frac{2r\pi}{t}$, und vermöge der Gleichung n. 1.

2.) $k = \frac{4r\pi^2}{t^2}$ seyn.

Da ein Körper, welcher sich in einem Kreise bewegen soll, gegen des Kreises Mittelpunkt hin durch eine Kraft getrieben werden muß, welche $= \frac{v^2}{r}$ ist (n. 1.); so bestrebt er sich mit einer ebenso großen Kraft von des Kreises Mittelpunkt zu entfernen, und nach der Richtung der Tangente fortzugehen. Dieses Bestreben eines im Kreise sich bewegenden Körpers, sich von des Kreises Mittelpunkt zu entfernen, heißt die Schwungkraft (vis centrifuga). Wird ein Körper durch einen Faden mit einem unbeweglichen Punkt verbunden, und dadurch genöthigt, einen Kreis zu beschreiben, dessen Halbmesser der Länge des Fadens gleich ist; so muß der Faden stark genug seyn, um der Schwungkraft zu widerstehen, und dieser vertritt nun die Stelle der Centripetalkraft. Gewöhnlich versteht man unter der Schwungkraft den Exponenten ihres Verhältnißes zu der Kraft der Schwere. Man setze die freye Fallhöhe der Körper in der ersten Sekunde $= g$, also die Geschwindigkeit, welche die Schwere in einer Sekunde erzeugt $= 2g$; so wird sich verhalten

die Schwungkraft : Schwere $= \frac{v^2}{r} : 2g$, oder es wird seyn

3.) die Schwungkraft $= \frac{v^2}{2gr}$.

§. 274. Wenn ein Körper einen Kreis mit einer gleichförmigen Bewegung beschreibt; so kann zwar nach dem vorhergehenden §. die Centripetalkraft gefunden werden, welche den Körper nöthigt, diesen Kreis zu beschreiben, aber das Gesetz, nach welchem die Centripetalkraft mit dem Abstand des Körpers von des Kreises Mittelpunkt sich verändert, bleibt unbestimmt, weil in diesem Fall alle Radii Vectores einander gleich sind. Da aber die Planeten keine Kreise, sondern Ellipsen beschreiben, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet, und dieser Punkt vermöge des vorhergehenden §. zugleich der Mittelpunkt der Kräfte ist; so verändern sich die Abstände der Planeten von dem Mittelpunkt der Kräfte um den Abstand der Brennpunkte der Ellipsen, welche sie um die Sonne beschreiben, und man wird das Gesetz finden können, nach welchem die Centripetalkraft sich verändert. Es sey AP (Fig. 105.) die große, DE die kleine Axe der elliptischen Bahn eines Planeten, F und S seyen ihre Brennpunkte, und die Sonne in S. Da bey jeder Centralbewegung die Geschwindigkeiten umgekehrt den Perpendickeln aus dem Mittelpunkt der Kräfte auf die Tangenten der Bahn proportional sind (§. 272.), und die geraden Linien, welche auf der großen Axe in den Scheiteln A, P senkrecht stehen, die Ellipse in diesen Punkten berühren; so verhält sich die Geschwindigkeit des Planeten im Perihelio P zu seiner Geschwindigkeit im Aphelio A wie $SA : SP$. Es sey M ein beliebiger anderer Punkt der Ellipse, in welchem sie von der geraden Linie RT berührt werde. Man ziehe SM, FM, verlängere die letztere nach Q so, daß $FQ = AP$ werde, ziehe SQ, und verbinde den Punkt R, in welchem die SQ die Tangente RT schneidet, mit dem Mittelpunkt C der Ellipse durch die gerade Linie CR. Da vermöge der Eigenschaften der Ellipse $SM + MF = AP = FQ$ (Constr.) $= QM + MF$; so ist $SM = QM$. Weil ferner die RT die Ellipse in M berührt; so ist der Winkel $SMR = FMT$ (Kegelschn. II, 12. Zus. 1.) $= RMQ$ (I, 15.), und daher $SR = RQ$ (I, 4.), und SR auf RT senkrecht. Es ist aber auch $SC = CF$; folglich CR mit FQ parallel (VI, 2.), und $CR = \frac{1}{2} FQ = CP$. Mithin liegen die Endpunkte R aller Perpendickel SR, welche aus dem Brennpunkt S auf die Tangenten der Ellipse gefällt werden, auf dem Umfang eines über der großen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises, und vermöge III, 7. ist SP am kleinsten, SA am größten, $SR > SP$. Da nun die Geschwindigkeiten umgekehrt diesen Perpendickeln proportional sind; so ist die Geschwindigkeit der Bewegung des Planeten im Perihelio P am größten, im Aphelio A am kleinsten, sie nimmt von dem Perihelium an bis zu dem Aphelio beständig ab, und auf der anderen Seite der grossen Axe wieder ebenso zu, bis sie im Perihelio wieder am grösten wird.

Man nehme auf der grossen Axe AP der Ellipse von ihren Scheiteln P und A aus die Linien PJ, AK dem halben Parameter der grossen Axe gleich, und beschreibe aus J und K als Mittelpunkten mit den Halbmessern JP, KA Kreise; so werden diese die Ellipse in P und A berühren, und ganz innerhalb der Ellipse fallen, auch wird kein anderer Kreis, welcher die Ellipse in P oder A berührt, zwischen der Ellipse und dem aus J oder K beschriebenen Kreis durchgehen können (Regelschn. II, 35.). Folglich muß die Centripetalkraft in P eben so groß seyn als die Centripetalkraft, welche erfordert wird, um einen Körper, welcher in P einerley Richtung und Geschwindigkeit seiner Bewegung mit dem Planeten hat, einen Kreis von dem Halbmesser JP beschreiben zu machen, dessen Mittelpunkt der Kraft in J fällt. Eben so muß die Centripetalkraft in A derjenigen Kraft gleich seyn, welche einen von A mit der diesem Punkt entsprechenden Geschwindigkeit und Richtung des Planeten ausgehenden Körper nöthigen würde, um K als Mittelpunkt der Kraft einen Kreis, dessen Halbmesser $= KA$ ist, beschreiben zu machen. Wegen der gleichen Halbmesser JP und KA wird sich aber vermöge §. 273. n. 1. verhalten

$$\left\{\begin{array}{l}\text{die Centrip. Kraft im Kreis } JP,\\ \text{oder Centrip. Kraft des Planeten in } P\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l}\text{Centrip. Kraft im Kr. } KA\\ \text{oder Centrip. Kr. d. Plan. in } A\end{array}\right\}$$
$$= \text{Quadr. d. Geschw. in } P : \text{Quadr. d. Geschw. in } A$$
$$= \overline{SA}^2 : \overline{SP}^2;$$

folglich ist die Kraft, welche die Planeten gegen dem Mittelpunkt der Sonne treibt, wenigstens im Aphelio und Perihelio umgekehrt den Quadraten ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkt der Sonne proportional. Was hier von den Endpunkten der grossen Axe bewiesen worden ist, gilt auch, wie hernach gezeigt werden soll, von den übrigen Punkten der Ellipse. Nun wird es sich auch begreiflich machen lassen, warum die Planeten, wenn sie im Perihelio angekommen sind, sich wiederum von der Sonne entfernen, ungeachtet im Perihelio die Centralkraft am grösten ist, und warum sie, wenn sie im Aphelio angekommen sind, sich wiederum der Sonne nähern. Da nemlich PJ dem halben Parameter der großen Axe der Ellipse gleich ist; so verhält sich

$$AC \quad CD = CD \quad PJ$$

mithin $\left.\begin{matrix}AC\\ CP\end{matrix}\right\}$ $PJ = \left\{\begin{matrix}\overline{AC}^2\\ \overline{CS}^2+\overline{CD}^2\end{matrix}\right\} : \overline{CD}^2,$

$$\left.\begin{matrix}CP-PJ\\ CJ\end{matrix}\right\} \quad CP = \overline{CS}^2 : \left\{\begin{matrix}\overline{AC}^2\\ \overline{CP}^2\end{matrix}\right\};$$

folglich $\left.\begin{matrix}CJ & CS\\ CK & CF\end{matrix}\right\} = CS : CP.$

Da nun in der Ellipse immer CS kleiner als CP ist; so ist $CJ < CS$, $CK < CF$, und daher $PJ > PS$, $AK < AC$ und um so mehr $< AS$. Mit der Geschwindigkeit, welche der Planet in P hat, könnte er einen Kreis um J als Mittelpunkt der Kraft beschreiben, dessen Halbmesser $JP > PS$ ist; folglich muß er in P anfangen sich von dem Brennpunkt S zu entfernen. In A kommt er mit einer Geschwindigkeit an, vermöge welcher er um K als Mittelpunkt einen Kreis beschreiben könnte, dessen Halbmesser $KA < AS$ ist. Mithin muß er, wenn er durch den Endpunkt A der großen Axe gegangen ist, anfangen, sich dem Brennpunkt S wiederum zu nähern. Mit dieser Annäherung wächst seine Geschwindigkeit bis zu dem Perihelium P, so daß er nun wiederum einen Kreis um den Mittelpunkt J beschreiben könnte, wenn dieser Punkt der Mittelpunkt der Kraft wäre. Er muß sich also von dem wirklichen Mittelpunkt S der Kraft, welcher vermöge des oben bewiesenen zwischen P und J fällt, wiederum entfernen. In dem hier betrachteten Fall von Centralbewegungen übertreffen die Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn und die Geschwindigkeit in einem Kreis, welcher aus dem Mittelpunkt der Sonne durch den Ort des Planeten beschrieben wird, einander wechselsweise, die erstere in dem Perihelio, die letztere in dem Aphelio.

§. 275. Vermöge des dritten keplerischen Gesetzes (§. 180.) verhalten sich die Quadrate der siderischen Umlaufszeiten der Planeten wie die Würfel ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne. Diese Umlaufszeiten sind also von der Excentricität der Planetenbahnen unabhängig, und sie werden daher unverändert bleiben, wenn man die Planeten Kreise um die Sonne beschreiben läßt, deren Halbmesser den halben großen Axen der elliptischen Planetenbahnen gleich sind. Bezeichnet man die Halbmesser dieser Kreise mit r und R, und die Umlaufszeiten mit t und T; so wird man die Proportion haben $t^2 : T^2 = r^3 : R^3$.

Aber, wenn mehrere Körper um einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt als Mittelpunkt der Kräfte Kreise von den Halbmessern r und R in den Zeiten t und T beschreiben; so sind die Centralkräfte beziehungsweise $k = \frac{4r\pi^2}{t^2}$ und $K = \frac{4R\pi^2}{T^2}$ (§. 273. n. 2.) folglich ist $k : K$ im zusammengesetzten Verhältniß von $r : R$
und von $T^2 : t^2$
od. im zusammengesetzten Verhältniß von $r : R$
und von $R^3 : r^3$ (3tes kep. Ges.);
mithin $k : K = R^2 : r^2$.

Dasselbe Gesetz der Centripetalkraft, welches für die kleinste und gröste Entfernung eines jeden Planeten von der Sonne gilt, bestätigt sich also auch von einem Planeten zu dem anderen, und es ist sehr wahrscheinlich, daß es sich auf alle Punkte der Planetenbahnen, und allgemein auf alle Entfernungen von der Sonne erstrekt. Die folgenden Untersuchungen werden die Allgemeinheit dieses Gesetzes ausser allem Zweifel setzen.

§. 276. Ein Körper gehe 1.) von dem gegebenen Punkt A (Fig. 106.) mit einer gegebenen Geschwindigkeit nach der gegebenen Richtung AB aus, und eine constante Kraft wirke auf ihn beständig mit der gegebenen geraden Linie AD parallel; so wird die Bewegung des Körpers aus einer gleichförmigen mit der geraden Linie AB parallelen und aus einer gleichförmig beschleunigten mit der geraden Linie AD parallel laufenden Bewegung zusammengesetzt, und daher krummlinigt seyn. Man ziehe durch beliebige Punkte B, Q der AB die Parallelen BG, QM mit AD, welche der von dem Körper beschriebenen krummen Linie in G und M begegnen, und durch G, M die GK, MP mit AB parallel. Da die mit AD parallel laufende Bewegung eine gleichförmig beschleunigte ist; so wird sich verhalten $\left.\begin{matrix} BG \\ AK \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} QM \\ AP \end{matrix}\right\} =$

das Quadrat der Zeit der gleichförmigen Bewegung durch AB zu dem Quadrat der Zeit der gleichförmigen Bewegung durch AQ (§. 234) $= \overline{AB}^2 : \overline{AQ}^2$ (§. 231. n. 1.) $= GK^2 : \overline{PM}^2$. Der Körper beschreibt also eine Parabel AMG (Kegelschn. I, 18. Zus. 3.), deren Durchmesser AD ist, und welche die gerade Linie AB in dem Scheitel A des Durchmessers AD berührt (Kegelschn. I, 12. Zus. 5.). Die Natur zeigt uns diese Bewegung in den schief gegen den Horizont geworfenen Körpern, wenn man die Richtungen der Schwere als parallel annimmt, welches in kleinen Entfernungen ohne merklichen Fehler geschehen kann, und den Widerstand der Luft bey Seite setzt.

2.) Umgekehrt, wenn ein Körper durch eine beständig mit der geraden Linie AD parallel wirkende Kraft genöthigt wird eine Parabel AMG zu beschreiben, deren Durchmesser AD ist; so ist diese Kraft constant. Denn es verhält sich

$\left.\begin{matrix} AK : AP \\ BG \quad QM \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overline{GK}^2 : \overline{PM}^2 \\ \overline{AB}^2 : AQ^2 \end{matrix}\right\}$ (Kegelschn. I, 13. Zus. 2.), und weil AB, AQ der Zeit proportional sind; so sind die Räume BG, QM den Quadraten der vom Anfang der Bewegung an verfloßenen Zeiten proportional, und daher ist die Kraft constant (§. 243.)

3.) Die beständig mit AD parallel wirkende Kraft sey nun veränderlich und in dem Punkt A der constanten Kraft gleich, mit welcher vorhin die Parabel beschrieben wurde, das übrige bleibe wie in n. 1. Es sey AH die krumme Linie, welche der Körper beschreibt, wenn die veränderliche Kraft auf ihn wirkt; so wird zwischen der Parabel AG und der krummen Linie AH keine andere Parabel durch den Berührungspunkt A durchgehen können, welche mit der vorhergehenden einerley Durchmesser AD hat, und die gerade Linie AB in dem Punkt berührt. Um dieß zu zeigen, nehme man zuerst an, die Kraft wachse während der Bogen AH beschrieben wird; so wird, wenn man durch irgend einen zwischen A und B liegenden Punkt b eine Parallele bh mit AD zieht, welche der krummen Linie AH in h, der Parabel AG in g begegnet, $bh > bg$ seyn, weil eine beständig wachsende Kraft einen Körper in einer gegebenen Zeit durch einen größern Raum treibt als eine constante Kraft, welche der ersteren im Anfang jener Zeit gleich ist. Der Bogen AH wird also ganz innerhalb des Bogens AG der Parabel liegen, und folglich müßte diejenige Parabel, welche zwischen AMG und AhH sollte durchgehen können, durch einen zwischen G und H liegenden Punkt Z der BH durchgehen, und die constante Kraft, mit welcher die neue Parabel AmZ könnte beschrieben werden (n. 2.), in dem Verhältniß von $BZ : BG$ größer seyn als die Kraft in der Parabel AMG. Da nun die veränderliche Kraft, mit welcher die krumme Linie AH beschrieben wird, in dem Punkt A der constanten Kraft in der Parabel AMG gleich (Vorausf.), mithin kleiner als in der Parabel AmZ ist; so wird sie erst nach einiger Zeit dieser letzteren Kraft gleich werden. Es geschehe auf der durch den Punkt Q mit AD parallel gezogenen Qm, welche der Parabel AZ in m, der krummen Linie AH in n begegne; so wird die veränderliche Kraft zwischen n und A beständig kleiner als die constante Kraft in der Parabel AmZ, und $Qn < Qm$ seyn. Der Bogen Am der Parabel AZ wird also innerhalb der krummen Linie AnH fallen, und daher nicht zwischen dem Bogen An der krummen Linie und dem Bogen AM der ersten Parabel durch gehen. Die krumme Linie AH und die Parabel AMG haben also in dem Punkt A einerley Krümmung. Eben so wird der Beweiß geführt, wenn die Kraft abnimmt.

4.) Umgekehrt, wenn die krumme Linie AH und die Parabel AG einander berühren und einerley Krümmung haben in A, oder einander in A so berühren, daß zwischen dem Bogen An der krummen Linie und dem Bogen AM der Parabel keine andere Parabel durchgehen kann, und die Kraft, mit welcher die krumme Linie AH beschrieben wird, beständig mit der constanten zur Beschreibung der Parabel AG erforderlichen Kraft nach einerley Richtung wirkt; so wird, wenn die Geschwindigkeiten der Bewegung in der krummen Linie AH und in der Parabel AG an dem Berührungspunkt A einander gleich sind, die Kraft in der krummen Linie AH an dem Punkt A der constanten Kraft in der Parabel AG gleich seyn. Denn wäre die Kraft in der krummen Linie AH an dem Punkt A größer als die Kraft in der Parabel AG, so seye sie größer als die letztere in dem Verhältniß von BZ zu BG. Man beschreibe durch die Punkte A und Z eine Parabel, deren Durchmesser AD sey, und welche die gerade Linie AB in B berühre (Kegelschn. I, 18. Zus. 1.); so würde die constante Kraft, mit welcher die Parabel AZ könnte beschrieben werden (n. 2.), der Kraft in der krummen Linie AH an dem Punkt A gleich seyn. Wenn nun fürs erste die veränderliche Kraft in der krummen Linie AH während der Bewegung von A an bis H zunähme, so müßte $BZ < BH$, und für jede zwischen BH und AD mit der letzteren parallel gezogene Qm, welche der krummen Linie AH in n, der Parabel AZ in m begegnet, $Qm < Qn$ seyn, weil der vermöge einer constanten Kraft beschriebene Raum kleiner seyn muß als der Raum, welcher in derselben Zeit vermöge einer anfänglich gleich großen und von diesem Zeitpunkt an beständig zunehmenden Kraft beschrieben wird. Nun ist $BG < BZ$; folglich auch $QM < Qm$ (n. 2.), und es müßte die Parabel AmZ zwischen der Parabel AMG und dem Bogen AH der krummen Linie durchgehen, welches gegen die Voraussetzung ist. Daher kann die Kraft, mit welcher die krumme Linie AH beschrieben wird, an dem Punkt A

nicht grösser seyn, als die constante Kraft in der Parabel AG, wenn die erstere während der Beschreibung des Bogens AH beständig wächst. Wenn aber zweytens die Kraft beständig von A bis H abnimmt; so sey durch einen zwischen G und Z liegenden Punkt V eine Parabel beschrieben, welche die AB in A berühre, und die gerade Linie AD zum Durchmesser habe. Diese wird innerhalb der Parabel AG liegen, weil $BV > BG$ ist. Und weil man die Kraft in der krummen Linie AH an dem Punkt A der constanten Kraft in der Parabel AZ, mithin grösser als in der Parabel AV angenommen hat; so müßte von A an ein Theil der Parabel AV zwischen die Parabel AG und die krumme Linie AH fallen, und AG könnte nicht mit der krummen Linie AH an dem Punkt A einerley Krümmung haben, gegen die Voraussetzung. Auf ähnliche Art kann gezeigt werden, daß die zur Beschreibung von AH erforderliche Kraft an dem Punkt A auch nicht kleiner seyn könne, als die constante Kraft in der Parabel AG. Folglich sind sie einander gleich.

5.) Man nehme auf dem Durchmesser AD der Parabel AG von ihrem Scheitel A aus die AL dem Parameter dieses Durchmessers gleich, und beschreibe durch die Punkte A und L einen Kreis, welcher die AB in dem Punkt A berühre; so wird dieser mit der Parabel AG an dem Punkt A einerley Krümmung haben (Kegelschn. I, 29. Zus. 1.), und daher die Kraft mit welcher der Kreis ANL, wenn sie nemlich beständig mit AD parallel wirkt, kann beschrieben werden, an dem Punkt A der constanten Kraft in der Parabel AG, mithin auch (n. 4.) der Kraft in der krummen Linie AH an eben diesem Punkt gleich seyn. Auf der AB sey AC der Geschwindigkeit des Körpers, welche er in A hat, gleich genommen, durch C die Parallele CE mit AD, und durch den Punkt E, in welchem sie der Parabel begegnet, die Parallele EH mit AB gezogen; so wird sich verhalten

$\left.\begin{matrix}AH\\CE\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}HE\\AC\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}HE\\AC\end{matrix}\right\} : AL$ (Kegelschn. I, 14. Zus. 3.). Und da CE die Höhe ist, von welcher der Körper in der Zeiteinheit fallen würde, wenn die Kraft beständig mit derjenigen Stärke fortwirkte, welche sie in A; so ist $2CE$ die in eben dieser Zeit erzeugte Geschwindigkeit, und daher die Kraft in A das Doppelte der dritten Proportionallinie zu der mit der Richtung der Kraft parallel laufenden durch den Berührungspunkt A gehenden Chorde AL des Krümmungskreises der krummen Linie an dem Punkt A und zu dem Quadrat der Geschwindigkeit AC in eben diesem Punkt, oder die dritte geometrische Proportionallinie zur halben Chorde des Krümmungskreises und zu der Geschwindigkeit. Es werde z. B. das Gesetz einer nach parallelen Richtungen wirkenden Kraft gesucht, mit welcher ein Körper einen Kreis ANL beschreiben kann. Man ziehe den auf die Richtung der

Kraft senkrechten Durchmesser NF und an einen beliebigen Punkt A des Kreises die Tangente AC, auf welcher At der Geschwindigkeit des Körpers in A gleich genommen werde. Ferner sey die Chorde AL auf NF senkrecht, und mit ihr durch den Punkt t der Tangente AC die Parallele rt gezogen; so wird sich, wenn man noch den Halbmesser AO zieht, verhalten $AR : AO = Rr : At$, und die Geschwindigkeit $At = \frac{AO . Rr}{AR}$ seyn. Und da in gegenwärtigem Fall der Krümmungskreis mit der vorgegebenen krummen Linie selbst zusammenfällt, so wird die Kraft in $A = \frac{\overline{AO}^2 . \overline{Rr}^2}{\overline{AR}^3}$ seyn. Es ist aber, weil die Kraft auf NS senkrecht wirkt, die Geschwindigkeit Rr, mit welcher der Punkt R fortrückt, constant; folglich ist die Kraft umgekehrt den Würfeln der Ordinaten AR proportional *).

6.) Es sey nun die Kraft, welche den Körper die krumme Linie AH beschreiben macht, gegen einen in ihrer Ebene liegenden Punkt S hin gerichtet, und AG sey die Parabel, welche der Körper beschreiben würde, wenn die Centripetalkraft mit derjenigen Stärke, welche sie in dem Punkt A hat nach einer mit ASL parallelen Richtung fortwirkte; so wird die Berührung der krummen Linie AH mit der Parabel AG inniger seyn, als die Berührung mit irgend einer anderen Parabel, welche mit einer größeren oder kleineren nach derselben Richtung wirkenden constanten Kraft könnte beschrieben werden. Die krumme Linie AH und die Parabel AG haben also einerley Krümmung an dem Punkt A. Folglich wird nach n. 5. die Centripetalkraft an dem Punkt A gemeßen durch die dritte geometrische Proportionallinie zu der halben durch den Mittelpunkt S der Kraft gehenden Chorde des Krümmungskreises an dem Punkt A und zu der Geschwindigkeit AC, welche der Körper in eben diesem Punkt hat. Die Centripetalkraft in verschiedenen Punkten der Bahn ist also im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der Quadrate der Geschwindigkeiten und dem umgekehrten der durch den Mittelpunkt der Kraft gehenden Chorden der Krümmungskreise. Und wenn ein Körper einen Kreis beschreibt, in dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kraft fällt; so wird die Centripetalkraft gemeßen durch die dritte geometrische Proportionallinie zu dem Halbmesser des Kreises und zu der Geschwindigkeit, mit welcher sich der Körper in dem Kreis bewegt, übereinstimmend mit §. 273. n. 1. Denn der Krümmungskreis fällt hier mit der beschriebenen krummen Linie zusammen, und die durch den Mittelpunkt der Kraft gehenden Chorden des Krümmungskreises werden in diesem Fall Durchmesser desselben. Wenn aber der Mit-

*) Newtoni princip. L. I. prop. VIII. probl. III.

telpunkt S der Kraft (Fig. 107.) ausserhalb des Mittelpunkts C des Kreises fällt; so ziehe man durch S den Durchmesser AB, und eine beliebige Chorde Mm. Alsdenn ist die Kraft in A zur Kraft in M im zusammengesetzten Verhältniß des Quadrats der Geschwindigkeit in A zu dem Quadrat der Geschwindigkeit in M und aus dem Verhältniß der Chorde Mm zu der Chorde oder dem Durchmesser AB. Auf die an den Punkt M gezogene Tangente MT sey aus S das Perpendickel SR gefällt; so verhält sich, weil SA auf der an den Punkt A gezogenen Tangente senkrecht ist, die Geschwindigkeit in A zu der Geschwindigkeit in M wie $SR:SA$ (§. 272.). Man ziehe den Durchmesser MN und die Chorde Mm; so ist der Winkel $MmN = R$ (III, 31.) $= MRS$, und $MNm = SMR$ (III, 32.), mithin $SR : SM = Mm : \left\{ \begin{matrix} MN \\ AB \end{matrix} \right\}$, $AB.SR = SM.Mm$. Folglich verhält sich $SR : SA = \left\{ \begin{matrix} AB.SR \\ SM.Mm \end{matrix} \right\} : AB.SA$, $\overline{SR}^2 : \overline{SA}^2 = \overline{SM}^2.\overline{Mm}^2 : \overline{AB}^2.\overline{SA}^2$, und $\overline{SR}^2.Mm : \overline{SA}^2.AB = \overline{SM}^2.\overline{Mm}^3 : \overline{AB}^3.\overline{SA}^2$. Mithin ist die Centripetalkraft umgekehrt im zusammengesetzten Verhältniß der Quadrate der Abstände des Körpers vom Mittelpunkt der Kraft und der Würfel der durch eben diesen Punkt gehenden Chorden des Kreises *). Wenn der Mittelpunkt der Kraft auf den Umfang dieses Kreises in B fällt; so verhält sich die Kraft in A zur Kraft in $M = \overline{BM}^5 : \overline{AB}^5$, oder die Centripetalkraft ist umgekehrt der fünften Potenz des Radius Vector proportional.

§. 277. Ein Körper beschreibe um den Brennpunkt S (Fig. 108.) als Mittelpunkt der Kräfte eine Ellipse, deren große und kleine Axe AP und DE seyen. Man ziehe an einen beliebigen von den Scheiteln A, P verschiedenen Punkt M der Ellipse eine Tangente RT, den Durchmesser MN an den Berührungspunkt, und den Durchmesser ab mit der Tangente RT parallel, welcher der zugeordnete Durchmesser von MN seyn wird (Kegelschn. II, 16.). Man beschreibe einen Kreis, welcher die gerade Linie RT in dem Punkt M berühre und auf dem wo nöthig verlängerten Durchmesser MN das Stük Mm dem Parameter des Durchmessers MN gleich abschneide; so wird dieser der Krümmungskreis der Ellipse an dem Punkt M seyn (Kegelschn. II, 36. Zus. 1.). Ferner sey auf der großen Axe AP von ihrem Scheitel P aus das Stück PL dem Parameter dieser Axe gleich abgeschnitten, und über PL als Durchmesser ein Kreis beschrieben. Da dieser der Krümmungskreis der Ellipse

*) Newt. Princ. L. I, prop. VII, probl. II.

an dem Scheitel P ist (Kegelschn. II, 35. Zus. 1.); so wird, wenn man die Chorde MK des ersteren Krümmungskreises durch den Brennpunkt S zieht, aus eben diesem Brennpunkt das Perpendickel SR auf die Tangente RT fällt, und die Geschwindigkeiten in P und M mit c und v bezeichnet, die Centripetalkraft in P zu der Centripetalkraft in M sich verhalten wie $c^2.Mk : v^2.PL$ (§. 276. n. 6.). Es begegne der Durchmesser ab dem wo nöthig über S hinaus verlängerten Radius Vector Ms in H, und der aus M durch den anderen Brennpunkt F gezogenen MF in J. Noch ziehe man SQ mit ab oder RT parallel, Mn auf ab senkrecht, und die Chorde Km. Da $SC = CF$; so ist $QJ = JF$. Und weil $MSQ = RMS$, $SQM = TMQ$ (I, 29.) und $RMS = TMF$ (Kegelschn. II, 12. Zus. 1.); so ist $SM = MQ$, $HM = MJ$, mithin $2MH = 2MJ = 2MQ + 2QJ = MQ + MQ + QF = SM + MF = AP = 2AC$, $MH = AC$. Weil ferner der Winkel $CHM = SMR = MmK$ (III, 32.); so verhält sich $\left.\begin{matrix} MH \\ AC \end{matrix}\right\} : CM = Mm : MK$, oder $AP : MN = Mm : MK$,

und es ist $AP.MK = MN.Mm = \overline{ab}^2$, weil $NM : ab = ab : Mm$ (Kegelschn. II. Erkl. 9). Nun ist $AC : Mn = Ca : CD$, weil $Ca.Mn = AC.CD$ (Kegelschn. II, 22. Zus.)

$$= ab : DE$$

$$\left.\begin{matrix} \overline{AC}^2 \\ \overline{MH}^2 \end{matrix}\right\} : \overline{Mn}^2 = \overline{ab}^2 \quad \overline{DE}^2$$

$$= AP.MK : AP.PL, \text{ weil } AP : DE = DE : PL,$$

oder $\overline{SM}^2 : \overline{SR}^2 = MK \quad PL$, weil $MH \quad Mn = SM : SR$.

Aber $\overline{SR}^2 : \overline{SP}^2 = c^2 \quad v^2$ (§. 272.);

folglich verhält sich $\overline{SM}^2 : \overline{SP}^2 = c^2.MK : v^2.PL$, und daher ist die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt S der Kräfte proportional *). Demnach gilt das, was in dem 274sten §. von den zwey Endpunkten der großen Axe bewiesen worden ist, auch von allen übrigen Punkten der Ellipse.

Auf ähnliche Art kann gezeigt werden, daß, wenn ein Körper eine Parabel oder eine Hyperbel beschreibt, und der Brennpunkt der Parabel oder der auf der holen Seite der Hyperbel liegende Brennpunkt der Mittelpunkt der Kräfte ist, die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat des Radius Vector proportional ist. Wenn aber der auf der erhabenen Seite der Hyperbel liegende Brennpunkt der Mittelpunkt der Kräfte ist, so verwandelt sich die Centripetalkraft in eine Centrifugalkraft **).

*) Newt. princ. L. I. prop. XI, probl. VI.

**) Newt. princ. L. I. prop. XII, XIII.

§. 278. Wenn ein Körper A durch eine gegen einen gegebenen Punkt S (Fig. 109.) gerichtete Kraft genöthigt wird, eine krumme Linie AMm zu beschreiben, und ein anderer Körper B in der geraden Linie BS durch ebendiese Kraft getrieben gegen den Mittelpunkt S der Kraft fällt; so wird, wenn der letztere durch den freyen Fall von der Höhe BN in dem Punkt N eine Geschwindigkeit erlangt hat, welche der Geschwindigkeit des in der krummen Linie sich bewegenden Körpers an dem eben so weit, als N, von S entfernten Punkt M gleich ist, auch in allen übrigen gleichweit von S entfernten Punkten der geraden Linie BS und der krummen Linie AMm die Geschwindigkeit von B der Geschwindigkeit von A gleich seyn *).

Man beschreibe aus S als Mittelpunkt mit den Halbmessern SN, Sn die Kreisbogen NM, nm. Der erstere wird, weil $SM = SN$, durch den Punkt M gehen, der letztere begegne der krummen Linie in m und dem Halbmesser SM in p. Ferner ziehe man die Tangente Mt an den Punkt M der krummen Linie, und die Tangente pt an den Punkt p des Kreisbogens mn, welche der Tangente Mt in t begegne, vollende das Parallelogramm $Mptq$, und ziehe pr auf Mt senkrecht. Die Bewegung von A an dem Punkt M zerfällt also in die zwey Bewegungen Mq und Mp, und weil vermöge der Voraussetzung die Geschwindigkeiten von A und B an den Punkten M N einander gleich sind; so verhält sich die Zeit der Bewegung von A durch Mt zu der Zeit der Bewegung von B durch Nn wie $Mt : Nn = Mt : Mp$. Die nach der Richtung Mp wirkende Centripetalkraft zerfällt in die Seitenkräfte Mr und rp, von welchen die erstere nach der Richtung Mt der Bewegung von A wirkende die Geschwindigkeit von A vergrößert, die letztere auf Mt senkrechte keinen Einfluß auf die Geschwindigkeit von A hat, sondern nur den Körper A von seinem geradlinigten Weg ablenkt, und ihn eine krumme Linie beschreiben macht. Die in gleichen Zeiten durch die Centripetalkraft und durch die Kraft Mr erzeugte Geschwindigkeiten werden sich also zu einander verhalten wie $Mp : Mr$. Da aber die Zeiten der Bewegungen ungleich sind; so wird der Zuwachs der Geschwindigkeit von N zu dem Zuwachs der Geschwindigkeit von M im zusammengesetzten Verhältniß aus den Kräften und den Zeiten seyn. Mithin wird sich verhalten die Zunahme der Geschwindigkeit von B zu der Zunahme der Geschwindigkeit von A = $\overline{Mp}^2 : tM . Mr$. Es verhält sich aber (VI, 8.) $tM : Mp = Mp : Mr$; folglich ist $tM . Mr = \overline{Mp}^2$. Also erhalten die Bewegungen von B und A bey gleichen Annäherungen zu dem Mittelpunkt S der Kraft gleichen Zuwachs an Geschwindigkeit, und daher müssen die Geschwindigkeiten von B und A, wenn sie in den gleichen Entfernungen SN und SM einander gleich waren, auch in den gleichen Distanzen Sn und Sm einander gleich seyn. Ebenso kann gezeigt

*) Newt. princ. L. I. prop. XL.

werden, daß die Bewegungen der zwey Körper, wenn sie sich um gleich viel von dem Mittelpunkt der Kraft entfernen, gleiche Verzögerungen leiden.

Hieraus folgt nun auch, daß ein Körper A, welcher genöthigt wird, sich auf einer stetig krummen Linie AM als vorgeschriebenem Weg zu bewegen, und in irgend einem Punkt M seines Wegs diejenige Geschwindigkeit hat, welche ein frey von der Höhe BN fallender Körper B in N erreicht haben würde, in jedem andern Punkt m seines Wegs mit derjenigen Geschwindigkeit ankommen werde, welche der frey von der Höhe Bn fallende Körper in n erlangt haben würde. Denn nun vertritt der Widerstand des vorgeschriebenen Wegs die Stelle der Kraft rp, und die Geschwindigkeit des Körpers nach der Richtung der Tangente Mt wird durch die Krümmung des Wegs nicht geändert (§. 256.). Was also in dem 257sten §. von dem Fall auf einem vorgeschriebenen Weg bewiesen worden ist, wenn die Kraft constant ist, und nach parallelen Richtungen wirkt, gilt allgemein von jeder veränderlichen nach einem gegebenen Punkt hin wirkenden Kraft.

§. 279. Wenn die krumme Linie gegeben ist, welcher ein Körper A mit einer freyen Centralbewegung beschreibt, so kann man das Gesetz finden, nach welchem die aus dem Mittelpunkt der Kraft auf die Tangenten der krummen Linie gefällten Perpendikel, mithin auch die Geschwindigkeiten der Bewegung (§. 272.), von den an die Berührungspunkte gezogenen Radiis abhängen. Alsdenn wird die Bestimmung des Gesetzes der Centripetalkraft auf die Auflösung der Aufgabe zurückgeführt: aus dem Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit der geradlinigten Bewegung eines anderen Körpers B mit seinen Entfernungen von einem in dieser geraden Linie liegenden Punkt S sich verändert, das Gesetz der Kraft finden, welche den Körper gegen diesem Punkt hin treibt.

Die krumme Linie sey z. B. eine Ellipse $ADPE$ (Fig. 105.), und der Brennpunkt S der Mittelpunkt der Kraft. Man ziehe SR auf die Tangente RF senkrecht; so liegt, wie §. 274. gezeigt worden ist, der Punkt R auf dem Umfang eines über der großen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises. SR verlängert begegne diesem Kreis auf der andern Seite von S in r. Man nehme $rq = rS$, ziehe Fq, Cr und durch S die Parallele Sm mit FM, welche von der Fq in m geschnitten werde. Da $SC = CF$ und $Sr = rq$; so sind Cr und Fq einander parallel (VI, 2), und daher ist $Fq = 2Cr = AP = FQ$ (S. §. 274.). Und weil $QM = MS$; so ist MS mit Fq parallel, und $Sm = FM$, $SM = Fm$ (I. 34), mithin m ein Punkt ebendieser Ellipse, welche von der geraden Linie mr in m berührt wird, weil $Sm = mq$ und $Sr = rq$, also $Smr = rmq$ ist. Wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke RMS u. Smr verhält sich aber $SM : \begin{Bmatrix} Sm \\ MF \end{Bmatrix} = SR : Sr$

$$= \overline{SR}^2 : \begin{cases} SR \cdot Sr \\ PS \cdot SA \text{ (III, 35.)} \\ \overline{CD}^2 \text{ (Kegelschn. II, 2.);} \end{cases}$$

folglich verhält sich, wenn man den Radius Vector $SM = z$, die halbe große Axe $= a$, und die halbe kleine Axe $= b$ setzt

$$z : 2a - z = \overline{SR}^2 : b^2$$

Man setze die Geschwindigkeit in $P = c$, die Geschwindigkeit in $M = v$, und $SP = h$; so verhält sich

$$v : c = h : SR$$
$$v^2 : c^2 = h^2 : \overline{SR}^2.$$

Da nun $z : 2a - z = \overline{SR}^2 : b^2$

so ist $v^2 z : c^2 (2a - z) = h^2 : b^2$,

und $v^2 = \dfrac{c^2 h^2}{b^2} \cdot \dfrac{2a - z}{z}$.

Die Geschwindigkeit v verschwindet, wenn $z = 2a$ wird. Wenn man also den Radius Vector SM so über den Punkt M hinaus verlängert, daß $SB = 2a$ oder $=$ der großen Axe AP wird; so wird ein von dem Punkt B von der Ruhe an fallender Körper durch die Einwirkung der Centripetalkraft in dem Augenblick, da er in M auf dem Umfang der Ellipse ankommt, dieselbe Geschwindigkeit erlangt haben, welche der in der Ellipse sich bewegende Körper in M hat.

Man setze die den Distanzen $z + x$ und $z - x$ entsprechende Geschwindigkeiten beziehungsweise $= u$ und u'; so wird man haben

$$u^2 = \frac{c^2 h^2}{b^2} \cdot \frac{2a - (z + x)}{z + x},$$

$$u'^2 = \frac{c^2 h^2}{b^2} \cdot \frac{2a - (z - x)}{z - x};$$

und 1.) $v^2 - u^2 = \dfrac{2ac^2 h^2 x}{b^2 z (z + x)}$

2.) $u'^2 - v^2 = \dfrac{2ac^2 h^2 x}{b^2 z (z - x)}$.

Es ist aber das Quadrat der Geschwindigkeit, welche eine constante Kraft $2g$ während der Zeit erzeugt, in welcher der von ihr beschleunigte Körper den Weg s zurücklegt, $= 4gs$ (§. 234. n. 5.) und daher wächst, wenn die Kraft constant ist, das Quadrat der Geschwindigkeit dem Raum s proportional. Folglich muß, da (vermöge n. 3. und 4.) $v^2 - u^2 < u'^2 - v^2$ ist, die Centralkraft in der Distanz $z + x$ kleiner, als in der Distanz $z - x$, mithin die Centralkraft selbst beständig

$$> \text{als } \frac{v^2 - u^2}{2x} \text{ oder } > \frac{ac^2 h^2}{b^2 z (z + x)}$$

aber $<$ als $\dfrac{u'^2 - v^2}{2x}$ oder $< \dfrac{ac^2 h^2}{b^2 z (z - x)}$ seyn.

Da nun durch die Verminderung von x der Unterschied dieser zwey Ausdrücke kleiner gemacht werden kann, als jede gegebene Größe; so ist die Centripetalkraft $= \frac{ac^2h^2}{b^2z^2}$, und daher umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Brennpunkt der Ellipse proportional.

Eben so findet man, daß in der Hyperbel, wenn man ihre halbe Querаxe $= a$, die halbe zugeordnete Axe $= b$, und den Abstand eines ihrer Punkte von dem auf der holen Seite liegenden Brennpunkt $= z$ setzt, $z : 2a + z =$ Quadr. des Perp. aus dem Brennpunkt auf die Tangente: b^2, und

$$v^2 = \frac{c^2h^2}{b^2} \frac{2a+z}{z}$$

$$u^2 = \frac{c^2h^2}{b^2} \frac{2a+z+x}{z+x}$$

$$u'^2 = \frac{c^2h^2}{b^2} \frac{2a+z-x}{z-x},$$

mithin $\frac{v^2 - u^2}{2x} = \frac{ac^2h^2}{b^2z(z+x)}$

$$\frac{u'^2 - v^2}{2x} = \frac{ac^2h^2}{b^2z(z-x)},$$

woraus wiederum die Centripetalkraft $= \frac{ac^2h^2}{b^2z^2}$ folgt, welche demnach auch in der Hyperbel umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft proportional ist.

Endlich findet sich, wenn z den aus dem Brennpunkt der Parabel gezogenen Radius Vector, und h den Abstand des Brennpunkts von dem Scheitel der Axe, oder den vierten Theil ihres Parameters bezeichnet, $v^2 = \frac{c^2h}{z}$;

mithin $\frac{v^2 - u^2}{2x} = \frac{c^2h}{2z(z+x)}$

$$\frac{u'^2 - v^2}{2x} = \frac{c^2h}{2z(z-x)}$$

folglich ist die Centripetalkraft $= \frac{\frac{1}{2}c^2h}{z^2}$, und daher ist sie auch in der Parabel umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft proportional.

§. 280. Man bezeichne die der Distanz z entsprechende Centripetalkraft mit k; so wird k diejenige Geschwindigkeit seyn, welche diese Kraft als constant betrachtet in derselben Zeit erzeugen würde, in welcher der Körper mit seiner dem kleinsten Abstand von dem Mittelpunkt der Kraft entsprechenden Geschwindigkeit den Raum c

gleichförmig beschrieben haben würde. Ferner sey der halbe Parameter des Kegelschnitts $= l$; so wird man für die Ellipse und Hyperbel haben $a : b = b : l$ (Kegelschn. II, Erkl. 9. III, Erkl. 13.), mithin $al = b^2$. Für die Parabel ist $l = 2h$ (Kegelschn. I, Erkl. 6. und I, 1.). Vermöge des vorhergehenden §. ist nun, wenn der Brennpunkt der Mittelpunkt der Kraft ist,

1.) $k = \frac{ac^2h^2}{b^2z^2} = \frac{c^2h^2}{lz^2}$ für die Ellipse und Hyperbel.

2.) $k = \frac{\frac{1}{2}c^2h}{z^2}$ für die Parabel, welcher Ausdruck auch aus n. 1. folgt, wenn man, wie es in der Parabel seyn muß, $l = 2h$ setzt. Mithin ist allgemein für jeden Kegelschnitt $k = \frac{c^2h^2}{lz^2}$. Sodenn ist nach eben diesem §.

3.) $v^2 = \frac{c^2h^2(2a-z)}{b^2z}$ für die Ellipse

4.) $v^2 = \frac{c^2h^2(2a+z)}{b^2z}$ für die Hyperbel.

5.) $v^2 = \frac{c^2h}{z}$ für die Parabel.

Es ist aber $\frac{c^2h^2}{b^2z} = \frac{kz}{a}$ (n. 1.); folglich ist, wenn man diesen Ausdruck in n. 3. substituirt, $v^2 = \frac{k}{a}(2a-z)z$, woraus man erhält

6.) $2a = \frac{2kz^2}{2kz-v^2}$ für die Ellipse.

Eben so findet sich

7.) $2a = \frac{2kz^2}{v^2-2kz}$ für die Hyperbel.

Für die Parabel ist $2kz^2 = c\ h$ (n. 2.), und $v^2z = c^2h$ (n. 5); folglich $2kz^2 = v^2z$, und $2kz = v^2$.

So lange als $2kz > v^2$ ist, bleibt in n. 6. die große Axe $2a$ positiv. Wird $2kz = v^2$; so wird $2a = \infty$, und für $2kz < v^2$ wird $2a$ negativ. Der Ausdruck n. 6. kann also auch auf die Parabel und Hyperbel angewendet werden.

Aus n. 6. folgt $2a-z = \frac{v^2z}{2kz-v^2}$; mithin verhält sich $2a-z : z = v^2 : 2kz - v^2$, und daher ist in der Ellipse

8.) $2a-z > z$, wenn $\begin{cases} v^2 > 2kz-v^2, \\ v^2 > kz, \end{cases}$

9.)

9.) $2a-z < z$, wenn $\begin{cases} v^2 < 2kz - v^2 \\ v^2 < kz. \end{cases}$

10.) $2a-z = z$, wenn $v^2 = kz$.

Im letzteren Fall müßte der Radius Vector z an einen der Scheitel der kleinen Axe der Ellipse gehen, und, wenn zugleich die Richtung der Bewegung des Körpers auf dem Radius Vector z senkrecht wäre; so müßten die von einem der Endpunkte der kleinen Axe an die zwey Brennpunkte der Ellipse gezogenen geraden Linien auf einander fallen, oder die Ellipse in einen Kreis, dessen Halbmesser $= a$, übergehen.

Man setze den Winkel, welchen die Tangente der krummen Linie mit dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius Vector macht $= m$; so ist das aus dem Mittelpunkt der Kraft auf diese Tangente gefällte Perpendikel $= z \sin. m$, und es verhält sich (§. 272.)

$v : c = k : z \text{ Sin.}\, m$, mithin ist $c^2 k^2 = v^2 z^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2$, und vermöge n. 1.

$$k = \frac{a v^2 z^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2}{b^2 z^2} = \frac{a v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2}{b^2}.$$ Also verhält sich

11.) $k : a = v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2 : b^2$

Es werde eine andere Ellipse vermöge einer Centripetalkraft beschrieben, welche in der Distanz z der Kraft k gleich sey. In ebendieser Distanz sey auch die Geschwindigkeit v der Geschwindigkeit in der ersten Ellipse gleich, der Winkel des Radius Vector z mit der Tangente sey $= m'$; so ist die halbe große Axe wie in der ersteren $= a$, (§. 280. n. 6.). Sey die halbe kleine Axe $= b'$; so wird man haben $k' : a = v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m'}^2 : b'^2$, also $v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2 : v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m'}^2 = b^2 : b'^2$, oder

12.) $\text{Sin.}\, m : \text{Sin.}\, m' = b : b'$.

Demnach sind in diesem Fall die kleinen Axen den Sinus der Winkel m, m' oder den aus dem Mittelpunkt der Kraft auf die Tangenten gefällten Perpendikeln proportional. Ebendieser Satz gilt auch von der Hyperbel.

Da $b^2 = al$; so verhält sich nach n. 11. $\begin{matrix} k : a \\ kl : al \end{matrix}\Big\} = v^2 \text{Sin.}\,\overline{m}^2 : \Big\{\begin{matrix} b^2 \\ al \end{matrix}$.

Folglich ist $kl = v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2$, oder es verhält, wenn eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel um den Brennpunkt als Mittelpunkt der Kraft beschrieben wird,

13.) $k : v \text{ Sin.}\, m = v \text{ Sin.}\, m : l$, mithin auch $k : l = k^2 : v^2 \text{ Sin.}\,\overline{m}^2$.

Für den Kreis wird $m = 90^0$, und l wird dem Halbmesser des Kreises gleich, woraus $k = \frac{v^2}{l}$ folgt, wie man in dem 273sten §. gefunden hat.

§. 281. Wenn die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt S (Fig. 110.) der Kraft proportional, ihre Größe für eine gegebene Entfernung SH gegeben ist, und einem Körper in einem gegebenen Punkt A eine gegebene Geschwindigkeit AC nach einer gegebenen auf AS schiefen Richtung mitgetheilt wird; so kann immer ein Kegelschnitt gefunden werden, welcher unter diesen Umständen von dem Körper beschrieben werden kann. Da nemlich sich verhält die Kraft in H : Kraft in $A = \overline{SA}^2 : \overline{SH}^2$; so ist die Größe der Centripetalkraft in dem gegebenen Punkt A gegeben. Man setze sie $= k$, die gegebene Distanz $SA = z$, und die anfängliche Geschwindigkeit $AC = v$; so wird der gesuchte Kegelschnitt eine Ellipse (den Kreis mit eingeschlossen), oder eine Parabel, oder eine Hyperbel seyn, je nachdem $v^2 \left.\begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix}\right\} 2kz$ ist. Im ersten und dritten Fall ist die große Axe der Ellipse nach §. 280. n. 6. und die Queraxe der Hyperbel nach n. 7. gegeben, und für alle drey Fälle erhält man den Parameter des Kegelschnitts nach n. 13. Ferner muß der Kegelschnitt die gerade Linie AC in dem gegebenen Punkt A berühren; mithin ist der Kegelschnitt gegeben, und er kann, wie hernach gezeigt werden soll, verzeichnet oder berechnet werden.

Es kann aber gezeigt werden, daß ein Körper, welcher von einem gegebenen Punkt nach einer gegebenen Richtung mit einer gegebenen Geschwindigkeit ausgeht, und gegen einen gegebenen Punkt hin durch eine Kraft getrieben wird, deren Größe in einer gegebenen Entfernung von dem Mittelpunkt der Kraft sammt dem Gesetz, nach welchem sie sich mit den Entfernungen von diesem Mittelpunkt verändert, gegeben ist, nur Eine krumme Linie beschreiben kann. Man nehme zuerst wie in §. 271. an, die Kraft wirke stoßweise; so wird, wenn man das Vieleck $ABCDEF$ (Fig. 103.) nach dem angeführten §. construirt hat, und sich nun, indem man von denselben gegebenen Größen ausgeht, ein zweytes Vieleck verzeichnet gedenkt, dieses zweyte Vieleck mit dem ersteren congruent seyn, weil vermöge der Bedingungen SA, SAT, AG, Aa in beyden Vielecken einander gleich seyn müßen, und daher das erste Dreyeck des zweyten Vielecks das Dreyeck ASB des ersten, ferner das zweyte Dreyeck jenes Vielecks das Dreyeck BSC u. s. w. decken muß. Man nehme die Zwischenzeiten der Stöße immer kleiner und kleiner; so werden, weil das Gesetz der Kraft in den zwey Vielecken dasselbe bleiben soll, beständig die in gleichen Zeiten beschriebene Vielecke einander decken, wie klein man auch jene Zwischenzeiten nehmen mag. Mithin werden auch die stetig krummen Linien, welchen sich die Vielecke bey der Verkleinerung der Zwischenzeiten beständig nähern, aufeinander fallen müßen, wenn man sie so aufeinander legt, daß der Anfangspunkt A der Bewegung, der Mittelpunkt S der Kräfte, und die gerade Linie AT, welche die anfängliche Richtung der Bewegung bezeichnet, auf einander zu liegen kommen.

Ein anderer Beweiß dieses Satzes gründet sich auf §. 278. Es seyen S und s (Fig. 110. und 111.) die Mittelpunkte der Kräfte, welche auf die Körper A und a wirken, und AC, ac seyen die anfänglichen Geschwindigkeiten. Wenn nun $SAC = sac$, $AC = ac$, und die auf A und a wirkende Kräfte in gleichen Abständen von S und s beständig einander gleich sind; so werden die Körper A und a einerley krumme Linie beschreiben. Es sey nemlich BA die Höhe, von welcher der Körper A fallen müßte, um in A durch die Wirkung der Centripetalkraft die Geschwindigkeit AC zu erlangen. Die krumme Linie FGQ sey so beschrieben, daß die Ordinaten BF, AG, NQ der Centripetalkraft in den Distanzen BS, AS, NS proportional seyen; so werden die Quadrate der durch den Fall von den Höhen BA, BN, erlangten Geschwindigkeiten den Flächenräumen $BFGK$, $BFQN$ proportional seyn (§. 249.). Eben so wird sich in Fig. 111. verhalten das Quadrat der Geschwindigkeit in a zu dem Quadrat der Geschwindigkeit in n, wie die Fläche $bfga$: Fläche $bfqn$. Da nun die Kräfte in gleichen Entfernungen von den Mittelpunkten S, s einander gleich sind (Voraussf.); so werden, wenn $BA = ba$, $BN = bn$ sind, die Flächenräume $BFGA$, $bfga$, und $BFNQ$, $bfnq$, mithin auch die durch den Fall von gleichen Höhen BA, ba, oder BN, bn erlangte Geschwindigkeiten einander gleich seyn. Aus S und s seyen mit gleichen Halbmessern SN, sn die Kreise NM, nm beschrieben, welche den krummen Linien AM, am in M und m begegnen, und NQ, nq seyen die den Punkten N, n entsprechende Ordinaten der krummen Linien FGQ, fgq. Nach §. 278. sind die Geschwindigkeiten in M und m den durch den freyen Fall von den Höhen BN, bn erlangten Geschwindigkeiten gleich, und es verhält sich

$$\left.\begin{matrix}\text{das Quadr. der Geschw. in } N\\ \text{oder d. Q. der Geschw. in } M\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Quadr. d. Geschw. in } A\\ \text{Quadr. d. Geschw. in } a\end{matrix}\right\} = BFQN : \left\{\begin{matrix}BFGA\\ bfga\end{matrix}\right\}$$

$$\text{Quadr. d. Geschw. in } a : \left\{\begin{matrix}\text{Quadr. d. Geschw. in } n\\ \text{Quadr. d. Geschw. in } m\end{matrix}\right\} = bfga : bfqn$$

$$\text{mithin Quadr. d. Geschw. in } M : \text{Quadr. d. Geschw. in } m = BFQN : bfqn.$$

Da nun die zwey Glieder des zweyten Verhältnißes einander gleich sind; so sind in gleichen Distanzen SM, sm die Geschwindigkeiten der krummlinigten Bewegungen einander gleich. Man ziehe an die Punkte M, m die Tangenten MT, mt und ziehe SP, SD, sp, sd auf MT, AC, mt, ac senkrecht; so verhält sich (§. 272.)

$$\text{Die Geschw. in } M : \text{Geschw. in } A = SD : SP$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Geschw. in } a\\ \text{Geschw. in } A\end{matrix}\right\} : \text{Geschw. in } m = sp \quad \left\{\begin{matrix}sd\\ SD\end{matrix}\right.;$$

folglich Geschw. in M : Geschw. in $m = sp : SP$.

Die Geschwindigkeiten in M und m sind aber einander gleich; folglich muß $sp = SP$, und $smt = SMT$ seyn.

Demnach ist noch der rein geometrische Satz zu beweisen, daß, wenn $SA = sa$, $SAC = sac$, und auch an jeden anderen gleich weit von S und s entfernten Punkten M, m der krummen Linien AM, am die Winkel SMT, smt, oder die Perpendickel SP, sp einander gleich sind, auch die Winkel ASM, asm einander gleich seyen. Man nehme auf der SA einen Punkt E nach Belieben, mache $se = SE$, und beschreibe aus S und s als Mittelpunkten mit den Halbmessern $\left\{ {SE \atop se} \right\}$ die Kreisbogen EL, el, welche den geraden Linien SM, sm in L und l begegnen. An die Punkte L und l ziehe man die Tangenten LK, lk und verlängere sie bis an die wo nöthig verlängerte Tangenten MT, mt nach O und o. Man denke sich die krummen Linie $\left\{ {AM \atop am} \right\}$ durch die Bewegung eines Punkts beschrieben, welcher auf der geraden Linie $\left\{ {SM \atop sm} \right\}$ sich bewegt, indem zugleich die $\left\{ {SM \atop sm} \right\}$ sich um $\left\{ {S \atop s} \right\}$ dreht; so wird man die Geschwindigkeit von $\left\{ {M \atop m} \right\}$ als aus den Geschwindigkeiten $\left\{ {ML \atop ml} \right\}$ und $\left\{ {LO \atop lo} \right\}$ zusammengesetzt betrachten können, und es werden sich die Geschwindigkeiten nach den Richtungen MT, MS und LK verhalten wie MO, ML und LO. Da nun in gleichen Distanzen SM, sm beständig $SMT = smt$ ist, und man $\left\{ {se \atop sl} \right\} = \left\{ {SE \atop SL} \right\}$ genommen hat; so sind die Dreyecke MLO und mlo einander gleich, so daß, wenn man die Geschwindigkeiten, mit welchen die Punkte L und l sich im Kreis bewegen, einander gleich nimmt, die Geschwindigkeiten von M und m nach den Richtungen ML und ml in den zwey krummen Linien beständig einander gleich sind. Mithin ändern sich die Distanzen SM, sm in gleichen Zeiten, während welcher die Punkte L und l gleiche Winkel oder Bogen beschreiben, um gleich viel (§. 238.), und da in den Punkten A und a die SA der sa gleich war; so wird für $SM = sm$ auch $ASM = asm$ seyn Eben dieses gilt von allen übrigen Punkten der krummen Linien AM und am; folglich wird, wenn man die Figur asm auf die ASM so leg., daß as auf die AS und ad auf die AD zu liegen kommt, der Bogen am auf den Bogen AM fallen. Demnach kann ein Körper, welcher von einem gegebenen Punkt A nach einer gegebenen Richtung AD mit einer gegebenen Geschwindigkeit AG ausgeht, und gegen einen gegebenen Punkt S hin durch eine gegebene und nach einem gegebenen Gesetz von den Distanzen SA, SM abhängende Kraft getrieben wird, nur

Eine krumme Linie beschreiben, und wenn man eine krumme Linie gefunden hat, welche ein Körper unter diesen Bedingungen beschreiben kann; so muß er diese krumme Linie beschreiben.

§. 282. Die Centripetalkraft sey umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt S (Fig. 112. 113. 114.) proportional, und ein Körper gehe von dem gegebenen Punkt M nach der gegebenen Richtung MT mit der gegebenen Geschwindigkeit $\left\{\begin{matrix} MV \\ v \end{matrix}\right\}$ aus. In der gegebenen Distanz $\left\{\begin{matrix} SM \\ z \end{matrix}\right\}$ sey die Centripetalkraft $= \left\{\begin{matrix} MG \\ k \end{matrix}\right\}$, d. h. es sey MG die Geschwindigkeit, welche die Centripetalkraft, wenn sie mit derjenigen Stärke, welche sie in M hat, fortwirkte, in derselben Zeit erzeugen würde, in welcher der Körper mit seiner anfänglichen Geschwindigkeit den Weg MV gleichförmig zurücklegen würde. Man sucht die krumme Linie, welche der Körper beschreibt.

Es sey 1.) $v < 2kz$ oder $\overline{MV}^2 < 2GM.MS$ (Fig. 112.). Auf dem Radius Vector SM errichte man in seinem Endpunkt M das Perpendickel $ML = MV$, ziehe SL, und LE auf SL in L senkrecht, welche der verlängerten SM in E begegnen wird; so ist $EM.MS = \overline{ML}^2 = \overline{MV}^2 < 2GM.MS$ (Vorauss.), mithin $ME < 2GM$. Man trage von E gegen S die $EK = 2GM$; so fällt K auf die Verlängerung von EM. Man ziehe KL, und LQ auf KL in L senkrecht, welche die verlängerte SM in Q schneiden wird.

Da $SM \quad ML = ML \quad ME$
und $ML : MQ = MK : ML$

so ist $SM : MQ = MK : ME$

$$SM : SQ = MK \left\{\begin{matrix} EK \\ 2GM \end{matrix}\right.$$
$$= SM.MK : 2GM.MS$$
$$= 2GM.MS - EM.MS : 2GM.MS$$
$$= 2GM.MS - \overline{ML}^2 : 2GM.MS$$

oder $z : SQ = 2kz - v^2 \quad 2kz$

mithin $SQ = \frac{2kz^2}{2kz - v^2} =$ der großen Axe der Ellipse (§. 280. n. 6). Man fälle von Q das Perpendickel QR auf die wo nöthig verlängerte TM, verlängere es so nach F, daß $RF = RQ$, ziehe durch S und F die gerade Linie SF, halbire SF in C, nehme $CP = CA = \frac{1}{2} SQ$, und beschreibe um die Brennpunkte S, F eine Ellipse, deren große Axe $= AP$ oder $= SQ$ sey.

Da $FR = RQ$ und $MRF = R$; so ist $FM = MQ$, und $SM + MF = SM + MQ = SQ$, mithin M ein Punkt der Ellipse. Und weil $QMR = RMF$; so berührt die gerade Linie MT die Ellipse in M (Kegelschn. II, 12.). Die Centripetalkraft ist, weil der Brennpunkt S der Mittelpunkt der Kraft ist, umgekehrt dem Quadrat der Distanz proportional (§. 279.). Um noch zu zeigen, daß in der gegebenen Distanz SM die Centripetalkraft $= GM$ sey, ziehe man die halbe kleine Axe CD der Ellipse, und fälle das Perpendickel Sr auf die Tangente MT; so verhält sich, wie §. 279 gezeigt worden ist,

$$SM : \left\{\begin{matrix} FM \\ MQ \end{matrix}\right\} = \overline{Sr}^2 : \overline{CD}^2$$

mithin auch $\overline{SM}^2 : SM.\, MQ = \overline{Sr}^2 \quad \overline{CD}^2$

und es ist $\overline{CD}^2 . \overline{SM}^2 = SM.\, MQ.\, \overline{Sr}^2$. Folglich verhält sich, wenn man die §. 279. gebrauchte Benennungen beybehält

$$b^2 z^2 : c^2 h^2 = SM.\, MQ.\, \overline{Sr}^2 \quad \left\{\begin{matrix} c^2 k^2 \\ v^2 . \overline{Sr}^2 \text{ *)} \end{matrix}\right.$$
$$= SM.\, MQ : v^2.$$

Aber vermöge des oben bewiesenen verhält sich

$$\left.\begin{matrix} SQ : 2GM \\ 2AC : 2GM \\ AC : GM \end{matrix}\right\} = SM : MK$$

$$= SM.\, MQ : \left\{\begin{matrix} QM.\, MK \\ ML^2 \\ v^2 \end{matrix}\right\};$$

folglich ist $b^2 z^2 : c^2 h^2 = \left(\frac{AC}{a}\right) : GM$. Mithin ist nach §. 280. n. 1. die Centripetalkraft an dem Punkt $M = GM$, und daher kann der Körper die gefundene Ellipse beschreiben. Vermöge §. 281. kann er aber keine andere krumme Linie beschreiben; folglich muß der Körper eben diese Ellipse beschreiben.

Es sey 2.) $v = 2kz$ (Fig. 113.), mithin $ME = 2GM$. Die Punkte M und K fallen jetzt zusammen, und die Bahn des Körpers ist eine Parabel. Man ziehe SR auf MT senkrecht, verlängere SR nach N so, daß $RN = SR$, ziehe MN, und mit dieser durch S die Parallele SO. Man fälle aus R das Perpendickel RP auf SO, und beschreibe um den Punkt S als Brennpunkt eine Parabel, deren Axe SO, und deren Parameter $= 4SP$ sey.

Man ziehe durch N die Parallele NO mit RP; so ist $OP = PS$, weil $NR = RS$ (Constr.), und daher NO die Directrix dieser Parabel. Weil ferner $RN = RS$ und $NRM = R$; so ist $SM = MN$, und die Parabel geht durch den Punkt M. Endlich weil $SMR = RMN$; so berührt MT die Parabel in M (Kegelschn. I, 7.).

Da der Brennpunkt S der Mittelpunkt der Kraft ist; so ist (§. 279.) die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional. Daß diese Kraft in dem Punkt M

*) Weil $c : v = Sr : \left(\frac{SP}{h}\right)$ (§. 272.)

der Parabel $= MG$ sey, kann so gezeigt werden. Es ist $\left.\begin{matrix} MD^2 \\ v^2 \end{matrix}\right\}$

$SM.ME = 2SM.GM$, weil $ME = 2GM$ (Vorauss.),

und $c^2 \; v^2 = z : h$ (§. 280. n. 5.)

$$\begin{aligned} &= z^2 : hz \\ c^2 : z^2 &= v^2 : hz \\ &= 2GM.z : hz \\ &= 2GM : h \\ \tfrac{1}{2} c^2 : z^2 &= GM : h. \end{aligned}$$

Folglich ist nach §. 280. n. 2. die Centripetalkraft in dem Punkt M der Parabel $= GM$.

Es sey 3.) $v^2 > 2kz$, oder $\overline{MV}^2 > 2GM.MS$ (Fig. 114.). Man bestimme ME wie in n. 1. und nehme auf der ES von E an gegen S die $EK = 2GM$. Da $EM.MS = \overline{ML}^2 = \overline{MV}^2 > 2GM.MS$ (Vorauss.); so ist $EM > 2GM$, und der Punkt K fällt zwischen E und M. Man ziehe KL, und die LQ auf LK in L senkrecht, welche der über M hinaus verlängerten KM in Q begegnen wird. Von Q fälle man das Perpendickel QR auf MT und verlängere es so nach F, daß $RF = RQ$. Man ziehe SF, halbire diese in C, nehme $CP = CA = \frac{1}{2} SQ$, und beschreibe mit der Queraxe AP oder SQ um den Punkt S als Brennpunkt eine Hyperbel, so daß F der Brennpunkt der entgegengesetzten Hyperbel sey.

Wegen der gleichen Dreyecke QMR und FMR ist $MF = MQ = MS + SQ$; folglich $MF - MS = SQ = AP$, und daher M ein Punkt dieser Hyperbel. Und weil $QMR = FMT$; so berührt die gerade Linie MT die Hyperbel in M (Kegelschn. III, 39.). Endlich ist die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional (§. 279.), und man beweißt wie in n. 1. daß in der Entfernung SM die Centripetalkraft $= GM$ sey.

Wenn der Winkel SMT ein rechter (Fig. 115.) und $v^2 < 2kz$, oder $\overline{MV}^2 < 2GM.MS$ ist; so beschreibt der Körper eine Ellipse, welche den Punkt M zu einem ihrer Scheitel der großen Axe hat, und zwar ist der Punkt M der von dem Brennpunkt S entfernteste oder ihm am nächsten liegende Scheitel, je nachdem v^2 kleiner oder größer als kz ist. Es sey $v^2 < kz$, oder $\overline{MV}^2 < GM.MS$, und ME sey wie in n. 1. die dritte geometrische Proportionallinie zu SM und MV; so ist $EM.MS = \overline{MV}^2 < GM.MS$, und $EM < GM$. Man nehme wie in n. 1. $EK = 2GM$. Da $2EM < \left\{\begin{matrix} 2GM \\ EK \end{matrix}\right\} < EM + MK$; so ist $EM < MK$, und MQ wird kleiner als MS. Und da vermöge n. 1. die große Axe der Ellipse $= SQ$ ist; so wird, wenn man $MF = MQ$ macht, der Punkt F der andere Brennpunkt dieser Ellipse seyn, welche nun beschrieben werden kann. Es sey m der der andere

Scheitelpunkt der großen Axe; also $Sm = MQ$. Ich behaupte, daß der Körper, wenn er von dem Punkt m nach der auf Sm senkrechten Richtung mt mit derjenigen Geschwindigkeit ausgegangen wäre, welche er bey seiner Bewegung in der Ellipse an eben diesem Punkt m erhalten hat, um den Brennpunkt S als Mittelpunkt der Kraft dieselbe Ellipse beschrieben haben würde. Es sey nemlich mv die Geschwindigkeit des Körpers in m, und mg sey die Centripetalkraft an eben diesem Punkt; so verhält sich (S. d. Bew. von n. 1.)

$$\begin{aligned} SM : SQ &= MK : EK \\ &= QM.MK : QM.EK \\ &= \overline{MV}^2 \; \left(\frac{QM.\ EK}{2Sm.\ MG}\right. \end{aligned}$$

ferner $\overline{Sm}^2 \;\; \overline{SM}^2 = \left(\begin{matrix} MG : mg \\ 2MG : 2mg \end{matrix}\right)$ vermöge des Gesetzes der Centrip. Kraft

und $\overline{SM}^2 : \overline{Sm}^2 = \overline{mv}^2 : \overline{MV}^2$ (§. 272.);

folglich $SM : SQ = \overline{mv}^2 \;\; 2gm.Sm$,

und $2SM \;\; SQ = \overline{mv}^2 : gm.Sm$.

Da nun $SM < SQ$; so ist $\overline{mv}^2 < 2gm.Sm$, und es kann mit der Geschwindigkeit mv eine Ellipse um den Mittelpunkt S der Kraft als Brennpunkt beschrieben werden (n. 1.). Und weil $SM > MQ$; so ist $2SM > SQ$, mithin $mv^2 > gm.Sm$. Man mache dieselbe Construktion wie in n. 1.; so wird $em > mk$, und $mq > Sm$ werden. (S. den vorhergeh. Bew.). Es verhält sich

$$\begin{aligned} \text{aber } \overline{Sm}^2 : \overline{SM}^2 &= \overline{MV}^2 : \overline{mv}^2 \\ &= QM.MK : Sm.me \\ &= Sm.MK : Sm.me \\ &= MK : me \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \overline{Sm}^2 \;\; \overline{SM}^2 &= GM : gm \\ &= 2HM : 2gm \\ &= EK : ek \end{aligned}$$

folglich auch $\overline{Sm}^2 : SM^2 = \left(\frac{EK - MK}{ME}\right) : \left(\frac{ek - me}{mk}\right)$

oder $\overline{MV}^2 \;\; \overline{mv}^2 = ME.mq : \left(\frac{mk.\ mq}{\overline{mv}^2}\right)$.

Daher ist $\left.\frac{\overline{MV}^2}{SM.\ ME}\right) = ME.mq$

und $SM = mq$.

Aber $MQ = Sm$ Constr.

folglich $\left.\begin{matrix} MQ \\ Mm \end{matrix}\right) = Sq$.

Wenn also der Winkel SMT ein rechter ist; so beschreibt der Körper eine Ellipse, und fängt seine Bewegung in dem von dem Mittelpunkt der Kraft entferntesten Scheitel an, so lange als $v^2 < kz$ ist. Wird $v^2 < kz$; so ist noch immer $v^2 < 2kz$, aber es wird jetzt $EM.MS = \overline{MV}^2 = GM.MS$ (Vorausf.), mithin $FM = GM$, $2EM = \left(\frac{2GM}{EK}\right)$, und $MQ.MS$. Folglich geht die Ellipse in einen Kreis über, dessen Mittelpunkt S ist. Wird $v^2 > kz$; so beschreibt der Körper wiederum eine Ellipse, so lange als $v^2 < 2kz$ bleibt, aber die Bewegung nimmt jetzt in dem am nächsten bey dem Mittelpunkt der Kraft liegenden Scheitel ihren Anfang.

Hieraus folgt nun, daß, wenn die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist, der Körper um den Mittelpunkt der Kraft als Brennpunkt einen Kegelschnitt beschreibt, und der Kegelschnitt

eine Ellipse ist, wenn $v^2 < kz$
eine Parabel wenn $v^2 = kz$
eine Hyperbel wenn $v^2 > kz$,

und daß der Kegelschnitt in einen Kreis übergeht, wenn $v^2 = kz$, und zugleich der Winkel, welchen die anfängliche Richtung der Bewegung mit dem Radius Vector macht, ein rechter ist.

§. 283. Es ist jetzt noch die Umlaufszeit eines in einer Ellipse sich bewegenden Körpers zu bestimmen, wenn der Mittelpunkt der Kraft in einen ihrer Brennpunkte fällt; folglich die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist (§. 277.).

Man ziehe an einem der Scheitel der großen Axe, z. B. an den am nächsten bey dem Mittelpunkt S (Fig. 105.) der Kraft liegenden Scheitel P die Tangente PN, welche auf AP senkrecht seyn wird, setze $SP = h$, die Geschwindigkeit in $P = c$, die Zeit, in welcher der Sector PSM beschrieben wird, $= t'$, die halbe große Axe $= a$, und ihren halben Parameter $= l$. Man nehme $PN = ct'$, und ziehe SN. Da ct' der Weg ist, welchen der Körper mit seiner dem Punkt P entsprechenden Geschwindigkeit in der Zeit t' gleichförmig zurückgelegt haben würde; so wird der Sector PSM dem Dreyeck PSN gleich seyn (§. 272.). Folglich ist 2 Sector $PSM = SP.PN = cht'$. Es ist aber in der Distanz z die Centripetalkraft $= \frac{c^2h^2}{lz^2}$ (§. 280. n. 1.); mithin ist in der Distanz $\left(\frac{SP}{h}\right)$ die Centripetalkraft $k' = \frac{c^2}{l}$, und $k'l = c^2$. Ferner verhält sich

$$\left(\begin{matrix}\text{die Umlaufszeit}\\ \text{oder } t\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}\text{Zeit von } P \text{ bis } M\\ t'\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}\text{Fläche der Ellipse}\\ ab\pi\ {}^{*)}\end{matrix}\right) : \begin{matrix}\text{Sect. } PSM\\ \frac{1}{2}cht'\end{matrix}$$
$$= 2ab\pi \quad cht';$$
$$\text{also } t^2 : t'^2 = 4a^2b^2\pi^2 \quad c^2h^2t'^2$$

*) Kegelschn. II, 38.

$$= 4a^3 l\pi^2 \text{ *)} \quad k' l^2 h^2 t'^2$$

Daher ist 1.) $t^2 = \frac{4a^3\pi^2}{h^2k'}$.

Man setze die der Distanz $\left(\frac{SM}{z}\right)$ entsprechende Centripetalkraft $= k$; so verhält sich $k : k' = h^2 : z^2$. Folglich ist $h^2k' = kz^2$, und $t^2 = \frac{4a^3\pi^2}{kz^2}$. Nun hängt die große Axe der Ellipse allein von der anfänglichen Geschwindigkeit v des Körpers und seiner anfänglichen Distanz z von dem Mittelpunkt der Kraft (§. 280. n. 6. oder §. 282 n. 1.) ab, die kleine Axe aber ist dem Sinus des Winkels SMT oder SMR proportional (§. 280. n. 12.); folglich ist die Umlaufszeit von der kleinen Axe, mithin auch von der Excentricität der Ellipse, unabhängig.

Ein zweyter Körper beschreibe um denselben Mittelpunkt der Kräfte in der Zeit T eine Ellipse, deren halbe große Axe $= A$ sey. Der Abstand ihres dem Mittelpunkt der Kräfte zunächst liegenden Scheitels von diesem Punkt sey $= H$, und die Centripetalkraft in dieser Distanz sey $= K'$; so wird man vermöge n. 1. haben

$$T^2 = \frac{4A^3\pi^2}{H^2K'}, \text{ und es wird sich verhalten}$$

2.) $T^2 \quad t^2 = \frac{A^3}{H^2K'} : \frac{a^3}{h^2k'}$

Vermöge des dritten keplerischen Gesetzes (§. 180.) verhält sich, wenn A und a die halbe große Axen zweyer Planetenbahnen sind,

$T^2 \quad t^2 = A^3 : a^3$;

folglich muß $H^2K' = h^2k'$, oder

3.) $K' : k = h^2 : H^2$ seyn.

Dasselbe Gesetz der Centripetalkraft, welches für alle Punkte einer elliptischen Planetenbahn gilt (§. 279.), erstreckt sich also auch von einer Planetenbahn auf die andere.

Umgekehrt, wenn die Centripetalkraft umgekehrt den Quadraten der Distanzen proportional ist; so verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Würfel der halben großen Axen oder der mittleren Entfernungen. Denn nun ist $K' : k' = h^2 : H^2$, $k'h^2 = K'H^2$; folglich nach n. 2.

4.) $T^2 : t^2 = A^3 : a^3$.

Da der Inhalt des Sectors $PSM = \frac{1}{2} cht'$; so ist die Zeit t', in welcher dieser Sector beschrieben wird, $= \frac{2 \text{Sect.} PSM}{ch}$. Es ist aber für jeden Kegelschnitt, wie im Anfang dieses §. gezeigt worden ist, und vermöge §. 280. n. 1. und 2. $k'l = c^2$; folglich ist

*) Weil $a : b = b : l$ (Kegelschn. II. Erkl. 9.)

5.) $t = \frac{2\,\text{Sec.}\,PSM}{\sqrt{l}.\sqrt{k'h^2}}$.

Wenn nun die Centripetalkraft allgemein im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung ist; so ist, wenn die der Distanz z entsprechende Kraft mit k bezeichnet wird, $k' : k = z^2 : h^2$, und $kz^2 = k'h^2 =$ einer constanten Größe. Mithin ist in diesem Fall

6.) Die Zeit t', in welchem ein gegebener Sector PSM eines Kegelschnitts beschrieben wird, im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der beschriebenen Fläche und aus dem umgekehrten der Quadratwurzeln aus den Parametern der Kegelschnitte.

Und wenn die Zeiten, in welchen die Sectoren beschrieben werden, direct den Flächenräumen und umgekehrt den Quadratwurzeln aus den Parametern proportional sind; so muß

7.) $k'h^2 =$ einer constanten Größe C, $k' = \frac{C}{h^2}$, mithin die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional seyn.

§. 284. Aus dem zweyten keplerischen Gesetz (§. 179.) und aus dem §. 279. bewiesenen Satz folgt also, daß der Mittelpunkt der Sonne der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Kräfte ist, welche die Planeten nöthigen, ihre elliptische Bahnen um die Sonne zu beschreiben. Das erste keplerische Gesetz (§. 178.) zeigt, daß die Centripetalkraft in den verschiedenen Punkten derselben Planetenbahn umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt der Sonne proportional ist (§. 274. und 277.), und aus dem dritten Gesetz (§. 180.) folgt, daß die Centripetalkraft auch wenn man von einer Planetenbahn zu der andern übergeht, im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung des Planeten von dem Mittelpunkt der Sonne ist (§. 275. und 283.). Ferner hat man bey der Bestimmung der Cometenbahnen in dem vierten Capitel des zweyten Buchs die Voraussetzung gemacht, daß auch hier die von dem Mittelpunkt der Sonne ausgehende Radii Vectores den Zeiten proportionale Flächenräume abschneiden, und die Bahnen der Cometen Parabeln oder sehr ablange Ellipsen seyen, so daß die Sonne sich in dem Brennpunkt der Parabel oder in einem der Brennpunkte der Ellipse befindet, und diese

Voraussetzung stimmt mit den Beobachtungen überein. Folglich muß der Mittelpunkt der Sonne auch der Mittelpunkt der auf die Cometen wirkenden Centripetalkräfte (§. 272.), und in den verschiedenen Punkten derselben Cometenbahn die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung des Cometen von der Sonne proportional seyn (§. 279. und 277.). Endlich hat man bey der Bestimmung der Zeit, in welcher ein gegebener Sector einer Cometenbahn beschrieben wird, angenommen, daß diese Zeit direct dem Inhalt des Sectors und umgekehrt der Quadratwurzel aus dem Parameter der Bahn proportional sey (§. 201.); und diese Voraussetzung mit den Beobachtungen übereinstimmend gefunden; folglich ist auch in verschiedenen Cometenbahnen die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional (§. 283. n. 7.).

Mithin würden alle Planeten und Cometen, wenn man sie anfänglich in Ruhe und in gleichen Entfernungen von der Sonne annimmt, sich selbst überlassen in gleichen Zeiten von gleichen Höhen gegen den Mittelpunkt der Sonne hin fallen, und die Abweichungen der Bewegungen dieser Himmelskörper von einer geraden Linie sind Wirkungen einer und derselben Kraft, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Sonne geht, und welche umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von diesem Mittelpunkt der Kraft proportional ist *).

Umgekehrt, wenn alle Planeten und Cometen gegen die Sonne durch eine Kraft getrieben werden, welche den Quadraten ihrer Entfernungen von der Sonne umgekehrt proportional ist; so müßen die Flächenräume, welche die Radii Vectores desselben Planeten oder Cometen abschneiden, den Zeiten, in welchen sie beschrieben werden proportional seyn (§. 271.). Ferner müßen die Bahnen Kegelschnitte seyn (§. 282.), und, wenn sie Kreise oder Ellipsen sind, die Quadrate der Umlaufszeiten den Würfeln ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne proportional seyn (§. 283. n. 4.).

*) Princ. L. III. *Regula* I. Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ et veræ sint et earum phænomenis explicandis sufficiant. *Regula* II. Ideoque effectuum naturalium ejusdem generis eædem assignandæ sunt causæ, quatenus fieri potest.

Endlich müßen die Zeiten, in welchen verschiedene Sectoren verschiedener Planeten- oder Cometen-Bahnen beschrieben werden, direct den Flächenräumen und umgekehrt den Quadratwurzeln aus den Parametern der Bahnen proportional seyn (§. 283. n. 6.) Also folgen aus diesem Gesetz der Kraft die aus den Beobachtungen geschlossene keplerische Gesetze der Bewegungen der Planeten, und die Gesetze, nach welchen sich vermöge der Beobachtungen die Cometen um die Sonne bewegen. Es ist nicht wahrscheinlich, daß die Cometen wirklich Parabeln um die Sonne beschreiben, weil, wenn eine Parabel beschrieben werden soll, das Produkt aus der doppelten anfänglichen Entfernung des Cometen von der Sonne in die Geschwindigkeit, welche die Centripetalkraft mit ihrer dieser Entfernung entsprechenden Stärke in einer gegebenen Zeit erzeugen würde, genau dem Quadrat der geraden Linie gleich seyn müßte, welche der Comet mit seiner anfänglichen Geschwindigkeit in eben dieser Zeit würde beschrieben haben (§. 280. und 282. n. 2.). Aber die Bewegung in der Hyperbel ist wenigstens ebenso wahrscheinlich, als in der Ellipse, weil immer eine Hyperbel beschrieben wird, wenn jenes Produkt kleiner ist, als das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit (§. 280. n. 7. und 282. n. 3.), so wie eine Ellipse beschrieben wird, wenn jenes Produkt größer ist als das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit (§. 280. n. 6. und §. 282. n. 1.). Ein Comet, welcher eine Hyperbel beschreibt, wird aber nur einmal sichtbar seyn, und nach seiner Erscheinung sich über die Gränzen des Sonnensystems hinaus entfernen. Er wird sich neuen Sonnen nähern, und sich hierauf wieder von diesen entfernen können, und auf diese Art verschiedene in dem unermeßlichen Himmelsraum verbreitete Systeme durchwandern. Die Erscheinungen solcher Cometen müßen daher sehr selten seyn, und wir müßen meistens solche Cometen beobachten, welche in sich selbst zurükkehrende Bahnen beschreiben, und nach grössern oder kleineren Zwischenzeiten wieder in die Nähe der Sonne kommen.

§. 285. **Die Nebenplaneten** beschreiben um ihre

Hauptplaneten als Mittelpunkte sehr nahe kreisförmige Bahnen, und die Sectoren sind den Zeiten proportional, indem man von denjenigen Ungleichheiten ihrer Bewegungen abstrahirt, welche andere Perioden, als die ihrer Umlaufszeiten haben (II. Buch 5. Cap.). Folglich ist die auf sie wirkende Centripetalkraft gegen den Mittelpunkt ihrer Hauptplaneten gerichtet (§. 272.). Bey einigen ist die elliptische Gestalt der Bahnen merklich, und der Mittelpunkt des Hauptplaneten fällt in einen der Brennpunkte der Ellipse. Folglich muß bey diesen die Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkt des Hauptplaneten proportional seyn (§. 275.). Endlich verhalten die Quadrate der Umlaufszeiten aller derjenigen Nebenplaneten, deren Abstände von ihren Hauptplaneten man meßen konnte, wie die Würfel ihrer mittleren Entfernungen von dem Hauptplaneten, um welchen sie sich bewegen (§. 226. 229.), woraus wiederum folgt, daß die auf die Nebenplaneten wirkende Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung der Nebenplaneten von ihrem Hauptplaneten proportional sey (§. 275. u. 283. n 3.). Der Mond beschreibt im Mittel genommen um die Erde eine Ellipse, in deren einen Brennpunkt der Mittelpunkt der Erde fällt, und die von diesem Punkt ausgehende Radii Vectores schneiden den Zeiten proportionale Flächenräume ab (§ 218.). Mithin ist die Erde der Mittelpunkt der auf den Mond wirkenden Centripetalkraft (§. 272.), und diese Kraft ist umgekehrt dem Quadrat der Entfernung des Monds von dem Mittelpunkt der Erde proportional (§. 277.). Da nun die Nebenplaneten mit ihren Hauptplaneten zugleich sich um die Sonne bewegen, und die relative Bewegung der ersteren um die letzteren sehr nahe ebenso erfolgt, als wenn die Hauptplaneten in Ruhe wären; so müßen auch die Nebenplaneten nahe durch dieselbe Kraft gegen die Sonne hin getrieben werden, welche auf ihre Hauptplaneten wirkt.

§. 286. Da die Kraft, welche den Mond gegen den Mittelpunkt der Erde hin treibt vermöge des vorhergehenden §. umgekehrt dem Quadrat seiner Entfernung von dem

Mittelpunkt der Erde proportional seyn muß; so muß diese Kraft an der Oberfläche der Erde in demselben Verhältniß größer seyn, als in der Gegend des Monds, in welchem das Quadrat des Abstands des Monds von der Erde grösser ist als das Quadrat des Erdhalbmessers, mithin nahe in dem Verhältniß von 3600 : 1, wenn man nach §. 63. den mittleren Abstand des Monds von der Erde in runder Zahl = 60 Erdhalbmessern setzt. Man setze den mittleren Abstand des Monds von der Erde $= a$, seine siderische Umlaufszeit in Minuten ausgedrückt $= t$ und das Verhältniß des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser wie $\pi : 1$; so wird die Geschwindigkeit k, welche die auf den Mond wirkende Centripetalkraft in einer Minute, wenn sie constant bliebe, erzeugen würde, $= \frac{4a\pi^2}{t^2}$ (§. 273. n. 2. oder §. 283. n. 1.), und die freye Fallhöhe des Monds in der ersten Minute $= \frac{2a\pi^2}{t^2}$ seyn. Es ist aber der Halbmesser des Erdäquators = 3271691 Tois. (§. 143.), und die mittlere Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator $= 57' 1''$ (§. 63.), mithin $a = \frac{3271691}{\text{Sin.}(57' 1'')}$ Tois., und die siderische Umlaufszeit des Monds ist $= 27$ T. 7 St. $43' 11'',5$ (§. 61.) = 39343,1918 Min.; folglich ist die freye Fallhöhe des Monds in der ersten Minute = 2,515677 Tois. = 15,094 pariser Fuß *). In der Nähe der Erdoberfläche würde diese Kraft, mithin auch die freye Fallhöhe in der ersten Minute 3600 mal größer, und in der ersten Sekunde 3600 mal kleiner als in der ersten Minute (§. 253. n. 1.), demnach = 15,094 par. Fuß seyn. Aber die freye Fallhöhe der Körper in der Nähe der Erdoberfläche beträgt in der ersten Sekunde 15,05138 par. Fuß unter dem Aequator und 15,13315 Fuß unter den Polen (§. 270.): folglich wird jene Kraft, durch welche der Mond in seiner Bahn erhalten wird, an der Erd-

*) Man erhält sehr nahe dieselbe Fallhöhe, wenn man den auf den Halbmesser 1 sich beziehenden sinus versus des von dem Mond in einer Minute beschriebenen Bogens, welcher $32'',94$ beträgt, oder auch den Ueberschuß der Secante dieses Bogens über den Halbmesser, mit dem mittleren Abstand des Monds von der Erde multiplicirt. Der Grund hievon ergiebt sich aus §. 273. pag. 464.

oberfläche der Schwere sehr nahe gleich, und daher ist sie dieselbe Kraft, welche wir die Schwere nennen (vermöge der ersten und zweyten Newtonschen Regel in der Note zu dem vorhergehenden §.). Denn wäre die Schwere von ihr verschieden; so würden die durch beyde Kräfte zugleich gegen die Erde getriebene Körper zweymal geschwinder fallen, und in einer Stunde einen Raum von 30 pariser Fuß beschreiben, welches der Erfahrung widerspricht.

Nun sind die Bewegungen der Planeten um die Sonne und der Nebenplaneten um ihre Hauptplaneten Erscheinungen von derselben Art, wie die Bewegung des Monds um die Erde, und sie hängen daher von ähnlichen Ursachen ab. Denn die Kräfte, von welchen jene Umlaufsbewegungen abhängen, sind gegen die Mittelpunkte der Sonne, des Jupiters, des Saturns und Uranus gerichtet, und nehmen mit der Entfernung der Planeten von der Sonne und der Nebenplaneten von ihren Hauptplaneten nach demselben Gesetz ab, nach welchem die Kraft der Schwere mit der Entfernung von der Erde abnimmt (§. 284. und §. 285.). Folglich sind alle Planeten gegen die Sonne, und alle Nebenplaneten gegen ihre Hauptplaneten schwer, und die ersteren würden gegen die Sonne, die letzteren gegen ihre Hauptplaneten, wenn sie sich anfänglich in gleichen Entfernungen von denselben befänden, in gleichen Zeiten von gleichen Höhen fallen, wie man es bey dem freyen Fall der Körper beobachtet (§. 270.). Eben dieses Gesetz der Kraft findet auch zwischen den Cometen und der Sonne statt (§. 284.). Da nun diese Kräfte ähnliche Wirkungen wie die Schwere hervorbringen; so müßen sie wie die Schwere auf alle Theilchen der Materie in gleichen Entfernungen mit gleicher Stärke wirken, und der Analogie nach werden auch die Planeten gegen einander schwer seyn *). Die kleinen Abweichungen ihrer

*) Princ. L. III. *Regula* III. Qualitates corporum quæ intendi et remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt. *Regula* IV. In philosophia experimentali, propositiones ex phænomenis per inductionem collectæ, non obstantibus contrariis hypothesibus, pro veris aut accuratè aut quam proximè haberi debent, donec alia occurrerint phænomena, per quæ accuratiores reddantur aut exceptionibus obnoxiæ.

rer Bewegungen von einer genauen elliptischen Bewegung, welche die Beobachtungen zeigen, wenn ein Planet sich in der Nähe eines anderen Planeten befindet, können wohl eine Folge der gegenseitigen Gravitation der Planeten seyn. Man wird in der Folge sehen, daß aus der gegenseitigen Gravitation der Himmelskörper wirklich jene Störungen der elliptischen Bewegung folgen. Die Erscheinungen, welche man in Bewegungen der Himmelskörper beobachtet, führen also, wenn man sie mit den allgemeinen Gesetzen der Bewegung vergleicht auf folgendes große Naturgesetz: alle Theilchen der Materie äussern ein Bestreben, sich einander zu nähern, oder sie ziehen sich wechselsweise an mit einer Kraft, welche direct den Massen und umgekehrt dem Quadrat ihrer Entfernungen proportional ist. Dieses Gesetz wird wenigstens durch die Erfahrung bestätigt, so lange sich die Körper in meßbaren Distanzen von einander befinden, und keine andere Kräfte, Electricität, Magnetismus, u. s. w. mit im Spiel sind, deren Gesetze noch nicht genau bestimmt sind. In vielen Fällen scheint freylich dieses wechselseitige Bestreben nach Annäherung nicht statt zu finden. Zwey Körper, die man zu gleicher Zeit von einerley Höhe fallen läßt, scheinen ihren Weg ungestört nach lotrechten Richtungen fortzusetzen, ohne sich durch ihre gegenseitige Gravitation zu nähern. Allein die weit stärkere Gravitation der Körper gegen die Erde als gegen einander macht ihre Annäherung unmerklich. Durch schikliche Vorrichtungen kann übrigens auch die gegenseitige Gravitation solcher Körper, welche um sehr viel kleiner als die Erde sind, merklich gemacht werden. Hohe Berge lenken das Bleyloth der astronomischen Werkzeuge von seiner vertikalen Richtung ab *), und Cavendisch hat bey verhältnißmäßig viel kleineren Massen eine merkliche gegenseitige Anziehung gefunden **). Die astronomischen Pendeluhren leiden eine merkliche Störung, wenn das Uhrgewicht in die Nähe der Pendellinse kommt, und gehen etwas langsamer, wenn sich dieses Gewicht oberhalb, und geschwinder, wenn es sich un-

*) Philos. Trans. Vol. LXV. for 1775. n. 48. 49.

**) Philos. Trans. for 1798, Greens Annalen der Physik, II B. 1 St.

terhalb der Pendellinse befindet. Man beobachtet, daß das Uhrgewicht in eine schwingende Bewegung kommt, wenn es sich der Linse gegenüber befindet, selbst wenn man eine Glastafel zwischen das Gewicht und die Linse bringt, und die Bewegungen werden desto merklicher, je größer die auf einander wirkende Massen und je kleiner ihre Entfernungen von einander sind.

§. 287. Schon die Alten waren der Meynung, daß alle Körper ein Bestreben haben, sich einander zu nähern *). Copernikus schrieb die runde Gestalt der Himmelskörper dem Bestreben ihrer Theilchen nach Vereinigung zu **). Kepler erstrekte die Schwere auf den Mond, die Sonne und die Planeten unter einander selbst ***). Eben diese Meynung findet man in einem Brief von Pascal und Roberval an Fermat vom 16. Aug. 1638 †). Noch bestimmter erklärte sich hierüber D. Hook ††). „Ich will, sagt er ein Welsystem erklären, welches in mehreren Rücksichten von allen anderen verschieden ist, aber mit den gewöhnlichen Sätzen der Mechanik vollkommen übereinstimmt. Es gründet sich auf folgende drey Voraussetzungen: 1.) Daß alle Himmelskörper, keinen ausgenommen, eine Attraktion oder Gravitation gegen ihre Mittelpunkte haben, vermöge welcher sie nicht allein ihre Theilchen anziehen, und sie hindern, sich zu entfernen, wie wir es auf der Erde sehen, sondern

*) *Gregory* Elem. astr. phys. et geometr. in præfat.

**) De revolutionibus orb. coel. L. I. Cap. 9.

***) In der Vorrede zu seinem Werk de motibus stellæ Martis sagt er: „Quod gravitas est affectio corporea mutua inter cognata corpora ad unitionem seu conjunctionem. Duo corpora non impedita coirent loco intermedio, quodlibet accedens ad alterum tanto intervallo, quanta est alterius moles in comparatione; adeoque si Luna et Terra non retinerentur, quælibet in suo circuitu, Terra ascenderet ad Lunam quinquagesima quarte parte intervalli, Luna descenderet ad Terram 53 circiter partibus intervalli, ibique jungerentur. Quod Luna prolectat aquas terrestres; unde fit fluxus, ubi sunt latissimi alvei Oceani, aquisque spatiosa reciprocandi libertas. Et si Terra cessaret attrahere ad se aquas suas, aquæ marinæ elevarentur et in corpus Lunæ influerent. (Vergl. Nova Phys. coel. Introd. pag. 5.).

†) Oeuvres de Pascal. T. IV. pag. 389.

††) An attempt to prove the motion of the Earth, London, 1674. pag. 27. *La Lande* Astron. T. III. pag. 405. n. 3525.

auch die anderen innerhalb ihres Wirkungskreises befindlichen Himmelskörper anziehen; 2.) daß alle Körper, welche eine einfache und geradlinigte Bewegung erhalten haben, fortfahren sich so lange in einer geraden Linie zu bewegen, als sie nicht durch die Wirkung einer anderen Kraft davon abgelenkt, und genöthigt werden, einen Kreis, eine Ellipse, oder eine andere zusammengesetztere krumme Linie zu beschreiben; 3.) daß die Anziehungskräfte der Körper desto stärker sind, je näher die Körper, auf welche sie wirken, ihren Mittelpunkten sind. Was die Proportion betrift, nach welcher diese Kräfte abnehmen, indem die Entfernung wächst, so bekenne ich, daß ich dieselbige noch nicht ausfindig gemacht habe". Die Entdeckung dieses Gesetzes, und eine daraus abgeleitete auf mathematische Demonstrationen gegründete Erklärung der Erscheinungen, welche uns die Bewegungen der Himmelskörper darbieten, war Newton vorbehalten. Pemberton, ein Zeitgenoße Newtons erzählt *) die Geschichte dieser Entdeckung auf folgende Art. Als Newton im Jahr 1666 durch die Pest genöthigt war, sich von Cambridge wegzubegeben, beschäftigte er sich an einem gewißen Tage mit tiefen Betrachtungen der Schwere **). Er bemerkte, daß eben deßwegen, daß diese Kraft sich nicht merklich in den grösten Distanzen von der Erde, welche wir erreichen können, z. B. auf den höchsten Bergen, vermindert, der Gedanke natürlich sey, daß sie sich noch viel weiter erstrecke. Warum, sagte er bey sich selbst, sollte sie sich nicht bis zu dem Mond erstrecken? Und wenn diß sich so verhält; so ist es sehr wohl möglich, daß der Mond durch eben diese Kraft in seiner Bahn erhalten wird. Wenn übrigens gleich

*) A view of Sir Isaac Newton's Philosophy, London 1728. Préface. Elémens de la Philosophie Newtonienne par *Mr. Pemberton.* Amsterd. et Leipzig. MDCCLV. Pref. pag. VII et suiv.

**) Voltaire fängt die Erzählung der Geschichte dieser Entdeckung so an: Un jour en l'année 1666 *Newton* retiré à la campagne, *et voyant tomber des fruits d'un arbre, à ce que m'a conté sa niece* (Madame *Conduit)*, se laissa aller à un méditation profonde sur la cause qui entraîne ainsi tous le corps dans un ligne, qui, si elle étoit prolongée, passeroit à peu près par le centre de la Terre. *Collection complette des Oeuvres de Mr. de Voltaire. I. édit. T. III. Melang. de philos. III. Partie Chap. III. pag.* 193 *et suiv.*

die Schwere in den kleinen Veränderungen der Distanzen keine merkliche Verminderung zeigt; so kann sie doch in der Entfernung des Monds beträchtlich vermindert seyn. Er dachte, daß, wenn die Schwere den Mond in seiner Bahn erhält, eben diese Kraft allem Anschein nach die Ursache der Umlaufsbewegungen der Hauptplaneten um die Sonne seyn müße. Unter der Voraussetzung, daß die Planeten um die Sonne als Mittelpunkt Kreise beschreiben, und durch eine der Schwere ähnliche Kraft gegen den Mittelpunkt der Sonne getrieben werden, fand er mittelst des dritten keplerischen Gesetzes, daß diese Kraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von der Sonne proportional seyn müße (§. 275.). Er nahm nun an, daß die Kraft der Schwere mit der Entfernung von der Erde nach demselben Gesetz abnehme, und berechnete, ob diese Kraft hinreichend sey, den Mond in seiner Bahn zu erhalten (S. §. 285.). Weil er keine Bücher bey der Hand hatte; so gieng er bey dieser Berechnung von der gewöhnlichen Voraussetzung aus, daß ein Grad der Breite auf der Oberfläche der Erde 60 englische Meilen enthalte. Da aber diese Voraussetzung nicht richtig ist, und ein Grad ungefähr $60\frac{1}{2}$ englische Meilen enthält; so entsprach die Rechnung nicht seinen Erwartungen, und er schloß heraus, daß eine andere Ursache verbunden mit der Schwere auf die Bewegung des Monds Einfluß habe. Diese Bemerkung hielt ihn einige Zeit ab, weiter über diesen Gegenstand nachzudenken. Aber nach zehn Jahren ward er durch einen Brief des D. Hook veranlaßt, den Faden seiner Betrachtungen über die Kraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, wieder aufzufassen. Hook forderte ihn auf, die Linie zu suchen, welche eigentlich ein frey fallender Körper beschreibt, wenn man auf die Umdrehung der Erde Rücksicht nimmt (§. 162.). In dieser Zwischenzeit waren von Picard genauere Meßungen zur Bestimmung der Größe der Erde angestellt worden (§. 135.), und Newton fand nun, indem er von diesen genaueren Angaben ausgieng, daß die auf den Mond wirkende Kraft keine andere, als die Schwere, und umgekehrt dem Quadrat der Distanz proportional sey, wie er es lange Zeit vorher vermuthet hatte. Er fand mittelst dieses Princips, daß die Linie, welche ein fallender Körper beschreibt, eine Ellipse sey, welche den einen ihrer Brennpunkte in dem Mittelpunkt der Erde hat, und da die Hauptplaneten ähnliche krumme Linien um die Sonne beschreiben, so hatte er das Vergnügen, zu sehen, daß diese Untersuchung, welche er aus bloßer Neubegierde unternommen hatte, zu der Auflösung der wichtigsten Probleme dienen könne. Unmittelbar nachher setzte er zwölf auf die Bewegung der Hauptplaneten um die Sonne sich beziehende Sätze auf, und erst einige Jahre später schrieb er auf Bitten des D. Halley sein unsterbliches Werk, welches zuerst im Jahr 1087 erschien unter dem Titel: Philosophiæ naturalis principia mathematica, Lond. 4., dessen größten Theil er in einer Zeit von 18 Monaten erfunden und in Ordnung gebracht haben soll. Man nennt daher denjenigen Theil der Astronomie, welcher sich mit der Anwendung der Gesetze der Bewegung auf die Bewegung der Himmelskörper und der Theorie der allgemeinen Schwere beschäftigt, und aus dieser diejenige Erscheinungen, welche wir an den Himmelskörpern beobachten, als nothwendige Folgen ableitet, die Newtonische Astronomie. Sie heißt auch die physische Astronomie, und La Place nennt sie, weil sie als ein großes Problem der Mechanik betrachtet werden kann, die **Mechanik des Himmels** (Mécanique céleste.).

§. 288. Diese Theorie der allgemeinen Schwere gründet sich auf folgende Voraussetzungen:

1.) Alle Theilchen der Materie gravitiren gegen einander, oder ziehen einander an.
2.) Die Gravitation ist bey gleichen Entfernungen den Massen proportional.
3.) Die Gravitation nimmt in demselben Verhältniß ab, in welchem das Quadrat der Entfernung wächst, oder sie ist umgekehrt dem Quadrat der Entfernungen proportional.
4.) Sie wirkt unter übrigens gleichen Umständen mit gleicher Stärke auf ruhende oder schon in Bewegung gesetzte Körper, oder sie ist eine absolute Kraft.

5.) Die Himmelskörper bewegen sich in einem Mittel, welches ihnen keinen bemerkbaren Widerstand entgegensetzt.

Hiebey muß man aber niemals vergessen, daß die Worte: Gravitation, Attraction, u. s. w. blos das Phänomen bezeichnen, nicht die physische Ursache desselben, welche uns gänzlich unbekannt ist, angeben sollen *).

Nun wird man aber fragen: findet wohl dasselbe Gesetz der Gravitation zwischen den Himmelskörpern, welche eine so beträchtliche Größe haben, statt, welches man zwischen den einzelnen Theilchen der Materie angenommen hat? Müssen nicht wegen der allgemeinen Gravitation diejenige Körper, um welche sich andere bewegen, selbst auch in Bewegung seyn, und welche Veränderungen werden hieraus in der relativen Bewegung des einen Körpers um den andern entstehen? Kann die relative Bahn eines Planeten um die Sonne, oder eines Nebenplaneten um seinen Hauptplaneten nahe eine Ellipse bleiben, deren einer Brennpunkt in den Mittelpunkt der Sonne, oder in den Mittelpunkt des Hauptplaneten fällt, und werden die Abweichungen von einer genauen elliptischen Bewegung eine Folge der allgemeinen Gravitation seyn, und werden sie dasselbe Gesetz nothwendig befolgen müßen, welches die Beobachtungen zeigen?

Man wird sogleich sehen, daß wegen der sehr großen Entfernung der Himmelskörper von einander in Vergleichung mit ihren Durchmessern das Verhältniß der Abstände der verschiedenen Punkte des einen von denen des andern sehr nahe das Verhältniß der Gleichheit seyn muß, mithin alle Theilchen des einen Himmelskörpers gegen die Theilchen des

*) Princ. L. I. Def. VIII. „Voces *attractionis*, *impulsus*, vel propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter et pro se mutuò promiscue usurpo; has vires non physice, sed mathematicè tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires verè et physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero. Und L. I. Sect. XI. vor der LVIIsten Prop. sagt Newton;" considerando vires centripetas tanquam attractions, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. Ferner L. III. Regula III. Attamen gravitatem corporibus essentialem esse minimè affirmo.

andern nahe gleich stark gravitiren müßen, und daher ihre Masse als in ihren Schwerpunkten oder in den Mittelpunkten der kugelförmigen Körper, welche sie bilden, vereinigt gedacht werden kann. Folglich kann das Gesetz der Gravitation dieser Körper gegen einander nicht beträchtlich von dem angenommenen Gesetz der Gravitation ihrer Theilchen verschieden seyn. Weil ferner die Sonne in Vergleichung mit den Planeten eine sehr beträchtliche Größe hat; so werden die letzteren keinen beträchtlichen Einfluß auf die Bewegung der Sonne haben können, und die Gravitation der Planeten gegen einander wird um vieles geringer seyn müssen, als ihre Gravitation gegen die Sonne, so daß ihre Bewegungen nahe dasselbe Gesetz befolgen müßen, nach welchem ein Körper sich um einen festen Punkt bewegt, gegen welchen er im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung gravitirt. Auf ähnliche Weise verhält es sich mit den Nebenplaneten. Diese sind in Vergleichung mit ihren Hauptplaneten sehr klein, und bewegen sich um dieselbige in Bahnen, welche um vieles kleiner sind, als die Bahnen der Hauptplaneten. Die Sonne wird also auf den Hauptplaneten und auf die ihn umgebende Nebenplaneten nahe mit gleicher Stärke wirken, so daß nur die kleine Differenz ihrer Gravitationen gegen die Sonne ihre elliptische und beynahe kreisförmige Bewegung stören kann. Hieraus wird man sich zwar im allgemeinen erklären können, warum die Bahnen der Planeten und der um diese sich bewegenden Nebenplaneten im Mittel genommen Ellipsen sind, welche nach den bisher gefundenen Gesetzen beschrieben werden, und warum sich kleine periodische von den gegenseitigen Stellungen dieser Körper abhängende Abweichungen von einer genauen elliptischen Bewegung zeigen müßen. Aber eine vollständige Erklärung dieser Erscheinungen aus der Theorie der allgemeinen Schwere wird nur mittelst der Mathematik gegeben werden können, durch welche man eben diese Theorie aus den Phänomenen abgeleitet hat. Man wird finden, daß in gewißen Fällen, welche in der Natur entweder genau, oder sehr nahe, statt finden, die gegenseitige Gravitation der Körper genau ihren Massen und umgekehrt den Quadraten der Abstände ihrer Schwerpunkte proportional ist, wie groß oder wie klein diese Abstände seyn mögen, und daß, wenn nur zwey Körper vorhanden wären, der Schwerpunkt des einen um den Schwerpunkt des andern einen Kegelschnitt nach demselben Gesetz beschreiben muß, welches man unter der Voraussetzung eines unbeweglichen Mittelpunkts der Kraft gefunden hat. Kommt noch ein dritter hinzu; so wird keine der Bahnen genau ein Kegelschnitt, sondern eine sehr verwickelte krumme Linie seyn, welche man bis jetzt noch nicht genau hat bestimmen können. Die Aufgabe, die relative Bahn eines der drey Körper um einen der zwey übrigen zu bestimmen, z. B. die relative Bahn des Monds um die Erde mit Rücksicht auf die Gravitation dieser zwey Körper gegen die Sonne, heißt das Problem der drey Körper. Aus den vorhin angeführten Gründen kann in unserem Sonnensystem die Abweichung der gesuchten krummen Linie von einem Kegelschnitt niemals sehr beträchtlich, und daher die Aufgabe näherungsweise mit einer Genauigkeit aufgelöst werden, welche der Genauigkeit der Beobachtungen entspricht.

§. 289. Es sey CD (Fig. 116.) ein durch die Kegeloberfläche ACa, und die sphärische Oberfläche Aa, deren Mittelpunkt in der Spitze C des Kegeloberfläche sey, begränzter gleichförmig dichter Körper. Mm und Bb seyen durch eben diese Kegeloberfläche abgeschnittene Stücke von Kugeloberflächen, welche mit der ersteren einerley Mittelpunkt C haben; so wird sich unter der Voraussetzung des Newtonschen Gravitationsgesetzes die Gravitation des Punkts C gegen den Körper ACa zur Gravitation eben dieses Punkts gegen den Körper Bb verhalten, wie $CA : CB$. Denn das Verhältniß der Gravitation von C gegen die Fläche Aa zu der Gravitation von C gegen irgend eine mit jener concentrische sphärische Fläche Mm ist das zusammengesetzte aus dem Verhältniß des Quadrats von CM zu dem Quadrat von CA, und, wegen der gleichförmigen Vertheilung der Materie, aus dem Verhältniß der Fläche Aa zu der Fläche Mm. Das letztere Verhältniß ist aber wegen der Aehnlichkeit der

Flächen dem Verhältniß des Quadrats von CA zu dem Quadrat von CM gleich; folglich sind diese zwey Gravitationen zu einander im zusammengesetzten Verhältniß von $\overline{CM}^2 : \overline{CA}^2$ und von $\overline{CA}^2 : \overline{CM}^2$, welches das Verhältniß der Gleichheit ist. Man setze die Gravitation gegen die Fläche $Aa = D$; so wird die Gravitation gegen den Körper $CAa = D \times CA$, und gegen den Körper $CBb = D \times CB$ seyn, welche sich zu einander verhalten wie $CA : CB$. Ebenso ist die Gravitation gegen den Körper $AMma = D \times AM$.

Auf der sphärischen Fläche Aa sey irgend eine Figur beschrieben, und eine beständig durch die Spitze C der Kegeloberfläche gehende gerade Linie bewege sich auf dem Umfang jener Figur herum; so wird sie auf jeder anderen mit der ersteren concentrischen sphärischen Fläche eine Figur beschreiben, welche der auf Aa beschriebenen ähnlich ist und ähnlich liegt. Mithin wird von den auf solche Art beschriebenen Körpern eben das gelten, was für den kegelförmigen Körper bewiesen worden ist.

Man ziehe durch C eine gerade Linie Cf unter einem beliebigen Winkel mit Ca, und fälle auf sie aus a, m, b die Perpendickel af, mp, gb; so verhält sich $\left.\begin{matrix} CA : CM \\ Ca \quad Cm \end{matrix}\right\} = Cf : Cp$, und $CA : AM = Cf : fp$. Folglich ist, wenn die Gravitation gegen den Körper $AMma$ (oder gegen den Körper Dd) in zwey andere Kräfte zerfällt wird, deren eine nach der Richtung Cf, die andere auf Cf senkrecht wirkt (§. 252.), und die Gravitation gegen die Fläche Aa (oder gegen die auf ihr beschriebene Fläche) mit D bezeichnet wird,

1.) Der nach der Richtung Cf wirkende Theil der Gravitation von C gegen den Körper $AMma$, (oder gegen den Körper Dd) $= D \times pf$.

Es sey $MBmE$ (Fig. 117.) ein Schnitt eines gleichförmig dichten Körpers mit einer durch den gegebenen Punkt C gehenden Ebene, und CP, CQ seyen in dieser Ebene liegende und durch C gehende der Lage nach gegebene gerade Linien. Eine durch C gehende gerade Linie CM schneide den Umfang der Figur in M und m, und einen aus C als Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser CA beschriebenen

Kreis in N. Man ziehe MP, mp auf CP, und NR auf CQ senkrecht, verlängere NR nach K so, daß $KR = Pp$ werde, und es sey $GKkg$ die krumme Linie, welche auf diese Art entsteht, wenn die gerade Linie CM sich um C dreht, und von der Lage CB in die Lage CE kommt, indem man immer jede andere Ordinate rk nach eben diesem Gesetz bestimmt, und $rk = P'p'$ nimmt. Wenn nun eine andere durch die gerade Linie CQ gelegte Ebene eben diesen Körper schneidet; so wird der nach Richtung CA wirkende Theil der Gravitation von C gegen das zwischen den zwey schneidenden Ebenen begriffene Stük des Körpers desto genauer direct der Fläche $GKkg$ und umgekehrt der geraden Linie CA proportional seyn, je kleiner der Winkel wird, unter welchem sich die zwey Ebenen schneiden. Denn es schneide eine andere gerade Linie CM den Umfang der Figur in M' und m', und den Kreis in n. Ferner seyen MZ, mr senkrecht auf CQ, die, wo nöthig verlängerte CM' begegne einem aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CM in der Ebene QCM beschriebene Kreisbogen in o, und Mx, ou seyen auf der anderen schneidenden Ebene senkrecht, von welcher man annimmt, daß sie durch x und u gehe. Da der Körper gleichförmig dicht ist; so wird die Gravitation gegen die Fläche Mu dieser Fläche direkt und umgekehrt dem Quadrat von CM proportional seyn, und durch $\frac{Mo \times Mx}{CM^2}$ können ausgedrückt werden. Demnach wird seyn die auf die Richtung CA reducirte Gravitation von C gegen den Körper $m'mMu$ $= Pp \times \frac{Mo \times Mx}{CM^2}$ (n. 1.). Es verhalte sich der Neigungswinkel der zwey Ebenen zu dem Winkel, welcher durch einen mit dem Halbmesser eines Kreises gleiche Länge habenden Bogens gemeßen wird, wie $i : 1$; so wird Mx desto genauer $= i.MZ$ seyn, je kleiner der Neigungswinkel i ist. Weil nun

$$\begin{array}{l} Mo : Nn = CM \quad CN \\ MZ : NR = CM \quad CN \\ Mx \quad MZ = i \quad : 1. \\ \hline \end{array}$$

so ist $Mo \times Mx : Nn.NR = i.\overline{CM}^2 \quad \left(\frac{\overline{CN}^2}{\overline{CA}^2}\right.$

und, wenn man an den Punkt N des Kreises eine Tangente

Nt zieht, welche der verlängerten rn in t begegnet,

$Mo \times Mx : Nt \times NR < i.\overline{CM}^2 \quad \overline{CA}^2$ (weil $Nt > Nn$).
aber $Nt : Rr = \left(\frac{CN}{CA}\right) : NR$;

folglich $Mo \times Mx : Rr \times NR < i.\overline{CM}^2 \quad CA \times NR$,
und $\frac{Mo \times Mx}{\overline{CM}^2} < \frac{i.Rr}{CA}$.
Da nun $Pp = KR$ (Constr.);
so ist $Pp \times \frac{Mo \times Mx}{CM^2} < \frac{i.KR \times Rr}{CA}$.

Wenn nun, wie im Fall der Figur, Mm, mithin auch Pp oder die ihr gleiche Ordinate RK abnimmt, indem der Winkel QCM wächst; so ist die Gravitation gegen den Theil $m'mM'$ des Körpers kleiner als gegen den Körper mMu, und um so mehr kleiner als $\frac{i.KR \times Rr}{CA}$. Folglich ist, wenn die Summe der um die Figur RKg beschriebenen Rechtecke mit S bezeichnet wird, die Gravitation gegen das ganze Stück mME kleiner als $\frac{i.S}{CA}$. Ebenso wird gezeigt, daß, wenn man auf ähnliche Art pyramidalische Stücke in den Körper beschreibt, und die Summe der in die Figur RKg beschriebenen Rechtecke $= S'$ setzt, die Gravitation gegen mME größer sey als $\frac{i.S'}{CA}$. Da nun der Ueberschuß von S über S' durch die Verminderung des Winkels MCM' kleiner als jeder gegebene Raum gemacht werden kann (§. 246.); so ist die auf die Richtung CA reducirte Gravitation von C gegen das Stück mME des Körpers, welches durch die zwey unter dem Winkel i sich schneidende Ebenen, die durch CM und Mx gelegte Ebene, und die krumme Oberfläche des Körpers begränzt wird, $= \frac{i \times \text{Fläche } RKg}{CA}$. Ebenso wird der Beweiß geführt, wenn Mm mit dem Winkel QCM zugleich wächst. Demnach ist

2.) der nach der Richtung CA wirkende Theil der Gravitation von C gegen das durch die zwey schneidende Ebenen und die Oberfläche des Körpers begränzte Stück von B bis $E = \frac{i \times \text{Fläche } GKg}{CA}$.

Wenn alle Durchschnitte des Körpers mit einer durch die gerade Linie CQ gelegten Ebene einander gleich sind, oder der Körper durch die Umdrehung der Figur $mBMK$ um die Axe CQ beschrieben wird; so wächst die Gravitation gegen den so entstehenden Körper dem Winkel oder Bogen i proportional. Mithin ist, wenn die Umdrehungsaxe CQ ganz ausserhalb der Figur fällt, und $\pi : 1$ das Verhältniß des Umfangs zum Durchmesser ist,

3.) die auf die Richtung CA reducirte Gravitation von C gegen den ganzen ringförmigen Körper, welcher entsteht, wenn die Figur BE eine Umdrehung macht,

$$= \frac{2\pi . \text{Fläche } GKg}{CA}.$$

Und wenn die gerade Linie CA mit der Umdrehungsaxe CQ zusammenfällt; so heben sich die auf CA senkrechten Gravitationen gegen einander auf, und die Richtung der Gravitation gegen den ganzen Körper fällt mit der Umdrehungsaxe zusammen.

Wenn 4.) die Umdrehungsaxe CQ die Figur schneidet (Fig. 118.), aber die auf der Umdrehungsaxe senkrechte Chorden der Figur nicht halbirt; so beschreiben die zwey Segmente bey einer ganzen Umdrehung zwey verschiedene Körper, und jedem der Segmente entspricht eine eigene krumme Linie $AGKg$. Man erhält sodenn die Gravitation gegen den einen oder den andern Körper nach n. 3.

Endlich wenn 5.) die Umdrehungsaxe alle auf ihr senkrechte Chorden der Figur halbirt; so werden die jeder Hälfte der Figur entsprechende krumme Linien $AGKg$ einander gleich, und die Gravitation in der Richtung der Umdrehungsaxe gegen den ganzen Körper, welcher durch eine volle Umdrehung einer der Hälften der Figur beschrieben wird, ist wie in n. 3. $= \frac{2\pi . \text{Fläche } AGKg}{CA}$.

§. 290. Das Theilchen C (Fig. 118.) gravitire nun gegen eine gleichförmig dichte Kugel, welche durch die Umdrehung des Halbzirkels BEH um die Axe CQ beschrieben wird. Es sey A der Mittelpunkt der Kugel, und eine aus C gezogene gerade Linie CM schneide den Halbzirkel in M

und m, und einen aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreisbogen Af in N. Man ziehe Mr, mu, NR auf CQ senkrecht, und verlängere RN so nach K daß $RK = Pp$ werde. Es sey GKg die krumme Linie, welch durch die Endpunkte aller nach diesem Gesetz bestimmten Ordinaten durchgeht; so wird die dem Punkt A entsprechende Ordinate $AG = BH$ seyn, und die krumme Linie wird den Durchmesser BH in dem Punkt schneiden, welcher gefunden wird, wenn man durch C eine Tangente CEf an den Halbzirkel zieht, und aus dem Punkt f, in welchem sie dem Kreisbogen AN begegnet, ein Perpendickel fg auf BH fällt, oder auch $Cg = CE$ nimmt. Die Gravitation gegen den ringförmigen Körper, welcher durch die Umdrehung des Kreisabschnitts mEM um die Axe CQ beschrieben wird, ist also $= \frac{2\pi . \text{Fläche } gKR}{CA}$ (§. 289. n. 3.), und die Gravitation gegen die Kugel $= \frac{2\pi . \text{Fläche } gKGA}{CA}$ (n. 5.). Um nun den Inhalt der Fläche $gKGA$ zu finden, fälle man aus dem Mittelpunkt A der Kugel das Perpendickel AD auf Mm; so ist $MD = Dm$ (III, 3.), und $\overline{mD}^2 = \overline{CD}^2 - MC \times Cm$ (II, 6.) $= CR^2 - BC \times CH$ (III, 36. und weil $CD = CR$). Es wachse die Hälfte mD der Chorde mM um Do, wenn die CR um R wächst; so wird $(mD + Do)^2 = (CR + Rr)^2 - BC \times CH$, oder

$$\overline{mD}^2 + 2mD \times Do + \overline{Do}^2 = \overline{CR}^2 + 2CR \times Rr + \overline{Rr}^2 \quad BC \times CH.$$

Aber $\overline{mD}^2 \qquad = CR^2 \qquad - BC \times CH$;

folglich $2mD \times Do + \overline{Do}^2 = 2CR \times Rr + \overline{Rr}^2$.

Also verhält sich $Rr \quad Do = 2mD + Do : 2CR + Rr$,

und es ist $Rr : Do$ desto genauer $= \left\{ \begin{matrix} 2mD : 2CR \\ mD : CR \end{matrix} \right\}$, je kleiner Rr und Do werden.

Da nun $\left. \begin{matrix} Pp \\ KR \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} Mm \\ 2mD \end{matrix} \right\} = CR \quad \left\{ \begin{matrix} CN \\ CA \end{matrix} \right\}$;

so ist $KR \times Rr : 2mD \times Do$ desto genauer $= mD \quad CA$,

und $KR \times Rr$ desto genauer $= 2. \frac{\overline{mD}^2 \times Do}{CA}$, je kleiner Rr wird.

Ferner ist $(mD + Do)^3 - \overline{mD}^3 = 3\overline{mD}^2 \times Do + 3mD \times Do^2 + Do^3$; folglich nähert sich die Zunahme des Würfels von mD, wenn diese Linie um Do wächst, desto mehr der Größe $3\overline{mD}^2 \times Do$, je kleiner Do, mithin auch Rr wird, und zugleich nähert sich der Inhalt $KR \times Rr$ des in die Figur $AGKg$ beschriebenen Rechtecks Kr der gleichzeitigen Zunahme der Fläche $gKRg$. Demnach verhält sich die Geschwindigkeit, mit welcher die Fläche $gKRg$ wächst, zu der Geschwindigkeit, mit welcher $\frac{\overline{mD}^3}{CA}$ wächst, $= 2 : 3$, oder es ist die erstere Geschwindigkeit beständig $= \frac{2}{3}$ der letztern, und daher ist die Fläche $gKRg = \frac{2}{3}\,\frac{\overline{MD}^3}{CA}$ (§. 238. und 239., weil die Fläche $gKRg$ und die Chorde mM zugleich verschwinden), und die Fläche $gKGA = \frac{2}{3}\,\frac{\overline{AB}^3}{CA}$. Hieraus folgt also die Gravitation von C gegen den Körper, welchen der Abschnitt mEM beschreibt $= \frac{4}{3}\pi\,\frac{\overline{mD}^3}{\overline{CA}^2}$, und gegen die ganze Kugel $\frac{4}{3}\pi\,\frac{\overline{AB}^3}{\overline{CA}^2}$.

Es ist aber der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3}\pi . \overline{AB}^3$; folglich ist die Gravitation des ausserhalb der Kugel befindlichen Theilchens C gegen diese Kugel direct ihrem Inhalt oder ihrer Masse, und umgekehrt dem Quadrat der Entfernung des Theilchens von dem Mittelpunkt der Kugel proportional *).

§. 291. Da vermöge des vorhergehenden §. die Gravitation eines ausserhalb einer Kugel BD (Fig. 119.) befindlichen Theilchens C gegen diese Kugel direct ihrer Masse und umgekehrt dem Quadrat der Distanz CA proportional ist; so wird sich die Gravitation von C gegen die Kugel BD zu der Gravitation gegen eine mit der ersteren concentrische Kugel bd verhalten wie die Masse der Kugel BD zu der Masse der Kugel bd, und der Ueberschuß der ersteren Gravitation über die leztere, d. i. die Gravitation von C gegen die Kugelschale $BbdD$, wird sich verhalten zu der Gravitation gegen die Kugel BD, wie die Masse jenes holen kugelförmigen

*) Princ. L. I. prop. LXXIV. Cor. 2.

Körpers zu der Masse der Kugel *BD* sich verhält. Folglich ist auch die Gravitation gegen einen gleichförmig dichten holen durch zwey concentrische Kugeloberflächen begränzten Körper direct der Masse des Körpers und umgekehrt dem Quadrat des Abstands eines ausserhalb desselben befindlichen Theilchens von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Kugeloberflächen proportional, woraus folgt, daß die Gravitation auch gegen eine ungleichförmig dichte Kugel umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von dem Mittelpunkt der Kugel proportional bleibt, wenn die Dichtigkeit in gleichen Abständen von dem Mittelpunkt der Kugel dieselbe ist*).

Es seyen *BD*, *EF* zwey gleichförmig dichte, oder in gleichen Entfernungen von dem Mittelpunkt gleich dichte Kugeln; so ist die Gravitation eines jeden Theilchens *e* der der Kugel *EF* gegen die Kugel *BD* umgekehrt dem Quadrat der Distanz *eA* desselben von dem Mittelpunkt *A* der Kugel *BD* proportional, und daher dieselbe, als wenn die ganze Masse der Kugel *BD* in ihrem Mittelpunkt *A* vereinigt wäre. Da nun die Gravitation eines jeden Theilchens *e* der Kugel *EF* gegen den Punkt *A* umgekehrt dem Quadrat seines Abstands von diesem Punkt proportional ist; so ist vermöge des oben bewiesenen die Gravitation der ganzen Kugel *EF* gegen den Punkt *A*, d. i. gegen die Kugel *BD*, umgekehrt dem Quadrat des Abstands *CA* ihres Mittelpunkts *C* von dem Mittelpunkt *A* der Kugel *BD* proportional **).

Hieraus folgt, daß, wenn eine der zwey Kugeln, z. B. die *BD*, unbeweglich wäre, und der andern Kugel *EF* nach einer von der Richtung der geraden Linie *CA* verschiedenen Richtung irgend eine Geschwindigkeit mitgetheilt worden wäre, der Mittelpunkt *C* der letzteren um den Mittelpunkt *A* der ersteren als Brennpunkt einen Kegelschnitt beschreiben würde (§. 282.).

§. 292. Es giebt noch einen Fall, in welchem Kugeln einander ebenso anziehen, als wenn ihre Massen in ih-

*) Princ. L. I. prop. LXXVI.
**) Princ. L. I. prop. LXXV.

ren Mittelpunkten vereinigt wären. Wenn nemlich die Anziehungskraft der einzelnen Theile direct ihren Entfernungen von einander proportional ist; so findet man auf ähnliche Art, wie in §. 289. und 90, daß die Kraft, mit welcher eine gleichförmig dichte oder in gleichen Distanzen von ihrem Mittelpunkt gleich dichte Kugel ein ausserhalb ihr befindliches Theilchen anzieht, im zusammengesetzten Verhältniß aus der Masse der Kugel und dem Abstand des angezogenen Theilchens von dem Mittelpunkt der Kugel ist *); woraus dasselbe Attractionsgesetz zwischen zwey gleichartigen Kugeln folgt. Hieraus ergiebt es sich ferner, daß, wenn die Anziehungskraft aus zwey Theilen bestände, wovon der eine umgekehrt dem Quadrat der Entfernung, der andere direct der Entfernung selbst proportional wäre, zwey Kugeln einander nach demselben Gesetz anziehen würden, so daß man ihre Massen als in ihren Mittelpunkten vereinigt annehmen könnte. La Place hat den umgekehrten Satz bewiesen, daß, wenn die Kraft, mit welcher eine Kugel ein ausserhalb ihr befindliches Theilchen anzieht, eben so mit dem Abstand von der Kugel Mittelpunkt sich verändern soll, wie sich die Anziehungskraft der einzelnen Theilchen mit ihren Entfernungen von einander verändert, die anziehende Kraft entweder der Entfernung, oder umgekehrt dem Quadrat der Entfernung, oder zum Theil der Entfernung und zum Theil dem Quadrat der Entfernung proportional seyn müsse **). Folglich ist unter allen Attractionsgesetzen, nach welchen die Attraction mit der Zunahme der Entfernung abnimmt, das wirklich in der Natur statt findende Attractionsgesetz das einzige, bey welchem kugelförmige Körper ebenso aufeinander wirken, als wenn ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären. Dieses Gesetz ist ebenfalls das einzige, bey welchem ein innerhalb eines durch zwey concentrische Kugeloberflächen begränzten Körpers liegender Punkt nach allen Richtungen mit gleicher Stärke angezogen wird, mithin die entgegengesetzten Attraktionen sich gegen einander aufheben, und die Gravitation dieses Punkts gegen den ganzen Körper verschwindet.

*) Princ. L. I. prop. LXXVII.

**) Mécanique cél. T. I. pag. 140. et suiv.

§. 293. Wenn zwey Körper A und B (Fig. 120., 121. und 122.) sich gleichförmig und geradlinigt nach den Richtungen AD und BE mit den Geschwindigkeiten Aa und Bb bewegen; so ruht entweder ihr Schwerpunkt C, oder er bewegt sich geradlinigt und gleichförmig.

Es seyen erstlich (Fig. 120.) die Richtungen AD, BE der Bewegungen einander parallel, $Aa : Bb = AC : CB$, und a, b auf verschiedene Seiten der geraden Linie AB. Man ziehe aC, Cb. Da $Aa : Bb = AC : CB$; so ist $Aa : AC = Bb : CB$, mithin $ACa = BCb$. Folglich sind a, C, b in einer geraden Linie. Und weil Aa, Bb in gleichen Zeiten zurückgelegte Wege sind; so ist ab die gerade Linie, welche die zwey Körper mit einander verbindet, wenn der eine in a der andere in b angekommen ist. Es verhält sich aber auch $aC : Cb = AC : CB$; folglich fällt der Schwerpunkt der Körper, wenn sie a und b sind, in den Punkt C. Zieht man durch einen beliebigen anderen Punkt d der AD und durch den Schwerpunkt C eine gerade Linie dC, welche der wo nöthig verlängerten BE in e begegnet; so verhält sich $Ad : Be = Aa : Bb$. Folglich sind d und e die gleichzeitigen Orte der zwey Körper, und weil $dC : Ce = AC : CB$; so ist wiederum C ihr Schwerpunkt, welcher also in diesem Fall ruht.

Es seyen zweytens (Fig. 121. 122.) die Richtungen AD, BE der Bewegungen einander nicht parallel, und in einerley oder in verschiedenen Ebenen. Man ziehe die gerade Linie ab, und theile sie in dem Punkt c so, daß $ac : cb = AC : CB$; so wird der Schwerpunkt in c seyn, wenn die Körper in a und b sind. Auf einer der Richtungen, z. B. auf AD nehme man einen Punkt d nach Belieben, und auf der anderen BE den Punkt e so, daß $Be : eb = Ad : da$; so sind d und e gleichzeitige Orte der zwey Körper, und ihr Schwerpunkt muß auf der geraden Linie de liegen. Man ziehe durch a die Parallelen af, ag mit AB, Bb welche den durch C und d, e und c gezogenen geraden Linien in f und g begegnen. Da $af : AC = da : dA$

$$= be : eB \text{ (Constr.)};$$

so ist $af : be = AC : eB$.

Aber $be : ag = bc : ca$
$= CB : CA$ (Constr.)

folglich $af : ag = CB : eB$,
oder $af : CB = ag : eB$.

Wenn nun $af = CB$; so ist $ag = eB$, und daher sind fC und aB, ge und aB, mithin auch fC und ge (XI, 9.) parallel, und fC, ge, de, cC in Einer Ebene. Sind aber af und CB ungleich; so werden fC und aB sich schneiden. Es geschehe in h, und es sey he gezogen. Da
$ha : hB = af \; CB$
$= ag : eB$ (Bew.);
so liegen g, e, h Einer geraden Linie; folglich liegen fg, gh, mithin wiederum fC, ge, de, Cc in Einer Ebene. Es schneide Cc die de in i. Man ziehe Cek, welche der durch den Punkt b mit AB parallel gezogenen bk in k begegne.
Da $bk : CB = be : eB$
$= ad : dA$ (Constr.)
$= af : CA$
so ist $bk : af = CB : CA$
$= cb : ca$ (Constr.)
Folglich liegen f, c, k in einer geraden Linie. Und weil
$ke : eC = be : eB$
$= ad : dA$ (Constr.)
$= fd : dC$;
so sind (VI, 2.) fk und ed mit einander parallel. Folglich verhält sich auch $di : ie = fc : ck$
$= ac : cb$
$= AC : CB$,
und der Punkt i ist der Ort des Schwerpunkts der zwey Körper, wenn sie in d und e angekommen sind.

Endlich verhält sich wegen der Parallelen fc, di, AC,
$Ci : ic = Cd : df$
$= Ad : da = Be : eb$;
folglich ist die Bewegung des Schwerpunkts i so wie die Bewegung der Körper A und B gleichförmig, und geradlinigt.

§. 294. Wenn die zwey Körper A und B im directen Verhältniß ihrer Massen m und m', und nach irgend einem von ihrem Abstand AB abhängenden Gesetz einander anziehen, und keine äussere Kräfte auf sie wirken; so ruht entweder ihr Schwerpunkt, oder er bewegt sich geradlinigt und gleichförmig.

Wären die zwey Körper anfänglich in Ruhe in den Punkten A und B (Fig. 123.); so nehme man $Aa : Bb = m' : m$. Alsdenn wird, wenn Bb der Raum ist, durch welchen der Körper B gegen den Körper A, dessen Masse $= m$ ist, in einer gewißen Zeit fallen würde, Aa der Raum seyn, durch welchen der Körper A gegen den Körper B, dessen Masse $= m'$ ist, in derselben Zeit fallen würde, so daß am Ende dieser Zeit die zwey Körper in a und b seyn werden. Man theile die gerade Linie in dem Punkt C so, daß $AC : CB = m' : m$; so wird C der anfängliche Ort des Schwerpunkts der zwey Körper seyn.

Da nun $Aa : Bb = m' : m$
und $AC : Cb = m' : m$

so ist auch $\left.\begin{matrix} AC - Aa \\ aC \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} CB - Bb \\ Cb \end{matrix}\right\} = m' : m$;

folglich ist der Punkt C auch der Schwerpunkt der Körper A und B, wenn sie in a und b angekommen sind, welcher also in diesem Fall ruht. Demnach würden die zwey Körper in einer geraden Linie sich einander nähern, und in ihrem Schwerpunkt C einander begegnen.

Wenn die Körper in A und B (Fig. 120.) mit den Geschwindigkeiten Au und Bb nach parallelen Richtungen ankommen, welche sich wie ihre Abstände AC und CB von ihrem Schwerpunkt C verhalten, so daß a und b auf verschiedenen Seiten von AB liegen, und in dem Augenblick, da sie in A und B ankommen, durch die Wirkung ihrer gegenseitigen Gravitation die Geschwindigkeiten Ah und Bg bekommen; so vollende man die Parallelogramme ha, bg und ziehe ihre Diagonalen Aa, Bb', welche nun die in gleichen Zeiten von den zwey Körpern beschriebene Wege seyn werden. Man ziehe Ca' und Cb'.

Da $\left.\begin{matrix} Ah \\ aa' \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} Bg \\ bb' \end{matrix}\right\} = m' : m$
$= CA : CB$

$= Ca \;:\; Cb$ (erster Fall des vorhergeh. §.), und $a'aC = b'bC$ (I, 29.); so ist $aCa' = bCb'$ (VI, 6.). Mithin liegen $a'C$ und Cb' in einer geraden Linie. Und weil $a'C : Cb' = aC : Cb = AC : CB = m' : m$; so ist, wenn die Körper nach a' und b' gekommen sind, ihr Schwerpunkt wiederum in C, welcher also auch in diesem Fall ruht. Aus eben dieser Proportion folgt die Aehnlichkeit der Dreyecke ACa' und BCb'. Mithin würden die zwey Körper, wenn sie stoßweise durch die Wirkung ihrer gegenseitigen Attraction gegen einander getrieben würden, um ihren Schwerpunkt in gleichen Zeiten ähnliche Vielecke nach demselben Gesetz beschreiben, nach welchem sie diese Vielecke um den Punkt C beschreiben würden, wenn sie gegen diesen hin durch die Wirkung einer Kraft getrieben würden. Folglich werden hier alle diejenigen Sätze ihre Anwendung finden, welche in dem Anfang dieses Capitels von den Centralbewegungen sind bewiesen worden, und wenn die Anziehungskraft stetig wirkt; so werden die Vielecke in ähnliche krumme Linien übergehen, welche um den Schwerpunkt C als Mittelpunkt der Kräfte beschrieben werden.

Wenn aber der Schwerpunkt sich bewegt (Fig. 121. und 122.), und die Körper in dem Augenblick, da sie in A und B ankommen, die Geschwindigkeiten Ap und Bq, durch ihre Einwirkung aufeinander erhalten; so ziehe man durch a und b die Parallelen aa' und bb' mit AB und mache $aa' = Ap$, $bb' = Bq$. Alsdenn werden die Körper in derselben Zeit in a' und b' angekommen seyn, in welcher sie nach a und b gekommen seyn würden, wenn die Attraction nicht gewirkt hätte. Man ziehe ca' und cb'. Da nun

$\left.\begin{matrix} Ap \\ aa' \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} Bq \\ bb' \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} m' : m \\ ca : cb \end{matrix}\right.$; so sind die Dreyecke aca' und bcb' ähnlich, mithin a', c, b' in einer geraden Linie, und $a'c : cb' = ac : cb$. Folglich fällt der Schwerpunkt, wenn die zwey Körper in a' und b' angekommen sind, in den Punkt c, und seine Bewegung wird durch die gegenseitige Einwirkung der Körper nicht geändert. Der Schwerpunkt bewegt sich also geradlinigt und gleichförmig. Es komme ein dritter Körper hinzu, welcher auf die zwey ersteren nicht wirke, und entweder in Ruhe sey, oder sich nach dem Gesetz der Trägheit gleichförmig und geradlinigt bewege. Da der Schwerpunkt der zwey ersteren entweder ruht oder sich geradlinigt und gleichförmig bewegt; so wird auch der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller drey Körper entweder ruhen oder sich geradlinigt und gleichförmig bewegen. Man lasse nun den dritten Körper auf die zwey übrigen wirken; so wird dadurch der Zustand der Ruhe oder der Bewegung der Schwerpunkte dieses Körpers und eines jeden der zwey übrigen nicht geändert. Folglich wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller drey Körper entweder ruhen, oder sich geradlinigt und gleichförmig bewegen. Wenn also irgend eine Anzahl von Körpern auf einander wirken; so entsteht aus diesen Wirkungen keine andere Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunkts, als diejenige, welche er schon vorher hatte, oder er bewegt sich geradlinigt und gleichförmig *).

§. 295. Da zwey einander anziehende Körper zugleich in Bewegung sind, und nur ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt ruht oder sich geradlinigt und gleichförmig bewegt; so wird man diesen Punkt als den eigentlichen Mittelpunkt der Kräfte zu betrachten haben. Wenn der Schwerpunkt ruht; so beschreiben die zwey Körper um diesen unbeweglichen Punkt als Mittelpunkt der Kräfte einander ähnliche krumme Linien (§. 294.). Wenn aber der Schwerpunkt C der Körper A und B (Fig 124.) sich bewegt, und, wenn A nach a, B nach b gekommen ist, sich in c befindet; so werden a, c, b in einer geraden Linie liegen, und es wird $ac : cb = AC : CB$ seyn. Man ziehe durch C die Parallele $a'b'$ mit ab und durch a und b die Parallelen aa', bb' mit der geraden Linie Cc, welche der Schwerpunkt beschreibt. Noch ziehe man Aa', Bb'. Da $\left.\begin{matrix} ac \\ a'C \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} cb \\ Cb' \end{matrix}\right\} = AC : CB$; so sind die Dreyecke ACa' und BCb' ähnlich, und die Punkte a', b' werden um den unbeweglichen Punkt C einander ähnliche Vielecke oder ähnliche krumme Linien beschreiben, je nach dem die Anziehungskraft stoßweise oder stetig wirkt.

*) Princ. L. I. Lex. III. Cor. IV.

Man lasse sich die durch AB und $a'b'$ gelegte Ebene, in welcher die Punkte a' und b' ihre Vielecke oder krumme Linien beschreiben, mit sich selbst parallel so fortbewegen, daß der Punkt C die gerade Linie Cc mit derselben Geschwindigkeit beschreibe, mit welcher sich der Schwerpunkt der Körper A und B bewegt; so werden, wenn der Punkt C nach c gekommen ist, a' auf a und b' auf b fallen, mithin die zwey Körper in dieser sich fortbewegenden Ebene dieselbe krumme Linie beschreiben, welche sie um den Schwerpunkt C beschrieben haben würden, wenn er in Ruhe geblieben wäre. Da nun durch die Wirkung der Körper auf einander die Bewegung ihres Schwerpunkts nicht geändert wird, und die Gravitation auf ruhende oder schon bewegte Körper mit gleicher Stärke wirkt; so werden die zwey Körper, wenn man ihnen in Beziehung auf die nach der Richtung und mit Geschwindigkeit der Bewegung des Schwerpunkts sich selbst parallel fortrückende Ebene die relative Geschwindigkeiten Aa' und Bb' mittheilt, in dieser beweglichen Ebene um den mit dieser zugleich sich bewegenden Punkt C dieselbe Linie beschreiben, welche sie um eben diesen Punkt beschrieben haben würden, wenn er in Ruhe geblieben wäre. Die relative Bewegung der Körper gegen einander und um ihren Schwerpunkt als Mittelpunkt der Kräfte wird also durch die Bewegung des Schwerpunkts nicht geändert.

Wenn die relative Bewegung der Körper in Beziehung auf die bewegliche Ebene und die Bewegung des Schwerpunkts gegeben sind; so ist ihre absolute Bewegung gegeben. Es sey Cc der von dem Schwerpunkt in einer gegebenen von dem Augenblick an, da er in C und die Körper in A und B waren, verflossenen Zeit beschriebene Weg, welcher durch die Richtung und Geschwindigkeit dieser Bewegung gegeben ist. Da man die relative Bewegung der Körper kennt; so kann man den Ort b' des Körpers B in Beziehung auf die bewegliche aber als ruhend vorausgesetzte Ebene bestimmen. Man vollende das Parallelogramm $cCb'b$; so wird der Körper B in demselben Augenblick in b angekommen seyn, in welchem der Schwerpunkt in c ist.

§. 296. Die Bahnen AN und PM (Fig. 125.), welche zwey Körper A und P um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt S beschreiben, sind so wohl unter sich, als der Bahn AQ ähnlich, welche einer derselben A um den anderen P beschreibt.

Es seyen nemlich AN und PM in gleichen Zeiten um den in S ruhenden Schwerpunkt beschriebenen Bogen; so geht die gerade Linie MN, welche die gleichzeitigen Oerter der zwey Körper mit einander verbindet, durch den Schwerpunkt S, und es verhält sich

$$\left.\begin{array}{l}\text{sowohl } PS : SA \\ \text{als } MS : SN\end{array}\right\} \text{Masse von } A : \text{Masse von } P.$$

Da nun die in gleichen Zeiten um den Schwerpunkt S schriebene Winkel ASN und PSM gleich sind (I, 15.); und die Radii Vectores ein gegebenes Verhältniß zu einander haben; so sind die Linien AN und PM einander ähnlich.

Man ziehe durch P die Parallele PQ mit SN, und nehme $PQ = MN$.

Da $PS : SA = MS : SN$

so ist $PA : SA = \left\{\begin{array}{l} MN \\ PQ \end{array}\right\} : SN.$

Folglich haben die Radii Vectores PQ und SN ein gegebenes Verhältniß zu einander. Es sind aber auch die Winkel APQ und ASN gleich (I, 29.); mithin ist die relative Bahn AQ, welcher Körper A in Beziehung auf den Körper P beschreibt, der Bahn AN, also auch der Bahn PM ähnlich.

Wenn aber der Schwerpunkt S sich bewegt; so werden die Bahnen, welche die zwey Körper in einer mit der Geschwindigkeit und nach der Richtung der Bewegung des Schwerpunkts sich selbst parallel fortrückenden Ebene beschreiben, den Bahnen gleich und ähnlich seyn, welche sie im Fall der Ruhe des Schwerpunkts in einer ruhenden Ebene beschrieben haben würden (§. 295). Folglich werden auch die um den sich bewegenden Schwerpunkt beschriebene Bahnen unter sich und der Bahn ähnlich seyn, welche einer der Körper um den anderen beschreibt *).

*) Princ. L. I. prop. LVII.

§. 297. Wenn zwey Körper P und A (Fig. 125.) nach irgend einem Gesetz einander anziehen, und sich um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt S bewegen; so kann mit denselben Anziehungskräften einer derselben A um den anderen P, wenn dieser in Ruhe wäre, eine Bahn beschreiben, welche der relativen Bahn QA eben dieses Körpers A um den anderen sich bewegenden P gleich und ähnlich ist*). Um dieses zu zeigen, ziehe man aus einem gegebenen Punkt p (Fig. 126.) die geraden Linien pa, pn u. s. w. den Linien PA, MN u. s. w. gleich und parallel; so wird die krumme Linie an der der relativen Bahn AQ gleich und ähnlich seyn, welche der Körper A um den sich bewegenden Körper P beschreibt (§. 296.), mithin auch nach eben diesem §. ähnlich den krummen Linien AN, PM, welche die Körper P und A um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt S beschreiben. Dieser Punkt ruhe fürs erste, und es seyen in p und a zwey den Körpern P und A gleiche und ähnliche Körper. An die Punkte A und a der krummen Linien AN, an seyen die Tangenten At, at gezogen, und die Radii Vectores SN, pn seyen bis an die Tangenten nach R und r verlängert. Wegen der Aehnlichkeit der Figuren $SARN$ und $parn$ verhält sich

$$RN : rn = SN : pn$$
$$= SA : \begin{Bmatrix} pa \\ AP \end{Bmatrix}$$

Wenn also die Kraft, mit welcher der Körper A gegen den Körper P, mithin gegen den Zwischenpunkt S angezogen wird, zu der Kraft, mit welcher der Körper a von p angezogen wird, in dem gegebenen Verhältniß von $SA : AP$ wäre; so würden diese Kräfte die Körper A und a in gleichen Zeiten um die Räume RN, rn von den Tangenten ablenken, und der Körper a würde um den unbeweglichen Körper p in derselben Zeit den Bogen an beschreiben, in welcher der Körper A den Bogen AN seiner Bahn um den Schwerpunkt S beschreibt. Nun sind aber die Kräfte, welche auf A und a wirken, wegen der Gleichheit und Aehnlichkeit der Körper P und p, A und a, und wegen der Gleichheit der Distanzen PA und pa (oder, wenn die Körper in

*) Princ. L. I. prop. LVIII.

N und n sind, wegen der Gleichheit von MN und pn) beständig einander gleich; folglich würden die Körper A und a in gleichen Zeiten um gleich viel von den Tangenten AT, at abgelenkt werden, und es wird, wenn der Körper a von der Tangente at um den Raum nr, welcher in dem Verhältniß von $AP : AS$ größer ist als NR, eine größere Zeit erfordert werden. Da nun die Höhen, von welchen die gleichen auf die Körper A und a wirkende Kräfte diese Körper in ungleichen Zeittheilchen fallen machen würden, sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten (§. 253. n. 1. weil jede veränderliche Kraft sich einer gleichförmig beschleunigenden Kraft desto mehr nähert, je kleiner man die Zeittheilchen nimmt); so wird sich verhalten müßen

$$\left(\begin{matrix}\text{Quadr. d. Zeit der gleichf. Bew.}\\ \text{von } a \text{ durch } ar\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}\text{Quadr. d. Zeit d. gleichf.}\\ \text{Bew. von } A \text{ durch } AR\end{matrix}\right) = AP : AS.$$

$$\text{Aber Quadr. von } AR : \text{Quadr. von } ar = \overline{AS}^2 : \left\{\frac{\overline{ap}^2}{\overline{AP}^2}\right. \text{; folglich (§. 231. n. 5.)}$$

$$\text{Quadr. der Geschw. von } A : \text{Quadr. der Gschw. von } a = AS : \left\{\begin{matrix}AP\\ ap\end{matrix}\right\}.$$

Es werde also dem Körper a nach der Richtung der Tangente at in dem Punkt a eine Geschwindigkeit mitgetheilt, welche sich zu der Geschwindigkeit von A verhalte wie $\sqrt{ap} : \sqrt{AS}$; so werden, weil die Kräfte beständig einander gleich sind, und sich nach einerley Gesetz verändern, vermöge obiger Proportionen die gleichen Winkeln apn, ASN entsprechende Ablenkungen nr, NR von den Tangenten, die Kräfte mögen constant oder veränderlich seyn, beständig wie ap zu AS sich verhalten, und daher wird die krumme Linie an der krummen Linie AQ gleich und ähnlich seyn.

Wenn aber zweytens der Schwerpunkt S sich bewegt; so ist seine Bewegung geradlinigt und gleichförmig (§. 295.), und die relative Bahn des Körpers A um den ebenfalls sich bewegenden Körper P in einer sich selbst parallel mit der Bewegung des Schwerpunkts fortrückenden Ebene bleibt der Bahn gleich und ähnlich, welche im Fall des ruhenden Schwerpunkts würde beschrieben worden seyn (§. 296.), und daher wird der Körper a um den ruhenden Körper p

eine der Bahn AQ gleiche und ähnliche Bahn beschreiben, in welcher sich A um P bewegt.

§. 298. Wenn die anziehende Kraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist; so kann der Satz des vorhergehenden §. auch so bewiesen werden. Es ist nach §. 120. n. 6. und mit Beybehaltung der daselbst gebrauchten Benennungen $2a = \frac{2kz^2}{2kz - v^2}$. Wenn nun k unverändert bleibt, und eine andere der ersteren ähnliche Ellipse beschrieben werden soll, deren halbe große Axe a' ist; so muß, wenn z' einen dem z ähnlich liegenden Radius Vector und v' die Geschwindigkeit in dieser zweyten Ellipse bezeichnet

$$\begin{aligned} 2a : 2a' &= z : z', \\ &= 2kz : 2kz', \end{aligned}$$

$$\text{und zugleich} = \frac{2kz^2}{2kz - v^2} \quad \frac{2kz'^2}{2kz' - v'^2};$$

$$\text{folglich } \left.\begin{matrix} z : z' \\ 2kz : 2kz' \end{matrix}\right\} = 2kz - v^2 \quad 2kz' - v'^2 \text{ seyn.}$$

Mithin muß sich verhalten

$$\left.\begin{matrix} 2kz \quad 2kz' \\ z : z' \end{matrix}\right\} = v^2 \quad v'^2,$$

oder 1) $\sqrt{a} : \sqrt{a'} = v : v'$.

Was die Richtung der Bewegung betrift; so sey m' der Winkel des Radius Vector z' mit der Tangente, und b' die halbe kleine Axe der zweyten Ellipse. Alsdenn ist nach §. 280. n. 11.

$$k \quad a = v^2 \,\overline{\text{Sin.}\, m}^2 : b^2$$

$$\text{und } a' : k = b'^2 \quad v'^2 \,\overline{\text{Sin.}\, m'}^2.$$

$$\text{Aber } \underline{a' : a = v'^2 : v^2 \text{ (n. 1.)};}$$

$$\text{folglich } a'^2 : a^2 = b'^2 \,\overline{\text{Sin.}\, m}^2 \quad b^2 \,\overline{\text{Sin.}\, m'}^2$$

Es soll sich aber auch verhalten $a' : b' = a : b$, oder $a'^2 : a^2 = b'^2 : b^2$; folglich muß

2.) $\overline{\text{Sin.}\, m}^2 = \overline{\text{Sin.}\, m'}^2$, und daher, wenn die zwey Ellipsen ähnlich liegen und nach einerley Richtung beschrieben werden sollen, $m = m'$ seyn. Ebenso wird der Beweis für die übrigen Kegelschnitte geführt.

§. 299. Wir wollen nun von diesen Sätzen eine Anwendung auf die Prüfung der keplerischen Gesetze machen. Was fürs erste das Gesetz der Flächenräume betrift; so wird dieses auch alsdenn statt finden, wenn zwey Körper auf einander wirken, mithin beyde zugleich sich bewegen, vorausgesetzt daß die gegenseitige Attraction direct den Massen proportional sey, und nach irgend einem Gesetz sich mit dem Abstand der Körper ändere. In diesem Fall geht die Richtung der Attraction durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt S (Fig. 125.) der zwey Körper, und man kann diesen Punkt als den Mittelpunkt der Kräfte betrachten, gegen welchen jeder der Körper getrieben wird; folglich sind die Sectoren ASN, ASN', welche die aus dem Schwerpunkt S gezogene Radii Vectores abschneiden, den Zeiten, in welchen sie beschrieben werden proportional (§. 271.). Da nun die relative Bahn AQ, welche einer der Körper A um den anderen P beschreibt, der Bahn AN ähnlich und PQ immer mit SN parallel ist (§ 296.); so sind die Figuren ASN und APQ, ASN' und APQ ähnlich, und es verhält sich sowohl

$$\left.\begin{array}{ll}\text{der Sect. } ASN & \text{Sect. } APQ \\ \text{als der Sect. } ASN' & \text{Sect. } APQ'\end{array}\right) = \overline{AS}^2 \quad \overline{AP}^2;$$

folglich verhält sich auch der Sect. ASN : Sect. ASN'
$=$ Sect. APQ : Sect. APQ'.

Die Sectoren der Bahn des Körpers A um den Schwerpunkt S sind aber den Zeiten proportional, folglich sind auch die Sectoren der relativen Bahn dieses Körpers um den anderen P den Zeiten proportional, in welchen sie beschrieben werden *).

Wenn die anziehende Kraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist; so werden zweytens so wohl die Bahnen um den Schwerpunkt, als auch die Bahn eines jeden der Körper um den andern übereinstimmend mit dem ersten keplerischen Gesetz Kegelschnitte seyn. Da nemlich die Kraft in A zur Kraft in N sich verhält wie das Quadrat von MN zu dem Quadrat von AP, mithin, weil diese Distanzen durch den Schwerpunkt S in einem gegebenen Verhältniß getheilt werden, auch wie das Quadrat von SN zu dem Quadrat von SA; so beschreibt der Körper A um den Schwerpunkt S als Brennpunkt einen Kegelschnitt (§. 282.). Aber die Bahnen PM und AQ sind der Bahn AN ähnlich (§. 296). Folglich beschreiben zwey im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung sich anziehende Körper so wohl

*) Princ. L. I. prop. LVIII. Cor. 3.

ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt als auch jeder um den andern als Brennpunkt in gleichen Zeiten ähnliche Kegelschnitte *). Endlich verhält sich die Umlaufszeit t zweyer um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt sich bewegender Körper zu der Zeit t' in welcher einer derselben A um den anderen P, wenn dieser unbeweglich wäre, eine der relativen Bahn von A um den beweglichen Körper P gleiche und ähnliche Bahn beschreibt, wie Quadratwurzel aus der Masse m von P zu der Quadratwurzel aus der Summe $m + m'$ der Massen von A und P **).

Denn vermöge §. 297. verhalten sich die Zeiten, in welchen ähnliche Bogen AN, an (Fig. 125. 126.) beschrieben werden, wie die Quadratwurzel aus pa oder AP, d. i. (weil $SA : SP = m : m'$, $SA : AP = m : m + m'$), wie $\sqrt{m} : \sqrt{m + m'}$. Folglich verhält sich auch (V, 12.) die Summe aller ersteren Zeiten, oder t, zur Summe aller zweyten, oder zu t', wie $\sqrt{m} : \sqrt{m + m}$.

Wenn nun die anziehende Kraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist; so wird der Körper a um den unbeweglichen Körper p einen Kegelschnitt beschreiben (S. d. Ende des 291. §.), mithin wird, wenn dieser eine Ellipse ist, und um denselben Körper p ein dem a ähnlicher und gleicher Körper ebenfalls eine Ellipse beschreibt, deren halbe große Axe sich zu der halben großen Axe der ersteren wie $a'' : a'$ verhält, das Quadrat der Umlaufszeit t'' in dieser zweyten Ellipse zum Quadrat der Umlaufszeit t' in der ersteren sich verhalten wie $a''^3 : a'^3$ (§. 283. n. 4.). Soll aber die Umlaufszeit in der Ellipse, deren halbe große Axe $= a''$ ist, der Umlaufszeit t gleich werden; so muß sich verhalten $t'^2 : t^2 = t'^2 : t''^2$

mithin $m + m' : m = a'^3 : a''^3$.

Es sey q die erste zweyer mittleren geometrischen Proportionalgrößen zwischen $m + m'$ und m; so wird sich verhalten $\overline{m + m'}^3 : q^3 = m + m' : m$

$$= a'^3 : a''^3,$$

*) Princ. L. I. prop. LVIII. cor. 2.
**) Princ. L. I. prop. LIX.

und $m + m' : q = a' : a''$.

Aber die Bahn an ist der Bahn AQ gleich und ähnlich (§. 297.); folglich verhält sich die halbe große Axe der Ellipse, welche der Körper A um den Körper P beschreibt zu der halben großen Axe der Ellipse, welche eben dieser Körper in derselben Zeit um den ruhenden Körper P beschreiben würde, wie $m + m' : q$ oder wie $\sqrt[3]{m + m'} : \sqrt[3]{m}$ *).

Wenn also um einen großen Körper, dessen Masse = M ist, mehrere kleine Körper, deren Massen m, m' sind, Ellipsen beschreiben (in so fern man nemlich die Wirkungen der kleineren Körper auf einander vernachläßigt); so würden, wenn M unbeweglich wäre, die Würfel der halben großen Axen sich verhalten wie die Quadrate der Umlaufszeiten. Wenn aber M ebenfalls beweglich ist; so wird man diese halbe große Axen in dem Verhältniß von $\sqrt[3]{M + m} : \sqrt[3]{M}$ und von $\sqrt[3]{M + m'} : \sqrt[3]{M}$ beziehungsweise vergrößern müssen, um die halbe große Axen A und A' der Ellipsen zu erhalten, welche die Körper m und m in den Zeiten T und T' um den beweglichen Körper M beschreiben **), so daß man die Proportionen haben wird

$$A^3 : A'^3 = (M + m)\, T^2 : (M + m')\, T'^2,$$

und $$\frac{A^3}{M + m} : \frac{A'^3}{M + m'} = T^2 : T'^2.$$

Das dritte keplerische Gesetz leidet also durch die gegenseitige Attraction der Planeten und der Sonne eine kleine Aenderung. Es sind nemlich die Quadrate der Umlaufszeiten im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der Würfel der halben großen Axen, und dem umgekehrten der Summen der Sonnenmasse und der Masse eines jeden der Planeten. Das letztere dieser Verhältniße wird sich aber desto mehr dem Verhältniß der Gleichheit nähern, je größer die Sonnenmasse in Vergleichung mit der Masse der Planeten ist. Man wird in der Folge sehen, daß wirklich die Planeten eine in Vergleichung mit der Sonne geringe Masse

*) Princ. L. I. prop. LX.

**) Princ. L. III. prop. XV.

haben, und daher mit den Beobachtungen übereinstimmend das dritte keplerische Gesetz sehr nahe statt finden muß.

§. 300. Was in dem vorhergehenden §. von den Umlaufszeiten gezeigt worden ist, ergiebt sich auch aus §. 283. n. 1. Es verhält sich (Fig. 125.) $AP^2 : MN^2 = AS^2 : SN^2$, und daher ist, wenn die Gravitation des Körper A gegen den Körper P umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist, auch die Kraft, mit welcher der Körper A gegen den Schwerpunkt S getrieben wird, umgekehrt dem Quadrat der Entfernung von diesem Punkt proportional. Mithin kann der Körper A eine Ellipse um den Schwerpunkt S als Brennpunkt beschrieben. Es sey A der diesem Brennpunkt zunächst liegende Scheitel dieser Ellipse, $AS = h$, und die Gravitation von A gegen P in der Entfernung AP sey $= k'$; so ist eben diese der beständig gegen den Schwerpunkt S gerichteten Centripetalkraft in der Entfernung h gleich, und, wenn man die halbe große Axe der Ellipse, welche der Körper A um S beschreibt, mit a, die Umlaufszeit mit t bezeichnet,

$$t^2 = \frac{4a^3\pi^2}{h^2k'} \text{ (§. 283. n. 1.).}$$

Aber, wenn man die Massen der Körper P und A beziehungsweise gleich M und m, und $PA = h'$ setzt, verhält sich $h : h' = M : M+m$, und es ist PA oder h' der Abstand des dem Körper P als Brennpunkt zunächst liegenden Scheitels der Ellipse, welche der Körper A um den P beschreibt, von diesem Brennpunkt, weil die letztere Ellipse der ersteren ähnlich ist und ähnlich ligt (§. 296.). Folglich ist, wenn man die halbe große Axe der letzteren Ellipse $= A$ setzt,

so wohl $\left.\begin{array}{l} h : h' \\ \text{als } a : A \end{array}\right\} = M : M+m,$

und daher $\dfrac{a^3}{h^2} = \dfrac{M}{M+m} \cdot \dfrac{A3}{h'^2}$.

Da nun die Umlaufszeiten in diesen zwey Ellipsen einander gleich sind; so ist das Quadrat der Umlaufszeit T des Körpers A um den Körper P

$$T^2 = t^2 = \frac{4a^3\pi^2}{h^2k'} = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{4A^3\pi^2}{h'^2k'}.$$

Ebenso ist, wenn ein anderer Körper, dessen Masse $= m'$ ist, in der Zeit T' um den Körper P als Brennpunkt eine Ellipse beschreibt, deren halbe große $= A'$ ist, und deren dem Körper P zunächst liegender Scheitel von diesem Körper den Abstand H' hat und wenn man überdiß die Gravitation der Masse m' gegen M in der Distanz $H' = K'$ setzt,

$$T'^2 = \frac{M}{M+m'} \cdot \frac{4A'^3\pi^2}{H'^2K'}.$$

Aber die Gravitation der Massen m und m' gegen die Masse M ist independent von der Größe dieser Massen; folglich ist $H'^2 : h'^2 = k' : K'$, und $H'^2K' = h'^2k'$, mithin

$$T'^2 = \frac{M}{M+m'} \cdot \frac{4A'^3\pi^2}{h'^2k'}.$$

Also verhält sich $T^2 : T'^2 = \frac{A^3}{M+m} : \frac{A'^3}{M+m'}$, wie man in dem vorhergehenden §. gefunden hat.

Oder auch so: weil die Gravitation von m gegen M zu der Gravitation von M gegen m sich verhält wie $M : m$; so verhält ihre Summe zu der Gravitation von m gegen M wie $M+m : M$. Folglich wird sich die Annäherung der zwey Massen, wenn beyde beweglich sind, zu ihrer Annäherung in derselben Zeit, wenn M unbeweglich wäre, verhalten wie $M + m : M$. Mithin ist, wenn beyde Massen beweglich sind, die relative Gravitation von m gegen M in dem Verhältniß von $M + m$ zu M größer, als wenn M unbeweglich wäre. Aber vermöge §. 283. n. 1. ist unter übrigens gleichen Umständen das Quadrat der Umlaufszeit umgekehrt der Centripetalkraft proportional; folglich ist das Quadrat der Umlaufszeit eines Körpers um einen andern unbeweglichen in demselben Verhältniß größer, als das Quadrat seiner der Umlaufszeit um eben diesen Körper, wenn er beweglich ist, in welchem die Summe der zwey Massen größer ist als die Masse des letzteren Körpers, woraus sich wiederum die obige Proportion ergiebt.

Die Zeit T, in welcher ein um den beweglichen Körper in einem Kegelschnitt, dessen Parameter $= 2l'$ ist, umlaufender Körper einen gegebenen Sector APQ beschreibt, findet man nach §. 283. n. 5. Sey der Parameter des ähnlichen um den Schwerpunkt S beschriebenen Kegelschnitts $= 2l$; so verhält sich

$$\begin{aligned} \frac{l'}{\sqrt{l}}\ \frac{l}{\sqrt{l'}} &= \frac{h'}{\sqrt{h}}\ \frac{h}{\sqrt{h'}} \\ &= \sqrt{M} : \sqrt{M+m} \end{aligned}$$

$$\text{Sect. } ASN : \text{Sect. } APQ = h^2 : h^{2}$$

folglich Sect. $ASN \sqrt{l'}$: Sect. $APQ \sqrt{l} = h\sqrt{M} : k'\sqrt{M+m'}$.

Daher ist $\frac{2\,\text{Sect. } ASN}{h\sqrt{lk'}} = \frac{2\,\text{Sect. } APQ}{h'\sqrt{l'k'}} \sqrt{\frac{M}{M+m}}.$

Aber das erste Glied ist der Ausdruck der Zeit t, in welcher der Sector ASN beschrieben wird (§. 283. n. 5.), und t ist $= T$; folglich ist

$T = \frac{2\,\text{Sect.}\,APQ}{h'\sqrt{l'k'}}\sqrt{\frac{M}{M+m}}$. und diß ist der Satz, von welchem man §. 204. n. 9. S. 328. Gebrauch gemacht hat.

§. 301. Die Masse der Himmelskörper beurtheilt man nach der Stärke der Anziehungskraft, mit welcher sie auf einen ausserhalb ihrer Oberfläche befindlichen Körper in einer gegebenen Entfernung wirken, und diese Kraft ist es, welche man kennen muß, um die Einwirkungen der Himmelskörper auf einander berechnen zu können. Da man nun die Kräfte durch die Geschwindigkeiten mißt, welche sie in einer gegebenen Zeit entweder wirklich erzeugen, oder erzeugen würden, wenn sie während dieser Zeit constant blieben (§. 243.); so wird es bey der Bestimmung des Verhältnißes der Masse der Sonne zu der Masse eines Planeten darauf ankommen, fürs erste die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche die Sonne diesem Planeten in einer gegebenen Entfernung von ihr in einer gegebenen Zeit mitgetheilt haben würde, und zweytens die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche der Planet einem ausserhalb seiner Oberfläche befindlichen Körper in einer eben so großen Zeit und in derselben gegebenen Entfernung mitgetheilt haben würde.

Die erste ergiebt sich aus der siderischen Umlaufszeit des Planeten, aus seiner mittleren Entfernung von der Sonne, und aus dem gegebenen Gesetz, nach welchem sich die Anziehungskraft mit der Entfernung ändert. Wenn nemlich der Planet statt einer Ellipse einen ihre große Axe zum Durchmesser habenden Kreis um die Sonne als Mittelpunkt beschriebe; so würde seine Umlaufszeit dieselbe seyn (§. 283.), und man wird, wenn man den mittleren Abstand des Planeten von der Sonne $= A$, seine siderische Umlaufszeit $= T$, und die Geschwindigkeit, welche die Sonne dem Planeten in der Distanz A während der Zeiteinheit, durch welche T ausgedrückt ist, mitgetheilt haben würde, $= K$ setzt, nach §. 273. n. 2. haben $K = \frac{4A\pi^2}{T^2}$. Weil aber der Planet auch die Sonne anzieht; so ist dieser Werth von K die Summe der durch den Planeten und die Sonne erzeugten Geschwindigkeiten, und man muß denselben in dem

Ver-

Verhältniß der Maße der Sonne zu der Summe der Massen der Sonne und des Planeten vermindern, um diejenige Geschwindigkeit zu finden, welche die Sonne, wenn sie unbeweglich wäre, dem Planeten mittheilen würde, so daß der verbesserte Werth von K seyn wird $= \frac{M}{M+m} \cdot \frac{4A\pi^2}{T^2}$. Setzt man nun die Geschwindigkeit, welche die Sonne dem Planeten in der gegebenen Distanz r mittheilen würde, $= k''$; so wird sich vermöge des Gesetzes der Gravitation verhalten $A^2 : r^2 := k'' : K$, und man wird haben

$$1.)\ k'' = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{4A^3\pi^2}{r^2T^2}.$$

Eben dieser Ausdruck ergiebt sich auch aus der §. 299. oder §. 300. gefundenen Umlaufszeit in der Ellipse, welche ein Körper um einen anderen ebenfalls beweglichen Körper beschreibt, wenn man statt h'^2k' die ihr gleiche Größe $r^2 \cdot k''$ setzt.

Die Geschwindigkeit, welche der Planet einem ausserhalb seiner Oberfläche und in der Distanz r von seinem Mittelpunkt befindlichen Körper in derselben Zeiteinheit mitgetheilt haben würde, ergiebt sich, wenn der Planet einen Trabanten hat, aus der Umlaufszeit und dem Abstand des Trabanten von dem Mittelpunkt des Planeten. Man findet nemlich hieraus die Fallhöhe der Körper in der Nähe seiner Oberfläche, wie §. 286. bey dem Mond gezeigt worden ist.

Es sey diese Fallhöhe $= g$, mithin die erzeugte Geschwindigkeit $= 2g$, und in n. 1. sey r dem Halbmesser des Planeten, dessen Masse man mit der Sonnenmasse vergleichen will, gleich genommen; so wird sich verhalten

die Masse der Sonne oder M : Masse des Planeten m $= k'' : 2g$

Aber $M + m$: M $= \frac{4A^3\pi^2}{r^2T^2} : k''$ (n. 1.);

folglich ist 2.) $M + m$: m $= \frac{4A^3\pi^2}{r^2T^2} : 2g$

woraus man erhält $\frac{M}{m} = \frac{2A^3\pi^2}{gr^2T^2} - 1.$

Es sey die siderische Umlaufszeit des Trabanten $= t$, sein mittlerer Abstand von seinem Hauptplaneten $= a$, und die Masse des Trabanten verhalte sich zu der Masse des Planeten $= \mu : m$; so wird man haben $2g = \frac{m}{m+\mu} \cdot \frac{4a^3\pi^2}{r^2t^2}$, und daher

$$M+m : m = \frac{A^3}{T^2} : \frac{m}{m+\mu} \quad \frac{a^3}{t^2},$$

oder 3.) $M+m : m+\mu = \frac{A^3}{T^2} : \frac{a^3}{t^2}$.

Man kann aber die Masse des Trabanten in Vergleichung mit der Masse des Planeten vernachläßigen, und alsdenn ist nahe

4.) $M+m : m = A^3t^2 \quad a^3T^2$

oder $\frac{M}{m} = \frac{A^3}{a^3} \cdot \frac{t^2}{T^2} - 1$.

Heißen die Massen zweyer Planeten m und m', ihre mittleren Abstände von der Sonne A und A', und ihre siderischen Umlaufszeiten T und T'; so verhält sich

$$A^3 \quad A'^3 = (M+m)\,T^2 : (M+m')\,T'^2 \text{ (§. 299. oder 300.)}$$

und daher 5.) $A^3T'^2 : A'^3T^2 = M+m : M+m' = \frac{M}{m} + 1 : \frac{M}{m} + \frac{m'}{m}$.

Wenn also die siderischen Umlaufszeiten zweyer Planeten, ihre mittlere Entfernungen von der Sonne, und das Verhältniß der Masse m eines derselben zu der Sonnenmasse M gegeben sind; so findet man durch diese Proportion $\frac{M}{m} + \frac{m'}{m}$, mithin auch $\frac{m'}{m}$, oder das Verhältniß der Massen m und m'. Man wird sich aber aus dem dritten Capitel des zweyten Buchs erinnern, daß die genaue Bestimmung der großen Axen der elliptischen Planetenbahnen aus den geocentrischen Längen und Breiten der Planeten mit vielen Schwierigkeiten verbunden ist. Da sich nun vermöge des dritten keplerischen Gesetzes die Quadrate der siderischen Umlaufszeiten sehr nahe wie die Würfel der mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne verhalten; so ist das Verhältniß von $M+m : M+m'$ nahe das Verhältniß der Gleichheit, und ein kleiner in der Bestimmung der mittleren Entfernungen begangener Fehler wird, wenn M in Vergleichung mit m und m' sehr groß ist, einen sehr beträchtlichen Einfluß auf die Werthe der Massen haben.

In den Proportionen n. 2, 3. und 4. hingegen ist der Einfluß der in den mittleren Distanzen liegender Fehler auf die Verhältniße der Massen geringe, weil die Vorderglieder der Verhältniße beträchtlich größer als die Hinterglieder sind. Man kann also auch die nach dem dritten keplerischen Gesetz aus den Umlaufszeiten geschlossene mittlere Entfernungen der Planeten von der Sonne in jene Proportionen setzen. Da vermöge dieses Gesetzes nahe $A^3 : A'^3 = T^2 : T'^2$; so folgt hieraus und aus n. 4. nahe

6.) $M + m : m = A'^3 t^2 : a^3 T'^2$

oder $\frac{M}{m} = \left(\frac{A'}{a}\right)^3 \left(\frac{t}{T'}\right)^2 - 1$,

d. i. man kann statt der Umlaufszeit und der mittleren Entfernung des Planeten, dessen Masse man sucht, die Entfernung und Umlaufszeit eines anderen Planeten setzen.

§. 302. Man setze den Winkel, unter welchem in einer der mittleren Entfernung eines Planeten von der Sonne gleichen Distanz der Halbmesser der Bahn eines seiner Trabanten erscheint, $= e$; so verhält sich $A : a = 1 : \text{Sin. } e$, und es ist nach §. 301. n. 4.

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{t}{T}\right)^2 \overline{\text{Cosec. } e}^3 - 1,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{\left(\frac{t}{T}\right)^2 \overline{\text{Cosec. } e}^3 - 1},$$ welcher Bruch die Masse des Planeten ausdrückt, wenn man die Masse der Sonne der Einheit gleich setzt.

Es ist z. B. die siderische Umlaufszeit des Jupiters = 4332,5963 Tagen (§. 191.), der in der mittleren Entfernung des Jupiters von der Erde oder der Sonne gesehene scheinbare Halbmesser der Bahn seines vierten Trabanten = 8′ 16″ (§. 150.), und die siderische Umlaufszeit dieses Trabanten = 16,689019 Tagen (§. 104.); also ist hier

$$\begin{aligned}
\left.\begin{array}{r}\text{C. Lg. Sin. } e\\ \text{Lg. Cosec. } e\end{array}\right\} &= 2{,}6189439\\
3.\ \text{Lg. Cosec. } e &= 7{,}8568317\\
2.\ \text{Lg. } t &= 2\ 4448704\\
&\ 10{,}3017021\\
2.\ \text{Lg. } T &= 7{,}2734964\\
&\ 3{,}0282057;\quad 1067{,}101,
\end{aligned}$$

mithin $\frac{M}{m} = 1066{,}101$,

oder die Masse des Jupiters ist $\frac{1}{1066,101}$ der Masse der Sonne.

Für den Saturn hat man $T = 10758,96984$ Tagen (§. 191.), die Umlaufszeit t seines sechsten Trabanten $= 15,9453$ T. (§. 117.) und nach den von Pound mit einer 123 Fuß langen Fernröhre angestellten Beobachtungen $e = 2' 58'',2$ *), woraus die Masse des Saturns $= \frac{1}{3405,25}$ der Sonnenmasse folgt.

Für den Uranus ist $T = 30688,713$ T. und in Beziehung auf seinen vierten Trabanten $t = 13,4559$ T., $e = 44'',23$ nach Herschel; mithin die Masse des Uranus $= \frac{1}{19498}$ der Sonnenmasse.

Die Masse der Erde kann, weil die freye Fallhöhe der Körper in der Nähe der Erdoberfläche durch die Beobachtungen gegeben ist, mittelst der Proportion §. 301. n. 2. gefunden werden.

Wegen der geringen Abweichung der Erde von der Kugelgestalt wird die Gravitation gegen die Erde sehr nahe der Gravitation gegen eine Kugel gleich seyn, welche mit der Erde einerley körperlichen Inhalt hat. Der Halbmesser dieser Kugel ist sehr nahe einem Halbmesser des elliptischen Erdsphäroids unter einer Breite gleich, welche $\frac{1}{3}$ des Sinus totus zum Quadrat ihres Sinus hat; folglich wird man die freye Fallhöhe der Körper unter dieser Breite zu nehmen haben, welche nach §. 270. in einer Sekunde 15,07864 pariser Fuß beträgt. Wegen der durch die Axendrehung der Erde entstehenden Schwungkraft ist aber diese aus den Pendellängen geschlossene Fallhöhe kleiner, als die Höhe, von welcher unter der erwähnten Breite ein Körper aus der Ruhe in einer Sekunde fallen würde. Sey a = dem Halbmesser des Erdäquators, t die in Sekunden mittlerer Sonnenzeit ausgedrükte Umdrehungszeit der Erde um ihre Axe; so ist die Schwungkraft $= \frac{v^2}{2ag}$ (§. 273. n. 3.) $= \frac{2a\pi^2}{gt^2}$, weil $v = \frac{2a\pi}{t}$. Demnach ist, weil $t = 23$ St. 56 M. 4,091 Sek. (§. 44.), $a = 3271691$ Tois. (§. 145.) $= 19630146$ par. Fuß, und unter dem Aequator die freye Fallhöhe in der ersten Sekunde $= 15,05138$ par. Fuß ist (§. 270.), die Schwungkraft unter dem Aequator $= \frac{1}{288,383}$ der beobachteten (um die Schwungkraft verminderten) Schwere unter dem Aequator, und $\frac{1}{288,909}$ der beobachteten Schwere unter der Breite, deren Quadrat des Sinus $= \frac{1}{3}$ ist. Um die Verminderung der Schwere durch die Schwungkraft für irgend einen Parallelkreis des Aequators zu finden, sey ca (Fig. 127.) der Halbmesser des Aequators obiger Kugel, pp' ihre Umdrehungsaxe, und cm ein gegen den Aequator geneigter Halbmesser. Man ziehe mq auf pp' senkrecht. Die Schwungkraft wirkt immer in

*) *La Lande* Astronomie. T. III, n. 3070. pag. 207.

der Ebene der Kreise, welche die Körper beschreiben, und ist bey einerley Umlaufzeit den Halbmessern der Kreise proportional (§. 273. n. 2.), so daß, wenn die Schwungkraft unter dem Aequator $= ab$ ist, die Schwungkraft mn unter der Breite acm sich zu ab verhalten wird = wie $mq : ac$. Man zerfälle die Kraft mn in die Kräfte nr und nt wovon die erstere auf cm senkrecht, die letztere mit cm parallel sey; so wird nt oder mr die durch die Schwungkraft bewirkte Verminderung der Schwere seyn, und es wird sich verhalten

$$mn : mr = \left\{ \begin{matrix} cm \\ ac \end{matrix} \right\} \quad mq.$$

Aber $ab : mn = ac : mq$;

folglich ist $ab \quad mr = \overline{ac}^2 \quad \overline{mq}^2$

Da nun $\overline{cm}^2 : \overline{cq}^2 = 3 : 1$; so ist $\left\{ \frac{\overline{cm}^2}{\overline{ac}^2} \right\} : \left\{ \frac{\overline{cm}^2 - \overline{cq}^2}{\overline{mq}^2} \right\} = 3 : 2$, mithin

die Verminderung der Schwere in $m = \frac{2}{3}$ der Schwungkraft unter dem Aequator $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{288{,}909} = \frac{1}{433{,}363}$ der beobachteten Schwere in m. Demnach muß man die obige Fallhöhe um den 433,363sten Theil ihre Größe vermehren, um die freye Fallhöhe eines anfänglich ruhenden Körpers unter der Breite zu erhalten, deren Quadrat des Sinus $= \frac{1}{3}$ ist. Also ist die verbesserte Fallhöhe = 15,11343 par. Fuß. Das Verhältniß von A zu r, welches in der Proportion n. 2. §. 301. noch vorkommt, ergiebt sich mittelst der Horizontalparallaxe der Sonne, weil $A : r = 1 :$ Sin. 8'', (§. 50.). Ferner ist $T = 365$ T. 6 St. 9 M. 11,5 Sek. (§. 191.), welche Zeit, weil die oben berechnete Fallhöhe einer Sekunde zugehört, ebenfalls in Sekunden ausgedrückt werden muß. Endlich ist der verbesserte Werth von $g = 15{,}11343$, und $r = 3268111$ Tois. (§. 143 Halbmesser einer mit der Erde gleichen Inhalt habenden Kugel) = 19608666 par. Fuß. Hieraus findet sich $\frac{M}{m} = \frac{2r\pi^2}{g.\text{Sin. }8''\ \overline{8}^3 T^2} - 1 = 331144{,}3$, oder die Masse

der Erde ist $\frac{1}{331144}$ der Masse der Sonne. Nimmt man mit La Place die Sonnenparallaxe = 27 Decimalsekunden = 8,748 Sexagesimalsekunden an; so findet man $\frac{1}{337084{,}7}$.

§ 303. **Die folgende Tafel enthält die Angaben der Massen der sieben älteren Planeten nach la Place *). In der ersten Columne ist die Masse der Sonne, in der zweyten die Erdmasse zur Einheit angenommen.**

Merkur . . .	$\frac{1}{2025810}$	0,1663956
Venus . . .	$\frac{1}{356632}$	0,9451928

*) Expsition du Système du Monde, pag. 208.

Erde	$\frac{1}{337086}$	1,0000000
Mars	$\frac{1}{2546320}$	0,1323816
Jupiter	$\frac{1}{1067,09}$	315,7152
Saturn . . .	$\frac{1}{3534,08}$	95,37871
Uranus . . .	$\frac{1}{19504}$	17,28292

Sonnenmasse = 337086 mal die Erdmasse.

Die Verhältniße der Massen, welche die Zahlen dieser Tafel angeben, sind also eigentlich die Verhältniße der Geschwindigkeiten, welche diese Himmelskörper einem ausserhalb ihrer Oberfläche in einer gegebenen Distanz von ihren Mittelpunkten befindlichen mit ihnen gleichartigen Körper in einer gegebenen Zeit mittheilen würden. Nun zeigen aber die Versuche, daß auch ungleichartige Körper in gleichen Zeiten von gleichen Höhen fallen (§. 270.), mithin gleiche Geschwindigkeiten erlangen; folglich findet entweder kein Unterschied zwischen der Stärke der Anziehungskraft der Theilchen ungleichartiger Materien statt, oder es müßen, wenn es hierin einen Unterschied giebt, die verschiedenen Materien so durch die ganze Erde verbreitet seyn, daß die Summe ihrer Anziehungskräfte, d. i. die Anziehungskraft der ganzen Erde für alle Körper dieselbe bleibt *). Im ersteren Fall würde, wenn man sich die Körper weit genug von einander entfernt gedenkt, so daß die Verschiedenheit der Entfernungen der Punkte des einen von den Punkten des andern keinen merklichen Einfluß auf die Aenderung der Stärke der Anziehung hat, oder die Körper kugelförmig annimmt, die Anziehungskraft der Menge der materiellen Theile proportional seyn, im letzteren Fall aber nicht. Man kann also aus der Stärke der Anziehungskraft eben so wenig auf die Menge der materiellen Theile des anziehenden Körpers schließen, als man in der Physik von einem Körper, welcher bey einerley Volumen ein noch einmal so großes Gewicht hat als ein anderer, behaupten kann, er enthalte noch einmal so viel Materie als der andere. So wie man aber in der Physik den ersteren Körper noch einmal so dicht nennt, als den zweyten, oder allgemein die Dichtigkeit der

*) *J. T. Mayer* de affinitate chemica corporum coelestium. Comment. Societatis Reg. scient. Gotting. 1804-1808. Vol. XVI.

Körper direct ihren Gewichten und umgekehrt den Räumen, welche sie einnehmen, proportional setzt, und aus den nach dieser Regel bestimmten Dichtigkeiten zweyer Körper richtig schliesst daß ihre Gewichte im zusammengesetzten Verhältniß der Räume und der Dichtigkeiten seyen, so kann man auch in der Astronomie die Dichtigkeit der Himmelskörper direct der Stärke ihrer Anziehungskräfte in einer gegebenen Entfernung, und umgekehrt den Räumen, welche sie einnehmen, proportional setzen, und dabey die Frage über die Menge der materiellen Theile, welche sie enthalten, unentschieden lassen. Wenn man also von zwey gleich großen Himmelskörpern sagt, daß der eine noch einmal so dicht sey, als der andere; so heißt diß so viel: der erstere wird einem ausserhalb seiner Oberfläche und in einer gegebenen Entfernung von seinem Mittelpunkt befindlichen Körper in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Sekunde, eine noch einmal so große Geschwindigkeit mittheilen, als diejenige ist, welche der zweyte demselben in einer gleich großen Entfernung von ihm befindlichen Körper in einer Sekunde mittheilen würde. Allgemein, wenn zwey Körper A und B von einerley Volumen einem dritten C in einer gegebenen Entfernung und in einer gegebenen Zeit Geschwindigkeiten mittheilen, welche sich wie $a:b$ verhalten, sagt man, die Dichtigkeit von A verhalte sich zu der Dichtigkeit von B, wie $a:b$. Es seyen A' und B' zwey andere mit den ersteren gleich große Körper, welche dem Körper C in derselben Entfernung und in gleichen Zeiten Geschwindigkeiten mittheilen, die sich ebenfalls wie $a:b$ verhalten. Beständen nun diese zwey Körper aus einerley Materie; so würde sich die Menge der Materie von A' zu der Menge der Materie von B' verhalten müßen wie $a:b$. Man nennt alsdenn die Dichtigkeiten von A' und B' die mittleren Dichtigkeiten von A und B. Wäre der Körper C unbeweglich, und befänden sich die vier übrigen in gleichen Entfernungen von diesem; so würden sie gegen den letzteren in gleichen Zeiten von gleichen Höhen fallen, und die Gewichte von A und B würde den Gewichten von A' und B' beziehungsweise gleich seyn. Aber das Gewicht von A' verhält sich zu dem Gewicht von B' wie die

Menge der Materie von A' zu der Menge der Materie von $B = a : b$. Folglich verhält sich auch das Gewicht von A zu dem Gewicht von $B = a : b$. So wie man nun die Massen der Erdkörper ihren Gewichten proportional setzt, setzt man die Massen der Himmelskörper den Geschwindigkeiten, welche sie erzeugen, mithin auch den Gewichten proportional, welche sie haben würden, wenn sie gegen einen unbeweglichen Körper gravitirten, und gleich weit von diesem entfernt wären, und es ist nur von ihrer mittleren Dichtigkeit die Rede, wenn man die Massen der Menge der materiellen Theile proportional setzt.

§. 304. Das Verhältniß der Halbmesser der Sonne und der Planeten kennt man aus §. 302. oder 303. Da nun wegen ihrer beynahe kugelförmigen Gestalt ihre Volumina den Würfeln ihrer Halbmesser proportional sind; so sind ihre mittleren Dichtigkeiten im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der Massen, und aus dem umgekehrten der Würfel der Halbmesser. Mehrerer Genauigkeit halber muß man bey denjenigen Himmelskörpern, deren Abplattung man kennt, die Halbmesser der Kugeln gebrauchen, welche mit jenen einerley Inhalt haben, und nach §. 142. S. 208. u. 209. können berechnet werden. Seyen r und r' diese Halbmesser, m und m' die Massen, d und d' die Dichtigkeiten; so wird sich verhalten

$$1.)\; d : d' = \frac{m}{r^3} : \frac{m'}{r'^3} = 1 : \frac{m'}{m}\left(\frac{r}{r'}\right)^3.$$

Weil ferner die anziehende Kraft direct den Massen und umgekehrt den Quadraten der Entfernungen proportional ist; so verhalten sich die freyen Fallhöhen der Körper in der Nähe der Oberflächen der Sonne und der Planeten direct wie ihre Massen und umgekehrt wie die Quadrate ihrer Halbmesser. Nennt man g und g' die Fallhöhen in der ersten Sekunde; so verhält sich

$$2.)\; g : g' = \frac{m}{r^2} : \frac{m'}{r'^2} = 1 : \frac{m'}{m}\left(\frac{r}{r'}\right)^2,$$

oder auch $= rd : r'd'$ (n. 1.) $= 1 \;\; \frac{d'}{d} \;\; \frac{\;}{r}.$

Nimmt man die Dichtigkeit von m zur Einheit an; so ist die Dichtigkeit von $m' = \frac{m'}{m}\left(\frac{r}{r'}\right)^3$, und, wenn die freye Fallhöhe in der ersten Sekunde auf dem Körper $m = g$ ist; so ist sie auf dem Körper $m' = \frac{m'}{m}\left(\frac{r}{r}\right)^2 g$, vorausgesetzt, daß sie keine Axendrehung haben. Hienach kann man diese Fallhöhen mittelst der bekannten Höhe des freyen Falls der Körper in der Nähe der Oberfläche der Erde berechnen. Man kann ferner, wie man in dem 302ten §. gesehen hat, mittelst der bekannten Zeit der Axendrehung die von der Schwungkraft herrührende Verminderung der Schwere finden, also die Höhen angeben, von welchen in der Nähe der Oberfläche der Sonne und der Planeten die Körper wirklich fallen.

Es verhält sich z. B. die Sonnenmasse zu der Erdmasse = 331144 : 1 (§. 302.), und ihr Halbmesser verhält sich zum Halbmesser der Erde = 109,25 : 1 (§. 146.); folglich verhält sich die Dichtigkeit der Sonne zur Dichtigkeit der Erde = $331144 \quad \overline{109,25}^{3} = 0,25395 : 1$, oder wie 1 : 3,93774. Ferner ist die freye Fallhöhe der Erdkörper in der ersten Sekunde unter der Breite, deren Quadrat des Sinus = $\frac{1}{3}$ ist, = 15,11343 par. Fuß. (§. 302.); folglich beträgt diese freye Fallhöhe der Körper an der Oberfläche der Sonne in der ersten Sekunde $\frac{331144}{(109,25)^2} \cdot 15,11343$, oder 419,312 pariser Fuß.

Der Halbmesser des Aequators des Jupiters verhält sich zu dem Halbmesser des Erdäquators = 11,3 : 1 (§. 146.), und das Axenverhältniß des Jupiters ist = 13 : 14 (§. 109.); folglich ist $r' : r = 11,3\sqrt[3]{\frac{13}{14}} : \sqrt[3]{\frac{304}{305}}$ (§. 142.). Und nach §. 302. verhält sich die Jupitersmasse : Sonnenmasse = 1 : 1065,05, und die Sonnenmasse : Erdmasse = 331144 : 1; folglich die Masse des Jupiters zur Masse der Erde = 331144 : 1065,05. Mithin verhält sich die Dichtigkeit des Jupiters zur Dichtigkeit der Erde = 0,231297 : 1, und zur Dichtigkeit der Sonne = 0,910788 : 1. Die Fallhöhe der Körper auf seiner Oberfläche beträgt 38,5797 par. Fuß in einer Sekunde. Unter dem Aequator des Jupiters wird diese Fallhöhe durch die Schwungkraft ungefähr um den neunten Theil ihrer Größe vermindert.

Setzt man nach La Place das Verhältniß der Sonnenmasse zur Masse des Saturns = 3534,08 : 1 (§. 303); so erhält man mittelst des §. 146. angegebenen Verhältnißes der Halbmesser das Verhältniß der Dichtigkeit des Saturns zur Dichtigkeit der Sonne = 0,424955 : 1.

Die Dichtigkeit des Uranus verhält sich zur Dichtigkeit der Sonne $= \frac{1}{19504} \cdot \left(\frac{109{,}25}{4{,}25}\right)^3 : 1 = 0{,}870911 : 1.$

Vergleicht man die Dichtigkeiten der Erde, des Jupiters und des Saturns, welche man am genauesten kennt, miteinander; so findet man, daß sie mit der Entfernung dieser Planeten von der Sonne abnehmen, und nahe umgekehrt ihren mittleren Entfernungen von der Sonne proportional sind. Der Uranus, dessen Dichtigkeit die des Saturns zu übertreffen, und der Dichtigkeit des Jupiters nahe zu kommen scheint, entfernt sich von dieser Regel, von welcher man übrigens keinen physikalischen Grund angeben kann. Indessen hat La Place nach dieser Regel die §. 303. angegebene Masse des Merkurs bestimmt. Die daselbst angegebenen Massen des Mars und der Venus sind aus den Störungen der elliptischen Bahn der Erde um die Sonne geschlossen, welche berechnet und mit den Beobachtungen verglichen wurden. Es ergiebt sich daraus das Verhältniß der Dichtigkeit des Mars zur Dichtigkeit der Sonne = 3,86048 : 1, und das Verhältniß der Dichtigkeit der Venus zur Dichtigkeit der Sonne = 4,54564 : 1.

§. 305. Wäre das Verhältniß der Gravitation eines Körpers gegen einen anderen von einer gegebenen specifischen Schwere zu seiner Gravitation gegen die Erde gegeben; so könnte man hieraus nach dem vorhergehenden §. das Verhältniß ihrer Dichtigkeiten, mithin die mittlere Dichtigkeit und specifische Schwere der Erde selbst finden. Die Ablenkungen des Bleylots von seiner vertikalen Richtung, welche man in der Nähe hoher Berge beobachtet (§. 286.), schienen zu solchen Untersuchungen tauglich zu seyn. Maskelyne stellte zu dem Ende im Sommer 1774 *) auf der Nord- und Süd-Seite des Bergs Shehallien in Pertshire genaue Beobachtungen über die Abstände einiger Fixsterne vom Scheitel an. Weil dieser Berg hoch ist, einzeln steht, sich weit von Abend gegen Morgen erstrekt, dagegen aber eine schmale Grundfläche hat, und daher an dem nördlichen und südlichen Abhang steil ist; so mußte die Ablenkung des Bleylots eines zu Höhenmessungen eingerichteten Werkzeugs auf beyden Seiten des Bergs merklich werden, und den Unterschied der an den zwey Standpunkten beobachteten Scheitelabstände desselben Sterns größer geben, als er ohne die Ablenkung des Bleylots würde gefunden worden seyn. Der leztere ergab sich aus der durch geometrische Messungen bestimmten Entfernung der Beobachtungsorte und aus der bekannten Grösse eines Grads des Meridians in dieser Gegend = 42,94 Sek. Aus 40 mit einander verglichenen Beobachtungen der Fixsterne fand sich aber der Unterschied der scheinbaren Scheitelpunkte der zwey Orte, oder der Winkel, welchen die Richtungen des Bleylots mit einander machten = 54,6 Sek., welcher um 11,66 Sek. größer ist, als er hätte seyn sollen. Aus diesen Ablenkungen, den Abmessungen und der Dichtigkeit des aus einem gleichförmigen Granit bestehenden Bergs fand Hutton **) die mittlere Dichtigkeit der Erde $4\frac{1}{2}$ größer als die des Wassers. Die Ungewißheit, welche über die mittlere Dichtigkeit des Bergs und seine Abmeßungen noch übrig bleibt, machen dieses Resultat etwas unsicher. Indessen stimmen damit die §. 286. angeführten von Cavendish angestellten genaueren Versuche so nahe überein, als es sich bey dergleichen mit vielen Schwierigkeiten verbundenen Untersuchungen erwarten läßt. Cavendish findet unter der Voraussezung, daß kein specifischer Unterschied in der Stärke der Attraction der Theilchen ungleichartiger Materien statt finde, die mittlere Dichtigkeit der Erde 5,48 mal so groß als die des Wassers. Vielleicht ließe sich, wenn es einen solchen Unterschied giebt, derselbe mittelst ei-

*) Philos. Trans. Vol. LXV. for. 1775. n. 48. 49.
**) Philos. Trans. Vol. LXVIII. for. 1778. n. 33.

nes dem Cavendish gebrauchten ähnlichen Apparats, wenn man ungleichartige Körper auf einander wirken ließe, entdecken.

Nun wird man berechnen können, um wie viel ein an einem Faden aufgehängter ruhender Körper von der anfänglichen vertikalen Richtung abgelenkt wird, wenn man ihm einen anderen Körper von einer gegebenen Figur und Masse nähert. Sey a (Fig. 128.) ein kleiner Körper, welchem eine Kugel, deren Halbmesser $= cb$ ist genähert werde, so daß der Körper und der Mittelpunkt c der Kugel in einer Horizontallinie liegen. Auf der geraden Linie ca und der durch a gezogenen Vertikallinie ah nehme man von a aus die ad und ap so, daß die Gravitation von a gegen die Kugel c zur Gravitation von a gegen die Erde sich verhalte wie ad zu ap, und vollende das Parallelogramm $adfp$; so muß, wenn der Körper a ruhen soll, die verlängerte Diagonale af durch den Aufhängungspunkt e gehen. Da nun die Gravitation im zusammengesetzten Verhältniß der Massen und dem umgekehrten der Quadrate der Entfernungen ist; so wird, wenn die Kugel mit der Erde einerley Dichtigkeit hätte, und der Körper a mit der Kugel nahe in Berührung wäre, sich verhalten $ad : ap =$ der Halbmesser r' der Kugel zu dem Halbmesser r der Erde. Man setze nun die Kugel sey von Bley, so wird man haben $ad : ap = 11{,}32 . r' : 5{,}48 . r$, oder, wenn man $r = 1$ Fuß und r dem Halbmesser einer Kugel gleich setzt, welche mit der Erde einerley Inhalt hat, $= 1 : 9492534$. Es verhält sich aber, wenn man durch den Aufhängungspunkt die Vertikallinie eg zieht, welche der verlängerten cb in k begegnet, $ap : \left\{ {fp \atop ad} \right\} = ek : ak$, und daher müßte ek, und um so mehr die Länge ea des Bleylots mehr als 659 Fuß betragen, wenn die Ablenkung ak nur $\frac{1}{100}$ einer pariser Linie betragen sollte, woraus man sieht, daß dergleichen Anziehungen wegen der sehr viel größeren Anziehung der Erde nicht bemerkt werden können.

Viertes Capitel.

Von den Störungen der elliptischen Bewegungen durch die gegenseitige Gravitation d[illegible] Himmelskörper.

§. 306. Wenn die Planeten nur gegen die S[illegible] gravitirten; so würde jeder derselben nach dem ersten [illegible]rischen Gesetz um den Mittelpunkt der Sonne als Bren[illegible]punkt eine Ellipse beschreiben, und die Sectoren, welche d[illegible] aus dem Mittelpunkt der Sonne gezogene Radii Vectore[illegible] abschneiden, würden übereinstimmend mit dem zweyten keplerischen Gesetz der Zeit proportional wachsen, endlich würden die Quadrate ihrer siderischen Umlaufszeiten um die Sonne im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der Würfel ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne und aus dem umgekehrten der Summen der Sonnenmasse und der Masse eines jeden der Planeten seyn, wie in dem 299sten §. gezeigt worden ist. Wegen der in Vergleichung mit der Sonnenmasse sehr kleinen Masse der Planeten (§. 302. und 303.) kommt das Verhältniß der Quadrate der Umlaufszeiten dem Verhältniß der Würfel der mittleren Entfernungen so nahe, daß man wenigstens wegen der unvermeidlichen Fehler, welchen man bey der Bestimmung der mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne nach den im dritten Capitel des zweyten Buchs gezeigten Methoden ausgesetzt ist, die von der Masse der Plane[illegible] [illegible]rende Unterschiede zwischen den nach dem dritten [illegible]schen Gesetz und den nach obiger Proportion berechneten mittleren Entfernungen der Planeten kaum würde haben [illegible] können, indem die Combinationen verschiedener Beo[illegible]htungen mit einander größere Unterschiede würde gegeben haben. Man zieht daher in der neueren Astronomie [illegible] die aus den siderischen Umlaufszeiten und den Massen der Planeten nach §. 299. berechneten Verhältniße ihrer mittl[illegible] Entfernungen von der Sonne den aus den geocentr[illegible] Längen und Breiten mittelst der als bekannt angeno[illegible] Elemente der Erdbahn nach dem dritten Capitel des [illegible]

Buchs gefundenen vor, und die §. 191. angegebenen mittleren Entfernungen sind wirklich nach dem dritten, aber wegen ... Massen der Planeten berichtigten, keplerischen Gesetz be-

...ben so würden die Nebenplaneten, wenn sie nur ge... re Hauptplaneten gravitirten, sich um diese nach den ...schen Gesetzen bewegen, wenn sie zugleich beständig ...r Sonne mit derselben Kraft und nach derselben Rich... angezogen würden, mit welcher die Sonne auf ihre ...uptplaneten wirkt. Denn in diesem Fall würde die At...action der Sonne weder die Gravitation des Trabanten gegen seinen Planeten noch seine relative Geschwindigkeit in Beziehung auf denselben ändern, und die Bewegung des Trabanten würde ebenso erfolgen, als wenn der Hauptplanet ruhte.

§. 307. Wenn aber, wie es schon der Analogie nach sehr wahrscheinlich ist, auch die Planeten selbst gegen einander gravitiren; so müßen hieraus kleine Störungen oder Perturbationen ihrer elliptischen Bewegungen entstehen, und es muß nicht allein für die fernere Bestätigung der Theorie der allgemeinen Schwere, sondern auch für die praktische Astronomie, welcher diese Störungen nicht entgangen sind, wichtig seyn, die Größe und die Gesetze derselben mittelst jener Theorie zu bestimmen.

Was die Nebenplaneten betrifft; so sind zwar ihre Bahnen in Vergleichung mit den Bahnen ihrer Hauptplaneten so klein, daß sich ihre Entfernung von der Sonne während eines Umlaufs um ihre Hauptplaneten nicht beträchtlich ändert, und daher die Sonne nahe mit gleicher Stärke und nach beynahe parallelen Richtungen auf den Planeten und auf seine Trabanten wirkt. Allein wegen der großen Masse der Sonne kann dennoch so wohl der von einer kleinen Ungleichheit der Distanzen, als auch der von einer ge...en Neigung der Richtungen der anziehenden Kraft, wel...e Sonne auf einen Planeten und auf seine Trabanten ... herrührende Unterschied der Attractionen merklich w... Man beobachtet aber wirklich, wie man in dem fünften Capitel des zweyten Buchs gesehen hat, solche Perturbationen der elliptischen Bewegung des Nebenplaneten, und besonders sind die Bewegungen des Monds großen Ungleichheiten unterworfen, welche zum Theil schon von den älteren Astronomen bemerkt wurden, und eine Folge der allgemeinen Gravitation sind. Die Ungleichheiten der Bewegungen dieses Trabanten der Erde sollen nun näher betrachtet werden.

Setzt man die mittlere Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator = $57' \, 1''$ (§. 63.), und die der Sonne = $8'',8$ (§. 50.); so verhält sich die mittlere Entfernung des Monds von der Erde zu der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde wie 1 : 388,732. Es ist aber das Verhältniß der Gravitation der Erde gegen die Sonne zu der Gravitation des Monds gegen die Erde das zusammengesetzte aus dem Verhältniß der Masse der Sonne zur Masse der Erde, und aus dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate der Entfernungen der Sonne und des Monds von der Erde, mithin, wenn man die Sonnenmasse nach §. 302. annimmt, das zusammengesetzte aus den Verhältnißen von $331144 : 1$, und von $1 : \overline{388,732}^2$, welches dem Verhältniß von $331144 : \overline{388,732}^2$, oder nahe dem von $331144 : 150336$ gleich ist. Folglich zieht die Sonne die Erde über noch einmal so stark an, als diese den Mond, und es müßte in den Neumonden, wenn die Sonne nicht auch auf den Mond wirkte, die relative Gravitation des Monds gegen die Erde mehr als das dreyfache von derjenigen betragen, welche zwischen dem Mond und der Erde allein statt finden würde, in den Vollmonden aber die Centripetalkraft sich scheinbar in eine abstoßende Kraft verwandeln, wobey die beynahe kreisförmige Bahn des Monds um die Erd nicht würde haben bestehen können. Der Mond muß also auch so wie die Erde von der Sonne angezogen werden, und wenn beyde mit gleicher Stärke und nach parallelen Richtungen von ihr angezogen würden; so würde dadurch die Bahn des Monds um die Erde nicht gestört werden. Demnach ist es eigentlich nicht der Mittelpunkt der Erde, sondern der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Erde und des Monds, welcher um die Sonne als Brennpunkt eine Ellipse beschreibt. Es sey *s* (Fig. 129.) der Mittelpunkt der Sonne, *e* und *l* die Mittelpunkte der Erde und des Monds, und es sey die *el* in *c* so getheilt, daß *ec* : *cl* sich verhalte wie die Masse des Monds zur Masse der Erde; so beschreibt der Schwerpunkt *c* der Erde und des Monds, in welchem man ihre Massen als vereinigt annehmen kann, um die Sonne *s* nach den keplerischen Gesetzen eine Ellipse. Man ziehe den Radius Vector *sc* dieser Ellipse; so wird dieser den Zeiten proportionale Flächenräume abschneiden, und ein Beobachter in dem Mittelpunkt der Sonne würde den Mittelpunkt der Erde nach der Richtung *se* sehen, wenn der nach den keplerischen Gesetzen sich bewegende Schwerpunkt in *c* ist. In den Neu- und Vollmonden werden *se* und *sc* auf einander fallen, in den Quadraturen aber werden sie den grösten Winkel mit einander machen. Folglich müßte dieser Beobachter eine periodische Abweichung der Bewegung der Erde von der genauen elliptischen Bewegung bemerken, welche nach Verfluß eines synodischen Monats in derselben Ordnung wiederkehrte. Eben diese Ungleichheit muß aber auch der Beobachter auf der Erde bemerken, welcher alle auf ihrer Oberfläche angestellte Beobachtungen auf ihren Mittelpunkt reducirt. Die Beobachtungen zeigen wirklich eine solche Ungleichheit in der scheinbaren Bewegungen der Sonne um die Erde, welche auf $7'',5$ steigt, und dem Sinus des Ueberschußes der Länge des Monds über die Länge der Sonne proportional ist. Man ziehe *cd* auf *es* senkrecht; so ist diese Ungleichheit dem Winkel *dsc* gleich, unter welchem die Linie *cd* aus dem Mittelpunkt der Sonne gesehen erscheint, und welcher seiner Kleinheit halber sehr nahe diesem Perpendickel *cd* oder dem Sinus des Winkels *sel* proportional sich verändert. Da der aus der Sonne gesehene scheinbare Halbmesser der Erde der Horizontalparallaxe der Sonne, oder $8'',8$ gleich ist, jene Ungleichheit aber nur auf $7'',5$ steigt, so muß der Schwerpunkt der Erde und des Monds noch innerhalb der Erdkugel liegen, und weil bey so kleinen Winkeln die wahren Größen sehr nahe den scheinbaren Größen, oder den

Winkeln, unter welchen erscheinen, proportional sind (§. 49. n. 6.); so verhält sich

$ec : eb = 7{,}5 : 8{,}8$, weil für $ese = 7'',5$, der Winkel $sel = 90°$, und $cd = ee$ ist.
Aber $eb : el = 1 : 60{,}2965$ (§. 63.);
folglich $ec : el = 7{,}5 : 530{,}609$
und $ec : cl = 7{,}5 : 523{,}109$
$= 1 : 69{,}75.$

Demnach verhält sich die Masse des Monds zur Masse der Erde = 1 : 69,75.

§. 308. Es sey nun die Sonne in S (Fig. 130.), die Erde in E, um welche sich der Mond in seiner beynahe kreisförmigen Bahn nach der Richtung AMH bewege. Befindet sich der Mond in A in Conjunktion mit der Sonne; so ist er der Sonne näher als die Erde, und er wird daher von der ersteren stärker angezogen als die Erde, und wenn er in B mit der Sonne in Opposition ist; so ist die Erde näher bey der Sonne als der Mond, und dieser wird jetzt von der Sonne schwächer angezogen, als die Erde. Folglich wird in den Syzygien die Schwere des Monds gegen die Erde durch die Attraction der Sonne vermindert. Man setze die Geschwindigkeit, welche eine zur Einheit angenommene Masse einem in der gegebenen Distanz a von ihr befindlichen Körper in einer gegebenen Zeit mittheilen würde, $= k$, die Masse der Sonne $= M$, und die Summe der Massen der Erde und des Monds $= m$, welche hier als eine in dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt dieser zwey Körper vereinigte um die Sonne sich bewegende Masse kann betrachtet werden; so wird die Schwere der Erde gegen die Sonne $= \frac{(M+m)ka^2}{\overline{SE}^2}$ seyn. In den Conjunktionen verhält sich aber

$$\left\{\begin{array}{c}\text{die Gravitation der}\\ \text{Erde gegen die Sonne}\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c}\text{Gravit. des Monds}\\ \text{gegen die Sonne}\end{array}\right\} = \overline{SA}^2 : \overline{SE}^2;$$

$$\text{folglich }\left\{\begin{array}{c}\text{der Ueberschuß der zweyten}\\ \text{über die erste}\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c}\text{Gravit. der Erde}\\ \text{gegen die Sonne}\end{array}\right\} = \overline{SE}^2 - \overline{SA}^2 : \overline{SA}^2$$
$$= (SE + SA)\,AE : \overline{SA}^2$$
$$\text{nahe} = 2AE : SE, \text{ weil } AE \text{ kleiner als } \tfrac{1}{380}\,SE.$$

In den Oppositionen verhält sich

$$\left.\begin{array}{c}\text{der Ueberschuß der Gravit.}\\ \text{der Erde gegen die Sonne}\\ \text{über die Gravit. des Monds}\\ \text{gegen die Sonne}\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{c}\text{Gravit. der Erde}\\ \text{gegen die Sonne}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overline{SB}^2 - \overline{SE}^2\\ (SB+SE)BE\end{array}\right\} : \overline{SB}^2$$

wiederum nahe $= 2AE : SE$.

Folglich ist in beyden Fällen die Verminderung der Schwere des Monds gegen die Erde durch die Attraction der Sonne nahe dieselbe, und in dem Verhältniß des Durchmessers der Mondsbahn zum Halbmesser der Erdbahn kleiner als die Schwere der Erde gegen die Sonne. Man setze statt der letzteren ihren oben gegebenen Ausdruck; so ist die Verminderung der Schwere des Monds in den Syzygien $= \frac{2(M+m)ka^2 . AE}{\overline{SE}^3}$.

Wenn der Mond in einer seiner Quadraturen in H ist; so sey die nach der Sonne S gerichtete Kraft HO, mit welcher die letztere den Mond anzieht, in die Kräfte HJ und JK zerfällt, von welchen die eine HJ auf dem Radius Vector EH senkrecht sey, die andere HK in der Richtung desselben wirke; so verhält sich $HO : HK = SH : \left\{\begin{matrix} HE \\ AE \end{matrix}\right\}$. Aber SH und SE sind in diesem Fall sehr nahe einander gleich, und daher ist die Kraft HO nahe der Kraft gleich, mit welcher die Erde E von der Sonne angezogen wird. Folglich verhält sich die Vergrößerung der Schwere des Monds gegen die Erde durch die Anziehungskraft der Sonne zu der Schwere der Erde gegen die Sonne in den Quadraturen nahe $= AE : SH$, oder nahe wie $AE : SE$. Mithin beträgt diese Vergrößerung nur die Hälfte der Verminderung, welche die Schwere des Monds in den Syzygien leidet. Es ergiebt sich aus allen Wirkungen der Sonne auf den Mond während seines synodischen Umlaufs eine mittlere in der Richtung des Radius Vector des Monds wirkende Kraft, welche seine Schwere gegen die Erde vermindert, und dem vierten Theil der größten Verminderung in den Syzygien, mithin der Kraft $\frac{\frac{1}{2}(M+m)ka^2 . AE}{\overline{SE}^3}$ gleich ist. Nun ist aber die Kraft, mit welcher die Erde den Mond in der Distanz AE anzieht, $= \frac{mka^2}{\overline{AE}^2}$; folglich verhält sich die mittlere Verminderung der

Schwere des Monds gegen die Erde durch die Anziehung der Sonne zu seiner Schwere gegen die Erde

$$= \frac{\frac{1}{2}(M+m)\,ka2.\,AE}{\overline{SE}^3} : \frac{mka^2}{\overline{AE}^2} = \frac{\frac{1}{2}(M+m)}{\overline{SE}^3} : \frac{m}{\overline{AE}^3} = \frac{1}{2}\,t^2 \quad T^2$$

(§. 301. n. 4., wenn man die siderische Umlaufszeit des Monds $= t$, und die siderische Umlaufszeit der Erde oder das siderische Jahr T setzt.). Und da nach §. 61. und 191. sich verhält $t^2 : T^2 = 1 : 178,723$; so ist die Schwere des Monds gegen die Erde im Mittel genommen um ihren 357,446ten Theil kleiner als sie ohne die Wirkung der Sonne seyn würde, oder die aus der Umlaufszeit und der Entfernung des Monds von der Erde nach §. 286. berechnete Schwere des Monds gegen die Erde verhält sich zu der Kraft, mit welcher die Erde allein den Mond anziehen würde $= 357,446 : 358,446$.

§. 309. Nun wird man im Stande seyn, eine genauere Vergleichung der Kraft der Schwere mit der Kraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, anzustellen, als es in dem 286sten §. geschehen ist. Man hat daselbst unter der Voraussetzung der mittleren Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator $= 57' \, 1''$ die Höhe, von welcher der Mond in seiner mittleren Distanz von der Erde gegen diese hin in einer Minute fallen würde $= 2,515677$ Tois. gefunden, welche wegen der durch die Attraction der Sonne bewirkten Verminderung um ihren 357,446ten Theil, oder um 0,007038 Tois. zu klein ist. Man vermehre sie also um diese Größe; so erhält man 2,522715 Tois. Diese aus der relativen Bahn des Monds um die Erde abgeleitete Fallhöhe ist aber die Summe der Räume, durch welche der Mond gegen die Erde und die Erde gegen den Mond in einer Minute fallen würden, und die letzteren zwey Fallhöhen sind den Massen der Erde und des Monds proportional; folglich verhält sich, wenn man das §. 307. gefundene Verhältniß dieser Massen gebraucht, die Fallhöhe des Monds gegen die Erde zur Fallhöhe der Erde gegen den Mond $= 69,75 : 1$, und ihre Summe, d. i. 2,522715 verhält sich zur Fallhöhe des Monds gegen die Erde = 70,75 : 69,75. Mithin ist die freye Fallhöhe des Monds gegen die Erde in der ersten Minute und wenn er in seiner mittleren Distanz von der Erde sich befindet = 2,487058 Tois. An der Oberfläche der Erde und unter dem Parallelkreis, dessen Quadrat des Sinus der Breite = $\frac{1}{3}$ ist, würde diese Fallhöhe in dem Verhältniß des Quadrats der mittleren Entfernung des Monds von der Erde zu dem Quadrat des jener Breite entsprechenden Erdhalbmessers größer seyn. Es verhält sich aber jene Entfernung zu dem Halbmesser des Aequators, wie 1 : Sin. $(57' 1'')$, und der Halbmesser des Aequators zu dem Erdhalbmesser unter der erwähnten Breite = 3271691 : 3268111 (§. 143.); folglich würde unter dieser Breite die freye Fallhöhe des Monds in der ersten Minute betragen $2,487058 \times \left(\frac{3271691}{3268111 . \text{Sin.} (57' 1'')}\right)^2$ Tois., und in der ersten Sekunde $\frac{2,487058}{3600} \times \left(\frac{3271691}{3268111 \text{ Sin.} (57' 1'')}\right)^2$ Tois., d. i. 2,517205 Tois. oder 15,10323 par. Fuß. Diese Fallhöhe ist von der aus den Pendellängen geschloßenen und wegen der Schwungkraft verbesserten Fallhöhe der Körper unter eben dieser Breite, welche nach §. 302. = 15,11343 pariser Fuß ist, nur um 0,0102 par. Fuß., oder um weniger als $1\frac{1}{2}$ par. Linien verschieden. Eine Verminderung der Horizontalparallaxe des Monds um 0,75 Sekunden ist hinreichend, um diesen Unterschied verschwinden zu machen, welcher also innerhalb der Gränzen der Beobachtungsfehler liegt.

§. 310. Man setze das Verhältniß der Erdmasse zu der Masse des Monds = $m : m'$, die Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator = p, den Halbmesser des Aequators = r, den Halbmesser einer Kugel, welche mit der Erde einerley Inhalt hat = r', und die siderische in Sekunden ausgedrückte Umlaufszeit des Monds = t; so ist die mittlere Entfernung des Monds von der Erde = $\frac{r}{\text{Sin.}\, p}$, und in dieser Distanz seine doppelte Fallhöhe in der ersten Sekunde = $\frac{4r\pi^2}{t^2 \text{Sin.}\, p}$ (§. 273. n. 2. oder §. 283. n. 1.), welche wegen der durch die Sonne bewirkten Verminderung in dem Verhältniß von 358,446 : 357,446, oder von 1,00279 : 1

zu vermehren, und wegen der Masse des Monds in dem Verhältniß von $m : m + m'$ zu vermindern ist, um die verbesserte doppelte Fallhöhe zu erhalten, welche nun $= \frac{4 r \pi^2}{t^2 \text{Sin.} p} \cdot 1{,}002798 \cdot \frac{m}{m+m'}$ seyn wird. In der Distanz r' von der dem Mittelpunkt der Erde ist diese doppelte Fallhöhe größer als in der Entfernung $\frac{r}{\text{Sin.} p}$ in dem Verhältniß von $\left(\frac{r}{\text{Sin.} p}\right)^2 : r'^2$, und daher $=$ $\frac{4 r^3 \pi^2}{t^2 \overline{\text{Sin.} p}^3} \cdot \frac{1{,}002798}{r'^2} \cdot \frac{m}{m+m'}$. Mithin ist die Geschwindigkeit, welche die Erde dem Mond in einer Sekunde, wenn er sich an ihrer Oberfläche unter dem Parallelkreis befände, dessen Quadrat des Sinus der Breite $= \frac{1}{3}$ des Sinus totus ist, $= \frac{4 r \pi^2}{t^2 \overline{\text{Sin.} p}^3} \cdot 1{,}002798$ $\left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \frac{m}{m+m'}$. Unter eben dieser Breite sey die Länge des einfachen Sekundenpendels $= l$; so ist die doppelte Fallhöhe in der ersten Sekunde $= \pi^2 \, l$ (§. 259. n. 2.), welche wegen der Schwungkraft um $\frac{1}{433{,}36}$ zu vergrößern ist; so daß, wenn man $\left(1 + \frac{1}{433{,}36}\right) l$ $= l'$ setzt, die Geschwindigkeit, welche die Erde unter jenem Parallelkreis einem Körper in einer Sekunde mittheilt $= \pi^2 \cdot l'$ wird. Wenn nun die Schwere der Erdkörper einerley ist mit der Kraft, welche auf den Mond wirkt; so muß man die Gleichung haben $l' =$ $\frac{4 r}{t^2 \overline{\text{Sin.} p}^3} \cdot 1{,}002798 \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \frac{m}{m+m'}$, oder, weil für das Axenverhältniß 304 : 305 der Quotient $\frac{r}{r'} = \sqrt[3]{\frac{305}{304}}$ wird (§. 142. S. 208.),

$$l' = \frac{4 r}{t^2 \overline{\text{Sin.} p}^3} \cdot 1{,}004993 \cdot \frac{m}{m+m'}.$$

Hieraus folgt umgekehrt $\overline{\text{Sin.} p}^3 = \frac{4 r}{t^2 l'} \; 1{,}004993 \cdot \frac{m}{m+m'}$. Da nun $l = 0{,}5092616$ Tois. (§. 269.) mithin $l' = 0{,}5104367$ Tois. und $r = 3271691$ (§. 143.); so findet sich, wenn man $m : m' = 69{,}75 : 1$ setzt (§. 307.), die Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator in seiner mittleren Entfernung von der Erde $= 57' 0'',25$, nur um $0'',75$ kleiner, als sie **Bürg** aus den Beobachtungen abgeleitet hat (§. 63.).

§. 311. Es befinde sich jetzt der Mond in M (Fig. 130.) zwischen der Conjunktion und dem ersten Viertel, und sein Mittelpunkt so wie die Mittelpunkte der Erde und der Sonne seyen durch gerade Linien mit einander verbunden.

Man nehme auf den geraden Linien MS und SE die MG und ED den Kräften proportional, mit welchen die Sonne auf den Mond und auf die Erde wirkt, ziehe durch M die Parallele ML mit ES, durch G die Parallele GL mit ME und vollende das Parallelogramm $MLGQ$; so zerfällt die Kraft MG in die zwey Kräfte ML und MQ. Von der ML sey $LF = DE$ abgeschnitten, so ist der Rest MF der Kraft proportional, mit welcher die Sonne den Mond nach einer mit SE parallelen Richtung von der Erde zu entfernen strebt. Der andere Theil MQ wirkt in der Richtung des Radius Vector des Monds, und vergrößert die Kraft, welche den Mond nach dem Mittelpunkt der Erde hin treibt. Es verhält sich aber

$$GM : ML = SM : SE$$
und $$GM : MQ = SM : ME;$$

folglich ist $$ML = \frac{GM.SE}{SM} = \frac{M.a^2k.SE}{\overline{SM}^3}$$

und $$MQ = \frac{GM.ME}{SM} = \frac{M.a^2k.ME}{\overline{SM}^3},$$

weil die Kraft, mit welcher die Sonne den Mond in der Distanz SM anzieht $= \frac{Ma^2k}{\overline{SM}^2}$ ist (§. 308.). Ferner ist

$$\left.\begin{matrix}DE\\FL\end{matrix}\right\} = \frac{M.a^2k}{\overline{SE}^2}$$ weil $M + m$ nahe $= M$; folglich ist

1.) Die Kraft $$MF = Ma^2k\left(\frac{SE}{\overline{SM}^3} - \frac{1}{\overline{SE}^2}\right)$$

Man zerfälle noch die Kraft MF in die zwey Kräfte Mp und Mq, von welchen die erste auf den Radius Vector des Monds senkrecht, die andere in der Richtung desselben wirke, und ziehe MP auf SE senkrecht; so verhält sich

$$MF : Mq = ME : EP$$
und $$MF : Mp = ME : MP;$$

daher ist $$Mq = \frac{MF.EP}{ME},$$

und $$Mp = \frac{MF.MP}{ME}.$$

Mithin ist 2.) $$Mq - MQ = Ma^2k\left(\frac{SE}{\overline{SM}^3} - \frac{1}{\overline{SE}^2}\right)\frac{EP}{ME} - \frac{Ma^2k.ME}{\overline{SM}^3},$$

und 3.) $MP = Ma^2k\left(\frac{SE}{\overline{SM}^3} - \frac{1}{\overline{SE}^2}\right)\frac{MP}{ME}$.

Die Kraft n. 2. verändert die Centripetalkraft des Monds, und verkleinert oder vergrößert sie, je nachdem Mq größer oder kleiner als MQ ist. Die Kraft n. 3. verzögert oder beschleunigt überdiß die Bewegung des Monds, je nachdem Mp und MT auf verschiedenen oder auf einerley Seite des Radius Vector des Monds liegen.

§. 312. Man setze den Radius Vector SE der Erde $= R$, den Radius Vector EM des Monds $= r$, und den Winkel $SEM = D$; so sind

$PM = r$ Sin. D

$EP = r$ Cos. D, und $SP = R - r$ Cos. $D = R\left(1 - \frac{r}{R}\text{ Cos. } D\right)$.

Da nun R im Mittel genommen 388,7 mal so groß ist als r (§. 307.); so ist $\frac{r}{R}$ ein kleiner Bruch, dessen Quadrat man ohne einen sehr merklichen Fehler vernachläßigen kann, und SM ist nahe $= SP$ folglich ist nahe

$\overline{SM}^3 = R^3\left(1 - \frac{3r}{R}\text{ Cos. } D\right)$, und $\frac{SE}{\overline{SM}^3} = \frac{1}{R^2}\left(1 + \frac{3r}{R}\text{ Cos. } D\right)$, mithin

$\frac{SE}{\overline{SM}^3} - \frac{1}{\overline{SE}^2} = \frac{3r}{R^3}$ Cos. D. Demnach ist nach n. 1. des vorhergehenden §.

1.) Die Kraft $MF = \frac{3Ma^2kr\text{ Cos. } D}{R^3}$.

Sodenn ist, weil $\frac{EP}{ME} = $ Cos. D, vermöge §. 311. n. 2. $Mq -$

$MQ = Ma^2k.\ \frac{3r}{R^3}\ \overline{\text{Cos. } D}^2 - \frac{Ma^2kr}{R^3}, = \frac{Ma^2kr}{R^3}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\text{ Cos. } 2D - 1\right)$;

folglich ist

2.) $Mq - MQ = \frac{1}{2}.\ \frac{Ma^2kr}{R^3} + \frac{3}{2}.\ \frac{Ma^2kr}{R^3}$ Cos. $2D$.

Endlich weil $\frac{MP}{ME} = $ Sin. D; so ist vermöge §. 311. n. 3.

$Mp = \frac{3Ma^2kr}{R^3}$ Cos. D Sin. D, oder

3.) $Mp = \frac{3}{2}.\ \frac{Ma^2kr}{R^3}$ Sin. $2D$.

Die Kraft, mit welcher die Sonne die relative Bewegung des

Monds um die Erde stört, zerfällt also in zwey perturbirende Kräfte n. 2. und 3., von welchen die letztere in einer durch die Mittelpunkte der Sonne, der Erde und des Monds gelegten Ebene senkrecht auf den Radius Vector des Monds wirkt, die erstere aber seine Centripetalkraft verändert. Diese Veränderung der Centripetalkraft besteht aus zwey Theilen, nemlich aus einem blos von den Radiis Vectoribus der Erde und des Monds abhängenden sich nicht beträchtlich verändernden Theil, dessen mittleren Werth man erhält, wenn man statt R und r die mittleren Entfernungen der Sonne und des Monds von der Erde setzt, und aus einem periodischen Theil, welcher dem Cos. $2D$ proportional ist, und nach Verfluß eines halben synodischen Monats in derselben Ordnung wiederkehrt. Man bezeichne den mittleren Werth des ersten Theils durch $\frac{1}{2}c$; so würde, wenn die Abstände der Sonne und des Monds von der Erde beständig ihren mittleren Abständen gleich wären, die Veränderung der Centripetalkraft des Monds $= \frac{1}{2}c + \frac{3}{2}c$ Cos. $2D$ seyn. In den Conjunktionen und Oppositionen ist, wenn man die Neigung der Mondsbahn vernachläßigt, Cos. $2D = 1$; folglich die Verminderung der Schwere des Monds gegen die Erde $= \frac{1}{2}c + \frac{3}{2}c = 2c$, und daher wird durch die Attraction der Sonne die Schwere des Monds gegen die Erde im Mittel genommen um den vierten Theil der grösten Verminderung in den Syzygien vermindert, wie §. 308. bemerkt worden ist. In den Quadraturen wird Cos. $2D = -1$, mithin die Veränderung der Centripetalkraft $= \frac{1}{2}c - \frac{3}{2}c = -c$, oder die Centripetalkraft des Monds wird in diesem Fall durch die Attraction der Sonne um die Hälfte der grösten Verminderung in den Syzygien vergrößert, übereinstimmend mit §. 308.

§. 313. Von den zwey Kräften MF und MQ (*Fig.* 130.), in welche man die perturbirende Kraft der Sonne zuerst zerfällt hat (§. 311.), wirkt die erste in der Richtung des Radius Vector des Monds, und bringt daher keine Veränderung in der Lage der Ebene der Mondsbahn hervor. Die andere MF hingegen, welche mit der in der Ebene der Erdbahn oder der Ekliptik liegenden SE parallel wirkt, fällt nur alsdenn in die Ebene der Mondsbahn, wenn sich der Mond in einem seiner Knoten befindet, oder auch wenn die verlängerte Knotenlinie durch die Sonne geht. In den übrigen Fällen wird der Mond durch diese Kraft von der Richtung seiner Bewegung abgelenkt werden, und die Lage der Ebene seiner Bahn wird sich verändern müssen. Es sey KMK' die Mondsbahn, welche die Ebene KAK' der Ekliptik in der geraden Linie KK' schneide. Die Sonne sey in S, und der Mond in M zwischen seinem aufsteigenden Knoten K und dem niedersteigenden K', und zwar seye er dem letzten Knoten näher als dem ersten. In der Ebene der hier als kreisförmig vorausgesetzten Mondsbahn sey eine gerade Linie Mt gezogen, welche sie in M berühre; so wird diese die Richtung bezeichnen, nach welcher der Mond sich fortbewegen würde, wenn keine Kräfte auf ihn wirkten. Sie begegne der Knotenlinie KK' in N. Die in der Richtung des Radius Vector wirkenden Kräfte lenken den Mond von der Tangente Mt ab, und nöthigen ihn, eine in der Ebene EMN liegende krumme Linie zu beschreiben, aber die mit SE paparallel wirkende perturbirende Kraft MF (§. 311. und 312.) wird ihn von der Ebene EMN ablenken. Es sey Mt der Weg, welchen der Mond mit seiner Geschwindigkeit in M in derselben Zeit gleichförmig zurückgelegt haben würde, in welcher ihm die mit SE parallel wirkende Kraft die Geschwindigkeit MF würde mitgetheilt haben, und Mf sey die durch eben diese Kraft während des Zeittheilchens z erzeugte Geschwindigkeit. Man vollende das Parallelogramm $fMtk$, und ziehe in der erweiterten Ebene desselben durch den Punkt N die Parallele Nn mit Mf, welche der verlängerten Diagonale Mk in n begegne. Da so wohl Nn als SE mit Mf parallel sind; so sind SE und Nn parallel (XI, 9.), mithin liegen beyde in einer Ebene, nemlich in der Ebene der Ekliptik. Man errichte auf der Knotenlinie KN in ihrem Endpunkt N und in der Ebene der Ekliptik das Perperdickel Nh, welches von der verlängerten En in h geschnitten werde, und ziehe AR auf KK' senkrecht. Der Mond würde sich also, wenn die Kraft MF aufhörte zu wirken, in der Ebene EMn fortbewegen, welche die Ebene der Ekliptik in der geraden Linie En schneidet, und die Knotenlinie würde während des Zeittheilchens z sich um den Winkel NEn nach einer Richtung bewegt haben, welche der Richtung der Bewegung des Monds entgegengesetzt ist. In jedem folgenden Zeittheilchen wird durch die Wirkung der Kraft MF eine neue Bewegung der Knotenlinie hervorgebracht werden, deren Lage also einer beständigen Veränderung unterworfen seyn wird.

Nimmt man nun die Zeit durch Mt zur Einheit an; so ist die in dem Zeittheilchen z durch die Kraft MF erzeugte Geschwindigkeit $Mt = z.MF$. Man ziehe MH auf KN senkrecht; so verhält sich

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} Mt \\ z.MF \end{array}\right\} & Mt = Nn : MN \\ HM & ME = MN : NE \\ AR : \left\{\begin{array}{l} AE \\ ME \end{array}\right\} & = Nh \quad Nn \\ \hline \end{array}$$

folglich $z.MF.HM.AR \quad \overline{ME}^2 \; Mt = Nh : NE.$

Da nun wegen des rechten Winkels ENh die gerade Linie Nh von einem aus E als Mittelpunkt mit dem Halbmesser EN in der Ebene der Ekliptik beschriebenen Kreis in dem Punkt N berührt wird; so ist Nh der Weg, welchen der Punkt mit der Geschwindigkeit, welche er in N hat, gleichförmig in dem Zeittheilchen z beschrieben haben würde. Man setze die Länge eines aus E als Mittelpunkt mit dem Halbmesser l beschriebenen Kreisbogens, welchen die Knotenlinie EN bey ihrer Bewegung von N gegen n in der Zeiteinheit abgeschnitten haben würde, wenn sie sich während derselben gleichförmig mit ihrer Winkelgeschwindigkeit in N fortbewegt hätte, $= u$; so wird der in dem Zeittheilchen z von ihr beschriebene Bogen $= uz$, und die Länge eines diesem ähnlichen mit dem Halbmesser NE beschriebenen Bogens $= uz.NE =$ dem Weg Nh seyn, welchen der Punkt gleichförmig mit seiner Geschwindigkeit in N während der Zeit z würde zurückgelegt haben. Folglich wird sich verhalten

$$\begin{array}{l} z.MF.HM.AR \quad \overline{ME}^2.Mt = uz.NE \quad NE, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = uz : 1, \end{array}$$

und $MF.HM.AR \quad \overline{ME}^2.Mt = u : 1.$

Also ist die Winkelgeschwindigkeit der Knotenlinie

$u = \frac{MF}{Mt} \cdot \frac{HM}{ME} \cdot \frac{AR}{ME}$, wenn sie nemlich durch die Länge eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens gemessen wird. Die Knotenlinie wird sich rükwarts (gegen die Ordnung der Zeichen) oder vorwarts bewegen, je nachdem u positiv oder negativ ist, und sie wird ruhen, wenn MF, oder HM, oder $AR = o$ sind; also in den Quadraturen, oder wenn der Mond in einem seiner Knoten ist, oder wenn die Länge der Sonne der Länge eines der Knoten gleich ist. Ungeachtet nun die Knotenlinie des Monds sich bald vor, bald rükwarts bewegt; so wird doch, wie hernach gezeigt werden soll, während eines Jahrs die Summe der directen Bewegungen von der Summe der retrograden übertroffen, so daß die Knotenlinie der Mondsbahn im Ganzen betrachtet sich gegen die Ordnung der Zeichen bewegt.

§. 314. Man setze die Längen der Sonne, des Monds, und des aufsteigenden Knotens des Monds beziehungsweise $= s, l$, und n; so sind für den Halbmesser 1

$$\frac{HM}{ME} = \text{Sin.}\, KEM = \text{Sin.}\,(l-n),$$

$$\frac{AR}{ME} = \text{Sin.}\, KEA = \text{Sin.}\,(s-n);$$

also ist $\frac{HM}{ME} \cdot \frac{AR}{ME} = \text{Sin.}\,(l-n)\,\text{Sin.}\,(s-n),$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,(l-s) - \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,(l+s-2n).$$

Und weil $AEM = D$ (§. 312.), nahe $= l-s$; so ist (§. 312. n. 1.) $MF = \frac{3Ma2kr}{R^3}\,\text{Cos.}\,(l-s)$,

und daher $u = \frac{3Ma^2kr}{R^3.\,Mt}\left(\tfrac{1}{2}\,\overline{\text{Cos.}\,(l-s)}^2 - \tfrac{1}{2}\text{Cos.}(l-s)\,\text{Cos.}(l+s-2n)\right).$

Aber $\overline{\text{Cos.}\,(l-s)}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Cos.}\,2\,(l-s)$,
und $\text{Cos.}(l-s)\,\text{Cos.}(l+s-2n) = \tfrac{1}{2}\text{Cos.}(2l-2n) + \tfrac{1}{2}\text{Cos.}(2s-2n)$; folglich ist

$$u = \tfrac{3}{4}\,\frac{Ma^2kr}{R^3.\,Mt}\,(1 + \text{Cos.}\,2\,(l-s) - \text{Cos.}\,2\,(l-n) - \text{Cos.}\,2\,(s-n)).$$

Der Coefficient in dem Ausdruck von u hängt von den Abständen des Monds und der Sonne von der Erde und von der Geschwindigkeit des Monds ab, und ist daher bald etwas grösser, bald kleiner als derjenige Werth desselben, welchen man erhält, wenn man statt der wahren Distanzen die mittleren setzt. Folglich besteht die Winkelgeschwindigkeit u der Bewegung der Knotenlinie aus einem constanten Theil, welchen man erhält, wenn man statt r, R, und Mt die mittleren Werthe dieser Größen setzt, und aus mehreren periodischen Theilen, und daher ist die Bewegung der Mondsknoten aus einer der Zeit proportionalen retrograden Bewegung, und aus mehreren ungleichförmigen bald retrograden bald directen Bewegungen zusammengesetzt (§. 239. und 237.), wie man durch die Beobachtungen gefunden hat §. 65. und 66.). Um die Größe dieser Bewegungen berechnen zu können, muß der Coefficient in dem Ausdruck von u durch Zahlen ausgedrückt werden. Man setze die siderischen Umlaufszeiten des Monds und der Sonne $= t$ und T, und die Distanz a, in welcher die zur Einheit angenommene Masse einem Körper die Geschwindigkeit k mitgetheilt haben würde, sey dem mittleren Abstand der Erde von der Sonne gleich; so wird Mk die Geschwindigkeit seyn, welche die Anziehungskraft der Sonne einem in der Distanz a von ihr befindlichen Körper in der Zeiteinheit mitgetheilt haben würde, so daß man haben wird $Mk = \frac{4a\pi^2}{T^2}$ (§. 273. n. 2. oder 283. n. 1.). Sey der mittlere Abstand des Monds von der Erde $= a'$; so ist seine mittlere Geschwindigkeit $= \frac{2a'\pi}{t}$, mithin wird, wenn man diese statt der wahren Mt setzt, obiger Coefficient $= \frac{3}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3 \cdot \frac{r}{a'} \cdot \frac{\pi t}{T^2}$, dessen mittlerer Werth, wenn man statt der wahren Distanzen R und r die mittleren a und a' setzt, gleich $\frac{3}{2}\frac{\pi t}{T^2}$ gefunden wird. In einem siderischen Jahr wäre hienach die mittlere siderische retrograde Bewegung der Mondsknoten $= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi t}{T^2} \cdot T = \frac{3}{2}\pi\frac{t}{T} = 270 \cdot \frac{t}{T}$ Graden $= 20^\circ\, 11'\, 47''$. Nach den Beobachtungen ist sie $= 19^\circ\, 21'\, 22''$ oder um $50'\, 25''$ kleiner, welcher Unterschied von den bey dieser Berechnung vernachlässigten Größen herrührt. Newton fand durch eine genauere Berechnung $19^\circ\, 18'\, 1''\, 23'''$ *).

Um noch die periodische Ungleichheiten der Bewegung der Mondsknoten zu finden, meße man alle in dem Ausdruck von u vorkommende Winkel durch Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser der Einheit gleich ist (S. §. 237.), und drücke die Zeiten in Tagen aus; so findet man den Coefficienten $\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{t}{T^2} = 0{,}0009650564$, welchen man zur Abkürzung mit c bezeichne. Ferner seyen a, a', a'' die mittleren Längen der Sonne, des Monds und seines aufsteigenden Knotens für eine gewiße Epoche, und m, m', m'' ihre siderische mittlere tägliche Bewegungen; so werden die mittleren Längen der Sonne, des Monds und seines aufsteigenden Knotens nach Verfluß von t Tagen von jener Epoche an gerechnet beziehungsweise $a + mt$, $a' + m't$, und $a'' - m''t$ seyn. Setzt man nun in dem Ausdruck von u die mittleren Längen statt der wahren; so wird

$$\begin{aligned} u = c &+ c.\,\mathrm{Cos.}\,2\,(a' - a + (m' - m)\,t) \\ &- c.\,\mathrm{Cos.}\,2\,(a' - a'' + (m' + m'')\,t) \\ &- c.\,\mathrm{Cos.}\,2\,(a - a'' + (m + m'')\,t), \end{aligned}$$ mithin nach §. 239. n. 1. die retrograde Bewegung des Knoten in t Tagen

*) Princ. L. III. prop. XXXII.

$$= ct + \frac{c}{2(m'-m)} \text{ Sin. } 2(a'-a+(m'-m)t)$$
$$- \frac{c}{2(m'+m'')} \text{ Sin. } 2(a'-a''+(m'+m'')t)$$
$$- \frac{c}{2(m+m'')} \text{ Sin. } 2(a-a''+(m+m'')t),$$

wo das erste Glied die schon berechnete mittlere der Zeit proportionale Bewegung des Knotens ausdrückt, so daß, wenn man zur Abkürzung die im Anfang dieses §. gebrauchten Benennungen der Längen wieder in diesen Ausdruck setzt, die wahre Länge des aufsteigenden Knotens nach t Tagen von der Epoche an gerechnet seyn wird

$$a'' - ct - \frac{c}{2(m'+m)} \text{ Sin. } 2(l-s)$$
$$+ \frac{c}{2(m'+m'')} \text{ Sin. } 2(l-n)$$
$$+ \frac{c}{2(m+m'')} \text{ Sin. } 2(s-n)$$

Es ist aber die mittlere tägliche siderische Bewegung

der Sonne	= 3548″,19;	also in Thei-	m	= 0,0172021
des Monds	= 47434,99	len des Halb-	m'	= 0,2299713
des Mondsknot.	= 190,78	messers	m''	= 0,0009249.

Folglich ist $\frac{c}{2(m'+m)} = 0{,}0019522$, welcher Bogen, wie man §. 135. gesehen hat, mit 206264,806 multiplicirt werden muß, um ihn in Sekunden ausgedrückt zu erhalten. Man wird 402,66 Sek. finden. Ebenso finden sich die zwey übrigen Coefficienten in Sekunden ausgedrückt = 431″,05 und 5490″,93. Die Gleichungen für die Länge des Mondsknotens, welche man nach ihren Zeichen zu seiner mittleren Länge hinzufügen muß, um die wahre Länge zu erhalten, wären hienach

$$-(6'43'') \text{ Sin. } 2(l-s) + (7'31'') \text{ Sin. } 2(l-n) + (1^\circ 31' 31'') \text{ Sin. } 2(s-n).$$

Die letzte dieser Ungleichheiten ist die beträchtlichste, und diejenige, welche schon von den älteren Astronomen, namentlich von **Tycho**, bemerkt wurde (§. 66.). Sie ist nach den Beobachtungen = 1° 30′ 26″, von welcher die berechnete nur um 1′ 5″ verschieden ist *).

Ungeachtet in dem Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit u der Knotenlinie alle Glieder einerley Coefficienten hatten; so sind dennoch die Ungleichheiten ihrer Bewegungen beträchtlich verschieden ausgefallen. Die Ungleichheiten einer Bewegung hängen

*) Newton fand diese Ungleichheit nach der Theorie = 1° 30′. Princ. L. III. prop. XXXIII. Cor.

nemlich nicht allein von den Veränderungen der Geschwindigkeiten, sondern auch von der Zeit ab, während welcher die Geschwindigkeit beständig wächst, oder beständig abnimmt. Die von dem Ueberschuß der Länge der Sonne über die Länge des Knotens herrührende Ungleichheit kam am grösten heraus, weil die Bewegungen der Sonne und des Knotens langsamer als die Bewegung des Monds sind, also der Winkel $2(s-n)$, sich langsamer als die übrigen ändert. Man hat daher nicht nur auf die Größe der perturbirenden Kräfte, sondern auch auf die Perioden zu sehen, während welcher sie nach einerley Richtung wirken. Wenn also z. B. in dem Ausdruck der Geschwindigkeit ein Glied von der Form $b \,\mathrm{Cos.}(a+mt)$ vorkommt; so kann bey einem kleinen Werth von b die von diesem Glied herrührende Ungleichheit sehr beträchtlich werden, wenn zugleich m sehr klein ist, also der Winkel $a+mt$ sich langsam ändert. Eben dieses zeigt die Berechnung nach §. 239. Denn es folgt hieraus die Ungleichheit der Bewegung $\frac{b}{m}\,\mathrm{Sin.}(a+mt)$, welche bey einerley Werth von b desto größer wird, je kleiner m ist. Daher werden die von kleineren Perioden abhängende Ungleichheiten verhältnißmäßig genauer gefunden, als diejenige, welche größere Perioden haben, und die durch die perturbirenden Kräfte hervorgebrachte der Zeit proportional wachsende Bewegungen, wie z. B die mittlere Bewegung der Mondsknoten, werden durch kleine vernachläßigte Größen merklich von den wahren verschieden gemacht werden können. So ist oben die Ungleichheit der Bewegung der Mondsknoten ziemlich nahe mit der beobachteten übereinstimmend gefunden worden, ungeachtet ihre mittlere Bewegung noch merklich von derjenigen abweicht, welche man aus einer langen Reihe von Beobachtungen abgeleitet hat.

§. 315. Man fälle noch in der Ebene der Mondsbahn das Perpendickel MH (Fig. 131.) aus dem Ort des Monds in seiner Bahn auf die Knotenlinie KN, und errichte auf dieser in dem Punkt H und in der Ebene der Ekliptik das Perpendickel Hm, welches der hE in G begegne. Man ziehe GM; so verhält sich

$$GH : HM = \mathrm{Sin.}\,GMH : \begin{cases}\mathrm{Sin.}\,HGM \\ \mathrm{Sin.}\,MGm.\end{cases}$$

Und weil $Nk ; GH = NE : HE$

$$HM : HE = 1 : \mathrm{Cotg.}\,HEM$$
$$\mathrm{Tg.}\,NEn : 1 = Nk : NE;$$

so ist $\mathrm{Tg.}\,NEn : 1 = \mathrm{Sin.}\,GMH : \mathrm{Sin.}\,MGm.\,\mathrm{Cotg.}\,HEM,$

oder $\mathrm{Tg.}\,NEn : \mathrm{Sin.}\,GMH = 1 : \mathrm{Sin.}\,(MHm + GMH).\,\mathrm{Cotg.}\,HEM.$

Es ist aber der Winkel MHm dem Neigungswinkel i der Mondsbahn gegen die Ekliptik gleich (XI. Def. 6.), und der Winkel MGm würde die durch die Kraft MF geänderte Neigung der

Mondsbahn meßen, wenn mG auf nE senkrecht wäre. Je kleiner man aber den Winkel NEn nimmt, desto mehr nähert sich der Winkel MGm dem Neigungswinkel der Ebene nEM gegen die Ebene der Ekliptik, und der Winkel GMH der Veränderung der Neigung der Mondsbahn. Bey dieser Verminderung des Winkels NEn wird auch der Winkel GMH immer kleiner und kleiner, der Winkel $MHm + GMH$ nähert sich dem Winkel MHm oder i, und das Verhältniß von $\text{Tg.}\, NEn : \text{Sin.}\, GMH$ dem Verhältniß von $NEn : GMH$. Da nun NEn und GMH in einerley Zeit beschriebene Winkel sind; so verhält sich, wenn man die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Neigung ändert, $= u'$, und die Winkelgeschwindigkeit der Knotenlinie wie vorhin $= u$ setzt,

$$u : u' = 1 : \text{Sin.}\, i.\, \text{Cotg}\, HEM,$$

mithin ist $u' = u\, \text{Sin.}\, i.\, \text{Cotg.}\, HEM = -u\, \text{Sin.}\, i\, \text{Cotg.}\, (l-n)$

Da nun $u = \frac{3 M . a^2 k r}{R^3 . Mt}\, \text{Sin.}\,(l-n)\, \text{Sin.}\,(s-n)\, \text{Cos.}\,(l-s)$ (§. 314.);

so ist $u' = -\frac{3 M . a^2 k r}{R^3 . Mt}\, \text{Sin.}\, i.\, \text{Cos.}\,(l-n)\, \text{Sin.}\,(s-n)\, \text{Cos.}\,(l-s)$.

Aber $\text{Cos.}\,(l-n)\, \text{Sin.}\,(s-n) = \frac{1}{2}\text{Sin.}\,(l+s-2n) - \frac{1}{2}\text{Sin.}\,(l-s)$,

$$\text{Cos.}(l-n)\text{Sin.}(s-n)\text{Cos.}(l-s) = \frac{1}{2}\text{Sin.}(l+s-2n)\,\text{Cos.}(l-s) - \frac{1}{2}\text{Sin.}(l-s)\,\text{Cos.}(l-s)$$
$$= \frac{1}{4}\,\text{Sin.}\, 2(l-n) + \frac{1}{4}\,\text{Sin.}\, 2(s-n) - \frac{1}{4}\,\text{Sin.}\, 2(l-s),$$

und der mittlere Werth des Coefficienten des $\text{Sin.}\, i$ ist nach dem vorhergeh. §. $= 0{,}0009650564 = c$; folglich ist

$$u' = -c.\, \text{Sin.}\, i\,(\text{Sin.}\, 2(l-n) + \text{Sin.}\, 2(s-n) - \text{Sin.}\, 2(l-s)).$$

Die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik ist also blos periodischen Veränderungen unterworfen, welche wegen des kleinen Werths von c und der kurzen Perioden von $2(l-n)$, $2(s-n)$, $2(l-s)$ nicht sehr beträchtlich werden können. Man kann also in dem Ausdruck von u ohne merklichen Fehler statt des veränderlichen Neigungswinkels i seinen mittleren Werth J setzen, und man wird auf ähnliche Art, wie in dem vorhergehenden §. die Bewegung der Knoten berechnet worden ist, und mit Beybehaltung der daselbst gebrauchten Benennungen nach § 239. n. 2. aus der Geschwindigkeit u', mit welcher sich die Neigung verändert, die Veränderung der Neigung selbst finden

$$= \frac{c}{2(m'+m'')}\,\text{Sin.}\, i.\, \text{Cos.}\, 2(l-n) + \frac{c}{2(m'+m'')}\,\text{Sin.}\, i\, \text{Cos.}\, 2(s-n)$$

$$- \frac{c}{2(m'+m)}\,\text{Sin.}\, i\, \text{Cos.}\, 2(l-s).$$ Setzt man nach §. 65. die mittlere Neigung der Mondsbahn $= 5^\circ\, 8'\, 47''$; so erhält man durch die Multiplication der Coefficienten der Sinus in dem Ausdruck der Ungleichheiten des Knotens mit dem Sinus dieser Neigung folgende Coefficienten für die Veränderung der Neigung: 36″; 8′

12″; 39″, so daß die Neigung $i = 5° 8′ 47″ + 36″ \text{Cos.} 2(l-n) + (8′ 12″) \text{Cos.} 2(s-n) - 39″ \text{Cos.} 2(l-s)$ wird.

Die von dem Cosinus des doppelten Abstands der Sonne vom Mondsknoten abhängende Veränderung der Neigung ist die von **Tycho** bemerkte, welche er auf 9′ 30″ setzte. Die neueren Beobachtungen geben 8′ 47″, nur 35″ mehr, als nach obiger Berechnung.

§. 316. Der Mond muß sich also mit den Beobachtungen übereinstimmend in einer Ebene bewegen, deren Durchschnittslinie mit der Ebene der Ekliptik sich rückwarts bewegt, und deren Neigungswinkel gegen die letztere kleinen periodischen Veränderungen unterworfen ist, von welchen die grösste dem Cosinus des doppelten Abstands der Sonne vom Mondsknoten proportional ist. In dieser Ebene beschreibt der Mond vermöge der Beobachtungen im Mittel genommen eine Ellipse, deren große Axe aber nicht sich beständig parallel bleibt (§. 68 und 218.), wie es seyn sollte, wenn die auf den Mond wirkende Centripetalkraft umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional wäre. Da aber seine Schwere gegen die Erde durch die Attraction der Sonne verändert wird, so daß die ganze auf ihn wirkende aus den Attractionen der Erde und der Sonne zusammengesetzte Centralkraft nicht mehr genau im umgekehrten Verhältniß des Quadrats seines Radius Vector ist; so fragt es sich, ob sich hieraus die Bewegung seiner Apsidenlinie erklären lasse.

Um dieses zu untersuchen, sey *am* (Fig. 132.) eine beliebige krumme Linie, welche ein Körper durch eine gegen den gegebenen Punkt *c* gerichtete Centripetalkraft zu beschreiben genöthigt sey; so sind die Geschwindigkeiten *at*, *ms* nach den Richtungen der Tangenten an den Punkten *a* und *m* umgekehrt den aus dem Mittelpunkt *c* der Kraft auf die Tangenten gefällten Perpendickeln *cpcq* proportional (§ 272.). Man zerfälle jede dieser Geschwindigkeiten in zwey andere *ad* und *ab*, *mo* und *mn*, so daß *ad*, *mo* auf *ca*, *cm*, senkrecht seyen, *ab*, *mn* aber mit den Richtungen *ca*, *cm* zusammenfallen. Da nun

$at : ms = cq : cp$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke *mso* u. *cmq*,
$ms : mo = cm : cq$ *atd* u. *cap*,
ad :

$\overline{ad : at = cp : ca}$

so ist 1.) $ad : mo = cm : ca$.

Aber, wenn der Körper in einem um c als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ca beschriebenen Kreis mit der Geschwindigkeit ad sich bewegte; so müßte die Centripetalkraft $\varkappa' = \frac{\overline{mo}^2}{cm}$, mithin $\varkappa : \varkappa' = \overline{ad}^2 . cm : \overline{mo}^2 . ca$, oder vermöge der Proportion n. 1. $\varkappa : \varkappa' = \overline{cm}^3 : \overline{ca}^3$ seyn. Folglich ist

2.) Die Kraft, mit welcher der Körper in dem Abstand mc von dem Mittelpunkt der Kraft um diesen Punkt als Mittelpunkt einen Kreis mit derjenigen Geschwindigkeit beschreiben könnte, welche er in m nach einer auf dem Radius Vector cm senkrechten Richtung hat, umgekehrt dem Würfel dieses Radius Vector proportional.

Ein Körper m (Fig. 133.) beschreibe nun um den gegebenen Punkt s als Mittelpunkt der Kräfte die krumme Linie $amnp$, und sa sey eine in ihrer Ebene liegende der Lage nach gegebene gerade Linie. Es sey eine andere krumme Linie $am'n'q$ in der Ebene der ersteren so verzeichnet, daß für gleiche Distanzen sm, sm' das Verhältniß des Winkels asm zu dem Winkel asm' einem gegebenen Verhältniß $f : g$ gleich sey; so wird, wenn die aus s als Mittelpunkt mit den Halbmessern sm, sn beschriebenen Kreise der Bahn amn in m und n, und der Bahn $am'n'q$ in m' und n' begegnen,

so wohl $\left.\begin{matrix} asn & asn' \end{matrix}\right\}$
als $\left.\begin{matrix} asm & asm' \end{matrix}\right\} = f : g$,

mithin auch $\left.\begin{matrix} asn - asm \\ nsm \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} asn' - asm' \\ n'sm' \end{matrix}\right\} = f : g$ seyn.

Aber den Winkeln nsm, $n'sm'$ sind so wohl die in, als die um die Figuren $amns$, $am'n's$ beschriebenen Kreissectoren nsr, $n'sr'$, osm, $o'sm'$ proportional; folglich verhält sich die Summe aller $\left\{\begin{matrix} \text{in} \\ \text{um} \end{matrix}\right\}$ die Figur asn beschriebenen Kreissectoren zu der Summe aller $\left\{\begin{matrix} \text{in} \\ \text{um} \end{matrix}\right\}$ die Figur asn' beschriebenen, wie $f : g$ (V, 12.), und daher auch der Sector ans zu dem Sector $an's = f : g$. Da nun die Sectoren ams, ans der Zeit proportional wachsen (§. 271.); so wachsen auch die Sectoren $am's$, $an's$ der Zeit proportional, und die krumme

Linie $am'n'q$ kann mit einer gegen den gegebenen Punkt s gerichteten Centripetalkraft beschrieben werden.

Man lege an den Punkt s der Linie sm, und auf derjenigen Seite derselben, auf welcher sa in Beziehung auf sm liegt, den Winkel $m'sa' = msa$, mache $sa' = sa$, und beschreibe an der geraden Linie sa' die krumme Linie $a'm'p'$, welche der amp gleich und ähnlich sey: so wird diese durch den Punkt m' der krummen Linie $am'q$ gehen. Wenn also ein zweyter Körper m' den Umfang der Figur $a'm'p'$ so durchlauft, daß er den Bogen $a'm'$ in derselben Zeit beschreibt, in welcher der Körper m von a nach m gekommen ist und zugleich die Figur in der erweiterten Ebene der ersteren sich um den Punkt s so dreht, daß $asm' : \left\{ {asm \atop a'sm'} \right\} = g : f$ ist; so wird er in der unbeweglichen Ebene der Bogen am' der Bahn $am'q$ in derselben Zeit beschreiben, in welcher er mit seiner relativen Bewegung in der sich drehenden Ebene den Bogen $a'm'$, und der Körper m den gleichen und ähnlichen Bogen am der ruhenden Bahn beschrieben hat.

Um nun die Centripetalkraft zu finden, mit welcher der Körper m' die bewegliche Bahn $a'm'p'$ beschreiben kann, suche man die Centripetalkraft, mit welcher von eben diesem Körper die krumme Linie $am'q$ in einer unbeweglichen Ebene kann beschrieben werden. Es seyen asm und asm' in gleichen Zeiten von den zwey Körpern m und m' in der unbeweglichen Ebene beschriebene Winkel, und asn, asn' seyen ebenfalls in einerley Zeit beschrieben. Da so wohl $asm : asm'$, als asn zu asn' sich wie $f : g$ verhält; so ist $msn : m'sn' = f : g$, mithin auch die Geschwindigkeit von m nach einer auf sm senkrechten Richtung zu der Geschwindigkeit von m' nach einer auf sm' senkrechten Richtung $= f : g$. Folglich wird die Centripetalkraft, vermöge welcher der Körper m um s als Mittelpunkt einen Kreis in der Distanz sm beschreiben könnte, zu der Centripetalkraft, mit welcher der Körper m' in eben diesem Kreis sich bewegen könnte, sich verhalten wie das Quadrat der ersteren Geschwindigkeit zu dem Quadrat der letzteren (§ 273 n. 1.), d. i. wie $f^2 : g^2$, und eben dieses Verhältniß werden die diesen Kräften entgegengesetzte

Kräfte, d. i. die Schwungkräfte der zwey Kreisbewegungen zu einander haben. Wenn nun der Körper m sich dem Mittelpunkt der Kraft während der Beschreibung des Winkels msn nähert; so muß die Centripetalkraft, welche ihn die krumme Linie amn beschreiben macht, von m bis n größer als die Schwungkraft, oder größer als die zur Beschreibung des Kreisbogens mo erforderliche Kraft seyn. Weil aber $sn' = sn$ seyn, mithin der Körper m', während er den Winkel $m'sn'$, und der Körper m den Winkel msn beschreibt, sich dem Mittelpunkt der Kraft um eben so viel nähern soll, als der Körper m; so muß in gleichen Entfernungen von dem Mittelpunkt der Kraft die Differenz der Schwungkräfte der Differenz der Centripetalkräfte gleich seyn. Ebenso verhält es sich, wenn der Körper m' sich von dem Mittelpunkt der Kraft entfernt. Man bezeichne die Schwungkräfte der Bewegung von m' in den Distanzen sm' und sa mit κ' und κ, und die Schwungkräfte der Bewegung von m in den beziehungsweise gleichen Distanzen sm und sa mit h' und h; so verhält sich

$$\begin{aligned} \kappa' \quad \kappa &= \overline{sa}^3 : \overline{sm'}^3 \text{ (n. 2.)} \\ &= \overline{sa}^3 : \overline{sm}^3 \\ &= h' : h \text{ (n. 2.)} \end{aligned}$$

mithin $\kappa' - h' : \kappa - h = \overline{sa}^3 : \overline{sm'}^3$.

Da nun $\kappa : h$ = Quadr. der Gesch. von m' : Quadr. der Geschw. von m (§. 273. n. 1.);

$$= g^2 : f^2;$$

so ist $\kappa - h : h = g^2 - f^2 : f^2$, und daher

3.) $\kappa' - h' : h = (g^2 - f^2)\,\overline{sa}^3 : f^2 . \overline{sm'}^3$, oder es ist die Differenz der Schwungkräfte, mithin auch die Differenz der Centripetalkräfte, mit welchen gleiche und ähnliche Bahnen in gleichen Zeiten, die eine in einer ruhenden, die andere in einer um den Mittelpunkt der Kräfte sich drehenden Ebene beschrieben werden können, umgekehrt dem Würfel der Entferaung von dem Mittelpunkt der Kräfte proportional *). Wenn $g > f$ ist; so ist $\kappa' > h'$, also die Centripetalkraft in der ruhenden Bahn kleiner als in der beweglichen, welche

*) Princ. L. I. prop. XLIV.

sich in diesem Fall nach derselben Richtung dreht, nach welcher der Körper m' in derselben umlauft. Umgekehrt verhält es sich, wenn $g < f$ ist. Man hat alsdenn die Proportion

$$h' - x' : = (f^2 - g^2)\, \overline{sa}^3 : f^2 . \overline{sm'}^3 .$$

Wenn die Körper sich von dem Mittelpunkt der Kräfte entfernen; so muß in beyden Bahnen der Ueberschuß der Schwungkraft über die Centripetalkraft in gleichen Entfernungen von dem Mittelpunkt der Kraft gleich groß seyn, und der Beweis wird wie vorhin geführt.

Wenn sich die Ebene, in welcher der Körper m sich bewegt, sich selbst parallel so fortbewegt, daß der Mittelpunkt s der Kräfte gleichförmig eine gerade Linie beschreibt; so wird dadurch seine Bahn in dieser beweglichen Ebene nicht geändert (§. 296.). Folglich bleibt auch die Bahn $am'q$ des Körpers m' in dieser Ebene, und seine Bahn in einer um den Punkt s sich drehenden, und mit diesem Punkt zugleich fortrückenden Ebene dieselbe wie vorhin. Man wird daher in der Folge die Ebene, in welcher sich ein Körper bewegt, als ruhend betrachten, wenn sie keine drehende Bewegung hat.

§. 317. Der Körper m beschreibe um s als Brennpunkt eine Ellipse, deren große Axe $= ap$, Parameter $= L$, und von dem Brennpunkt s entferntester Scheitel a sey. In diesem Fall ist die Centripetalkraft in der ruhenden Ellipse umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional (§. 274. 277.), und in dem Scheitel a der Kraft gleich, vermöge welcher mit derjenigen Geschwindigkeit, welche der in der Ellipse sich bewegende Körper in a hat, ein Kreis könnte beschrieben werden, dessen Halbmesser $= L$ ist, weil dieser Kreis mit der Ellipse in a einerley Krümmung hat (Kegelschn. II, 35. Zus. 1.), und die Centripetalkraft in diesem Kreis der Centripetalkraft in der Ellipse an dem Punkt a gleich ist (§. 276. u. 6.) Man setze die der Entfernung sa entsprechende Centripetalkraft in der unbeweglichen Ellipse $=$ $mk . \frac{a^2}{\overline{sa}^2}$, so daß sie in der Entfernung $a = m . k$, und in der Entfernung $sm = m.k.\frac{a^2}{\overline{sm}^2}$ werde, und es werde, wie in dem vorhergehenden §. diejenige Kraft mit h bezeichnet, vermöge welcher um s als Mittelpunkt in der Entfernung sa ein Kreis mit derjenigen Geschwindigkeit könnte beschrieben werden, welche der in der Ellipse umlaufende Körper in a hat; so wird sich verhalten

$$h : mk.\frac{a^2}{\overline{sa}^2} = L : sa \text{ (§. 273. n. 1.)}.$$

$$\text{Aber } \underline{x' - h' : \quad h \quad = (g^2 - f^2)\, sa^3 : f^2.\overline{sm'}^3} \text{ (n. 316. n. 3.)};$$

$$\text{folglich } x' - h' : m.k.\, a^2 = (g^2 - f^2)\, L \quad f^2.\overline{sm'}^3,$$

und daher ist der Ueberschuß der Centripetalkraft in der beweglichen Ellipse über die Centripetalkraft in der unbeweglichen in der Distanz sm' oder sm

$$= m.k.\frac{g^2 - f^2}{f^2}\cdot\frac{a^2.L}{\overline{sm'}^3}.$$

Die Centripetalkraft in der unbeweglichen Ellipse ist aber in eben dieser Distanz $= m.k.\frac{a^2}{\overline{sm'}^2}$; folglich ist die ganze Centripetalkraft, vermöge welcher die bewegliche Ellipse, oder in einer unbeweglichen Ebene die krumme Linie $am'n'q$ kann beschrieben werden, in der Entfernung sm' von dem Mittelpunkt der Kräfte

$$= m.k.a^2\left(\frac{1}{\overline{sm'}^2} + \frac{g^2 - f^2}{f^2}\cdot\frac{L}{\overline{sm'}^3}\right),$$

welche also aus zwey Theilen besteht, von welchen der eine umgekehrt dem Quadrat, der andere umgekehrt dem Würfel der Entfernung proportional ist. Der zweyte Theil ist positiv, wenn $g > f$, und die Apsidenlinie mit dem Körper nach einerley Richtung sich bewegt, aber negativ, wenn $g < f$ ist, und die Richtung der Bewegung der Apsidenlinie der Richtung der Bewegung des Körpers entgegengesetzt ist.

§. 318. Es sey die halbe große Axe der beweglichen Ellipse $= a'$, und der Radius Vector $\left.\begin{matrix} sm' \\ r \end{matrix}\right\} = a'(1 + x)$, wo x eine veränderliche von dem Winkel des Radius Vector mit der großen Axe abhängende Zahl bezeichnet, welche positiv oder negativ ist, je nachdem $r >$ oder $<$ als a' ist; so wird $\overline{sm'}^2 = a'^3(1+x)^3 = a'^3(1+3x+3x^2+x^3)$, und $\frac{1}{\overline{sm'}^3} = \frac{1}{a'^3}(1-3x+6x^2-\text{rc.})$. Wenn nun die Ellipse wenig von einem Kreis abweicht; so ist x ein kleiner Bruch, dessen Quadrate und höhere Potenzen in Vergleichung mit dem Werth des Bruchs x selbst sehr klein seyn werden. Folglich ist in diesem Fall die Veränderung des zweyten Theils der Centripetalkraft, welcher die Bewegung der Apsidenlinie hervorbringt, sehr nahe der Veränderung der Radius Vector proportional. Ebenso findet sich $\frac{1}{\overline{sm'}^4} = \frac{1}{a'^4}(1-4x+10x^2-\text{rc.})$, und es ist wiederum, wenn x ein kleiner Bruch ist die Veränderung eine Centripetalkraft, welche umgekehrt der vierten Potenz des Radius Vector proportional ist, den kleinen Veränderungen des Radius Vector proportional. Hieraus folgt, daß, wenn zu einer Centripetalkraft, welche umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional ist, eine neue nach einem anderen Gesetz sich richtende Kraft hinzukommt, und die vermöge der ersteren beschriebene Ellipse wenig von einem Kreis verschieden ist, die mit der zusammengesetzten Centripetalkraft beschriebene krumme Linie einer beweglichen Ellipse sich nähern werde. Nun nimmt aber der zweyte umgekehrt dem Würfel der Entfernung proportionale Theil der zur Beschreibung einer beweglichen Ellipse erforderlichen Centripetalkraft ab, wenn die Entfernung wächst; folglich wird sich die Apsidenlinie vor oder rückwarts bewegen, je nachdem der zweyte Theil der Centripetalkraft mit der Zunahme der Entfernung abnimmt oder wächst.

Um wieder auf die Bahn des Monds um die Erde, welche Veranlassung zu dieser Untersuchung gegeben hat, zurückzukommen; so ist diese im Mittel genommen eine wenig excentrische Ellipse, auf welche das, was so eben bemerkt worden ist, kann angewendet werden. Durch die Attraction der Sonne wird die Schwere des Monds gegen die Erde in den Syzygien bald vermindert, und in den Quadraturen vergrößert (§. 308. 312.); folglich muß sich die Apsidenlinie der Mondsbahn im ersten Fall vorwarts, im letzteren rückwarts bewegen. Da aber die Verminderung der Schwere des Monds in den Syzygien das doppelte der Vermehrung in den Quadraturen, und die Summe aller Verminderungen größer als die Summe aller Vermehrungen während eines halben synodischen Monats ist; so muß auch die Summe aller directen Bewegungen der Apsidenlinie größer seyn, als die Summe der retrograden, und daher die Apsidenlinie der Mondsbahn mit den Beobachtungen übereinstimmend im Ganzen eine directe Bewegung haben, oder die Punkte, in welchen der Mond seine gröste und kleinste Geschwindigkeit hat, werden nach und nach anderen nach derjenigen Seite hin liegenden Fixsternen entsprechen, nach welcher sich der Mond um die Erde bewegt. Der Mond wird zwar, weil die von der Sonne herrührende Veränderung der auf ihn wirkenden Centripetalkraft nicht umgekehrt dem Würfel seiner Entfernung von der Erde proportional ist, nicht genau eine sich drehende Ellipse beschreiben, sondern es werden sich auch von dieser Abweichungen zeigen müssen, welches ebenfalls mit den Beobachtungen übereinstimmt, vermöge welcher die bewegliche Ellipse nur das Mittel hält zwischen den übrigen kleineren Ungleichheiten der Bewegungen des Monds (§. 213.).

§. 319. Die Schwere des Monds gegen die Erde wird durch die Attraction der Sonne vermindert um $\frac{1}{2} \cdot \frac{M.a^2kr}{R^3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{M.a^2kr}{R^3} \text{Cos.} 2D$ (§. 312. n. 2.), in welchem Ausdruck M die Masse der Sonne, oder genauer die Summe dieser und der Erdmasse (§. 308.), a die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, r und R die wahren Entfernungen des Monds und der Sonne von von der Erde, $M.k$ die Kraft, mit welcher die Sonne und die Erde in der Distanz a einander anziehen, und D den Winkel SEM (Fig. 130.) bezeichnet, welchen der Radius Vector der Erde mit dem des Monds einschließt. Wird wie bisher die Erdmasse oder genauer, die Summe dieser und der Masse des Monds $= m$ gesetzt; so ist die Kraft, mit welcher der Mond und die Erde in der Distanz r einander anziehen, $= \frac{ma^2k}{r^2}$, und daher die ganze Centripetalkraft in der relativen Bahn des Monds um die Erde

$$= \frac{ma^2k}{r^2} - \frac{1}{2}\,\frac{M.a^2kr}{R^3} - \frac{3}{2}\,\frac{M.a^2kr}{R^3}\,\mathrm{Cos.}\,2D$$

$$= \frac{ma^2k}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{r}{R^3} - \frac{3}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{r}{R^3}\,\mathrm{Cos.}\,2D\right).$$

Das dritte Glied bringt eine periodische nach einem halben synodischen Monat in derselben Ordnung wiederkehrende Veränderung dieser Kraft hervor, und die von r und R allein abhängende Veränderung ist

$$\frac{ma^2k}{r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{r}{R^3}\right), \text{ oder } \frac{ma^2k}{r^3}\left(r - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{r^4}{R^3}\right).$$

Wäre die Bahn des Monds eine nach dem §. 317. angegebenen Gesetz sich drehende Ellipse; so müßte die Centripetalkraft seyn

$$\frac{ma^2k}{r^2}\left(1 + \frac{g^2-f^2}{f^2}\,\frac{L}{r}\right) (\text{§. } 317.) \text{ oder } \frac{ma^2k}{r^3}\left(r + \frac{g^2-f^2}{f^2}\,L\right).$$

Die Centripetalkräfte in diesen zwey Bahnen verhalten sich also in einerley Distanz r zu einander wie $r - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{r^4}{R^3} : r + \frac{g^2-f^2}{f^2}L$, oder, wenn man $r = a\,(1+x)$ setzt, und wegen der Kleinheit der Zahl x ihre Quadrate und höhere Potenzen wegläßt, wie $a' + a'x - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{a'^4}{R^3} - 2\,\frac{M}{m}\,\frac{a'^3x}{R^3} : a' + a'x + \frac{g^2-f^2}{f^2}\,L$, welches Verhältniß, wenn der Mond in seiner mittleren Entfernung a' von der Erde sich befindet, also $x = 0$ ist, dem Verhältniß von $a' - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\,\frac{a'^4}{R^3} : a' + \frac{g^2-f^2}{f^2}\,L$, oder von $1 - \frac{1}{2}\,\frac{M}{m}\left(\frac{a'}{R}\right)^3 : 1 + \frac{g^2-f^2}{f^2}\,\frac{L}{a'}$ gleich wird. Sollen nun die zwey Bahnen einander ähnlich seyn; so muß auch in den übrigen Punkten das Verhältniß der Centripetalkräfte dasselbe bleiben, und daher das Verhältniß ihrer gleich großen Veränderungen der Distanzen entsprechenden Zu- und Abnahmen eben diesem Verhältniß gleich seyn. Folglich wird, wenn man zur Abkürzung die Größe $\frac{M}{m}\left(\frac{a'}{R}\right)^3 = Q$ setzt, sich verhalten müßen

$$1 - \tfrac{1}{2}Q : 1 + \frac{g^2-f^2}{f^2}\,\frac{L}{a'} = a'x - 2Qa'x : a'x$$
$$= 1 \;-\; 2Q : 1,$$

oder, weil der halbe Parameter L der Mondsbahn nahe der halben großen Axe derselben gleich ist,

$$1 - \tfrac{1}{2}Q : \frac{g^2}{f^2} = 1 - 2Q : 1,$$

$1 - \frac{1}{2}Q : 1 - 2Q = g^2 : f^2$.

Es ist der, wenn man die siderischen Umlaufszeiten der Erde und des Monds mit T und t bezeichnet, vermöge der Proportion §. 308. der mittlere Werth von $Q = \frac{t^2}{T^2} = \frac{1}{178,723}$, weil in dem Ausdruck von Q die Größe M eigentlich die Summe der Massen der Sonne und der Erde ist; folglich ist $g^2 > f^2$, und die Apsidenlinie des Monds hat eine vorwärts gehende Bewegung (§. 316.). Und da nach eben diesem §. der Winkel asm' (Fig. 133.), welchen der Mond in einer unbeweglichen Ebene beschreibt, sich zu dem Winkel asm oder $a'sm'$ wie $g : f$ verhält; so verhält sich $asm' : asa' = g : g - f$, und es ist die mittlere siderische Bewegung der Apsidenlinie in einem siderischen Monat $= \frac{g - f}{g}$ 360 Graden, und in einem Sternjahr $= \frac{g - f}{g} \cdot \frac{T}{t}$ 360 Grade. Weil nun $g^2 : f^2 = 1 - \frac{1}{2}Q : 1 - 2Q = 1 : (1 - 2Q)(1 + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{4}Q^2 + \&c) = 1 : 1 - \frac{3}{2}Q(1 + \frac{1}{2}Q)$, also nahe $g : f = 1 : 1 - \frac{3}{4}Q(1 + \frac{7}{8}Q)$, und $g : g - f = 1 : \frac{3}{4}Q(1 + \frac{7}{8}Q)$; $= 1 : \frac{3}{4}\frac{t^2}{T^2}\left(1 + \frac{7}{8}\frac{t^2}{T^2}\right)$; so ist die mittlere siderische Bewegung der Apsidenlinie des Monds in einem siderischen Jahr $=$ $270 . \frac{t}{T}\left(1 + \frac{7}{8}\frac{t^2}{T^2}\right)$ Graden $= 20° \; 17' \; 43''$, welche nach den Beobachtungen $40° \; 40' \; 38'',6$, mithin mehr als noch einmal so viel beträgt.

§. 320. Vermöge der Newtonischen Theorie der allgemeinen Schwere muß also die Apsidenlinie der Mondsbahn eine vorwärts gehende Bewegung haben, wie man durch die Beobachtungen gefunden hat. Allein Newton*) selbst, und nach ihm Clairaut **), Euler und d'Alembert fanden aus der Theorie diese Bewegung nur ungefähr halb so groß, als sie nach den Beobachtungen ist. Clairaut schloß hieraus, daß die Anziehung im directen Verhältniß der Massen und im umgekehrten der Quadrate der Entfernungen nicht die Ursache aller derjenigen Bewegungen seyn könne, welche wir an den Himmelskörpern beobachten. Auf der andern Seite schien es ihm wegen der genauen Uebereinstimmung der auf dieses Attractions-Gesetz sich gründenden Theorie mit einer großen Anzahl anderer Erscheinungen schwer zu

*) Princ. L. I. prop. XLV. Cor. 2.

**) Mém. de l'Acad. Roy. d. Sc. 1745.

seyn, sie zu verwerfen. Er nahm also an, daß die Attraction in der Natur zwar statt finde, aber ein anderes als das von Newton aufgestellte Gesetz befolge, und aus zwey Theilen, einem umgekehrt dem Quadrat der Distanz proportionalen, und einem mit der Abnahme der Distanz in einem größeren Verhältniß wachsenden Theil bestehe, als das Quadrat der Entfernung abnehme, welcher letztere in den grossen Abständen der Planeten von der Sonne unmerklich sey, und nur in kleineren Distanzen, wie z. B. in der Entfernung des Monds von der Erde bemerkbar werde. Diesen zweyten Theil kann man so bestimmen, daß die Bewegung der Apsidenlinie des Monds mit den Beobachtungen übereinstimmend herauskommt, und er zugleich in der Entfernung der Planeten von der Sonne so klein wird, daß kein Unterschied zwischen den das einfache Newtonische Gesetz der Attraction erfordernden keplerischen Regeln und der mittelst dieses zusammengesetzten Attractionsgesetzes berechneten Bewegungen der Planeten beobachtet werden kann. Zugleich müßte das neue Attractionsgesetz, welches an die Stelle des Newtonischen gesetzt werden soll, so beschaffen seyn, daß die Attraction in sehr kleinen Distanzen nicht zu groß, und besonders die Schwere an der Oberfläche der Erde nicht zu groß wird in Beziehung auf diejenige, welche der Mond gegen die Erde hat.

Ein Jahr später fand Clairaut, daß er bey seiner ersten Berechnung nicht aufmerksam genug auf diejenigen Grössen war, welche zwar wegen ihrer Kleinheit ohne merklichen Fehler scheinen vernachläßigt werden zu können, aber bey der weiteren Ausführung des Calculs einen beträchtlichen Einfluß auf die Endresultate haben *), und machte die wichtige Bemerkung, daß eine genauer geführte Berechnung die Bewegung der Apsidenlinie des Monds vollkommen mit den Beobachtungen übereinstimmend gebe **). Euler ***) und d'Alembert fanden dasselbe, und die von La Place nach der

*) S. § 314. pag. 557. u. 558.

**) Mém. de l'Acad. de scienc. 1748. De l'orbite de la Lune par *M. Clairaut*. Dep à l'Acad. le 21. Janv. et lu le 15. Mars. 1752.

***) Theoria motus Lunæ Auctore *L. Eulero*. Petrop. 1753. Cap. VIII. §. 138.

Newtonischen Theorie der allgemeinen Schwere berechnete Bewegung jener Apsidenlinie ist von der beobachteten nur um den vierhundert und vierzigsten Theil der letzteren verschieden *).

§. 321. Es ist in dem 308ten und 312ten §. gezeigt worden, daß die Schwere des Monds gegen die Erde durch die Attraction der Sonne im Mittel genommen um ihren 358 Theil vermindert wird. In derjenigen Distanz, in welcher er sich wirklich um die Erde bewegt, ist seine Schwungkraft bald kleiner, bald größer, als seine verminderte Schwere gegen die Erde, weswegen er sich im ersten Fall der Erde nähert, im letzten sich wieder von ihr entfernt, und ohne auf die übrigen Störungen Rücksicht zu nehmen, eine Ellipse beschreibt, deren halbe große Axe dem Halbmesser eines Kreises gleich ist, welchen er mit seiner mittleren Geschwindigkeit vermöge jener verminderten Schwere gegen die Erde beschreiben könnte. Ohne diese Verminderung würde er sich in einer kleineren Distanz um die Erde bewegen müßen, weil nun der Ueberschuß seiner Schwere gegen die Erde über die Schwungkraft seiner mittleren kreisförmigen Bewegung eine Annäherung gegen die Erde zur Folge haben würde. Der Mond lauft also in einer größeren Distanz um die Erde, als diejenige ist, welche seiner Schwere gegen die Erde allein entsprechen würde. Da aber die perturbirende Kraft der Sonne, von welcher hier die Rede ist, in der Richtung des Radius Vector des Monds wirkt; so wird dadurch der Inhalt des in einer gegebenen Zeit beschriebenen Sectors nicht geändert (§. 271.). Folglich muß, damit die in gleichen Zeiten beschriebenen Sectoren seiner wirklichen Bahn, und derjenigen, welche er ohne die Einwirkung der Sonne beschrieben haben würde, einander gleich werden, der Bogen des ersteren sich zu dem Bogen des letzteren verhalten, wie sein verminderter mittlerer Abstand r' von der Erde zu seinem wirklichen mittleren Abstand r von der Erde, oder, weil diesen in gleichen Zeit beschriebenen Bogen die Geschwindigkeiten, mit welchen sie beschrieben werden, proportional

*) Mécan. cél. T. III. Livre VII. Chap. I. n. 16. pag. 236.

sind (§. 231.), wird seine wirkliche mittlere Geschwindigkeit v sich zu der mittleren Geschwindigkeit v' seiner Bewegung, welche er ohne die Einwirkung der Sonne haben würde, verhalten wie $r' : r$. Die zu diesen Bewegungen erforderlichen Centripetalkräfte sind aber (§. 273 n. 1.) im zusammengesetzten Verhältniß aus dem directen der Quadrate der Geschwindigkeiten, mithin hier aus dem Verhältniß von $r'^2 : r^2$, und aus dem umgekehrten der Halbmesser; folglich verhält sich die verminderte Schwere des Monds gegen die Erde in der Distanz r zu seiner unverminderten Schwere gegen die Erde in der Distanz r' wie $r'^3 : r^3$. Aber vermöge des Newtonischen Gravitationsgesetzes verhält sich die unverminderte Schwere gegen die Erde in der Distanz r' zur unverminderten Schwere in der Distanz r wie $r^2 : r'^2$; folglich verhält sich die durch die Attraction der Sonne verminderte Schwere des Monds gegen die Erde in der Distanz r zu seiner Schwere, welche er ohne die Einwirkung der Sonne in eben dieser Distanz gegen die Erde haben würde $= r' : r$. Da nun in den mittleren Entfernungen der Sonne und des Monds von der Erde das erstere Verhältniß dem von 357,446 : 358,446 gleich ist (§. 308.); so verhält sich der wirkliche Abstand des Monds von der Erde zu demjenigen, welchen er ohne die Attraction der Sonne haben würde, wie 358,446 : 357,446, und seine mittlere Geschwindigkeit v verhält sich zu seiner mittleren Geschwindigkeit v' mit welcher er sich ohne die Attraction der Sonne um die Erde würde bewegt haben, wie 357,446 : 358,446, weil vermöge des oben bewiesenen dieses Verhältniß dem von $r' : r$ gleich ist. Endlich weil seine Winkelgeschwindigkeit in demselben Verhältniß kleiner wird, in welchem sein Abstand von der Erde wächst; so verhält sich die mittlere Winkelgeschwindigkeit u des Monds zu derjenigen Winkelgeschwindigkeit u', welche er ohne die Einwirkung der Sonne gehabt haben würde im Mittel wie $(357{,}446)^2 : (358{,}446)^2$. Also ist durch die Attraction der Sonne der mittlere Abstand des Monds von der Erde um seinen 358,446ten Theil vergrößert, und seine mittlere Winkelgeschwindigkeit um $\left(\frac{358{,}446}{357{,}446}\right)^2 - 1$ ihrer Größe, d. i. nahe um ihren 178,723ten Theil vermindert, weil $(\frac{358,446}{357,446})^2 = (1 + \frac{1}{357,446})^2$ nahe $=$ $1 + \frac{2}{357,446} = 1 + \frac{1}{178,723}$ ist.

Nun ist aber die Verminderung der Schwere des Monds gegen die Erde durch die Attraction der Sonne umgekehrt dem Würfel des Abstands der Sonne von der Erde proportional (§. 308. oder 314.); folglich verändern sich die so eben angegebene Zahlen 178,723 und 358,446 mit dem Würfel dieses Abstands, und zugleich die Entfernung des Monds von der Erde und seine Winkelgeschwindigkeit, so daß die Bahn des Monds sich erweitert, wenn die Erde sich der Sonne nähert, und sich wiederum zusammenzieht, wenn der Abstand der Erde von der Sonne größer als der mittlere wird, und im ersten Fall die Winkelgeschwindigkeit des Monds abnimmt, im letzteren aber wächst, woraus diejenige Ungleichheit der Mondsbewegung entsteht, welche man die *jährliche Gleichung* nennt (§. 69.). Das in dem angeführten §. angegebene Gesetz dieser Ungleichheit ergiebt sich so. Die Veränderung der Geschwindigkeit des Monds, welche durch die Attraction der Sonne hervorgebracht wird, ist, wie man so eben gesehen hat, dem Würfel der Entfernung der Sonne von der Erde umgekehrt proportional. Die Geschwindigkeiten der Erde in ihrer Bahn nach den auf den Radius *ca*, *cm* (Fig. 132.) senkrechten Richtungen *ad* und *mo* verhalten sich umgekehrt wie die Radii Vectores (Siehe den Bew. von n. 1. §. 316.), und daher sind die Winkelgeschwindigkeiten der Bewegung der Erde um die Sonne, oder die Winkelgeschwindigkeiten der scheinbaren Bewegung der Sonne, umgekehrt den Quadraten der Abstände der Sonne von der Erde proportional. Seyen die Winkelgeschwindigkeiten der Sonne in ihrer mittleren zur Einheit angenommenen Entfernung von der Erde, und den Entfernungen R, $R+x$, beziehungsweise C, U, U'; so wird man haben $U = \frac{C}{R^2}$; $U' = \frac{C}{(R+x)^2}$, und $U - U' = \frac{Cx\,(2R+x)}{R^2(R+x)^2}$

$= \frac{2Cx}{R^3} \cdot \frac{1 + \frac{x}{2R}}{\left(1+\frac{x}{R}\right)^2}$, welche Veränderung sich der Größe $\frac{2Cx}{R^3}$

desto mehr nähert, je kleiner x in Vergleichung mit R wird. Diese Winkelgeschwindigkeit der Sonne verändert sich stetig, und die augenblikliche Veränderung derselben ist umgekehrt dem Würfel der Entfernung der Sonne von der Erde proportional. In eben diesem Verhältniß verändert sich aber auch die Winkelgeschwindigkeit des Monds; folglich ist die jährliche Gleichung des Monds der Mittelpunktsgleichung der Sonne proportional.

Die Größe dieser Ungleichheit der Mondsbewegung kann auf folgende Art näherungsweise bestimmt werden. Der kleinste Abstand der Sonne von der Erde ist um 0,01679435 oder nahe um $\frac{1}{60}$ kleiner als der mittlere zur Einheit angenommene (§. 191.); folglich ist der Würfel des kleinsten Abstands nahe um $\frac{3}{60}$ oder $\frac{1}{20}$ kleiner als der Würfel des mittleren, und daher, wenn die Erde im Perihelio ist, die Verminderung der Winkelgeschwindigkeit des Monds um $\frac{1}{20}$ größer, als in der mittleren Distanz, wo diese Verminderung $\frac{1}{178,723}$ der mittleren Winkelgeschwindigkeit des Monds ausmacht. Mithin ist, wenn sich die Erde im Perihelio befindet, die Winkelgeschwindigkeit des Monds um $\frac{1}{3574,46}$ kleiner als die mittlere. Und da die Winkelgeschwindigkeiten der Erde oder der Sonne in ihrem kleinsten und mittleren Abstand von einander umgekehrt den Quadraten dieser Abstände, oder den Zahlen 1 und $1 - \frac{1}{30}$ proportional sind; so ist die Winkelgeschwindigkeit der Sonne, wenn sie der Erde am nächsten ist, um $\frac{1}{30}$ größer als in ihrer mittleren Entfernung. Also verhält sich die Zunahme an Geschwindigkeit, welche die Sonne in ihrem kleinsten Abstand von der Erde erhält zu der gleichzeitigen Abnahme der mittleren Geschwindigkeit des Monds wie $\frac{1}{30}$ der mittleren Bewegung der Sonne zu $\frac{1}{3574,46}$ der mittleren Bewegung des Monds, oder wie $118,27 : 13,27 = 1 : 0,1122$. Hienach verhielte sich die gröste Mittelpunktsgleichung der Sonne ($1° 55' 32''$ nach §. 167.) zu der jährlichen Gleichung des Monds wie $1 : 0,1122$, und der größte Werth der letzteren wäre $= 12' 57'',8$, nur um $1' 46''$ größer, als man aus den Beobachtungen gefunden hat, welcher Unterschied von den bey dieser Rechnung vernachläßigten Größen herrührt *).

§. 322. Die Seculargleichung (§. 70.) des Monds hat mit seiner jährlichen Gleichung eine ähnliche Ursache. Halley bemerkte zuerst diese Ungleichheit der Bewegung des Monds, und Dunthorn und Mayer haben sie durch eine genauere Untersuchung der älteren und neueren Beobachtungen bestätigt. Sie suchten dieselbe dadurch darzustellen, daß sie zu der mittleren Länge des Monds eine dem Quadrat der Anzahl der vor oder nach dem Jahr 1700 verfloßenen Jahrhunderte proportionale Größe addirten. Nach Dunthorn ist diese Größe = 10″, Mayer setzte sie in seinen ersten Mondstafeln auf 7″, und in seinen neuen auf 9″ La Lande erhielt mit Dunthorn einerley Resultat. Zu der Erklärung dieser Ungleichheit schien die allgemeine Schwere nicht hinreichend zu seyn, und es zeigte sich hier eine ähnliche Schwierigkeit, wie bey der Bewegung der Apsidenlinie der Mondsbahn, welche ebenfalls durch die Theorie anfänglich nicht mit den Beobachtungen übereinstimmend gefunden wurde (§. 320.). Die Mathematiker haben sich viel mit diesem Gegenstand beschäftigt, aber ihre Bemühungen, den Grund der Seculargleichung des Monds in den Wirkungen der Sonne und der Planeten auf den Mond, oder in der Abweichung der Gestalt der Erde und des Monds von einer genauen Kugel zu finden, blieben fruchtlos. Einige verwarfen diese Ungleichheit der Mondsbewegung, andere nahmen, um sie zu erklären zu verschiedenen Mitteln, z. B. zu den Wirkungen der Cometen, dem Widerstand des Mediums, in welchem sie die Himmelskörper sich bewegen ließen, oder zu der Hypothese ihre Zuflucht, daß die Schwere auf schon in Bewegung befindliche Körper nicht mehr mit derjenigen Stärke, wie auf ruhende Körper wirke. Indessen ist die Uebereinstimmung der anderen Phänomene der Himmelskörper mit der Theorie der allgemeinen Schwere so vollkommen, daß man nicht ohne Verdruß die Seculargleichung des Monds allein eine Ausnahme von einem allgemeinen und einfachen

*) La Place Exposit. du Système du Monde. pag. 222 et 223.

Gesetz kann machen sehen, dessen Entdeckung durch die Größe und Mannigfaltigkeit der Gegenstände, welche es umfaßt, dem menschlichen Geist so viele Ehre macht. Durch diese Betrachtung bewogen, untersuchte La Place dieses Phänomen aufs neue, und nach einigen Versuchen glükte es ihm, die Ursache davon zu entdecken *). Die Seculargleichung des Monds hat ihren Grund in der Wirkung der Sonne auf diesen Nebenplaneten, verbunden mit der Secularveränderung der Excentricität der Erdbahn. Daß die Excentricität der Erdbahn durch die Einwirkung der Planeten geändert werde, hatte man schon früher gefunden; folglich ist auch die Secülargleichung des Monds eine Folge der allgemeinen Gravitation.

§. 323. Um nun zu zeigen, wie die Beschleunigung der Bewegung des Monds mit der Abnahme der Excentricität der Erdbahn zusammenhänge, wird man von dem §. 321. bewiesenen Satz ausgehen müssen, daß die Wirkung der Sonne auf den Mond seine Winkelgeschwindigkeit um ihren 179sten Theil vermindert, und diese Verminderung umgekehrt dem Würfel des Abstands der Erde von der Sonne proportional ist. Setzt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $=a$, die der mittleren Anomalie A entsprechende Entfernung $= R$, und die Excentricität der Erdbahn $= e$; so findet sich $\left(\frac{a}{E}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2} e^2 + 3 e \,\text{Cos.}\, A + \frac{9}{2} e^2 \text{Cos.}\, 2A + \&c.$ **). Folglich enthält der Ausdruck für die Verminderung der Winkelgeschwindigkeit des Monds ein Glied, welches dem Produkt des 179 Theils dieser Geschwin-

*) Mém. de l'Acad. de Paris pour 1786. Erschienen im Jahr 1788. Die erste Nachricht von dieser Entdeckung gab La Place der Akademie am 19ten Dec. 1787.

**) Durch die Entwicklung der Gleichung n. 1. §. 185. in eine Reihe findet man u, und $\text{Cos.}\, u$ ausgedrückt durch e, e^2 &c. und die Cosinus von m, $2m$, &c. woraus man mittelst der Gleichung n. 2. erhält $\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2} e^2 - (e - \frac{3}{4} e^3 - \&c.)\, \text{Cos.}\, m - (\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} e^4 + \&c.)\, \text{Cos.}\, 2m - (\frac{3}{8} e^3 - \&c.)\, \text{Cos.}\, 3m - \&c.$ Durch die Erhebung dieser Reihe auf die Potenz -3 erhält man die oben angegebene Reihe für $\left(\frac{a}{r}\right)^3$

schwindigkeit in $\frac{3}{2}e^2$ gleich ist. Von den übrigen Gliedern obiger Reihe hängt die §. 321 betrachtete jährliche Gleichung ab. Wäre e constant; so würde jenes Glied eine constante Verminderung der Winkelgeschwindigkeit des Monds geben, welche sich mit seiner mittleren Bewegung vermengen würde, so daß die mittlere Bewegung des Monds beständig von gleicher Größe müßte gefunden werden. Aber die sehr kleine Veränderung von e hat mit der Länge der Zeit einen sehr merklichen Einfluß auf die Bewegung des Monds, und man sieht, daß, wenn e abnimmt, die Geschwindigkeit des Monds um weniger vermindert, mithin seine Bewegung in Beziehung auf diejenige, welche er bey einem größeren Werth von e hatte, beschleunigt wird, welches von den uns bekannten Beobachtungen der Alten an bis auf gegenwärtige Zeit statt findet. Diese Beschleunigung wird in eine Verzögerung übergehen, wenn die Excentricität der Erdbahn ihr Minimum erreicht haben, und wieder zu wachsen anfangen wird.

Sey t die Anzahl der auf das Jahr 1800 folgenden Jahrhunderte; so ist nach §. 191. S. 300. die dem Jahr $1800 + 100t$ entsprechende Excentricität der Erdbahn unter der Voraussetzung, daß sie der Zeit proportional abnehme, $= 0{,}01679435 - 0{,}000041632t$, und die Abnahme ihres Quadrats in t Jahrhunderten $= 0{,}00000139836t - 0{,}00000000173322t^2$, welche ebenfalls wegen des kleinen Coefficienten von t^2 nahe der Zeit proportional ist. Folglich erhält die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Monds in t Jahrhunderten einen Zuwachs, welcher dem Produkt des 179 Theils der mittleren Secularbewegung des Monds in $\frac{3}{2} \cdot 0{,}00000139830t$ gleich ist. Da nun nach Burg's Mondstafeln der Mond in 100 Julianischen Jahren oder in 36525 Tagen in Beziehung auf die Aequinoktialpunkte 1336 Umläufe und noch $10^{S}\ 7^{\circ}\ 52'\ 43'',7$ darüber, mithin in Beziehung auf die Fixsterne $1^{\circ}\ 23'\ 30''$ weniger (§. 38.), oder 1330 Uml. $+ 10^{S}\ 6^{\circ}\ 29'\ 13'',7$, d. i. $173259353'',7$ macht; so erhält die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Monds in t Jahrhunderten einen Zuwachs von $20'',289829t$. Weil nun diese Geschwindigkeit der Zeit proportional wächst; so ist nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung (§. 234.) der Zuwachs der mittleren Bewegung des Monds in t Jahrhunderten $= \frac{20'',289829}{2} t^2 = 10'',144914 t^2$, welcher die Seculargleichung des Monds ist. La Place setzt die Abnahme des Quadrats der Excentricität der Erdbahn vom Jahr 1750 bis zum Jahr 1850 = 0,00000140595 *), und hienach wäre die Seculargleichung des Monds in dieser Zwischenzeit in dem Verhältniß von 140595 : 139836 größer, als die oben gefundene, mithin = 10'',199979.

So lange als man die Abnahme des Quadrats der Excentricität der Erdbahn der Zeit proportional wird voraussetzen können, wird die Seculargleichung des Monds nahe dem Quadrat der Zeit proportional wachsen. Aber die Excentricität der Erdbahn ändert sich nicht gleichförmig, so daß in dem Ausdruck der Abnahme des Quadrats der Excentricität der Coefficient von t^2 ebenfalls positiv wird. Hieraus entsteht das §. 70. angegebene zweyte dem Würfel der Zeit proportionale Glied der Seculargleichung, worauf man Rücksicht nehmen muß, wenn t groß ist.

Die Bewegungen der Knoten und der Apsidenlinie der Mondsbahn hängen ebenfalls von der Wirkung der Sonne auf den Mond ab, und ihre mittlere Bewegungen ändern sich aus einem ähnlichen Grund mit der Abnahme der Excentricität der Erdbahn. Hieraus entstehen die von La Place gefundenen Seculargleichungen der Länge des Knotens und der Erdnähe des Monds (§. 70.). Uebrigens sind alle diese Ungleichheiten, so wie die Veränderungen der Excentricität der Erdbahn, von welchen sie abhängen, periodisch, kommen aber erst nach Millionen von Jahren in derselben Ordnung wieder. Die Seculargleichung der Erdnähe des Monds, welche La Place durch die Theorie gefunden hat, wird, wie Bouvard und Bürg gefunden haben, durch die Beobachtungen bestätigt.

§. 324. Es ist merkwürdig, daß die Abnahme der Excentricität der Erdbahn in den Bewegungen des Monds

*) Expos. du Système du Monde, pag. 224.

viel merklicher ist, als in der Bewegung der Erde oder der scheinbaren Bewegung der Sonne. Diese Abnahme, welche von der ältesten uns bekannt gewordenen Finsterniß an die Mittelpunktsgleichung der Sonne nicht um 8 Minuten verändert hat, hat eine Veränderung von $1^\circ\ 48'$ in der Länge des Monds und von 7° in seiner mittleren Anomalie hervorgebracht. Wir sehen hier ein Beyspiel von der Art, wie die Phänomene, indem sie sich entwickeln, uns über ihre wahren Ursachen aufklären. Wäre allein die Beschleunigung der mittleren Bewegung des Monds bekannt; so könnte man sie dem Widerstand des Mittels, oder der succesiven Fortpflanzung der Schwere zuschreiben. Aber die Analyse zeigt uns, daß diese zwey Ursachen keine merkliche Veränderung in den mittleren Bewegungen der Knoten und der Erdnähe des Monds hervorbringen können, und diß allein würde hinreichend seyn, um sie auszuschließen, selbst wenn die wahre Ursache der beobachteten Veränderungen jener Bewegungen noch unbekannt wäre. Die Uebereinstimmung der Theorie mit den Beobachtungen zeigt uns, daß, wenn die mittlere Bewegungen des Monds durch andere Ursachen als die allgemeine Gravitation verändert werden, ihr Einfluß sehr gering, und bis jetzt unmerklich ist.

Diese Uebereinstimmung beweist die Unveränderlichkeit der Dauer des mittleren astronomischen Tags, dieses wesentlichen Elements aller astronomischen Theorien. Wäre die Dauer eines Tags gegenwärtig um $\frac{1}{100}$ einer Sekunde größer, als zur Zeit des Hipparchs; so würden jetzt 36525 Tage oder 100 julianische Jahre um 365,25 Sekunden länger dauern, als zu jener Zeit. In 365,25 Sek. beschreibt aber der Mond einen Bogen von $200'',5$; folglich würde dadurch die gegenwärtige Secularbewegung des Monds um $200'',5$ vergrößert erscheinen. Nun ist nach dem vorhergehenden §. die Seculargleichung für 130 Jahre vor unserer Zeitrechnung $= 10'',1449 \cdot \overline{19,3}^2$, und für 30 Jahre vor dieser Epoche $= 10'',1449 \cdot \overline{18,3}^2$; folglich ist die Secularbewegung des Monds gegenwärtig um $10'',1449\,(\overline{19,3}^2 - \overline{18,3}^2)$ oder um $37,0 \times 10'',1449$ größer, als 130 Jahre vor C.

S. Soll diese um $200'',5$ größer herauskommen, als nach diesem Ausdruck; so muß man die Seculargleichung so vergrößern, daß 37,6 mal diese Vergrößerung = $200'',5$, mithin die Vergrößerung selbst = $5'',33$ wird. Demnach müßte in gegenwärtigem Jahrhundert die Secularglеichung des Monds um $5'',33$ größer als nach der Theorie gefunden werden, wenn die Dauer des Tags in 1930 Jahren um den hundertsten Theil einer Sekunde abgenommen hätte. Man hat aber in dem 322sten §. gesehen, daß die verschiedenen Angaben der Secularglеichung des Monds um nicht mehr als 3 Sekunden von einander abweichen, und vermöge der neueren auf eine größere Anzahl von Beobachtungen sich gründenden Untersuchungen kann sie um nicht mehr als $1\frac{1}{2}$ Sek. von der aus der Theorie gefundenen verschieden seyn; folglich kann sich die Dauer des Tags seit Hipparchs Zeiten nicht um den hundertsten Theil einer Sekunde geändert haben, wodurch das bestätigt wird, was la Place durch eine sorgfältige Untersuchung aller derjenigen Ursachen, welche die Umdrehungsbewegung der Erde um ihre Axe stören können, gefunden hat, daß nemlich die Dauer ihrer Axendrehung sich nicht merklich ändern könne, ohne weit größere Veränderungen in der Constitution der Erde vorauszusetzen, als diejenige sind, welche wir kennen *).

§. 325. Was in dem 321sten §. von der jährlichen Gleichung des Monds bewiesen worden ist, läßt sich auch auf die Bewegungen der Knoten und der Apsidenlinie des Monds anwenden. Die Geschwindigkeiten dieser Bewegungen ändern sich mit dem Abstand der Erde von der Sonne, und hieraus entstehen die von der mittleren Anomalie der Sonne ahängende Ungleichheiten dieser Bewegungen. Man hat aber in dem 311ten und 312ten §. gesehen, daß der in der Richtung des Radius Vector des Monds wirkende Theil der perturbirenden Kraft der Sonne aus zwey Theilen besteht, wovon der eine beständig die Schwere des Monds gegen die Erde vermindert, der andere aber sie bald vergrößert, bald vermindert. Dieser Theil hängt von der Lage des Monds

*) Méc. cél. T. II. L. V. n. 12.

gegen die Sonne und die Erde, oder von seinem Abstand von den Syzygien ab, und ist vermöge §. 312. n. 2. dem Cosinus des doppelten Ueberschußes der Länge des Monds über die Länge der Sonne proportional. Mithin muß sich mit dieser Veränderung der Centripetalkraft auch die Winkelgeschwindigkeit des Monds verändern (§. 32..). Diese ändert sich aber auch mit dem Abstand des Monds von dem Punkt der Erdnähe, oder mit seiner Anomalie; folglich entsteht aus beyden Veränderungen eine von dem doppelten Abstand des Monds von der Sonne und von seiner Anomalie zugleich abhängende Ungleichheit, welche man die Evection nennt (§. 69.). Sie wird wegen der kleinen Zahl, mit welcher man dividiren muß, wenn man aus der Geschwindigkeit den beschriebenen Winkel ableitet, so beträchtlich (S. die Bemerkungen des 314ten §.).

Endlich hat man bey den bisherigen Untersuchungen nicht auf denjenigen Theil der perturbirenden Kräfte Rücksicht genommen, welcher auf den Radius Vector senkrecht wirkt (§. 311. n. 3. und 312. n. 3.). Diese Kraft verändert unmittelbar die Winkelgeschwindigkeit des Monds, verschwindet in den Syzygien und Quadraturen, und wird in den Octanten am grösten *). Sie vermindert die Winkelgeschwindigkeit des Monds in dem ersten Octanten, d. i. wenn der Ueberschuß der Länge des Monds über die der Sonne zwischen 0 und 45° fällt, und vergrößert sie von 315° bis 360° oder 0; folglich wird, wenn man nur auf diese Kraft Rücksicht nimmt, der Mond in seinen Conjunktionen mit seiner grösten Winkelgeschwindigkeit ankommen (Vergl. §. 166.), welche von diesem Punkt an bis zu 45° ebenso vermindert wird, wie sie in dem vorhergehenden Octanten vergrößert wurde. Der Mond wird also bey dem 45sten Grad wieder seine mittlere Winkelgeschwindigkeit haben, und auf ähnliche Art wird man finden, daß dieser Fall auch in den übrigen von den Quadraturen und den Syzygien gleich weit entfernten Punkten der Mondsbahn eintritt. Da nun

*) Nemlich der Sinus von $2D$ verschwindet, wenn $D = 0; 90; 180; 270;$ und er wird dem Sinus totus gleich, wenn $D = 45; 135; 225; 315$ Graden.

von 0 bis 45° die Winkelgeschwindigkeit beständig größer als die mittlere ist; so wird bey 45° der Mond seinem mittleren Ort am meisten vorgeeilt, und die von dieser Kraft abhängende Gleichung der Mondslänge am größten seyn. Setzt man diese Schlüße weiter fort; so findet man, daß diese Ungleichheit die unter dem Namen der Variation bekannte Mondsgleichung ist (§. 69.), welche in den Syzygien und Quadraturen verschwindet, und in den Octanten am größten ist.

§. 326. Wir haben bisher die Kräfte, welche die Bewegungen des Monds stören, einzeln betrachtet, und daraus die größeren Mondsgleichungen abgeleitet. Die genauere Berechnung dieser und der kleineren Gleichungen wird dadurch verwickelter gemacht, daß man die Wirkungen von Erde, Sonne, und Mond aufeinander zugleich betrachten muß. So ändert z. B. die auf den Radius Vector des Monds senkrecht wirkende Kraft unmittelbar die Winkelgeschwindigkeit des Monds, mit dieser Veränderung ist aber auch eine Veränderung des Abstands des Monds von der Erde verbunden, welcher wächst oder abnimmt, je nachdem die Winkelgeschwindigkeit des Monds wächst oder abnimmt, wodurch wiederum die Winkelgeschwindigkeit des Monds geändert wird. Um die zwey perturbirenden Kräfte S und P, von welchen die erstere in der Richtung des Radius Vector des Monds, die andere auf denselben senkrecht wird, und deren Ausdrücke in dem 312ten §. n. 2. und 3. gefunden worden sind, zugleich in Rechnung zu nehmen, kann man auf folgende Art verfahren.

Man setze den Radius Vector der Erde $= R$, den des Monds $= r$, den mittleren Abstand der Erde von der Sonne $= a$, den mittleren Abstand des Monds von der Erde $= a'$, die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Monds $= w$, die Excentricität der Erdbahn $= e$, und die Excentricität der Mondsbahn $= e'$; so ist in der als elliptisch betrachteten Mondsbahn die wahre Winkelgeschwindigkeit umgekehrt dem Quadrat des Radius Vector proportional. Die mittlere Winkelgeschwindigkeit entspricht demjenigen Punkt der als elliptisch betrachteten Mondsbahn, in welchem der Radius Vector die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der halben großen und halben kleinen Axe (§. 187.), mithin sein Quadrat $= a'^2\sqrt{1-e'^2}$ ist. Demnach wäre in der Ellipse die wahre Winkelgeschwindigkeit $= w\left(\frac{a'}{r}\right)^2\sqrt{1-e'^2}$, und das Produkt dieser Winkelgeschwindigkeit in das Quadrat des Radius Vector des Monds $= a'^2 w\sqrt{1-e'^2}$.

Der Ausdruck §. 312. n. 3. der auf dem Radius Vector senkrecht wirkenden Kraft ist der Ausdruck der Geschwindigkeit, welche diese Kraft als constant betrachtet in einer gegebenen Zeit erzeugen würde, oder das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit, welche sie erzeugen würde, in den Radius Vector; folglich wird, wenn diese Kraft P heißt, das Produkt aus dem Quadrat des Radius Vector in die erzeugte Geschwindigkeit $= r.P$ seyn. Wenn man nun das Gesetz kennt, nach welchem r und P von der Zeit abhängen; so kann man dadurch nach den im ersten Capitel dieses Buchs gegebenen Regeln das Produkt aus dem Quadrat des Radius Vector in die während einer gegebenen Zeit durch die veränderliche Kraft wirklich erzeugte Winkelgeschwindigkeit finden. Der Umstand, daß P klein ist in Vergleichung mit der auf den Mond wirkenden Centripetalkraft erleichtert die Bestimmung dieser Größe, weil man bey einer ersten Annäherung in dem Ausdruck $r.P$ den elliptischen Radius Vector des Monds statt seines wahren setzen kann. Es sey P' dem Zuwachs gleich, welchen die ungleichförmig wachsende Größe $r.P$ während der bey dem Maaß der Winkelgeschwindigkeit zum Grund gelegten Zeiteinheit wirklich erhält; so wird diese Größe zu dem vorhin gefundenen Produkt aus dem Quadrat des Radius Vector in die elliptische Winkelgeschwindigkeit hinzugefügt werden müßen, um das Produkt aus r^2 in diejenige Winkelgeschwindigkeit zu finden, welche in der gestörten Bahn dem Radius Vector r entspricht. Man setze sie $= u$; so wird man unter der Voraussetzung, daß die Kraft P nach der Richtung der Bewegung wirke, haben

1.) $r^2.u = a'^2 w\sqrt{1-e'^2} + P'$,

oder $u = \left(\frac{a'}{r}\right)^2 w\sqrt{1-e'^2} + \frac{P'}{r^2}$.

Wirkt die Kraft P der Richtung der Bewegung entgegen; so setzt man sie bey der Berechnung von P' negativ, und wenn auch P negativ wird, so erhält es das Zeichen $-$.

Zu der Bestimmung des Radius Vector r der gestörten Bahn dient der Satz, daß r abnimmt oder wächst, je nachdem die Summe der gegen den Mittelpunkt der Kräfte hin wirkenden Centripetalkräfte größer oder kleiner ist, als die Kraft, vermöge welcher mit der dem Radius Vector r entsprechenden und in senkrechter Richtung auf ihn genommenen Geschwindigkeit ein Kreis von dem Halbmesser r könnte beschrieben werden. Da nun die dem Halbmesser r entsprechende Winkelgeschwindigkeit $= u$ ist; so ist die wahre Geschwindigkeit nach der auf dem Radius Vector senkrechten Richtung $= r.u$, und die zu dieser Kreisbewegung erforderliche Kraft $= \frac{r^2.u^2}{r}$ (§. 273. n. 1.) $= r.u^2$. Die von der Schwere des Monds gegen die Erde allein herrührende

Centripetalkraft ist $= \frac{ma^2k}{r^2}$, und die in der Richtung des Radius Vector wirkende perturbirende Kraft hat man oben mit S bezeichnet, folglich ist die Summe der Centripetalkräfte $= \frac{ma^2k}{r^2} + S$, wo man S negativ setzt, wenn diese Kraft die Schwere des Monds gegen die Erde vermindert.
Mithin ist 2.) die Kraft, welche den Radius Vector zu vermindern sich bestrebt =

$$\frac{ma^2k}{r^2} + S - ru^2 =$$

$$\frac{ma^2k}{r^2} + S - r\left(\left(\frac{a'}{r}\right)^2 w\sqrt{1-e'^2} + \frac{P'}{r^2}\right)^2$$

Die Bahn des Monds würde also ein Kreis seyn, wenn dieser Ausdruck beständig $= 0$ wäre; eine Ellipse, wenn S und $P = 0$; eine bewegliche Ellipse, wenn $P = 0$, und S umgekehrt dem Würfel der Entfernung des Monds von der Erde proportional wäre (§. 317.). Aus dem Gesetz der Kraft, welche den Radius Vector zu ändern strebt findet sich die Geschwindigkeit dieser Veränderung, und hieraus die Veränderung selbst. Hat man so einen genäherten Werth des Radius Vector gefunden; so wird durch die Substitution dieses Werths die Größe P', und mittelst dieser nach n. 2. der Radius Vector genauer gefunden. Sodenn erhält man, wenn der genauere Werth von r in die Gleichung n. 1. gesetzt wird, die Winkelgeschwindigkeit u, woraus sich der in einer gegebenen Zeit von dem Radius Vector beschriebene Winkel; mithin der Unterschied der wahren und mittleren Länge ergiebt. **Clairaut** hatte bey seiner ersten Approximation den elliptischen Radius Vector gebraucht, und bey dieser die Bewegung der Apsidenlinie des Monds nur halb so groß gefunden, als die beobachtete. Bey der zweyten nahm er auf die Störungen des elliptischen Radius Vector Rücksicht, und allein dasjenige Glied, von welchem die **Evection** abhängt, verdoppelte beynahe jene Bewegung, so daß sie mit den Beobachtungen nahe übereinstimmend herauskam. Die übrigen Glieder hatten keinen sehr beträchtlichen Einfluß mehr auf die Bewegung der Apsidenlinie.

§. 327. Es ist hier nicht der Ort, die Berechnung der Ungleichheiten in den Bewegungen des Monds weiter auszuführen. Sie gründet sich auf die Gleichungen n. 1. und 3. des vorhergehenden §., aus welchen man mittelst einiger bekannten Sätze der analytische Trigonometrie und der Sätze n. 1. u. 2. §. 239. die Peturbationen des Radius Vector und der Winkelbewegung finden kann. Einige Schwierigkeit macht noch die veränderliche Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik, welche man am bequemsten beseitigt, wenn man statt der Bahn des Monds selbst ihre Projection auf die Ebene der Ekliptik sucht. Die Rechnung wird beträchtlich vereinfacht, wenn man die mittlere Länge des Monds durch die wahre, statt die letztere durch die erstere ausdrückt, welches Verfahrens **Clairaut** *) und **La Place** **) sich bedienten. **Tobias Mayer** wählte einen andern Weg, indem er so wohl die wahre als die mittlere Länge des Monds mittelst eines Winkels bestimmte, welcher nahe der wahren Anomalie in der elliptischen Bahn gleich ist. Aus diesen Ausdrücken leitete er sodenn die Gleichungen her, mittelst welcher aus den mittleren Bewegungen die wahre Länge, Breite, und Parallaxe des Monds unmittelbar können gefunden werden ***). Diesen Gleichungen gab er dadurch eine zur Berechnung noch bequemere Form, daß er die Correctionen nach und nach anbrachte †). Die Gleichungen, welche er nach der Theorie gefunden hatte, verbesserte er sodenn durch eine grosse Anzahl dem grösten Theil nach von ihm selbst auf der **Göttinger** Sternwarte angestellter Beobachtungen, und machte seine ersten Mondstafeln im Jahr 1753 in den **Göttinger Commentarien** bekannt, welche alle vorhergehenden weit an Genauigkeit übertrafen. Mit der Verbesserung dieser Tafeln beschäftigte er sich bis an seinen am 20. Febr. 1762 erfolgten Tod, und seine Wittwe übersendete im Jahr 1763 diese verbesserten Mondstafeln der **Längen-Commißion** in **London**, für welche sie eine Belohnung von 3000 Pfund Sterling erhielt. Sie erschienen zu **London** sammt der Mayerischen Mondstheorie im Jahr 1767. Eben diese Tafeln stehen in der **Berliner Sammlung astronomischer Tafeln**. **Mason** verbesserte diese Tafeln durch eine grössere Reihe von Beobachtungen und durch die Aufnahme von 8 kleineren Gleichungen, welche **Mayer** nach der Theorie gefunden, aber der Kürze der Berechnung wegen weggelassen hatte. Man findet diese Tafeln in der dritten Ausgabe der **Astronomie** von **La Lande**, in der Connoiss. des tems für 1790, und in den **Wiener Ephemeriden**. Die neuesten Mondstafeln sind von Prof. **Bürg** in Wien berechnet worden. Einige neue von **La Place** durch die Theorie gefundene Gleichungen und eine grössere Reihe genauer Beobachtungen des Monds, als diejenige, welche **Mayer** zu Gebott stand, gab diesen Tafeln eine noch grössere Genauigkeit. **Bürg** hat die Form der Mayerischen Tafeln beybehalten, und es scheint Mayer nicht allein die ersten genauen Mondstafeln geliefert, sondern auch die zum Rechnen bequemste Form derselben gefunden zu haben. Die Gleichungen

*) Mém. de l'Acad. de Paris. 1745 et 1748. Theorie de la Lune par *M. Clairaut.*

**) Mécan. cél. T. III. Livre VII.

***) Theoria Lunæ juxta systema Newtonianum. Auctore *Tobia Mayer.* Londini. MDCCLXVII.

†) A. a. O. S. 49.

des Monds sich nach **Bürg** folgende *), welchen zur Vergleichung die **Mayerischen** aus seiner Theoria Lunæ, so wie er sie durch die Beobachtungen verbessert hat, beygefügt sind.

Man setze die mittlere Anomalie der Sonne $= a$
— — — des Monds $= A$
die wahre Länge der Sonne $= \odot$
die mittlere Länge des Monds $= ☽$
die mittlere Länge des aufsteigenden Mondsknotens $= ☊$
$☽ - \odot = D$
Supplement der Länge des Knotens, oder $360° - ☊ = N$
$☽ + N = d$,

wo unter der mittleren Länge des Monds und seines Knotens und unter seiner mittleren Anomalie diejenige verstanden werden, welche durch die Seculargleichungen schon verbessert sind. Diese Seculargleichungen findet man in dem 70sten §. Zu der Seculargleichung des Monds kommt noch eine von **La Place** durch die Theorie gefundene Gleichung hinzu, deren grösten Werth **Bürg** aus den Beobachtungen = 14 Sek. gefunden hat. Sie hat eine Periode von ungefähr 184 Jahren, und ist

$= + 14''$ Sin. $(2☊ +$ perig. $☽ - 3$ perig. $\odot)$,
$= - 14''$ Sin. $(A - ☽ + 2N + 3$ perig. $\odot)$.

Eben diese Gleichung wird mit demselben Zeichen an der mittleren Anomalie des Monds und der Länge seines Knotens, mithin an dem Supplement der Knotenlänge mit entgegengesetztem Zeichen angebracht. Die übrigen Gleichungen der Länge des Monds sind:

	nach Bürg	nach Mayer
I.	$-671'',8$ Sin. a	$674''$
	$-6,0$ Sin. $2a$	4
II.	$+11,5$ Sin. $(D+a)$	21,1 *
III.	$+4,9$ Sin. $(D-a)$	3,2 *
IV.	$-2,6$ Sin. $(D+A)$	2,6 *
	$-4,6$ Sin. $2(D+A)$	25,6 *
V.	$-21,4$ Sin. $(D-A)$	16
	$-58,6$ Sin. $(D-A)$	60
VI.	$+4829,5$ Sin. $(2D-A)$	4836
	$+35,4$ Sin. $2(2D-A)$	26
VII.	$-57,8$ Sin. $(2D+A)$	49
VIII.	$-2,1$ Sin. $(2D-3A)$	22,5 *
IX.	$+39,3$ Sin. $(A-a)$	28
X.	$+53,9$ Sin. $(2D+a)$	56
XI.	$+76,5$ Sin. $(2D-a)$	66
XII.	$+1,1$ Sin. $(D-A+a)$	
XIII.	$+124,6$ Sin. $(2D-A+a)$	120

*) Tables astronomiques publ. par le bureau des longitudes de France. I. P. A Paris. 1806.

	nach Bürg	nach Mayer
XIV.	$+ 47'',6 \,\mathrm{Sin.}(2D - A - a)$	47
XV.	$+ 2,2 \,\mathrm{Sin.}(2D + A + a)$	8,7 *
XVI.	$+ 1,3 \,\mathrm{Sin.}(2D + A - a)$	6,3 *
XVII.	$- 6,8 \,\mathrm{Sin.} N$	4 *
XVIII.	$- 62,5 \,\mathrm{Sin.} 2(\odot + N)$	51
XIX.	$6\,4 \,\mathrm{Sin.}(☽ + N - A)$	
XX.	$- 10,6 \,\mathrm{Sin.}(4D - A)$	9,1 *
XXI.	$+ 1,1 \,\mathrm{Sin.}(4D - 3A)$	12,1 *
XXII.	$- 1,2 \,\mathrm{Sin.}(2A - 2D - a)$	
XXIII.	$- 6,9 \,\mathrm{Sin.}(2D - A - 2d)$	
XXIV.	$- 8,8 \,\mathrm{Sin.}(2D + A - 2d)$	

Die mit einem Stern bezeichneten Gleichungen sind diejenigen, welche Mayer durch die Theorie gefunden, aber nicht in seine Tafeln aufgenommen hat.

Man addire die Summe dieser 24 Gleichungen zu der mittleren Anomalie des Monds, und noch überdiß die Gleichung

nach Bürg	nach Mayer
$- 1337'' \,\mathrm{Sin.}\, a$	$- 1326'' \,\mathrm{Sin.}\, a$
$- 11 \,\mathrm{Sin.}\, 2a$	$- 15 \,\mathrm{Sin.}\, 2a$,

so hat man die verbesserte mittlere Anomalie A' des Monds, und zu dem Supplement des Knoten addire man

nach Bürg	nach Mayer
$+ 540'' \,\mathrm{Sin.}\, a$	$553'' \,\mathrm{Sin.}\, a$
$+ 4'' \,\mathrm{Sin.}\, 2a$	$+ 5 \,\mathrm{Sin.}\, 2a$,

um das verbesserte Supplement N' des Knoten zu erhalten.

Alsdenn ist die Mittelpunktsgleichung des Monds

	nach Bürg	nach Mayer
	$+ 6^{\circ}\, 18'\, 12'',2 \,\mathrm{Sin.}\, A'$	$+ 6^{\circ}\, 18'\, 11''$
XV.	$+ 12\;\; 56,4 \,\mathrm{Sin.}\, 2A'$	12 52
	$+ 37,3 \,\mathrm{Sin.}\, 3A'$	37
	$+ 1,9 \,\mathrm{Sin.}\, 4A'$	
	$+ 0,1 \,\mathrm{Sin.}\, 5A'$	

Die 24 Gleichungen und die Gleichung des Mittelpunkts zu der mittleren Mondslänge addirt, geben die zum ersten mal verbesserte Länge $☽'$ des Monds, und mit dem Argument $D' = D +$ die 25 vorhergehende Gleichungen erhält man

	n. B.	n. M.
XXVI.	$- 122'',1 \,\mathrm{Sin.}\, D'$	$- 115''$
	$+ 2'41,7 \,\mathrm{Sin.}\, 2D'$	$+ 2'47$
	$+ 3,3 \,\mathrm{Sin.}\, 3D'$	$+ 2$
	$+ 7,3 \,\mathrm{Sin.}\, 4D'$	$+ 14$,

welche Gleichung zu der verbesserten Mondslänge addirt die zum zweytenmal verbesserte Länge $☽''$ des Monds giebt. Hieraus findet sich

$d' = ☽'' + N'$, und

	n. B.	n. M.
XXVII.	$- 84'',4 \,\mathrm{Sin.}(2d' - A')$	$- 86''$.

Die durch diese Gleichung verbesserte Mondslänge $☽'''$ ist die wahre Länge des Monds in seiner Bahn von dem mittleren Aequinoktialpunkt an gerechnet. Bringt man noch die Reduction auf die Ekliptik an, welche mit dem Argument $☽''' + N'$ gefunden wird, und

	n. B.	n. M.
XXVIII.	$- 406'',8 \text{ Sin.} (☽''' + N')$ $+ 2,1 \text{ Sin.} 2(☽''' + N')$	$+ 411''$

ist; so hat man die vom mittleren Aequinoktialpunkt an gerechnete wahre Länge des Monds in der Ekliptik, zu welcher man noch die unter dem Namen der Nutation bekannte Gleichung des Aequinoktialpunkts (§. 160.) hinzufügen muß, um die wahre Mondslänge in der Ekliptik von dem scheinbaren Aequinoktialpunkt an gerechnet zu erhalten. Diese Gleichung ist $+ 18'',0 \text{ Sin.} N$.

Bezeichnet man die Argumente der Breite mit I, II, u. s. w. so ist das erste Argument der Breite gleich dem acht und zwanzigsten der Länge $= ☽''' + N'$. Man mache $D'' = ☾''' - ☉$; so ist das IIte $= 2D'' - \text{I}$; $\text{III} = \text{I} - a$; $\text{IV} = \text{I} - A$; $\text{V} = \text{IV} - A$; $\text{VI} = \text{V} - A$; $\text{VII} = \text{II} + a$; $\text{VIII} = \text{II} - a$; $\text{IX} = \text{II} + A$; $\text{X} = \text{II} - A$; $\text{XI} = \text{X} - A$; $\text{XII} = ☽'''$; und die Breite des Monds

nach La Place.	Bürg.	Mayer.
$= \{ + 18520'',8 \text{ Sin. I.}$	18520″,8	18510″
- 5,7 Sin. 3 I.	5,0	6,5
+ 526,9 Sin. II.	528 4	529
- 1,5 Sin. III.	3,1	2
+ 17,8 Sin. IV.	17,6	17,4
- 26,2 Sin. V.	25,1	24,1
- 2,9 Sin. VI.	1,9	2,7
+ 8,3 Sin. VII.	9,0	8,3
+ 4,0 Sin. VIII.	3,7	3,7
+ 2,6 Sin. IX.	2,2	2,2
- 15,6 Sin. X.	15,9	15,0
- 6,1 Sin. XI.	5,2	6,0
- 8,0 Sin. XII.	8,0	

Die Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator wird mittelst der vorhin angegebenen Argumente der Länge gefunden, und ist

nach La Place.	Bürg.	Mayer.
= - 0″,4 Cos. I.	- 0″,3	0″,3
0,0 Cos. V.	+ 0,2	
+ 1,8 Cos. 2V.	+ 2,0	2,2
+ 37,3 Cos. VI.	+ 37,3	37,3
+ 0,4 Cos. 2VI.	+ 0,3	0,3
- 0,0 Cos. VII.	- 0,1	0,1
+ 0,2 Cos. IX.	+ 0,2	0,2
+ 0,7 Cos. X.	+ 0,7	0,7
+ 0,8 Cos. XI.	+ 0,8	0,8
+ 0,9 Cos. XIII.	+ 1,0	1,0
+ 0,3 Cos. XIV.	+ 0,6	0,6
- 0,1 Cos. XVIII.	+ 0,4	0,4

La Place	Bürg.	Mayer.
+ 57′ 0″,0	57″ 1″,0	57′ 11,0
+ 186,9 Cos. XXV.	+ 187,3	187,7
+ 10,2 Cos. 2XXV.	+ 10,0	10,0
+ 0,6 Cos. 3XXV.	+ 0,2	0,3
- 1,0 Cos. XXVI.	- 1,0	1,0
+ 26,4 Cos. 2XXVI.	+ 26,0	27,2
+ 0,3 Cos. 3XXVI.	+ 0,2	
- 0,8 Cos. XXVII.	- 0,8	0,8
+ 0,1 Cos. XXVIII.		

§. 328. Die größte Abweichung der von **Mayer** nach der Theorie gefundenen Gleichungen der Länge des Monds von denjenigen, welche er aus den Beobachtungen abgeleitet hat, steigt nicht über 35 Sek. *). Die Gleichungen der Mondsbreite und der Parallaxe sind so klein, daß sie durch die Theorie genauer als durch die Beobachtungen können gefunden werden. Mayer hat sie auch wirklich mit den Beobachtungen so genau übereinstimmend gefunden, daß er keine Veränderung für nöthig hielt, und nur die mittlere Neigung der Mondsbahn, welche nicht durch die Theorie gefunden werden kann, um 4 Sek. größer machte, als er sie anfänglich vorausgesetzt hatte **).

La Place hat in seiner **Mechanik des Himmels** die Genauigkeit in der Berechnung der Ungleichheiten der Mondsbewegungen noch weiter getrieben, und seine nach der Theorie gefundenen Gleichungen der Länge des Monds weichen von denjenigen, welche er aus **Bürgs** allein aus den Beobachtungen abgeleiteten Gleichungen erhielt, niemals über 9 Sek. ab ***). Die genaue Uebereinstimmung seiner Theorie mit den Beobachtungen in Ansehung der Breite und Parallaxe des Monds sieht man aus den vorhin angegebenen Gleichungen. Aus dem oben angeführten Grund werden diese nach der Theorie gefundenen Gleichungen den aus den Beobachtungen abgeleiteten vorzuziehen seyn. Man würde durch noch weiter getriebene Approximationen ohne Zweifel auch jene kleinen Unterschiede der berechneten und beobachteten Ungleichheiten der Mondsbewegung in der Länge vollends können verschwinden machen, aber schon diese Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen ist hinreichend, um unwidersprechlich darzuthun, daß die allgemeine Schwere die einzige Ursache aller Ungleichheiten des Monds ist.

Unter den Gleichungen der Mondslänge sind zwey besonders merkwürdig. Die erste ist diejenige, welche dem Sinus des Abstands des Monds von der Sonne proportional ist, und das erste Glied der 26ten Gleichung ausmacht. Sie hängt von der Son-

*) Theoria Lunæ. pag. 52.
**) A. a. O. pag. 57.
***) Méc. cél. T. III. L. VII. pag. 281.

nenparallaxe ab, und heißt daher die **parallactische Ungleichheit**. Schon **Mayer** hatte aus dieser die Sonnenparallaxe mit einer größeren Genauigkeit bestimmt, als man sie vorher kannte, und von 10'',8 auf 7'',8 herunter gesetzt *). **La Place** fand durch genauere Berechnung aus dem von **Bürg** durch die Beobachtungen bestimmten Coefficienten 2' 2'',1 dieser Gleichung die Sonnenparallaxe = 8'',6; also nahe dieselbe, welche mehrere Astronomen aus dem letzten Durchgang der Venus vor der Sonne geschlossen haben. Die zweyte Ungleichheit ist diejenige, welche von der Länge des Mondsknotens abhängt, und nach **Bürg** = 6'',8 Sin. ☊ = - 6'',8 Sin. N ist. **Mayer** hatte diese Gleichung nur durch die Beobachtungen gefunden **), welcher sie auf 4'' setzte. **Mason** fand sie = 7'',7. **La Place** zeigte zuerst, daß nach der Theorie eine solche Ungleichheit der Mondsbewegung Statt finde, und daß sie von der abgeplatteten Gestalt der Erde abhänge. Es ergiebt sich aus der von **Bürg** nach den Beobachtungen gefundenen Größe dieser Ungleichheit die Abplattung der Erde = $\frac{1}{305,05}$ ***). Wäre die Abplattung der Erde = $\frac{1}{230}$; so müßte diese Ungleichheit = 11'',5 seyn.

Die zwölfte Ungleichheit der Breite des Monds ist von **La Place** entdeckt worden, und hängt wie die vorhergehende von der Gestalt der Erde ab. **Bürg** fand sie aus einer großen Anzahl in **Greenwich** angestellter Beobachtungen = - 8'' 0 Sin. der wahren Mondslänge, woraus **La Place** die Abplattung der Erde = $\frac{1}{304,6}$ fand †). Wäre die Abplattung der Erde = $\frac{1}{230}$; so müßte diese Ungleichheit = 13'',5 seyn. Es ist sehr merkwürdig, daß diese zwey von der Gestalt der Erde abhängende durch die Beobachtungen gefundene Ungleichheiten nahe einerley Abplattung, und zugleich dieselbe geben, durch welche die verschiedenen Gradmeßungen mit den kleinst möglichen Abweichungen dargestellt werden (§. 140.). Die beständig kreisförmige Gestalt des Erdschattens auf dem Mond bey seinen Verfinsterungen zeigte den ersten Astronomen die nahe kugelförmige Gestalt der Erde, und die vollkommenere Mondstheorie giebt eines der sichersten Mittel, ihre Abweichung von der genauen Kugelgestalt durch die Beobachtung der Ungleichheiten der Mondsbewegungen zu bestimmen, denn sie haben vor den Gradmeßungen den Vorzug, daß sie die Abplattung der Erde auf eine weniger von den Irregularitäten ihrer Figur abhängende Art geben.

Die Theorie verbunden mit den Versuchen über die Länge des Pendels und den Gradmeßungen giebt, wie man in dem 309ten und 310ten §. gesehen hat, die Parallaxe des Monds sehr nahe

*) Theor. Lunæ. §. 51. pag. 53.
**) A. a. O. pag. 52.
***) Méc. cél. T. III. pag. 282.
†) Méc. cél. T. III. pag. 285.

mit den Beobachtungen übereinstimmend, so daß man umgekehrt aus der Länge des Sekundenpendels und aus der Parallaxe des Monds die Größe der Erde schließen könnte. Die Parallaxe kann durch die Beobachtungen des Monds in verschiedenen Höhen über dem Horizont, ohne daß es nöthig wäre, den Beobachtungsort zu verändern, gefunden werden. Folglich hätte ein Astronom ohne aus seiner Sternwarte herauszugehen, allein durch die Vergleichung seiner Beobachtungen mit der Theorie, die Größe und Abplattung der Erde, und ihren Abstand von der Sonne und dem Mond bestimmen können, welche Größen man erst durch weite und beschwerliche Reisen auf den zwey Halbkugeln hat kennen gelernt. Die Uebereinstimmung der durch diese zwey Methoden erhaltenen Resultate ist einer der auffallendsten Beweise für die allgemeine Schwere *).

§. 329. Nach dieser ausführlicheren Betrachtung der Perturbationen des Monds durch die Attraction der Sonne wird man sich leicht einen Begriff davon machen können, wie man bey der Berechnung derjenigen Perturbationen verfahren müße, welche ein Planet durch die Attraction eines oder mehrerer anderer Planeten leidet. Die Beobachtungen zeigten solche Peturbationen der elliptischen Bewegungen, ehe man sie zu berechnen wußte. Die genaue Auflösung der Aufgabe, diese Störungen zu berechnen, übersteigt, wie schon oben bemerkt worden ist, die gegenwärtigen Hülfsmittel der Analyse. Glüklicherweise wird durch die Kleinheit der Planetenmassen in Vergleichung mit der Masse der Sonne, und durch die geringe Excentricität und gegenseitige Neigung der meisten ihrer Bahnen diese Untersuchung sehr erleichtert. Nichts desto weniger bleibt sie noch immer sehr verwickelt, und die feinste Analyse ist unentbehrlich, unter der unendlichen Anzahl von Ungleichheiten, welchen die Planeten unterworfen sind, diejenige, welche bemerkt werden können, zu entdecken, und ihre Werthe anzugeben. Newton hat in seinen Principien die Perturbationen der Planeten nur kurz berührt **), Euler und Clairaut haben insbesondere die Perturbationen des Jupiters und Saturns genauer berechnet. La Grange und La Place haben die langsamen Veränderungen untersucht; welche die Elemente der

*) Expos. du Système du Monde, pag. 219.
**) Princ. L. III. prop. XIII.

Planetenbahnen durch die gegenseitige Attraction der Planeten leiden. Die Perturbationen der elliptischen Bewegung der Planeten können nemlich in zwey sehr von einander verschiedene Classen eingetheilt werden; einige betreffen die Elemente der elliptischen Bewegung, und wachsen äusserst langsam, weswegen man sie Secular-Ungleichheiten nennt. Andere hängen von der Lage der Planeten so wohl unter sich, als in Beziehung auf ihre Knoten und Perihelien ab, und kommen mit diesen Configurationen in derselben Ordnung wieder. Man nennt sie periodische Ungleichheiten, um sie von den Secularungleichheiten zu unterscheiden, welche ebenfalls periodisch, aber deren ungleich längere Perioden von der gegenseitigen Stellung der Planeten unabhängig sind. Nach La Place *), welcher die Perturbationen der Planeten am genauesten bestimmt hat, besteht die einfachste Art diese verschiedenen Perturbationen darzustellen, darinn, daß man sich vorstellt, ein Planet bewege sich den Gesetzen der elliptischen Bewegung gemäß in einer Ellipse, deren Elemente sich stetig verändern, und um diesen erdichteten Planeten oscillire der wahre Planet in einer sehr kleinen Bahn hin und her, deren Natur von seinen periodischen Störungen abhängt.

§. 330. Unter den Secular-Ungleichheiten, welche nach Jahrhunderten merklich werden, und mit der Länge der Zeit die Gestalt und Lage aller Planetenbahnen verändern müssen, ist diejenige die wichtigste, welche auf die mittleren Bewegungen der Planeten Einfluß haben kann. Vergleicht man die seit dem 13ten Jahrhundert angestellten Beobachtungen mit einander; so scheint die Bewegung des Jupiters geschwinder, und die des Saturns langsamer, als man sie durch die Vergleichung eben dieser Beobachtungen mit denen des Hipparchs und Ptolemäus findet. Die Astronomen folgerten hieraus, daß die erstere jener Bewegungen sich beschleunige, indem die leztere von einem Jahrhundert zum anderen sich verzögere, und führten in die Tafeln dieser Planeten zwey dem Quadrat der Zeit proportional wachsende Seculargleichungen, eine additive für die mittlere Bewegung des

*) Expos. du Système du Monde. L. IV. Ch. II.

des Jupiters und eine subtractive für die mittlere Bewegung des Saturns ein. Nach Halley ist die Seculargleichung des Jupiters = $34'',4$ für das erste auf 1700 folgende Jahrhundert, und die correspondirende Gleichung für den Saturn = $83'',5$. Es war natürlich die Ursache hievon in der Wirkung dieser beträchtlichen Planeten unseres Sonnensystems aufeinander zu suchen. Euler, welcher sich zuerst mit dieser Untersuchung beschäftigte, fand für beyde Planeten gleiche und zu ihren mittleren Bewegungen additive Seculargleichung, welches den Beobachtungen widerspricht. Nach diesem erhielt la Grange mehr mit den Beobachtungen übereinstimmende Resultate: andere Geometer erhielten andere Gleichungen. La Place, welchem diese Verschiedenheiten auffielen, prüfte diesen Gegenstand aufs neue, und es gelang ihm, indem er die gröste Sorgfalt auf diese Untersuchung verwendete, den wahren analytischen Ausdruck der Secularbewegung der Planeten zu finden, welcher, als er die numerischen Werthe der auf den Jupiter und Saturn sich beziehenden Grössen in denselben setzte, sich gegen seine Erwartung auf Null reducirte. Er vermuthete, daß dieß nicht ein besonderer nur bey diesen zwey Planeten eintretender Fall sey, und daß, wenn man jenen Ausdruck mittelst der gegenseitigen Beziehungen der darinn enthaltenen verschiedenen Grössen auf seine einfachste Form brächte, alle Glieder desselben sich gegen einander aufheben würden. Der Calcul bestätigte diese Vermuthung, und zeigte ihm, daß allgemein die mittleren Bewegungen der Planeten und ihre mittleren Entfernungen von der Sonne unveränderlich sind, wenigstens wenn man die vierten Potenzen der Excentricitäten und der Neigungen der Bahnen, und die Quadrate der perturbirenden Massen oder Kräfte vernachläßigt, welches für das gegenwärtige Bedürfniß der Astronomie mehr als hinreichend ist. La Grange *) hat dieses Resultat bestätigt, und allgemein gezeigt, daß der Ausdruck der grossen Axe der Planetenbahnen niemals ein der Zeit proportionales Glied enthalten kann, wie weit man auch die Approximation in Beziehung auf die Excentricitäten und Neigungen der Bah-

*) Mém. de l'Acad. de Berlin. 1776.

nen treiben mag. Folglich hängen die beobachteten Veränderungen der mittleren Bewegungen des Jupiters und Saturns nicht von ihren Secularungleichheiten ab.

§. 331. Die Unveränderlichkeit der mittleren Bewegungen der Planeten ist eines der merkwürdigsten Phänomene des Weltsystems. Alle anderen Elemente der Ellipsen, welche die Planeten beschreiben, sind veränderlich. Diese Ellipsen nähern sich durch unmerkliche Stufen der kreisförmigen Gestalt, und entfernen sich wieder von derselben, ihre Neigungen gegen eine unveränderliche Ebene und gegen die Ebene der Ekliptik nehmen zu und ab, ihre Perihelien und Knoten sind in Bewegung, wie man durch die Vergleichung weit von einander entfernter Beobachtungen gefunden hat. So hat z. B. das Perihelium der Erdbahn gegenwärtig eine jährliche siderische directe Bewegung von 11″,8 (§. 191.), und die Neigung der Ebene ihrer Bahn gegen die Ebene des Erdäquators nimmt in 100 Jahren um 52″,1 ab (§. 39.). **Euler** *) fand zuerst in der allgemeinen Schwere die Ursache dieser Verminderung, welche gegenwärtig die vereinigte Wirkung aller Planeten vermöge der Lage ihrer Bahnen gegen einander hervorzubringen strebt. Seine Rechnungen gaben ihm die Secularabnahme der Schiefe der Ekliptik nahe mit den Beobachtungen übereinstimmend = 49″. **La Place** fand mittelst der §. 303. angegebenen Planetenmassen die Abnahme der Schiefe der Ekliptik in t von dem Jahr 1750 an verflossenen Jahren = $0''5211428t - 0'',0000071196t^2$ **). Eine Vergleichung der von den Alten beobachteten Schiefen der Ekliptik mit den nach der Theorie von **La Place** berechneten findet man in der Connaiss. des tems pour 1811., woraus sich ergiebt, daß die Differenz zwischen der Theorie und den Beobachtungen für jene gröbere Beobachtungen ganz unbedeutend ist. Indessen scheint nach den neueren Beobachtungen die Abnahme der Schiefe der Ekliptik geringer zu seyn. **Bradley** und **de la Caille** fanden die Schiefe der Ekliptik für das Jahr 1750 = 23° 28′ 18″, und 23° 28′

*) Mém. de Berl. pour 1754.

**) Méc. cél. T. III. pag. 157.

19″; also im Mittel = 23° 28′ 18″,5. Nach de Lambre, Maskelyne und Piazzi *) ist für 1800 im Mittel = 23° 27′ 56″,6 (§. 39.), mithin die Abnahme in 50 Jahren = 21″,9, und in 100 Jahren = 43″,8. Mayer fand für das Jahr 1756 die Schiefe der Ekliptik = 23° 28′ 16″, und Maskelyne für 1769 = 23° 28′ 9″,7. Reducirt man diese Beobachtungen mittelst der Secularabnahme 43″,8 auf den Anfang des Jahrs 1800; so findet man

nach Bradley	23°	27′	56″,1	aus der Schiefe für 1750
de la Caille	23	27	57,1	
Mayer	23	27	56,7	a. d. Sch. f. 1756.
Maskelyne	23	27	56 1	— — 1769.
de Lambre	23	27	57,0	Schiefe für 1800.
Maskelyne	23	27	56,6	
Piazzi	23	27	56,3	
Schiefe f. 1800 im Mittel =	23	27	56,557	

Diese von sehr genauen Beobachtern und mit ausgesuchten Instrumenten angestellten Messungen stimmen also sehr genau miteinander überein, da man hingegen Unterschiede von 3 bis 4 Sek. findet, wenn man die Secularabnahme der Schiefe der Ekliptik = 52″,1 setzt **).

Vermöge der Secularbewegung der Apsidenlinie der Erdbahn fiel der Punkt der Erdnähe der Sonne mit dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche zusammen im Jahr 4089 vor unserer Zeitrechnung ***). Es ist merkwürdig, daß diese astronomische Epoche nahe diejenige ist, auf welche die meisten Chronologen die Schöpfung der Welt setzen. Um das Jahr 1248 machte die große Axe der Erdbahn mit der Linie der Nachtgleichen einen rechten Winkel.

Die alten Beobachtungen sind zu wenig genau, und die neueren liegen zu nahe bey einander, als daß man mit Genauigkeit die größeren Veränderungen der Planetenbahnen festsetzen könnte, übrigens vereinigen sie sich darin, daß sie das Daseyn dieser Veränderungen und einen mit dem Gesetz der allgemeinen Schwere übereinstimmenden Gang derselben beweisen. Man würde also durch die Theorie den Beobach-

*) Tables astron. publ. par le bureau des long. I. P. feuille c. pag. 2.
**) Vergl. Monatl. Corresp. May. 1810. pag. 429. u. f.
***) Méc. cél. T. III. pag. 158.

tungen zuvorkommen, und die wahren Werthe der Secularungleichheiten der Planeten angeben können, wenn ihre Massen genau bekannt wären, und umgekehrt wird die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen eines der sichersten Mittel seyn, diese Massen zu bestimmen, wenn jene Veränderungen durch die Länge der Zeit werden merklicher geworden seyn. Alsdenn wird man in Gedanken auf die Veränderungen zurückgehen können, welche das Planetensystem erlitten hat; man wird diejenigen vorhersehen können, welche die zukünftigen Jahrhunderte den Beobachtern darbieten werden, und der Mathematiker wird in seinen Formeln mit einem Blick alle vergangene und zukünftige Zustände dieses Systems übersehen. Diejenigen Secularveränderungen, welche La Place mittelst des §. 303. angegebenen Massen berechnet hat, findet man in dem 19ten §.

§. 332. La Place wirft nun folgende interessante Fragen auf *): Waren die Planetenbahnen beständig dem Kreis nahe kommende Ellipsen, und werden sie beständig nahe kreisförmig seyn? Waren nicht einige der Planeten ursprünglich Cometen deren Bahnen sich durch die Anziehung der anderen Planeten nach und nach dem Kreis genähert haben? Wird die Schiefe der Ekliptik so lange abnehmen, bis die Ekliptik mit dem Aequator zusammenfällt, welches eine beständige Tag- und Nacht-Gleiche auf der ganzen Erde hervorbringen würde? Die Analyse beantwortet diese Fragen auf eine genügende Art. La Place hat bewiesen **), daß, welche Werthe die Massen der Planeten auch haben mögen, allein wegen ihrer Bewegung nach einerley Richtung, und in wenig excentrischen um kleine Winkel gegen einander geneigten Bahnen ihre Secularungleichheiten periodisch und in enge Gränzen eingeschlossen sind, so daß das Planetensystem nur um einen gewißen mittleren Zustand hin und her oscillirt, von welchem es sich niemals über eine sehr kleine Größe entfernen kann. Die Ellipsen der Planeten waren also beständig nahe kreisförmig, und werden es beständig seyn; wor-

*) Expos. du Syst. du M. pag. 197.
**) Méc. cél. T. I. L. II. Ch. VII.

aus folgt, daß kein Planet ursprünglich ein Comet kann gewesen seyn, wenigstens wenn man nur auf die gegenseitige Wirkung der Körper des Planetensystems Rücksicht nimmt. Die Ekliptik wird niemals mit dem Aequator zusammenfallen, und die größte Veränderung ihrer Neigung kann sich nicht über zwey und dreyviertel Grade erstrecken.

§. 333. Wegen dieser Bewegungen der Planetenbahnen und der eigenen Bewegung der Fixsterne werden die Astronomen in Verlegenheit kommen, wenn sie genaue durch einen großen Zeitraum von einander getrennte Beobachtungen mit einander werden vergleichen wollen. Schon jetzt fangt diese Verlegenheit an merklich zu werden, und es ist daher interessant, mitten unter allen diesen Veränderungen eine unveränderliche oder beständig eine parallele Lage beybehaltende Ebene zu finden, auf welche man die Bewegungen der Himmelskörper beziehen kann. La Place hat ein einfaches Mittel angegeben, eine solche Ebene in demjenigen Fall zu finden, wo ein ganzes System von Körpern nur den Einwirkungen dieser Körper auf einander, und keinen fremden Kräften ausgesetzt ist. Die Anwendung dieses Mittels auf das Sonnensystem giebt folgende Regel zur Bestimmung der Lage einer sich beständig parallel bleibenden Ebene *):

Man denke sich in irgend einem Augenblick durch den Mittelpunkt der Sonne eine Ebene nach Belieben gelegt, und in der angenommenen Ebene seyen aus dem Mittelpunkt der Sonne gerade Linien an die aufsteigenden Knoten der Planetenbahnen gezogen, welche sie mit der angenommenen Ebene bilden. Auf diesen geraden Linien seyen von dem Mittelpunkt der Sonne an Stücke abgeschnitten, welche den Tangenten der Neigungen der Planetenbahnen gegen die angenommene Ebene für einen beliebigen angenommenen Halbmesser gleich seyen. Man denke sich an den Endpunkten dieser Abschnitte Massen, welche den Produkten der ihnen entsprechenden Massen der Planeten durch die Quadratwurzeln aus den Parametern ihrer Bahnen und durch die Cosinus ihrer Neigungen gegen die angenommene Ebene proportional seyen, und bestimme den Schwerpunkt dieses neuen Systems von Massen. Alsdenn wird die von diesem Punkt an den Mittelpunkt der Sonne gezogene gerade Linie die Tangente der Neigung der unveränderlichen Ebene gegen die angenommene Ebene seyn, und die Verlängerung dieser geraden Linie wird an dem Himmel auf derselben Seite der Sonne, auf welcher jener Schwerpunkt liegt, die Lage des aufsteigenden Knotens bezeichnen, welchen die unveränderliche Ebene mit der angenommenen bildet.

Welche Veränderungen auch die Planetenbahnen, und die

*) Expos. pag. 198.

Lage der Ebene, auf welche man sie bezieht, in den folgenden Jahrhunderten leiden mögen, so wird die nach dieser Regel bestimmte Ebene beständig eine parallele Lage behalten. Die Lage dieser Ebene hängt zwar von den Massen der Planeten ab, aber diese werden bald hinreichend genau bekannt seyn, um sie mit Genauigkeit festzusetzen.

Es seyen a, a' u. s. w. die halben großen Axen der Planetenbahnen, e, e' u. s. w. ihre Excentricitäten in Theilen der halben großen Axen, i, i' u. s. w. die Neigungen der Bahnen gegen die angenommene Ebene, n, n' u. s. w. die Längen ihrer aufsteigenden Knoten auf dieser Ebene, J die Neigung, und N die Länge des aufsteigenden Knotens der unveränderlichen Ebene in Beziehung auf die angenommene; mithin $a(1-e^2)$, $a'(1-e'^2)$ u. s. w. die Parameter der Planetenbahnen. Man setze

$$m \,\mathrm{Sin.}\, i . \mathrm{Sin.}\, n \sqrt{a(1-e^2)} + m' \,\mathrm{Sin.}\, i' \,\mathrm{Sin.}\, n' \sqrt{a'(1-e'^2)} + \&c. = c''$$

$$m \,\mathrm{Sin.}\, i . \mathrm{Cos.}\, n \sqrt{a(1-e^2)} + m' \,\mathrm{Sin.}\, i' \,\mathrm{Cos.}\, n' \sqrt{a'(1-e'^2)} + \&c. = c'$$

$$m \,\mathrm{Cos.}\, i \sqrt{a(1-e^2)} + m' \,\mathrm{Cos.}\, i' \sqrt{a'(1-e'^2)} + \&c. = c;$$

so ist *) $\mathrm{Tg.}\, J \,\mathrm{Sin.}\, N = \frac{c''}{c}$,

und $\mathrm{Tg.}\, J \,\mathrm{Cos.}\, N = \frac{c'}{c}$; folglich $\mathrm{Tg.}\, N = \frac{c''}{c'}$. Hat man N gefunden; so findet sich J durch eine der zwey ersteren Gleichungen.

Nimmt man die Ebene der Erdbahn für den 1. Jan. 1801 als diejenige Ebene an, auf welche die Lage der unveränderlichen Ebene bezogen werden soll, die Elemente der Planetenbahnen nach (§. 191.), und die Massen nach §. 303.; so findet man für den Anfang des neunzehnten Jahrhunderts $N = 103^\circ\, 13'\, 45''$, und $J = 1^\circ\, 34'\, 36''.28$ **).

Die Unveränderlichkeit der Lage dieser Ebene dient auch zur Prüfung der für die Secularveränderungen der Planetenbahnen gefundenen Ausdrücke. Wenn man nemlich für zwey weit von einander entfernte Epochen mittelst der ihnen entsprechenden Elemente der Planetenbahnen die Werthe von N und J in Beziehung auf eine nach Belieben angenommene unbewegliche Ebene berechnet; so müssen diese Werthe für beyde Epochen einander gleich herauskommen. So fand La Place, indem er zur unbeweglichen Ebene diejenige annahm, welche mit der Ebene der Erdbahn im Jahr 1750 zusammenfiel (l'écliptique fixe de 1750.)

$$\text{für 1750} \begin{cases} J = 1^\circ\ 35'\ 31'',236 \\ N = 102\ \ 57\ \ 29,196, \end{cases}$$

$$\text{und für 1950} \begin{cases} J = 1^\circ\ 35'\ 31'',236 \\ N = 102\ \ 57\ \ 14,616, \end{cases}$$

*) Méc. cél. T. I. L. II. Chap. VII. n. 62. pag. 318.

**) Expos. pag. 198.

wo die Werthe von J einander gleich, und die von N nur um 14″,58 von einander verschieden sind *).

La Place hat bey diesen Berechnungen auf die Cometen keine Rücksicht genommen, welche übrigens, da sie einen Theil des Sonnensystems ausmachen, auf die Lage dieser unveränderlichen Ebene einen Einfluß haben müssen. Es wäre leicht, sie nach der vorhergehenden Regel mit in Rechnung zu nehmen, wenn ihre Massen und die Elemente ihrer Bahnen bekannt wären. Es ist wahrscheinlich, daß ihre Massen sehr klein sind, weil die Theorie der gegenseitigen Attraction der Planeten hinreichend ist, um alle in ihren Bewegungen beobachtete Irregularitäten darzustellen. Wenn übrigens die Wirkung der Cometen mit der Länge der Zeit merklich wird; so muß sie vorzüglich die Lage der als unbeweglich angenommenen Ebene verändern, und aus diesem neuen Gesichtspunkt betrachtet, wird die Betrachtung dieser Ebene auch alsdenn noch nützlich seyn, wenn man ihre Veränderungen wird kennen gelernt haben, welches aber große Schwierigkeiten haben wird.

§. 334. Nach der Entdeckung der Unveränderlichkeit der mittleren Bewegungen der Planeten kam la Place auf die Vermuthung, daß die beobachteten Veränderungen der Bewegungen des Jupiters und des Saturns von der Wirkung der Cometen herkommen könnten. lalande **) hatte in der Bewegung des Saturns Irregularitäten bemerkt, welche nicht von der Wirkung des Jupiters abzuhängen schienen, weil in dem lezten Jahrhundert die Zeiten seiner Wiederkehr zu dem Punkt der Frühlingsnachtgleiche früher eintraten, als die zu dem Punkt der Herbstnachtgleiche, obgleich die Lagen des Saturns und Jupiters so wohl unter sich, als in Beziehung auf ihre Perihelien nahe dieselben waren. Lambert ***) hatte ferner gefunden, daß die mittleren Bewegung des Saturns, welche sich vermöge einer Vergleichung der neueren Beobachtungen mit den alten von Jahrhundert zu Jahrhundert zu verzögern schien (§. 330), im Gegentheil nach der Vergleichung der neueren Beobachtungen unter sich beschleunigt zu werden schien, indessen die mittlere Bewegung des Jupiters entgegengesezte Erscheinungen zeigte. Alles dieses veranlaßte die Vermuthung, daß von den Wirkungen

*) Méc. cél. T. III. L. VI. Ch. XVII. n. 45. pag. 163.
**) Astronomie. T. I. n. 1167.
***) Berliner Ephemeriden für 1777. pag. 177. u. f.

des Jupiters und Saturns independente Ursachen ihre Bewegungen verändert haben möchten. Indem aber la Place weiter hierüber nachdachte; so fand er den Gang der in den Bewegungen dieser zwey Planeten beobachteten Veränderungen so gut mit demjenigen, welcher sich aus ihrer wechselseitigen Anziehung ergeben mußte, übereinstimmend, daß er keinen Anstand nahm, die Hypothese einer fremden Einwirkung aufzugeben. Es ergiebt sich nemlich aus der Wirkung der Planeten aufeinander, wenn man nur auf die Ungleichheiten von sehr langen Perioden Rücksicht nimmt, dieses merkwürdige Resultat *), daß die Summe der Quotienten, welche man erhält, wenn man die Masse eines jeden Planeten mit der großen Axe seiner als eine veränderliche Ellipse betrachteten Bahn dividirt, sehr nahe einer beständigen Größe gleich ist. Da nun die mittleren Bewegungen in einer gegebenen Zeit umgekehrt den Umlaufszeiten, mithin umgekehrt den Würfeln dieser Axen (§. 180.) proportional sind; so muß, wenn die Bewegung des Saturns durch die Wirkung des Jupiters sich verzögert, die des Jupiters durch die Wirkung des Saturns sich beschleunigen, welches mit den Beobachtungen übereinstimmt. La Place sahe überdiß, daß das Verhältniß dieser Veränderungen dasselbe war, welches die Beobachtungen zeigten. Setzt man mit Halley die Verzögerung des Saturns im ersten von 1700 an gerechneten Jahrhundert $= 83'',5$; so würde die correspondirende Beschleunigung des Jupiters seyn $= 34'',1$, nahe $= 34'',4$, wie Halley durch die Beobachtungen gefunden hatte. Er hielt es daher für sehr wahrscheinlich, daß die beobachteten Veränderungen der mittleren Bewegungen des Jupiters und Saturns eine Folge ihrer gegenseitigen Attraction seyen, und da er schon gefunden hatte, daß diese in den mittleren Bewegungen keine, weder beständig wachsende, noch periodische Ungleichheiten, welche von der Configuration dieser Planeten independent wären, hervorbringen könne (§. 330.), und daß sie nur von dieser Configuration abhängende Irregularitäten verursache; so vermuthete er eine beträchtliche Ungleichheit

*) Méc. cél. T. III. L. VI. Chap. XV. n. 39. pag. 147. u. T. I. pag. 333.

von dieser Art, und von einer sehr langen Periode, woraus die beobachteten Veränderungen entstehen könnten.

§. 335. Weil die Umlaufszeiten des Jupiters und des Saturns nahe unter sich commensurabel sind, und fünfmal die mittlere Bewegung des Saturns sehr nahe der doppelten mittleren Bewegung des Jupiters gleich ist *); so schloß La Place, daß, wenn unter den Ausdrücken der auf diese zwey Planeten wirkenden perturbirenden Kräfte Glieder vorkämen, welche den Ueberschuß der fünffachen Länge des Saturns über die doppelte Länge des Jupiters zu Argumenten hätten, daraus sehr beträchtliche Ungleichheiten in den Bewegungen dieser Planeten entstehen könnten (S. §. 314. pag. 557. u. 558.), und er betrachtete daher diese Glieder als eine sehr wahrscheinliche Ursache der in den mittleren Bewegungen des Jupiters und des Saturns beobachteten Veränderungen. Die Wahrscheinlichkeit dieser Ursache und die Wichtigkeit des Gegenstands bestimmten ihn, die beschwerliche Rechnung zu unternehmen, welche nöthig war, um sich davon zu versichern. Das Resultat dieser Rechnung bestätigte vollkommen seine Vermuthung, und zeigte ihm erstlich, daß die Bewegung des Saturns einer großen Ungleichheit unterworfen ist, welche auf 49′ 12″ steigt, eine Periode von 929 ½ Jahren hat, und zu der mittleren Länge des Saturns hinzugefügt werden muß, zweytens, daß die Bewegung des Jupiters eine ähnliche correspondirende Ungleichheit von einer sehr nahe ebenso großen Periode hat, welche aber der Ungleichheit des Saturns entgegengesetzt ist, und nur auf 20′ 14″ steigt **). Die Größe der Coefficienten dieser Ungleichheiten und die Dauer ihrer Perioden verändern sich mit den Secularveränderungen der Elemente der Bahnen, von welchen sie abhängen. La Place hat sowohl die Größe dieser Coefficienten als ihre Secularverminderung mit einer besonderen Sorgfalt bestimmt. Obige Angaben

*) Nach §. 191. pag. 301. ist 5 mal die sid. Bewegung des Saturns in 365 Tagen weniger 2 mal die correspondierende sid. Bew. des Jupiters ≐ 0° 24′ 31″,87965.

**) La Place gab der Pariser Akademie am 10. May 1786 Nachricht von dieser Entdeckung.

beziehen sich auf das Jahr 1750. Im Mittel genommen findet sich die Periode dieser Ungleichheiten aus den §. 191. angegebenen mittleren Bewegungen des Jupiters und Saturns = 879,9 julianischen Jahren.

Seyen J, S und U die mittleren heliocentrischen Längen des Jupiters, Saturns und Uranus von dem als unbeweglich angenommenen Punkt der Frühlingsnachtgleiche für den ersten Januar 1750 an gerechnet, und t die Anzahl der von der Mitternacht des ersten Januars 1750 an verfloßenen julianischen Jahre von $365\frac{1}{4}$ Tagen; so sind (Méc. cél. T. IV. L. X. Chap. VIII. pag. 337 et suiv.)

$$J = 3^\circ\ 45'\ 47'',51 + (30^\circ\ 20'\ 56'',3964)\,t,$$
$$S = 231\ \ 21\ \ 53\ \ 90 + (12^\circ\ 13'\ 17'',1167)\,t,$$
$$U = 318\ \ 34\ \ 14.8 + (4^\circ\ 17'\ 4'',7)\,t,$$

die große Gleichung für die Länge des Jupiters

$$= +(1205'',397 - 0'',03618t + 0'',0000349t^2) \times$$
$$\text{Sin.}\,(5J - 2S + 4^\circ\ 30'\ 30' - 78'',489t + 0'',01227t^2)$$
$$- 13'',174\,\text{Sin.}\,2(5J - 2S + 4^\circ\ 30'\ 30' - 78'',489t + 0'',01227t^2);$$

für die Länge des Saturns

$$= -(2952'',097 - 0,08871t + 0'',000082t2) \times$$
$$\text{Sin.}\,(5J - 2S + 4^\circ\ 32'\ 45'' - 77'',062t + 0'',01178t2)$$
$$+(30'',689 - 0'',001717t) \times$$
$$\text{Sin.}\,2(5J - 2S + 4^\circ\ 32'\ 45'' - 77'',062t + 0'',01178t^2),$$

zu welcher noch eine von der Einwirkung des Uranus abhängende Ungleichheit kommt, welche im Mittel eine Periode von 569 Jahren hat, und

$$= + 31'',03\,\text{Sin.}\,(3U - S - 85^\circ\ 34'\ 12'')\ \text{ist}.$$

§. 335. Diesen großen vorher unbekannten Ungleichheiten muß man die scheinbare Verzögerung des Saturns und die scheinbare Beschleunigung des Jupiters zuschreiben. Um das Jahr 1560 hatten sie ihr Maximum erreicht, und von dieser Epoche an näherten sich die scheinbaren Bewegungen dieser zwey Planeten den wahren, welchen sie um das Jahr 1792 gleich waren. Daher kommt es, daß Halley bey der Vergleichung der neueren Beobachtungen mit den alten die mittlere Bewegung des Saturns langsamer und die des Jupiters geschwinder fand als bey der Vergleichung der neueren Beobachtungen unter sich, anstatt daß die letzteren Lambert eine Beschleunigung in der Bewegung des Saturns und eine Verzögerung in der des Jupiters anzeigten, und es ist merkwürdig, daß die Größen dieser von Halley und Lambert allein aus den Beobachtungen abgeleiteten Ungleichheiten sehr nahe dieselben sind, welche sich aus den von La Place nach der Theorie gefundenen Gleichungen ergeben. Wäre die Astronomie vier und ein halbes Jahrhundert später wieder hergestellt worden; so würden die Beobachtungen die entgegengesetzten Phänomene gezeigt haben. Die mittleren Bewegungen, welche die Astronomie eines Volks dem Jupiter und Saturn zuschreibt, können uns also über die Zeit ihrer Gründung Aufschluß geben. Man findet hienach, daß die Indier die mittleren Bewegungen dieser Planeten in demjenigen Theil der Periode jener Ungleichheiten bestimmt haben, wo die scheinbare Bewegung des Saturns am langsamsten, und die des Jupiters am geschwindesten war. Zwey ihrer Hauptepochen, deren eine auf das Jahr 3102 vor der christlichen Zeitrechnung, die andere auf das Jahr 1491 fällt, erfüllen ungefähr diese Bedingung *).

Von dem beynahe commensurablen Verhältniß der Bewegungen des Jupiters und Saturns kommen noch andere sehr merkliche Ungleichheiten her. Die beträchtlichste betrifft die Bewegung des Saturns, welche sich mit der Gleichung des Mittelpunkts vermengen würde, wenn die fünffache Bewegung dieses Planeten genau der doppelten Bewegung des Jupiters gleich wäre, und sie hat hauptsächlich in dem letzten Jahrhundert die von La Lande in den Bewegungen des Saturns bemerkten Ungleichheiten hervorgebracht. Allgemein, sagt La Place **), „als ich diese verschiedenen Ungleichheiten gefunden, und diejenige, welche man schon vorher in Rechnung genommen hatte, mit einer größeren Sorgfalt, als es vorher geschehen war, bestimmt hatte; so sahe ich alle in den Bewegungen dieser zwey Planeten beobachteten Phänomene von selbst an die Theorie sich anfügen: sie schienen vorher eine Ausnahme von dem Gesetz der allgemeinen Schwere zu machen, und jetzt sind sie einer der auffallendensten Beweise für dasselbe. Dieß war das Loos dieser glänzenden Entdeckung, daß jede sich erhebende Schwierigkeit für sie der Gegenstand eines neuen Triumphes war, welches das sicherste Kennzeichen des wahren Natursystems ist.

*) Expos. du Syst. du M. pag. 201.
**) A. a. O. pag. 202.

Die Ausdrücke, welche ich für die Bewegungen des Jupiters und Saturns erhielt, leisten mit einer merkwürdigen Genauigkeit den 111 letzten Oppositionen dieser Planeten, welche von den geschiktesten Astronomen mittelst der besten Mittagsfernröhren und der grösten Quadranten beobachtet worden sind, Genüge; der Fehler hat niemals 13 Sekunden erreicht, und es sind noch keine zwanzig Jahre, daß die Fehler der besten Tafeln zuweilen 1300 Sek. überstiegen. Diese Ausdrücke stellen ferner, mit der Genauigkeit der Beobachtungen selbst, die Beobachtungen Flamsteed's, der Araber, und die von Ptolemäus angeführten dar. Die große Genauigkeit, mit welcher die zwey grösten Planeten unsers Planetensystems seit den frühesten Zeiten dem Gesetz ihrer wechselseitigen Attraction gehorcht haben, beweißt die Stabilität dieses Systems, weil der Saturn, welcher von der Sonne hundertmal schwächer als die Erde angezogen wird, demungeachtet von Hipparch an bis auf unsere Zeiten keine bemerkbare Einwirkung durch fremde Ursachen erlitten hat."

§. 336. Die Kenntniß der Bewegungen der Erde oder der scheinbaren Bewegungen der Sonne ist, wie man in dem zweyten Buch gesehen hat, für den Astronomen unentbehrlich, um aus den verwickelten scheinbaren Bewegungen der Planeten ihre heliocentrischen Bewegungen ableiten zu können. Es waren daher für die Astronomie genaue Sonnentafeln von der äussersten Wichtigkeit. Man bemerkte bald, daß die elliptische Theorie nicht hinreichte, um die scheinbaren Bewegungen der Sonne genau darzustellen, und daß besonders der Jupiter und die Venus merkliche Störungen in der Bewegung der Erde hervorbrachten, von welcher die scheinbare Bewegung der Sonne abhängt. Ohne die Theorie der allgemeinen Schwere würde es nicht möglich gewesen seyn, die Gesetze und die Grösse aller der kleinen Ungleichheiten zu entdecken, welchen die scheinbare Bewegung der Sonne ausgesetzt ist. Mayer nahm in seine Sonnentafeln *) auf-

*) Sie sind der Theoria Lunæ angehängt, und stehen auch in der Sammlung astr. Tafeln. Berlin. 1776.

ser der in dem 307ten §. betrachteten Mondsgleichung, welche er auf 8″ setzte, noch die durch den Jupiter und die Venus hervorgebrachten Störungen auf, deren gröste Werthe nach diesen Tafeln beziehungsweise 7″,5 und 6″,0 sind. La Place hat so wohl diese als auch die von den Wirkungen des Mars und Saturns auf die Erde herrührende Störungen genauer berechnet, und dadurch den Sonnentafeln einen hohen Grad von Genauigkeit verschaft. Die neuesten sind diejenigen, welche von Zach *) und Delambre **) ungefähr zu gleicher Zeit, ohne daß der eine von den Berechnungen des andern etwas wußte, berechnet haben. Diese Tafeln differiren in der Epoche der mittleren Länge der Sonne für 1800 nur um 0″,9, des Apogäums um 1″,4, in der Gleichung des Mittelpunkts um 0″,17, und in der mittleren Bewegung der Sonne in 100 Jahren um 3″, welcher letztere Unterschied blos daher rührt, daß von Zach und Delambre eine um 3″ verschiedene Secularbewegung des Aequinoktialpunkts vorausgesetzt haben. Die Tafeln des letztern gründen sich auf mehr als 700 Beobachtungen von Bradley, auf ebenso viele Beobachtungen von Maskelyne und Bouvard endlich auf vier Aequinoktien, deren jedes durch mehr als 300 Beobachtungen bestimmt ist, der erstere hat seine im Jahr 1792 herausgegebene Sonnentafeln durch eine große Anzahl auf der Seeberger Sternwarte angestellter Beobachtungen verbessert, und beyde stimmen in ihren Angaben der Elemente der Erdbahn so genau überein, daß diese neuen Sonnentafeln ein gleiches Zutrauen verdienen. Sie sind zugleich ein Beweis für die Genauigkeit, welche die neuere Astronomie erreicht hat.

§. 337. Auch auf die vorher vernachläßigten Störungen der Erde in der Breite hat La Place Rücksicht genommen, welche eine kleine scheinbare Bewegung der Sonne in der Richtung der Breite hervorbringen, und auf ihre scheinbare Abweichung Einfluß haben. Die von den Planeten herrühren-

*) Tabulæ motum Solis novæ et Iterum correctæ. Auctore *de Zach.* Gothæ 1801. Abgekürzt in Monatl. Corresp. Jan. 1809.

**) Tables astron. publ. par le bureau des longitudes de France. I.P. A Paris. 1806.

den Störungen der Erde in der Breite sind sehr gering, und keine steigt auf $\frac{1}{4}$ Sek. Beträchtlicher ist diejenige, welche von der Einwirkung des Monds abhängt, und daher rührt, daß eigentlich der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Monds und der Erde eine Ellipse um die Sonne beschreibt. Man hat in dem 307ten §. die hieraus entstehende Ungleichheit in der scheinbaren Bewegung der Sonne gesehen. Bewegte sich der Mond in der Ebene der Erdbahn; so würde nur eine Ungleichheit in der Richtung der Länge Statt finden. Da aber die Erde in der Ebene der gegen die Ekliptik um einen Winkel $5^\circ\,8'\,47''$ geneigten Bahn des Monds um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt dieser zwey Körper eine der Mondsbahn ähnliche Bahn beschreibt (§. 296.); so muß sich von der Sonne aus gesehen die Erde um jenen Schwerpunkt in einer schmalen Ellipse zu bewegen scheinen, deren halbe große Axe daselbst unter einem Winkel von $7'',5$ erscheinen würde (§. 307.), und deren halbe kleine Axe sich zu der halben großen Axe wie der Sinus totus zu dem Sinus der Neigung der Mondsbahn, oder wie $1 : 0{,}0897$ verhält. Die halbe kleine Axe dieser Ellipse würde also von der Sonne aus unter einem Winkel von $0{,}0897 \times 7'',5$ oder $0'',67$ erscheinen, mithin die Erde eine südliche heliocentrische Breite von $0'',67$ haben, wenn der Mond eine nördliche Breite von $5^\circ\,8'\,47''$ hat. Die Sonne wird um ebenso viel nördlich von der Ekliptik abzustehen scheinen, und es wird hieraus eine scheinbare Bewegung der Sonne in der Breite folgen, welche mit der Mondsbreite einerley Zeichen hat, und sich mit derselben nach einerley Gesetz, mithin dem Sinus des Abstands des Monds von seinem aufsteigenden Knoten proportional (§. 190. n 2.), verändert. Diese Ungleichheit kann sich mit den übrigen von der Wirkung der Planeten herrührenden auf eine Sekunde belaufen, und, weil ihre Summe bald positiv, bald negativ wird, scheinbare Irregularitäten in den beobachteten Abweichungen der Sonne hervorbringen, welche auf zwey Sekunden steigen, und bey der jetzigen Genauigkeit der Beobachtungen nicht unbemerkt bleiben können.

§. 338. Die Störungen der übrigen älteren Planeten hat La Place in seiner Mechanik des Himmels mit gleicher Sorgfalt berechnet *). Sie sind beträchtlich kleiner als diejenigen, welche durch die Wirkungen des Jupiters und Saturns auf einander hervorgebracht werden. Die grösten zeigt folgende Tafel

	in der Länge	in d. Breite
Mercur	8″,5	unmerkl.
Venus	11,4	0″,3
Mars	25,2	0,4
Uranus	149,8	0,9

Zu diesen kommen aber noch viele kleinere Ungleichheiten, welche mit den obigen sich anhäufen, und größere Unterschiede zwischen den elliptischen und den wahren Bewegungen hervorbringen können. Am merklichsten sind die Störungen des Uranus durch den Saturn, von welchen, ungeachtet er noch nicht lange entdeckt ist, dennoch die Beobachtungen unläugbare Kennzeichen angeben. Die Gesetze der elliptischen Bewegung leisten nicht genau seinen beobachteten Stellungen Genüge, und man muß, um sie darstellen zu können, auf seine Perturbationen Rücksicht nehmen. Ihre Theorie weist ihm mit einer ganz besonderen Uebereinstimmung in den Jahren 1769, 1756 und 1690 dieselben Punkte des Himmels an, in welchen le Monnier, Mayer und Flamsteed die Stellung dreyer kleinen von ihnen als Fixsterne angesehenen Sterne bestimmt haben, und die man gegenwärtig nicht mehr an dem Himmel findet, welches keinen Zweifel über die Identität dieser Sterne mit dem Uranus übrig läßt (§. 121.).

Die vier neuen in diesem Jahrhundert entdekten Planeten sind wegen ihrer Nähe bey dem Jupiter, und wegen der beträchtlichen Excentricität und Neigung ihrer in einander geschlungenen Bahnen grossen Ungleichheiten unterworfen, welche über die Theorie der Attractionen der Himmelskörper ein neues Licht verbreiten, und zu ihrer ferneren Vervollkommnung Gelegenheit geben werden. Die Beobachtungen zeigen die Störungen der Ceres, deren elliptische Ele-

*) Mécan. cél. T. III. L. VI.

mente am genauesten bestimmt zu seyn scheinen, schon deutlich, und Gauß hat zu der Berechnung derselben Formeln *) und Tafeln **) geliefert, aus welchen man sieht, daß die beträchtlichsten auf 231; 492, 37; 598,69 und 437,75 Sekunden steigen.

§. 339. Es ist schon oben bemerkt worden, daß die Cometen bisher keine merkliche Peturbationen in dem Planetensystem hervorgebracht haben können, und daher ihre Massen in Vergleichung mit den Massen der Planeten sehr klein seyn müssen. Umgekehrt bringen aber die Planeten Ungleichheiten in den Bewegungen der Cometen hervor, welche besonders in den Zwischenzeiten ihrer Wiederkehr zu dem Perihelium merklich sind. Man wird sich aus dem 216ten §. erinnern, daß schon Halley die Irregularitäten, welche er in den Perioden des Cometen von den Jahren 1531, 1607, 1682 bemerkte, der Einwirkung des Jupiters zugeschrieben, und Clairaut zuerst die Perturbationen dieses Cometen durch durch den Jupiter und Saturn berechnet hat, welche innerhalb der von ihm angegebenen Gränzen mit den Beobachtungen übereinstimmten. Bey dieser Gelegenheit machte er die Bemerkung, daß ein Körper, welcher so entfernte Regionen durchlaufe, und so lange Zwischenzeiten hindurch sich unsern Augen entziehe, gänzlich unbekannten Kräften ausgesetzt seyn könne, z. B. der Wirkung anderer Cometen, oder selbst eines Planeten, dessen Abstand von der Sonne beständig zu groß wäre, um jemals gesehen werden zu können.

Die Beobachtungen des ersten im Jahr 1770 erschienenen Cometen haben die Astronomen auf ein sehr sonderbares Resultat geleitet. Nachdem sie vergebens versucht hatten, dieselbige wie gewöhnlich durch eine parabolische Bahn darzustellen, fanden sie, daß dieser Comet während seiner Sichtbarkeit einen Bogen einer elliptischen Bahn beschrieben habe, in welcher er eine Umlaufszeit von ungefähr $5\frac{1}{2}$ Jahren haben würde. Lexell, welcher zuerst diese sonderbare Bemerkung machte, leistete dadurch allen Beobachtungen mit Ausnahme

*) Monatl. Corresp. Nov. 1802.
**) M. C. Mærz. 1803.

nahme dererjenigen, wo der Comet der Erde am nächsten war, und am stärksten von ihr perturbirt wurde, Genüge*). Das Nationalinstitut setzte einen Preiß auf eine neue Untersuchung der Beobachtungen dieses Cometen, welchen Burkhard davon trug. Er erhielt mit Lexell beynahe einerley Resultat, worüber also jetzt kein Zweifel mehr übrig bleibt. Ein Comet von einer so kurzen Umlaufszeit hätte aber öfters erscheinen sollen; demungeachtet wurde er weder vor 1770 beobachtet, noch hat man ihn indessen wieder gesehen. Um dieses Phänomen zu erklären, bemerkte Lexell, „daß seine Bahn durch die Attraction des Jupiters, welchem er im May 1767 sehr nahe gekommen ist, gänzlich könnte verändert worden, und dadurch die im Jahr 770 beobachtete Bahn entstanden seyn; ferner daß eine zu muthmaßende noch stärkere Annäherung zum Jupiter die Bahn dieses Cometen abermals im August 1779 so sehr stören könne, daß, wenn auch die aus den Beobachtungen vom Jahr 1770 gefundene Umlaufszeit richtig sey, der Comet dennoch nicht wieder um das Jahr 1781 oder 1782, um welche Zeit er abermals erscheinen sollte, zu erwarten sey." Allein es war noch die Möglichkeit dieser zwey Wirkungen der Attraction des Jupiters darzuthun, und zu zeigen, daß die Elemente der von dem Cometen beschriebenen Ellipse ihr Genüge leisten können. Dieß zeigte La Place, indem er diesen Gegenstand der Analyse unterwarf, und dadurch wird jene Erklärung sehr wahrscheinlich **).

§. 340. Unter allen beobachteten Cometen hat sich dieser am meisten der Erde genähert, welche also durch ihn beträchtlich hätte müssen gestört worden seyn, wenn seine Masse in Vergleichung mit der Erdmasse merklich wäre. La Place findet***), daß, wenn diese zwey Massen einander gleich wären, die Dauer des siderischen Jahrs durch die Wirkung des Cometen um 10033 Sek. hätte müssen verlängert worden seyn. Man ist aber durch die zahlreichen von Be-

*) Berliner Ephemerid. für 1781. pag. 25. u. 26. der Samml.

**) Méc. cél. T. IV. L. IX. Chap. II. n. 13.

***) A. a. O. pag. 230.

lambre zum Behuf seiner Sonnentafeln gemachten Vergleichungen der Beobachtungen der Sonne versichert, daß seit dem Jahr 1770 das Sternjahr keinen Zuwachs von $2\frac{1}{2}$ Sek. erhalten hat; folglich beträgt die Masse dieses Cometen nicht $\frac{1}{5000}$ der Erdmasse, und wenn man bedenkt, daß er in den Jahren 1767 und 1779 durch das System der Jupiterstrabanten hindurch gegangen ist, ohne in demselben die mindeste Störung hervorzubringen, so wird man sehen, daß sie noch kleiner ist. Die Kleinheit der Cometenmassen wird im Allgemeinen durch ihren unmerklichen Einfluß auf die Bewegungen des Planetensystems angezeigt. Diese Bewegungen werden durch die Wirkungen der Planeten allein auf einander so genau dargestellt, daß man die kleinen Abweichungen der besten astronomischen Tafeln allein den Fehlern der Approximationen und der Beobachtungen zuschreiben kann. Sehr genaue durch mehrere Jahrhunderte fortgesetzte und mit der Theorie verglichene Beobachtungen würden allein über diesen wichtigen Punkt des Weltsystems Aufklärung geben können.

Man sieht hieraus, daß wegen der Kleinheit der Massen der Cometen und wegen ihres schnellen Vorübergangs vor der Erde die Wirkungen ihrer Anziehung nicht zu befürchten sind. Nur wenn sie auf die Erde stießen, könnten sie traurige Verwüstungen auf ihr hervorbringen. Aber wenn gleich dieser Stoß möglich ist, so ist er doch in dem Lauf eines Jahrhunderts sehr unwahrscheinlich. Es würde ein so außerordentlicher Zufall für das Zusammenstoßen zweyer in Vergleichung mit dem unermeßlichen Raum, in welchem sie sich bewegen, so kleiner Körper erfordert, daß man in dieser Hinsicht keinen Grund haben kann etwas zu befürchten. Uebrigens kann die kleine Wahrscheinlichkeit eines solchen Zusammentreffens in einer langen Reihe von Jahrhunderten sehr groß werden. Man kann sich leicht die Wirkungen dieses Stoßes auf die Erde vorstellen, wenn die Masse des Cometen etwas beträchtlich ist. Die Axe und die Umdrehungsbewegung der Erde würden verändert werden, die Meere würden ihre vorigen Lagen verlassen, um sich gegen den neuen Aequator hin zu stürzen, ein großer Theil der Menschen und Thiere würde in dieser allgemeinen Ueber=

schwemmung umkommen; oder durch den heftigen der Erde beygebrachten Stoß zerstört werden, ganze Gattungen würden zernichtet, alle Monumente der menschlichen Industrie würden umgestürzt werden. Man sieht ferner, warum der Ocean hohe Berge bedeckt hat, auf welchem er unläugbare Spuren seines Aufenthalts zurückgelassen hat; man sieht, wie Thiere und Pflanzen der südlichen Länder in den nördlichen Erdstrichen haben existiren können, wo man ihre Ueberreste und Abdrücke findet; endlich erklärt man die Neuheit der moralischen Welt, deren sichere Monumente nicht über viertausend Jahre zurück gehen. Das menschliche Geschlecht, auf eine kleine Anzahl von Individuen gebracht und in den kläglichsten Zustand versetzt, sehr lange einzig und allein mit seiner Selbsterhaltung beschäftigt, hat alle Erinnerung an Wissenschaften und Künste verlieren müssen, und wenn die Fortschritte der Civilisation die Bedürfnisse derselben aufs neue fühlbar gemacht haben; so mußte alles von neuem angefangen werden, als wenn die Menschen erst wären auf die Erde gesetzt worden. Was es aber auch mit dieser Ursache, welche einige Philosophen diesen Erscheinungen angewiesen haben, vor eine Bewandtniß haben mag; so kann man gegen ein so schrekliches Ereigniß während der kurzen Lebensdauer vollkommen gesichert seyn, um so mehr, weil die Massen der Cometen äusserst klein zu seyn scheinen, und daher ihr Stoß nur locale Revolutionen hervorbringen würde *).

§. 341. Die Trabanten des Jupiters, Saturns und Uranus bilden in dem Sonnensystem kleinere Systeme von Himmelskörpern, welche auf ähnliche Art einander gegenseitig stören, wie die Hauptplaneten des Sonnensystems. Die beynahe unter sich commensurablen Umlaufszeiten der Jupiterstrabanten (§. 104.) bringen sehr merkliche Ungleichheiten in ihren Bewegungen hervor, welche La Place in dem vierten Band seiner Mechanik des Himmels untersucht hat. Neben diesen Ungleichheiten werden durch die Attraction der

*) Expos. du Syst. du M. pag. 213. et suiv.

Sonne noch andere hervorgebracht, welche den Ungleichheiten der Mondsbewegungen ähnlich sind.

Was fürs erste die Lage der Ebene der Bahnen der vier Jupiterstrabanten betrifft; so ist schon in dem 222sten §. die Veränderlichkeit derselben erwähnt worden, deren Gesetze nach la Place folgende sind. Die auf die Jupitersbahn bezogene mittlere Knotenlinie der Bahnen aller vier Trabanten fällt mit der Knotenlinie des Aequators des Jupiters zusammen, welche eine retrograde siderische Secularbewegung von 26″,76 hat. Am ersten Januar 1801 um Mitternacht war die jovicentrische Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators des Jupiters in seiner Bahn gerechnet = 314° 27′ 54″, und die Neigung dieses Aequators gegen die Jupitersbahn = 3° 5′ 31″, welche in 100 Jahren um 2″,28 zunimmt. Die mittleren Neigungen der vier Bahnen gegen die Bahn des Jupiters sind für den ersten Januar 1801 folgende: I. 3° 5′ 24″; II. 3° 4′ 25″; III. 3° 0′ 28″; IV. 2° 40′ 58: also gegen den Aequator des Jupiters beziehungsweise 7″; 1′ 6″; 5′ 3″; und 24′ 33″. Die letzteren Neigungen sind constant, und daher ist die mittlere Lage dieser Bahnen einer mit der Veränderung der Lage des Aequators des Jupiters gemeinschaftlichen Secularveränderung unterworfen, vermöge welcher ihre mittleren Knoten in 100 Jahren um 26″,70 in Beziehung auf die Fixsterne zurückgehen, und ihre mittleren Neigungen in 100 Jahren um 2″,28 wachsen. Die periodischen Veränderungen der Neigungen lassen sich so darstellen. Die Bahn eines jeden Trabanten bewegt sich gleichförmig und mit einer constanten Neigung gegen seine mittlere Bahn, so daß die wahre Lage der Bahn durch ihren Neigungswinkel gegen die mittlere Bahn und durch die Länge ihres auf eben diese Bahn sich beziehenden aufsteigenden Knotens gegeben ist. Diese Neigungen und Knotenlängen sammt den siderischen retrograden Bewegungen der Knoten sind:

Neigungen gegen die mittlere Bahn.	Längen der ☊ in der mittl. Bahn. 1. Jan. 1801.	Retrogr. sid. Bew. d. ☊ in 365 ¼ T.
I. unmerklich	— — —	— — —
II. 27′ 49″	12° 52′ 50″	12° 2′ 54″,01
III. 12 20	222 58 43	2 33 13 65
IV. 14 58	70 28 45	0 41 29,17

Hieraus ergeben sich die §. 222. angeführten periodischen Veränderungen der Neigungen. Noch finden einige kleinere Ungleichheiten in der Breite Statt, welche bey dem vierten Trabanten auf 2' 25" steigen, bey den übrigen aber kleiner sind, und ohne ihren Einfluß auf die Dauer der Verfinsterungen nicht würden bemerkt werden können.

§. 342. Setzt man die jovicentrische Länge eines Trabanten in seiner Bahn und vom Aequinoktialpunkt der Erde an gerechnet $= v$, die mittlere Neigung seiner Bahn gegen die Bahn des Jupiters $= i$, und die Länge ihres aufsteigenden Knotens in der Ebene der letzteren Bahn gerechnet $= n$; so findet man die mittlere jovicentrische Breite b dieses Trabanten über die Bahn des Jupiters durch die Gleichung $\text{Sin.}\, b = \text{Sin.}\, i \,\text{Sin.}\, (v - n)$ (§. 190. n. 2.). Wenn i klein ist; so ist nahe $b = \text{Sin.}\, b + \frac{1}{6}\, \overline{\text{Sin.}\, b}^3$, und $\text{Sin.}\, i = i - \frac{1}{6} i^3$. Hieraus findet sich $b = (i - \frac{1}{24} i^3)$ $\text{Sin.}\,(v - n) - \frac{1}{24} i^3 \,\text{Sin.}\, 3\,(v - n)$. Für $i = 3° 5'$ ist $\frac{1}{24} i^3 = 1'',3$; also nahe $b = i\,\text{Sin.}\,(v - n)$. Da die in dem vorhergehenden §. angegebenen Neigungen mittelst dieses Ausdrucks aus den Beobachtungen abgeleitet sind; so sind eigentlich die Neigungen selbst um $1'',3$ größer.

Sey t die Anzahl der vom 1. Jan. 1801 an verflossenen julianischen Jahre; so ist die der Zeit t entsprechende Länge der mittlere Knoten der Trabantenbahnen von dem Frühlingspunkt der Erde an gerechnet $= 314° 27' 54'' - 0'',2676.\, t + 50'',1.\, t = 314° 27' 54'' + 49'',83.\, t$, und, wenn die Länge des ersten Jupiterstrabanten in seiner Bahn vom Frühlingspunkt der Erde an gerechnet $= v$ gesetzt wird, seine mittlere Breite über der Ebene der Jupitersbahn

$= (3° 5' 24'')\,\text{Sin.}\,(v - 314° 27' 54'' - 49'',83.\, t)$.

Ebenso findet sich die mittlere jovicentrische Breite des zweyten Trabanten, wenn seine Länge mit v' bezeichnet wird,

$= (3° 4' 25'')\,\text{Sin.}\,(v' - 314° 27' 54'' - 49'',83\, t.)$.

Ferner ist die Länge des aufsteigenden Knotens der wahren Bahn des zweyten Trabanten auf seiner mittleren Bahn $= 12° 52' 50'' - (12° 2' 54'',01).\, t + 50'',1.\, t = 12° 52' 50'' - (12° 2' 3'',91).\, t$; folglich nach §. 223. n. 4. die Verbesserung der mittleren Breite

$= (27' 49'')\,\text{Sin.}\,(v' - 12° 52' 50'' + 12° 2' 3'',91.\, t)$.

Daher sind mit Rücksicht auf die Veränderungen der Lagen der Trabantenbahnen die jovicentrischen Breiten der vier Jupiterstrabanten über der Bahn des Jupiters

I. $3° 5' 24''\,\text{Sin.}\,(v - 314° 27' 54'' - 49'',83.\, t)$

II. $\begin{cases} 3° 4' 24''\,\text{Sin.}\,(v' - 314° 27' 54'' - 49'',83.\, t) \\ + 27' 49''\,\text{Sin.}\,(v' - 12° 52' 50'' + 12° 2' 3'',91.\, t) \end{cases}$

$$\text{III.}\left\{\begin{array}{l} 3^\circ\ 0'\ 28''\,\text{Sin.}\,(v''-314^\circ\ 27'\ 54''-49'',83.\,t) \\ +\ 12'\ 20''\,\text{Sin.}\,(v''-222^\circ\ 58'\ 43''+2^\circ\ 32'\ 23'',55.\,t) \end{array}\right.$$

$$\text{IV.}\left\{\begin{array}{l} 2^\circ\ 40'\ 53''\,\text{Sin.}\,(v'''-314^\circ\ 27'\ 54''-49'',83.\,t) \\ +\ 14'\ 58''\,\text{Sin.}\,(v'''-\ 70^\circ\ 28'\ 45''+40'\ 39'',07.\,t), \end{array}\right.$$

wo t die Anzahl der vom 1. Jan. 1801. an gerechneten julianischen Jahre, und v, v' u. s. w. die wahren jovicentrischen Längen der Trabanten bezeichnen. Hieraus kann man nach §. 223. n. 5. 6. u. 7. die Neigungen der wahren Bahnen gegen die Bahn des Jupiters und ihre auf die letztere sich beziehende aufsteigende Knoten berechnen. Die tropischen Umlaufszeiten der Knoten der wahren Bahnen auf ihren mittleren in Beziehung auf den Aequinoktialpunkt der Erde erhält man durch die Division des Umfangs mit ihren jährlichen tropischen Bewegungen, und sie sind in julianischen Jahren ausgedrückt für den zweyten Trabanten $= 29{,}9142$, für den dritten $= 141{,}7393$, für den vierten $= 531{,}35$. Die Neigungen werden am grösten, wenn diese Knoten mit dem aufsteigenden Knoten des Aequators des Jupiters zusammenfallen, und am kleinsten, wenn sie 180 Gr. von demselben entfernt sind, oder jene aufsteigende Knoten in den niedersteigenden des letzteren fallen. Diese Veränderungen haben also zu Perioden die tropischen Umlaufszeiten der erwähnten Knoten in Beziehung auf den Knoten des Aequators des Jupiters, und werden gefunden, wenn man den Umfang mit dem Ueberschuß ihrer jährlichen Bewegungen über die jährliche Bewegung des Knotens des Aequaters des Jupiters dividirt. Sie sind 29,8798; 140,971; 520,712 jul. J. Die Zeiten der grösten Neigungen können aus obigen Gleichungen so gefunden werden. Soll z. B. die Neigung der Bahn des zweyten Trabanten am grösten seyn; so muß seyn $314^\circ\,27'\,54''+49'',S.\,t = 12^\circ\,52'\,50''-(12^\circ\,2'\,3'',91).\,t+r.360^\circ$, wo r irgend eine ganze Zahl bezeichnet, oder $(12^\circ\,2'\,53'',74).\,t = 58^\circ\,24'\,56''+(r-1).\,360^\circ$, woraus man erhält $t = 4{,}848 + 29{,}8798\,(r-1)$ Jahren. Verfährt man ebenso mit den übrigen; so ergeben sich folgende Epochen der grösten Neigungen: 1805,848; 1906,146; 1968,805. Mittelst dieser und der vorhin angegebenen Perioden dieser Veränderungen ist nachstehende Tafel der Epochen der grösten Neigungen des zweyten, dritten und vierten Jupiterstrabanten berechnet:

II.	III.	IV.
1805,848	1906,146	1968,805
1775,968	1765,175	1448,093
1746,088	1624,204	
1716,208		
1686,328		

Maraldi fand die Neigung der Bahn des zweyten Trabanten am grösten zu Anfang der Jahre 1687, 1717, 1747, und

1772 *), die des dritten in den Jahren 1633 und 1765 **). Die Epochen der kleinsten Neigungen werden aus den obigen gefunden, wenn man die Hälfte der Perioden ihrer Veränderungen dazu addirt oder davon subtrahirt. Ehe La Place das Gesetz dieser Veränderungen durch die Theorie gefunden hatte, nahmen die Astronomen eine Bewegung der Bahnen des zweyten, dritten, und vierten Trabanten auf der Bahn des ersten an. Da aber jede sich auf einer eigenen Ebene bewegt; so waren diese Veränderungen zu verwickelt, als daß es möglich gewesen wäre, ihre Gesetze durch die Beobachtungen allein zu entdecken.

§. 343. Wir kommen nun auf die Ungleichheiten der Bewegungen der Jupiterstrabanten selbst. Von den blos scheinbaren Ungleichheiten ist schon in dem 225sten §. gehandelt worden. Die Perioden und Gesetze der Hauptungleichheiten der drey ersten Trabanten sind dieselben. Die Ungleichheit des ersten beschleunigt oder verzögert seine Verfinsterungen um 3' 13" in Zeit, wenn sie am grösten ist. Durch die Vergleichung ihres Gangs mit den gegenseitigen Lagen der zwey ersten Trabanten fand man, daß sie verschwand, wenn diese Trabanten aus dem Mittelpunkt des Jupiters gesehen mit der Sonne zu gleicher Zeit in Opposition waren, daß sie hernach zunahm, bis der erste Trabant im Augenblick seiner Opposition dem zweyten um 45° voraus war, daß sie, wenn er um 90° voraus war, wieder verschwand, hierauf mit entgegengesetztem Zeichen bis zu 135° zunahm, und die Verfinsterungen verzögerte, von da an wieder abnahm und bey einem Abstand von 180° verschwand, endlich daß sie in dem zweyten Halbzirkel dasselbe Gesetz, wie in dem ersten befolgte. Hieraus folgt eine Ungleichheit in der Bewegung des ersten Trabanten, welche vermöge der grösten Beschleunigung oder Verzögerung der Verfinsterungen dieses Trabanten und seiner synodischen Bewegung auf 27' 16",4 steigt, und dem Sinus des doppelten Ueberschußes der mittleren Länge des ersten Trabanten über die des zweyten proportional ist. Man setze die täglichen mittleren tropischen Bewegungen des Jupiters und seiner Trabanten beziehungsweise i, n', n'', u. s. w.; so ist die Periode dieser Gleichung

*) *La Lande* Astronomie. T. III. n. 2984. pag. 162.

**) A. a. O. n. 3000. pag. 169.

$= \frac{360}{2(n'-n'')} = 1{,}76273$ Tagen $= 1$ T. 18 St. $18',334$ nur um $10',266$ kleiner als die synodische Umlaufszeit des ersten Trabanten (§. 104.), woraus folgt, daß sie von einer Verfinsterung bis zu der nächstfolgenden sich nur wenig ändert, und die daraus in den Zeiten der Verfinsterungen entstehende Irregularität eine um vieles längere Periode haben muß, welche auf folgende Art kann gefunden werden. Es ist die synodische Umlaufszeit des ersten Trabanten $= \frac{360}{n'-i}$ Tagen; also ihr Ueberschuß über die Periode obiger Gleichung $= \frac{360}{n'-i} - \frac{360}{2(n'-n'')} = \frac{n'-2n''+i}{2(n'-i)(n'-n'')}\,360$ T. Folglich ist am Ende eines synodischen Umlaufs des ersten Trabanten der doppelte Ueberschuß seiner Länge über die des zweyten um $2(n'-n'') \cdot \frac{n'-2n''+i}{2(n'-i)(n'-n'')}\,360$ oder um $\frac{n'-2n''+i}{n'-i}\,360$ Grade größer als im Anfang desselben. Sey x die Anzahl der synodischen Umläufe des ersten Trabanten, welche erfordert werden, wenn jener doppelte Ueberschuß $= 360°$ werden soll; so wird seyn müssen $\frac{n'-2n''+i}{n'-i}\,360 \cdot x = 360$, mithin $x = \frac{n'-i}{n'-2n''+i}$. Also kommen die Irregularitäten der Verfinsterungen des ersten Trabanten nach einer Periode von $\frac{n'-i}{n'-2n''+i}$ synodischen Umläufen des ersten Trabanten, oder wenn man mit einem synodischen Umlauf, welcher $= \frac{360}{n'-i}$ ist, multiplicirt, nach einer Periode von $\frac{360}{n'-2n''+i}$ Tagen in derselben Ordnung wieder, welche mittelst der §. 104. u. 191. angegebenen Bewegungen $= 437{,}639$ Tagen gefunden wird

Die Ungleichheit des zweyten Trabanten befolgt ein der Ungleichheit des ersten ähnliches Gesetz, nur mit dem Unterschied, daß sie beständig das entgegengesetzte Zeichen von dieser letzteren hat. Sie beschleunigt oder verzögert die Verfinsterungen, wenn sie am größten ist, um $15'\,15''$, und verschwindet, wenn der erste und zweyte Trabant zugleich in Opposition mit der Sonne sind. Wenn sie 90 Grade von einander abstehen; so ist die Verzögerung der Verfinsterungen des zweyten am grösten, bey einem Abstand von 180° verschwindet sie wiederum, und von da an beschleunigen sich die Verfinsterungen, wie sie vorher sich verzögerten. Man schloß aus diesen Beobachtungen, daß die Bewegung des zweyten Trabanten eine in ihrem Maximum auf $1^\circ\,4'\,22'',3$ steigende, und dem Sinus des Ueberschußes der mittleren Länge des ersten Trabanten über die des zweyten proportionale Ungleichheit habe, deren Zeichen dem Zeichen des Sinus, von welchem sie abhängt, entgegengesezt ist. Die Theorie bestimmt nicht allein diese Ungleichheiten, sondern zeigt auch, was die Beobachtungen selbst wahrscheinlich machten, daß sie das Resultat zweyer Ungleichheiten ist, deren eine von der Wirkung des ersten Trabanten abhängt, und dem Sinus des Ueberschußes der Länge des ersten über die des zweyten proportional ist, die andere aber durch die Wirkung des dritten hervorgebracht wird, und sich dem Sinus des doppelten Ueberschußes der Länge des zweyten über die des dritten proportional verändert. Diese zwey Ungleichheiten fließen aber vermöge der Beziehungen der mittleren Bewegungen und der mittleren Längen der drey ersten Trabanten aufeinander in eine zusammen. Es ist nemlich (§. 108.) $l' + 2l''' - 3l''$ sehr nahe beständig $= 180^\circ$; folglich $l' - l'' = 180^\circ + 2(l'' - l''')$. Die Sinus der Winkel $(l' - l'')$ und $2(l'' - l''')$ sind also dem Zeichen nach einander entgegengesezt, aber der Größe nach einander gleich, und zwey Ungleichheiten, von welchen die eine dem Sinus von $l' - l''$ die andere dem Sinus von $2(l'' - l''')$ proportional ist, verwandeln sich in eine dem Sinus eines dieser Winkel proportionale Ungleichheit, welche der Summe oder Differenz jener zwey Ungleichheiten gleich ist, je nachdem sie verschiedene oder einerley Zeichen haben. Demnach ist die Ungleichheit der Bewegung des zweyten Trabanten auch gleich dem Produkt von $1^\circ\,4'\,22'',3$ in den Sinus des doppelten Ueberschußes der Länge des zweyten über die Länge des dritten, und sie hat mit diesem Sinus einerley Zeichen. Hieraus entsteht, wie man bey dem ersten Trabanten gesehen hat, in den Verfinsterungen des zweyten Trabanten eine Ungleichheit, deren Periode $= \frac{360}{n'' - 2n''' + i}$ Tagen ist. Es ist aber sehr nahe $n' + 2n''' = 3n''$ (§. 104.), mithin $n' - 2n'' = n'' - 2n'''$; folglich ist diese Periode ebenfalls $= 437{,}639$ Tagen.

Auf ähnliche Art fand man eine Ungleichheit der Bewegung des dritten Jupiterstrabanten, welche auf $4' 21'',8$ steigt, dem Sinus des Ueberschußes der mittleren Länge des zweyten Trabanten über die des dritten proportional ist, und das entgegengesetzte Zeichen dieses Sinus hat. Sie ist eine Folge der Anziehung, welche der zweyte Trabant auf den dritten ausübt, so daß der zweyte Trabant von dem ersten eine Perturbation leidet, welcher der durch den zweyten auf den dritten hervorgebrachten ähnlich ist, und der zweyte Trabant wiederum durch den dritten eine derjenigen ähnliche Perturbation leidet, welche er in der Bewegung des ersten hervorbringt. Diese zwey Perturbationen des zweyten Trabanten sind es, welche, wie man vorhin gesehen hat, in eine dem Sinus des doppelten Ueberschußes der Länge des zweyten über die Länge des dritten proportionale zusammenfließen. Die Ungleichheit des dritten Trabanten bringt in seinen Verfinsterungen eine Ungleichheit hervor, welche wie bey dem ersten und zweyten eine Periode von $437{,}639$ Tagen hat. Denn die Periode der Ungleichheit des dritten ist $= \frac{360}{n'' - n'''}$, und die synodische Umlaufszeit dieses Trabanten ist $= \frac{360}{n''' - i}$; folglich $\frac{360}{n''' - i} - \frac{360}{n'' - n'''} = \frac{(n'' - 2n''' + i)\,360}{(n''' - i)(n'' - n''')}$. Während eines synodischen Umlaufs des dritten Trabanten wächst also der Ueberschuß der Länge des zweyten über die des dritten um $\frac{n'' - 2n''' + i}{n''' - i}\,360$ Grade, und in $\frac{n''' - i}{n'' - 2n''' + i}$ synodischen Umläufen des dritten um 360 Grade, nach welcher Zwischenzeit die Irregularität der Verfinsterungen in derselben Ordnung wiederkehrt. Aber einer dieser synodischen Umläufe ist $= \frac{360}{n''' - i}$; folglich ist die Periode der Ungleichheiten der Verfinsterungen $= \frac{360}{n'' - 2n''' + i}$ Tagen, oder dieselbe, welche in den Verfinsterungen des zweyten, mithin auch des ersten statt findet.

§. 344. Bradley bemerkte zuerst diese Periode von 437 Tagen in den Ungleichheiten der Verfinsterungen des ersten und zweyten Trabanten. Wargentin, welcher nach den Cassinischen die ersten genaueren Tafeln der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten *) lieferte, dehnte diese Periode auch auf die Verfinsterungen des dritten Trabanten aus, und schrieb diese Ungleichheiten den Einwirkungen der drey Jupiterstrabanten aufeinander zu, doch ohne sie der Analyse zu unterwerfen, welche damals noch nicht weit genug zu dieser Untersuchung vorgerückt war. Bailly und la Grange, welche sich zuerst im Jahr 1766 mit der Theorie der Perturbationen der Jupiterstrabanten beschäftigten, fanden zuerst diese Ungleichheiten, so wie sie sich auch zuerst den Beobachtern darboten. La Place hat diese Theorie in dem achten Buch seiner Mechanik des Himmels ausführlich entwickelt, und gefunden, daß die gegenseitigen Beziehungen der mittleren Bewegungen und der mittleren Längen der drey ersten Trabanten, auf welche sich das zusammenfliessen der zwey Ungleichheiten des zweyten Trabanten in eine Ungleichheit gründet, nach aller Schärfe wahr sind. Sonst müßten sich diese zwey Ungleichheiten nach und nach von einander absondern, und man müßte andere beträchtliche Ungleichheiten finden, welches gegen die Beobachtungen ist. Die Voraussetzung, daß der Zufall die drey ersten Trabanten ursprünglich in die zu diesen Verhältnißen erforderliche Distanzen und Lagen gesetzt habe, war gegen alle Wahrscheinlichkeit, und es war sehr wahrscheinlich, daß sie ihren Grund in einer besonderen Ursache haben, welche er in der Wirkung dieser Trabanten auf einander suchte. Die genaue Untersuchung dieser Wirkung zeigte ihm, daß sie diese Verhältniße nach aller Schärfe wahr gemacht hat. Die neueren Untersuchungen, welche de Lambre über die Bewegungen der Jupiterstrabanten durch die Vergleichung einer großen Anzahl von Beobachtungen derselben angestellt hat, haben diesen durch die Theorie gefundenen Satz bestätigt, und die sehr kleinen noch übrig bleibenden Unterschiede sind allein den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuzuschreiben (§. 104. u.

*) Sie stehen in der Sammlung astron. Tafeln. Berlin. 1776.

108.). Also ist genau die mittlere Bewegung des ersten Trabanten sammt der doppelten mittleren Bewegung des dritten gleich der dreyfachen mittleren Bewegung des zweyten, und die mittlere Länge des ersten sammt der doppelten mittleren Länge des dritten weniger die dreyfache mittlere Länge des zweyten = 180°. Es ist nicht nöthig, daß diese Verhältniße ursprünglich nach aller Schärfe Statt gehabt haben, nur müssen sie wenig davon entfernt gewesen seyn, und alsdenn war die gegenseitige Attraction der drey ersten Trabanten hinreichend, um diese Verhältnisse in aller Schärfe hervorzubringen und zu erhalten. Aber der kleine Unterschied zwischen diesen und den ursprünglichen Verhältnissen hat eine allein durch die Beobachtungen zu bestimmende Ungleichheit hervorgebracht, welche sich unter die drey Trabanten vertheilt, und von la Place mit den Namen der Libration bezeichnet wird, vermöge welcher die Verhältnisse der Bewegungen und Längen dieser Trabanten um jene mittleren Verhältnisse hin und her oscilliren, und sich nur um sehr kleine Größen von ihnen bald auf der einen, bald auf der anderen Seite entfernen. Die Untersuchung der Beobachtungen hat gezeigt, daß diese Libration sehr klein und selbst unmerklich seyn muß. Weder Secularungleichheiten der Jupiterstrabanten, noch ein Widerstand des Mittels können diese Verhältnisse stören, denn diese Ungleichheiten sind denselben Verhältnissen untergeordnet, in welchen die mittleren Bewegungen der drey ersten Trabanten zu einander stehen *).

§. 345. Die Excentricität der Bahn des dritten Trabanten zeigt sonderbare Anomalien deren Ursache la Place durch die Theorie entdeckt hat. Sie hängen von zwey verschiedenen Mittelpunktsgleichungen ab, deren eine der Bahn dieses Trabanten eigen ist, und sich auf ein Perijovium bezieht, welches eine jährliche Sideralbewegung von 2° 36′ 39″,17 hat, die andere aber von der Wirkung des vierten Trabanten und der Excentricität seiner Bahn abhängt, und sich auf das Perijovium dieses letzteren bezieht, welches eine jährliche side-

*) Méc. cél. T: I. L. II. Ch. VIII. n. 66. pag. 342. und T. IV. L. VIII. Ch. VI. pag. 59. et suiv.

rische Bewegung von 42' 58'',73 hat. Diese zwey Gleichungen bilden miteinander eine veränderliche Mittelpunktsgleichung, welche sich auf ein Perijovium bezieht, dessen Bewegung ungleichförmig ist. Hieraus entstehen die §. 226. angeführten Veränderungen der Gleichung des Mittelpunkts. Wargentin suchte diese Veränderungen durch zwey Mittelpunktsgleichungen darzustellen, wurde aber, weil er die eine derselben nicht auf das Perijovium des vierten Trabanten beziehen konnte, durch die Beobachtungen genöthigt, seine Hypothese aufzugeben, und kam auf die Hypothese einer veränderlichen Gleichung des Mittelpunkts, deren Veränderungen er durch die Beobachtungen bestimmte, und diß leitete ihn ungefähr auf die §. 226. angezeigten Resultate.

Die Excentricität der Bahn des vierten Trabanten ist beträchtlich größer als die der übrigen, so daß die gröste Mittelpunktsgleichung auf 50' 2'' steigt. Sein Perijovium hat eine jährliche directe Sideralbewegung von 42' 58'',7. Eine andere der Mittelpunktsgleichung ähnliche Gleichung, welche aber nur auf 1' 11'',5 steigt, bezieht sich auf das Perijovium des dritten Trabanten, so daß aus diesen Gleichungen, wie bey dem dritten Trabanten, eine veränderliche Mittelpunktsgleichung entsteht.

Aus der Wirkung der Trabanten auf einander entstehen noch einige kleinere Ungleichheiten, worüber man die Mechanik des Himmels nachsehen kann. Diejenige, welche durch die Attraction der Sonne hervorgebracht werden, sind nicht sehr beträchtlich, und denjenigen ähnlich, welche die Sonne in der Bewegung des Monds hervorbringt. Namentlich hat der vierte Trabant eine der jährlichen Gleichung des Monds ähnliche von der mittleren Anomalie des Jupiters abhängende Ungleichheit, deren Maximum = 1' 53'',33 ist, eine der Evection ähnliche von 21'',69, und eine, welche mit der Variation einerley Gesetz befolgt, und auf 4'',21 steigt. Die letzteren zwey Ungleichheiten sind bey den übrigen Trabanten unmerklich. Die jährlichen (in einem Jahr des Jupiters wiederkehrenden) Gleichungen des dritten und zweyten Trabanten betragen, wenn sie am grösten sind 47'',76 und $36'',07$. Bey dem ersten ist diese Gleichung ebenfalls unmerklich.

Hienach sind, wenn man die mittleren Längen des ersten, zweyten Trabanten u. s. w. mit l', l'' u. s. w. die Längen der Perijovien des dritten und vierten mit p''' und p^{IV}, die mittlere Länge des Jupiters mit J, und seine mittlere Anomalie mit A bezeichnet, die wahren Längen v', v'' u. s. w. folgende:

$$\begin{aligned}
v' &= l' + 27'\,16'',4\ \text{Sin.}\,2\,(l' - l'')\\
v'' &= l'' + 1^\circ\,4\ 22,3\ \text{Sin.}\,2\,(l'' - l''')\\
&\quad - 36'',07\ \text{Sin.}\,A.\\
v''' &= l''' + 9'\,13'',7\ \text{Sin.}\,(l''' - p''')\\
&\quad + 4\ \ 5,1\ \text{Sin.}\,(l''' - p^{\text{IV}})\\
&\quad - 4\ \ 21,8\ \text{Sin.}\,(l'' - l''')\\
&\quad - 47,76\ \text{Sin.}\,A\\
v^{\text{IV}} &= l^{\text{IV}} + 50'\,2'',0\ \text{Sin.}\,(l^{\text{IV}} - p^{\text{IV}})\\
&\quad - 1\ \ 11,5\ \text{Sin.}\,(l^{\text{IV}} - p''')\\
&\quad - 1'\,53'',33\ \text{Sin.}\,A.
\end{aligned}$$

Nach **de Lambre** ist für die Mitternacht des ersten Januars 1750 $p^{\text{IV}} = 180^\circ\,20'\,33''$ und $p''' = 309^\circ\,26'\,19''$. Die mittleren Längen der Trabanten erhält man nach §. 108.

Aus den Beobachtungen hatte **de Lambre** folgende tropische mittlere Secularbewegungen der drey ersten Trabanten, und Epochen ihren mittleren Längen für die Mitternacht des ersten Januars 1750 gefunden *).

	mittl. Secularbeweg. in 36525 Tagen.	mittl. Längen am 1. Jan. 1750.
I.	7432435° 28′ 14″,34	15° 1′ 34″,5
II.	3702713 13 53,37	311 51 6,8
III.	1837852 6 48,90	10 16 19,9

Die mittlere Bewegung des ersten sammt der doppelten mittleren Bewegung des dritten weniger die dreyfache mittlere Bewegung des zweyten macht $9'',03$, sehr nahe mit **La Place's** Theorem übereinstimmend. Ferner macht die mittlere Länge des ersten sammt der doppelten mittleren Länge des dritten weniger die dreyfache mittlere Länge des zweyten $180^\circ\,0\,53''\,9$. Da der Unterschied zwischen dem Resultat der Beobachtungen und dem auf die Epochen sich beziehenden Theorem nicht beträchtlich ist; so hielt es **de Lambre** für schicklich, die Epochen seiner Tafeln diesem Theorem anzupassen, und auch in den mittleren Bewegungen eine kleine Aenderung zu machen, so daß $n' + 2n''' - 3n'' = 0$ wird. Die mittleren Bewegungen und die Epochen der Länge sind alsdenn folgende:

I.	7432435° 28′ 2″,0	15° 0′ 46″,0
II.	3702713 13 53,3	311 50 25,3
III.	1837852 6 49,0	10 15 15,0

*) Méc. cél. T. IV. pag. 135. u. 136. wo bey der Epoche des zweyten Trabanten 346,5021 statt 346,0521 zu lesen ist.

wo man sieht, daß die bey den Beobachtungen anzubringende Verbesserungen innerhalb der Gränzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen.

Die Massen der Jupiterstrabanten und die Abplattung des Jupiters hat **La Place** mittelst seiner Perturbationsformeln bestimmt *), wobey er folgende durch die Beobachtungen gegebene Stücke zum Grund legte: erstlich die große auf 27′ 16″,39 im Bogen steigende Ungleichheit des ersten Trabanten, zweytens die große Ungleichheit des zweyten, deren Maximum = 1° 4′ 22″,3 ist, drittens die jährliche Sideralbewegung des Perijoviums des vierten Trabanten von 42′ 58″,75, viertens den auf das Perijovium des vierten Trabanten sich beziehenden Theil der Mittelpunktsgleichung des dritten Trabanten, welcher auf 4′ 5″,14 steigt, und die Mittelpunktsgleichung 50′ 2″,04 des vierten, endlich fünftens die siderische jährliche retrograde Bewegung der Bahn des zweyten Trabanten auf seiner mittleren Bahn 12° 2′ 54″,0. Hieraus fand er folgende Massen der Jupiterstrabanten, die des Jupiters zur Einheit angenommen:

I.	0,0000173281
II.	0,0000232355
III.	0,0000426591

Das Verhältniß der kleinen Axe des Jupiters zu dem Durchmesser seines Aequators fand er = 0,9286992 : 1, welches dem durch die Beobachtungen gefundenen Verhältniß von 13 : 14 (§. 109.) oder von 0,92857 : 1 sehr nahe kommt **).

Ich bemerke noch, daß die veränderliche Mittelpunktsgleichung des dritten Trabanten aus den zwey Gleichungen von welchen sie abhängt, mittelst der Ausdrücke n. 4. 5. 6. u. 7. des 223sten §. kann gefunden werden, wenn man i und J den Coefficienten der zwey Mittelpunktsgleichungen, und n, N den auf die zwey Perijovien sich beziehenden Anomalien des dritten Trabanten gleich setzt.

§. 346. Die Bahnen der Saturnstrabanten sind bis jetzt zu wenig genau bekannt, als daß es möglich wäre, die Perturbationen dieser Nebenplaneten zu berechnen. Aber die Lage ihrer Bahnen bietet eine der Aufmerksamkeit der Geometer und Astronomen würdige Erscheinung dar. Die Bahnen der sechs ersten scheinen sehr nahe in der Ebene des Rings zu liegen, indessen sich der siebente merklich davon entfernt. Es ist natürlich, dieses als eine Wirkung der Anziehung des Saturns anzusehen, welcher vermöge seiner Abplattung

*) Méc. cél. T. IV. L. VIII. pag. 121 et suiv.

) Die von **Pound angestellten Meßungen führt **Newton** an in Princ. L. III. prop. XIX.

die Bahnen der sechs ersten Trabanten und seine Ringe in der Ebene seines Aequators erhält. Die theoretischen Untersuchungen, welche La Place über diesen Gegenstand angestellt hat *), bestätigen diese Vermuthung, und zeigen, daß die Bahnen der Saturnstrabanten, so wie die Jupiterstrabanten sich auf Ebenen bewegen, welche beständig zwischen dem Aequator und der Bahn des Planeten durch die gemeinschaftliche Durchschnittslinie der letzteren durchgehen, und desto mehr gegen diesen Aequator geneigt sind. je weiter die Trabanten von dem Saturn abstehen. Diese Neigung ist jedoch nur für den äussersten Trabanten merklich, und den Beobachtungen zufolge = $21° 36' 27''$. Die Bahn des Trabanten ist gegen diese Ebene geneigt um $15° 5' 54''$ und die jährliche siderische retrograde Bewegung ihrer auf die letztere Ebene bezogenen Knoten beträgt $396'',1168$. La Place hält aber diese Resultate wegen der Ungewißheit der Beobachtungen nur für eine noch sehr unvollkommene Approximation.

Ueber die Bahnen der Trabanten des Uranus sind wir noch weniger unterrichtet. Nach Herschels Beobachtungen scheinen sich alle in einer auf der Ebene der Bahn des Uranus senkrechten Ebene zu bewegen, woraus La Place auf eine ähnliche Lage der Ebene des Aequators dieses Planeten schließt. Er zeigt **), daß die Abplattung des Uranus verbunden mit der Wirkung seiner Trabanten ihre verschiedene Bahnen sehr nahe in dieser Ebene erhalten kann.

Die Lage der Ebene der Bahn des siebenten Saturnstrabanten kann mittelst der von La Place gefundenen Gesetze der Veränderung seiner Bahn und der aus Bernard's Beobachtungen (§. 227.) sich ergebenden Bestimmungsstücke auf folgende Art berechnet werden.

Die jährliche siderische Bewegung des aufsteigenden Knotens des Rings des Saturns und seines Aequators kann höchstens $10''$ betragen, und La Place vermuthet, daß sie nicht über eine Sekunde gehen werde ***), und die Veränderung des Neigungswinkels der Ebene des Rings gegen die Bahn des Saturns ist eben-

*) Méc. cél. T. IV. L. VIII. Chap. XVI.
**) Méc. cél. T. IV. L. VIII. Chap. XVII.
***) Méc. cél. T. IV. L. VIII. Chap. XVI. pag. 188.

ebenfalls unmerklich. Man kann also die Ebene, auf welcher sich die Bahn des siebenten Saturnstrabanten herumbewegt, als eine siderisch ruhende gegen den Aequator des Saturns um 21° 36′ 27″, und gegen die Ebene seiner Bahn um 8° 23′ 33″ geneigte Ebene betrachten. Die Länge ihres aufsteigenden Knotens in der Bahn des Saturns gerechnet ist für das Jahr 1803 = 170° 51′ 4″ nach Schröter, welche wegen des Zurückweichens der Aequinoktialpunkte jährlich um 50″,1 wächst. Auf dieser fixen Ebene bewegt sich die Bahn des siebenten Trabanten mit einer constanten Neigung von 15° 15′ 54″ herum. Im Jahr 1787 war der Ueberschuß der Länge des aufsteigenden Knotens des Rings über die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des Trabanten in der fixen Ebene = 34° 0′ 36″, welcher Ueberschuß wegen der retrograden Bewegung des letzteren Knotens jährlich um 306″,1168 wächst. Diese Bewegung ist einer auf 53′ 39″ 8 steigenden dem Sinus jenes doppelten Ueberschußes proportionalen Ungleichheit unterworfen, so daß, wenn t die von 1787 an verfloßene julianische Jahre bedeutet, der Ueberschuß der Länge des aufsteigenden Knotens des Rings über den der Bahn des siebenten Trabanten in der fixen Ebene

$= 34°50'56'' + 306'',1168.t - 3219'',8 \,\text{Sin.}\, 2(34°50'56'' + 306'',1168\, t)$ ist.

Die Bahn des Trabanten, die Bahn des Saturns und die fixe Ebene bilden nun auf der Sphäre ein Dreyeck, dessen eine Seite der in der letzteren Ebene liegende so eben angegebene Bogen ist, welcher für jede gegebene Zeit kann berechnet werden. Die constanten dieser Seite anliegenden Winkel sind 15° 15′ 54″ und 8° 23′ 33″, woraus die Neigung der Trabantenbahn gegen die Bahn des Saturns und die dem Winkel 15° 15′ 54″ gegenüberliegende Seite nach §. 223. können berechnet werden. Zieht man diese Seite von der für denselben Zeitpunkt berechneten Länge des aufsteigenden Knotens des Aequators des Saturns in seiner Bahn, welche = 170° 37′ 42″ + 50″,1 t ist, ab; so hat man die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn des siebenten Saturnstrabanten in der Bahn des Jupiters gerechnet. Hienach findet sich

	Länge d. ☊ d. 7. Trab. in der Bahn d. Sat.	Neig. d. Bahn gegen d. B. d. Sat.
1714	151° 14′ 59″	23° 0 43″
1787	148 11 42	22 42 0
1801	147 36 41	22 38 2

und wiederum nach §. 223.

	Länge d. ☊ d. 7. Trab. in der Ekliptik	Neigung der Bahn gegen die Ekl.
1714	147° 43′ 47″	25° 0′ 7″
1787	144 57 8	24 45 17
1801	144 25 18	24 42 1

Die im Jahr 1714 von Cassini beobachtete Lage der Bahn dieses Trabanten (§. 227.) weicht beträchtlich von der hier berechneten ab. Aber die Beobachtungen sind nicht genau genug, um die Bewegungen dieser Bahn mittelst derselben bestimmen zu können.

Fünftes Capitel.

Von der Gestalt der Erde und der Planeten, von dem Gesetz der Schwere auf ihren Oberflächen, und von der Veränderung der Lage ihrer Umdrehungsaxen.

§. 347. Die Planeten würden, wenn sie keine Axendrehung hätten, wegen der überall gleichen Schwere ihrer Theilchen eine kugelförmige Gestalt haben müssen. Ihre Umdrehungsbewegung entfernt sie aber ein wenig von der Kugelgestalt, und die durch diese Bewegung entstehende Schwungkraft erhöht sie unter dem Aequator und macht sie an den Polen abgeplattet. So sind die Umdrehungsaxen des Mars, Jupiters und Saturns (§. 101. 109 118) kleiner, als ihre auf jener Axe senkrechten Durchmesser, und wenn die Erde unter dem Aequator nicht ein wenig höher wäre, als unter den Polen, so würde das Meer unter den Polen sinken, gegen den Aequator hin sich erheben, und daselbst alles überschwemmen *). Die Gradmessungen beweisen, wie man in dem ersten Capitel des zweyten Buchs gesehen hat, eine unter den Polen zusammengedrükte Gestalt der Erde, und zeigen, daß sie einem elliptischen Sphäroid nahe kommt, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe beschrieben wird. Auf einem solchen sich drehenden Sphäroid können weder die Richtungen der Schwere in einem Punkt zusammenlaufen, noch kann die Kraft der Schwere selbst unter verschiedenen Parallelkreisen dieselbe seyn, welches mit den über die Pendellängen angestellten Beobachtungen übereinstimmt (§. 267. u. f.). Huygens erklärte die Verminderung der Schwere unter dem Aequator aus der durch die Axendrehung der Erde entstehenden Schwungkraft, und schloß hieraus, daß die Erde eine unter den Polen zu-

*) Newt. princ. L. III. prop. XVIII.

sammengedrükte Gestalt haben müsse *). **Newton** gieng von der Voraussetzung eines gleichförmig dichten elliptischen Sphäroids aus, und berechnete hienach das Verhältniß des Durchmessers des Aequators zur Erdaxe = 230 : 229 **). **Huygens** fand nachher dieses Verhältniß unter der Voraussetzung daß die ursprüngliche Schwere durchaus constant und nach dem Mittelpunkt gerichtet sey, = 578 : 577 ***). Wenn aber, wie die bisherigen Untersuchungen gezeigt haben, die Schwere der Erdkörper aus den Attractionen aller materiellen Theilchen der Erde zusammengesetzt ist; so hängt das Gesetz der Schwere der Körper an ihrer Oberfläche von der Gestalt der Erde ab, welche selbst wiederum von dem Gesetz der Schwere abhängt. Diese gegenseitige Abhängigkeit der zwey unbekannten Größen erschwert sehr die Untersuchung der Gestalt der Erde. **Maclaurin** hat zuerst gezeigt, daß eine flüßige Maße, welche eine Umdrehungsbewegung hat, und deren Theilchen sich im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Distanzen anziehen, im Gleichgewicht ist, wenn sie die Figur eines elliptischen Sphäroids hat †).

§. 348. Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf die in dem 289sten §. bewiesenen Sätze, und auf folgende Eigenschaften der Ellipse und eines elliptischen Sphäroids.

Es sey $ADBE$ (Fig. 134.) eine Ellipse, deren Mittelpunkt c und deren Axen AB und DE seyen. Man ziehe durch irgend einen von den Scheiteln verschiedenen Punkt M dieser Ellipse eine Parallele MR mit einer ihrer Axen AB, welche der Ellipse noch in einem Punkt m begegnen wird (Kegelschn. II. 8. Zus. 1.), und aus eben diesem Punkt zwey gerade Linien ML, MK so an die Ellipse, daß sie mit der MR beyderseits gleiche Winkel machen. Durch M und m ziehe man die Parallelen MN, mn mit der Axe DE, welche der Axe AB in a und b begegnen, beschreibe über der geraden Linie ab als Axe einer Ellipse $adbe$, welche der ersteren ähnlich sey und ähnlich liege, und ziehe an sie aus dem Punkt a die al, ak mit ML, MK parallel; so

*) Hugenii Opera. T. III. pag. 99.

**) Princ. L. III. prop. XIX.

***) Hugenii Opera reliqua. T. I. De causa gravitatis. Additam.

†) In der Preisschrift über Ebbe und Fluth, welche dem dritten Band der von le Seur und Jacquier veranstalteten Ausgabe der Principien pag. 247. u. f. angehängt ist, und in Treatise of Fluxions by Maclaurin. Chap. XIV.

ist 1.) $\left.\begin{matrix} ka+al \\ 2ak \end{matrix}\right\} = KM \pm ML$, je nachdem die letzteren Linien auf einerley, oder auf verschiedenen Seiten von MN liegen.

Bew. Weil $Mq = qm$ (Kegelschn. II, 8.); so ist $ac = cb$, und die zwey Ellipsen sind concentrisch. Man ziehe den Durchmesser GH, welcher die MK in J halbiere, mit diesem durch den Punkt N die Parallele NF, welche die MK, ak in F und f schneide, durch L die Parallele LQ mit MN, welche der MR in P, der MK in S, und der Axe AB in r begegne, endlich ziehe man NQ. Da $KMR = RML$ (Voraussß.); so ist $LP = PS$, und daher

$$\left.\begin{matrix} 2rP \\ 2Ma \\ MN \text{(Kegelsch. II, 8.)} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} Lr \\ Ar \end{matrix}\right\} + rS = SQ.$$ Folglich ist $QN = MS = ML$, und QN mit $\left\{\begin{matrix} MK \\ ak \end{matrix}\right\}$ parallel (I, 34.). Der Durchmesser GH halbiert also die NQ in O (Kegelsch. II, 15. Zus. 3.), mithin auch die mit ihr parallele Chorde ak der Ellipse $adbe$. Es ist aber

$$\begin{aligned} KM &= 2MJ \\ &= 2MF + 2FJ \\ &= 4af + 2fo \text{ (VI, 2. und weil } Ma = aN\text{)}, \\ \text{und } ML &= NQ \\ &= 2NO \\ &= 2fo; \\ \hline \text{folglich } KM + ML &= 4af + 4fo \\ &= 4ao = 2ak = ka + al. \end{aligned}$$

Eben so wird der Beweis für den andern Fall geführt, wo KM und ML auf verschiedenen Seiten von MN liegen.

Aus L, K und k seyen die Perpendickel LP, KR, kp auf MR und ab gefällt; so ist

2.) $RM \pm MP = 2ap$, je nachdem P und R auf einerley, oder auf verschiedenen Seiten von M liegen.

Denn es ist sowohl $\left.\begin{matrix} KM : RM \\ \text{als } ML : MP \end{matrix}\right\} = ak : ap$;

$$\begin{aligned} \text{folglich auch } KM \pm ML : RM \pm MP &= ak : ap \\ &= 2ak : 2ap \\ &= KM \pm ML : 2ap \text{ (n. 1.)}. \end{aligned}$$

Also $RM \pm MP = 2ap$ *).

Wenn an einen beliebigen Punkt m einer Ellipse (Fig. 135.) ein Halbmesser cm, und eine Normallinie mn gezogen, und von dem Punkt n, in welchem die letztere einer der Axen ab begegnet, ein Perpendickel nr gefällt wird; so ist

3.) $cm \times mr$ = dem Quadrat der anderen halben Axe $= \overline{cd}^2$.

Bew. Die Tangente mt an dem Punkt m schneide die ver-

*) Andere Beweise dieses Satzes findet man in der Preißschrift Maclaurin's. Sect. III. Lemma. I. Cor. 4. und in Treat. of Flux. n. 625. pag. 521.

längerte Axe de in t. Man vollende das Parallelogramm $ctmk$, ziehe kr, pr und durch m die Parallele mq mit ab. Da so wohl npm als $nrm = R$; so geht ein über mn als Durchmesser beschriebener Kreis durch p und r, und berührt die mt in m. Folglich ist $\left.\begin{matrix}cmt\\ mck\end{matrix}\right\}$ (I, 29.) $= mpr$ (III, 32.), und $mck + rpk = mpr + rpk = 2R$. Mithin kann auch um das Viereck $crpk$ ein Kreis beschrieben werden (III, 22.), und es ist $crk = cpk$ (III, 21.) $= R$. Die gerade Linie kr fällt also auf das Perpendickel nr, und wegen der gleichen Winkel rcp, rkp (III, 21.) verhält sich $cm : mp = km : mr$. Also ist $cm \times mr = km \times mp = tc \times cq = \overline{cd}^2$ (Kegelschn. II, 11. Zus. 7.).

4.) Wenn ein elliptisches Sphäroid (Fig. 136.) mit parallelen Ebenen geschnitten wird; so sind die Durchschnittslinien der krummen Oberfläche mit den schneidenden Ebenen einander ähnliche Ellipsen. Es sey fg die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene mit einer durch die Axe de des Sphäroids auf jene Ebene senkrecht gelegten Ebene $adbe$, und durch einen beliebigen Punkt m des Schnitts fmg sey eine Ebene hmi mit der Ebene des Aequators ab des Sphäroids parallel gelegt; so ist die gemeinschaftliche Durchschnittslinie mr der Ebenen fmg und hmi auf der Ebene $adbe$ senkrecht (XI, 19.). Und weil der Schnitt hmi ein Kreis ist, welcher hi zum Durchmesser hat; so ist das Quadrat von $mr = hr \times ri$ (VI, 13.). Man ziehe noch den Durchmesser kl des durch die Axe gehenden elliptischen Schnitts mit fg parallel; so verhält sich vermöge der Eigenschaften der Ellipse $\left.\begin{matrix}hr \times ri\\ \overline{mr}^2\end{matrix}\right\} : fr \times rg = \overline{ac}^2 : \overline{ck}^2$. Also ist der Schnitt fmg eine Ellipse deren Axen sich wie $ac : ck$ verhalten, welches Verhältniß für alle mit fmg parallele Schnitte dasselbe bleibt. Namentlich ist der Schnitt durch den Mittelpunkt c des Sphäroids, welcher dem Schnitt fmg parallel ist, eine Ellipse, deren Axen den Durchmessern ab und kl gleich sind. Hieraus folgt

5.) Daß, wenn zwey ähnliche concentrische und ähnlich liegende elliptische Sphäroide mit einer Ebene geschnitten werden; die Schnitte ähnliche und concentrische Ellipsen sind. Denn diese Schnitte sind vermöge n. 4. denjenigen ähnlich, welche entstehen, wenn diese Körper mit einer durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt gehenden der ersteren schneidenden Ebene parallelen Ebene geschnitten werden, und die letzteren Schnitte sind concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen. In dem besonderen Fall, wo die schneidenden Ebenen mit dem Aequator der Sphäroide parallel sind, gehen die Ellipsen in concentrische Kreise über.

§. 349. Es seyen $afdb$, $ageb$ (Fig. 137.) zwey einander in der geraden Linie *ab* sich schneidende Ebenen, welche ein Stück von einem gleichförmig dichten Körper abschneiden, dessen Theilchen einander im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung anziehen. Es seyen ferner *a*, *c* zwey auf der *ab* gegebene Punkte, *cd* sey beständig parallel mit *af*, und die Ebenen *edc*, *gaf* auf der Ebene *afdb* senkrecht; folglich einander parallel. Mithin sind auch *ce* und *ag* einander parallel (XI, 16.), und, wenn diese Ebenen mit Beybehaltung ihrer auf *afdb* senkrechten Lage sich um die Punkte *c* und *a* um gleiche Winkel drehen, *ci* parallel mit *al*, *ch* parallel *ak*. Folglich sind die Winkel an den Spitzen der pyramidenförmigen Körper *cdh* und *cfk* beziehungsweise einander gleich (XI, 15.). Demnach verhält sich

1.) Die Gravitation von *c* gegen den $\left\{ \begin{matrix} \text{in} \\ \text{um} \end{matrix} \right\}$ den Körper beschriebenen pyramidenförmigen Körper *cdh* zur Gravitation von *a* gegen den $\left\{ \begin{matrix} \text{in} \\ \text{um} \end{matrix} \right\}$ den Körper beschriebenen pyramidenförmigen Körper *afk* = *cd* : *af* (§. 289.).

In oder um einen zweyten dem ersten ähnlichen Körper sey ein pyramidenförmiger Körper *a'f'k'* (Fig. 138.) beschrieben welcher dem *afk* (Fig. 137.) ähnlich sey und ähnlich liege; so wird sich die Gravitation *a* gegen *afk* zur Gravitation von *a'* gegen *a'f'k'* verhalten wie *af* : *a'f'* (§. 289.), oder, wenn *ab*, *a'b'* ähnlich liegende Linien der zwey Körper sind, wie *ab* : *a'b'*. Man ziehe *fp*, *f'p'* auf *ab*, *a'b'* senkrecht; so verhält sich (§. 289. n. 1.) die Gravitation von *a* gegen *afk* nach der Richtung *ab* zu der Gravitation von *a'* gegen *a'f'k'* nach der Richtung *a'b'* wie *ap* : *a'p'*, oder, wegen der Aehnlichkeit der Figuren *afp*, *a'f'p'*, wie *af* : *a'f'* = *ab* : *a'b'*. Folglich verhält sich auch die Summe der Gravitationen von *a* gegen alle in oder um den ersten Körper beschriebenen pyramidenförmigen Körper zu der Summe der Gravitationen von *a'* gegen alle in oder um den zweyten Körper beschriebenen wie *ab* : *a'b'* (V, 12.). Also verhält sich auch

3.) Die Gravitation von *a* gegen den ganzen ersten Körper zu der Gravitation des ähnlich liegenden Punkts *a'* gegen den ganzen dem ersten ähnlichen Körper = *ab* : *a'b'*.

Innerhalb eines holen Sphäroids (Fig. 139.), welches durch die Umdrehung eines ringförmigen durch zwey concentrische ähnliche und ähnlich ligende Ellipsen *adbe*, *a'd'b'e'* begränzten Raums um die Axe *de* beschrieben wird, befinde sich ein Theilchen *m*, und es sey durch den Mittelpunkt *c* des Sphäroids und durch *m* eine Ebene gelegt. Da diese den holen Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt; so heben sich die Attractionen, welche die Theilchen des Sphäroids nach einer auf dieser Ebene senkrechten Richtung auf das Theilchen *m* ausüben, auf beyden Seiten gegen einander auf. Man ziehe in der schneidenden Ebene durch den Punkt m eine gerade Linie no, welche der äusseren Ellipse in n und o, der inneren in p und q begegne, und halbire sie in k; so ist, weil die Figuren ähnlich sind und ähnlich liegen, auch $pk = kq$, und $np = oq$. Man denke sich entgegengesetzte pyramidenförmige Körper, deren Spitze in m seyen, und deren Seitenlinien daselbst gleiche Winkel mit einander einschließen; so verhält sich die Gravitation gegen das Stük oq wie $np : oq$ (§. 289.). Diese Gravitationen sind also ebenfalls einander gleich, und heben sich gegen einander auf. Eben dieses findet bey einem holen durch zwey concentrische Kugeloberflächen begränzten Körper Statt, wie am Ende des 292sten §. bemerkt worden ist.

3.) Es sey $adbe$ (Fig. 139.) ein gleichförmig dichtes Sphäroid, welches durch die Umdrehung der Ellipse $adbe$ um die Axe de beschrieben wird. Man ziehe einen Halbmesser cf, und nehme auf demselben einen Punkt g nach Belieben; so verhält sich die Gravitation eines in f befindlichen Theilchens gegen das ganze Sphäroid zu der Gravitation eines in g befindlichen gegen eben dieses Sphäroid, wie $cf : cg$. Wenn man nemlich von dem Sphäroid ein ihm ähnliches concentrisches und ähnlich liegendes Sphäroid $a'd'b'e'$ hinwegnimmt, welches den Punkt g auf seiner Oberfläche hat; so heben sich die Gravitationen von g gegen die in dem übrigen Raum befindlichen Theilchen gegen einander auf, wie so eben gezeigt worden ist. Folglich hat die ausserhalb der Oberfläche $a'd'b'e'$ befindliche Materie keinen Einfluß auf die Gravitation von g gegen das ganze Sphäroid, und diese Gravitation ist der Gravitation von g gegen das innere Sphäroid $a'd'b'e'$ gleich, welche sich zu der Gravitation von f gegen das ganze Sphäroid verhält, wie $cg : cf$ (n. 2.).

§. 350. Es sey M (Fig. 140.) ein Punkt auf der Oberfläche eines elliptischen Sphäroids, und $AMDBE$ ein Schnitt desselben durch die Axe DE. Da die schneidende Ebene das Sphäroid in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt; so fällt die Richtung, nach welcher der Punkt M von dem ganzen Sphäroid angezogen wird, in die Ebene des Schnitts. Man zerlege die Schwere von M gegen das Sphäroid in zwey Kräfte, deren eine in der Richtung Mq auf Axe DE senkrecht, die andere in der Richtung Ma mit der Axe DE parallel, oder auf den Aequator AB senkrecht wirke; so wird die erstere der Schwere eines in a befindlichen Theilchens gegen den ganzen Körper, die letztere der Schwere eines in q befindlichen Theilchens gegen eben diesen Körper gleich seyn. Man beschreibe, um dieses zu beweisen, in das Sphäroid ein ihm concentrisches ähnliches und ähnlich liegendes Sphäroid $adbe$, welches den Punkt a auf seiner Oberfläche habe. Vermöge §. 348. n. 5. sind die Schnitte der Sphäroide mit einer durch die gerade Linie MN gelegten Ebene ähnliche und ähnlich liegende concentrische Ellipsen. Sey $ADBE$ (Fig. 134.) einer dieser Schnitte des äusseren, und $adbe$ des inneren Sphäroids mit derselben Ebene. Durch einen beliebigen Punkt p der in der Ebene des Aequators liegenden Axe ab der inneren Ellipse ziehe man die Ordinate lk, sodenn die geraden Linien al, ak, und durch M die ML, LR, MK mit al, ab, ak parallel. Man denke sich diese Sphäroide mit einer andern durch MN gehenden Ebene geschnitten; so entstehen keilförmige zwischen den zwey schneidenden Ebenen liegende Ausschnitte der zwey Sphäroide, dergleichen in dem vorhergehenden §. sind betrachtet worden, und zwar in dem äusseren Sphäroid zwey einander entgegengesetzte mit ihren Schneiden in der geraden Linie MN an einander stossende. In oder um diese Ausschnitte seyen den geraden Linien ML, MK, la, ak anliegende ähnliche pyramidenförmige Körper beschrieben, deren Spitzen in M und a seyen; so werden die Kräfte, mit welchen die Punkte M und a von diesen Körpern angezogen werden, sich verhalten, wie die geraden Linien ML, MK, al, ak (§. 439. n. 1.), und wenn man sie in andere zerfällt, welche mit AB und DE parallel wirken; so werden sich die ersteren verhalten wie MP und MR, ap und ap (§. 289.). Folglich verhält sich die Kraft, mit welcher der Punkt M von den zwey an KM, ML anliegenden pyramidenförmigen Körpern nach der Richtung MR angezogen wird, zu der Kraft, mit welcher der Punkt a von den zwey an al, ak anliegenden nach der Richtung ab angezogen wird, wie $MR \pm MP$ zu $2ap$, je nachdem KM und ML auf einerley, oder verschiedenen Seiten von MN liegen. Weil aber $lp = pk$, also $lap = kap$, $LMR = RMK$; so ist $MR \pm MP = 2ap$ (§. 348. n. 2.). Folglich sind die genannten Kräfte einander gleich. Da nun dieses auch von allen übrigen mit MR und ab beyderseits gleiche Winkel machenden pyramidenförmigen Körpern gilt; so ist die Kraft, mit welcher der Punkt M von der Summe aller in oder um die zwey Ausschnitte des äusseren Sphäroids beschriebenen pyramidenförmigen Körpern nach der Richtung MR angezogen wird, beständig der Kraft gleich, mit welcher der Punkt a von der Summe aller in oder um den correspondirenden Ausschnitt des inneren Sphäroids nach der Richtung ab angezogen wird. Mithin sind auch die Kräfte einander gleich, mit welchen die Punkte M und a nach den parallelen Richtungen MR, ab von den Ausschnitten des äusseren und inneren Sphäroids angezogen werden. Dieß gilt aber auch von allen beyderseits um gleiche Winkel gegen die durch M und die Axe des Sphäroids gelegte Ebene geneigten Ausschnitten; folglich ist die Schwere von M gegen das ganze Sphäroid nach der Richtung Mg (Fig. 140.) der Schwere von a gegen das innere Sphäroid $adbe$, mithin auch (Bew. von n. 3.

§. 349.) der Schwere von a gegen das ganze Sphäroid $ADBE$ gleich. Eben so wird gezeigt, daß die Schwere von M gegen das ganze Sphäroid nach der Richtung Ma der Schwere von q gegen ein durch den Punkt gehendes dem ersteren concentrisches ähnliches und ähnlich liegendes Sphäroid, mithin auch (§. 349.) der Schwere q gegen das ganze Sphäroid $ADBE$ gleich sey.

§. 351. Die Schwere eines innerhalb des Sphäroids (Fig. 140.) auf der geraden Linie MN liegenden Theilchens n gegen das Sphäroid $ADBE$ ist seiner Schwere gegen ein mit diesem concentrisches ähnliches und ähnlich liegendes Sphäroid gleich, welches cn zum Halbmesser hat (Bew. von n. 3. §. 349.). Folglich ist die Schwere von n gegen das größere Sphäroid nach einer auf DE senkrechten Richtung genommen der Schwere von a gegen das innere Sphäroid $adbe$ gleich, wie man in dem vorhergehenden §. gesehen hat. Mithin werden alle gleich weit von der Axe DE abstehende Theilchen gegen dieselbe hin mit gleicher Stärke angezogen. Eben so kann gezeigt werden, daß alle gleich weit von dem Aequator des Sphäroids abstehende Theilchen gegen denselben hin mit gleicher Stärke angezogen werden. Und weil die Schwere in a zur Schwere in A sich verhält wie $ca : cA$; so verhält sich auch die Schwere von M oder n gegen die Axe hin zu der Schwere von A wie $\left\{\begin{matrix} ca \\ Mq \end{matrix}\right\} : cA$. Eben so verhält sich die Schwere von M nach einer auf dem Aequator senkrechten Richtung zu der Schwere in D wie $Ma : cD$.

Man setze die Schwere an dem Pol D (Fig. 140.) $= p$, und unter dem Aequator $= a$; so verhält sich, wie so eben gezeigt worden ist,

$$\left\{\begin{matrix}\text{die Schwere von } M \\ \text{nach der Richtung } Ma\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Schw. unt.} \\ \text{dem Pol}\end{matrix}\right\} = Ma : cD,$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Schw. unt.} \\ \text{dem Aequat.}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Schwere von } M \\ \text{nach der Richt. } Mq\end{matrix}\right\} = cA : Mq,$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Schw. unt.} \\ \text{dem Pol}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Schw. unt. d.} \\ \text{Aequator}\end{matrix}\right\} = p : a;$$

$$\text{folglich } \left\{\begin{matrix}\text{Schw. von } M \\ \text{nach der Richt. } a\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Schw. von } M \\ \text{nach der Richt. } Mq\end{matrix}\right\} = p.cA.Ma : a.cD.Mq.$$

Nimmt man nun auf der ac die aG gegen den Mittelpunkt c hin so, daß

$Ma : aG = p.cA.Ma : a.cD.Mq$; so ist MG die Richtung, nach welcher der Punkt M von dem Sphäroid angezogen wird, und die Stärke dieser Anziehung verhält sich zu der Kraft, mit welcher der Punkt M nach der Richtung Ma angezogen wird, wie $MG : Ma$ (§. 252). Es verhält sich aber auch $ca : Ma = Mq : Ma$; folglich verhält sich $ca : aG = p.cA : a.cD$.

Für das Gleichgewicht wird aber erfordert, daß die Richtung MG der Schwere auf der Oberfläche des Sphäroids senkrecht, mithin GM eine Normallinie an dem Punkt M des durch ihn gehenden elliptischen Meridians sey; folglich muß sich verhalten

$$ca : aG = AB : \text{Param. von } AB \text{ (Kegelschn. II, 11. Zus. 9.)}$$

$$= \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 \text{ (Kegelschn. II. Erkl. 9., u. Elem. VI, 20.)},$$

also auch $p.cA : a.cD = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$

$$= \overline{Ac}^2 : \overline{cD}^2,$$

oder $p : a = Ac : cD$.

§. 352. Die in dem vorhergehenden §. bewiesenen Sätze werden auch alsdenn noch ihre Anwendung finden, wenn auf alle Theilchen des Sphäroids neben ihren gegenseitigen Attractionen Kräfte wirken, deren Richtungen entweder auf der Axe oder auf dem Aequator senkrecht, oder zugleich solche, welche auf die Axe, und solche, welche auf dem Aequator senkrecht sind, wenn nur diese Kräfte, so wie diejenigen, welche aus den gegenseitigen Attractionen der Theilchen des Sphäroids entstehen, den Abständen der Theilchen, auf welche sie wirken, von der Axe oder von dem Aequator proportional sind. Es seyen die aus der Anziehung des Sphäroids und aus den fremden Kräften entstehende Kräfte, mit welchen die Punkte D und A (Fig. 140.) nach den Richtungen Dc, Ac getrieben werden, m und n. Weil nun die Kraft, mit welcher das Theilchen M nach der Richtung Ma von dem Sphäroid angezogen wird, sich zu der Kraft in D verhält wie $Ma : Dc$ (§. 351.), und vermöge der Voraussetzung jede der fremden auf M mit DE parallel wirkenden Kräfte zu ihrer Wirkung auf ein in D befindliches Theilchen sich ebenfalls wie $Ma : Dc$ verhält; so verhält sich die ganze Kraft, mit welche das Theilchen M nach der Richtung Ma getrieben wird, zu der Kraft m, wie $Ma : Dc$. Eben so verhält sich die ganze Kraft, mit welcher M nach der Richtung Mq getrieben wird, zu der Kraft n wie $Mq : cA$. Wenn also MG die Richtung mittleren aus diesen zwey Kräften zusammengesetzten Kraft ist; so verhält sich $ca : aG = m.cA : n.cD$ (§. 351.)

Es sey $cA : cD = m : n$; so ist fürs erste $\overline{cA}^2 : \overline{cD}^2 = m.cA : n.cD = ca : aG$. Also ist, wie man in dem vorhergehenden §. gesehen hat, die Richtung, nach welcher ein auf der Oberfläche des Sphäroids befindliches Theilchen von dem Sphäroid angezogen wird, auf dieser Oberfläche senkrecht, und die Stärke dieser Anziehung verhält sich zu der Kraft nach der Richtung Ma wie $MG : Ma$. Aber die Kraft in M nach der Richtung Ma verhält sich zu der Kraft in D, wie $Ma : Dc$; folglich verhält sich die Kraft, mit welcher ein in M befindliches Theilchen von dem Sphäroid nach einer auf der Oberfläche des Sphäroids senkrechten Richtung angezogen wird zu der Kraft *m* unter dem Pol *D*, wie die auf den Aequator bezogene Normallinie *MG* zu der halben Umdrehungsaxe *cD*. Eben so wird ein innerhalb des Sphäroids auf dem Halbmesser *cM* befindliches Theilchen *m* nach einer *MG* parallelen Richtung *mg* angezogen mit einer Kraft, welche sich zu der auf *M* wirkenden verhält, wie $mg : MG$, weil die auf *M* und *m* nach der Richtung gerader auf der Axe oder auf dem Aequator senkrechter Linien wirkenden Kräfte sich verhalten, wie die Abstände dieser Theilchen von der Axe oder von dem Aequator.

Um zweytens zu zeigen, daß, wenn das Sphäroid flüßig ist, die Säulen des Fluidums einander an dem Mittelpunkt das Gleichgewicht halten; so seyen *GR* und *gr* auf dem Halbmesser *cM* senkrecht. Da die auf *M* und *m* nach den Richtungen *MG*, *mg* wirkenden Kräfte sich wie *MG* zu *mg* verhalten; so verhalten sich die auf eben diese Theilchen nach der Richtung des Halbmessers *Mc* wirkenden Kräfte wie $MR : mr$. Und weil $MR : mr = MG : mg = cM : cm$; so wächst die Schwere der in der Säule *cM* befindlichen Theilchen des Fluidums von dem Mittelpunkt *c* an ihrer Entfernung von diesem Punkt proportional, woraus folgt, daß der Druck der Säule *Mc* die Hälfte des Drucks ist, welchen eine ebenso hohe Säule ausüben würde, deren Theilchen durchaus eine der Schwere in *M* gleiche Schwere hätten, wie hernach gezeigt werden soll. Da nun die auf *M* nach der Richtung *MR* wirkende Kraft zu der Kraft nach *MG* sich verhält wie $MR : MG$, und die letztere zu der Kraft in *D* wie $MG : cD$; so verhält sich die Kraft *MR* zu der Kraft in *D* wie $MR : cD$, und der Druck der Säule *Mc* zu dem Druck der Säule $Dc = \frac{1}{2} cM \times MR : \frac{1}{2} \overline{cD}^2$. Es ist aber $cM \times MR = \overline{cD}^2$ (§. 348. n. 3.); folglich halten die Säulen *Mc*, *Dc* mit einander an dem Mittelpunkt *c* das Gleichgewicht.

Daß aber der Druck der Säule *cM* durch $\frac{1}{2} cM . MR$ gemessen werde, kann so gezeigt werden. Es seyen *ac*, *bd* (Fig. 141.) zwey auf gleichen Grundflächen stehende gleich hohe Säulen zweyer homogenen Flüßigkeiten, deren Theilchen in der Säule *bd* durch eine constante der geraden Linie *ae* proportionale Kraft gegen *b* hin getrieben werden. Auf die Theilchen der Säule *ca* aber wirke eine der Entfernung *cm* proportionale Kraft, welche an dem oberen Ende *a* dieser Säule der constanten auf die Säule *bd* wirkenden Kraft *ae* gleich werde. Sey *ae* auf *ca* in *a* senkrecht, *ef* parallel mit *ca*, und die Diagonale *ce* des Rechtecks *acfe* schneide die durch *m*, *m* mit *ae* oder *cb* gezogenen Parallelen *mo*, *m'o'* in *n* und *n'*. Die *ef* begegne diesen

Parallelen in p und p'. Da $\left\{\begin{matrix} cm : mn \\ cm' : m'n' \end{matrix}\right\} = ca : ae$; so messen die Linien mn, $m'n'$ die in m, m' wirkende Kraft, und der Druck der Säule mm' würde sich zum Druck der Säule oo' verhalten wie $mn : mp$, wenn auf alle Theilchen der Säule mm' eine der mn proportionale Kraft wirkte, hingegen wie $m'n' : mp$, wenn diese Kraft der $m'n'$ proportional wäre. Folglich ist das Verhältniß des Drucks von mm' zu dem Druck von oo' beständig größer, als das Verhältniß von $mn : mp$ oder des Rechtecks $m'n$ zu dem Rechteck $m'p$, aber kleiner als das Verhältniß des Rechtecks mn' zu dem Rechteck $m'p$, und ebenso verhält es sich mit den übrigen in gleichen Höhen befindlichen Theilen der zwey Säulen. Daher ist das Verhältniß des Drucks der ganzen Säule ca zu dem Druck der ganzen Säule db beständig größer als das Verhältniß der Summe in das Dreyeck ace beschriebenen Rechtecke zu dem Rechteck af, aber kleiner als das Verhältniß der Summe der um das Dreyeck ace beschriebenen Rechtecke zu eben diesem Rechteck af. Mithin ist das Verhältniß des Drucks von ac zu dem Druck von db dem Verhältniß des Dreyecks ace zu dem Rechteck db, oder dem Verhältniß von $\frac{1}{2} ca . ae : \left\{\begin{matrix} ca . ae \\ bd . ae \end{matrix}\right\}$ gleich.

Es verhält sich also auch der Druck der Säule cm zu dem Druck der Säule ca wie das Dreyeck cmn zu dem Dreyeck cae $= \overline{cm}^2 : \overline{ca}^2$, und der Druck der Säule am zu dem Druck der Säule ca wie $\overline{ca}^2 - \overline{cm}^2 : \overline{ca}^2$, oder es ist, wenn man den Druck der Säule $ca = \frac{1}{2} ca . ae$ setzt, der Druck der Säule am $= \frac{\overline{ca}^2 - \overline{cm}^2}{2ac} . ae$.

Drittens sey p (Fig. 140.) ein innerhalb des Sphäroids liegendes Theilchen, Pp eine von der Oberfläche an den Punkt p gehende Säule des Fluidums, und $adbe$ ein mit dem Sphäroid $ADBE$ concentrisches, ihm ähnliches und ähnlich liegendes Sphäroid; so wird der Druck der Säule Pp auf den Punkt p dem Druck der Säule Dd auf den Punkt d gleich seyn. Es liege Pp in der Ebene DBE, und seine Verlängerung schneide die Axe AB in h, die DE in f. Man ziehe PK, pk auf den Aequator AB, PL, pl auf die Axe DE, und ki, lo auf Pf senkrecht; so verhält sich

$$\left\{\begin{matrix}\text{die Attract. in } p \\ \text{nach der Richt. } pk\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Attract. in } D, \\ \text{oder } m\end{matrix}\right\} = pk \quad cD$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Attract. in } p \\ \text{nach der Richt. } pi\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Attr. in } p \\ \text{nach der Richt. } pk\end{matrix}\right\} = pi \quad pk,$$

also $$\left\{\begin{matrix}\text{Attr. in } p \\ \text{nach der Richt. } pi\end{matrix}\right\} \quad m = pi : cD;$$

folglich ist die Attraction in p nach der Richtung $pi = \frac{m.pl}{cD}$ $= m.\left(\frac{pk}{ph}\right)^2.\frac{ph}{cD}$, weil $ph : pk = pk : pi$. Und weil das Theilchen p nach der Richtung pl mit einer Kraft angezogen wird, welche sich zur Attraction in B oder zu n verhält, wie $pl : cB$; so ist der nach der Richtung pf wirkende Theil dieser Kraft $= \frac{n.po}{cB} = n.\left(\frac{pl}{pf}\right)^2.\frac{pf}{cB}$, weil $pf : pl = pl : po$. Folglich ist die ganze nach der Richtung pf auf p wirkende Kraft $= m.\left(\frac{pk}{ph}\right)^2.\frac{ph}{cD} + n.\left(\frac{pl}{pf}\right)^2.\frac{pf}{cB}$. Wegen der constanten Verhältnisse von $pk : ph$ und von $pl : pf$ ist der erste Theil dieser Kraft der Distanz ph, der zweyte der Distanz pf proportional, so daß jedes Theilchen p' der Säule Pp von zwey Kräften nach der Richtung $p'f$ getrieben wird, wovon die erste der Distanz $p'h$, die zweyte der Distanz $p'f$ proportional ist. Folglich wird, wie vorhin gezeigt wurde, der von der ersten Kraft herrührende Theil des Drucks der Säule Pp gemessen durch $\frac{m}{2cD}\left(\frac{pk}{ph}\right)^2 (\overline{Ph}^2 - \overline{ph}^2)$, und der von der zweyten Kraft herrührende Theil durch $\frac{n}{2cB}\left(\frac{pl}{pf}\right)^2 (\overline{Pf}^2 - \overline{pf}^2)$. Daher ist der ganze Druck der Säule Pp

$$= \frac{m}{2cD}\left(\frac{pk}{ph}\right)^2 (\overline{Ph}^2 - \overline{ph}^2) + \frac{n}{2cB}\left(\frac{pl}{pf}\right)^2 (\overline{Pf}^2 - \overline{pf}^2),$$

$$= \frac{m}{2cD} (\overline{PK}^2 - \overline{pk}^2) + \frac{n}{2cB} (\overline{PL}^2 - \overline{pl}^2), \text{ weil } ph : pk = Ph : PK,$$

und $pf : pl = Pf : PL$.

Es verhält sich aber vermöge Kegelschn. II, 7. und II, 5. Elem.

$$\overline{PL}^2 \quad \overline{cD}^2 - \overline{cL}^2 = \overline{cB}^2 \quad \overline{cD}^2$$

$$\overline{pl}^2 : \overline{cd}^2 - \overline{cl}^2 = \begin{cases} \overline{cb}^2 : \overline{cd}^2 \\ \overline{cB}^2 : \overline{cD}^2 \text{ (Constr.)}; \end{cases}$$

folglich $\overline{PL}^2 - \overline{pl}^2 : \overline{cD}^2 - \overline{cL}^2 - \overline{cd}^2 + \overline{cl}^2 = \overline{cB}^2 \quad \overline{cD}^2$.

Da nun $\left.\begin{matrix} cA \\ cB \end{matrix}\right\} : cD = m : n$ (Vorauss.); so ist

$$\frac{n}{2cB} (\overline{PL}^2 - \overline{pl}^2) = \frac{m}{2cD} (\overline{cD}^2 - \overline{cL}^2 - \overline{cd}^2 + \overline{cl}^2).$$

Aber $\frac{m}{2cD} (\overline{PK}^2 - \overline{pk}^2) = \frac{m}{2cD} (\overline{cL}^2 - \overline{cl}^2)$, weil $\left\{\begin{matrix} PK = cL \\ pk = cl \end{matrix}\right\}$;

folglich ist, wenn man diese gleichen Größen zu den vorhergehenden addirt, der ganze Druck der Säule $Pp = \frac{m}{2cD} (\overline{cD}^2 - \overline{cd}^2)$

= dem Druck der Säule Vd. Auf ähnliche Art kann gezeigt werden, daß andere von der Oberfläche des Sphäroids an das Theilchen p gehende Säulen gleich stark darauf drücken, und mit einander das Gleichgewicht halten.

§. 353. Wenn also die Theilchen eines gleichförmig dichten flüßigen elliptischen Sphäroids einander im umgekehrten Verhältniß der Quadrate ihrer Entfernungen anziehen, und noch andere Kräfte auf die Theilchen des Fluidums entweder senkrecht auf die Axe des Sphäroids wirken, welche den Distanzen von der Axe proportional sich verändern, oder senkrecht auf die Ebene des Aequators wirken, welche den Abständen von der Ebene des Aequators proportional sind, oder auch, wenn Kräfte auf die Theilchen des Sphäroids wirken, welche in solche zerlegt werden können, und die ganze an dem Pol D (Fig. 140.) wirkende Kraft zu der an dem Umfang des Aequators in A oder B wirkenden sich verhält, wie der Halbmesser cA des Aequators zu der halben Axe cD des Sphäroids; so ist das Fluidum im Gleichgewicht. Jede der Oberfläche des Sphäroids concentrische ähnliche und ähnlich liegende Oberfläche $adbc$ wird in allen ihren Punkten von dem über ihr befindlichen Theil des Fluidums gleich stark gedrückt, und die Kräfte, mit welchen gleiche Theilchen an diesen Oberflächen gegen das Sphäroid gravitiren, verhalten sich wie die zwischen den Oberflächen und der Ebene des Aequators liegende Stücke MG, mg der an die Oberflächen gezogenen Normallinien.

Hieraus folgt, daß, wenn ein flüßiges Sphäroid von gleichförmiger Dichtigkeit sich um seine Axe DE dreht, und die Attraction p an dem Pol D sich zu dem Ueberschuß der Attraction a unter dem Aequator über die von der Umdrehungsbewegung des Sphäroids herrührende Schwungkraft v unter dem Aequator verhält, wie der Halbmesser cA des Aequators zu der halben Axe cD, das Fluidum im Gleichgewicht ist. Denn in diesem Fall wird die Attraction nach einer auf dem Aequator senkrechten Richtung durch die Schwungkraft, welche in der Ebene der Parallelkreise des Aequators wirkt, nicht geändert, und die Kräfte, mit welchen die Schwungkraft die Theilchen des Fluidums von der Axe des Sphäroids zu entfernen strebt, sind den Halbmessern der Kreise, welche sie beschreiben (§. 273. n. 2.), also ihren Abständen von der Axe proportional. Folglich ist das Fluidum vermöge §. 352. im Gleichgewicht, wenn sich der Halbmesser cA des Aequators zu der halben Axe cD des Sphäroids verhält wie $p : a - v$. Das elliptische Sphäroid erfüllt also die Bedingungen des Gleichgewichts. Es fragt sich aber, ob nicht durch die Umdrehung einer anderen Figur, als einer Ellipse, ein Körper beschrieben werden könne, bey welchem das Gleichgewicht möglich ist. Diese Frage haben **Le Gendre** *) und **La Place** **) beantwortet, indem sie zeigten, daß eine gleichförmig dichte flüßige und sich drehende Masse nur alsdenn im Gleichgewicht seyn könne, wenn sie die Figur eines elliptischen Sphäroids hat. Letzterer zeigte, daß der Körper eben diese Figur annehmen müsse, wenn seine Schichten verschiedene Dichtigkeiten haben ***). Demnach müßte die Erde, oder ein anderer Planet, wenn sie anfänglich flüßig und gleichförmig dicht gewesen wäre, vermöge ihrer Umdrehungsbewegung die Gestalt eines unter den Polen zusammengedrükten elliptischen Sphäroids angenommen haben, wie **Newton** vorausgesetzt hat. Und weil die Schweren an der Oberfläche dieses Sphäroids den zwischen dem Aequator und der Oberfläche des Sphäroids liegenden Stücken der Normallinien proportional sind; so wird sich, wenn man die Excentricität eines elliptischen Meridians $= e$ setzt, die Schwere unter der Breite l zur Schwere unter der Breite l' verhalten wie $\sqrt{1-e^2 \operatorname{Sin.}\overline{l'}^2}$: $\sqrt{1-e^2 \operatorname{Sin.}\overline{l}^2}$ (§. 137. n. 5.), mithin die Schwere unter der Breite l zur Schwere unter dem Aequator $= 1 : \sqrt{1-e^2 \operatorname{Sin}\overline{l}^2}$.

Die Schwere unter der Breite l wird also seyn $= \dfrac{\text{Schw. unter d. Aequat.}}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{Sin.}\overline{l}^2}}$

$$= \text{Schw. unt. d. Aequat.}\ (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin.}\overline{l}^2 + \tfrac{1.3.}{2.4.} e^4 \operatorname{Sin.}\overline{l}^4 + \&c.)$$

Daher würde, weil e ein sehr kleiner Bruch ist, die Schwere von dem Aequator an gegen die Pole hin sehr nahe dem Quadrat des Sinus der Breite proportional wachsen, wie man durch die Beobachtungen gefunden hat (§. 269. u. 270.).

Ferner verhalten sich die Würfel der auf einerley Axe eines elliptischen Meridians der Erde sich beziehenden Normallinien desselben, wie die denselben Punkten entsprechenden Krümmungshalbmesser der Ellipse (Kegelschn. II, 36. Zus. 8.), oder wie die Längen der correspondirenden Meridiangrade; folglich würde die Schwere an verschiedenen Orten der Erde den Kubikwurzeln aus den Längen der ihnen entsprechenden Meridiangrade proportional seyn.

§. 354. Zu der Bestimmung des Axenverhältnisses des Sphäroids wird jetzt noch die Größe der Attractionen unter dem Pol und unter dem Aequator erfordert. Es sey $ADBE$ (Fig. 142.) ein gleichförmig dichtes durch die Umdrehung der halben Ellipse DAE um die Axe DE erzeugtes Sphäroid, und eine aus dem

*) Mém. de l'Acad. de Paris. 1782.
**) Mém. 1784.
***) Méc. cél. T. II. L. III. Chap. IV. n. 30.

Pol D an die Ellipse gezogene gerade Linie DM schneide einen aus D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser Dc beschriebenen Kreis in N. Man ziehe MQ, NR auf Dc senkrecht, und nehme auf der RN die $RK = DQ$. Wenn DKG die krumme Linie ist, welche durch die Endpunkte aller nach diesem Gesetz bestimmten Ordinaten RK durchgeht; so ist die Gravitation gegen das ganze Sphäroid an dem Pol $D = \frac{2\pi . \text{Fläch.}\, DKGc}{Dc}$ (§. 289. n. 5.). Die Gravitation in D gegen eine um DE als Durchmesser beschriebene Kugel ist aber $= \frac{4}{3}\pi . \frac{\overline{Dc}^3}{\overline{Ds}^2}$ (§. 290.); folglich verhält sich die Gravitation des Theilchens D gegen das Sphäroid zu seiner Gravitation gegen diese Kugel wie die Fläche $DKGc$ zu $\frac{2}{3}\overline{Dc}^2$.

Die Gravitation in A unter dem Aequator des Sphäroids ergiebt sich aus der Gravitation unter dem Pol auf folgende Art. Man ziehe durch A die Parallele Ah mit der Axe DE und lege durch diese zwey Ebenen, welche auf der Ebene des Aequators senkrecht seyn werden. Es seyen $ADBE$, $Adbe$ die zwey elliptischen hiedurch entstandenen Schnitte des Sphäroids, AM schneide die Ellipse $ADEB$ in m, und einen aus A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $Ai = Dc$ beschriebenen Kreis in n. Man ziehe durch m die mq auf AB, und durch n die rk auf Ah senkrecht, welche der qm in k begegne, und hkB sey die krumme Linie, welche durch die Endpunkte aller nach diesem Gesetz bestimmten Ordinaten rk durchgeht; so wird die Gravitation von A gegen den keilförmigen zwischen den zwey Ebenen $ADBE$ und $Adbe$ liegenden Ausschnitt des Sphäroids gemessen durch $\frac{hkBA}{Ai}$ (§. 289. n. 2.) Man vollende das Parallelogramm $DcGJ$, und verlängere die Ordinate RK, bis sie der GJ in x begegnet. Wenn nun die geraden Linien DM, Am sich so um die Punkte D und A bewegen, daß beständig der Winkel EDM dem Winkel hAm gleich ist; so sind wegen der gleichen Seiten DN, An die Dreyecke DRN und Arn beständig einander gleich mithin $DR = Ar$, und $\left\{ \begin{matrix} cR \\ Gx \end{matrix} \right\} = hr$. Es verhält sich aber (Kegelschn. II, 7.)

$$\overline{qm}^2 \quad Aq \times qB = \overline{cD}^2 \quad \overline{cA}^2$$
$$= DQ \times QE : \overline{QM}^2$$

und wegen der ähnlichen Dreyecke Aqm, DQM

$$Aq : qm = QM : DQ; \text{ folglich}$$

$$qm : qB = QE \quad QM,$$

also auch $Aq \quad qB = QE \quad DQ$,

und $Aq \quad QE = AB : DE$.

Nun aber wird vermöge der Construction die dem Punkt c ent-

entsprechende Ordinata cG der krummen Linie DKG der Axe DE gleich; folglich ist QE oder $DE - DQ = cG - DQ = xR - RK$ (weil $RK = DQ$) $= xK$, und

$\left.\begin{matrix} Aq \\ rk \end{matrix}\right\} : xK = AB : DE.$

Da nun die den gleichen Abscissen hr, Gx entsprechenden Ordinaten rk, xK der zwey krummen Linien hkB, GKD in dem gegebenen Verhältniß von $AB : DE$ sind; so verhält sich auch die Fläche $AhkB$ zu der Fläche $JGKD$ wie $AB : DE = cA : cD$. Wäre $ADBE$ ein um den Durchmesser AB beschriebener Kreis, oder $Dc = cA$; so wäre die Fläche $DKGC = \frac{2}{3}\overline{cA}^2$ (§. 290. wenn man in Fig. 118. C auf B fallen läßt.), und die Fläche $JGKD = Dc \times cG - DKGC = 2\overline{cA}^2 - \frac{2}{3}\overline{cA}^2 = \frac{4}{3}\overline{cA}^2$. Folglich verhält sich vermöge §. 289. n. 2. die Gravitation in A gegen den zwischen den Ebenen $ADBE$ und Adb liegenden sphäroidischen Ausschnitt zu der Gravitation in A gegen den zwischen denselben Ebenen liegenden Ausschnitt der um AB als Durchmesser beschriebenen Kugel, wie $\frac{hkBA}{Ai} : \frac{4}{3}Ac$, das ist wie

$\frac{Dc \times cG - DKGc}{Dc} \times \frac{Ac}{cD} : \frac{4}{3}Ac$, oder wie $2\overline{Dc}^2 - DKGc$ zu $\frac{4}{3}\overline{cD}^2$. Die Gravitation in A gegen das ganze Sphäroid ist zu der Gravitation in A gegen die um den Durchmesser AB beschriebene Kugel in demselben Verhältniß. Denn jeder auf dem Aequator senkrechte Schritt des Sphäroids ist eine der Ellipse $ADBE$ ähnliche Ellipse (§. 348. n. 4.), und der correspondirende Schnitt der um den Durchmesser des Aequators beschriebenen Kugel ist ein Kreis, dessen Durchmesser diejenige Axe des elliptischen Schnitts ist, welche der DE ähnlich liegt, und daher ist das Verhältniß der Gravitation in A gegen den elliptischen keilförmigen Körper zu der Gravitation in A gegen den correspondirenden keilförmigen Ausschnitt der Kugel beständig dem Verhältniß von $2\overline{Dc}^2 - DKGc : \frac{4}{3}\overline{cD}^2$ gleich. Folglich verhält sich die Gravitation in A gegen das ganze Sphäroid zu der Gravitation in A gegen die um den Durchmesser ihres Aequators beschriebenen Kugel wie $2\overline{cD}^2$ - Fläche $DKGc : \frac{4}{3}\overline{cD}^2$. Aber die Gravitation in A gegen diese Kugel verhält sich zu der Gravitation in D gegen eine um die Axe DE als Durchmesser beschriebene Kugel wie $Ac : cD$ (§. 290.); folglich verhält sich die Gravitation in A gegen das Sphäroid zu der Gravitation in D gegen eine um DE als Durchmesser beschriebene Kugel $= Ac(2\overline{cD}^2 - DKGc) : \frac{4}{3}cD^3$. Da nun die Gravitation in D gegen diese Kugel sich zu der Gravitation in D gegen das Sphäroid verhält $= \frac{2}{3}\overline{cD}^2$: Fläche $DKGc$, wie man zu Anfang dieses §. gefunden hat; so verhält sich die Gravitation unter dem Aequator in A gegen das Sphäroid zur Gravitation gegen dasselbige unter dem Pol D

$$= Ac\,(2\overline{cD}^2 - DKGc) : 2DKGc \times cD$$

oder $$= 2\overline{cD}^2 - DKGc : 2DKGc.\frac{cD}{cA}.$$

§. 355. Der Flächenraum $DKGc$ aber kann so gefunden werden. Wegen der ähnlichen Dreyecke DQM und DRN verhält sich

$$\overline{DQ}^2 : \overline{QM}^2 = \overline{DR}^2 : \overline{RN}^2$$

Aber $\overline{QM}^2 : DQ.QE = \overline{Ac}^2 : \overline{cD}^2$ (Kegelschn. II, 7.);

folglich $DQ : QE = \overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 : \overline{cD}^2.\overline{RN}^2$

$$\left.\begin{matrix} DQ \\ RK \end{matrix}\right\} : DE = \overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 : \overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 + \overline{cD}^2.\overline{RN}^2.$$

Sey der Durchmesser AB des Aequators die größere Axe der Ellipse $ADBE$ und F einer ihrer Brennpunkte. Man ziehe DF; so ist diese $= Ac$ (Kegelschn. II, 1. Zus. 8.), und

$$\overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 + \overline{cD}^2.\overline{RN}^2 = \overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 + \overline{cD}^2\,(\overline{ND}^2 - \overline{DR}^2)$$
$$= \overline{cD}^4 + \overline{cF}^2.\overline{DR}^2.$$

Also ist $RK : DE = \overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 : \overline{cD}^4 + \overline{cF}^2.\overline{DR}^2.$

Man nehme auf der cF die cf so, daß $cD : cF = DR : cf$. Alsdenn ist $cF.DR = cD.cf$,

und 1.) $$RK : DE = \overline{Ac}^2.\overline{DR}^2 : \left\{\begin{matrix} \overline{cD}^2\,(\overline{cD}^2 + \overline{cf}^2) \\ \overline{cD}^2.\overline{Df}^2 \end{matrix}\right.$$

$$= \overline{Ac}^2.\overline{cf}^2 : \overline{cF}^2.\overline{Df}^2,$$ weil $DR : cD = cf : cF$ (Constr.). Eben so ist unter der Voraussetzung derselben Construction für jede andere Ordinate $R'K'$ (Fig. 143.) der krummen Linie DKG

2.) $$R'K' : DE = \overline{Ac}^2.\overline{cf'}^2 : \overline{cF}^2.\overline{Df'}^2.$$

Der Kreis cNH schneide die Df, Df', DF in den Punkten s, s, S. Man ziehe an den Punkt s des Kreises die Tangente st, welche der Df' in t begegne, ferner die fr', sp auf Df', und die fr auf die Verlängerung von Df senkrecht; so verhält sich

$$ff' : f'r = Df : Do$$
$$f'r : st = Dr : Ds;$$

also $$ff' : st = Dr.Df : \overline{Ds}^2$$

$$ff' : ff' - rt = Dr.Df : Dr.Df - \overline{Ds}^2$$
$$= \overline{Df}^2 + Df.fr : \left\{\begin{matrix} \overline{Df}^2 + Df.fr - \overline{Do}^2 \\ \overline{cf}^2 + Df.fr. \end{matrix}\right.$$

Daher ist $ff' : ff' - st < \overline{Df}^2 : \overline{cf}^2$, und, weil $st > ss'$, um so mehr

3.) $ff' : ff' - ss' < \overline{Df}^2 : \overline{cf}^2$.

Und weil $ff' : fr' = Df' : Dc$

$fr' \quad sp = Df : \left\{ \begin{matrix} Ds \\ Dc \end{matrix} \right.$;

so ist $ff' \quad sp = Df'.Df : \overline{Dc}^2$

$= \overline{Df'}^2 - Df'.gr : \overline{Dc}^2$, wenn man $Dg = Df'$ macht.

Folglich ist $ff' : ff' - sp = \overline{Df'}^2 - Df'.gr : \overline{cf'}^2 - Df'.gr$

$> \overline{Df'}^2 \quad \overline{cf'}^2$, und weil $sp < ss'$,

4.) um so mehr $ff' : ff' - ss' > \overline{Df'}^2 \quad \overline{cf'}^2$

Da nun so wohl $\left. \begin{matrix} DR : cf \\ \text{als } DR' : cf' \end{matrix} \right\} = Dc : cF$ (Constr.)

so ist $RR' : ff' = Dc : cF$.

Aber $ff' : ff' - ss' < \overline{Df}^2 \quad \overline{cf}^2$ (n. 3.)

und $RK : DE = \overline{Ac}^2.\overline{cf}^2 : \overline{cF}^2.\overline{Df}^2$ (n. 1.)

folglich 5.) $RK.RR' : DE\ (ff' - ss') < Dc.\overline{Ac}^2 : \overline{cF}^3$. Eben so findet sich mittelst n. 2. u. 4.

6.) $R'K'.RR' : DE\ (ff' - ss') > Dc.\overline{Ac}^2 \quad \overline{cF}^3$.

Nun ist $DE.ff' = 4.\frac{1}{2}Dc.ff' = 4.$ Dreyeck Dff', und $DE\ ss' = 4.\frac{1}{2}.Ds.ss' \quad 4.$ Kreisausschnitt Dss'; folglich $DE\ (ff' - ss') = 4.$ Fläche $fss'f'$, und $RK.RR'$ ist der Inhalt eines in die Figur $DKGc$ beschriebenen Rechtecks, so wie $R'K'.RR'$ der Inhalt des correspondirenden um die Figur beschriebenen. Also ist das Verhältniß eines jeden in die Figur beschriebenen Rechtecks zu dem Vierfachen des correspondirenden Raums $fss'f'$ beständig kleiner, das Verhältniß eines jeden um die Figur beschriebenen Rechtecks zu dem Vierfachen seines corresp. Raum $fss'f'$ beständig größer, als das gegebene Verhältniß von $Dc.\overline{Ac}^2 : \overline{cF}^3$, oder von $B : C$ zur Abkürzung. Man setze die Summe aller in die Figur $DKGc$ beschriebenen Rechtecke $= S$, die Summe der darum beschriebenen $= S'$, und den durch die geraden Linien cF, FS und den Kreisbogen Sc begränzten Raum $= A$; so ist auch $S : 4.A < B : C$, und $S' : 4A > B : C$. Da nun durch die Verminderung von RR' der Ueberschuß von S' über S kleiner gemacht werden kann, als jeder gegebene Raum (§. 246.); so verhält sich die Fläche $DKGc$ zu dem Vierfachen der Fläche $SFcS$ wie $Dc.\overline{Ac}^2 : \overline{cF}^3$. Daher

ist 7.) die Fläche $DKGc = 4.\dfrac{Dc.\overline{Ac}^2}{\overline{cF}^3}.\frac{1}{2}\ Dc\ (cF - cS)$

$$= 2\ \frac{\overline{Dc}^2.\overline{Ac}^2}{\overline{cF}^3}\ (cF - cS)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die am Ende des 354sten §.

gefundenen Proportion; so wird das Verhältniß der Gravitation gegen das Sphäroid unter dem Aequator zu der Gravitation an dem Pol

$$= \overline{Ac}^2 . cS - \overline{cD}^2 . cF : 2cD . Ac (cF - cS)$$

$$= \left(\frac{Ac}{cD}\right)^2 \cdot \frac{cS}{cD} - \frac{cF}{cD} : \frac{2Ac}{cD}\left(\frac{cF}{cD} - \frac{cS}{cD}\right).$$

Man setze $\frac{cF}{cD} = w$; so ist $\frac{cA}{cD} = \sqrt{1+w^2}$, und $\frac{cS}{cD}$ ist die Länge eines mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens, dessen Tangente für eben diesen Halbmesser $= w$ ist. Also verhält sich

8.) $\left(\begin{matrix}\text{Die Gravitat.}\\ \text{unt. d. Aequat.}\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}\text{Gravit. an}\\ \text{dem Pol}\end{matrix}\right) = (1 + w^2)\, Arc.\, \mathrm{Tg}.\, w - w : 2(w - Arc.\, \mathrm{Tg}.\, w) \sqrt{1+w^2}.$

Man nehme die Gravitation an der Oberfläche einer mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugel von der Dichtigkeit 1, das ist, die Geschwindigkeit, welche diese Kraft in der Zeiteinheit erzeugen würde, zur Einheit des Maaßes der Attractionskräfte an; so ist, wenn man den Inhalt einer mit dem Halbmesser Dc beschriebenen Kugel $= M'$, und ihre Dichtigkeit der Dichtigkeit d des Sphäroids gleich setzt, die Gravitation an der Oberfläche dieser Kugel $= \frac{M'd}{\overline{cD}^2}$ (§. 290.). Der Inhalt M des Sphäroids verhält sich aber zu dem Inhalt einer um die Umdrehungsaxe DE als Durchmesser beschriebenen Kugel, wie das Quadrat des Halbmessers seines Aequators zu dem Quadrat seiner halben Axe; folglich ist die Gravitation an dem Pol D der um DE als Durchmesser beschriebenen Kugel $= \frac{Md}{\overline{cA}^2}$. Da sich nun diese Gravitation zu der Gravitation in D gegen das Sphäroid verhält, wie $2\overline{cD}^2 : 3DKGc$ (§. 354.) $= \overline{cF}^3 : 3\overline{Ac}^2 (cF - cS)$ §. 355. n. 7.); so ist

9.) $\left.\begin{matrix}\text{Die Gravitation } p\\ \text{gegen das Sphäroid}\\ \text{an dem Pol } D\end{matrix}\right\} = \frac{3Md(cF - cS)}{\overline{cF}^3},$

$$= \frac{3Md}{\overline{cD}^2} \cdot \frac{w - Arc.\,\mathrm{Tg}.\,w}{w^3},$$

und vermöge der Proportionen n. 8.

10.) $\left.\begin{matrix}\text{Die Gravit. } \pi \text{ gegen}\\ \text{das Sphäroid unter}\\ \text{dem Aequator}\end{matrix}\right\} = \frac{3Md}{2\overline{D}^2} \cdot \frac{(1+w^2)\, Arc.\,\mathrm{Tg}.\,w - w}{2w^3\sqrt{1+w^2}}.$

Sey die Umdrehungszeit des Sphäroids um seine Axe $= t$;

so ist die Schwungkraft k in der Distanz 1 von der Umdrehungsaxe $= \frac{4\pi^2}{t^2}$ (§. 273. n. 2.), und unter dem Aequator des Sphäroids $= \frac{4Ac.\pi^2}{t^2} = v$. Endlich muß, wenn das Fluidum im Gleichgewicht seyn soll, sich verhalten $a - v : p = cD : Ac$; folglich muß seyn

$Ac.a - Ac.v = cD.p$,

oder $Ac.cD.a - Ac.cD.v = \overline{cD}^2.p$,

$\overline{cD}^2.a\sqrt{1+w^2} = \overline{cD}^2.p + \frac{4Ac.\pi^2}{t^2}\overline{cD}^2\sqrt{1+w^2}$, d. i wenn man statt a und p ihre Werthe aus n. 10. u. 9. setzt,

$$\frac{3Md}{2w^3}((1+w^2)\,Arc.\,\mathrm{Tg}.w - w) = \frac{3Md}{w^3}(w - Arc.\,\mathrm{Tg}.w) +$$
$$\frac{4Ac.\pi^2}{t^2}\overline{cD}^2\sqrt{1+w^2}$$

$$3(1+w^2)\,Arc.\,\mathrm{Tg}.w - 3w = 6w - 6\,Arc.\,\mathrm{Tg}.w + \frac{8w\,Ac.\pi^2.\overline{cD}^2\sqrt{1+w^2}}{t^2 Md},$$

woraus man, wenn 11.) $\frac{4Ac.\pi^2.\overline{cD}^2\sqrt{1+w^2}}{t^2 Md} = q$ gesetzt wird, erhält 2.) $Arc.\,\mathrm{Tg}.\,w = \frac{9w + 2qw^3}{9 + 3w^2}$.

Setzt man in n. 11. statt des Inhalts M des Sphäroids seinen Werth $\frac{4}{3}\pi.\overline{Ac}^2.cD$; so wird

13.) $q = \frac{3\pi}{t^2.d}$, mithin ist b für ein Späroid von einer gegebenen Dichtigkeit umgekehrt dem Quadrat seiner Umdrehungszeit proportional, und daher constant, wenn die Dichtigkeit und die Umdrehungszeit gegeben sind.

Wenn AB (Fig. 140.) die große, DE die kleine Axe einer Ellipse, MG eine Normallinie an dem Punkt M, die Breite $AGM = L$, und die Excentricität $= e$ ist; so ist

$$\overline{GM}^2 = \frac{(\frac{1}{2}\,\text{Param.})^2}{1 - e^2\,\overline{\mathrm{Sin}.L}^2} \text{ (§. 137. n. 5.).}$$

Aber $1 - e^2\,\overline{\mathrm{Sin}.L}^2 = 1 - e^2 + e^2\,\mathrm{Cos}.L^2 = \left(\frac{cD}{cA}\right)^2(1 + w^2\,\overline{\mathrm{Cos}.L}^2)$; folglich ist

$$\overline{GM}^2 = \frac{\overline{cD}^2}{1 + w^2\,\overline{\mathrm{Cos}.L}^2}, \text{ und es verhält sich}$$

$$\sqrt{1 + w^2\,\overline{\mathrm{Cos}.L}^2} \quad 1 = cD : GM$$

$= \text{Schwere in D} : \text{Schwere in M}$ (§. 352. n. 1.),

$= \frac{3Md}{\overline{cD}^2} \cdot \frac{w - Arc.\,Tg.\,w}{w^3} : \text{Schwere in M}$ (n. 9.).

Also ist, wenn man die Schwere in M $= 2g =$ der doppelten Fallhöhe in der ersten Sekunde unter der Breite L setzt,

14.) $2g = \frac{Md}{\overline{cD}^2} \cdot \frac{3(w - Arc.\,Tg.\,w)}{w^3\sqrt{1 + w^2 \overline{Cos.\,L}^2}}$.

Hieraus folgt $\frac{\overline{cD}^2}{Md} = \frac{3(w - Arc.\,Tg.\,w)}{2gw^3\sqrt{1 + w^2 \overline{Cos.\,L}^2}}$, und wenn man diesen Ausdruck in n. 11. substituirt,

15.) $q = \frac{2Ac.\pi^2}{g.t^2} \cdot \frac{3(w - Arc.\,Tg.\,w)\sqrt{1 + w^2}}{w^3\sqrt{1 + w^2 \overline{Cos.\,L}^2}}$.

Wenn der Halbmesser Ac des Aequators, die freye Fallhöhe g in der ersten Sekunde unter einer gegebenen Breite L, und die Umdrehungszeit t gegeben sind; so hat man zu der Bestimmung der zwey unbekannten Größen q und w die zwey Gleichungen n. 12. und 15., mittelst welcher w, und das Verhältniß der Axen $\sqrt{1 + w^2} : 1$ gefunden werden können.

Sey G die Länge eines unter der Breite L gemeßenen Meridiangrades; so ist

$Ac = \frac{180.\,G}{\pi}\left(\frac{Ac}{cD}\right)^2 (1 - e^2 \overline{Sin.\,L}^2)^{\frac{3}{2}}$ (§. 137. n. 9.)

$= \frac{180.\,G}{\pi} \cdot \frac{cD}{cA} (1 + w^2 \overline{Cos.\,L}^2)^{\frac{3}{2}}$. Man setze diesen Werth von Ac in n. 15.; so wird, weil

$\frac{cD}{cA} = \frac{1}{\sqrt{1 + w^2}}$ ist,

16.) $q = \frac{360.\,\pi.\,G}{g.\,t^2} \cdot \frac{3(w - Arc.\,Tg.\,w)(1 + w^2 \overline{Cos.\,L}^2)}{w^3}$, oder

auch, wenn die Länge des einfachen Sekundenpendels unter der Breite L mit l bezeichnet wird, vermöge §. 259. n. 2.

17.) $q = \frac{720.\,G}{\pi.\,l.\,t^2} \cdot \frac{3(w - Arc.\,Tg.\,w)(1 + w^2 \overline{Cos.\,L}^2)}{w^3}$.

Aus dieser Gleichung verbunden mit der Gleichung n. 11. erhält man mittelst der Länge l des einfachen Sekundenpendels und der Größe G eines Meridiangrades, beyde unter der Breite L beobachtet, die Werthe von q und w.

Da $Arc.\,Tg.\,w = w - \frac{1}{3}w^3 + \frac{1}{5}w^5 - \frac{1}{7}w^7 + \&c.$ so ist, wenn man diese Reihe in die Gleichung n. 11. setzt, und beyderseits mit $9+3w^2$ multiplicirt,

$9w+\frac{4}{5}w^5-\frac{24}{35}w^7=9w+2qw^3$, also wenn man beyderseits $9w$ abzieht, und mit $2w^3$ dividirt,

$\frac{2}{5}w^2-\frac{12}{35}w^4+\&c.=q$, mithin

$w^2=\frac{5}{2}q+\frac{75}{14}q^2+\&c.$

Es sey $L=45°$; so ist $\text{Cos.}\,\overline{L}^2=\frac{1}{2}$, und, wenn man in n. 17. obige für Arc. Tg. w gegebene Reihe setzt, und die gehörigen Reductionen macht,

$$q=\frac{720.G}{\pi.l.t^2}(1-\frac{1}{10}w^2+\frac{9}{70}w^4\ \&c.),\text{ oder weil } w^2 \text{ nahe }=\frac{5}{2}q \text{ ist,}$$

$$q=\frac{720.G}{\pi.l.t^2}(1-\frac{1}{4}q+\&c.)$$

$$=\frac{720.G}{\pi.l.t^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{720.G}{\pi.l.t^2}\right)^2+\&c.$$

Setzt man die freye Fallhöhe unter dem Aequator $=g'$, die Pendellänge daselbst $=l'$, und den Breitengrad $=G'$; so ist vermöge n. 15. u. 17.

$$18.)\ q=\frac{2Ac.\pi^2}{g'.t^2}(1-\frac{3}{5}w^2\ \&c.)$$

$$=\frac{720.G'}{\pi.l'.t^2}(1\mp\frac{2}{5}w^2-\&c.),$$

und daher q sehr nahe gleich dem Exponenten des Verhältnisses der Schwungkraft unter dem Aequator zu der daselbst beobachteten Schwere $2g'$.

Vermöge der Beobachtungen ist für eine Breite von $45°$

$G=56007{,}6$ Tois. (§. 143.),

$l=0{,}5097219$ Tois. (§. 269.), und $t=23$ St. $56'\ 4''{,}1$ (§. 44.). Hieraus findet sich

$q=0{,}00344872$; $w^2=0{,}00868552$; $\sqrt{1+w^2}=1{,}00433337$ und das Verhältniß der Erdaxe zu dem Durchmesser des Aequators $=230{,}767:231{,}767=229:229{,}99$ sehr nahe mit Newton übereinstimmend (§. 347.).

Wenn q klein ist; so ist sehr nahe $w^2=\frac{5}{2}q$, und

$$\frac{\sqrt{1+w^2}-1}{\sqrt{1+w^2}}=1-\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\text{ nahe }=\frac{1}{2}w^2.$$

Also ist das Verhältniß des Ueberschußes des Halbmessers des Aequators über die halbe Axe zu dem Halbmesser des Aequators nahe $=\frac{1}{2}w^2:1$, oder $=\frac{5}{4}q:1$, d. i. die Abplattung des Sphäroids ist sehr nahe $=\frac{5}{4}q=\frac{15.\pi}{4t.^2d}$ (n. 13.). Man bezeichne die Abplattung eines gleichförmig dichten Sphäroids, dessen

Umdrehungszeit t und Dichtigkeit d ist, mit α; so ist wenn man eben diese auf ein anderes gleichförmig dichtes Sphäroid sich beziehende Größen mit t', d' und α' bezeichnet,

$\alpha' = \frac{15.\pi}{4t'^2.d'}$, und daher

19.) $\alpha : \alpha' = t'^2 d' : t^2 d$.

Hienach wäre die Abplattung des Jupiters $=$
$\frac{1}{230}\left(\frac{86164'',1}{35750'',1}\right)^2 . \frac{1}{0,231297}$ (§. 44. 109. 304.)

$= \frac{1}{9,16}$ oder $\frac{1}{9\frac{1}{6}}$ *).

Die Beobachtungen geben $\frac{1}{14}$ (§. 109.).

Ebenso findet man die Abplattung des Saturns unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Dichtigkeit $= \frac{1}{4,57}$. Dieser Planet hat aber vermöge der Beobachtungen eine von dem elliptischen Sphäroid abweichende Gestalt (§. 118.).

Die Abplattung der Sonne findet sich mittelst der Umdrehungszeit 25 T. 10 St. (§. 58.), und ihrer §. 304. angegebenen Dichtigkeit $= \frac{1}{37939}$, so daß die scheinbare Größe der halben Axe der Sonne nur um 0'',026 kleiner wäre, als die scheinbare Größe des Halbmessers ihres Aequators, welches für die Beobachtungen unmerklich ist.

§. 356. Wenn die Gleichung n. 12. des vorhergehenden §. mehrere mögliche Wurzeln hätte; so würden derselben Umdrehungszeit mehrere Sphäroide entsprechen können, bey welchen das Gleichgewicht möglich wäre. Man setze

$y = \frac{9w + 2qw^3}{9 + 3w^2} - Arc.\, Tg.\, w$; so muß, wenn das Gleichgewicht statt finden soll, vermöge der Gleichung n. 12. §. 356. $y = 0$ seyn. Man denke sich eine krumme Linie, deren Absciſſen w, und Ordinaten y seyen; so wird, weil $y = 0$ für $w = 0$, die krumme Linie die Axe der Absciſſen schneiden, wenn $w = 0$. Von diesem Punkt an werden die Ordinaten anfänglich positiv seyn, und bis zu einer gewißen Gränze wachsen, hierauf abnehmen, und negativ werden, so daß die krumme Linie die Axe der Absciſſen zum zweytenmal schneiden wird. Da aber für einen grossen Werth von w die Ordinate y wieder positiv wird; so muß die krumme Linie die Axe der Absciſſen zum drittenmal schneiden. Man findet ferner, daß es nur zwey positive Absciſſen giebt, welchen ein gröster oder kleinster Werth der Ordinate y entsprechen kann; folglich kann die krumme Linie der Axe der Absciſſen ausser ihrem Anfangspunkt in nicht mehr als zwey Punkten auf einerley Seite des Anfangspunkts der Absciſſen begegnen. Und weil für gleich große positive und negative Absciſſen die Ordinaten y, das Zeichen bey Seite gesetzt, einander gleich sind; so

*) Princ. L. III. prop. XIX.

sind nicht mehr als zwey verschiedene Werthe des Quadrats von w möglich, welches allein in dem Ausdruck des Axenverhältnisses vorkommt. Also giebt es für eine gegebene Umdrehungszeit nicht mehr als zwey Figuren, bey welchen das Gleichgewicht bestehen kann. **d'Alembert** hat zuerst die Bemerkung gemacht, daß einer gegebenen Umdrehungszeit mehrere Axenverhältnisse entsprechen können *), **La Place** hat gezeigt, daß nicht mehr als zwey möglich seyen **). Wenn q klein ist; so ist der zweyte Werth von w sehr groß, so daß, wenn man $w = \text{Tang}\,(\tfrac{1}{2}\pi - x)$ setzt, x ein sehr kleiner Bogen ist. Es ist aber $w = \text{Cotg.}\,x$, $x = \textit{Arc.}\,\text{Tg.}\,\frac{1}{w} = \frac{1}{w} - \frac{1}{3w^3} + \frac{1}{5w^5} - \&c.$ folglich $\textit{Arc.}\,\text{Tg.}\,w = \tfrac{1}{2}\pi - x$

$= \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{w} + \frac{1}{3w^3} - \frac{1}{5w^5} + \&c.$ welche Reihe desto schneller convergirt, je größer w ist. Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung n. 12. §. 355.; so erhält man durch die Umkehrung der Reihe

$$w = \frac{3\pi}{4q} - \frac{8}{\pi} + \frac{4q}{\pi}\left(1 - \frac{64}{3\pi^2}\right) + \&c.$$

$$= 2{,}356195.\frac{1}{q} - 2{,}546479 - 1{,}478885.\,q + \&c.$$

In Beziehung auf die Erde ist $q = 0{,}00344872$ (§. 355.), welcher Werth von q in den vorhergehenden Ausdruck gesetzt, giebt $w = 680{,}6572$, und $\sqrt{1 + w^2} = 680{,}6579$. Demnach könnte, wenn die Erde flüßig und gleichförmig dicht wäre, das Gleichgewicht ihrer Theilchen bey der gegenwärtigen Geschwindigkeit ihrer Axendrehung auch alsdenn bestehen, wenn sich ihre Axe zu dem Durchmesser ihres Aequators verhielte, wie 1 : 680,658.

Je größer der Werth von q wird, desto näher rücken die zwey übrigen Durchschnittspunkte der krummen Linie mit der Axe der Abscissen zusammen, und die krumme Linie berührt die Axe der Abscissen nur noch in einem Punkt, wenn der Werth von q so beschaffen ist, daß für $y = 0$ die Tangente der krummen Linie mit der Axe parallel ist, mithin mit ihr zusammenfällt. Diß findet statt, wenn $q = \frac{6w^2}{(1 + w^2)(9 + w^2)}$ ist. Wird q noch grösser; so schneidet die krumme Linie die Axe der Abscissen ausser in dem Anfangspunkt derselben nicht mehr; so daß die Werthe von w in der Gleichung n. 12. §. 355. unmöglich werden. Setzt man obigen grösten Werth von q in die Gleichung n. 12.; so erhält man die Gleichung

*) Opuscules Mathém. 1768.

**) Mém. de l'Acad. *R.* de Sc. 1782. und Méc. cél. T. II. L. III. Ch. III. n. 20.

$$Arc.\ Tg.\ w = \frac{7w^5 + 30.w^3 + 27.w}{(1+w^2)(9+w^2)(3+w^2)},$$

welcher der Werth 2,5292 von w Genüge leistet. Mittelst dieses Werths von w erhält man den correspondirenden Werth von $q = 0{,}337007$, und $\sqrt{1+w^2}$ findet sich $= 2{,}7197$. Das Axenverhältniß des Sphäroids ist also in diesem Fall $= 2{,}7197 : 1$. Seyen t, t' die Umdrehungszeiten zweyer gleichförmig dichten flüßigen Massen, d, d' ihre Dichtigkeiten, und q, q' die correspondirenden Werthe von q; so verhält sich vermöge n. 13. §. 355.
$q : q' = t.^2d' : t'.^2d$.

Soll nun q' dem bestimmten Werth 0,337007 gleich werden; so muß sich verhalten $q : 0{,}337007 = t'^2.d' : t^2.d$, und für einerley Dichtigkeit $q : 0.337007 = t'^2 : t^2$. In Beziehung auf die Erde hat man gefunden $q = 0{,}00344872$ (§. 355.); folglich ist in Beziehung auf eine mit der Erde gleich dichte Masse die Umdrehungszeit, welcher der Werth 0,337007 von q entspricht $=$ (23 St. 56′ 4″,1) $\sqrt{\frac{344872}{337007000}} = 2$ St. 25′ 16″,37. Soll einer anderen Masse, deren Dichtigkeit $= d'$, derselbe Werth von q entsprechen; so muß $t'^2.d' = t^2.d$, mithin $t : t' = \sqrt{d'} : \sqrt{d}$ seyn. Man hat also zu der Bestimmung der Umdrehungszeit t' dieser Masse, bey welcher das Gleichgewicht aufhört möglich zu seyn, die Gleichung $t' =$ (2 St. 25′ 16″,37) $\sqrt{\frac{d}{d'}}$.

Hieraus folgt, daß das Gleichgewicht einer homogenen flüßigen Masse, deren Dichtigkeit der mittleren Dichtigkeit der Erde gleich ist, nicht mit einer elliptischen Figur bestehen kann, wenn ihre Umdrehungszeit kleiner als 2 St. 25′ 16″,37 ist. Ist diese Umdrehungszeit größer; so giebt es immer zwey, aber nicht mehrere elliptische Figuren, bey welchen das Gleichgewicht bestehen kann. Ist die Dichtigkeit des Fluidums von der mittleren Dichtigkeit der Erde verschieden; so findet man die Umdrehungszeit, bey welcher das Gleichgewicht aufhört, mit einem elliptischen Sphäroid bestehen zu können, wenn man 2 St. 25′ 16″,37 mit der Quadratwurzel aus dem Exponenten des Verhältnisses der Dichtigkeit der Erde zu der Dichtigkeit des Fluidums multiplicirt. In Beziehung auf die Sonne ist diese Umdrehungszeit = 4 St. 48′ 16″, für den Jupiter = 5 St. 2′ 4″, für den Saturn = 7 St. 22′ 12″. Da sich diese Körper langsamer um ihre Axen drehen; so ist das Gleichgewicht möglich.

Uebrigens ist die Gränze von q nicht diejenige, bey welcher das Fluidum wegen einer zu geschwinden Axendrehung anfangen würde, sich zu zerstreuen. Weil nemlich die Schwere an dem Pol zu der um die Schwungkraft verminderten Gravitation unter dem Aequator, d. i. zur Schwere unter dem Aequator sich verhält, wie der Halbmesser des Aequators zu der halben Axe (§. 352.), welches Verhältniß in diesem Fall dem von 2,7197 : 1 gleich ist;

so ist noch immer ein Ueberschuß der Gravitation unter dem Aequator über die Schwungkraft da, und die unter dem Aequator liegenden Theilchen können sich nicht zerstreuen. Aber das Gleichgewicht hört bey einer geschwinderen Axendrehung auf, und es ist nicht mehr möglich, der flüßigen Masse die Gestalt eines elliptischen Sphäroids zu geben, so daß die aus der Attraction des Sphäroids und aus der Schwungkraft zusammengesetzte Kraft auf der Oberfläche des Sphäroids senkrecht wird. Bey einer geschwinderen Axendrehung als diejenige ist, welche das Gleichgewicht noch möglich macht, wird sich die flüßige Masse unter den Polen noch mehr abplatten, und unter dem Aequator sich erhöhen. Die unter dem Aequator liegende Theilchen werden jetzt mit ihrer vorigen Geschwindigkeit größere Kreise beschreiben, und dazu eine längere Zeit als vorher gebrauchen. Die Dauer der Umdrehungszeit wird also größer werden, und nach vielen Oscillationen wird die flüßige Masse wegen ihrer Zähigkeit ins Gleichgewicht kommen, und diejenige Gestalt annehmen, bey welcher vermöge der größeren Umlaufszeit die Bedingung des Gleichgewichts eines elliptischen Sphäroids erfüllt werden kann *).

§. 357. Die Abplattung der Erde $\frac{1}{230}$, oder genauer $\frac{1}{231,7}$ (§. 355), welche sich aus der Voraussetzung einer gleichförmigen Dichtigkeit der Erde ergiebt, stimmt aber weder mit den Gradmeßungen, noch mit den beobachteten Pendellängen überein. Vermöge der ersteren scheint die Abplattung der Erde nahe $\frac{1}{304}$ zu seyn (§. 140.). Aus den letzteren folgt die Abplattung $= \frac{1}{185,06}$, denn es muß sich, wenn die Erde ein gleichförmig dichtes elliptisches Sphäroid ist, der Halbmesser des Aequators zu der halben Erdaxe verhalten, wie die Schwere unter dem Pol zu der Schwere unter dem Aequator (§. 353.), oder wie die Länge des einfachen Sekundenpendels unter dem Pol zu der Pendellänge unter dem Aequator (§. 259. n. 4.) $= 0,508341 + 0,0027618 : 0,508341$ (§ 269.) $= 185,06 : 184,06$. Und umgekehrt, wenn die Erde gleichförmig dicht wäre; so müßte sich die Pendellänge unter dem Pol zu der Pendellänge unter dem Aequator verhalten, wie $231,7 : 230,7$. Die Voraussetzung einer gleichförmigen Dichtigkeit der Erde giebt also ihre Abplattung zu groß, und die Zunahme der Schwere von dem Aequator an gegen die Pole hin zu klein.

*) Méc. cél. T. III. L. III. Ch. III. n. 21. pag. 59.

Es ist aber leicht einzusehen, daß, wenn die Dichtigkeit der Erde von ihrem Mittelpunkt an gegen ihre Oberfläche beständig abnimmt, die Schwere von dem Aequator an gegen die Pole stärker zunehmen müsse, als in dem Fall einer gleichförmigen Dichtigkeit. Wenn nemlich einem gleichförmig dichten abgeplatteten Sphäroid neue Materie an seinem Mittelpunkt hinzugefügt, oder seine Dichtigkeit in der Nähe des Mittelpunkts vergrößert wird; so wird die Attraction dieser neuen Materie die Schwere an dem Pol um mehr vergrößern, als unter dem Aequator, weil ein an dem Umfang des Aequators liegendes Theilchen in demselben Verhältniß schwächer angezogen wird, als ein an den Polen befindliches, in welchem das Quadrat der halben Axe kleiner ist, als das Quadrat des Halbmessers des Aequators. Die Abplattung des Sphäroids hingegen wird durch die neue hinzugekommene Materie vermindert werden. Man denke sich zwey von dem Mittelpunkt des Sphäroids ausgehende Säulen eines Fluidums, deren eine in der Richtung der Axe, die andere in der Ebene des Aequators liege, und welche mit einander in dem gleichförmig dichten Sphäroid das Gleichgewicht hielten. Von der letzteren sey von dem Mittelpunkt an ein Stück abgeschnitten, welches der an den Pol gehenden Säule gleich sey; so würde, wenn die Attraction der hinzugekommenen Materie sich nur auf die an den Pol gehende Säule und auf das abgeschnittene Stück der an den Aequator gehenden sich erstrekte, das Gleichgewicht der Säulen nicht gestört werden. Nun wirkt aber die neue Materie auch auf den Rest der letzteren; folglich muß sich diese verkürzen, um mit der an den Pol gehenden Säule das Gleichgewicht halten zu können. Zugleich wird wegen dieser Verminderung des Halbmessers des Aequators die Schwungkraft kleiner, und das Sphäroid wird sich mehr einer Kugel nähern, als wenn es gleichförmig dicht gewesen wäre. Umgekehrt verhält es sich, wenn die Dichtigkeit von dem Mittelpunkt an gegen die Oberfläche hin wächst.

Je dichter nun das Sphäroid an seinem Mittelpunkt ist, desto weniger weichen die Richtungen der Gravitation gegen das ruhende Sphäroid von den Richtungen seiner Halbmesser ab. Man nehme mit Huygens (§. 347.) an, die Gravitation sey constant, und gegen den Mittelpunkt gerichtet; so würden zwey gleich lange Säulen eines Fluidums, deren eine von dem Pol, die andere von dem Aequator an Mittelpunkt des Sphäroids sich erstreckte, mit einander im Gleichgewicht seyn, wenn nicht der Druck der letzteren durch die Schwungkraft vermindert würde. Die von dieser Kraft herrührende Verminderung ist den Abständen der Theilchen des Fluidums von dem Mittelpunkt proportional (§. 273. n. 2.), und daher ist die ganze von der Schwungkraft herrührende Verminderung der Schwere der Säule die Hälfte von derjenigen, welche sie mit ihrer dem Umfang des Aequators entsprechenden Stärke hervorbringen würde (S. Bew. von n. 2. §. 352.); folglich muß, wenn die Schwungkraft unter dem Aequator zu der Gravitation unter dem Aequator gegen das ruhende Sphäroid sich verhält, wie $f : 1$, die Länge der an den Pol gehenden Säule zu der Länge der in der Ebene des Aequators liegenden sich verhalten wie $1 - \frac{1}{2}f : 1$, wenn das Gleichgewicht statt finden soll. Für die Erde ist f nahe $= \frac{1}{289}$; folglich ist das Verhältniß der Länge der Säulen, oder der halben Erdaxe zu dem Halbmesser des Aequators $= 1 - \frac{1}{578} : 1 = 577 : 578$, wie Huygens gefunden hat. Man behalte die Richtung der Gravitation gegen den Mittelpunkt bey, lasse aber ihre Größe nach dem Newtonischen Gesetz der Attraction sich verändern; so wird die Abplattung größer werden müssen, als unter der Voraussetzung einer constanten Schwere. Denn an dem Ende der in der Ebene des Aequators liegenden Säule ist die Gravitation in dem Verhältniß von $(1 - \frac{1}{578})^2 : 1$, oder von $1 - \frac{1}{289} : 1$ (allgemein von $1 - f : 1$) kleiner, als unter dem Pol, und daher der Druck des Ueberschußes der an den Aequator gehenden Säule über die an den Pol gehenden kleiner, als wenn die Gravitation constant wäre, weswegen die erstere Säule sich noch ein wenig verlängern muß, um mit der letzteren das Gleichgewicht halten zu können. Da aber der Unterschied der Säulen ebenfalls sehr gering ist; so wird dadurch das Axenverhältniß nicht merklich geändert. Hingegen hat diese Verminderung der Gravitation einen merklichen Einfluß auf die

die Verminderung der Schwere unter dem Aequator. Sie beträgt, wie man oben gesehen hat $\frac{1}{289}$ derselben. Hiezu kommt noch die Verminderung durch die Schwungkraft, welche ebenfalls $\frac{1}{289}$ der Schwere ausmacht. Folglich ist die ganze Verminderung der Schwere von den Polen an gegen den Aequator $\frac{1}{289}$ oder $\frac{1}{144,5}$ der Schwere unter den Polen oder $\frac{1}{143,5}$ der Schwere unter dem Aequator. Vermöge der Beobachtungen ist aber die Abplattung der Erde größer, als $\frac{1}{578}$, und die Zunahme der Schwere von dem Aequator bis an die Pole kleiner als $\frac{1}{144}$; also zeigen die Gradmessungen und die Pendellängen mit einander übereinstimmend, daß die Gravitation nicht gegen einen einzigen Punkt der Erde gerichtet, sondern aus den Attractionen aller Theilchen derselben zusammengesetzt ist.

Demnach kann man die Gränzen angeben, zwischen welchen die Abplattung der Erde muß enthalten seyn. Ihre Abplattung muß nemlich größer seyn $\frac{1}{578}$, oder als diejenige, welche sie haben würde, wenn ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, aber kleiner als $\frac{1}{231,7}$, welche einer gleichförmigen Dichtigkeit entspricht. Im Allgemeinen ist, wenn die Abweichung von der Kugelgestalt gering ist, und die Dichtigkeit von der Oberfläche bis an den Mittelpunkt wächst, die Abplattung kleiner als $\frac{5}{4}$ der Exponenten des Verhältnisses der Schwungkraft unter dem Aequator zu der unter dem Aequator beobachteten Schwere, aber größer als die Hälfte dieses Exponenten. Zwischen der Abplattung und der Zunahme der Schwere von dem Aequator bis an die Pole, findet folgende merkwürdige von Clairaut *) zuerst gefundene Beziehung statt: wenn man die Pendellänge unter dem Pol = 1 setzt; so machen die Zunahme der Pendellänge von dem Aequator bis an die Pole und die Abplattung eine constante Summe, nemlich $\frac{5}{2}$ des Exponenten des Verhältnisses der Schwungkraft unter dem Aequator zu der eben daselbst beobachteten Schwere. Man setze die Länge des einfachen Sekundenpendels unter den Polen $= l$, unter dem Aequator $= l'$, die Abplattung $= \alpha$, und das Verhältniß der Schwungkraft unter dem Aequator zu

*) Théorie de la Figure de la Terre, par Clairaut. pag. 249.

der unter dem Aequator beobachteten Schwere $= f' : 1$; so ist nach Clairaut's Theorem $\frac{l - l'}{l} + \alpha = \frac{5}{4} f'$. La Place findet $\frac{l - l'}{l'} + \alpha = \frac{5}{2} f$ *). Genauer ist, wenn man die Pendellänge unter der Breite, deren Quadrat des Sinus $= \frac{1}{3}$ ist, mit l'' bezeichnet, $\frac{l - l'}{l'} + \alpha = \frac{5}{2} f'$. Die Unterschiede dieser Ausdrücke sind aber, wenn α klein ist, nicht beträchtlich.

In Beziehung auf die Erde findet man nach §. 273. n. 2. u. 3. mittelst ihrer Umdrehungszeit (§. 44.) des Halbmessers ihres Aequators (§. 143.), und der freyen Fallhöhe unter dem Aequator, $f' = \frac{1}{288{,}387}$, mithin $\frac{5}{2} f' = \frac{1}{115{,}355}$. Ferner ist nach der §. 269. gegebenen Formel $\frac{l - l'}{l} = \frac{1}{185{,}06}$; folglich $\alpha = \frac{1}{115{,}355} - \frac{1}{185{,}06} = \frac{1}{306{,}2}$. Und weil $\frac{l - l'}{l'} = \frac{1}{184{,}06}$; so wird nach dem von La Place gegebenen Ausdruck $\alpha = \frac{1}{309}$ **). Die Gradmessungen geben $\frac{1}{304}$ (§ 140.), die zwey von der Abplattung der Erde abhängende Ungleichheiten des Monds geben $\frac{1}{305{,}05}$ und $\frac{1}{304{,}6}$ §. 328.), mit welchen Abplattungen die aus den Pendellängen nach Clairaut's Theorem berechnete sehr gut übereinstimmt.

Sey der Halbmesser des Aequators des Jupiters $= 1$, die Zeit seiner Axendrehung $= t$, der Abstand eines seiner Trabanten von seinem Mittelpunkt $= r$, und die siderische Umlaufszeit dieses Trabanten $= t$; so ist die Gravitation gegen den Jupiter in der Distanz r von seinem Mittelpunkt $= \frac{4r \cdot \pi^2}{t^2}$ (§. 273. n. 2.), und in der Distanz 1, oder an dem Aequator des Jupiters $= \frac{4r^3 \cdot \pi^2}{t^2}$. Ferner ist die Schwungkraft unter seinem Aequator $= \frac{4\pi^2}{t'^2}$; folglich ist der Exponent des Verhältnisses dieser Kraft zu der Gravitation an dem Aequator des Jupiters $= \frac{t^2}{r^3 : t'^2}$, welcher mittelst der §. 104. angegebenen siderischen Umlaufszeit des vierten Tra-

*) Méc. cél. T. II. Ch. IV. n. 34. pag. 102.

**) La Place findet $\frac{1}{335{,}78}$ (Mec. cél. T. II. pag. 150.). Der Unterschied kommt größtentheils von dem in der Note pag. 252. bemerkten Rechnungsfehler her.

banten, seines Abstands von dem Jupiter (§. 110.), und der Umdrehungszeit des Jupiters (§. 109.) $= \frac{1}{10,765}$ gefunden wird. Daher verhält sich die Schwungkraft unter dem Aequator des Jupiters zu der Gravitation unter seinem Aequator $= 1 : 10,765$, und zu der um die Schwungkraft verminderten Gravitation, oder zur Schwere unter dem Aequator, wie $1 : 9,765$. Mithin fällt die Abplattung des Jupiters zwischen $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{9,765}$ und $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9,765}$, oder zwischen $\frac{5}{39}$ und $\frac{1}{19,5}$. Vermöge der Beobachtungen ist diese Abplattung $= \frac{1}{14}$ (§. 109.), womit die von la Place aus den Bewegungen der Jupiterstrabanten gefundene sehr nahe übereinstimmt (§. 345.). Die beobachtete Abplattung fällt also zwischen die angegebenen Gränzen, und zeigt, daß die Dichtigkeit des Jupiters ebenfalls von seinem Mittelpunkt an gegen die Oberfläche abnimmt.

Die Abplattung, welche der Jupiter im Fall einer gleichförmigen Dichtigkeit haben müßte, und welche hier $= \frac{5}{39}$ oder $= \frac{1}{7,8}$ gefunden worden ist, weicht merklich unter eben dieser Voraussetzung in dem 355 §. berechneten ab. Der Unterschied rührt von den Näherungsformeln her, welcher wegen der großen Abplattung des Jupiters sehr merklich wird. Man kann diese Abplattung unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Dichtigkeit genauer auf folgende Art finden. Wenn in der Gleichung n. 13. §. 355. Die Größen q, t und d sich auf die Erde beziehen, und die auf den Jupiter sich beziehende mit q', t' und d' bezeichnet werden; so hat man $q = \frac{3\pi}{t^2 d}$; $q' = \frac{3\pi}{t'^2 d'}$, und daher $q' = \left(\frac{t}{t'}\right)^2 \cdot \frac{d}{d'}\, q$. Mittelst des §. 355. gefundenen Werths von q, der Umdrehungszeit t' des Jupiters, und des Verhältnißes seiner Dichtigkeit zur Dichtigkeit der Erde (§. 304.), findet man $q' = 0,0866141$, und, wenn man diesen Werth in die Gleichung n. 12. §. 355. setzt, $w^2 = 0,2663$. Hieraus erhält man $\sqrt{1+w^2} = 1,1253$, und das Axenverhältniß des Jupiters $= 1 : 1,1253$, nahe $= 8 : 9$, die Abplattung $= \frac{1}{9}$.

§. 358. Der Ring des Saturns besteht, wie man §. 113. u. f. gesehen hat, aus zwey oder mehreren concentrischen Ringen von einer in Vergleichung mit ihrer Breite sehr geringen Dicke, deren Ebene in der erweiterten Ebene

des

des Aequators des Saturns liegt. Es ist nicht wahrscheinlich, daß diese Ringe sich allein durch den Zusammenhang ihrer Theilchen erhalten, denn sonst würden die dem Planeten zunächst liegende Theilchen vermöge der sich stets erneuernden Wirkung der Schwere sich in der Länge der Zeit losgerissen haben, und die Ringe würden nach und nach zerstört worden seyn, so wie alle Werke der Natur, welche den Einwirkungen fremder Ursachen nicht Kräfte genug entgegengesetzt haben. Diese Ringe erhalten sich also ohne Zwang, und allein nach den Gesetzen des Gleichgewichts. Hiezu wird aber erfordert, daß sie sich um eine durch den Mittelpunkt des Saturns gehende auf ihrer Ebene senkrechte Axe drehen, so daß die durch diese Axendrehung entstehende Schwungkraft mit ihrer Schwere gegen den Planeten das Gleichgewicht hält.

Um die Gestalt dieser Ringe zu bestimmen, bey welcher das Gleichgewicht vermöge der gegenseitigen Attraction ihrer Theilchen, ihrer Schwere gegen den Saturn, und ihrer Schwungkraft bestehen kann, nimmt sie La Place als flüßig, oder mit einer sehr dünnen Schichte eines Fluidums bedeckt an, und sucht die Bedingungen des Gleichgewichts dieses Fluidums. Er findet, daß dieses Gleichgewicht möglich ist, wenn jeder Schnitt eines der Ringe mit einer durch ihre Axe gelegten Ebene eine sehr schmale Ellipse ist, deren große Axe gegen den Mittelpunkt des Planeten gekehrt ist, und die Ringe eine in Vergleichung mit ihrem Abstand von dem Mittelpunkt des Saturns nicht sehr beträchtliche Breite haben. Jeder der Ringe wird also beschrieben, wenn eine sehr schmale Ellipse sich um eine in ihrer Ebene und ausserhalb der Ellipse liegende auf der Verlängerung ihrer großen Axe senkrechte Axe dreht, wobey der Mittelpunkt der beschreibenden Ellipse einen mit dem Mittelpunkt des Saturns concentrischen Kreis beschreibt. Das Gleichgewicht ist auch alsdenn noch möglich, wenn die beschreibende Ellipse, während sie den ganzen Umfang durchlauft ihre Größe und Lage verändert, und ihr Mittelpunkt statt eines Kreises eine Linie von doppelter Krümmung beschreibt, wenn nur diese Veränderungen erst in einer Distanz eines in der Ebene der beschreibenden Ellipse liegenden Punkts von der Umdrehungs-axe merklich werden, welche beträchtlich größer ist, als der durch diesen Punkt gehende Durchmesser der beschreibenden Ellipse. Ein in allen seinen Theilen vollkommen ähnlicher Ring würde seine Lage nicht beybehalten können, wenn die geringste Kraft, z. B. die Attraction eines Trabanten auf ihn wirkte, und er würde zuletzt auf den Planeten fallen müßen *). Die verschiedenen Ringe, welche den Saturn umgeben, sind folglich irreguläre Körper, welche an den verschiedenen Punkten ihres Umfangs eine ungleiche Breite haben, so daß ihre Schwerpunkte nicht mit den Mittelpunkten ihrer Figur zusammenfallen. Diese Schwerpunkte können als ebenso viele um den Mittelpunkt des Saturns umlaufende Trabanten betrachtet werden, deren Abstände von der Ungleichheit der Theile eines jeden Rings abhängen, und deren Umlaufszeiten denen der Ringe beziehungsweise gleich sind.

Daraus, daß die Schwungkraft mit der Schwere gegen den Saturn das Gleichgewicht halten muß, folgt, daß die Umlaufszeit eines jeden der Ringe einerley ist mit der Umlaufszeit eines Trabanten, dessen Abstand von dem Mittelpunkt des Saturns dem Abstand des Mittelpunkts der beschreibenden Ellipse von dem Saturn gleich ist. Hienach wäre die Umdrehungszeit des innern Rings = 10 St. 33′, welche La Place nach der Theorie gefunden hatte, ehe Herschels Entdeckung der Umdrehungszeit des Rings bekannt geworden war, und mit den Beobachtungen nahe übereinstimmt (§. 118.).

Die zur Erhaltung der unveränderlichen Lage der Ringe erforderliche Irregularität ihrer Gestalt wird durch die Beobachtungen angezeigt (§. 118.), und sie dient, wie ebendaselbst bemerkt worden ist, zur Erklärung der von Schröter beobachteten scheinbaren Nicht-Rotation des Rings. La Place hat indessen eine auf eben diese irreguläre Gestalt der Ringe gegründete Erklärung des scheinbaren Wider-

*) Méc. cél. T. II. L. III. Chap. VI. n. 46. pag. 163.

spruchs zwischen Herschels und Schröters Beobachtungen bekannt gemacht *).

§. 359. Es sind noch diejenigen Veränderungen zu betrachten übrig, welche die gegenseitige Attraction der Himmelskörper in der Lag der Umdrehungsaxen derjenigen Körper hervorbringt, welche eine unter den Polen zusammengedrückte Gestalt haben. Die Beobachtungen zeigen eine Veränderung der Lage der Erdaxe, aus welcher die unter dem Namen der Präceßion und Nutation bekannte scheinbare Bewegung der Fixsterne, und eine periodische Veränderung der Schiefe der Ekliptik entstehen (§. 150. 160.). Wir wollen sehen, ob die aus den Beobachtungen abgeleitete Gesetze dieser Veränderungen mit der Theorie der allgemeinen Schwere übereinstimmen.

Sey $APBP'$ (Fig. 144.) ein Schnitt der Erde mit einer durch ihre Axe PP' und den Mittelpunkt S der Sonne oder des Monds gelegten Ebene. Um die Axe PP' der Erde als Durchmesser sey eine Kugel $aPbP'$ beschrieben; so wird rund um diese Kugel herum ein Körper übrig bleiben, welcher beschrieben wird, wenn die mondförmige Figur $APaP'A$ sich um die Axe PP' dreht. Man ziehe CS und die JJ' auf CS senkrecht; so wird die gerade Linie JJ' sowohl den elliptischen Durchschnitt der Erde als auch den kreisförmigen Durchschnitt der in sie beschriebenen Kugel in zwey gleiche Theile theilen. Die mittlere Richtung der Attraction, welche die Sonne oder der Mond S auf jene Kugel ausüben, geht durch den Mittelpunkt C der Erde, und es kann dadurch keine Drehung der Erdaxe um den Punkt C entstehen. Aber die mit dem Punkt S auf einerley Seite der geraden Linie JJ' liegenden Theilchen des die Kugel ab umgebenden Körpers werden von S stärker angezogen, als die auf der anderen Seite, z. B. in Bb liegende Theilchen, so daß der Theil A der Erde gegen die Sonne hin schwerer seyn wird, als der entferntere Theil B. Was hier von einem Durchschnitt der Erde gezeigt worden ist, kann auf die ganze Erde angewendet werden. Die mittlere Richtung al-

*) Connaiss. des tems pour 1811. Monatl. Corresp. May. 1810. pag. 432.

ler Attractionen wird in die durch die Erdaxe und den Mittelpunkt der Sonne oder des Monds gelegten Ebene fallen, weil diese Ebene die Erde in zwey gleiche, ähnliche und in Beziehung auf die Sonne symmetrisch liegende Theile theilt. Wenn also der Mittelpunkt C der Erde unterstützt wäre, und sie keine Axendrehung hätte; so würde sie wie ein zusammengesetztes Pendel in der durch ihre Axe und den Mittelpunkt der Sonne oder des Monds gelegten Ebene hin und her schwingen. Den Mittelpunkt der Erde können wir in so fern als unterstützt betrachten, als dieser Punkt, in welchem man sich die Masse der Erde vereinigt denken kann, um die Sonne sich bewegt, und die durch diese Bewegung entstehende Schwungkraft mit der nach der Sonne gerichteten Centripetalkraft nahe das Gleichgewicht hält, so daß wegen des Ueberschußes einer dieser Kräfte über die andere blos eine Veränderung des Abstands der Erde von der Sonne, nicht aber eine Bewegung der Erdaxe um den Schwerpunkt C der Erde hervorgebracht wird.

Wir wollen zuerst die von der Attraction der Sonne herrührende Veränderung der Lage der Erdaxe betrachten. Es sey OVV' (Fig. 145.) die Ebene der Ekliptik, CS die in ihrer Ebene liegende aus dem Mittelpunkt C der Erde nach dem Mittelpunkt der Sonne gezogene gerade Linie, $AVMB$ die Ebene des Erdäquators, welcher die Ebene der Ekliptik in der geraden Linie VV' schneide. Man lege durch CS die Ebene SCM auf die Ebene des Aequators senkrecht; so mißt der in dieser Ebene mit dem Halbmesser C oder CM beschriebene Kreisbogen M die Abweichung der Sonne, der Bogen VS ihre Länge, und der Bogen VM ihre gerade Aufsteigung (§. 29. 36.). Vermöge der Attraction der Sonne würde, wie man so eben gesehen hat, der Punkt M des Erdäquators in der Ebene MS oscilliren, wenn die Erde keine Axendrehung hätte. Man ziehe an den Punkt M des Bogens MS eine Tangente MT, und nehme auf ihr die MT der Geschwindigkeit gleich, welche die Sonne dem Punkt M vermöge jener Oscillationsbewegung, welche sie hervorzubringen strebt, in einer gewißen zur Einheit angenommenen Zeit mittheilen würde. Durch T sey in der

Ebene SCM die Parallele TQ mit CS gezogen, und das Parallelogramm $TQMF$ vollendet; so würden die zwey Kräfte MQ und MF dieselbe Wirkung hervorbringen, welche die Kraft MT hervorzubringen strebt, und weil der Winkel MFT des bey M rechtwinklichten Dreyecks TMF dem Winkel SCM oder der Abweichung der Sonne gleich ist; so ist das Verhältniß von $TM : MF$, mithin die Kraft MF gegeben, wenn man die Geschwindigkeit MT der Oscillationsbewegung kennt, welche die Sonne in einer gegebenen Zeit erzeugen würde. In der Ebene des in der Figur als spitz angenommenen Winkels VCM sey MN auf CM in M senkrecht, oder eine Tangente an den Punkt M des Aequators gezogen, welche der Verlängerung von CV in N begegne, und auf welcher nach der Richtung der täglichen Bewegung der Erde die Mt der Geschwindigkeit gleich genommen sey, welche ein Punkt ihres Aequators vermöge dieser Bewegung hat. Sey, wie in §. 313. Mf die Geschwindigkeit, welche die Kraft MF in dem Zeittheilchen z erzeugen würde, also $MF : Mf = 1 : z$. Man vollende das Parallelogramm $Mfkt$, und ziehe durch N die Parallele Nn mit MF, welche verlängerten Diagonale kM in n begegne. Da so wohl Nn als CS mit der geraden Linie MF parallel sind; so sind Nn und CS parallel (XI, 9.), und beyde liegen in einer Ebene, nemlich in der Ebene der Ekliptik. In dieser Ebene sey auf der CN in dem Punkt N ein Perpendickel Nh errichtet, welches der Cn in h begegne. Endlich ziehe man in der Ebene der Ekliptik die SR, und in der Ebene des Aequators die MH auf CV senkrecht; so verhält sich

$$\left.\begin{matrix} Mf \\ z.FM \end{matrix}\right\} : Mt = Nn : MN,$$

$$HM \quad CM = MN : CN,$$

$$SR \quad \left\{\begin{matrix} CS \\ CM \end{matrix}\right\} = Nh \quad Nn;$$

also $z.FM.HM\ SR : \overline{CM}^2 . Mt = Nh : CN$

$= uz : 1$, wenn man, wie in §. 313., die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Durchschnittslinie VV' des Aequators und der Ekliptik sich rükwarts bewegt, mit u bezeichnet. Folglich ist die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich im Fall der Figur der Punkt V der Frühlingsnachtgleiche rükwarts bewegt

$$n = \frac{FM}{Mt} \cdot \frac{HM}{CM} \cdot \frac{\delta R}{CM}.$$

Diese Geschwindigkeit ist veränderlich, und besteht, wie hernach gezeigt werden soll, aus einem constanten und beständig positiven, und aus einem veränderlichen bald positiv, bald negativ werdenden von der Länge der Sonne abhängenden Theil. Der erste bringt eine beständig retrograde gleichförmige Bewegung der Aequinoktialpunkte hervor, und von dem zweyten hängt eine periodische Ungleichheit dieser Bewegung ab.

§. 360. Die Kraft, mit welcher die Sonne S (Fig. 144.) die Theilchen des Erdsphäroids anzieht, kann in dem Mittelpunkt der Sonne vereinigt angenommen werden (§. 290.). Die mittlere Richtung aller dieser Attractionen fällt in die durch die Erdaxe und den Mittelpunkt der Sonne gelegte Ebene. In dieser Ebene seyen Sp auf die Erdaxe und Sq auf die Ebene des Aequators senkrecht gezogen; so sind die Kräfte, mit welchen die Sonne das ganze Sphäroid nach den Richtungen Sp, Sq anzieht, den Kräften gleich, mit welchen S von eben diesem Sphäroid nach den Richtungen Sp, Sq angezogen wird. Man beschreibe in der durch die Erdaxe und den angezogenen Punkt S gelegten Ebene eine Ellipse, welche durch den Punkt S gehe, und mit dem correspondirenden elliptischen Meridian der Erde einerley Brennpunkte habe, und durch die Umdrehung dieser Ellipse um ihre auf die Erdaxe fallende kleine Axe werde ein mit der Erde gleich dichtes Sphäroid erzeugt; so werden sich die Gravitationen von S gegen dieses neue Sphäroid nach den Richtungen Sp und Sq zu den Gravitationen von S gegen das innere oder Erdsphäroid nach eben diesen Richtungen genommen verhalten, wie die Masse des ersten Sphäroids zu der Masse des zweyten. Den Beweis dieses Satzes, welcher auf die §. 350. angezeigte Art geführt werden kann findet man in Treat. of Flux. n. 349.; 350; 351., und in der Méc. cél. T. II. pag. 22. Es verhalte sich der halbe Abstand der Brennpunkte des äusseren Sphäroids zu seiner halben Axe $= x : 1$; so verhält sich die Gravitation an dem Aequator dieses Sphäroids zu der Gravitation an seinen Pol $= (1 + x^2)$ Arc. Tg. $x - x$: $2\,(x -$ Arc. Tg. $x)\sqrt{1+x^2}$ (§. 355. n. 8.). Man setze die halbe Axe des äusseren Sphäroids $= B$, also den Halbmesser seines Aequators $= B\sqrt{1+x^2}$, die Distanz $CS = r$, und den Winkel ACS, oder die Abweichung des Punkts $S = d$; so ist $Sq = r\,\text{Sin.}\,d$; $Sp = r\,\text{Cos.}\,d$, und es verhält sich die Gravitation von S gegen das äussere Sphäroid nach der Richtung Sp zu der Gravitation von S gegen eben dieses Sphäroid nach der Richtung Sq

$$= ((1+x^2)\,Arc.\,\text{Tg.}\,x - x)\,\frac{r\,\text{Cos.}\,d}{B\sqrt{1+x^2}} : 2(x - Arc.\,\text{Tg.}\,x)\frac{r\,\text{Sin.}\,d}{B}\sqrt{1+x^2}$$

(§. 350.).

Aber diese Gravitationen verhalten sich zu den correspondirenden Gravitationen gegen das innere Sphäroid, wie die Masse des äusseren zu der Masse des inneren; folglich verhält sich auch die Gravitation von S gegen das innere Sphäroid nach der Richtung Sp zur Gravitation von S gegen dieses Sphäroid nach der Richtung $Sq = ((1+x^2)\,Arc.\,\text{Tg.}\,x - x)\,r\,\text{Cos.}\,d : 2(x - Arc.\,\text{Tg.}\,x)\,r(1+x^2)\,\text{Sin.}\,d$. Man nehme auf den geraden Linien Sq und Sp die Sq' und Sp' diesen Kräften proportional, vollende das Parallelogramm $Sp'sq'$, und ziehe seine Diagonale Ss, deren Verlängerung die auf CS senkrechte gerade Linie JJ' in K schneide; so ist SK die Richtung, nach welcher der Punkt S von dem ganzen Erdsphäroid angezogen wird, und es verhält sich

$Sp' : p's = 1 : \text{Tg.}\,pSs$. Folglich ist

$$\text{Tg.}\,pSs = \frac{p's}{Sp'} = \frac{2(x - Arc.\,\text{Tg.}\,x)(1+x^2)}{(1+x^2)\,Arc.\,\text{Tg.}\,x - x}\,\text{Tg.}\,d,$$ und wenn

man den von x abhängenden Factor in eine Reihe entwickelt,

$$\text{Tg.}\,pSs = \frac{1+6\left(\frac{1}{3\cdot5}x^2 - \frac{1}{5\cdot7}\cdot x^4 + .\right)}{1-3\left(\frac{1}{3\cdot5}x^2 - \frac{1}{5\cdot7}x^4 + ..\right)}\,\text{Tg.}\,d$$

$= (1 + \frac{3}{5}x^2 + \&c.)\,\text{Tg.}\,d$, wo man wegen der Kleinheit von x die höheren Potenzen von x vernachlässigen kann. Demnach ist der Winkel pSs größer als der Winkel d, oder größer als $\left\{\begin{matrix} qCS \\ pSC \end{matrix}\right\}$, so daß die Richtung der mittleren Kraft Ss die JJ' unterhalb C in K schneidet. Es folgt aber allgemein aus der Gleichung $\text{Tg.}\,a = (1+m)\,\text{Tg.}\,b$, $\text{Sin.}\,(a-b) = m\,\text{Sin.}\,b\,\text{Cos.}\,a$, und, wenn m ein kleiner Bruch ist, sehr nahe $a - b = m\,\text{Sin.}\,b\,\text{Cos.}\,a$, oder $= m\,\text{Sin.}\,b\,\text{Cos.}\,b$; folglich ist sehr nahe,

der Winkel $CSK = \frac{3}{5}x^2\,\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,d$.

Es schneide SK die große Axe AB in G; so verhält sich

$$\left.\begin{matrix} CS \\ r \end{matrix}\right\} : CG = \text{Sin.}\,CGS : \text{Sin.}\,CSG,$$

$$\text{nahe} = \text{Sin.}\,qCS : CSG,$$

$$= \text{Sin.}\,d : \tfrac{3}{5}x^2\,\text{Sin.}\,d\,\text{Cos.}\,d$$

Also ist $CG = \frac{3}{5}\cdot r\cdot x^2\,\text{Cos.}\,d$.

Man setze die halbe Erdaxe $= b$, und das Verhältniß des halben Abstands der Brennpunkte eines Erdmeridians zu der halben Erdaxe $= w : 1$; so ist der halbe Abstand dieser Brennpunkte $= b . w$, und, weil die Meridiane des durch S gehenden und des Erdsphäroids vermöge der Voraussetzung einerley Brennpunkte haben, $x = \frac{w . b}{B}$. Aber w ist in Vergleichung mit b, und um so mehr in Vergleichung mit B sehr klein; folglich ist sehr nahe $B = CS = r$, $x = \frac{w . b}{r}$, und

$$CG = \tfrac{3}{5} . \frac{w^2 . b^2}{r} \text{Cos.} d.$$

Man kann also die Erde als ein um C in der Ebene pCS schwingendes zusammengesetztes Pendel betrachten, dessen Schwerpunkt in G fällt, und auf welches eine gegen den Punkt S gerichtete Schwere wirkt. Wegen der großen Entfernung dieses Punkts können die Richtungen dieser Schwere als parallel angenommen werden, und wegen der geringen Abweichung der Erde von der Kugelgestalt ist ihr Moment der Trägheit um eine durch C gehende auf die Ebene des Schwungs senkrechte Axe nahe $= \tfrac{2}{5} M . b^2$ (§. 265.) *); folglich ist der Abstand des Mittelpunkts des Schwungs von der Umdrehungsaxe $= \tfrac{2}{5} . \frac{b^2}{CG}$ (§. 264. n. 3.) $= \tfrac{2}{3} . \frac{r}{w^2 . \text{Cos.} d}$, und vermöge der Eigenschaft dieses Punkts würde, wenn die ganze Masse der Erde in ihm vereinigt wäre, und auf ihn nach einer mit CS parallelen Richtung eine Kraft k wirkte, welche der Anziehungskraft der Sonne in der Distanz CS gleich ist, die Oscillationsbewegung der Erde dieselbe seyn, welche durch die Wirkung der Sonne auf das Erdsphäroid würde hervorgebracht werden, wenn es keine Axendrehung hätte. Man denke sich die Erdmasse in dem Punkt A an dem Umfang ihres Aequators oder in der Distanz $b\sqrt{1 + w^2}$ von ihrem Mittelpunkt vereinigt; so müßte auf diesen Punkt nach einer mit CS parallelen Richtung eine Kraft wirken, welche in dem Verhältniß von $b\sqrt{1 + w^2}$ zu $\tfrac{2}{3} \frac{r}{w^2 . \text{Cos.} d}$ kleiner wäre als k, wenn die Oscillationsbewegung dieselbe bleiben sollte. Folglich wird die Fig. 145. durch MF ausgedrückte Kraft seyn $= \frac{3k}{2} . \frac{b}{r} . w^2 \text{Cos.} d \sqrt{1 + w^2}$.

Es ist aber, wenn man einen Sterntag $= t'$, das siderische Jahr $= T$, und den mittleren Abstand der Sonne von der Erde $= a$ setzt, die Anziehungskraft der Sonne in der Distanz $a = \frac{4 a \pi^2}{T^2}$ und in der Distanz $r = \frac{4 a^3 . \pi^2}{r^2 . T^2}$, und die Geschwindigkeit Mt (Fig. 145.) eines Punkts des Erdäquators $= \frac{2 b \pi \sqrt{1 + w^2}}{t'}$;

*) Genau ist dieses Moment der Trägheit $= \tfrac{2}{5} M . b^2 . (1 + \tfrac{1}{2} w^2)$.

folglich ist

$$\frac{MF}{Mt} = \frac{3\pi.t'}{T^2}\, w^2 \,\text{Cos.}\, d \times \left(\frac{a}{r}\right)^3, \text{ nahe } = \frac{3\pi t'}{T^2}\, w^2 \,\text{Cos.}\, d.$$

Endlich verhält sich in dem bey M rechtwinklichten sphärischen Dreyeck VSM

$$\begin{array}{l} \text{Sin.}\, V : \text{Sin.}\, MS = 1 : \text{Sin.}\, VS, \\ \underline{\text{Cotg.}\, V : \text{Cotg.}\, MS = \text{Sin.}\, VM : 1;} \end{array}$$

folglich $\text{Cos.}\, V : \text{Cos.}\, MS = \text{Sin.}\, VM : \text{Sin.}\, VS,$

$$= \text{Sin.}\, VM : \overline{\text{Sin.}\, VS}^2,$$

oder $\text{Cos.}\, V : \text{Cos.}\, d = \frac{HM}{CM} \cdot \frac{SR}{CM} : \overline{\text{Sin.}\, VS}^2.$

Also ist vermöge der in dem 259sten §. für die Winkelgeschwindigkeit u des Aequinoktialpunkts gefundenen Gleichung

$$1.)\; u = \frac{3\pi t'}{T^2}\, w^2 \,\text{Cos.}\, V\, \overline{\text{Sin.}\, VS}^2$$

Sey u' die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Schiefe V der Ekliptik verändert; so kann auf ähnliche Art, wie in dem 315ten §. gezeigt worden, daß

$u : u' = 1 : \text{Sin.}\, V\, \text{Cotg.}\, VM.$ Im Fall der Figur nimmt aber die Schiefe der Ekliptik ab;

folglich ist 2.) $u' = - u\, \text{Sin.}\, V\, \text{Cotg.}\, VM,$

$$= - u\, \text{Tg.}\, V\, \text{Cotg.}\, VS, \text{ weil } \text{Cotg.}\, VM\, \text{Cos.}\, V = \text{Cotg.}\, VS,$$

$$= - \frac{3\pi t'}{T^2}\, w^2\, \text{Sin.}\, V\, \text{Sin.}\, VS\, \text{Cos.}\, VS, \text{ (n. 1.)},$$

$$= - \frac{3\pi t'}{2T^2}\, w^2\, \text{Sin.}\, V\, \text{Sin.}\, 2VS.$$

Die Attraction der Sonne bringt also blos periodische Veränderungen in der Schiefe der Ekliptik hervor. Man setze ihre mittlere Schiefe $= E$, die Länge der Sonne $VS = l$, ihre tägliche tropische mittlere Bewegung $= m$, und ihre mittlere Länge für eine gewiße Epoche $= a$; so erhält man aus n. 1., wenn man statt der wahren Länge die mittlere setzt,

$$u = \frac{3\pi t'}{T^2}\, w^2\, \text{Cos.}\, E\, \overline{\text{Sin.}\, l}^2,$$

$$= \frac{3}{2}\, \frac{\pi t'}{T^2}\, w^2\, \text{Cos.}\, E\, (1 - \text{Cos.}\, 2\, l),$$

$$= \frac{3}{2}\, \frac{\pi t'}{T^2}\, w^2\, \text{Cos.}\, E - \frac{3}{2}\, \frac{\pi t'}{T^2}\, w^2\, \text{Cos.}\, E\, \text{Cos.}\, (2a + 2mt).$$

Daher ist nach §. 239. n. 1. wenn man E als constant betrachtet, die von der Attraction der Sonne herrührende retrograde Bewegung der Aequinoktialpunkte in t Tagen

$$= \frac{3}{2}\, \frac{\pi t'.t}{T^2}\, w^2.\, \text{Cos.}\, E - \frac{3\pi t'}{4mT^2} . w^2.\, \text{Cos.}\, E\, \text{Sin.}\, (2a + 2mt).$$

Aus n. 2. erhält man auf ähnliche Art nach §. 239. n. 2. die von der Attraction der Sonne herrührende periodische Veränderung der Schiefe der Ekliptik

$$= + \frac{3\pi t'}{4mT^2} . w^2 \,\text{Sin.}\, E \,\text{Cos.}\, (2a + 2mt).$$

§. 361. Eine ähnliche Bewegung der Erdaxe wird durch die Wirkung des Monds auf das Erdsphäroid hervorgebracht. Die gerade Linie CL Fig. 145. sey nach dem Mittelpunkt des Monds gerichtet, und durch sie sey eine Ebene LCM auf die Ebene des Erdäquators senkrecht gelegt; so mißt der aus C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CM beschriebene Kreisbogen ML die hier nördlich angenommene Abweichung d' des Monds, und der Bogen MS die Abweichung d eines Punkts, welcher mit dem Mond eine gleiche gerade Aufsteigung VM hat. Man setze den Abstand des Monds von der Erde $= r'$, und die Kraft, mit welcher er einen in der Distanz r' von ihm befindlichen Körper anzieht $= k'$; so ist nach dem vorhergehenden §. die aus der Attraction des Monds auf das Erdsphäroid entstehende mit CL parallel wirkende Kraft, vermöge welcher die Erde, wenn sie keine Axendrehung hätte, in der Ebene MCL als ein zusammengesetztes Pendel schwingen würde, $= \frac{3k'}{2} . \frac{b}{r'} w^2 \,\text{Cos.}\, d' \sqrt{1 + w^2}$. Man nehme auf der durch den Punkt M mit CL parallel gezogenen MK die MF' dieser Kraft proportional, ziehe durch F die parallele FT mit CM, und durch M die Parallele MF mit CS, welche der ersteren in F begegne; so zerfällt die Kraft MF' in zwey andere MF und FF', von welchen die letztere mit CM parallel wirkende keinen Einfluß auf die Bewegung der Erdaxe hat. Die erstere MF verhält sich zu $MF' = \text{Sin.}\, MF'F : \text{Sin.}\, MFF' = \text{Sin.}\, MCL :$ $\text{Sin.}\, MCS = \text{Sin.}\, d' : \text{Sin.}\, d$; folglich ist $MF = \frac{MF' \,\text{Sin.}\, d'}{\text{Sin.}\, d} =$ $\frac{3k'}{2} . \frac{b}{r'} w^2 \frac{\text{Sin.}\, d'}{\text{Sin.}\, d} \text{Cos.}\, d' \sqrt{1 + w^2}$. Nun ist aber, wenn man die Erdmasse $= 1$, die Sonnenmasse $= M$ und die Masse des Monds $= \mu$ setzt, vermöge des Newtonischen Gravitationsgesetzes

$$k : k' = r'^2 . M : r^2 . \mu,$$

und $M + 1 : 1 + \mu = a^3 . T'^2 : a'^3 . T^2$ (§. 301. n. 3.)

folglich $(M + 1) k : (1 + \mu) k' = \frac{a^3 . M . T'^2}{r^2} : \frac{a'^3 \mu . T^2}{r'^2}$, oder, weil die Erdmasse in Vergleichung mit der Masse der Sonne sehr klein ist,

$$\frac{k}{r} : \frac{k'}{r'} = T'^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 : \frac{\mu . T^2}{1 + \mu} \left(\frac{a'}{r}\right)^3.$$

Da man bey dieser Untersuchung die aus den Veränderungen der Abstände der Sonne und des Monds von der Erde entstehende Veränderungen ihrer Attractionkräfte vernachläßigen kann; so ist nahe

$$1.)\ \frac{k}{r} : \frac{k'}{r'} = 1 \quad \left(\frac{T}{T'}\right)^2 . \frac{\mu}{1+\mu}$$

$$= 1 : \lambda, \text{ zur Abkürzung.}$$

Also ist $\frac{MF}{Mt} = \frac{3\lambda.\pi.t'}{T^2} w^2. \frac{\text{Sin.}\,d'}{\text{Sin.}\,d} \text{Cos.}\,d'$, und weil $\frac{HM}{CM} =$ Sin. VM, $\frac{SR}{CM} =$ Sin. VS; so ist, wenn man die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Aequinoktialpunkt V wegen der Einwirkung des Monds gegen v hin rückt, oder sich rükwärts bewegt, $= U$ setzt,

$$2.)\ U = \frac{3\lambda.\pi.t'}{T^2} w^2 \frac{\text{Sin.}\,d'}{\text{Sin.}\,d} \text{Cos.}\,d' \,\text{Sin.}\,VM \,\text{Sin.}\,VS \text{ (§. 359.).}$$

$$= \frac{3\lambda.\pi.t'}{T^2} w^2 \frac{\text{Sin.}\,d'}{\text{Sin.}\,V} . \frac{\text{Cos.}\,d'}{\text{Cos.}\,d} \text{Cos.}\,V \text{Sin.}\,VS,$$

weil in dem bey M rechtwinklichten sphärischen Dreyeck VSM die Cotg. $V =$ Sin. VM Cotg. MS ist.

Es sey ABC (Fig. 146.) die Ebene des Aequators, CDE die Ebene der Ekliptik, C der Mittelpunkt der Erde, L der Mittelpunkt des Monds. Man fälle aus L das Perpendickel LM auf die Ebene des Aequators, ziehe MV auf die Aequinoktiallinie CG senkrecht, und lege durch LM und MV eine Ebene, welche auf CG senkrecht seyn, und die Ebene GE der Ekliptik in der geraden Linie VS schneiden wird. Endlich fälle man aus L das Perpendickel LL' auf die Verlängerung von VS, und ziehe CL, CL', CS, und CM; so ist die Länge l' des Monds $= VCL'$, seine Breite $b' = LCL'$, seine gerade Aufsteigung $= VCM$, seine Abweichung $d' = MCL$, $MCS = d$, und VCS der Winkel, welcher in der 145sten Figur durch den Bogen VS gemeßen wird. Da nun

$$CS : CV = 1 : \text{Cos.}\,VCS,$$
$$CV : CL' = \text{Cos.}\,l' : 1,$$
$$CL' : CL = \text{Cos.}\,b' : 1;$$

so ist $\left.\begin{matrix} CS : CL \\ \text{Cos.}\,d' : \text{Cos.}\,d \end{matrix}\right\} = \text{Cos.}\,b' \,\text{Cos.}\,l' : \text{Cos.}\,VCS.$

Daher $\frac{\text{Cos.}\,d'}{\text{Cos.}\,d} \text{Sin.}\,VCS = \text{Cos.}\,b' \,\text{Cos.}\,l' \,\text{Tg.}\,VCS,$

$$= \frac{VS}{CV} . \text{Cotg.}\,b' \,\text{Cos.}\,l',$$

$$= \frac{VS}{CL'} . \text{Cos.}\,b',$$

$$= \frac{VL' - L'S}{CL'} . \text{Cos.}\,b',$$

$$= \frac{CL \text{ Sin. } l' - CL' \text{ Tg. } b' \text{ Tg. } V}{CL'} \text{ . Cos. } b'$$

$$= (\text{Sin. } l - \text{Tg. } b' \text{ Tg. } V) \text{ Cos. } b'.$$

Man ziehe noch durch L' die Parallele lm mit LM, und durch L die Parallele Ll mit Vm; so ist

$$\left.\begin{matrix}\text{Sin. } MCL \\ \text{Sin. } d'\end{matrix}\right\} = \frac{LM}{CL} = \frac{mL' + L'l}{CL},$$

$$= \frac{CL.\text{Cos. } b' \text{ Sin. } l' \text{ Sin. } V + CL \text{ Sin. } b' \text{ Cos. } V}{CL};$$

also $\frac{\text{Sin. } d'}{\text{Sin. } V} = \text{Cos. } b' (\text{Sin. } l' + \text{Tg. } b' \text{ Cotg. } V).$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung n. 2.; so erhält man

$$U = \frac{3\lambda.\pi.t'}{T^2} w^2.\overline{\text{Cos. } b'}^2 (\text{Sin. } l' + \text{Tg.} b' \text{ Cotg.} V)(\text{Sin. } l' - \text{Tg.} b' \text{Tg.} V) \text{Cos.} V,$$

$$= \frac{3\lambda.\pi.t'}{T^2} w^2.\overline{\text{Cos. } b'}^2 (\overline{\text{Sin. } l'}^2 + 2\text{Tg.} b' \text{ Sin.} l' \text{Cotg.} 2V - \overline{\text{Tg.} b'}^2) \text{Cos. } V,$$

weil $\text{Cotg. } V - \text{Tg. } V = 2 \text{ Cotg. } 2 V.$

Sey die Länge des aufsteigenden Mondsknotens $= n$, und die Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik $= i$; so sind

$$\text{Tg. } b' = \text{Tg. } i \text{ Sin. } (l' - n) \text{ (§. 175. n. 1.)},$$
$$= h \text{ Sin. } (l' - n), \text{ wenn man Tg. } i = h \text{ setzt};$$

$$\overline{\text{Sec. } b'}^2 = 1 + h^2 \text{ Sin.} \overline{(l' - n)}^2$$

$$\overline{\text{Cos. } b'}^2 = 1 - h^2 \text{ Sin. } \overline{(l' - n)}^2 + \&c.$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} h^2 + \tfrac{1}{2} h^2 \text{ Cos. } 2 (l' - n) + \&c.$$

Man setze diese Werthe in den vorhin gefundenen Ausdruck von U; so erhält man nach gehöriger Reduction, wenn man V der mittleren Schiefe E der Ekliptik gleich setzt,

$$3.)\ U = \tfrac{3}{2}\lambda. \frac{\pi\ t'.w^2}{T^2} \Big((1 - \tfrac{3}{2}h^2) \text{ Cos. } E + (1 - \tfrac{1}{2} h^2)\ h \frac{\text{Cos.} 2E}{\text{Sin. } E} \text{ Cos. } n$$
$$- (1 - \tfrac{1}{2} h^2) \text{ Cos. } E \text{ Cos. } 2 l' + \&c. \Big)$$

Die hier vernachläßigten Glieder sind, wie man leicht durch weitere Ausführung der Rechnung findet, so klein, daß ihr Einfluß auf die Bewegung der Aequinoktialpunkte für die Beobachtungen unmerklich ist.

Die Geschwindigkeit U', mit welcher sich wegen der Wirkung des Monds die Schiefe V der Ekliptik verändert, ist, wie man in dem 360sten §. n. 2. gesehen hat, $= - U \text{ Tang.} V \text{ Cotg.} VS.$

Also ist, wenn man statt U seinen Werth aus n. 2. setzt,

$$U' = - \frac{3\lambda\ \pi.t'.w^2}{T^2} \cdot \frac{\text{Sin. } d'}{\text{Sin. } V} \cdot \frac{\text{Cos. } d'}{\text{Cos. } d} \text{ . Sin. } V. \text{ Cos. } VS.$$

Es ist aber, wie oben gezeigt worden ist, $\frac{\text{Cos.}\,d'}{\text{Cos.}\,d}\,\text{Cos.}\,VS =$ $\text{Cos.}\,b'\,\text{Cos.}\,l'$, und $\frac{\text{Sin.}\,d'}{\text{Sin.}\,V} = \text{Cos.}\,b'\,(\text{Sin.}\,l' + \text{Tg.}\,b'\,\text{Cotg.}\,V) =$ $\text{Cos.}\,b'\,(\text{Sin.}\,l' + h\,\text{Sin.}\,(l'-n)\,\text{Cotg.}\,V)$; folglich ist

$$U' = -\frac{3\lambda\,\pi.t'.w^2}{T^2}\,\overline{\text{Cos.}\,b'}^2\,(\text{Sin.}\,l' + h\,\text{Sin.}\,(l'-n)\,\text{Cotg.}\,V)\,\text{Cos.}\,l'.\text{Sin.}\,V,$$

$$= -\frac{3\lambda.\pi.t'.w^2}{2\,T^2}\,\overline{\text{Cos.}\,b'}^2\,(\text{Sin.}\,2l' + h\,\text{Cotg.}\,V\,\text{Sin.}\,(2\,l'-n) - h\,\text{Cotg.}\,V\,\text{Sin.}\,n)\,\text{Sin.}\,V,$$

woraus man wie vorhin erhält

$$4.)\ U' = -\tfrac{3}{2}\lambda.\,\frac{\pi.t'.w^2}{T^2}\,((1-\tfrac{1}{2}h)\,\text{Sin.}\,E.\text{Sin.}\,2l' - (1-\tfrac{1}{2}h^2)\,\text{Cos.}\,E.\text{Sin.}\,n + \&c.)$$

Es seyen a', a'' die mittleren Längen des Monds und seines aufsteigenden Knotens für eine gewisse Epoche, und m', m'' ihre tägliche tropische Bewegungen; so ist für t Tage nach dieser Epoche die mittlere Länge des Monds $= a' + m't$, und die mittlere Länge seines aufsteigenden Knotens $= a'' - m''t$. Da man nun in den Ausdrücken der sehr kleinen periodischen Veränderungen, welche der Mond in der Lage der Erdaxe hervorbringt, statt der wahren Längen des Monds und seines Knotens die mittleren, oder $a' + m't$, $a' - m''t$ statt l' und n setzen kann; so erhält man aus n. 3. u. 4. nach §. 239. n. 1. u. .. die von der Attraction des Monds herrührende retrograde Bewegung der Aequinoktialpunkte in t Tagen,

$$= \tfrac{3}{2}\lambda.\,\frac{\pi.t'.t}{T^2}\,w^2.\,(1-\tfrac{3}{2}h^2)\,\text{Cos.}\,E$$

$$-\tfrac{3}{2}\lambda.\,\frac{\pi.t'}{T^2}\,w^2.\left(\frac{(1-\frac{1}{2}h^2)\,h}{m''}\,\frac{\text{Cos.}\,2E}{\text{Sin.}\,E}\,\text{Sin.}\,n + \frac{1-\frac{1}{2}h^2}{2m'}\,\text{Cos.}\,E\,\text{Sin.}\,2l'\right),$$

und die Veränderung der Schiefe der Ekliptik

$$= +\tfrac{3}{2}\lambda.\,\frac{\pi.t'}{T^2}\,w^2\left(\frac{(1-\frac{1}{2}h^2)}{2m'}\,\text{Sin.}\,E\,\text{Cos.}\,2l' + \frac{(1-\frac{1}{2}h^2)\,h}{m''}\,\text{Cos.}\,E\,\text{Cos.}\,n\right).$$

§. 362. Das mittlere Zurückweichen der Aequinoktialpunkte beträgt also in t Tagen

$\frac{3}{2}\,\frac{\pi.t'.t}{T^2}\,.\,w^2\,\text{Cos.}\,E$ wegen der Wirkung der Sonne (§. 360.), und

$\frac{3}{2}\,\lambda.\,\frac{\pi.t'.t}{T^2}\,w^2\,(1-\frac{3}{2}h^2)\,\text{Cos.}\,E$ wegen der Wirkung des Monds (§. 361.).

Will man mehrerer Genauigkeit halber die Quadrate der Excentricitäten e und e' der Bahnen der Erde und des Monds beybehalten; so darf man nur auf die Ausdrücke von $\frac{MF}{Mt}$ zurückgehen, in welchen man die Größen $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ und $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = 1$ gesetzt hat. Es ist aber (Note zu §. 323. pag. 576.) $\left(\frac{a}{r}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + ..$, und ebenso $\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e'^2 + \&c.$; folglich muß man, um diese Größen noch in Rechnung zu bringen, die vorhergehenden Ausdrücke der mittleren Bewegung der Aequinoktialpunkte beziehungsweise mit $1 + \frac{3}{2}e^2$ und $1 + \frac{3}{2}e'^2$ multipliciren. Setzt man noch $t = 365\frac{1}{4}$; so ist das jährliche Zurückweichen der Aequinoktialpunkte wegen der vereinigten Wirkungen der Sonne und des Monds

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi . t' . 365,25}{T^2} w^2 . \text{Cos.}\, E . (1 + \tfrac{3}{2}e^2 + (1 - \tfrac{3}{2}h^2)(1 + \tfrac{3}{2}e'^2)\lambda),$$

die Beobachtungen geben

$t' = 0{,}9972697$ T.; $T = 365{,}25638$ T.; $E = 23^\circ\ 28'$;
$h = 0{,}0900596$; $e = 0{,}01679435$; $e' = 0{,}0550268$;

also ist $\frac{3\pi . t'}{2T^2} = 0{,}0000352256$ in Theilen des Halbm.

$= 7{,}2658$ Sekunden,

und die mittlere jährliche Bewegung der Aequinoktialpunkte

$= 2435'',37 . w^2 . (1 + 0{,}991953 . \lambda)$.

Setzt man nun nach §. 307. die Masse des Monds $= \frac{1}{69,75}$; so wird $\lambda = \frac{1}{70,75}\left(\frac{T}{T'}\right)^2$ (§. 361. n. 1.), $= 2{,}526127$. Und weil unter der Voraussetzung einer gleichförmigen Dichtigkeit der Erde ihre Abplattung $= \frac{1}{231,7}$ (§. 355.), mithin $w^2 = \frac{462,4}{(230,7)^2}$ seyn müßte; so wäre unter eben dieser Voraussetzung die jährliche Bewegung der Aequinoktialpunkte $= 74'',178$, welche 24″ mehr ausmacht, als nach den Beobachtungen (§. 37.). Auch diese Erscheinung zeigt also, daß die Erde nicht gleichförmig dicht ist. Wäre das Gesetz gegeben, nach welchem ihre Dichtigkeit von der Oberfläche an gegen den Mittelpunkt hin zunimmt; so könnte man die mittlere Richtung SK (Fig. 144.) der Kräfte, mit welchen der Körper S die Theilchen der Erde anzieht, die Lage des Punkt G, und das Moment der Trägheit der Erde berechnen. Zu der Bestimmung von G würden die über die Pendellängen angestellten Beobachtungen hinreichend seyn, das Moment der Trägheit hingegen bleibt unbestimmt, wenn das Gesetz nicht gegeben ist, nach welchem sich die Dichtigkeit der Erde von ihrer Oberfläche an bis zu ihrem Mittelpunkt verändert. Uebrigens wird die Lage der Erdaxe sich nach demselben Gesetz verändern, welches bey einer gleichförmigen Dichtigkeit statt finden würde, und man kann in obiger Gleichung w^2 so bestimmen, daß die berechnete Bewegung der Aequinoktialpunkte mit der beobachteten übereinstimmt. Aber das so bestimmte Verhältniß von $w : 1$ wird nicht dem Verhältniß der Excentricität eines Erdmeridians zu der halben Erdaxe gleich seyn, sondern sich auf ein gleichförmig dichtes elliptisches Sphäroid beziehen, welches an die Stelle der Erde gesetzt dieselben Veränderungen in der Lage seiner Umdrehungsaxe zeigen würde, welche man in Bewegungen der Erdaxe beobachtet. Will man w und λ mittelst der beobachteten Veränderungen der Lage der Erdaxe bestimmen; so muß man zwischen w und λ noch eine Gleichung haben, wozu man die gröste der periodischen Veränderungen, nemlich die von dem Cosinus der Länge des aufsteigenden Mondsknotens abhängende, oder die sogenannte **Nutation** der Schiefe der Ekliptik (§. 160.), gebrauchen kann. Diese ist, wenn man die gegebene Zahl $\frac{3\pi . t'}{2T^2}$ mit c bezeichnet, und zugleich das Quadrat der Excentricität der Mondsbahn, wie im Anfang dieses §. gezeigt worden ist, mit in Rechnung nimmt, vermöge des am Ende des 361sten §. gegebenen Ausdrucks

$$= \frac{c . \lambda . w^2 . (1 - \frac{1}{2} h^2 + \frac{3}{2} e'^2) \, h . \text{Cos.}\, E}{m''} \text{Cos.}\, n.$$

Es ist aber $m'' = 190'',639$, und in Theilen des Halbmessers $= 0,0009242438$; folglich ist die Nutation der Schiefe der Ekliptik $= 649'',7493 \, \lambda . w^2 . \text{Cos.}\, n$, und ihr gröster Werth $= 649'',7493 \, \lambda . w^2$. Nach den Beobachtungen ist sie aber $= 9'',63$ (§. 160. nemlich die halbe große Axe der Nutationsellipse); folglich muß seyn $649'',7493 \, \lambda . w^2 = 9'',63$, woraus man erhält

1.) $\lambda . w^2 = 0,0148211$.

Die jährliche mittlere Bewegung der Aequinoktialpunkte in der Ekliptik beträgt nach den Beobachtungen $50'',1$ (§. 37.). Weil aber die Ebene der Erdbahn selbst ihren Neigungswinkel gegen eine unbewegliche Ebene wegen der Einwirkung der Planeten verändert (§. 331.); so entsteht hieraus eine jährliche directe Bewegung der Aequinoktialpunkte von $0'',155$, und daher ist die aus den Attractionen des Monds und der Sonne entstehende Be-Bewegung der Aequinoktialpunkte um $0'',155$ grösser als die beobachtete, mithin $= 50'',255$ (S. den folgenden §.). Man wird also die Gleichung haben

$2435'',37 . w^2 (1 + 0,991953 . \lambda) = 50'',255$,

oder 2.) $w^2 + 0,991953 \, \lambda . w^2 = 0,02063547$.

Setzt man in diese Gleichung den Werth von $\lambda . w^2$ aus n. 1.; so erhält man

$w^2 = 0,00593363$, und mittelst der Gleichung n. 1.

$\lambda = 2,4978$, woraus man nach §. 361. n. 1. die Masse des Monds $= \frac{1}{70,55}$ findet, nahe mit §. 307. übereinstimmend. Aus dem Werth von w^2 ergiebt sich die Abplattung eines gleichförmig dichten elliptischen Sphäroids, welches in Beziehung auf die beobachtete Bewegungen der Erdaxe an die Stelle der Erde gesetzt werden könnte $= \frac{1}{338.8}$.

La Place setzt im Mittel aus mehreren Erscheinungen die Masse des Monds $= \frac{1}{68.5}$ der Masse der Erde *). Hienach wäre $\lambda = 2,57156$, und vermöge der Gleichung n. 2. der Werth von $w^2 = 0,0058139$, mithin nach n. 1. die halbe große Axe der Nutationsellipse $= 9'',71$, sehr nahe mit den Beobachtungen übereinstimmend.

Wird die oben gefundene Masse des Monds $\frac{1}{70.55}$ beybehalten; so ist die von der Attraction des Monds herrührende Veränderung der Schiefe der Ekliptik $= 9'',63. \text{Cos.}\, n$. Vermöge der am Ende des 361sten §. gefundenen Ausdrücke ist die von der Länge des aufsteigenden Mondsknotens abhängende Ungleichheit der Bewegung des Aequinoktialpunkt in der Ekliptik oder die Nutation in der Länge, wenn man auch hier das Quadrat von e' mit in Rechnung nimmt,

$$= - \frac{c.\lambda.w^2.(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{2}e'^2)h}{m''} \cdot \frac{\text{Cos.}\, 2E}{\text{Sin.}\, E} \cdot \text{Sin.}\, n,$$

$$= -9'',63. \frac{\text{Cos.}\, 2E}{\text{Sin.}\, E\, \text{Cos.}\, E}\ \text{Sin.}\, n = -19'',26\ \text{Cotg.}\, 2E.\ \text{Sin.}\, n.$$

Das Gesetz dieser Bewegung der Erdaxe stimmt mit **Bradley's** Beobachtungen (§. 160.) überein. Denn vermöge der so eben gefundenen Nutation in der Länge hat die Bewegung des Aequinoktialpunkts die Ungleichheit $- 9'',63 \frac{\text{Cos.}\, 2E}{\text{Sin.}\, E\, \text{Cos.}\, E}\ \text{Sin.}\, n$. Der senkrechte Abstand des Erdpols von dem durch seinen mittleren Ort gelegten Breitenkreis beträgt also $9,63. \frac{\text{Cos.}\, E}{\text{Sin.}\, E\text{Cos.}\, E}\ \text{Sin.}\, n$ Sekunden des durch diesen Pol gehenden Parallelkreises der Ekliptik, oder, weil der Halbmesser dieses Parallelkreises in dem Verhältniß des Sin. E : Sin. tot. kleiner ist als der Halbmesser eines größten Kreises, $9,63 \frac{\text{Cos.}\, 2E}{\text{Cos.}\, E}\ \text{Sin.}\, n$ Sekunden eines größten Kreises der Sphäre. Die größte östliche und westliche Elongation des Pols des Aequators von seinem mittleren Ort findet statt, wenn $n = 90°$ oder $= 270°$ ist, wo sie $9,63 \frac{\text{Cos.}\, 2E}{\text{Cos.}\, E}$ Sekunden ausmacht. Wegen der Nutation in der Richtung der Breite, welche $9,63\ \text{Cos.}\, n$ Sek. beträgt, und für $n = 0$ und $180°$ auf 9,63 Sekunden steigt, ändert sich der Abstand des Pols des Aequators von dem Pol der Ekliptik dem Cosinus der Länge des aufsteigenden Mondsknotens proportional. Die östliche und westliche Elongation ändert sich dem Sinus eben dieses Winkels proportional, und daher würde, wenn das Maximum der letzteren eben-

*) Méc. cél. T. III. L. VI. Ch. XVI. pag. 160.

ebenfalls auf 9″,63 stiege, der Pol des Aequators um seinen mittleren Ort einen Kreis von dem scheinbaren Halbmesser 9,63 Sek. beschreiben. Diese Elongationen sind aber in dem gegebenen Verhältniß von Cos. $2E$: Cos. E kleiner, als sie bey dieser Kreisbewegung seyn würden; folglich beschreibt der Pol um seinen mittleren Ort eine kleine Ellipse an der Himmelskugel, deren halbe große unter einem Winkel von 9,63 erscheinende Axe in der Ebene des durch den Pol des Aequators gehenden Breitenkreises liegt, und sich zu der halben kleinen Axe wie Cos. E : Cos. $2E$ verhält, woraus sich die §. 160. angegebene Construktion ergiebt.

Berechnet man mittelst der oben gefundenen Werthe von c, λ, und w noch die übrigen Glieder der §. 360. und 361. für die Bewegungen der Erdaxe gefundenen Ausdrücke; so erhält man die periodischen Ungleichheiten der Bewegung der Aequinoktialpunkte

$$= -18'',00 \,\text{Sin.}\, n - 1'',150 \,\text{Sin.}\, 2l - 0'',215 \,\text{Sin.}\, 2l',$$

und diese Gleichungen müßen zu den von dem mittleren Aequinoktialpunkt an gerechneten Längen mit ihren Zeichen hinzugefügt werden, um die von dem wahren Aequinoktialpunkt an gerechnete Längen zu erhalten.

Die periodischen Ungleichheiten der Veränderung der Schiefe der Ekliptik sind

$$+ 9'',63 \,\text{Cos.}\, n + 0'',499 \,\text{Cos.}\, 2l + 0'',093 \,\text{Cos.}\, 2l',$$

welche Gleichungen zu der mittleren Schiefe müßen addirt werden, um die wahre Schiefe der Ekliptik zu erhalten *).

Die von der mittleren Länge n des aufsteigenden Mondsknotens abhängende Ungleichheiten der Bewegung der Erdaxe sind diejenigen, welche die Astronomen mit dem Namen der Nutation bezeichnen. Die Theorie zeigt uns noch einige kleinere Ungleichheiten, welche von der Länge der Sonne und des Monds abhängen, und durch sie mit einer viel größeren Genauigkeit bestimmt sind, als man sie durch die Beobachtungen würde haben bestimmen können. Die größere Vollkommenheit der neueren Astronomie erfordert, daß man die von der Länge der Sonne abhängende Nutation der Erdaxe in Rechnung nehme.

§. 363. Wir haben bisher die Ebene der Erdbahn, auf welche die Veränderung der Lage der Erdaxe bezogen wurde, als eine unbewegliche Ebene betrachtet. Diese verändert aber wegen der Attraction der Planeten ihre Lage (§. 331.); folglich muß, wenn man die Lage der Erdaxe auf eine unbewegliche Ebene be-

*) Die von La Place in der Méc. cél. T II. pag. 350 gegebenen Ausdrücke gründen sich auf die Voraussetzung $\lambda = 3$, weswegen die von der Sonnenlänge abhängende Ungleichheiten kleiner sind. Die daselbst angegebenen Coefficienten der Sinus und Cosinus der doppelten Mondslängen müßen noch, wie man aus den allgemeinen Formeln sieht, mit λ multiplicirt werden.

zieht, aus der Wirkung der Sonne auf das Erdsphäroid eine Nutation der Erdaxe entstehen, welche der durch den Mond hervorgebrachten ähnlich ist, dessen Bahn ihre Lage gegen die Ekliptik ändert. Eine ähnliche Nutation muß aus der Wirkung des Monds entstehen, weil die mittlere Neigung seiner Bahn gegen die Erdaxe constant ist. Nur werden diese von der Veränderung der Lage der Erdbahn abhängende Oscillationen der Erdaxe sehr viel längere Perioden haben, als die bisher betrachtete Nutation. Die Veränderung der Lage der Erdbahn bringt, indem sie sich mit den Wirkungen des Monds und der Sonne auf das Erdsphäroid verbindet, eine von derjenigen sehr verschiedene Veränderung der Schiefe der Ekliptik hervor, welche wegen jener Bewegung der Erdbahn allein statt finden würde. Wäre die Erde genau sphärisch; so würden die Sonne und der Mond weder eine Bewegung der Aequinoktialpunkte, noch eine Veränderung der Schiefe der Ekliptik hervorbringen, und die Secularveränderung der Schiefe der Ekliptik würde der durch die Wirkung der Planeten hervorgebrachten Secularveränderung des Neigungswinkels der Erdbahn gegen eine unbewegliche Ebene gleich seyn. La Place findet *), daß die ganze Veränderung der Schiefe der Ekliptik durch die Wirkung der Sonne und des Monds auf das Erdsphäroid ungefähr auf den vierten Theil desjenigen Werths reducirt wird, welcher wegen der Wirkung der Planeten allein statt haben würde. Aber dieser Unterschied wird erst nach zwey oder drey Jahrhunderten merklich.

Sey die Anzahl der von 1750 an verfloßenen julianischen Jahre $= t$, die Bewegung der Aequinoktialpunkte in einer unbeweglichen Ebene, mit welcher im Jahr 1750 die Ebene der Erdbahn zusammenfiel, $= \Psi$, der Neigungswinkel des Erdäquators gegen diese Ebene $= V$, sodenn die Bewegung der Aequinoktialpunkte in der Erdbahn oder in der wahren Ekliptik $= \Psi'$, und der Winkel des Aequators mit der Ebene der Erdbahn $= V'$; so ist, wenn man die mittlere Schiefe der Ekliptik für das Jahr $1750 = 23^\circ\, 28'\, 18''$ setzt, und nur auf die Secularveränderungen Rücksicht nimmt, nach Méc. cél. T. III. pag. 158.

$$\begin{aligned}
\Psi = {} & 50'',41203.t + 10077'',01 \\
& + 13788'',21 \,\text{Sin.}(85^\circ\, 33'\, 57'',5 + 50'',41203.t) \\
& - 23823'',98 \,\text{Cos.}\, 32'',11575.t - 5693'',46 \,\text{Sin.}\, 13'',94645.t; \\
V = {} & 23^\circ\, 28'\, 18'' - 1191'',22 \\
& - 5892'',78 \,\text{Cos.}\,(85^\circ\, 33'\, 57'',5 + 50'',41203.t) \\
& - 9222'',21 \,\text{Sin.}\, 32'',11575.t + 1646'',79 \,\text{Cos.}\, 13'',94645.t; \\
\Psi' = {} & 50'',41203.t - 4627'',46 \,\text{Sin.}\, 13'',\ 4645.t \\
& + 20154'',03 \,\text{Sin.}\, 16'',057877.t^2; \\
V' = {} & 23^\circ\, 28'\, 18'' - 3347'',05 \,\text{Sin.}\, 32'',11575.t \\
& - 2382'',44 \,\text{Sin.}\, 6'',973225.t^2.
\end{aligned}$$

*) Méc. cél. T. II. pag. 320.

Diese Ausdrücke sind auf Zeiträume von tausend bis zwölfhundert Jahren vor oder nach der Epoche 1750 anwendbar, indem man im ersten Fall t negativ setzt. Hienach beträgt das Zurückweichen der Aequinoktialpunkte in dem Zeitraum von 1750 bis 1850

in der unbeweglichen Ebene $1^\circ\ 23'\ 46'',66$;
in der Ebene der Erdbahn $1\ \ 23\ \ 31,13$;
der Unterschied ist also = $15,53$, von welchem man in dem vorhergehenden §. Gebrauch gemacht hat.

	V	V'
Ferner findet man für 1750	$23^\circ 28' 18'',00$	$23^\circ 28' 18'',00$
für 1850	$23\ \ 28\ \ 18,09$	$23\ \ 27\ \ 25,86$,

woraus sich die Secularabnahme der Schiefe der Ekliptik in dem gegenwärtigen Jahrhundert = $52'',14$ ergiebt. Im Jahr 1800 müßte also die Schiefe der Ekliptik gewesen seyn = $23^\circ\ 27'\ 52'',93$. Nach den Beobachtungen war sie = $23^\circ\ 27'\ 57''$ (§. 331.), und daher scheint, wenn anders die für 1750 angenommene Schiefe richtig ist, die Secularabnahme $52'',14$ zu groß zu seyn (§. 331.).

Noch kann man obigen Ausdrücken, wenn sie nur auf Zeiträume von zwey oder drey Jahrhunderten sich erstrecken sollen, durch Auflösung der trigonometrischen Funktionen in Reihen eine zum Rechnen bequemere Form geben. Man erhält, wenn man diejenige Glieder wegläßt, welche die dritte und höhere Potenzen von t enthalten,

$$\Psi = 50'',28760.t - 0'',0001217943.t^2;$$
$$V = 23^\circ\ 28'\ 18'' + 0'',0000984241.t^2;$$
$$\Psi' = 50'',09915.t + 0'',0001221484.t^2;$$
$$V' = 23^\circ\ 28'\ 18'' - 0'',52114.t + 0'',000002722945.t^2.$$

Der letztere Ausdruck stimmt in dem Coefficienten von t mit dem §. 331. aus der Méc. cél. angeführten überein. Die Coefficienten von t^2 weichen merklich von einander ab.

Die Unterschiede zwischen Ψ und Ψ', V und V' dienen zur Beurtheilung der Veränderung der Lage der Erdbahn gegen die angenommene unbewegliche Ebene. Man sieht, daß die wirkliche Secularveränderung der Lage der Erdaxe selbst in einem Jahrhundert sehr gering, und die Abnahme der Schiefe der Ekliptik sehr nahe der durch die Attraction der Planeten bewirkten Veränderung des Neigungswinkels der Erdbahn gegen eine unbewegliche Ebene (§. 331.) gleich ist. Erst nach mehreren Jahrhunderten wird die wirkliche Secularbewegung der Erdaxe merklich, welche durch die Wirkung der Planeten verbunden mit der Wirkung der Sonne und des Monds auf das Erdsphäroid hervorgebracht wird.

§. 364. **Dieselben Kräfte, welche die Lage der Umdrehungsaxe der Erde verändern, müßen auch beständig Os-**

cillationen des Fluidums hervorbringen, welches den grössern Theil ihrer Oberfläche bedeckt. Es sey $ADBE$ (Fig. 147.) ein Durchschnitt der Erde mit einer durch ihren Mittelpunkt C und den Mittelpunkt S der Sonne gelegten Ebene. Man ziehe EDS und den Durchmesser AB auf DE senkrecht; so werden alle mit der Sonne auf einerley Seite von AB liegende Theilchen stärker von ihr angezogen, als der Mittelpunkt C der Erde, hingegen wird dieser stärker angezogen als die in der anderen von der Sonne abgekehrten Hälfte AEB liegende Theilchen. Zugleich zerfällt die in der Richtung der geraden Linie MS wirkende Kraft MG, mit welcher das Theilchen M angezogen wird, in zwey andere MN und MR, von welchen die eine in der mit SE parallelen Richtung OMN, die andere in der auf SE senkrechten Richtung MP wirkt. Folglich muß das Meer in D und E sich erheben, bey A und B aber sinken, wenn das Gleichgewicht wieder hergestellt werden soll.

Man ziehe CM, und setze die Masse der Sonne $= S$; so ist $MG = \frac{S}{\overline{SM}^2}$ und die Kraft CQ, mit welcher die Sonne den Mittelpunkt C der Erde anzieht $= \frac{S}{\overline{CS}^2}$. Da nun

$$\left.\begin{matrix} GM \\ \text{oder nahe } MN \end{matrix}\right\} : CQ = \overline{CS}^2 : \overline{SM}^2;$$

$$\text{so ist } MN - CQ : CQ = \overline{CS}^2 - \overline{SM}^2 : \overline{SM}^2,$$

$$\text{nahe} = 2\,CP.\,CS : \overline{SM}^2,$$

$$\text{nahe} = 2\,CP : CS,$$ weil CP in Vergleichung mit CS sehr klein ist.

Also ist 1.) $MN - CQ = \frac{2.\,CQ.\,CP}{CS} = \frac{2\,S.\,OM}{\overline{CS}^3}$.

Und weil $GM : MR = SM : PM$,

$$\underline{CQ : GM = \overline{SM}^2 : \overline{CS}^2;}$$

$$\text{so ist } CQ : MR = \overline{SM}^3 : \overline{CS}^2.PM,$$

$$\text{nahe} = CS : PM.$$

Folglich ist 2.) $MR = \frac{CQ.\,PM}{CS} = \frac{S.\,PM}{\overline{CS}^3}$.

Was hier von einem an der Oberfläche liegenden Theilchen bewiesen worden ist, kann auch ebenso von allen innerhalb des Körpers und in irgend einem anderen durch SE gelegten Durchschnitt befindlichen Theilchen gezeigt werden. Wenn also die Erde mit einer durch ihren Mittelpunkt *C* auf *CS* senkrechten Ebene *AB* geschnitten wird; so wird die Schwere ihrer Theilchen auf beyden Seiten dieser Ebene nach einer auf ihr senkrechten Richtung durch die Attraction der Sonne ihren Abständen *MO* von der Ebene *AB* proportional vermindert (n. 1.), und nach einer auf *DE* senkrechten Richtung *MP* den Abständen *MP* proportional vergrößert (n. 2.). Folglich kann, wenn die Erde als flüßig angenommen wird, das Gleichgewicht des Fluidums nur alsdenn bestehen, wenn sie die Gestalt eines elliptischen Sphäroids hat, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre große Axe beschrieben wird (§. 353.), und die Axe dieses Sphäroids gegen die Sonne gerichtet ist. Bey der Umdrehung der Erde um ihre Axe werden die Pole dieses Sphäroids nach und nach anderen Punkten der Oberfläche der Erde entsprechen, und namentlich zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen den Umfang des Erdäquators durchlaufen. Aehnliche Bewegungen werden durch die Attraction des Monds hervorgebracht werden, woraus diejenige Erscheinungen entstehen, welche unter dem Namen der Ebbe und Fluth bekannt sind. Zur Zeit der Syzygien ist die Erhöhung des Meers eine Wirkung der Summe der anziehenden Kräfte der Sonne und des Monds, zur Zeit der Quadraturen aber ihrer Differenz, weil in dem letzteren Fall die Axe des Sphäroids, welches der Mond hervorzubringen strebt, mit der Axe desjenigen Sphäroids einen rechten Winkel macht, welches durch die Attraction der Sonne allein würde hervorgebracht werden. Man beobachtet, daß die Ebbe und Fluth auch in den Quadraturen sich nach dem Lauf des Monds richtet. Folglich übertrifft die Kraft, mit welcher der Mond die Theilchen der Erde anzieht, die Kraft mit welcher eben diese Theilchen von der Sonne angezogen werden, welches mit den Erscheinungen der Nutation übereinstimmt. Während eines täglichen Umlaufs des Monds entsteht zweymal Fluth und zweymal Ebbe. Weil aber das Wasser einige Zeit gebraucht, um nach denjenigen Gegenden hin zu strömen, wo es durch die Attractionen des Monds und der

Sonne erhöht wird; so tritt die Fluth erst nach dem Durchgang des Monds durch den Meridian ein. Diese Verspätigung ändert sich mit den Abständen des Monds von der Sonne, indem diese die Wirkung des Monds bald vergrössert, bald vermindert. Die Größe der Fluth ändert sich mit der anziehenden Kraft, also mit den Entfernungen des Monds und der Sonne von der Erde, und an einem gegebenen Ort der Erde zugleich mit den Declinationen dieser Himmelskörper, oder mit ihren Mittagshöhen.

§. 365. Das Axenverhältniß des ablangen elliptischen Sphäroids, bey welchem unter der hier gemachten Voraussetzung das Gleichgewicht bestehen könnte, kann so gefunden werden. Es sey wie man in dem 354sten §. vorausgesetzt hat, DE (Fig. 148.) die Umdrehungsaxe des Sphäroids, aber es sey jetzt DE grösser als der Durchmesser AB des Aequators. Man setze

$\frac{\overline{DC}^2 - \overline{AC}^2}{\overline{DC}^2} = x^2$; so ist $\frac{\overline{AC}^2 - \overline{DC}^2}{\overline{DC}^2} = -x^2$, oder, wenn man die §. 355. gebrauchten Benennungen beybehält, $w^2 = -x^2$. Also muß man in den Ausdrücken n. 9. und 10. des 355sten §. statt w setzen $x\sqrt{-1}$. Es ist aber

$$Arc. \operatorname{Tg.} x\sqrt{-1} = (x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \&c.)\sqrt{-1},$$
$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \operatorname{Lg.} \frac{1+x}{1-x};$$

folglich ist, wenn man die Erdmasse $Md = 1$ setzt,

die Gravitation am Pol D des ablangen Sphäroids $\Big\} = \dfrac{3\left(\frac{1}{2}\operatorname{Lg.}\frac{1+x}{1-x} - x\right)}{x^3 . \overline{CD}^2}$,

und die Gravit. in A unter dem Aequat. $\Big\} = \dfrac{3\left(x - \frac{1}{2}(1-x^2)\operatorname{Lg.}\frac{1+x}{1-x}\right)}{2\,\overline{CD}^2 . x^3\sqrt{1-x^2}}$ *).

Man setze den Abstand der Sonne von der Erde $= R$; so ist die durch die Sonne bewirkte Verminderung der Schwere unter den Polen D und E des Sphäroids $= \frac{2 S . DC}{R^3}$ (§. 364. n. 1.), und die Vergrößerung unter dem Aequator $= \frac{S . AC}{R^3}$ (§. 364. n. 2). Folglich muß sich nach §. 353. im Fall des Gleichgewichts verhalten

*) Dieselben Ausdrücke ergeben sich aus Maclaurin Treat. of Flux. n. 647. pag. 537.

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}\,\text{Lg.}\,\frac{1+x}{1-x}-x\right)}{x^3.\,\overline{CD}^2}-\frac{2\,S.\,CD}{R^3}:\frac{3\left(x-\frac{1}{2}(1-x^2)\,\text{Lg.}\,\frac{1+x}{1-x}\right)}{2.\,\overline{CD}^2\cdot x^3\sqrt{1-x^2}}+\frac{S.\,AC}{R^3}$$

$$=\left\{\begin{matrix} AC & CD \\ \sqrt{1-x^2} & 1 \end{matrix}\right.\text{, woraus man erhält}$$

$$\frac{9-3x^2}{2}\,.\,\text{Lg.}\,\frac{1+x}{1-x}-9x=2S.\left(\frac{CD}{R}\right)^3\left(\frac{AC}{CD}\sqrt{1-x^2}\right)x^3,$$

$$=2S\left(\frac{CD}{R}\right)^3(3-x^2)\,x^3.$$

Sey 1.) $q=S.\left(\frac{CD}{R}\right)^3(3-x^2)$; so wird

2.) $\frac{1}{2}\,\text{Lg.}\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{9x+2qx^3}{9-3x^2}$,

oder $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\ldots=\frac{9x+2qx^3}{9-3x^2}$,

mithin $\frac{2}{5}x^2+\frac{12}{35}x^4+\&c.=q$.

Also ist 3.) x^2 nahe $=\frac{5}{2}\,q$.

Da nun $CD \quad CA = 1 \quad \sqrt{1-x^2}$

$= 1 : 1-\frac{1}{2}x^2-\&c.$

so ist $CD-CA:CD+CA=\frac{1}{2}x^2:2-\frac{1}{2}x^2$, oder, wenn man den mittleren Erdhalbmesser $\frac{CD+CA}{2}=r$ setzt,

4.) $CD-CA=\frac{1}{2}rx^2=\frac{5}{4}\,r.\,q$ (n. 3.).

Man setze den mittleren Abstand der Sonne von der Erde $=a$, und ihre mittlere Horizontalparallaxe $=p'$; so ist

$\frac{CD}{a}=\text{Sin.}\,p'$, $\frac{CD}{R}=\frac{a}{R}\,\text{Sin.}\,p'$, und

5.) $q=S.\,\overline{\text{Sin.}\,p'}^3.\,(3-x^2)\,\frac{a^3}{R^3}$ (n. 1.),

nahe $=3S.\,\overline{\text{Sin.}\,p'}^3\cdot\frac{a^3}{R^3}$;

folglich 6.) $CD-CA=\frac{15}{4}\,r.\,S.\,\overline{\text{Sin.}\,p'}^3.\left(\frac{a}{R}\right)$.

Unter der Voraussetzung der Sonnenparallaxe $p'=8'',8$ ist $S=331144$, und r kann man der halben Summe des Halbmessers des Aequators und der halben Erdaxe $=3266327$ Toiſ. (§. 143.) $=72.\,3266327$ par. Zollen setzen; folglich wird für den mittleren Abstand der Sonne von der Erde $CD-CA=22,67843$ Zollen $=1$ Fuß $10\frac{2}{3}$ Zoll *).

*) Newton, welcher zuerst die Ebbe und Fluth nach der Theorie der allgemeinen Schwere berechnet hat, fand 1 Fuß $11\frac{1}{30}$ Zoll. Princ. L. III, prop. XXXVI.

Man schneide das Sphäroid mit einer durch seine Axe DE auf die Ebene des Erdäquators senkrecht gelegten Ebene $ADBE$, und es sey NO die Durchschnittslinie dieser zwey Ebenen: so wird, weil die Verlängerung von DE durch den Mittelpunkt der Sonne geht, der Winkel OCD die Abweichung der Sonne messen, und an einem unter dem Aequator liegenden Punkt O der Unterschied der Höhen des Meeres bey der Fluth und Ebbe $= CO - CA$ seyn. Denn der Schnitt des Wassersphäroids mit einer durch NO auf die Ebene $ADBE$ senkrecht gelegten Ebene ist eine Ellipse, deren große Axe $= NO$, und deren kleine Axe dem Durchmesser AB des Aequators des Wassersphäroids gleich ist. Man findet aber aus dem §. 138. zwischen n. 3. und 4. vorkommenden Ausdrücken, wenn man d statt l' setzt, und die Quadrate und höhere Potenzen des in gegenwärtigem Fall sehr kleinen Bruchs $\frac{a-b}{a}$ vernachläßigt, $CO = CD - (CD - CA)\,\overline{\text{Sin.}\,d}^2$. Folglich ist 7.) $CO - CA = (CD - CA)\,\overline{\text{Cos.}\,d}^2$,

$$= \frac{15}{4}\, r.\, S\, \overline{\text{Sin.}\,p'}^3 \left(\frac{a}{R}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d}^2.$$

Es liege nun ein Ort o (Fig. 148.) ausserhalb des Erdäquators, und es werde das Wassersphäroid mit einer dem Erdäquator NO parallel gelegten Ebene no geschnitten; so ist der Schnitt eine Ellipse, deren große Axe no sich zu ihrer kleinen Axe wie $NO : AB$ verhält (§ 348. n. 4.). Also verhält sich auch, wenn man om dem Ueberschuß der halben großen Axe über die halbe kleine Axe dieser Ellipse gleich macht, $CO - CA : om = NO : on$, oder wegen der geringen Abweichung des Sphäroids von der Kugelgestalt sehr nahe wie der Sinus totus zu dem Cosinus der Breite des Orts o. Man ziehe den Halbmesser Co, und mr auf Co senkrecht; so ist, weil Co nahe mit der Richtung der Schwere zusammenfällt, or der Ueberschuß der Fluthhöhe über die Ebbe. Man setze die Breite von $o = L$; so ist nahe $or = mo\,\text{Cos.}\,L = (CO - CA)\,\overline{\text{Cos.}\,L}^2$. Also ist unter der Breite L die von der Wirkung der Sonne herrührende Fluthhöhe über die Ebbe

$$8.) = \frac{15}{4}\, r.\, S.\, \overline{\text{Sin.}\,p'}^3\, \overline{\text{Cos.}\,L}^2 \left(\frac{a}{R}\right)^3 \text{Cos.}\,d^2.$$

Vermöge n. 1. und 4. ist die Fluthhöhe direct der Masse des Himmelskörpers, welcher die Bewegungen des Meeres hervorbringt, und umgekehrt dem Würfel seiner Entfernung von der Erde proportional. Wenn man also die Erdmasse wie bisher $= 1$, die Masse des Monds $= \mu$, seinen Abstand von der Erde $= R'$, und diejenige Größe, welche in Beziehung auf die Sonne mit q bezeichnet wurde, in Beziehung auf den Mond $= q'$ setzt; so wird man haben $q' = \mu \left(\frac{CD}{R'}\right)^3 (3 - x^2)$, nahe $= 3\mu \left(\frac{CD}{R'}\right)^3$.

Es ist aber, wenn man den mittleren Abstand des Monds von der Erde $= a'$, seine siderische Umlaufszeit $= T'$, und die siderische Umlaufszeit der Erde $= T$ setzt,

$$\frac{S+1}{a^3} \quad \frac{1+\mu}{a'^3} = T'^2 \quad T^2 \text{ (§. 301. n. 3.);}$$

folglich ist $\frac{\mu}{a'^3} = \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{T}{T}\right)^2 \frac{S+1}{a^3}$,

$$\text{sehr nahe} = \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{T}{T}\right)^2 . \frac{S}{a^3} = \frac{178,72.\mu}{1+\mu} . \frac{S}{a^3},$$

$$= \lambda . \frac{S}{a^3}, \text{ zur Abkürzung,}$$

$$\text{und } \mu.\left(\frac{CD}{R'}\right)^3 = \lambda.S.\left(\frac{CD}{a}\right)^3 \left(\frac{a'}{R'}\right)^3$$

Man setze noch die Abweichung des Monds $= d'$; so ist vermöge n. 8. unter der Breite L die von der Wirkung des Monds herrührende Fluthhöhe über die Ebbe

$$9.) = \frac{15}{4} r.S.\overline{\text{Sin}.p'}^3 \lambda.\left(\frac{a'}{R'}\right)^3 \overline{\text{Cos}.d'}^2.$$

Wenn der Mond mit der Sonne in Conjunktion oder Opposition ist; so ist die Fluthhöhe die Summe der Höhen, welche durch die Wirkungen der Sonne und des Monds einzeln genommen würden hervorgebracht worden seyn. Folglich ist nach n. 8. und 9. um die Zeit der Syzygien die aus den vereinigten Wirkungen des Monds und der Sonne entstehende Fluthhöhe über die Ebbe

$$10.) = \frac{15}{4} r.S.\overline{\text{Sin}.p'}^3 . \overline{\text{Cos}.L}^2 \left(\left(\frac{a}{R}\right)^3 \overline{\text{Cos}.d}^2 + \lambda.\left(\frac{a'}{R'}\right)^3 \overline{\text{Cos}.d'}^2\right)$$

§. 366. Die Unregelmäßigkeit der Tiefe des Meeres, die Art, nach welcher es über die Erde verbreitet ist, die Lage und der Abhang der Ufer, ihre Verhältniße gegen die benachbarten Küsten, die Strömungen, der Widerstand, welchen die Gewässer leiden, alle diese Ursachen, welche man nicht der Berechnung unterwerfen kann, modificiren die Oscillationen dieser großen flüssigen Masse. Man kann daher nur die allgemeinen Erscheinungen, welche aus den Anziehungen des Monds und der Sonne entstehen müßen, zergliedern, und aus den Beobachtungen die Data ableiten, welche zu der Ergänzung der Theorie der Ebbe und Fluth in einem jeden Hafen erforderlich sind, und von der Größe des Meeres, von seiner Tiefe, und von den Localumständen des Hafens abhängen.

Den Werth von λ kann man zwar, wie in dem 362sten §. gezeigt worden ist, unabhängig von den Erscheinungen der Ebbe und Fluth bestimmen. Weil aber auch diese Größe durch

Localumstände geändert werden kann; so ist es nöthig, sie durch die Beobachtungen der Ebbe und Fluth zu bestimmen. Nach vielen in dem Hafen von Brest angestellten Beobachtungen ist daselbst die Höhe der Fluth über die Ebbe um die Zeit der Syzygien im Mittel genommen $= 18{,}126$ Fuß, um die Zeit der Quadraturen aber $= 8{,}586$ F. Also verhält sich nahe die Summe der Wirkungen des Monds und der Sonne zu ihrer Differenz, oder $\lambda + 1 : \lambda - 1 = 18{,}126 : 8{,}586$, und $\lambda : 1 = 26{,}712 : 9{,}54 = 2{,}8 : 1$. La Place fand durch eine genauere Berechnung dieser Beobachtungen $\lambda = 2{,}9677$ *), und setzte in runder Zahl $\lambda = 3$. Es ist aber nach dem vorhergehenden §. $\lambda = \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = 178{,}72 . \frac{\mu}{1+\mu}$; folglich ist für $\lambda = 3$ der Werth von $\mu = \frac{1}{58{,}57}$. Die Mondsgleichung der Sonnentafeln hat gegeben $\frac{1}{69{,}75}$ (§. 308.), die Nutation $\frac{1}{70{,}55}$ (§. 362. pag. 671.), und vermöge der beobachteten Horizontalparallaxe des Monds muß die Masse des Monds ebenfalls nahe $= \frac{1}{70}$ seyn (§. 310.). Also ist wirklich in dem Hafen von Brest das Verhältniß der Wirkung des Monds zu der Wirkung der Sonne auf das Meer größer, als es vermöge der Masse des Monds seyn sollte.

Man setze nun nach Anleitung der Gleichung n. 10. des vorhergehenden §. die Fluthhöhe über die Ebbe um die Zeit der Syzygien $= h'\left(\left(\frac{a}{R}\right)^3 \overline{\operatorname{Cos.} d}^2 + \lambda . \left(\frac{a'}{R'}\right)^3 \overline{\operatorname{Cos.} d'}^2\right)$, wo h' eine durch Beobachtungen zu bestimmende Größe ist. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen sind $\operatorname{Cos.} d$ und $\operatorname{Cos.} d'$, so wie $\frac{a}{R}$, nahe $= 1$, und wegen der Variation ist in den Syzygien der Abstand des Monds von der Erde im Mittel genommen um $\frac{1}{120}$ kleiner, als sein mittlerer Abstand a' **); mithin der mittlere Werth von $\left(\frac{a'}{R'}\right)^3$ in den Syzygien nahe $= \frac{41}{40}$. Wird nun die mittlere aus einer großen Anzahl von Beobachtungen geschloßene Fluthhöhe über die Ebbe um die Zeit der Syzygien und Aequinoctien mit $2h$ bezeichnet; so wird man die Gleichung haben

$$2h = h'\left(1 + \tfrac{41}{40}\lambda\right),$$

aus welcher man erhält $h' = \frac{40}{40 + 41\lambda} 2h$,

$$= \frac{40}{163} . 2h, \text{ für } \lambda = 3.$$

Setzt man diesen Werth von h' in den vorhergehenden allgemeinen Ausdruck, und $\lambda = 3$; so erhält man für die Syzygien

*) Méc. cél. T. II. pag. 269.
**) Méc. cél. T. II. pag. 250.

die Fluthhöhe über die Ebbe $\Big\} = \frac{40}{163} \cdot 2h\left(\left(\frac{a}{R}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d}^2 + 3\left(\frac{a'}{R'}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d'}^2\right)$ *).

Um die Zeit der Quadraturen ist nahe

die Fluthhöhe über die Ebbe $\Big\} = \frac{40}{163} \cdot 2h\left(3\left(\frac{a'}{R}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d'}^2 - \left(\frac{a}{R}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d}^2\right)$.

In dem Hafen von **Brest** z. B. ist $2h = 19{,}27$ Fuß. Hieraus findet sich $h' = 4{,}73$, und daher die Fluthhöhe über die Ebbe $= 4{,}73\left(\left(\frac{a}{R}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d}^2 + 3\left(\frac{a'}{R'}\right)^3 \overline{\text{Cos.}\,d'}^2\right)$ Fuß.

Der Quotient $\frac{a'}{R'}$ kann mittelst der Tafel der Mondsparallaxe gefunden werden.

Man setze die Horizontalparallaxe des Monds in seiner mittleren Entfernung a' von der Erde $= P'$, in der Distanz R' aber $= P$; so verhält sich $a' : R' = \text{Sin.}\,P : \text{Sin.}\,P'$ (§. 49. n. 1.), nahe $= P : P'$. Nach **Bürg** ist das constante Glied des Ausdrucks der Mondsparallaxe $= 57'\ 1''$ (§. 327. pag. 589), und dieses ist, weil die Mondsparallaxe durch die mittlere Anomalie ausgedrückt ist, die Parallaxe in der mittleren Distanz; folglich ist $\left(\frac{a'}{R'}\right)^3 = \left(\frac{P}{57'\ 1''}\right)^3$

Es ergiebt sich aus obigen Ausdrücken, daß unter übrigens gleichen Umständen in den **Syzygien** die Fluthhöhen um die Zeit der Nachtgleichen am grösten, um die Zeit der Sonnenwenden aber am kleinsten seyn müßen. Umgekehrt muß es sich um die Zeit der **Quadraturen** verhalten, weil alsdenn der Mond seine gröste Abweichung hat, wenn die Abweichung der Sonne $= 0$ ist, und seine Abweichung verschwindet, wenn die der Sonne am grösten ist. Diß stimmt mit den zu **Brest** angestellten Beobachtungen überein. Es war nemlich

die gröste Fluthhöhe über die Ebbe in 24 Syzygien der Nachtgleichen	im Mittel	= 19,27 Fuß,
und in 24 Syzygien der Sonnenwenden	—	= 16,98,
die kleinste Fluthhöhe über die Ebbe in 24 Quadraturen der Nachtgleichen	im Mittel	= 7,49,
und in 24 Quadraturen der Sonnenwenden		= 9,68 **).

Die tägliche Verspätung der Fluthen war	St.		
in den Syzygien der Nachtgleichen	= 0	36′	43″
— — —— — Sonnenwenden	= 0	41	11
in den Quadraturen der Nachtgleichen	= 1	22	47
— — —— — Sonnenwenden	= 1	7	10.

Weil die durch den Mond hervorgebrachte Fluth die von der Sonne herrührende übertrifft; so muß die aus den Wirkungen

*) Méc. cél. T. II. pag. 289.

**) Mechanik des Himmels, übers. von Burckhardt. II. Theil. pag. 330.

dieser zwey Himmelskörper zusammengesetzte Fluth sich hauptsächlich nach der Fluth des Mondes richten, und in einer gegebenen Zeit müßen sich eben so viele Fluthen ereignen, als es obere oder untere Durchgänge des Monds durch den Meridian giebt, welches mit den Beobachtungen übereinstimmt. Aber der Zeitpunkt der zusammengesetzten Fluth muß nach einem von den Mondsphasen und von dem Verhältniß der Wirkung des Monds zu der Wirkung der Sonne abhängenden Gesetz um den Zeitpunkt der Mondsfluth hin und her schwanken. Der erstere dieser Zeitpunkte eilt dem zweyten von der grösten bis zur kleinsten Fluth vor, und folgt ihm nach von der kleinsten bis zur grösten, so daß, weil der mittlere Zeitpunkt der zusammengesetzten Fluth mit der Mondsfluth zusammenfällt, die mittlere tägliche Verspätigung der Fluthen 50′ 28″,3 beträgt (§. 62.). La Place *) fand durch die Theorie unter der Voraussetzung $\lambda = 3$ die tägliche Verspätigung der Fluthen in den Syzygien der Nachtgleichen $= 35' 32''$, und in den Syzygien der Sonnenwenden $= 41' 11''$ nahe mit den Beobachtungen übereinstimmend. Der Unterschied zwischen der Theorie und den Beobachtungen verschwindet, wenn man $\lambda = 3{,}155$ setzt. Für die Quadraturen der Nachtgleichen fand La Place die tägliche Verspätigung = 1 St. 32′ 31″, und für die Quadraturen der Sonnenwenden 1 St. 5′ 12″ **). Die Unterschiede zwischen der Theorie und den Beobachtungen liegen innerhalb der Gränzen der Fehler der Beobachtungen und der zu der Berechnung gebrauchten Elemente.

Das Maximum und Minimum der Fluth fällt nicht auf den Tag der Syzygie und der Quadratur, sondern einen oder zwey Tage später, wenn die Zwischenzeit zwischen der Mondsfluth und dem Durchgang des Monds durch den Meridian sammt der zwischen den Durchgängen des Monds und der Sonne durch den Meridian verfloßenen Zeit der zwischen der Sonnenfluth und dem Durchgang der Sonne durch den Meridian verfloßenen Zeit gleich ist. La Place fand aus den zu Brest angestellten Beobachtungen, daß daselbst die gröste Fluth 1 T. 12 St. 10′ 26″ nach der Syzygie eintritt ***). Es ergiebt sich hieraus, daß in diesem Hafen die Sonnenfluth 4 St. 24′ 21″ nach dem Durchgang der Sonne, und die Mondsfluth 3 St. 8′ 39″ nach dem Durchgang des Monds durch den Meridian eintritt.

Vermöge der Beobachtungen schwankt das Meer um einen gewißen mittleren Zustand hin und her, von welchem es sich nicht über eine gewiße Gränze entfernt, was La Place die Stabilität des Gleichgewichts des Meeres nennt. Er fand daß diese Stabilität nothwendig statt finden müße, wenn die Dichtigkeit des

*) Méc. cél. T. II. L. IV. Chap. III. n. 35. pag. 276. 277.

**) A. a. O. n. 39. pag. 284. 285.

***) A. a. O. n. 24. pag. 248.

Meeres kleiner ist als die mittlere Dichtigkeit der Erde *). Die Theorie der Gestalt der Erde verbunden mit den Gradmessungen und den Beobachtungen über die Pendellängen, die Bewegungen der Erdaxe, und die von **Cavendish** angestellten Versuche zeigen, daß die mittlere Dichtigkeit der Erde die des Wassers übertrifft; folglich stimmt auch in diesem Punkt die Theorie mit den Beobachtungen überein.

Ein nicht weniger merkwürdiges Resultat der Theorie ist der von **La Place** gefundene Satz, daß, was auch das Gesetz der Tiefe des Meeres, und die Gestalt des Sphäroids, welches es bedeckt, seyn mögen, die Phänomene der Präceßion und Nutation dieselben sind, als wenn das Meer mit diesem Sphäroid eine feste Masse bildete **).

§. 367. Was in Beziehung auf das Meer bemerkt worden ist, läßt sich auch auf das elastische Fluidum anwenden, welches die Erde umgiebt, und ihre Atmosphäre bildet (§. 14.). Nähme die Dichtigkeit der Atmosphäre von der Oberfläche der Erde an genau dem Druck proportional ab; so würde sie sich ohne Ende ausdehnen, und sich zuletzt zerstreuen. Es muß also die Elasticität der atmosphärischen Luft in einem größeren Verhältniß abnehmen, als der Druck, und eine Verdünnung statt finden, bey welcher dieses Fluidum ohne Elasticität ist, und in diesem Zustand muß es sich an der Oberfläche der Atmosphäre befinden.

Alle Schichten der Atmosphäre müßen wegen ihres Reibens an einander und an der Oberfläche der Erde nach und nach einerley Rotationsbewegung mit den Körpern angenommen haben, welche sie umgeben. Wegen dieser Umdrehungsbewegung muß also die Atmosphäre eine unter den Polen zusammengedrückte und unter dem Aequator erhabene Figur haben, unter welchem sie sich nicht weiter, als bis dahin erstrecken kann, wo die Schwungkraft genau der Schwere gleich ist. Für diese Gränze kann das Verhältniß der Axe des Sphäroids zu dem Durchmesser seines Aequators nicht kleiner seyn als das Verhältniß von 2 : 3 ***).

In dieser Atmosphäre muß durch die Attractionen der Sonne und des Monds eine der Ebbe und Fluth des Mee-

*) A. a. O. Chap. II. n. 14. pag. 209.
**) A. a. O. L. V. Chap. 1. n. 11. 12. pag. 239. et suiv.
***) A. a. O. L. III. Chap. VII. n. 47. pag. 169.

res ähnliche Oscillation hervorgebracht werden. Aber so wohl die Winde, als die Veränderungen des Barometerstandes, welche hieraus entstehen, sind sehr gering. Wenn die Sonne und der Mond in ihren mittleren Abständen von der Erde und in dem Aequator sich befinden; so ist in den Syzygien der gröste Raum, welchen ein Lufttheilchen vermöge der vereinigten Wirkungen dieser Gestirne in einer Sekunde durchlauft, kleiner als 3 Zolle, und für denselben Stand der Sonne und des Monds beträgt die von ihren Wirkungen herrührende Veränderung der Barometerhöhe von der kleinsten Höhe bis zur grösten unter dem Aequator 0,2795 Linien *). Wegen der grossen Beweglichkeit der Atmosphäre kann übrigens eine sehr kleine Ursache die Quelle sehr beträchtlicher Veränderungen werden.

Die Attraction der Sonne und des Monds bringt weder in dem Meer, noch in der Atmosphäre eine beständige Bewegung von Morgen gegen Abend hervor. Die beständigen Ostwinde (vents alisés, trade-winds), welche man zwischen den Wendekreisen beobachtet, müssen also eine andere Ursache haben, wahrscheinlich folgende **). Wenn die, mehrerer Einfachheit halber in der Ebene des Aequators angenommene Sonne durch ihre Wärme die unter dem Aequator befindliche Luftsäulen ausdehnt, und sie über ihre wahre Gleichgewichtsfläche erhebt; so müssen sie in dem oberen Theil der Atmosphäre vermöge ihres Gewichts gegen die Pole hin abfliessen, und zu gleicher Zeit muss in dem unteren Theil von den gegen die Pole hin liegenden Erdstrichen eine kühlere Luft herbeyströmen, welche die unter dem Aequator verdünnte Luft ersetzt. Es entstehen also zwey einander entgegengesetzte Luftströme, der eine in dem unteren Theil der Atmosphäre, der andere in dem oberen. Nun ist die wahre von der Umdrehungsbewegung der Erde herrührende Geschwindigkeit der Luft desto kleiner, je näher sie bey den Polen ist; folglich muss sie, wenn sie gegen den Aequator vorrückt, sich langsamer umdrehen, als die correspon-

*) Méc. cél. T. II. L. IV. Ch. IV. n. 44. pag. 296. 297.

**) Expos. du Monde pag. 277. De Lüc Ideen über die Meteorol. II. Th. S. 840.

direnden Theile der Erde, und die auf ihrer Oberfläche befindlichen Körper müßen auf sie mit dem Ueberschuß ihrer Geschwindigkeit stoßen, mithin durch die Zurückwirkung der Luft einen Widerstand leiden, welcher nach einer der Umdrehungsbewegung der Erde entgegengesetzten Richtung wirkt. Folglich scheint einem Beobachter, der sich in Ruhe glaubt, ein Wind nach einer Richtung zu wehen, welche der Richtung der Umdrehungsbewegung der Erde entgegengesetzt ist, das ist, von Morgen gegen Abend.

§. 368. Bald nach dem Untergang und kurz vor dem Anfang der Sonne beobachtet man zuweilen, besonders im Frühjahr und Herbst, ein weißes der Milchstraße ähnliches aber helleres von der Sonne aus im Thierkreise fortgehendes an seinem oberen Ende spitzig zulaufendes Licht, welches man das Zodiakallicht nennt. Die Spitze desselben steht 90 bis 100 Grade von dem Mittelpunkt der Sonne ab, woraus folgt, daß es sich über die Erdbahn hinaus erstrecken muß Nach Cassini's Beobachtungen fällt seine größte Ausdehnung in die Richtung des Sonnenäquators, und man hielt es daher für wahrscheinlich, daß dieses Licht die Sonnenatmosphäre sey, welche durch die Axendrehung der Sonne eine sehr abgeplattete Gestalt angenommen habe. Vermöge des vorhergehenden §. kann sich aber die Sonnenatmosphäre nicht weiter als bis auf diejenige Distanz von ihr erstrecken, in welcher ein Planet sich von der Sonne befinden müßte, dessen Umlaufszeit der Umdrehungszeit der Sonne um ihre Axe, d. i. $25\frac{1}{2}$ Tagen (§. 58.), gleich wäre. Folglich reicht die Sonnenatmosphäre bey weitem nicht bis an die Bahn des Merkurs. Ferner kann das Verhältniß der kleinen Axe dieser Atmosphäre zu der großen nicht kleiner seyn als das Verhältniß von 2 : 3, und das Zodiakallicht erscheint unter der Gestalt einer sehr abgeplatteten Linse; folglich kann auch aus diesem Grund das Fluidum, welches uns das Thierkreislicht zurückwirft, nicht die Sonnenatmosphäre seyn, und weil es die Sonne umgiebt; so muß es um dieselbe nach denselben Gesetzen umlaufen, nach welchen die Planeten ihre Umläufe um die Sonne machen, woher es kommen mag, daß dieses Fluidum den Bewegungen der Planeten keinen bemerkbaren Widerstand entgegensetzt. Eben so wenig scheinen die neueren über die Polar- und Aequatorial-Durchmesser der Sonne angestellten Untersuchungen der Hypothese günstig zu seyn, daß die Sonne ein dunkler von einer Lichtatmosphäre umgebener Körper sey. Denn vermöge der Axendrehung der Sonne müßte dieses Fluidum die Gestalt eines unter den Polen zusammengedrückten Sphäroids annehmen, mithin der Polardurchmesser kleiner seyn als der Aequatorialdurchmesser. Hr. von Lindenau fand aber aus mehr als 2000 Maskelyne'schen Beobachtungen für die mittlere Distanz der Sonne von der Erde den ersteren $= 32' \, 5'',82$, den letzteren $= 32' \, 1'',10$ *). Sind diese Resultate richtig; so kann die Oberfläche der Sonne mit keinem Fluidum bedeckt seyn, weil das Gleichgewicht bey dieser Figur nicht bestehen könnte. Mit dieser unter den Polen ablangen Gestalt der Sonne hängt eine periodische Veränderung ihres in der Richtung des Aequators der Himmelskugel genommenen Durchmessers genau zusammen, so daß der Unterschied der horizontalen und vertikalen Sonnendurchmesser nicht aus der Verschiedenheit der Beobachtungsmethoden allein scheint erklärt werden zu können. Jener Durchmesser muß nemlich unter übrigens gleichen Umständen desto grösser seyn, je größer der Winkel ist, welchen der Sonenäquator mit dem Aequator der Himmelskugel macht.

Aus der ganzen Reihe der Maskelyne'schen Beobachtungen schien auch eine jährliche successive Verminderung des Sonnenhalbmessers zu folgen. Hr. von Lindenau erhielt den mittleren Aequatorialhalbmesser der Sonne in ihrer mittleren Distanz von der Erde aus den Beobachtungen **)

von 1765 — 76 = $961'',66$
1776 — 87 = $960'',22$
1787 — 98 = $959,77$.

Allein die früheren Bradley'schen Beobachtungen gaben $961'',86$, und die Piazzi'schen $961'',21$ nahe mit Maskelyne's ersten Beobachtungsjahren übereinstimmend, und daher

*) Monatl. Corr. Jun. 1810. pag. 481.

**) A. a. O. pag. 476.

daher scheint jene Verminderung des Sonnenhalbmessers in einer durch das Alter verminderten Reizbarkeit des Auges für den Eindruck des Lichts zu suchen zu seyn *). Folgende Tafel zeigt die periodischen Veränderungen des in der Richtung des Aequators der Himmelskugel genommenen und auf die mittlere Distanz reducirten Halbmessers der Sonne, welche sich aus Maskelyne's Beobachtungen von 1787 bis 1798 ergeben haben:

Januar	15′ 59″,70	Julius	15′ 59″,52
Februar	59,99	August	59,98
März	60,41	September	60,19
April	59,80	October	60,10
May	59,81	November	60,07
Junius	59,00	December	58,75

§. 369. Der Punkt, in welchem die Schwungkraft der Schwere gleich ist, liegt desto näher bey dem Körper, je geschwinder seine Axendrehung ist. Wenn man also annimmt, daß die Atmosphäre des Körpers sich bis an diese Gränze erstrecke, und sich an seiner Oberfläche aus irgend einer Ursache nach und nach verdichte; so werden die an der Gränze der Atmosphäre in der Ebene des Aequators liegende Theilchen dem Körper sich nicht nähern können, sie werden sich von dem übrigen Theil der Atmosphäre trennen, und nach den Gesetzen der Centralbewegung um den Körper umlaufen. Diejenigen Theilchen, welche sich dem Mittelpunkt des Körpers genähert haben, werden, weil ihre wahre Geschwindigkeit größer war, als die Geschwindigkeit der näher bey dem Mittelpunkt liegenden, eine geschwindere Umdrehungsbewegung als der Körper selbst haben, und daher mit dem Ueberschuß ihrer Winkelgeschwindigkeit über die des Körpers vermöge des Widerstands und der Friktion auf den Körper wirken. Seine Umdrehungsbewegung wird also immer mehr und mehr sich beschleunigen, und die äusserste Gränze der Atmosphäre wird sich beständig dem Mittelpunkt des Körper nähern. Die Atmosphäre wird also nach und nach in der Ebene ihres Aequators Zonen von Flüßigkeiten absetzen, welche fortfahren werden, nach den Gesetzen

*) A. a. O. pag. 478.

der Centralbewegung um den Körper umzulaufen, weil ihre Schwungkraft ihrer Schwere gleich ist. Da aber diese Gleichheit in Beziehung auf die von dem Aequator entfernte Theilchen nicht statt findet; so werden diese nicht aufhören, einen Theil der Atmosphäre des Körpers auszumachen. La Place hält es für wahrscheinlich, daß die Ringe des Saturns ähnliche von seiner Atmosphäre abgesetzte Zonen seyen *).

Allgemeine Betrachtungen über das Weltsystem **).

§. 370. Alle Planeten bewegen sich um die Sonne nach einerley Richtung, nemlich von Abend gegen Morgen, in wenig gegen einander geneigten Ebenen, zwischen welchen die Ebene des Sonnenäquators das Mittel hält. Die Nebenplaneten laufen um ihre Hauptplaneten nahe in derselben Ebene und nach derselben Richtung, nur die Trabanten des Uranus, welcher sich an der Gränze des Sonnensystems, so weit wir es kennen, befindet, machen eine Ausnahme hievon. Ferner drehen sich die Sonne und die Planeten, deren Umdrehungsbewegung man beobachtet hat, nach einerley Richtung, nemlich ebenfalls von Abend gegen Morgen, und ungefähr in der Ebene des Sonnenäquators um ihre Axen. Endlich sind die Bahnen der Planeten und der Nebenplaneten nahe kreisförmig. Die Ursache, welche die Bewegungen der Planeten hervorgebracht oder ihnen ihre Richtungen gegeben hat, muß also alle diese Körper umfaßt haben, und wegen ihrer erstaunlichen Entfernungen von einander, ein Fluidum von einer unermeßlichen Ausdehnung gewesen seyn. Dieses Fluidum muß die Sonne nach Art einer Atmosphäre umgeben haben, um denselben nach einerley Richtung eine beynahe kreisförmige Bewegung um die Sonne haben mittheilen zu können. Die Betrachtung der Bewegungen der Planeten leitet also auf die Vermuthung, daß sich die Sonnenatmosphäre vermöge einer ausserordentlichen Hitze ursprünglich über alle Planetenbahnen hinaus erstreckt, und sich nach und nach in ihre gegenwärtige Gränzen zusammengezogen habe. Eine ähnliche Ursache mag den lebhaften Glanz des zu Anfang des

*) Expos. du Syst. du Monde. pag. 257.

**) A. a. O. pag. 391. et suiv. Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues von J. H. Lambert.

Novembers 1572 in der Cassiopea erschienenen Fixsterns hervorgebracht haben, welcher in den ersten Tagen seiner Erscheinung den Sirius und Jupiter an Glanz übertraf, und bey Tage gesehen werden konnte, von dem December 1572 an nach und nach abnahm, und im März 1574 wieder verschwand. Tycho beobachtete seine gerade Aufsteigung = 0° 26', seine Abweichung 61° 47'.

Die große Excentricität der Cometenbahnen führt auf dasselbe Resultat, und zeigt augenscheinlich, daß viele weniger excentrische Bahnen verschwunden seyn müßen, welches um die Sonne eine weit über die Perihelien der beobachtbaren Cometen sich erstreckende Atmosphäre voraussetzt, deren Widerstand die Bewegung dererjenigen, welche durch diese Atmosphäre während der Dauer ihrer großen Ausdehnung gegangen sind, vernichtet, und sie mit der Sonne vereinigt hat. Man sieht also, daß es jetzt nur noch solche Cometen geben kann, welche ausserhalb dieser Atmosphäre sich befanden, und daß ihre Bahnen sehr excentrisch seyn müßen, weil wir nur diejenige beobachten können, welche in ihrem Perihelium nahe genug zu der Sonne kommen. Zu gleicher Zeit sieht man, daß ihre Neigungen dieselbige Manniafaltigkeit zeigen müßen, als wenn der Zufall diese Körper hingeworfen hätte, weil die Sonnenatmosphäre keinen Einfluß auf ihre Bewegungen haben konnte. Es lassen sich also die lange Dauer der Umlaufszeiten der Cometen, die große Excentricität ihrer Bahnen, und die Mannigfaltigkeit ihrer Neigungen sehr natürlich mittelst dieser Atmosphäre erklären.

Aber nun fragt es sich, wie sie die Rotations- und Umlaufsbewegungen der Planeten und ihrer Trabanten bestimmt habe. Wären diese Körper innerhalb der Sonnenatmosphäre befindlich gewesen; so hätten sie wegen des Widerstands, welchen sie in dieser Atmosphäre erlitten haben würden, auf die Sonne fallen müßen. Man kann also vermuthen, daß die Planeten sich an den successiven Gränzen der Sonnenatmosphäre durch die Verdichtung der Zonen gebildet haben, welche sie nach und nach in der Ebene ihres Aequators auf die vorhin gezeigte Art abgesetzt hat. Diese Zonen von Dämpfen haben durch ihre Erkältung flüßige oder feste Ringe um den Centralkörper bilden können. Aber dieser ausserordentliche Fall scheint in dem Sonnensystem nur in Beziehung auf den Saturn statt zu haben. Im allgemeinen haben sie sich zu mehreren Kugeln vereinigt, und, wenn eine derselben die übrigen stark genug anzog; so hat ihre Vereinigung einen beträchtlichen Planeten gebildet. Und weil die wahren Geschwindigkeiten der Theilchen des Rings von Dämpfen mit ihren Abständen von der Sonne wachsen; so haben die aus ihrer Vereinigung gebildeten Kugeln sich in der Richtung ihrer Umlaufsbewegungen um ihre Axen drehen müßen. Die vorhin angeführten Phänomene fließen also ganz natürlich aus dieser Hypothese: die Ringe des Saturns, und die Entdeckung der vier kleinen zwischen Mars und Jupiter in nahe gleichen Distanzen um die Sonne laufenden Planeten, geben ihr einen neuen Grad von Wahrscheinlichkeit. Endlich, wenn sich in den von der Sonnenatmosphäre nach und nach abgesetzten Zonen Theilchen befanden, welche zu flüchtig waren, um sich unter sich, oder mit den Himmelskörpern zu vereinigen; so müßen sie uns, indem sie ihre Umlaufsbewegung um die Sonne fortsetzen, alle Erscheinungen des Zodiakallichts darbieten, ohne den Planeten einen merklichen Widerstand entgegenzusetzen.

§. 371. Was es nun auch mit dieser Hypothese über den Ursprung unseres Sonnensystems, in welche la Place selbst, da sie kein Resultat der Beobachtung oder des Calculs ist, einiges Mißtrauen setzt, vor eine Beschaffenheit haben mag; so ist wenigstens so viel gewiß, daß seine Elemente so angeordnet sind, daß es, wenn es durch keine fremde Ursachen gestört wird, die gröste Stabilität haben muß. Schon allein deswegen, daß die Haupt- und Neben-Planeten in beynahe kreisförmigen und wenig gegen einander geneigten Bahnen sich nach einerley Richtung bewegen, schwankt dieses System nur um einen gewißen mittleren Zustand hin und her, von welchem es sich niemals um mehr, als um sehr kleine Größen entfernt. Die mittleren Rotations und Umlaufs-Bewegungen dieser verschiedenen Körper sind gleichförmig, und ihre mittleren Abstände von den Mittelpunkten der auf sie wirkenden Hauptkräfte sind constant. Alle Secularungleichheiten sind periodisch. Die grösten sind diejenigen, welche die mittleren Bewegungen des Monds in Beziehung auf seine Knoten, sein Perigäum, und auf die Sonne betreffen. Sie steigen auf mehrere ganze Umläufe, und kommen erst nach sehr vielen Jahrhunderten wieder. In dieser grossen Zwischenzeit würden ohne die Attraction des Erdsphäroids nach und nach alle Theile der Mondsoberfläche gegen die Erde gekehrt werden. Aber diese Attraction, welche die Rotation des Monds an seinen grossen Ungleichheiten Theil nehmen macht, richtet beständig dieselbe Halbkugel dieses Trabanten gegen uns, und macht die andere Halbkugel auf immer unsichtbar. Ebenso hat die gegenseitige Anziehung der drey ersten Trabanten des Jupiters ursprünglich jenes schöne Verhältniß zwischen ihren mittleren Bewegungen hervorgebracht, und erhält es auf immer (§. 344.). Vermöge der Anziehungen der Himmelskörper ist die Dauer des Jahrs beständig sehr nahe dieselbe, die in enge Gränzen eingeschlossene Veränderung der Neigung der Ekliptik gegen den Aequator kann nur geringe Verschiedenheiten in der Länge der Tage um die Zeit der Solstitien, und in der Temperatur der Jahrszeiten herbeyführen, niemals wird sie einen beständigen Frühling auf der ganzen Erde hervorbringen. Die Natur scheint an dem Himmel alles zur Sicherheit der Dauer des Planetensystems angeordnet zu haben. Schon sind einige dieser Phänomene auf die ersten Naturgesetze zurückgeführt. So ist z. B. die Unveränderlichkeit der Pole der Erde auf ihrer Oberfläche, und die Stabilität des Gleichgewichts der Meere, welche beyde für die Erhaltung der organisirten Körper gleich nöthig sind, nichts anderes, als ein einfaches Resultat der Rotationsbewegung, und der allgemeinen Schwere. Vermöge ihrer Umdrehung hat sich die Erde abgeplattet, und ihre Umdrehungsaxe ist eine der Hauptaxen geworden, um welche die Rotationsbewegung unveränderlich ist. Vermöge der Schwere haben sich die dichtesten Schichten der Erde ihrem Mittelpunkt genähert, und ihre mittlere Dichtigkeit übertrifft die der Gewässer, welche sie bedecken, welches hinreichend ist, um die Stabilität des Gleichgewichts der Meere zu sichern, und dem Toben ihrer Wellen Einhalt zu thun. Endlich, sagt La Place, wenn die Muthmaßungen, welche ich über den Ursprung des Planetensystems aufgestellt habe, gegründet sind; so ist auch die Stabilität dieses Systems eine Folge der allgemeinen Gesetze der Bewegung. Diese, und einige andere auf ähnliche Art erklärte Phänomene berechtigen uns, zu glauben, daß alle von diesen Gesetzen nach mehr oder weniger versteckten Beziehungen abhängen, über welche es übrigens klüger ist, das Geständniß der Unwissenheit abzulegen, als eingebildete Ursachen an ihre Stelle zu setzen.

§. 372. Wir wollen nun unsere Blicke über das Sonnensystem hinaus werfen. Unzählliche Sonnen, welche die Mittelpunkte ebenso vieler Planetensysteme seyn können, sind in dem unermeßlichen Raum und in einer solchen Distanz von der Erde verbreitet, daß aus ihrem Mittelpunkt gesehen der ganze Durchmesser der Erdbahn unmerklich ist. Mehrere Sterne leiden sehr merkwürdige Veränderungen ihrer Farbe und Helligkeit; es giebt andere, welche plözlich erschienen, und, nachdem sie einige Zeit mit einem sehr lebhaften Lichte geglänzt haben, verschwunden sind. Welche ungeheuere Veränderungen mußten auf der Oberfläche dieser großen Körper vorgehen, um in der Distanz, welche uns von ihnen trennt, merklich zu seyn? Um wie viel müßen sie diejenige übertreffen, welche wir auf der Oberfläche der Sonne beobachten? Alle diese unsichtbar gewordenen Körper befinden sich an der Stelle, wo sie beobachtet wurden, weil sie dieselbe während der Zeit ihrer Sichtbarkeit nicht verändert haben. Es giebt also in dem Himmelsraum dunkele, ebenso große, und vielleicht ebenso viele Körper, als die Fixsterne. Ein Verzeichniß dieser nur auf kurze Zeit erscheinenden Sterne; ihre im Augenblick ihres grösten Glanzes beobachtete Lage; die Bestimmung aller veränderlichen Sterne und der periodischen Veränderungen ihres Lichts; endlich die eigenen Bewegungen dieser großen Körper, welche, indem sie ihrer gegenseitigen Attraction, und wahrscheinlich ursprünglichen Impulsionen gehorchen, unermeßliche Bahnen beschreiben; diß werden in Beziehung auf die Fixsterne die Hauptgegenstände der künftigen Astronomie seyn.

Die Fixsterne sind, wie schon der erste Anblick zeigt, sehr ungleichförmig an der Oberfläche der scheinbaren Himmelskugel vertheilt. Mehrere bilden kleine Sterngruppen, in welchen man mit dem bloßen Auge viele kleine Sterne unterscheiden kann. Andere zeigen sich dem bloßen Auge als Nebelflecke, welche durch starke Teleskope in eine unzählbare Menge kleiner Sterne sich auflösen, wiederum andere erscheinen selbst durch diese nur mit einem weißlichten Schimmer. Herschel hat mehrere Tausende solcher Nebelflecke durch seine Teleskope beobachtet, welche sehr wahrscheinlich aus einer großen Menge scheinbar nahe bey einander stehender Fixsterne bestehen, aber wegen ihrer großen Entfernung von uns und wegen der Irradiation des Lichts nicht mehr von einander unterschieden werden können. Unsere Sonne und die hellsten Fixsterne machen wahrscheinlich eine solche Sterngruppe aus, welche von unserem Standpunkt aus gesehen den Himmel zu umgeben scheint, und die Milchstraße bildet. Die große Anzahl von Sternen, welche man in dieser Gegend des Himmels in einem kleinen Raum durch Teleskope beobachtet *), zeigt uns die unermeßliche Distanz dieser Sterne, welche den Abstand des Sirius tausendmal übertreffen muß, so daß sehr wahrscheinlich die Lichtstralen der meisten dieser Sterne eine große Anzahl von Jahrhunderten gebraucht haben, um zu uns zu gelangen. Denken wir uns unseren Standpunkt jenseits der Milchstraße; so würde von dort aus gesehen unser Fixsternhimmel zuletzt in einen Nebelfleck von einem kleinen scheinbaren Durchmesser sich verlieren. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß die meisten Nebelflecke nicht anders als in einer sehr großen Ferne gesehene Sternhaufen sind, welche in kleineren Distanzen betrachtet das Ansehen der Milchstraße haben würden. Die Entfernungen der Sterne von einander, welche eine jede solche Sterngruppe

*) Herschel's Teleskope lösen den Lichtschimmer der Milchstraße in lauter kleine Sterne auf. Nach seiner Behauptung ist die Anzahl der Sterne, welche er in der Gegend der Keule des Orions in einem 15 Grade langen und 2 Grade breiten Streifen beobachtete, nicht geringer als 50000.

bilden, sind wenigstens tausendmal größer als der Abstand der Sonne von der Erde, man kann also nach der unzähligen Menge von Sternen, welche man in der Milchstraße beobachtet, über die erstaunliche Ausdehnung dieser Sterngruppen urtheilen. Bedenkt man noch die geringe scheinbare Größe und die große Anzahl der Nebelflecke, welche ohne alle Vergleichung weiter von einander entfernt sind, als die Sterne, welche sie bilden; so wird die Einbildungskraft, durch die Unermeßlichkeit des Weltalls in Erstaunen gesetzt, Mühe haben, sich die Gränzen desselben zu denken.

Aus diesen auf die teleskopischen Beobachtungen gegründeten Betrachtungen ergiebt sich, daß die Nebelflecke, welche scharf genug begränzt erscheinen, um ihre Mittelpunkte mit Genauigkeit beobachten zu können, in Beziehung auf uns diejenige himmlische Gegenstände sind, welche man noch am meisten als unbeweglich betrachten kann, und auf welche es schiklich ist, die Lage aller übrigen Gestirne zu beziehen. Es ergiebt sich ferner daraus daß die Bewegungen unseres Sonnensystems sehr verwickelt sind. Der Mond beschreibt eine beynahe kreisförmige Bahn um die Erde, aber aus der Sonne gesehen beschreibt er eine Reihe von Epicykloiden, deren Mittelpunkte auf dem Umfang der Erdbahn liegen. Ebenso beschreibt die Erde eine Reihe von Epicykloiden, deren Mittelpunkte auf der Bahn liegen, welche die Sonne um den Schwerpunkt unseres Nebelflecks beschreibt. Endlich beschreibt die Sonne selbst eine Reihe von Epicykloiden, deren Mittelpunkte auf der krummen Linie liegen, welche der Schwerpunkt unseres Nebelflecks um den des Weltalls beschreibt. Die Astronomie ist schon dadurch weit vorgerückt, daß sie uns die Bewegung der Erde, und die Epicykloiden kennen lehrte, welche der Mond und die übrigen Nebenplaneten auf den Bahnen ihrer Hauptplaneten beschreiben. Es ist noch die Bahn der Sonne und die Bahn des Schwerpunkts ihres Nebelflecks zu bestimmen übrig. Aber wenn Jahrhunderte erfordert wurden, um die Bewegungen des Planetensystems kennen zu lernen; welche ungeheure Dauer wird die Bestimmung der Bewegung der Sonne und der Fixsterne erfordern? Die Beobachtungen fangen an, diese Bewegungen anzuzeigen.

Man versuchte sie durch das Fortrücken der Sonne allein zu erklären, und mehrere Beobachtungen lassen sich genau genug darstellen, wenn man eine Bewegung des Sonnensystems gegen das Sternbild des Herkules hin voraussetzt. Andere Beobachtungen aber scheinen zu beweisen, daß diese scheinbaren Bewegungen der Fixsterne eine Verbindung ihrer wirklichen Bewegungen mit der Bewegung der Sonne seyen. Der Durchmesser der Erde ist eine hinreichend große Grundlinie, um die Entfernung des Monds von der Erde zu bestimmen. Die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne bringt den Beobachter an die zwey Endpunkte einer über 23000 mal größeren Grundlinie, mittelst welcher es möglich war, die Bahnen der Planeten zu bestimmen. Aber auch diese in Vergleichung mit der Größe der Erde sehr große Distanz verschwindet schon beynahe gegen die Entfernung der nächsten Fixsterne von uns, und nur das Fortrücken unseres ganzen Sonnensystems wird über die Bahn der Sonne, die Entfernung der Fixsterne, und über ihre wahren Bewegungen in den künftigen Jahrhunderten einigen Aufschluß geben können.

Zusatz zu §. 30.

Maskelyne setzte für das Jahr 1800 die gerade Aufsteigung des **Athair** (α Aquilæ) = 295° 15′ 15″,3, ihre jährliche Zunahme mit Inbegriff der eigenen **Bewegung** = 43″,77. Im Jahr 1802 zeigte er eine Verbesserung von + 3″,8 an, welche auch zu der geraden Aufsteigung aller übrigen für das Jahr 1800 von ihm bestimmten Fixsterne zu addiren ist *). Die französischen Astronomen fanden aus den **Greenwicher** Beobachtungen diese Verbesserung = + 5″,5 **). **Piazzi** fand für das Jahr 1805 die gerade Aufsteigung des **Procyon** = 112° 16′ 17″,70, des **Athair** = 295° 9′ 0″,00, die erste aus 188, die letztere aus 200 in der Nähe der Frühlings- und Herbst-Aequinoctien während 1803, 1804 und 1895 gemachten Beobachtungen ***). Demnach ist für das Jahr 1805

die gerade Aufsteig. des Procyon = 112° 16′ 14″,7 nach Maskelyne
= 112 16 16,4 nach d. franz. Astr.
= 112 16 17,7 nach Piazzi,

*) Monatl. Corr. Jan. 1802. pag. 61.
**) Monat. Corr. Jul. 1803. pag. 96, 97.
***) M. C. Aug. 1807. pag. 183.

und die gerade Aufsteig. d. Athair = 295° 18′ 57″,95 nach Maskelyne
= 295 18 59,65 nach d. franz. Ast.
= 295 9 0,00 nach Piazzi.

Folgende Tafel ist ein Auszug aus dem neuesten Piazzi'schen Fixsternverzeichniß (Libro Sesto de R. Osservatorio di Palermo.). Die gerade Aufsteigung ist in Zeit angegeben. Werden die angegebenen Differenzen zu Piazzi's Angaben mit ihren Zeichen hinzugefügt; so erhält man die gerade Aufsteigung und Abweichung nach dem neuesten Maskelyne'schen Verzeichniß von 36 Sternen.

Namen d. Sterne.	Mittlere AR. 1805.	Jährl. Praec.	Eigne Bewegung.	Diff. mit Maskelyne.
γ Pegasi	0ᵁ 3′ 12,″42	3,″074	— 0,″002	— 0,″09
α Arietis	1 56 12, 36	3, 339	+ 0, 013	— 0, 05
α Ceti . .	2 52 5, 87	3, 122	— 0, 005	— 0, 11
Aldebaran	4 24 44, 49	3, 423	+ 0, 003	+ 0, 09
Capella	5 2 18, 11	4, 401	+ 0, 008	+ 0, 10
Rigel . .	5 5 10, 20	2, 877	. .	+ 0, 04
β Tauri .	5 13 58, 35	3, 779	— 0, 001	+ 0, 04
α Orionis .	5 44 37, 04	3, 242	. .	— 0, 05
Sirius . . .	6 36 33, 17	2, 679	— 0, 036	+ 0, 27
Castor Praeced.	7 22 7, 73	3, 861	— 0, 011	— 0, 05
Castor Sequens.	7 22 8, 12			
Procyon .	7 29 5, 18	3, 193	— 0, 047	— 0, 15
Pollux .	7 33 21, 76	3, 736	— 0, 047	— 0, 02
Alphard	9 18 0, 05	2, 950	— 0, 010	+ 0, 09
Regulus	9 57 58, 27	3, 225	— 0, 018	+ 0, 17
Denebola .	11 39 6, 14	3, 103	— 0, 036	— 0, 07
β Virginis .	11 40 32, 15	3, 075	+ 0, 052	0, 00
Spica Virginis	13 14 56, 15	3, 146	. .	— 0, 01
Arcturus .	14 6 46, 11	2, 811	— 0, 078	— 0, 01
α2 Librae .	14 40 6, 73	3, 303	— 0, 006	— 0, 04
Gemma .	15 26 25, 83	2, 527	+ 0, 003	+ 0, 26
α Serpentis	15 34 40, 18	2, 936	+ 0, 002	+ 0, 04
Antares .	16 17 28, 45	3, 657	+ 0, 003	— 0, 05
α Herculis	17 5 45, 46	2, 730	. . .	+ 0, 14
α Ophiuchi	17 25 53, 13	2, 771	+ 0, 007	+ 0, 01
Wega . .	18 30 20, 02	2, 011	+ 0, 017	+ 0, 03
γ Aquilae .	19 36 59, 23	2, 851	— 0, 004	— 0, 16
α Aquilae .	19 41 16, 00	2, 891	+ 0, 034	— 0, 09
β Aquilae . .	19 45 43, 92	2, 945	— 0, 001	— 0, 01
α Capricorni .	20 6 49, 74	3, 335	+ 0, 001	— 0, 04
2 α Capricorni	20 7 13, 53	3, 334	+ 0, 004	— 0, 03
Deneb . .	20 34 47, 04	2, 040	+ 0, 004	— 0, 01
α Aquarii .	21 55 45, 81	3, 085	— 0, 008	— 0, 14
Fomahand .	22 46 50, 84	3, 318	+ 0, 022	0, 00
α Pegasi . .	22 55 3, 25	2, 975	+ 0, 001	— 0, 10
α Andromedae	23 58 19, 80	3, 064	+ 0, 008	+ 0, 02

Namen der Sterne.	Mittlere Dec. 1805.	Jährliche Praec.	Eigne Bewegung.	Diff. mit Maskelyne.
γ Pegasi. .	14° 5′ 56,″6 B	+ 20,″06	− 0,″09	+ 8‴1
α Arietis.	22 32 3, 7	+ 17, 54	− 0, 20	+ 3, 5
α Ceti .	3 19 1, 7	+ 14, 67	− 0, 15	+ 5, 9
Aldebaran	16 6 21, 3	+ 8, 10	− 0, 20	+ 2, 1
Capella	45 47 0, 6	+ 5, 00	− 0, 43	+ 0, 7
Rigel	8 26 12, 6 A	− 4, 75	+ 0, 04	− 7, 4
β Tauri .	28 25 44, 4 B	+ 4, 00	− 0, 20	+ 4, 3
α Orionis	7 21 31, 9	+ 1, 35	. . .	+ 4, 8
Sirius	16 27 27, 9 A	+ 3, 19	+ 1, 10	− 10, 6
Castor	32 18 9, 6 B	− 7, 04	− 0, 10	+ 1, 2
Procyon .	5 42 55, 8	− 7, 60	− 0, 98	+ 6, 1
Pollux .	28 29 6, 6	− 7, 95	− 0, 11	+ 3, 9
Alphard .	7 49 11, 2 A	+ 15, 26	+ 0, 05	− 0, 6
Regulus .	12 54 55, 4 B	− 17, 28	. . .	+ 3, 5
Denebola	15 39 44, 4	− 19, 98	− 0, 08	+ 0, 7
β Virginis .	2 51 48, 9	− 19, 99	− 0, 25	+ 3, 8
Spica Virginis	10 8 19, 3 A	+ 19, 00	+ 0, 03	− 8, 3
Arcturus	20 12 13, 2 B	− 17, 07	− 1, 96	+ 6, 0
α2 Librae	15 13 22, 0 A	+ 15, 36	+ 0, 14	− 10, 4
Gemma . .	27 22 44, 8 B	− 12, 46	− 0, 12	+ 2, 3
α Serpentis .	7 2 54, 1	− 11, 89	− 0, 01	+ 6, 2
Antares .	25 59 10, 0 A	+ 8, 68	+ 0, 07	− 13, 5
α Herculis .	14 37 24, 0 B	− 4, 70	+ 0, 05	+ 7, 0
α Ophiuchi .	12 42 46, 9	− 2, 98	− 0, 22	+ 4, 0
Wega. .	38 36 35, 0	+ 2, 65	+ 0, 25	− 1, 6
γ Aquilae	10 8 52, 9	+ 8, 24	+ 0, 02	+ 5, 4
α Aquilae	8 21 50, 3	+ 8, 53	+ 0, 38	+ 3, 2
β Aquilae .	5 55 47, 2	+ 8, 93	− 0, 53	+ 5, 5
α Capricorni	13 5 59, 6 A	− 10, 55	. .	− 9, 1
2α Capricorni	13 8 18, 0	− 10, 58	− 0, 12	− 8, 8
Deneb .	44 35 21, 8 B	+ 12, 54	− 0, 10	− 0, 6
α Aquarii	1 15 40, 4 A	− 17, 19	+ 0, 05	− 7, 4
Fomahand	30 39 7, 8	− 19, 05	+ 0, 27	− 12, 4
α Pegasi. .	14 9 33, 0 B	+ 19, 26	− 0, 08	+ 7, 0
α Andromedae	28 0 47, 6	+ 20, 06	− 0, 06	+ 6, 6

Zusatz zu §. 191.

Nach den neuen Venustafeln des Hr. von Lindenau *) ist

		T.	St.		
die siderische Umlaufszeit der Venus	=	224	16	49′	7″,987
— tropische — — —	=	224	16	41	25,847

*) Tabulæ Veneris novæ et correctæ ex theoria gravitatis clar. de Laplace et ex observ. recentiss. in specula astr. Seebergensi habitis erutæ, auctore *Bernhardo de Lindenau*. Gothæ. 1810.

tägliche trop. Bewegung	= 1° 36′ 7″,8074	
jährliche trop. Bew. in 365 T.	= 7^{s} 14 47 29,688	
trop Bew. in 100 jul. Jahren	= 6 19 12 44,05	
halbe große Axe	= 0,7233316	
Excentric. 1801.	= 0,00686074	
Neigung der Bahn 1801.	= 3° 23′ 28″,4	
jährliche trop. Bew. des Apheliums	= + 46″,98	nach den Beobachtungen.
jährliche trop. Bew. des aufst. Knotens	= + 30,66	
jährliche Veränderung der Excentr.	= - 0,000001088	
— — — — Neigung	= + 0″,0724	

Endlich ist für die Mitternacht des pariser Meridians zwischen dem 31. Dec. 1800 und dem 1. Jan. 1801

die mittlere Länge der Venus	= 0^{s} 10° 44′ 21″,6
— — — des Aphel.	= 10 8 43 53
— — — des Knot.	= 2 14 54 13.

Nach Plazzi *) ist das tropische Jahr = 365 T. 5 St. 48′ 50″,0, nur um 0″,86 Sek. kleiner als nach den Sonnentafeln des Hr. von Zach, und um 1″,6 kleiner als nach Delambre.

die mittlere Länge der Sonne am 31. Dec. 1804 im mittl. Mittag zu Palermo	= 9^{s} 9° 39′ 43″,0	
	= 9 9 39 41,0	v. Zach
	= 9 9 39 40,0	Delambre
Länge des Apog. 1805.	= 3 9 34 31,5	
	— — — 14,0	v. Zach
	— — — 13,0	Delambre
jährl. Bew. des Apog.	= 1 2,2	
	1 1,91	v. Zach. und Delambre.
Excentr. 1805.	= 0,01678622	
	0,0167900	von Zach
	0,0167926	Delambre
Durchmesser der Sonne in der mittl. Dist.	= 32′ 2″,47	
	32 2,75	v. Zach u. Delambre.

Zusatz zu §. 310. und 366.

Wenn man den mittleren Abstand des Monds von der Erde $= a'$ setzt, und die übrigen in dem angeführten §. gebrauchten Benennungen beybehält; so ist (Méc. cél. T. III. pag. 248.)

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^3 = \frac{m}{m+m'} \cdot \frac{r'}{l'} \cdot \frac{(2{,}0006168)^2}{0{,}9973020.\, t^2},$$

und daher für die Abplattung $\frac{1}{305}$

*) Monatl. Corresp. Aug. 1807. pag. 184.

$\left(\frac{r}{a'}\right)^3$ oder $\overline{\text{Sin.}p}^3 = \frac{4r}{t^2 . l'} . 1{,}005523 . \frac{m}{m+m'}$, sehr nahe mit dem §. 310. S. 549. gegebenen Ausdruck übereinstimmend. Setzt man $r = 3271691$ (§. 143.), $l = 0{,}5092616$ (§. 269.), also $l' = 0{,}5104367$, und $p = 57' 1''$; so erhält man $\frac{m}{m'} = \frac{1}{70{,}5}$. Und umgekehrt, wenn man nach §. 307. die Masse des Monds $= \frac{1}{69{,}75}$ setzt; so findet man $p = 57' 0'',83$, nur $0'',17$ weniger, als der constante Theil der Bürgischen Mondsparallaxe ausmacht, welcher bey der von **Bürg** gewählten Form der Mondstafeln die Horizontalparallaxe des Monds unter dem Aequator in seiner mittleren Distanz von der Erde ist.

Zusatz zu §. 362. und 363.

Piazzi setzt die mittlere Schiefe der Ekliptik für den Anfang des Jahrs 1800 $= 23° 27' 56''$, und ihre jährliche Abnahme nach den Beobachtungen der neueren Astronomen $= 0'',443$. Ferner fand er aus den Beobachtungen das jährliche Zurückweichen der Aequinoktialpunkte $= 50'',21056$, die durch die Einwirkung der Planeten bewirkte directe Bewegung der Aequinoktialpunkte (§. 363.) $= 0'',1774$, so daß hienach die ganze durch die Sonne und den Mond bewirkte jährliche Bewegung der Aequinoktialpunkte $= 50'',388$ wird. Die Nutation in der Länge setzt er $= 19$ Sin. ☊ *). Hieraus folgt nach S. 672 die Nutation der Schiefe der Ekliptik $= 10'',15$. **Maskelyne** fand diese durch die Vergleichung aller von **Bradley** über die Nutation angestellten Beobachtungen $= 9'',55$ **).

Zusatz zu §. 368.

Delambre fand aus **Maskelyne**'schen Beobachtungen von 1800, 1805 und 1807 weder eine periodische, noch progressive Aenderung des Sonnenhalbmessers, aber die Differenz der Horizontal- und Vertikalhalbmesser beynahe mit Hr. von **Lindenau** übereinstimmend ***). Er erhielt folgende Resultate.

*) Monatl. Corresp. Aug. 1807. pag. 185.

**) Mécan. cél. T. III. pag. 159.

***) Monatl. Corresp. Aug. 1810. pag. 193. u. f.

Horizontalhalbmesser in der mittleren Distanz.

	1800.	1805.	1807.	Mittel.
Januar	960″,09	959″,974	960″,599	960″,254
Februar	960, 29	960, 906	961, 180	960, 815
März	960, 35	960, 617	961, 215	960, 727
April	960, 25	960, 360	961, 289	960, 633
May	960, 87	961, 178	962, 050	961, 356
Junius	960, 05	960, 810	960, 519	960, 460
Julius	960, 47	960, 610	960, 780	960, 620
August	959, 87	960, 544	961, 314	960, 576
September	960, 12	959, 860	960, 104	960 028
October	960, 48	961, 140	960, 988	960, 869
November	960, 64	961, 493	961, 642	961, 258
December	959, 06	960, 973	960, 350	960, 128
Mittel.	960,212	960, 710	961, 013	960, 645

Indessen scheinen doch auch hier, besonders in dem Mittel, die periodischen Ungleichheiten sichtbar zu werden.

Vertikalhalbmesser.

	1805.	1807.
Januar	. . .	966″,450
Februar	964″,999	963, 895
März	965, 178	965, 598
April	964, 281	965, 531
May	. . .	964, 462
Junius	963, 992	963, 177
Julius	. .	961, 190
August	971, 990	966, 092
September	964, 046	963, 994
October	964, 373	964, 485
November	. . .	. . .
December	962, 074	963 898
Mittel.	963, 857	964, 434

Hienach ist

Vertikal=Halbmesser im Mittel mit Rücksicht auf die Anzahl der Beobachtungen $= 964'',038$

Horizontalhalbmesser $= 960,645$

const. Corr. wegen Refr. $+ \quad 0,25$ *).

$960,895$

Diff. der Hor. und Vert. Halbm. $= 3'',143$

*) *Du Séjour* Traité analyt. des mouv. app. des corps cél. T. I. pag. 243.

Delambre erklärt diesen Unterschied daraus, daß bey den Höhenmeßungen gewöhnlich der dem Mittelpunkt der Sonne zunächst liegende Rand des Fadens mit dem Sonnenrand in Berührung gebracht, und daher der aus den beobachteten Höhen des oberen und unteren Sonnenrandes geschloßene Durchmesser der Sonne um die Fadendicke zu groß gefunden wird. Die halbe Fadendicke hatte er wenig von drey Sekunden verschieden gefunden, so daß nach dieser Correction die vertikalen Halbmesser genau mit den horizontalen übereinstimmen würden.

Auch Lalande hatte den Polardurchmesser der Sonne um zwey Sekunden größer gefunden, als den Aequatorialdurchmesser (Astronomie T. II. n. 1388. pag. 113.)

Register.

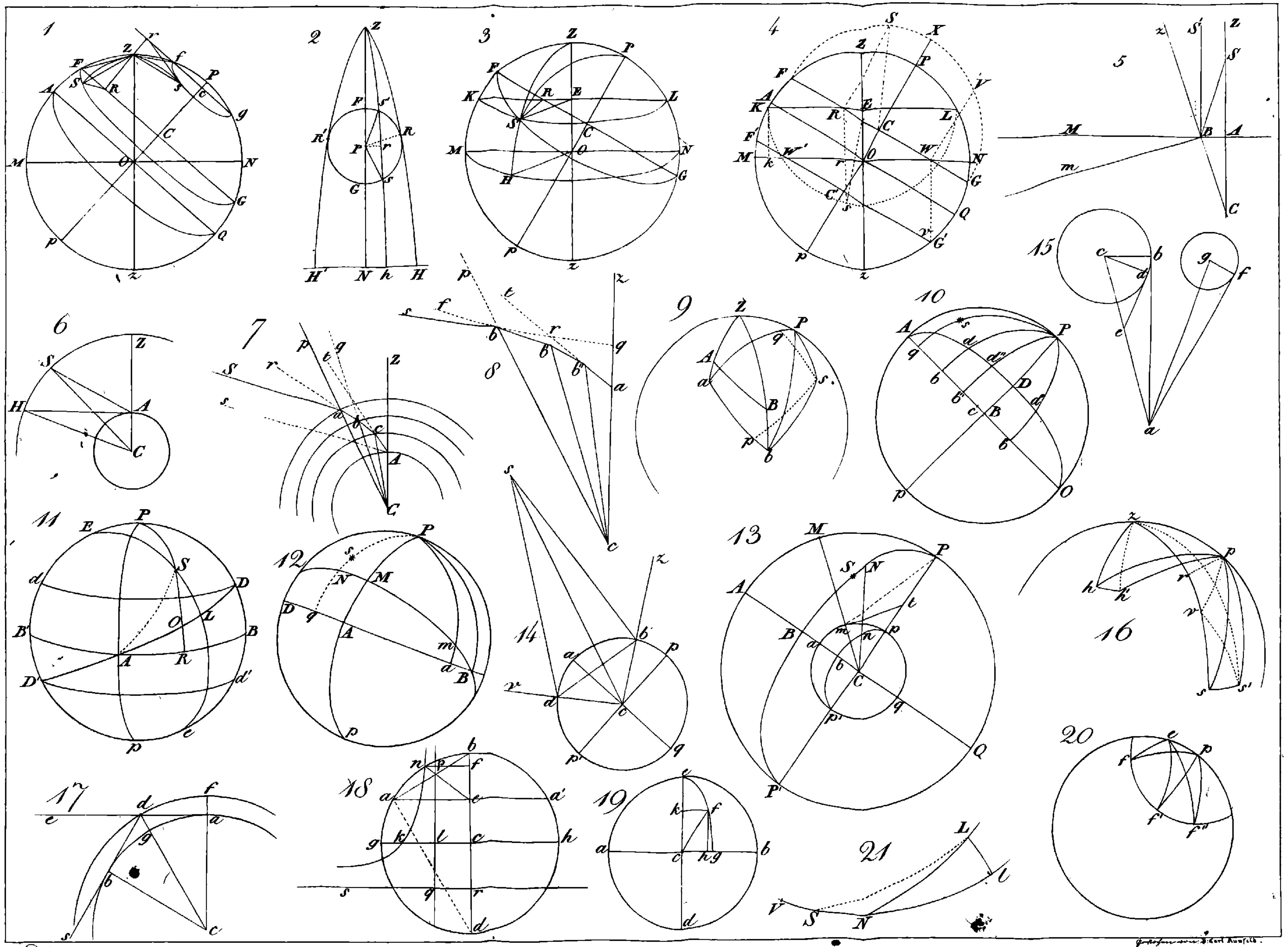
Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	Lin.	
9	22	lese man: *PF* und *PG* der Polardistanz des Sterns gleich nimmt, und die Punkte *F* und *G*.
11	5	v. u. statt $\left.\begin{matrix} pF \\ pG \end{matrix}\right\}$ l. $\left.\begin{matrix} pF' \\ pG' \end{matrix}\right\}$
12	15	st. *Rw* l. : *RW*.
13	1	st. $2\left(\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,t}{\text{Sin. tot.}}\right)$ l. $2\left(\frac{\text{Sin.}\,\frac{1}{2}\,t}{\text{Sin. tot.}}\right)^2$.
17	1	v. u. st. betrift, l. übertrift.
19	13	v. u. st. weil, l. welche.
24	6	st. des, l. das.
—	1	v. u. l. Parallaxe.
25	12	st. den l. der.
26	17	st. Ende l. Erde.
—	2	v. u. st. Sin. b Sin. b' l. Sin. b' Sin. b''.
27	1	st cb l. : cb.
—	7	st. verlänge l. verlängere.
—	11	v. u. st. $\left\{\begin{matrix} \text{Sin. } e' \\ \text{Sin. } (b'-r') \end{matrix}\right\}$ l. Sin. b' $\left\{\begin{matrix} \text{Sin. } e' \\ \text{Sin. } (b'-r') \end{matrix}\right\}$
29	13	st. Zeitdistanz l. Zenithdistanz.
30	15	l. Coefficient.
32	14	st. 8° 9′ l. 7° 48′.
—	8	v. u. l. der doppelte Unterschied.
—	7	v. u. l. Polhöhen.
—	4	v. u. st. 8′ l. 8″.
—	2	v. u. l. $s'-s$
33	21	st. 41. l. 21.
—	25	st. s l. S.
—	26	st. s' l. S'.
37	8	st. 48° l. 8°.
39	7	v. u. st. Refraktion l. Temperatur.
—	1	v. u. st. überstim- l. übereinstim-

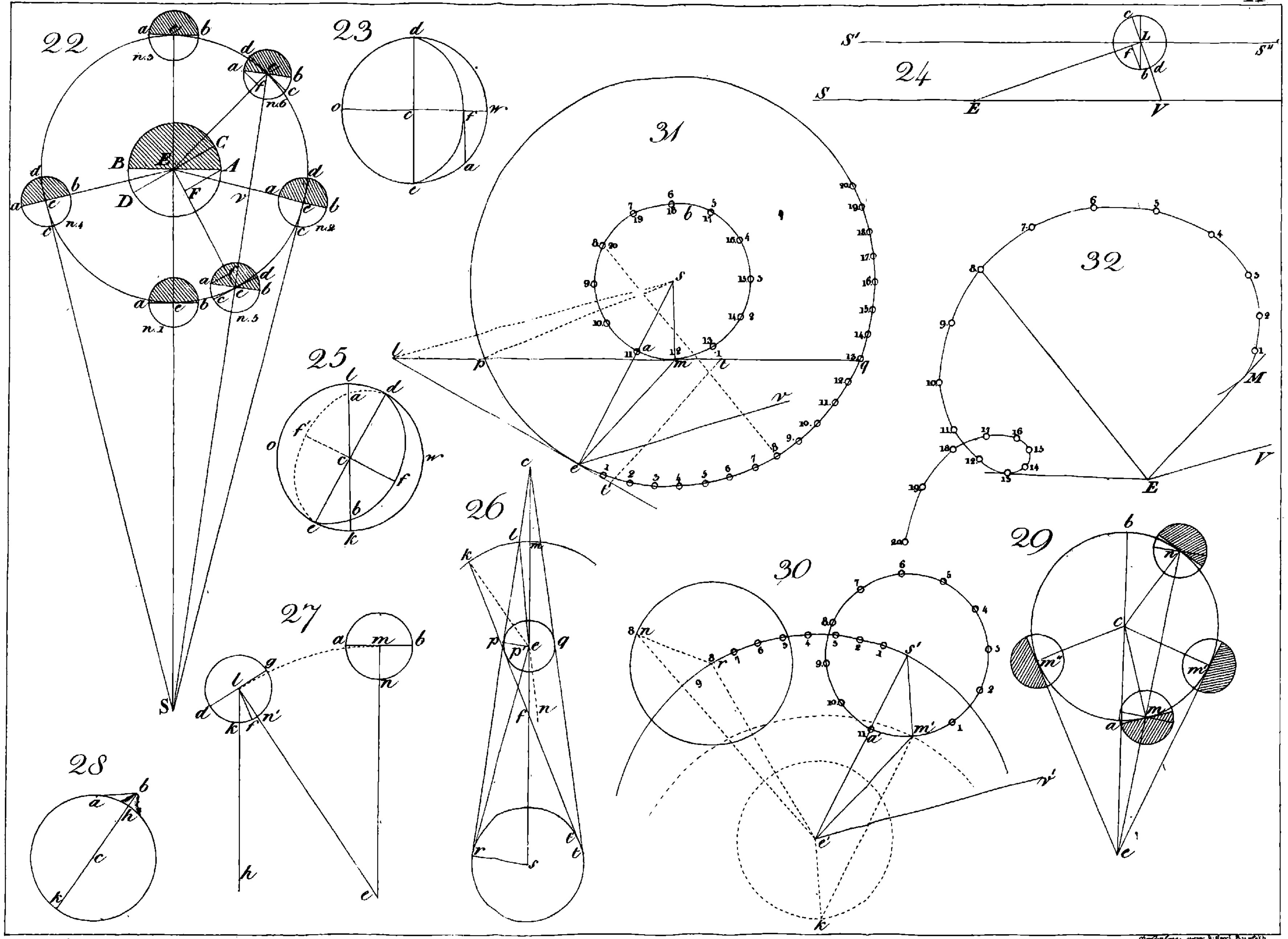
Seite	Lin.	
46	26	st. Sin. Ab' : Sin. Ab l. Sin. Ab' − Sin. Ab.
47	4	st. Ab l. Ab''.
60	5 v.	st. st. ab l. zu.
—	4 v. u.	st. zugenommen l. abgenommen
80	10	st. *ef* l. *cf*.
—	18	st. *cbd* l. *sbd*.
82	6 v. u.	st. ½ Tg. *a*. l. ½ $\overline{\text{Tg.} a}^2$.
84	15	st. §. 59. l. §. 58.
85	3 v. u.	st. *acbd* l. *aebd*
88	13	st. in *A* l. *A*.
89	3 v. u.	l. $\left\{\begin{matrix} 7^\circ & 15' & 11'',7 \\ 7 & 15 & 11,5 \end{matrix}\right\}$
90	7 v. u.	st. erscheint l. erscheint er.
93	4 v. u.	st. 4. l. 5.
94	17	st. wenn man l. und.
95	20	st. paralaxe l. parallaxe.
101	24	st. seiner l. von seiner.
107	6 v. u.	st. Ekliptit l. Ekliptik.
110	13	st. Nachseite l. Nachtseite.
114	9.	st. *cs* l. *es*
119	21	st. Meridian l. Meridiane.
125	5	st. Nachseite l. Nachtseite.
—	11	ist die 28. Figur zu citiren.
132	19	l. vor der Sonne.
133	14	st. nehmen l. nehme.
—	24	st. *e'm'b'* l. *a'm b'*.
134	4. und 5	st. Bewegungen l. Bewegung.
137	18	st. $(R^2 - r)$ l. $(R - r^2)$.
147	21	st. 200 l. 2000.
149	16	st. $(r^2 - V^2)$ l. $(v^2 - V^2)$.
154	14	st. parallen l. parallelen.
158	13 v. u.	st. Punkt l. Winkel.
163	10	l. veränderlich.
177	4	l. Flamsteed.
183	15	st. Unordnung l. Anordnung.
187	8 v. u.	st. kommt l. kennt.
197	1 v. u.	st. *b* l. b^2.
213	12 v. u.	st. 1718,87 l. 859,435.
222	10 v. u.	st. *V* l. *Z*.
—	8 v. u.	l. *PSV*.
223	12 v. u.	st. ihre l. ihre Axe.
227	7 v. u.	st. dem l. den.
228	2 v. u.	st. Bewegungen l. Benennungen.
229	11 v. u.	l. mehr als
235	4 v. u.	st. ; l. ,
243	1	st. 19,36 l. 19,26.
—	7 v. u.	st. verschiedene l. verschiedenen.
—	—	— st. Länge l. Längen.
244	2	st. Umfangse l. Umfangs.
249	11 v. u.	st. beziehende l. sich beziehende.
250	7	st. Apsidenlie l. Apsidenlinie.
254	6 v. u.	st. isi l. ist.
257	5 v. u.	st. *Tt* l. *t't*.
264	18	st. *Sr p'* l. *r'Sp'*.
265	21	st. Tg. $(\frac{1}{2}(L-l)-n)$ l. Tg. $(\frac{1}{2}(L+l)-n)$

Seite	Lin.	
265	30	ſt. $L-l$ l. $L+l$, zweymal.
270	8 v. u.	in der Note ſt. apello l. appello.
285	12	ſt. $\sqrt{1+e^2}$ l. $\sqrt{1-e^2}$.
288	3	ſt. Gränze l. Genüge.
293	3	ſt. Cos. u l. Cos. v.
—	12	ſt. als l. alſo.
312 u. 313		kommt der Buchſtabe b unter zweyerley Bedeutung vor. In n. 1. 8. u. I. II. bezeichnet er die Breite PTR, in den übrigen Ausdrücken aber den Winkel RST.
328	10	l. der Sonne $=1$, des Planeten $=a$, die Maſſe der Erde $=\mu$, des Planeten $=$
333	18	l. Insigniores.
—	25	ſt. C l. D.
338	6 v. u.	ſt. $\overline{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}u}^2$ l. $\overline{\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}v}^2$
—	5 v. u.	ſt. PM l. $\overline{PM}^2$.
354	10 v. u.	l. Länge des Periheliums $= 270$ u. ſ. w.
389	24	ſt. Beſchleunigung l. Beſchreibung.
397	12	ſt. ſey l. ſeyn.
—	24	ſt. in Mm l. Mm.
398	6 v. u.	ſt. Perhältniß l. Verhältniß.
421	25	l. verhält ſich
430	11	ſt. $1 : 4\pi^2$ l. $\pi^2 : 4$.
—	12	ſt. $1 : \pi^2$ l. $\pi^2 : 1$.
—	13	ſt. $\pi^2 : 1$ l. $1 : \pi^2$.
—	16	ſt. $\pi^2 : 1$ l. $1 : \pi^2$.
—	8 v. u.	ſt ſie l. ſich.
436	4 v. u.	ſt. PQ l. $P-Q$.
477	19	ſt. welcher l. welche
480	9 v. u.	ſt. ch l. e^2h.
489	2	ſt. $MQ.MS$ l. $MQ=MS$.
506	16	ſt. mr l. nr.
533	23	ſt. Sin. 8″, l. Sin. 8″,8.
551	1	ſt. MP l. Mp.
552	1 v. u.	iſt die 131. Fig. zu citiren.
553	12 v. u.	ſt. Perperdickel l. Perpendickel.
560	6 v. u.	ſt. $cpcq$ l. cp,cq.
561	4	l. Centripetalkraft $x = \frac{\overline{ad}^2}{ca}$ (§. 273. n. 1.), und in einem mit dem Halbmeſſer em mit der Geſchwindigkeit mo beſchriebenen Kreis die -
566	13	ſt. eine l. einer
576	24	ſt. $\left(\frac{a}{E}\right)^3$ l. $\left(\frac{a}{R}\right)^3$.
587	30	ſt. XV. l. XXV.
589	2	ſt. 57″ l. 57′.
608	7	ſt. Peturbationen l. Perturbationen.
623	21	ſt. III. l. IV. und zwiſchen II. und IV. ſetze man III. 0,0000834972.
644	2 v. u.	ſt. $2\overline{D}^2$. l. $c\overline{D}^2$.
650	24	ſt. Die l. die
672	14	l. Aequinoktialpunkts.



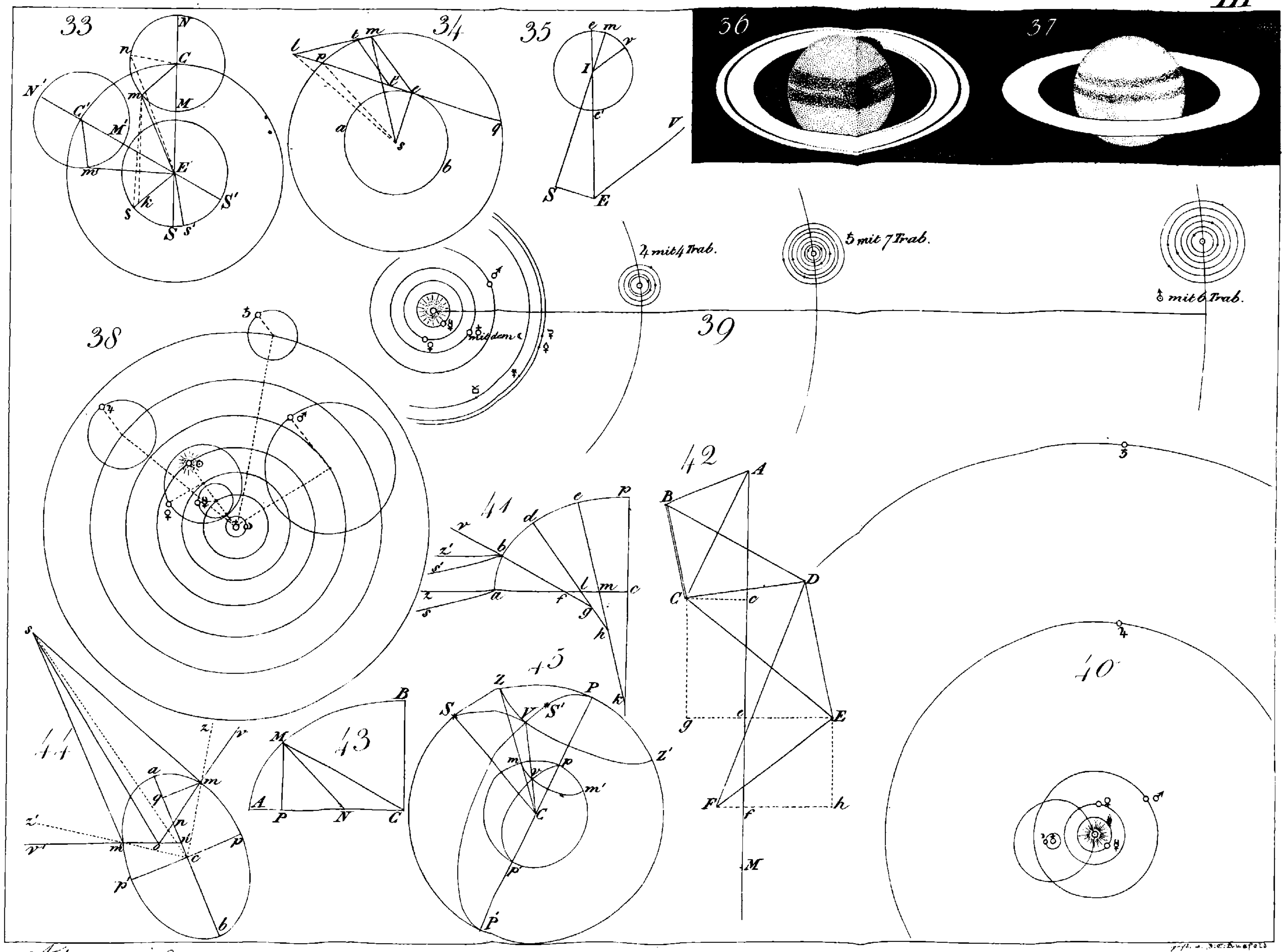
Astronomie

II

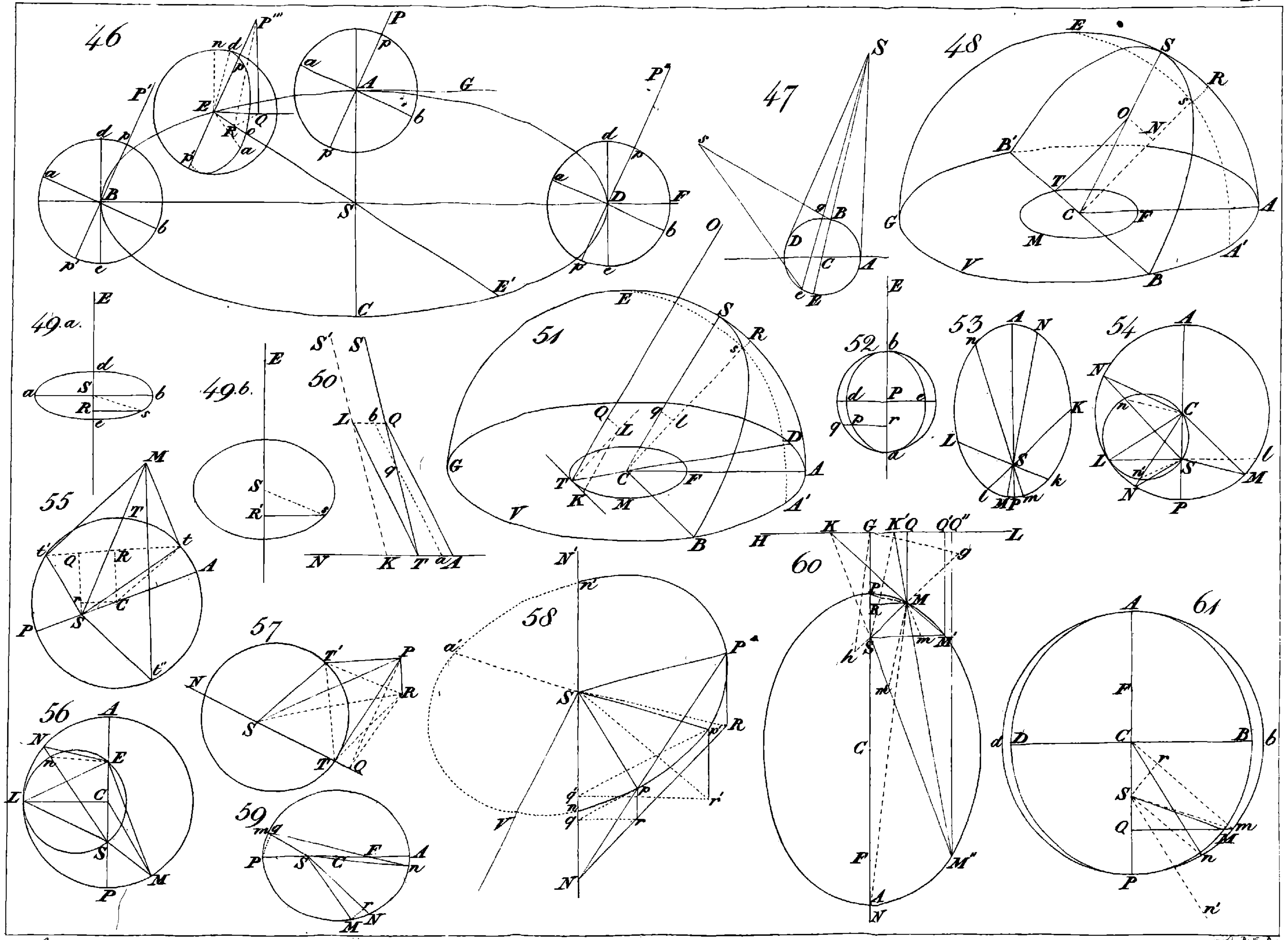


Astronomie

III

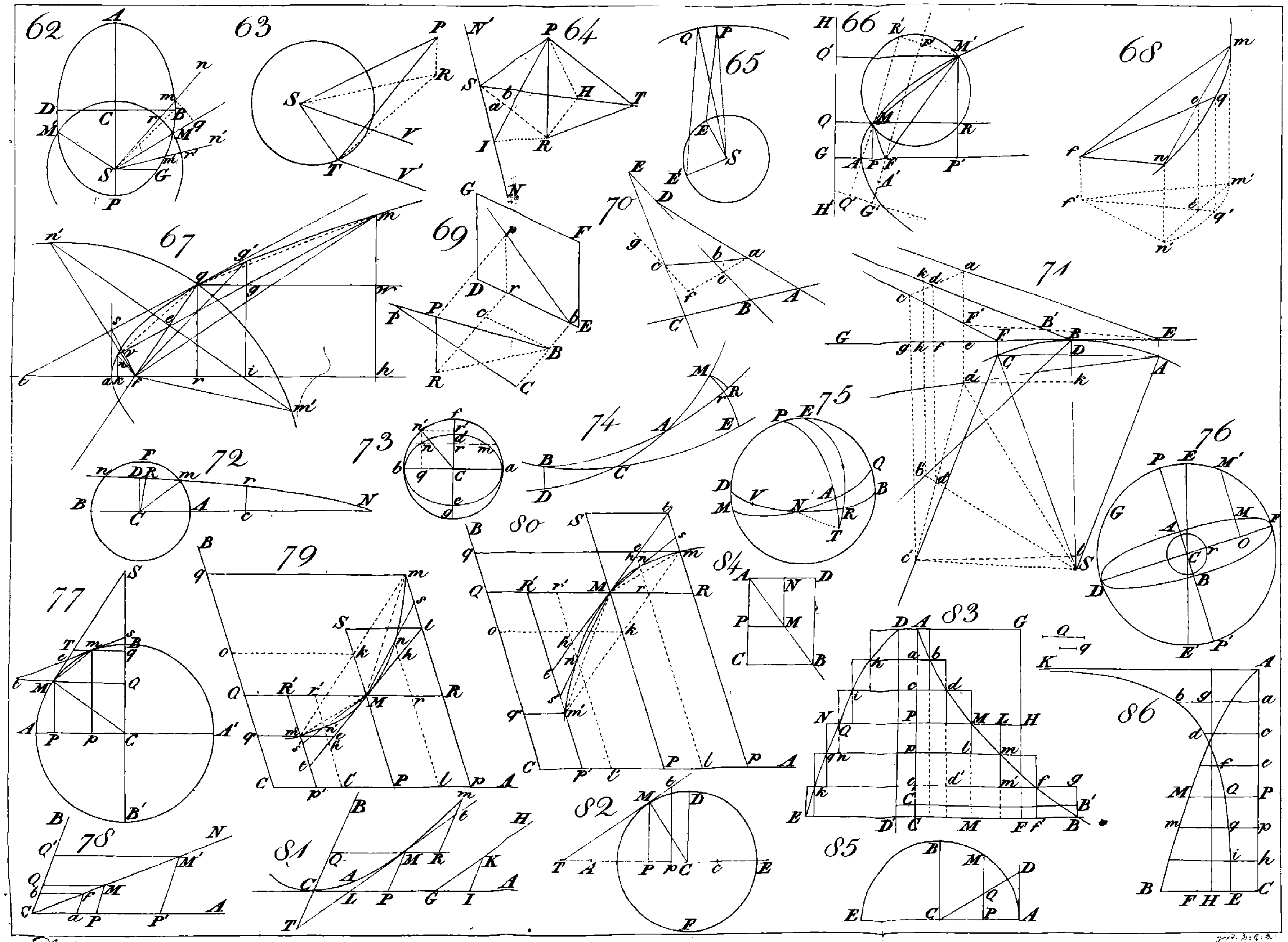


Astronomie

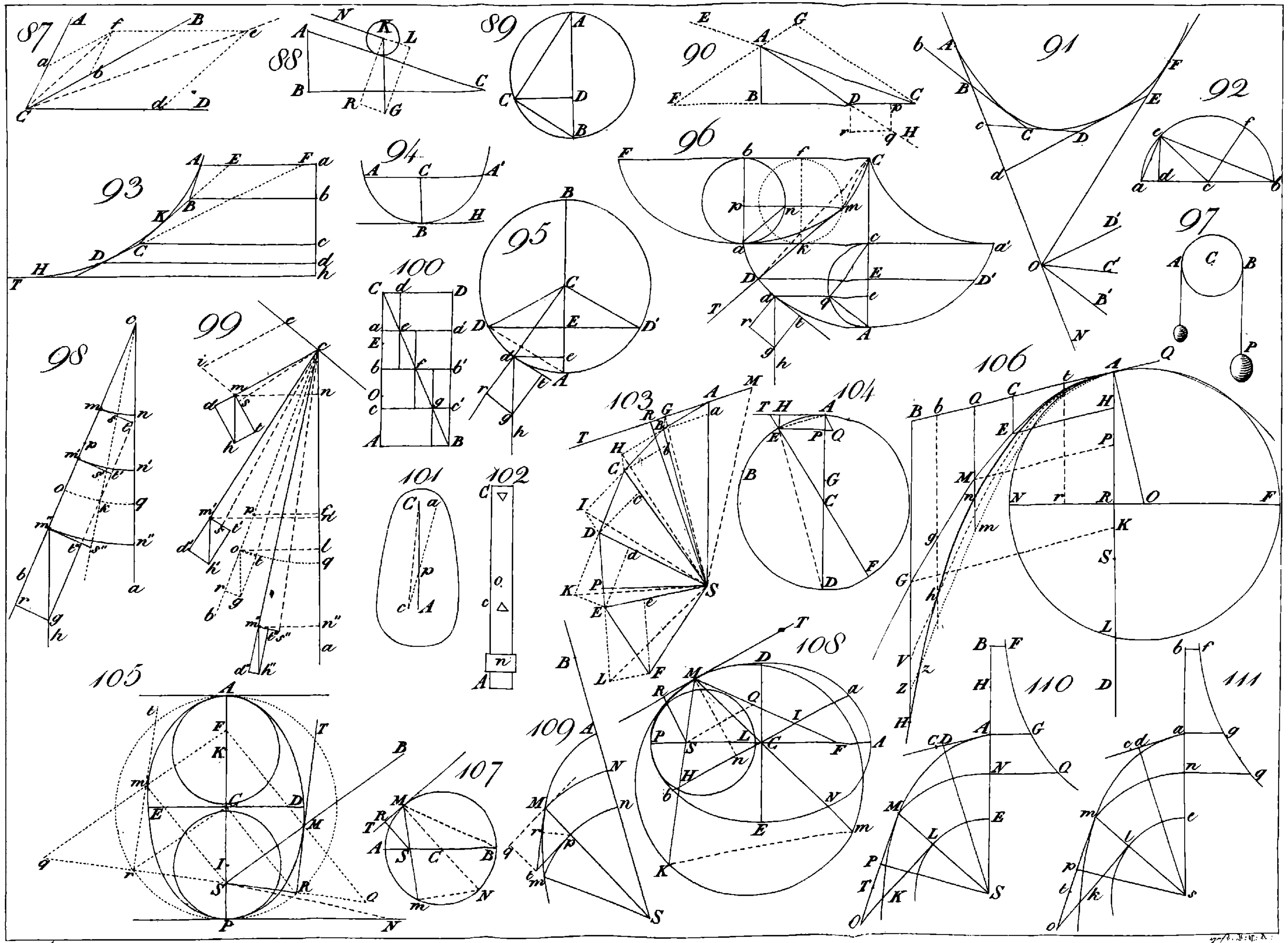


Astronomie

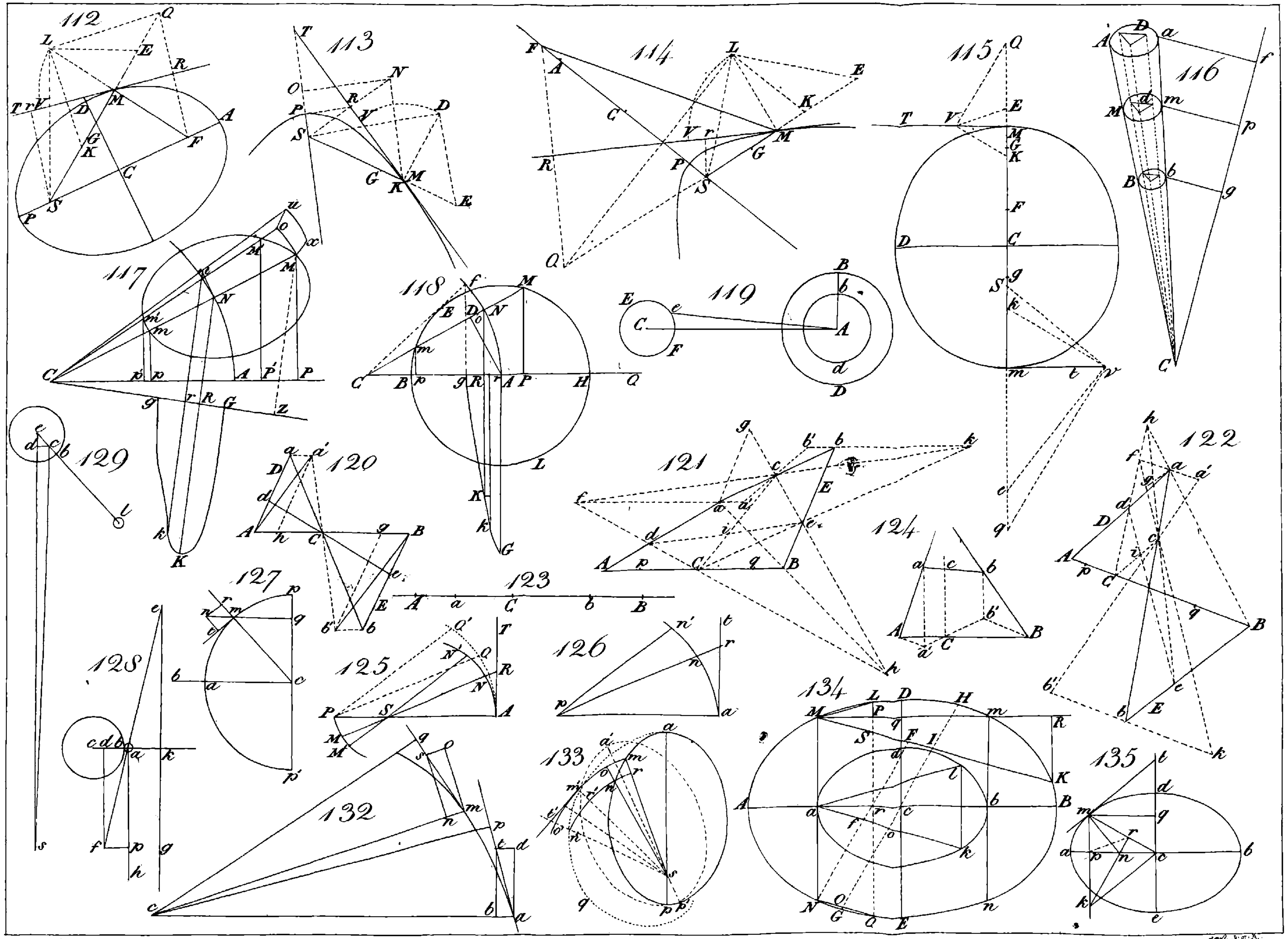
V



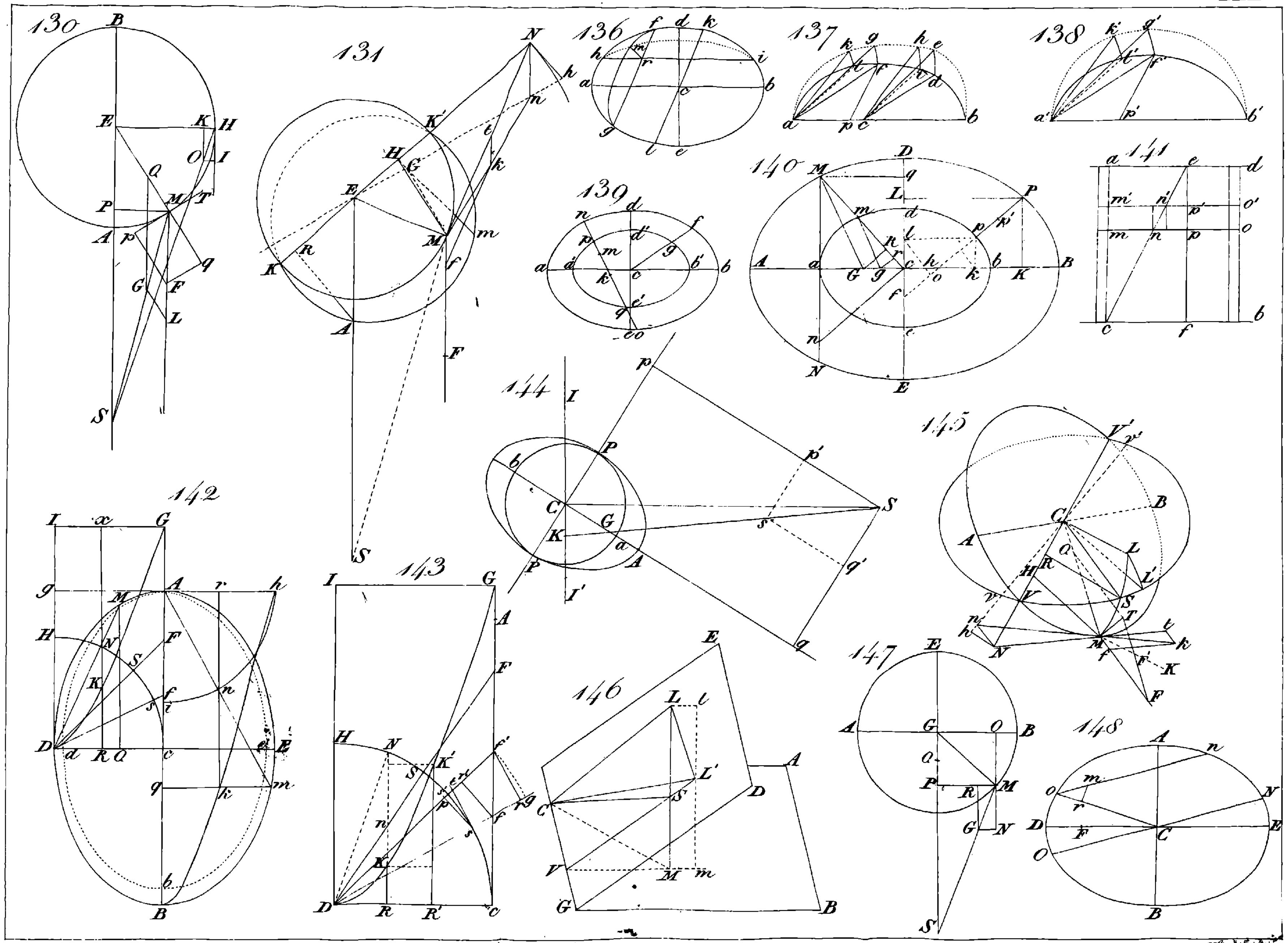
Astronomie


87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111

Astronomie



Astronomie



Astronomie