S. F. Lacroix

Lehrbegriff des Differential- und Integralcalculs.

Aus dem Französischen übersetzt und mit einigen Zusätzen und Anmerkungen begleitet von

Johann Philipp Grüson
Königl. Professor der Mathematik und ordentlichem Mitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften.

Erster Theil.

Berlin,
Bey F. T. Lagarde.
1799.

Vorrede.

Wenn die Elemente einer Wissenschaft noch unvollständig sind, werden diejenigen, die sie studieren durch die Menge von Büchern, welche sie zu Rathe ziehen müssen, um sich die ihnen fehlenden Kenntnisse zu verschaffen, muthlos gemacht, und wagen sich nur mit Schüchternheit in eine laufbahn deren Ende sie nicht absehn. Unter allen Wissenschaften ist die Mathematik vielleicht diejenige, deren Umfang und Fortschritte sich aus den Elementarwerken am wenigsten beurtheilen lassen.

Durch die Erweiterung der Grenzen der Analysis haben die großen Geometer unsers Jahrhunderts dem Style dieser Sprache eine Vollkommenheit gegeben die nothwendig auf die Darstellung der Wahrheiten Einfluß haben muß, welche vor ihnen bekannt waren. Man trift in der Geschichte der Mathematik auf Epochen, wo, ohne daß die Wahrheiten der einzelnen

Sätze einen Stoß gelitten haben doch ihre systematische Verkettung durch die Zusammenstellungen, wozu die neuen Entdeckungen Anlaß gegeben, verändert ist. Die Principien wurden fruchtbarer, die Anwendung derselben auf einzelne Fälle weniger nothwendig, und die Allgemeinheit der Methoden erlaubte das ganze Gebiet der Wissenschaft zu umfassen, ungeachtet der Fortschritte, die sie gemacht. — Wir befinden uns, glaube ich, in einer dieser Epochen. Die Zusammenstellung der auf die Differential und Integralrechnung sich beziehenden zahlreichen Materialien, die in den academischen Sammlungen zerstreut sind, ist allein hinreichend den ganzen Reichthum dieses wichtigen Zweiges der Analysis kennen zu lehren, und eine Menge einzelner Verfahrungsarten welche noch in die Kindheit dieser Rechnung gehören auf eine kleine Anzahl allgemeiner Methoden zurückzuführen. Aber man wird diesen Zweck nicht durch eine bloße Compilation erreichen — da sich nemlich dieselben Entdeckungen mehrerern Geometern unter sehr verschiedenen Gesichtspunkten dergestalt haben, so haben sich hieraus mehrere Methoden ergeben, zwischen welchen man eine Wahl treffen, oder welche man in einer solchen Ordnung darstellen muß, daß die Beziehungen, welche sie untereinander verknüpfen, sichtbar werden. Endlich ist es auch nothwendig, allen so zu sagen, einen gleichförmigen Anstrich zu geben, welcher keinen Unter=

ter=

terschied zwischen dem wahrnehmen läßt, was man einem Schriftsteller verdankt, und was man von einem andern entlehnt hat, und welcher über das Ganze Klarheit und Bestimmtheit in gleichem Grade verbreitet.

Dies ist das Geschäft, das ich mir auferlegt habe; ich habe alle die Schwierigkeiten gefühlt, die ich überwinden muß, um es mit Erfolge auszuführen, aber die Wichtigkeit des Gegenstandes, und das Bestreben nützlich zu werden, haben mich auf dieser mühsamen Laufbahn aufrecht erhalten, vornemlich aber die Ueberzeugung, daß ein Versuch dieser Art, so entfernt er auch von der Vollkommenheit seyn mag, doch dazu beytragen muß, die Wissenschaft weiter zu bringen. Ehe ich von dem Plan Rechenschaft ablege, den ich befolgt habe, glaube ich dem Leser den Ursprung und Fortgang des Differential- und Integralcalculs vor Augen legen zu müssen, damit er desto besser die Gründe einsieht, welche mich in der von mir gewählten Anordnung bestimmt haben.

Die Erfindung des Differential- und Integralcalculs fällt nicht früher, als in das letzt vergangene Jahrhundert, aber auf die Fragen, welche dahin geführt, war man schon in den ersten Zeiten der Geometrie gekommen. — Wenn die alten Geometer die krumlinigen Figuren, unter einander, und mit den geradlinigen vergleichen wollten, waren sie genöthigt, ihren Beweisen eine neue Wendung zu geben.

Der 12te Satz im 12ten Buche der Elemente Euklid's enthält den ersten Versuch dieser Art, der auf uns gekommen ist. Er hat den Beweis zur Absicht, daß die Cirkelflächen sich verhalten wie die Quadrate ihrer Diameter. Hier ist ein Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen; denn in dem vorhergehenden Satze beweist Euklides, daß dieses Verhältniß dem Verhältnisse ähnlicher in zwey verschiedenen Kreisen beschriebenen Polygone gleich sey, und es scheint mir einleuchtend, daß der Geometer, wer es auch sey, der diese Wahrheit zuerst entdekte, eingesehn, daß sie unabhängig von der Anzahl der Seiten des Polygons wäre, und daß die Polygone sich dem Kreis desto mehr näherten, je mehr Seiten sie hätten, woraus er nach dem Gesetze der Stetigkeit nothwendig schließen mußte, daß die Eigenschaft der Ersten auch den Zweyten zukäme.

Heut zu Tage würde man den durch diese Schlußreihen herausgebrachten Satz als hinlänglich erwiesen ansehen, und die meisten Bücher über die Anfangsgründe geben nicht einmal so vollständige Beweise. Die Alten aber waren in dieser Rücksicht schwieriger, als wir, und erlaubten sich nie zwey Größen mit einander zu verwechseln zwischen welchen ein auch noch so kleiner Unterschied wäre. — Um den Satz, dessen Wahrheit sie durch die angezeigten Betrachtungen so zu sagen geahndet hatten, außer Zweifel zu setzen, suchten sie zu erweisen, daß das Verhältniß der Kreise zu einander nicht größer und nicht kleiner seyn könnte als das Verhältniß der Quadrate ihrer Diameter, und um dahin zu gelangen, fingen sie damit an, daß sie bewiesen, es ließe sich im Kreise ein Polygon beschreiben, zwischen welchem und dem ihm correspondirenden um den Kreis beschriebenen Polygone, und also noch weit mehr zwischen welchen und dem Kreise der Unterschied kleiner wäre, als irgend eine gegebene Größe. — Archimedes erhob sich durch beynahe ähnliche Mittel zu viel schwerern Sätzen wie z. B. die Verhältnisse der Oberfläche und der körperlichen Inhalte des Cylinders und der Kugel, die Quadratur der Parabel, und die Eigenschaften der Spirallinien, aber es ist nicht glaublich, daß er sie so entdeckt hat, wie sie uns überliefert sind.

Diese Wahrheiten von einer Art, mit welchen die Köpfe der Mathematiker noch nicht vertraut waren, mußten nothwendig vielen Widerspruch finden, und der Mann von Genie, der sie zuerst aus der Dunkelheit, welche sie verbarg, hervorzog, sahe wohl ein, daß die Entwickelung der Ideen, welche ihm in seinen Untersuchungen geleitet, nicht hinreichend seyn würde diejenigen zu überzeugen, welche sich aus Unwissenheit, wozu sich oft Neid gesellt, gegen alles auflehen was ihnen überlegen ist. Dies ist nicht eine bloße Vermuthung; Archimedes, in dem Schreiben, worin er sein Werk über die Quadratur der Parabel seinem Freunde Dositheus widmet, antwortet denen, welche etwa Zweifel gegen seine Beweise erhaben mögten zum voraus, indem er sich auf das Beyspiel seiner Vorgänger beruft. *)

Als nach funfzehn finstern Jahrhunderten die Fackel der Wissenschaften von neuen angezündet, als die Schriften des Euklides und Archimedes übersetzt und erläutert wurden, suchte man den Faden wieder aufzufinden, der sie muthmaßlich in ihren Entdeckungen geleitet hatte, aber man merkte bald, daß ihnen mehr daran gelegen gewesen, ihre Zeitgenossen zu überzeugen, als zu unterrichten, man sah sich also genöthigt, ihre Spuren zu verlassen, und suchte sich neue Bahnen zu brechen. Ohne Zweifel bewogen diese Ursachen den Cavalleri, sich von der bis dahin üblichen äußersten Strenge zu entfernen, und führten ihn auf die Methode der untheilbaren Größen. Diesem zufolge betrachtet er die Linien als bestehend aus lauter Puncten die Flächen als bestehend aus Linien die Körper

*) Usi autem sunt eodem lemmate etiam Geometrae, qui ante nos floruerunt . . . . . , . contigit autem, ut unicuique horum, quae diximus, theorematum non minor quam iis, quae sine hoc lemmate demonstrata sunt, fides adhibita sit; pari fide nuper iis, quae à nobis edita sunt conciliatâ (Archimed. oper Oxoniae, 1792, p. 18).

per als bestehend aus Flächen. Diese Methode empfahl sich durch die Kürze die sie den Beweisen gab. Er suchte die Bündigkeit derselben dadurch darzuthun, daß er die Resultate, worauf sie führte mit den Resultaten verglich, welche die Alten nach ihrer Methode gegeben hatten. Dies gab ihm Muth sich in ein unbekanntes Land zu wagen. Er wurde seiner Principien wegen angegriffen, aber er vertheidigte sich, indem er zeigte, daß sie in Archimedische übersetzt werden könnten. „Die Flächen und Linien, deren Verhältnisse „Cavalleri untersucht, sagt Montucla, sind nichts „anders als die nach Archimedes Methode in so gro„ßer Menge eingeschriebene und umschriebene kleine „Körper oder Triangel, daß der Unterschied zwischen „ihnen und der Figur die sie umgeben, kleiner wird, „als jede gegebene Größe, aber statt daß Archimedes, „so oft er die Verhältnisse einer krummlinigen Figur „zu einer bekannten zeigen will, einen langen Um„schweif von Worten gebraucht, und eine indirecte „Beweisesart anwendet, schwingt sich der neuere „Geometer gewissermaßen ins Unendliche; und faßt „in Gedanken die Grenze dieser beständigen Theilun„gen auf, welche endlich den Unterschied zwischen den „geradlinigen und krummlinigen Figuren um oder in „welche jene beschrieben sind aufheben müssen.*) Das

*) Oder genauer, aufzuheben streben.

„Wort untheilbar, ist wenn man will, unei„gentlich, doch kann für die Geometer daraus kein Nachtheil entstehn — Ich setze hinzu wenn man es in seiner richtigen Bedeutung nimmt, und nie vergißt, daß es nur ein abgekürzter Ausdruck ist.

Roberval betrat in Frankreich dieselbe Laufbahn, welche sich Cavalleri in Italien eröfnet hatte. Indem er sich durch das Studium der Werke des Archimedes eine Methode zur Auflösung der Probleme über krummlinige Figuren suchte, fand er die, welche er in seiner Abhandlung von den untheilbaren Größen hinterlassen hat, und die sich von Cavalleri's Methode nur in den Ausdrücken unterscheidet. Aus Begierde, sich über seine Rivale Triumphe vorzubehalten, verbarg er seine Entdeckungen. Die Erscheinung des Werks von Cavalleri brachte ihn um alle Vortheile derselben, und strafte ihn dafür wie er es verdiente, daß er auf die Eingebungen einer übelverstandenen Eigenliebe gehört hatte. Roberval erfand auch eine Methode um die Tangenten an die Curven zu ziehn. Diese ist in ihren Principien allerdings sehr sinnreich, steht aber doch der Methode des Descartes, mit der sie mehrere haben parallel stellen wollen, um vieles nach, weil sie in den meisten Fällen nichts thut, als die Schwierigkeit des Problems hinausschieben. Des Descartes Methode hingegen giebt für alle algebraische Curven eine Verfahrungs-

art

art an, deren Geist leicht zu fassen ist, und deren Anwendung immer zum vorgesteckten Ziele führt.

Es scheint mir, daß sie damals als sie erschien, nicht nach ihrem ganzen Werthe geschätzt wurde. Ohne Zweifel enthalten die Schriften der Alten Untersuchungen, die eine weit größere Anstrengung des Kopfes erfordern, und deswegen mehr bewundert werden; aber sollte man nicht vor der überwundenen Schwierigkeit solchen Methoden den Vorzug geben, welche durch ihre Fruchtbarkeit die Arbeit vermindern, und allen zugänglich machen, was sonst nur der Antheil ausgezeichneter Köpfe war?

Wieviel die Philosophie und Mathematik dem Descartes zu verdanken hat, ist zu bekannt, als daß man zu dem bereits gesagten noch etwas hinzusetzen könnte. Aber vielleicht hat man etwas übersehn, was diesem großen Manne vor den Geometern seiner Zeit einen ausgezeichneten Vorzug giebt. So sehr er auch auf seinen Ruhm bedacht war, so scheint ihm doch die Fortpflanzung der Wissenschaften noch mehr am Herzen gelegen haben; denn seine Werke stellen immer die Geschichte seiner Meditation dar, und bringen die, welche die von ihm angefangenen Untersuchungen weiter treiben wollen, auf den rechten Weg. Man kann sagen, daß er damals der einzige war, welcher mit der Zierlichkeit und Einfachheit schrieb, welche der Styl in wissenschaftlichen Werken im-

mer

mer haben soll. Er konnte die allgemeinen Methoden die er inne hatte, zur Auflösung der schwersten Aufgaben benutzen, und nach Art der Alten nur die Resultate davon bekannt machen, er hätte sich doch unter den damaligen Mathematikern einen großen Namen gemacht; aber auf die Dankbarkeit der Nachwelt würde er weit weniger Anspruch haben.

Fermat war schon vor dem Descartes im Besitze einer Methode der Tangenten, aber machte sie erst bekannt, nachdem Descartes die seinigen mitgetheilt; er fügte auch seine Methode des Maximum und Minimum hinzu. Diese Methoden sind einfacher als die des Descartes, sie wurden aber von Fermat nur angedeutet, welcher weit entfernt die edle Freymüthigkeit des Descartes nachzuahmen, es im Dunkeln ließ (wenigstens gilt dies von seiner Lehre vom Maximum und Minimum,) welcher Weg ihn dahin geführt, und auf welche Art man sie erweisen könnte. Descartes glaubte anfangs, daß diese beyden Methoden falsch wären; in der Anwendung, die er von der Methode der Tangenten machen wollte, verallgemeinerte er weniger Weise die Betrachtungen, die sich auf den besondern Fall bezogen, dessen Fermat sich zum Beyspiele bedient, und es war unmöglich, ihn auf diese Regel zurückzuleiten, die er nach seiner Art verbesserte. Er blieb auch immer der Meynung, daß Fermat erst nach ihm das Mangelhafte derselben eingesehn.

Durch

Durch eine Menge von Entdeckungen, deren mehrere sich auf die Zahlen beziehn, und welche die beyden berühmtesten Analysten unsers Jahrhunderts beschäftigt haben, hat Fermat Beweise eines großen Genies gegeben.

Man hat gesagt, daß er Descrates ersetzt hätte, wenn dieser nicht gelebt hätte, ich gebe es zu, wenn man ihn nach der Wichtigkeit seiner Arbeiten, und den Schwierigkeiten die er überwunden hat beurtheilt. Aber ich denke, daß es zu zweifeln erlaubt sey, ob er zur Fortpflanzung der Wissenschaft soviel beygetragen haben würde, als sein Nebenbuhler, durch seine mittheilenden Karakter, und die einfache Art, womit er das Resultat seiner Untersuchung darstellt, that.

Fermat hatte vor dem Deskartes, welcher immerwährend in eine Menge Streitigkeiten verwickelt war, die ihm der Neid zuzog, und der sich überdieß mit einer Menge verschiedener Gegenstände beschäftigen mußte, den Vorzug sich der Geometrie, ohne andere Zerstreuungen, als die ihm die Pflichten seines Amtes auflegten, ganz widmen zu können. Dieses anhaltende Nachdenken über einen einzigen Gegenstand, mußte nothwendiger Weise sein Genie unterstützen die größten Schwierigkeiten zu übersteigen, und auch zur Vervollkommnung der Methoden beitragen, die er erfunden hatte: denn bey der Schätzung der Werke geistiger Kräfte kommt die Zeit eben sowohl in Betrachtung, als bey der

Schä-

Schätzung der Wirkung physischer Kräfte. Leibnitz und Newton werden uns bald Gelegenheit geben, diese Bemerkung zu wiederholen.

Huygens war der erste, der die beyden Regeln des Fermat bewies, Sluze stellte hernach eine sehr einfache Methode auf, die Tangenten zu ziehn, welche im Grunde nichts anders ist als Fermats Calcul in Worten ausgedrückt, und von allem überflüssigen befreyt.

Endlich erschien Barrow mit seinem karakteristischen Triangel, welcher nichts anders als der Differenzial-Triangel ist, und erreichte so den höchsten Grad der Einfachheit, deren die Methode der Tanganten, in Beziehung auf die algebraischen Curven fähig ist. Um die Geschichte von der Aufgabe der Tangenten nicht zu unterbrechen, habe ich die Fortschritte, welche in der allgemeinen Auflösung der Quadraturen seit Cavalleri gemacht wurden, bei Seite gelassen, Gregor von St. Vinzent, Roberval und Pascal machten in dieser Materie wichtige Fortschritte; deren Aufzählung aber nicht hieher gehört, weil sie dieselben nur der Anwendung der Methoden der Alten, oder der Methode des Untheilbaren, zu verdanken hatten. Doch muß man hievon die Methode ausnehmen auf welche St. Vincent durch Betrachtung der Reihe in und um dieselben Curven beschriebener Rectangel geführt wurde. Dieses konnte die Idee veranlassen, den Integralcalcul auf die Quadraturen anzuwenden.

In

In der Arithmetik des Unendlichen von Wallis, sieht man die ersten Spuren von der Anwendung des algebraischen Calculs auf die Quadratur der Räume, eine Anwendung die sich auf die Methode des Untheilbaren gründet. Wallis zieht die Reihen in Betracht, und sucht die Summe derselben durch ihre ersten und letzten Glieder auszudrücken; er gelangt auf diese Art zur Kenntniß dieser Summe, oder vielmehr ihrer Grenzen, in dem Falle, wo die Anzahl der zu summirenden Glieder unendlich, das letzte Glied es aber nicht ist. Indem er nun ferner die Flächen als aus Linien bestehend ansieht, deren Längen nach einem bestimmten Gesetze zu oder abnehmen, so findet er für diese Flächen den Ausdruck, indem er die Reihen der Linien, woraus sie zusammengesetzt sind, summirt. Dieser Methode zufolge hängt die Berechnung des Flächeninhalts eines Triangels von der Summirung der arithmetischen Progression ab.

Wallis erwies durch seine Methode die Hauptregel für die Quadratur derjenigen Curven, deren Ordinate irgend einer Potenz der Absciſſe proportional ist; und bekam dadurch die Regel auch für diejenigen Curven deren Ordinate durch eine Reihe der Monomen ausgedrückt ist. Die Interpolations-Methode die er ebenfalls erfand, um gewisse Curven zu quadriren, deren Gleichung gewissermaaßen zwischen zwey andern begriffen war, welche seine erste Methode

errei-

erreichen konnte, verdient vornehmlich die Aufmerksamkeit seiner Leser; denn sie enthält den Keim der schönsten Entdeckungen des Newton, und macht noch heutiges Tages den wichtigsten Theil der Theorie der Reihen aus. Diese Methode führte den Wallis zu sehr merkwürdigen Ausdrücken für die Kreisfläche.

Wallis muß in die Classe der Geometer gesetzt werden, welche auf die Fortschritte der Analysis den größten Einfluß gehabt haben, denn außer den ihm eigenthümlichen Entdeckungen kann er noch Anspruch auf den größten Theil derjenigen machen, auf welche die meisten der mit ihm gleichzeitigen Geometer durch Betrachtung der von ihm erfundenen Reihen geleitet wurden.

Neil und Van-Heuraet gaben in einer der cubischen Parabeln, das erste Beyspiel einer rectificirten Curve und das Mittel das Van-Heuraet gebraucht, führt das Problem der Rektification auf das Problem der Quadraturen zurück. Browncker und Mercator trieben die Entdeckungen des Wallis weiter, und gelangten für die Quadratur des Krieses und der Hyperbel zu den ersten bekannt gewordenen Reihen; der erste entdeckte in den Kettenbrüchen eine neue Art unendlicher Reihen. Man muß bemerken, daß der Fundamental-Grundsatz von der Rectificirung der Curven, dessen sich Neil bediente, und der Fundamental-Grundsatz der Reduction aus unendlichen Reihen bestehender Brüche, wodurch sich Mercator in den Besitz der Quadratur der Hyperbel

setzte.

setzte, diese beyden Principien befinden sich schon in Wallis Werken.

Dieß war ungefähr der bekannte Zustand der Wissenschaft, als im Jahr 1669. auf Barrows Veranlassung zwischen Newton und Collins ein Briefwechsel zu Stande kam: Barrow theilte dem Collins im Monath July dieses Jahres Newtons Schrift mit, welche den Titel führt: De analysi per aequationes numero terminorum infinitas; und bezeichnet selbst in einem seiner Briefe, den Caracter der Newtonschen Methode, er betrachtet sie als eine Erweiterung von Mercators Methode, als eine Erweiterung, welche mit dem Stempel des Genies bezeichnet, und in seiner Art nichts zu wünschen übrig läßt. Am Ende jener Schrift bemerkt Newton, daß er im Stande sey, die Tangenten an die mechanischen Curven zu ziehn; jedoch giebt er hiervon kein Beyspiel, und setzt weiter unten hinzu: Sed ista narrandi non est locus.

Barrow, Collins und Oldemburg verbreiteten durch ihren Briefwechsel die analytischen Entdeckungen des Newton; sie machten den Gegenstand derselben mehreren Geometern des festen Landes bekannt, wie z. B. dem Sluze und Borelli.

Im Jahr 1672 erscheint Leibnitz zum erstenmale auf der Bahne. Er war damals in London und theilte mehreren Mitgliedern der Königl. Gesellschaft einige Untersuchungen über die Theorie der Differenzen der Zahlen mit, man zeigte ihm, daß er mit Mouton, einem Geometer aus Lyon hierin zusammengetroffen sey. Bald verließ er diese Art Beschäftigung, um sich in der Lehre von den Reihen zu unterrichten, welche die Aufmerksamkeit aller Geometer auf sich zog. Im Jahr 1674 kündigte er dem Oldemburg, den er auf seiner Reise nach England kennen gelernt hatte, an, daß er sehr wichtige Lehrsätze in Beziehung auf die Quadratur des Kreises durch die Reihen, und außerdem sehr allgemeine analytische Methoden besitze. Oldemburg antwortete auf seine Briefe, er glaube ihn benachrichtigen zu müssen, daß Gregory und Newton auch Methoden gefunden hätten, welche die Quadratur sowohl geometrischer als mechanischer Curven gäben und sich auf den Kreis erstreckten. Ich übergehe alle Briefe, welche in Bezug auf die Reihen geschrieben wurden, weil kein Zweifel ist, daß die englischen Geometer von dieser Seite vor Leibnitz den Vorsprung hatten; aber allen die einige Unpartheilichkeit haben, wird es einleuchten, daß er diesen, welche ihm zuvorkommen, nur die Nacheiferung schuldig sey, welche in Männern von Genie — die ausgezeichneten Arbeiten ihrer Zeitgenossen immer erwecken, und daß er seinerseits durch selbstgeschaffene Mittel die Reihen fand, deren Entdeckung man ihm so oft streitig gemacht hat.

Die

Die erste unmittelbare Mittheilung zwischen Newton und Leibnitz, findet sich in einem Briefe den er am 13. Juny 1676 an Oldemburg schrieb. Die ehrvollen Ausdrücke, in welchen er von Leibnitz im Anfang dieses Schreibens spricht, beweisen, daß er ihn zu schätzen wußte. In diesem Schreiben, das er verfaßt hatte, um Leibnitzen zu Gesicht zu kommen, handelt nur von Reihe; und eben so ist es in der Antwort, die Leibnitz an Newton durch Oldemburg übermachte.

Ich komme zum zweiten Briefe des Newton an Oldemburg; der Anfang desselben zeigt von Newtons Seite Merkmale einer ächten und wohlverdienten Hochachtung gegen Leibnitz; man findet hierauf die Anzeige des Weges, der Newton zu seinem Lehrsatze von Erhebung eines Binomiums zu einer beliebigen Potenz führte. In diesem Briefe ist es, wo er die Eigenschaften der Methode der Fluxionen beschreibt, sowohl zur Untersuchung der Tangenten, als auch für die Quadraturen; aber er verbirgt sie in einem Anagramme von versetzten Buchstaben. Man muß wohl bemerken, daß alles übrige sich bloß auf die Reihen bezieht; daß die Beschreibung der Vorzüge der Newtonschen Methode, nur die Anfzählung dessen zeigte, was diejenigen natürlicherweise wünschen müßten, welche die bis dahin bekannt gewordenen Methoden der Tangenten und Quadraturen kannten, und die Fälle bemerkt hatten, wo sie unzureichend wurden, und daß man daraus keinen positiven Begriff ziehen könnte.

Den 21. Juny 1677 übermachte Leibnitz dem Oldemburg einen Brief, um ihn Newton mitzutheilen, welcher die ersten Versuche einer Methode enthielt, die sich auf alles erstreckte, was Newton's Methode begriff; es war der Differentialcalcul. Oldemburgs Tod, der kurz hierauf erfolgte, machte diesem Briefwechsel ein Ende, und Leibnitz wartete bis 1684, um der Welt seine Entdeckung mitzutheilen, die er damals in die leipziger acta eruditorum einrückte.

Die getreue Darlegung die ich so eben nach dem Comercium epistolicum zufolge, welches auf Befehl der Königl. Gesellschaft in London gedruckt ist von der Entstehung des Differential-calculs gemacht habe, kann über die unstreitigen Rechte keinen Zweifel lassen, welche Leibnitz auf die Entdeckung dieses Calculs hat; und da er der erste ist, der ihm öffentlich bekannt machte, während Newton, der seine Ruhe seiner Ehre und dem Nutzen seiner Zeitgenossen vorzog, seine Methode vergessen zu haben schien, ist er nicht auch derjenige den man in dieser Entdeckung zuerst nennen muß?

Leibnitz ärntete bis zum Jahre 1699 ohne Widerspruch die Ehrenbezeugungen ein,

wel-

welche die Schönheit und Fruchtbarkeit seiner Erfindung verdiente. Newton selbst gab in seinem Werke von den Principien, welches 1688 erschien eine Probe der Fluxions-Methode und lies dabey dem Leibnitz alle ihm gebührende Gerechtigkeit widerfahren. Die Sachen würden so geblieben seyn ohne den groben Ausfall des Fatio von Duillier, welcher zuerst das Recht in Zweifel zog, welches Leibnitz auf die Differentialrechnung hatte, und wenn die Leipziger Journalisten ein wenig mehr Feinheit und Anstand beobachtet hätten, in dem Auszuge den sie von einem Werke Newtons machten; denn man muß gestehen, daß sie nichts als die Wahrheit gesagt hatten, und das Newton sich nicht würde haben beklagen können, hätte nicht Keil aus übertriebener National-Eifersucht, den Sinn ihrer Ausdrücke entstellt. Aber das wahre Vergehen dieser Journalisten bestand darin, daß sie nicht in das Concert der Lobeserhebungen eingestimmt hatten, welches die Engländer mit Recht von ihrem hochberühmten Landsmann machten; daraus entstand eine Streitigkeit, welche die Aufmerksamkeit des gelehrten Europa auf sich zog. Newton selbst nahm Anfangs hieran keinen Antheil, Keil griff den Leibnitz lebhaft an, dieser beklagte sich darüber bey der Königl. Gesellschaft in London mit vieler Mäßigung, jener, beschuldigte ihn laut des Plagiats, dies veranlaßte die Gesellschaft, Commissarien zu ernennen um Collin's und Oldemburgs Papiere zu prüfen und zu untersuchen, welche Fingerzeige Leibnitz wohl von ihnen hätte bekommen können.

Die Commissarien begnügten sich zu entscheiden, daß Newton die Fluxionsmethode früher erfunden, welche im Grunde mit der Differentialrechnung einerley ist. Aber da sie den Leibnitz nicht für einen Plagiarius erklärten, wie Keil es wünschte, so suchte dieser es zu ersetzen, indem er die Sammlung von Schriften, welche zur Entscheidung des Rechtshandels gedient hatten und welche die Gesellschaft unter dem Titel Commercium epistolicum drucken lies, mit Anmerkungen begleitet, welche eben so partheiisch als beleidigend für Leibnitz waren. *)

Die

*) Es muß auffallen zu sehen, wie Buffon der damals noch nicht bekannt war in der Vorrede zur französischen Uebersetzung zur Fluxionsmethode, sich man weiß nicht warum zum Echo aller Verläumdungen Keils machte, und von einem Manne wie Leibnitz mit einer wirklich unverzeihlichen Unbedachtsamkeit sprach. Um ein Beyspiel von der Partheylichkeit zu geben, die in dieser Schrift herrscht, welche außerdem mit Unrichtigkeit angefüllt ist, will ich neben den Text der Anmerkung die Newton in der ersten Ausgabe der Principien gemacht hat, Büffons Uebersetzung stellen.

In litteris quae mihi cum Geometrâ peritissimo G. G. Leibnitio annis ab hinc decem intercedebant, cum signi-

Die Thatsachen sprechen hinlänglich, und ich enthalte mich in das Detail dieser Streitigkeiten einzugehen, die wie alle litterarische Streitigkeiten, weit weniger das Interresse der Wahrheit zum Gegenstande hatten, als die Leidenschaften und Eigenliebe einiger mittelmäßiger Menschen, deren Existenz ohne die Zwiste, welche sie erregten, ganz im Dunkeln geblieben wäre. Dennoch muß ich bemerken, daß es falsch ist, was Fontenelle sagt, daß Newton bey der ganzen Sache gleichgültig geblieben wäre; er betrat den Kampfplatz,

significarem me compotem esse methodi determinandi maximas et minimas, ducendi tangentes, et similia peragendi, quae in terminis surdis aeque ac in rationalibus procederet, et litteris transpositis hanc sententiam involventibus [Datâ aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, et vice versâ] eamdem CELAREM: rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, et methodum suam communicavit à meâ vix abludentem praeterquam in verborum et notarum formulis, et idea generationis quantitatum. Utrisque fundamentum continetur in hoc Lemmate. Ph. nat. princ. mat. Cantabrid. 1713, vel Amstel. 1714, p. 226.

„J'ai autrefois communiqué par lettrès, au très-„habile Géomètre M. Léibnitz, ma Méthode; il ma ré-„pondu qu'il avoit une Méthode semblable, et qui ne „diffère presque point du tout de la mienne, etc." La Méthode des Fluxions. Préface, pag. 26.

und die Bemühungen des Chamberlayne und des Abt von Conti die beyden berühmten Nebenbuhler zu versöhnen blieben unnütz. Newton blieb dabey, dem Leibnitz selbst nach dessen Tode, die Gerechtigkeit zu versagen die er ihm ehemals wiederfahren lies, er stellte sich Leibnitzens Methode mit Barow Tangenten-Methode für einerley zu halten, und sahe auf sich das Dilemma anwenden, welches man Keilen vorlegte, entweder unterscheidet sich die Fluxionsmethode, welche ihr mit dem Differentialcalcul für einerley haltet, in Nichts von Barrows Methode, oder diese letzte ist nicht der Differentialcalcul. Ja in der dritten Ausgabe seiner Principien lies er entweder aus eigenem oder aus fremden Antriebe die Anmerkung weg, in welcher er Leibnitzens Rechte anerkannte (Man sehe die Anmerkung der vorigen Seite).

Die Umstände gaben dem Newton vor Leibnitz mehr Vortheile voraus als Fermat vor dem Descartes voraus hatte. Von seiner frühesten Jugend an unterbrach nichts den Faden seiner Nachforschungen, welche er auf die Geometrie richtete; das Land wo er das Leben erhielt war damals die Wiege der glänzendsten Entdeckungen, ferner hatte er zum Lehrer einen Mann der sich unter den Erfindern ausgezeichnet hatte (Barow). Freylich vermögen solche Umstände nichts ohne das Genie, gleichwohl muß man ein-

eingestehen, daß sie die Entwickelungen desselben mächtig befördern.

Die Studien, welche Leibnitz Anfangs ergriffen hatte, die wenige Unterstützung, welche Deutschland, sein Vaterland, ihm in der Mathematik gewähren konnte, alles schien ihn von dem Anbau einer Wissenschaft zu entfernen, welcher er jetzt den ächtesten Theil seines Ruhms verdankt; auch sieht man ihn erst nach seiner Reise nach England auf der Bahn der Entdeckungen; hier lernte er aus dem was andere geleistet hatten, was noch zu leisten übrig wäre. Er selbst erzählt in mehreren seiner Briefe, mit eben so viel Unbefangenheit als Bescheidenheit, den Anfang seiner Fortschritte, und die Unterstützung die er von Huygens empfing, und dieser berühmte Geometer, welcher Leibnitzens eigentlicher Lehrer war, wurde einer seiner Bewunderer.

Man beschuldige mich nicht, daß ich den Männern, welche den Ruhm ihres Jahrhunderts ausgemacht haben, ihren Rang anweisen wollte; Newton hat sich in seinem unsterblichen Werke von den Principien ein Denkmal gesetzt, welches ihm auf immer die Bewunderung der Nachwelt versichert; Aber der Glanz seiner Ansprüche gebietet die strengste Billigkeit gegen seinen Nebenbuhler, welcher unaufhörlich von einem Gegenstand zum andern schnell überging, einen sehr ausgebreiteten Briefwechsel unterhielt und ohne zur Ausführung eines großen Werkes Musse zu haben, die Ehre einer Entdeckung theilte, welche die Gestalt der Mathematik verändert hat, und der in einer kleinen Anzahl von Briefen und Schriften eine Menge sinnreicher Gedanken ausstreuete, welche den Keim zu den schönsten Theorien in sich schlossen.

Die Entdeckung des Differentialcalculs blieb einige Zeit unfruchtbar; und Leibnitz, um die Aufmerksamkeit der Geometer wieder aufzuwecken, legte ihnen im Jahre 1687 die Aufgabe vor, die Beschaffenheit der Curve zu bestimmen, die ein schwerer Körper durchlaufen müßte, um in gleichen Zeiten gleichförmig sich zu senken. Huygens war der erste der die Auflösung des Problems gab, ohne aber die Methode anzuzeigen, deren er sich bedient hatte.

Jakob Bernoulli löste es ebenfalls durch den Differentialcalcul auf, und machte seine Analysis in den Actis Eruditorum 1690 bekannt.

Johann Bernoulli, jüngerer Bruder des vorhergehenden, und dessen ehemaliger Schüler, betrat fast zu gleicher Zeit mit ihm die Laufbahn, und errichtete mit Leibnitz einen Briefwechsel, der bis zum Tode des letzten dauerte. Er machte auch in Frankreich den Differentialcalcul bekannt, worin er den Marquis de l'Hopital unterrichtete. Leibnitz und die Bernoulli lösten eine große Anzahl eben so neuer als schwerer Probleme auf, welche sie hernach allen Geometern

metern vorlegten. Sie nahmen auch die Probleme der Kettenlinie und der Curvel des schnellsten Falles, welchen selbst Gälilåi nicht gewachsen war wieder vor.

Jakob Bernoulli, unaufhörlich von seinem Bruder, dessen Lehrer er ehemals gewesen war, geneckt, legte ihm, als eine Herausfoderung das Isoperimetrische Problem vor, ein Problem von einer höhern Ordnung, als alle mit denen man sich bis dahin beschäftiget hatte. Gleichwohl muß man eingestehn, daß schon vor ihm Newton eines der Art aufgelöst hatte; weil er in seinem Buche von den Principien, das 1687 herauskam, die Form des festen Körpers angab, welcher von Seiten eines Fluidums in welchem er sich bewegt dem mindesten Wiederstande erleidet. Aber er hat nicht bekannt gemacht, auf welchen Wege er dahin gekommen, und hat nirgend angezeigt, daß er eine allgemeine Methode habe, um diese Art Probleme aufzulösen; da doch die Methode die Jakob Bernoulli erfand, eine Analysis darbietet, herrlich durch ihre Zierlichkeit und weit erhaben über alles was bis dahin geleistet war.

Der Differentialcalcul erhielt jeden Tag neue Erweiterungen; man hatte ihn auf die Theorie der Evoluten angewandt, eine der merkwürdigsten Entdeckungen, die man Huygens verdankt. Aber noch war kein Werk vorhanden, worin man sich darüber unter-

unterrichten konnte; als im Jahre 1699 l'Hopital, einer der wenigen Geometer, welche mit dem Differentialcalcul fortgeschritten waren und selbst Antheil daran genommen hatten, seine Analysis des Unendlich kleinen herausgab. Dieses Buch war lange Zeit das Beste, welches man über diese Materie hatte, aber es ließ noch immer eine Abhandlung vom Integral-Calcul zu wünschen übrig, worin sich l'Hopital nicht einlassen wollte; weil er wußte, daß Leibniß ein großes Werk unter Händen hatte, welches er unter dem Titel: de scientiâ infiniti, bekannt machen wollte; das er aber nicht vollendet hat. Der Integralcalcul stellte vielmehr Schwierigkeiten dar, als der Differentialcalcul. Die erste allgemeine Methode, die man in diesem Calcul fand, war die Methode der Integration der rationalen Brüche; welche Johann Bernoulli im Jahre 1702 herausgab; aber von 1694 an hatte er das Mittel angezeigt, die Differential-Gleichungen durch Absonderung der veränderlichen Größen zu integriren. Gabriel Manfredi, ein italienischer Geometer gab 1707 eine ganze Abhandlung über die Gleichungen heraus, worin er mit dem Geometer von Basel zusammentraf.

Man muß bemerken, daß während, der Differential- und Integral-Calcal große Fortschritte unter den Händen der Geometer des festen Landes machten, Newton seine Entdeckungen zu vergessen schien. Erst

im

im Jahr 1706 erschien seine Abhandlung von der Quadratur der Curven; und seine Abhandlung der Fluxionen kam erst 1736 also lange nach seinem Tode, ans licht. Das mathematische Genie schien in der Familie der Bernoulli's erblich zu seyn. Nikolas und Daniel, Söhne Johanns wurden bald eben so geschickt, als ihr Vater; Hermann und Euler waren ihre Mitschüler; letzterer säumte nicht dem Integralcalcul schnell Zuwachs zu verschaffen.

Die Geometer des festen landes vernachläßigten die Theorie der Reihen nicht; aber sie hüteten sich wohl sie zu mißbrauchen, wie die englischen Geometer vom zweyten Range thaten, welche die Reihen oft zu Problemen anwandten, deren Auflösung man durch endliche Gleichungen haben konnte, wie es ihnen Johann Bernoulli zeigte; er hatte selbst in diesem Betrachte Newton einen gegründeten Vorwurf zu machen, welcher es zu verkennen schien, worin die wahre Schwierigkeit eines Problems läge, welches Leibnitz den englischen Geometern vorgelegt hatte, nachdem sie ihm seine Rechte auf die Entdeckung des Differentialcalculs streitig gemacht hatten. Nicht in der Aufsuchung der Differential-Gleichung, von welcher dieses Problem abhing, bestand das Verdienst der Auflösung sondern in der allgemeinen Integration; Newton der Methoden besaß, durch die Reihen sowohl algebraische Gleichungen als auch solche die Fluxionen enthielhielten, d. i Differential=Gleichungen, aufzulösen, und er glaubte genug gethan zu haben, indem er die Art und Weise angab, diejenige zu finden auf welche Leibnitzens Problem führte, und darüber erhob Johann Bernoulli, welchen die Ungerechtigkeit der Engelländer gegen Leibnitz, tief schmerzte, ein lautes Geschrey.

Leibnitz's Schule hatte über Newtons Schule einen entschiedenen Vorzug der vielleicht eben so sehr der einfachen Methode des ersten, als dem Genie der Bernoulli seiner Schüler zugeschrieben werden muß, gleichwohl sehen wir zu dieser Zeit in Engelland, den Cotes der sehr jung starb, wie er durch die Entdeckung seines Theorems die Grenzen der Methode der Quadraturen erweiterte; den Moivres, (welchen Frankreich das Recht hat sich anzumessen) wie er über denselben Gegenstand zu einigen wichtigen Resultaten gelangte, und den Taylor, wie er die Methode der Inkremente wozu Newton in seinem Werke Methodus differentialis, den Grund gelegt hatte, entwickelt und durch das Theorem, welches seinen Nahmen führet, dem Differentialcalcul so zu sagen, das Complement giebt.

Da die Grenzen dieser Vorrede mir nicht erlaubt haben, die Entdeckungen der Geometer, welche die vergangenen Jahrhunderte verherrlichten im Einzeln durchzugehn, so erlauben sie mir noch weniger, mit einiger Ausführlichkeit die zahlreichen Arbeiten derjenigen vor Augen zu legen, welche den Ruhm des unsrigen ausgemacht

macht haben oder noch ausmachen; aber dieses Werk selbst, welches ich darbiete, wird hinreichend zeigen, was man ihnen alles verdankt.

Als sich die Schriften Newtons auf dem festen Lande verbreiteten, sah man, daß er lange vorher ehe Leibnitz den Differentialcalcul entdeckt hat im Besitze der Fluxionsmethode gewesen war, aber obgleich es dem Genie Newtons möglich war, aus seiner Methode alles herzuleiten, was Leibnitz aus der seinigen ableiten konnte, so war die enie doch von einer viel weniger leichten Anwendung als die andere; und sie beruhten auf sehr verschiedenen Gründen. Leibnitz betrachtete die Größen als solche, welche durch aufeinanderfolgende Differenzen oder durch Sprünge sich verändern; dieses brachte ihn darauf an die Stelle der Curven, Polygone zu setzen, und daher würden alle Untersuchungen die man über sie anstellen konnte auf die Berechnung geradlinigter Triangel zurückgeführt; damit aber das Polygon und die Curve aufeinander fielen, nahm er die Differenzen als unendlich klein an. Einige mittelmäßige Geometer jener Zeiten, um sich zu trösten über ihre Unfähigkeit die neuen Rechnungen zu verstehen und anzuwenden, deklamirten vergebens gegen ihre Genauigkeit. Die Uebereinstimmung der Resultate, mit denen, welche vorher bekannt waren, und die synthetischen Beweise, die man von den neuen geben konnte, machten, daß auf die

Gegner

Gegner des Differential=calculs die Andriffe zurückfielen welche sie auf dieselbe richteten.

Leibnitz glaubte wahrscheinlich, daß diejenigen, welche im Stande wären, von dem Differentialcalcul Gebrauch zu machen, den Geist desselben leicht fassen würden, wenn sie ihn mit der Methode der Alten zusammenhielten; denn er vermied diesen Punct sich genauer zu erklären und sein Stillschweigen wurde von den Bernoulli und l'Hopital nachgeahmt; als er aber deswegen angegriffen wurde, bewies er durch seine Antworten, daß er darüber reiflich nachgedacht hatte. Bey allen Gelegenheiten vergleicht er seine Methode mit der Methode des Archimedes, und zeigt, daß sie gewissermaßen nur eine den Untersuchungen angeeignete Abkürzung derselben ist; daß sie aber im Grunde auf dasselbe hinausläuft; denn, statt die Differential=Größe als wirklich unendlich klein anzunehmen, ist es hinlänglich einzusehen, daß man sie immer so klein annehmen kann, daß der Irrthum welcher aus dem was man in der Rechnung weggelassen hat entstehet, kleiner ist, als irgend eine gegebene Größe; und um der Einbildungskraft seiner Leser zu Hülfe zu kommen, führt er einige anschauliche Beyspiele an*).

Diese

*) Siehe die Note in diesem Werke Num. 248 und den III. Theil von Leibnitz Werken, Seite 369, 370, 500.

Diese Art zu raisonniren der man, wie mir scheint, nichts vorwerfen kann, betrachtete Fontenelle als ein Geständniß, welches Leibnitz von der Unzulänglichkeit seiner Principien ablegte, und sahe so das ganze Gebäude, welches er auf den Unendlichen errichtet hatte zusammenstürzen. Die Klagen die er darüber in der Vorrede zu seiner Geometrie erhebt, und die in mehreren Werken wiederholt sind, geben ein Beyspiel ab, mit welcher Leichtigkeit die Irrthümer von Buch zu Buch übergehn, und zeigen wie wenig Leute darauf denken, sich eine eigene von fremder Autorität unabhängige Meinung zu bilden.

Newton nahm an, daß die Linien durch Bewegung eines Punktes und die Flächen durch die Bewegung einer Linie entstånden, und er nannte die Geschwindigkeit, wodurch diese Bewegungen bestimmt würden, Fluxionen. Diese zwar sehr strengen Begriffe, sind der Geometrie fremd, und ihre Anwendung kann schwer werden. Es ist sehr wahr, daß wenn man sich einen Punct denkt, welcher sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Linie bewegt, während diese parallel mit sich selbst fortgeführt wird so kann man jede beliebige Curve darstellen; aber da die Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes in jedem Augenblicke veränderlich ist, so kann man sie nur bestimmen, wenn man entweder zur Methode der Alten d. i. der Exhaustionsmethode, oder zu der Methode der ersten und letzten Verhältnissen seine Zuflucht nimmt; und diese letztere ist es immer, deren Newton sich bedient hat, so, daß die Fluxionen eigentlich zu reden für ihn nichts waren als ein Mittel denen Größen, welche er behandelte, ein in die Sinne fallendes Objekt zu geben. Er verstand unter der Methode der ersten und letzten Verhältnissen, die Aufsuchung des Verhältnisses, welches Größen, die mit einander entstehen und mit einander verschwinden, im ersten oder letzten Augenblicke ihrer Existenz unter einander haben; und er fand im ersten Verhältnisse der Räume, welche die Ordinate auf der Abscissenlinie und welcher der beschreibende Punkt auf der Ordinate durchlaufen hatte, in dem ersten Verhältnisse dieser Räume die er Momente nannte, das Verhältniß der Fluxionen der Abscisse zu der Fluxion der Ordinate; woraus er die Richtung der Tangenten ableitete. Der Calcul war der nemliche, wovon Barrow für seine Methode der Tangenten Gebrauch machte: die aber Newton vermittelst seiner binomischen Formel und der Reduction in Reihen, auf die irrationalen Ausdrücke ausgedehnt hatte. Der Vorzug der Fluxionsmethode vor dem Differentialcalcul, von Seiten der Metaphysik, besteht darin, daß da die Fluxionen endliche Größen sind, ihre Momente nichts sind als unendlich kleine Größen von der ersten Ordnung, und ihre Fluxionen sind

noch

noch endlich; auf diese Art vermeidet man die unendlich kleinen Größen höherer Ordnungen.

D'Alembert und Euler suchten den Differentialcalcul eine Basis zu geben, die ihnen sicherer und fester schien, als die Subordination der unendlich kleinen Größen; jener bediente sich der Methode der Grenzen; und dieser betrachtete die unendlich kleinen Größen als absolute Nullen, die aber ein Verhältniß beybehielten abgeleitet von demjenigen, welches die verschwundenen Größen unter sich hatten an deren Stelle jene traten. Ohne Zweifel wird man sich fragen, was man verstehen kann unter dem Verhältniß von Größen, die aufgehört haben, vorhanden zu seyn, und dieser Einwurf, den man wider Eulers Metaphysik macht, läßt sich ebensowohl auf die Methaphysik der Methode der ersten und letzten Verhältnisse anwenden; denn zwischen Seyn und Nichtseyn liegt nichts in der Mitte, und von dem Augenblicke an, wo die Zuwächse etwas werden, ist ihr Verhältniß weder das Verhältniß der Fluxion, noch das Verhältniß der Grenzen. Carnot, in einer Abhandlung, wo er mit vieler Genauigkeit die Grundsätze des Differentialcalcul untersucht, und den er mir mitzutheilen die Güte hatte, bemerkt, es sey das Gesetz der Stätigkeit, welchem zufolge die verschwindenden Größen das Verhältniß beybehalten, welchem sie sich stufenweise näherten ehe sie verschwinden.

Diese Abhandlung von welcher zu wünschen wäre, daß der Verfasser sie bekannt machte *), beweiset, daß, hätte man Worte geschaffen als man ihrer nöthig hatte, man klarere Begriffe würde bekommen haben. Indem Carnot die Differentialgleichungen unvollkommene Gleichungen nennt, wirft er ein großes Licht auf ihre Theorie. In der That, wenn man die Differentialen, welche sie enthalten, als Größen betrachtet, welche die Zuwächse der veränderlichen Größen repräsentiren, so finden sie nur auf eine annähernde Art statt; aber ihr Grad von Genauigkeit ist auf gewisse Art unbestimmt; denn er hängt von der Kleinheit ab die man bey den Veränderungen der veränderlichen Größen voraussetzt; und weil nichts diese Kleinheit begrenzt, so können die Differentialgleichungen der Wahrheit so nahe seyn als man will; dies sind Leibnitzens Ideen in Analysis übersetzt. Carnot zeigt hernach, wie die unvollkommenen Gleichungen am Ende des Calculs streng genau werden, und an welchem Zeichen man ihre Rechtmäßigkeit erkennt; dieses Zeichen ist die gänzliche Verschwindung der Differentialgrößen, von welchen der Irrthum aufgehen könnte, wenn es deren gebe. Man muß Carnots Arbeit nicht nach dem

wenigen

*) Ist geschehen unter dem Titel Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal.

wenigen beurtheilen, was ich davon gesagt habe; und nicht bloß in der ihm eigenthümlichen Art den Differentialcalcul zu betrachten, bestehet das Verdienst seiner Abhandlung, sondern auch in der Vergleichung die er zwischen den verschiedenen Gesichtspunkten anstellt, unter denen man diesen Calcul betrachtet hat.

Eine Methode, welche Landen im Jahre 1758 angab, um der Betrachtung des Unendlichen, und der Fluxionen überhoben zu seyn, kann ich hier nur anzeigen; weil sie auf einen sehr zierlichen algebraischen Lehrsatz beruht, welchen ich in einer Schrift wie diese nicht vortragen kann. Die Freimüthigkeit, womit sich Landen von den Nationalvorurtheilen losmacht, drückt seinem Werke einen ausgezeichneten Karakter auf; er ist vielleicht der einzige von den englischen Geometern, welcher die Unbequemlichkeiten der Fluxionsmethode eingestanden hat.

Die Anwendung des Differentialcalculs auf die Geometrie ist es, die ihm einen von der gemeinen Algebra verschiedenen Karakter gegeben hat; denn Lagrange zeigte in den Abhandlungen der Akademie zu Berlin 1772, daß er auf eine von den Betrachtungen des Unendlichen unabhängige Art, analytisch behandelt werden könne. Der Ausdruck der Veränderungen die in einer Function vorkommen, wenn man eine oder mehrere Größen die sie ausmachen, vergrößert oder verkleinert, kann immer zu einer Reihe gebracht werden, die nach den Potenzen der Differenzen dieser Größen geordnet ist; die von diesen Differenzen unabhängigen Coefficienten, bieten neue Functionen dar, welche von der gegebenen nach einen regelmäßigen Gesetze abgeleitet sind.

In der Aufsuchung dieser Coefficienten und ihrer Eigenschaften ist es, worinn der Differentialcalcul besteht. Die Functionen einer einzigen veränderlichen Größe, geben nur einen Coefficienten für jede Potenz des Zuwachses. Die Functionen von zwey oder mehreren veränderlichen Größen, da sie eine Differenz haben, welche man zufolge der gleichartigen Producten der Zuwachse wie ein Polynom ordnen kann, haben mehrere für jede Ordnung. Man kann entweder jeden Coefficienten besonders suchen, oder die Relation die sie unter sich haben, und mit der Function, wovon sie herstammen; das ist der Differentialcalcul. Er hat es mit gewöhnlichen Differenzen zu thun, wenn es nur um die Function einer einzigen veränderlichen Größe zu thun ist; oder hat mit den partiellen Differenzen zu thun, wenn es auf die Function von einer von zwey oder noch mehreren veränderlichen Größen ankömmt.

Der Integralcalcul hat zum Gegenstande, von den Coefficienten zu den Functionen zurückzusteigen; d. h. die umgekehrten Fragen aufzulösen.

Es ist zum Erstaunen, wie diese so einfache Art dem Differentialcalcul einen analytischen Ursprung zu geben, so lange nicht gefunden wurde, es scheint, daß er sich Eulern hätte darbieten müssen, welcher der erste war, der diesen Calcul von seiner Anwendung auf die

Cur-

Curven absonderte, und indem er die Verhältnisse der Differentialien in Buchstaben ausdrückte, die Gleichungen, welche unendlich kleine Größen enthielten, davon befreyte.

Newton selbst war schon auf dem Wege den Differentialcalcul auf diese Art zu betrachten, denn er hat ebenfalls die successive nach den Potenzen der Differenz der Abscisse in Reihen entwickelten Ordinaten betrachtet, und die vornehmsten Eigenschaften dieser Coefficienten in Bezug auf die geometrische Anwendung angezeigt; es fehlte ihm nur eine Methode sie gegenseitig von einander abzuleiten; und es scheint, daß Taylor der erste war, welche ihre successive Bildung durch die Fluxionen zeigte, eine Bildung die nichts anders als sein Lehrsatz ist.

Die Lesung von Lagrange'ns Abhandlung erweckte in mir den Wunsch, an einem Werke über den Differential- und Integralcalcul zu arbeiten, welches die lichtvollen Begriffe, welche er an die Stelle der Begriffe vom unendlich Kleinen, gesetzt hatte zur Grundlage haben sollte; und um dieses Werk für jeden Leser zugänglich zu machen, der die Anfangsgründe der Algebra besitzet, wie sie im Bezout, oder Bossüts Lehrbüchern abgehandelt sind; lasse ich eine Einleitung vorangehn, welche zum Gegenstand hat, die algebraischen, exponentialen, logarithmischen, und Kreisfunctionen in Reihen zu entwickeln. Die Methode, die ich gebrauche wird vielleicht neu scheinen, und ich hoffe wenigstens, daß die Anfänger für meine Sorgfalt mir Dank wissen werden sie von den Begriffen des Unendlichen unabhängig zu machen.*)

Nach

*) Indem ich den Ursprung dieses Werkes bekannt mache nöthigen mich die Umstände unter denen es erscheint, die Zeit anzuzeigen, wo ich angefangen habe mich damit zu beschäftigen. Seit 1787 sammelte ich die Materialien, und theilte einigen Personen die ersten Entwürfe meiner Arbeit mit; ich schrieb davon an mehrere berühmte Geometer, damit sie mir die Quellen aus denen ich schöpfen könnte, anzuzeigen und mich mit ihren Rath zu unterstützen die Güte hätten. Hier ist, was mir Laplace im Januar 1792 antwortete. „Ich sehe mit vielem Vergnügen, „daß sie an einem großen Werke über den Integralcalcul arbeiten. Die Zusammenstellung der „Methoden, die sie zu machen gedenken, dient sie „wechselsweise zu erläutern, und das was sie miteinander gemein haben, enthält am öftersten ihre wahre „Metaphysik und dies ist die Ursach, warum diese „Metaphysik fast immer das letzte ist, was man entdeckt. Das Genie gelangt gleichsam durch Instinkt „zu den Relationen; und nur indem es über den Weg „nachdenkt dem es nebst andern betreten hat, gelangt man dahin die Methoden zu verallgemeinern, „und ihrer Metaphysik zu entdecken"

Ich habe diese Stelle angeführt mehr wegen den Bemerkungen die sie enthält, als um zu beweisen, daß ich schon vor fünf Jahren den Plan entworfen habe dem ich gefolgt bin. Der Druck von meinem Buche würde im Nov. 1795 angefangen und wegen besondern Ursachen einige Monathe aufgeschoben; seit dieser Zeit ist Lagrange bey seinem in der polytechnischen Schule gehaltenen Vorlesungen wieder auf seine ersten Ideen zurückgekommen. Seinen Unterricht habe ich mit allem Interesse den er einflößen muß gefolgt; aber der fortgehende Druck meines Werks, erlaubte nur eine kleine Anzahl seiner Bemerkungen zu benutzen, die ich jedesmal angezeigt habe.

Nach Eulers Beyspiele, aus welchem ich mehrere Stellen übersetzt habe, gebe ich die reine analytische und vollständige Entwicklung der Principien des Differentialcalculs, in derjenigen Allgemeinheit, welche sie haben müssen, um den verschiedenen Zweigen des Integralcalculs zu correspondiren.

Ich gehe hierauf zu den analytischen Anwendungen über. Die vorzüglichste ist die Entwicklung der Functionen in Reihen; ich zeige bey dieser Gelegenheit die Verfahrungsart, welche Lagrange an die Stelle des analytischen Triangels gesetzt hat, um die größten oder kleinsten Grenzen einer Gleichung zu entdecken, und welche dazu dient durch successive Substitutionen die convergirende Reihen zu finden, die eine Gleichung auflösen, was der Differentialcalcul nicht immer leistet, wenn man nicht Transformationen anwenden will.

Diese Untersuchungen leiden eine unmittelbare Anwendung in dem besondern Falle, wo die Coefficienten der Entwicklung der gegebenen Function, nach der Potenz des Zuwachses der veränderlichen Größe geordnet, unendlich werden; und wenn es darum zu thun ist, den wahren Werth der Brüche zu finden, deren Zähler und Nenner zu gleicher Zeit verschwinden. Ich beschäftige mich in diesem Capitel noch mit der Untersuchung der Maxima und Minima.

Die Unvollkommenheit der Elemente der Algebra hat mich genöthigt, eine Digression über die Theorie der algebraischen Gleichungen zu machen, um einige ihrer Eigenschaften, wovon man im Integralcalcul Gebrauch machen muß, zu zeigen, und ich habe einen Theil der Vorträge, die Laplace in der Normalschule gehalten, den gewöhnlichen Lesern faßlich gemacht; auch hab' ich einige Anwendungen des Differentialcalculs auf die Theorie der Gleichungen gezeigt. Die beyden folgenden Kapitel, welche den ersten Theil beschließen, enthalten die Anwendung des Differentialcalculs auf die krummen Linien, und krummen Flächen; diese Anwendung aber steht nicht wie es gewöhnlich der Fall ist, isolirt da, sondern als ein Theil einer vollständigen Theorie der krummen Linien, und krummen Flächen, und dies setzt den Leser in den Stand das Ganze aller dieser Gegenstände zu umfassen.

Sorgfältig habe ich alle geometrischen Constructionen entfernt, um den Leser zu überzeugen, daß sich die Geometrie auf eine Art betrachten lasse, die man analytische Geometrie nennen könnte, und welche darin bestehn würde, aus einer möglichst kleinen Anzahl Principien alle Eigenschaften der Ausdehnung durch rein analytische Methoden herzuleiten, so wie es Lagrange in seiner Mechanik in Absicht des Gleichgewichts und der Bewegung gethan hat.

In den Anmerkungen zu Le Gendre's Geometrie findet man ein Mittel angezeigt die Theorie der ähnlichen Triangel unmittelbar aus den Folgerungen die

sich

sich aus der Aufeinanderlegung ergeben, herzuleiten; dies setzt einen in den Stand die Gleichung jeder beliebigen geraden Linie zu machen, und wenn man diese Gleichung mit der Gleichung des Kreises, und der andern Curven verbindet, so kann man auf alle über die Linien bekannten Lehrsätze kommen, und zwar auf eine mehr oder weniger zierliche und geschmeidige Art je nachdem die analytischen Kunstgriffe beschaffen sind, welche man wählt, Lagrange hat in den Memoiren der Akademie zu Berlin im Jahre 1773 eine Theorie der Pyramiden gegeben, die ein Meisterstück in ihrer Art ist; aber meiner Meynung nach ist Monge der erste, der darauf dachte, die Anwendung der Algebra auf die Geometrie unter dieser Gestalt zu zeigen.

Man glaube nicht, daß ich durch Anpreisung der Vortheile der algebraischen Analysis, der Synthesis, und geometrischen Analysis den Prozeß machen will. Im Gegentheil glaube ich, daß man das Studium der Alten heut zu Tage zu sehr vernachläßigt aber ich mögte nur nicht, wie es fast in allen Werken geschehen die geometrischen Betrachtungen mit den algebraischen Rechnungen vermischt sehn; ich halte es für besser, jede dieser Methoden in besondern Werken, so weit zu treiben als sie gehn, so daß die Resultate sich wechselseitig aufklären, indem sie gleichsam wie Original und Uebersetzung eines Werkes einander correspondirten.

Die Anwendung des Differentialcalculs auf die

Die

Theorie der Curven und Flächen habe ich unter mehrern Gesichtspunkten dargestellt; der eine, welcher explicite den Begriff des Unendlichen nicht entlehnt, gehört dem Lagrange zu. Abrogast war auf seinem Wege ebenfalls dahin gekommen, auch Newton war in seinem Werke von den Principien demselben ganz nahe; noch mehr näherte sich ihm Maclaurin in dem zweyten Theile seines Werkes von den Fluxionen, wo er von den Maxima und Minima und Inflexionspuncten handelt.*) Ich habe hierauf die Methode der Grenzen gegeben, aber auf eine wie mir scheint neue Art angewendet durch Taylors Theorem endlich habe ich Gebrauch gemacht von den Betrachtungen des unendlich Kleinen. Die Zusammenstellung dieser drey Methoden wird sicherlich die aufmerksamen Leser überzeugen, daß sie nur in den Ausdrücken verschieden sind; und vielleicht werden sie mit mir der Meynung seyn, daß die letzte, richtig erklärt, einen vorzüglichen Werth hat, wegen der Leichtigkeit die sie gewährt, neue Probleme aufzulösen, eine Leichtigkeit, wovon Monge's Theorie der Curven von doppelter Krümmung (die ich vorgetragen haben) ein merkwürdiges Beyspiel giebt.

Sobald die Principien des Differentialcalculs festgestellt sind, bietet der Integralcalcul, welcher das umgekehrte desselben ist, nichts dar, als eine Sammlung

*) Siehe Maclaurin. T. II. art. 858 und 866.

lung analytischer Verfahrungsarten, welche man nur so zu ordnen hat, daß ihre Beziehungen sichtbar werden. Der Plan des Werkes, welchen Euler über diesen Calcul geliefert hat, schien mir unter allen der beste, den man befolgen könnte; ich habe mich darnach gerichtet; aber ich habe all das neue hinzugefügt, welches er nicht enthielt, und mehrere von Eulers Methode habe ich durch andere ersetzt, die wir denn Lagrange, dem Laplace und dem Legendre verdanken.

Die Entwicklung der Functionen in Reihen führt auf den Differentialcalcul; der Integralcalcul lehrt neue Functionen kennen, welche man nur durch Reihen ausdrücken kann; und die Betrachtung dieser letzten giebt demjenigen Calcul seine Entstehung, der es mit endlichen Differenzen zu thun hat; ich nenne ihn schlechtweg den Differenzencalcul. Dies sind die Gründe, welche mich bestimmt haben diesen Calcul vom Differentialcalcul zu trennen, den er indeß implicite als besondern Fall in sich schließt. — Meiner Meinung nach gewährt diese Anordnung einen sehr erheblichen Vortheil, den nemlich, daß sie die ganze Theorie der Reihen, welche sich in fast allen davon handelnden Werken zerstückelt befindet, in einem einzigen Lehrbegriffe vereinigt. Dies ist seit Jakob Bernoulli und Stierling nicht geschehn, ungeachtet die durch Eulers, Lagrange's und Laplace's Arbeiten, zu welchen so eben noch Prony in seiner Abhandlung von der Differen-

tial-

tialmethode mehrere zierliche Formeln hinzugefügt hat, die Materialien außerordentlich angewachsen sind.

Hiedurch nähere ich die Theorie der wiederkehrenden Reihen, welche aus der Entwickelung der Brüche hergeleitet wird, derjenigen, welche aus der Integrirung der lineairischen Gleichungen zu Differenzen entsteht.

Der Anhang, in welchem ich alles was die Reihen betrift, abhandle, enthält außerdem noch diejenigen Methoden, welche zwar sehr nützlich und von sehr weiten Umfange sind, gleichwohl schwer in dem Lehrbegriff des Integralcalculs aufgenommen werden können, weil sie von Principien abhangen die von den Principien der Integrirung im eigentlichen Verstande, zu sehr abweichen, dahin gehört die Interpollationsmethode, dahin die Reihen, welche vermittelst einer gewissen Anzahl von Ordinaten der Curven, die Flächen derselben geben, dahin endlich die sinnreichen Methoden, wodurch Euler die Gleichung des Riccati und Laplace in einem ganz eignen Falle die lineairische Gleichung die zu partiellen Differenzen gehört integrirt.

Alle diejenigen, welche Mathematik studiren müssen den zurückgelegten Weg von neuem durchlaufen, um die erworbnen Kenntnisse zu ordnen, aber man erspart ihnen viele Mühe, und ihre Begriffe ordnen sich leichter, wenn man ihnen große Abtheilungen

gen an die Hand giebt, an welche sich die verschiedenen Methoden wieder anknüpfen.

Ich habe diesen Zweck bey der Einleitung meines Werkes vorzüglich vor Augen gehabt, und ich habe es so eingerichtet, daß jedes Kapitel ein vollständiges Ganze ausmachend, mit den vorhergehenden nur durch die Natur des Gegenstandes, im allgemeinen aber nicht durch das Detail der Behandlung verbunden ist; und um die für alle Elementarbücher so wünschenswürdige Klarheit zu erreichen, habe ich es mir zum Gesetz gemacht, dem Leser keinen Calcul vor Augen zu legen, ohne dessen Zweck und Geist kennen zu lehren; endlich habe ich alle Sorgfalt angewandt, den Formeln diejenige Symmetrie zu geben, welche sie beynahe im voraus ahnden läßt, und wovon Lagrange's Schriften so viele Beyspiele liefern.

Einzig und allein von dem Wunsche belebt, ein, jungen Leuten nützliches Werk zu schreiben, habe ich alle Ansprüche der Eigenliebe abgewiesen. Unter vielen aus den Werken der großen Geometer unsrer Zeit ausgezogenen Sachen, findet sich vielleicht manches einzelne, das mir angehört; aber ich will darüber nicht streiten, sondern mich mit dem begnügen was man mir lassen will.

Da ich Sorge getragen, die verschiedenen entlehnten Materialien gewissermaaßen umzuschmelzen, und in neue Formen zu gießen: so würde die be-

stän-

ständige Wiederholung derselben Citationen für den Leser langweilig geworden seyn. Gleichwohl um die Bibliographie der guten mathematischen Werke kennen zu lehren, habe ich beschlossen, in dem Conspectus bey der Inhaltsanzeige jedes Artikels den Titel der Werke anzuführen; welche bey der Redaction zu Rathe gezogen sind, oder damit in Verbindung stehn. So leiste ich was die Billigkeit fodert, und die methodisch geordneten Citationen werden für die Zöglinge nützlicher seyn.

Mit dieser Uebersetzung von welcher das Original den Titel führt: Traité du calcul différentiel et du calcul intégral par S. F. Lacroix, a Paris chez J. B. M. Duprat, an V = 1797 in quarto. habe ich zugleich das Versprechen erfüllt zu Lagrange's Theorie der Functionen Erläuterungen herauszugeben — denn nachdem man diesen Lehrbegriff studirt hat, kann man sicher Lagrange's genanntes Werk und auch dessen analytische Mechanik ohne Anstoß lesen. Im zweyten Theil der zur nächsten Michaelis-Messe erscheint, werde ich die etwa noch entdeckten Druckfehler nachliefern.

Berlin, den 22ten Febr. 1799.

Grüson.

In-

Inhalt des ersten Theils.

Einleitung.

lehr-

*) Von diesem schätzbaren Werke hat der verstorbene Prof. Michelsen 1788 eine deutsche Uebersetzung in 2 8. Bänden mit Zusätzen und 1796 und 1797 hat der Prof. Labey eine französische Uebersetzung in Paris mit einigen Zusätzen in Quart herausgegeben – die 1786 zu Straßburg erschienene französische Uebersetzung des ersten Theils in gr. 8. ist dem Original nicht getreu geblieben.

G.

Lehrbegriff des Differential- und Integral-calculs.

Erster Theil. Von dem Differentialcalcul.

I. Capitel.

Von

*) Auch von diesem Werke hat Michelsen eine deutsche Uebersetzung in drey gr. 8. Bände mit Zusätzen herausgegeben. — In Italien gab Hr. Fontana 1787 eine neue Ausgabe vom Original mit Zusätzen heraus. — Diese Zusätze findet man deutsch in meinem Supplement zu Eulers Differentialrechnung, Berlin, 1798.
G.

**) Eine deutsche Uebersetzung dieses Meisterwerks erschien von mir in gr. 8. 1798. Eine Anzeige von aufgefundenen Druckfehlern, theile ich im 2ten Bande von Lacroix's Lehrb. des Differential- und Integralcalculs mit.
G.

II. Capitel.

*) Dieses Werk, welches ein Commentar zu Newtons Werke ist, ist weil es vergriffen war vor kurzen in Paris neu aufgelegt worden.

Einlei-

Einleitung.

Ehe wir zur Materie eingehen, wollen wir hier einige Sätze aufstellen, die man in den Elementen der Algebra nicht antrifft, und einige Punkte der Methaphysik aufklären, welche schwierig scheinen können, wenn sie schlecht dargestellt sind. Hieraus werden mehrere Vortheile für dieses Werk entstehn; die Beweise werden einleuchtender und einfacher seyn, und wir werden unsern Lesern der Mühe überheben, in andern Büchern Hülfsmittel zum Verständniß dieses Werks zu suchen.

1.

Allgemeine Begriffe über Funktionen und Reihen

Die alten Analysten verstanden im allgemeinen unter der Benennung Funktionen einer Größe, alle Potenzen dieser Größe. In der Folge hat man die Bedeutung dieses Worts erweitert, indem man es auf die Resultate verschiedener algebraischer Operationen anwendete; so hat man auch noch jeden algebraischen Ausdruck der auf irgend eine Art, Summen, Produkte, Quotienten, Potenzen und Wurzeln dieser Größen in sich faßt, mit dem Nahmen Funktion bezeichnet. Endlich haben neue Ideen, welche durch die Fortschritte der Analysis veranlaßt worden sind, zu folgender Erklärung der Funktionen Gelegenheit gegeben.

Jede Größe deren Werth von einer oder mehreren andern Größen abhängt, wird eine Funktion dieser letztern genannt, sey es bekannt oder unbekannt, durch welche Operationen man von diesen zu der ersten hinaufsteigen müsse.

Z. B. Die Wurzel einer Gleichung vom fünften Grade für welche man bey dem jetzigen Zustande der Algebra den Ausdruck nicht geben kann, ist nichts desto weniger eine Funktion der Coefficienten der Gleichung, weil ihr Werth von dem Werth dieser Coefficienten abhängt.

Man unterscheidet die Funktionen, nach der Zahl der Größen, von denen sie abhängen, also ist jede beliebige aber bestimmte Potenz, von einer Größe, nur eine Funktion von dieser Größe allein. Faßt man die Sache unter einen allgemeinern Geschichtspunkt, so daß man auf einmal alle mögliche Potenzen einer Größe die jeden beliebigen Werth haben kann betrachtet, alsdann wird der allgemeine Ausdruck dieser Potenzen, eine Funktion der ursprünglichen Größe und des Exponenten seyn, weil der besondere Werth einer jeden von ihnen, von diesen beyden Dingen abhängt.

2.

Die Betrachtung der unbestimmten Gleichungen leitete dahin den Begriff von den Funktionen allgemeiner zu machen. Wenn man ausdrücken wollte, daß eine Größe nicht könne angegeben werden, ohne vorläufig andern Größen besondere Werthe gegeben zu haben, die

davon

davon eine unbegränzte Anzahl in derselben Frage enthalten konnten, so bediente man sich des Worts **Funktion**, um diese Abhängigkeit anzuzeigen. Hieraus folgt, daß wenn man zum Beyspiel eine oder die andere von folgenden Gleichungen hätte.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = axz + bx^2 + cz^2 \end{cases}$$

man sagen würde, y sey in der ersten eine Funktion von x, oder in der zweyten von x und z. Man muß bemerken, daß man von den Größen a, b, c, abstrahirt, weil sie bestimmt sind, das ist, weil man sie so ansieht, als ob sie den nemlichen Werth in allen Auflösungen deren jede der vorhergehenden Gleichungen fähig ist, beybehalten müssen.

Statt dieser Gleichungen könnte man auch auf andere stoßen, in welchen die unbekannten Größen sich so verbunden befänden, daß es nicht möglich wäre, ohne einige vorläufige Operationen, den Werth einer derselben zu bestimmen: solche Gleichungen würden folgende seyn.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = axy \\ x^3 + y^3 + z^3 = axz + byz + cxy \end{cases}$$

in diesem Falle ist das unbekannte y immer eine Funktion von x, in der ersten, und eine Funktion von x und z in der zweyten Gleichung; weil diese unbekannte Größe nicht bestimmt werden kann, ohne daß man x in der einen oder x und z in der andern besondere Werthe gegeben habe.

Wenn man in den Gleichungen dieses Beyspiels sich vorsetzte, x nach den besondern Werthen die man y oder y und z gegebenen hat zu bestimmen, so würde man sagen, daß x eine Funktion von y in der ersten, oder in der zweyten von y und von z sey. Man sieht daraus, daß in einer Gleichung, welche mehrere unbekannte Größen enthält, irgend eine von ihnen, was für eine es auch immer seyn mag, immer die Funktion aller andern ist, und daß in der Frage Gegebene zeigt diejenige Größe an welche man als eine solche betrachten muß. Wenn man eine Gleichung zwischen zwey Größen hat, so sind sie wechselsweise Funktionen eine von der andern.

Wir haben dem Leser so eben zweyerley Beyspiele vor Augen gelegt, welche zu einem wichtigen Unterschiede Anlaß geben. In den ersten sieht man sogleich, wie, durch den Werth von x, oder von x und z der Werth von y ausgedrückt werden könne; im Gegentheile müßte man bey den zweyten erst eine algebraische Gleichung für y auflösen, um diese Größe zu finden, in der Voraussezung, daß man die Werthe von x oder von x und z kennt. Wir werden also sagen, daß y im ersten Falle eine **entwickelte** (explicite) Funktion von x oder von x und z, und im zweyten Falle eine **unentwickelte** (implicite) der nemlichen Größen sey.

Es ist nicht nöthig, daß man eine Gleichung zwischen mehreren Größen habe, damit eine von ihnen eine implicirte Funktion der andern sey. Es ist hinlänglich zu wissen, daß ihr Werth von den besondern Werthen jener abhängt; also ist in einem Kreise der Sinus eine implicirte Funktion des Bogens, obwohl die algebraische Analysis kein Mittel darbietet, das Verhältniß dieser beyden Größen auszudrücken: weil wirklich die eine von ihnen bestimmt ist, sobald es die andre ist, und umgekehrt. Es ist nützlich zu bemerken, daß wir hier von dem Halbmesser abstrahirt haben, obwohl die Größe des Sinus auch von diesem mit abhängt; weil wir nur einen einzigen Kreis betrachteten.

3.

3.

Unter der Benennung algebraische Funktionen, versteht man alle diejenigen, die aus algebraischen Operation entstehen; oder deren Verhältniß mit den unbestimmten Größen von denen sie abhängen, durch eine algebraische Gleichung ausgedrückt werden kann.

Die algebraischen Funktionen enthalten immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern, wenn man sie unter der ihnen eigenen Form ausdrückt, diese Einschränkung ist nöthig; denn wenn man einen eigentlichen Bruch, der einen zwey oder mehrtheiligen Nenner hat, durch eine Vereinigung mehrerer einzelnen Größen angeben will, so erhält man alsdann eine unendliche Reihe.

Der Bruch $\frac{a}{a-x}$ zum Beyspiel durch die Division oder auf andere Art entwickelt giebt die Reihe

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{u. s. w.}$$

ohne daß man jemals einen vollständigen Quotienten findet. Eben so verhält es sich mit den Wurzeln der Polynomen, die keine vollkommene Potenzen sind, wenn man sie auf eine rationale Art, oder durch eine Reihe Monomen ausdrücken will.

Man weiß, daß die Formel von Newton für die Potenzen des Binomiums sich nicht endiget, wenn der Exponent eine negative Zahl oder eine gebrochene Zahl ist.

Es giebt aber Funktionen die man durch eine endliche Zahl solcher Glieder, welche algebraische Größen ausmachen nicht ausdrücken kann; dergleichen sind zum Beyspiel, die Logarithmen, die man nur durch Näherung erhält, und die von der Wurzelausziehung einer unbegrenzten Anzahl von Wurzeln abhängen; die Sinus und Cosinus, die man mittelst ihrer Bogen nicht angeben kann, ohne eine unbegrenzte Anzahl algebraischer Operationen vorzunehmen. Man hat diese Funktionen Transcendente genannt, diejenigen von denen wir so eben gesprochen haben, sind nicht die einzigen dieser Art; bey den Fortschritten, welche die Analysis gemacht hat, hat man noch viele andere die zu dieser Art gehören eingeführt, und können noch unzählig viel dergleichen geben.

Dieses ist der Ursprung der Reihen, ob sie gleich den Werth der Funktionen, zu welchen sie gehören, nur dann genau geben können, wenn sie sich endigen oder wenn man die Summe aller ihrer Glieder erhalten kann, wie dieses in den abnehmenden geometrischen Progressionen der Fall ist, so können sie doch alle, (nach Art derjenigen die man aus den algebraischen Funktionen herleitet), als die Entwicklung der unbekannten Funktionen wovon sie herstammen, angesehen werden.

4.

Es ist hier der Ort auf das Wort Entwicklung, das man hier statt des Wortes Werth gebraucht, aufmerksam zu machen; denn eine Reihe giebt nicht immer den Werth der Funktion zu der sie gehört; zuweilen selbst, statt sich mehr und mehr zu nähern, entfernt sie sich um so mehr von ihr je mehrere Glieder man davon nimmt.

Die Entwicklung des Bruches $\frac{a}{a-x}$ wird uns zum Beyspiel dienen, und die Folgen die wir daraus ziehen wollen, werden auf die, von allen Arten möglicher Funktionen abstammenden Reihen anwendbar seyn.

Wenn

Wenn man die Division von a durch $a-x$ auf die gewöhnliche Weise macht, so erhält man zum Quotienten 1, und zum Rest x, diesen Rest dividirt giebt den zweyten Quotienten $\frac{x}{a}$ und einen Rest $\frac{x^2}{a}$: wenn man mit der Operation fortfährt, so wird man

die Quotienten $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} \\ \frac{x^3}{a^3} \end{cases}$ u. s. w. und die Reste $\begin{cases} \frac{x^3}{a^2} \\ \frac{x^4}{a^3} \end{cases}$ u. s. w.

erhalten.

Hieraus zieht man folgende Ausdrücke der Größe $\frac{a}{a-x}$;

$$1+\frac{x}{a-x},$$

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a(a-x)},$$

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^2(a-x)},$$

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^3(a-x)},$$

Es können sich zwey Fälle darbieten:

$x < a$, oder $x > a$.

Im ersten gehn die Reste $x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}$ u. s. w. immer abnehmend fort, und die Brüche $\frac{x}{a-x}, \frac{x^2}{a(a-x)}$ u. s. w. folgen einer noch schnellern Abnahme, so daß, jemehr Glieder man nimmt, wie:

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

man sich dem wahren Quotienten destomehr nähert; es ist möglich dieses so weit zu treiben, daß man von dem wahren Werthe nur um eine Größe die geringer ist als jede gegebene, unterschieden sey.

Um dieses fühlbar zu machen, wollen wir voraussetzen, daß man $x = \frac{a}{2}$ habe; so wird die vorhergehende Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \text{u. s. w.}$$

die Summe vom ersten Gliede wird seyn:

	1	$= 1$
von den zwey ersten	$1 + \frac{1}{2}$	$= \frac{3}{2}$
„ den drey ersten	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$= \frac{7}{4}$
„ den vier ersten	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$= \frac{15}{8}$
„ den fünf ersten	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$= \frac{31}{16}$ *)

Man sieht, daß diese Größen, 2, immer näher kommen, welches der wahre Werth des Bruches $\frac{a}{a - \frac{1}{2}a}$ ist. Die Unterschiede zwischen diesem Werthe, und den hier oben gefundenen Summen bilden die Progression $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, u. s. w. deren Glieder auf solche Art abnehmend fortlaufen, so daß man immer eines angeben kann, welches kleiner ist, als jede gegebene Größe.

Man kann dieses Resultat aus der Natur der Operation selbst ziehen, denn es ist leicht zu sehen, daß nach einer

*) Im Original sind hier einige Druckfehler die ich in der Uebersetzung sogleich verbessert habe, und auch künftig werde ich solche stillschweigend ändern.

einer Zahl von n Divisionen, der Rest $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ seyn wird, und folglich ist der Bruch den man der Reihe

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{a^{n-1}},$$

beyfügen müßte, um den genauen Werth von $\frac{a}{a-x}$ zu haben $\frac{x^n}{a^{n-1}(a-x)}$: macht man $x = \frac{1}{2}a$, so kommt heraus

$$\frac{a^n}{2^n a^{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dieser letzte Bruch kann sich nie vernichten, aber er kann so klein werden, als man will, wenn man die Zahl n schicklich nimmt, welche die Zahl der in der Reihe vorkommenden Glieder bezeichnet; sie kann demnach zu einem sich $\frac{a}{a - \frac{1}{2}a}$ so sehr nähernden Werthe führen, als man will, indessen so weit man diese Reihe fortsetzt, kann man doch niemals genau auf die Zahl 2 kommen, welche diesen Werth vorstellt.

Von nun an werden wir Grenze, jede Größe nennen, welche eine Größe in ihrem Wachsthum, oder in ihrer Abnahme nicht überschreiten, oder selbst nicht erreichen, der sie sich aber doch so viel man will nähern kann.

Im vorhergehenden Beyspiele ist 2 die Grenze von

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \text{u. s. w.}$$

und wir werden die Gleichung setzen

$$2 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \text{u. s. w.}$$

indem man darunter versteht, daß die zweyte Hälfte der

Gleichung unbegrenzt verlängert werden muß, oder welches auf eins hinauskömmt, daß die erste Hälfte nur die Grenze davon ist.

5.

In dem zweyten Falle bey welchem man $x > a$ hat, entfernt sich die Reihe

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

immer mehr und mehr von dem wahren Werthe $\frac{a}{a - x}$, denn die Reste

$$x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2}, \text{u. s. w.}$$

gehn immer zunehmend, eben so wie die Größen

$$\frac{x^2}{a^2(a - x)}, \frac{x^3}{a^2(a - x)} \text{ u. s. w.}$$

die man zu den Quotienten

$$1 + \frac{x}{a}$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}$$

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

hinzuthun muß, um diesen wahren Werth zu erhalten. Die vorgesetzte Reihe hat dann den Bruch $\frac{a}{a - x}$ nicht mehr zur Grenze, sie ist nur das Resultat der Division von a durch $a - x$, unbegrenzt fortgesetzt, oder in andern Ausdrücken die Entwicklung von $\frac{a}{a - x}$.

Wenn

Wenn eine Frage uns auf solche Reihe führen würde,

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

so hätten wir Recht daraus zu schließen, daß die gesuchte Funktion keine andere sey als $\frac{a}{a-x}$; oder wenn wir einige Eigenschaften, die Beziehung auf eine Reihe von Gliedern wie folgende haben, entdecken

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \text{u. s. w.}$$

so könnten wir behaupten, daß sie zur Funktion $\frac{a}{a-x}$ gehöre. So oft es aber um den absoluten Werth dieser Größe zu thun ist, wird man die aus ihrer Entwicklung gefundene Reihe nicht dazu anwenden können, ohne auf die Reste davon Rücksicht zu nehmen.

Als Beyspiel sey $x = 2a$, so hat man folgende Reihe

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{u. s. w.}$$

das niemals gleich -1 seyn kann, welches nemlich der Werth des Bruches $\frac{a}{a-x}$ in diesem Falle ist; weil die Reste nach und nach $2a$, $4a$, $8a$, sind, u. s. w. und weil die korrektiven Glieder $-2 -4 -8$ u. s. w. werden; wenn man sie an ihrem gehörigen Orte anwendet, so findet man das Resultat -1 bey welchem Gliede man auch immer stehen bleiben mag.

Hätte man $x = a$, so würde sich der Bruch $\frac{a}{a-x}$ in $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$ verändern: dieser Ausdruck $\frac{1}{0}$, den man unendlich nennt, ist nur eine Art ausschließender Grenze (n'est qu'une espèce de limite exclumite exclusive). In der That, wenn man sich die Einheit durch einen Bruch dividirt denket, so wird der Quotient um so größer seyn, je kleiner der Bruch ist, und da man sich immer einen Bruch vorstellen kann, der kleiner ist, als jede gegebene Größe, so wird sich für den Quotienten eine Zahl ergeben, welche jede gegebene überschreiten kann, ohne daß es jedoch jemals möglich sey, auf $\frac{1}{0}$ zu kommen. Dies ist der Begriff den man sich von dem Unendlichen der Geometer machen muß, worauf wir nun bald kommen werden. Dies vorausgesetzt, giebt die Reihe

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

indem man $x = a$ macht

$$1 + 1 + 1 + 1 + \text{u. s. w.}$$

zum Resultate, welches wie der Ausdruck $\frac{1}{0}$ erfordert, größer werden kann, als jede gegebene Größe. Indessen, da der Divisor durch den Quotienten multiplizirt den Dividendus wieder geben muß, so würde offenbar hieraus folgen, daß

$$1 = 0\,(1 + 1 + 1 + 1 \text{ u. s. w.});$$

nun aber vernichtet sich die zweyte Hälfte gänzlich, man würde also $1 = 0$ haben. Es ist aber leicht zu sehen, daß es nur eine anscheinende Schwierigkeit sey; denn, da die immerwährenden Reste der Einheit immer gleich sind, so ist die Gleichung die man an der Stelle der vorigen haben muß genau

$$1 = 0\,(1 + 1 + 1 + \text{u. s. w.}) + 1.$$

6.

Die Untersuchung der Entwicklung des Bruches $\frac{a}{a+x}$ welche

$$1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \text{u. s. w.}$$

ist, würde uns auf ähnliche Folgerungen wie die vorhergehenden führen, doch mit dem Unterschiede, daß die Resultate irgend einer Zahl von zusammengefügten Gliedern, wechselsweise auf der einen und auf der andern Seite den wahren Werth verfehlen. Wenn die Reihe convergirend ist, welches statt findet, wenn $x < a$, so findet man Summen die wechselsweise kleiner und größer sind als der genaue Werth, die sich aber immer mehr diesem Werthe nähern, und die ihm so nahe kommen können, als man will. Wenn man wie hier oben $x = \frac{a}{2}$ macht, wird man

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} - \text{u. s. w.}$$

bekommen, eine Reihe deren Summen $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$, u. s. w. wechselsweise größer und kleiner sind als $\frac{2}{3}$, welches der wahre Werth von $\frac{a}{a + \frac{1}{2}a}$ ist.

Wenn die Reihe divergirend ist, so sind die Resultate der Addition einer gegebenen Anzahl Glieder aus welchen sie bestehet wechselsweise positiv oder negativ, und entfernen sich daher mehr und mehr in einem und dem anderm Sinne von dem wahren Werthe, welcher positiv ist.

Endlich hat der Fall $x = a$ das merkwürdige, daß seine Entwicklung

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{u. s. w.}$$

bald 1 bald 0 wird, Resultate die sich auf gleiche Art von dem wahren Werthe entfernen; aber die Betrachtung der Reste oder der korrektiven Glieder ergänzt dies alles wieder.

Die

Die Reihen die man bey Entwicklung der gebrochenen Potenzen von den Größen, durch Ausziehen der Wurzeln findet, sind von aufeinanderfolgenden Resten begleitet, auf welche man das Vorhergehende anwenden kann.

Ueberhaupt, wenn eine Reihe die eine Entwicklung eines endlichen Bruches ist, dem wahren Werthe sich unaufhörlich nähern soll, so müssen die Glieder aus denen sie besteht fortgehend abnehmen.

Da man nun dadurch, daß man die Reihe so weit fortführt als es nöthig ist, ein Resultat finden soll, dessen Unterschied von dem wahren Werthe kleiner sey als jede gegebene Größe, so müssen nun auch wirklich die Unterschiede zwischen den aufeinanderfolgenden Resultaten immer kleiner und kleiner werden, welches nicht geschehen könnte, wenn die Glieder dieser Reihen nicht immer mehr gegen das Ende zu abnähmen.

Es ist hier zu bemerken, daß es Reihen giebt, deren Summe ohne Ende wachsen kann, obwohl ihre Glieder immer beständig abnehmen; aber dann sind sie die Entwicklung unendlicher oder solcher Funktionen die größer sind als jede gegebene Größe. Die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}, \text{ u. s. w.}$$

gehört dahin, wie wir bey den Logarithmen zeigen werden.

Die zwey Arten von Reihen die wir betrachtet haben, liefern uns zwey Arten von Größen; wovon einige einer endlichen oder bestimmten Grenze fähig sind, die andern aber ohne Ende wachsen kannen. Wir werden hieraus Gelegenheit nehmen, die wahre Methaphysik zu zeigen welche man an die Stelle des Unendlichen

chen setzen muß, welche oft in der Mathematik vorkömmt.

7.

Das Unendliche, als das letzte Glied der Größe betrachtet, ist selbst nur eine Grenze, welche die Größen nie erreichen können; der Begriff den man damit verknüpfen muß, ist nur ein negativer Begriff; denn jede Größe die ich mir wirklich vorstelle und die ich in meinem Calcul gebrauche ist eben deswegen nicht unendlich. Die Erklärung der Größe streitet selbst mit einem jeden beliebigen Begriff vom Unendlichen. Da aber jede Größe, ihrem Wesen nach ebensowohl einer Vermehrung als Verminderung fähig seyn soll, so würde es scheinen, daß man befugt sey, daraus zu schließen, daß die Größe aufhört zu existiren, oder eine Größe zu seyn, sobald man voraussetzt, daß sie das Unendliche erreiche, und wenn man diese Erörterung etwas weit treiben wollte, würde man in Schwierigkeiten verfallen, welche glücklicherweise die mathematischen Wahrheiten nicht zu besorgen haben, wenn man die Begriffe auf denen sie beruhen, deutlich aufstellt.

Alles was man mit Hülfe der Betrachtung des Unendlichen beweiset, kann man von dem Begriffe, den wir weiter oben von dem Wort **Grenze** gegeben haben, und von den beyden folgenden Sätzen ableiten, die eben so deutlich als unwidersprechlich sind.

1. **Jede noch so große Größe läßt sich von einer andern um so viel als man will, übertreffen.**

2. Jed

2. Jede noch so kleine Größe ist nicht so klein daß man sich nicht eine noch kleinere denken könnte.

Der erste Satz findet sich unter den Forderungen, die Euklides im Anfange des siebenten Buches seiner Elemente gemacht hat, und die natürliche Folge der Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, u. s. w.

bietet einen sehr einfachen Fall davon dar, so wie die unbegrenzte Verlängerung einer geraden Linie; der zweyte leitet sich natürlich von dem ersten ab, denn was z. B. die Zahlen der folgenden Reihe von Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, u. s. w. anbetrifft, so verhindert nichts, in dieser Reihe nicht Größen zu finden, die so klein sind als man nur will, indem man dem Nenner einen gemässen Werth beylegt; und da man dadurch, daß man einen beliebigen Theil einer linearischen Ausdehnung zur Einheit nimmt, davon auch einen solchen Bruch als man will nehmen kann, so folgt daraus, daß der Satz nicht bloß für Zahlen gelte. Wir werden uns aber demungeachtet immer des Wortes unendlich bedienen, um die Grenze des Wachsthums der Größen zu bezeichnen, weil die Bedeutung dieses Wortes durch das was so eben gesagt wurde, gehörig bestimmt ist, also kein Doppelsinn oder keine Dunkelheit darüber mehr zu besorgen ist.

8.

Die erste Folge die wir aus dem Vorhergehenden ziehen, ist, daß wenn man eine Reihe Glieder wie

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{u. s. w.}$$

hat die in Bezug auf die Potenzen von x geordnet ist und bey der höchsten angefangen hat, so giebt es immer noch eine Zahl m, welche an die Stelle von x gesetzt, das erste

Glied

Glied dieser Formel in einem beliebigen Verhältnisse größer macht, als alles übrige.

In der That, wenn man die vorgegebene Formel wie folget schrribt

$$x^a\left(A + \frac{B}{x^{a-b}} + \frac{C}{x^{a-c}} + \ldots\right)$$

so ergiebt sich, daß man x so nehmen kann, daß die Brüche

$$\frac{B}{x^{a-b}},\ \frac{C}{x^{a-c}}\ \text{u. s. w.}$$

so klein werden als man verlangt, und so daß ihre Summe mit A in einem beliebigen Verhältniß sey. Wenn m den Werth von x in diesem Falle vorstellt, so wird man weil

$$\frac{B}{m^{a-b}} + \frac{C}{m^{a-b}} + \ldots < A$$

hieraus folgern, daß

$$m^a\left(\frac{B}{m^{a-b}} + \frac{C}{m^{a-c}} + \ldots\right) < Am^a$$

oder

$$Bm^b + Cm^c + \ldots < Am^a.$$

Wenn die Differenz zwischen dem ersten Gliede Am^a und den folgenden unter diese Form gebracht ist:

$$m^a\left\{A - \left(\frac{B}{m^{a-b}} + \frac{C}{m^{a-b}} + \ldots\right)\right\},$$

so sieht man, daß dieser Ausdruck desto mehr zunimmt; je größer m wird; es kann also nichts hindern, daß er nicht endlich eine gegebene Größe überschreitet.

Da diese Art zu schließen durch die Zahl der Glieder nicht begrenzt ist, so kann man sie auf jeden Ausdruck von der Form

$$Ax^a + Bx^b + \text{u. s. w.}$$

ausdehnen, die aus so viel Gliedern als man will bestehn kann, und behaupten, daß man x immer groß genug nehmen könne, damit das erste Glied für sich allein den beträchtlichsten Theil des Werthes von diesem Ausdruck ausmache, wenn nur jeder der Coffizienten A, B, C, D, etc. eine endliche Größe ist.

Die nemlichen Betrachtungen, werden uns in dem Stand setzen zu beweisen, daß immer eine Größe da sey die klein genug ist, damit, wenn sie in der vorhergehenden Formel an die Stelle von x gesetzt wird, dasjenige Glied, wo diese Größe den kleinsten Exponenten hat, größer sey, als der Rest des Ausdruckes. Zu diesem Ende werden wir sie in Bezug auf x geordnet, voraussetzen, indem wir bey den kleinsten Exponenten dieser Größe anfangen, und sie auf folgende Art schreiben:

$$x^a(A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + \ldots).$$

Wenn wir statt x einen Bruch setzen, dessen Zähler 1 ist und der Nenner $= m$ so wird herauskommen:

$$\frac{1}{m^a}\left(A + \frac{B}{m^{b-a}} + \frac{C}{m^{c-a}} \ldots\right),$$

die Zahl m kann aber immer so genommen werden, daß die Brüche

$$\frac{B}{m^{b-a}}, \frac{C}{m^{c-a}}, \ldots$$

so wie ihre Summen kleiner als A werden. Schließt man auf diese Weise wie so eben geschehen, so behaupten wir, daß man in jedem Ausdruck von der Form

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

immer an die Stelle von x eine Größe setzen kann, die klein genug ist, daß das erste Glied den beträchtlichsten Theil des Werthes dieser Funktion ausmache.

9. Man

9.

Man könnte glauben, daß die Zahl m hier nichts anders als das Unendliche sey, welches hier nur durch ein anderes Zeichen dargestellt ist, als dasjenige ist, womit es gewöhnlich in der Algebra bezeichnet wird; um aber das Gegentheil zu beweisen, werden wir zeigen, wie man im allgemeinen diese Zahl bestimmen kann.

Zu diesem Ende bemerken wir zuerst, daß in der geometrischen Progression

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} \ldots$$

welche die Zahl 2 zur Grenze hat, (Nr. 4.) ein jedes beliebige Glied der Summe aller folgenden gleich ist; folglich wird in einer Reihe, in welcher das Abnehmen der Glieder schneller fortläuft, jedes die Summe derjenigen die nach ihm kommen, wie groß ihre Anzahl auch sey, übersteigen. Hieraus folgt, daß, so oft man für m einen Werth finden kann, der jedes Glied des Ausdruckes

$$A + \frac{B}{m^{b-a}} + \frac{C}{m^{c-a}} \ldots$$

kleiner macht, als die Hälfte des Vorhergehenden, so wird das erste Glied alle andern übersteigen; dies aber findet allgemein statt. Wir wollen uns hier nur auf einen besondern Fall einschränken, der einzige den wir in der Folge nöthig haben.

Es sey

$$A + \frac{B}{m} + \frac{C}{m^2} + \frac{D}{m^3} \ldots\ldots$$

Der ungünstigste Fall für unsere Untersuchung ist derjenige, wo die Coefficienten A, B, C, D, wachsend fortlaufen; wir wollen ihn einmal annehmen und setzen, daß sich das geometrische Verhältniß jeder dieser Coefficienten zu dem Vorhergehenden immer ändere; wir wollen durch $\frac{P}{m^p}$ und $\frac{Q}{m^{p+1}}$ die zwey auf einander folgenden Glieder vorstellen, zwischen denen dieses Verhältniß am größten ist. Man wird m so nehmen müssen, daß man

$$\frac{Q}{m^{p+1}} < \frac{P}{2m^p}.$$

habe. Indem man die zwey Glieder durch m^{p+1} multiplizirt, wird man finden $Q < \frac{Pm}{2}$, und durch $\frac{P}{2}$ dividirt, wird herauskommen $\frac{2Q}{P} < m$; man wird also m größer als $\frac{2Q}{P}$ nehmen müssen. Hieraus sieht man, daß man in den Reihen von der angenommenen Form den Werth der Zahl m immer erhalten kann, so oft das Verhältniß von zwey aufeinander folgenden Coefficienten dieser Reihen, wo man auch immer will, nicht unangeblich, das heißt, größer als jede gegebene Größe ist.

Um dieses zu erläutern, wollen wir einige Beyspiele in Zahlen nehmen, und zuvörderst die Reihe

$$\frac{2(10)^2}{m} + \frac{4(10)^4}{m^2} + \frac{6(10)^6}{m^3} + \frac{8(10)^8}{m^4} + \ldots$$

betrachten, deren Gesetz dieses ist, daß zwey auf einander folgende Glieder allgemein durch

$$\frac{2p(10)^{2p}}{m^p}, \ \frac{2(p+1)\ (10)^{2p+2}}{m^{p+1}}.$$

ausgedrückt werden. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} P &= 2p(10)^{2p} \\ Q &= 2(p+1)(10)^{2p+2} \end{aligned}\right\};$$

das Verhältniß dieser beyden Coffizienten ist

$$\frac{p+1}{p}$$

$$\left(\frac{p+1}{p}\right) \cdot (10)^2;$$

nun ist es leicht zu sehen, daß, wenn man für p ganze positive Zahlen nimmt, indem man nach und nach $p=1$, $=2$, $=3$, u. s. w. macht, die Größe

$$\frac{p+1}{p} = 2, = \tfrac{3}{2}, = \tfrac{4}{3}, \text{ etc.}$$

wird, und daß folglich ihr größter Werth 2 ist*). Hieraus ergiebt sich, daß 200 das größte Verhältniß ist, welches zwischen zwey auf einander folgenden Gliedern der angenommenen Reihe möglich ist; und daß, wenn man $m > 400$**) macht, das erste Glied größer seyn wird, als alle andere zusammengenommen.

Wenn man die Reihe

$$1 + \frac{1.2}{m} + \frac{1.2.3}{m^2} + \frac{1.2.3.4}{m^3} + \ldots$$

hat, werden die Glieder $\frac{P}{m^p}$ und $\frac{Q}{m^{p+1}}$ durch

*) Es ist $\frac{p+1}{p} = 1 + \frac{1}{p}$, offenbar ist aber, wenn p nur eine ganze positive Zahl seyn darf. $\frac{1}{p}$ für $p=1$ am größten, folglich auch $1 + \frac{1}{p} = 2$ der größte Werth. G.

**) Im Original stehet 200.

Es ist nemlich $\frac{Q}{P} = \frac{p+1}{p} \cdot 10^2$

aber $m > \frac{2Q}{P}$

oder $m > \frac{2(p+1)}{p} 10^2$

also $m > 400$.

G.

$$\frac{1.2.3\ldots(p+1)}{m^p} \text{ und } \frac{1.2.3\ldots(p+1)(p+2)}{m^{p+1}}$$

ausgedrückt seyn, man wird also haben,

$$\frac{2Q}{P} = 2(p+2)^{*)}$$

und $m > 2(p+2)$, nehmen müssen, das heißt, immer größer, je weiter die Glieder, welche man betrachtet, von dem ersten entfernt sind; man sieht also, daß es nicht möglich sey m einen endlichen Werth zu geben, der der Frage gnüge leistet.

Wenn man $m = \frac{1}{x}$ macht, so wird aus

$$A + \frac{B}{m} + \frac{C}{m^2} + \frac{D}{m^3} + \ldots$$

diese Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ werden; in welcher man das erste Glied immer größer machen kann, als die Summe aller folgenden; wenn man

$$\frac{1}{x} > \frac{2Q}{P} \text{ oder}$$

$$x > \frac{P}{2Q}$$

nimmt; weil P und Q die zwey aufeinander folgende Glieder sind, deren geometrisches Verhältniß das größte, aber doch angeblich ist: eine Einschränkung, welche für dem Gebrauch den wir von dem gegenwärtigen Satze in der Folge machen werden, nicht nachtheilig ist. Die Reihe, die wir betrachten, hat lauter positive Glieder, aber es ist leicht zu sehen, daß der Werth von m, welcher ihr erstes Glied größer

*) Im Original stehet $2(p+1)$ und ferner $m > 2(p+1)$.

größer als alle andere macht, mit noch mehreren Grunde die nemliche Wirkung hervorbringen müßte, wenn sie auch negative Glieder hätte.

10.

Auf diese Art ist es leicht zu beweisen, daß eine Gleichung von einem ungeraden Grade, immer wenigstens eine reelle Wurzel habe. In der That sieht man durch das was so eben gesagt wurde, daß es immer möglich sey, für die unbekannte Größe eine solche Zahl zu substituiren daß das erste Glied der beträchtlichste Theil der Gleichung wird; das Zeichen des Resultats wird also allein von dem Zeichen des ersten Gliedes abhängen. Wenn nun die Gleichung von einem ungeraden Grade ist, wird es negativ werden indem man $-m$, an die Stelle der unbekannten Größe setzt, und es wird positiv bleiben, wenn man $+m$, dafür setzt, woraus folgt, daß die Gleichung eine reelle Wurzel haben wird, die zwischen $+m$ und $-m$, fällt, weil die Resultate die sie durch diese zwey Substitutionen giebt, das entgegengesetzte Zeichen haben; Weil sich aber jede Gleichung auf ihr letztes Glied reducirt, wenn man o an die Stelle der unbekannten Größe setzt, so wird diese Substitution ein Resultat geben, welches das Zeichen dieses letzten Gliedes hat; folglich wenn es das Zeichen $+$ hat, wird die Wurzel zwischen $-m$ und o, und bey dem Zeichen $-$ zwischen $+m$ und o fallen.

Wenn die Gleichung von einem geraden Grade ist, so verändert ihr erstes Glied das Zeichen nicht, wenn $+m$ oder $-m$ statt x gesetzt wird; wenn aber ihr letz. Glied negativ ist, und da es selbst das Resultat der Substitution von o statt x ist, so hat man drey Resultate, nemlich:

Das 1te mit dem Zeichen $+$, m entsprechend
Das 2te mit dem Zeichen $-$, o entsprechend.
Das 3te mit dem Zeichen $+$, $-$ m entsprechend

woraus folgt, daß jede Gleichung von einem geraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, wenigstens zwey reelle Wurzeln, nemlich: eine positive und eine negative habe.

II.

Obgleich die Größe an sich selbst betrachtet, ohne Ende wachsen oder abnehmen kann, so ist doch nicht jede Funktion wegen der Größen, woraus sie bestehet, fähig, zu einem beliebigen Grad von Größe zu gelangen. Die sehr einfache Funktion

$$\frac{ax}{x+a}$$

ist eine solche, die, was für einen positiven Werth man auch x geben mag, doch nicht gleich a werden aber sich dieser Größe soviel man will, nähern kann. Um es zu beweisen, werden wir die Division in Bezug auf x machen, und wir bekommen den Quotienten

$$a - \frac{a^2}{x+a};$$

der Bruch $\frac{a^2}{x+a}$ wird um so viel kleiner, je größer x wird, ohne jedoch jemals o werden zu können; a ist also die Grenze des Bruchs

$$\frac{ax}{x+a}. \text{ (Nr. 4).}$$

Die Funktion, die wir zum Beyspiel genommen haben, hat nur in Bezug des Wachsthums von x eine

Grenze

Grenze; denn, wenn man annimmt, daß diese Größe abnimmt, bis sie verschwindet, so würde $\frac{ax}{x + a}$ zu gleicher Zeit o werden, und weil Null die allgemeine Grenze der Abnahme ist, so abstrahirt man davon. Der Bruch $\frac{x + b}{a}$ im Gegentheile, hat in Bezug auf den Wachsthum von x keine Grenze, weil er ohne Ende wächst, wenn diese Größe zunimmt; aber so lange x positiv seyn wird, kann der vorgegebene Bruch, so klein auch sein Werth seyn mag, nicht gleich $\frac{b}{a}$ werden, indessen nähert er sich dieser Größe, so viel man will; dieses ist also in Bezug auf die Abnahme eine andere Grenze als Null.

Die Funktion $\frac{ax + b}{a'x + b'}$, vereiniget beyde Arten von Grenzen, die wir so eben betrachtet haben. In der That, wenn man den Zähler und den Nenner dieses Bruches durch x dividirt, so wird man haben,

$$\frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}},$$

ein Ausdruck welcher sich desto mehr $\frac{a}{a'}$ nähert, als x in Bezug auf b und b' größer seyn wird; also ist $\frac{a}{a'}$ die Grenze von der vorgegebenen Funktion in Beziehung auf den Wachsthum den x haben kann.

Wenn man ferner annimmt daß x immer abnehmend fortläuft, und daß man $\frac{1}{m}$ dafür substituirt, so erhält man

$$\frac{\frac{a}{m} + b}{\frac{a'}{m} + b'},$$

eine Funktion wovon die Grenze unstreitig $\frac{b}{b'}$ ist.

Nicht alle Funktionen haben wie die Vorhergehende bestimmte Grenzen. Es kann zuweilen sehr nützlich seyn, diejenigen zu kennen, die eine Grenze haben oder nicht; wir werden dieses durch eine kleine Anzahl Fälle anschaulich machen.

12.

Es ist sogleich vollkommen einleuchtend, daß jede aus eine Reihe von Glieder zusammengesetzte Funktion wie

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

sich ohne Ende vermehren kann, wenn die Größe x sich auf solche Art vermehrt; sie kann auch o werden und hernach zum negativen übergehn. Wir wollen also den Ausdruck betrachten:

$$\frac{Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots}{A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \ldots}$$

welcher in gewissen Fällen bestimmte Grenzen haben kann. Man wird sie entdecken, wenn man diesem Bruche folgende Form giebt:

$$\frac{x^a\left(A + \frac{B}{x^{a-b}} + \frac{C}{x^{a-c}} + \ldots\right)}{x^{a'}\left(A' + \frac{B'}{x^{a'-b'}} + \frac{C}{x^{a'-c'}} + \ldots\right)}$$

Um die Grenzen in Bezug auf den Zuwachs von x zu finden, werden wir voraussetzen, daß die Reihe des Zählers und des Nenners mit dem höchsten Exponenten von x anfangen, und wir werden drey Fälle unterscheiden

$$a > a'$$
$$a < a'$$
$$a = a'$$

die entsprechenden Formeln sind:

$$\frac{x^{a-a'}\left(A + \frac{B}{x^{a-b}} + \frac{C}{x^{a-c}} + \ldots\right)}{A' + \frac{B'}{x^{a'-b'}} + \frac{C'}{x^{a'-b'}} + \ldots} \text{ für den 1ten Fall;}$$

$$\frac{A + \frac{B}{x^{a-b}} + \frac{C}{x^{a-c}} + \ldots}{x^{a'-a}\left(A' + \frac{B'}{x^{a'-b'}} + \frac{C'}{x^{a'-c'}} + \ldots\right)} \text{ für den 2ten Fall,}$$

$$\frac{A + \frac{B}{x^{a-b}} + \frac{C}{x^{a-c}} + \ldots}{A' + \frac{B'}{x^{a'-b'}} + \frac{C'}{x^{a'-c'}} + \ldots} \text{ für den 3ten Fall.}$$

Nur die dritte ist einer bestimmten Grenze fähig, welche $\frac{A}{A'}$, gleich ist; die erste kann ohne Ende wachsen, und die zweyte so klein werden als man will; dieses ist außer allen Zweifel durch Ansicht dieser Formeln, und durch das was oben gesagt ist.

13.

Bey Untersuchung der Grenzen in Bezug auf die Abnahme von x, setzen wir voraus, daß der Zähler und der Nenner so geordnet sind, daß die Exponenten wachsend fortlaufen; da alsdann a und a' die kleinsten sind, so wird die vorgegebene Funktion

$$\frac{x^a(A + Bx^{b-a} + Cx^{c-a} + \ldots)}{x^{a'}(A' + B'x^{b'-a'} + C'x^{c'-a'} + \ldots)}.$$

Wenn man hier noch, wie oben die Fälle unterscheidet, in denen man

$$a > a'$$
$$a < a'$$
$$a = a'$$

hat, so wird man sehen, daß der letzte der einzige ist, welcher einer bestimmten Grenze fähig ist; weil, da die positiven Potenzen x^{b-a}, x^{c-a} etc. und ihre entsprechenden im Nenner, nach Maßgabe, daß x sich vermindert, immer kleiner werden, so reduciren sich die in der Parenthese eingeschlossenen Größen immer mehr auf erstes Glied in welchem Falle, wenn $a = a'$ vorausgesetzt wird, man $\frac{A}{A'}$ zur Grenze hat.

In den beyden andern Fällen bleibt eine positive Potenz von x im Zähler und Nenner, als gemeinschaftlicher Factor, welches macht, daß eins oder das andere dieser Glieder sich immer zugleich mit x vermindert, und sich endlich ganz vernichten kann; woraus für den vorgegebenen Bruch ein Werth von Null oder größer als jede gegebene Größe entstehn würde (Nr. 5).

Uebrigens werden wir bemerken lassen, daß man die Grenze sowohl für das Wachsen als Abnehmen von x finden kann, wenn man sogleich den Zähler und Nenner des Bruches, jeden auf sein erstes Glied reducirt, welches nach dem was man (Nr. 8) gesehen hat, in einem und dem andern Falle den beträchtlichsten Theil des Werthes dieser Funktionen ausmacht; und auf diese Art werden wir künftig damit verfahren.

14.

14.

Die Principien die wir so eben gefunden haben, sind hinlänglich, die Grenzen derjenigen Größen zu finden, die deren fähig sind, und wir wollen diese durch die zwey folgenden Sätze schließen, die uns sehr nützlich seyn werden.

1. Zwey Größen, welche Grenzen einer nemlichen Funktion sind, sind untereinander gleich.

Denn, wenn dieses nicht wäre, so würden diese beyden Größen einen Unterschied haben; folglich würde alsdann die gegebene Funktion sich nicht einer und der andern dieser Größen mehr als eine gegebene Größe nähern können, welches wieder die Erklärung der Grenzen ist.

2. Wenn zwey Größen unter einander ein unveränderliches Verhältniß beybehalten, so ist dieses das Verhältniß ihrer Grenzen; dies ist durch sich selbst schon klar.

15.

Entwicklung der Funktionen in Reihen.

1. Von den algebraischen Funktionen.

Wir wollen nun zu der Entwicklung der Funktionen in Reihen übergehn und mit dieser $(p + x)^n$ den Anfang machen. Obwohl sie sich fast in allen Elementar-Büchern findet, so glauben wir doch, daß, da die Art, wodurch man dazu gelangt, sich im strengen Verstande nur auf den Fall anwenden läßt, wo n eine ganze positive Zahl ist, wir hier dasselbe aufs neue durch ein Verfahren erweisen müssen, welches dieser Einschränkung nicht unterworfen ist. Ueberdies, darf man nur wenig

in

in der Analysis bewandert seyn, um zu wissen, daß der Ausdruck $(p + x)^n$, welchen man gewöhnlich Newton zuschreibt zur Entwicklung aller Funktionen dienet; daher ist es schicklich, bey Abhandlung dieses Gegenstandes mit diesem anzufangen.

Die Ansicht der ersten Potenzen von $(1 + x)$, nemlich:

$$(1 + x) = 1 + x$$
$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$
$$(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$
etc.

leitet im allgemeinen vorauszusetzen

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, etc. von x unabhängige Zahlen sind, so, daß sie, welchen Werth man auch dieser Größe giebt, immer die nemlichen bleiben.

Aber man hat

$$(p + x)^n = p^n\left(1 + \frac{x}{p}\right)^n;$$

wenn man nun in die vorgegebene Reihe $\frac{x}{p}$ statt x setzet, so wird man haben:

$$(p+x)^n = p^n\left(1 + A\frac{x}{p} + B\frac{x^2}{p^2} + C\frac{x^3}{p^3} + D\frac{x^4}{p^4} + \ldots\right)$$

und indem man die Multiplication durch p^n vollführet, kömt heraus (1) . . .

$$(p + x)^n = p^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + Dp^{n-4}x^4 + \ldots$$

eine Gleichung, die unabhängig von einem jeden besondern Werthe, welchen man p oder x giebt, richtig seyn muß, wenn

die

die Coefficienten A, B, C, D, etc. schicklich bestimmt werden*).

Wir wollen nun voraussetzen, daß x sich in $x + u$ verändert, so müßte man alsdann haben: (2) . . .

$(p+x+u)^n$

*) Wenn man sagt, daß diese Gleichung unabhängig von einem besondern Werthe von p oder x bestehen muß, so versteht man dadurch, daß alle ihre Glieder sich unter einander vernichten müssen, so daß für diese Größen keine Bestimmung daraus erfolgt. Wenn man zum Beyspiel

$$(p + x)^2 = p^2 + 2px + x^2$$

hätte; so ist klar, daß wenn man den ersten Theil der Gleichung entwickelt, so würde man finden, daß er aus den nemlichen Gliedern, wie der zweyte bestehet, und die Gleichung würde folglich für jeden Werth von p und x richtig seyn. Mit der Gleichung $p^2 + x^2 = 2px$ würde es sich schon anders verhalten. Diese kann nicht für alle Arten von Werthen für p und x bestehn; es ist durchaus nöthig, daß eine dieser Größen durch die andere bestimmt sey. Die erste Gleichung ist von derjenigen Art die man identische nennt. Man sieht also, daß jede identische Gleichung kein Verhältniß zwischen den Größen aufstellt, die sie enthält; sie beweiset nur, daß eine gewisse Bedingung erfüllt ist, oder daß eine Wahrheit statt findet. Wenn man sich vorsetzt, eine Aufgabe aufzulösen, und man die Gleichung gefunden hat, welche die Auflösung davon geben muß, so ist diese Gleichung nicht identisch; wenn man aber durch ein besonderes Vorgefühl oder durch fremdartige Betrachtungen, den Ausdruck der unbekannten Größen errathen hätte, und man diesen in der vorgegebenen Gleichung statt jener an die Stelle setzte, dann würde sie identisch werden; woraus folgt, daß wenn man einen Lehrsatz aussagt, und ihn hernach durch den Calcul beweiset, so wendet man implicite nur identische Gleichungen an; man kann also auch Synthesis in der Algebra haben.

$$(p + x + u)^n = p^n + Ap^{n-1}(x + u) + Bp^{n-2}(x + u)^2 + Cp^{n-3}(x + u)^4 + Dp^{n-4}(x + u)^4 + \ldots$$

Man kann aber diese Gleichung auch unter einer andern Form darstellen, wenn man $p + x = q$ setzt: dann wird $(p + x + u)^n$, $(q + u)^n$ werden, und indem man q an die Stelle von p, und u an die Stelle von x in der Gleichung setzt, (1) so wird sich daraus folgendes ergeben (3) . . .

$$(q + u)^n = q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 + Cq^{n-3}u^3 + Dq^{n-4}u^4 + \ldots$$

Die zweyten Hälften der Gleichungen (2) und (3) sind nur Ausdrücke einer und derselben Größe, unter zwey verschiedene Formen gebracht; man kann sie also gleich setzen, welches geben wird:

$$\left.\begin{array}{l} p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 \\ + Cp^{n-3}(x+u)^3 + Dp^{n-4}(x+u)^4 \\ + \ldots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 \\ + Cq^{n-3}u^3 + Dq^{n-4}u^4 \\ + \ldots \end{array}\right.$$

um aber die zwey Hälften dieser letzten Gleichung mit einander zu vergleichen, muß man in der ersten die Potenzen $(x + u)$ die sich da finden, zuerst entwickeln; wenn man nun die Gleichung (1) nachahmt, so wird man sehen, daß man annehmen kann:

$$\begin{aligned} x + u &= x + a'u \\ (x + u)^2 &= x^2 + a''xu + b''u^2 \\ (x + u)^3 &= x^3 + a'''x^2u + b'''xu^2 + c'''u^3 \\ (x + u)^4 &= x^4 + a^{\prime v}x^3u + b^{\prime v}x^2u^2 + c^{\prime v}xu^3 + d^{\prime v}u^4, \end{aligned}$$

etc.

wo die Buchstaben a, b, c, d, etc. die von x und u unabhängigen Zahlen bezeichnen und der Accent den sie haben andeutet, zu welcher Potenz sie gehören. Indem wir diese Werthe an ihre Stelle setzen, und sie so ordnen,

daß

daß alle Glieder von derselben Potenz u sich in einer vertikalen Columne befinden; so hat man (4).

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
p^n & +Ap^{n-1}a' & +Bp^{n-2}b'' & +Cp^{n-3}c''' & \\
+Ap^{n-1}x & +Bp^{n-2}a''x & +Cp^{n-3}b'''x & +Dp^{n-4}c^{\prime v}x & \\
+Bp^{n-2}x^2 & +Cp^{n-3}a'''x^2 & u+Dp^{n-4}b^{\prime v}x^2 & u^2 \quad \ldots & u^3 \\
+Cp^{n-3}x^3 & +Dp^{n-4}a^{\prime v}x^3 & \quad \ldots & & \\
+Dp^{n-4}x^4 & \quad \ldots & & & \\
+\ldots & & & &
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l|l}
+Dp^{n-4}d^{\prime v} & \\
\ldots & u^4 + \ldots
\end{array}\right\} = q^n + Aq^{n-1}u + Bq^{n-2}u^2 + Cq^{n-3}u^3$$

$$+ Dq^{n-4}u^4 + \ldots$$

Weil der Werth von x in der Gleichung (1) unbestimmt bleiben muß, so ist leicht zu sehen, daß in der Gleichung (4) von x und u eben das gelten muß, da sie nur eine Folge der ersten ist; nun kann eine solche Bedingung nicht erfüllt werden, es sey denn, daß die Gleichung (4) unabhängig von u identisch wird, das heißt, daß die Größen, welche eine und eben dieselbe Potenz von u in der einen und in der andern Hälfte der Gleichung multipliciren, sich einander wechselsweise aufheben.

Wenn man zuvörderst die erste Columne jeder Hälfte vergleichet, so findet man

$$p^n + Ap^{n-1}x + Bp^{n-2}x^2 + Cp^{n-3}x^3 + Dp^{n-4}x^4 + \ldots = q^n$$

welches selbst zufolge der Hypothese ein identisches Resultat ist weil $q^n = (p+x)^n$.

Wenn man zu der zweyten Columne übergeht, so findet man

$$Ap^{n-1}a' + Bp^{n-2}a''x + Cp^{n-3}a'''x^2 + Dp^{n-4}a^{\prime v}x^3 + \ldots$$
$$= Aq^{n-1}$$

eine Gleichung welche hinlänglich ist, die Coefficienten

 A, B, C,

$A, B, C, D, \ldots$ zu bestimmen. In der That,

$$q^{n-1} = \frac{q^n}{q} = \frac{(p+x)^n}{p+x},$$

wenn man statt $(p+x)^n$ seinen Ausdruck setzt und den Nenner wegbringt, so wird man haben

$$(Ap^{n-1}a' + Bp^{n-2}a''x + Cp^{n-3}a'''x^2 + Dp^{n-4}a^{iv}x^3 + \ldots)(p+x)$$
$$= Ap^n + A^2p^{n-1}x + ABp^{n-2}x^2 + ACp^{n-3}x^3 + ADp^{n-4}x^4 \ldots$$

und wenn man die angezeigte Multiplication wirklich vornimmt.

$$Ap^n a' + \left.\begin{matrix} Bp^{n-1}a'' \\ + Ap^{n-1}a' \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} + Cp^{n-2}a''' \\ + Bp^{n-2}a'' \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} + Dp^{n-3}a^{v} \\ + Cp^{n-3}a''' \end{matrix}\right\} x^3 \ldots$$
$$= Ap^n + A^2p^{n-1}x + ABp^{n-2}x^2 + ACp^{n-3}x^3 \ldots$$

Bey allen diesen Rechnungen muß man nicht vergessen, daß $A, B, C, D, \ldots$ Zahlen sind, in welchen weder p, noch x noch u seyn können; man muß also diese Gleichung wie die Vorhergehende behandeln, und wenn man die Coefficienten jeder Potenz von x, in beyden Hälften vergleicht, so wird man finden

$$\left.\begin{aligned} A &= Aa' \\ A^2 &= Ba'' + Aa' \\ AB &= Ca''' + Ba'' \\ AC &= Da^{v} + Ca''' \end{aligned}\right\} \text{woraus man ziehet} \left\{\begin{aligned} A &= Aa' \\ B &= \frac{A(A-a')}{a''} \\ C &= \frac{B(A-a'')}{a'''} \\ D &= \frac{C(A-a''')}{a^{v}} \end{aligned}\right.$$

etc. etc.

Die Art wie sich diese Gleichungen bilden, ist einleuchtend genug, um dieselben so weit fortzuführen als man will, und man sieht leicht ein, daß, wenn $Pp^{n-m}x^m$ und $Qp^{n-m-1}x^{m+1}$ zwey aufeinander folgende Glieder der Entwicklung von $(p+x)^n$ vorstellen, man haben wird

$$AP = Qa'''\cdots^{(m)} + Pa'''\cdots^{(m-1)},$$

welches

welches giebt

$$Q = P \left\{ \frac{A - a'''\cdots^{(m-1)}}{a''\cdots^{(m)}} \right\},$$

ein Ausdruck in welchem m keine Potenz von a, sondern die Zahl der Accente anzeigt, welche dieser Buchstabe haben muß.

Wir werden bemerken, daß die Coefficienten B,C,D, ... alle bestimmt wären, wenn man a', a'', a''' u. s. w. A kennte; aber diese letzten sind weiter nichts als die Coefficienten des zweyten Gliedes in den Potenzen des Binomiums, welche die Zahlen 1, 2, 3 . . . n zu Exponenten haben.

Hieraus folgt, daß man aus dem zweyten Gliede der Entwicklung von $(p + x)^n$ alle übrigen ableiten kann; denn da A der Coefficient dieses zweyten Gliedes ist, so muß man daraus als aus besondern Fällen die Coefficienten der zweyten Glieder von $(p + x)$, $(p + x)^2$, $(p + x)^3$ . . . folgern.

16.

Man weiß schon, daß die zweyten Glieder dieser ersten Potenzen x, $2px$, $3p^2x$, . . . sind; es ist natürlich hieraus analogisch zu schließen, daß der Coefficient des zweyten Gliedes von $(p + x)^n$, $np^{n-1}x$ seyn wird. Es bleibt uns also nur übrig diese Behauptung zu beweisen, um im Stande zu seyn, alle Coefficienten der gesuchten Entwicklung anzugeben.

Zu diesem Ende bemerken wir, daß

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x);$$

und folglich

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + Ax + Bx^2 + \ldots)(1 + x);$$

hieraus wird man ableiten

$$(1+x)^{n+1} = \left.\begin{matrix}+A\\+1\end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix}+B\\+A\end{matrix}\right\} x^2 + \ldots$$

ein Resultat welches uns zeiget, daß wenn der Coefficient des zweyten Gliedes von $(1+x)^n$, A ist, der Coefficient des zweyten Gliedes von $(1+x)^{n+1}$, $A+1$ sey; und daß folglich, wenn der Exponent sich um eine Einheit vermehrt, dieser Coefficient auch um eine Einheit wachse; aber sein Werth für die erste Potenz $(1+x)$, ist 1; er wird also 2 für das Quadrat 3 für den Cubus, und überhaupt n für die $n$te Potenz seyn„.

Die vorhergehende Art zu schließen ist nur da anwendbar, wo n eine ganze positive Zahl ist; aber gesetzt wir hätten

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots$$

wenn man die zwey Hälften dieser Gleichung zur Potenz m erhebt, nachdem man der Kürze wegen

$$Ax + Bx^2 + \ldots = Mx$$

gemacht hat, so wird man haben

$$\ldots (1+x)^n = (1+Mx)^m.$$

Da aber nur das zweyte Glied gesucht werden soll, so muß man in der Entwicklung bey diesem Gliede stehen bleiben, und weil vorausgesetzt ist, daß m und n ganze Zahlen sind, so wird man $1 + nx = 1 + mMx$, haben; wenn man wieder für Mx seinen Werth setzt, indem man sich auf das in der ersten Potenz x multiplicirte Glied einschränkt, so kömmt heraus:

$$nx = mAx, \text{ folglich } A = \frac{n}{m}.$$

Es sey endlich

$$(1+x)^{\frac{-n}{m}} = 1 + A'x + B'x^2 + \ldots$$

man weiß, daß

$(1-x)$

$$(1+x)^{\frac{-n}{m}} = \frac{1}{(1+x)^{\frac{n}{m}}}$$

und folglich

$$(1+x)^{\frac{-n}{m}}(1+x)^{\frac{n}{m}} = 1;$$

setzt man wie oben

$$(1+x)^{\frac{n}{m}}, = 1 + Ax + Bx^2 + \ldots$$

multiplicirt, und diese Entwicklung mit der Vorstehenden reducirt, so wird man haben

$$\left.\begin{matrix} A \\ +A' \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +B \\ +AA' \\ +B' \end{matrix}\right\} x^2 + \ldots = 0:$$

nun muß diese Gleichung für jeden Werth von x statt finden, es muß also

$$\left.\begin{matrix} A + A' = 0 \\ B + AA' + B' = 0 \end{matrix}\right\}$$

etc. seyn.

Da wir aber nur den Coefficienten A′ nöthig haben, so werden wir uns nur mit der ersten dieser Gleichungen beschäftigen, und daraus ziehen: $A' = -A$ oder indem wir für A seinen Werth $\frac{n}{m}$ setzen

$$A' = -\frac{n}{m}.$$

Wenn man die Resultate zusammenstellt, so wird man sehen, daß die zwey ersten Glieder

$$\text{von}\left\{\begin{matrix} (1+x)^n \\ (1+x)^{\frac{n}{m}} \\ (1+x)^{\frac{-n}{m}} \end{matrix}\right. \quad \text{sind}\left\{\begin{matrix} 1+nx \\ 1+\frac{n}{m}x \\ 1-\frac{n}{m}x \end{matrix}\right.$$

Man kann also behaupten, daß, welche Zahl n auch immer vorstelle, wenn sie nur rational ist, die zwey ersten Glieder von $(1+x)^n$, $1+nx$ seyn werden. Wir werden in der Folge zeigen, daß der vorhergehende Satz, immer wahr ist, wenn auch n eine irrationale oder selbst eine eingebildete Größe wäre *)

17.

Wir wollen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
A &= A a' \\
B &= \frac{A\,(A - a')}{a''} \\
C &= \frac{B\,(A - a'')}{a'''} \\
D &= \frac{C\,(A - a''')}{a^{IV}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Q &= \frac{P\,(A - a^{(m)})}{a^{(m+1)}}
\end{aligned}\right\}$$

etc.

wie-

*) Da irrationale Größen Grenzen sind, welchen sich rationale Größen von beyden Seiten ohne Ende nähern, so gilt auch alles was von diesen letztern wahr ist, auch von ihrer Grenze, und daher gilt der von Lacroix hier geführte Beweis, auch für irrationale Exponenten. Eben so sieht man leicht ein, daß wenn der Exponent als eine veränderliche Größe betrachtet wird, dieses auf der Form der entwickelten Potenz keinen Einfluß hat, da die Form von der Größe der Bestandtheile unabhängig ist. Die Potenz als eine Funktion des Exponenten angesehen, ist ein Glied einer geometrischen Reihe, dessen Stelle durch den Exponenten angegeben wird.

Unmögwieder vornehmen, indem wir $a' = 1$, $a'' = 2$, $a''' = 3$, $a^{IV} = 4 \ldots A = n$ machen, werden sie $A = n$ geben

$$B = A\,\frac{(n-1)}{2} = n.\,\frac{(n-1)}{2}$$

$$C = B\,\frac{(n-2)}{3} = n.\,\frac{(n-1)}{2}.\,\frac{(n-2)}{3}$$

$$D = C\,\frac{(n-3)}{4} = n.\,\frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\quad 3\quad 4}$$

. . . .

$$Q = P\,\frac{(n-m)}{m+1}$$

etc.

Der Ausdruck Q enthält das allgemeine Gesetz der Coefficienten und zeigt, wie sich jeder von ihnen aus seinem Vorhergehenden ableitet.

Wenn man die eben gefundenen Werthe substituirt, so wird man haben

$$(1+x)^n = \begin{cases} 1 + nx + n\dfrac{(n-1)}{2}x^2 + n\dfrac{(n-1)\,(n-2)}{2\;.\;3}x^3 \\ + n\,\dfrac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\;.\;3\;.\;4}\,x^4 + \ldots \end{cases}$$

und wenn diese Formel bis zu dem Gliede wo der Exponent von x, m ist, fortgesetzt wäre, würde man für dieses Glied finden.

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m+1)}{2\;.\;3\;\ldots\;m}$$

Unmögliche Größen werden bekanntlich wie wirkliche behandelt, und daher kann auch der Exponent sogar unmöglich seyn.

Alles Gesagte gilt auch von dem gleich folgenden polynomischen Lehrsatz.

G.

Da dieser Ausdruck für sich selbst keinen besondern Werth hat, wenn man nicht an die Stelle von m eine gewisse Zahl setzet, so dient er jedes Glied der Formel vorzustellen, indem man m gehörige Werthe beilegt; dieser Ursache wegen bezeichnet man ihn unter den Nahmen des **allgemeinen Gliedes** von der Potenz n des Binomiums.

Die Reihe die wir so eben für die Entwicklung dieser Potenz gefunden haben, endiget sich nicht, wenn n nicht eine ganze positive Zahl ist; denn damit dieses geschehe, muß in der Folge der Factoren

$$n, n-1, n-2, n-3, \ldots \text{etc.}$$

sich einer finden, welcher gleich o sey, und dieses findet nicht statt, wenn n negativ oder gebrochen ist.

18.

Wir haben, um die Coefficienten A, B, C, D, zu finden, nur die durch die erste Potenz u in der Gleichung (4) multiplicirten Glieder angewendet; indessen hätten wir doch Recht zu schließen, daß die andern in jedem Glieds identisch sind; denn wenn dieses nicht wäre, so würden daraus neue Gleichungen entstehn, denen man unmöglich genug thun könnte, weil die Größen A, B, C, D, . . . schon bestimmt sind, und es folglich nicht wahr seyn würde, wenn man sagt, daß die Entwicklung von $(1+x)^n$ durch eine Reihe

$$1 + x + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 \ldots$$

die allen Werthen von x zukäme, dargestellt werden könnte.

Obgleich diese Schlüsse auf eine zureichende Art, die Rechtmäßigkeit der Entwicklung die wir erhalten haben, zu beweisen scheinen, so werde ich doch um nichts zu wün-

wünschen übrig zu lassen, noch darthun, daß die andern Glieder der Gleichung (4) sich gegenseits vernichten.

Zu diesem Ende werde ich den Ausdruck wieder vornehmen

$$p^n + Ap^{n-1}(x+u) + Bp^{n-2}(x+u)^2 + Cp^{n-3}(x+u)^3$$
$$Dp^{n-4}(x+u)^4 \ldots$$

wovon die Entwicklung das erste Glied dieser Gleichung ausmacht, und ich werde wahrnehmen, daß man diese Entwicklung durch Hülfe des Vorhergehenden bewerkstelligen kann, weil die Coefficienten A, B, C, D, ... bestimmt sind. Ich suche also, durch welche Größe eine beliebige Potenz von u, zum Beyspiel u^m multiplicirt ist. Es ist leicht zu sehen daß man zu u^m nicht eher kommen kann, als bey dem mit $(x+u)^m$ behafteten Gliede, aber wenn man von diesem Gliede ausgeht, so findet man u^m in allen folgenden Gliedern; so, daß wenn man die Potenzen

$$(x+u)^m, \; (x+u)^{m+1} \text{ u. s. w.}$$

entwickelt, und anstatt von x anzufangen, von u anfängt, welches gleichgültig ist, so wird u^m im ersten Gliede der ersten Entwickelung, im zweyten der zweyten Entwicklung und so weiter seyn.

Wir wollen also voraussetzen, daß man in der vorgesetzten Reihe folgende Glieder habe:

$$Pp^{n-m}(x+u)^m + Qp^{n-m-1}(x+u)^{m+1} + Rp^{n-m-2}(x+u)^{m+2}$$
$$+ Sp^{n-m-3}(x+u)^{m+3} + \ldots$$

Hieraus wird für den Coefficienten von u^m folgendes entspringen

$$Pq^{n-m} + (m+1)Qp^{n-m-1}x + \frac{(m+2)(m+1)}{2}Rp^{n-m-2}x^2$$
$$+ \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{2 \cdot 3}Sp^{n-m-3}x^3 + \ldots$$

aber nach dem Gesetz das wir in Beziehung auf die Coefficienten der Entwicklung von $(p+x)^n$ gefunden haben, muß man haben

$$Q = \frac{(n-m)}{m+1} P$$

$$R = \frac{(n-m-1)}{m+2} Q = \frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+1)(m+2)} P$$

$$S = \frac{(n-m-2)}{m+3} R = \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)} P$$

etc.

wenn man diese Größen substituirt, und die Reductionen macht, die sich von selbst ergeben, so wird man finden

$$P\left\{p^{n-1} + (n-m)p^{n-m-1}x + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2}p^{n-m-2}x^2 + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}{2\,.\,3}p^{n-m-3}x^3 + \ldots\right\}$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die in der Parenthese eingeschlossene Größe nichts anders als die Entwicklung von $(p+x)^{n-m}$ sey. Der Coefficient von u^m wird also in der ersten Hälfte der Gleichung $P(p+x)^{n-m}$ seyn; aber im zweyten Theile ist er unstreitig $Pp^{n-m} = P(p+x)^{n-m}$ die Itendität ist also bewiesen.

So lang auch die vorstehenden Rechnungen scheinen, so verdienen sie nichts desto weniger eine besondere Aufmerksamkeit, weil sie nur auf die strengsten Principien gegründet sind, und weil sie, wie man bald sehen wird, zu einer großen Menge eben so nützlicher als eleganter Resultate leiten.

19.

Es ist leicht aus der Entwicklung der Potenz n des Binomiums, die Entwicklung der nemlichen Potenz für ein beliebiges Polynomium $(a+b+c+d+e\ldots)$ abzuleiten. Um auf eine bequeme Art dahin zu gelangen, werden wir der Kürze wegen die Entwicklung von $(a+b)^n$ durch

$$a^n + Aa^{n-1}b + Ba^{n-2}b^2 + Ca^{n-3}b^3 + \ldots$$

vorstellen.

Wenn man jetzt voraussetzt, daß sich b in $b + c$ verändert, so wird das Binomium $(a + b)$ das Trinomium $(a + b + c)$ werden; und man müßte in der vorhergehenden Entwicklung

$$(b + c),\ (b + c)^2,\ (b + c)^3 \ldots$$

statt $b,\ b^2,\ b^3 \ldots$ schreiben; durch diese Substitution wird man finden:

$$a^n + Aa^{n-1}\left\{\begin{matrix} b \\ +c \end{matrix}\right\} + Ba^{n-2}\left\{\begin{matrix} b^2 \\ +2bc \\ +c^2 \end{matrix}\right\} + Ca^{n-3}\left\{\begin{matrix} b^3 \\ +3bc^2 \\ +3b^2c \\ +c^3 \end{matrix}\right\}$$
$$+ \ldots$$

ein Resultat, welches man leicht so weit man will fortsetzen kann. Es sey also $Na^{n-n'}b^{n'}$ das allgemeine Glied von $(a+b)^n$; so wird es sich in $Na^{n-n'}(b+c)^{n'}$ umändern, und wenn man

$$(b+c)^{n'} = b^{n'} + Ab^{n'-1}c + B'b^{n'-2}c^2 + C'b^{n'-3}c^3 + \ldots$$
$$+ N'b^{n'-n''}c^{n''} + \ldots$$

macht, so wird es

$$Na^{n-n'}\left\{\begin{matrix} b^{n'} \\ + A'b^{n'-1}c \\ + B'b^{n'-2}c^2 \\ + C'b^{n'-3}c^3 \\ \ldots \\ + N'b^{n'-n''}c^{n''} \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\}$$

Wenn man diese Entwicklung mit Aufmerksamkeit betrachtet, so bemerkt man bald, daß in jedem Gliede aus

aus welchen sie besteht, die Summe der Exponenten von den Buchstaben $a, b, c,$ u. s. w. immer gleich n ist, welche aber übrigens, jeder besonders, alle Werthe haben, die dieser Bedingung Genüge thun können; man sieht überdies, daß das allgemeine Glied, das ist, jenes, welches nur unbestimmte Exponenten enthält, zu seinem Ausdruck $N N' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''}$ habe.

Wir wollen noch setzen, daß sich c in $(c+d)$ verändert und daß man habe

$$(c+d)^{n''} = c^{n''} + A'' c^{n''-1} d + B'' c^{n''-2} d^2 + C'' c^{n'-3} d^3 + \ldots$$
$$+ N''' c^{n''-n'''} e^{n'''} \ldots$$

wenn man diese Entwicklung an die Stelle von $c^{u''}$ im vorhergehenden Resultate setzt, so wird man finden, daß das allgemeine Glied des Quadrinomiums $(a+b+c+d)_n$ seyn wird:

$$N N' N'' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''-n'''} d^{n'''}.$$

Es ist leicht dieses Verfahren fortzusetzen, und man sieht schon, daß, da $N''' d^{n'''-n''''} c^{n''''}$ das allgemeine Glied des Binomiums $(d+e)^{n'''}$ ist, jenes vom Quintinomium $(a+b+c+d+e)^n$ folgendes seyn müsse:

$$N N' N'' N''' a^{n-n'} b^{n'-n''} c^{n''-n'''} d^{n'''-n''''} a^{n''''}.$$

Um jedes allgemeinen Glied zu haben, so ist weiter nichts zu thun übrig, als an die Stelle der Coefficienten $N N' N'' N''' \ldots$ ihre Werthe zu setzen.

Weil N der Coefficient des Gliedes $a^{n-n'} b_{n'}$ in der Entwicklung von $(a+b)^n$ ist, so hat man

$$N = \frac{n(n-1) \ldots\ldots (n-n'+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots n'}.$$

Wenn man in dem Zähler und Nenner alle zwischen 1 und $n-n'$ inclusive enthaltene Faktoren addirt, so wird sich der Werth dieses Ausdruckes nicht verändern, und

man

man wird dann haben

$$N = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots n' \times 1 \cdot 2 \ldots n - n'}.$$

Man kann N' von N ableiten, indem man n in n' und n' in n'' verändert, so wird herauskommen

$$N' = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots n'}{1 \cdot 2 \ldots n'' \times 1 \cdot 2 \ldots n' - n''},$$

eben so wird man haben

$$N'' = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots n''}{1 \cdot 2 \ldots n''' \times 1 \cdot 2 \ldots n'' - n'''}$$

$$N''' = \frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots n'''}{1 \cdot 2 \ldots n^{\text{IV}} \times 1 \cdot 2 \ldots n''' - n^{\text{IV}}}.$$

Wenn man das Produkt $N N' N'' N'''$ macht und alle dem Nenner und Zähler gemeinschaftlichen Factoren ausgelöscht werden, so wird man finden

$$NN'N''N''' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots (n - n') \times 1 \cdot 2 \ldots (n' - n'') \times 1 \cdot 2 \ldots (n'' - n''') \times 1 \cdot 2 \ldots (n''' - n^{\text{IV}}) \times 1 \cdot 2 \ldots n^{\text{IV}}}$$

es sey zur Abkürzung $\begin{cases} n - n' = p \\ n' - n'' = q \\ n'' - n''' = r \\ n''' - n^{\text{IV}} = s \\ n^{\text{IV}} = t \end{cases}$

indem man diese Gleichungen addirt, wird herauskommen $p + q + r + s + t = n$, und man wird zum allgemeinen Glied des Quintinomiums

$$(a + b + c + d + e)^n$$

haben

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots p \times 1 \cdot 2 \ldots q \times 1 \cdot 2 \ldots r \times 1 \cdot 2 \ldots s \times 1 \cdot 2 \ldots t} a^p b^q c^r d^s e^t;$$

woraus

woraus es leicht ist dasselbe für jedes beliebige Polynom abzuleiten.

Durch das allgemeine Glied wird die gesuchte Entwicklung gebildet, indem man beobachtet, daß es alle Potenzen jedes dieser Buchstaben $a, b, c, d, e \ldots$ von 0 bis mit n enthalten muß, und daß die Summe der Exponenten, in welchem Gliede es sey immer mit n gleich seyn müsse. Was den Nummerischen Coefficienten anbelangt, so zeigt die vorhergehende Formel, wie man ihn von den Exponenten der Glieder zu denen er gehört ableitet.

Um ein Beyspiel zu geben, werden wir $(a+b+c+d)^5$ nehmen: indem wir die Entwicklung dieser Potenz in Bezug auf einen und eben denselben Buchstaben ordnen, gesetzt, daß dieses a sey, so wird man nur noch alle Glieder die jede Potenz von a enthalten müssen, suchen dürfen; und die Art wie wir jene die zu a^2 gehören, bilden, wird zeigen, wie man sich dabey für jede andere Potenz zu verhalten habe.

Wir schreiben

$a^2\, b^3$		
$a^2\, b^2\, c$	$a^2\, c^3$	$a^2\, d^3$
$a^2\, b^2\, d$	$a^2\, c^2\, d$	
$a^2\, b\, c^2$	$a^2\, c\, d^2$	
$a^2\, b\, c\, d$		

Wir werden uns nicht aufhalten die Coefficienten zu bilden, weil gar keine Schwierigkeit dabey ist, wenn man sich erinnert, daß man sich bey jeden Buchstaben der keinen Exponenten hat, die Einheit als Exponent denkt.

Wenn n ein Bruch oder eine negative Zahl wäre, so könnte die durch die Gleichung

$$p + q + r + s + t \ldots = n$$

aus

ausgedrückte Bedingung schwer zu erfüllen scheinen; aber man wird diese Unbequemlichkeit vermeiden, wenn man dem Polynomium $a + b + c + d + e \ldots$ die Form eines Binomiums $(a + x)^n$ giebt, in dessen Entwicklung man an die Stelle der Potenzen von x, die nothwendig positiv und ganz seyn müssen, jene des Polynomiums

$$a + b + c + d + e \ldots$$

setzet.

20.

Man könnte von den vorstehenden Formeln Gebrauch machen, um

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$$

nach den Potenzen von x zu entwickeln; man kann aber auf eine einfachere Art dahin gelangen, wie man sogleich sehen wird. Es ist ausgemacht, daß man voraussetzen kann

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$$
$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^3 + \ldots$$

denn, wenn man den ersten Theil dieser Gleichung unter der Form eines Binomiums $(a + k)^n$ setzet, und entwickelt, so wird das Resultat, was auch n immer sey, nur ganze und positive Potenzen von k, von der ersten inclusive an, enthalten; und wenn man folglich an die Stelle dieses letzten Buchstabens seinen Werth setzte, so würde diese Substitution nur ganze und positive Potenzen von x verschaffen. Dieß festgesetzt, so würde man, wenn sich x in $x + u$ verändert, folgendes haben . . . (1)

$$[a + b(x+u) + c(x+u)^2 + d(x+u)^3 + \ldots]^n$$
$$= A + B(x+u) + C(x+u)^2 + D(x+u)^3 + E(x+u)^4$$
$$\ldots$$

Da diese Gleichung unabhängig von einem besondern

Werthe

Werthe von x und von n statt finden muß, so müssen die Glieder, welche in der Entwicklung der einen und der andern Hälfte der Gleichung jede Potenz von x und u multipliciren, identisch seyn. Wir wollen damit anfangen, in Bezug auf u zu entwickeln, indem wir uns auf die Glieder einschränken, welche die erste Potenz dieser Größe multipliciren, und uns sogleich mit der ersten Hälfte der Gleichung beschäftigen.

Die Function

$$a + b(x + u) + c(x + u)^2 + d(x + u)^3 + \ldots$$

wird

$$\left.\begin{array}{llll} + a + bx & + cx^2 & + dx^3 + \\ \quad + bu & + 2cxu & + 3dx^2u \\ & + cu^2 & + 3dxu^2 \\ & & + \ldots \end{array}\right\}$$

Man mache um abzukürzen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = p$$

$$\left.\begin{array}{l} (b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)u \\ + (cu + 3dxu + \ldots)u \end{array}\right\} = qu;$$

etc.

so wird man haben:

$$(p + qu)^n = p^n + np^{n-1}qu + \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2}q^2u^2 \ldots$$

da wir aber nicht über die erste Potenz von u hinausgehn wollen, so werden wir nur die zwey Glieder $p^n + np^{n-1}qu$ betrachten. Indem wir für qu seinen Werth setzen, wird man sehen, daß man die zweyte Linie und die folgenden davon ausschließen muß, weil sie zu u^2 und zu höhere Potenzen gehörige Glieder geben würden; es wird also zum Endresultat herauskommen

$$p^n + np^{n-1}(b + 2cx + 3dx^2 + \ldots)u$$

Wir

Wir wollen nun zur zweyten Hälfte der Gleichung (1) übergehen; sie giebt sogleich

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$
$$+ (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \text{etc.})\,u$$

Die erste Linie ist nichts anders, als der für

$$(a + bx + cx^2 + \ldots)^n$$

oder p^n vorausgesetzte Werth; man wird also durch Vergleichung der Coefficienten von u, haben

$$np^{n-1}(b+2cx+3dx^2+\ldots)=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{etc.}$$

$$\text{aber } p^{n-1} = \frac{p^n}{p}$$

setzt man statt p^n und p ihre Werthe und bringt die Nenner weg, so wird man finden

$$n(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}).(b+2cx+3dx^2+4ex^3+\ldots)$$
$$=(B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3\ \text{etc.}).(a+bx+cx^2+dx^3+ex^4\ \text{etc.}$$

vollführt man die angezeigten Multiplicationen, so wird man erhalten

$$\left.\begin{array}{r|r|r|r|l}
nbA+nbB & x + nbC & x^2 + nbD & x^3 + nbE & x^4\ \text{etc.} \\
+2ncA & +2ncB & +2ncC & +2ncD & \\
 & +3ndA & +3ndB & +3ndC & \\
 & & +4neA & +4neB & \\
 & & & +5nfA &
\end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{r|r|r|r|l}
aB + 2aC & x + 3aD & x^2 + 4aE & x^3 + 5aF & x^4\ \text{etc.} \\
+ bB & +2bC & +3bD & +4bE & \\
 & + cB & +2cC & +3cD & \\
 & & + dB & +2dC & \\
 & & & + eB &
\end{array}\right.$$

Wenn man die Coefficienten der gleichnahmigen Potenzen von x vergleicht, so wird man finden,

$$aB = nbA$$
$$2aC = (n-1)bB + 2ncA$$
$$3aD = (n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA$$
$$4aE = (n-3)bD + (2n-2)cC + (3n-1)dB + 4neA$$
$$5aF = (n-4)bE + (2n-3)cD + (3n-2)dC + (4n-1)eB + 5nfA \text{ etc.}$$

Das Gesetz dieser Werthe ist leicht zu fassen; alle Coefficienten B, C, D, etc. werden bestimmt seyn, sobald A bekannt ist; man sieht aber, daß es den Werth der Entwicklung ausdrückt, wenn $x = 0$, und in diesem Falle reducirt sich die vorgesetzte Function

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots)^n$$

auf a^n, man hat also $A = a^n$.

Wenn man nach diesem Werthe, jene der Buchstaben B, C, D, etc. berechnet, wird man leicht finden, daß die Potenz n das Polynomiums

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

den Ausdruck hat

$$a^n + na^{n-1}bx + \left.\begin{matrix} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 \\ + na^{n-1}c \end{matrix}\right\} x^2$$

$$\left.\begin{matrix} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 \\ + \frac{n.(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} bc \\ + na^{n-1}d \end{matrix}\right\} x^3$$

$$\left.\begin{array}{l}
+ \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 \\
+ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^3 c \\
+ \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} bd \\
+ \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} c^2 \\
+ n a^{n-1} e
\end{array}\right\} x^4$$

$$\left.\begin{array}{l}
+ \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 \\
+ \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} a^{n-4} b^3 c \\
+ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 1} x^{n-3} b^2 d \\
+ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{n-3} b c^2 \\
+ \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} b e \\
+ \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 1} a^{n-2} c d \\
+ n a^{n-1} f
\end{array}\right\} x^5 \text{ etc.}$$

Moivre, welcher zuerst diese vorstehende Formel gab, ließ auch das Gesetz bemerken, nach welchem man alle Glieder bilden kann, die sie enthält; da wir aber keine Gelegenheit haben werden sie oft anzuwenden, so werden wir uns bey diesem Gegenstande nicht länger verweilen. Wir werden nur anmerken, daß es keine algebraische Functionen giebt, die man durch das Vorhergehende nicht entwickeln könnte; denn die allgemeinsten können nichts anders als eine Combination von Monomen oder

Polynomen seyn, zu positiven oder negativen ganzen oder gebrochenen Potenzen erhoben.

21.

Von den transcendenten Functionen.

Wir wollen uns nun mit den transcendenten Functionen beschäftigen.

Die einfachste unter allen diesen Functionen ist diese, die unter dem Nahmen der exponentialen bekannt ist, und zu welcher man auf folgende Art kommen kann.

Exponentiale und logarithmische Functionen.

Wenn man die Relation betrachtet, welche sich zwischen einem beliebigen Gliede einer gegebenen geometrischen Progression, und der Stelle die es einnimmt, befindet, und das erste Glied α. den Exponent der Reihe a, das gesuchte Glied y, und die Zahl der Glieder die ihm vorangehn x nennt, so wird man, wie bekannt ist, haben $y = \alpha a^x$. In dieser Gleichung wo α und a als unveränderliche Größen betrachtet sind, weil man nur eine besondere Progression zum Gegenstande hat, ist y eine Function von x und umgekehrt x von y; aber diese Functionen sind eine wie die andere von einer höhern Ordnung als die algebraischen Funktionen; denn man sieht, daß man, um y zu erhalten, eine unbestimmte Anzahl Multiplicationen, die selbst in Ausziehungen von Wurzeln übergehn können, verrichten müsse, wenn man x gebrochene Werthe beylegt. Die Gleichung $y = a^x$ wechselt ihren Grad bey jedem Werthe den x annimmt, weshalb auch Jakob Bernouilli, der sich damit zuerst beschäftigte, sie die durchlaufende Gleichung ((équation parcourante) nannte. Die Bestimmung von x durch y anlangend

gend, so kann sie ohne Anwendung der Logarithmen nicht statt finden.

Wir werden die Mittel geben die Function y zu entwickeln, und zu mehrerer Vereinfachung $\alpha = 1$ annehmen, woraus $y = a^x$ folgt. Wir werden voraussetzen, daß a^x durch die Reihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

vorgestellt sey; A_0, A_1, A_2 ... sind von x unabhängige Coefficienten, und die unteren Ziffern 0, 1, 2, ... zeigen den Exponenten der Potenz von x an, worin der Buchstabe zu welcher sie gehören multiplicirt ist; also wird A_m der Coefficient von x^m seyn. Was mich bestimmt hat, diese Bezeichnung zu gebrauchen, ob sie gleich ein wenig verwickelt scheinen mag, ist, weil es vermitelst ihrer leicht seyn wird, das Gesetz der Werthe der Coefficienten zu entdecken.

Man wird vielleicht fragen, welche Betrachtung die Wahl der Reihe bestimmt habe, und warum sie nach den steigenden Potenzen von x fortgeht. Es wird leicht seyn auf diese Fragen zu antworten. Die Function a^x wird wirklich der Einheit gleich, wenn man $x = 0$ macht; und wenn man der Reihe folgende Form gegeben hätte:

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots$$

so sieht man, daß für $x = 0$ alle Glieder dieser Reihe unendlich geworden wären, und daß sie daher die vorgegebene Function nicht hätte vorstellen können. Ueberhaupt, wenn die Form der Reihe der gesuchten Entwicklung nicht zukömmt, so führt der Calcul auf wiedersprechende Relationen zwischen den Coefficienten. Hieraus folgt, daß man, um auf die Resultate der Methode der unbestimmten Coefficienten, die wir hier anwenden,

 sicher

sicher rechnen zu können, sich erst versichert haben muß, daß man keine widersprechende Relationen antreffe, so weit man auch den Calcul treibt; dafür würde man für den Fall, wenn die Reihe unendlich ist, nur dann stehen können, wenn man das Gesetz anzeigen kann, welchem ihre Glieder folgen.

Dieses vorausgesetzt, wenn x, $x+u$ wird, so verändert sich die Function a^x in a^{x+u}, weil aber die Coefficienten A_0, A_1, A_2 . . . unabhängig von jedem besondern Werthe von x sind, so muß man ebenfalls haben:

$$a^x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$$

$$a^u = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots$$

endlich

$$a^{x+u} = A_0 + A_1 (x+u) + A_2 (x+u)^2 + A_3 (x+u)^3 + \ldots$$

und wegen $a^x \times a^u = a^{x+u}$, muß das Produkt der ersten beyden Reihen der letzten gleich seyn. Um die verschiedenen partiellen Producte zu ordnen, ist es hinlänglich, um eine Stelle hereinzurücken nach Maaßgabe als man den Multiplicator in der zweyten Reihe ändert und alle die von einerley Potenz von $(x+u)$ in der dritten Reihe entstehenden Glieder in einer verticalen Columne aufzustellen; man wird also haben:

$$\left.\begin{array}{lllll}
A_0^2 & + A_0 A_1 x & + A_0 A_2 x^2 & + A_0 A_3 x^3 & + A_0 A_4 x^4 + \ldots \\
 & + A_1 A_0 u & + A_1 A_1 ux & + A_1 A_2 ux^2 & + A_1 A_3 ux^3 + \ldots \\
 & & + A_2 A_0 u^2 & + A_2 A_1 u^2 x & + A_2 A_2 u^2 x^2 + \ldots \\
 & & & + A_3 A^0 u^3 & + A_3 A_1 u^3 x + \ldots \\
 & & & & + A_4 A_0 u^4 + \ldots
\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{lllll}
A_0 & + A_1 x & + A_2 x^2 & + A_3 x^3 & + A_4 x^4 + \ldots \\
 & + A_1 u & + 2A_2 ux & + 3A_3 ux^2 & + 4A_4 ux^3 + \ldots \\
 & & + A_2 u^2 & + 3A_3 u^2 x & + 6A_4 u^2 x^2 + \ldots \\
 & & & + A_3 u^3 & + 4A_4 u^3 x + \ldots \\
 & & & & + A_4 u^4 \quad + \ldots
\end{array}\right.$$

Da

Da diese Gleichung statt findet, was auch x und u immer seyn mögen, so folgt daraus nothwendigerweise, daß diese Größen in die Bestimmung der Coefficienten keinen Einfluß haben müssen, und folglich die Glieder in der einen Hälfte der Gleichung, durch jene welche ihnen in der andern Hälfte entsprechen, vernichtet werden; man wird also haben $A_0^2 = A_0$, welches $A_0 = 1$ giebt, ein Werth den man überall statt A_0 setzen, und wodurch man diesen Buchstaben in den Gliedern zu schreiben, wo er vorkömmt erspart. Durch diese Auslassung ergiebt sich daß die erste Linie der zweyten Hälfte der Gleichung mit der ersten Linie der zweyten Hälfte identisch ist; wir werden also in der zweyten Linie die Gleichungen für die Coefficienten suchen, und erhalten

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ A_1 A_1 = 2A_2 \\ A_1 A_2 = 3A_3 \\ A_1 A_3 = 4A_4 \\ \quad \ldots \end{array}\right\} \text{woraus man zieht} \left\{\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{A_1}{1} \\ A_2 = \dfrac{A_1^2}{1.2} \\ A_3 = \dfrac{A_1^3}{1.2.3} \\ A_4 = \dfrac{A_1^4}{1.2.3.4} \\ \quad \ldots \end{array}\right.$$

und überhaupt:

$$A_1 A_{m-1} = m A_m \qquad\qquad A_m = \frac{A_1^m}{1.2.3\ldots m}$$

Da mit Ausnahme des zweyten A_1 alle Coefficienten durch diese Gleichungen bestimmt sind, so folgt daraus, daß, wenn die Form die wir bey Entwicklung von a^x vorausgesetzt haben, rechtmäßig ist, die dritte Linie und die folgenden der ersten Hälfte von sich selbst mit jenen die ihnen in der zweyten Hälfte entsprechen, identisch werden müssen *).

Um diese Bedingung zu beweisen, werden wir in der ersten Hälfte ein beliebiges Glied $u^m x^n$ nehmen; sein Coefficient ist unstreitig

$$A_m A_n \text{ oder } \frac{A_1^m}{1.2.3\ldots m} \times \frac{A_1^n}{1.2.3\ldots n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2\ldots m \times 1.2\ldots n}.$$

Das nemliche Glied $u^m x^n$, welches einen Theil der Potenz $m + n$ von $x + u$ in der zweyten Hälfte ausmacht, hat zum Coefficienten

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)A_{m+n}}{1.2.3\ldots\ldots n}$$

aber

*) Ich hätte mich der Mühe überheben können, den angezeigten Beweis zu machen; denn nachdem ich auf jeder Seite der ersten Gleichung die identischen Glieder ausgelöscht, und hernach die beyden Hälften durch u dividirt hätte, würde ich gefunden haben:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 + A_1^2 x + A_1 A_2 x^2 + A_1 A_3 x^3 + \ldots \\ \quad + A_2 u + A_1 A_2 ux + A_2 A_2 ux^2 + \ldots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^4 \ldots \\ \quad + A_2 u + 3A_3 ux + 6A_4 ux^2 \ldots \end{array}\right.$$

da aber diese Gleichung statt finden muß, was auch u immer sey, so kann man $u = 0$ machen, jede dieser Hälften reducirt sich dann auf die erste Linie, und man hat nichts mehr, als die weiter oben gefundenen Gleichungen. Obgleich dieser Weg kürzer ist als jener dem ich gefolgt habe. so glaubte ich doch den letzten vorziehen zu müssen, weil er für die Genauigkeit der Entwicklung nichts zu wünschen übrig läßt, und daher jenen vollkommener Genüge leisten wird, welche in der Analysis noch keine große Fertigkeit besitzen.

Was ich so eben sagte, bezieht sich ebenfalls auf die Paragraphen 33 und 34, und ich werde es daher nicht wiederholen.

aber $A_{m+n} = \frac{A_1^{m+n}}{1.2.3\ldots(m+n)}$

wenn man diesen Werth substituirt, und die dem Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factoren, nemlich alle Zahlen von $m + n$ bis mit $m + 1$ auslöscht, so hat man zum Resultate

$$\frac{A_1^{m+n}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots m}$$

das heißt, das nemliche wie vorher. Die Identität ist also bewiesen, und wir können daraus schließen, daß

$$a^x = 1 + \frac{A_1 x}{1} + \frac{A_1^2 x^2}{1.2} + \frac{A_1^3 x^3}{1.2.3} + \ldots$$

22.

Es ist noch übrig A_1 zu bestimmen; zu diesem Ende werden wir $x = 1$ machen, und demnach haben

$$a = 1 + \frac{A_1}{1} + \frac{A_1^2}{1.2} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + \ldots$$

eine Gleichung die eine unbegrenzte Anzahl Glieder enthält, und von welcher man nicht so leicht sieht, wie man den Werth von A_1 daraus ziehen könnte; wenn man aber $A_1 = 1$ macht, so wird sie

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

und a wird aufhören eine beliebige Größe zu seyn: wir wollen den besondern Werth, den a in dieser Hypothese hat, durch e vorstellen, dessen Näherungsausdruck

2,7182818 ist,

so werden wir haben

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Da diese Gleichung statt haben muß, was auch x immer sey; so wird wenn man $x = A_1$ setzt, herauskommen

$$e^{A_1} = 1 + \frac{A_1}{1} + \frac{A_1^2}{1.2} + \frac{A_1^3}{1.2.3} + \frac{A_1^4}{1.2.3.4};$$

woraus man sieht, daß $a = e^{A_1}$; wenn man die Logarithmen nimmt, hat man

$$A_1 \, le = la, \text{ und folglich } A_1 = \frac{la}{le}.$$

Wenn man aber nach der Erklärung der Logarithmen die Zahl e als die Basis des Systems betrachtet, wird man $l'e = 1$ und $A_1 = l'a$ haben; ich habe den Buchstaben l accentuirt um anzuzeigen, daß hier von einer besondern Art von Logarithmen die Rede sey, von welcher e die Basis ist. Wir wollen diese Bestimmung zu der Entwicklung von a^x anwenden, und es wird sich daraus ergeben

$$a^x = 1 + \frac{l'a}{1} x + \frac{(l'a)^2}{1.2} x^2 + \frac{(l'a)^3}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

Eine wichtige Bemerkung, die man nicht übersehen muß, ist, daß die Reihe, zu welcher wir gekommen sind, immer convergent ist, so groß auch der Werth von x seyn mag.

Es ist nemlich leicht zu sehen, daß man das allgemeine Glied dieser Reihe durch $\frac{K^n}{1.2\ldots n}$ ausdrücken kann; das unmittelbar darauf folgende wird also seyn

$$\frac{K^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)},$$

und wenn das geometrische Verhältniß des einen zu dem andern, nimmt, wird man $\frac{K}{n+1}$ finden. Wenn man nun die Reihe weiter fortsetzt, so muß man nothwendi-

ger-

gerweise ein Glied antreffen, in welchem $n+1$ größer ist als K, und welches daher weniger seyn wird als jenes, das ihm vorhergeht; und es ist klar, daß das Abnehmen in diesem gefundenen Gliede bey den nachfolgendern immer fortgehen wird.

Man wird diese Betrachtungen leicht auf die Reihen anwenden, wo die Zähler der aufeinander folgenden Glieder ein beständiges Verhältniß haben, oder in einem ähnlichen Verhältniß fortschreiten, während jenes der Nenner immer wachsend fortgeht.

23.

Weil man $A_1 = \frac{la}{le}$ hat, so würde man dadurch die Entwicklung der logarithmischen Function finden, wenn man einen Ausdruck von A_1 nach den Potenzen von a geordnet, finden könnte. Wenn man aber $a=1+b$ macht, so wird die Function a^x zu $(1+b)^x$, und kann vermittelst der Formel das Binomium entwickeln werden; man hat sodann:

$$(1+b)^x = 1 + \frac{xb}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2}b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}b^3$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}b^4 \ldots.$$

Um diese Entwicklung mit jener die wir Nr. 21 gefunden haben, zu vergleichen, muß man sie nach den Potenzen von x ordnen, welches folgende Form geben wird:

$$1 + \left\{ b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \ldots \right\} x$$
$$+ \left\{ b^2 - \frac{3b^3}{3} + \frac{11\,b^4}{3.4} \ldots \right\} \frac{x^2}{2}$$

u. s. w.

Das

Das Gesetz des Coefficient n von x ist leicht zu fassen, und weil das das einz ge ist, welches wir brauchen um A_1 zu bestimmen, so werden wir auf der Stelle haben

$$A_1 = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \ldots$$

oder indem man an die Stelle von b seinen Werth $a - 1$ setzt,

$$A_1 = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots$$

und hieraus wird man folgern

$$la = le \left\{ (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots \right\}$$

Diese Reihe ist nur in dem Falle convergent, wenn die Größe $a - 1$ sehr klein ist; mna kann sie aber immer durch einen sehr einfachen Kunstgriff dahin bringen. Wenn man $\sqrt[m]{a}$ statt a setzt, so wird man haben:

$$l\sqrt[m]{a} = le \left\{ (\sqrt[m]{a} - 1) - \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^4}{4} \ldots \right\}$$

man weiß aber daß $la = m.l\sqrt[m]{a}$; folgendes giebt

$$la = mle \left\{ (\sqrt[m]{a} - 1) - \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^2}{2} + \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^3}{3} - \frac{(\sqrt[m]{a} - 1)^4}{4} \ldots \right\}$$

Wenn man nun für m eine sehr große Zahl nimmt, so kann man es dahin bringen, daß $\sqrt[m]{a}$ so wenig von der Einheit abweicht als man will.

Um

Um diese Operationen leichter zu machen, müßte man die Zahl m unter den Zahlen der geometrischen Progression 2, 4, 8, 16, 32 ... wählen; durch dieses Mittel würde man bloß Quadratwurzeln auszuziehen haben; denn

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}, \sqrt{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[8]{a}, \sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[16]{a}, \ldots$$

Es sey also $m = 2^n$; so wird man durch n Quadratwurzel-Ausziehungen, $\sqrt[2^n]{a}$ enthalten. Es ist zu bemerken, daß man es immer so machen kann, damit es hinreiche, das erste Glied der vorgesetzten Reihe zu berechnen um den hinlänglich nahen Werth des Logarithmen von a zu erhalten. Wenn man sich nemlich der Decimalen bedient, und den Exponenten beträchtlich genung nimmt, daß zwischen der Einheit und der ersten bedeutenden Ziffer der ausgezogenen Wurzel, sich wenigstens so viel Nullen befinden, als man in dem Endresultat Decimalziffern haben will, so ist leicht zu sehen, daß das Quadrat, welches eine doppelt so große Anzahl Decimalen als seine Wurzel enthält, außer den sich vorgeschriebenen Grenzen fallen wird.

Es sey zum Beyspiel a = 10: Briggs hat, nachdem er 54mal hinter einander die Quadratwurzel aus dieser Zahl zog, zum Resultat gefunden,

1, 00000 00000 00000 12781 91493 20032 35:

wenn man die Einheit wegläßt, so wird ein Bruch herauskommen, wo die erste bedeutende Ziffer seines Quadrates, 31 Nullen vor sich hat, und folglich keinen Einfluß auf die Decimalen der dreißigsten Ordnung haben kann; man könnte also dieses Quadrat außer Acht lassen, und mit noch mehrerem Rechte die höhern Potenzen.

24.

Damit la bestimmt sey, muß man für le eine Hypothese machen; die einfachste ist ohne Zweifel, le = 1 zu nehmen, in welchem Falle man auf eine besondere Art Logarithmen verfällt, die genau jene sind, welche Neper in Betrachtung gezogen hat; man hat sie seitdem hyperbolische Logarithmen genannt, weil man sie von der Quadratur der Räume, die zwischen der gleichseitigen Hyperbel und ihren Asymptoten enthalten sind, ableiten kann; aber diese Benennung ist fehlerhaft, denn man kann ebenfalls aus der Quadratur der Hyperbel überhaupt, alle Systeme der Logarithmen ziehen. Es würde daher angemessener seyn, dem ersten den Nahmen ihres Erfinders beyzulegen, und so das Gedächtniß desjenigen zu verehren, welcher der Mathematik einen so großen Dienst geleistet hat: man könnte sie Logarithmen von Neper oder Neperische Logarithmen heißen *).

Briggs änderte das von Neper angenommene System der Logarithmen und um sich nach jenen von der Numeration zu richten, hat er zur Basis die Zahl 10 festgesetzt; er hatte alsdann l′10 = 1. Wenn man sich aber auf das erste Glied der Reihe beschränkt, wird man finden:

le =

*) Strenge genommen, sind wohl die Hyperbolischen Logarithmen mit dem Neperschen nicht ganz vollkommen einerley, denn Neper setzte den Logarithmus von 10000000 gleich 0 und den Logarithmus von 9999999 gleich 1. Uebrigens lassen sich die Neperschen Logarithmen aus den Hyperbolischen unmittelbar durch ein bloßes Abziehen zweyer Zahlen von einander herleiten. Briggs wählte auf Nepers Anrathen ein anderes System.

$$le = \frac{la}{m\left(\sqrt[m]{a} - 1\right)};$$

setzt man an die Stelle von a die Zahl 10 so kömmt heraus

$$le = \frac{1}{m\left(\sqrt[m]{10} - 1\right)}.$$

Man hat im Vorhergehenden gesehen, daß Briggs vier und funfzigmal hintereinander die Quadratwurzel aus der Zahl 10 gezogen hat, folglich hätte er $m = 2^n = 2^{54}$, und um den Quotienten $\frac{1}{2^{54}}$ zu finden, dividirte er die Einheit vierundfunfzigmal hinter einander durch 2, welches ihm

0, 00000 00000 00000 05551 11512 31275 827

gab.

Wenn man diesen Werth an die Stelle von $\frac{1}{m}$ setzt, so wie jenen von $\sqrt[m]{a}$, den wir weiter oben beygebracht haben, so wird man, wenn in dem Zähler und Nenner funfzehn Nullen weggelassen werden, haben:

$$le = \frac{0{,}5551\ 11512\ 31257\ 827}{1{,}2781\ 91493\ 20032\ 35} = 0{,}43\overset{42}{24}\ 94481\ 90325\ 18.$$

Dies ist diejenige Zahl durch welche man die in der Hypothese von $le = 1$ berechneten Logarithmen multipliciren muß, um jene von Briggs oder der gemeinen Tafeln zu haben.

Wenn man im Gegentheile von diesem zu jenem von Neper übergehn wollte, so müßte man sie durch die Zahl die wir so eben gefunden haben, dividiren, oder welches auf eins herauskömmt, durch

I.

$$\frac{1}{\mathrm{l}e} = 2,\ 30258\ 50929\ 94045.$$

multipliciren. Es ist gut zu bemerken, daß dieses letzte Resultat nichts anders ist, als der Logarithmus von 10 in dem System vou Neper; denn wenn man $\mathrm{l}e = 1$ macht, findet man $\mathrm{l}'10 = m(\sqrt[m]{10} - 1)$, welches genau das umgekehrte von dem Werthe ist, den man vorhin für e gefunden hat.

In welchem System es immer sey, ist das e durch den Nahmen des **Moduls** bezeichnet; wir werden es überhaupt durch M vorstellen, und weil man in dem System von Neper $M = 1$ hat, werden wir daraus schließen, $\mathrm{l}a = M\mathrm{l}'a$ oder $M = \frac{\mathrm{l}a}{\mathrm{l}'a}$. Hieraus folgt, daß um den Modul eines beliebigen logarithmischen Systems zu finden, man das Verhältniß berechnen muß, welches die Logarithmen der nemlichen Zahl unter sich haben, wovon der eine in diesem System, und der andere in jenem von Neper berechnet ist.

Um den Logarithmen von 2 zu berechnen suchte Briggs jenen von 1,024, eine Zahl die der zehnten Potenz von 2, dividirt durch 1000 gleich ist, weil die Wurzelausziehung der einen Zahl ihm leichter schien, als jene der andern. Nachdem er die Quadrat~~zahl~~wurzel von 1,024, 47mal ausgezogen hatte, verfuhr er mit dem Resultate eben so wie mit jenem, das er von der Zahl 10 abgeleitet hatte, und gelangte so zu den Neperischen Logarithmen von 1,024, den er hernach mit dem Modul multiplicirte, und woraus er leicht den Logarithmen von 2 zog, indem er beobachtete, daß

1,024

$$1{,}024 = \frac{2^{10}}{1000}.$$

Wir werden die Darlegung des Calculs von Briggs wovon wir nur eine leichte Idee zu geben willens waren, nicht mehr weiter verfolgen.

25.

Wenn man in der Reihe, welche den Werth von a^x (Nr. 22) ausdrückt, an die Stelle von $l'a$ seinen Werth $\frac{la}{M}$ setzt, so wird sie

$$a^x = 1 + \left(\frac{la}{M}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{la}{M}\right)^2\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{la}{M}\right)^3\frac{x^3}{1.2.3} + \left(\frac{la}{M}\right)^4\frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

ein Resultat, welches sich auf ein beliebiges System von Logarithmen erstreckt.

Wenn man $x = 1$ macht, so findet man

$$a = 1 + \left(\frac{la}{M}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{la}{M}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{la}{M}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{la}{M}\right)^4 + \ldots$$

Diese Reihe giebt die Zahl a, wenn man ihren Logarithmen und den Modul des Systems kennt, zu welchem er gehört.

Sie bietet noch eine merkwürdige Eigenschaft dar, die wir sogleich zu erkennen geben werden, weil sie uns in der Folge dieses Werks Dienste leisten wird. Weil man $a^{nx} = (a^x)^n$ hat, muß man, indem man zur Abkürzung $\frac{la}{M} = A$ macht, auch haben

$$1 + \frac{Anx}{1} + \frac{A^2n^2x^2}{1.2} + \frac{A^3n^3x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$= \left\{ 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \ldots \right\}^n$$

und da diese Gleichung von jedem besondern Werthe von x unabhängig seyn muß, so ist es augenscheinlich, daß wenn man in der ersten Hälfte ein beliebiges Glied

$$\frac{A^m n^m x^m}{1.2.3\ldots m}$$

nimmt, es mit jenem, welches zur nemlichen Potenz von x in der Entwicklung des zweyten Theils gehört, identisch seyn müsse.

Es folgt hieraus, daß

$$\frac{A^m n^m}{1.2.3\ldots m}$$

der Werth des Coefficienten von x^m in der Entwicklung von

$$\left\{ 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \ldots \right\}^n \text{ ist.}$$

26.

Es sey $a = 1 + u$, so werden wir überhaupt haben:

$$l(1 + u) = M \left\{ u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots \right\}$$

dies ist die Entwicklung der logarithmischen Function. Diese Reihe, wie wir schon bemerkt haben, könnte nicht convergent seyn, wenn $u > 1$, und nach dem was in (Nr. 6) gesagt wurde, kann sie in diesem Falle den wahren Werth der Function nicht geben. Für $u = 1$, ist ihr Gang so langsam, daß man eine große Anzahl Glieder berechnen müßte, um zu einem etwas genauen Resultat zu kommen; denn

$$l(1+1) = l2 = M(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots)$$

und wenn man $M = 1$ macht, kömmt heraus

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Hier folgen einige analytische Kunstgriffe, durch welche man der vorgegebenen Reihe mehr Convergenz geben kann, und die zur Berechnung der Logarithmen viel expeditivere Mittel darbieten, als dasjenige welches wir im vorhergehenden Artikel vor Augen gelegt haben.

Weil man

$$l(1+u) = M\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots\right)$$

hat, so wird man, wenn $-u$ an die Stelle von u gesetzt wird, finden

$$l(1-u) = M\left(-u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \ldots\right)$$

woraus man zieht

$$l(1+u) - l(1-u) = l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2M\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right)$$

eine Reihe, deren Gang schneller als jener der ersten ist.

Es sey

$$\frac{1+u}{1-u} = z$$

gemacht, so wird man haben

$$u = \frac{z-1}{z+1} \text{ und } lz = 2M\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\}$$

wenn man um ein Beyspiel zu geben, $z = 2$ setzt, so kömmt heraus

$$l2 = 2M\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \ldots\right)$$

eine Reihe die viel convergenter ist, als jene die wir zuerst erhalten haben.

Wenn man jeden der Brüche aus denen sie besteht, in Decimalen berechnet, wird man, wenn man sich auf sieben Decimalziffern einschränkt, finden $l\,2 = 0{,}6931472 . M$; und für den Fall, wo $M = 1$, wird herauskommen $l'2 = 0{,}6931472$. Wir haben aber oben gesehen, daß man den Modul eines beliebigen Systems bestimmen könne, indem man das Verhältniß sucht, welches die Logarithmen einer Zahl, der eine in diesem System, der andere in jenem von Neper, unter sich habe. Nun ist der Logarithmus von 10, in dem Tafelsystem 1; wenn man also dahin gelangte den Logarithmen dieser Zahl in dem System von Neper zu kennen, so würde man den Modul haben. Zu diesem Ende machen wir $z = 10$ und $M = 1$, so wird herauskommen

$$l'10 = 2\left\{\frac{9}{11} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \ldots\right\}$$

eine Reihe die zwar convergent ist, jedoch viel weniger als die Vorhergehende.

Wir werden einen noch schnellern Gang anzeigen, um zu dem Logarithmen von 10 zu kommen, wenn wir einige Bemerkungen über die Reihe

$$lz = 2M\left\{\left[\frac{z-1}{z+1}\right] + \tfrac{1}{3}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^2 + \tfrac{1}{5}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^5 \ldots\right\}$$

werden gemacht haben.

Ihre Convergenz vermindert sich, so wie z zunimmt, und man sieht überhaupt, daß die Grenze der Abnahme der Glieder dieser Reihe sich in der folgenden findet

$$2M[1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} \ldots]$$

deren ganzer Werth unendlich ist. Dieses alles ist leicht wahrzunehmen, wenn man beobachtet, daß je größer z ist,

ist, desto mehr wird sich der Bruch $\frac{z-1}{z+1}$ der Einheit nähern, und daß folglich die Grenze dieses Bruches die Einheit selbst ist. Diese Grenze stimmt mit dem unbegrenzten Wachsthum von z überein, in welchem Falle der Logarithme, welcher mit der Zahl zu der er gehört, zugleich sich vermehret, selbst unendlich wird.

27.

Die Reihe $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$ ist nicht die einzige abnehmende, wovon die Summe gar keine Grenze hat; die folgende

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

ist auch in dem nemlichen Falle. Hier ist ihr Ursprung.

In dem Ausdrucke

$$l(1-u) = -M\left(u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} \ldots\right),$$

sey u = 1 gemacht, so wird man

$$l(1-1) = l0 = -M[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots],$$

haben, und wenn man $M = 1$ nimmt, oder wenn man zu dem durch l' angezeigten logarithmischen System übergeht, so wird man

$$l'0 = -[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots]$$

finden. Jetzt muß man wissen, was $l'0$ sey.

Um es zu finden, werden wir beobachten, daß wenn man $1 - u = \frac{1}{z}$ setzt, man davon ableiten wird

$$u = 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-1}{z},$$

$$l\left(\frac{1}{z}\right) = -M\left\{\frac{z-1}{z} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{z-1}{z}\right]^2 + \tfrac{1}{3}\left[\frac{z-1}{z}\right]^3 + \tfrac{1}{4}\left[\frac{z-1}{1}\right]^4 + \ldots\right\}$$

Aber von einer andern Seite ist

$$l\left(\frac{1}{z}\right) = l1 - lz = 0 - lz;$$

nun ist dieser Ausdruck fähig im negativen Sinne ohne Ende zu wachsen; denn je beträchtlicher man z nimmt desto mehr wird es auch lz; aber auch je kleiner der Bruch $\frac{1}{z}$ seyn wird, und je näher er dem Verschwinden ist desto mehr wird $\frac{z-1}{z}$ mit der Einheit zusammenfallen. Wenn man nun die entsprechenden Grenzen nimmt, so sieht man daß jene von $\frac{1}{z}$ -lo und jene von $\frac{z-1}{z}$ die Einheit ist; und folglich wird die Reihe

$$-M[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots]$$

aber $l\frac{1}{z}$ hat gar keine Grenze, daher hat auch die Reihe welcher ihn ausdrückt keine Grenze. Dieß ist der Sinn in welchem man den angenommenen Ausdruck vrrstehn muß, daß der Logarithme von Null, das negative Unendliche sey. Man kann noch durch Betrachtung der Gleichung $a^x = y$ zu dem nemlichen Resultate gelangen; denn indem man die Logarithmen nimmt, erhält man $x\,la = ly$, folglich $x = \frac{ly}{la}$ und $a^{\frac{ly}{la}} = y$.

So lange aber y positiv bleibt, so klein es auch sey, wird y größer als die Einheit seyn. Damit y ein Bruch werde, muß man

$$a^{\frac{-ly}{la}} = y \text{ oder } a^{\frac{1}{\frac{ly}{la}}} = y \text{ haben.}$$

Wenn

Wenn man nun die Grenzen der beyden Hälften dieser Gleichung sucht, so sieht man leicht, daß je kleiner die zweyte Hälfte wird, um so größer muß der Nenner der ersten werden, damit die Gleichheit bestehe, woraus folgt, daß y da es sich Null nähert, ly sich dem Unendlichen nähern muß.

Ich gebrauche den Ausdruck nähern (tendre) weil der Strenge nach die Tafeln der Logarithmen eigentlich in der Columne der Zahlen keine Null enthalten sollten; denn diese Columne enthält nur die aus einer geometrischen Progression gezogene Glieder, unter denen man keines finden kann, welches Null wäre, so weit man auch die Progression auf die Seite der Abnahme treibt.

Eine unmittelbare Folge die sich darbietet ist, daß jede Reihe deren Glieder schneller abnehmen, als jene von

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \dots$$

nothwendigerweise eine endliche Grenze haben wird, denn da $l\left(\frac{1}{z}\right)$, so lange z nicht unendlich wird, eine endliche Größe ist, so muß man daraus schließen, daß die Reihe der Brüche

$$\frac{z-1}{z} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{z-1}{z}\right]^2 + \tfrac{1}{3}\left[\frac{z-1}{z}\right]^3 + \tfrac{1}{4}\left[\frac{z-1}{z}\right]^4 + \dots$$

einer Grenze fähig sey, so annähernd übrigens der Bruch $\frac{z-1}{z}$ der Einheit sey.

~~16.~~ 28

Um zu unserm Gegenstande zurückzukehren, welcher war, die Logarithmen der Zahlen, durch um so convergentere Reihen, je größer diese Zahlen sind, zu erhalten, werden wir $\frac{1+u}{1-u} = 1 + \frac{z}{n}$ machen, welches

$$u = \frac{z}{2n+z}$$

geben wird, und folglich

$$l\left[1+\frac{z}{n}\right] = 2M\left\{\frac{z}{2n+z} + \tfrac{1}{3}\left[\frac{z}{2n+z}\right]^3 + \tfrac{1}{5}\left[\frac{z}{2n+z}\right]^5 + \ldots\right\}.$$

wenn man aber $1 + \frac{z}{n}$ auf einerley Nenner reducirt, wird man leicht sehen, daß

$$l\left(\frac{n+z}{n}\right) = l(n+z) - ln \ldots$$

also:

$$l(n+z) = ln + 2M\left\{\frac{z}{2n+z} + \tfrac{1}{3}\left[\frac{z}{2n+z}\right]^3 + \tfrac{1}{5}\left[\frac{z}{2n+z}\right]^5 + \ldots\right\}.$$

Es sey $z = 1$, so kömmt heraus

$$l(n+1) = ln + 2M\left\{\frac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \tfrac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^5} + \ldots\right\}.$$

eine um so convergentere Reihe je größer n seyn wird und welche mit vieler Leichtigkeit die Logarithmen der auf einander folgenden Zahlen giebt. Man kann sie vortheilhaft anwenden, um den Logarithmen einer Zahl zu finden, welche außerhalb den Grenzen der Tafeln fällt. Wir wollen wirklich einmal voraussetzen, daß diese Tafeln die Zahlen über 10000 nicht in sich begriffen, und man verlange den Logarithmen von 125283, so müßte man die

Zahl

Zahl in zwey Theile zerlegen, wovon der erste sich in den Tafeln befindet. Dieses wird nun auf folgende Weise statt finden: $125200 + 83$; denn wenn man den Logarithmen 1252 hat, so wird man jenen von 125200 davon ableiten, indem man zu der Kennziffer (Charakteristik) zwey Einheiten hinzusetzet; man wird also $n = 125200$ und $z = 83$ machen; dieses sind Werthe, welche die Reihe sehr convergent machen.

Man kann diese Reihe zu der Aufsuchung des Moduls anwenden, wenn man in dem Neperschen System den Logarithmen von 5 berechnet, und den von 4 als bekannt vorausgesetzt. Man wird alsdann haben

$$l'(4 + 1) = l'4 + 2\left\{\frac{1}{9} + \frac{1}{3(9)^3} + \frac{1}{5(9)^5} + \ldots\right\}$$

was den Logarithmen von 4 anbetrift, so ist er das doppelte von jenem von 2, welcher in dem vorhergehenden Paragraphen bestimmt ist; und es ist gut, zu bemerken, daß die jetzige Reihe für diesen Fall in jene des gemeldten Paragraphen zurückfällt, denn wegen $l'1 = 0$ giebt sie

$$l'(1 + 1) = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3(3)^3} + \frac{1}{5(3)^5} + \ldots\right\}$$

Nachdem man $l'5$ gefunden hat, wird man $l'2$ hinzusetzen, und durch dieses Mittel $l'10$ haben, woraus man $M = \frac{1}{l'10}$ zieht.

Es würde ein leichtes seyn, die vorgegebene Reihe noch auf verschiedene mehr oder weniger vortheilhafte Arten in Bezug auf gewisse Umstände, umzuformen, wir werden uns aber dabey nicht verweilen.

29.

In den verschiedenen Resultaten, die wir dargestellt haben, hat sich nicht eins gefunden, welches nach den Potenzen der Zahlen fortgeht, wir haben also keinen Ausdruck dieser Art,

$$lu = A + Bu + Cu^2 + Du^3 + \ldots$$

Dieses könnte auch in der That nicht statt haben, denn wenn $u = 0$ ist, so wird lu unendlich und negativ, aber zu solchen Resultaten kann die Reihe die wir so eben beschrieben haben, nie gelangen. Wir könnten eben so wenig haben

$$lu = A + \frac{B}{u} + \frac{C}{u^2} + \frac{D}{u^3} + \ldots,$$

weil, wenn u unendlich ist, diese Reihe endlich seyn würde. Jedoch ist es möglich eine Entwicklung zu finden, welche diesen beyden Bedingungen Genüge leistet; sie kann in Wahrheit den Werth von lu in keinem Falle auf eine bequeme Art ausdrücken, da sie aber durch ihre Form merkwürdig ist, und uns zu interessanten Analogien zwischen den logarithmischen und Kreisfunctionen (fonctions circulaires) führen wird, so werden wir sie nicht mit Stillschweigen übergehn. Man hat

$$l(1+u) = M\left\{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \ldots\right\}$$

$$l\left(1+\frac{1}{u}\right) = M\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} + \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{4u^4} + \frac{1}{5u^5} - \ldots\right\}.$$

Wenn man die zweyte Reihe von der ersten abzieht, so wird man wegen

$$l\left(1+\frac{1}{u}\right) = l(1+u) - lu.$$

finden:

l(1+u)

$$l(1+u)-l(1+\frac{1}{u})=lu=M\left\{u-\frac{1}{u}-\tfrac{1}{2}(u^2-\frac{1}{u^2})\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{3}(u^3-\frac{1}{u^3}+\ldots\right\},$$

oder $lu=M[u-u^{-1}-\tfrac{1}{2}(u^2-u^{-2})+\tfrac{1}{3}(u^3-u^{-3})+\ldots]$

30.

Obgleich die Art durch welche wir zur Entwicklung von $l'a$ (Nr. 23) gelangt sind, sehr strenge ist, und keinen Wunsch mehr übrig zu lassen scheint, so wird man vielleicht doch mit Vergnügen sehen, wie die Umformung die uns bisher zur Entwicklung der Functionen geführt hat, sich auf die logarithmische Function anwenden läßt.

Nach dem was im vorhergehenden Artikel gesagt wurde, müssen wir bey Entwicklung des Logarithmen eine Form voraussetzen, welche sich auf Null reducirt, wenn die Zahl zu der er gehört der Einheit gleich wird. Nun leistet jede rationale und ganze Funktion von $z-1$ dieser Bedingung Genüge; man wird also setzen können:

$$lz=A_1(z-1)+A_2(z-1)^2+A_3(z-1)^3+\ldots$$

Um die Reihe zu vereinfachen werden wir $z-1=x$ machen, woraus $z=1+x$, und folglich

$$l(1+x)=A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

folgt.

Wenn wir, wie gewöhnlich voraussetzen, daß x sich in $x+u$ verändert, so kömmt heraus

$$l(1+x+u)=A_1(x+u)+A_2(x+u)^2+A^3(x+u)^3+\ldots$$

wenn man aber $1+x=p$ macht, so wird $l(1+x+u)$ zu $l(p+u)$ und wegen

$$p+u=p(1+\frac{u}{p});$$

hat man

$l(1+x+u)$

$$l(1 + x + u) = l(1 + \frac{u}{p}) + lp$$

aber durch die Hypothese

$$l(1 + \frac{u}{p}) = A_1 \frac{u}{p} + A_2 \frac{u^2}{p^2} + A_3 \frac{u^3}{p^3} + \ldots$$

also

$$l(1 + x + u) = lp + A_1 \frac{u}{p} + A_2 \frac{u^2}{p^2} + A_3 \frac{u^3}{p^3}.$$

Wenn man die zwey Werthe von $l(1 + x + u)$ welche, was auch u immer sey, identisch seyn müssen, vergleichet, so wird man, indem man sich auf beyden Seiten auf die Glieder einschränkt, welche die erste Potenz dieser Größe multipliciren, finden:

$$A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots = \frac{A_1}{p};$$

wenn man an die Stelle von p seinen Werth $(1 + x)$ setzt, so wird herauskommen

$$(A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots) \cdot (1 + x) = A_1$$

Wenn man die angezeigte Multiplication verrichtet, und die Coefficienten von jeder Potenz von x besonders bestimmt, so wird man haben

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ 2A_2 + A_1 = 0 \\ 3A_3 + 2A_2 = 0 \\ 4A_4 + 3A_3 = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{woraus man ziehet} \left\{\begin{array}{l} A_1 = A_1 \\ A_2 = -\frac{A_1}{2} \\ A_3 = \frac{A_1}{3} \\ A_4 = -\frac{A_1}{4} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Resultate, welche mit jenen, die man bereits gefunden hat übereinstimmend sind, und bey welchen man bemerken muß, daß der erste Coeffizient A_1 unbestimmt bleibt, weil er die Stelle des Moduls vertritt.

Es ist noch übrig zu beweisen, daß alle Gleichungen, die man aus der Vergleichung der zu u^e und den höhern Potenzen gehörigen Glieder ziehen würde, identisch sind. Hiezu werde ich die Gleichung

$$l(1+x+u)=A_1(x+u)+A_2(x+u)^2\ldots+A_n(x+u)^n$$
$$+A_{n+1}(x+u)^{n+1}+\ldots$$

wieder vornehmen.

Es ist leicht zu sehen, daß daß der Coefficient von u^n in der Entwicklung des zweyten Theiles dieser Gleichung seyn wird

$$A_n+(n+1)A_{n+1}x+\frac{(n+2)(n+1)}{2}A_{n+2}x^2$$
$$+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{2\,.\,3}A_{n+3}x^3+\ldots,$$

aber nach dem vorhin gefundenen Gesetz hat man

$$\left.\begin{array}{r} nA_n+(n+1)A_{n+1}=0 \\ (n+1)A_{n+1}+(n+2)A_{n+2}=0 \end{array}\right\},$$

$$\text{woraus folgt}\left\{\begin{array}{l} A_{n+1}=-\dfrac{nA_n}{n+1} \\ A_{n+2}=\dfrac{nA_n}{n+2} \\ A_{n+3}=-\dfrac{nA_n}{n+3} \end{array}\right.$$

etc.

wenn man diese Werthe substituirt, kommt heraus

$$A_n\left\{1-nx+\frac{n(n+1)}{2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{2\,.\,3}x^5+\ldots\right\}$$

eine Reihe die nichts anders ist, als die Entwicklung von $A_n(1+x)^{-n}$.

Aber der Coefficient von u^n in der Gleichung

$$l(1+\frac{u}{p})=lp+A_1\frac{u}{p}+A_2\frac{u^6}{p^2}+\ldots+A_n\frac{u^n}{p^n}+\ldots$$

ist

ist $\frac{A_n}{p^n} = \frac{A_0}{(1+x)^n} = A_n(1+x)^{-n}$,
ein mit dem Vorhergehenden identisches Resultat.

31.

Wir können nun, wie wir (Nr. 16) ausgesagt haben, beweisen, daß wenn selbst der Exponent irrational oder eingebildet wäre, die ersten zwey Glieder von $(1+x)^n$ nicht destoweniger $1+nx$ seyn würden.

In der That, wir wollen voraussetzen, daß $(1+x)^n$ in der Reihe $1+Ax+Bx^2\ldots$ entwickelt sey, und indem wir zur Abkürzung $Ax+Bx^2+\ldots=px$ machen, werden wir haben

$$l(1+x)^n = l(1+px);$$

aber

$$l(1+x)^n = nl(1+x):$$

man wird also haben:

$$l(1+px) = nl(1+x)$$

oder wenn man entwickelt

$$px - \frac{p^2x^2}{2} + \frac{p^3x^3}{3} - \ldots = nx - \frac{nx^2}{2} + \frac{nx^3}{3} - \ldots$$

und da diese Gleichung unabhängig von x statt finden muß, wird man, wenn man für p seinen Werth setzet, und sich auf die zur ersten Potenz von x gehörigen Glieder einschränkt, $A=n$ haben.

Es ist leicht zu sehen, daß dieser Beweis von der Natur der Zahl n ganz unabhängig ist, und keinen fehlerhaften Zirkel enthalte, wenn man sich erinnert, daß wir in der Untersuchung von $l(1+x)$ nur ganze Potenzen des Binomiums angetroffen haben.

32.

Es wird nicht unnütz seyn, zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit die Betrachtung der Grenzen zum Reihenausdruck der Logarithmen führe; dieses wollen wir nun vornehmen.

Die einfachste Art die Logarithmen zu fassen ist, sich zwey entsprechende Progressionen vorzustellen, eine geometrische, welche mit der Einheit, und eine arithmetische, welche mit Null anfängt. Aber, um so viel möglich alle Zahlen in der ersten mit zu begreifen, muß man es so einrichten, daß jedes ihrer Glieder von dem Vorgehenden und Nachfolgenden nur um eine beliebige kleine Zahl unterschieden seyn könne. Dieses wird man in jeder beliebigen geometrischen Progression erlangen, wenn man eine sehr große Anzahl mittlere Proportionalzahlen zwischen die Glieder aus denen sie besteht, einschaltet. Wenn man nun eine gleiche Anzahl mittlere Proportionalzahlen zwischen jene der arithmetischen Progression einschaltet, so wird jede dieser mittlern Proportionalzahlen der Logarithme seiner entsprechenden in der geometrischen Progression seyn. Aber es ist leicht zu sehen, daß in einer geometrischen Progression, deren Glieder sich sehr der Gleichheit nähern, das Verhältniß durch $1 + k$ ausgedrückt werden kann, wo k eine sehr kleine Größe ist.

Da die Wahl der beyden Progressionen willkührlich ist, so sind die Verhältnißnahmen sowohl in der einen als in der andern, zwey unabhängige Größen, welche aber die nemlichen bleiben, so lange man die nemlichen Progressionen betrachtet, und daher auch unter sich ein beständiges Verhältniß haben.

Es

Es sey also d der Verhältnißnahme oder die Differenz der arithmetischen Progression; weil diese Größe einen desto kleinern Werth hat, je größer die eingeschaltete Anzahl von mittlern Proportionalzahlen ist, so wird es bequemer seyn, sie mit einer andern zu vergleichen, welche eben so wie sie, so klein werden kann, als man will. Man wird also statt den Verhältnißnahmen oder Exponenten der geometrischen Progression ihren Ueberschuß über die Einheit anwenden, und voraussetzen $\frac{d}{k} = M$, wo M eine beständige Zahl ist.

Dieses festgesetzt, so sey a ein beliebiges Glied der geometrischen Progression, A sein entsprechendes in der arithmetischen, und n die Zahl der Glieder die einem und dem andern vorhergehen; so wird man wegen der Natur der ersten Progression haben $a = (1 + k)^n$, und aus eben dem Grunde in der zweyten $A = dn = Mkn$.

Mit Hülfe dieser Gleichungen wird man eine der beyden Größen A und a finden, wenn die andere bekannt ist. Die erste giebt $k = a^{\frac{1}{n}} - 1$, und die zweyte

$$k = \frac{A}{Mn}$$

man wird also haben

$$A = Mn(a^{\frac{1}{n}} - 1);$$

wenn man aber $a = 1 + u$ macht, so wird man $(1 + u)^{\frac{1}{n}}$ mittelst des Binomiums entwickeln können, und es wird sich daraus ergeben: $(1 + u)^{\frac{1}{n}} - 1 =$

=

$$=\frac{1}{n}\left\{u+\frac{(\frac{1}{n}-1)}{2}u^2+\frac{(\frac{1}{n}-1)(\frac{1}{n}-2)}{2\cdot 3}u^3\right.$$

$$\left.+\frac{(\frac{1}{n}-1)(\frac{1}{n}-2)(\frac{1}{n}-3)}{2\cdot 3\cdot 4}u^4+\ldots\right\},$$

woraus

$$A=M\left\{u-\frac{(1-\frac{1}{n})}{2}u^2+\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{2\cdot 3}u^3\right.$$

$$\left.-\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})(3-\frac{1}{n})}{2\cdot 3\cdot 4}u^4+\ldots\right\}$$

nun hat der zweyte Theil dieser Gleichung zur Grenze die Reihe

$$M(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\ldots.)$$

der er sich um so mehr nähert je kleiner der Bruch $\frac{1}{n}$ oder je größer die Zahl n ist.

Aber in dieser Hypothese nähern sich die vorgegebenen Progressionen indem sie in einer gegebenen Intervalle mehr Glieder erhalten, um so mehr alle Zahlen und ihre Logarithmen in sich zu fassen; man sieht also, daß man sie an der Grenze als ein System der Logarithmen betrachten kann, und folglich kann man $l(1+u)$ statt A schreiben, welches giebt:

$$l(1+u)=M(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\ldots)$$

ein Resultat, das jenem gleichlautend ist, welches wir durch einen sehr verschiedenen Weg gefunden haben.

Man wird also wie hier folgt die umgekehrte Aufgabe auflösen, in welcher der Logarithme gegeben, und die Zahl zu der er gehört, unbekannt ist. Die Gleichung $A = Mkn$ giebt $k = \frac{A}{Mn}$, und wenn man in

$$a = (1 + k)^n$$

substituirt, so wird herauskommen

$$a = \left[1 + \frac{A}{Mn}\right]^n.$$

Wenn man die angezeigte Potenz entwickelt findet man

$$a = 1 + \frac{n.A}{Mn} + \frac{n.(n-1)A^2}{2\,M^2 n^2} + \frac{n(n-1)\;(n-2)\,A^3}{2\;.\;3\;M^3 n^3} + \ldots;$$

wenn man die Grenze in Beziehung auf den Zuwachs von n nimmt, das heißt, in der Voraussetzung, daß die Produkte $n(n-1)\;(n-2)\ldots$ sich jedes auf ihr erstes Glied n^2, $n^3\ldots$ reduciren, so wird man haben

$$a = 1 + \frac{A}{M} + \frac{A^2}{1.2.M^2} + \frac{A^3}{1.2.3.M^3} + \frac{A^4}{1.2.3.4.M^4} + \ldots$$

Man hat aber durch das Vorhergehende

$$A = l(1 + u) = la;$$

wenn man diesen Werth substituirt, wird man zum Resultate die Reihe in Nr. 25 finden. Es sey $M = 1$ so wird la sich in $l'a$ verwandeln, und wenn man die Zahl deren Neperischer Logarithme 1 ist mit e bezeichnet, wegen $A = l'a$ so wird herauskommen $Al'e = l'a$, oder $l'(e^A) = l'a$, und wenn man zu den Zahlen übergeht $e^A = a$, woraus folgt

$$e^A = 1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

wie in Nr. 22.

Es wird gut seyn zu bemerken, auf welche Art wir von der Gleichung $A = l'a$ zu der Gleichung $e^A = a$ gelangte langet sind, weil diese Umformung von einem häufigen Gebrauch ist.

33.

Entwicklung der transcendenten Functionen.

Kreisfunctionen.

Die Trigonometrie hat eine Gattung Functionen kennen gelehrt, welche nicht weniger nützlich sind als jene, mit denen wir uns so eben beschäftigt haben; dies sind die Sinus und Cosinus der Kreisbogen. Ich werde jetzt zeigen, daß man sie nicht nur in Reihen entwickeln, sondern auch ihre merkwürdigsten Eigenschaften finden kann, indem man von den in den meisten Elementarbüchern gegebenen Formeln ausgeht, um die Sinus und Cosinus der Summe und der Differenz von zwey Bogen zu berechnen.

Ich fange mit der Untersuchung bey $\cos. x$ an, und setze voraus, daß sich x in $x + u$ und in $x - u$ verändert; die gemeldten Formeln geben in diesen beyden Fällen

$$\cos(x + u) = \cos. x . \cos. u - \sin. x . \sin. u \text{ *)}$$

$$\cos(x - u) = \cos. x . \cos. u + \sin. x . \sin. u.$$

wenn man diese Gleichungeu addirt, so wird man haben

$$\cos. (x + u) + \cos. (x - u) = 2 \cos. x . \cos. u.$$

Es sey nun

$$\cos. x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$$

F 2 so

*) In allem was jetzt folgt nehme ich den Halbmesser gleich 1 an; wollte man ihm einen andern Werth geben, so wäre es hinlänglich den Buchstaben der ihm vorstelle soll, einzuführen, dergestalt, daß die nach der ersten Annahme gefundenen Formeln dadurch gleichartig werden.

so wird man haben

$$\begin{cases} \cos. u = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 \\ \qquad + A_4 u^4 + \ldots \\ \cos.(x+u) = A_0 + A_1(x+u) + A_2(x+u)^2 + A_3(x+u)^3 \\ \qquad + A_4(x+u)^4 + \ldots \\ \cos.(x-u) = A_0 + A_1(x-u) + A_2(x-u)^2 + A_3(x-u)^3 \\ \qquad + A_4(x-u)^4 + \ldots \end{cases}$$

Wenn man diese Reihen in der Gleichung

$$\cos.(x+u) + \cos.(x-u) = 2\cos. x \cos. u$$

substituirt, so werden alle zu den ungeraden Potenzen von u gehörigen Glieder in der Entwicklung des ersten Theiles verschwinden; es ist also unnütz sie in den zweyten hineinzusetzen, und daher kann man ohne die Allgemeinheit der Voraussetzungen zu vermindern, A_1, A_3, A_5, gleich Null machen, welches den Ausdruck von cos. x reduciren wird, daß er keine andere, als gerade Potenzen von x enthält. Hieraus folgt, daß cos. x sich nicht verändert, wenn man $-x$ statt x schreibt; dieses ist a priori leicht zu sehen, 1. durch die Gleichungen von denen wir ausgiengen, in welchem cos. u dasselbe bleibt, obgleich der Bogen u in der ersten positiv und in der zweyten negativ ist; 2. wenn man bedenket, daß der Cosinus eines Bogens sich nicht verändert, man mag diesen Bogen oberhalb oder unterhalb dem Durchmesser nehmen.

Wir werden also haben

$$\begin{cases} \cos. x = A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + A_6 x^6 + \ldots \\ \cos. u = A_0 + A_2 u^2 + A_4 u^4 + A_6 u^6 + \ldots \\ \cos.(x+u) = A_0 + A_2(x+u)^2 + A_4(x+u)^4 + A_6(x+u)^6 + \ldots \\ \cos.(x-u) = A_0 + A_2(x-u)^2 + A_4(x-u)^4 + A_6(x-u)^6 + \ldots \end{cases}$$

und die Gleichung

$$\cos.(x+u) + \cos.(x-u) = 2\cos. x . \cos. u$$

wird, indem man ihre beyden Hälften durch 2 dividirt,

geben:

$$\left.\begin{array}{l} A_0+A_2x^2+A_4x^4+A_6x^6+\dots+A_nx^n+\dots \\ \quad +A_2u^2+6A_4u^2x^2+15A_6u^2x^4+\dots+\frac{n(n-1)}{2}A_nu^2x^{n-2}+ \\ \qquad +A_4u^4+15A_6u^4x^2+\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad +A_6u^6+\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} A_0^2+A_0A_2x^2+A_0A_4x^4+A_0A_6x^6+\dots+A_0A_nx^n \\ \quad +A_2A_0u^2+A_2A_2u^2x^2+A_2A_4u^2x^4+\dots+A_2A_{n-2}u^2x^{n-2} \\ \qquad +A_4A_0u^4+A_4A_2{}^4ux^2+\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad +A_6A_0u^6+\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Wenn man die zu einerley Potenzen von x und u gehörigen Glieder vergleichet, so wird man sogleich $A^1=A_0^2$ oder $A_0=1$ haben, ein Werth welcher die erste Zeile der ersten Hälfte mit jener des zweyten identisch macht; wenn man hernach zu den zweyten Zeilen übergeht, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} A_2=A_2 \\ A_2A_2=6A_4 \\ A_2A_4=15A_6 \\ \dots\dots\dots \\ A_2A_{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}A_n \end{array}\right\} \text{woraus folgt} \left\{\begin{array}{l} A_2=A_2 \\ A_4=\frac{2A_2^2}{3\cdot4\cdot} \\ A_6=\frac{4A_2^3}{3\cdot4\cdot5\cdot6} \\ \dots\dots\dots \\ A_n=\frac{2^{\frac{n}{2}-1}A_2^{\frac{n}{2}}}{3\cdot4\cdot5\cdots n} \end{array}\right.$$

Alle Coefficienten mit Ausnahme von A_2, sind bestimmt, und die Gleichungen, die sich aus der Vergleichung der andern Zeilen ergeben würden, sind durch die vorhergehenden Werthe befriediget. In der That, man kann dem

Ausdruck des Coefficienten A_n folgende Form geben

$$A_n = \frac{2^{\frac{n}{2}} A_2^{\frac{n}{2}}}{2.3\ldots n},$$

indem man seinen Zähler und Nenner durch 2 multiplicirt, so wird es leicht seyn davon

$$\text{abzuleiten} \begin{cases} A_{m+n} = \dfrac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2.3\ldots m+n} \\[2ex] A_m A_n = \dfrac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{2.3\ldots m \times 2.3\ldots n}. \end{cases}$$

Aber das Product $u^n x^m$ welches in der ersten Hälfte, einen Theil der Entwicklung von $(x+u)^{m+n}$ ausmacht, hat zum Coefficienten

$$\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+1)}{1\;.\;2\;.\;\ldots\;n} A_{m+n}$$

oder, wenn man für A_{m+n} seinen Werth setzt, und die dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren auslöscht,

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n};$$

nun ist dieses Resultat genau der nemliche Werth, den wir weiter oben für $A_m A_n$ als Coefficient von $u^n x^m$ in den zweyten Theil der Gleichung gefunden haben.

Es ist also strenge erwiesen, daß

$$\cos. x = 1 + \frac{2 A_2 x^2}{1.2.} + \frac{2^2 A_2^2 x^4}{1.2.3.4} + \frac{2^3 A_2^3 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

34.

Auf ähnliche Weise werden wir den Ausdruck vom Sinus finden; denn wenn man von folgenden Gleichungen eine von der andern abzieht

$$\begin{cases} \cos.(x + u) = \cos.x.\cos.u - \sin.x.\sin.u \\ \cos.(x - u) = \cos.x.\cos.u + \sin.x.\sin.u \end{cases}$$

so werden wir haben

$$\cos.(x + u) - \cos.(x - u) = -2\sin.x.\sin.u.$$

Wenn man statt $\cos.(x + u)$ und $\cos.(x - u)$ die aus dem vorgehenden Artikel abgeleiteten Werthe setzt, so wird man sehen, daß alle zu den geraden Potenzen von u gehörigen Glieder sich wechselsweise vernichten. Hieraus folgt, daß sie in den Ausdruck des Sinus nicht mit hineinkommen müssen; und man sieht es ohnedies schon, da er, wenn man den nemlichen Bogen negativ, das heißt, von einer andern Seite des Durchmessers nimmt, das Zeichen verändert, eine Eigenschaft, die nur ungera- Potenzen zukommen kann.

Man wird also voraussetzen

$$\begin{cases} \sin.x = B_1 x + B_3 x^3 + B_5 x^5 + B_7 x^7 + \ldots \\ \sin.u = B_1 u + B_3 u^3 + B_5 u^5 + B_7 u^7 + \ldots \end{cases}$$

durch Hülfe dieser Werthe und der Reductionen die sich natürlich darbieten, wird die Gleichung

$$\cos.(x + u) - \cos.(x - u) = -2\sin.x.\sin.u$$

werden:

$$\left.\begin{array}{l} 2A_2 ux + 4A_4 ux^3 + 6A_6 ux^5 + \ldots + nA_n ux^{n-1} + \ldots \\ \qquad + 4A_4 u^3 x + 10A_6 u^3 x^3 + \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad + 6A_6 u^5 x + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$= -\left\{\begin{array}{l} B_1 B_1 ux + B_1 B_3 ux^3 + B_1 B_5 ux^5 + \ldots + B_1 B_{n-1} ux^{n-1} + \ldots \\ \qquad + B_3 B_1 u^3 x + B_3 B_3 u^3 x^3 + \ldots + B_3 B_{n-3} u^3 x^{n-3} + \ldots \\ \qquad\qquad + B_5 B_1 u^5 x + \ldots + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Die erste Zeile der ersten Hälfte, Glied vor Glied mit jener des zweyten Theiles verglichen; giebt

$$\left.\begin{array}{l} B_1B_1 = -2A_2 \\ B_1B_3 = -4A_4 \\ B_1B_5 = -6A_6 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_1B_{n-1} = -nA_n \end{array}\right\}\text{und folglich}\left\{\begin{array}{l} B_1 = -\frac{2A_2}{B_1} \\ B_3 = -\frac{4A_4}{B_1} \\ B_5 = -\frac{6A_6}{B_1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_{n-1} = -\frac{nA_n}{B_1} \end{array}\right.$$

Die anderen Zeilen geben weiter keine als identische Gleichungen; denn das Produkt $u^n x^m$ wird, in der ersten Hälfte nach dem vorhergehenden Artikel, zum Coefficienten haben

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_1^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n},$$

und er wird im zweyten Theile durch

$$-B_m B_n = -\frac{(m+1)(n+1)A_{m+1}A_{n+1}}{B_1 B_1}$$

multiplicirt seyn; indem man für A_{m+1}, A_{n+1}, und B_1 ihren Werth setzt, und wenn man die dem Zähler und Nenner gemeinschaftliche Factoren auslöscht, so findet man noch wie oben

$$\frac{2^{\frac{m+n}{2}} A_2^{\frac{m+n}{2}}}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n}.$$

Wir werden also haben

$$\sin. x = -\frac{2A_2x}{B_1} - \frac{4A_4x^3}{B_1} - \frac{6A_6x^5}{B_1} - \ldots$$

wo der Coefficient B_1 durch die Gleichung $B_1B_1 + 2A_2 = 0$ bestimmt ist.

Wenn

Wenn man statt A_4, A_6, A_8, ihre Werthe in A_2, aus dem vorgehenden Artikel gezogen, setzt, so wird man finden

$$\sin. x = -\frac{2A_2 x}{B_1} - \frac{2^2 A_2^2 x^3}{1.2.3.B_1} - \frac{2^3 A_2^3 x^5}{1.2.3.4.5.B_1} - \frac{2^4 A_2^4 x^7}{1.2.3.4.5.6.7.B_1} - \ldots$$

und wenn man für A_2 seinen Werth $-\frac{B_1^2}{2}$ substituirt, so wird nach den Reductionen herauskommen

$$\sin. x = B_1 x - \frac{B_1^3 x^3}{1.2.3} + \frac{B_1^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A_1^7 x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

35.

Hier sehen wir uns nun, wie in dem Falle der exponentiellen Functionen, mit der Bestimmung der Coefficienten aufgehalten; denn ~~da~~ wenn B_1 bekannt ist, so wird es den Werth von A_2 geben, und umgekehrt. Ueberdies, wenn man die für cos x gefundene Reihe untersucht, so wird man sehen, daß sie den Radius übersteigt, welches in dem Kreise nicht statt haben könnte; man ist also berechtiget zu glauben, daß A_2 eine negative Größe seyn müsse, und dieß um so mehr, da der aus der Gleichung $B_1^2 + 2A_2 = 0$ gezogene Werth von B_1 imaginair seyn wird, so lange A_2 positiv ist. Diese Schwierigkeiten werden durch die Bestimmung von B_1 aufgeklärt, und wir werden in der Folge Gelegenheit haben, zu zeigen, daß sie daher rühren, weil die Gleichungen von denen wir, um die Entwicklungen von cos x und sin x abzuleiten, Gebrauch gemacht haben, solche Eigenschaften ausdrücken, die dem Kreise und der Hyperbel gemein sind.

Archimedes hat zuerst bewiesen, daß der Umfang eines Kreises kleiner ist, als der Umfang eines umschriebenen Polygons, und größer als ~~jener~~ der Umfang eines eingeschriebenen von gleicher Seitenanzahl; hieraus folgt, daß ein Bogen des Kreises immer kleiner ist, als seine trigonometrische Tangente und größer als sein Sinus; aber man weiß; daß

$$\mathrm{tg.}\,x = \frac{\sin.x}{\cos.x} = \frac{\sin.x}{\sqrt{1 - \sin.x^2}}$$

man wird also haben

$$\begin{cases} \dfrac{\sin.x}{\sqrt{1 - \sin.x^2}} > x \\ \sin.x < x \end{cases}$$

Die Formeln von der Gattung der Vorhergehenden, durch welche man eine Vergleichung der Ungleichheit zwischen zwey Größen aufstellt, können eben so wie die Gleichungen behandelt werden; denn alle Operationen die man machen kann ohne die Gleichheit der beyden Theile von diesen zu verletzen, heben auch die Ungleich- der beyden Theile der andern nicht auf; es ist wahr, daß diese Ungleichheit den Werth verändert, sie bleibt aber immer in den nemlichen Sinne, welches das einzige ist, was man in Betrachtung zieht.

Um in der ersten der hier oben gesetzten Ungleichheiten $\sin.x$ allein zu bringen so wird man beyde Hälften durch $\sqrt{1 - \sin.x^2}$ multipliciren und es entstehet

$$\sin.x > x\sqrt{1 - \sin.x^2},$$

und wenn man zum Quadrat erhebt:

$$\sin.x^2 > x^2(1 - \sin.x^2);$$

setzt man auf jeder Seite $x^2 \sin.x^2$ hinzu, so wird man haben

$(1+x^2)$

$$(1 + x^2)\sin.x^2 > x^2;$$

durch $1 + x^2$ dividirt, und die Quadratwurzel aus jedem Theile gezogen, giebt

$$\sin.x > \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Wenn man

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

vermittelst der Binomialformel entwickelt, so wird man haben:

$$x\left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}x^6 + \ldots\right);$$

nach dem was vorhergegangen ist, muß nun, wenn man diese Reihe von dem Werthe von $\sin.x$ abzieht, das Resultat

$$x\left\{\left(B_1 - \frac{B_1^{\,3}x^2}{1.2.3.} + \frac{B_1^{\,5}x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right) - \left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \ldots\right)\right\}$$

eine positive Größe seyn. Aber es folgt auch daraus, daß man $\sin.x < x$ hat, daß die Differenz

$$x\left\{1 - \left(B_1 - \frac{B_1^{\,3}x^3}{1.2.3.} + \frac{B_1^{\,5}x^4}{1.2.3.4.} - \ldots\right)\right\}$$

positiv seyn müsse; nun könnten diese beyden Bedingungen in keinem Falle erfüllt werden, wenn man nicht $B_1 = 1$ hat. In der That, man kann x immer einen hinlänglich kleinen Werth geben, damit das erste Glied jeder der Reihen

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.4.}x^4 - \ldots$$

$$B_1 - \frac{B_1^{\,3}x^2}{1.2.3.} + \frac{B_1^{\,5}x^4}{1.2.3.4.5.} - \ldots$$

die

die Summe aller andern übersteige, und daß diese Summe geringer werde als jede gegebene Größe (Nr. 8. 9.). Man wird also die erste Reihe durch $1 - \delta$, und die zweyte durch $B_x - \delta'$ vorstellen können; wo δ und δ' so kleine Größen sind als man will; und zufolge der hier oben ausgesagten Eigenschaften müssen die Werthe von

$$\begin{cases} B_x - 1 + \delta - \delta' \\ 1 - B_x + \delta' \end{cases}$$

beyde positiv seyn.

Wir wollen nun voraussetzen, man habe $B = 1 + d$, so werden die vorigen Ausdrücke seyn:

$$d + \delta - \delta'$$
$$- d + \delta'$$

aber δ und δ' können immer weniger als d seyn; dann hängen also die Unterschiede die wir betrachten, von dem Zeichen dieser Größe d ab, und folglich, da die erste positiv ist, so wird die zweyte negativ seyn, welches sich mit der Beschaffenheit der Frage nicht verträgt.

Auch könnte B_x eben so wenig unter der Einheit seyn, denn wenn man $B_x = 1 - d$ hätte, so würde d in der ersten Formel negativ, und in der zweyten positiv werden; und wenn man über die gegenwärtige Hypothese wie über die Vorhergehende raisonnirt, so würde man wieder zwey Resultate von verschiedenen Zeichen finden; da nun dieser Umstand nicht statt haben kann, so muß man daraus schließen, daß B_x weder größer, noch geringer als 1 seyn kann, und man hat nothwendig $B_x = 1$.

Um endlich alle Zweifel zu entfernen, welche die vorhergehenden Schlüsse schwächen könnten, werde ich bemerken lassen, daß die Reihen

1 —

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3.}{2.3.}x^4 - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}x^6 + \dots$$

$$B_1 - \frac{B_1{}^3x^2}{1.2.3.} + \frac{B_1{}^5x^4}{1.2.3.4.5.} - \frac{B_1{}^7x^6}{1.2.3.4.5.6.7.} + \dots$$

nicht in dem Falle der (Nr. 9) angezeigten Ausnahme, sind, und daß das geometrische Verhältniß zweyer auf einander folgenden Glieder in einer oder der andern genommen, keines unbegrenzten Wachsthumes fähig sey. Wirklich sind in der ersten, zwey auf einander folgende Glieder im allgemeinen durch

$$\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}x^{2n}, \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{2.4.6\dots(2n+2)}x^{2n+2}$$

vorgestellt, und ihr Verhältnißnahme ist durch:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x^2;$$

ausgedrückt, was nun auch n immer seyn mag, so ist der Bruch $\frac{2n+1}{2n+2}$ immer unter der Einheit, und das vorgehende Verhältniß wird daher immer kleiner als x^2 seyn. Hieraus folgt, daß man diesen Verhältnißnahmen so klein machen könne als man nur will, indem man x einen schicklichen Werth beylegt.

In der zweyten Reihe sind bie Ausdrücke der beyden aufeinanderfolgenden Glieder

$$\frac{B_1{}^{2n+1}x^{2n}}{1.2.3\dots(2n+1)}, \frac{B_1{}^{2n+3}x^{2n+2}}{1.2.3\dots(2n+3)}$$

und jener ihres Verhältnißnahmens ist

$$\frac{B_1{}^2x^2}{(2n+2)(2n+3)};$$

eine Größe, welche nach dem Maaße abnimmt, als man sich weiter von dem ersten Gliede entfernt. Man sieht also, daß es immer möglich ist, x einen solchen Werth zu

geben

geben, daß die Glieder der einen und der andern Reihe so schnell abnehmen, als man es will.

Weil man $B_1 = 1$ hat, so wird man zufolge der Gleichung

$$B_1 B_1 + 2A_2 = 0; \; A_2 = -\tfrac{1}{2}$$

finden, und folglich wird man haben

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

dieß sind die Ausdrücke des Sinus und des Cosinus nach den Potenzen des Bogens entwickelt, ich werde weiter unten zeigen, wie man daraus den Werth des Bogens selbst ziehen kann.

36.

Die Betrachtungen deren wir uns bedienten, um B_1 zu bestimmen, sind den Ausdrücken, womit wir uns im vorhergehenden Artikel beschäftiget haben, nicht besonders eigen; man kann daraus ein allgemeines Princip ziehen, welches um so merkwürdiger ist, da wir ihn zur Basis der Anwendungen des Differentialcalculs auf die Theorie der Curven machen werden.

Das Princip lautet so:

Es seyen drey Ausdrücke

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$
$$A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots$$
$$A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \ldots$$

von der Art, daß die Werthe des zweyten immer zwischen jenen des ersten und dritten enthalten sind: wenn diese beyden letzten Ausdrücke einerley erste Glieder haben, so wird es es nothwendigerweise jenem des zweyten gleich seyn; das heißt: wenn man $A = A''$ hat, so kann man durchaus schließen $A = A'$.

Um es zu beweisen, wollen wir voraussetzen, daß man x einen hinlänglich kleinen Werth gegeben habe, um die Summe aller Glieder die in jeder der gegebenen Reihen dem ersten folgen, geringer zu machen, als jede gegebene Größe; und daß man sie in dieser Beschaffenheit durch

$$\left.\begin{array}{l} A + \delta \\ A' + \delta' \\ A'' + \delta'' \end{array}\right\}$$

vorstelle; wenn man die erste von der zweyten abzieht, und diese von der dritten, so wird man haben

$$\left.\begin{array}{l} A' - A + \delta' - \delta \\ A'' - A' + \delta'' - \delta' \end{array}\right\}$$

Resultate, welche zufolge der Aussage des Satzes eins sowohl als das andere positiv seyn müssen. Wenn man aber $A'' = A$ setzt, und man nach einander

$$\left\{\begin{array}{l} A' = A + d \\ A' = A - d \end{array}\right.$$

macht, so wird man wie vorhin beweisen, daß so lange d nicht Null seyn wird, die Werthe der obigen Formeln von verschiedenen Zeichen seyn werden; man muß also $A' = A$ haben.

Die Begriffe die wir (Nr. 12 13) von den Grenzen gegeben haben, machen auch diesen Satz sehr evident, und kürzen den Beweis etwas ab; denn wenn man das Verhältniß zwischen der ersten und dritten Reihe nimmt, so wird man finden

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots}{A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \ldots},$$

ein

ein Bruch, dessen Grenze $\frac{A}{A''}$ ist, und 1 wird, wenn $A = A''$. Weil aber die zweyte Reihe immer zwischen diesen hier begriffen ist, welche unaufhörlich nach der Gleichheit streben, wenn $A = A''$, und x abnehmend fortgeht, so muß sie sich einer und der andern, so wie ihrer gemeinschaftlichen Grenze, ohne Ende nähern können. Hieraus folgt, daß die Verhältnisse dieser drey Reihen, zwey und zwey mit einander verglichen, sich unaufhörlich der Einheit nähern müssen. Wenn man die zweyte durch die erste dividirt, so hat man

$$\frac{A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots},$$

wovon die Grenze $\frac{A'}{A}$ ist; also $\frac{A'}{A} = 1$ oder $A' = A$.

Wenn man einigen Zweifel über die Möglichkeit erheben wollte, in der Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

die Summe der Glieder

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

in Beziehung auf dem ersten Gliede A, so klein zu machen als man will, so wird es hinlänglich seyn, um sie zu zerstreuen, wenn man beobachtet, daß das Nr. 9 angezeigte Verfahren, um zu machen, daß jedes Glied dieser Reihe um die Hälfte kleiner sey als sein Vorhergehendes, zu einer so schnellen Abnahme führen kann, als man will. Man hat nur $x < \frac{P}{nQ}$ zu machen, so wird jedes Glied geringer seyn, als der $n$te Theil desjenigen, das ihm vorhergeht. Wenn man aber statt

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

die Progression

$$\frac{k}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right),$$

so wird die Summe, oder vielmehr die Grenze dieser Progression

$$\frac{k}{n}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)$$

seyn, ein Resultat, welches man erhält, wenn man in der Formel Nr. 3

$$a = 1 \text{ und } x = \frac{1}{n}$$

macht; nun kann die Größe

$$\frac{k}{n}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right) = \frac{k}{n-1}$$

so klein gemacht werden, als man will, indem man für n eine schickliche Zahl annimmt, so lange nur k nicht unendlich seyn wird; um so mehr wird es sich dann eben so mit der Reihe

$$Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

verhalten.

37.

Es befindet sich zwischen den Logarithmen und den Kreisbogen eine merkwürdige Analogie. In der That, wenn man die Reihen, welche e^x, sin. x und cos. x ausdrücken, zusammenstellt, so wird man haben;

$$\left.\begin{array}{l}
e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \\
\quad + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \\
\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \\
\quad - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \\
\sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} \\
\quad + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

und man wird sehen, daß alle in den beyden letzten vereinigten, enthaltene Glieder, bis auf das Zeichen die nemlichen sind, als die welche ihnen in der ersten entsprechen; wenn man aber $x\sqrt{-1}$ statt x in dieser substituirt so wird man haben, wegen

$$\left\{\begin{array}{l}
(x\sqrt{-1})^2 = -x^2 \\
(x\sqrt{-1})^3 = -x^3\sqrt{-1} \\
(x\sqrt{-1})^4 = +x^4 \\
(x\sqrt{-1})^5 = +x^5\sqrt{-1}
\end{array}\right.$$

u. s. w.

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

wenn man auch in der nemlichen Reihe $-x\sqrt{-1}$ für x setzt, so kömmt heraus

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

wenn

wenn man diese zwey Resultate zusammen addirt, so wird man finden:

$$e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=2\left\{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3\,4}-\ldots\right\}$$

$$=2\cos.x,\text{ woraus }\cos.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2};$$

wenn man im Gegentheile von dem erstem das zweyte Resultat abziehet, so wird man finden:

$$e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}=2\left\{\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3}\right.$$
$$\left.+\frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}-\ldots\right\}$$

oder

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\left\{x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.\;3.4.5}-\right\}$$

und folglich

$$\sin.x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Es würde ein leichtes seyn, die ähnlichen Ausdrücke der andern trigonometrischen Linien zu finden. Man würde jenen von tg. x haben, wenn man in der Gleichung

$$\text{tg.}x=\frac{\sin.x}{\cos.x}$$

den Werth von sin. x und cos. x substituirte; es würde dann herauskommen

$$\text{tg.}x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}\right\}$$

oder indem man den Zähler und Nenner des zweyten Theiles durch $e^{x\sqrt{-1}}$ multiplicirt:

$$\text{tg.}\,x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{e^{2x\sqrt{-1}}+1}\right).$$

38.

Diese zwey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos.x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\\ \sin.x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\end{aligned}\right\}$$

werden uns zu Resultaten führen, die in der Analysis von großem Gebrauche sind. Indem wir sie, nachdem die zweyte durch $\sqrt{-1}$ multiplicirt ist, zusammennehmen, werden wir sogleich daraus ziehen

$$\cos.x + \sqrt{-1}\,.\sin.x = e^{x\sqrt{-1}};$$

und wenn man sie voneinander subtrahirt

$$\cos.x - \sqrt{-1}\,.\sin.x = e^{-x\sqrt{-1}}.$$

Nimmt man die Logarithmen von jeder Hälfte der letzten Gleichungen, so wird man finden:

$$\left.\begin{aligned}x\sqrt{-1} &= l(\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x)\\ -x\sqrt{-1} &= l(\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x)\end{aligned}\right\};$$

wenn man die zweyte Gleichung von der ersten abziehet, so wird man haben

$$2x\sqrt{-1} = l(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x) - l(\cos.x-\sqrt{-1}\sin.x)$$

$$= l\left\{\frac{\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x}{\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x}\right\}:$$

wenn man den Zähler und Nenner dieses Bruches durch cos. x dividirt, und statt

$$\frac{\sin.x}{\cos.x}$$

den Werth tg. x setzet so wird herauskommen

$2x\sqrt{-1}$

$$2x\sqrt{-1} = l\left\{\frac{1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,x}{1-\sqrt{-1}\,\text{tang.}\,x}\right\}.$$

Wir wollen nun $\sqrt{-1}\,.\,\text{tang.}\,x = u$ machen, so werden wir zu Folge der (Nr. 18) für $l\left(\frac{1+u}{1-u}\right)$ gefundenen Reihe haben:

$$2x\sqrt{-1} = 2\left\{u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \ldots\right\}$$

oder wenn wir für u wieder seinen Werth setzen

$$2x\sqrt{-1} = 2\left\{\sqrt{-1}\,\text{tg.}x - \frac{\sqrt{-1}\,\text{tg.}x^3}{3} + \frac{\sqrt{-1}\,\text{tg.}x^5}{5} - \right\}$$

Wenn man den gemeinschaftlichen Factor $2.\sqrt{-1}$ wegläßt, so erhält man

$$x = \text{tg}\,x - \frac{\text{tg}\,x^3}{3} + \frac{\text{tg.}x^5}{5} - \ldots$$

eine sehr merkwürdige Reihe, sowohl durch die Einfachheit ihres Gesetzes, als durch Natur der Relation die sie enthält, weil sie die Entwicklung eines Kreisbogens vermittelst seiner Tangente ist. Wir wollen tg. x durch t vorstellen, so werden wir haben

$$x = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots$$

Wenn man für x den Bogen von 45° nimmt, so wird man, da seine Tangente dem Radius oder der Einheit gleich ist, finden: den Bogen von

$$45^\circ = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

Diese Reihe ist nicht sehr convergent, man kann aber andere davon ableiten, die es mehr sind und zwar vermittelst analytischer Kunstgriffe die wir jetzt vorlegen werden.

Es ist leicht zu sehen, daß in einem Kreise dessen Radius der Einheit gleich ist, der Sinus des Bogens von 30° = ½, der Cosinus = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, und folglich die Tangente = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ist. Wenn man diesen Werth für t substituirt, so wird man finden: der Bogen von

$$30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \ldots\right\}$$

ein Resultat, welches convergenter ist, als das Vorhergehende. Da man die Länge des Bogens von 30° kennt, so wird man jene des Umfanges haben, wenn man die erste durch 12 multiplicirt. Durch die vorhergehende Reihe hat Lagny das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser mit 127 Decimalzahlen berechnet, und er fand, daß wenn der Durchmesser = 1 ist, der Umkreis durch

3,14159 26535 89793 23846
26433 83279 50288 41971 69399
37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211
70679 82148 08651 32723 06647
09384 46

ausgedrückt sey *).

Hier

*) In der 5ten Ausgabe des ersten Theils der vortreflichen Kästnerischen Anfangsgr. der Mathematik. Seite 331 meldet Hr. Kästner, aus einem Briefe des Herrn Major von Zach, Herzogl. Goth. Astronomen; Gotha, 1. März 1792. daß Hr. Dr. Hornsby den Herrn von Zach berichtet hat, daß die Bodleiische Bibliotheck zu Oxford, ein Manuscript besitze, worin die Verhältnißnahme noch auf 29 Decimalstellen weiter angegeben ist als beym Lagny. Die niedrigste Ziffer bey Lagny ist von der Ordnung −127, dazu kommen nun noch folgende Ziffern:

46095 50582 23172 53594 08128 4802.

Deren höchste Ziffer von der −128sten Ordnung und die niedrigste

Hier ist ein Mittel, welches zu einer noch schnelleren Annäherung führt: weil man

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \text{tg}. a$$

und

$$\frac{\sin (a + b)}{\cos. (a + b)} = \text{tg}. (a + b)$$

hat, so wird man durch die Entwicklung von sin.(a + b) und cos.(a + b) finden:

$$\frac{\sin. a . \cos. b + \sin. b . \cos. a}{\cos a . \cos. b - \sin. a . \sin. b} = \text{tg}. (a + b).$$

Wenn man aber den Zähler und Nenner der ersten Hälfte les dieser Gle.chung durch cos. a . cos. b dividirt, so wird man finden

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin. b}{\cos. b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos. a} . \frac{\sin. b}{\cos d}}$$

welches sich leicht auf

$$\frac{\text{tg}. a + \text{tg}. b}{1 - \text{tg}. a . \text{tg}. b} = \text{tg}. (a + b)$$

reduciren läßt.

Wir wollen den Bogen $a + b = 45°$ nehmen, so hat man alsdann $\text{tg}. (a + b) = 1$, und folglich

$$1 - \text{tg}\, a\ \text{tg}. b = \text{tg}. a + \text{tg}. b,$$

woraus

$$\text{tang}. b = \frac{1 - \text{tg}. a .}{1 + \text{tg}. a .}.$$

G 4 Wenn

drigste Ziffer von der — 156sten Ordnung. Zugleich ist bemerkt, daß die unter den Lagnyschen Ziffern unten mit einem * bezeichnete Ziffer nicht 7 sondern 8 seyn sollte.

G.

Wenn man nun tg. $a = \frac{1}{2}$ macht, so wird sich daraus ergeben tg. $b = \frac{1}{3}$. Die Bogen a und b werden durch zwey convergentere Reihen gegeben seyn, als jene die wir weiter oben gefunden haben, und man wird haben

$$a + b = 45^\circ = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \ldots \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \ldots \text{*)} \end{cases}$$

39.

*) Diese Formel verdanken wir Euler, der zuerst eine bequeme Formel zur Berechnung des Umfanges eines Kreises angegeben hat, da man vorher sich der Tangente des Bogens von 30° bedient hatte, die aber durch ihre Irrationalität die Rechnung ungemein beschwerlich macht. — Seitdem haben verschiedene Geometer sich bemühet noch weit convergentere Reihen zu finden. Ich habe vor 2 Jahren in meiner Pinakothek eine Formel bekannt gemacht die ich vor mehreren Jahren gefunden habe, und die unter allen mir bekannten den Vorzug zu verdienen scheint, und nach welcher ich mit Hülfe meiner Pinakothek den Umfang des Kreises oder die Zahl π bis auf 200 Decimalstellen berechnet, bekannt machen werde. Die Formel selbst ist folgende:

$$\pi = 4 \begin{cases} \frac{2^3}{1.10} - \frac{2^5}{3.10^3} + \frac{2^7}{5.10^5} - \frac{2^9}{7.10^7} + \ldots \\ - \frac{1}{1.239} + \frac{1}{3.239^3} - \frac{1}{5.239^5} + \frac{1}{7.239^7} - \ldots \end{cases}$$

In der französischen Ausgabe meiner Pinakothek habe ich noch folgende Formel gegeben:

$$\pi = \frac{312}{100} + \begin{cases} \frac{8.16}{100^2}\left(1 + \overbrace{\tfrac{1}{18} \cdot \tfrac{6}{7}}^{a} + \overbrace{\frac{a}{10} \cdot \frac{8}{9}}^{b} + \overbrace{\frac{b}{10} \cdot \frac{10}{11}}^{c} + \overbrace{\frac{c}{10} \cdot \frac{12}{13}}^{d} + \ldots \right. \\ \frac{28.32}{3.10^7}\left(1 + \frac{2a}{10} + \frac{2^2 . b}{10^2} + \frac{2^3 . c}{10^3} + \frac{2^4 . d}{10^4} + \ldots \right. \end{cases}$$

Ich

39.

Wir wollen die zwey Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos. x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \\ \text{und } \sin x &= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\}$$

wieder vornehmen; wenn man darin nx statt x setzt, so wird man haben

$$\left.\begin{aligned} \cos. nx &= \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} \\ \sin. nx &= \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}\right\}$$

Ich habe diese letzte Formel vorzüglich bequem gefunden, wenn man etwa π nur bis zur —50 Ordnung berechnen wollte, indem die einzeln Glieder dieser Formel periodische Decimalbrüche geben, bis zu deren Wiederkehr man also nur die Rechnung zu machen braucht.

So bequem aber auch die hier von mir mitgetheilten Formeln seyn mögen, so würde dennoch eine eiserne Gedult dazu gehören, die Zahl π bis auf 200 Decimalstellen darnach zu berechnen, und wäre man endlich wohl wegen das Resultat ganz gesichert? Alles unangenehme bey dergleichen Rechnungen fällt gänzlich durch solche vortheilhafte mechanische Hülfsmittel als meine Pinakothek darbietet, weg; vermittelst dieser kann man die Quotienten g a n z m e c h a n i s c h, nicht nur nach der Ordnung, sondern auch außer der Ordnung, von jeder beliebigen Ziffer aus der Mitte anfangend, und zwar, nach Willkühr vor oder rückwärts, so weit man will, finden und hinschreiben. Niemand wird den Ankauf der Pinakothek bereuen.

welches zu den Werthen der Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen leitet.

Ueberhaupt geben diese Formeln das Mittel an, den algebraischen Calcul auf die Functionen der Sinus und Cosinus anzuwenden; und durch ihre Hülfe gelangt man zu den nemlichen Resultaten, als diejenigen sind, die man durch trigonometrische Wege erhalten würde.

Da diese Materie nicht ganz zu unserm Gegenstande gehört, so wird man hier nur einige Beyspiele davon finden, die aber doch hinlänglich seyn werden, um den Gebrauch zu zeigen, den man von diesen Formeln machen kann.

Gesetzt, man verlange zu wissen, was das Produkt $\sin. x \cos. x$ bedeute, so wird man, wenn man die Multiplication verrichtet, finden:

$$\sin. x . \cos. x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}},$$

oder

$$2\sin. x . \cos. x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

es ist aber leicht zu sehen, daß die zweyte Hälfte nichts anders sey, als der Werth von $\sin. 2x$, weil man dazu gelangen würde, wenn man $2x$ statt x in dem Ausdrucke von $\sin. x$ setzte; man wird also haben:

$$\sin x . \cos. x = \tfrac{1}{2} \sin. 2x.$$

Wenn man $\sin. x . \cos. z$ gesetzt hätte, so würde man gehabt haben

$$\sin. x \cos. z = \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) \times \left(\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}\right),$$

woraus

woraus $\sin.x \cos.z =$

$$\frac{e^{(x+z)\sqrt{-1}} - e^{-(x+z)\sqrt{-1}} + e^{(x-z)\sqrt{-1}} - e^{-(x-z)\sqrt{-1}}}{2 \cdot 2\sqrt{-1}}$$

aber es ist evident, daß

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{(x+z)\sqrt{-1}} - e^{-(x+z)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin.(x+z) \\ \dfrac{e^{(x-z)\sqrt{-1}} - e^{-(x-z)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin.(x-z) \end{array}\right\}$$

folglich

$$\sin.x.\cos.z = \tfrac{1}{2}[\sin.(x+z) + \sin.(x-z)]$$

Diese Formel ergiebt sich wirklich sehr einfach aus den bekannten Werthen von

$$\left.\begin{array}{l} \sin.(x+z) = \sin.x.\cos.z + \sin z.\cos.x \\ \sin.(x-z) = \sin.x.\cos z - \sin.z.\cos.x \end{array}\right\}$$

indem man sie zusammenaddirt; aber das Mittel, welches wir so eben angezeigt haben, führet leichter zu den allgemeinen Formeln, wie man bald sehen wird.

40.

Weil man

$$\left.\begin{array}{l} e^{x\sqrt{-1}} = \cos.x + \sqrt{-1}\sin.x \\ e^{-x\sqrt{-1}} = \cos.x - \sqrt{-1}\sin.x \end{array}\right\},$$

hat, so wird man daraus ziehen:

$$e^{nx\sqrt{-1}} = (\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x)^n$$

$$e^{-nx\sqrt{-1}} = (\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x)^n$$

und daraus

$$\sin.nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{(\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x)^n - (\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Wir

Wir sind nun auf eine sehr einfache Art zu dem Ausdrucke des Sinus eines vielfachen Bogens gelanget, und man muß wohl bemerken, daß, ob er gleich mit eingebildeten Zeichen behaftet ist, er doch nichts desto weniger reell ist; denn diese Zeichen verschwinden alle in der Entwicklung der angezeigten Potenzen. Man hat wirklich,

$$(\cos.x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos.x^n + n\sqrt{-1}\cos.x^{n-1}\sin.x$$
$$- \frac{n(n-1)}{2}\cos.x^{n-2}\sin.x^2 - \ldots$$

$$(\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x)^n = \cos.x^n - n\sqrt{-1}\cos.x^{n-1}\sin.x$$
$$- \frac{n(n-1)}{2}\cos.x^{n-2}\sin.x^2 + \ldots,$$

wenn man die zweyte Gleichung von der ersten abzieht und durch $2\sqrt{-1}$ dividirt, so wird man finden;

$$\sin.nx = n\cos.x^{n-1}\sin.x - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3}\cos.x^{n-3}\sin.x^3$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\cos.x^{n-5}\sin.x^5 - \ldots$$

Es ist nicht nöthig zu erinnern, daß diese Reihe jedesmal begrenzt seyn wird, wenn n eine ganze positive Zahl ausdrückt; sie folget in diesem Betrachte den nemlichen Gesetzen, wie die Formel des Binomiums von der sie abgeleitet ist.

Wenn man in der Gleichung

$$\cos.nx = \frac{e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}}}{2}$$

statt $e^{nx\sqrt{-1}}$ und $e^{-nx\sqrt{-1}}$ ihren Werth setzt, so wird man finden

$$\cos.nx = \tfrac{1}{2}[\cos.x + \sqrt{-1}\sin x]^n + \tfrac{1}{2}[\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x]^n,$$

und indem man entwickelt, so kömmt, nachdem man die

Glieder die sich aufheben und die alsdann jene mit eingebildeten Zeichen behafteten sind, wegläßt, heraus:

$$\cos. nx = \cos. x^n - \frac{n(n-1)}{2} \cos. x^{n-2} \sin. x^2$$
$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4} \cos. x^{n-4} \sin. x^4 - \ldots$$

41.

Man kann ohne Hülfe der Reihen zu den vorhergehenden Resultaten gelangen, wenn man von den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} \sin.(x \pm z) = \sin. x . \cos. z \pm \cos. x . \sin. z \\ \cos.(x \pm z) = \cos. x . \cos. z \mp \sin. x . \sin. z \\ 1 = \sin. x^2 + \cos. x^2 \end{array}\right\}$$

Gebrauch macht, welche die ganze Theorie der Sinus enthalten, wie folgt: vermöge der letzten Gleichung hat man

$$1 = (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x).(\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x);$$

wenn man aber das Product

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)(\cos. z + \sqrt{-1} \sin. z)$$

entwickelt, so findet man

$$\cos. x . \cos z - \sin. x . \sin z + [\cos. x . \sin z + \sin. x . \cos. z]\sqrt{-1}$$

ein Resultat, welches zu Folge der zwey ersten Gleichungen giebt:

$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x).(\cos. z - \sqrt{-1} \sin. z) = \cos.(x+z) + \sqrt{-1} \sin.(x+z)$$

Eben so wird man erhalten

$$(\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x).(\cos. z - \sqrt{-1} \sin. z) = \cos.(x+z) - \sqrt{-1} \sin.(x+z)$$
$$(\cos. x + \sqrt{-1} \sin x).(\cos. z - \sqrt{-1} \sin. z) = \cos.(x-z) + \sqrt{-1} \sin.(x-z)$$
$$(\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x).(\cos. z + \sqrt{-1} \sin. z) = \cos.(x-z) - \sqrt{-1} \sin.(x-z)$$

Man

Man kann diese vier Formeln in den zwey folgenden begreifen:

$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}\sin x).(\cos.z \pm \sqrt{-1}\sin.z)$$
$$= \cos.(x+z) \pm \sqrt{-1}\sin.(x+z)$$
$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}\sin.x).(\cos.z \mp \sqrt{-1}\sin.z)$$
$$= \cos.(x-z) \pm \sqrt{-1}\sin.(x-z)$$

Wenn man hier in der ersten nach und nach

$$z = x,\ 2x,\ 3x,\ (n-1)x$$

macht, so wird sich ergeben:

$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}\sin.x)^2 = \cos.2x \pm \sqrt{-1}\sin.2x$$
$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}\sin.x).(\cos.2x \pm \sqrt{-1}\sin.2x)$$
$$= \cos.3x \pm \sqrt{-1}\sin.3x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin.x).(\cos.3x \pm \sqrt{-1}\sin.3x)$$
$$= \cos.4x \pm \sqrt{-1}\sin.4x$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}\sin.x).(\cos.(n-1)x \pm \sqrt{-1}\sin.(n-1)x)$$
$$= \cos.nx \pm \sqrt{-1}\sin nx.$$

Man sieht aber, daß die zweyte Hälfte jeder dieser Gleichungen genau der Factor der ersten Hälfte der folgenden Gleichung ist, und wenn man statt diesem Factor die Größe setzt, die ihm gleich ist, so wird man finden

$$(\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x)^2 = \cos.2x \pm \sqrt{-1}\sin.2x$$
$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin.x)^3 = \cos.3x \pm \sqrt{-1}\sin.3x$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(\cos.x \pm \sqrt{-1}\sin.x)^n = \cos.nx \pm \sqrt{-1}\sin.nx$$

Man wird also haben

$$\begin{cases}(\cos.x+\sqrt{-1}\sin.x)^n = \cos.nx+\sqrt{-1}\sin.nx\\ (\cos.x-\sqrt{-1}\sin.x)^n = \cos.nx-\sqrt{-1}\sin.nx\end{cases}$$

Wenn man diese zwey letzten Gleichungen zusammenaddirt, und eine von der andern abzieht, so wird man wie oben finden:

cos. nx =

$$\cos. nx = \tfrac{1}{2}\,[\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x]^n + \tfrac{1}{2}\,[\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x]^n$$

$$\sin. nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,[\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x]^n - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,[\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x]^n$$

Wenn man in diesen Gleichungen $x = \frac{v}{n}$ macht, und sie entwickelt, so werden sie geben

$$\sin.v = n\left(\cos\frac{v}{n}\right)^{n-1}\left(\sin.\frac{v}{n}\right) - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\left(\cos.\frac{v}{n}\right)^{n-3}\left(\sin.\frac{v}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4\,\cdot 5}\left(\cos.\frac{v}{n}\right)^{n-5}\left(\sin.\frac{v}{n}\right)^5 + \ldots$$

$$\cos.v = \left(\cos.\frac{v}{n}\right)^n - \frac{n(n-1)}{2}\left(\cos.\frac{v}{n}\right)^{n-2}\left(\sin.\frac{v}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3\,.\,4}\left(\cos\frac{v}{n}\right)^{n-4}\left[\sin.\frac{v}{n}\right]^4 - \ldots$$

Die Reihe, welche ihre zweyten Theile formiren, sind in Rücksicht des Wachsthums von n einer Grenze fähig, denn wenn diese Zahl sich vergrößert, so verändert sich der Bogen $\frac{v}{n}$, und nähert sich immer mehr seinem Sinus während daß sein Co Sinus sich dem Radius oder der Einheit nähert; wenn man also $\frac{v}{n}$ statt $\sin.\frac{v}{n}$ schreibet; 1 statt $\cos.\frac{v}{n}$, und die Producte n, $n(n-1)$, $n(n-2)$ u. s. w. auf ihr erstes Glied reducirt, so wird man zur Grenze haben

sin.v=n

$$\sin. v = n\frac{v}{n} - \frac{n^3}{2.3}\,\frac{v^3}{n^3} + \frac{n^5}{2.3.4.5}\,\frac{v^5}{n^5} - \ldots$$

$$= v - \frac{v^3}{2.3} + \frac{v^5}{2.3.4.5} - \ldots$$

$$\cos. v = 1 - \frac{n^2}{2}\,\frac{v^2}{n^2} + \frac{n^4}{2.3.4}\,\frac{v^2}{n^4} - \ldots$$

$$= 1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \ldots$$

Hier sind wir nun auf die Reihen von Nr. 35 zurückgekommen, und man sieht daraus, wie sich die verschiedenen Wegen einer durch den andern bestättiget, welche wir um dahin zu kommen, befolgten.

42.

In den vorhergehenden Artikeln hat man die Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen nach den Potenzen der Sinus und Cosinus der einfachen Bogen entwickelt; hier folgt nun die Auflösung der umgekehrten Frage, nemlich jener, wo es darum zu thun ist, die Potenzen der Sinus und Cosinus des einfachen Bogens durch die Sinus und Cosinus seiner vielfachen Bogen auszudrücken.

Es sey

$$\begin{cases} \cos. x + \sqrt{-1}\,\sin. x = u \\ \cos. x - \sqrt{-1}\,\sin. x = v \end{cases}$$

so man wird haben

$$\cos. x = \tfrac{1}{2}(u + v),\ \sin. x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}.(u - v),$$

und daraus wird man sogleich

$$\cos. x^n = \frac{1}{2^n}\,(u + v)^n$$

herleiten. Wenn man die in der zweyten Hälfte dieser Gleichung angezeigte Potenz entwickelt, so wird herauskommen:

$$\cos.x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}u^{n-3}v^3 + \ldots\right\}$$

aber in dem Ausdrucke $(u+v)^n$ kann man v und u vertauschen, und umgekehrt, welches geben wird

$$\cos.x^n = \frac{1}{2^n}\left\{v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2}v^{n-2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}v^{n-3}u^3 + \ldots\right\}$$

wenn man diese zwey Resultate zusammenaddirt, so wird man habeu:

$$2\cos.x^n = \frac{1}{2^n}\left\{u^n + v^n + n(u^{n-1}v + v^{n-1}u) + \frac{n(n-1)}{2}(u^{n-2}v^2 + v^{n-2}u^2) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}(u^{n-3}v^3 + v^{n-3}u^3) + \ldots\right\}$$

Man kann dieser Gleichung folgende Form geben:

$$2^{n+1}.\cos.x^n = \left\{u^n + v^n + nuv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{2}u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}u^3v^3(u^{n-6} + v^{n-6}) + \ldots\right\}$$

aber Nr. 40 zufolge hat man:

$$\cos.nx = \tfrac{1}{2}(\cos.x + \sqrt{-1}\sin.x)^n + \tfrac{1}{2}(\cos.x - \sqrt{-1}\sin.x)^n = \tfrac{1}{2}u^n + \tfrac{1}{2}v^n;$$

was auch n immer seyn mag. Man wird daraus schließen können, daß

$$u^n + v^n = 2\cos.nx,$$

und überhaupt,

$$u^{n-m} + v^{n-m} = 2\cos.(n - m)x;$$

überdieß ist leicht zu sehen, daß $uv = 1$, man wird folglich haben:

$$2^{n+1}\cos.x^n = \left\{ 2\cos.nx + 2n\cos.(n-2)x + \frac{2n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x \right.$$
$$\left. + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \ldots \right\}$$

oder wenn man alles durch 2 dividirt:

$$2^n.\cos x^n = \left\{ \cos.nx + \frac{n}{1}\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)x \right.$$
$$\left. \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \ldots \right\}$$

Wenn man diese Formel wie jene des Binomiums von Newton fortsetzt, so wird man zu Cosinusse negativer Bogen kommen; sie sind aber genau dieselben als die der positiven Bogen, die ihnen entsprechen, wie man sich hievon versichern kann, wenn man x in der Gleichung

$$x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

negativ macht, deren zweyte Hälfte durch diese Substitution sich nicht verändert, man wird also $\cos.(m - n)x$ anstatt $(n - m)x$ schreiben.

Der Werth den wir so eben für $\cos x^n$ gefunden haben, ist nicht bloß auf den Fall beschränkt, wo n eine ganze Zahl ist, er würde ebenfalls denen zukommen, wo n ein Bruch oder eine negative Zahl wäre. Jedoch ist er im ersten Falle einer Vereinfachung fähig, die wir sogleich lehren werden.

In der Entwicklung von $(u + v)^n$ haben die von den äußersten gleich weit abstehenden Glieder, wenn n eine ganze Zahl ist, den nemlichen Coefficienten; dieses wird auch in den Ausdruck

$$\cos. nx + \frac{n}{1} \cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos.(n-4)x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos.(n-6)x + \ldots$$

statt finden, und wir werden überdieß zeigen, daß die von den äußersten Enden dieser Formel gleich weit abstehenden Cosinusse auch zu gleichen Bogen gehören. In der That, das in einer Entfernung m von dem ersten gestellte Glied, gehört dem Cosinus $(n - 2m)x$, und das letzte ist es selbst vom Cosinus $(n-2n)x$, oder $\cos. - nx$; wenn mau gegen das erste um eine durch m angezeigte Anzahl Stellen zurückgeht, so wird man nothwendigerweise finden $\cos(-n+2m)x$, oder $\cos. -(n-2m)x$. Aber nach dem was hier oben gesagt wurde, kömmt

$$\cos.(n - 2m)x \text{ und } \cos. - (n - 2m)x$$

auf eins hinaus; hieraus folgt also, daß es unnütz sey, die multiplicirten Glieder durch Cosinusse negativer Bogen zu suchen, und das es, um sie in Rechnung zu bringen hinlänglich sey, das doppelte eines jeden von diejenigen zu nehmen, die davon positive enthalten:

Man könnte also, indem man bey bem Gliede stehn bleibt, wo die Bogen negativ werden, schreiben:

$$2^n . \cos x^n =$$
$$\left\{ 2\cos. nx + \frac{2n}{1}\cos.(n-2)x + \frac{2n(n-2)}{1.2}\cos.(n-4)x + \ldots \right\}$$

Man muß jedoch bemerken, daß in dem Falle, wo n eine gerade Zahl ist, die Formel ein Mittelglied hat, welches von jedem äußersten gleich weit entfernt ist; und durch

$$\frac{n(n-1)\ldots(n - \frac{n}{2} + 1)}{1.2 \ldots\ldots \frac{n}{2}} \cos.(n-n)x$$

vorgestellt wird; wegen $\cos. o x = 1$, reducirt es sich auf

$$\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}};$$

und weil es einzig ist, muß es nicht, wie die andern, durch 2 multiplicirt werden.

Man wird also zum letzten Resultate haben:

$$2^{n-1}\cos.x^n = \left\{\begin{array}{l}\cos.nx + \frac{n}{1}\cos.(n-2)x \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)x \\ + \frac{n(n-1)\,n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \ldots\end{array}\right\}$$

indem man beobachtet in dieser Formel stille zu stehn, wenn man einen negativen Bogen antrifft, und wenn n gerade ist nur die Hälfte des Coefficienten vom Cosinus des Nullbogens, den man finden wird, zu nehmen. Mit dieser Aufmerksamkeit wird es leicht seyn, die Werthe der hier beygefügten Tafel zu bilden:

$\cos.x = \cos.x$

$2\cos.x^2 = \cos.2x + 1$

$4\cos.x^3 = \cos.3x + 3\cos.x$

$8\cos.x^4 = \cos.4x + 4\cos.2x + 3$

$16\cos.x^5 = \cos.5x + 6\cos.3x + 10\cos.x$

$32\cos.x^6 = \cos.6x + 6\cos.4x + 15\cos.2x + 10$

$64\cos.x^7 = \cos.7x + 7\cos.5x + 21\cos.3x + 35\cos.x$

u. s. w.

43.

Um $\sin.x^n$ zu entwickeln, wird man von der Gleichung

$$\sin. x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (u - v)$$

Gebrauch machen, und man wird finden

$$\sin. x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (u - v)^n$$

oder

$$\sin. x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n - \frac{n}{1} u^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2} v^2 \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^{n-3} v^3 + \ldots \right\}$$

1. es sey n eine gerade Zahl; in diesem Falle ist

$$(u - v)^n = (v - u)^n,$$

und folglich wird man wieder haben

$$\sin. x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (v - u)^n$$

Wenn man die zweyte Hälfte dieser Gleichung entwickelt. und zur ersten hinzufügt, so wird herauskommen:

$$2 \sin. x^n = \frac{1!}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n + v^n - \frac{n}{1} (u^{n-1} v + v^{n-1} u \right.$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} (u^{n-2} v^2 + v^{n-2} u^2)$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} (u^{n-3} v^3 + v^{n-3} u^3) + \ldots \right\}$$

oder

$$2 \sin. x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n + v^n - \frac{n}{1} uv (u^{n-2} + v^{n-2}) \right.$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^3 v^3 (u^{n-6} + v^{n-6}) + \ldots \right\}$$

ein Resultat, welches die Zeichen ausgenommen, das nemliche ist, was wir in der Vorhergehenden Nr. gefunden

 haben,

haben, wir können also sogleich schreiben

$$(2\sqrt{-1})^n \sin.x^n = \left\{ \begin{array}{l} \cos.nx - \frac{n}{1}\cos.(n-2)x \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)x \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \ldots \end{array} \right\}$$

die eingebildete Größe verschwindet, weil n eine gerade Zahl ist, und man hat

$$(2\sqrt{-1})^n = \pm 2^n$$

wo das obere Zeichen statt findet, wenn n eine zwiefach gerade Zahl ist, das heißt ein Vielfaches von 4 ist, und das untere Zeichen, wenn sie nur durch 2 theilbar ist.

Man wird über die zweyte Hälfte dieser Gleichung die nemlichen Raisonnements machen, als in den vorhergehenden Artikel, und weil n eine ganze Zahl ist, so wird man daraus schließen, daß man sich auf die Glieder beschränken kann, welche nur positive Bogen enthalten, wenn man nur das doppelte von jedem derselben nimmt. Da n gerade ist, so wird sich überdieß ein Glied finden, welches keinen Cosinus hat, und nicht doppelt genommen werden muß; und dividirt man alles durch 2, so wird man haben:

$$\pm 2^{n-1}\sin x^n = \left\{ \begin{array}{l} \cos.nx - \frac{n}{1}\cos.(n-2)x \\ + \frac{n(n-1}{1.2}\cos.(n-4)x \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \ldots \end{array} \right\}$$

indem man beobachtet, daß man stille steht, wenn man einen negativen Bogen antrift, und nur die Hälfte des

Coeffi=

Coefficienten dieses Gliedes nimmt. 2. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so hat man

$$(v - u)^n = - (u - v)^n$$

folglich

$$\sin. x^n = - \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} (v - u)^n,$$

oder durch die Entwicklung

$$\sin. x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ - v^n + \frac{n}{1} v^{n-1} u \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)}{1.2} v^{n-2} u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} v^{n-3} u^3 + \ldots \right\}$$

Wenn man diesen Werth von x^n mit dem Seite 117 zusammenaddirt und die nöthigen Reductionen macht, so wird man finden

$$2\sin. x^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n} \left\{ u^n - v^n - \frac{n}{1} uv (u^{n-2} - v^{n-2}) \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{n-4} - v^{n-4})$$

$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u^3 v^3 (u^{n-6} - v^{n-6}) + \ldots \right\}$$

aber durch Nr. 40,

$$\sin. nx = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left\{ (\cos. x + \sqrt{-1} \sin. x)^n \right.$$

$$\left. - (\cos. x - \sqrt{-1} \sin. x)^n \right\} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (u^n - v^n),$$

was auch n immer sey; was das Product uv anbelangt, so ist dieses immer der Einheit gleich, man wird also allgemein haben

$$u^{n-m} - v^{n-m} = 2\sqrt{-1} \sin. (n - m)x;$$

folglich

 sin. x^n =

$$\sin.x^n = \frac{\sqrt{-1}}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\sin.nx - \frac{n}{1}\sin.(n-2)x\right.$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\sin.(n-4)x$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin.(n-6)x \ldots\right\}$$

Diese Formel ist nicht mehr, wie die Vorhergehenden, mit der eingebildeten Größe behaftet, denn da n eine ungerade Zahl ist, so ist

$$2(\sqrt{-1})^n = \pm 2^n\sqrt{-1},$$

wo das obere Zeichen statt findet, wenn n von der Form $4k + 1$, das heißt, ein Vielfaches von 4, um die Einheit vermehrt ist; und das untere Zeichen, wenn man bloß $n = 2k + 1$ hat.

Auch hier kann man sich auf die zu positiven Bogen gehörigen Glieder beschränken, indem man von jedem derselben das doppelte nimmt. Denn es ist sogleich durch die nemlichen Gründe als vorhin außer Zweifel, daß die gleich weit von der äußersten abstehende Glieder, den nemlichen Coefficienten haben, und daß das eine mit einem positiven, und das andere mit einem negativen Bogen behaftet ist. In Wahrheit, da die Anzahl der Glieder der Formel gerade ist, und abwechselnd positiv und negativ sind, so werden die entsprechenden Glieder entgegengesetze Zeichen haben; aber auch der Sinus des negativen Bogens ist selbst negetiv, wie man sich davon versichern kann, wenn man im

$$\sin.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

$-x$ statt $+x$ setzet; diese Verschiedenheit des Zeichens findet sich also verbessert, und die Glieder von denen die Rede ist, vereinigen sich in einem einzigen.

Nach

Nach diesen Betrachtungen wird, wenn man durch 2 dividirt, herauskommen;

$$2^{n-1}\sin.x^n = \left\{ \sin.nx - \frac{n}{1}\sin.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin.(n-4)x \mp \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\sin.(n-6)x + \ldots \right\}$$

Aus den beyden Formeln, die wir so eben gefunden haben, wird man die in der folgenden Tafel enthaltenen Werthe leicht ableiten:

$$\sin.x = \sin.x$$
$$2\sin.x^2 = -\cos.2x + 1$$
$$4\sin.x^3 = -\sin.3x + 3\sin.x$$
$$8\sin.x^4 = \cos.4x - 4\cos.2x + 3$$
$$16\sin.x^5 = \sin.5x - 5\sin.3x + 10\sin.x$$
$$32\sin.x^6 = -\cos.6x + 6\cos.4x - 15\cos.2x + 10$$
$$64\sin.x^7 = -\sin.7x + 7\sin.5x - 21\sin.3x + 35\sin.x$$

u. s. w.

Dieses ist für den Fall, wo n eine ganze Zahl wäre, wenn n eine gebrochene Zahl wäre, so müßte man zu der ersten Formel der vorhergehenden Nr. seine Zuflucht nehmen. Man würde $x = 90^\circ - z$ machen, welches geben würde $\cos.x = \sin.z$, und folglich wäre der Ausdruck von $\cos.x^n$ durch die Cosinus der Vielfachen von x, der Ausdruck von $\sin.z^n$ durch die Cosinus der Vielfachen von $90^\circ - z$, oder von dem Complement des Bogens z.

44.

Die Entwicklung von lu, welche Nr. 29 gefunden wurde, wird uns zu jener eines Kreisbogens leiten, welcher in Beziehung der Sinus seiner Vielfachen geordnet ist. In der That, wenn man in

$$lu = u - u^{-1} - \left(\frac{u^2 - u^{-2}}{2}\right) + \left(\frac{u^3 - u^{-3}}{2}\right) - \left(\frac{u^4 - u^{-4}}{4}\right) + \ldots$$

$u = e^{z\sqrt{-1}}$ macht, so wird man haben

$$l\,e^{z\sqrt{-1}} = e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}} - \left[\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2}\right] + \left[\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{3}\right] - \left[\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{4}\right] + \ldots$$

aber $l\,e^{z\sqrt{-1}} = z\sqrt{-1}$ folglich

$$z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}\left[\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right] + \tfrac{1}{3}\left[\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right] - \tfrac{1}{4}\left[\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right] + \ldots$$

wenn man die zwey Hälften dieser Gleichung durch 2 dividirt, so wird man finden

$$\tfrac{1}{2}z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) - \tfrac{1}{3}\left(\frac{e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{e^{4z\sqrt{-1}} - e^{-4z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \ldots$$

und

und wegen $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{e^{z\sqrt{-1}}-e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin.z \\ \dfrac{e^{2z\sqrt{-1}}-e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin.2z \end{array}\right.$

wird sich daraus ergeben

$$\tfrac{1}{2}z = \sin.z - \tfrac{1}{2}\sin.2z + \tfrac{1}{3}\sin 3z - \tfrac{1}{4}\sin.4z + \ldots$$

Dieser merkwürdige Ausdruck der Entwicklung eines Bogens durch die Sinus seiner Vielfachen ist von Euler, so wie alles Vorhergehende.

Wenn man $1 = 90°$ macht, alsdann sind $\sin.2z$, $\sin.4z$, und überhaupt alle Sinus der der geraden Vielfachen Bogen gleich Null; nur die ungeraden bleiben; man muß aber in Rücksicht auf diese beobachten, daß sie wechselsweise positiv und negativ sind. Wenn also $\sin.90°$ positiv ist, so ist $\sin.3 \cdot 90°$ negativ, $\sin.5 \cdot 90°$ positiv, $\sin.7,90°$ negativ; und so fort. Diesen Betrachtungen zufolge wird man finden, daß der Bogen

$$\text{von } 45° = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

sey, ein Resultat, welches jenem von Nr. 38 gleichlautend ist.

45.

Wenn man den Ausdruck einer Größe durch eine nach don Potenzen einer andern Größe geordneten Reihe erhalten hat, so kann man die Frage umkehren, indem man die zweyte als eine Funktion der ersten betrachtet, und ihre Entwicklung suchen. Auf solche Weise kann man, nachdem der Werth des Cosinus und Sinus vermittelst der Potenzen des Bogens gefunden ist, jenen des Bogens selbst verlangen. Die Probleme dieser Gattung sind der Gegenstand der Wiederkehr der Reihen. Ich werde das Verfahren vor Augen legen, welches uns

New=

Newton, der es zuerst auflöste, in einem seiner Briefe an Oldenburg hinterlassen hat, weil mir dieses das eleganteste und das natürlichste scheinet.

Es sey x ein Kreisbogen und y sein Sinus, so wird man haben (Nr. 35)

$$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$$

Wenn man alle Potenzen von x, die erste ausgenommen, eliminiren könnte, so würde man den Werth von x in y haben; man wird auf folgende Art leicht hiezu gelangen.

Man berechne zuerst die 3te Potenz von y entweder geradezu, oder durch Hülfe der Formeln Nr. 20, und man wird nach gemachten Reductionen finden

$$y^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120} x^7 - \ldots$$

wenn man zwischen dieser Gleichung und der vorgegebenen x^3 als eine besondere unbekannte Größe eliminirt, so wird herauskommen:

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{120}\right] x^5 + \left[\frac{13}{720} - \frac{1}{5040}\right] x^7 - \ldots$$

welche, indem man reducirt, giebt,

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \frac{3x^5}{40} + \frac{x^7}{56}.$$

Macht man ferner die fünfte Potenz von y, so wird man haben

$$y^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} + \ldots$$

und bringt man x^5 aus dem letzten Resultat weg, so wird man finden

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{56}\right] x^7 + \ldots$$

oder

oder

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \frac{5x^7}{112} + \ldots$$

Man hat aber $y^7 = x^7 - \ldots$ folglich

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} = x + \ldots$$

Hier sind wir nun zu der Entwicklung von x in y gelangt, und zwar bis zur 7ten Potenz von y getrieben, und der Weg den wir dahin zu kommen gefolgt haben, ist einleuchtend genug, daß man ihn so weit man nur will fortsetzen kann. Wenn man noch zwey Glieder mehr berechnet, so wird man haben

$$y + \tfrac{1}{6}y^3 + \tfrac{3}{40}y^5 + \tfrac{5}{112}y^7 + \tfrac{35}{1152}y^9 + \tfrac{63}{2816}y^{11} + \ldots = x.$$

Ob man gleich nicht auf der Stelle das Gesetz der verschiedenen Glieder der vorgehenden Reihe einsieht, so wird man es doch finden, wenn man die Coefficienten und die numerischen Divisoren in den Factoren zerlegt solchergestalt wird man haben

$$y + \frac{y^2}{2.3} + \frac{3 \cdot y^5}{2.4.5} + \frac{3 \cdot 5 \cdot y^7}{2.4.6.7} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot y^9}{2.4.6.8.9}$$
$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot y^{11}}{2.4.6.8.10.11} + \ldots = x.$$

Dieses ist der Ausdruck des Bogens x nach den Potenzen seines Sinus y entwickelt.

Dieses Beyspiel würde auf gewisse Art hinlänglich seyn, um den Geist der Methode einzusehen. Wir werden indessen bemerken, daß wenn man

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

hätte, man zu mehrerer Bequemlichkeit die bestimmte Größe a in der andern Hälfte versetzen, und $a - y = z$ machen müßte, welches

$$z = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

geben

geben würde und das Resultat würde alsdann nach den Potenzen von z fortgehn: ohne diese Vorsicht würde jede Potenz von y neue Glieder hervorbringen die von x unabhängig wären, und es würde daraus für das erste Glied der gesuchten Entwicklung eine unbegrenzte Reihe
entstehen.

Wenn die vorgegebene Reihe die erste Potenz von x nicht enthielte, so würde man nur den Werth der am wenigsten erhöhten Potenz haben, und folglich müßte man aus dem Resultate eine Wurzel des durch den Exponenten dieser Potenz angezeigten Grades ziehen, welches vermittelst der Formeln von Nr. 20. leicht seyn würde.

Einer der merkwürdigsten Vortheile des Verfahrens, welches uns beschäftiget, ist, daß es gerade zu der Form der gesuchten Reihe führet. Es sey zum Beyspiel

$$z = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots$$

zuerst muß man x^3 eliminiren; dieserwegen muß man z zu einer solchen Potenz erheben, daß das erste Glied mit x^3 behaftet sey. Wir wollen setzen, daß diese Bedingung durch die Entwicklung von z^m erfüllt sey, so wird man nothwendigerweise haben

$$z^m = a^m x^{2m} + \ldots$$

folglich muß $2m = 3$ oder $m = \frac{3}{2}$ seyn. Man wird also die Reihe, welche z ausdrückt, zu der Potenz $\frac{3}{2}$ erheben, welches man leicht bewerkstelligen wird, wenn man ihr folgende Form giebt:

$$z = x^2[a + bx + cx^2 + \ldots],$$

und man wird finden

$$z^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} x^3 + \tfrac{3}{2} a^{\frac{3}{2}-1} x^4 + \ldots$$

Man bringe x^3 aus dieser Gleichung weg, so werden nur x^2, x^4, und höhern Potenzen bleiben. Wenn man z zum

Qua=

Quadrat erhebt, wird man ein Resultat erhalten, welches zur Eliminirung von x^4 dient. Diese Operation kann nun ohne Schwierigkeit fortgesetzt werden, selbst wenn es auch noch nöthig wäre, den Werth von z zu gebrochenen Potenzen zu erheben.

Die durch z vorgestellte Größe, könnte selbst eine Reihe nach den Potenzen von y geordnet seyn, ohne daß dadurch das Verfahren eine Aenderung erlitte; es würde bloß nöthig seyn, die Entwicklungen der verschieden Potenzen von z, in Bezug auf y zu ordnen, indem man von der ersten dieser Größen zur zweyten zurückgeht.

Wenn man endlich zwey Reihen wie folget hätte

$$\begin{cases} z = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots \\ t = a'x + b'x^2 + c'x^3 + \ldots \end{cases}$$

so könnte man durch die nemliche Methode die Entwicklung von z in t, und umgekehrt finden.

Um zum Beyspiel z zu haben, wird man den Werth von x und t in der zweyten Reihe nehmen, und so in der ersten substituiren. Das Resultat dieser Operation wird nur das Quadrat und die höhern Potenzen von x enthalten. Man wird hernach die zweyte Reihe zum Quadrat erheben, und daraus einen Werth von x^2 in t^2, x^3, x^4 u. s. w. ziehen, welches ein Mittel geben wird x^2 aus dem vorhergehenden Resultate wegzubringen; wenn man auf solche Art weiter fortfährt, so wird man nach und nach verschiedene Potenzen von x wegbringen. Das Verfahren, welches ich so eben angezeigt habe, kömmt mit dem gewöhnlich für die Eliminirung überein, jedoch mit dem Unterschiede, daß anstatt mit Wegbringung jener Glieder anzufangen die den höchsten Exponenten haben, man zuerst auf jene operirt, wo der Exponent am kleinsten ist.

Hier

Hier folgt nun eine allgemeine Formel, welche alle Fälle enthält, in welcher die Potenzen von x in arithmetischer Progression wachsen. Es sey

$$y = k + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \ldots$$

Wenn man k versetzt und zur Abkürzung $y - k = z$ macht, so wird man haben

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \ldots \quad (1).$$

Wenn man die Werthe von z^2, z^3, z^4 … berechnet, so wird man nach und nach x^2, x^3, x^4 … eliminiren können, wie wir solches in den vorhergehenden Beyspielen gemacht haben, und man wird finden

$$x = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a^3}z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)z^3 - \left(\frac{5b^3 - 5abc + a^2d}{a^7}\right)z^4$$
$$+ \left(\frac{14b^4 - 21ab^2c + ba^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}\right)z^5 + \ldots$$

Man kann auch zu dem nemlichen Resultate durch die Methoden der unbestimmten Coefficienten gelangen, indem man annimmt

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots$$

und die Werthe von x^2, x^3, x^4, x^5 … formirt, um sie in der Gleichung (1) zu substituiren. Nachdem diese Operationen ausgeführet sind, wird man den ersten Theil in den zweyten versetzen und alle zu einerley Potenz von z gehörigen Glieder gleich Null machen, welches die nöthigen Gleichungen geben wird, und die Coefficienten A, B, C … zu bestimmen. Wir werden nicht in das Einzelne ~~Detail~~ dieser Rechnungen eingehen, von denen man schon eine hinreichende Anzahl Beyspiele gesehen hat.

46.

Wir werden diese Einleitung mit einem Ausdrucke des Kreisbogens beschließen, der von der Form desjenigen die

die wir bis jetzt bekannt gemacht haben, verschieden ist, und womit Euler auch die Analysis bereichert hat.

Weil man

$$\sin.(x + z) = \sin.x.\cos.z + \cos.x.\cos.z,$$

hat, so wird man, indem man $z = x$ macht, finden

$$\sin 2x = 2\sin.x.\cos.x.$$

Wenn man $\frac{1}{2}x$ für x substituirt, so wird herauskommen:

$$\sin.x = 2\sin.\tfrac{1}{2}x.\cos.\tfrac{1}{2}x.$$

Indem man von neuem die nemliche Substitution macht, so wird man erhalten

$$\sin.\tfrac{1}{2}x = 2\sin.\tfrac{1}{4}x.\cos.\tfrac{1}{4}x,$$

wenn man diesen Werth von $\sin.\frac{1}{2}x$ in jenen von $\sin.x$ setzt, so wird sich daraus ergeben

$$\sin.x = 4\sin.\tfrac{1}{4}x.\cos.\tfrac{1}{2}x\cos.\tfrac{1}{4}x.$$

Man wird, wenn man ferner so operirt, haben

$$\sin.\tfrac{1}{4}x = 2\sin.\tfrac{1}{8}x.\cos.\tfrac{1}{8}x$$

folglich

$$\sin x = 8\sin.\tfrac{1}{8}x.\cos.\tfrac{1}{2}x.\cos.\tfrac{1}{4}x.\cos.\tfrac{1}{8}x.$$

Durch Hülfe der Gleichung

$$\sin.\tfrac{1}{8}x = 2\sin.\tfrac{1}{16}x.\cos.\tfrac{1}{16}x,$$

kann man $\frac{1}{8}x$ herausschaffen, es wird also herauskommen

$$\sin.x = 16\sin.\tfrac{1}{16}x.\cos.\tfrac{1}{2}x.\cos.\tfrac{1}{4}x.\cos.\tfrac{1}{8}x.\cos.\tfrac{1}{16}x.$$

Man sieht, daß, wenn man auf ähnliche Weise fortfährt, man jedesmal einen neuen Cosinus einführet, und daß man überhaupt haben wird

$$\sin.x = 2^n\sin.\frac{1}{2^n}x.\cos.\tfrac{1}{2}x.\cos.\tfrac{1}{4}x.\cos.\tfrac{1}{8}x.\cos.\tfrac{1}{16}x\ldots\cos.\frac{1}{2^n}x,$$

Aber je größer n ist, desto kleiner wird der Bogen $\frac{1}{2^n}x$ seyn, und folglich wird sein Sinus um so weniger von ihm und sein Cosinus von dem Radius oder der Einheit unterschieden seyn. Die Grenze des vorstehenden Ausdruckes wird also seyn

$$\sin.x = x\cos.\tfrac{1}{2}x\ \cos.\tfrac{1}{4}x\ \cos.\tfrac{1}{8}x\ \ldots$$

und hieraus wird man ziehen

$$x = \frac{\sin.x}{\cos.\frac{1}{2}x\ \cos.\frac{1}{4}x\ \cos.\frac{1}{8}x\ \ldots}$$

aber man weiß, daß

$$\frac{1}{\cos.z} = \sec.z;\ \text{also}\ x = \sin.x\ \sec.\tfrac{1}{2}x\ \sec.\tfrac{1}{4}x\ \sec.\tfrac{1}{8}x\ \ldots$$

Dieses Product nähert sich immer einen endlichen Werth, denn so wie der Bogen geringer wird, nähert sich die Sekante dem Radius oder oder der Einheit, die Factoren gehn also immer abnehmend fort.

Wenn man die Logarithmen nimmt, so würde man dieses Resultat zu der Form einer gewöhnlichen Reihe bringen, denn man würde finden

$$lx = l\sin.x + l\sec.\tfrac{1}{2}x + l\sec.\tfrac{1}{4}x + l\sec\tfrac{1}{8}x\ \ldots$$

In dem Capitel dieses Werks, wo von Entwicklung der Functionen in Reihen gehandelt wird, werden wir die vorstehenden Untersuchungen durch einfachere und fruchtbarere Methoden ergänzen. In dieser Einleitung war unser Ziel bloß den Leser mit den Betrachtungen der Reihen bekannt zu machen, und ihn dadurch zu dem folgenden Kapitel vorzubereiten, wo die Theorie des Differentialcalculs aus der Entwicklung der Functionen in Reihen hergeleitet wird, ein Weg der zugleich der einleuchtendste und directeste ist, und welchen der Bürger Lagrange zum erstenmal in den Abhandlungen der Akademie zu Berlin 1772 bekannt gemacht hat.

Abhand-

Abhandlung

des Differential- und Integralcalculs.

Erster Theil.

Von dem Differentialcalcul.

Erstes Kapitel.

Analytische Darstellung der Principien des Differentialcalculs.

Es würde sehr schwer seyn, die Natur des Differentialcalculs jenen deutlich zu erklären, die die ersten Begriffe davon nicht haben. Nicht daß man diesen Calcul nicht strenge definiren könnte, sondern weil man es nicht bewerkstelligen kann, ohne solche Ideen zu entlehnen die sich in den gemeinen Leben nicht finden, auch in den Theilen der Mathematik nicht vorkommen, welche der Gegenstand der vorhergehenden Studien sind. Glücklicherweise verbindet uns nichts, eine Abhandlung mit

Definitionen anzufangen, welche, wie Pascal sagt, nur darin bestehen, denen Sachen, die man in vollkommen bekannten Ausdrücken angezeigt hat, einen Nahmen beyzulegen. Wir werden also sogleich die vorläufigen Begriffe darstellen, welche dem Differentialcalcul das Dasein geben, und dadurch werden wir seine Verbindung mit der Entwicklung der Functionen zeigen, mit denen wir uns in der Einleitung beschäftiget haben.

1.

Von den Veränderungrn, welche eine Function von x erleidet, wenn x, x+K giebt.

Die Algebra im eigentlichen Sinne hat die Größe in sich selbst betrachtet zum Gegenstande, die auf einen fixen und bestimmten Zustand der Größe gebracht ist; die Beziehnngen, welche gewissen gegeberen Bedingungen unterworfene Größen unter sich haben müssen, sind der Gegenstand der Fragen, die man darin abhandelt.

In dem Theile der Analysis der uns nun beschäftigen wird, setzt man im Gegentheile voraus, daß die Größe durch verschiedene Zustände der Größe geht, und man betrachtet die Veränderungen die dadurch in ihren Functionen entstehn.

In so weit die Größen als ihren Zustand verändernd, oder verändern könnend betrachtet werden, nennt man sie veränderliche, und man giebt den Nahmen Beständige jenen, welche in der Folge der Rechnung immer den nemlichen Werth beibehalten. Hierdurch sieht man, daß die Natur der vorgesetzten Frage bestimmt, welche Größen als veränderliche und welche als beständige angesehen werden müssen.

Wenn

Wenn eine veränderliche Größe x einen durch k vorgestellten Zuwachs erhält, muß man um zu finden, was hernach die Functionen dieser Größe werden, x + k statt x in ihrem Ausdrucke schreiben; wenn man z. B. x^2, x^3, und $\frac{ax}{a^2+x^2}$ nimmt, wird herauskommen

$$(x+k)^2 = x^2 + 2xk + k^2$$
$$(x+k)^3 = x^3 + 3x^2k + 3xk^2 + k^3$$
$$\frac{a(x+k)}{a^2+(x+k)^2} = \frac{ax+ak}{a^2+x^2+2xk+k^2}$$

In dem Falle wo x eine Verminderung statt eines Zuwachses erlitten haben würde, müßte man statt x, setzen x — k, oder k das Zeichen — geben.

2.

Die vor ~~wenige~~ Untersuchung wird, wie man sieht keiner Schwierigkeit ausgesetzt seyn, wenn es um eine Function zu thun ist, deren Zusammensetzung bekannt ist, das heißt einer ~~explicite~~ Function; es scheint selbst auf den ersten Anblick, daß sie zu keinen sehr interessanten Resultaten führen müsse; wenn man indessen den Ausdruck des neuen Werthes der vorgesetzten Function in einer nach den Potenzen von k geordneten Reihe entwickelt, so wird sie sich in einer Form darstellen, die eine besondere Aufmerksamkeit verdienet. Man könnte diese Form auf allgemeinen Betrachtungen gründen, aber in einem Werke, von der Natur des unsrigen scheint es zuträglicher sie von der Untersuchung besonderer Fälle abzuleiten; deßwegen werden wir, wie so eben gesagt wurde, die verschiedenen Gattungen von Functionen nach und nach abhandeln, mit denen wir uns in der Einleitung beschäftiget haben.

1. Wenn man in der Funktion x^n, $(x + k)$ statt x setzt, wird herauskommen

$$(x+k)^n = x^n + nx^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} k^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^{n-3} k^3 \ldots$$

Man muß bemerken, daß diese Entwicklung zum ersten Gliede die vorgesetzte Function x^n hat, und daß sie eine Reihe von Functionen hervorbringt

$$nx^{n-1}, \quad \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} x^{n-3} \ldots$$

welche die verschiedenen Potenzen von k multipliciren. Diese Functionen müssen als von der ersten abgeleitet, betrachtet werden, durch die Umformung unter die man selbe gebracht hat, und ihre Betrachtung ist von dem Werthe von k ganz unabhängig.

Jede rationale und ganze Function von x, welche nur von dieser Form

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

seyn kann, führet zu einem ähnlichen Resultate, denn wenn $x + k$ für x setzet, so findet man

$$A(x+k)^a + B(x+k)^b + C(x+k)^c + \ldots$$

und durch die Entwicklung

$$\left.\begin{matrix} Ax^a \\ +Bx^b \\ +Cx^c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} +aAx^{a-1} \\ +bBx^{b-1} \\ +cCx^{c-1} \end{matrix}\right\} k + \left.\begin{matrix} \frac{a(a-1)}{2} Ax^{a-2} \\ +\frac{b(b-1)}{2} Bx^{b-2} \\ +\frac{c(c-1)}{2} Cx^{c-2} \end{matrix}\right\} k^2 + \ldots$$
$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Der in diesem Ausdrucke unabhängige Theil von k ist wieder die vorgegebene Function; wenn man ihn durch y vorstellt, und die Coefficienten der aufeinander folgenden

den Potenzen von k durch $p, q, r \ldots$ bezeichnet, wird herauskommen

$$u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots$$

Man wird das Resultat

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

welches die Potenz des Polynoms giebt, wenn sich x in $x + k$ verändert, leicht zu dieser Form zurückführen; In der That, da dieses Polynom durch u vorstellt ist, so wird es selbst nach dem Vorhergehenden

$$u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots$$

man hat folglich

$$(u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots)^n$$

nach den Potenzen von k zu entwickeln; was aber n immer sey, so werden die Formeln von Nr. 20 zu einem Ausdruck führen von folgender Form

$$u^n + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \ldots$$

wo $P, Q, R \ldots$ Functionen von x unabhängig von k sind.

Die gebrochene Function

$$\frac{A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \ldots}{Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots}$$

kann auf folgende Art geschrieben werden

$$(A'x^{a'} + B'x^{b'} + C'x^{c'} + \ldots)\,(Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots)^{-1}$$

Wenn man aber $x + k$ für x setzet, wird der zweyte Factor

$$(u + pk + qk^2 + rk^3 + \ldots)^{-1}$$

und seine Entwicklung nimmt die Form

$$u^{-1} + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \ldots$$

was den ersten anbelangt, wird man ihn in seinem neuen Zustande durch

$$u' + p'k + q'k^2 + r'k^3 + \ldots$$

vorstellen, wo $u', p', q', r' \ldots$ analoge Functionen von

von denen sind, welche durch die Buchstaben p, q, r... bezeichnet sind; die vorgegebene Function wird also

$$(u'+p'k+q'k^2+r'k^3+\ldots)(u^{-1}+Pk+Qk^2+Rk^3+\ldots)$$

Wenn man die angezeigte Multiplication macht, so wird man finden

$$u'u^{-1}+\left.\begin{matrix}u'P\\+u^{-1}p'\end{matrix}\right\} k+\left.\begin{matrix}u'Q\\+p'P\\+u^{-1}q'\end{matrix}\right\} k^2+\ldots$$

aber $u'u^{-1}$ ist das nemliche wie $\frac{u'}{u}$ oder die vorgegebene Function, folglich wird das Resultat das man so eben erhalten hat zur vorigen Form zurückgebracht.

2. Die exponential, die logarithmischen und die Kreisfunctionen führen auch zu ähnlichen Entwicklungen, wenn man dort x in $x+k$ verwandelt.

a^x wird in diesem Falle $a^{x+k}=a^x\times a^k$, nun nach der Formel Nr. 22 (Einl.)

$$a^k=1+\frac{l'a}{1}k+\frac{(l'a)^2}{1.2}k^2+\frac{(l'a)^3}{1.2.3}k^3+\ldots$$

man hat also

$$a^{x+k}=a^x+a^x(l'a)k+\frac{a^x(l'a)^2}{2}k^2+\frac{a^x(l'a)^3}{2.3}k^3+\ldots$$

$l'(x)$ verändert sich in

$$l'(x+k)=l'x+l'(1+\frac{k}{x})$$

und zufolge von Nr. 26. (Einl.)

$$l'(1+\frac{k}{x})=\frac{k}{x}-\frac{k^2}{2x^2}+\frac{k^3}{3x^3}-\ldots$$

folglich

$$l'(x+k)=l'x+\frac{1}{x}k-\frac{1}{2x^2}k^2+\frac{1}{3x^3}k^3+\ldots$$

Setzt

Setzt man $x + k$ für x in $\sin. x$, so findet man durch die bekannten Formeln

$$\sin.(x + k) = \sin. x \cos. k + \cos. x \sin. k,$$

aber
$$\begin{cases} \cos k = 1 - \dfrac{k^2}{1.2} + \dfrac{k^4}{1.2.3.4} - \ldots \\ \sin. k = k - \dfrac{k^3}{1.2.3} + \dfrac{k^5}{1.2.3.4.5} - \ldots, \end{cases}$$

hieraus folgt, daß

$$\sin.(x + k) = \sin. x + \frac{\cos. x}{1} k - \frac{\sin. x}{1.2} k^2 - \frac{\cos. x}{1.2.3} k^3 + \ldots$$

Endlich $\cos.(x + k)$ wird

$$\cos. x \cos. - \sin. x \sin. k,$$

und indem man für $\cos. k$ und $\sin k$ ihre Werthe in einer Reihe ausgedrückt setzt, so erhält man

$$\cos.(x + k) = \cos. x - \frac{\sin. x}{1} k - \frac{\cos. x}{1.2} k^2 - \frac{\cos x}{1.2.3} k^3 + \ldots$$

Wegen der Analogie können wir aus den vorhergehenden schließen, daß, wenn u irgend eine Function von x vorstellt, und wenn man in dieser Function $x + k$ statt x schreibt, ihre Entwicklung diese Form

$$u + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \ldots$$

annehmen muß. Wir werden in der Folge sehen, daß dieser Satz in der That ganz allgemein ist. Was den absoluten Werth der Veränderung anbetrift, welchen die ursprüngliche Function u vermöge des Zuwachses der veränderlichen Größe x erhält, von welcher sie abhängt, so wollen wir diese bey Seite setzen, und uns bloß mit den Functionen P, Q, R..., beschäftigen, welche sie erzeugt, wenn man sie in ihren neuen Zustand entwickelt.

3.

Wir werden uns zuerst bemühen, die Beziehungen zu bestimmen, welche die Functionen P, Q, R . . . mit den vorgegebenen haben, und um hierzu auf eine leichte Art zu gelangen, so wollen wir damit anfangen, einen besondern Fall zu betrachten, nemlich den der Function x^n, welche, wenn sich x in $x + k$ verändert

$$(x+k)^n = x^n + \frac{nx^{n-1}}{1}k + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{1.2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{1.2.3}k^3 \ldots$$

giebt.

Wenn man mit Aufmerksamkeit die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von k untersucht, und von ihren Nennern abstrahirt, so wird man bald bemerken, daß es leicht ist, dieselbe alle aus x^n durch eine Folge ähnlicher Operationen abzuleiten. In der That, da der Coefficient von k in der Entwicklung von $(x+k)^n$, nx^{n-1} ist, so wird der nemliche Coefficient in der Entwicklung von

$$\left.\begin{array}{r} n(x+k)^{n-1} \\ n(n-1)(x+k)^{n-2} \\ n(n-1)(n-2)(x+k)^{n-3} \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{r} n(n-1)x^{n-2} \\ n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ \vdots \end{array}\right.$$

seyn.

Es folgt hieraus, daß man jede der Functionen

$$x^n,\ nx^{n-1},\ n(n-1)x^{n-2},\ n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \ldots$$

(die erste ausgenommen, welches die vorgegebene Function ist) findet, wenn man in der, welche ihr vorhergeht, $x + k$ statt x substituirt, und davon denjenigen Coefficienten nimmt, welcher in der Entwicklung die aus die-

ser

ser Substitution entstehen wird, die erste Potenz von k multiplicirt.

Wenn die Function

$$Ax^a \quad + \quad Bx^b \quad + \quad Cx^c \quad + \ldots$$

$$A(x+k)^a + B(x+k)^b + C(x+k)^c + \ldots$$

wird, so kann man bey der Entwicklung der verschiedenen Glieder aus welchen sie besteht, die Bemerkung anwenden, welche so eben über die Entwicklung von $(x+k)^n$ gemacht wurde, und es wird sich daher jede dieser Functionen

$$\left.\begin{array}{l} Ax^a \\ + Bx^b \\ + Cx^c \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} aAx^{a-1} \\ + bBx^{b-1} \\ + cCx^{c-1} \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} a(a-1)Ax^{a-2} \\ + b(b-1)Bx^{b-2} \\ + c(c-1)Cx^{c-2} \end{array}\right\},$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a(a-1)\,(a-2)Ax^{a-3} \\ + b(b-1)\,(b-2)Bx^{b-3} \\ + c(c-1)\,(c-2)Cx^{c-3} \end{array}\right\} \ldots$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

aus den verhergehenden ableiten lassen, wenn man darin x in $x+k$ verändert, und aus der Entwicklung des Resultats den Coefficienten der ersten Potenz von k nimmt; wenn man aber diese Coefficienten respective durch 1, 1.2, 1.2.3, u. s. w. dividirt, und mit dieser Division beym zweyten Coefficienten anfängt, so erhält man die Coefficienten der Potenzen von k in

$$A(x+k)^a + B(x+k)^b + C(x+k)^c + \ldots$$

diese Coefficienten werden also noch in dem jetzigen Falle auf dieselbe Art auseinander entstehen, als in dem vorigen Falle.

Es

Es ist leicht einzusehen, daß das nemliche, bey allen Functionen, welche wir in der Einleitung betrachtet haben, statt haben muß, weil jede von ihnen unter der Form

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

gebracht werden kann, wenn man sie in einer Reihe entwickelt. Weil aber hieraus neue Reihen für die Coefficienten der Potenzen von k entstehen, selbst denn noch, wenn sie durch eine begrenzte Anzahl von Gliedern ausgedrückt werden können; so werden wir uns nicht weiter bey diesem Beweise aufhalten; und überhaupt, da es jetzt leicht seyn wird, den vorhergehenden Betrachtungen in ihrer größern Allgemeinheit zu folgen, so wollen wir die Untersuchung der besondern Fälle nicht weiter treiben.

4.

Um eine Function vorzustellen, ohne auf irgend eine Art anzuzeigen wie sie zusammengesetzt seyn kann, so werde ich mich des Zeichens f bedienen; und man muß unter den Ausdruck $f(x)$, irgend eine Function von x verstehen, indem man unter dieser Benennung alles das begreift, welches die Definition des Worts Function (Einleit. Nr. 1) mit sich bringt: man muß sich daher wohl in Acht nehmen diesen Buchstaben f für einen Coefficienten von x zu halten. Ich werde die Substitution von $x + k$ statt x in $f(x)$, wie folgt andeuten, indem ich schreibe $f(x + k)$, und dies will sagen, daß das Resultat eben so aus $x + k$ zusammengesetzt ist, wie es die Ursprüngliche aus x ist. Wir wollen jetzt annehmen, daß $f(x + k)$ in Beziehung auf die Potenzen von k entwickelt.

$$f(x + k) = X_0 + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + X_4 k^4 + \ldots$$

giebt, wo X_0, X_1, $X_2 \ldots$ Functionen von x bezeichnen die unabhängig von k sind; macht man $k = 0$, so reducirt sich diese Gleichung auf $f(x) = X_0$; welches zeigt, daß man darunter verstehen muß, daß das erste Glied der Entwicklung immer die vorgegebene Function selbst ist, und daß man ganz allgemein

$$f(x+k) = f(x) + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + X_4 k^4 + \ldots$$

hat.

Es ist leicht zu sehen, daß man nicht annehmen darf, die Entwicklung von $f(x + k)$ enthalte negative Potenzen von k; denn wenn sie Glieder von der Form $\frac{X_n}{k^n}$ enthielte, so wird sie unendlich werden, wenn man $k = 0$ setzte, und sie würde folglich in diesen Fall mit der ursprünglichen Function nicht übereinstimmen, welches doch die Natur der Substitution selbst aus welcher sie entstanden ist erfordert.

5.

Dies festgesetzt, so will ich beweisen, daß die Functionen X_1, X_2, X_3, ... sich von einander und von der ursprünglichen Function durch ein gleichförmiges Verfahren herleiten lassen, so daß, wenn man X_1 aus $f(x)$ zu bestimmen wüßte, man durch eine Reihe ähnlicher Operationen, X_1, X_2, X_3, ... finden könnte.

Zu diesem Endzweck werde ich annehmen, daß in $f(x + k)$ die veränderliche Größe x einen neuen Zuwachs erhalte, welchen ich durch k' vorstellen will, und folglich $x + k'$ statt x in $f(x + k)$ und in seiner Entwicklung schreiben. Um aber diese Substitution in den Functionen

$$f(x),\ X_1,\ X_2,\ X_3\ \ldots$$

zu machen, so bemerke ich zuerst daß aus $f(x)$

$f(x+k')$

$f(x + k') = f(x) + X_1 k' + X_2 k'^2 + X_3 k'^3 + \ldots$ wird, weil dies die nemliche Function als $f(x + k)$ ist, und man bloß k ~~und~~ in k' verändert hat: was die Coefficienten X_1, X_2, X_3, ... als Functionen von X anbetrift, so müssen sie, wenn man darin $x + k'$ statt x substituirt, eine Form annehmen, welche der für $f(x + k')$ angenommen analogisch ist, man wird also statt

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array}\right\} \text{ die Reihen } \left.\begin{array}{l} X_1 + X_1' k' + X_1'' k'^2 + \ldots \\ X_2 + X_2' k' + X_2'' k'^2 + \ldots \\ X_3 + X_3' k' + X_3'' k'^2 + \ldots \\ X_4 + X_4' k' + X_4'' k'^2 + \ldots \end{array}\right\}$$

schreiben können, in welchen

$$\left.\begin{array}{l} X_1', X_1'' \ldots \\ X_2', X_2'' \ldots \\ X_3', X_3'' \ldots \end{array}\right\}$$

neue Functionen von x vorstellen, die eben so von

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array}\right.$$

abgeleitet sind, als diese letztern es aus der vorgegebenen Function $f(x)$ sind. Setzt man an die Stelle von

$$f(x),\ X_1,\ X_2,\ X_3 \ldots$$

die eben gebildeten Ausdrücke, und ordnet das Resultat so, daß alle mit einerley Potenz von k' behafteten Glieder in einer vertical Columne zu stehen kommen, so erhält man

(x)
$$\left.\begin{array}{l} f\cancel{(X)} \\ + X_1 k \\ + X_2 k^2 \\ + X_3 k^3 \\ + X_4 k^4 \\ \vdots \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} + X_1 \\ + X_1' k \\ + X_2' k^2 \\ + X_3' k^3 \\ + X_4' k^4 \\ \vdots \end{array}\right\} k' \left.\begin{array}{l} + X_2 \\ + X_1'' k \\ + X_2'' k^2 \\ + X_3'' k^3 \\ + X_4'' k^4 \\ \vdots \end{array}\right\} k'^2 + \ldots$$

Indem man aber in $f(x+k)$, $x+k'$ statt x schreibt so entsteht daraus $f(x+k+k')$: da man nun von dieser Function eine andere Entwicklung finden kann als die vorige, wenn man bemerkt, daß man auch annehmen kann, k habe durch die Größe k' einen Zuwachs erhalten, und daß man dadurch $f(x+k+k')$ erhält. Um diese Veränderung in Rechnung zu bringen, so braucht man nur $k+k'$ an die Stelle von k in der Reihe

$$f(x) + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + \ldots$$

zu setzen, welche alsdenn

$$f(x) + X_1(k+k') + X_2(k+k')^2 + X_3(k+k')^3 + X_4(k+k')^4 + \ldots$$

wird.

Entwickelt man die angezeigte Potenzen des Binomiums $(k+k')$, und ordnet sie wie oben, so wird man finden

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \\ +X_1 k \\ +X_2 k^2 \\ +X_3 k^3 \\ +X_4 k^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} +X_1 \\ +2X_2 k \\ +3X_3 k^2 \\ +4X_4 k^3 \\ +5X_5 k^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} k' \left.\begin{array}{l} +X_2 \\ +3X_3 k \\ +6X_4 k^2 \\ +10X_5 k^3 \\ +15X_6 k^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} k'^2 + \ldots$$

Vergleicht man dies Resultat mit dem vorigen, so wird man finden, daß die erste Columne des einen mit der ersten Columne des andern identisch ist; geht man endlich zur zweyten Columne, so kann man daraus ableiten

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_1 \\ X_1' = 2X_2 \\ X_2' = 3X_3 \\ X_3' = 4X_4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X'_{n-1} = nX_n \end{array}\right\}\text{woraus folgt}\left\{\begin{array}{l} X_1 = X_1 \\ X_2 = \frac{X_1'}{2} \\ X_3 = \frac{X_2'}{3} \\ X_4 = \frac{X_3'}{4} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_n = \frac{X'_{n-1}}{n} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lcr} \cdot & \quad & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

Wir werden nicht über dieser zweyten Columne hinaus gehen, weil diese Gleichungen hinreichen um X_1, X_2, X_3, . . . zu bestimmen, wie man sogleich sehen wird.

Nach der Uebereinkunft ist demnach X_1 der Coefficient von k in der Entwicklung von $f(x+k)$; X_1' ist von X_1 eben so abgeleitet, als X_1 von $f(x)$:

Stellt man also X_1 durch $f'(x)$ vor, so wird X_1' der Coefficient von k in $f(x + k)$ seyn. Nennt man diesen letzten Coefficienten $f''(x)$ so erhält man $X_1' = f''(x)$; und indem man in der Gleichung

$$X_2 = \frac{X_1'}{2}$$

substituirt, so wird man

$$X_2 = \frac{f''(x)}{2} \text{ finden.}$$

X_2' ist von X_2 abgeleitet, wie es X_1 von $f(x)$ ist: folglich wird X_2' der Coefficient von k in $\frac{f''(x + k)}{2}$ seyn.

Nennt

Nennt man $f'''(x)$ den Coefficienten von k in $f''(x+k)$, so hat man

$$X_2' = \frac{f'''(x)}{2} \text{ (*)}.$$

Dieser Werth in

$$X_3 = \frac{X_2'}{3}$$

substituirt, giebt

$$X_3 = \frac{f'''(x)}{2 \cdot 3}.$$

X_3' ist von X_3 eben so abgeleitet als X_2 von $f(x)$ folglich wird X_3' der Coefficient von k in

$$\frac{f'''(x+k)}{2 \cdot 3}$$

seyn.

Nennt man $f^{\text{IV}}(x)$ den Coefficienten von k in $f'''(x+k)$, so wird man haben

$$X_3' = \frac{f^{\text{IV}}(x)}{2 \cdot 3};$$

wird

*) Ich glaubte nicht den Beweis verlängern zu dürfen, um zu beweisen, daß der Coefficient von k in der Entwicklung

$$\frac{f''(x+k)}{2}, \quad \frac{f'''(x)}{2}$$

sey. Wenn man aber in dieser Hinsicht einigen Zweifel hegen wollte, so wird man leicht sehen, daß wenn $f(x)$

$$f(x+k) = f(x) + f'(x)k + \ldots$$

wird, sich auch $\frac{f(x)}{m}$ in

$$\frac{f(x+k)}{m} = \frac{f(x)}{m} + \frac{f'(x)}{m} \text{ u. s. w.}$$

verändern wird. Eben so verhält es sich auch mit

$$f'(x),\ f''(x) \ldots$$

wird dieser Werth in

$$X_4 = \frac{X_3'}{4}$$

substituirt, so findet man

$$X_4 = \frac{f^{IV}(x)}{2.3.4}.$$

Man könnte dies Verfahren unbegrenzt fortsetzen; wenn man aber die schon gefundenen Resultate zusammenstellt, um ihr Gesetz zu entdecken, so werden wir sehen, daß nachdem die Coefficienten von k in der Entwicklung von

$$\left.\begin{array}{c} f(x+k) \\ f'(x+k) \\ f''(x+k) \\ f'''(x+k) \\ \cdots \\ f^{(n-1)}(x+k) \\ \vdots \end{array}\right\} \text{durch} \left\{\begin{array}{c} f'(x) \\ f''(x) \\ f'''(x) \\ f^{IV}(x) \\ \cdots \\ f^{(n)}(x) \\ \vdots \end{array}\right.$$

bezeichnet sind, man vermöge der Hypothese haben wird

$$X_1 = \frac{f'(x)}{1}$$

woraus man zieht

$$X_1' = \frac{f''(x)}{1}$$

und

$$X_2 = \frac{f''(x)}{1.2}$$

denn

ferner ~~denn~~ von

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= \frac{f''(x)}{1\,.\,2} \\ X_3 &= \frac{f'''(x)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_{n-1} &= \frac{f^{(n-1)}(x)}{1\ldots n-1} \end{aligned}\right\}$$

$$\vdots$$

zieht man

$$\left.\begin{aligned} X_2{}' &= \frac{f'''(x)}{1\,.\,2} \\ X_3{}' &= \frac{f''''(x)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X'_{n-1} &= \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n-1} \end{aligned}\right\}$$

$$\vdots$$

und

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= \frac{f'''(x)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ X_4 &= \frac{f^{IV}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= \frac{f^{(n)}(x)}{1\ldots n} \end{aligned}\right]$$

$$\vdots$$

Substituirt man nun statt X_1, X_2, X_3, u. s. w. ihre Werthe in der Entwicklung von

$$f(x+k) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}k + \frac{f''(x)}{1\,.\,2}k^2 + \frac{f'''(x)}{1\,.\,2\,.\,3}k^3$$
$$\frac{f^{IV}(x)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}k^4 \ldots$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck der Entwicklung von dem Werthe, den eine beliebige Function von x annimmt, wenn die Größe x einen Zuwachs k erhalten hat; und man sieht, daß man, um diese Entwicklung von verschiedenen besondern Fällen, welche sich darbieten können anzuwenden, bloß die Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)\ldots$ von der vorgegebenen abzuleiten wissen muß.

6.

Wir wollen zum Beyspiel annehmen, man hätte $f(x) = x^n$, so erhält man nach Nr. 3

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x) = nx^{n-1} \\ f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) = n(n-1)\,(n-2)x^{n-3} \\ f^{IV}(x) = n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)x^{n-4} \end{array}\right.$$

wenn man diese Werthe in dem Ausdruck von $f(x+k)$ substituirt, so wird man haben:

$$(x+k)^n = x^n + \frac{nx^{n-1}}{1}k + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{1\,.\,2}k^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)x^{n-3}}{1\,.\,2\,.\,3}k^3 + \ldots$$

Die Formel von Newton ist also noch auf eine von der Natur des Exponenten n, unabhängige Art bewiesen; denn wir haben in den vorhergehenden Untersuchungen, bloß die beyden ersten Glieder dieser Formel gebraucht, welche man wie wir in der Einleitung (Nr. 16) gesehen haben, a priori finden kann.

7.

Nun ist es möglich darzuthun, daß die Indentität der beyden Entwicklungen von $f(x+k+k')$ die Nr. 5 gebildet sind, vollständig ist, obgleich diese Indentität nur

nur bey den Gliedern, welche mit der ersten Potenz von k′ behaftet sind berichtigt ist. Demnach, wenn man x + k′ statt x in $f(x+k)$ und in seiner Entwicklung setzt, so erhält man

$$f(x+k+k') = f(x+k') + \frac{f'(x+k')}{1}k + \frac{f''(x+k')}{1.2}k^2 + .. + \frac{f^{(n)}(x+k')}{1...n}k^n + ...$$

und dann ferner

$$f(x+k') = f(x) + \frac{f'(x)}{1}k' + \frac{f''(x)}{1.2}k'^2 + ... + \frac{f^{(m)}(x)}{1...m}k'^m + ...(*)$$

Aber die Entwicklung von $f^{(n)}(x+k')$ reducirt sich auf die von $f(x+k')$, wenn man $f'(x), f''(x), f'''(x)$ ... durch die Functionen

$$f^{(n+1)}(x), f^{(n+2)}(x), f^{(n+3)}(x) ...$$

ersetzt, welche von $f^{(n)}(x)$ eben so abstammen als die ersten von $f(x)$, man wird also haben

$$f^{(n)}(x+k') = f^{(n)}(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{1}k' + \frac{f^{(n+2)}(x)}{1.2}k'^2 + ... \frac{f^{(n+m)}(x)}{1...m}k'^m + ...$$

Da nun k^n durch

$$\frac{f^{(n)}(x+k')}{1.2...n}$$

 multi-

*) Man muß nicht vergessen, daß die Exponenten des Buchstaben f die Anzahl der Accente bezeichnet, welche dieser Buchstabe haben müßte, um sie daher von den Exponenten der Potenzen zu unterscheiden, so hat man sie in einer Parenthese eingeschlossen.

multiplicirt ist, so folgt daraus, daß das Product $k^n k'^m$ zum Coefficienten in der letzten Entwicklung,

$$\frac{f^{(n+m)} x)}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots m}$$

hat.

Aber die Substitution von $k + k'$ an die Stelle von k giebt

$$f(x+k+k') = f(x) + \frac{f'(x)}{1}(k+k') + \frac{f''(x)}{1.2}(k+k')^2$$
$$+ \frac{f'''(x)}{1.2.3}(k+k')^3 + \ldots$$

und das Product $k^n k'^m$, welches zu der Entwicklung von $(k + k')^{n+m}$ gehört, wird zum Coefficienten in dieser Entwicklung,

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots m}$$

haben, ferner wird es durch

$$\frac{f^{(n+m)}(x)}{1.2\ldots(n+m)}$$

multiplicirt seyn, ein Coefficient, welcher zu $(k + k')^{n+m}$ gehört; man wird also finden

$$\frac{(n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots m} \times \frac{f^{(n+m)}(x)}{1.2\ldots(n+m)},$$

oder wenn man reducirt

$$\frac{f^{(n+m)}(x)}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots m},$$

das heißt, das nemliche wie vorhin.

Wir können also aus dem Vorhergehenden schließen, daß man $f(x+k)$ immer auf eine Reihe von der Form

$$X_0 + X_1 k + X_2 k^2 + \ldots$$

reduciren kann, wenn mrn nur den Coefficienten von der ersten Potenz von k zu finden weiß, welche Function es auch sey.

8.

8.

Diese Art die Coefficienten den Potenzen von k zu finden, indem man sie successive von einander ableitet, ist an sich selbst einfacher als sie es beym ersten Anblick scheint; denn wenn sie auf der einen Seite erfordert, daß man eine Menge verschiedener Functionen zu entwickeln wisse, so schränkt sie auf der andern Seite, diese Operation wieder darauf ein, nur das zweyte Glied von jeder unter ihnen zu finden: sie führt überdem zu einen Calcul, welche zur Auflösung solcher Aufgaben dient, die die Kraft der gewöhnlichen Algebra übersteigen. Ob wir gleich jetzt die Natur dieser Aufgaben nicht angeben können, so ist es doch leicht zu sehen, daß der Calcul von dem wir sprechen, geschickt seyn muß die Relation einer neuen Art zwischen den Functionen und den Größen von welchen sie abhängen auszudrücken; denn wer auch nur wenig über das analytische Verfahren nachgedacht hat, wird doch bemerkt haben, daß jede im Calcul eingeführte Operation, zu neuen ihm eignen Relationen Anlaß giebt: so giebt die Addition Anlaß zu Summen und Differenzen; Multiplication zu Producte und Quotienten, Potenzen und Wurzeln; endlich führt die Betrachtung der Abhängigkeit, welche zwischen den Potenzen von einerley Größe mit ihren Exponenten statt findet, zu den Logarithmen. *)

*) Diese Zusammenstellungen sind in einem Kapitel von Eulers Algebra entwickelt, folgender Auszug soll für diejenigen seyn, welche Eulers Algebra nicht kennen.

Wenn man die Beziehung, welche zwischen den verschiedenen Gliedern einer Operation statt finden, durch eine Glei-

chung

Die successive Ableitung der Functionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$... die sich von der vorgegebenen Function $f(x)$

chung ausdrückt, so entstehen aus diesen Gliedern successive alle Operationen der gemeinen Algebra.

Es seyn a und b zwey Größen, die zusammenaddirt werden sollen, und c sey ihre Summe, so hat man $a + b = c$; wenn man aus dieser Gleichung den Werth von a oder b ziehen will, so findet man

$$a = c - b$$
$$b = c - a$$

Wenn eine von den Größen a oder b die Größe c übertrift, so wird das Resultat alsdenn eine negative Größe. Aus der wiederholten Addition einer Größe zu sich selbst, entsteht die Multiplication: a bedeute den Multiplicator, b den Multiplicandus, und c das Product, so hat man $ab = c$ woraus man zieht

$$a = \frac{c}{b}$$

$$b = \frac{c}{a}$$

hieraus entstehen die Brüche.

Die wiederholte Multiplication, einer Größe zu sich selbst, bringt die Potenzen dieser Größe hervor; drückt man durch b die Zahl aus, wie oft a in der Potenz, welche man betrachtet als Factor vorkömmt, so hat man $a^b = c$. Diese Gleichung ist von der vorhergehenden wesentlich darin unterschieden, daß a und b nicht beyde auf die nemliche Art in der Gleichung hineinkommen; woraus folgt, daß die Frage in Beziehung auf der einen nicht in Beziehung auf der andern umgekehrt werden kann. In der That, wenn man a sucht, so reicht eine bloße Wurzelausziehung hin um a zu bestimmen, und die Operation veranlaßt eine neue Art von Functionen, nemlich die irrationalen; aber die Bestimmung von b hängt von den Logarithmen ab.

$f(x)$ durch eine Reihe Operationen herleiten lassen, die von der, von welcher wir eben gesprochen haben durchaus verschieden sind, kann also als ein neuer Zweig der Analysis angesehen werden, und sie bietet folgende zwey allgemeine Aufgaben dar.

1) Von der erzeugenden Function zu den abgeleiteten übergehen.

2) Von einer beliebigen abgeleiteten Function, wieder zu der erzeugenden zurückgehen; die erste ist der Gegenstand des Differentialcalculs, und die zweyte gehört zum Integralcalcul.

Von jetzt an, kann man sich von den beyden Calculs eine klare und von den unbestimmten und paradoxen Begriffe des Unendlichen, unabhängige Idee machen. Alles reducirt darauf, eine Function, die nach den Potenzen des Zuwachses der veränderlichen Größe von welcher sie abhängt, in einer Reihe entwickelt ist, zu denken, und die Coefficienten von diesen Potenzen zu betrachten, welche selbst neue wichtige Functionen und so zu sagen, der Ausdruck der ersten sind. Dies ist der analytische Ursprung, welchen Lagrange dem Differentialcalcul giebt: ob wir gleich bis jetzt bloß Functionen von einer veränderlichen Größe betrachtet haben, so fühlt man wohl, daß es eine Ordnung von analogen Dingen für diejenige Functionen geben muß, welche von einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen abhängen, und wir werden diese erklären, wenn wir erst die Zeichen, welche man im Differentialcalcul anwendet, haben kennen gelehrt; Zeichen, woraus man den Gesichtspunct erkennen kann, unter welchem dieser Calcul von seinen Erfinder betrachtet wurde, und woher derselbe seine Benennung erhalten hat.

9.

Von der Differentiirung der Functionen von einer veränderlichen Größe.

Wenn man von $f(x+k)$, $f(x)$ abzieht, so erhält man

$$f(x+k)-f(x)=f'(x)k+\frac{f''(x)}{1\,.\,2}k^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}k^3+\text{u.s.w.}$$

Da nun $f(x+k)-f(x)$ offenbar der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Zustand der Function $f(x)$ und demjenigen ist, welcher aus der mit x vorgenommenen Veränderung entsteht: so ist die zweyte Hälfte der vorstehenden Gleichung die Entwicklung dieses Unterschiedes nach den Potenzen von k geordnet, und man bemerkt, daß es hinreicht davon das erste Glied zu kennen, um $f'(x)$ zu finden. Dies erste Glied, welches nur ein Theil des Unterschiedes ist, wollen wir Differential nennen, und es durch $df(x)$ bezeichnen; wir haben also $df(x)=f'(x)k$, und zugleich

$$f'(x)=\frac{df(x)}{k},$$

ein Resultat, welches uns zeigt, wie $f'(x)$ noch auf eine neue Art ausgedrückt werden kann, man dividirt nemlich das Differential der gegebenen Function, oder welches das nemliche ist, das erste Glied von der Differenz zwischen den aufeinander folgenden Werthen dieser Function, durch den Zuwachs.

Es ist leicht zu sehen, daß durch diese Division k in dem Werthe von $f'(x)$ verschwindet, in welchem es nicht mit hineinkommen darf, so daß man diesen Zuwachs vorstellen kann, wie man will. Um Gleichförmigkeit in den Zeichen einzuführen und von dem Ausdruck

$$\frac{df(x)}{k}$$

einen

einen allgemeinen Typus zu machen, welcher bey jeden beliebigen Buchstaben gebraucht werden kann, wodurch man die veränderliche Größe dorstellt von der die vorgegebene Function abhängt, so wollen wir dx statt k schreiben; das heißt, wenn angenommen wird x verändere sich in $x + dx$, daß man daraus erhalten wird

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Indem man der veränderlichen Größe x den Buchstaben d beyfügt, zeigt man dadurch ihren Wachsthum durch ein Zeichen an, welches den Ursprung des Wachsthums erkennen läßt, und daher weniger willkührlich ist als k. Wenn man

$$\frac{dF(y)}{dx}$$

hätte, so würde man sogleich erkennen, daß dieser Ausdruck in Beziehung auf die Function $F(y)$ das nemliche ist als

$$\frac{df(x)}{dx}$$

in Beziehung auf $f(x)$, und daß dy der Hypothetische Zuwachs von y ist.

Es folgt aus dieser Uebereinkunft, daß man, um das Differential $df(x)$ zu finden, $x + dx$ statt x in $f(x)$ schreiben, und alsdann $f(x + dx)$ entwickeln muß, indem man sich auf die Glieder einschränkt, welche mit der ersten Potenz von dx behaftet sind, und endlich $f(x)$ vom Resultat abzieht.

Man wird bemerken, daß dx eigentlich nichts anders als ein Zeichen, welches den Weg vorzuzeichnen dient, den man befolgt hat, um zu dem Ausdruck von $f'(x)$ zu gelangen, und um zu erinnern, daß man nichts als das erste Glied von der Entwicklung der angezeigten Differenz betrachtet hat; denn übrigens abstrahirt man immer von dem Werth des Zuwachses den es vorstellt.

Dies vorausgesetzt, so heißt eine Größe differentiiren, so viel als ihr Differential suchen und die Operation durch welche man dies bewerkstelligt, wird Differentiirung genannt.

10.

Die Bezeichnung, welche wir oben gebraucht haben, um $f'(x)$ vorzustellen, kann auch auf eine analytische Art auf die Functionen $f''(x), f'''(x), f^{\text{v}}(x) \ldots$ angewendet werden. In der That, es folgt aus der Erzeugung dieser Functionen (Nr. 5) daß

$$\left.\begin{aligned} f'(x+k) &= f'(x) + f''(x)k + \ldots \\ f''(x+k) &= f''(x) + f'''(x)k + \ldots \\ f'''(x+k) &= f'''(x) + f^{\text{v}}(x)k + \ldots \end{aligned}\right\}$$

woraus man zieht

$$\left\{\begin{aligned} f'(x+k) - f'(x) &= f''(x)k + \ldots \\ f''(x+k) - f''(x) &= f'''(x)k + \ldots \\ f'''(x+k) - f'''(x) &= f^{\text{v}}(x)k + \ldots \end{aligned}\right.$$

substitutirt man dx für k, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} f'(x+dx) - f'(x) &= f''(x)dx + \ldots \\ f''(x+dx) - f''(x) &= f'''(x)dx + \ldots \\ f'''(x+dx) - f'''(x) &= f^{\text{v}}(x)dx + \ldots \end{aligned}\right\};$$

da man nun, nach der Definition, welche wir vorhin vom Differential einer Function gegeben haben, leicht sehen wird, daß

$$\left.\begin{aligned} f''(x)dx &= df'(x) \\ f'''(x)dx &= df''(x) \\ f^{\text{v}}(x)dx &= df'''(x) \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$

so wird man haben

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{d f'(x)}{dx} \\ f'''(x) = \dfrac{d f''(x)}{dx} \\ f^{\text{IV}}(x) = \dfrac{d f'''(x)}{dx} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

woraus folgt, daß man jede der Functionen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x)\ \ldots$$

von dem Differential der ihr Vorhergehenden ableiten kann.

Wenn man statt $f'(x)$ seinen Werth

$$\frac{d(fx)}{dx}$$

in dem von $f''(x)$ substituirt, so wird man finden

$$f''(x) = \frac{d\left[\frac{d f(x)}{dx}\right]}{dx}.$$

Fährt man auf diese Art Schritt vor Schritt fort, so wird man dadurch unmittelbar alle abgeleitete Functionen, auf der ursprünglichen Function beziehen können; man sieht aber wohl, wie zusammengesetzt die Bezeichnung wird, ob wir gleich erst bey der zweyten dieser Functionen sind.

Um diese Bezeichnung zu vereinfachen, so beobachten wir, daß da der Zuwachs dx als unveränderlich angesehen wird, sich $f'(x)dx$ in $f'(x + dx)dx$ verändert, wenn x, x + dx wird, und daß man hat

$$f'(x + dx)dx - f'(x)\,dx = [f'(x+dx) - f'(x)]\,dx =$$

$f''(x)$

$f''(x)dx^2 + \ldots$ (*)

man wird auch finden, daß bey den nemlichen Umständen

$$\left.\begin{array}{l} ''(x)dx^2 \\ f'''(x)ex^3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ . \end{array}$$

geben

$$\left\{\begin{array}{l} [f''(x + dx) - f''(x)]dx^2 = f'''(x)dx^3 + \ldots \\ [f'''(x + dx) - f''(x)]dx^3 = f^{\text{v}}(x)dx^4 + \ldots \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} . \\ . \\ . \end{array}$$

Es folgt hieraus daß

$$f''(x)dx^2 = df'(x)dx$$
$$f'''(x)dx^3 = df''(x)dx^2$$
$$f^{\text{v}}(x\,dx^4 = df'''(x)px^3$$

$$\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \\ . & . \end{array}$$

wenn man aber in der ersten Gleichung für $f'(x)dx$ seinen Werth $df(x)$, so wird man finden

$$f''(x)dx^2 = ddf(x)$$

oder um abzukürzen, $= d^2 f(x)$, und eben so werden die folgenden

$$f'''(x)dx^3 = d\,d\,d\,f(x) = d^3 f(x)$$
$$f^{\text{v}}(x)dx^4 = ddddf(x) = d^4 f(x)$$

$$\begin{array}{ccc} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{array}$$

Diese letztern geben sehr einfache Ausdrücke für die abgeleitete Functionen; denn man zieht daraus

$f''(x)$

*) Wenn man die Ausdrücke dx^2, dx^3, dx^4 . . . antrift, so muß man sich erinnern, daß sie das Quadrat, den Cubus, und überhaupt die Potenzen des Zuwachses dx bezeichnen.

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

$$f^{IV}(x) = \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

$$\begin{matrix} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{matrix}$$

Wenn man den gegenwärtigen Ausdruck von $f''(x)$ mit der vorhin gefundenen vergleicht, so sucht man daß die Formeln

$$\frac{d\left[\frac{d f(x)}{dx}\right]}{dx} \text{ und } \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

als gleichbedeutend angesehen werden können; und eben so verhält es sich mit

$$\frac{d\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]}{dx} \text{ und } \frac{d^3 f(x)}{dx^3},$$

und überhaupt mit

$$\frac{d^m\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right)}{dx^m} \text{ und } \frac{d^{m+n} f(x)}{dx^{m+n}}.$$

11.

Jetzt folgen die Benennungen, welche aus dem Vorhergehenden entspringen:

$df(x)$ ist das erste Differential, oder bloß Differential von $f(x)$;

$d^2 f(x)$

$d^2 f(x)$ welches das Differential von diesem Differential ist, heißt zweytes Differential;

$d^3 f(x)$ heißt das dritte Differential

$d^4 f(x)$ das vierte Differential

u. s. w.

Die Functionen

$$\left.\begin{array}{c} f'(x) \\ f''(x) \\ f'''(x) \end{array}\right\}$$

$$\vdots$$

oder die gleichbedeutende Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{df(x)}{dx} \\ \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ \dfrac{d^3 f(x)}{dx^3} \end{array}\right\}$$

$$\vdots$$

sollen mit dem Nahmen Differential-Coefficienten bezeichnet werden, und wir wollen sie von einander durch die Zahl der Differentiirungen unterscheiden, welche sie erfordern:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$$

zum Beyspiel, welches vom dritten Differential herkömmt, wird der Differential-Coefficient von der dritten Ordnung seyn.

12.

Wenn man in der Entwicklung von $f(x+k)$ statt $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ihre Ausdrücke vermöge der eben erklärten Bezeichnung, setzt, so wird man finden

$$f(x+k)=f(x)+\frac{df(x)}{1.dx}k+\frac{d^2f(x)}{1.2dx^2}k^2+\frac{d^3f(x)}{1.2.3.dx^2}k^3$$
$$+\frac{d^4f(x)}{1.2.3.4.dx^3}k^4+\ldots$$

Man stelle der Kürze wegen, die Function $f(x)$ durch den einzigen Buchstaben u vor, so werden ihre successiven Differentiale durch du, d^2u, d^3u, ... und die correspondirenden Differential-Coefficienten durch

$$\frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^3u}{dx^3},\ \frac{d^4u}{dx^4}\ldots$$

ausgedrückt seyn, und wenn aus x, $x+k$ wird, so wird sich u in

$$u+\frac{du}{1.dx}k+\frac{d^2u}{1.2.dx^2}k^2+\frac{d^3u}{1.2.3.dx^3}k^3$$
$$+\frac{d^4u}{1.2.3.4.dx^4}k^4+\ldots$$

verändern.

Diese Formel, welche in gewisser Rücksicht zum Fundament des Differentialcalculs dient, und auf welcher beynahe ganz die Theorie der Reihen beruht, ist unter dem Nahmen des Taylorischen Lehrsatzes bekannt, weil man diesem engländischen Geometer die Entdeckung davon verdankt.

Man nehme sich in Acht den Zuwachs k mit dx zu verwechseln; der erstere drückt die Vermehrung aus, die man x zuschreibt und welcher man einen bestimmten Werth beylegt; der zweyte aber, wir wiederholen es noch einmal, kömmt nur in den vorhergehenden Ausdrücken als ein indicatives Zeichen der Operation vor, durch welche man die Functionen

$$\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}$$

von der ursprünglichen Function ableitet, und wenn diese Operationen verrichtet ist, so verschwindet es ganz aus dem Resultat.

Die folgenden Regeln und Beyspiele der Differentiirung werden das vorhin gesagte noch mehr aufklären, und man wird auf das augenscheinlichste einsehen, daß man sich in den Differential-Calcul niemals mit würklichen Zunahmen beschäftigt, sondern bloß mit Functionen die aus der Entwicklung der Differenz zwischen zwey successiven Zuständen einer vorgegebenen Function entstehen.

13.

Schreibt man $x + dx$ statt x in der Function x^n, so kömmt heraus

$$x^n + nx^{n-1}dx + \ldots$$

wo man, wenn x^n abgezogen wird, $nx^{n-1}dx$ zum Differential dieser Function findet; man wird also haben

$$d.x^n = nx^{n-1}dx:$$

der Punct, welcher den Buchstaben d von der vorgegebenen Function x^n trennt, verhütet, daß man den Ausdruck $d.x^n$ mit dx^n verwechselt, das letztere zeigt die $n$te Potenz von dx vor, wie es die Seite 158 stehende Anmerkung erfordert.

Der durch $\frac{d.x^n}{dx}$ vorgestellten Differential-Coefficient der ersten Ordnung, wird nx^{n-1}

Da

Da es sehr oft nöthig ist, sich das vorstehenden Re- Resultat zu erinnern, so habe ich es in folgender Regel übersetzt:

Um eine beliebige Potenz einer veränderlichen Größe zu differentiren, so muß man sie durch ihren Exponenten multipliciren; dann diesen Exponenten um eine Einheit vermindern, und das Resultat durch das Differential der veränderlichen Größe multipliciren.

Man sieht, daß wenn man die letzte Multiplication unterläßt, so wird man unmittelbar den Differential-Coefficienten bilden.

Wenn die vorgegebene Function ax^n wäre, so würde man, nach der nemlichen Operation wie zuvor, finden

$$\left.\begin{aligned} d.ax^n &= nax^{n-1}dx \\ \frac{d.ax^n}{dx} &= nax^{n-1} \end{aligned}\right\}$$

Es folgt hieraus, daß, wenn die Factoren n und dx im ersten Differential $nx^{n-1}dx$ als beständig angesehen werden, es hinlänglich ist um das zweyte Differential zu erhalten, daß man x^{n-1} differentiirt und das Resultat mit $nd.x$ multiplicirt; aber

$$d.x^{n-1} = (n-1)x^{n-2}dx;$$

man wird also haben

$$d^2x^n = n(n-1)x^{n-2}dx^2$$

Man findet auf eine ähnliche Art

$$d^3x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$$

$$d^4x^n = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}dx^4$$

u. s. w.

und die Coefficienten werden folgende Werthe haben

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.x^n}{dx} &= nx^{n-1} \\
\frac{d^2x^n}{dx^2} &= n(n-1)x^{n-2} \\
\frac{d^3x^n}{dx^3} &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
\frac{d^4x^n}{dx^4} &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}
\end{aligned}\right\}$$

man hätte sie auch successive von einander durch die wiederholte Substitution von $x + dx$ an der Stelle von x herleiten können, so wie man es mit der Substitution von $x + k$ (Nr. 3) gemacht hat.

Man wird ohne Mühe bemerken, daß in den Fall, wo der Exponent n eine ganze positive Zahl ist, die Function wirklich eine begrenzte Anzahl von Differentialen hat wovon das höchste

$$d^n.x^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.dx^n$$

ist; ein Ausdruck, welcher keiner Differentirung mehr fähig ist, weil er keine veränderliche Größen enthält: man wird also für den letzten Differential-Coefficienten

$$\frac{d^n.x^n}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

haben das heißt eine beständige Größe.

Das Differential von

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

erhält man, wenn man das Differential von jedem einzelnen Gliede nimmt, woraus diese Function besteht, man erhält alsdenn zum Resultat

$$aAx^{a-1}dx + bBx^{b-1}dx + cCx^{c-1}dx + \ldots$$

14.

Ganz allgemein, wenn man mehrere Functionen von x hat, die durch Addition oder Subtraction verbunden sind, wie die folgenden $u + v - w$, so wird das Differential vom Totalausdruck $du + dv - dw$ seyn; das heißt, man erhält das Differential, wenn man es von jedem einzelnen Gliede nimmt, mit dem Zeichen, womit dies Glied behaftet ist. In der That, vermöge dem was wir bis jetzt gesehen haben, muß die Substitution von $x + dx$ statt k

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\} \text{ in } \left.\begin{matrix} u + pdx + \ldots \\ v + qdx + \ldots \\ w + rdx + \ldots \end{matrix}\right\}$$

verwandeln, und folglich wird aus

$$u + v - w,\ u + v - w + pdx + qdx - rdx + \ldots$$

woraus man, wenn man die vorgegebene Function abzieht,

$$pdx + qdx - rdx + \ldots$$

zieht. Aber pdx, qdx, rdx sind die eigentliche Differentiale von jeder der Functionen u, v, w, folglich ist obige Regel bewiesen.

15.

Ob es gleich beynahe augenscheinlich ist, daß zwey gleiche Functionen gleiche Differentialen haben müssen, so glaube ich doch vorher in dieser Rücksicht etwas in einigen Detail gehen zu müssen damit kein Zweifel über ein Princip, welches in der Folge oft vorkommen wird, übrig bleibe.

Wenn zwey Functionen unter sich gleich sind, welches auch der Werth der veränderlichen Größen von welcher sie abhängen seyn mag, so müssen auch ihre Entwicklungen, die in Beziehung auf die Potenzen dieser veränderlichen Größe oder ihres Zuwachses geordnet sind, identisch seyn, damit nicht, wenn man sie gleich setzt, irgend eine Gleichung entsteht, welche eine oder die andere der in redestehenden Größen bestimmen können; wenn man also $u = v$ hat, so muß man, nach der Substitution von $x + dx$ statt x und nach der Entwicklung haben

$$u + pdx + \ldots = v + qdx + \ldots$$

was auch dx sey: folglich ist

$$pdx = qdx$$

das heißt $du = dv$.

Das Umgekehrte dieses Satzes ist nicht allgemein wahr, und man würde Unrecht haben, wenn man behaupten wollte, daß zwey gleiche Differenciale zu gleichen Functionen gehören müßten. In der That, wenn man hätte $a + bx$, und man substituirte $x + dx$, so würde man $a + bx + bdx$ erhalten, hievon $a + bx$ abgezogen, giebt bdx; ein Resultat in welchem keine Spur von der beständigen Größe a zurück bleibt. Das Differential bdx gehört daher eben so wohl zu $a + bx$ als zu bx, und es kömmt ganz allgemein allen verschiedenen Fällen zu, welche die Function $a + bx$ vorstellt, wenn man a alle mögliche Werehe giebt. Man sieht hieraus leicht, daß bey der Differentiirung einer beliebigen Function, alle beständige Größen die nur durch Addition oder Subtraction mit einander verbunden sind, verschwinden: was aber diejenige beständige Größen betrifft, welche durch Multiplication oder Division verbunden sind, so bleiben sie immer als Coefficienten oder als Divisores.

16.

Wir gehen jetzt zu dem Product zweyer Functionen u und v über; weil sich u in $u + pdx + \ldots$, und v in in $v + qdx + \ldots$ verändert, so wird das Product uv werden

$$\left.\begin{array}{l} uv + uqdx + \ldots \\ \quad + vpdx + \ldots \end{array}\right\}$$

subtrahirt man die ursprüngliche Function uv, so bleibt zum Differential

$$uqdx + updx$$

übrig; aber qdx und pdx sind gleichbedeutend mit dv und mit du folglich ist

$$d.uv = udv + vdu.$$

Ich habe nur die beyden ersten Glieder der Entwickelungen von u und von v genommen, weil die folgenden, bloß ~~die~~ höheren Potenzen von dx enthalten, als die erste, ähnliche Potenz im Product würden gegeben haben, ~~und~~ welche man in dem Differential vermöge seiner Definition nicht hätte zulassen können. Es ist nöthig, diese Bemerkung wohl zu fassen; denn in allen folgenden werden wir aus dem nemlichen Grunde, nur auf die beyden ersten Glieder $u + pdx$ Rücksicht nehmen.

Die Formel

$$d.uv = udv + vdu$$

lehrt uns, daß man, um das Differential vom Product zweyer Functionen zu haben, jede von ihnen mit dem Differential der andern multipliciren, und die beyden Resultate addiren muß.

Wenn man die beyden Theile der Gleichung

$$d.uv = udv + vdu$$

durch die ursprüngliche Function uv dividirt, so wird man finden

$$\frac{d.uv}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

welches uns leicht zu dem Ausdruck des Differentials von einem Product führen wird, das aus so viel Factoren zusammengesetzt ist, als man will. Wir wollen zu diesem Endzweck annehmen, es sey $v = ts$, so erhält man

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\,.\,ts}{ts} = \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s}.$$

und folglich

$$\frac{d\,.\,uts}{uts} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s},$$

man wird wird auf die nemliche Art finden, daß

$$\frac{d\,.\,utsr\ldots}{utsr\ldots} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s} + \frac{dr}{r} + \ldots$$

Diese Regel giebt unmittelbar das Differential von x^n, denn man hat

$$\frac{d\,.\,x^n}{x^n} = \frac{d\,.\,xxxx\ldots}{xxxx\ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \ldots$$

da nun die Anzahl der Factoren in der ersten Hälfte; n ist, so wird die zweyte Hälfte aus einer eben so großen Anzahl von gleichen Gliedern zusammengesetzt seyn, und es wird sich folglich auf $\frac{ndx}{x}$ reduciren; man erhält also

$$\frac{d\,.\,x^n}{x^n} = \frac{ndx}{x},$$

und zieht daraus leicht

$$d\,.\,x^n = n\,.\,x^{n-1}\,dx.$$

Wenn man in der Gleichung

$$\frac{d\,.\,uts}{uts} = \frac{du}{u} + \frac{dt}{t} + \frac{ds}{s}$$

die Nenner fortbringt, so wird man finden

$$d\,.\,uts = tsdu + usdt + utds,$$

und man sieht leicht, daß, bey jeder beliebigen Anzahl von Factoren, das Differential ihres Products der Summe der Producte aus dem Differential jedes Factoren durch alle übrige multiplicirt, gleich seyn wird.

17.

Es sey der Bruch $\frac{u}{v}$; schreibt man so uv^{-1}, so nimmt er die Form eines Products an, und man hat auf der Stelle

$$d.uv^{-1} = udv^{-1} + v^{-1}du.$$

Man leitet alsdenn den Werth von $d.v^{-1}$ von dem allgemeinen Fall

$$dv^n = nv^{-1}dv$$

ab, welches giebt

$$dv^{-1} = - v^{-2}dv$$

und indem man diesen Werth in dem Ausdruck von $d.uv^{-1}$ substituirt, findet man

$$d.uv^{-1} = - uv^{-2}dv + v^{-1}du;$$

ein Resultat, welches auch auf folgende Art geschrieben werden kann,

$$d.\frac{u}{v} = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Seine Uebersetzung lehrt uns, daß man, um das Differential eines Bruchs zu finden, den Nenner durch das Differential des Zählers multipliciren, von diesem das Product aus dem Zähler in dem Differential des Nenners abziehen, und das Ganze durch das Quadrat des Nenners dividiren muß.

Man kann auch directe das Differential von $\frac{u}{v}$ finden, wenn man $\frac{u}{v} = t$ macht, denn alsdann hat man $u = vt$, und nach dem Vorhergehenden

$$du = vdt + tdv;$$

nimmt man den Werth von dt und substituirt statt t den Bruch $\frac{u}{v}$, so wird man wie vorhin

$$dt = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2}$$

haben.

Ich gebe noch folgenden Beweis

u verändere sich in $u + pdx + \ldots$

v verändere sich in $v + qdx + \ldots$

so wird $\frac{u}{v}$ sich in

$$\frac{u + pdx + \ldots}{v + qdx + \ldots} = \frac{u}{v} + \frac{pdx}{v} - \frac{uqdx}{v^2} + \ldots$$

verändern; folglich

$$d \,.\, \frac{u}{v} = \frac{pdx}{v} - \frac{uqdx}{v^2}$$

setzt man wie (Nr. 16) für pdx seinen Werth du und für qdx seinen Werth dv so ist

$$d \,.\, \frac{u}{v} = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

G.

Es sey ganz allgemein ein Bruch

$$\frac{rstu\ldots}{r's't'u'\ldots}$$

dessen Zähler und Nenner jeder eine beliebige Anzahl Factoren enthalte; so wird man, wenn er durch V vorgestellt wird,

$$\frac{rstu\ldots}{r's't'u'\ldots}$$

$$\frac{rstu\ldots}{r's't'u'\ldots} = V$$

haben, und indem man den Nenner fortbringt, wird man finden

$$rstu\ldots = Vr's't'u'\ldots.$$

aber vermöge der vorhergehenden Nummer, hat man

$$\frac{d.rstu\ldots}{rstu\ldots} = \frac{dr}{r} + \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \ldots$$

$$\frac{d.Vr's't'u'\ldots}{r's't'u'\ldots} = \frac{dV}{V} + \frac{dr'}{r'} + \frac{ds'}{s'} + \frac{dt'}{t'} + \frac{du'}{u'} + \ldots$$

also

$$\frac{dr}{r} + \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \ldots =$$

$$\frac{dV}{V} + \frac{dr'}{r'} + \frac{ds'}{s'} + \frac{dt'}{t'} + \frac{du'}{u'} + \ldots$$

und folglich

$$dV = V\left\{\frac{dr}{r} + \frac{ds}{s} + \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \ldots \right.$$
$$\left. - \frac{dr'}{r'} - \frac{ds'}{s'} - \frac{dt'}{t'} - \frac{du'}{u'} \ldots\right\}$$

Jetzt wird es leicht seyn aus diesem Resultat das Differential des vorgegebenen Bruchs zu ziehen.

18.

Die eben gegebenen Regeln sind hinreichend das Differential jeder beliebigen algebraischen Function zu finden. Um sie leichter in dem Gedächtniß einzuprägen, so ist es gut, zu beobachten, daß sie sich auf drey reduciren, welche in den hier beygefügten Formeln enthalten sind,

$$d.x^n = nx^{n-1}dx \text{ (Nr. 13)}$$

$$d(u + v - w) = du + dv - dw \text{ (Nr. 14)}$$

$$d(uv) = udv + vdu \text{ (Nr. 16)}$$

Da

Da es nöthig ist sich mit der Anwendung dieser Regeln vertraut zu machen, so will ich hier einige Beyspiele geben bey welchen sich der Leser üben kann.

19.

Es sey 1)

$$u = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x};$$

nimmt man das Differential von jedem besondern Gliede dieser Function, so verschwindet das erste weil es beständig ist; das zweyte giebt, wenn es unter der Form $bx^{\frac{1}{2}}$ gesetzt wird, nach Anwendung der ersten Regel der vorigen Nummer,

$$\tfrac{1}{2} bx^{\frac{1}{2}-1}dx$$

oder

$$\frac{bdx}{2\sqrt{x}},$$

das dritte Glied $-\frac{c}{x}$ ist eben so viel als $-cx^{-1}$, und man zieht folglich hieraus,

$$-c \times x^{-1-1}dx \text{ oder } cx^{-2}dx$$

oder endlich

$$\frac{cdx}{x^2}$$

Vereinigt man die Partial-Resultate, so wird man finden

$$du = \left(\frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}\right) dx,$$

und den Differential-Coefficienten

$$\frac{du}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

2)

$$2)\ u = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x}\,x} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}:$$

schreibt man diese Function wie folgt:

$$u = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-1-\frac{1}{3}} + ex^{-2}$$

so wird die Anwendung der ersten Regel geben

$$du = -\tfrac{2}{3}bx^{-\frac{2}{3}-1}\,dx + (1+\tfrac{1}{3})cx^{-2-\frac{1}{3}}\,dx - 2ex^{-3}\,dx.$$

Reducirt man die Nummerischen Coefficienten und bringt die mit negativen Exponenten behafteten Glieder im Nenner, so kömmt heraus

$$du = -\tfrac{2}{3}\frac{bdx}{x^{\frac{5}{3}}} + \tfrac{4}{3}\frac{cdx}{x^{\frac{7}{3}}} - 2ex^{-3}\,dx$$

und wenn man die gebrochnen Exponenten durch Wurzelzeichen ersetzt

$$du = \frac{-2bdx}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4cdx}{3xx\sqrt[3]{x}} - \frac{2edx}{x^3}.$$

Diese Beyspiele enthalten nur Monomen und man kann auf jedes ihrer Glieder unmittelbar die vorhin festgesetzten Regeln anwenden; wenn aber dieser Umstand nicht statt findet, so transformirt man die vorgegebene Function dergestalt, daß in ihr nichts als Monomen zu differentiiren sind.

$$3)\ u = (a + bx^m)^n:$$

man macht $a + bx^m = z$; so ändert sich die vorgegebene Function in z^n, deren Differential

$$nz^{n-1}dz;$$

aber indem man

$$a + bx^m = z$$

differentirt, wird man auch haben

$$mbx^{m-1}dx = dz;$$

setzt man für z und für dz ihre Werthe in x und in dx, so kömmt heraus

du

$$du = nmbx^{m-1}(a + bx^m)^{n-1}dx.$$

$$4)\ u = \sqrt{a + bx + cx^2};$$

man macht

$$a + bx + cx^2 = z,$$

so entsteht daraus

$$bdx + 2cxdx = dz \text{ und } \sqrt{a + bx + cx^2} = \sqrt{z}$$

aber

$$d.\sqrt{z} = \frac{dz}{2\sqrt{z}}; \text{ also}$$

$$du = \frac{bdx + 2cxdx}{2\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

$$5)\ u = \sqrt[4]{\left[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}\right]^3}$$

man macht

$$\left.\begin{array}{r} \frac{b}{\sqrt{x}} = y \\ \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2} = z \end{array}\right\}$$

welches für die vorgegebene Function geben wird

$$\sqrt[4]{(a - y + z)^3} = (a - y + z)^{\frac{3}{4}}; \text{ aber}$$

$$d.(a - y + z)^{\frac{3}{4}} = \tfrac{3}{4}(a - y + z)^{\frac{3}{4}-1}(-dy + dz) = \frac{-3dy + 3dz}{4\sqrt[4]{a - y + z}}, \text{ ferner}$$

$$dy = d\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{bdx}{2x\sqrt{x}}$$

$$dz = d.(c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}} = \tfrac{2}{3}(c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}-1} \times -2xdx = \frac{-4xdx}{3\sqrt[3]{c^2 - x^2}}$$

substituirt man sowohl diese Werthe als auch die von y und z, so findet man

p = n

$$du = \frac{\frac{3b\,dx}{2x\sqrt{x}} - \frac{4x\,dx}{\sqrt[3]{c^2 - x^2}}}{4\sqrt[4]{a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c - x^2)^2}}}.$$

$$6)\ u = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}:$$

wenn man bey diesem Beyspiel die Regel von Nr. 16 anwendet, so findet man

$$du = [(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}]dx + [x\sqrt{a^2 - x^2}]d.(a^2 + x^2)$$
$$+ [x(a^2 + x^2)]d.\sqrt{a^2 - x^2};$$

die angezeigte Differentiationen verrichtet, geben

$$du = dx(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + 2x^2dx\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2dx(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

und indem man reducirt

$$du = \frac{(a^4 + a^2x^2 - 4x^4)dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$7)\ u = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4}:$$

die (Nr. 17) gegebene Regel die Brüche zu differentiiren, führt sogleich auf

$$du = \frac{(a^4 + a^2x^2 + x^4)d.(a^2 - x^2) - (a^2 - x^2)d.(a^4 + a^2x^2 + x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}$$

woraus man zieht

$$du = \frac{-2xdx(2a^4 + 2a^2x^2 - x^4)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}.$$

In den vorhin gegebenen Beyspielen haben wir bloß das erste Differential gesucht; man sieht aber, daß, wenn man auf den verschiedenen Resultaten die Regeln der Dif-

Differentiirung anwendet, welche ihrer Form zukommen, man das zweyte Differential und successive alle Differentiale von höhern Ordnungen finden wird. Man kann auch aus dem Vorhergehenden schließen, daß alle Differentiale einer algebraischen Function an sich selbst wieder algebraische Functionen sind; denn man braucht um zu denselben zu gelangen, nur eine begrenzte Anzahl algebraische Operationen vorzunehmen.

20.

Nach den algebraischen Functionen kommen die transcendenten Functionen; wir werden uns hier bloß mit denjenigen beschäftigen, welche in der Einleitung abgehandelt sind, und werden bey den logarithmischen Functionen anfangen, weil sie Fertigkeit in der Differentiation der Exponential-Functionen verschaffen.

Es sey 1) $u = lx$,

substituirt man $x + dx$, so findet man

$$l(x+dx) = lx + l(1 + \frac{dx}{x}) = lx + M\left\{\frac{dx}{x} - \ldots\right\}$$

(Einleitung Nr. 26) man wird also haben

$$l(x + dx) - lx = M\left\{\frac{dx}{x} - \ldots\right\}$$

und folglich

$$d.lx = \frac{Mdx}{x}:$$

das heißt, das Differential des Logarithmen ist gleich dem Producte aus dem Model in das Differential der Größe, dividirt durch die Größe selbst.

Bey den Neperschen Logarithmen deren Model 1 ist, hat man

d. l'x =

$$d.l'x = \frac{dx}{x}.$$

Wenn wir künftig die Logarithmen gebrauchen werden, so sollen es immer diejenigen aus dem Neperschen System seyn, wenn wir nicht vorher ausdrücklich das Gegentheil sagen; deshalb soll künftig der Accent bey der Charackteristik wegbleiben, und wenn wir das Differential eines Logarithmen nehmen, so dividiren wir bloß das Differential der Größe, zu welcher er gehört, durch diese nemliche Größe. Es ist gut vorher anzumerken, daß das Differential vom Logarithmus einer Größe, auch das logarithmische Differential dieser Größe genannt wird

$$2)\ u = l\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$

man mache

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = z,$$

so hat man

$$du = \frac{dz}{z}$$

aber

$$dz = \frac{dx\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{a^2 + x^2} = \frac{a^2dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

also

$$du = \frac{a^2dx}{x(a^2 + x^2)}.$$

$$3)\ u = l[(a + x)^n\ (a' + x)^{n'}\ (a'' + x)^{n''}];$$

man hat wegen der Beschaffenheit der Natur der Logarithmen

$$u = nl(a+x) + n'l(a'+x) + n''l(a''+x)$$

und zieht hieraus

$$du = \frac{ndx}{a+x} + \frac{n'dx}{a'+x} + \frac{n''dx}{a''+x}.$$

Wenn man diese Brüche auf einerley Nenner reducirt, so wird man finden

$$du = \left\{ \frac{(n+n'+n'')x^2 + [n(a'+a'') + n'(a+a'') + n''(a+a')]x + na'a'' + n'aa' + n''aa'}{x^3 + (a+a'+a'')x^2 + (aa'+aa''+h'a'')x + aa'a''} \right\} dx$$

ein Ausdruck, welcher die Form

$$\left\{ \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + A'x^2 + B'x + C'} \right\} dx$$

hat, wo a. a', a'', die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + A'x^2 + B'x + C' = 0$$

sind.

Man sieht leicht, daß wenn man eine größere Anzahl von Factoren genommen hätte, so würde man ~~noch~~ auf einen analogen Ausdruck gestoßen seyn, aber von einem höhern Grade; so daß jede Function von der Art wie die Vorgegebene zum Differential-Coefficienten einen rationalen Bruch hat.

Wenn die Größen a, a', a'', unter sich gleich wären, so würde man

$$u = l(a+x)^{n+n'+n''}$$

haben, und es würde daraus hervorgehen, daß

$$du = \frac{(n+n'+n'')dx}{a+x}.$$

Diese Bemerkungen werden dienen, in der Folge einen wichtigen Punkt im Integralcalcul aufzuklären.

4) $u = l\left\{ \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right\}$

man

man mache

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=y\\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=z\end{array}\right\}$$

welches geben wird

$$u=l\left(\frac{y}{z}\right)=ly-lz$$

und

$$du=\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z};$$

man hat aber

$$\left.\begin{array}{l}dy=\dfrac{dx}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{dx}{2\sqrt{1-x}}\\ \quad=\dfrac{-dx}{2\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]=\dfrac{-zdx}{2\sqrt{1-x^2}}\\ dz=\dfrac{dx}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{dx}{2\sqrt{1-x}}\\ \quad=\dfrac{dx}{2\sqrt{-x^2}}\left[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right]=\dfrac{ydx}{2\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right\},$$

woraus man zieht

$$\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=\frac{-zdx}{2y\sqrt{1-x^2}}-\frac{ydx}{2z\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{-(y^2+z^2)dx}{2yz\sqrt{1-x^2}}$$

wenn man beobachtet daß

$$\left.\begin{array}{r}y^2+z^2=4\\ yz=2x\end{array}\right\},$$

so wird man finden

$$du=-\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Dieses Beyspiel ist merkwürdig wegen der Reductionen welche mit dem Differential vorgenommen werden, und wegen seiner Einfachheit in Vergleichung mit ~~Ansehung~~ der Function von welcher es abstammt: nunmehr wird es leicht seyn, folgende Rechnungen ~~Calculs~~ zu verrichten, von welcher wir hier bloß die Resultate geben wollen.

$$5)\ u = l[x + \sqrt{1 + xx}];\ du = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$6)\ u = \frac{1}{\sqrt{-1}} l[x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2}];$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$$

$$7)\ u = l.\left\{\frac{\sqrt{1 + xx} + x}{\sqrt{1 + xx} - x}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 + xx}}.$$

8) Wenn man $u = (lx)^n$ hätte, so wird man $lx = z$ setzen und finden

$$(lx)^n = z^n,$$

und wegen

$$d.z^n = nz^{n-1}dz,$$

bekömmt man

$$d.(lx)^n = n(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}$$

9) Es sey endlich $u = l.lx$, das heißt der Logarithme des Logarithmen von x: setzt man wie oben $lx = z$, so hat man sogleich $u = lz$ und folglich

$$du = \frac{dz}{z};$$

setzt

setzt man nun statt z und dz ihre Werthe in x und in dx, so wird man finden

$$du = \frac{dx}{xlx}.$$

Wir werden diese Rechnungen nicht weiter treiben und jetzt zu den Exponential-Functionen übergehen.

21.

Es ist 1) $u = a^x$: nimmt man die Logarithmen von beyden Seiten, so hat man $lu = xla$ und folglich

$$\frac{du}{u} = dxla,$$

woraus man zieht

$$du = udxla$$

oder indem man statt u seinen Werth

$$d.a^x = a^x dxla,$$

und der Differential-Coefficient,

$$\frac{d.a^x}{dx} \text{ wird } a^x la.$$

Man kann unmittelbar zu diesem Resultat gelangen, ohne die Logarithmen anzuwenden, indem man von der, in der Einleitung (Nr. 22) gegebenen Entwicklung der Function a^x Gebrauch macht. In der That, man hat

$$a^{x+dx} = a^x . a^{dx};$$

aber aus der angeführten Nummer hat man

$$a^{dx} = 1 + (la)dx + \ldots,$$

also

$$a^{x+dx} = a^x + a^x(la)dx$$

welches giebt

$$a^{x+dx} - a^x = a^x dxla + \ldots$$

und

$d.a^x = a^x dxla.$

Sucht man die successiven Differentiale, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} d.a^x = a^x dx(la) \\ d^2.a^x = a^x dx^2(la)^2 \\ d^3.a^x = a^x dx^3(la)^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\}$$

Und wenn man statt a die Zahl e substituirt, deren Logarithme = 1 ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} u = e^x \\ \frac{du}{dx} = e^x \\ \frac{d^2u}{dx^2} = e^x \\ \frac{d^3u}{dx^3} = e^x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\}$$

woraus folgt, daß die Function e^x die merkwürdige Eigenschaft hat, sich von selbst in jedem seiner Differential-Coefficienten, wieder herzustellen.

2) $u = z^y$, wo z und y zwey beliebige Functionen von x sind; wenn man von beyden Seiten die Logarithmen nimmt, so hat man

$$lu = ylz;$$

und wenn man differentiirt, so kömmt heraus

$$\frac{du}{u} = \frac{ydz}{z} + dylz;$$

oder auch

$$du = u\left(\frac{ydz}{z} + dylz\right)$$

und setzt man für u seinen Werth

$$d.z^y = z^y\left(\frac{ydz}{z} + dylz\right).$$

Man

Man könnte zu diesem Differential gelangen, ohne Logarithmen anzuwenden, indem man

$$\left.\begin{matrix} u + pdx \\ y + qdx \\ z + rdx \end{matrix}\right\} \text{ statt } \left\{\begin{matrix} u \\ y \\ z \end{matrix}\right.$$

schreibt. Es würde alsdenn herauskommen

$$u + pdx = (z + rdx)^{y+qdx},$$

indem man beobachtet, daß man bey der Entwicklung der zweyten Hälfte bey den mit der ersten Potenz von dx behafteten Gliedern stehen bleiben muß; man wird aber sogleich nach der Binomial-Formel finden

$$z^{y+qdx} + (y + qdx)z^{y+qdx-1}rdx \ldots$$

ein Resultat, welchem man die folgende Form geben kann

$$z^y[z^{qdx} + (y + qdx)z^{qdx-1}rdx + \ldots]$$

$$\left.\begin{matrix} z^{qdx} = 1 + (lz)qdx + \ldots] \\ z^{qdx-1} = \dfrac{z^{qdx}}{z} = \dfrac{1}{z}[1+(lz)qdx+\ldots] \end{matrix}\right\} \text{(Einleit (Nr. 22).}$$

Substituirt man diese Werthe, und läßt alle Potenzen von dx die höher sind als die erste Potenz aus, weil diese nicht mit hinein kommen müssen, so wird man finden

$$u + pdx = z^y(1 + qdx\,lz + \frac{yrdx}{z}).$$

Zieht man von beyden Seiten z^y oder u ab, so kömmt

$$pdx = z^y(qdx\,lz + \frac{y}{z}rdx);$$

das heißt

$$du = z^y(dy\,lz + \frac{y}{z}dz),$$

wie vorhin.

3) $u = a^{b^x}$: man mache $b^x = y$ so hat man

$u = a^y$, $du = a^y dy\,la$; aber

$dy = b^x dx\,lb$

folglich

$$du = a^{b^x} b^x dx \, la \, lb,$$

man wird leicht diesen Calcul in verwickelteren Fällen ausführen.

4) $u = z^{t^s}$: man mache $t^s = y$, so kömmt $u = z^y$,

$$du = z^y \cdot \left(\frac{ydz}{z} + dylz\right);$$

setzt man statt y und dy ihre Werthe in t und in s, so erhält man

$$du = z^{t^s} t^s \left(\frac{dz}{z} + \frac{sdltz}{t} + dsltlz\right)$$

mit Hülfe dieser Formeln findet man leicht das Differential einer jeden Exponential-Function. Jetzt wollen wir uns mit den Kreisfunctionen beschäftigen.

22.

Es ist 1) $u = \sin.x$: substituirt man $x + dx$ statt x, so ändert sich die vorgegebene Function in

$$\sin.(x + dx) = \sin.x \cos.dx + \cos.x \sin.dx$$

man hat aber

$$\left.\begin{array}{l} \cos dx = 1 - \ldots \\ \sin.dx = dx - \ldots \end{array}\right\} \text{(Einl. Nr. 35.)}$$

also

$$\sin.(x + dx) = \sin.x + dx \cos.x + \ldots$$

und folglich

$$d.\sin.x = dx \cos.x.$$

Es folgt hieraus, daß das **Differential des Sinus gleich ist dem Differential des Bogens multiplicirt durch den Cosinus.**

2) $u = \cos.x$: man hat

$$\cos.(x + dx) = \cos.x \cos.dx - \sin.x \sin.dx,$$

und

und wenn man für cos.dx und sin.dx ihre Werthe setzt,

$$\cos.(x + dx) = \cos.x - dx \sin.x \ldots;$$

also

$$d.\cos x = - dx \sin.x;$$

das heißt, das Differential des Cosinus ist gleich dem Differential des Bogens mit einem negativen Zeichen genommen, und durch den Sinus multipicirt.

Was den Sinus Versus anbetrift, so ist bis auf das Zeichen sein Differential das nemliche; denn man hat

$$\mathrm{f.v.}x = 1 - \cos.x$$

also

$$d.\mathrm{f.v.}x = dx \sin.x$$

3) $u = \mathrm{tang}.x$: weil aber

$$\mathrm{tang}.x = \frac{\sin.x}{\cos.x},$$

so hat man

$$d.\mathrm{tang}.x = \frac{\cos x.d.\mathrm{f}x - \sin.x\, d.\cos.x}{\cos.x^2}$$

$$= \frac{(\cos.x^2 + \sin.x^2)dx}{\cos.x^2}$$

aber

$$\cos.x^2 + \sin.x^2 = 1;$$

also

$$d.\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{\cos.x^2}.$$

4) $u = \cot.x$: weil

$$\cot.x = \frac{1}{\mathrm{tang}.x},$$

so hat man

$$d.\cot.x = -\frac{d.\mathrm{t}x}{\mathrm{tang}.x^2} = -\frac{dx}{\mathrm{tang}.x^2 \cos.x^2} = -\frac{dx}{\sin.x^2}$$

5) $u = \sec x$: wegen

$$\sec. x = \frac{1}{\cos. x},$$

hat man

$$d.\sec.x = -\frac{d.\cos.x}{\cos.x^2} = \frac{dx\sin.x}{\cos.x^2} = dx\,\text{tang}.x\sec.x.$$

6) $u = \text{cosec}.x$: wegen

$$\cos. x = \frac{1}{\sin. x},$$

hat man

$$d.\text{cosec}.x = -\frac{d.\sin.x}{\sin.x^2} = -\frac{dx\cos.x}{\sin.x^2} =$$
$$-\, dx\cot.x\,\text{cosec}.x.$$

Vermöge dieser Formel kann man das Differential eines Ausdrucks finden, der auf eine beliebige Art, Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. enthält, man braucht nur zu diesem Endzweck zu differentiiren, indem man die letztern als besondern Functionen ansieht, und statt ihre Differentiale die vorhin gefundenen Resultate setzen: Wir wollen nur ein Beyspiel davon geben, nemlich

$$u = \cos. x^{\sin.x}.$$

Man mache

$$\left.\begin{array}{l}\cos. x = z\\ \sin. x = y\end{array}\right\}$$

so hat man $u = z^y$ und

$$du = d.z^y = z^y(dylz + \frac{ydz}{z}) =$$
$$dx\cos.x^{\sin.x}(\cos.x\,l.\cos.x - \frac{\sin x^2}{\cos.x}).$$

23.

Wir haben bisher die Sinus, Cosinus u. s. w. als Functionen des Bogens behandelt; jetzt wollen wir den

Bo-

Bogen successive als eine Function seines Sinus, seines Cosinus u. s. w. ansehen, und davon das Differential unter seinen verschiedenen Gesichtspuncten suchen. Wir wollen deswegen annehmen, x sey die vorgegebene Function, und u die veränderliche Größe, von welcher diese Function abhängt;

1) Die Gleichung

$$d.\sin.x = dx\cos.x$$

giebt, wegen

$$\left.\begin{array}{l}\sin.x = u\\ \cos.x = \sqrt{1-u^2}\end{array}\right\},$$

$$du = dx\sqrt{1-u^2},$$

und folglich

$$dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$$

dies ist der Werth vom Differential des Bogens, durch das Differential des Sinus und durch den Sinus selbst, ausgedrückt.

Man kann zu diesem Ausdruck gelangen, wenn man den in Nr. 38 der Einleitung, gegebenen Ausdruck des Bogens anwendet, welcher, wenn man darin $\sin.x = u$ und

$$\cos.x = \sqrt{1-u^2},$$

setzt, wird

$$x\sqrt{-1} = l(u\sqrt{-1} + \sqrt{1-u^2});$$

woraus man zieht

$$x = \frac{1}{\sqrt{1}}\,l(u\sqrt{-1}+\sqrt{1-u^2}).$$

In der That, wenn man x in u verändert und umgekehrt, so wird man im 6ten Beyspiel von Nr. 20 finden

d.

$$d.\frac{1}{\sqrt{1}}l(u\sqrt{-1}+\sqrt{1-u^2}) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Wenn man das Differential des Bogens durch seinen Cosinus ausdrücken wollte so müßte man von der Gleichung

$$d.\cos.x = -dx\sin.x$$

ausgehen, welche, wenn man $\cos.x = u$ macht, giebt

$$du = -dx\sqrt{1-u^2}$$

oder

$$dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Um von hieraus zum Sinusversus überzugehen, so mache man $u = 1 - y$, weil

$$\sin.\text{ver}.x = 1 - \cos.x$$

man hat folglich

$$du = -dy \text{ und } dx = \frac{dy}{\sqrt{2y-y^2}}.$$

2) Es sey $\text{tang}.x = u$; die Gleichung

$$d.\text{tang}.x = \frac{dx}{\cos.x^2}$$

giebt

$$du = \frac{dx}{\cos.x^2} \text{ und } dx = du\cos.x^2.$$

Wegen

$$\frac{\sin.x}{\cos.x} = \text{tang}.x,$$

findet man

$$\sin x = \cos.x \ \text{tang}.x$$
$$\sin.x^2 = \cos.x^2 \ \text{tang}.x^2$$

und $1 - \cos.x^2$ für $\sin.x^2$ substituirt, giebt

1 =

$1 = \cos.x^2 + \text{tang}.x^2 \cos.x^2 = \cos.x^2(1 + \text{tang}.x^2)$;
man hat also

$$\cos.x^2 = \frac{1}{1+\text{tang}.x^2} = \frac{1}{1+u^2}$$

Setzt man diesen Werth in den von dx, so entsteht daraus

$$dx = \frac{du}{1+u^2}:$$

woraus man schließen kann, daß das Differential des Bogens gleich ist dem Differential der Tangente, dividirt durch das Quadrat der Secante; denn $\sqrt{1+u^2}$ drückt die Secante aus, wenn die Tangente durch u vorgestellt ist.

Wir wollen diesen Artikel mit dem folgenden Beyspiel beschließen.

Es sey x ein Bogen, ~~der~~ In[?] Sinus die Function

$$2u\sqrt{1 - u^2}$$

ist, man mache

$$2u\sqrt{1 - u^2} = z,$$

so wird man haben

$$dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

aber

$$\left.\begin{aligned} dz &= \frac{2du(1 - 2u^2)}{\sqrt{1 - u^2}} \\ \sqrt{1 - z^2} &= 1 - 2u^2 \end{aligned}\right\},$$

also

$$dx = \frac{2du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Von der Differentiirung der Functionen von zwey veränderlichen Größen.

24.

24.

Wir wollen uns jetzt mit solchen Functionen beschäftigen, welche von zwey veränderlichen Größen abhängen, und sogleich ein Beyspiel vornehmen. Es sey $u = x^m y^n$; da die Größen x und y keine Beziehung unter einander haben, so kann die zweyte die nemliche bleiben, ob sich gleich die erste verändert, um eben so auch umgekehrt. Es folgt hieraus, daß der Werth der vorgegebenen Function sich auf mehrere Art verändern kann; 1) durch die Veränderung, welche mit x allein oder mit y allein vorgeht; oder 2) durch das Zusammentreffen dieser beyden Umstände.

Wenn man blos auf die Veränderung von x Rücksicht nimmt, und in der vorgegebenen Function $x + h$ statt dieser veränderlichen Größe substituirt, so wird man finden

$$(x+h)^m y^n = x^m y^n + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^n h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} y^n h^3 + \ldots$$

läßt man y sich allein verändern. und schreibt $y + k$ statt y, so erhält man

$$x^m (y+k)^n = x^m y^n + \frac{n}{1} y^{n-1} x^m k + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} y^{n-2} x^m k^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n-3} x^m k^3 + \ldots$$

Endlich, wenn man annimt, daß die beyden vorhergehenden Veränderungen zu gleicher Zeit statt fänden, so wird die vorgegebene Function

$$(x + h)^m (y + k)^n;$$

und

und man würde daraus die Entwicklung erhalten, wenn man beyde Entwicklungen von

$$(x + h)^m \text{ und } (y + k)^n$$

mit einander multiplicirte. Man kann aber zu diesem Zweck, auf eine weit einfachere Art gelangen, wenn man $y + k$ statt y in der vorhin gefundenen Entwicklung von $(x + h)^m y^n$, oder $x + h$ für x in der Entwicklung von $x^m (x + k)^n$ substituirt. Verrichtet man die erste Operation, so kömmt

$$(x + h)^m (y + k)^n$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} x^m y^n & + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h \\ & + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} x^{m-2} y^n h^2 \\ + n x^m y^{n-1} k & + \frac{m}{1} \frac{n}{1} x^{m-1} y^{n-1} h k \\ & + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} \frac{n}{1} x^{m-2} y^{n-1} h^2 k \\ + \frac{n(n-1)}{2} x^m y^{n-2} k^2 & + \frac{m}{1} \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} x^{m-1} y^{n-1} h k^2 \\ + \ldots & + \ldots \\ & + \frac{m \, . \, m-1}{1 \, . \, 2} \frac{n(n-1)}{1 \, . \, 2} x^{m-2} y^{n-2} h^2 k^2 \\ & + \ldots \end{array} \right.$$

Diese Entwicklung giebt nun die ursprüngliche Function $x^m y^n$ wieder, und dann nach eine Folge von Functionen von x und y, welche die verschiedene Potenzen der Zunahmen h und k, als auch die Producte dieser Potenzen multiplicieen. Man würde analogische Entwicklungen für jede andere Function finden, wie groß auch immer die die Anzahl der veränderlichen Größen die sich in ihrer Zusammensetzung befinden, seyn mag. Wir wollen jetzt

ganz

ganz allgemein zeigen, daß diese Entwicklungen zu neuen Functionen Anlaß geben, die man von der vorgegebenen eben so durch successive Differentiirungen ableiten kann, als diejenigen, welche man im Fall einer einzigen veränderlichen Größe erhält.

25.

Wir wollen durch $f(x, y)$ irgend eine Function von x und y vorstellen; und zuerst annehmen, daß die veränderliche Größe x sich allein verändere und x + h würde; so müßte man y als eine beständige Größe ansehen und die vorgegebene Function eben so wie eine Function von x behandeln; man würde also nach dem Lehrsatze von Nr. 12, wenn man der Kürze wegen $f(x, y) = u$ macht, haben

$$f(x + h, y) = u + \frac{du\,h}{dx\;1} + \frac{d^2uh^2}{dx^2\,1.2} + \frac{d^3uh^3}{dx^3\,1.2.3} + \ldots$$

Wenn man finden wollte was die vorgegebene Function wird, wenn bloß y einen Zuwachs erhält, so wird man x als eine beständige Größe ansehen und $f(x, y+k)$ oder u als eine Function von y; hierdurch würde man erhalten

$$f(x,y+k) = u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{du^2}{dx^3}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{2y^3}\frac{k^3}{1.2\;3} + \ldots$$

Jetzt wollen wir voraussetzen, die Größen x und y veränderten sich zu gleicher Zeit, und würden x + h und y + k; da man aber der Function $f(x,y)$ noch keine besondere Form gegeben hat, so ist es nicht möglich darin auf einmal die beyden angezeigten Substitutionen zu machen, aber es ist leicht zu begreifen, daß man zu demselben Resultat gelangen würde, wenn man zuerst x in

x + h

$x + k$ veränderte, und dann $y + k$ in der Entwicklung die durch die erste Operation entsteht, setzte.

Man hat schon

$$f(x+h,y) = u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo u, $f(x, y)$ vorstellt. Um die Coefficienten der verschiedenen Glieder dieser Reihe, in Rücksicht auf die Veränderung von y, zu entwickeln, so beobachte ich zuerst, daß in jedem Gliede x als eine beständige Größe angesehen werden kann, und daß man sie folglich als Functionen von der einzigen veränderlichen Größe y behandeln muß. Hierauf wird $f(x, y)$ oder u

$$u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

Wenn man in dieser Entwicklung $\frac{du}{dx}$ statt u schreibt, so hat man zum Resultat was aus der Function $\frac{du}{dx}$ wird, wenn sich y in $y + k$ verändert; das heißt

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}$$

$$+ \frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

Es ist aber leicht einzusehen, daß der Ausdruck

$$\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$$

zwey Differentiirungen anzeigt, die successive bey der vorgegebenen Function gemacht sind, die erste in Rücksicht auf die Veränderung von x allein, und die zweyte in=

dem bloß y als veränderlich angesehen wird; wir wollen diesen Ausdruck unter eine einfachere Form bringen, und wie folgt schreiben:

$$\frac{d^2u}{dy\,dx}$$

Eben so wollen wir

$$\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$$

durch

$$\frac{d^3u}{dy^2\,dx}$$

vorstellen: und ganz allgemein, muß man durch

$$\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$$

den Differential-Coefficienten von der Ordnung n in Beziehung auf die Function

$$\frac{d^m u}{dx^m}$$

verstehen, indem man darin bloß y als veränderlich ansieht; in so fern, daß diese Function selbst der Differential-Coefficient von der Ordnung m von der vorgegebenen Function ist, in welcher bloß x als veränderlich angenommen wird.

Dies vorausgesetzt, so wird die Substitution von $x + k$ statt x,

$\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dy\,dx}\,\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dy^2\,dx}\,\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dy^3\,dx}\,\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^2u}{dx} \text{ in } \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dydx^2}\,\frac{k}{1} + \frac{d^4u}{dy^2dx^2}\,\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^5u}{dy^3dx^2}\,\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^3u}{dx} \text{ in } \frac{d^3u}{dx^3} + \frac{d^4u}{dydx^3}\,\frac{k}{1} + \frac{d^5u}{dy^2dx^3}\,\frac{k^2}{1.2}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{d^6u}{dy^3dx^3}\,\frac{k^3}{1.2.3}$$

verändern.

Substituirt man diese Werthe in der Entwicklung von $f(x + h, y)$ und ordnet so, daß alle Glieder in welchen die Exponenten von h und von k einerley Summe machen, auch in einer Vertical-Columne stehen, so kömmt

$$\left.\begin{aligned} f(x+h, y+k) = u + \frac{duk}{dy1} &+ \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \\ \frac{duh}{dx1} &+ \frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{k\,h}{1.1} + \frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}\frac{h}{1.} + \ldots \\ &+ \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}\frac{h^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned}\right\}$$

26.

Wir haben die vorstehenden Entwicklungen dadurch gefunden, daß wir erst $x + h$ statt x, und dann $y + k$

 statt

statt y setzten, man hätte aber auch umgekehrt verfahren und bey der Substitution in Beziehung auf y anfangen können: alsdann würde $f(x, y)$,

$$f(x,y+k) \text{ oder } u + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$$

geworden seyn. Die Substitution von $x + h$ statt x in dieser Reihe, würde u in

$$u + \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

verändert haben, und dann

$$\frac{du}{dy} \text{ in } \frac{du}{dy} + \frac{d^2u}{dx\,dy}\frac{h}{1} + \frac{d^3u}{dx^2\,dy}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^4u}{dx^3\,dy}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1} + \frac{d^4u}{dx^2\,dy^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^5n}{dx^3\,dy^2}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} \text{ in } \frac{d^3u}{dy^3} + \frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1} + \frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^6u}{dx^3\,dy^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$\vdots$

man würde folglich haben

$f(x+h, y+h)$

$$f(x+h,\, y+h) = u + \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}\frac{k}{1} + \frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1} + \ldots \\ \qquad + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2} + \ldots \\ \qquad\qquad + \frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots \end{array} \right.$$

Es ist augenscheinlich, daß diese zweyte Entwicklung mit der ersten identisch seyn muß; denn es ist gleichgültig ob man erst x in x + h und dann y in y + k verändert, oder ob man diese Substitution bloß in umgekehrter Ordnung verrichtet, weil man auf beyde Arten $f(x + h,\, y + k)$ erhält.

Wenn man in diesen beyden Entwicklungen die mit einerley Potenz von h und von k behafteten Glieder mit einander vergleicht, so wird man folgende Gleichungen finden,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy} \\ \frac{d^3u}{dy\,dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2\,dy} \\ \frac{d^3u}{dy^2\,dx} = \frac{d^3u}{dx\,dy^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m} = \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array} \right\}$$

Die erste lehrt uns, daß der Differential-Coefficient von der zweyten Ordnung einer Function mit zwey veränderlichen Größen, so genommen, daß man in Beziehung auf einer von ihnen und dann in Beziehung auf die anderen differentiirt, immer der nemliche bleibt, welche Ordnung man auch bey den Differentiirungen befolgt haben mag. Es sey zum Beyspiel $u = x^m y^n$; wenn man zuerst x allein als veränderlich ansieht und differentiirt, so hat man

$$\frac{du}{dx} = mx^{m-1}y^n;$$

differentiirt man nun dieses Resultat, und läßt y sich nur verändern, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dy\ dx} = mnx^{m-1}y^{n-1};$$

operirt man in umgekehrter Ordnung, so findet man

$$\frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1}$$

und

$$\frac{d^2u}{dx\ dy} = mnx^{m-1}y^{n-1},$$

und man sieht daß das Endresultat in beyden Fällen einerley ist.

27.

Die übrigen vorhin gefundenen Gleichungen, sind nur Folgerungen aus der ersten: in der That, nach der angenommenen Bezeichnung ist

$$\frac{d^3u}{dydx^2}$$

das nemliche als

$$\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy\ dx}$$

und

und da man die Ordnung dieser aufeinander folgenden Differentiirungen umkehren kann,

$$\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx\ dy} = \frac{d^3u}{dx\ dy\ dx}.$$

Man hat auch

$$\frac{d^3u}{dx^2\ dy} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)}{dx},$$

und indem man die Ordnung der beyden ersten angezeigten Differentiirungen umkehrt, so kommt

$$\frac{d\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)}{dx} = \frac{d^3u}{dx\ dy\ dx};$$

ein mit dem vorigen einstimmendes Resultat.

Man wird auf ähnliche Art finden:

$$\frac{d^3u}{dy^2\ dx} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)}{dy} = \frac{d^3u}{dy\ dx\ dy},$$

$$\frac{d^3u}{dx\ dy^2} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dx\,dy} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dydx} = \frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}.$$

Wenn man auch die übrigen Gleichungen auf diese Art behandelt, so wird man alle gleichbedeutende Ausdrücke der Differential-Coefficienten von höheren Ordnungen finden; die hier beygefügte Tabelle giebt die verschiedenen Ausdrücke der Differential-Coefficienten von der zweyten, dritten und vierten Ordnung: alle in einer Vertical-Columne stehenden sind identisch.

$\frac{d^2u}{dy\,dx}$	$\frac{d^3u}{dy^2dx}$	$\frac{d^3u}{dy\,dx^2}$	$\frac{d^4u}{dy^3dx}$	$\frac{d^4u}{dy^2dx^2}$	$\frac{d^4u}{dy\,dx^3}$	...
$\frac{d^2u}{dx\,dy}$	$\frac{d^3u}{dy\,dx\,dy}$	$\frac{d^3u}{dx\,dy\,dx}$	$\frac{d^4u}{dy^2dx\,dy}$	$\frac{d^4u}{dy\,dx\,dy\,dx}$	$\frac{d^4u}{dx\,dy\,dx^2}$	
	$\frac{e^3u}{dx\,dy^2}$	$\frac{d^3u}{dx^2dy}$	$\frac{d^4u}{dy\,dx\,dy^2}$	$\frac{d^4u}{dy\,dx^2dy}$	$\frac{d^4u}{dx^2dy\,dx}$	
			$\frac{d^4u}{dx\,dy^3}$	$\frac{d^4u}{dx\,dy^2dx}$	$\frac{d^4u}{dx^3dy}$	
				$\frac{d^4u}{dx^2dy^2}$		

Ganz allgemein, man kann die Ordnung der angedeuteten Differentiirungen umkehren wie man will; wenn sie nur die nemlichen bleiben und die Anzahl der Differentiirungen gleich bleibt, so wird sich das Resultat nicht verändern.

Um sich davon zu überzeugen, so sey

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n};$$

es ist leicht nach der in Nr. 10 und 25 gemachten Formel, zu sehen, daß man diesen Ausdruck, auf folgende Art zerlegen kann:

$$\frac{d^{m-1}\left(\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dx\,dy}\right)}{dx^{m-1}};$$

wenn man aber die Ordnung der beyden isolirten Differentiirungen wieder umkehrt welches erlaubt ist, so hat man

$$\frac{d^{m-1}\left(\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dy\,dx}\right)}{dx^{m-1}},$$

und wenn man alle angedeuteten Operationen unter einerley

nerley Zeichen bringt, so entsteht statt der vorgegebenen Formel, der gleichbedeutende Ausdruck

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^{m-1}dydxdy^{n-1}}$$

Wenn man diesen letzten Ausdruck zerlegt, so könnte man darin neue Permutationen in der Stellung von dy und dx vornehmen; wir können also den obigen Satz als bewiesen, annehmen.

28.

Zieht man $f(x, y)$ oder u von $f(x+h, y+k)$ ab, so findet man

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}\ldots \\ +\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}\frac{h}{1}\ldots \\ \qquad\qquad +\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \end{array}\right\}$$

Wenn man auf die Functionen von zwey veränderlichen Größen die Definition ausdehnt, welche wir (Nr. 9) von dem Differential einer Function gegeben haben, so wird man sehen, daß das Differential von $f(x, y)$ oder von u in den beyden Gliedern enthalten ist, welche die erste Columne der vorhergehenden Entwicklung bilden, und wenn man h in dx und k in dy verwandelt, so haben wir

$$df(x, y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Es folgt hieraus daß das Differential einer Function von zwey veränderlichen Größen zwey Theile in sich begreift, nemlich

$$\frac{du}{dx}\,dx$$

oder das Differential wo x allein als eine veränderliche Größe angesehen ist, und

$$\frac{du}{dy}\,dy$$

wo y allein als veränderlich angesehen ist.

Man kann daher auf die Functionen von zwey veränderlichen Größen die (Nr. 13 und folg.) gegebene Regeln für die Differentiirungen solcher Functionen anwenden die nur von einer veränderlichen Größe abhängen, und deswegen differentiirt man die vorgegebene Function zuerst in Beziehung auf eine der veränderlichen Größen, und dann in Beziehung auf die andere, die Summe dieser beyden Resultate wird das gesuchte Differential seyn.

Man sieht auf der Stelle nach dieser Regel, daß

$$\left.\begin{aligned} d(x+y) &= dx + dy \\ d\,.\,xy &= ydx + xdy \\ d\,.\,\frac{x}{y} &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \end{aligned}\right\}$$

29.

Wir glauben nicht, daß es nothwendig sey, viel Beyspiele in Beziehung auf die Differentiirungen der Functionen von zwey veränderlichen Größen zu geben, welche eben so ausgedrückt wird als die Differentiirung der Functionen die nur eine veränderliche Größe enthalten. Wir werden uns daher auf das Folgende einschränken:

1) $u = x^m y^n$;

man hat

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx}\,dx &= mx^{m-1}y^n dx \\ \frac{du}{dy}\,dy &= nx^m y^{n-1}\,dy \end{aligned}\right\}$$

also

$$du = mx^{m-1}y^n dx + nx^{n-1}dy = x^{m-1}y^{n-1}(mydx + nxdy)$$

2) $u = \dfrac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

man hat

$$\frac{du}{dx}\,dx = -\frac{ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{du}{dy}\,dy = \frac{ady}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

also

$$du = \frac{-ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ady}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder wenn man reducirt

$$= \frac{-ayxdx + ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3) $u = A(\text{tang.} = \dfrac{x}{y})$;

Dies ist der Ausdruck eines Kreisbogens dessen Halbmesser 1 und dessen Tangente $\dfrac{x}{y}$ ist; um ihn zu differentiiren, mache man $\dfrac{x}{y} = z$, und suche nach Nr. 23 das Differential des Bogens dessen Tangente durch z ausgedrückt ist; es kömmt zum Resultat

dz

$$\frac{dz}{1+z^2}$$

man hat also

$$du = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Setzt man für z und dz ihren Werth, so findet man

$$du = \frac{\frac{ydx - xdy}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{ydx - xdy}{y^2+x^2}.$$

30.

Die Art wie man die Differentiale der Functionen schreibt, die von mehreren veränderlichen Größen abhängen, giebt zu wichtigen Bemerkungen Anlaß. Man darf jetzt nicht $\frac{du}{dx}\,dx$ mit du verwechseln, wie es geschehen könnte, wenn u nur die veränderliche Größe x enthielte. In der That, da im letztern Falle du nur das erste Glied von der Entwicklung des Unterschiedes zwischen den beyden aufeinander folgenden Zuständen der vorgegebenen Function ist, so hat man durch die Division dieser Größe mit den Zuwachs dx den Differential-Coefficienten; enthält aber u zwey veränderliche Größen, so ist das Differential aus zwey Gliedern zusammengesetzt, und in diesem Fall hat der Ausdruck $\frac{du}{dx}$ einen besondern Sinn: er bezeichnet den Differential-Coefficienten in der Hypothese x als allein veränderlich angesehen, oder den Coefficienten des ersten Gliedes von der Entwicklung des in dieser Hypothese genommenen Unterschiedes, durch den Zuwachs dx dividirt: eben so verhält es sich mit $\frac{du}{dy}$.

Die

Die Größen $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ werden gemeiniglich Partial-Differenzen der ersten Ordnung von der Function u genannt; und allgemein stellt

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}$$

eine Partial-Differenz von der Ordnung $m+n$ vor, welche man erhält, wenn m mal in Beziehung auf x und n mal in Beziehung auf y differentiirt wird.

Ich glaube bemerken zu müssen, daß die Benennung Partial-Differenz nicht genau ist; denn die Formeln, welche man so bezeichnet drücken nicht die Differenz zwischen zwey Größen aus. Die wahren Partial-Differenzen von u sind

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h, y) - f(x, y) \\ f(x, y+k) - f(x, y) \end{array}\right\},$$

die erste ist genommen, indem man bloß Rücksicht auf die Veränderung von x nahm und die zweyte indem man bloß die Veränderung von y voraussetzte. Die Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx} h \\ \frac{du}{dy} k \end{array}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx} dx \\ \frac{du}{dy} dy \end{array}\right\}$$

welches die ersten Glieder von den Entwicklungen dieser Unterschiede sind, sollten Partial-Differenzen genannt werden, und

du

$$\left.\begin{array}{c}\frac{du}{dx}\\ \frac{du}{dy}\end{array}\right\}$$

sollten immer Differential-Coefficienten der ersten Ordnung von der vorgegebenen Function bleiben. Man muß aber bemerken, daß eine Function von einer einzigen veränderlichen Größe in jeder Ordnung nur einen Differential-Coefficienten hat, da hingegen eine Function von zwey veränderlichen Größen für die erste Ordnung zwey Differential-Coefficienten, für die zweyte Ordnung drey, für die dritte Ordnung vier u. s. w. hat.

31.

Nachstehendes zeigt, wie man diese verschiedenen Coefficienten finden kann, indem man von den beyden ersten ausgeht.

Man hat erst

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

nimmt man hierauf das Differential der Functionen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$, welche als Functionen von zwey veränderlichen Größen behandelt werden müssen, so kömmt

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}dx + \frac{d^2u}{dydx}dy$$

$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d^2u}{dxdy}dx + \frac{d^2u}{dy^2}dy$$

und weil das zweyte Differential nichts anders als das Differential vom ersten Differential ist, so hat man

d^2u

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dx\,dy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2$$

indem man dx und dy als beständige Größen ansieht, und beobachtet, daß die Differential-Coefficienten deren Nenner bloß die verschiednen Anordnungen eines und eben desselben Products aus dx und dy vorstelle, identisch sind.

Differentiirt man die Coefficienten, welche sich in dem vorstehenden Resultat befinden, so kömmt

$$d.\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^3u}{dx^3}dx + \frac{d^3u}{dydx^2}dy$$

$$d.\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^3u}{dx^2dy}dx + \frac{d^3u}{dydxdy}dy$$

$$d.\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^3u}{dxdy^2}dx + \frac{d^3u}{dy^3}dy$$

und folglich

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3.$$

Man wird diese Bildung leicht fortsetzen können, und ohne Zweifel die Analogie bemerken, die sich zwischen den Resultaten zu welchen wir gelangt sind, und zwischen der Entwicklung der Potenzen des Binomiums befindet. Um sich zu versichern, daß diese Analogie statt hat, bis zu welcher Ordnung man auch immer die Differentiirung treiben mag, so ist es hinreichend das Gesetz aufzusuchen, welches zwischen zwey aufeinander folgenden Differentialen herrscht.

Wir wollen also annehmen man hätte

d^nu

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + A \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy$$
$$+ B \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + C \frac{d^n u}{dx^{n-3} dy^3} dx^{n-3} dy^3 \ldots$$

wo A, B, C . . . numerische von x und y unabhängige Coefficienten sind; wenn man jedes Glied in der zweyten Hälfte dieser Gleichung successive in Beziehung auf x und y differentiirt, und dann die ähnlichen Resultate zusammenaddirt, so wird man finden

$$\left. \begin{aligned} d^{n+1} u = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} dx^{n+1} + (A+1) \frac{d^{n+1} u}{dx^n dy} dx^n dy \\ + (B+A) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n-1} dy^2} dx^{n-1} dy^2 \\ + (C+B) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n-2} dy^3} dx^{n-2} dy^3 \\ + \ldots \end{aligned} \right\}$$

Nun sey

$$(x+y)^n = x^n + A' x^{n-1} y + B' x^{n-2} y^2 + C' x^{n-3} y^3 + \ldots$$

so hat man

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = x^{n+1} + (A'+1) x^n y$$
$$+ (B'+A') x^{n-1} y^2 + (C'+B') x^{n-2} y^3 + \ldots$$

woraus man sieht, daß bey dem Uebergang von n zu n + 1, mit den Coefficienten der Entwicklung $(x + y)^n$ die nemlichen Veränderungen vorgehen als mit denen von $d^n u$, und da die erste Coefficienten respective denen zweyten gleich sind, wenn n = 1 ist, so muß die Gleichheit auch noch für jeden andern ganzen Werth von n statt haben: man kann also ganz allgemein schreiben

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + \frac{n}{1} \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy^2} dx^{n-1} dy$$
$$+ \frac{n}{1} \frac{(n-1)}{2} \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2 + \ldots$$

Es folgt hieraus, daß man das Differential $d^n u$ bildet, wenn man das Binomium

$$(dx + dy)^n$$

entwickelt, und die verschiedenen Glieder des Resultats, durch die analogischen Differential-Coefficienten multiplicirt, so daß dasjenige Glied, welches mit

$$dx^{n-m}\, dy^m$$

behaftet ist, zum Multiplicator

$$\frac{d^n u}{dx^{n-m}\, dy^m}$$

habe.

32.

Die Entwicklung von $f(x+h, y+k)$ kann auch von der Entwicklung der verschiedenen Potenzen des Binomiums hergeleitet werden; denn wenn man die Glieder in welcher die Exponenten von h und von k einerley Summe machen, auf einerley Nenner reducirt, so wird sie folgende Form annehmen.

$$\begin{aligned}
& u \\
& + \frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right\} \\
& + \frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + 2\frac{d^2u}{dx\,dy}hk + \frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\} \\
& + \frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}h^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k + 3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}hk^2 \right. \\
& \qquad \left. + \frac{d^3u}{dy^3}k^3\right\} \\
& + \frac{1}{1.2.3.4}\left\{\frac{d^4u}{dx^4}h^4 + 4\frac{d^4u}{dx^3dy}h^3k + 6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}h^2k^2 \right. \\
& \qquad \left. + 4\frac{d^4u}{dx\,dy^3}hk^3 + \frac{d^4u}{dy^4}k^4\right\} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

und dann sieht man augenscheinlich, daß sie sich eben so von der Reihe

$$u + \frac{1}{1}(h+k) + \frac{1}{1.2}(h+k)^2 + \frac{1}{1.2.3}(h+k)^3$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4}(h+k)^4 + \ldots$$

ableitet, als die Differentiale du, d^2u, $d^3u \ldots$ sich von den Potenzen

$$(dx + dy),\ (dx + dy)^2,\ (dx + dy)^3 \ldots$$

ableiten.

Wir werden uns nicht auf die Induction einschränken, welche man aus der Vergleichung der ersten Glieder der vorstehenden Formeln ziehen kann, und es wird uns nicht schwer fallen zu beweisen, daß die Analogie, welche wir haben bemerken lassen, im ganzen Umfange dieser Formeln statt hat. Wir wollen zu dem Ende das allgemeine Glied von

$$f(x + h, y + k)$$

betrachten; es ist augenscheinlich, daß es sich von dem allgemeinen Gliede von $f(x + h, y)$ muß ableiten lassen, wenn man darin $y + k$ statt y substituirt, aber wegen

$$f(x + h, y) = u + \frac{du}{dx}h + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} \ldots,$$

wird dies letzte Glied

$$\frac{d^m u}{dx^m} \cdot \frac{h^m}{1.2 \ldots m}$$

macht man in der Function

$$\frac{d^m u}{dx^m}$$

die in Beziehung auf y angezeigte Veränderung, so wird man zum Resultat eine Reihe von Gliedern

$$\frac{d^m u}{dx^m}$$

$$\frac{d^m u}{dx^m} + \frac{d^{m+1} u}{dx^m dy} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^{m+2} u}{dx^m dy^2} \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdots$$

$$+ \frac{d^{m+n}}{d^m dy^n} \cdot \frac{k^n}{1 \ldots n}$$

haben, und folglich wird das verlangte allgemeine Glied durch

$$\frac{d^{m+n}}{dx^m dy^n} \times \frac{h^m k^n}{1 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n}$$

ausgedrückt seyn. Aber das Product $h^m k^n$ ist mit h^{m+n} und mit k^{m+n} homogen, wovon jedes

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (m+n)}$$

zum nummerischen Coefficienten haben wird. Bringt man nun die Brüche

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (m+n)} \text{ und } \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n}$$

auf einerley Nenner, so findet man für den zweyten

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (m+n)} \times \frac{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots (m+n)}.$$

und wenn man

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots (m+n)}$$

zum gemeinschaftlichen Factor aller mit $h^m k^m$ homogenen Glieder nimmt, so bleibt

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots (m+n)}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n}$$

für den gemeinschaftlichen Coefficienten dieses Gliedes: d. h. der nemliche, als mit dem dieses Glied in der Entwicklung von $(h+k)^{m+n}$ behaftet seyn würde.

33.

Wenn man in der Entwicklung von $f(x+h, y+k)$ welche wir so eben betrachtet haben h in dx und k in dy verändert, so würde man, indem man von den Nenner abstrahirt, darin alsdann die Differentiale von allen Ordnungen, von der Function u wieder finden: nemlich das erste Differential in den Gliedern, wo die Zunahmen nur bis zum ersten Grade steigen; das größte Differential in demjenigen, wo sie nur bis zum zweyten Grade steigen; das dritte Differential in den Gliedern wo die Zunahmen nur bis zum dritten Grade steigen u. s. w. man wird also haben:

$$f(x+dx, y+dy) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4} + \ldots$$

Das nemliche Resultat erhält man für die Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, wenn man in der Formel von Nr. 12 dx statt k substituirt. Die vorstehende Reihe kömmt also eben sowohl den Functionen von einer als denen von zwey veränderlichen Größen zu, wenn man nun die Differentiale in jedem dieser Fälle auf eine schickliche Art nimmt. Wir werden bald zeigen, daß diese Reihe für jede Anzahl von veränderlichen Größen die sich in der vorgegebenen Function befinden statt hat. Sie verbindet mit diese Allgemeinheit den Vorzug, daß sie leicht zu behalten ist.

34.

Die successiven Differentiale haben uns die Mittel an die Hand gegeben, die Entwicklung einer Function in Be-

Beziehung auf die Zunahmen der veränderlichen Größen von denen sie abhängt auszudrücken. Man kann auch von dieser Entwicklung, wenn es etwa schon bekannt ist, die Differentiale selbst herleiten. Man braucht zu diesem Ende nur alle in Beziehung auf den Zuwachs gleichartigen Glieder zusammenstellen, die vom ersten Grade werden die ersten Differentiale durch 1 dividirt, geben; die Glieder vom zweyten Grade, das zweyte Differential dividirt durch 1.2; die vom dritten Grade, das Differential dividirt durch 1.2.3 und so weiter: dergestallt, daß wenn man

$$\left.\begin{array}{l} u + Pdx + Qdy \\ \quad + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 \\ \quad + \ldots \end{array}\right\}$$

hätte, man daraus

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{1} = Pdx + Qdy \\ \frac{d^2u}{1.2} = Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2 \\ \vdots \end{array}\right\}$$

ziehen würde.

Man sieht, daß dies darauf hinauskömmt, die gegebene Entwicklung mit der Reihe

$$u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$$

zu vergleichen, indem man die Glieder der Entwicklung in welchen die Summe der Exponenten der Zuwachse dx, dy einerley ist, als gleichartig mit den Gliedern der Reihe ansieht, in welchen der Exponent des Buchstaben d dieser Summe gleich ist.

35.

Um nicht in zu sehr verwickelte Rechnungen zu gerathen, so wollen wir dies Verfahren bloß auf die Function

$$u = (a + bx + cx^2)^r$$

anwenden. Substituirt man darin $x + dx$ für x, so kömmt

$$[a + bx + cx^2 + bdx + 2cxdx + cdx^2]^r$$

macht man der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{r} a + bx + cx^2 = p \\ b + 2cx = q \end{array}\right\}$$

so hat man

$$(p + qdx + cdx^2)^r$$

entwickelt man diesen Ausdruck wie ein Binomium dessen erstes Glied $p + qdx$ ist, so wird man finden

$$(p+qdx)^r + \frac{r}{1}(p+qdx)^{r-1}cdx^2 + \frac{r(r-1)}{1\,.\,2}(p+qdx)^{r-2}c^2dx^4$$
$$+ \frac{r(r-1)\,(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(p+qdx)^{r-3}c^3dx^6 + \ldots$$

Nun braucht man nur noch bloß die verschiedenen Potenzen von $p + qdx$ zu entwickeln. Um aber das Differential von der Ordnung n von der vorgegebenen Function zu erhalten, so ist es hinreichend diejenigen Glieder, welche im Endresultat mit dx^n behaftet sind, zu vereinigen, nemlich dasjenige, welches in der Entwicklung

$$\left.\begin{array}{lll} 1, \text{ von } & (p + qdx)^r & \text{mit } dx^n \\ 2, \text{ ,, } & (p + qdx)^{r-1} & \text{mit } dx^{n-1} \\ 3, \text{ ,, } & (p + qdx)^{r-1} & \text{mit } dx^{n-2} \\ 4, \text{ ,, } & (p + qdx)^{r-3} & \text{mit } dx^{n-3} \\ & \vdots & \end{array}\right\}$$

multiplicirt ist.

Nennt

Nennt man die respectiven Coefficienten dieser Potenz von dx,

$$A, B, C, D \ldots$$

so kömmt

$$\left\{A + \frac{r}{1}Bc + \frac{r(r-1)}{1.2}Cc^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}Dc^3 + \ldots\right\}$$

$$dx^n = \frac{d^n u}{1.2\ldots n}$$

Man sieht leicht, daß

$$A = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{1.2\ldots\ldots n} p^{r-n} q^n$$

$$B = \frac{(r-1)(r-2)\ldots(r-n+2)}{1.2\ldots\ldots(n-2)} p^{r-n+1} q^{n-2}$$

$$= A\frac{n(n-1)}{r(r-n+1)} \cdot \frac{p}{q^2}$$

$$C = \frac{(r-2)(r-3)\ldots\ldots(r-n+3)}{1.2\ldots\ldots(n-4)} p^{r-n+2} q^{n-4}$$

$$= A\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{r(r-1)(r-n+1)(r-n+2)} \cdot \frac{p^2}{q^4}$$

$$D = \frac{(r-3)(r-4)\ldots\ldots(r-n+4)}{1.2\ldots\ldots(n-6)} p^{r-n+3} q^{n-6}$$

$$= A\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{r(r-1)(r-2)(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)} \cdot \frac{p^3}{q^6}$$

u. s. w.

substituirt man nun statt A, B, C, D ... ihren Werth, so wird sich nach den Reductionen, ergeben:

$$d^n u = r(r-1)\ldots(r-n+1)p^{r-n}q^n dx^n \left\{1 + \frac{n(n-1)}{1(r-n+1)}\frac{cp}{q^2}\right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2(r-n+1)(r-n+2)} \cdot \frac{c^2p^2}{q^4}$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3)}\frac{c^3p^3}{q^6} + \ldots\right\}$$

Jetzt bleibt nichts weiter übrig, als an der Stelle von p und q wieder die Größen zu setzen, welche sie ausdrücken.

36.

Die Form des vorstehenden Resultats, ist nicht die einfachste, unter welchen sich $d^n u$ darstellt; denn man kann für dies Differential einen Ausdruck erhalten der bloß q als ein allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor enthält.

Man transformire

$$(p + qx + cdx^2)^r \text{ in } p^r(1 + \frac{2q}{2p} dx + \frac{4pc}{4p^2} dx^2)^r,$$

und indem man das Product 4pc evaluirt, so wird man

$$4ac + 4bcx + 4c^2x^2$$

finden, wird von dieser Größe, q^2 oder $(b + 2cx)^2$ abgezogen, so kommt

$$4pc - q^2 = 4ac - b^2;$$

ein von p unabhängiges Resultat. Setzt man also der Kürze wegen

$$4ac - b^2 = e,$$

so hat man

$$4pc = e + q^2;$$

welches die vorgegebene Function in

$$p^r (1 + \frac{2q}{2p} dx + \frac{q^2 + e}{4p^2} dx^2)^r =$$

$$p^r \left\{(1 + \frac{q}{2p} dx)^2 + \frac{e}{4p^2} dx^2\right\}^r$$

verändert, und indem man

$$\left.\begin{array}{l} q' \\ e' \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für } \frac{q}{2p} \\ \text{für } \frac{e}{4p^2} \end{array}$$

setzt, so wird sie

$$p^r[(1 + q'dx)^2 + e'dx^2],$$

ein Ausdruck, welcher sogleich durch die erste Entwicklung

$$p^r\left\{(1+q'dx)^{2r} + \frac{r}{1}(1+q'dx)^{2r-2}e'dx^2 + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}(1+p'dx)^{2r-4}e'^2dx^4 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1+q'dx)^{2r-6}e'^3dx^6 \ldots\right\}$$

giebt;

nimmt man endlich in jeder der Potenzen von $1 + q'dx$ dasjenige Glied, welches in der letzten Entwicklung durch dx^n multiplicirt ist, so wird man finden

$$p^r\left\{\frac{2r(2r-1)\ldots\ldots(2r-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots\ldots n} q'^n + \frac{r(2r-2)(2r-3)\ldots(2r-n+1)}{1\ 1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots(n-2)} q'^{n-2}e' + \frac{r(r-1)(2r-4)(2r-5)\ldots(2r-n+1)}{1 \cdot 2\ 1 \cdot 2 \ldots\ldots\ldots(n-4)} q'^{n-4}e'^2 + \ldots\right\}$$

Aber

$$q'^n = \frac{q^n}{2^n p^n}$$

$$q'^{n-2}e' = \frac{q^{n-2}}{2^{n-2}p^{n-2}} \times \frac{e}{2^2p^2} = \frac{q^{n-2}e}{2^np^n} = \frac{q^n}{2^n p^n} \times \frac{e}{q^2}$$

$$q'^{n-4}e'^2 = \frac{q^{n-4}}{2^{n-4}p^{n-4}} \times \frac{e^2}{2^4p^4} = \frac{q^{n-4}e^2}{2^np^n} = \frac{q^n}{2^n p^n} \times \frac{e^2}{q^4}$$

u. s. w.

substituirt man diese Werthe im vorhergehenden Ausdruck, und nimmt mit der Form der Coefficienten Veränderungen vor, welche mit den vorhin entwickelten (vorherg. Seite) analogisch sind, so findet man

$$d^n u = 2r(2r-1)\ldots\ldots(2r-n+1)\left(\frac{q}{2}\right)^n p^{r-n} dx^n \left\{ 1 \right.$$

$$+ \frac{r}{1}\,\frac{n(n-1)}{2r(2r-1)}\,\frac{e}{q^2} + \frac{r(1-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2r(2r-1)(2r-2)(2r-3)}\,.\,\frac{e^2}{p^4}$$

$$\left. + \frac{r(r-1)(r-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{2r(2r-1\ldots(2r-5)}\,.\,\frac{e^3}{q^6} + \ldots \right\}$$

Als einen besondern Fall wollen wir

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

nehmen; so haben wir

$$\left.\begin{array}{l} r = -\tfrac{1}{2} \\ a = \quad 1 \\ b = \quad 0 \\ c = -1 \end{array}\right\} \text{woraus} \left.\begin{array}{l} p = 1 - x^2 \\ q = -2x \\ e = -4 \end{array}\right\}$$

und es kömmt

$$d^n.\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{1.2\ldots\ldots n x^n dx^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left\{1 + \tfrac{1}{2}.\,\frac{n(n-1)}{1.2.x^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1.3}{2.4}\,.\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-1)}{1.2.3.4.x^4} + \ldots\right\}$$

Dies ist das Resultat zu welchem Euler in seiner Abhandlung vom Differentialcalcul, durch Induction gelangt ist, und welches Lagrange directe nach dem vorhin auseinandergesetzten Verfahren gefunden hat.

Es folgt aus Nr. 2, daß, wenn x den Sinus eines durch y vorgestellten Bogens bezeichnet, man haben wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

und folglich

d^n

$$\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{dx^n} = \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$$

Die vorstehende Reihe durch dx^n dividirt, giebt also den Werth von

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}.$$

37.

Von der Differentiirung solcher Functionen die eine beliebige Anzahl veränderlicher Größen enthalten.

Wir werden uns nicht viel mit solchen Functionen beschäftigen, welche von drey oder von einer größern Anzahl veränderlichen Größen abhangen, weil es leicht ist, daß in den vorhergehenden Nummern Gesagte zu verallgemeinern. Man sieht auch wirklich, daß man in dem Falle, wo u eine Function von drey veränderlichen Größen x, y und z vorstellt, zuerst die Nr. 20 gegebene Entwicklung erhalten würde, indem man bloß auf die Aenderungen von x und y Rücksicht nimmt; um endlich zu finden was entsteht, wenn z einen durch l vorgestellten Zuwachs erhält, so braucht man nur die Größen

$$u, \frac{du}{py}, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

als Functionen von z allein zu betrachten und an ihrer Stelle die Reihen zu setzen, welche man erhält, indem man vom Taylorschen Lehrsatz Nr. 12 Gebrauch macht. Diejenige Reihe, welche man für den Differential-Coefficienten

$$\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$$

substituiren müßte, würde zum allgemeinen Gliede

$d^{p+n+m}u$

$$\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p\,dy^n\,dx^m}\cdot\frac{l^p}{1.2\ldots p}$$

haben und weil

$$\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$$

mit dem Product

$$\frac{k^n h^m}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots m}$$

behaftet ist, so findet man, daß das allgemeine Glied von der Entwicklung der Function u (in dem Fall wo die drey veränderlichen Größen von denen sie abhängt sich zu gleicher Zeit verändern) durch

$$\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p\,dy^n\,dx^m}\cdot\frac{l^p k^n h^m}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots n \times 1.2\ldots m}$$

ausgedrückt ist. Wird dieses Resultat durch das Product $1.2\ldots(p+n+m)$ multiplicirt, und dividirt, so könnte man ihm folgende Form geben

$$\frac{1}{1.2\ldots(p+n+m)}\cdot\frac{d^{p+n+m}u}{dz^p\,dy^n\,dy^m}\cdot\frac{1.2\ldots(p+n+m)l^p k^n h^m}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots n \times 1.2\ldots m};$$

Da nun der letzte Theil dieses Ausdrucks das allgemeine Glied der Entwicklung von

$(l+k+h)^{p+n+m}$ (Einl. Nr. 19)

ist, so kann man die Entwicklung des neuen Zustandes von u bilden, wenn man jedes Glied

$$u+\frac{(l+k+h)}{1}+\frac{(l+k+h)^2}{1.2}+\frac{(l+k+h)^3}{1.2.3}\ldots$$

durch den Differential-Coefficienten multiplicirt welcher den Potenzen des Zuwachses, womit diese Glieder behaftet sind, analogisch ist.

38.

Man sieht jetzt ein, wenn u eine Function von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen x, y, z, t . . . vorstellt, und wenn darin $x+h$, $y+k$, $z+l$, $t+g$... an die Stelle dieser veränderlichen Größen substituirt wird, daß sie in einer Reihe von Gliedern entwickelt werden kann, welche allgemein durch

$$\frac{d^{m+n+p+q+\cdots}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q \ldots} \cdot \frac{k^m h^n g^p}{1.1\ldots m \times 1.2\ldots n \times 1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times \ldots}$$

vorgestellt sind, oder welches auf eins herauskömmt, durch

$$\frac{d^{m+n+p+q+\cdots}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q \ldots} \cdot \frac{M h^m k^n l^p g^q \ldots}{1.2\ldots(m+n+p+q+\ldots)};$$

wo M den Coefficienten von $h^m k^n l^p g^q$ in dem zur Potenz $m+n+p+q+\ldots$ erhobenen Polynom $h+k+l+g+\ldots$ bezeichnet (Einl. Nr. 19).

Man wird noch von der Entwicklung der Reihe

$$u + \frac{(h+k+l+g+\ldots)}{1} + \frac{(h+k+l+g+\ldots)^2}{1.2} + \ldots$$

zu der Reihe des neuen Zustandes der vorgegebenen Function übergehen, indem die Glieder der ersten Reihe durch die Differential-Coefficienten multiplicirt werden, welche ihnen respective analogisch sind.

Es ist wichtig zu bemerken, daß der Werth des Coefficienten

$$\frac{d^{m+n+p+q+\cdots}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q \ldots}$$

sich nicht ändert, in welcher Ordnung auch die angezeigten Differentiirungen aufeinander folgen; z. B. der Ausdruck

$$\frac{d^{n+m+p+q+\cdots}u}{dy^n dx^m dz^p dt^q \ldots}$$

kömmt mit dem vorhergehenden überein. Um sich davon zu überzeugen, so ist es hinreichend, zu beobachten, daß man von

$f(x, y, z, t \ldots)$ zu $f(x+h, y+k, z+t, t+g \ldots)$ übergehen kann, indem man successive die Größen x, y, z in beliebiger Ordnung sich verändern läßt, wenn man nur Rücksicht auf die Veränderung nimmt, welche jede unter ihnen für sich erhalten hat: dies ist nach dem Nr. 26 gegebenen Beyspiel über die Function mit zwey veränderli- Größen evident genug.

Das nemliche kann auch noch bewiesen werden, wenn man von der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}$$

ausgeht; denn wenn man die Formel

$$\frac{d^{m+n+p+q+\cdots}u}{dx^m dy^n dz^p dt^q \ldots}$$

wie in Nr. 27 entwickelt, dergestalt, daß man zwey nächst auf einanderfolgende Differentiirungen unter den angezeigten isolirt, so könnte man sie unter einander versetzen, und wenn man diese Operation wiederholt, so kann dadurch die Ordnung der Differentiirungen in den vorgegebenen Coefficienten beliebig verändert werden *).

39.

*) Man hat in mehreren Elementarbüchern bewiesen, daß die Producte ab und ba identisch sind, und hat hierauf angenommen, man könne eine jede beliebige Anzahl von Größen in einer willkührlichen Ordnung durch einander multipliciren, ohne daß sich ihr Product verändere. D'Alembert hat bemerkt daß dieser Satz, den man mit Unrecht

als

39.

Giebt man m, n, p, q, . . . alle mögliche Werthe in ganzen Zahlen, so wird man daraus die verschiedenen Glieder von der Entwicklung der vorgegebenen Function bilden, und indem man sich auf diejenigen Glieder einschränkt, wo die Zuwachse nicht den ersten Grad übersteigen, so hat man

$$u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + \frac{du}{dt} g + \ldots$$

wird h, k, l, g, . . . in dx, dy, dz, dt verändert, und die ursprüngliche Function abgezogen, so wird das Resultat das erste Differential von dieser Function seyn: man hat also

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt + \ldots;$$

woraus folgt, daß das Differential einer Function von einer beliebigen Anzahl veränderli-

cher

als durch sich selbst evident ansähe, sich durch ein Raisonnement, welches dem vorhin Angewendeten analogisch ist, erweisen lasse. In der That, wenn man das Product abcdef... wie folgt schreibt abc×de×f... und die beyden aufeinanderfolgenden Factoren de unter sich versetzt, so kommt abcedf... Es ist leicht zu sehen, daß man durch neue Zerlegungen eine beliebige Veränderung in der Ordnung der Factoren vornehmen könne.

Die deutschen Mathematiker namentlich der Hr. Hofr. Kästner hat dieses in seinen bekannten Anfangsgr. der Math. strenge erwiesen, auch dieses, daß

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

S.

cher Größen gleich ist der Summe der Partial-Differentiale die in Beziehung auf jeder dieser veränderlichen Größen genommen sind.

Was die Differentiale der höheren Ordnungen betrifft, so kann man sie successive von einander und von der ersten ableiten, und man wird zwischen ihnen und zwischen den Potenzen des Polynoms $dx+dy+dz+dt+\ldots$ die nemliche Analogie finden, welche man (Nr. 31) zwischen den Differentialen der Functionen von zwey veränderlichen Größen und den Potenzen des Binomiums $dx+dy$ bemerkt hat. Es geht aus dieser Analogie hervor, daß alle Glieder in dx, dy, dz, dt ... gleichartig, und von einen durch den Exponenten ihrer Ordnung angezeigten Grad seyn werden; und endlich daß, wenn man dx, dy, dz, dt ... für h, k, l, g ... substituirt, man noch für die Entwicklung von u in dieser Hypothese,

$$u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\ldots$$

haben wird, welches zeigt, daß die in Nr. 34 gemachten Bemerkungen auf alle Functionen von jeder beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen, ausgedehnt werden müssen.

Wir werden hier das, was die expliciten Functionen betrifft, beschließen, um zur Untersuchung der Differentialen der impliciten oder der nur durch Gleichungen gegebenen Functionen überzugehen.

40.

Von der Differentiirung der Gleichungen.

Wenn man zwischen den beyden unbekannten Größen x und y die Gleichung $f(x, y) = 0$ hat, so ist augenscheinlich, daß sobald der Werth von einer derselben gege-

gebe-

geben oder willkührlich angenommen ist, der Werth der andern bekannt seyn wird. Die zweyte ist also eine Function von der ersten, und eben so auch umgekehrt. Es folgt hieraus, daß wenn x z. B. einen durch h vorgestellten Zuwachs erhält, y auch eine Veränderung erleiden muß die der Veränderung von x untergeordnet ist. Bezeichnet man diese Veränderung durch k, die nichts anders als eine Vermehrung oder Verminderung seyn kann, so kömmt $y + k$ an der Stelle von y: da aber der Calcul allemal die in dem Zeichen gemachten falschen Annahmen verbessert, so wollen wir bloß $y + k$ schreiben, weil man in dem Falle wo der Werth von y sich vermindert, wenn der Werth von x zunimmt, alsdann h negativ finden würde.

Dies vorausgesetzt, wenn die Größen $x + h$, $y + k$ neue mit dx und mit dy correspondirende Werthe sind, so müssen sie auch der vorgegebenen Gleichung Genüge leisten, d. h. man muß noch $f(x + h, y + k) = 0$ haben. Aber vermöge der Hypothese leisten x und y der ursprünglichen Gleichung $f(x, y) = 0$ Genüge; folglich enthält die vorhergehende Gleichung nur zwey unbekannte Größen h und k, wovon die eine bestimmt seyn wird, wenn man der andern einen Werth beygelegt hat.

Betrachten wir nun y als eine Function von x, so haben wir nach dem Theorem von Nr. 12,

$$y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

statt y, wenn x, $x + h$ wird; und wenn man die Differential-Coefficienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$$

durch y', y'', y'''

vorstellt, so wird die in den Werth von y vorgegangene Veränderung

$$\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \ldots$$

diese Reihe statt k in der Gleichung

$$f(x + h, y + k) = 0$$

substituirt, würde dieselbe unabhängig vor jeden besondern Werth von h identisch machen, wenn die Coefficienten y' y'' y''' ... der Natur der Function y gemäß ausgedrückt wären. Wenn man aber Gebrauch von der Formel Nr. 25. macht, so kann man, was auch immer die Zusammensetzung der durch den Buchstaben f bezeichneten Function seyn mag, $f(x + h, y + k)$ nach den ganzen und positiven Potenzen von h und k entwickeln; setzt man endlich an die Stelle der Potenzen von k, diejenigen der Reihe

$$\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1.2} + \frac{y'''h^3}{1.2.3} + \ldots$$

so hat man nothwendig zum Resultat einen Ausdruck von der Form

$$f(x,y) + P_1 h + P_2 h^2 + P_3 h^3 + \ldots = 0;$$

wo P_1, P_2, P_3 bekannte Functionen von x, y, y', y'' ... sind. Aber nach dem was vorhin gesagt ist, muß der Zuwachs h unbestimmt bleiben, weil er willkührlich angenommen werden kann, man muß also zu gleicher Zeit haben

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y) = 0 \\ P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \\ P_3 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\}$$

Da

Da die erste dieser Gleichungen die Vorgegebene selbst ist, so lehrt sie uns nichts neues; nur die folgenden bestimmen die Coefficienten y', y'', y''' ... und wir wollen jetzt zeigen, wie man sie von einander ableiten kann, ohne daß es nöthig ist $f(x+h, y+k)$ unmittelbar zu entwickeln.

41.

Die Art wie man in Nr. 5 bewiesen hat, daß jeder der Coefficienten X_1, X_2, X_3, der verschiedenen Potenzen von k, in der Entwicklung von $f(x+k)$ sich von der ihr Vorhergehenden, durch ein gleichförmiges Verfahren ableitet, ist auf den gegenwärtigen Fall anwendbar.

In der That man muß auch hier wie im angeführten Artikel, das nemliche Resultat finden, es mag $h+h'$ statt h in der Reihe

$$f(x,y) + P_1 h + P_2 h^2 + P_3 h^3 \ldots$$

geschrieben, oder angenommen werden, daß sich x in den Functionen

$$f(x,y),\ P_1,\ P_2,\ P_3 \ldots$$

in $x + h'$ verändern; denn die eine Substitution sowohl als die andern verändert x in $x + h + h'$, in y und in $f(x,y)$.

Wenn aber x, $x + h'$ wird, so wird

$$y \text{ als Function von } x \text{ betrachtet } y + \frac{y'h'}{1} + \frac{y''h'^2}{1.2} + \ldots$$

$$y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y' + \frac{y''h'}{1} + \frac{y'''h'^2}{1.2} + \ldots$$

$$y'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y'' + \frac{y''h'}{1.2} + \frac{y^{\prime v}h'^2}{1.2} + \ldots$$

u. s. w.

und es ist leicht zu sehen, daß, wenn man diese neuen Werthe in einer beliebigen Function der Größen $x, y, y', y'', \ldots$ u. s. w. setzt, sie die Form einer nach den ganzen und positiven Potenzen von h' geordneten Reihe annehmen wird. Wenn man noch daran zweifelte, so braucht man nur um sich davon zu überzeugen, beobachten, daß, wenn man annimmt x, y, y', y'' werde respective $x + h$, $y + k$, $y' + k$, $y'' + k'' \ldots$ man immer (Nr. 38) diese Function nach den ganzen und positiven Potenzen der Größen $h', k, k'', k''' \ldots$ entwickeln könnte; aber in den vorhergehenden Hypothesen stellten $k, k', k'' \ldots$ nach den ganzen und positiven Potenzen von h' geordneten Reihen vor; man wird also nach diesen Betrachtungen haben

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) + P_1 h + P_2 h'^2 + \ldots \\ P_1 + P_1' h' + P_1'' h'^2 + \ldots \\ P_2 + P_2' h' + P_2'' h'^2 + \ldots \end{array}\right\} \text{ statt } \left\{\begin{array}{l} f(x,y) \\ P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right.$$

macht man bey diesen Entwicklungen die nemlichen Operationen und dieselben Raisonnements, die man über ihre analogen in den vorhin angeführten Artikel gemacht hat, so wird man finden, daß die successive Ableitung der Coefficienten, P_1, P_2, P_3, die nemliche ist als die der Coefficienten X_1, X_2, X_3 . . .; d. h. wenn man die Function $f(x,y)$ durch u bezeichnet und den Coefficienten der ersten Potenz von h in der Entwicklung von u, welcher durch die Substitution von $x + h$ statt x entsteht, u' nennt, eben so den nemlichen Coefficienten in Rücksicht auf u', u'' nennt; und den nemlichen Coefficienten in Absicht auf u'',u''' nennt, und so weiter, so wird man haben

$P_1 =$

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \dfrac{u'}{1} \\ P_2 = \dfrac{u''}{1 \cdot 2} \\ P_3 = \dfrac{u'''}{1 \cdot 2 \cdot 3} \end{array}\right\} \text{woraus man zieht} \left\{\begin{array}{l} u' = 0 \\ u'' = 0 \\ u''' = 0 \end{array}\right.$$

u. s. w. u. s. w.

42.

Nichts ist leichter als die Größen u', u'', u''' ... zu bilden, denn wenn man durch die Buchstaben h und k die Veränderungen anzeigt, welche x und y in der Function $f(x, y)$ oder u erlitten haben, so erhält man (Nr. 32)

$$f(x+h, y+k) = u + \left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + \ldots\right) \end{array}\right\} + \ldots$$

da aber k wieder die Reihe $\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1 \cdot 2}$ ... vorstellt, und da man nur den Coefficienten des Gliedes sucht, welcher durch die erste Potenz von h multiplicirt ist, so muß man sich, in der vorhin dargestellten Entwicklung auf diejenigen Glieder einschränken, wo die Zuwachse h und k nur bis zum ersten Grade steigen und sich nicht miteinander multipliciren, und auch zu gleicher Zeit nur das erste Glied des Werthes von k in Rechnung bringen: mit dieser Aufmerksamkeit wird man finden

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y'\right)h$$

und folglich

$$u' = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y' = 0$$

Da der Coefficient y' in dieser Gleichung nur vom ersten Grade ist, so wird es möglich seyn daraus den Werth in x und in y zu finden, wenn man die Größen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{dy}$ durch die Differentiirung der Function u in Beziehung auf jede der veränderlichen Größen x und y die als voneinander unabhängig betrachtet sind, gebildet hat. Aber das Differential von u unter diesen Gesichtspunct genommen, ist

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy \text{ (Nr. 28)};$$

dividirt man dasselbe durch dx und bringt das Resultat auf Null, so kömmt

$$\frac{du}{dx} + \frac{du\,dy}{dy\,dx} = 0.$$

Wenn diese Gleichung mit

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}y' = 0$$

verglichen wird, so sieht man, daß

$$\frac{dy}{dx}$$

das nemliche ist als y'.

Es folgt hieraus, daß man, um den Differential-Coefficienten der ersten Ordnung von einer impliciten Function die durch eine Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y gegeben ist, zu finden, diese Gleichung differentiiren muß, als wenn die veränderlichen Größen voneinander unabhängig wären, nachher das erhaltene Resultat gleich Null setzen und den Werth von $\frac{dy}{dx}$ nehmen muß.

Man

Man wird auch bemerken, daß man, wenn y als eine Function von x betrachtet wird, haben muß $dy = y'dx$, und daß folglich dy jetzt nicht mehr den hypothetischen Zuwachs der veränderlichen Größe y vorstellt, sondern das Differential der durch diese veränderliche Größe bezeichneten impliciten Function. Uebrigens vereinigen sich diese beyden Annahmen in eine, wenn y unabhängig von x ist; denn in diesem Fall ist die Differenz zwischen zwey von ihren aufeinander folgenden Werthen keiner Entwicklung fähig, und sie enthält nur ein Glied, welches zu gleicher Zeit die Differenz und das Differential ausdrückt.

43.

Um u'' zu bilden, so muß man beobachten, daß u außer den beyden veränderlichen Größen x und y, noch den Differential-Coefficienten der ersten Ordnung y enthält, welcher sich, wenn x, $x + h$ wird, in

$$y' + \frac{y''h}{1} + \ldots$$

verändert, betrachtet man aber u' als wenn es drey veränderliche Größen x, y und y' enthielte, und substituirt

$$x + h,\ y + k,\ y' + k,$$

statt dieser veränderlichen Größen, so wird man haben

$$\left.\begin{array}{l} u' + \dfrac{du'}{dx}h + \dfrac{du'}{dy}k + \dfrac{du'}{dy'}k' \\ + \ldots \end{array}\right\}$$

setzt man endlich für k und k' ihren Werth in der Hypothese, wo y und y' als Functionen von x betrachtet sind, und schränkt sich, wie in der vorigen Nummer, auf die ersten Glieder $y'h$ und $y''h$ ein, so wird man zum Coefficienten der ersten Potenz von h

 $u'' =$

$$u'' = \frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy} y' + \frac{du'}{dy'} y'' = 0$$

finden.

Wenn man das Differential von u' genommen, und die drey veränderlichen Größen x, y und y' als von einander unabhängig angesehen hätte, so würde man haben

$$du' = \frac{du'}{dx} dx + \frac{du'}{dy} dx + \frac{du'}{dy'} dy';$$

dividirt man durch dx, und bringt die Gleichung auf Null, so kommt

$$\frac{du'}{dx} + \frac{du'}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{du'}{dy'}\frac{dy'}{dx} = 0$$

eine Gleichung, welche der vorigen gleich wird, wenn man annimt, daß

$$\left.\begin{array}{l} dy = y'dx \\ dy' = y''dx \end{array}\right\},$$

oder wenn man y als eine Function von x ansieht.

Man erhält also die Gleichung, welche die Beziehung zwischen den Differential-Coefficienten der ersten Ordnung und den der zweyten Ordnung ausdrückt, wenn man denjenigen Coefficienten, welche den ersten Coefficienten bestimmt, differentiirt, und diesen Coefficienten selbst als eine neue veränderliche Größe ansieht.

44.

U enthalte ganz allgemein x, y, y', y'', y''' ...; um den Coefficienten der ersten Potenz von h zu finden, wenn man diese Function entwickelt, nachdem

$x+h$

$$\left.\begin{array}{l} x + h \\ y + \frac{y'h}{1} + \ldots \\ y'' + \frac{y''h}{1} + \ldots \end{array}\right\} \text{ statt } \left.\begin{array}{l} x \\ y \\ y' \end{array}\right\}$$

u. s. w. u. s. w.

substituirt ist, so nehme man zuerst an, daß die veränderlichen Größen x, y, y', y'', y''' . . . von einander unabhängig sind. Bezeichnet man die respectiven Veränderungen die sie erlitten haben und schränkt sich wie es seyn muß auf die Glieder ein, in welchen die Größen h, k, k', k'' . . . nicht die erste Potenz übersteigen, so wird U

$$U + \frac{dU}{dx} h + \frac{dU}{dy} k + \frac{dU}{dy'} k' + \frac{dU}{dy''} k'' + \frac{dU}{dy'''} k''' + \ldots$$

Nimmt man aber nur auf die erste Potenz von h Rücksicht, so muß man

$$\left.\begin{array}{l} y'h \\ y''h \\ y'''h \\ y^{\text{IV}}h \end{array}\right\} \text{ statt } \begin{array}{l} k \\ k' \\ k'' \\ k''' \end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

setzen; so wird der Coefficient von h nach diesen Substitutionen

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} y' + \frac{dU}{dy'} y'' + \frac{dU}{dy''} y''' + \frac{dU}{dy'''} y^{\text{IV}} + \ldots$$

seyn.

Es folgt hieraus, daß wenn $U = 0$ die Gleichung ist, welche die Beziehung zwischen x, y und den Coefficienten y', y'', y''' . . . ausdrückt, so wird

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy} y' + \frac{dU}{dy'} y'' + \frac{dU}{dy''} y''' + \frac{dU}{dy'''} y^{\text{IV}} + \ldots = 0$$

die Gleichung seyn, welche daraus für die nächsthöhere Ordnung entsteht, und einen Differential-Coefficienten mehr enthält. Man sieht auch wirklich, daß wenn y''' der Coefficient der höchsten Ordnung ist, welche sich in $U = o$ befindet, so wird die eben erhaltene Gleichung $y^{\prime v}$ enthalten. Es ist nöthig zu bemerken, daß der letzte eingeführte Differential-Coefficient nur bloß in der ersten Potenz erscheint, und daß man ihn folglich immer durch $x, y, y', y'', y''' \ldots$ bestimmen kann, ohne auf unmögliche Größen in den Ausdruck seines Werthes zu stoßen.

Die Differentiirung der Function U die verrichtet wird indem man $x, y, y', y'' \ldots$ als so viel von einander unabhängige Größen ansieht, giebt nachdem man durch dx dividirt und das Resultat auf Null gebracht hat

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dU}{dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{dU}{dy''}\frac{dy''}{dx} + \frac{dU}{dy'''}\frac{dy'''}{dk} = o;$$

oder wegen der Beziehungen, welche zwischen den Größen y, y', y'', y''' statt finden (Nr. 11) die nemliche Gleichung als kurz zuvor.

Man kann also aus dem Vorhergehenden schließen, daß die Gleichungen, welche die Beziehungen der Differential-Coefficienten einer impliciten Function die durch eine Gleichung zwischen zwey veränderliche Größen gegeben ist, ausdrücken, sich voneinander durch successive Differentiirungen ableiten, indem man jeden dieser Coefficienten als eine neue veränderliche Größe behandelt.

45.

Da der Differential-Coefficient der ersten Ordnung wie gewöhnlich durch $\frac{dy}{dx}$ vorgestellt ist, so wird sein Differential $\frac{d^2y}{dx}$ seyn, weil dx welches hier die Stelle des willkührlichen Zuwachses von h vertritt, als unveränderlich angesehen werden kann. Aus dem nemlichen Grunde wird das Differential des Coefficienten der zweyten Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^2}$$

seyn; und so mit den übrigen. Man muß also die Größen x, y, dy, d^2y, d^3y . . . als eben so viel besondere veränderlichen Größe ansehen, die Gleichung, welche dieselben enthält in Beziehung auf jede von ihnen differentiiren, und die Summe der Partial-Resultate nehmen. (Nr. 39). Die folgenden Beyspiele werden diese Regeln noch mehr aufklären, und die Natur der Differential-Gleichungen erkennen lassen: so nennt man jede Gleichung welche Differentiale oder Differential-Coefficienten in sich begreift, und ich werde ursprüngliche Gleichungen diejenigen nennen, welche deren keine enthalten.

46.

Es sey die Gleichung

$$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0;$$

differentiirt man die erste Hälfte in Beziehung auf y und x, so findet man

$$2ydy - 2mxdy - 2mydx + 2xdx = 0$$

oder

oder

$$(y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0$$

wo der gemeinschaftliche Factor 2 ausgelassen wird. Wenn man y als eine Function von x betrachtet, so hat man für den Ausdruck ihres Differentials

$$dy = \frac{(my - x)\,dx}{y - mx}$$

und der Differential-Coefficient wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Man kann y aus beyden Resultaten mit Hülfe der vorgegebenen Gleichung fortbringen; denn wenn man sie auflößt, so hat man

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2};$$

substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von dy, so kommt

$$dy = \left\{\frac{-x + m^2x \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}\right\} dx =$$

$$mdx \pm \left\{\frac{-x^2 + m^2x}{\sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}}\right\} dx.$$

Man sieht leicht, daß die beyden Werthe von dy die man hieraus ziehen würde, die respectiven Differentiale der Werthe von y sind, die in

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 - x^2 + m^2x^2}$$

enthalten sind.

Wenn man statt die vorgegebene Gleichung aufzulösen, um daraus die Werthe von y zu ziehen, diese veränderliche Größe zwischen den beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0 \\ (y - mx)\,dy - (my - x)\,dx = 0 \end{array}\right\}$$

elimi-

eliminirt hätte, so würde man sogleich zufolge der zweyten haben,

$$y = \frac{x(mdy - dx)}{dy - mdx};$$

substituirt man diesen Werth in der ersten, so kommt nach den Reductionen;

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)dy^2 - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)dxdy$$
$$+ (x^2 - m^2x^2 - a^2m^2)dx^2 = 0$$

Diese letzte Gleichung würde, nachdem sie in Beziehung auf dy aufgelößt wäre, die vorhin gefundenen Werthe geben. Man könnte auch daraus unmittelbar den Differential-Coefficienten finden, man brauchte zu dem Endzweck die Gleichung nur durch dx^2 zu dividiren, und würde alsdann erhalten haben,

$$(x^2 - a^2 - m^2x^2)\frac{dy^2}{dx^2} - (2mx^2 - 2ma^2 - 2m^3x^2)\frac{dy}{dx}$$
$$+ x^2 - m^2x^2 - a^2m^2 = 0$$

befreyt man die zweyte Potenz des Differential-Coefficienten, die durch $\frac{dy^2}{dx^2}$ ausgedrückt ist, von ihren Coefficienten, so kommt

$$\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{2mdy}{dx} + \frac{x^2 - m^2x^2 - a^2m^2}{x^2 - a^2 - m^2x^2} = 0$$

47.

Es ist leicht das Vorhergehende auf zusammengesetztere Fälle anzuwenden, oder in welche die veränderliche Größe zu einen höhern Grad steigen. Wir wollen annehmen man hätte

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0;$$

die Differentiirung giebt

$$3y^2dy - 3axdy - 3aydx + 3x^2dx = 0$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Da in diesem Beyspiele die Function y durch eine Gleichung vom dritten Grade gegeben ist, so muß sie drey Werthe haben, und indem mnn dieselben successive in den Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ substituirt, so wird man eine gleiche Anzahl von Werthe für den Differential-Coefficienten erhalten. Man sieht ganz allgemein, daß dieser Coefficient immer eine solche Anzahl von Werthen haben wird, als deren die Function y in der vorgegebenen Gleichung fähig ist: eben so wird es sich in Absicht des Differentials verhalten

Wenn man y zwischen den beyden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y^3 - 3axy + x^3 = 0 \\ y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \end{aligned}\right\}$$

eliminirte, so würde man zum Resultat eine Gleichung voch dritten Grade in Beziehung auf dy haben, welche die drey Werthe die dieses Differential haben kann, enthielte.

48.

Hätte man den Ausdruck von dy oder von $\frac{dy}{dx}$ gefunden, so würde man nach einer neuen Differentiirung zu dem Ausdruck von d^2y oder von $\frac{d^2y}{dx^2}$ gelangt seyn.

Wir werden uns noch der Gleichung

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0 \ldots (u)$$

bedienen, um daß über diesen Gegenstand Gesagte verständständlich zu machen. Da das erste Differential dieser Gleichung, wie wir vorhin gesehen haben,

$$y^2dy - axdy - aydx + x^2dx = 0 \ldots (du)$$

ist, so muß man um das zweyte Differential zu haben, nach der Nr. 43 gegebenen Regel in Beziehung auf dy auf y und auf x differentiiren. Thut man dies, so wird kommen

$$y^2d^2y - axd^2y - 2ydydy - adydx + adxdy + 2xdx^2 = 0$$

und nach der Reduction hat man

$$(y^2 - ax\,d^2y + 2ydy^2 = 2adxdy + 2xdx^2 = 0 \ldots (d^2u)$$

Dies ist das zweyte Differential der vorgegebenen Gleichung; wenn man es mit dem ersten Differential verbindet, so kann man dy eliminiren, nnd das Resultat wird den Ausdruck von d^2y in x, dx und y geben. Wenn man will, so kann man auch die Function y vermittelst der vorgegebenen Gleichung fortschaffen.

Dividirt man die Gleichung (d^2u) durch dx^2, so nimmt sie die Form

$$(y^2 - ax)\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} - 2u\frac{dy}{dx} + 2x = 0,$$

an, und enthält nur allein die Differential-Coefficienten

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und } \frac{dy}{dx}.$$

Wird statt $\frac{dy}{dx}$ sein aus (du) gezogener Werth

$$\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

gesetzt, so kommt

$$(y^2 - ax)\frac{d^2x}{dx} + 2y\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right)^2 - 2a\left(\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}\right) + 2x = 0$$

und wenn man alles auf einerley Nenner reducirt,

$(y^2 - ax)^3$

$$(y^2-ax)^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+2xy^4-6ax^2y^2+2x^4y+2a^3xy=0;$$

aber die Größe

$$2xy^4-6ax^2y^2+2x^4y$$

ist nichts anders als

$$(y^3-3axy+x^3).2xy,$$

sie ist also kraft der vorgegebenen Gleichung Null, und man hat folglich

$$(y^2-ax)^3\frac{d^2y}{dx^2}+2a^3xy=0$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}.$$

Differentiirt man (d^2u) in Beziehung auf d^2y, dy, y und x, so bildet man dadurch das dritte Differential (d^3u), und zieht daraus den Werth von d^3y, wenn d^2y und dy mit Hülfe der Gleichungen (du) und (d^2u) eliminirt sind; das Resultat durch dx^3 dividirt giebt den Ausdruck des Coefficienten $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Setzt man dies fort, so bekömmt man die höhern Differentiale.

49.

Was auch immer die Gleichung $u=0$ sey, so wird doch ihr erstes Differential

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0$$

seyn, und folglich die Form

$$Mdx+Ndy=0$$

haben; ihr zweytes Differential in Beziehung auf x, y und dy genommen, wird, wenn man beobachtet, daß

$$\frac{du}{dx} \text{ und } \frac{du}{dy}$$

nicht mehr dy enthalten,

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{du}{dy}d^2y = 0$$

oder von der Form

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Nd^2y = 0;$$

das dritte Differential wobey in Beziehung auf x, y, dy und d^2y differentiirt ist, wird

$$\frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{3d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + \frac{3d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 \left.\begin{matrix} + \frac{3d^2u}{dxdy}dx \\ + \frac{3d^2u}{dy^2}dy \end{matrix}\right| d^2y$$

$$+ \frac{du}{dy}d^3y = 0;$$

oder von der Form

$$Sdx^3 + Tdx^2dy + Vdxdy^2 + Wdy^3 \left.\begin{matrix} + Xdx \\ + Ydy \end{matrix}\right| d^2y + Nd^3y = 0;$$

und so fort.

Alle diese Gleichungen sind in Absicht der Differentiale von dy und der Potenzen von dx, homogen, wenn man dy mit dx, d^2y mit dx^2, dy^3 mit dx^3 ... vergleicht; dividirt man also dieselben respective durch $dx, dx^2, dx^3 \ldots$ so wird man die Beziehungen erhalten, welche zwischen denen Differential-Coefficienten statt finden, und es wird alsdann kommen

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0$$

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$S + T\frac{dy}{dx} + V\frac{dy^2}{dx^2} + W\frac{dy^3}{dx^3} + \left(X + Y\frac{du}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + N\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

u. s. w.

50.

Die Bemerkung welche wir (Nr. 15) über die beständigen Größen gemacht haben; die durch die Differentiirung der Functionen verschwinden, kann ebenfalls auf Gleichungen angewendet werden. Wenn man z. B.

$$y^2 = ax + b$$

hätte, so wird das Differential $2y\,dy = adx$ da es unabhängig von b ist, jeder der besondern Gleichungen zukommen, welche aus der vorgegebenen entstehen, wenn man b alle mögliche Werthe giebt.

Man kann aber auch im gegenwärtigen Falle zu einer von b unabhängigen Gleichung gelangen, obgleich die Differentiirung diese beständige Größe nicht verschwindend machte; man braucht nur deshalb a zwischen den beyden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= ax + b \\ 2ydy &= adx \end{aligned}\right\}$$

zu eliminiren, und findet alsdann

$$y^2dx = 2xydy + bdx$$

Obgleich diese letzte Gleichung nicht das unmittelbare Differential der vorgegebenen Gleichung ist, so stammt sie doch davon ab, so daß dieselbe, nachdem sie durch dx dividirt wird, die Beziehung ausdrückt, welche zwischen der veränderlichen Größe x, der Function y und dem Coefficienten $\frac{dy}{dx}$ statt findet, was auch a sey.

Wenn die beständige Größe die man eliminirt, in der vorgegebenen Gleichung nicht vom ersten Grade ist, so wird das dadurch enrstehende Resultat noch höhern Potenzen von dy und dx enthalten als die erste. Wir wollen z. B.

y^2 —

$$y^2 - 2ay + x^2 = a^2$$

nehmen; nach der Differentiirung findet man

$$ydy - ady + xdx = 0$$

woraus

$$a = \frac{ydy + xdx}{dy},$$

dieser Werth in der vorgegebenen Gleichung substituirt, giebt wenn zuvor nach dy geordnet und durch dx^2 dividirt wird·

$$(x^2 - 2y^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 4xy\,\frac{dy}{dx} - x^2 = 0:$$

Dies ist die Beziehung, welche zwischen der veränderlichen Größe x, der Function y und ihrem Differential-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$ unabhängig von jedem besondern Werthe der beständigen Größe a, statt finden muß.

Wird die Gleichung

$$y^2 - 2ay + x^2 = a$$

in Beziehung auf a aufgelößt, so hätte man

$$a = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2}$$

und weil a von den veränderlichen Größen x und y befreyt ist, so würde a durch eine einzige Differentiirung verschwunden seyn; man hätte gefunden

$$-dy \pm \frac{2ydy + xdx}{\sqrt{2y^2 + x^2}} = 0.$$

Schafft man das Wurzelzeichen fort, so wird man sich dadurch überzeugen, daß diese Gleichung die nemliche ist als diejenige, welche wir durch die Eliminirung erhalten haben.

Man kann so viel beständige Großen fortschaffen, als man will, wenn man so oft differentiirt als beständige Größen vorhanden sind. Es sey

$$y^2 = m(a^2 - x^2):$$

man hat zuerst

$$ydy = - mxdx;$$

differentiirt man von neuen, so findet man

$$yd^2y + dy^3 + mdx^2 = 0:$$

wird für m, sein aus der vorhergehenden Gleichung gezogenen Werth

$$\frac{-ydy}{xdx}$$

gesetzt, und durch dx^2 dividirt, so kommt

$$y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy^2}{dx^2} - xy\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

ein, von den beständigen Größen m und a, unabhängiges Resultat.

Bey der successiven Differentiirung geschieht es zuweilen, daß die veränderliche Größe, die man als unabhängig betrachtet, ganz aus der vorgegebenen Gleichung verschwindet. Wenn z. B. die Gleichung von der Form

$$Y = ax + b$$

wäre, wo Y eine Function von y allein ist, so hätte man $dY = adx$, und weil dy unveränderlich ist, so wird sich das zweyte Differential auf

$$d^2Y = 0$$

reduciren. Ferner die Gleichung

$$Y = ax^2 + bx + c$$

dreymal nach einander differentiirt, giebt

$$\left.\begin{array}{l} dY = 2axdx + bdx \\ d^2Y = 2adx^2 \\ d^3Y = 0 \end{array}\right\}$$

Man kann diese Betrachtungen auf Gleichungen von der obigen Form, so weit treiben als man will.

52.

Durch wiederholte Differentiirungen können auch die in den Gleichungen enthaltene irrationale und transcendente Functionen, fortgebracht werden.

Man habe zuerst die Gleichung

$$y = (a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}};$$

wenn man davon das Differential nimmt, so findet man

$$dy = \frac{m}{n}(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n} - 1} 2xdx = \frac{m}{n}\frac{(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}}{a^2 + x^2} \cdot 2xdx,$$

und für $(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$ seinen Werth gesetzt, giebt

$$dy = \frac{2myxdx}{n(a^2 + x^2)};$$

ein Resultat in welchem die irrationale Größe

$$(a^2 + x^2)^{\frac{m}{n}}$$

sich nicht mehr befindet.

Enthielte die vorgegebene Gleichung eine größere Anzahl von irrationalen Functionen, so könnte man sie ebenfalls durch wiederholte Differentiirungen fortschaffen. Das Verfahren gründet sich darauf, daß die in einer Gleichung befindlichen irrationalen Größen zwar in den Differentialen der Gleichung wieder vorkommen, aber auf Potenzen erhoben die um eine, zwey, drey u. s. w. Einheiten geringer sind, und daß man sie folglich als particulaire unbekannte Größen behandeln, und dieselbe, wenn man eine hinlängliche Anzahl von Gleichungen erhalten hat, eliminiren kann: wenn man z. B.

$$P^m + aQ^n = b$$

hätte, und P und Q wären rationale Functionen von x und y, so würde man nach zwey Differentiirungen finden

$$mP^{m-1}dP = naQ^{n-1}dQ = 0$$

$$m(m-1)P^{m-2}dP^2 + mP^{m-1}d^2P + n(n-1)aQ^{n-2}dQ^2 + nQ^{n-1}d^2P = 0 \text{ *)}$$

giebt man diesen Gleichungen folgende Form

$$mP^m \frac{dP}{P} + naQ^n \frac{dQ}{Q} = 0$$

$$m(m-1)P^m \frac{dP^2}{P^2} + mP^m \frac{d^2P}{P} + n(n-1)aQ^n \frac{dQ^2}{Q^2} + nQ \frac{d^2P}{P} = 0$$

und verbindet sie mit der Vorgegebenen, so wird es leicht seyn P^m und Q^m zu eliminiren.

40.

Was die transcendente Functionen anbetrifft, so giebt es einige bey denen die Differentiirung das Transcendente unmittelbar verschwinden läßt; die Gleichung

$$alP - A(tg = Q) = 0$$

z. B. giebt, wenn sie differentiirt wird, auf der Stelle

$$\frac{adP}{P} - \frac{bdP}{1+P^2} = 0 \text{ (Nr. 20 und 29)}$$

und

*) Es ist augenscheinlich, daß ganz allgemein dP und dQ, x, y, dx und dy enthalten müssen; man muß sie also, als neue Functionen dieser Größen behandeln, und sie folglich nach ihrer Tur differentiiren.

und, ist folglich von den transcendenten Größen befreyt.

Ueberhaupt läßt jede Differentiirung eine transcendente Größe verschwinden, es sey nun unmittelbar oder durch Hülfe der Eliminirung.

Wir wollen annehmen man hätte

$$R \sin. P + \cos. P = a^2:$$

differentiirt man, so kommt

$$R dP \cos. P + dR \sin. P + e^Q dQ \cos. P - e^Q dP \sin. P = 0;$$

man kann aber $\cos. P$ vermittelst seines Werthes

$$\sqrt{1 - \sin. P^2}$$

fortschaffen, und dann P eliminiren. Das dadurch entstehende Resultat wird nur noch die transcendente Größe e^Q enthalten; und durch eine neue Differentiirung kann man auch diese so wie die andern, verschwinden lassen.

54.

Wir haben aus dem Vorhergehenden gesehen, wie eine Differential-Gleichung einer unendlichen Menge von ursprünglichen Gleichungen entsprechen kann; das Umgekehrte findet ebenfalls statt, und es giebt auch eine unendliche Menge von Differential-Gleichungen, denen alle, eine einzige ursprüngliche Gleichung Genüge leisten kann. In der That, wenn man annimmt, irgend eine Gleichung $u = 0$ sey in Beziehung auf y aufgelößt, und der Werth von dx und das Differential dieses Werthes wären beyde in $du = 0$ substituirt, so wird diese letzte Gleichung identisch seyn; das Product $M du$ wird also, bey jedem beliebigen Werthe des Factors M, gleich 0

 seyn,

seyn, und man wird die neue Gleichung $Mdu = 0$ haben. Man sieht auch noch hieraus, daß die Gleichung

$$Mdu + M'u = 0$$

nur bloß eine Folge von der Vorgegebenen seyn müsse; und daß man auch habe

$$Md^2u + M'du + M''u = 0,$$

und so weiter, was auch immer die Factoren M, M', M''.. seyn mögen. Ich beobachte jedoch hierbey, daß man im Differentialcalcul bloß auf Ausdrücke stößt, die mit dx, dy, dx^2, dy^2 . . . homogen sind (Nr. 49), woraus folgt, daß, wenn der Factor M keine Differentiale mehr enthält, der Factor M' nothwendigerweise von der ersten Ordnung, der Factor M'' von der zweyten Ordnung u. s. w. seyn müsse.

55.

In eine Gleichung von zwey veränderlichen Größen x und y, kann man jede von ihnen als Function der andern betrachten. Bisher haben wir bloß y als eine Function von x angesehen; wir wollen jetzt die Frage umkehren, und x als eine Function von y betrachten. Wenn das Differential der Gleichung $u = 0$ eben so wie in Nr. 49, durch

$$Mdx + M'dy = 0$$

vorgestellt ist, so wird man daraus, wenn durch dy dividirt wird,

$$M\frac{dx}{dy} + N = 0$$

ziehen: $\frac{dx}{dy}$ wird den Differential-Coefficienten von der Function x ausdrücken, und sein Werth wird genau das um-

Umgekehrte von dem Werthe des Coefficienten $\frac{dy}{dx}$ seyn, in Beziehung auf die Hypothese daß y eine Function von x ist.

56.

Die Gleichung

$$Mdx + Ndy = o$$

ist ebenfalls das Differential von der Vorgegebenen, man mag y als eine Function von x, oder x als eine Function von y betrachten, weil man, um dies Differential zu erhalten, auf einerley Art in Beziehung auf jede dieser Größen differentiirt hat; aber in Rücksicht auf das zweyte Differential, verhält es sich nicht so. Betrachtet man x als abhängig von y, so muß man

$$Mdx + Ndy = o$$

in Beziehung auf y, x und dx differentiiren, und man kann dy als einen willkührlichen und beständigen Zuwachs behandeln, weil es einer unabhängigen veränderlichen Größe zukömmt. Operirt man auf diese Art, so kömmt ein Resultat von der Form

$$Md^2x + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = o$$

oder wenn man durch dy dividirt

$$\frac{Md^2x}{dy^2} + \frac{Pdx^2}{dy^2} + \frac{Qdx}{dy} + R = o;$$

eine Gleichung, welche die Beziehung der Differential-Coefficienten $\frac{d^2x}{dy^2}$ und $\frac{dy}{dy}$ von der Function x ausdrückt. Vergleicht man dieselbe mit der ihr correspondirenden in Nr. 49; so wird man sehen, daß die drey letzten Glieder der einen mit den drey ersten Gliedern der andern einerley sind, und daß der Unterschied bloß in den Gliedern

$$\frac{M d^2 x}{dy^2} \text{ und } \frac{N d^2 y}{dx^2}$$

besteht, wovon das erste der Hypothese, daß x eine Function von y ist, und das zweyte der Hypothese daß y eine Function von x ist, zugehört. Die Größen M und N befinden sich nur beyde im ersten Differential zugleich, und wenn man folglich dieses Differential nicht kennte, und bloß eins der zweyten Differentiale vor Augen hätte, z. B. dasjenige, welches auf y Bezug hat, so scheint es als wenn man daraus nicht das andere ableiten könnte, weil nichts das Glied anzeigen würde, welches die Stelle von

$$\frac{N d y}{dx^2}$$

einnehmen soll. Man kann aber leicht diese Schwierigkeit heben, wenn man von der Relation Gebrauch macht, welche zwischen denen Differential-Coefficienten die in der einen dieser Hypothesen und zwischen ihren correspondirenden in der andern Hypothese statt findet.

Nennt man y', y'', y''' . . . die Differential-Coefficienten der Function y, und x', x'', x''' diejenigen der Function x, so haben wir (Nr. 9 und 10)

$$\left.\begin{array}{l} dy = y'dx \\ dy' = y''dx \\ dy'' = y'''dx \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} dx = x'dy \\ dx' = x''dy \\ dx'' = x'''dy \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}\right.$$

Für die erste Ordnung haben wir schon gefunden

$$\left.\begin{array}{l} M + \frac{Ndy}{dx} = 0 \\ M\frac{dx}{dy} + N = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} M + Ny' = 0 \\ Mx' + N = 0 \end{array}\right.$$

Es

Es folgt hieraus, daß

$$x' = \frac{1}{y'} \text{ oder } x'y' = 1.$$

Aber weil y' implicite eine Function von x ist, so wird x' auch eine Function von x seyn, man wird also haben

$$dx' = d.\frac{1}{y'} = -\frac{dy'}{y'^2}$$

setzt man für dx' und dy' ihren in den vorhergehenden Gleichungen gefundenen Werth, so kömmt

$$x''dy = -\frac{y''dx}{y'^2}$$

woraus man zieht

$$x'' = -\frac{y''dx}{y'^2dy} = -\frac{y''}{y'^3}$$

wegen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$$

Diese Gleichung wird den Ausdruck von x'' geben, wenn die Ausdrücke von y' und y'' bekannt sind, und es wird auch daraus hervorgehen, daß

$$y'' = -x''y'^3;$$

substituirt man diesen Werth in

$$P + Qy' + Ry'^2 + Ny'' = 0$$

so kommt

$$P + Qy' + Ry'^2 - Nx''y'^3 = 0$$

setzt man wieder

$$\frac{dy}{dx} \text{ statt } y' \text{ und } \frac{d^2x}{dy^2} \text{ statt } x''$$

so wird man finden

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} - N\frac{dy^3dx^2}{dx^3dy^2} = 0$$

und

und wenn man durch dx^2 multiplicirt, so wird man erhalten

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 - \frac{Ndy}{dx}d^2x = 0:$$

diese Gleichung ist mit

$$Md^2x + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0$$

gleichbedeutend, wie man sich davon überzeugen kann, wenn man Ndy mit Hülfe von

$$Mdx + Ndy = 0$$

fortschaft.

57.

Die Gleichung $x'' = -\frac{y''}{y'^3}$ giebt uns

$$dx'' = -d\frac{y''}{y'^3},$$

weil y', y'' und folglich auch x'' implicite Functionen von x sind. Verrichtet man die angezeigte Differentiirung in der zweyten Hälfte und setzt statt dx'', dy', dy'' ihre Werthe $x'''dy$, $y''dx$, $y'''dx$, so findet man

$$x''' = \frac{-y'y''' + 3y''^2}{y'^5}.$$

Dieser Gang kann leicht für die höheren Ordnungen fortgesetzt werden, und man wird vielleicht mit Vergnügen sehen, wie man zu den nemlichen Resultaten gelangen kann, wenn man von den Entwicklungen ausgeht, woraus y', y'' ... x', x'' ... ihren Ursprung ziehen.

Es folgt aus der Verbindung, welche zwischen den Werthen von x und von y statt findet, daß wenn x um h zunimt, so leidet y eine Veränderung k die durch die Reihe

$$\frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1\,.\,2} + \frac{y'''h^3}{1\,.\,2\,.\,2} + \ldots$$

vorgestellt ist; aus dem nemlichen Grunde wird, wenn y, $y + k$ wird, x eine durch

$$\frac{x'k}{1} + \frac{x''k^2}{1\,.\,2} + \frac{x'''k^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

vorgestellte Veränderung erhalten; man wird also haben

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{y'h}{1} + \frac{y''h^2}{1\,.\,2} + \frac{y'''h^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \\ \text{oder } h &= \frac{x'k}{1} + \frac{x'k^2}{1\,.\,2} + \frac{x'''k^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots \end{aligned}\right\}$$

je nachdem man in Beziehung auf k oder in Beziehung auf h entwickeln will. Macht man aber von der Methode der Wiederkehr der Reihen Gebrauch (Einl. Nr. 45), so wird man von der ersten Reihe einen Werth von h, nach den Potenzen von k geordnet, ableiten, und es wird kommen

$$h = \frac{1}{y'}\,k - \frac{y''}{y'^3}\,\frac{k^2}{1\,.\,2} + \left(\frac{2y''^2 - y'y'''}{y'^5}\right)\frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

vergleicht man dies Resultat mit der zweyten Reihe, so hat man

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{y'} \\ x'' &= -\frac{y''}{y'^3} \\ x''' &= \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5}, \end{aligned}\right\}$$

u. s. w.

Vermittelst dieser Werthe findet man leicht alle Differential-Coefficienten in Beziehung auf x, wenn man die von y kennt, und man kann, eine Differential-Gleichung so genommen, daß man y als eine Function von x ansieht,

ansieht, in eine andere transformiren, wo x als eine Function von y angesehen ist, und so auch umgekehrt.

58.

Um von der ersten Ordnung zur zweyten, in der Hypothese, daß y eine Function von x sey, überzugehen, hat man differentiirt, indem man x als eine beständige Größe betrachtete; wenn man zu gleicher Zeit dx und dy sich hätte verändern lassen, so wird dadurch die Symetrie zwischen diesen Größen wieder hergestellt seyn, aber alsdann wird der Differential-Coefficient y'' der zweyten Ordnung nicht mehr durch

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

vorgestellt seyn. Nach seiner Entstehung hat man

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

und wenn man $\frac{dy}{dx}$ wie einen Bruch differentiirt, dessen Zähler und Nenner sich gleichzeitig verändern, so kommt

$$y'' = \frac{dx\,dy^2 - dy\,d^2x}{dx^3};$$

substituirt man diesen Werth in der Gleichung

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

so findet man

$$P + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{dy^2}{dx^2} + N\frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^3} = 0$$

oder wenn man durch dx^3 multiplicirt

$$Pdx^3 + Qdydx^2 + Rdy^2dx + N(dxd^2y - dyd^2x) = 0$$

Setzt

Setzt man in dem Gliede $Ndyd^2x$ statt Ndy dessen Werth $-Mdx$, und dividirt durch dx, so findet man

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Md^2x + Nd^2y = 0;$$

ein Resultat, welches man unmittelbar von der Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

ableiten kann, wenn man dieselbe in Beziehung auf x, dx, y und dy differentiirt, und welches sich in dem einen oder in dem andern der zweyten Differentiale in

$$\left.\begin{array}{l} Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Nd^2y = 0 \\ Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Nd^2x = 0 \end{array}\right\}$$

verändert, je nachdem man d^2x oder $d^2y = 0$ gemacht hat.

59.

Aus dem Vorhergehenden folgt 1) daß man eine Gleichung von der ersten Ordnung auf eine symetrische Art in Beziehung auf zwey veränderliche Größen und auf ihre Differentiale differentiiren kann, und daß das herausgekommene Resultat, wenn es gleich Null gesetzt wird, den Ausdruck der Differential-Coefficien der zweyten Ordnung giebt; es wird ferner diesen Vorzug haben, daß man darin nach Belieben y als eine Function von x oder x als eine Function von y ansehen kann. Man muß nur beobachten, daß im ersten Fall der Coefficient der zweyten Ordnung durch

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

und im zweyten Fall durch

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}$$

vorgestellt ist.

2) Daß wenn man den ersten der obigen Werthe statt

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

in einer Differential-Gleichung der zweyten Ordnung substituirt, wo dx als beständig vorausgesetzt ist, das Resultat mit demjenigen gleichbedeutend seyn wird, welches man erhält, wenn man zu gleicher Zeit x, y, dx und dy sich verändern läßt. Wenn man will, daß dy in der neuen Gleichung beständig seyn soll, so braucht man nur in der vorgegebenen Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ durch } -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$$

zu ersetzen.

Man wird eben so eine Differential-Gleichung der zweyten Ordnung, wo dy beständig ist, in eine andere verwandeln, wo dy aufhören wird, beständig zu seyn, indem man

$$\frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}$$

an die Stelle von

$$\frac{d^2x}{dy^2}$$

setzt, oder nur

$$-\frac{dx\,d^2y}{dy^3}$$

wenn dx beständig seyn soll.

69.

Es ist leicht zu prüfen, daß die Größen

$$\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \text{ und } \frac{dy\,d^2x - dx\,d^2y}{dy^3}$$

welches

welches die respectiven Werthe von y'' und x'' sind, der Gleichung

$$y'' + x''y'^3 = 0 \text{ (Nr. 56)}$$

Genüge leisten; denn wegen

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

hat man

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3} + \frac{dy^3}{dx^3}\left(\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dy^3}\right) = 0$$

eine identische Gleichung.

Man muß auch bemerken, daß wenn man dx sich verändern läßt, die Gleichung

$$d^2y = y''dx^2$$

nicht mehr statt findet, wie in Nr. 10. In der That man betrachtet alsdann dy als eine Function von zwey unabhängigen Größen y' und dx, und hat

$$d^2y = dy'\,dx + y'd^2x:$$

aber

$$d^2y' = y''dx$$

also

$$d^2y = y''dx^2 + y'd^2x;$$

man hat gleichfalls

$$d^2x = x''dy^2 + x'd^2y.$$

Diese beyde Gleichungen geben

$$\left.\begin{aligned} d^2y &= \frac{y''dx^2 + y'x''dy^2}{1 - x'y'} \\ d^2x &= \frac{x''dy^2 + x'y''dx^2}{1 - x'y'} \end{aligned}\right\}$$

woraus man zieht

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y'' + y'^3x''}{1 - x'y'}.$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x'' + x'^3x'}{1 - x'y'}$$

aber vermöge der (Nr. 56) gefundenen Relationen zwischen x', y' und y'', hat man

$$1 - x'y' = 0,$$
$$y'' + y'^3 x'' = 0$$
$$x'' + x'^3 y'' = 0$$

also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0},$$
$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{0}{0},$$

d. h. diese beyden Größen sind unbestimmt.

Es war leicht, diese Resultate vorher zu wissen; denn $y'dx$ in Beziehung auf y' und auf dx differentiiren, heißt soviel als voraussetzen y' und dx sollen respective

$$y' + dy',$$
$$dx + d^2x$$

werden, und dann die beyden ersten Glieder der Veränderung nehmen, welche diese Function leidet; wenn man aber y als eine Functiou von x ansieht, so ist dx willkührlich, mithin wird es auch d^2x seyn, und folglich hat

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' + y' \frac{d^2x}{dx^2}$$

keinen bestimmten Werth, so lange das Verhältniß willkührlich bleibt.

Stellt man aber solche Betrachtungen in der Hypothese an, wo x eine Function von y ist, welches dy und d^2y willkührlich macht, so findet man daß

$$\frac{d^2x}{dy^2} = x'' + x' \frac{d^2y}{dy^2}$$

ebenfalls unbestimmt ist.

Das folgende Beyspiel wird zeigen wie man den Ausdruck des Differential-Coefficienten y'' finden kann, in einer Gleichung, wo man gleichzeitig dy nnd dx sich hat verändern lassen.

61.

Es sey die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2$$

ihr erstes Differential ist

$$xdx + ydy = 0$$

ihr zweytes Differential, wenn man alles sich verändern läßt

$$dx^2 + dy^2 + xd^2x + yd^2y = 0;$$

man zieht aus dieser letzten Gleichung

$$d^2y = \frac{-dx^2 - dy^2 - xd^2x}{y};$$

wird dieser Werth in

$$y'' = \frac{dxd^2v - dyd^2x}{dx^3}$$

substituirt, so findet man

$$y'' = \frac{-dx^3 - dxdy^2 - xdxd^2x - ydyd^2x}{ydx^3}.$$

Man muß dy vermittelst des ersten Differentials fortschaffen; diese Operation macht, daß d^2x verschwindet, welches als eine beständige Größe, nicht in den Werth von y'' hineinkommen kann; in der That, man sieht, daß da der Coefficient von d^2x, $-xdx - ydy$ ist, er sich vermöge der Gleichung $xdx + ydy = 0$ vernichtet.

62.

Ganz allgemein, jede Differential-Gleichung von der zweyten Ordnung zwischen zwey veränderliche Größen x und y, in welcher man auf einmal dx und dy sich verändern läßt, muß darauf reducirt werden können, daß sie bloß

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

enthält, weil sie weiter nichts als die Beziehung, welche zwischen denen veränderlichen x und y und zwischen ihren Differential-Coefficienten der ersten und zweyten Ordnung statt findet, vorstellen soll. Wir wollen also voraussetzen, man sey auf irgend eine Art zu der Gleichung

$$Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0$$

gelangt; setzt man darin

$$y'dx \text{ statt } dy$$

$$y''dx^2 + y'd^2x \text{ statt } d^2y \text{ so kömmt}$$

$$Md^2x + Ny''dx^2 + Ny'd^2x + Pdx^2 + Qy'dx^2 + Ry'^2dx^2 = 0$$

oder auch

$$(M + Ny', d^2x + (Ny'' + P + Qy' + Ry'^2)dx^2 = 0:$$

damit nun dx und d^2x beyde aus dieser Gleichung verschwinden, so muß man

$$M + Ny' = 0 \text{ haben d. h.}$$

$$Mdx + Ndy = 0$$

Diese Bedingung kann auf mehrere Arten erfüllt werden:

1) Wenn die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ durch sich selbst identisch ist; dieser Fall wird für die Gleichung

$$xydyd^2x - xydxd^2y + ydydx^2 - xdxdy^2 = 0$$

statt finden; denn sie giebt

$$M = xydy,$$

$$N = -xydx,$$

und folglich

$$Mdx + Ndy = xydydx - xydydx = 0$$

2) Wenn die Vorgegebene das Differential von

$$Mdx + Ndy = 0$$

ist, dies wird die besondere Gleichung

$$xd^2x + yd^2y + dx^2 + dy^2 = 0$$

seyn,

seyn, welche

$$Mdx + Ndy = xdy + ydy$$

giebt, und die aus der Differentiirung von

$$xdx + ydy = 0$$

entspringt.

3) Wenn die Vorgegebene, obgleich dem Scheine nach von der Gleichuug, die aus der Differentiirung von

$$Mdx + Ndy = 0$$

entsteht, verschieden ist, doch mit dieser letzten übereinstimmt. Um ein Beyspiel von diesem Fall zu geben, so wollen wir die Gleichung

$$x^3d^2x + x^2yd^2y + (a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 = 0$$

nehmen, wir werden alsdann haben

$$Mdx + Ndy = x^3dx + y^2ydy = 0$$

oder

$$xdy + ydy = 0.$$

Wenn man diese letzte Gleichung differentiirt indem man alles sich verändern läßt, so kommt

$$xd^2x + yd^2x + dx^2 + dy^2 = 0;$$

multiplicirt man endlich durch x^2, damit die beyden ersten Glieder mit denen in der Vorgegebenen einerley sind, und zieht die eine von der andern ab, so hat man

$$(a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 - x^2dx^2 - x^2dy^2 = 0,$$

oder indem man reducirt, und durch dx^2 dividirt,

$$a^2 - y^2 - x^2 = 0;$$

eine Gleichung deren Differential

$$xdx + ydy = 0$$

genau das vorhin gefundene ist. Macht man der Kürze wegen

$$a^2 - y^2 - x^2 = u,$$

so kann man leicht die vorgegebene Gleichung in

$$\tfrac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0$$

 trans-

transformiren, und sehen daß ihr durch die Substitution von $u = 0$ Genüge geschehen ist, welche auch giebt

$$du = 0$$
$$d^2u = 0.$$

Wir bemerken hier, daß um die Art auszudrücken wie die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 \text{ und } u = 0$$

untereinander verbunden sind, die Analysten sagen, daß die erste mit der zweyten zu gleicher Zeit statt findet: man sieht hieraus, daß zwey Gleichungen, welche zu gleicher Zeit statt haben, Folgerungen von einander sind; aber diese Phrase ist nicht immer umgekehrt wahr, so kann man nicht in den obigen Beyspiel sagen, daß die Gleichung $u = 0$ zu gleicher Zeit statt findet als

$$\tfrac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0,$$

denn man wird in der Folge sehen, daß diese letztere, wenn bloß die veränderlichen Größen u und x betrachtet werden, mehr allgemein ist, und daß ihr durch eine Beziehung zwischen u und x Genüge geschehen kann: man kann sich schon als eine Ausnahme von dieser Gattung, durch die Gleichung

$$d^2u - udx^2 = 0$$

überzeugen, welche durch die Substitution von $u = 0$, identisch gemacht wird, aber welche es auch wird, wenn man

$$u = ae^x + be^{-x}$$

hat, was auch übrigens die beständigen Größen a und b seyn mögen.

Man muß in dem eben gesagten, die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}x^2d^2u - udx^2 = 0$$

nicht mit

$$x^3d^2x + x^2yd^2y + (a^2 - y^2)dx^2 + x^2dy^2 = 0$$

ver-

verwechseln, obgleich die eine nur eine Transformation der andern ist. Die ursprüngliche Gleichung, von welcher die erste abstammt, wird, wenn man sie in ihrer ganzen Allgemeinheit nimmt, welche sie mitbringt, nicht der zweyten Genüge leisten. Die drey Fälle in welchen die Bedingung

$$Mdx + Ndy = 0$$

erfüllt werden kann, und wo für jede derselben eine ursprüngliche Gleichung in x und y statt findet, die der Vorgegebenen Genüge leistet, sind in Absicht auf die Allgemeinheit dieser Gleichung von einander unterschieden; da aber dieser Gegenstand wesentlich zum Integralcalcul gehört, so wollen wir uns hier nicht damit aufhalten, und diesen Artikel durch ein Beyspiel beendigen, wo die Bedingung

$$Mdx + Ndy = 0$$

nicht erfüllt ist.

Es sey die Gleichung

$$x^3d^2x + y^3d^2y + 6xydxdy = 0;$$

sie wird geben

$$M = x^3$$

$$N = y^3$$

und folglich zieht man daraus

$$x^3dx + y^3dx = 0;$$

differentiirt man, und zieht dies Differential von der vorgegebenen Gleichung ab, so hat man

$$6xy'dxdy - 3x^2dx^2 - 3y^2dy^2 = 0$$

oder

$$x^2dx^2 - 2xydxdy + y^2dy^2 = 0$$

oder endlich

$$xdx - ydy = 0.$$

Jetzt muß man sehen, in welchem Fall die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} x^2dx + y^2dy = 0 \\ xdx - ydy = 0 \end{array}\right\}$$

mit einander übereinstimmen können. Die zweyte giebt

$$dy = \frac{xdy}{y}$$

dies in der ersten substituirt, giebt

$$x^2ydx + y^2xdx = 0,$$

dividirt man durch $xydx$, so kommt

$$x^2dx + ydy = 0$$

und für dy seinen Werth gesetzt, giebt $xy = 0$; eine Gleichung, welche in der Verbindung mit

$$x^2 + y^2 = 0$$

nicht statt haben kann, wenn nicht

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

ist: es ist also unmöglich, daß die vorgegebene Gleichung aus der Differentiirung einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und y entstehen kann.

63.

Wenn man vom zweyten Grade zum dritten Grade übergeht, so führt man d^3y oder d^3x ein, je nachdem y als eine Function von x, oder x als eine Function von y betrachtet wird; der Differential-Coefficient der dritten Ordnung ist in der ersten Hypothese durch

$$\frac{d^3y}{dx^3}$$

und in der zweyten durch

$$\frac{d^3x}{dy^3}$$

ausgedrückt. Läßt man aber zu gleicher Zeit alle Differentiale dx, dy, d^2x, d^2y sich verändern, so hat man ein Re-

Resultat, welches eben sowohl der einen als der andern Hypothese zukömmt. Man beobachte nur, daß der Ausdruck der Differential-Coefficienten gebildet seyn muß, indem man alle diese Größen variiren läßt. Man muß also für y'' den Nr. 58 gefundenen Werth setzen, und da

$$y''' = \frac{dy''}{dx}$$

so wird man diesen letzten Coefficienten erhalten, indem man y'' in Beziehung auf dx, dy, d^2x, d^2y differentiirt, und das Resultat durch dx dividirt; man hat also

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

$$y''' = \frac{dx^2d^3y - 3dxd^2xd^2y + 3dyd^2x^2 - dxdyd^3x}{dx^5}$$

man wird auf die nemliche Art die analogischen Coefficienten in der Voraussetzung, daß y eine Function von x sey, finden.

Wenn man die vorstehende Werthe an die Stelle von y', y'', y''' in einer Differential-Gleichung der dritten Ordnung, bey deren Bildung man dx als beständig annahm, substituirte, so wird eine Gleichung kommen, welche mit derjenigen gleichbedeutend ist die man gefunden hätte indem man alles variiren ließ; und wenn man in dieser letzten d^2y und $d^3y = 0$ macht, so wird das entstehende Resultat sich auf die Hypothese, wo x als eine Function von y betrachtet ist, beziehen.

64.

Da jede Differential-Gleichung weiter nichts ist, als eine Beziehung zwischen den veränderlichen Größen x, y

und zwischen deren Differential-Coefficienten, so müssen wenn man für dy, d^2y, d^3y ihre Werthe in einer Differential-Gleichung der dritten Ordnung setzt, dx, d^2x und d^3x aus den Resultaten verschwinden; hat diese Bedingung nicht statt, so kann man daraus schließen, daß die Vorgegebene nicht von einer Gleichung zwischen x und y allein abstammt, und daß man nicht darin y als eine Function von x und umgekehrt, annehmen kann. Nähme man eine allgemeine Form, und machte die angezeigte Substitutionen, so würde man Bedingungen finden, die mit denen in Nr. 62 analogisch sind. Es ist augenscheinlich, daß diese verallgemeinert werden können, und daß jede Gleichung die Differentiale von zwey veränderlichen Größen von beliebigen Ordnungen enthält, sich immer in eine andere transformiren lassen muß die nur x, y, y', y'', y''' ... in sich begreift, indem man diese Coefficienten der über die Variabilität der Größen dx, dy, d^2y, d^2x ... gemachten Hypothese gemäß ausdrückt.

65.

Die nemliche Bedingung findet auch für die Differential-Formeln statt, die nicht gleich Null sind, in welchen man aber stillschweigend annimmt, daß y eine Function von x, oder x eine Function von y sey.

Wenn man den Ausdruck

$$\frac{y(dx^2 + dh^2)}{xd^2y}$$

hätte und darin

$$\left.\begin{array}{l} y'\,dx \\ y''\,dx^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{für } dy \\ \quad d^2y \end{array}$$

substituirte, so würde kommen

$$\frac{y(1 + y'^2)}{xy'}:$$

ein Resultat, welches nicht mehr die veränderlichen Größen x und y und die Differential-Coefficienten y' und y'' enthält.

Ganz allgemein, jede Formel in welcher eine von den Größen dx oder dy als eine beständige Größe behandelt ist, deren Zähler und Nenner aber homogen und von den nemlichen Grade, in Beziehung auf die Differentiale sind, wird sich immer durch die vorhergehende Transformation, auf eine Function von den veränderlichen Größen x und y und denen Differential-Coefficienten, reduciren. Um sich davon zu überzeugen, so ist es hinreichend zu bemerken, daß ein Glied von der Form

$P dx^m dy^n d^2y^p d^3y^q$ (*), $Py'^n y''^p y'''^q \ldots dx^{m+n+2p+3q+\ldots}$

wird, wenn man darin

$$\left.\begin{array}{l} y'\,dx \\ y''dx^2 \\ y'''dx^4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{statt } dy \\ \quad d^2y \\ \quad d^3y \end{array}$$

setzt, da nun in einer Reihe von gleichartigen Gliedern, in Beziehung auf die Differentiale, die Summe $m + n$
$+2p$

*) d^2y^p, $d^3y^q \ldots$ bezeichnen das nemliche als $(d^2y)^p$, $(d^3y)^q \ldots$; und weil d^2y mit dx^2 homogen ist, so wird auch d^2y^p mit dx^{2p} homogen seyn, eben so d^3y^p mit dx^{3q} u. s. w. Es folgt hieraus daß man, um den Grad eines Gliedes, in Beziehung auf die Differentiale mit denen es behaftet ist, zu finden, das zweyte Differential als vom zweyten Grade ansehen muß, das dritte Differential, als wäre es vom dritten Grade, und allgemein muß man den Exponenten von der Ordnung der Differentiirung mit den der Potenz verbinden.

$+ 2p + 2q + \ldots$ für alle einerley ist (Nr. 49), so wird der Zähler des vorgegebenen Ausdrucks zum gemeinschaftlichen Factor,

$$dx^{m+n+2p+3q+\ldots}$$

haben: der Nenner, welcher von der nemlichen Ordnung ist, wird denselben Factor haben, es bleibt also im Endresultat weiter nichts als x, y, y', y'', y''' u. s. w.

66.

Wir werden bey dieser Gelegenheit eine merkwürdige Eigenschaft der homogenen Function zeigen; sie ist, daß wenn man eine algebraische Function der Größen x, y, z u. s. w. hat, in welcher die Summe der Exponenten von jedem dieser Buchstaben für alle Glieder einerley und gleich m ist, und man substituirt Px für y, Qx für z u. s w., so wird das Resultat durch x^m theilbar seyn. In der That, irgend ein Glied dieser Function von der Form $Ax^n y^p z^q \ldots$ wird durch die angezeigte Substitution

$$AP^pQ^q \ldots x^{n+p+q+\ldots};$$

aber nach der Hypothese hat man in allen Gliedern

$$n + p + q + \ldots = m,$$

folglich wird x^m ein gemeinschaftlicher Factor seyn. Es folgt hieraus, daß wenn die vorgegebene Function gleich Null gemacht wäre, oder auch wenn sie ein Bruch wäre, der zum Zähler und Nenner zwey homogen Polynome von einerley Grad hätte, so würde die Größe x ganz aus dem Resultat verschwinden.

67.

Um den Ausdruck

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

ist

in welchem dx und d^2y mit einander verschwinden, so muß man

$$\left.\begin{matrix} y'dx \\ y''dx^2 + y'd^2x \end{matrix}\right\} \text{für} \begin{matrix} dy \\ d^2y \end{matrix}$$

setzen, es wird alsdann

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

kommen.

Die nemlichen Substitutionen in der Formel

$$\frac{xd^2y + yd^2x}{dxdy}$$

gemacht werden

$$\frac{xy'dy^2 + (xy' + y)d^2x}{y'dx^2}$$

geben; ein Resultat in welchem d^2x auf keine andere Art verschwinden kann, als wenn

$$xy' + y = 0$$

oder

$$y' = -\frac{y}{x}$$

ist; welches ein besonderer Fall ist. Man kann also in dieser Formel nicht allgemein y als eine Function von x, oder x als eine Function von y betrachten.

Es findet folgender Unterschied zwischen den Formeln statt, welche zwischen denen, welche die Transformationen erleiden und dergleichen nicht zulassen, daß die ersten den nemlichen Werth beybehalten, man mag darin dx oder dy als beständig annehmen, dahingegen die andern sich verändern. Der erste von den obigen Ausdrücken giebt, wenn man $d^2x = 0$ macht

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

und

und wenn man $d^2y = 0$ macht

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dyd^2x} = \frac{(x'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{-x''};$$

setzt man in diesen letzten Resultat

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{y'}\\ -\frac{y''}{y'^3}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{statt } x'\\ \quad\;\; x''\ (\text{Nr. } 56)\end{array}$$

so findet man noch

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Der zweyte Ausdruck

$$\frac{xd^2y + yd^2x}{dxdy}$$

wird

$$\frac{xd^2y}{dxdy} = \frac{xy''}{y'};$$

wenn $d^2x = 0$, und

$$\frac{yd^2x}{dxdy} = \frac{yx''}{x'}$$

wenn

$$d^2y = 0;$$

schaft man x' und x'' aus dem letzten Resultat fort, so erhält man

$$-\frac{yy''}{y'^2}.$$

Dieser Werth würde nicht mit

$$\frac{xy''}{y'}$$

übereinstimmen, als in dem besondern Fall, wo man

—y

$$-\frac{y}{y'} = x \text{ oder}$$

$$y' = -\frac{y}{x'}$$

hat.

Es sey zum Beyspiel

$$y = x^2;$$

so kommt

$$dy = 2xdx$$

und wenn man dx beständig macht, so findet man

$$d^2y = 2dx^2:$$

die aus diesen Gleichungen gezogenen Werthe von y und d^2y werden

$$\frac{xd^2y}{dxdy} = 1$$

geben. Wenn man aber

$$dy = 2xdx$$

differentiirt, indem man dy beständig macht, so hat man

$$o = 2dx^2 + 2xd^2x,$$

und die Werthe von dx und d^2x, die man in dieser Hypothese findet werden

$$\frac{yd^2x}{dxdy} = \frac{-y}{2x^2} = -\tfrac{1}{2}$$

geben; ein Resultat, welches sehr vom ersten verschieden ist.

Es ist leicht zu sehen, daß die Nr. 59 und Nr. 62 angezeigten Mittel, um von den Gleichungen in welchen eins der Differentiale als eine beständige Größe angesehen ist, zu denjenigen überzugehen die man würde erhalten haben, wenn man alles hätte variiren lassen, oder indem man ein andres Differential als das erste für beständig

ständig angenommen hätte, sich auch auf solche Differential-Formeln erstrecken, die nicht gleich Null gesetzt sind.

68.

Wenn man eine Menge von Gleichungen hat, deren Anzahl nm eine Einheit geringer ist als die der darin enthaltenen veränderlichen Größen, so giebt es immer eine dieser veränderlichen Größen die man als unabhängig betrachten kann, und wovon alle andere implicite Functionen sind. Es seyen

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array}\right\}$$

zwey Gleichungen, zwischen drey veränderlichen Größen t, x und y; man könnte vermittelst ihrer den Werth von zwey beliebigen dieser veränderlichen Größen bestimmen, wenn man den Werth der dritten willkührlichen annähme. Wenn man also annimmt, daß die unabhängige veränderliche Größe durch t vorgestellt sey und $t + g$ werde, so würden die beyden andern x und y solche Veränderungen erleiden, die so beschaffen wären, daß, wenn man sie durch h und durch k vorstellte, zwischen den drey Größen $t + g$, $x + h$ und $y + k$ nach die nemlichen Relationen statt fände als zwischen t, x und y. Substituirt man in den vorgegebenen Gleichungen $t + g$, $x + h$, $y + k$ statt t, x und y, so werden daraus zwey neue Gleichungen entstehen die dazu dienen h und k zu bestimmen, wennn man g einen particulären Werth beygelegt hat.

Da aber x und y Functionen von t sind, so können die Werthe $x + h$ und $y + k$ welche mit $t + g$ correspondiren, in folgende Reihen entwickelt werden:

$$\left.\begin{array}{l} x + \frac{dx}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{g^3}{1.2.3} + \ldots \\ y + \frac{dy}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dt^3}\frac{g^3}{1.2.3} + \ldots \end{array}\right\} \text{(Nr. 12)}$$

Wendet man hier das Raisonnement wie in Nr. 40 an, so wird man leicht sehen, daß die Gleichungen

$$u = 0$$

$$\text{nnd } v = 0$$

nach den angezeigten Substitutionen, durch die Entwicklung folgende Form annehmen werden

$$u + P_1 g + P_2 g^2 + P_3 g^3 + \ldots = 0$$

$$v = Q_1 g + Q_2 g^2 + Q_3 g^3 + \ldots = 0$$

da der Zuwachs g unbestimmt bleiben muß, so hat man nothwendig

$$\left.\begin{array}{ll} u = 0, & v = 0 \\ P_1 = 0, & Q_1 = 0 \\ P_2 = 0, & Q_2 = 0 \\ P_3 = 0, & Q_3 = 0 \end{array}\right\}$$

u. s. w.

diese Gleichungen werden die Relationen der Coefficienten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \ldots$$

geben, welche wir durch x, y', x'', y'' . . . vorstellen wollen, und die selbst neue implicite Function von t sind.

Die Bildung der Functionen P_1, P_2, P_3 u. s. w. Q_1, Q_2, Q_3 u. s. w. wird die nemliche seyn als die von ihren analogen in Nr. 41; ferner da u und v nichts als t und implicite Functionen dieser veränderlichen Größe enthalten, so können sie eben so behandelt werden als U in Nr. 41. Man wird alsdann für den Coefficienten der ersten Potenz von g in Beziehung auf u

$$P_1 = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} x' + \frac{du}{dy} y'$$

finden, und für den Coefficienten der von v abstammt

$$Q_1 = \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx} x' + \frac{dv}{dy} y'$$

Folglich werden die Differential-Coefficienten x' und y' durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} x' + \frac{du}{dy} y' = 0 \\ \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx} x' + \frac{dv}{dy} y' = 0 \end{array}\right\}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = 0 \end{array}\right.$$

gegeben seyn, die letztern sind nichts anders, als die Differentiale der Functionen u und v, gleich Null gesetzt und durch dt dividirt.

Um zu den Gleichungen zu gelangen, von welchen die niedrigeren Coefficienten abhängen, so differentiire man die Vorstehenden, indem man x' und y' oder $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ als neue implicite Functionen von t ansieht: die daraus entstehenden Resultate werden, wenn sie ihrer Tour nach differentiirt sind, indem man gleichzeitig die Coefficienten der ersten und zweyten Ordnung variiren läßt, die Gleichungen der dritten Ordnung und so weiter, geben.

69.

Wird das in Nr. 41 Gesagte verallgemeinert, so findet man, daß wenn u eine Function von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Größen t, x, y, z u. s. w. vorstellt, in welcher x, y, z u. s. w. implicite Functionen der veränderlichen Größe t sind, und man verändert darin t in t + g, so kann sie in einer Reihe

$$u + \frac{u'g}{1} + \frac{u''g^2}{1.2} + \frac{u'''g^3}{1.2.3} + \ldots$$

entwickelt werden, wo die Coefficienten u', u'', u''' ... Functionen sind die successive von einander auf die nemliche Art abgeleitet sind als u' von u. Um aber u' zu haben, so muß man den Coefficienten der ersten Potenz von g finden: aber nach Nr. 44 wenn man der Kürze wegen

$$\frac{dx}{dt} = x'$$

$$\frac{dy}{dt} = y'$$

$$\frac{dz}{dt} = z'$$

u. s. w.

macht, hat man

$$u' = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}x' + \frac{du}{dy}y' + \frac{du}{dz}z' + \ldots$$

man sieht also hieraus, daß u' außer den ursprünglichen veränderlichen Größen t, x, y, z u. s. w. noch die Coefficienten x', y', z' u. s. w. enthält, welches auch implicite Functionen von t sind. Man wird also auf dieselbe Art haben

$$u'' = \frac{du'}{dt} + \frac{du'}{dx}x' + \frac{du'}{dx'}x'' + \frac{du}{dy}y' + \frac{du}{dy'}y'' + \ldots;$$

wo x'', y'' u. s. w. $\frac{d^2x}{dt^2}$ oder $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ oder $\frac{dy'}{dt}$ u. s. w. vorstellen. Man würde eben so u''' und die folgenden Coefficienten erhalten.

70.

Obige Betrachtungen nöthigen uns eine neue Bezeichnung einzuführen. Wenn man x, y, z u. s. w. als implicite Functionen der veränderlichen t betrachtet, so muß u selbst als eine implicite Function dieser veränderlichen Größe angesehen werden; folglich drückt u' alsdann den Differential-Coefficienten von u aus, denn er ist dem Differential von u gleich, das genommen ist, indem man t eben so wie die davon abhängenden Größen variiren läßt, und durch dt dividirt. Wir können uns aber diesen Coefficienten nicht durch $\frac{du}{dt}$ vorstellen; denn dieser Ausdruck bezeichnet speciel den Differential-Coefficienten von u, der genommen ist indem man bloß die ten variiren läßt, welche darin explicite enthalten sind (Nr. 30). Um also den ersten vom zweyten zu unterscheiden, so wollen wir ihn wie folgt schreiben $\frac{d(u)}{dt}$; wo die Parenthese bezeichnet, daß man in u alles was sich auf t bezieht hat variiren lassen.

Man hat nach dieser Uebereinkunft

$$u' = \frac{d(u)}{dt}$$

$$u'' = \frac{d(u')}{dt} = \frac{d^2(u)}{dt^2}$$

u. s. w.

und man wird daraus schließen, daß, wenn man $t + g$

an

an die Stelle von t in der Function u substituirt, und die veränderlichen Größen x, y, z u. s. w. als abhängig von t betrachtet, kommen wird

$$u + \frac{d(u)}{dt}\frac{g}{1} + \frac{d^2(u)}{dt^2}\frac{g^2}{1.2} + \frac{d^3(u)}{dt^3}\frac{g^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.}$$

mithin zieht man daraus, wenn $u = 0$ ist,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d(u)}{dt} = 0 \\ \frac{d^2(u)}{dt^2} = 0 \end{array}\right\}$$

u. s. w.

71.

Wir wollen jetzt ein Beyspiel geben: Es seyn die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + 3atx = bc^2 \\ x^3 + 3cty = a^2b \end{array}\right\};$$

wenn man sie differentiirt, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} y^2dy + atdx + axdt = 0 \\ x^2dx + ctdy + cydt = 0 \end{array}\right\}$$

hieraus

$$\left\{\begin{array}{l} y^2\frac{dy}{dt} + at\frac{dx}{dt} + ax = 0 \\ x^2\frac{dx}{dt} + ct\frac{dy}{dt} + cy = 0 \end{array}\right.$$

diese letztern werden die Werthe von $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dx}{dt}$ in t, x und y geben; man könnte endlich x und y vermittelst der Vorgegebenen fortschaffen.

Differentiirt man von neuem, um die Relationen zwischen denen Coefficienten der zweyten Ordnung zu finden, so kommt, wenn man dt als beständig ansieht, welches erlaubt ist weil t die unabhängige veränderliche Größe vorstellt,

$$\left.\begin{array}{l} y^2d^2y + 2ydy^2 + atd^2x + 2adtdx = 0 \\ x^2d^2x + 2xdx^2 + ctd^2y + 2cdtdy = 0 \end{array}\right\}$$

und wenn man durch dt dividirt, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} y^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y\dfrac{dy^2}{dt^2} + at\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2a\dfrac{dx}{dt} = 0 \\ x^2\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2x\dfrac{dx^2}{dt^2} + ct\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2c\dfrac{dy}{dt} = 0 \end{array}\right\};$$

Gleichungen, welche dienen

$$\frac{d^2x}{dt^2} \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2}$$

zu bestimmen.

72.

Die Art von Differential-Gleichungen, welche uns jetzt beschäftigt, ist analogen Bemerkungen fähig wie in Nr. 46 — 54. Man sieht zuerst, daß, wenn man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array}\right\}$$

mit ihren Differentialen

$$du = 0$$
$$dv = 0$$

verbindet, man allgemein drey von den darin enthaltenen Größen eliminiren kann, es mögen beständige oder veränderliche seyn. So hätte man im obigen Beyspiel, die beständige Größen a, b, c fortbringen und eine einzige Relation zwischen t, x, y und denen Coefficienten

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\ \ldots$$

unabhängig von den eliminirten Größen erhalten können.

Ver-

Vereinigt man die beyden zweyten Differentiale

$$\left.\begin{array}{l} d^2 u = 0 \\ d^2 v = 0 \end{array}\right\}$$

mit den vorhergehenden Gleichungen, so hat man sechs Gleichungen zwischen welchen man folglich fünf darin enthaltene Größen eliminiren kann, und so weiter.

73.

Wir haben t als unabhängige veränderliche Größe gewählt, hätte man aber x oder y als solche angesehen, so würde man dx oder dy beständig gemacht haben können. Man geht unmittelbar von den in der ersten Hypothese enthaltenen Resultaten, zu ihren correspondirenden in der zweyten oder in der dritten über, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dy}{dt}\right) \text{ statt } \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ statt } \frac{d^2x}{dt^2} \end{array}\right\}$$

schreibt, und indem man das Differential der veränderlichen Größe die man als unabhängig betrachten kann, als beständig nimmt; wäre dies zum Beyspiel x, so hätte man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dt\, d^2y - dy\, d^2t}{dt^3} \\ \frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{-\, dx\, d^2t}{dt^3} \end{array}\right\}$$

Macht man diese Substitutionen, so gelangt man zu Gleichungen, welche die Werthe von

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ und von } \frac{d^2t}{dx^2}$$

oder die Werthe der Differential-Coefficienten von der

 zwey-

zweyten Ordnung der veränderlichen Größen y und t als Functionen von x betrachtet.

Wenn man zu gleicher Zeit dt, dx und dy hätte variiren lassen, so würden die Resultate in Beziehung auf jede der veränderlichen Größen symetrisch gewesen seyn, und die Differential-Coefficienten der zweyten Ordnung von den veränderlichen Größen x und y als Functionen von t betrachtet, würden zum Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{dt\, d^2y - dy\, d^2t}{dt^3} \\ \frac{1}{dt}\, d\left(\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{dt\, d^2x - dx\, d^2t}{dt^3} \end{aligned}\right\}$$

gehabt haben.

Nimmt man x als unabhängige veränderliche Größe an, so würde

$$\frac{1}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{1}{dx}\, d\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{dx\, d^2t - dt\, d^2x}{dx^3}$$

Man würde eben so die Differential-Coefficienten, der Hypothese von x und t als Functionen von y zugehörig, finden, und diejenigen der höhern Ordnungen, bey welcher Annahme es auch sey. Man muß hier wie in Nr. 64 bemerken, daß, jede Gleichung vom zweyten Grade die drey veränderlichen Größen in sich begreift, wovon zwey beliebige Functionen der dritten sind, wenn man darin

$$\left.\begin{aligned} dx = x'dt,\ d^2x &= x''dt^2 + x'd^2t \\ dy = y'dt,\ d^2y &= y''dt^2 + y'd^2t \end{aligned}\right\}$$

macht, ein Resultat geben muß, welches bloß die Größen x, y, x′, y′, x″, y″ enthält. Es ist leicht diese Betrachtungen zu verallgemeinern, und sie auf jede beliebige

bige Ordnung und auf jede beliebige Anzahl von abhängigen veränderlichen Größen anzuwenden.

74.

Die Differential-Formeln müssen auch einer algebraischen Transformation unterworfen seyn, ohne welche man nicht darin zwey veränderliche Größen als Functionen der dritten ansehen könnte.

Es sey zum Beyspiel die Formel

$$\frac{(dt^2 + dx^2 + dy^2)^3}{(dtd^2x - dxd^2t)^2 + (dtd^2y - dyd^2t)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)}$$

so wird, wenn man darin die angezeigten Substitutionen macht

$$\frac{(1 + x'^2 + y'^2)^3}{x''^2 + y''^2, + x'y'' - y'x''};$$

die Differentiale sind ganz verschwunden, weil der Zähler und Nenner zwey Differential-Ausdrücke von einerley Grad waren (Note Pag. 267); aber allgemein hätte ein Ausdruck vom $m$ten Grade in Beziehung auf die Differentiale, die Form Pdt^m annehmen müssen, wo P eine gegebene Function von t, x, y, x', y', x'', y'' ist.

75.

Wenn man Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{array}{l} a + bt + U = 0 \\ a' + b't + V = 0 \end{array}\right\}$$

in welchen U und V Functionen von x und von y ohne t bedeuten, zweymal differentiirt, indem man dt als beständig ansieht, so werden t und dt verschwinden und man wird haben

$$\left.\begin{array}{l} d^2U = 0 \\ d^2V = 0 \end{array}\right\}$$

wo d^2U und d^2V bloß x und y und ihre Differentiale enthalten. Es folgt hieraus, daß die Gleichungen in welche nur zwey veränderliche Größen zu seyn scheinen wovon kein Differential beständig ist, von ursprünglichen Gleichungen mit drey veränderlichen Größen, abstammen können. Wenn man zwischen

$$\left.\begin{array}{l} d^2U = 0 \\ d^2V = 0 \end{array}\right\}$$

eine beständige oder eine andere Größe eliminirt hätte, so würde daraus eine einzige Gleichung von x, y, dx, dy, d^2x, d^2y entstanden seyn, welche ihren Ursprung aus den beyden vorgegebenen Gleichungen erhalten hätte.

Die Gleichung

$$Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 = 0$$

welche nicht von einer einzigen Gleichung zwischen x und y abstammen kann, wenn sie nicht der durch

$$Mdx + Ndy = 0$$

ausgedrückten Bedingung Genüge leistet, kann immer auf den Fall zurück gebracht werden in welchen x und y implicite Functionen der nemlichen veränderlichen Größe t sind, indem man dx, d^2x, dy, d^2y als die Differentiale von x und von y in Beziehung auf t genommen, betrachtet; denn wenn man darin

$$\left.\begin{array}{l} dx = x'dt, \quad dy = y'dt \\ d^2x = x''dt^2, \; d^2y = y''dt^2 \end{array}\right\}$$

macht, so bleibt dt nicht mehr darin, und es kömmt alsdann

$$Mx'' + Ny'' + Px'^2 + Qx'y' + Ry'^2 = 0;$$

ein von den Differentialen unabhängiges Resultat. Es würde sich eben so mit jeder andern Gleichung vom zweyten Grade mit zwey veränderlichen Größen, und mit denen Gleichungen von höhern Ordnungen verhalten: ihre Homogenität in Beziehung auf die Differentiale wird immer verstatten, sie vermittelst einer neuen veränderlichen

chen

chen Größe in andere Gleichungen zu transformiren, welche nur Differential-Coefficienten enthalten.

Man zieht aus diesem folgende merkwürdige Folgerung; es giebt nemlich keine Differential-Gleichung die man nicht als reel absurd oder unbedeutend ansehen könnte; man muß nur wissen, daß eine Differential-Gleichung sich nicht immer auf eine einzige ursprüngliche Gleichung bezieht, und daß man, um ihr Gnüge zu thun, deren mehrerer annehmen muß die zuweilen neue veränderliche Größen enthalten.

76.

Wir haben bey der Bildung der Differential-Gleichungen mit zwey veränderlichen Größen (Nr. 46) angenommeu daß, indem eine von den veränderlichen Größen einen willkührlichen Zuwachs erhalten hätte, die andere in einer Reihe nach den Potenzen dieses Zuwachses geordnet war; man kann sich aber auch denken, daß eine gegebene Function von zwey veränderlichen Größen einen willkührlichen Zuwachs erhalten habe, alsdann werden die durch jede derselben insbesondere erlittenen Zunahmen diesem Zuwachs untergeordnet seyn. Wenn z. B. das Product xy aus zwey veränderlichen durch die Gleichung $V = o$ verbundenen Größen, einen beliebigen Zuwachs g erhalten hätte, so würden die Veränderungen h und k, die respective durch x und durch y geprüft sind, beyde bestimmt seyn.

Um sich davon zu überzeugen, so braucht man nur $xy = t$ zu machen, man muß alsdann kraft der beyden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} xy = t \\ V = o \end{array}\right\}$$

x und y als Functionen von t ansehen, und nach dem was in Nr. 68 gesagt ist, können $x + h$ und $y + k$ sich nach den Potenzen von g entwickeln.

Diffe-

Differentiirt man obige Gleichungen, so hat man

$$\left.\begin{array}{r} xdy + ydx = dt \\ dV = o \end{array}\right\}$$

und man zieht daraus die Differential-Coefficienten der veränderlichen Größen x und y als Functionen von t betrachtet. Wird von neuen differentiirt und dt als beständig angenommen, so kommt

$$\left.\begin{array}{r} xd^2y + 2xdydx + yd^2x = o \\ d^2V = o \end{array}\right\}$$

die erste Gleichung giebt das Mittel aus der Zweyten eines der zweyten Differentiale z. B. d^2x fortzuschaffen; das Resultat wird nur dx, dy, d^2y enthalten, und wenn man es durch dt^2 dividirt, so wird es eine Relation zwischen x und y und zwischen den Coefficienten

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}.$$

ausdrücken. Wenn man seiner Tour nach differentiirt, so kann man noch daraus d^2x eliminiren, welches darin von neuem eingeführt seyn würde. Man sieht, daß man auf diese Art immer Gleichungen erhalten kann, in welchen kein höheres Differential von dx vorkommt als das erste.

Das eben Gesagte ist allgemein, und wenn man in einer Gleichung V=o zwischen x und y eine beliebige Function U von x und von y, als unabhängige veränderliche Größe nehmen will, so differentiire man wie gewöhnlich die vorgegebene Gleichung V = o, schaffe daraus dx oder dy mit Hülfe der Gleichung dU = dt fort, und dann d^2x oder d^2y vermittelst der Gleichung d^2U = o, oder welches auf eins herauskömmt, dadurch daß man dU beständig macht.

Es

Es trägt sich sehr oft zu, daß man nicht den ursprünglichen Ausdruck von U, sondern nur dessen Differential kennt, so daß man nur die Gleichung

$$dU = dt$$

hat; dieser Umstand verändert nichts an der vorstehenden Regel, welche sich eben sowohl auf Differential-Formeln als auf Gleichungen erstreckt. Wir wollen dies durch einige Beyspiele deutlicher machen.

77.

Gesetzt man habe

$$dt = ydx;$$

nach der Differentiirung hat man

$$yd^2x + dxdy = 0;$$

folglich

$$d^2x = -\frac{dxdy}{y}.$$

Mit diesem Werthe bringe man d^2x aus den Gleichungen oder aus den Formeln die es enthalten fort, so werden die Resultate sich auf die Hypothese beziehen, in welcher ydx das erste Differential der unabhängigen veränderlichen Größe ausdrückt. Obgleich ydx nicht das unmittelbare Differential weder von der Function x noch von der Function y ist, so muß man doch, weil diese veränderliche Größen als voneinander abhängig betrachtet sind, ydx als das Differential einer impliciten Function von x ansehen.

Dies vorausgesetzt, so würde man, wenn man

$$dxd^2y - dyd^2x + adx^3 + bdy^3 = 0$$

hätte, und darin den für d^2x vorhin gefundenen Ausdruck substituirte, daraus ziehen

$$ydxd^2y + dxdy^2 + aydx^3 + bydy^3 = 0.$$

Der

Der Differential-Coefficient der zweyten Ordnung

$$\frac{1}{dx} d \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

welcher, wenn man keinen Differential als beständig annimmt, durch

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

ausgedrückt ist, wird in der vorhergehenden Hypothese

$$\frac{yd^2y + dy^2}{ydx^2}.$$

Sollten sich in der gegebenen Gleichung oder Formel Differentiale von x von einer höhern Ordnung als der zweyten befinden, so eliminire man sie ebenfalls weil, indem man die Gleichung

$$yd^2x + dxdy = 0$$

mehreremale nach einander differentiirt, daraus neue Gleichungen entstehen, woraus man successive die Werthe von d^3x, d^4x u. s. w. ziehen kann.

Wir wollen als zweytes Beyspiel annehmen

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

man hat in diesen Fall

$$dxd^2x + dyd^2y = 0$$

woraus folgt

$$d^2x = -\frac{dyd^2y}{dx}.$$

In dieser neuen Hypothese wird die Gleichung

$$dxd^2y - dyd^2x + adx^3 + bdy^3 = 0,$$

$$(dx^2 + dy^2)d^2y + adx^4 + bdxdy^3 = 0$$

und die Formel

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

ändert sich in

(dx²

$$\frac{(dx^2 + dy^2)d^2y}{dx^4}.$$

Die successiven Differentiale der Gleichung

$$dxd^2x + dyd^2y = 0$$

werden die Mittel darbieten, d^3x, d^4x u. s. w. zu eliminiren.

Diese Transformationen hangen in gewissem Betracht von dem Mechanismus des Calculs ab, es sind bloß Arten, einerley Resultat unter verschiedene Formen darzustellen, unter welchen man diejenigen wählen kann, die am genausten und kürtzten zu seyn scheint.

Sie reduciren sich alle auf folgendes allgemeines Problem: es ist eine Gleichung oder eine Differential-Formel gegeben in welcher man ein gewisses erstes Differential als beständig angesehen hat, man soll ein andres Resultat darstellen, in welchem ein andres Differential als beständig angenommen ist.

Um es aufzulösen, so muß man den Differential-Coefficienten von der einen der veränderlichen Größen, y oder x, evident darstellen, sie als eine Function der andern betrachten, und darin ihren Ausdruck in der neuen Hypothese substituiren.

Um also von der Gleichung

$$ydxd^2y + dxdy^2 + aydx^3 + bydy^3 = 0,$$

in welcher das Differential ydx als beständig angenommen ist, zu einer andern überzugehen, wo dies der Fall mit

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ist, so beobachte ich, daß der Differential-Coefficient der zweyten Ordnung

$\frac{1}{dx}$

$$\frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ist, in der ersten Hypothese durch

$$\frac{yd^2y + dy^2}{ydx^2}$$

ausgedrückt; ich habe also

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{yd^2y + dy^2}{ydx},$$

und folglich

$$d^2y = \frac{ydxd\left(\frac{dy}{dx}\right) + dy^2}{y};$$

substituirt man diesen Werth in der vorgegebenen Gleichung, so entsteht daraus

$$dx^2d.\left(\frac{dy}{dx}\right) + adx^3 + bdy^3 = 0$$

eine Gleichung, worin man jedes beliebige Resultat als beständig annehmen kann, indem man statt

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

seinen Ausdruck in der neuen Hypothese setzt. Wenn man

$$dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

macht, so hat man

$$\frac{1}{dx} d\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{(dx^2 + dy^2)d^2y}{dx^4};$$

bringt man

$$d\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

mit Hülfe dieses Werthes fort, so wird die vorgenommene Transformation verrichtet seyn. Allgemein, um jeden beliebigen Differential-Ausdruck zu transformiren,

so

so reducirt sich alles darauf ihn so vorzubereiten, daß er bloß Differential-Coefficienten und Differentiale von der ersten Ordnung enthält: y', y'', y'''... mögen wie gewöhnlich diese Coefficienten bezeichnen, so hat man nach ihrer Entstehung

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{1}{dx}\, d\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

$$y''' = \frac{1}{dx}\, d\left[\frac{1}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$y^{IV} = \frac{1}{dx}\, d\left(\frac{1}{dx}\, d\left(\frac{1}{dx}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$$

u. s. w.

Man lasse dy und dx in den hier beygefügten Formeln gleichzeitig variiren, und substituire für d^2x oder für d^2y den Werth, welcher aus der Hypothese die man sich zu machen vornimmt, entsteht.

Man sieht hieraus, daß, wenn man auf eine Differential-Gleichung stößt, und man will deren Bedeutung wissen, es bekannt seyn muß, bey welcher Hypothese sie gebildet ist, oder welches auf eines herauskommt, welches die veränderliche Größe ist die man als unabhängig angesehen hat: denn dies ist eine von den Uebereinkünften, die man immer beym Anfang einer Untersuchung ausdrückt. Es ist leicht obige Betrachtungen auf Fälle auszudehnen, wo man drey Gleichungen zwischen vier veränderlichen Größen, oder allgemein eine Anzahl von $m-1$ Gleichungen zwischen m veränderlichen Größen hat.

78.

Wenn man mehrere Gleichungen zwischen einer Anzahl von veränderlichen Größen und ihren Differentialen hat, so kann man immer durch eine Eliminirung daraus ein einziges Resultat ziehen, in welchen die Anzahl der veränderlichen Größen um so viel Einheiten vermindert ist als man Gleichungen hat weniger eine, welches wir bey zwey Gleichungen zwischen drey veränderlichen Größen auseinandersetzen wollen, und welches dann leicht so weit man will ausgedehnt werden kann.

Es seyen

$$\left.\begin{array}{l} U = 0 \\ V = 0 \end{array}\right\}$$

zwey Gleichungen zwischen den veränderlichen Größen t, x, y und ihren Differentialen von der ersten Ordnung an bis mit zur Ordnung m. Um daraus eine Gleichung abzuleiten, welche weder die veränderliche Größe t noch irgend eine ihrer Differentiale enthält, so muß man eine Anzahl von Gleichungen verschaffen die so groß ist, daß man t, dt, d^2t . . . d^mt als particuläre unbekannte Größen eliminiren kann; in der That, wenn man weder die ursprünglichen Gleichungen noch alle Zwischendifferentiale zwischen ihnen und der vorgegebenen hat, so kann man aus diesen bloß den Werth von d^mt finden, durch t, dt, d^2t . . . $d^{m-1}t$ und durch die veränderliche Größen x, y und ihre Differentiale ausgedrückt. Wäre dt beständig, so scheint es, wenn man ein einzigesmal eine der vorgegebenen Gleichungen differentiirte, als wenn man t und dt eliminiren könnte, weil drey Gleichungen da sind, man muß aber beobachten, daß die Differentiale d^2y und d^2x, dt implicite enthalten, weil sie genommen sind indem man in Beziehung auf die Potenzen des Zuwachses der veränderderlichen Größe t entwickelt hat (Nr. 68); man muß also das Differential von der einen der veränderlichen Größen die beybehalten werden soll, als beständig annehmen. Wir wollen folglich annehmen dx sey beständig; so erhält man, wenn zuerst $d^m t$ zwischen den beyden vorgegebenen eliminirt ist, eine Gleichung welches bloß noch $t, dt \ldots d^{m-1}t$ enthält, man differentiire sie, so wird ein Resultat kommen in welchem $d^m t$ hineingekommen ist. Wird dies Resultat mit der einen oder der andern der Vorgegebenen combinirt, so wird es durch die Eliminirung von $d^{m-1}t$ eine zweyte Gleichung geben, die bloß $d^{m-1}t$ und die Differentiale der niederen Ordnung enthält. Macht man mit den beyden gefundenen Gleichungen die nemlichen Operationen als mit der Vorgegebenen, so eliminirt man $d^{m-1}t$, und gelangt zu zwey neuen Gleichungen in welchen $d^{m-2}t$ das Differential von t von der höchsten Ordnung ist. Es ist leicht dies Verfahren fortzusetzen; und man sieht allgemein, daß man mmal differentiiren muß um die Differentiale von t fortzuschaffen; das Endresultat wird also von der Ordnung 2m in Beziehung auf die Ordnungen der übrigbleibenden veränderlichen Größen x und y seyn.

Wir wollen jetzt annehmen die Gleichung $U = 0$ sey von der Ordnung m, und die Gleichung $V = 0$ von der Ordnung n. Indem man nmal die Gleichung $U = 0$ und mmal die Gleichung $V = 0$ differentiirt, so verschaft man sich $n + m$ Differential-Gleichungen; man würde also davon eine Anzahl $m + n + 2$, haben, indem man die zwey Vorgegebenen mitrechnet; da aber die zu eliminirenden unbekannten Größen, nemlich: $t, dt, d^2t, \ldots d^{m+n}t$ nur an der Zahl $m + n + 1$ da sind, so entstehet aus ihre Eliminirung eine Endgleichung von der Ordnung

T 2 Man

Man könnte mehrere wichtige Bemerkungen über diese Eliminirungs-Methode machen, da sie aber wegen der damit verbundenen weitläuftigen Calculs selten angewendet wird, und weil wenn ein Resultat von einer höhern Ordnung als die Vorgegebene, gegeben ist, sich die Schwierigkeiten die man fast immer antrift um von den Differential-Gleichungen zu den ursprünglichen Gleichungen zurück zu gehen, häufen, so glauben wir nicht uns dabey länger aufhalten zu müssen; überdem wird man im Integralcalcul ein Verfahren finden, das gleichsam das Umgekehrte des vorstehenden ist, und dessen sich die Analysten bey den Fragen dieser Art die sie abzuhandeln hatten, bedient haben.

79.

Wenn man nur eine einzige Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen hat, so kann man immer, indem man zwey willkührlich nimmt, die dritte bestimmen. Es sey $u = o$ eine Gleichung die x, y und z enthält; so wird, wenn man x und y als zwey unabhängige veränderliche Größen ansieht, z eine Function von beyden seyn, und wenn x einen beliebigen Zuwachs erhält, und y als beständig angenommen wird, so wird z eine Veränderung erleiden, die der von x untergeordnet ist. In dieser Hypothese muß die Gleichung $u = o$ als eine Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen x und z angesehen werden; man hat also

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx} = o$$

und zieht hieraus den Differential-Coefficienten von z in Beziehung auf die Variabilität von x. Man muß sich hier, nach der Nr. 30 gemachten Unterscheidung, erinnern

innern, daß in $\frac{dz}{dx}$, dz nur das partielle Differential von z ist, in Beziehung auf die Veränderung von x allein genommen.

Es ist augenscheinlich, daß wenn man y hätte variiren lassen, und die vorgegebene Gleichung so differentiirt würde, als wenn sie nur die veränderlichen Größen y und z enthielte, folgendes entstanden wäre

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Wenn man die erste der vorhin gefundenen Gleichungen durch dx und die zweyte durch dy multiplicirt, und sie alsdann zusammenaddirt, so kommt

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}\left[\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right] = 0$$

Aber $\frac{dx}{dz}dx + \frac{dz}{dy}dy$ ist nichts anders als das vollständige Differential von z (Nr. 28) man hat also

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

das heißt, man kann das erste Differential der Gleichung $u = 0$, in Beziehung auf die drey veränderliche Größen x, y und z genommen, gleich Null setzen. Man muß nicht vergessen, daß dies Differential als gleichbedeutend mit zwey Gleichungen angesehen werden kann, denn wenn man darin dz seinen Werth

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

substituirt, so müssen, wegen der Unabhängigkeit der Zunahmen von dx und dy, die Größen, welche jede unter ihnen multipliciren, für sich gleich Null gesetzt werden.

80.

Man gelangt zu den Gleichungen, welche die Coefficienten der höhern Ordnungen geben, wenn man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy} = 0 \end{array}\right\}$$

Differentiirt.

Wir wollen die erste durch $\frac{d(u)}{dx}$ und die zweyte durch $\frac{d(u)}{dy}$, übereinstimmend mit der Nr. 70 eingeführten Bezeichnung, vorstellen. Diese Gleichungen enthalten noch die drey veränderlichen Größen x, y und z, und können wie die Vorgegebene behandelt werden. Wenn man zuerst bloß auf die Veränderung von x Rücksicht nimmt, so wird nicht allein z variiren, sondern der Coefficient der ersten Ordnung $\frac{dz}{dx}$, wird auch zu gleicher Zeit den Coefficienten der zweyten Ordnung $\frac{d^2z}{dx^2}$ entstehen lassen. Differentiirt man also $\frac{d(u)}{dx}$ in Beziehung auf x, so hat man, wie für die Gleichungen mit zwey veränderlichen Größen,

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} \text{ oder } \frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{d^2u}{dx\,dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \text{ (Nr. 49)}$$

Wenn man $\frac{d(u)}{dx}$ in Beziehung auf y und z Differentiirt, oder $\frac{d(u)}{dy}$ in Beziehung auf x und z, und beobachtet,

achtet, daß im ersten Fall $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dydx}$, und im zweyten Falle

$$\frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dy\,dx}$$

giebt, so hat man ein einziges Resultat, welches

$$\frac{d^2(u)}{dx\,dy} \text{ oder } \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dz\,dy}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz\,dx}\frac{dz}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz^2}{dxdy} = 0$$

ist. Endlich die Gleichung $\frac{d(u)}{dy}$ differentiirt, indem man y und z allein als veränderliche Größen ansieht, bringt

$$\frac{d^2(u)}{dy} \text{ oder } \frac{d^2u}{dy^2} + 2\frac{d^2u}{dy\,dz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2} + \frac{du}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

hervor.

Da aber z eine Function von x und von y ist, so muß man u als eine implicite Function dieser veränderlichen Größen ansehen, man hat folglich

$$d^2(u) = \frac{d^2(u)}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2(u)}{dxdy}dxdy + \frac{d^2(u)}{dy^2}dy^2 = 0;$$

und in der That, wenn man für

$$\frac{d^2(u)}{dx^2},\ \frac{d^2(u)}{dxdy},\ \frac{d^2(u)}{dy^2}$$

die vorhin gefundenen Resultate substituirt, und

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

durch das erste vollständige Differential dz, und

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + \frac{2d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2$$

durch das vollständige zweyte Differential d^2z ergänzt, so hat man die nemliche End-Gleichung, als diejenige, welche man erhalten haben würde, wenn man

$\frac{du}{dx}dx$

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0$$

differentiirt, und dabey dx und dy als beständig, z aber als eine Function von x und von y betrachtet hätte.

81.

Man kann diese Betrachtungen ohne Mühe auf jede beliebige Ordnung der Differentiirung, und auf jede beliebige Anzahl von veränderlichen Größen ausdehnen; denn alles reducirt sich darauf, diejenigen zu bestimmen, welche unabhängig sind, welches man nur durch die Natur derjenigen Frage thun kann, welche zu der Gleichung oder zu den vorgegebenen Gleichungen geführt hat; und endlich differentiirt man, in Beziehung auf jede dieser veränderlichen Größen insbesondere, indem man die untergeordneten veränderlichen Größen als implicite Functionen der unabhängigen veränderlichen Größen behandelt.

Hätte man zum Beyspiel die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array}\right\}$$

zwischen den fünf veränderlichen Größen s, t, x, y und z, so würde man sehen, daß drey von diese veränderlichen Größen unabhängig sind. Wir wollen annehmen y und z seyen die beyde untergeordneten veränderlichen Größen, oder die durch die vorgegebene Gleichungen gegebene implicite Functionen von s, t, x; man differentiire successive u und v in Beziehung auf s, in Beziehung auf t, und in Beziehung auf x, so wird man haben

$\frac{du}{ds}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{ds} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{ds} &= 0 \\ \frac{du}{dt} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dt} &= 0 \\ \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Wenn man diese Gleichungen respective durch ds, dt, dx multiplicirt, sie zusammenaddirt und dy statt

$$\frac{du}{ds}\,ds + \frac{dy}{dt}\,dt + \frac{dy}{dx}\,dx,$$

$$dz \text{ statt } \frac{dz}{ds}\,ds + \frac{dz}{dt}\,dt + \frac{dz}{dx}\,dx$$

setzt; so kommt

$$\frac{du}{ds}ds + \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}\,dz = du = 0;$$

ein ähnliches Resultat wird man auch aus der Gleichung $v = 0$ ziehen; woraus folgt, daß, wenn man die Gleichungen $u = 0$ und $v = 0$ in Beziehung auf alle die veränderlichen Größen s, t, x, y und z differentiirt, und darin statt dy und statt dz die Ausdrücke dieser Differentiale, so angesehen, als wenn sie zu Functionen von drey veränderlichen Größen gehörten (Nr. 39) substituirt, man den Coefficienten von dem Differential jeder unabhängigen veränderlichen Größe für sich gleich Null setzen muß.

Betrachtet man die Differential-Coefficienten selbst als neue implicite Functionen der veränderlichen unabhängigen Größen, so wird man bey der Untersuchung der niederen Differentiale nicht aufgehalten werden; also wollen wir nach einigen Bemerkungen über die Eliminirung der beständigen Größen und der Functionen, das was die Entstehung der Differential-Gleichungen betrift, beschließen.

82.

Da die Gleichung $u = o$ zwischen x, y und z, zwey erste Differentiale

$$\frac{d(u)}{dx} = o \text{ und } \frac{d(u)}{dy} = o$$

hat, so ist augenscheinlich, daß man zwischen diesen drey Gleichungen zwey beständige Größen eliminiren kann, das Resultat wird alsdann die Relation der veränderlichen Größen x, y, z und der Coefficienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ unabhängig von den eliminirten Größen ausdrücken.

Wenn man mit obigen Gleichungen die drey der zweyten Ordnung

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = o, \frac{d^2(u)}{dxdy} = o, \frac{d^2(u)}{dy^2} = o,$$

verbindet, so hat man sechs Gleichungen, zwischen welchen fünf Größen eliminirt werden können; u. s. w.

83.

Dies führt uns zu einer wichtigen Bemerkung; daß man nemlich aus einer Gleichung mit drey oder mit einer größern Anzahl veränderlichen Größen, Functionen eliminiren kann deren Form durchaus unbekannt ist. Man habe zum Beyspiel die Gleichung

$$Z = f(ax + by),$$

in welcher der Buchstabe f eine Function bezeichnet, deren Form auf keine Art bestimmt ist; wir wollen jetzt daraus eine Gleichung zwischen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ ableiten, die unabhängig von dieser Function ist, und welche eben sowohl

$z = ax + by$, als $z = \sqrt{ax + by}$, und

$$z = \sin.(ax + by)$$

und überhaupt allen Functionen der Größe $ax + by$ zukömmt, von welcher Form sie auch seyn mögen. Man mache dieserwegen

$$ax + by = t$$

so wird die vorgegebene Gleichung $z = f(t)$, und man hat folglich

$$dz = f'(t)dt;$$

aber

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

$$dt = \frac{dt}{dx}dx + \frac{dt}{dy}dy$$

also

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= f'(t)\frac{dt}{dx}\\ \frac{dz}{dy} &= f'(t)\frac{dt}{dy}\end{aligned}\right\}$$

Setzt man für $\frac{dt}{dx}$ und $\frac{dt}{dy}$ ihre Werthe a und b, und eliminirt $f'(t)$, so kommt

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0.$$

Diese Gleichung drückt ein Merkmal aus, vermittelst welches man erkennen kann, ob eine vorgegebene Gleichung eine Function von $ax + by$ ausdrückt oder nicht: denn nach ihrer Entstehung muß sie allemal, wenn man darin statt $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die Werthe setzt, welche aus der Differentiirung einer Function von $ax + by$ entsteht, ihr Genüge geschehen oder sie muß identisch werden.

Wir

Wir wollen annehmen, man wüßte den Ursprung des Polynoms

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$$

nicht; setzt man dies Polynom gleich z, und differentiirt, so wird man finden

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= 2a^2x + 2aby\\ \frac{dz}{dy} &= 2abx + 2b^2y\end{aligned}\right\}$$

diese Werthe in der Gleichung

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = 0$$

gesetzt, machen dieselbe identisch: man kann also daraus schließen, daß das durch z vorgestellte Polynom eine Function von $ax + bx$ ist; welches auch ohnedies evident ist, weil

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2.$$

Man sieht ganz allgemein, daß wenn $u = 0$ eine Gleichung zwischen x, y, z und zwischen eine beliebige unbestimmte durch $f(t)$ vorgestellte Function ist, in welcher man bloß die Zusammensetzung von t aus x, y und z kennt, so kann man immer $f(t)$ und $f'(t)$ mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{d(u)}{dx} = 0, \quad \frac{d(u)}{dy} = 0$$

eliminiren.

Geht man zur zweyten Ordnung über, so wird die Anzahl der Gleichungen größer, und es ist in vielen Fällen möglich, zwey unbestimmte Functionen zu eliminiren; ich werde dies nicht weiter auseinander setzen, vielweniger das was diejenigen Gleichungen betrift die mehr als drey veränderliche Größen enthalten: ich behalte diese

Ge-

Gegenstände dem Integralcalcul vor, mit welchen sie in einem weit unmittelbaren Verhältniß stehn.

84.

Von den Bedingungsgleichungen, welche statt haben müssen, damit eine Formel das genaue Differential einer andern Formel sey.

Wir haben in Nr. 26 gesehen, daß, wenn u eine Function von zwey veränderlichen Größen ist, die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dydx} = \frac{d^2u}{dxdy}$$

identisch sey, man leitet daraus, zwischen den Differential-Coefficienten der Functionen von zwey oder von einer größern Anzahl unabhängiger veränderlicher Größen, eine Folge von Relationen ab, welche die Mittel darbieten, woran man erkennen kann, ob ein gegebener Differential-Ausdruck von der Differentiirung einer ursprünglichen Function oder überhaupt von einer Differential-Function von einer niederen Ordnung als sie, entstehen kann oder nicht.

Man habe fürs erste einen Ausdruck von der ersten Ordnung

$$Mdx + Ndy;$$

stellt u die ursprüngliche Function von x vor, von welcher sie das Differential ist, so hat man

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{du}{dx} \\ N &= \frac{du}{dy} \end{aligned}\right\}$$

und folglich

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dM}{dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx} \\ \frac{dN}{dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy}\end{array}\right\}:$$

es folgt also hieraus, daß die Gleichung

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

identisch sey. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so könnte der Ausdruck

$$Mdx + Ndy$$

nicht das Differential von irgend einer ursprünglichen Function von zwey **unabhängigen** veränderlichen Größen seyn.

Die Bedingungen welche nöthig sind, damit der Ausdruck

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

das Differential einer ursprünglichen Function u von drey unabhängigen veränderlichen Größen sey, sind eine unmittelbare Folge von dem was wir vorhin in Absicht auf die Functionen von zwey veränderliche Größen gefunden haben. In der That, wenn man z als beständig betrachtete, so würde man haben $dz = 0$; der Ausdruck

$$Mdx + Ndy$$

würde das Differential von u seyn, so genommen indem man bloß x und y variiren läßt, und müßte auch der Gleichung

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

Genüge leisten. Macht man hierauf $dy = 0$, so kommt

$$Mdx + Pdz$$

ein partielles Differential, welches so genommen ist, in-

dem

dem man nur x und z variiren läßt, und aus welchem man zieht

$$\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Da endlich die Annahme, daß x beständig sey, $dx = 0$ giebt, und da $Ndy + Pdz$ das partielle Differential in Beziehung auf y und auf z genommen ist, so entsteht daraus eine dritte Bedingungs-Gleichung

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Allgemein, wenn die Anzahl der veränderlichen Größen in der Differential-Function

$$Mdx + Ndy + Pdz + \ldots$$

n wäre, und man combinirte sie zu zwey und zwey, so zöge man daraus

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

partielle Differentiale mit zwey veränderlichen Größen, wovon jedes derselben eine Bedingungs-Gleichung geben würde, es würde also in allen

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

von diesen Gleichungen seyn, welche identisch seyn müssen damit die Vorgegebene das Differential einer ursprünglichen n unabhängige veränderliche Größe enthaltenden Function sey.

85.

Wäre die vorgegebene Formel von der zweyten Ordnung, daß man zum Beyspiel

$$Qdx^2 + Rdxdy + Sdy^2,$$

hätte,

hätte, wo dx und dy als beständig angesehen sind, so müßte man sie unter die Form

$$Mdx + Ndy$$

bringen, und deshalb $R = R' + R''$ machen, es wird alsdann kommen

$$(Qdx + R'dy)dx + (R''dx + Sdy)dy.$$

Nach der Bedingung

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

hat man

$$\frac{d[Qdx + R'dy]}{dy} = \frac{d[R''dx + Sdy]}{dx}$$

oder nach der Entwicklung

$$\frac{dQ}{dy}dx + \frac{dR'}{dy}dy = \frac{dR''}{dx}dx + \frac{dS}{dx}dy;$$

da aber dx und dy willkührlich und von einander unabhängig sind, so muß man besonders haben

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dQ}{dy} = \dfrac{dR''}{dx} \\ \dfrac{dR'}{dy} = \dfrac{dS}{dx} \end{array}\right\}$$

woraus nur noch R' und R'' zu eliminiren ist.

Man hat sogleich

$$R'' = R - R'$$

welches

$$\frac{dR''}{dx} = \frac{dR}{dx} - \frac{dR'}{dx}$$

giebt, substituirt man dies in den vorhergehenden Gleichungen, so kommt

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dQ}{dy} = \dfrac{dR}{dx} - \dfrac{dR'}{dx} \\ \dfrac{dR'}{dy} = \dfrac{dS}{dx} \end{array}\right\}$$

diffe-

differentiirt man die ersten dieser Gleichungen in Beziehung auf y, die zweyte in Beziehung auf x und eliminirt

$$\frac{d^2R'}{dxdy}$$

welches sich in beyden befindet, so erhält man

$$\frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2S}{dx^2} = \frac{d^2R}{dxdy}.$$

Dies ist die Bedingungs-Gleichung, welche statt haben muß, wenn

$$Qdx^2 + Rdxdy + Sdy^2$$

das Differential einer Function von der ersten Ordnung seyn soll; man würde auf eine ähnliche Art zu den Bedingungs-Gleichungen gelangen, die der Function von höhern Ordnungen zugehörig sind, in welchen dx und dy als beständige Größen angesehen worden sind.

Obige Betrachtungen können ebenfalls auf Functionen angewendet werden, in welchen man dx und dy hat variiren lassen, alsdann muß man aber die ursprüngliche Function von welcher die Vorgegebene abstammt als vier veränderliche Größen enthaltend ansehen, nemlich x, y, dx und dy: wir werden demungeachtet dies Verfahren hier nicht befolgen, weil man ein weit allgemeineres hat, dessen Resultat sich auf jede beliebige Anzahl von veränderlichen Größen und auf jede beliebige Ordnung erstreckt.

Wir bemerken, daß man hier die Differential-Functionen von den Differential-Gleichungen unterscheiden muß. Diese letztern sind, wie wir in den vorhergehenden Nummern gesehen haben, nicht immer das unmittelbare Resultat der Differentiirung; ihre Form hängt von den Eliminirungen ab, welche gemacht sind, um sie zu erhalten. Wir werden uns für jetzt nur mit solchen Functionen beschäftigen, in welchen alle veränderlichen Größen als von einander unabhängig angenommen sind, und das die Gleichungen betreffende, dem Integralcalcul überlassen.

86.

Es sey U eine beliebige Function von der veränderlichen Größen x, y und ihre Differentiale

$$dx, dy, d^2x, d^2y \; . \; . \; . \; d^{n-1}x, d^{n-1}y;$$

macht man

$$\left.\begin{matrix} dx = x_1, \; d^2x = x_2, \; d^3x = x_3 \; . \; . \; . \\ dy = y_1, \; d^2y = y_2, \; d^3x = x_3 \; . \; . \; . \end{matrix}\right\}$$

so wird U eine Function von den veränderlichen Größen $x, y, x_1, y_1 \; . \; . \; . \; x_{n-1}, y_{n-1}$, und dessen vollständiges Differential wird

$$dU = \left\{\begin{matrix} \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dx_1}dx_1 + \frac{dU}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_{n-1}}dx_{n-1} \\ + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dy_1}dy_1 + \frac{dU}{dy_2}dy_2 + \ldots + \frac{dU}{dy_{n-1}}dy_{n-1} \end{matrix}\right.$$

Aber $dx, dx_1 \ldots dx_{n-1}$ $dy, dy_1 \ldots dy_{n-1}$, sind respective $x_1, x_2 \ldots x_n$, $y_1, y_2 \ldots y_n$; macht man ferner

$$dU = U_1,$$

so kommt

$$U_1 = \left\{\begin{matrix} \frac{dU}{dx}x_1 + \frac{dU}{dx_1}x_2 + \frac{dU}{dx_2}x_3 + \ldots + \frac{dU}{dx_{n-1}}x_n \\ + \frac{dU}{dy}y_1 + \frac{dU}{dy_1}y_2 + \frac{dU}{dy_2}y_3 + \ldots + \frac{dU}{dy_{n-1}}y_n \end{matrix}\right.$$

Wenn man successive U_1 in Beziehung auf jede der veränderlichen Größen $x, y \ldots x_n, y_n$ differentiirt, so hat man zuerst, indem man bloß Rücksicht auf die Variabilität von x nimmt,

$\frac{dU_1}{dx}$

$$\frac{dU_1}{dx} = \begin{cases} \frac{d^2U}{dx^2}x_1 + \frac{d^2U}{dxdx_1}x_2 + \frac{d^2U}{dxdx_2}dx_3 + \ldots + \frac{d^2U}{dx\,dx_{n-1}}x_n \\ \frac{d^2U}{dx\,dy}y_1 + \frac{d^2U}{dx\,dy_1}y_2 + \frac{d^2U}{dxdy_2}y_3 + \ldots + \frac{d^2U}{dx\,dy_{n-1}}y_n \end{cases}$$

Kehrt man die Ordnung der beyden angezeigten Differentiirungen in jedem Gliede der zweyten Hälfte der vorstehenden Gleichung um, so wird man leicht sehen, daß diese zweyte Hälfte nichts anders als das vollständige Differential von $\frac{dU}{dx}$ sey; man hat also

$$\frac{dU_1}{dx} = d \cdot \frac{dU}{dx}.$$

Wir wollen jetzt in Beziehung auf x_1 differentiiren, so kommt

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \begin{cases} \frac{dU}{dx} + \frac{d^2U}{dx_1dx}x_1 + \frac{d^2U}{dx_1dx_1}x_2 + \frac{d^2U}{dx_1dx_2}x_3 + \ldots \\ \qquad + \frac{d^2U}{dx_1\,dx_{n-1}}x_n \\ + \frac{d^2U}{dx_1dy}y_1 + \frac{d^2U}{dx_1dy_1}y_2 + \frac{d^2U}{dx_1dy_2}y_3 + \ldots \\ \qquad + \frac{d^2U}{dx_1\,dy_{n-1}}y_n \end{cases}$$

Kehrt man die Ordnung der Differentiirungen in allen Gliedern um, wo sich U zweymal differentiirt befindet, so hat man

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU}{dx} + d.\frac{dU}{dx_1}$$

$$\frac{dU_1}{dx_2} = \frac{dU}{dx_1} + d.\frac{dU}{dx_2}$$

$$\frac{dU_1}{dx_3} = \frac{dU}{dx_2} + d.\frac{dU}{dx_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dU_1}{dx_{n-1}} = \frac{dU}{dx_{n-2}} + d.\frac{dU}{dx_{n-1}}$$

wenn man aber zu x_n gekommen ist, so hat man, da dieser Buchstabe das Differential $d^n x$ vorstellt, welches sich nicht in U befinden darf, weil diese Function nicht von der Ordnung $n - 1$ ist, bloß

$$\frac{dU_1}{dx_n} = \frac{dU}{dx_{n-1}}.$$

Stellt man die herauskommende Resultate zusammen, und beobachtet dabey, daß man ähnliche Resultate in Beziehung auf die andere veränderliche Größe y und auf ihre Differentiale y_1, y_2 . . , ... y_n, finden würde, so kann man folgende Tabelle bilden:

$$\frac{dU_1}{dx} = d.\frac{dU}{dx} \qquad \frac{dU_1}{dy} = d.\frac{dU}{dy}$$

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU}{dx} + d.\frac{dU}{dx_1} \qquad \frac{dU_1}{dy_1} = \frac{dU}{dy} + d.\frac{dU}{dy_1}$$

$$\frac{dU_1}{dx_2} = \frac{dU}{dx_1} + d.\frac{dU}{dx_2} \qquad \frac{dU_1}{dy_2} = \frac{dU}{dy_1} + d.\frac{dU}{dy_2}$$

$$\frac{dU_1}{dx_3} = \frac{dU}{dx_2} + d.\frac{dU}{dx_3} \qquad \frac{dU_1}{dy_3} = \frac{dU}{dy_2} + d.\frac{dU}{dy_3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dU_1}{dx_{n-1}} = \frac{dU}{dx_{n-2}} + d.\frac{dU}{dx_{n-1}} \qquad \frac{dU_1}{dy_{n-1}} = \frac{dU}{dy_{n-2}} + d.\frac{dU}{dy_{n-1}}$$

$$\frac{dU_1}{dx_n} = \frac{dU}{dx_{n-1}} \qquad \frac{dU_1}{dy_n} = \frac{dU}{dy_{n-1}}$$

Aus diesen Gleichungen kann U eliminirt werden. Wir wollen uns zuerst mit den in der ersten Columne enthaltenen beschäftigen; differentiirt man die zweyte dieser Gleichungen und zieht sie von der ersten ab, so kommt

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} = - d^2\frac{dU}{dx_1}:$$

wird zu dieser neuen Gleichung das Differential der dritten hinzugefügt, so findet man

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2\frac{dU_1}{dx_2} = d^3\frac{dU}{dx_2}.$$

Wäre die Function U_1 nur von der zweyten Ordnung, so würde U bloß von der ersten Ordnung seyn und würde folglich nicht x_2 und d^2x enthalten; man hätte alsdann

$$\frac{dU_1}{dx} - d\frac{dU_1}{dx_1} + d^2\frac{dU_1}{dx_2} = 0.$$

Wenn U von der dritten Ordnung wäre, so würde man finden

$$\frac{dU_1}{dx}$$

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2\frac{dU_1}{dx_2} - d^3\frac{dU_1}{dx_2}\text{ u. s. w.} = 0$$

und überhaupt

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{d.U^1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_1}{dx_2} - d^3.\frac{dU_1}{dx_3} + d^4.\frac{dU_1}{dx_4}\text{ u. s. w.} = 0$$

bleibt man bey den Differential der höchsten in U_1 enthaltenen Ordnung stehen; so würde man auf die nemliche Art

$$\frac{dU_1}{dy} - d\frac{dU_1}{dy_1} + d^2.\frac{dU_1}{dy_2} - d^3.\frac{dU_1}{dy_3} + d^4.\frac{dU_1}{dy_4} - \text{u. s. w.} = 0.$$

haben.

87.

Ob wir gleich nur zwey veränderliche Größen in U angenommen haben, so sieht man doch leicht, daß man allgemein so viel dergleichen Gleichungen als veränderliche Größen habe. Diese Gleichungen werden allemal identisch seyn, wenn U_1 das Differential einer beliebigen Function U von einer unmittelbar niederen Ordnung, ausdrückt. Nimmt man sich also vor, eine Differential-Function der Ordnung n zu untersuchen, so mache man darin

$$dx = x_1,\ d^2x = x_2\ \ldots\ldots\ dy = y_1$$
$$d^2y = y_2\ \ldots\ldots\ dz = z_1,$$
$$d^2z = z_2\ \ldots\ldots$$

und stelle sie durch U_1 vor, so kann man die Größen

$$\frac{dU_1}{dx},\ \frac{dU_1}{dx_1}\ldots\frac{dU_1}{dy},\ \frac{dU_1}{dy_1}\ldots\frac{dU_1}{dz},\ \frac{dU_1}{dz_1}\ldots.$$

entstehen lassen um sie in obiger Gleichung zu substituiren. Erhält man keine solche Resultate, die sich selbst vernichten, so kann man daraus schließen, daß die Function

tion U_1 nicht das Differential einer Function von einer unmittelbar niederen Ordnung sey.

Wir wollen zum Beyspiel die Function

$$xd^2y - yd^2x$$

annehmen, sie verändert sich in

$$xy_2 - yx_2 = U_1$$

und man hat

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dU_1}{dx} = y_2,\ \frac{dU_1}{dx_1} = 0,\ \frac{dU_1}{dx_2} = -y \\ \frac{dU_1}{dy} = -x_2,\ \frac{dU_1}{dy_1} = 0,\ \frac{dU_1}{dy_2} = x \end{array}\right\}$$

welches identische Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} y_2 - d^2y = 0 \\ -x_2 + d^2y = 0 \end{array}\right\}$$

giebt. Die vorgegebene Function ist wirklich das Differential von $xdy - ydx$.

Die vorhin gefundenen Gleichungen schließen implicite die in Nr. 84. für die Functionen von der ersten Ordnung gegebenen mit ein. In der That, wenn man

$$Mdx + Ndy + Pdz$$

hat, so zieht man daraus

$$Mx_1 + Ny_1 + Pz_1 = U_1$$

und da U_1 nur von der ersten Ordnung ist, so hat man bloß die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} = 0 \\ \frac{dU_1}{dy} - d.\frac{dU_1}{dy_1} = 0 \\ \frac{dU_1}{dz} - d.\frac{dU_1}{dz_1} = 0 \end{array}\right\}$$

welche, wenn man darin x_1 für dx, y_1 für dy, und z_1 für dz setzt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dN}{dx}y_1 + \frac{dP}{dx}z_1 - \frac{dM}{dy}y_1 - \frac{dM}{dz}z_1 = 0 \\ \frac{dM}{dy}x_1 + \frac{dP}{dy}z_1 - \frac{dN}{dx}x_1 - \frac{dN}{dz}z_1 = 0 \\ \frac{dM}{dz}x_1 + \frac{dN}{dz}y_1 - \frac{dP}{dx}x_1 - \frac{dP}{dy}y_1 = 0 \end{array}\right\}$$

geben. In diesen Gleichungen aber müssen die Differentiale x_1, y_1, z_1 unbestimmt bleiben, weil die veränderlichen Größen x, y und z unabhängig sind. Setzt man das für sich gleich Null, was jedes dieser Differentiale multiplicirt, so werden daraus die drey Gleichungen der angeführten Nummer entstehen.

Wir wollen jetzt als letztes Beyspiel die Function

$$Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2 + Sd^2x + Td^2y$$

aufgeben, sie nimmt die Form

$$Px_1^2 + Qx_1y_1 + Ry_1^2 + Sx_2 + Ty_2 = U_1$$

an; wenn man U_1 differentiirt, und beobachtet, daß U_1 weder x, noch y, enthält, so hat man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_1}{dx_2} = 0 \\ \frac{dU_1}{dy} - d.\frac{dU_1}{dy_1} + d^2.\frac{dU}{dy_2} = 0 \end{array}\right\}$$

welche

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dx}x_1^2 + \frac{dQ}{dx}x_1y_1 + \frac{dR}{dx}y_1^2 + \frac{dS}{dx}x_2 + \frac{dT}{dx}y_2 \\ \qquad - d(2Px_1 + Qy_1) + d^2S = 0 \\ \frac{dP}{dy}x_1^2 + \frac{dQ}{dy}x_1y_1 + \frac{dR}{dy}y_1^2 + \frac{dS}{dy}x_2 + \frac{dT}{dy}y_2 \\ \qquad - d(Qx_1 + 2Ry_1) + d^2T = 0 \end{array}\right\}$$

werden. Sind die angezeigten Differentiirungen verrichtet, so setze man die Größen, welche x_1^2, x_1y_1, y_1^2, x_2, x_2, multipliciren jede für sich gleich Null, und es

wer-

werden daraus zehn Gleichungen entstehen, die sich auf drey wesentlich von einander unterschiedene reduciren, nemlich:

$$P - \frac{dS}{dx} = 0,$$

$$R - \frac{dT}{dy} = 0,$$

$$Q - \frac{dT}{dx} - \frac{dS}{dy} = 0.$$

88.

Es sey U_2 das erste Differential der Function U_1, so hat man die Gleichung

$$\frac{dU_2}{dx} - d.\frac{dU_2}{dx_1} + d^2.\frac{dU_2}{dx_2} - d^3.\frac{dU_2}{dx_3} + d^4.\frac{dU_2}{dx_4} - \text{u.s.w.} = 0 \ (1)$$

man hat aber auch

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_0}{dx_2} - d^3.\frac{dU_1}{dx_3} + \text{u. s. w.} = 0$$

denn da U_1 von einer niederen Ordnung ist als U_2, so muß U_1 ein Differential in Beziehung auf jede veränderliche Größe weniger haben.

Da die Relation von U_2 zu U_1 die nemliche als die von U_1 zu U ist, so hat man nach der Tabelle von Seite 309.

$$\frac{dU_2}{dx} = d.\frac{dU_1}{dx}$$

$$\frac{dU_2}{dx_1} = \frac{dU_1}{dx} + d.\frac{dU_1}{dx_1}$$

$$\frac{dU_2}{dx_2} = \frac{dU_1}{dx_1} + d.\frac{dU_1}{dx_2}$$

. . . .

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU_1}{d_{n-1}}$$

Die zweyte von diesen Gleichungen giebt

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{dU_2}{dx_1} - d.\frac{dU_1}{dx_1}$$

die dritte

$$d.\frac{dU_1}{dx_1} = d.\frac{dU_2}{dx_2} - d.\frac{dU_1}{dx_2}$$

u. s. w. . . . u. s. w. . . . . . .

man wird leicht hieraus ziehen

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{dU_2}{dx_1} - d.\frac{dU_2}{dx_2} + d^2.\frac{dU_2}{dx^3} - d^3.\frac{dU_3}{dx_4} + \text{u.s.w.}$$

Geht man successive von der dritten Gleichung, von der vierten Gleichung u. s. w. aus, so wird man auf die nemliche Art finden

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU_2}{dx_2} - d.\frac{dU_2}{dx_3} + d^2.\frac{dU_2}{dx_4} + \text{u.s.w.}$$

$$\frac{dU_1}{dx_2} = \frac{dU_2}{dx_3} - d.\frac{dU_2}{dx_4} + \text{u.s.w.}$$

$$\frac{dU_1}{dx_3} = \frac{dU_2}{dx_4} - \text{u.s.w.}$$

u. s. w.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{dU_1}{dx} - d.\frac{dU_1}{dx_1} + d^2.\frac{dU_1}{dx_2} - d^3.\frac{dU_1}{dx_3} + \text{u.s.w.} = 0,$$

so kommt

$$\frac{dU_2}{dx_1} - 2d.\frac{dU_2}{dx_2} + 3d^2.\frac{dU_2}{dx_3} - 4d^3.\frac{dU_2}{dx_4} + \text{u.s.w.} = 0 \quad (2).$$

Die Gleichungen (1) und (2) müssen zu gleicher Zeit identisch seyn, wenn die Function U_2 das Differential von U_1 und U_1 das Differential von U ist; das heißt wenn U_2 das zweyte Differential einer Function von einer um zwey Einheiten niederen Ordnung ist.

89.

Es sey U_3 das Differential von U_2, so hat man zuerst

$$\frac{dU_3}{dx} - d.\frac{dU_3}{dx_1} + d^2.\frac{dU_3}{dx_2} - d^3.\frac{dU_3}{dx_3} + d^4.\frac{dU_3}{dx_4} - \text{u.s.w.} \ldots (1)$$

und kraft der vorigen Nummer

$$\frac{dU_2}{dx} - d.\frac{dU_2}{dx_1} + d^2.\frac{dU_2}{dx_2} - d^3.\frac{dU_2}{dx_3} + \text{u.s.w.} = 0,$$

$$\frac{dU_2}{dx_1} - 2d.\frac{dU_2}{dx_2} + 3d^2.\frac{dU_2}{dx_3} + \text{u.s.w.} = 0$$

man kann aber die Werthe von $\frac{dU_2}{dx}$, $\frac{dU_2}{dx_1}$ u. s. w. von den vorhin gegebenen Werthen von $\frac{dU_1}{dx}$, $\frac{dU_1}{dx_1}$ u. s. w. ableiten, indem man die untern Indexe des Buchstaben U um eine Einheit vermehrt; substituirt man die Resultate in den beyden vorigen Gleichungen, so hat man

$$\frac{dU_3}{dx_1} - 2d.\frac{dU_2}{dx_2} + 3d^2.\frac{dU_3}{dx_3} - 4d^3.\frac{dU_4}{dx_4} + \text{u.s.w.} = 0 \ (2)$$

$$\frac{dU_3}{dx_2} - 3d.\frac{dU_2}{dx_3} + 6d^2.\frac{dU_3}{dx_4} - \text{u.s.w.} = 0 \ (3)$$

Gleichungen, welche mit der Gleichung (1) zu gleicher Zeit identisch werden, wenn die Function U_3 das dritte Differential einer beliebigen Function U ist.

Wir haben bloß auf die veränderliche Größe x Rücksicht genommen, aber es ist leicht zu sehen, daß man ähnliche Resultate in Beziehung auf jede der andern veränderlichen Größen haben würde, und daß man ferner durch das nemliche Verfahren Gleichungen erhalten würde, welche identisch seyn müssen, wenn die vorgegebene Function ein viertes, fünftes u. s. w. Differential ist.

90.

90.

Um den vorhin gefundenen Bedingungs-Gleichungen eine einfachere Form zu geben, so wollen wir annehmen, daß nachdem man in der vorgegebenen Function x_1, x_2 u. s. w. y_1, y_2, u. s. w. statt dx, $d^2x\ldots$, dy, $d^2y\ldots$, gesetzt hätte, ihr vollständiges Differential sey

$$\left.\begin{array}{l} Xdx+X_1dx_1+X_2dx_2+X_3dx_3+X_4dx_4+\text{u.s.w.} \\ +Ydy+Y_1dy_1+Y_2dy_2+Y_3dy_3+Y_4dy_4+\text{u.s.w.} \end{array}\right\} = dU_3,$$

u. s. w.

man würde daraus ziehen

$$\frac{dU_3}{dx} = X, \quad \frac{dU_3}{dx_1} = X_1, \quad \frac{dU_3}{dx_2} = X_2 \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{dU_3}{dy} = Y, \quad \frac{dU_3}{dy_1} = Y_1, \quad \frac{dU_3}{dy_2} = Y_2 \text{ u. s. w.}$$

und die Bedingungs-Gleichungen in Beziehung auf die veränderliche Größe x werden

$$\left.\begin{array}{l} X - dX_1 + d^2X_2 - d^3X_3 + d^4X_4 - \text{u. s. w.} = 0 \\ X_1 - 2dX_2 + 3d^2X_3 - 4d^3X_4 - \text{u. s. w.} = 0 \\ X_2 - 3dX_3 + 6d^2X_4 - \text{u. s. w.} = 0 \end{array}\right\}$$

seyn: man würde auch die erhalten, welche sich auf y beziehen, wenn man darin den Buchstaben X in Y veränderte.

Man muß beobachten, daß da die vorgegebene Function von der Ordnung n ist, ihr Differential von der Ordnung $n+1$ seyn, und daß folglich X und Y in Beziehung auf die darin enthaltenen Differentiale von den Grad n seyn werden; X_1 und Y_1 werden bloß vom $n-1$ten Grade; X_2 und Y_2 vom $n-2$ten Grade u. s. w. seyn (Note zu Seite 267).

Wir haben der mehreren Allgemeinheit wegen angenommen; daß kein Differential beständig werde; hätte das Gegentheil statt, so müßte man die Gleichungen in Beziehung auf die veränderlichen Größen deren erste Differentiale als beständige Größen angesehen sind, weglassen. Dies ist leicht einzusehen; denn wenn man zum Beyspiel annimmt, dx sey beständig, so würde von den, in der ersten Columne der Seite 309 stehende Tabelle, enthaltenen Gleichungen, nur die folgende übrig bleiben:

$$\frac{dU_1}{dx} = d.\frac{dU}{dx},$$

von welcher man nichts schließen kann, weil U durchaus unbekannt ist.

91.

Es befinden sich zwischen einer homogenen Function und zwischen ihren Differential-Coefficienten particuläre Relationen, deren Kenntnisse uns wichtig sind.

Wenn V eine homogene Function von x, y u. s. w. ist, und man substituirt darin tx, ty u. s. w. statt x, y u. s. w., so wird sie nothwendig die Form $t^m V$ annehmen, wo m die Summe der Exponenten in jedem Gliede ist (Nr. 66). Nun wollen wir annehmen, t werde t + g, so hat man $(t+g)^m V$ statt V, oder $(1+g)^m V$, wenn man t = 1 macht. In der nemlichen Hypothese werden sich x, y u. s. w. respective in x + gx, y + gy, u. s. w. verändern; wenn aber x, y u. s. w. x + h und y + k werden, so hat man allgemein

$$\left.\begin{array}{l} V + \frac{dV}{dx} h + \frac{dV}{dy}.k + \text{u. s. w.} \\ + \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2} h^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy} hk + \frac{d^2V}{dy^2} k^2 + \text{u. s. w.}\right\} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}$$

sub-

substituirt man für h, k u. s. w. ihre Werthe, so erhält man folgende Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} V+\frac{dV}{dy}gx+\frac{dV}{dy}gy+\text{u. s. w.} \\ +\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2V}{dx^2}g^2x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}g^2xy+\frac{d^2V}{dy^2}g^2y^2+\text{u s. w.}\right\} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} =(1+g)^mV$$

Entwickelt man die zweyte Hälfte, und vergleicht die mit einerley Potenz der unbestimmten Größe g behafteten Glieder miteinander, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dV}{dy}x+\frac{dV}{dy}y+\text{u. s. w.}=mV \\ \frac{d^2V}{dx^2}x^2+2\frac{d^2V}{dxdy}xy+\frac{d^2V}{dy^2}y^2=m(m-1)V \end{array}\right\}$$

u. s. w.

Die erste dieser Gleichungen enthält das Theorem der homogenen Functionen, von denen man im Integralcalcul oft Gebrauch macht, und die andere Gleichungen sind Folgerungen daraus.

92.

Von der Methode der Grenzen.

Um die im vorhergehenden auseinandergesetzten Begriffe des Differentialcalculs zu ergänzen, so bleibt uns noch übrig die Identität der Differential-Coefficienten mit den Grenzen der Verhältnisse zu zeigen, welche die Zunahmen der veränderlichen Größen unter sich haben; aus diesem Gesichtspunct betrachtete d'Alembert diesen Calcul und seine Anwendung auf die Theorie der Curven.

Da die Function u,

$$u+ph+qh^2+rh^3+\text{u. s. w. (Nr. 2)}$$

wird,

wird, wenn sich x in x + h verändert, so hat man, wenn man den zwischen diesen beyden aufeinander folgenden Zuständen befindlichen Unterschied mit k bezeichnet,

$$k = ph + qh^2 + rh^3 + \text{u. s. w.}$$

und folglich

$$\frac{k}{h} = p + qh + rh^2 + \text{u. s. w.}$$

Wenn k und h verschwinden, so wird die zweyte Hälfte dieser Gleichung nicht verschwinden, sondern sie reducirt sich nur auf p, eine Größe welche die Grenze des Verhältnisses der beyden Zunahmen k und h ist (Einl. Nr. 4), und welche auch den ersten Differential-Coefficienten der Function u ausdrückt (Nr. 11).

Betrachtet man p selbst als eine neue Function von x, so wird sie, wenn sich x in x + h verändert

$$p + p'h + q'h^2 + r'h^3 + \text{u. s. w.}$$

nennt man nun die Differenz dieser beyden Zuständen k, so findet man

$$\frac{k'}{h} = p' + q'h + r'h^2 + \text{u. s. w.};$$

die Grenze des Verhältniß $\frac{k'}{h}$ wird also p', oder der Differential-Coefficient der zweyten Ordnung seyn.

Nimmt man auf diese Art die Grenze des Verhältnisses vom Zuwachs jedes Differential-Coefficienten zu dem der veränderlichen Größe x, so kann man alle diese Coefficienten von einander ableiten, und ihre Formirung wird auf diese Art durchaus die nemliche seyn als in den Nummero 9 und 10. Es folgt hieraus daß das Verfahren, durch welche man die Grenzen des Verhältnisses der

Zu-

Zunahmen finden kann, die Ausdrücke der Differential-Coefficienten

$$\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \text{ u. s. w.}$$

geben wird.

93.

Nichts ist in Rücksicht der algebraischen Function leichter, und die Nr. 18 gegebenen Regeln, finden eben so auf Fälle ihre Anwendung, wo man diese Coefficienten sucht, indem man sie als die Grenzen der Verhältnisse der Zunahme betrachtet, weil man auch aus diesen Gesichtspunct die Potenzen von k oder von dx welche höher sind als die erste, auslassen muß.

Man kann auch überhoben seyn, die logarithmische Functionen und Kreisfunctionen auf Reihen zu reduciren In der That, es sey $u = lx$, nimmt man an x werde $x + h$, so verändert sich u in $u + k$; nach der Natur der Logarithmen, müssen die beyden Zahlen u und $u + h$ Glieder einer arithmetischen Progression seyn, indeß x und $x + h$ ihre correspondirende in einer geometrischen Progression sind. Es sey r der Verhältnißnahme dieser letztern, so hat man

$$\frac{x + h}{x} = r$$

oder

$$h = (r - 1)x;$$

und folglich

$$\frac{k}{h} = \frac{k}{(r - 1)x}.$$

Je mehr aber die Intervallen zwischen den Gliedern beyder Progressionen sich verengen, desto weniger weichen die Progressionen von einem logarithmischen System ab, und desto mehr nähert sich zu gleicher Zeit der Verhältnißnahme der geometrischen Progression die Einheit; macht man also $x = 1 + mk$ so kommt

$$\frac{k}{h} = \frac{1}{mx} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{x};$$

mithin wird die Grenze

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{x} \text{ oder } \frac{M}{x}$$

seyn, wenn man

$$\frac{1}{m} = M$$

macht; ein mit dem in Nr. 20 gefundenen, übereinstimmendes Resultat.

Hätte man $u = a^x$, so würde man daraus ziehen

$$lu = xla \text{ und } \frac{du}{u} = dxla,$$

woraus folgt,

$$du = udxla = a^x dxla.$$

Es sey

$$u = \sin. x;$$

so wird man haben

$$u + k = \sin.(x + h) = \sin. x \cos. h + \cos. x \sin. h,$$

also

$$k = \sin. x \cos. h + \cos. x \sin. h - u = \sin. x \cos. h + \cos. x \sin. h - \sin x$$
$$= \sin. x (\cos. h - 1) + \cos. x \sin. h.$$

Da aber

$$h^2 + \cos. h^2 = 1,$$

so hat man

$$\sin. h^2 = 1 - \cos. h^2 = (1 + \cos h)(1 - \cos. h);$$

folglich

$$1 - \cos.h = \frac{\sin.h^2}{1 + \cos.h}$$

und wenn man dies in den Ausdruck von k setzt, so kommt

$$k = -\sin.x \frac{\sin.h^2}{1 + \cos.h} + \cos.x \sin.h$$

dividirt man endlich durch sin. h, so findet man

$$\frac{k}{\sin.h} = -\sin.x \frac{\sin h}{1 + \cos.h} + \cos.x.$$

Da nun der Bogen desto weniger von seinem Sinus unterschieden ist, je kleiner er ist; so nähert sich das Verhältniß $\frac{k}{\sin h}$ gegen $\frac{k}{h}$, und zu gleicher Zeit nähert sich die zweyte Hälfte der vorstehenden Gleichung cos. x; man hat also

$$\frac{du}{dx} = \cos.x \text{ (*)}$$

Es

*) Man wird es vielleicht sonderbar finden, daß ich nicht wie mehrere Autoren, sogleich so geschlossen habe: wenn h verschwindet, so wird cos.h der Einheit gleich, cos.h — 1 verschwindet auch, und

$$\frac{k}{\sin.h} = \sin.x \frac{\cos.h - 1}{\sin h} + \cos.x$$

reducirt sich alsdann auf

$$\frac{k}{h} = \cos.x.$$

Dies Raisonnement ist aber nicht strenge; denn sin.h und h werden zu gleicher Zeit mit cos. h — 1 zu Null, und man hätte also

$$\frac{k}{h} = \frac{0}{0} \sin.x + \cos.x.$$

Da

Es sey $u = \cos.x$; so hat man

$$u + k = \cos.(x + h) = \cos.x \cos.h - \sin x \sin h$$

und

$$k = \cos.(\cos.h - 1) - \sin.x \sin.h$$

$$= - \cos. \frac{\sin.h^2}{1 + \cos.h} - \sin.x \sin.h;$$

woraus folgt

$$\frac{k}{\sin.h} = - \cos.x \frac{\sin.h}{1 + \cos.h} - \sin.x:$$

Da nun der Ausdruck $\frac{0}{0}$ welcher sin.x behaftet, unbestimmt ist, so kann man der Strenge nach nichts aus dieser Gleichung ziehen. Bey meinem Verfahren verhält es sich aber nicht so, weil in der zweyten Hälfte der Gleichung

$$\frac{k}{\sin.h} = - \frac{\sin.h}{1 + \cos.h} \sin.x \cos.x$$

kein Glied $\frac{0}{0}$ wird.

Wenn man die Betrachtung der unendlich kleinen Größen anwendet, wovon wir weiter unten sprechen werden, so gilt auch noch die eben gemachte Bemerkung; in der That, wenn man sich begnügte zu sagen, daß der unendlich kleine Bogen h, unendlich wenig vom Radius unterschieden sey, und daß folglich $\cos.h - 1 = 0$ sey, so ist dies nicht hinreichend, weil, wenn sin.h selbst unendlich klein, das Glied cos.xsin.h mit cos.x durch die unendlich kleine Differenz $\cos.h - 1$ multiplicirt, vergleichbar seyn könnte. Also nur dann, wenn zuvor gezeigt wird, daß $\cos.h - 1$ von sin.h abhängt, d. h. von einer unendlich kleinen Größe der zweyten Ordnung, darf man $\sin.x(\cos.h - 1)$ vor cos.x sin.h weglassen.

die Grenze wird also

$$\frac{du}{dx} = - \sin. x$$

94.

Die Betrachtung der Grenzen, kann ebenfalls auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen angewandt werden; denn man hat alsdann für einerley Function so viel verschiedene Grenzen, als unabhängige veränderliche Größen da sind; so ist, wenn u eine Function von x und von y ist, $\frac{du}{dx}$ die Grenze des Verhältnisses vom Zuwachs der Function u zu dem der veränderlichen Größe x, wenn sich diese letzte allein verändert; und $\frac{du}{dy}$ ist die analoge Grenze in Beziehung auf y.

95.

Die Theorie der Differential-Gleichungen stimmt auch mit der Untersuchung der Grenzen überein; denn wenn man in der Gleichung $f(x, y) = 0$, $x + h$ statt x und $y + k$ statt y setzt, so wird sie

$$f(x + h, y + k) = 0,$$

zieht man die Vorgegebene ab, so hat man

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = 0;$$

ein Resultat, welches immer von der Form

$Mh + Nk + Ph^2 + Qhk + Rk^2 +$ u. s. w. $= 0$ ist.

Dividirt man durch h, so findet man

$M + \frac{Nk}{h} + Ph + Qk + R\frac{k^2}{h} +$ u. s. w. $= 0$

welches

$\frac{k}{h}$

$$\frac{k}{h} = \frac{-M - Ph - Qk}{N + Rk + u. s. w.}$$

giebt, wenn aber k und h verschwinden, so wird die Grenze des Verhältnisses $\frac{k}{h}$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N},$$

woraus folgt

$$Ndy + Mdx = 0.$$

Man kann diese Betrachtungen leicht auf höhere Ordnungen als die erste, ausdehnen.

96.

Man wird nicht verfehlen zu beobachten, daß, weil der Ausdruck $\frac{0}{0}$ unbestimmt ist, das Verhältniß $\frac{k}{h}$ ebenfalls unbestimmt seyn muß, wenn man $k = 0$ und $h = 0$ annimmt. Dies ist der Einwurf den man gegen die Methode der Grenzen macht; es scheint mir aber leicht diesen Einwurf zu begegnen; denn ich sehe nicht ab, wie man nöthig habe, das Verhältniß der Zunahme h und k zu betrachten, wenn sie verschwinden, noch wie man zu begreifen sucht, daß die Größen ein Verhältniß beybehalten können, wenn sie aufhören zu seyn. Die Grenze eines Verhältniß ist keinesweges das Verhältniß selbst; aber eine Größe der es sich so weit man will nähern kann. Da nun dies genau in Absicht des Verhältnisses $\frac{k}{h}$ wahr ist, ohne daß h und k Null seyn, so trift der Einwurf nicht im mindesten dem Calcul der Grenzen an sich selbst. Man wird in der Folge sehen, daß dieser Einwurf eben so wenig Gewicht gegen ihre Anwendundungen der Methode der Grenzen hat, weil diese Methode nur das Vergleichen solcher Verhältnisse von Linien zum Gegenstande hat, die so wenig als man will von den Gesuchten differiren können, und daß die alten Geometer, über deren Genauigkeit man kein Zweifel erhebt, immer zwey Größen als gleich angesehen haben, deren Unterschied kleiner als jede gegebene Größe war.

Man könnte also den Differentialcalcul ansehen als wenn er zum Gegenstande die Untersuchung der Grenzen der Verhältnisse hätte, welche die Zunahmen der veränderlichen Größen unter sich haben, wenn man die Relationen dieser Größen kennt, und unter diesem Gesichtspuncte wären ihre Resultate auch noch von den besondern Werthe der Zunahmen unabhängig.

97.

Leibnitz, einer der Erfinder des Differentialcalculs, hat diesen Calcul auf eine weniger strenge Art als die vorhergehenden Methoden sind, vorgestellt, aber demohngeachtet bequemer in der Anwendung, und aus dieser Ursache ist es gut diese Vorstellungsart zu kennen. Er nimmt an, daß die veränderlichen Größen unendlich kleine Zuwachse erhalten, und von solcher Beschaffenheit, daß man sie der endlichen Größen gegenüber vernachlässigen muß, dergestalt, daß diese Zuwachse niemals anders als unter sich verglichen werden können; er macht ferner folgende Forderung, daß man nach Belieben, zwey Größen die unter sich nur um eine unendlich kleine Größe verschieden sind, eine für die andere nehmen kann. Hieraus folgt, daß man in der Entwicklung der Zunahmen der Functionen, alle Potenzen

tenzen von dx, dy . . . höher als die erste weglassen muß. Um also das Differential von xy zu erhalten, so entwickelt er das Product $(x + dx)(y + dx) = xy + xdy + ydx + dxdy$, zieht hiervon die ursprüngliche Function xy ab, und läßt das Glied $dxdy$ weg, indem solches unendlich klein in Betracht der beyden andern ist, daher ist $d.xy = xdy + ydx$.

In der That, kann $dxdy$ als das vierte Glied dieser-Proportion

$$1 ; dx = dy : dxdy$$

angesehen werden; wenn also dx in Betracht der endlichen Größen, von derselben Art als die Einheit unendlich klein ist d. h. wenn es in der Einheit unendlichmal enthalten ist, so wird $dydx$ auch unendlichmal in dx, oder in dy enthalten seyn.

Die Regel der Differentiirung von xy führt, wie man solches Nr. 16 und 17 gesehen hat zu den Differentialen von allen algebraischen Functionen; und was die transcendenten Functionen betrift, so hebt die Annahme, von unendlich kleinen Zunahmen, viele Schwierigkeiten.

In den Fall der Kreisfunctionen, z. B. erlaubt sie den Bogen so anzusehen, als wenn solcher nicht von seinem Sinus unterschieden wäre, und der Cosinus als dem Radius gleich.

Die Homogenität der Differentialausdrücke, ist eine nothwendige Folge der Leibnitzschen Methode; denn nach der oben in Betreff von $dxdy$ gemachten Bemerkung, so können nur Glieder vom geringsten Grade bleiben; alle andere müssen diesen gegenüber weggelassen werden.

Geht man zur zweyten Ordnung über, so sieht Leibnitz die Differentiale der zweyten Ordnung, als unendlich klein, in Betreff der Differentiale der ersten Ordnung an, und folglich als homogen oder vergleichbar mit dem Quadraten von diesen hier. Es ist leicht zu sehen, daß diese Annahme eine nothwendige Folge von derjenigen ist, die in Betracht der Differentiale der ersten Ordnung gemacht ist; denn wenn man z. B. in $Mdx + Ndy$, zugleicher Zeit mit dx und dy, die in M und in N enthaltene $x$en und y's variiren läßt, so erhält man ein Resultat von der Form

$$Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2;$$

aber dx^2, $dxdy$ und dy^2 sind in Ansehung von dx und dy unendlich klein, es muß daher der Homogenität wegen d^2x und d^2y in Beziehung auf dx und dy unendlich klein seyn.

Es folgt hieraus, daß, um die zweyten, dritten u. s. w. Differentiale zu finden, man die Differentiale als neue veränderliche Größen ansehen muß, die selbst ihre, in der höhern Ordnung gesetzten Differentiale haben, und aus dem Resultate alle Glieder von einer höhern Ordnung, als dieses weglassen.

Aus diesen wenigen Regeln lassen sich alle verschiedene Verfahrungsarten der Differentiirung ableiten, und man sieht daß sie alle diejenigen enthält, welche wir bereits gegeben haben. Die Betrachtungen die uns so eben dazu hingeführt haben, verdienen bemerkt zu werden, weil sie in den Anwendungen sehr bequem seyn können; sie werden übrigens, nachdem in den Lauf dieses Capitels entwickelten Principien, keine Dunkelheit weiter haben.

Ich

Ich werde hier nicht von derjenigen Theorie reden, welche Newton von diesen Calculs gab, der mit Leibnitz den Ruhm, den Differential- und Integral-Calcul entdeckt zu haben, theilt, weil sie auf die Betrachtung der Bewegung beruhet, welche der Analysis und der Geometrie fremd ist.

Ich kann hier Herrn Lacroix nicht beypflichten, denn bloße Bewegung ohne daß man dabey an Kräfte denkt, gehört in die Geometrie, wie selbst das zeigt, was in derselben Anfangsgründen von Entstehung des Kreises, der Kugel und des Kegels gesagt wird.

Selbst nach dem Begriffe der Griechen gehörte die Bewegung zur Geometrie, denn in dem Buche von den Schneckenlinien, läßt Archimed eine gerade Linie sich im Kreise drehen, und auf ihr indessen einen Punct fortgehn. Zur Quadratrix, erfodert Dinostratus daß sich eines Kreises Halbmesser gleichförmig dreht, und eine gerade Linie immer einer Tangente des Kreises parallel gleichförmig fortrückt. Man s. Kästners geometrischen Abhandlungen II. Sammlung 23 Abth. 33 Paragraph.

G.

Zweytes Capitel.

Von den vornehmsten analytischen Gebrauch des Differentialcalculs.

98.

Von der Entwicklung der Functionen in Reihen.

Das Verfahren von welchen wir in der Einleitung (Num. 20) Gebrauch gemacht haben, um die nte Potenz eines Polynomiums zu entwickeln, läßt sich bequem durch die Regeln des Differentialcalculs ableiten; denn, wenn man dieses Polynomium durch

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots$$

vorstellt, und man

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots)^n = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

macht, und von beyden Seiten dieser Gleichung das logarithmische Differential nimmt, (Nr. 20) so findet man, nachdem durch dx dividirt ist,

n(β +

$$\frac{n(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3 + \ldots)}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots}$$
$$= \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots}{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots}.$$

Läßt man die Nenner verschwinden, und setzt diejenigen Glieder die einerley Potenz von x in jeder Seite multipliciren, zusammen einander gleich, so wird man dieselben Gleichungen wie Seite 50 erhalten, indem man jedesmal α in a, β in b, γ in c, δ in d, ε in e u. s. w. verändert. Der erste Coefficient bleibt in diesen Calculs unbestimmt; es ist aber leicht zu sehen, daß, wenn man $x = 0$ macht, man $\alpha^n = A$ haben wird.

Es sey die Function allgemeiner
$$\frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots)^m}{(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \varepsilon' x^4 + \ldots)^n}$$
$$= A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$
Nimmt man von jeder Seite dieser Gleichung die Logarithmen, so kommt
$$m\lg.(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots)$$
$$- n\lg.(\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \varepsilon' x^4 + \ldots)$$
$$= \lg(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots).$$
Nun findet man ferner durch die Differentiirung,
$$\frac{m(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3 + \ldots)}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots}$$
$$- \frac{n(\beta' + 2\gamma' x + 3\delta' x^2 + 4\varepsilon' x^3 + \ldots)}{\alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \delta' x^3 + \varepsilon' x^4 + \ldots}$$
$$= \frac{B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots}{A + Bx + Ck^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots}.$$
Bringt man die Brüche auf einerley Nenner, versetzt alle Glieder auf einer Seite, und setzt den Coefficient einer jeden Potenz von x, jeden besonders gleich Null, so

wird

wird man folgende Gleichungen erhalten, deren Gesetz leicht zu fassen ist.

$$\left.\begin{matrix}\alpha\alpha' B + n\alpha\beta' \\ - m\beta\alpha'\end{matrix}\right\} A = 0$$

$$\left.\begin{matrix}2\alpha\alpha' C + (n+1)\alpha\beta' \\ -(m-2)\beta\alpha'\end{matrix}\right\} B \begin{matrix} + \\ + \\ - \end{matrix} \left.\begin{matrix}2n\alpha\gamma' \\ (n-m)\beta\beta' \\ 2m\gamma\alpha'\end{matrix}\right\} A = 0$$

$$\left.\begin{matrix}3\alpha\alpha' + (n+2)\alpha\beta' \\ -(m-2)\beta\alpha'\end{matrix}\right\} C \begin{matrix} + \\ + \\ - \end{matrix} \left.\begin{matrix}(2n+1)\alpha\gamma' \\ (n-m+1)\beta\beta' \\ (2m-1)\gamma\alpha'\end{matrix}\right\} B \begin{matrix} + \\ + \\ + \\ - \end{matrix} \left.\begin{matrix}3n\alpha\delta' \\ (2n-m)\beta\gamma' \\ (n-2m)\gamma\beta' \\ 3m\delta\alpha'\end{matrix}\right\} A = 0$$

Diese Gleichungen bestimmen den ersten Coefficient A nicht, macht man aber $x = 0$, so hat man

$$\frac{\alpha^m}{\alpha'^n} = A.$$

99.

Die Methode, welche wir in den vorhergehenden Beyspielen angewendet haben, bestehet darin die angezeigten Potenzen verschwinden zu lassen, und zwar vermittelst der Logarithmen, denen man sich nachgehends durch die Differentiirung entlediget*); weil man aber auch die transcenden-

*) Ohne hier Logarithmen anzuwenden, kann man auch so verfahren, es seyen Y und Z zwey beliebige Functionen von x, und es sey

$$y^n = z$$

so ist

ny^{n-1}

cendenten Größen einer Gleichung verschwinden lassen kann, indem man sie mit ihren Differentialen combinirt (Num. 53), so hindert nichts, auch bey ihnen diese Methode anzuwenden.

Eine der einfachsten dieser Functionen ist

$$\lg.(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots);$$

wenn man ihre Entwicklung durch

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

vorstellt, und man das Differential der Gleichung

$$\lg.(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\ldots)=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

nimmt, so findet man

$\beta +$

$$ny^{n-1}dy = dz$$

oder

$$ny^n dy = ydz$$

folglich

$$nzdy = ydz.$$

Es sey ferner auch u eine Function von x und es sey

$$\frac{u^m}{y^n} = z$$

so ist

$$\frac{mu^{m-1}du}{y^n} - \frac{nu^m dy}{y^{n+1}} = dz$$

$$m \cdot \frac{u^m}{y^n} \cdot du - n \cdot \frac{u^m}{y^n} \cdot \frac{u}{y} du = udz$$

oder

$$m \cdot zdu - n \cdot z \cdot \frac{u}{y} du = udz$$

folglich

$$z(mydu - nudu) = yudz$$

Indessen würde ich hier die Logarithmen gebrauchen, weil sie die Rechnung verkürzen.

$$\frac{\beta + 2\gamma x + 3\gamma x^2 + \ldots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

und man wird die Coefficienten A, B, C, D, . . . wie gewöhnlich bestimmen.

Wir wollen noch als Beyspiel nehmen

$$\sin.(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

und wollen um abzukürzen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots = u \\ A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = y \end{array}\right\}$$

machen, daraus geht $y = \sin.u$ hervor; und wenn man differentiirt, so kommt

$$dy = du.\cos.u.$$

Man könnte $\cos.u$ vermittelst der Gleichung

$$\cos.u = \sqrt{1 - \sin.u^2}$$

eliminiren, welche

$$\cos.u = \sqrt{1 - y^2}$$

giebt; und man hätte alsdann

$$dy = du\sqrt{1 - y^2};$$

man müßte aber in dieser Gleichung noch das Wurzelzeichen herausschaffen. Um diese Unbequemlichkeiten zu vermeiden, so wird man diese Gleichung $dy = du\cos.u$ zum zweytenmale differentiiren, und es wird kommen

$$d^2y = d^2u.\cos u - du^2.\sin.u;$$

setzt man für $\sin.u$ und $\cos.u$ ihre Werthe y und $\frac{dy}{du}$, so wird man haben

$$d^2y = \frac{dy}{du} d^2u - ydu^2, \text{ oder}$$

$$dud^2y - dyd^2u + ydu^3 = 0.$$

Jetzt wird nur noch erfordert statt y, dy, du, d^2u, d^3u, ihre Werthe zu substituiren; aber

$y =$

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

giebt

$$dy = (B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots)dx$$

$$d^2y = (2C + 2 \cdot 3Dx + \ldots)dx^2$$

und um mich nicht in zu weitläuftige Calculs einzulassen, so werde ich die vorgegebene Function auf

$$\sin.(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$$

reduciren, indem ich $\delta, \varepsilon, \ldots = 0$ mache.

In diesem besondern Falle ist

$$du = (\beta + 2\gamma x)dx$$

$$d^2u = 2\gamma dx^2,$$

$$du^3 = (\beta^3 + 6\beta^2\gamma x + 12\beta\gamma^2x^2 + 8\gamma^3x^3)dx^3;$$

vermittelst dieser Werthe wird die Gleichung

$$du\,d^2y - dy\,d^2u + y\,du^3 = 0$$

durch dx theilbar, und man sie nach x ordnet, so nimmt sie folgende Form an

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta C + 6\beta Dx + 12\beta Ex^2 + \ldots \\ \quad + 4\gamma Cx + 12\gamma Dx^2 + \ldots \\ \beta^3A + 6\beta^2\gamma Ax + 12\beta\gamma^2Ax^2 + \ldots \\ \quad + \beta^3Bx + 6\beta^2\gamma Bx^2 + \ldots \\ \qquad + \beta^3Cx^2 + \ldots \\ -2\gamma B - 4\gamma Cx - 6\gamma Dx^2 - \ldots \end{array}\right\} = 0$$

Wenn man die Coefficienten einer jeden Potenz von x gleich Null setzt, so wird man Gleichungen erhalten die C, D, E, . . . bestimmen; was A und B anbetrift, so muß man zu den Gleichungen

$$y = \sin. u \text{ und } \frac{dy}{du} = \cos. u$$

Zuflucht nehmen. Wenn man $x = 0$ annimmt, so giebt die erste Gleichung $A = \sin. \alpha$, und die zweyte giebt $B = \cos. \alpha$, weil sich alsdann y auf A, u auf α, dy auf Bdx, und du auf βdx reducirt.

100.

100.

Das Taylorische Theorem bietet ein eben so einfaches als elegantes Mittel dar die Functionen in Reihen zu reduciren, und zwar wie folget:

Wenn man eine beliebige Function $f(x)$ durch y vorstellt, so hat man (Num. 12)

$$f(x+h) = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Macht man $x = 0$, so verändert sich $f(x+h)$ in $f(h)$, und, wenn man durch $Y, Y', Y'', Y''', \ldots$ dasjenige bezeichnet, was $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ wird, so hat man in dieser Hypothese,

$$f(h) = Y + Y' \cdot \frac{h}{1} + Y'' \cdot \frac{h^2}{1.2} + Y''' \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Da diese Gleichung statt hat, was auch immer der Werth von h seyn mag, so könnte man x statt h, schreiben, welches bey den Größen $Y, Y', \ldots$ die diesen Buchstaben nicht enthalten, ändert, und man würde alsdann haben

$$f(x) = Y + Y' \cdot \frac{x}{1} + Y'' \cdot \frac{x^2}{1.2} + Y''' \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

die Operationen welche wir über die Reihe

$$y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

gemacht haben, um zu der vorstehenden zu gelangen, reduciren sich darauf, in den Größen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots$, $x = 0$ anzunehmen, und nachgehends x statt h zu setzen; wir können also künftig schreiben

$f(x)$

$$f(x) = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

indem wir uns erinnern, daß man, in die Function y und in jeden ihrer Differential-Coefficienten, $x = 0$ machen muß. Einige Beyspiele werden dieses erläutern.

101.

Es sey, 1°, $y = a^x$ die zu entwickelnde Function; wenn man $x = 0$ macht, so hat man

$$a^x = a^0 = 1$$

daraus folgt

$$Y^0 = 1;$$

Ferner

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = a^x la \\ \frac{d^2y}{dx^2} = a^x(la)^2 \\ \frac{d^3y}{dx^3} = a^x(la)^3 \end{array}\right\} \text{geben} \left\{\begin{array}{l} Y' = la \\ Y'' = (la)^2 \\ Y''' = (la)^3 \end{array}\right.$$

u. s. w. u. s. w.

folglich

$$a^x = 1 + la \cdot \frac{x}{1} + (la)^2 \cdot \frac{x^2}{1.2} + (la)^3 \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

102.

Es ist leicht durch dieses Verfahren wahrzunehmen, daß man nicht im Stande ist, nach ganzen und positiven Potenzen von x eine Function zu entwickeln, die so beschaffen wäre, daß die Größen Y, Y', Y'', Y''', . . . unendlich würden. Wenn man z. B. $y = lx$ hätte, so ist in diesem Falle

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{d^3y}{d^3x}=\frac{2}{x^3},\ \ldots$$

und die Annahme von $x = 0$, macht diese Größen eben sowohl als y unendlich. Wir bemerken im Vorbeygehen, daß es nicht nothwendig ist, daß alle die Größen, Y, Y', Y'', ... auf einmal unendlich werden, damit die Reduction in einer Reihe in der angenommenen Form nicht statt fände; wir werden wieder auf diesen Gegenstand zurückkommen, und werden alsdann zeigen woran diese Schwierigkeit haftet.

Hätte man sich $y = l(a + x)$ vorgegeben, so hätte man

$$Y = la,\quad Y' = \frac{1}{a},\quad Y'' = -\frac{1}{a^2},\quad Y''' = \frac{2}{a^3}\ \text{u. s. w.}$$

und

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \ldots$$

gehabt.

103.

Man wird ohne diese Mühe, das so eben vorgetragene Verfahren auf die Functionen $\sin x$ und $\cos. x$ anwenden; man wird für die erste finden

$$Y = 0,\ Y' = 1,\ Y'' = 0,\ Y''' = -1,\ \ldots$$

woraus folgt

$$\sin. x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

und für die zweyte findet man

$$Y = 1,\ Y' = 0,\ Y'' = -1,\ Y''' = 0,\ \ldots$$

woraus folgt

$$\cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

Resultate, welche mit denen in der Einleitung Num. 25 stimmen.

Es sey auch zu entwickeln

$$\sin.(\alpha + \beta x + \gamma x^2);$$

so wird man haben

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin.(\alpha + \beta x + \gamma x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= (\beta + 2\gamma x)\cos.(\alpha + \beta x + \gamma x^2) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2\gamma\cos.(\alpha+\beta x+\gamma x^2)-(\beta+2\gamma x)^2\sin.(\alpha+\beta x+\gamma x^2) \end{aligned}\right\}$$

u. s. w.

und wenn man $x = 0$ macht, so ist

$$Y = \sin.\alpha$$
$$Y' = \cos.\alpha$$
$$Y'' = 2\gamma\cos.\alpha - \beta^2\sin.\alpha$$

u. s. w.

104.

Wenn man durch y den Bogen eines Kreises vorstellt dessen sinus x sey, so wird man die Differentialgleichung

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

haben, die uns zu der Entwickelung des Bogens nach den Potenzen des sinus führen wird. Wirklich, zieht man daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3.5x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{3.3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2.5.9\,x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3.5.7\,x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}},$$

u. s. w.

Macht man $x = 0$, so findet man

$Y=0,\ Y'=1,\ Y''=0,\ Y'''=1,\ Y^{IV}=0,\ Y^{V}=3.3,\ldots$

und folglich

$$y = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3.3x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Wir können aber das allgemeine Glied dieser Reihe unmittelbar erhalten, wenn wir bemerken, daß

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1}{dx^n}\, d^n . \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

den der allgemeine Ausdruck von

$$d^n . \frac{1}{\sqrt{1 - 1^2}},$$

welcher Seite 218 gegeben ist, vernichtet sich, wenn man $x = 0$ annimmt allemal, wenn die Zahl n ungerade ist, und wenn sie gerade ist, so reducirt sie sich auf ihr letztes Glied, welches, wenn man die gemeinschaftlichen Factoren im Zähler und Nenner ausstreicht

$$\frac{1.3.5.7\ldots(n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots n} . n(n-1)\ldots 1$$

wird. Das allgemeine Glied

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

der gesuchten Reihe, wird also, indem man für

$$\frac{d^{n+1}y}{d^{n+1}x}$$

den Werth von

$$\frac{1}{dx^n} d^n . \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

setzt, welchen man so eben

$$\frac{1.3.5.7.\ldots(n-1)x^{n+1}}{2.4.6.8\ldots n(n+1)}$$

gefunden hat, man sieht übrigens daß $n+1$ nothwendig eine ungerade Zahl ist.

Schreibt man sin. y statt x, und giebt n die successiven Werthe 0, 2, 4, 6, ... so wird man folgende Reihe bilden:

$$y = \sin. y + \frac{\sin. y^3}{2.3} + \frac{3 \sin. y^5}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin. y^7}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7 \sin. y^9}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

Die Art auf welcher wir dazu gelangt sind, hat den Vorzug das Gesetz, welches diese Glieder folgen, kennen zu lehren und welches man nach dem Verfahren von Nr. 45. in der Einleitung, nicht sogleich wahrnimmt.

Durch diese Reihe berechnete Newton die Länge des Umfangs eines Kreises. Wenn man sin. y = 1 macht, so giebt sie den Bogen von

$$90^\circ = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{2}{2.4.5} + \frac{3.5}{2.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} + \ldots$$

Nähme man sin. y = $\frac{1}{2}$ an, so hätte man alsdann den Bogen von 30° durch eine noch convergirende Reihe als die vorhergehende, denn man fände den Bogen von

30°

$$30^{\circ} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2^4.3} + \frac{3}{2^6.4.5} + \frac{3.5}{2^8.4.6.7} + \frac{3.5.7}{2^{10}.4.6.8.9} + \ldots$$

man erhält die ganze Länge des Umfangs, wenn man das Resultat der ersten Reihe mit 4, oder das der zweyten Reihe mit 12 multiplicirt.

105.

Wir wollen zur Untersuchung des Bogens durch seine Tangente übergehen; wenn man den Bogen y und seine Tangente x nennt, so hat man

$$dy = \frac{dx}{1 + x^2},$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3};$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{24x}{(1+x^2)^3} - \frac{48x^3}{(1+x^2)^4},$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{24}{(1+x^2)^3} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} \text{ u. s. w.,}$$

und wenn man $x = 0$ macht, so findet man

$$Y=0,\ Y'=1,\ Y''=0,\ Y'''=-2,\ Y^{IV}=0,\ Y^{V}=2.3.4, \text{ u. s. w.:}$$

man hat also

$$y = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Das Gesetz springt gleich bey den ersten Gliedern in die Augen; um sich aber zu überzeugen daß das Gesetz ebenfalls bey den folgenden Gliedern beobachtet wird, so muß man, wenn man will, seine Zuflucht zur Formel von Num. 35 nehmen, welche das nte Differential der Function $(a + bx + cx^2)^r$ ausdrückt. Nimmt man darin $r = 1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ an, so giebt sie den Werth von $d^n . \frac{1}{1 + x^2}$ *).

*) Ich glaube verpflichtet zu seyn, bemerken zu lassen, daß, wenn man in der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

in einer Reihe reducirte, so hätte man

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}.x^2}{1} + \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.x^4}{1.2} + \frac{\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}.x^6}{1.2.3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}\ldots\frac{(n-1)}{2}.x^n}{1.2\ldots\frac{n}{2}} + \ldots$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.2}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

$$\ldots \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\ldots n}x^n + \ldots$$

Wenn man durch A, B, C, . . . N, O die Coefficienten dieser Reihe vorstellt, so wird man haben

$$\frac{dy}{dx} = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \ldots + Nx^n + \ldots,$$

und wenn man differentiirt, so kömmt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2Ax + 4Bx^3 + 6Cx^5 + \ldots + Nx^{n-1} + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2A + 3.4Bx^2 + 5.6Cx^4 + \ldots$$

$$+ (n-1)nNx^{n-1} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \ldots 1.2 \ldots nN + 2.3\ldots(n+1)Ox + \ldots$$

Wenn

105.

Es ist nicht eben so leicht das allgemeine Glied derjenigen Reihe zu finden, die die Entwickelung des Bogens nach den Potenzen seiner Tangente, vorstellt; denn, wenn man die Benennungen umkehrt, d. h. indem man den Bogen x und seine Tangente y nennt, so hat man

$$dx = \frac{dy}{1+y^2}$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2:$$

Der Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ hängt also alsdann von der Function y selbst ab.

Wenn

Wenn $x = 0$, so verschwinden alle Coefficienten von einer ungeraden Ordnung, und $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ reducirt sich auf $1.2\ldots n.N$: also

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

wird $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$, oder $\frac{1.3.5\ldots(n-1)x^{n+1}}{2.4.6\ldots\ldots n(n+1)}$, wenn man für N sein Werth setzt.

Reducirt man in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ das Binomium $(1+x^2)^{-1}$ in einer Reihe, so hat man $N = \pm 1$, je nachdem daß $\frac{n}{2}$ eine gerade oder ungerade Zahl seyn wird, und das allgemeine Glied $\frac{Nx^{n+1}}{n+1}$ wird $\pm\frac{x^{n-1}}{n+1}$.

Wenn man $x + o$ macht, so hat man $y = o$ und

$$\frac{dy}{dx} = 1:$$

mit Hülfe dieser Werthe, und indem man mehreremale hintereinander die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2,$$

differentiirt, so wird man finden

$$\frac{d^2y}{dx} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 2, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

$$\frac{d^5y}{dx} = 16, \quad \frac{d^6y}{dx^6} = 0, \quad \frac{dy^7}{dx^7} = 272, \text{ u. s. w.}$$

daher

$$Y = \frac{x}{1} + \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{16x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{272 . x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

Um das allgemeine Glied dieser Reihe zu finden, müßte man den Ausdruck von $d^n.(1 + y^2)$ kennen, wenigstens in dem Fall von $x = 0$; man sieht aber, daß da kein Differential von y als beständig genommen werden kann, so muß der gesuchte Ausdruck sie alle bis mit zu der von der Ordnung n; man kann also auf diese Art den Coefficient $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ nicht anders als vermittelst alle die ihm vorhergehenden, ausdrücken.

Ich werde mich nur deswegen einen Augenblick bey dieser Untersuchung aufhalten, weil sie mich Gelegenheit giebt, zwey durch ihre Form Bemerkungswerthe Differential-Resultate kennen zu lehren.

107.

Ich bemerke zuerst daß man

$$d^n(1 + y^2) = d^n . y^2 = d^n(y . y)$$

hat, und daß die Reduction der ähnlichen Glieder verhindert, das Gesetz der Bildung der successiven Differentiation von y^2, wieder zu erkennen. Um diese Reduction zu vermeiden, so nehme ich an man hätte yz anstatt y^2; alsdann, indem man mehreremal hintereinander differentiirt, fände ich

$$d\,.yz = ydz + zdy$$

$$d^2.yz = yd^2z + 2dydz + zd^2y$$

$$d^3.yz = yd^3z + 3dyd^2z + 3dzd^2y + zd^3y$$

$$d^4.yz = yd^4z + 4dxd^2z + 6d^2yd^2z + 4dzd^3y + zd^4y$$

u. s. w.

Die Analogie dieser Formeln mit denen Potenzen des Binomiums ist in die Augen fallend, und sie wird vollkommend evident durch ein dem in Num. 31 ähnlichen Verfahren.

In der That, es sey

$$d^n.yz = yd^nz + Adyd^{n-1}z + Bd^2yd^{n-2}z + Cd^3yd^{n-3}z + \ldots,$$

wo A, B, C, . . . beständige Coefficienten sind; wenn man diese Gleichung differentiirt, so kömmt

$$d^{n+1}.yz = yd^{n+1}z + \left.\begin{matrix}A\\+1\end{matrix}\right\} dyd^nz + \left.\begin{matrix}B\\+A\end{matrix}\right\} d^2yd^{n-1}z + \left.\begin{matrix}C\\+B\end{matrix}\right\} d^3yd^{n-2}z + \ldots$$

und man sieht hierdurch, wie in der angeführten Num., daß die Coefficienten A, B, C, . . . sich eben so wie die der correspondirenden Gliedern der Potenzen das Binomium bilden; man wird also haben

$$d^n.yz = yd^{n-1}z + \frac{n}{1}dyd^{n-2}z + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}d^2yd^{n-2}z + \ldots$$

Die Entwickelung von $(dz+dy)^n$, wird also die Entwickelung von $d^n.yz$ geben, wenn man an die Caracteristik d die Exponenten anbringt, welche die dz und dy haben, und indem man beobachtet, daß $d^0y = y$ und $d^0z = z$.

Den

Den Ausdruck von $d^n.ytu$ zieht man aus den von $d^n.yz$, wenn man tu an die Stelle von z, und $d^2.tu$, $d^3.tu$ . . . an die Stelle von dz, d^2z, d^3z . . . substituirt; man wird also ein vollkommen analoges Resultat für die Entwicklung des Trinomiums $(y + t + u)^n$ finden.

Dieses vorausgesetzt, wenn man in $d^n.yz$, $z = y$ machte, so hätte man den Ausdruck von $d^n.y^3$; und es ist leicht zu sehen, daß alle in der Formel von den äussern gleich weit abstehende Glieder, einander gleich sind: da nun die ganze Zahl dieser Glieder $n + 1$ ist, so ist es evident, daß es Gnügte, zweymal die Summe der ersten $\frac{n+1}{2}$ Glieder zu nehmen, um den Werth der ganzen Formel zu haben, wenn n ungerade ist. Wenn aber n gerade ist, so enthält die Formel ein mittleres Glied, welches die durch $\frac{n}{2} + 1$ angezeigte Stelle hat, und welches nicht wiederholt ist, man muß alsdann das doppelte der $\frac{n}{2}$ ersten Glieder nehmen und dazu dieses mittlere Glied addiren.

108.

Mit Hülfe dieser Betrachtungen, und der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ zufolge, die

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d^n(1+y^2)}{dx^n} = \frac{d^n.y^2}{dx^n}$$

giebt, wird man successive

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \ldots$$

machen.

machen. Setzt man aber $x = 0$, so vernichten sich alle Differential-Coefficienten von einer geraden Ordnung; und es bleiben nur die von einer ungeraden Ordnung; wenn man also die Buchstaben Y', Y'', Y''' an die Stelle von jeder der letztern substituirt, so findet man:

$$Y' =$$

$$Y''' = 2Y'.Y'$$

$$Y^{v} = 2.4Y'.Y'''$$

$$Y^{vii} = 2.6Y'.Y^{v} + \frac{6.5.4}{1.2.3}\,Y'''.Y'''$$

$$Y^{ix} = 2.8Y'.Y^{vii} + 2.\frac{8.7.6}{1.2.3}\,Y'''.Y^{v}$$

$$Y^{xi} = 2.10Y'.Y^{ix} + 2.\frac{10.9.8}{1.2.3}\,Y'''.Y^{vii} + \frac{10.0.8.7.6}{1.2.3.4.5}.Y^{v}.T^{v}$$

Man wird allgemein haben

$$Y^{(n+1)} = 2\left\{ nY'Y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.Y'''.Y^{(n-3)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}.Y^{v}.Y^{(n-5)} + \ldots \right\}$$

Man muß die Aufmerksamkeit haben diese Reihe nicht weiter als bis zu dem Gliede zu treiben, dessen Anzeiger $\frac{n}{2} - 1$ ist, wenn $\frac{n}{2}$ eine gerade Zahl ist; und in dem Falle, wo $\frac{n}{2}$ eine ungerade Zahl wäre, müßte man nur, da man auf das mittlere Glied kömmt wovon wir oben gesprochen haben, nur die Hälfte seines Coefficienten nehmen. Alles dieses ist analog dem was in Beziehung auf die Reihen der Sinus der vielfachen Bogen in Num. 42 der Einleitung gesagt ist, und wird leicht von denjenigen verstanden werden, die sich die Mühe nehmen

die

die Formeln zu entwickeln, welche man wegen ihre Länge weggelassen hat.

109.

Man hat in Num. 92 gesehen, daß die Betrachtung der Grenzen zu der Theorie des Differentialcalculs führt. Ist diese Theorie einmal festgestellt, so leitet man davon leicht die Verfahrungsarten ab. die dazu dienen die Functionen in Reihen und das Taylorische Theorem zu entwickeln.

Es sey

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

wenn man diesen Ausdruck differentiirt, so findet man

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3D^2 + 4Ex^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2 \cdot 3Dx + 3.4Ex^2 + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 1 \cdot 2 \cdot 3D + 2 \cdot 3 \cdot 4Ex + \ldots$$

u. s. w.

Wenn übrigens die Form der Function y bekannt ist, so wird man in x den Ausdruck der Größen

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy^3}{dx^3}, \ldots$$

haben; bezeichnet man durch $Y, Y', Y'', Y''', \ldots$ was diese Größen werden, wenn man $x = 0$ macht, so wird man aus den obigen Gleichungen, wenn man darin $x = 0$ annimmt.

$$A = Y$$

$$B = \frac{1}{1} \cdot Y'$$

C =

$$C = \frac{1}{1.2} . Y''$$

$$D = \frac{1}{1.2.3} . Y'''$$

u. s. w.

ziehen, woraus

$$y = Y + Y' . \frac{x}{1} + Y'' . \frac{x^2}{1.2} + Y''' . \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

wie in Num. 100 folgt.

Wenn man die beliebige Function $f(x + h)$ nach Potenzen von h entwickeln wollte, so machte man

$$f(x + h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \ldots$$

und wenn man in Beziehung auf h differentiirte, so würde man finden

$$\frac{d.f(x+h)}{dx} = B + 2Ch + 3Dh^2 + 4Eh^3 + \ldots$$

$$\frac{d^2.f(x+h)}{dh^2} = 2C + 2.3Dh + 3.4Eh^2 + \ldots$$

$$\frac{d^3 f(x+h)}{dh^3} = 1.2.3D + 2.3.4Eh + \ldots$$

Macht man aber

$$x + h = x',$$

so entstehet daraus

$$f(x + h) = f(x'),$$

und man hätte

$$d.f(x') = f'(x)dx',$$

auf welche Art auch x′ variirte; woraus folgt, daß wenn man auf einmal x und h variiren läßt, $dx' = dx + dh$ entstehet, und daß folglich das vollständige Differential von

$f(x + h)$ seyn wird $f(x')(dx + dh)$

oder

f′(x

$$f'(x+h)dx + f'(x+h)dh,$$

ein Ausdruck in welchem der Differential-Coefficient in Beziehung auf x derselbe als der in Beziehung auf h ist. Man wird also haben

$$\frac{d.f(x+h)}{dh} = \frac{d.f(x+h)}{dx} = f'(x+h);$$

eben so findet man

$$\frac{d^2f(x+h)}{dh^2} = \frac{df'(x+h)}{dh} = \frac{df'(x+h)}{dx} = \frac{d^2f(x+h)}{dx^2}$$

und allgemein

$$\frac{d^nf(x+h)}{dh^n} = \frac{d^nf(x+h)}{dx^n}.$$

Man könnte also

$$\frac{df(x+h)}{dx}, \quad \frac{d^2f(x+h)}{dx^2}, \ldots$$

an die Stelle von

$$\frac{df(x+h)}{dh}, \quad \frac{d^2f(x+h)}{dh^2}, \ldots$$

substituiren: macht man nachgehends $h = 0$ so wird man finden

$$A = fx$$

$$B = \frac{1}{1} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

$$C = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

$$D = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3f(x)}{dx^3}$$

u. s. w.

und wenn man $f(x)$ durch y vorstellt, so wird die Entwicklung, welche der Werth von y annimmt, wenn x sich in $x + h$ verändert, seyn

y +

$$y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

wie solches aus dem Taylorischen Theorem hervorgeht.

110.

Jetzt wollen wir uns folgendes allgemeine Problem vorlegen: Eine Gleichung von zwey veränderlichen Größen, $f(x, y) = 0$ ist gegeben, man soll eine beliebige Function $F(x, y)$ nach den Potenzen von x in einer Reihe entwickeln.

Es sey $F(x, y) = u$; so wird u augenscheinlich eine implicite Function von x seyn; denn, wenn man aus der Gleichung $f(x, y) = 0$, den Werth von y zöge um solchen in $F(x, y)$ zu substituiren, so würde das Resultat nur noch die einzige veränderliche Größe x enthalten. Man würde also haben (Num. 100)

$$u = U + U' \cdot \frac{x}{1} + U'' \cdot \frac{x^2}{1.2} + U''' \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

wo man durch $U, U', U'', U''', \ldots$ das bezeichnet was die Größen

$$u, \frac{d(u)}{dx}, \frac{d^2(u)}{dx^2}, \frac{d^3(u)}{dx^3}, \ldots$$

werden, wenn man $x = 0$ setzt.

Um U zu finden, bemerke ich, daß wenn man $x=0$ macht, die Function $F(x, y)$ oder u, nur noch die einzige veränderliche Größe y enthält, und daß folglich ihr Werth bestimmt seyn wird, wenn man diese unbekannte Größe wegschaft, welches man vermittelst der Gleichung $f(x, y) = 0$ verrichten könnte, die in derselben Hypothese, nur eine Gleichung zwischen y und beständigen Größen wird.

Man

Man hat

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

man entlediget sich des Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, wenn man die Gleichung $f(x, y) = 0$ differentiirt, welche nothwendig ein Resultat von der Form

$$Mdx + Ndy = 0$$

geben wird, woraus man zieht

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N};$$

Es kömmt folglich

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{du}{dy} \cdot \frac{M}{N}.$$

Wenn man jetzt in dieser Gleichung $x = 0$ macht, und man dann den Werth von y in Beziehung dieser Hypothese substituirt, so wird man haben U'.

Um U'' zu erhalten, so sucht man erstlich $\frac{d^2(u)}{dx^2}$. Wenn man die Gleichung

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

differentiirt, und nachdem man um abzukürzen $\frac{dy}{dx} = y'$ gemacht hat, so wird man finden

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{d^2} + 2\frac{d^2u}{dx \cdot dy} \cdot y' + \frac{d^2u}{dy^2} \cdot y'^2 + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy'}{dx};$$

differentiirt man auch die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

so kömmt man zu einem Resultate von der Form

$$Pdx^2 + 2Qdxdy + Rdy^2 + Nd^2y = 0,$$

oder, welches auf eins hinausläuft,

$$P + 2Qy' + Ry'^2 + \frac{Ndy'}{dx} = 0,$$

und aus welchen man den Werth von $\frac{dy'}{dx}$ ziehen wird, um ihm sowohl als den von y' in den Ausdruck von $\frac{d^2(u)}{dx^2}$ zu substituiren: man muß nicht vergessen nach den Differentiirungen $x = 0$ zu machen, und den correspondirenden Werth von y zu substituiren. Fährt man eben so für die dritte Ordnung und folgende fort, so fände man U''' und die fernern Coefficienten.

Wenn statt einer ursprünglichen Gleichung zwischen x und y, man nur eine Differential-Gleichung von der ersten Ordnung hätte, so könnte man doch immer die Ausdrücke von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... in x und y finden; da aber nichts den Werth von y kennen lehrt, wenn $x = 0$ ist, so müßte man diesen Werth als eine unbestimmte beständige Größe ansehen, von der nachgehends der Werth der Größen U, U', U'', ... abhangen wird.

Wenn man von einer Differential-Gleichung der zweyten Ordnung ausgeht, so wird man weder y, noch $\frac{dy}{dx}$ kennen, und man könnte nur den Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$ und der fernern Differential-Coefficienten in x und y finden; die Werthe von U, U', U'', ... werden alsdann von den beyden unbestimmten beständigen Größen abhangen.

Man sieht leicht ein, was für die Gleichungen von höherer Ordnung geschehen muß. Wenn man nur die Entwicklung von y forderte, so gnügte es die Werthe von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... zu finden, in dem Fall von $x = 0$, oder, welches auf eins hinauskömmt, die Größen Y, Y′, Y″, . . . zu bilden (Num. 100).

Ich werde hier nicht den Fall untersuchen in welchen die Function, welche man zu entwickeln sich vorgenommen hat, selbst nur durch eine Differential-Gleichung gegeben wäre; er kann wie der vorhergehende behandelt, und sie haben beyde, eine unmittelbarere Beziehung mit dem Integralcalcul, als mit dem Differentialcalcul: ich werde mich begnügen bemerken zu lassen, daß die unbestimmten Größen, welche in den Coefficienten der Entwickelung einschleichen, die Stelle der beständigen Größen vertreten, welche die ursprüngliche Gleichung die man nicht kennt enthalten könnte, und die durch die Differentiirung verschwunden wären (Num. 15, 50 u. s. f.)

111.

Unter den verschiedenen Formen welche man für die Gleichung $f(x, y) = 0$ annehmen könnte, wählen wir die folgende;

$$a - y + x\varphi(y) = 0,$$

wo $\varphi(y)$ eine Function von y und von beständigen Größen bezeichnet; weil, wenn man $x = 0$ macht, sie den Werth von y giebt, ohne daß es nöthig sey die Auflösung der Gleichungen von höhern Graden anzuwenden, und daß ferner, die daraus gezogene Reihe durch ihre Form und durch die Anwendungen deren sie fähig ist bemerkenswerth ist.

Wir wollen auch annehmen, daß die Function u, welche man entwickeln will; nur die einzige veränderliche Größe y enthielte; so könnte man sie durch $\psi(y)$ vorstellen, und da im Fall von $x = 0$, die vorgegebene Gleichung $y = a$ giebt, so verändert sich alsdann $\psi(y)$ in $\psi(a)$: Man hätte also dann $U = \psi(a)$.

Weil u oder $\psi(y)$ nicht x enthält, so wird man bloß haben

$$\frac{d(u)}{dx} = \psi'(y)\frac{dy}{dx};$$

indem man aber die Gleichung

$$a - y + x\phi(y) = 0$$

differentiirt, so kommt

$$-dy + x\phi'(y)dy + \phi(y)dx = 0 \;.\;.\;.\; (1),$$

woraus man zieht

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\phi(y)}{1 - x\phi'(y)};$$

macht man $x = 0$, und verändert y in a, so reducirt sich dieser Wert auf $\phi(a)$ in derselben Zeit als $\psi'(y)$ zu $\psi'(a)$ wird, mithin $U' = \psi'(a)\,\phi(a)$.

Wenn man $\frac{d(u)}{dx}$ differentiirt, so findet man

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = \psi''(y)\frac{dy^2}{dx^2} + \psi'(y)\,\frac{d^2y}{dx^2};$$

differentiirt man auch die Gleichung (1), so geht daraus hervor

$$-d^2y + x\phi'(y)d^2y + x\phi''(y)dy^2$$
$$+ 2\phi'(y)dxdy = 0 \;.\;.\;.\; (2),$$

macht man $x = 0$, und verändert y in a, so wird der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in dieser Hypothese seyn

$$2\phi'(a)\,\frac{dy}{dx}.$$

oder

$$2\phi'(a)\,\phi(a);$$

aber

aber

$$2\varphi'(a)\,\varphi(a) = \frac{d\,.\,\varphi(a)^2}{da} \text{(*)};$$

folglich

$$U'' = \psi''(a)\,\varphi(a)^2 + \psi'(a)\,\frac{d\,.\,\varphi(a)^2}{da}$$

$$= \frac{d\,.\,\psi'(a)\,\varphi(a)^2}{da}.$$

Man wird endlich haben

$$\frac{d^3(u)}{dx^3} = \psi'''(y)\,\frac{dy^3}{dx^3} + 3\psi''(y)\,\frac{dy}{dx}\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} + \psi'(y)\,\frac{d^3y}{dx^3};$$

den Werth von $\frac{d^3y}{dx}$ wird man erhalten, wenn man die Gleichung (2) differentiirt, und nachdem man $x = o$ gemacht und y in a verändert hat, wird das Resultat geben,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3\varphi'(a)\,\frac{d^2y}{dx^2} + 3\varphi''(a)\,\frac{dy^2}{dx^2} = 6\varphi(a)\,\varphi'(a)^2$$

$$+ 3\varphi''(a)\,\varphi(a)^2 = \frac{d^2\,.\,\varphi(a)^3}{da^2};$$

substituirt man diesen Werth, so wie auch jene von $\frac{dy}{dx}$ und von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in den Ausdruck von $\frac{d^3y}{dx^3}$, so wird man finden

$$U''' = \psi'''(a)\varphi(a)^3 + 3\psi''(a)\,\varphi(a)\frac{d\,.\,\varphi(a)^2}{da} + \psi'(a)\,\frac{d^2.\varphi(a)^3}{da^2}$$

$$= \frac{d^2\psi'(a)\,\varphi(a)^3}{da^2}.$$

Eben

*) Durch $\varphi(a)^2$ verstehe ich das Quadrat von $\varphi(a)$, und allgemein $\varphi(a)^n = (\varphi(a))^n$.

Eben so wird man zu den folgenden Coefficienten gelangen, und das Endresultat wird seyn

$$\psi(y)=\psi(a)+\psi'(a)\varphi(a).\frac{x}{1}+\frac{d.\psi'(a)\varphi(a)^2}{da}.\frac{x^2}{1.2}$$
$$+\frac{d^2.\psi'(a)\varphi(a)^3}{da^2}.\frac{x^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{d^3.\psi'(a)\varphi(a)^4}{da^3}.\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots$$

112.

Man könnte befürchten, daß das in den ersten Gliedern der oben gefundene Reihe, sich offenbarende Gesetz, sich nicht auf alle die ihnen folgen erstreckte. Hier ist ein sehr einfaches Mittel sich von der Wahrheit der Induction zu versichern und welches zu gleicher Zeit zeigt, welchen Nutzen man von den Gleichungen zwischen den Differential-Coefficienten einer Function ziehen kann, um diese Function in einer Reihe zu redüciren.

Man muß bemerkt haben, daß die angezeigten Differentiirungen in der uns beschäftigen Reihe in Beziehung auf a sind; aber der Gleichung

$$a-y+x\varphi(y)=0$$

zufolge, kann darin die Größe y als eine Function von x und von a angesehen werden, woraus folgt (Num. 83) daß zwischen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy}{da}$ eine von der Natur dieser Function abhangenden Relation existirt, und welche man durch Differentiirung der Gleichung

$$a-y+x\varphi(y)=0$$

findet, oder welches auf eins hinauskömmt,

$$y=a+x\varphi(y),$$

in Beziehung auf x und in Beziehung auf a.

Statt

Statt uns bey dieser aufzuhalten, so nehmen wir diese andere allgemeinere

$$y = F(a + x\varphi'y)),$$

wo F eine beliebige gegebene Function bezeichnet, und wenn man sie in Beziehung auf x und in Beziehung auf a differentiirt, so kömmt.

$$\frac{dy}{dx} = F'(a + x\varphi(y)) \cdot \left\{ \varphi(y) + x\varphi'(y) \frac{dy}{dx} \right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = F'(a + x\varphi(y)) \cdot \left\{ 1 + x\varphi'(y) \frac{dy}{da} \right\}$$

eliminirt man nachgehends

$$F'(a + x\varphi(y)),$$

so findet man nach den Reductionen

$$\frac{dy}{dx} - \varphi(y) \frac{dy}{da} = 0.$$

Weil aber u, oder $\psi(y)$, nur von y abhängt, so hat man nur

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = \psi'(y) \dfrac{dy}{dx} \\[2ex] \dfrac{du}{da} = \psi'(y) \dfrac{dy}{da} \end{array} \right\}$$

woraus man zieht

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{da} - \frac{du}{da} \cdot \frac{dy}{dx} = 0;$$

setzt man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Werth $\varphi(y)\frac{dy}{da}$ und macht man, um abzukürzen $\varphi(y) = z$, so kömmt

$$\frac{du}{dx} - z\frac{du}{da} = 0, \text{ oder } \frac{du}{dx} = z\frac{du}{da}:$$

Man könnte also statt $\frac{du}{dx}$ die Größe $z\frac{du}{da}$ substituiren.

Wenn man die vorstehende Gleichung in Beziehung auf x differentiirt, so kömmt

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d\,.\,z\frac{du}{da}}{dx}.$$

Aber da die Größe $z\frac{du}{da}$ nichts anders ist als

$$\varphi(y)\psi'(y)\frac{dy}{da},$$

d. h., eine Function von y in $\frac{dy}{da}$ multiplicirt, so könnte man sie als den Differential-Coefficienten einer neuen Function von y ansehen, welche wir durch u' vorstellen wollen, und wir haben alsdann

$$\frac{du'}{da} = z\frac{du}{da} \text{ und } \frac{d\,.z\frac{du}{da}}{dx} = \frac{d^2u'}{dx\,da}.$$

Kehrt man die Ordnung der Differentiirung um, so entstehet

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u'}{dadx} = \frac{d\frac{du'}{dx}}{da};$$

Man muß aber beobachten daß, die Beziehung die zwischen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{da}$ existirt, gleichfalls zwischen $\frac{du'}{dx}$ und $\frac{du'}{da}$ statt hat, und daß folglich

$$\frac{du'}{dx} = z\frac{du'}{da}:$$

Dieses ist leicht zu beweisen, weil u' eine Function von y vorstellt, und aus dieser Ursache muß man wie oben, haben,

du'

$$\frac{du'}{dx} \cdot \frac{dy}{da} - \frac{du'}{da} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Setzt man also in den Ausdruck von $\frac{d^2u}{dx^2}$ für $\frac{du'}{dx}$ sein Werth $z\frac{du'}{da}$ und nachher für $\frac{du'}{da}$ die Größe $z\frac{du}{da}$ welche er vorstellt, so findet man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d.z\frac{du'}{da}}{da} = \frac{d.z^2\frac{du}{da}}{da}.$$

Differentiirt man diese letztere Gleichung in Beziehung auf x, so wird man erhalten

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2.z^2\frac{du}{da}}{dx\,da};$$

macht man

$$z^2\frac{du}{da} = \frac{du''}{da}$$

und kehrt man die Ordnung der Differentiirungen um, so hat man

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^3u''}{da^2\,dx} = \frac{d^2.\frac{du''}{dx}}{da^2}.$$

Man hat aber auch

$$\frac{du''}{dx} = z\frac{du''}{da}$$

und folglich

$$\frac{du''}{dx} = z^3\frac{du}{da};$$

daher

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^2.z^3\frac{du}{da}}{da^2}.$$

Allgemein, wenn

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-2}\,.\,z^{n-1}\,.\,\frac{du}{da}}{da^{n-2}},$$

und man

$$z^{n-1}\,.\,\frac{du}{da} = \frac{du'''\ldots{}^{n-1}}{da}$$

macht, so findet man

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^n u'''\ldots{}^{n-1}}{dx\,da^{n-1}} = \frac{d^n u'''\ldots{}^{n-1}}{da^{n-1}\,dx},$$

und wegen

$$\frac{du'''\ldots{}^{n-1}}{dx} = z\,.\,\frac{du'''\ldots{}^{n-1}}{da} = z^n\,.\,\frac{du}{da},$$

kommt

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\,.\,z^n\,.\,\frac{du}{da}}{da^{n-1}}.$$

Aber die Werthe der Differential-Coefficienten

$$\frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2}\ldots\frac{d^n u}{dx^n}$$

in der Hypothese $x = 0$ genommen, sind auch die der Coefficienten U', U'', $U'''\ldots U^n$ der Entwickelung der Function u (Num. 110); man wird also haben

$$\left.\begin{array}{l} u = U + z\,.\,\frac{du}{da}\,.\,\frac{x}{1} + \frac{d\,.\,z^2\frac{du}{da}}{da}\,.\,\frac{x^2}{1\,.\,2}\ldots \\ \qquad\ldots + \frac{d^{n-1}\,.\,z^n\frac{du}{da}}{da}\,.\,\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots \end{array}\right\}$$

wobey man jederzeit beobachtet in z oder $\phi(y)$ und in $\frac{du}{da}$, die

die Werthe von y und von $\frac{dy}{da}$ in Beziehung auf die Annahme von $x = 0$, zu substituiren, und welche der Gleichung

$y = F(a + \varphi(y))$ zufolge, $F(a)$ und $F'(a)$ sind.

In den durch die Gleichung

$$y = a + x\varphi(y)$$

vorgestellten besondern Fall, wird man bloß $y = a$ und $\frac{dy}{da} = 1$ haben; U, z und $\frac{du}{da}$ werden respective $\psi(a)$, $\varphi(a)$ und $\psi'(a)$, und folglich wird die Entwickelung von u nach den Potenzen von x geordnet, seyn

$$u = \psi(a) + \psi'(a)\,\varphi(a)\frac{x}{1} + \frac{d.\psi'(a)\,\varphi(a)^2}{da}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{d^2.\psi'(a)\,\varphi(a)^3}{da^2}\,\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \ldots + \frac{d^{n-1}.\psi'(a)\,\varphi(a)^n}{da^{n-1}}\,\frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

wie man solches aus der Ansicht der in der vorhergehenden Nummer gefundenen ersten Gliedern, geschlossen haben würde.

81.

Diese Reihe, zu welche Lagrange durch Induction gekommen ist, indem er die Wurzeln der algebraischen Buchstaben-Gleichungen entwickelte, ist nachher durch Laplace auf eine Art demonstrirt worden, von welcher die vorhergehende nur in einigen leichten Veränderungen, welche die Ordnung dieses Werks nöthig machten, abweicht. Das Detail der Anwendungen deren sie fähig ist, würde uns zu weit führen; wir beschränken uns auf eine kleine Anzahl von Beyspielen, und als erstes nehmen

men wir die Gleichung

$$\alpha - \beta y + \gamma y^n = 0.$$

Setzt man sie unter die Form

$$y = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} y^n,$$

so könnte man sie mit $y = a + x\varphi(y)$ vergleichen, und man würde sehen, daß

$$a = \frac{\alpha}{\beta}, \quad x = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \varphi(y) = y^n.$$

Wenn man die Entwicklung von y^m verlangt, so hat man $\psi(y) = y^m$, und läßt man um abzukürzen a an die Stelle von $\frac{\alpha}{\beta}$, so wird man finden

$$\psi(a) = a^m \qquad \psi'(a)\varphi(a) = ma^{m+n-1}$$
$$\psi'(a)\varphi(a)^2 = ma^{m+2n-1}, \quad \psi'(a)\varphi(a)^3 = ma^{m+3n-1},$$
u. s. w.

und folglich

$$y^m = \left\{ \begin{array}{l} a^m + \frac{m}{1} a^{m+n-1} \frac{\gamma}{\beta} + \frac{m(m+2n-1)}{1.2} a^{m+2n-2} \frac{\gamma^2}{\beta^2} \\ + \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)}{1.2.3} a^{m+3n-3} \frac{\gamma^3}{\beta^3} + \ldots \end{array} \right\}$$

oder, wenn man $\frac{\alpha}{\beta}$ anstatt a setzt

$$y^m = \frac{\alpha^m}{\beta^m} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{m}{1} \frac{\alpha^{n-1}\gamma}{\beta^n} + \frac{m(m+2n-1)}{1.2} \frac{\alpha^{2n-2}\gamma^n}{\beta^{2n}} \\ + \frac{m(m+3n-1)(m+3n-2)}{1.2.3} \frac{\alpha^{3n-3}\gamma^3}{\beta^{3n}} + \ldots \end{array} \right\}$$

Es müssen überhaupt hierin so viel verschiedene Werthe von y^m seyn als die vorgegebene Gleichung Wurzeln hat, und man könnte die Entwickelung einer jeden von ihnen insbesondere finden, so wie wir eben das vorhergehende gefunden haben, wenn man nur die Form dieser

Glei-

Gleichung veränderte; wir verweisen aber diese Details in den folgenden Capitel, welches ganz insbesondere der Theorie der Gleichungen gewidmet ist.

114.

Als zweytes Beyspiel sey die Gleichung

$$\alpha - \beta y + \gamma y^2 - \delta y^3 + \varepsilon y^4 - \ldots = 0;$$

man zieht hieraus

$$y = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{y^2}{\beta}(\gamma - \delta y + \varepsilon y^2 - \ldots)$$

und wenn man diese mit

$$y = a + x\phi(y)$$

vergleicht, so wird man finden

$$a = \frac{\alpha}{\beta}, \quad x = \frac{1}{\beta},$$

$$\phi(y) = y^2(\gamma - \delta y + \varepsilon y^2 \ldots).$$

Wir wollen ferner noch annehmen, daß man die Entwickelung von y^m suchte, und wollen immer a anstatt $\frac{\alpha}{\beta}$ schreiben, so werden wir haben

$$\psi(a) = a^m, \quad \psi'(a) = ma^{n-1},$$

$$\phi(a) = a^2(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \ldots);$$

woraus folgt

$$y^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m+1}(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \ldots)\frac{1}{\beta}$$

$$+ \frac{m}{1.2} \frac{d.a^{m+3}(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \ldots)^2}{da} \cdot \frac{1}{\beta^2}$$

$$+ \frac{m}{1.2.3} \frac{d^2.a^{m+5}(\gamma - \delta a + \varepsilon a^2 - \ldots)}{da^2} \cdot \frac{1}{\beta^3}$$

Ist die Zahl der Glieder der vorgegebenen Gleichung begrenzt, so wird die eben gefundene Reihe die Entwickelung der Potenz m von einer ihrer Wurzeln geben

ben; im entgegengesetzten Fall, werden wir den aus der Wiederkehr der Reihe

$$\alpha = \beta y - \gamma y^2 + \delta y^3 - \varepsilon y^4 + \ldots$$

abgeleiteten Ausdruck von y^m haben. Man sieht daß diese Methode viel allgemeiner ist, als die, welche für die Reihe

$$z = ax + bx^2 + dx^3 + \ldots$$

in Nr. 45 der Einleitung angegeben ist; denn sie vereiniget neben den Vorzug, daß sie jede beliebige Potenz der gesuchten Größe giebt, noch diesen, daß sie das Gesetz kennen lehrt, nach welchem sich die verschiedenen Glieder bilden. Macht man übrigens $m = 1$, verrichtet die Differentiirungen und verändert y in x, a oder $\frac{\alpha}{\beta}$ in z, β in a, $-\gamma$ in b, δ in c, ..., so wird man auf das Resultat der angezeigten Num. zurückfallen. Ich werde mich nicht dabey aufhalten die Rechnungen zu entwickeln die dem Leser eine Gelegenheit sich zu üben darbieten.

115.

Wir wollen als letztes Beyspiel die transcendente Gleichung

$$y = a + x . \sin. y$$

nehmen, sie wird durch ihre Vergleichung mit

$$y = a + x\varphi(y)$$

geben, $\varphi(y) = \sin. y$, und wenn man die Entwicklung des Logarithmen von y haben will, so hat man $\psi(a) = la$, $\varphi(a) = \sin. a$ und

$$ly = la + \frac{\sin. a}{a} \cdot \frac{x}{1} + \frac{d . \frac{\sin. a}{a}}{da} \cdot \frac{x^2}{1.2}$$
$$+ \frac{d^2 . \frac{\sin. a^2}{a^2}}{da^2} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

116.

Wenn man in der Gleichung

$$a - x + x\phi(y) = 0,$$

$x = 1$ macht, so reducirt sie sich auf

$$a - y + \phi(y) = 0;$$

dieses ist die Form unter welcher sie **Lagrange** vorgestellt hat, und man hat alsdann

$$\psi(y) = \psi(a) + \frac{1}{1} \psi'(a)\phi(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d . \psi'(a)\phi(a)^2}{da}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2 . \psi'(a)\phi(a)^3}{da^2} + \ldots$$

Nimmt man $\psi(y) = \phi(y)$ an, so kömmt

$$\phi(y) = \phi(a) + \frac{1}{1}\phi'(a)\phi(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d . \phi'(a)\phi(a)^2}{da}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2 . \phi'(a)\phi(a)^3}{da^2} + \ldots$$

Man könnte dieser Reihe folgende Form geben, die bemerkt zu werden verdient,

$$\phi(y) = \phi(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2\phi(a)^2}{da} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2 . \phi(a)^3}{da^2}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^3 . \phi(a)^4}{da^3} + \ldots$$

Endlich, wenn man $\psi(y) = y$ nimmt, so hat man

y =

$$y = a + \frac{1}{1}\varphi(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d.\varphi(a)^2}{da}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^2.\varphi(a)^3}{da^2} + \ldots$$

substituirt man in der Gleichung

$$a - y + \varphi(y) = 0,$$

an die Stelle von y und von $\varphi(y)$, die oben gefundenen Entwickelungen, so wird sie identisch, wie man es erwarten mußte.

117.

Wir haben schon in Num. 102. gezeigt, daß die Function von lx sich nicht in einer Function von folgender Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

entwickeln läßt; es verhält sich eben so mit einer großen Anzahl sowohl algebraischer als auch transcendente Functionen; und der Differentialcalcul, wie wir gesagt haben, zeigt, daß diese Form ihnen nicht zukommen kann, wenn man für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ... Ausdrücke giebt, die für den Fall $x = 0$ unendlich werden.

Es sey die Function y durch die Gleichung

$$(y - a)^2 + bxy = 0$$

gegeben; differentiirt man, so findet sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by}{2(y-a) + bx};$$

aber aus der Voraussetzung von $x = 0$, gehet $y = a$ hervor, und folglich wird $\frac{dy}{dx}$ alsdann $\frac{-ba}{0}$ oder unendlich. Sucht man die Differential-Coefficienten der höhern Ordnungen, so wird man gleichfalls für jeden von bey-

beyden, in dem Fall $x = 0$ unendliche Werthe finden, und man wird daraus schließen, daß man die Function y nicht nach den ganzen und positiven Potenzen von x entwickeln kann.

Um noch ganz besonders die Natur der Function y zu untersuchen, so wollen wir die vorgegebene Gleichung auflösen, wir werden finden

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{b^2x^2 - 4abx},$$

oder auch

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm \frac{bx}{2}\left(1 - \frac{4a}{bx}\right)^{\frac{1}{2}};$$

entwickeln wir die Größe

$$\left(1 - \frac{4a}{bx}\right)^{\frac{1}{2}}$$

nach der Formel des Binomiums, so kommt

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm \frac{bx}{2}\left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{bx} - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{4^2.a^2}{b^2.x^2} - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{4^3.a^3}{b^3.x^3} + \ldots\right\}$$

Nimmt man das obere Zeichen, so wird man haben

$$y = - \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{4^2.a^2}{bx} - \frac{1.1.3}{4.4.6} \cdot \frac{4^3.a^3}{b^2.x^2} - \ldots$$

und das untere Zeichen wird geben

$$y = a - bx + a + \frac{1.1}{4.4} \cdot \frac{4^2.a^2}{bx} + \frac{1.1.3}{4.4.6} \cdot \frac{4^3.a^3}{b^2.x^2} + \ldots$$

Reihen, die beyde nach den negativen Potenzen von x fortgehen.

Man hätte der Wurzelgröße

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{b^2x^2 - 4abx}$$

diese andere Form

$$(-abx)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{bx}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

geben können, und wenn man

$$\left(1-\frac{bx}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

entwickelt, so hätte man gehabt

$$y=a-\frac{bx}{2}\pm(-abx)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\tfrac{1}{2}.\frac{bx}{4a}-\frac{1.1}{2.4}.\frac{b^2x^2}{4^2.a^2}-\frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{b^3.x^3}{4^3.a^3}\ldots.\right\}$$

Die Reihe wird, so lange x einen positiven Werth hat, unmöglich seyn; aber für $x=0$, giebt sie $y=a$, und macht man x negativ, so findet man

$$y=a+\frac{bx}{2}\pm(ab)^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{2}}\left\{1+\tfrac{1}{2}.\frac{bx}{4a}-\frac{1.1}{2\,4}.\frac{b^2.x^2}{4^2.a^2}+\ldots\right\}$$

Dieses Resultat enthält die Bruchpotenzen von x, und geht also eben so wenig in der Form

$$A+Bx+Cx^2+Dx^4+\ldots$$

Wenn man also unendliche Werthe für die Coefficienten

$Y, Y', Y'', Y''' \ldots$ (Num. 100) oder

$U, U', U'', U''' \ldots$ (Num. 110)

findet, so müßte man die Form der Entwickelung der vorgegebenen Function a priori suchen. Wir sind in den vorstehenden Beyspiele durch die Auflösung der gegebenen Gleichung dazu gelangt, aber dieses Mittel würde, sobald sie den vierten Grad übersteigt, nicht mehr ausführbar seyn, und wird schon wenig bequem für den dritten Grad, wegen der Anhäufung der Formeln, welche in diesem Falle die Wurzeln ausdrücken. Laßt uns also sehen auf welche Art wir diese Schwierigkeit geschickt heben.

118.

Welche auch immer die Form der gesuchten Entwickelung seyn mag, so könnte doch, sobald man sie als aus einer Folge von Monomen annimmt, ein beliebiges von ihren Gliedern durch Ax^α vorgestellt werden, dergestallt, daß man allgemein hat

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$$

wo die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ beliebige Zahlen seyn können. Allein, wenn man eine Function entwickelt, so hat man fast immer zum Zweck, davon ein Näherungswerth zu finden, welches erfordert, daß die Reihe zu welcher man gelangt convergent sey: aber, diese letzte Bedingung kann man in allgemeinen nur dann erfüllen, wenn die Größe x entweder sehr klein oder sehr groß ist. Im ersten Falle, ist es evident, daß die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ positiv und nach der Ordnung ihrer respectiven Größe, geordnet seyn müssen, indem man von den kleinsten anfängt. Im Gegentheile, im zweyten Falle, müssen sie negativ seyn, oder wenigstens damit endigen negativ zu werden, und folglich, wenn darin positive sind, so müßte man sie zuerst schreiben, indem man von den größten anfängt. Alles dieses gründet sich auf das was darüber in der Einleitung (Num. 8 u. folg.) gesagt ist.

Eine Reihe, welche nach den positiven Potenzen der veränderlichen Größe fortgehet, heißt eine steigende Reihe, und wenn sie in Rücksicht der negativen Potenzen geordnet ist, so heißt sie eine fallende Reihe.

Die analytischen Näherungsmethoden haben alle die größte Analogie mit der, welche der Gebrauch der Decimalbrüche in der Arithmetick eingeführt hat, und die darin bestehet successive die Ziffern der höchsten Art zu suchen, und die der niedrigern Art zu vernachlässigen. Die Zahlen sind durch die Anordnung der Ziffern selbst die sie ausdrücken, nach den Potenzen von 10 geordnet *); Man urtheilt von dem Werth der Ziffern die zu finden übrig bleiben, oder welche man vernachläßiget, durch die Stelle, welche sie einnehmen, und die beträchtlichsten bieten sich zuerst da: man wird also auch die algebraischen Ausdrücke so ordnen, damit man sogleich die größten Glieder und nachher die, welche geringer sind, findet. Aber dieses läßt sich nicht thun, wenn man nicht etwa für eine der Größen, die in den Ausdruck, welchen man betrachtet hineinkommen einen Grad von Größe bestimmt.

Es scheint nicht leicht zu seyn, in einem Ausdruck, welcher zwey implicite eine durch die andere gegebene veränderliche Größen enthält, die größten Glieder zu unterscheiden; so z. B. in der Gleichung

$$Ax^{\alpha}y^{\alpha'} + Bx^{\beta}y^{\beta'} + Cx^{\gamma}y^{\gamma'} + \ldots = 0$$

die Größen x und y sind unter sich auf eine Art verbunden, die obgleich bestimmt, doch nicht bey der bloßen Ansicht erlaubt zu urtheilen, wie die Veränderungen der einen auf die andern Einfluß haben, und es wird oft kommen, daß sie in umgekehrten Sinnen gehen werden, dergestalt, daß wenn die erste sehr klein ist, die zweyte sehr groß seyn wird und umgekehrt; oder auch, indem die eine schnell abnimmt, die andere während dieser Zeit nur sehr wenige Abnahme erleidet.

Die

*) Die Zahl 349, 537 z. B. ist nichts anders als
$3.10^2 + 4.10^1 + 9.10^0 + 5.10^{-1} + 3.10^{-2} + 7.10^{-3}$.

Die Geometer haben verschiedene Mittel erdacht, um unter den Gliedern einer Gleichung diejenigen zu unterscheiden, die die größten sind. Newton erfand das analytische Parallelogram, welches de Gua nachgehends auf ein Triangel reducirte: Taylor hat eine geometrische Construction angewandt; aber Lagrange hat ein sehr einfaches und sehr leichteres analytisches Verfahren gegeben, welches wir so fort zeigen werden.

119.

Es sey eine beliebige Gleichung

$$ax^{m}y^{n} + a'x^{m'}y^{n'} + a''x^{m''}y^{n''} + a'''x^{m'''}y^{n'''} + \ldots = 0;$$

durch Ax^{α} wird man das erste Glied der Entwickelung von y darstellen, und indem man x sehr klein annimmt, so ist es hinlänglich auf dieses Glied Rücksicht zu nehmen, welches den größten Theil des Werthes von y ausmachen wird. Wenn man dieses in der vorgegebenen Gleichung an die Stelle von dieser veränderlichen Größe setzt, so wird man finden

$$aA^{n}x^{m+n\alpha} + a'A^{n'}x^{m'+n'\alpha} + a''A^{n''}x^{m''+n''\alpha} + a'''A^{n'''}x^{m'''+n'''\alpha} \ldots = 0.$$

Da diese Gleichung nur Näherungsweise statt haben soll, so muß man davon die Glieder nach der Ordnung ihrer Größe, welche durch den Exponenten, womit sie behaftet sind, angezeigt wird, ordnen, und nur diejenigen beybehalten, die von den geringsten Grade sind: dieses kann aber nicht geschehen, so lange der Exponent α unbekannt ist. Um ihn zu bestimmen wird man bemerken, daß die Gleichung, welche wir betrachten nicht befriediget werden kann, indem man bloß auf die niedern Potenzen von x Rücksicht nimmt, welche auch übrigens immer diese veränderliche Größe seyn mag, wenn sich nicht darin zwey unter sich vergleichbare Glieder befinden, d. h. von denselben Grade, und deren Exponent kleiner als der andere sey.

Es kommt also jetzt darauf an für α einen Werth zu finden, welcher zwey der Zahlen

$$m+n\alpha,\ m'+n'\alpha,\ m''+n''\alpha,\ m'''+n'''\alpha,\ m^{\mathrm{v}}+n'^{\mathrm{v}}\alpha,\ldots$$

unter sich gleich groß und kleiner als alle andern macht.

Jede Gleichung, welche man bilden würde indem man zwey und zwey der vorgegebenen Zahlen gleich setzte, würden ein Werth von α geben, welcher der ersten Bedingung Gnüge leistete, und welchen man in

$$m+n\alpha,\quad m'+n'\alpha,\quad m''+n''\alpha,\ \ldots$$

substituiren muß, um sich zu versichern, ob er die zweyte Bedingung erfüllt; aber, wenn man so verfährt, so wird man oft viele unnöthige Combinationen machen, welche man wie man so fort sehen wird vermeiden kann,

Setzt man bloß das erste Glied jeden von denen, welche ihm folgen, gleich, um verschiedene Werthe von α daraus zu ziehen, die man durch α', α'', α''', ... bezeichnet, so entstehet daraus

$$\alpha'=\frac{m'-m}{n-n'},\quad \alpha''=\frac{m''-m}{n-n''},\quad \alpha'''=\frac{m'''-m}{n-n'''},$$

u. s. w.

Anstatt jeden dieser Werthe einzeln zu versuchen, wollen wir in der Reihe

$$m+n\alpha,\ m'+n'\alpha,\ m''+n''\alpha,\ m'''+n'''\alpha,\ldots(1)$$

den Ausdruck der Differenzen zwischen den ersten Gliede und jeden der andern suchen, und es wird also kommen

$$m'-m+(n'-n)\alpha,\ m''-m+(n''-n)\alpha,\ m'''-m$$
$$+(n'''-n)\alpha,\ \ldots$$

Aber vermittelst der zuvor gefundenen Werthe von α, wird man haben

$$m' - m = -\alpha'(n' - n),\ m'' - m = -\alpha''(n'' - n),$$
$$m''' - m = -\alpha'''(n''' - n) \ldots$$

und folglich könnten die obenstehenden Differenzen wie folget ausgedrückt werden:

$$(n' - n)(\alpha - \alpha'),\ (n'' - n)(\alpha - \alpha''),\ (n''' - n)(\alpha - \alpha''') \ldots$$

Wenn man um abzukürzen $m + n\alpha = \pi$ macht, so wird die Reihe (1) die Form annehmen

$$\pi,\ \pi + (n' - n)(\alpha - \alpha'),\ \pi + (n'' - n)(\alpha - \alpha''),$$
$$\pi + (n''' - n)(\alpha - \alpha'''), \ldots (2),$$

und da man die Glieder der vorgegebenen Reihe immer nach Belieben ordnen kann, so kann man sie dergestalt schreiben daß die Zahlen $n, n', n'', n''', \ldots$ eine wachsende Progression bilden, welches alle Größen $n' - n$, $n'' - n$, $n''' - n \ldots$ positiv machen wird. In diesem Zustand der Dinge, sieht man augenscheinlich daß, wenn man α den größten von den durch $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ vorgestellten Werthe giebt, so wird dasjenige Glied, welches diesem Werthe entspricht, dem ersten Gliede π gleich und kleiner als alle andern werden. In der That, wenn man um die Idee zu fixiren, annimmt, daß sie α''' sey, so wird sich das vierte Glied der Reihe (2) auf π reduciren, und man wird zu gleicher Zeit sehen, daß die Größen

$$(n' - n)(\alpha - \alpha'),\quad (n'' - n)(\alpha - \alpha''), \ldots$$

alle positiv seyn werden.

Die größte der Größen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ befriedigte also den beyden geforderten Bedingungen. Wenn die vorgelegte Frage noch andere Auflösungen hat, so kann dieses nur von den kleinern Zahlen als die, welche man so eben gefunden hat, herrühren, denn, wenn man in der Reihe anstatt α eine größere Zahl als α''' substituirte, die nach der Hypothese die andern Werthe α', α'', $\alpha^{IV}, \ldots$, übertrift, so wird das erste Glied kleiner werden als die ihm folgen, und folglich könnte die zweyte Bedingung nicht erfüllt werden.

Wir wollen also annehmen, daß man für α eine kleinere Zahl als α''' nehme, alsdann werden die Glieder

$$\pi, \pi + (n'-n)(\alpha-\alpha'), \pi + (n''-n)(\alpha-\alpha'')$$

größer seyn als

$$\pi + (n'''-n)(\alpha-\alpha'''),$$

denn die Differenz $\alpha - \alpha'''$ wird negativ seyn und wird alle negativen Differenzen übertreffen, welche sich unter den vorhergehenden finden könnten; sie ist ferner multiplicirt durch die Größe $n'''-n$ die auch die Größen $n'-n$ und $n''-n$ übertrift, weil die Zahlen n, n', n'' eine wachsende Progression bilden. Es folgt hieraus, daß man von allen Gliedern abstrahiren muß, die dem in welchen sich der größte von den Werthen $\alpha', \alpha'', \alpha'''\ldots$ findet, vorhergehen. Indem man diejenigen betrachtet, die ihm folgen, so wird man sehen, daß die kleinsten unter ihnen geringer als die ersten werden können, weil, wenn in den Differenzen $\alpha-\alpha^{\prime v}$, $\alpha-\alpha^{v}\ldots$, sich welche finden die negativ sind, da sie multiplicirt sind, durch Zahlen $n^{\prime v}-n$, $n^{v}-n\ldots$ größer als ihre correspondirenden in dem andern Theile der Reihe, so werden sie negative Resultate geben, welche diejenigen die man in denen den vierten Gliede vorhergehenden Gliedern gefunden hätte, übertreffen.

Man wird also hieraus schließen, daß um eine zweyte Auflösung zu erhalten, so muß man nur auf dasjenige, welches den größten Werth von α und auf diejenigen Glieder die nach ihm kommen, Rücksicht nehmen. Da in der Hypothese, welche wir aufgestellt haben α der größte Werth ist, so ist das Glied welches ihm giebt in der

Reihe

Reihe (1) vorgestellt durch $m''' + n'''\alpha$, man wird daher die neue Reihe

$$m''' + n'''\alpha,\ m^{\prime v} + n^{\prime v}\alpha,\ m^{v} + n^{v}\alpha\ \ldots$$

betrachten, und operirt mit dieser, wie wir mit der vorgegebenen gemacht haben.

Es könnte geschehen, daß einerley Werth von α viele Glieder, dem ersten Gliede in der Reihe (2) gleich machte; alsdann müßte man für die Untersuchung einer neuen Auflösung, nur von demjenigen dieser Glieder ausgehen, welches sich von dem ersten Gliede am entferntesten befände, denn es ist leicht zu sehen, daß alle ihm vorhergehenden Glieder, ihm übertreffen werden, wenn man für α eine kleinere Zahl nimmt als den größten in der vorhergehenden Operation gefundenen Werth.

Die Details der so eben vorgetragenen Methode, sind in folgender Regel enthalten:

Man setzt das erste Glied der Reihe jedem der folgenden Glieder gleich; man nimmt den größten der Werthe von α, welche aus den so gebildeten Gleichungen hervorgehen, und dieses wird die erste Auflösung der vorgegebenen Frage seyn. Man gehet nachgehends von dem letzten der Glieder aus, welches durch seine Vergleichung mit dem ersten Gliede, jenen größten Werth gegeben hat, um solches jeden der folgenden Glieder gleich zu setzen, welches neue Werthe von α wird kennen lehren, unter denen man den größten wählt, der noch die Frage auflösen wird. Man geht von neuem von dem Gliede aus das von denen Glidern, welche die vorhergehende Auflösung gegeben haben am weitesten vorwärts ist, und man vergleicht dieses mit den weiter folgenden Gliedern, wie solches oben angezeigt ist.

Fährt man so fort so gelangt dazu, alle Werthe von α zu finden, die zwey oder eine größere Anzahl von Glieder der Reihe (1) unter sich gleich und kleiner als alle übrigen machen.

120.

Laßt uns als Beyspiel die Gleichung

$$a + a'x^3y + a''\frac{y^2}{x} + a'''\frac{y^4}{x^5} + a^{IV}x^2y^5 + a^V\frac{y^6}{x^3} = 0$$

nehmen. Indem man Ax^α anstatt y substituirt, so wird sie

$$a + a'Ax^{3+\alpha} + a''A^2x^{-1+2\alpha} + a'''A^4x^{-3+4\alpha} + a^{IV}A^5x^{2+5\alpha}$$
$$+ a^kA^6x^{-3+6\alpha} = 0$$

und um davon die größten Glieder in der Voraussetzung daß x sehr klein ist, zu kennen, so muß man α dergestalt bestimmen, daß dadurch zwey der Zahlen

$0,\ 3+\alpha,\ -1+2\alpha,\ -5+4\alpha,\ 2+5\alpha,\ -3+6\alpha,$

unter sich gleich groß und kleiner als die andern werden.

Nach der Regel, setzt man das erste Glied mit allen andern gleich, welches successive für α die Zahlen -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$ giebt, wovon die größte $\frac{5}{4}$, die Frage befriedigt. In der That, indem man $\frac{5}{4}$ statt α substituirt, so werden die vorgegebenen Zahlen 0, $\frac{17}{4}$, $\frac{6}{4}$, 0, $\frac{33}{4}$, $\frac{18}{4}$, und die zwey gleichen Glieder sind kleiner als die andern.

Man nimmt nachgehends das Glied $-5+4\alpha$, woraus man die vorhergehende Auflösung zieht, um es mit den zwey folgenden $2+5\alpha$ und $-3+6\alpha$ zu vergleichen; es wird hieraus hervorgehen $\alpha = -3$ und $\alpha = -1$. Sieht man als den größten dieser Werthe denjenigen an, welcher

welcher sich am wenigsten von dem positiven entfernt, so wird man $\alpha \doteq -1$ nehmen, und wird nun die 6 Zahlen haben: $0, 2, -3, -9, -3, -9$, unter welchen -9 die kleinste ist. Hier ist die Operation geendiget, weil die so eben erhaltene Auflösung aus der Vergleichung des vierten Gliedes mit dem letzten abgeleitet ist.

Wenn man die zwey Werthe von α in der vorgegebenen Gleichung substituirt, so wird sie zufolge der ersten,

$$a + a'Ax^{\frac{17}{4}} + a''A^2x^{\frac{6}{4}} + a'''A^4 + a^{IV}A^5x^{\frac{13}{4}} + a^{V}A^6x^{\frac{18}{4}} = 0;$$

und zufolge der zweyten

$$a + a'Ax^2 + a''A^2x^{-3} + a'''A^4x^{-9} + a^{IV}A^5x^{-3} + a^{V}A^6x^{-8} = 0.$$

Wenn man in einem und dem andern Falle, x durch den Bruch $\frac{1}{q}$ vorstellt, wo q eine beliebige aber sehr große Zahl seyn soll, so werden die zwey Glieder in welchen sich x mit dem kleinsten Exponenten befindet, die beträchtlichsten sind.

121.

Um die beträchtlichsten Glieder einer Gleichung, in der Voraussetzung, daß x sehr groß ist zu finden, so substituirt man $\frac{1}{t}$ für x, und sucht unter den Gliedern der transformirten Gleichung diejenigen die die größten werden, wenn man den Werth von t sehr klein nimmt, eine Hypothese die den Werth von x sehr groß macht.

Man wird geradezu zu demselben Zweck gelangen, wenn man beobachtet, daß nach der Substitution von Ax^{α} für x, in der vorgegebenen Gleichung, die größten Glieder diejenigen seyn werden die die höchste Potenz von

von x enthalten, und daß man sie folglich findet indem man α dergestalt bestimmt das zwey der Zahlen von der Reihe

$$m + n\alpha, \quad m' + n'\alpha, \quad m'' + n''\alpha, \ldots$$

unter sich gleich werden und die andern übertreffen. Diese letzte Frage wird aufgelößt werden indem man unter den Größen α', α'', α''', . . . von Num. 119, diejenige nimmt die die kleinste ist, und wenn man fortfährt in jeder neuen Reihen den kleinsten der Werthe von α zu wählen.

In dem Beyspiele der vorhergehenden Nummer, ist -3 der kleinste dieser Werthe von α, welchen wir zuerst gefunden haben, und dieser Werth giebt die 6 Zahlen $0, 0, -7, -17, -13, -10$, davon die zwey ersten welche unter sich gleich sind, als die größten angesehen werden müssen, weil die andern negativ sind. Da die Auflösung -3 aus der Vergleichung des zweyten Gliedes der vorgegebenen Reihe mit dem ersten Gliede abgeleitet ist, so setzt man ganz der Regel gemäß, dieses zweyte Glied gleich jedem der ihm folgenden Glieder um eine andere Auflösung zu erhalten. Der kleinste Werth von α den man aus dieser Operation zieht ist $\frac{1}{4}$, und es entstehet hieraus folgende Reihe $0, \frac{13}{4}, -\frac{2}{4}, -4, \frac{17}{4}, -\frac{6}{4}$, in welcher $\frac{13}{4}$ die auferlegten Bedingungen erfüllen wird. Endlich, wenn man das 5te Glied der vorgegebenen Reihe mit dem sechsten vergleicht, so wird man $\alpha = 5$ finden, woraus kommen wird $0, 8, 9, 15, 27, 27$; und 27 wird noch die Frage befriedigen.

Die Substitution der drey Werthe von α in der Gleichung

$$a + a'x^3y + \frac{a''y^2}{x} + \ldots = 0,$$

wer-

werden so viel Resultate geben, als sie jeder zwey Glieder enthalten, welche mit denselben Exponenten behaftet und fähig sind größer als alle anderen zu werden, wenn man x einen sehr großen Werth giebt.

Das Verfahren von welchen wir so eben Gebrauch gemacht haben um α zu finden, leitet sich zu einfach aus dem was davon in Num. 119 gesagt ist ab, als daß es nöthig seyn sollte es besonders zu beweisen; wir beobachten, daß, wenn in der Reihe der Exponenten $m + n\alpha$, $m' + n'\alpha$, . . . sich welche fänden, die dasselbe Vielfache von α enthielten, so würde ihre respective Größe nur von der Zahl m abhangen, und daß man folglich nur dasjenige von diesen Gliedern betrachten müßte in welchem m am kleinsten ist, wenn man den kleinsten Exponenten sucht, und im Gegentheile demjenigen, wo m am größten ist, wenn man den höchsten Exponenten sucht.

122.

Da der Exponent α des Gliedes Ax^α bekannt ist, so ist es leicht den Coefficienten A zu finden, es ist hierzu hinlänglich alle mit dem kleinsten Exponent behafteten Glieder gleich Null zu setzen, wenn man x sehr klein annimmt, oder alle Glieder der höchsten Potenz, wenn man x sehr groß annimmt. Im ersten Falle giebt die Gleichung

$$a - a'Ax^{\frac{17}{4}} + a''^{2}x^{\frac{6}{4}} - a'''A^4 + a^{\text{IV}}A^5x^{\frac{23}{4}}$$

$$- a^{\text{V}}A^6x^{\frac{28}{4}} = 0 \quad \text{(Num. 120)},$$

$$a - a'''A^4 = 0, \quad \text{daraus } A = \sqrt[4]{\frac{a}{a'''}}.$$

Die=

Diejenigen, welche den Geist des vorhergehenden gut gefaßt haben, werden leicht sehen, daß die Annahme x sehr klein, die in der obigen Gleichung mit dieser veränderlichen Größe behafteten Glieder, so klein macht, daß keines von ihnen mit den zwey andern Glieder a und $a''A^4$ in Vergleichung kommen kann, die sich folglich unter sich vernichten müssen. Sollte man hiergegen noch einigen Zweifel hegen, so wird man sie zerstreuen indem man $\frac{1}{q}$ anstatt x substituirt, denn alsdann wird man gewahr nehmen, daß man immer die Zahl q groß genug nehmen kann damit die Summe der Glieder, wo sie als Divisor vorkömmt, so klein werden kann, als man will.

Indem man die durch den zweyten Werth von α gegebenen Gleichung

$$a - a'Ax^2 + a''A^2x^{-3} + a'''A^4x^{-9} + a^{IV}A^5x^{-3} - a^VA^6x^{-9} = 0$$

anwendet, so wird man auf die nemliche Art haben

$$-a'''A^4 - a^VA^6 = 0, \text{ daraus } A = \sqrt{\frac{a'''}{a^V}};$$

dieser Werth wird so lange imaginair seyn als die beyden Größen a''', a^V einerley Zeichen haben werden. Man sieht durch dieses Beyspiel, daß man überhaupt, so viel besondere Entwickelungen von y erhält als α verschiedene Werthe haben wird. Da man das erste Glied Ax^α hat, so substituirt man um das zweyte zu finden, $Ax^\alpha + Bx^\beta$ anstatt y; oder, welches auf eins hinaus kömmt, man verwandelt zuerst in der vorgegebenen Gleichung y in $Ax^\alpha + y'$, nach den Reductionen schreibt man Bx^β für y'; und bestimmt β und B wie man α und A bestimmt hat. Man wird das dritte Glied erhalten indem man $Bx^\beta + y''$ an die Stelle von y' in der Gleichung

chung, welche die neue veränderliche Größe enthält, setzt; nach geschehener Reductionen, ersetzt man wieder y'' durch Cx^{γ} und wird γ und C finden wie man α und A, β und B gefunden hat: diese Operation auf die nemliche Art fortgesetzt wird die folgenden Glieder kennen lehren.

123.

Es sey als Beyspiel die Gleichung

$$(y - a)^2 + bxy = 0 \text{ (Num. 117);}$$

indem man sie entwickelt, wird sie

$$a^2 - 2ay + bxy + y^2 = 0$$

und man findet, indem man darin Ax^{α} anstatt y substituirt

$$a^2 - 2aAx^{\alpha} + bAx^{1+\alpha} + A^2x^{2\alpha} = 0.$$

Um α in der Voraussetzung, daß x sehr klein sey zu bestimmen, so muß man nach der Bemerkung die zu Ende von Num. 121 steht nur auf die Exponenten 0, α und 2α sehen. Man wird alsdann nur einen einzigen Werth für α finden, nemlich $\alpha = 0$, welches die Gleichung

$$a^2 - 2aA + A^2 = 0$$

geben wird; und folglich reducirt sich das Glied Ax^{α} auf a. Man wird also in der vorgegebenen Gleichung $a + y'$ anstatt y substituiren, und es wird kommen

$$bax + bxy' + y'^2 = 0 \ldots (1);$$

verändert man nachgehend y' in Bx^{β} so wird man haben

$$bax + bBx^{1+\beta} + B^2x^{2\beta} = 0$$

der Werth von β wird $\frac{1}{2}$ seyn, und die Gleichung $ab + B^2 = 0$ wird $B = (-ab)^{\frac{1}{2}}$ geben.

Macht man nachgehends in der Gleichung (1)

$y' =$

$$y' = (-ab)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + y''$$

und läßt um abzukürzen B an die Stelle von $(-ab)^{\frac{1}{2}}$, so wird daraus hervorgehen

$$bBx^{\frac{3}{2}} + 2Bx^{\frac{1}{2}}y'' + bxy'' + y''^2 = 0 \ldots (2),$$

weil $ab + B^2 = 0$.

Setzt man Cx^{γ} für y'' so wird man

$$\gamma = 1, \quad bB + 2BC = 0$$

finden, woraus

$$C = -\frac{b}{2} \text{ und folglich } Cx^{\gamma} = -\frac{bx}{2}$$

Wir wollen ferner noch $-\frac{bx}{2} + y'''$, oder auch $Cx + y'''$, anstatt y'' substituiren, und wir werden haben

$$(bC + C^2)x^2 + 2Bx^{\frac{1}{2}}y''' + (b+2C)xy''' + y'''^2 = 0 \ldots (3)$$

indem man beobachtet, daß $bB + 2BC = 0$ ist. Wir setzen nachgehends Dx^{δ} für y''', und indem man wie vorhin verfährt, werden wir finden

$$\delta = \tfrac{3}{2}, \quad 2BD - \frac{b^2}{4} = 0 \text{ oder}$$

$$D = \frac{b^2}{8B} = \frac{b^2}{8(-ab)^{\frac{1}{2}}} = (-ab)^{\frac{1}{2}} \cdot -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{b}{4a}.$$

Man sieht hinlänglich wie man das Verfahren fortsetzen müßte, und wenn man die 4 bereits gefundenen Glieder zusammen vereinigt, so wird man haben

$$y = a + (-ab)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{bx}{2} - \frac{1}{1}(-ab)^{\frac{1}{2}} \frac{b}{4a} x^{\frac{3}{2}} + \ldots$$

oder auch indem man die durch $(-ab)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ multiplicirten Glieder zusammen nimmt

y =

$$y = a - \frac{bx}{2} \pm (-ab)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} (1 - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{bx}{4a} + \ldots)$$

denn $(-ab)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ ist ein Ausdruck der das doppelte Zeichen $\pm$ haben kann

Nimmt man x sehr groß an, so müßte man alsdann in der Gleichung

$$a^2 - 2aAx^{\alpha} + bAx^{1+\alpha} + A^2 x^{2\alpha} = 0$$

die Glieder suchen, welche die höchste Potenz von x enthalten müssen, und nach dem was darüber in Num. 121 gesagt ist, wird man für α zwey unterschiedene Werthe finden, nemlich: $\alpha = -1$ und $\alpha = 1$.

Der erste wird uns geben

$$a^2 + bA = 0,$$

und folglich

$$A = \frac{-a^2}{b};$$

setzt man nachgehends

$$y = \frac{a^2}{b} x^{-1} + y,$$

und substituirt A für $\frac{a^2}{b}$, so kömmt

$$A^2x^{-2} - 2aAx^{-1} + 2Ax^{-1}y' - 2ay' + bxy' + y'^2 = 0;$$

indem man Bx^{β} für y' schreibt und die Glieder aufsucht in welchen der Exponent von x am größten seyn muß, so wird gefunden

$$B = -2, \quad -2aA + bB = 0$$

$$\text{und } B = \frac{2aA}{b} = -\frac{2a^3}{b^2}.$$

Wenn man so fortfährt, so wird man die erste in Num. 117 gegebene Entwickelung von y erhalten. Die zweyte Entwicklung wird auch nicht dieser zweyten Methode entgehen; denn der zweyte Werth von α giebt uns die Gleichung $bA + A^2 = o$, und hieraus leitet man $A = -a$, $Ax^\alpha = -bx$ ab. Die Substitution von $-bx + y'$ an die Stelle von y, in der vorgegebenen Gleichung giebt

$$a^2 + 2abx - 2ay' - bxy' + y'^2 = o$$

verändert man nun y' in Bx^β, so findet man

$$\beta = o,\ 2ab - bB = o \text{ und } B = 2a.$$

Treibt man diese Calculs weiter, so wird man ohne Mühe zu den ferneren Gliedern der zweyten Entwickelung von y in der angeführten Nummer, kommen.

124.

Ich werde noch ein Beyspiel geben, um einige Schwierigkeiten aufzuklären die in der Anwendung der uns beschäftigen Methode einem aufstoßen könnte, und die Gleichung

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = o$$

wird der Gegenstand davon seyn.

Setzt man darin Ax^α anstatt y, so wird sie

$$ax^3 + Ax^{3+\alpha} - aA^3x^{3\alpha} = o$$

und indem man α in der Voraussetzung, daß x sehr klein sey, bestimmt, so wird man $\alpha = 1$, $a - aA^3 = 1$ finden; woraus $A = 1$: das erste Glied der Entwickelung von y wird also x seyn.

Macht man nachgehends $y = x + y'$, so giebt dieses die transformirte Gleichung

$$x^4 - 3ax^2y' + x^3y' - 3axy'^2 - y'^3 = o,$$

in welcher man y' in $Bx\beta$ verändert. Sucht man hiervon alle die Werthe deren β fähig ist, so wird man $\beta = 2$ und $\beta = 1$ finden, man sieht aber leicht, daß man den zweyten Werth verwerfen muß; denn in der

Hypo-

Hypothese von x sehr klein muß die gesuchte R eihe stei gend seyn, und diese Bedingung erfordert, daß β, α übertrift. Der erste Werth von β giebt

$$1 - 3aB = 0,$$

woraus man

$$B = \frac{1}{3a} \text{ und } Bx^{\beta} = \frac{x^2}{3a} \text{ zieht.}$$

Setzt man $y' = \frac{x^2}{3a} + y''$, so erhält man eine zweyte transformirte Gleichung in welcher man y'' in Cx^{γ} verändert, und man findet $\gamma = 4$, $\gamma = 1$. Aus der nemlichen Ursache wie oben, muß man sich an dem ersten dieser Werthe halten, woraus hervorgehen wird

$$C = -\frac{1}{81a^3}, \quad Cx^{\gamma} = -\frac{x^4}{81a^3}.$$

Diese Werthe können jetzt so weit getrieben werden als man will, ohne daß sich neue Schwierigkeiten erheben, und man wird als letztes Resultat haben

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} \ldots$$

Die vorgegebene Gleichung giebt noch drey andere Reihen die aus der Annahme von x sehr groß entstehen, und die folglich fallende Reihen sind. Um dazu zu gelangen muß man α in der Gleichung

$$ax^3 + Ax^{3+\alpha} - aA^3x^{3\alpha} = 0$$

bestimmen, dergestalt daß die Exponenten, welche gleich werden alle andern übertreffen; die Werthe dieser Größen werden alsdann 0 und $\frac{3}{2}$ seyn. Der erste Werth giebt $A = -a$, und indem man die folgenden Glieder sucht, so führt dieser Werth zu der Reihe

$$y = -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12} \ldots$$

Der zweyte Werth giebt $A - aA^3 = 0$, woraus man $A = \pm\, a^{-\frac{1}{2}}$ zieht. Indem man jeden der zwey Werthe von A in den folgenden Operationen einzeln anwendet, so wird man die zwey folgenden Reihen finden, die nur durch die Zeichen ihrer Glieder von einander unterschieden sind:

$$y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \ldots$$

$$y = -\, a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \ldots$$

Man muß in der Untersuchung dieser Reihen, die fallend sind, die Aufmerksamkeit haben, unter die Werthe, welche man für jeden der Exponente β, γ, δ . . . findet, nur diejenigen zu nehmen die geringer als der vorhergehende Exponent sind.

125.

Diese zwey Beyspiele sollen gnügen zu zeigen, wie man die verschiedene Entwickelungen einer impliciten Function, welche durch eine algebraische Gleichung gegeben wird, finden kann. Es wird sich öfters zutragen, daß die Bestimmung von einem oder mehreren Coefficienten A, B, C, . . . erfordert, daß man eine Gleichung von einem höhern Grade als der erste auflösen muß; aber dieses Hinderniß wird die Methode nicht aufhalten, weil die aufzulösende Gleichung nur beständige Größen enthalten wird; man könnte also in den besondern Anwendungen den numerischen Werth des gesuchten Coefficienten erhalten, wenigstens durch Näherung, und in den allgemeinen Fall fährt man fort mit dem Buchstaben der diesen Werth vorstellt, als mit einer bekannten Größe zu opperiren. Hätte man die Gleichung

$$2a^3 + x^3 - ay^2 - axy - y^3 = 0.$$

und nimmt darin x sehr klein an, so ist der Coefficient A durch die Gleichung

$$2a^3 - a^2 A - A^3 = 0$$

gegeben.

Da in diesem Beyspiel die aufzulösende Gleichung von einem ungeraden Grade ist, so hat sie wenigstens eine reelle Wurzel; das erste Glied der gesuchten Entwickelung wird sich also auch unter einer reellen Form darstellen; wenn man aber zu einer Gleichung von geraden Grade geführt wäre, und es sey zu Anfange oder in dem Laufe einer Entwickelung, so müßte man sich sogleich versichern, ob diese Gleichung reelle oder keine reelle Wurzeln hat, um zu erkennen ob diese Entwicklung reel oder imaginair ist.

Diese Vorsicht ist wichtig, und de Gua ist, weil er sie vernachlässigte, in einen großen Fehler gefallen. Sie zeigt mit welcher Bedachtsamkeit man die Reihen behandeln muß, und wieviel man auf die Schlußfolgen, welche man daraus ziehet rechnen soll, wenn das Gesetz, welches die Glieder befolgen nicht evident ist; weil man immer befürchten muß, daß sie in dem nicht berechneten Theile der Reihe die Form ändern, und daß sie so gar selbst darin imaginair werden.

126.

Die vorhergehende Methode lehrt auch die Entwickelung von y unter der Form eines continuirlichen Bruchs kennen; denn nachdem man das erste Glied Ax^α gefunden hätte, könnte man annehmen

$$y = \frac{Ax^\alpha}{1 + y'},$$

wo y eine sehr kleine Größe wäre, weil durch Hypothese das Glied Ax^{α} den größten Theil von dem Werthe von y bildet. Nachdem man in der vorgegebenen Gleichung diesen Ausdruck anstatt y substituirt, und die Nenner hat verschwinden lassen, so wird man eine erste in x und y' transformirte Gleichung erhalten, in welcher man y' durch Bx^{β} wieder ersetzt, und bestimmt nachgehends β und B der über den Grad der Größe von x festgesetzten Hypothese gleichförmig.

Man mache y in der ersten transformirten Gleichung

$$y' = \frac{Bx^{\beta}}{1+y''},$$

so wird daraus eine zweyte in x und y'' entstehen, in welcher man Cx^{γ} anstatt y'' setzt. Hat man γ und C wie gewöhnlich bestimmt, so setze man

$$y'' = \frac{Cx^{\gamma}}{1+y'''},$$

welches eine dritte transformirte Gleichung giebt, mit welcher man wie mit den vorhergehenden opperiren wird.

Indem man von den Werthen y', y'', y''', . . . zu den Werth von y zurücksteigt, so findet man

$$y = \cfrac{Ax^{\alpha}}{1+\cfrac{Bx^{\beta}}{1+\cfrac{Cx^{\gamma}}{1+\cfrac{Dx^{\delta}}{1+\text{u. s. w.}}}}}$$

Man sieht daß hierin zwey Arten Entwickelungen von dieser Form seyn müssen, die eine Arten steigend, d. h. in welchen die Exponenten der Potenzen von x wachsend fortgehen, indem sie gegen den Werth der Function y corvergiren, wenn x sehr klein ist; die andere Arten

im

im Gegentheile, die fallend sind, weil die Exponenten von x nach dem Fortschreiten des Bruchs abnehmen, sind nur in dem Falle convergent, wo x einen sehr großen Werth hat.

Ich überlasse dem mit der Theorie der continuirlichen Brüche vertrauten Leser, die Sorgfalt sich über einige Beyspiele zu üben; mein gegenwärtiger Zweck ist nur bloß eine interessante Anwendung anzuzeigen, zu welcher ich mit mehrerm Detail in den Integralcalcul zurückkehren werde, weil sie ein sehr elegantes Mittel darbietet um die Näherungswerthe und öfters genauen Werthe, der durch Differentialgleichungen gegebenen Functionen zu finden, ein Mittel welches man so wie alles Vorhergehende dem Lagrange verdankt.

Es ist hier der Ort zu bemerken, daß man auch aus den Differentialgleichungen, Entwickelungen von der Form

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots$$

durch das Verfahren, welches uns für die algebraischen Gleichungen diente, ziehen kann. In der That ändert man y in Ax^{α} um, so muß man $\alpha Ax^{\alpha-1}$ an die Stelle von $\frac{dy}{dx}$, $\alpha(\alpha-1)Ax^{\alpha-2}$ an die Stelle von $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzen und so weiter. Diese Substitutionen lassen die Differentialien der vorgegebenen Gleichung verschwinden und alsdann wird man α und A wie in einer algebraischen Gleichung bestimmen: das Aufsuchen der folgenden Gliedern wird nicht mehrere Schwierigkeiten haben.

128.

Betrachtungen über das was die Entwickelung von $f(x+k)$ in gewissen besondern Fällen wird.

Ich habe (Num. 10) versprochen zu erklären wie es zugeht, daß die Differential-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... unendlich werden, und warum die Reduction der vorgegebenen Function in einer Reihe sich nicht mehr durch die aus dem Taylorischen Theoreme abgeleiteten Formeln verrichten läßt: Um dieses Versprechen zu erfüllen, so werde ich zeigen, daß die Num. 2 angenommene Form zur Entwickelung einer beliebigen Function von $x+k$; ob gleich im allgemeinen wahr, bey gewissen besondern Fällen dennoch nicht anwendbar ist.

Hier folgt einer der einfachsten Fälle dieser Art: Es sey $f(x) = (x-a)^n$; so hat man

$$\frac{d\,f(x)}{dx} = n(x-a)^{n-1},$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = n(n-1)(x-a)^{n-2}, \ldots$$

und es kömmt heraus

$$f(x+k) = (x-a+k)^n = (x-a)^n + \frac{n}{1}(x-a)^{n-1}k$$
$$+ \frac{n.n-1}{1.2}.(x-a)^{n-2}k^2 + \ldots$$

Diese Reihe findet allgemein statt was auch immer der Werth von x seyn mag, aber demohngeachtet, wenn $x = a$, und n eine ganze Zahl vorstellt, so verschwinden alle Glieder aus die sie besteht, bis auf dasjenige in welchem der Exponent von der Größe $x-a$ Null ist; von der obigen Entwickelung bleibt also nur

noch

noch das Glied k^n auf welches sich die Function $(x - a + k)^n$ reducirt, wenn man darin a anstatt x setzt.

Wenn n eine positive gebrochene Zahl ist, so giebt die vorhergehende Reihe

$$(x-a+k)^{\frac{1}{m}} = (x-a)^{\frac{1}{m}} + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k}{m(x-a)^{1-\frac{1}{m}}} \\ - \dfrac{1.(m-1)k^2}{1.2m^2(x-a)^{2-\frac{1}{m}}} \\ + \dfrac{1.(m-1)(m-2)k^3}{1.2.3m^3(x-a)^{3-\frac{1}{m}}} + \ldots \end{array} \right.$$

die Annahme von $x = a$, würde das erste Glied der zweyten Hälfte Null und alle andern unendlich machen: Aber diese nemliche Annahme reducirt die vorgegebene Function $(x - a + k)^{\frac{1}{m}}$ auf $k^{\frac{1}{m}}$, ein Resultat in welchem k sich auf einer gebrochenen Potenz erhoben findet, und welches sich folglich nicht mit der allgemeinen Form der Entwickelung von $f(x + k)$ verträgt.

129.

Obgleich das von mir gewählte Beyspiel nur dasjenige darstellt, was sich in einem einzeln besondern Falle zuträgt, so muß man demohngeachtet gewahr nehmen, daß alle mal, wenn die Function, welche man entwickeln will im allgemeinen irrational ist, und daß durch die Substitution eines besondern Werths von x sie aufhört es zu seyn, alsdann nothwendig die Irrationalität auf den Zuwachs k fällt und die nach den ganzen Potenzen von dieser Größe geordneten Entwickelung, kann die vorgegebene Function nicht mehr darstellen; das folgende Beyspiel wird dieses zu erklären vollenden.

Die Function $y=b+\sqrt{x-a}$, reducirt sich, wenn man $x=a$ setzt, auf $y=b$, sie verliert also in diesem besondern Falle ihre Irrationalität, und die zwey Werthe deren sie fähig ist reduciren sich auf einen; aber von den Augenblick an, wo x sich verändert, nimmt sie ihre erste Form an, folglich so klein auch k seyn mag, so muß y doch, wenn $x = a + k$ ist, auch zwey Werthe haben, und sie wird in der That $b \pm \sqrt{k}$. Demohngeachtet kann bey gegenwärtigen Umstande die Reihe

$$y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{k}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \ldots$$

nicht zwey Werthe auf einmal geben, weil die in der Hypothese von $x = a$ berechnete Größe y, nur einen Werth hat, und die Differential-Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ .... welche aus Gleichungen abgeleitet sind, wo sie nur bis zum ersten Grade steigen ebenfalls nur einen Werth für jeden besondern Werth von y giebt. Man muß jetzt auf eine klare Art sehen, warum die oben stehende Reihe y bey der Annahme von $x=a$ nicht darstellen kann; man fühlt übrigens, daß die Schwierigkeit in jedem andern Falle aufhört statt zu haben, weil, wenn y seine beyden Werthe wieder annimmt, jeder der Differential-Coefficienten deren auch zwey nimmt, den einen Werth in Beziehung auf den ersten Werth von y und den andern Werth in Beziehung auf den zweyten Werth von y, und daß durch dieses Mittel die von uns betrachteten Reihe doppelt wird.

130.

Die Art von Paradoxon, welches wir untersuchen, weit entfernt die Allgemeinheit des von uns Num. 2 ausgesagten Satz zu schaden, bietet uns im Gegentheile das Mittel der den Satz auf weit solidern Grunde aufzubauen als die Induction ist, wovon wir ihm abgeleitet haben. Weil die Natur einer Function, oder die Gleichung wovon sie abhängt, immer die Zahl es sey der reellen, oder der imaginairen Werthe bestimmt, welche sie für jeden besondern Werth der veränderlichen Größe die sie enthält annehmen muß, so ist klar, daß die Reihe welche die Entwickelung der Function ausdrückt, nicht mehrere Wurzeln geben darf: dieses würde demungeachtet geschehen, wenn die Reihe

$$u + Pk + Qk^2 + Rk^3 + \ldots$$

der angeführten Nummer, Bruchpotenzen von k enthielte; denn da die Coefficienten P, Q, R, . . . von jedem der Werthe von u einen besondern Werth erhalten, so giebt dieser Umstand allein so viel verschiedene Reihen als es die Natur der vorgegebenen Function verträgt; von einer andern Seite hätten Bruchpotenzen, so wie $k^{\frac{1}{2}}$, $k^{\frac{1}{3}}$ . . ., selbst so viel Werthe als deren Gleichungen von der Form $k^2 - A = 0$, $k^3 - B = 0$, . . . geben könnten, und die Tour-a-Tour angewendet die Anzahl der daraus hervorgehenden Reihen weit über die Anzahl der Werthe, welche die vorgegebene Function haben muß, treibt*).

La-

*) Man muß sich hier erinnern, was man in allen algebraischen Büchern über die Vielheit der Quadrat, Cubicwurzeln u.s.w. aus einer beliebigen Zahl, und von der Nothwendigkeit sie alle anzuwenden, wenn man gar keine Ursache hat von

der

Lagrange ist der erste der mit eben so vieler Eleganz als Simplicität den Knoten von der vorhergehenden Schwierigkeit gezeigt hat, die noch nicht mit so vieler Klarheit entwickelt war.

131.

Steigt man zu der Bildung der Differential-Coefficienten zurück (Num. 9 und 10), so wird man sich ins Gedächtniß zurückrufen, daß jeder von ihnen nichts anders ist als der Coefficient der ersten Potenz von k in der Entwickelung der Differenz von dem ihm vorhergehenden, oder, welches auf eins hinaus läuft, gleich ist dem ersten Gliede dieser Entwickelung durch den Zuwachs k dividirt. Wenn man diesen letzten Begriff auf den besondern durch die Function $b + \sqrt{x - a}$ vorgestellten Fall anwendet, so wird man, wenn $a + k$ anstatt x substituirt wird, sehen, daß der Coefficient $\frac{dy}{dx}$ alsdann unendlich werden muß; man wird also daraus schließen, daß das unter denselben Umständen durch den Differentialcalcul gegebene Resultat, eine nothwendige Folge von der der Entwickelung von $f(x + k)$ zugeeigneten Form ist, und daß dieses Resultat einigermaßen die Anwendung von dieser Form auf einem von ihr nicht mit begriffenen besondern Fall verbessert.

In

der einen eher als von den andern Gebrauch zu machen. Man muß auch in acht nehmen, daß in diesem Artikel nur die Rede von steigenden Reihen seyn kann, die, wenn k sehr klein ist convergiren, und daher die vorgegebene Function um so genauer darstellen als k einem geringern Werth hat, und die einzigen sind die es in diesem Falle machen können.

In der That, die Annahme von $x = a + k$ in der Function $b + \sqrt{x - a}$ giebt $b + k^{\frac{1}{2}}$; die Differenz zwischen diesen Werth und demjenigen, welcher $x = a$ entspricht ist $k^{\frac{1}{2}}$, dividirt man diesen letzten Werth durch k, so kömmt $\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$, eine Größe welche mit $\frac{dy}{dx}$* vom gleichem Werthe ist, und die unendlich wird, wenn man $k = 0$ macht.

* $\frac{2dy}{dx}$ G.

Wenn einer der Coefficienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, . . . durch die Substitution eines besondern Werths von x unendlich wird, und die vorgegebene Function immer endlich bleibt, so kann dieses nur daher kommen, daß ein Nenner, welchen die Differentiirung in dem in Redestehenden Coefficienten eingeführt hat, verschwindet; und da die verschiedenen Potenzen dieses Nenners selbst die Nenner der folgenden Coefficienten ausmachen, so ist evident, daß jeder von diesen hier mit dem ersten zugleich unendlich werden.

132.

Um diesen Bemerkungen alle Ausdehnung und Klarheit, welche ihre Wichtigkeit verdienet zu geben, so wollen wir noch die Entwickelungen von einigen zusammengesetztern Functionen als die vorhergehenden sind, untersuchen.

Es sey $y = bx^2 + c(x - a)^{\frac{3}{2}}$;

die Function y durch das Theorem von Taylor entwickelt, nimmt, wenn x sich in $x+k$ verändert, folgende Form an

$$bx^2 + (x-a)^{\frac{3}{2}} + \left\{2bx + \tfrac{3}{2}c(x-a)^{\frac{1}{2}}\right\}\frac{k}{1}$$
$$+ \left\{2b + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}c(x-a)^{-\frac{1}{2}}\right\}\frac{k^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Die

Die Annahme von $x = a$ reducirt die zwey ersten Glieder von dieser Reihe auf $ba^2 + 2bak$, und macht die folgenden, wegen den negativen Potenzen von $x - a$ die sie enthalten unendlich. Wenn man in den Differential-Coefficient von der ersten Ordnung

$$2bx + \tfrac{3}{2}c(x - a)^{\frac{1}{2}}$$

$a + k$ an die Stelle von x setzt, so kommt

$$2b(a + k) + \tfrac{3}{2}ck^{\frac{1}{2}};$$ und zieht man nachgehends den Werth ab, welchen er erhält, wenn $x = a$, so findet man

$$2bk + \tfrac{3}{2}ck^{\frac{1}{2}};$$

dividirt man dieses Resultat durch k, so muß man nach dem was in der vorhergehenden Nummer gesagt ist, daraus eine Größe ziehen die gleichgelten mit $\frac{d^2y}{dx^2}$* oder den Coefficienten von $\frac{k^2}{1.2}$ ist: Aber der Quotient

$$2b + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{c}{k^{\frac{1}{2}}}$$

zu welchen man gelangt, wird, wenn man $k = 0$ macht, unendlich, welches dem Resultate des Differentialcalculs gemäß ist.

* $\frac{2d^2y}{dx^2}$. G.

Das Taylorische Theorem auf die Function

$$y = bx^m + c(x - a)^{\frac{p}{q}}.$$

angewandt, giebt, indem man annimmt, daß aus k, $x+k$ wird

$$bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}} + \left\{ mbx^{m-1} + \frac{cp}{q}(x - a)^{\frac{p}{q}-1} \right\} \frac{k}{1}$$

$$+ \left\{ m(m-1)bx^{m-2} + \frac{cp(p-q)}{q^2}(x-a)^{\frac{p}{q}-2} \right\} \frac{k^2}{1.2} + \ldots$$

und

und man wird allgemein haben

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)bx^{m-n}$$

$$+ \frac{cp(p-q)\ldots(p-(n-1)q)}{q^n}(x-a)^{\frac{p}{q}-n}.$$

So lange wie n kleiner als $\frac{p}{q}$ ist, werden, wenn die Potenzen von $(x-a)$ positiv sind und man $x = a$, macht, solche verschwinden, und der zu diesem Falle besondern Werth von $\frac{d^n y}{dx^n}$, wird seyn

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)ba^{m-n}.$$

Nimmt man an daß m eine ganze positive Zahl bezeichnet, so wird dieser Ausdruck selbst Null, wenn n, m übertrift, aber bis dahin werden die obenstehenden Glieder der Entwickelung seyn

$$ba^m + mba^{m-1}.\frac{k}{1} + m(m-1)ba^{m-2}.\frac{k^2}{1.2} + \ldots$$

Ueber das Glied

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)ba^{m-n}.\frac{k^n}{1.2\ldots\ldots n},$$

hinaus, wird man, wenn m kleiner als $\frac{p}{q}$ ist, eine Folge von Null Coefficienten begegnen bis daß man eine Ordnung der Differentiirung erreicht hat die einen höhern Exponenten als $\frac{p}{q}$ hat.

Man sieht hieraus daß, in der Folge der Differential-Coefficienten, sich darin welche finden können die einen endlichen Werth haben, andere die Null sind, und endlich andere die unendlich sind. Man wird ein Bey-

spiel

spiel von diesen verschiedenen Fällen haben, indem man $m = 2$ und $\frac{p}{q} = \frac{7}{2}$ nimmt; denn man findet

$$y = bx^2 + c(x-a)^{\frac{7}{2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = 2bx + \tfrac{7}{2}c(x-a)^{\frac{5}{2}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2b + \tfrac{7}{2}.\tfrac{5}{2}.c(x-a)^{\frac{3}{2}};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \tfrac{7}{2}.\tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}c(x-a)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \tfrac{7}{2}.\tfrac{5}{2}.\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}c(x-a)^{-\frac{1}{2}}, \text{ u. s. w.}$$

Und die Annahme von $x = a$ wird geben

$$y = ba^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2ba, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2b,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{c}{0}, \ldots$$

Indem man in

$$bx^m + c(x-a)^{\frac{p}{q}}, \; x = a + k$$

macht, so wird

$$b(a+k)^m + ck^{\frac{p}{q}}$$

kommen, und unter dieser Form sieht man leicht, daß, wenn m kleiner als $\frac{p}{q}$ ist, darin eine Lücke zwischen den letzten Gliede bk^m des entwickelten Ausdrucks $b(a+k)^m$ und des Gliedes $ck^{\frac{p}{q}}$ ist. Wenn man durch r die ganze in $\frac{p}{q}$ enthaltene Zahl vorstellt, so wird dieser Buchstabe auch die Ordnung des Gliedes, welches das erste von denen Gliedern

Glieder vorangehet die durch die Annahme von $x = a$ undendlich werden, und welches von der Form

$$N(x - a)^{\frac{p}{q} - r}$$

seyn wird, wo N ein beständiger Factor bezeichnet. Nimmt man also wie man es in den vorhergehenden Nummern gemacht hat, den Unterschied von diesem Ausdruck, in dem Fall von $x = a$, so wird man finden

$$Nk^{\frac{p}{q} - r}$$

und indem man durch k dividirt, wird kommen

$$Nk^{\frac{p}{q} - r - 1}.$$

Um von diesem Resultate zu dem Werthe des Differential-Coefficienten von der Ordnung $r + 1$ überzugehen, muß man $k = 0$ machen; aber da $\frac{p}{q} - r$ durch Hypothese, eine kleinere Zahl als die Einheit ist, so wird der Exponent $\frac{p}{q} - r - 1$ negativ seyn, und folglich wird die Annahme $x = a$ die Größe

$$Nk^{\frac{p}{q} - r - 1}$$

unendlich machen.

133.

Wir werden hier die Folgerungen die man aus den vorhergehenden Beyspielen ziehen muß, zusammenstellen. Es gehet sogleich hervor, was den Differential-Coefficienten von der Function $y = (x - a)^n$ zustößt, oder geschiehet, wenn man darin $n = a$ macht (Num. 128), daß überhaupt alle die Coefficienten einer Function von der Form $y = X(x - a)^n$, von der ersten bis mit zur $(n - 1)$ten Ordnung in dem Fall von $x = a$ verschwinden, wenn k eine ganze positive Zahl ist, und daß die durch X vorgestellte Function von x, bey demselben Umstande nicht unendlich wird. Um sich davon zu überzeugen, ist es hinlänglich

$$X = t, \quad (x - a)^n = u$$

zu machen; daraus kömmt

$$d^m y = d^m . tu =$$

$$t d^m u + \frac{m}{1} dt d^{m-1} u + \frac{m(m-1)}{1.2} d^2 t \, d^{m-2} u \ldots$$

$$\ldots + u d^m t \text{ (Num. 107)}$$

und weil u, sowohl als seine Differentialen, bis zur Ordnung $n - 1$, bey der Annahme von $x = a$, Null sind, so folgt daraus daß $d^m y$ Null seyn wird, so lange m nicht $n - 1$ übertrift, und daß man haben wird, wenn $m = n$,

$$d^m y = t d^m u = 1.2 \ldots m X dx^m.$$

Die Entwickelung der vorgegebenen Function enthält also keine Potenz von k die niederer als n wäre.

In dem Falle, wo der Exponent n eine gebrochene Zahl ist, werden, indem man $x = a$ macht die Differential-Coefficienten von $X(x - a)^n$ unendlich, sobald als der Exponent ihrer Ordnung diese Zahl übertrift.

Endlich, wenn n eine negative Zahl wäre, so würde die vorgegebene Function mit ihren Differential-Coefficienten zugleich unendlich.

134.

In den besondern Fällen, wo der Differentialcalcul den Ausdruck der Entwickelung von $f(x + k)$ nicht geben kann, kann man dazu gelangen es sey so, wie man

es

es für obige Beyspiele gemacht hat, oder es sey durch Anwendung der in Num. 119 und folgenden vorgetragenen Methode: das erste dieser Mittel kann nur in Betracht der expliciten Functionen angewendet werden. Hätte man z. B.

$$y = (a - x)^2 \sqrt[3]{a^3 - x^3}$$

und man machte darin $x = a$, so würden die Differential-Coefficienten unendlich werden; aber indem man $a + k$ anstatt x schreibt, so würde man finden,

$$y = k^2 \sqrt[3]{-3a^2k - 3ak^2 - k^3} = -k^{2+\frac{1}{3}}[3a^2 + (3a + k)k]^{\frac{1}{3}}$$

und indem man entwickelt wird kommen

$$y = -(3a^2)^{\frac{1}{3}} k^{\frac{7}{3}} \left\{ 1 + \frac{k}{3a^2}(3a + k) + \ldots \right\} =$$

$$-(3a^2)^{\frac{1}{3}} k^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{a}(3a^2)^{\frac{1}{3}} k^{\frac{10}{3}} + \ldots$$

Ich habe hier nur die zwey ersten Glieder berechnet, weil in dem Gebrauche welchen wir in der Folge von den Entwickelungen dieser Art machen werden, ihr erstes Glied am öftersten hinreicht.

Wäre von einer impliciten Function die Rede, so würde man $a + k$ anstatt x in der Gleichung von welcher sie abhängt, substituiren; sieht man nachgehends y und k in der entstehenden Gleichung als allein veränderlich an, so würde man nach den weiter oben angeführten Nummern, den Ausdruck von der ersten durch eine steigende nach den Potenzen der zweyten geordneten Reihe, finden.

Die Gleichung

$$y^4 - 2x^2y^2 + 2x^4 - a^4 = 0$$

wird uns als Beyspiel dienen. Indem man sie differentiirt, so zieht man daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - 2x^3}{y^3 - x^2y},$$

und indem man $x = a$ annimmt, so reducirt sie sich auf

$$y^4 - 2a^2y^2 + a^4 = 0,$$

woraus $y = \pm a$ und $dy = -\frac{a^3}{0}$ folgt. Um die ersten Glieder der Entwickelung von y. in diesem besondern Falle zu erhalten, verändert man x in $a + k$, und wegen $x = a$, hat man $y = \pm a$, man schreibt $a + Ak^\alpha$ anstatt y, indem man von dem doppelten Zeichen $\pm$ abstrahirt, welches man leicht, wenn es nöthig wäre wiederherstellt. Man wird daher haben

$$a^4 - 2(a+k)^4 + 2(a+k)^2(a+Ak^\alpha)^2 - (a+Ak^\alpha)^4 = 0.$$

Da man in dieser Gleichung nur die mit der kleinsten Potenz von k behafteten Glieder betrachten muß, so gnügt es (Num. 121) auf

$$-4a^3k + 8a^0Ak^{\alpha+1} - 4a^2A^2k^{2\alpha} - 4aA^3k^{3\alpha} - A^4k^{4\alpha} = 0$$

Rücksicht zu nehmen, woraus man ziehen wird $\alpha = \frac{1}{2}$ und $a + A^2 = 0$; man wird also als Resultat haben

$$y = \pm a \pm k^{\frac{1}{2}}\sqrt{-a} + \ldots = \pm a \pm \sqrt{-ak} + \ldots$$

Man sieht hieraus, daß wenn man $x > a$ nimmt, so wird der Werth von y unmöglich seyn, und daß sie reel wird, wenn man k negativ annimmt, oder $x < a$.

Die vorgegebene Gleichung in Beziehung auf y nach Art der Gleichungen vom zweyten Grade aufgelößt, giebt

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \sqrt{a^4 - x^4}};$$

substituirt man $a + k$ statt x und entwickelt das Resultat, nur in dem ersten Gliede, so wird man auf die oben gefundenen zurückkommen.

Wir werden beobachten, daß man die Größe $\pm k^{\frac{1}{2}}\sqrt{-a}$ als den Ausdruck des Differentials von y,

als-in dem Falle wo $x = a$ ist, betrachten kann, weil sie alsdann das erste Glied der Entwickelung von der Differenz zwischen den Werthen von y, die $x = a$ und $x = a + k$ correspondiren, bildet.

Wir haben nicht gesucht die Anwendung der im vorhergehenden angezeigten Verfahrungsarten auf die Function lx zu machen, weil sie in keinem Falle, eine Entwickelung von der Form

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots \text{ (Einl. Num. 29)}$$

zulassen kann.

135.

Von den Ausdrücken, die in gewissen besondern Fällen $\frac{0}{0}$ werden.

Es kann nicht allein geschehen, daß die Differential-Coefficienten in einigen besondern Fällen Null oder unendlich sind, sondern sie können sich noch in andern Fällen unter einer unbestimmten Form darstellen, indem sie $\frac{0}{0}$ werden. Hätte man z. B.

$$ay = \sqrt{a^2x^2 - x^4},$$

so würde man davon ableiten

$$a \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}},$$

und wenn man $x = 0$ macht, so kömmt

$$a \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Demungeachtet wird man mit ein wenig Aufmerksamkeit sehen, daß der Zähler und der Nenner des Bruchs

$$\frac{a^2x - 2x^3}{\sqrt{a^2x^2 - x^4}}$$

nur deswegen zu gleicher Zeit verschwinden, weil sie mit dem gemeinschaftlichen Factor x behaftet sind; befreyet man man sie davon, so wird man finden

$$a \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und folglich $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{a}$, wenn $x = 0$ ist.

Ueberhaupt, wenn man in einem Ausdrucke von der Form

$$\frac{P(x - a)^m}{Q(x - a)^n},$$

$x = 0$ macht, so wird er $\frac{0}{0}$: demungeachtet muß sein wahrer Werth Null, oder endlich, oder unendlich seyn, je nachdem man $m > n$, $m = n$, $m < n$ haben wird; den, wenn man im Zähler und Nenner die gemeinschaftlichen Factoren ausstreicht, so findet man im ersten Falle

$$\frac{P(x - a)^{m-n}}{Q},$$

im zweyten

$$\frac{P}{Q}$$

und im dritten

$$\frac{P}{Q(x - a)^{n-m}},$$

wohlverstanden, daß die Größen P und Q so beschaffen sind, daß sie durch die Annahme von $x = a$ weder Null noch unendlich werden.

Sobald also ein beliebiger Ausdruck sich unter die Form $\frac{0}{0}$ darstellt, so muß man ihm, um seinen wahren Werth zu kennen, von dem den Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren befreyen. Der Bruch $\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$, z. B. welcher $\frac{0}{0}$ für $x = a$ wird, wird, wenn man ihn zu seiner kleinsten Anzahl von Glieder reducirt, verändert in

$$\frac{a^2 + ax + x^2}{a + x},$$

und giebt $\frac{3a}{2}$, wenn man darin $x = a$ macht.

136.

Die Bemerkungen von Num. 133 werden uns Mittel an die Hand geben, um zu dem wahren Werthe einer Function zu gelangen die $\frac{0}{0}$ wird, ein viel einfacheres und allgemeineres Mittel als die Aufsuchung des gemeinschaftlichen Factors. Man hat gesehen, daß alle Differentialien von einem Ausdrucke von der Form $P(x - a)^m$ bis mit zu dem von der $(m - 1)$ten Ordnung, bey der Annahme von $x = a$ verschwinden, wenn m eine ganze Zahl ist, und daß alsdann das Differential von der $m$ten Ordnung sich auf $1 . 2 \ldots mPdx^m$ reducirt: der Factor $(x - a)^m$ verschwindet also in dieser Hypothese nach m Differentiirungen.

Es ist nicht nothwendig, daß man den Exponent m kennt, noch selbst, daß der Factor $(x - a)^m$ genau bekannt sey, um zu wissen, wenn der Ausdruck $P(x - a)^m$ davon befreyet ist; es ist hinlänglich sich nach jeder Differentiirung zu versichern ob das erhaltene Resultat, wenn man a an die Stelle von x setzt, verschwindet oder nicht; im letzten Falle ist die Operation geendet, und daß was man gefunden hat stellt die Größe $1 . 2 \ldots mP$ vor. Es sey z. B. die Function

$$x^3 - ax^2 - a^2x + a^3,$$

die durch die Annahme von $x = a$ verschwindet; ihr erstes Differential verschwindet bey dieser Hypothese auch, aber ihr zweytes Differential, welches $(6x - 2a)dx^2$ ist, nicht; sie ist also nun von dem Factor $(x - a)$ befreyet, und weil hierzu zwey Differentiirungen nöthig waren, so muß man daraus schließen, daß sie von der Form $P(x - a)^2$ ist; welches übrigens leicht zu prüfen ist, denn man wird finden

$$x^3 - ax^2 - a^2x + a^3 = (x + a)(x - a)^2$$

Wenn man das Vorhergehende auf den Bruch

$$\frac{P(x - a)^m}{Q(x - a)^n}$$

anwendet, so wird man sehen, daß, wenn man verschiedenemal hintereinander seinen Zähler und seinen Nenner differentiirt, so werden sie, wenn $m = n$ beyde zu gleicher Zeit von dem Factor $(x - a)$ befreyet seyn. Ist es der Zähler welcher zuerst ein nicht verschwindendes Resultat giebt, so wäre dieses ein Beweis, daß der Factor $(x - a)$ sich darin auf einer geringern Potenz als im Nenner befindet, und folglich wird der vorgegebene Bruch unendlich seyn; ist es im Gegentheil der Nenner, so wird der vorgegebene Bruch Null. Man kann daher folgende Regel aussagen:

Um den wahren Werth einer Function zu erhalten, die $\frac{0}{0}$ wird, wenn man x einen besondern Werth giebt, so muß man ihren Zähler und Nenner differentiiren, bis daß man für den einen oder für den andern ein Resultat findet, welches nicht verschwindet; die vorgegebene Function wird im ersten Falle unendlich seyn, Null im zweyten, und wenn sie einen endlichen Werth hat, so wird man zu gleicher Zeit zwey nicht verschwindende Resultate begegnen.

Einige Beyspiele werden dieses genugsam erläutern.

137.

Es sey 1) die Function $\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2}$ von welcher man den Werth für $x = a$ verlangt; indem man ihren Zähler und ihren Nenner differentiirt, so wird man finden

$$\frac{-3x^2dx}{-2xdx},$$

woraus $\frac{3a}{a}$ entstehet, wenn man x in a verändert, eben so wie in Num. 135.

2) Die Formel $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ welche die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Reihe $\div$ 1, x, x^2, x^3, ... ausdrückt, wird $\frac{0}{0}$, wenn $x = 1$; unterdessen hat diese Summe in der geometrischen Progression $\div$ 1, 1, 1, 1, ... zu welcher man alsdann gelangt, einen bestimmten Werth der gleich n ist, welche die vorhergehende Regel uns auch geben wird. In der That, nachdem man den Zähler und den Nenner des Ausdrucks $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ differentiirt hat, so findet sich $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}$, und indem man 1 anstatt x schreibt, so kommt n.

3) Der wahre Werth von

$$\frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2},\text{*)}$$

 in

*) Ohne Differentiolcalcul erhält man den verlangten Werth leichter, wenn man bedenkt, daß die vorgegebene Function gleich

a(x²

in dem Falle von $x = 0$ ist, kann nur nach zwey Differentiationen gefunden werden, denn die erste giebt $\frac{ax - ac}{bx - bc}$, ein Resultat, welches noch $\frac{0}{0}$ wird; aber, wenn man noch einmal differentiirt, so findet sich $\frac{a}{b}$.

4) Wir wollen ferner noch den Werth von der Function

$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} \text{ *)}$$

suchen, wenn $x = a$ ist; wir werden finden, nachdem man einmal den Zähler und den Nenner differentiirt hat, daß der erste allein noch Null wird, wenn man a anstatt x setzt; wodurch wir belehrt werden, daß der wahre Werth der vorgegebenen Function Null ist. Das Gegentheil würde für die Function

$$\frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4} \text{ **)}$$

statt finden.

5) Ob

$$\frac{a(x^2 - 2cx + c^2)}{b(x^2 - 2cx + c^2)} \text{ also } = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

G.

*) Diese Function ist

$$\frac{x(x^2 - a^2) - a(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} = \frac{(x-a)(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} = x - a,$$

folglich wird sie für $x = a$ Null.

G.

**) Diese Function zerlegt man in Factoren und erhält:

$$\frac{(a-x)x}{a^4 - x^4 - 2ax(a^2 - x^2)} = \frac{(a-x)x}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2) - 2ax(a^2 - x^2)}$$

$$= \frac{(a-x)x}{(a^2 - x^2)(a^2 - 2ax + x^2)} = \frac{x}{(a+x)(a-x)^2};$$

folg-

5) Ob man zwar nicht sogleich einsieht, wie es möglich ist, die transcendente Function $\frac{a^x - b^x}{x}$ die für $x = 0$, $\frac{0}{0}$ wird, die Form $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ zu geben, so kann man demungeachtet bey ihr die Regel anwenden, und nachdem man ihren Zähler und ihren Nenner differentiirt hat, so findet man $a^x la - b^x lb$: setzt man 0 statt x, so hat man $la - lb$ für den wahren gesuchten Werth.

Dieses Resultat wird sogleich erhalten indem man statt den Functionen a^x und b^x ihre Entwickelungen (Einl. Num. 22) substituirt, denn es kommt

$$\frac{a^x - b^x}{x} = (la - lb) + \left\{ (la)^2 - (lb)^2 \right\} \frac{x}{1 \cdot 2} + \ldots$$

und die Annahme von $x = 0$ reducirt die zweyte Hälfte von dieser Gleichung auf ihr erstes Glied: folgt man die Operation, so wird man bemerken, daß darin ein Factor x ist, welcher durch die Division verschwindet.

6) Die Function

$$\frac{1 - \sin.x + \cos.x}{\sin.x + \cos.x - 1} \text{ *)}$$

re-

folglich für $x = a$, hat man den Werth $\frac{a}{0} = \infty$.

Eben dieses findet man auch durch den Differentialcalcul.

G.

*) Die Differentiation giebt

$$\frac{-\cos.x - \sin.x}{\cos.x - \sin.x}$$

und dieser Werth geht für $x = 90^\circ$ in $\frac{-1}{-1} = +1$ über. im Original stand -1. Ohne Differentialcalcul findet

man

reducirt sich auf $\frac{0}{0}$, wenn der Bogen $x = 90°$ ist; aber indem man die Regel auf ihr anwendet, so findet man daß ihr wahrer Werth alsdann $+ 1$ ist

7) Der Leser kann sich bey den Functionen

$$\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{2ax - x^2}} \text{ *)}, \text{ und } \frac{x^x - x}{1 - x + lx} \text{ **)}$$

üben;

man diesen Werth, wenn man den vorgegebenen Bruch verwandelt in

$$\frac{\sqrt{(1 - \sin.x,)^2} + \sqrt{1 - \sin.x^2}}{\sqrt{1 - \sin x^2} - \sqrt{(1 - \sin.x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \sin.x} + \sqrt{1 + \sin.x}}{\sqrt{1 + \sin.x} - \sqrt{1 - \sin.x}},$$

der alsdann für $x = 90°$, $+ 1$ giebt.

G,

*) Zähler und Nenner differentiirt giebt

$$\frac{-1 + \frac{a}{x}}{\frac{-(a - x)}{\sqrt{2ax - x^2}}} = \frac{(a - x)\sqrt{2ax - x^2}}{-x(a - x)}$$

$$= \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{-x} = -\frac{\sqrt{2a - x}}{x};$$

für $x = a$ wird dieser letzte Bruch $= -1$.

G.

**) Zähler und Nenner differentiirt giebt

$$\frac{x^x(1 + lx) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 1$$

Zähler

üben; die erste wird $\frac{0}{0}$ für $x = a$, und die zweyte für $x = 1$; ihre wahren Werthe sind respective -1 und -2.

138.

Es ist leicht zu sehen, daß die Regel von Num. 136 nicht in den Fällen, wo die verschwindenden Factoren auf einer Bruchpotenz erhoben wären, den die Differentialien von der Function $P(x-x)^m$ sind Null oder unendlich, wenn m keine ganze Zahl ist (Num. 133). Wenn man z. B. $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ hätte, obgleich der wahre Werth dieses Bruchs, $2a^{\frac{3}{2}}$ für $x = a$ ist, so wird man doch niemals durch Differentiirung dazu gelangen: man würde successive finden

$$\frac{3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}+3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}\ldots;$$

das erste von diesen Resultat wird noch $\frac{0}{0}$, wenn man $x = a$ macht, und die nemliche Voraussetzung macht die Zähler und die Nenner von jeden der folgenden unendlich. Wenn man die negativen Exponenten wegschaft, indem man die, welche im Zähler sind im Nenner übergehen läßt, et vice versâ, so reduciren sich alle daraus entstehenden neuen Ausdrücken auf $\frac{0}{0}$.

139.

Zähler und Nenner dieses Bruchs nochmal differentiirt giebt

$$\frac{x^x(1+lx)^2+x^{x-1}}{\frac{-1}{x^2}},$$

für $x = 1$ wird dieser Bruch $= -2$.

G.

139.

Hier folgt ein allgemeines von allen Schwierigkeiten befreytes Verfahren, welche die Regel von Num. 136 in in sich begreift, und welche ich nur deswegen zuletzt vortrage, weil es mich dünkte, daß die Betrachtungen in der angeführten Nummer ein großes Licht über den uns beschäftigenden Gegenstand werfen könnte.

Es sey $\frac{X}{X'}$ ein Bruch dessen Zähler und Nenner alle beyde für $x = a$ verschwinden; setzt man $a + k$ anstatt x, so entwickeln sich die Functionen X und X' in steigenden Reihen von der Form

$$Ak^{\alpha} + Bk^{\beta} + \ldots, \quad A'k^{\alpha'} + B'k^{\beta'} + \ldots;$$

weil sie in der Hypothese von $k = 0$ zu Null werden sollen, welche Hypothese der von $x = a$ entspricht; man wird also statt des gegebenen Bruchs, haben

$$\frac{Ak^{\alpha} + Bk^{\beta} + \ldots}{A'k^{\alpha'} + B'k^{\beta'} + \ldots}.$$

Wenn man in diesem Resultate wirklich $k = 0$ annimmt, so muß man auf den Werth, welchen die Function $\frac{X}{X'}$ erhält, wenn man x in a verändert, zurückfallen, und obgleich dieses Resultat sich auf $\frac{0}{0}$ zu reduciren scheint, so wird man doch einsehen lernen, daß es immer einen bestimmten Werth hat. Unterscheidet man drey Fälle

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha = \alpha' \text{ und } \alpha < \alpha',$$

so könnten wir in den beyden ersten Fällen den vorhergehenden Ausdruck wie folget schreiben:

$$\frac{Ak^{\alpha-\alpha'} + Bk^{\beta-\alpha'} + \ldots}{A' + Bk^{\beta'-\alpha'} + \ldots}.$$

Unter dieser Form ist es leicht wahrzunehmen, daß, so lange α, α' übertrift, die Annahme $k = 0$ den Bruch zu Null macht, und daß er sich auf $\frac{A}{A'}$ reducirt, wenn man $\alpha = \alpha'$ hat. In dem dritten Falle, im Gegentheile, wo $\alpha <$ als α' ist, wird man haben

$$\frac{A + Bk^{\beta-\alpha} + \ldots}{A'k^{\alpha'-\alpha} + B'k^{\beta'-\alpha} + \ldots};$$

und dieses Resultat, wird für die Annahme von $k = 0$ unendlich. In allen diesen Fällen, hängt der gesuchte Werth nur von dem ersten Gliede jeder Reihe ab.

Die folgende Regel erstreckt sich auf alle Functionen, welche sich unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen können: man suche das erste Glied von jeder der steigenden Reihen, welche die Entwickelungen des Zählers und Nenners für $x = a + k$ ausdrücken, man reducire den durch diese beyden ersten Glieder gebildeten neuen Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck, und mache nachgehends $k = 0$; die Resultate die man erhalten wird werden die unterschiedene Werthe seyn, welche der vorgegebe Bruch für $x = a$ erhält.

Diese Regel wird öfters bequemer scheinen als das Verfahren von der Differentiation, in dem Falle, wo letzteres angewendet werden kann. Nur nachdem man z. B. viermal hintereinander den Zähler und den Nenner des Bruchs

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$$

Differentiirt hat, kömmt man endlich dahin den wahren Werth in dem Falle wo $x = a$ zu finden.

Indem man $a+k$ anstatt x schreibt, wie es die Regel vorschreibt, so kömmt

$$\frac{2a^3+2a^2k-ak^2+k^3-2a^2\sqrt{a^2+2ak}}{-2a^2+k^2+2a\sqrt{a^2-k^2}};$$

wenn man die beyden Wurzelgrößen in Reihen reducirt, so hat man

$$\sqrt{a+2ak} = a+k-\frac{k^2}{2a}+\frac{k^3}{2a^2}-\frac{5k^4}{8a^3}+\ldots$$

$$\sqrt{a^2-k^2} = a-\frac{k^2}{2a}-\frac{k^4}{8a^3}-\ldots$$

die Substitution dieser zwey Reihen in den vorhergehenden Bruch wird für den gesuchten wahren Werth $-5a$ geben.

In dem Falle, wo der besondere Werth von x einige Wurzelgrößen verschwindend macht, und die dadurch der Regel von Num. 136 entgehen, muß man nothwendig zu der eben gebrauchten seine Zuflucht nehmen.

Der Bruch $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ dessen Werth man für $x=a$ durch die Differentiation nicht erhalten kann (Num. 138), giebt

$$\frac{(2ak+k^2)^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}} = (2a+k)^{\frac{3}{2}}$$

indem man x in $a+k$ verändert, und macht man $k = 0$ so erhält man den wahren Werth $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

104.

140.

Eine Function kann sich noch unter verschiedenen unbestimmten Formen darstellen, die dem Scheine nach von $\frac{0}{0}$ unterschieden sind, die aber im Grunde zu der nemlichen Form zurückkommen, und die zu kennen gut ist.

1) Der Zähler und der Nenner von dem Bruche $\frac{X}{X'}$ können zu gleicher Zeit unendlich werden; wir haben davon ein Beyspiel in Num. 138. bey dem Ausdruck

$$\frac{3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + 3x^2(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(x-a)^{-\frac{1}{2}}}$$

gegeben, und wir haben angezeigt wie man daraus ein Resultat ziehen kann, welches $\frac{0}{0}$ wird, wenn $x = a$. Allgemein, wird der Bruch $\frac{X}{X'}$ also geschrieben

$$\frac{\frac{1}{X'}}{\frac{1}{X}}$$

so reducirt er sich auf $\frac{0}{0}$, wenn X und X′ unendlich sind; die Substitution von $a + k$ anstatt x wird auch zu seinem wahren Werthe führen, ohne daß es nöthig sey ihre Form zu ändern. Das oben beygebrachte Beyspiel wird durch diese Substitution.

$$\frac{(2ak+k^2)^{\frac{1}{2}} + (a+k)^2(2ak+k^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}k^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 4k(2a+k)^{\frac{1}{2}} + 4(a+k)^2(2a+k)^{-\frac{1}{2}}$$

und indem man $k = 0$ macht, so gehet daraus hervor

$$4a^2(2a)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wenn man den Werth verlangt, welchen die Function $\frac{x^n}{lx}$ erlangt, wenn x unendlich ist, oder, welches einerley ist, die Grenze von dieser Function, so könnte man dazu wegen der Unmöglichkeit lx in einer Reihe zu reduciren, durch keine der Verfahrungsarten deren wir uns bis jetzt bedient haben gelangen; und man müßte zu den der Natur der vorgegebenen Function eigenen Betrachtungen Zuflucht nehmen. Man hat durch Num. 25 der Einleitung

$$x = 1 + \frac{lx}{1} + \frac{(lx)^2}{1.2} + \frac{(lx)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wodurch man sieht, daß je größer die Größe x seyn wird, je mehr wird sie ihren Logarithmus übertreffen, und je beträchtlicher wird auch der Werth des Ausdrucks $\frac{x}{lx}$ seyn; aber $\frac{x^n}{lx} = x^{n-1} . \frac{x}{lx}$: die Function $\frac{x^n}{lx}$ wird also ohne aufhören zu nehmen und wird mit x zu gleicher Zeit unendlich werden. Von dieser Schlußfolge muß man jedoch den Fall ausnehmen in welchem der Exponent n unendlich klein wäre, denn es folgt daraus, daß $x^0 = 1$ ist, daß was auch x immer sey, man immer x^n so wenig von der Einheit unterschieden machen kann, als man wollte, indem man n von einer schicklichen Kleinheit nimmt *).

Es

*) Ich habe vorausgesetzt, daß hier die Rede von Neperfche Logarithmen wäre, wenn aber der Modul nicht der Einheit gleich wäre, so wird nicht desto weniger die Zahl x endlich ihren Logarithmen übertreffen, nur wird dieses eher oder später

2) Es kann geschehen, daß man ein aus zwey Factoren bestehendes Product antrifft, wo der eine Factor unendlich der andere Null ist: Es sey PQ dieses Product, wenn die Annahme von $x = a$, $P = 0$, $Q = \frac{b}{0}$ giebt, so macht man $Q = \frac{1}{R}$, und R wird in derselben Hypothese gleich Null; es wird also kommen

$$PQ = \frac{P}{R} = \frac{0}{0}.$$

Wir wollen als Beyspiel den Ausdruck

$$(1 - x)\text{tg.}\,\frac{\pi x}{2}$$

nehmen, wo π die halbe Creisperipherie bezeichnet; wenn man $x = 1$ macht, so verschwindet auf der einen Seite die Größe $1 - x$, und auf der andern wird die Tangente unendlich, wenn $\frac{\pi x}{2}$ gleich 90° ist. Um also zu dem wahren Werthe dieses Bruchs zu gelangen, so muß man $\text{tg.}\,\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{R}$ machen, und indem man sich erinnert, daß $\text{tg.}A = \frac{1}{\text{tg.}\,A}$, so wird man $R = \cot.\,\frac{\pi x}{2}$ haben; die vorgegebene Function wird folglich

$$\frac{1 - x}{\cot.\,\frac{\pi x}{2}},$$

ein Bruch welcher sich auf $\frac{0}{0}$ reducirt, wenn $x = 1$.

ter geschehen, je nachdem, daß der Modul geringer oder größer als die Einheit ist, aber immer vorher ehe man $x = 1$ hat.

Man wird durch die Regel von Num. 136 finden, daß sein wahrer Werth $\frac{2}{\pi}$ ist, indem man beobachtet, daß

$$d.\cot.\frac{\pi x}{2} = -\frac{\frac{1}{2}\pi dx}{\left(\sin.\frac{\pi x}{2}\right)^2}$$ (Num. 22), und

daß der $\sin.\frac{\pi}{2} = \sin.90^\circ = 1.$

3) Wir wollen endlich annehmen, daß man den Werth von der Differenz $P - Q$ verlangte, wenn die durch die Buchstaben P und Q vorgestellten Functionen von x unendlich sind. Wenn diese Functionen algebraisch rational und ganz sind, so können sie nicht unendlich werden als in dem Fall, wo x es auch wird, und der Ausdruck $P - Q$ kann nicht eher einen endlichen Werth haben, wenn man nicht wenigstens $P = Q + b$ hat, wo b eine beständige Größe ist. Wenn P und Q Brüche sind deren Zähler und Nenner verschwinden, so ist es leicht die vorgegebene Function in einer andern zu verwandeln, welche $\frac{0}{0}$ wird; es ist dazu genung P und Q zu einerley Nenner zu reduciren.

Es sey z. B. $P = \frac{1}{1-x}$ und $Q = \frac{2}{1-x^2}$; es wird hieraus der Ausdruck

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$$

entstehen davon jedes Glied für $x = 1$ unendlich wird: indem man jenen Ausdruck zu einerley Nenner reducirt, so wird man finden

$$\frac{-1 + 2x - x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

Dieser

Dieser Bruch giebt für $x = 1$, $\frac{0}{0}$, und sein wahrer Werth ist in diesem Falle $\frac{1}{2}$.

Wir wollen noch ferner die transcendenten Functionen

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}, \text{ und } \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x\,tg.\,\pi x}$$

betrachten. Die Erste, wird, wenn $x = 1$, die Differenz von zwey unendlichen Größen, setzt man aber $1+k$ anstatt x, so nimmt sie die Form

$$\frac{1+k}{k} - \frac{1}{l(1+k)}$$

an; da nun

$$l(1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \ldots$$

so ist

$$\frac{1+k}{k} - \frac{1}{l(1+x)} = \frac{(1+k)l(1+k)-k}{kl(1+k)}$$

$$= \frac{\frac{k^2}{2} - \frac{k^3}{3} + \ldots}{k^2 - \frac{k^3}{2} + \ldots}$$

Die beyden Glieder des letzten Bruchs durch k^2 dividirt, und nachgehends $k = 0$ gemacht, so erhält man $\frac{1}{2}$ für den wahren Werth von $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$, in dem Fall, wo $x = 1$ ist.

Die Function $\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x\,tg.\,\pi x}$ wird $\frac{1}{0} - \frac{\pi}{0}$, wenn man darin $x = 0$ macht; setzt man aber k an die Stelle von x, und substituirt anstatt der $tg\,\pi k$, die Entwickelung $\frac{\pi k}{1} + \frac{2\pi^3 k^3}{1.2.3} + \ldots$, welche aus der Formel von Num. 106 hervorgehet, so wird man haben

Dd 3

$$\frac{1}{2k^2} - \frac{\pi}{\frac{2\pi k^2}{1} + \frac{4\pi^3 k^4}{1.2.3} + \ldots}$$

Diese beyden Brüche auf einerley Nenner reducirt, die beyden Glieder des Resultats mit k^4 dividirt, und endlich $k = 0$ gesetzt, giebt $\frac{\pi^2}{6}$. Ich werde bemerken lassen, daß, indem man die beyden Glieder der vorgegebenen Function auf einerley Nenner reducirt, man $\frac{tg.\pi x - \pi x}{2x^2 tg.\pi x}$ finden würde; und schreibt man o anstatt x, so würde $\frac{0}{0}$ kommen.

141.

Wir haben bisher nur explicite Functionen von x betrachtet; es bleibt uns zu zeigen übrig wie sich die Regel von Num. 139 auf implicite Functionen anwendet; dieses wollen wir bey dem aus der Gleichung

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$$

gezogenen Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ zeigen.

Man hat $\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 + 3x^2y}{3ay^2 - x^3}$,

und wenn $x = 0$, so findet man $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Aber wenn, statt x gleich Null anzunehmen, man sie als eine kleine Größe betrachtet, so könnte man an die Stelle von y die erste Reihe aus Num. 124 setzen, und es wird kommen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 + 3x^3 + \ldots}{2ax^2 + x^3 + \ldots};$$

Die

Die beyden Glieder dieses Bruchs durch x^2 dividirt, und nachgehends $x = 0$ gemacht, giebt $\frac{dy}{dx} = \frac{3a}{3a} = 1$.

Die Größe $\frac{dy}{dx}$ hat noch zwey unmögliche Werthe; denn indem man zu der angeführten Nummer zurückgehet, so wird man sehen, daß da in der Aufsuchung des ersten Gliedes der steigenden Reihe von welcher man Gebrauch macht, der Coefficient A, welche das erste Glied multiplicirt, durch die Gleichung $a - aA^3 = 0$, oder $A^3 - 1 = 0$ gegeben ist, dieser Coefficient drey Werthe hat, der erste gleich der Einheit, und zwey andere unmöglich; man hätte also eigentlich zu reden drey steigende Reihen in den Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ an die Stelle von y zu setzen.

Allgemein, wenn die Annahme von $x = a$ eine beliebige Function von x und y, $\frac{0}{0}$ macht, wo y selbst eine implicite durch eine Gleichung gegebene Function ist, so muß man $a + k$ für x substituiren, und successive statt y die verschiedene steigende Reihen die ihre Entwickelung nach den Potenzen von k ausdrücken: nachgehends sucht man was das Resultat wird, wenn man darin $k = 0$ macht, und erhält dadurch dem wahren Werth von der vorgegebenen Function.

142.

Ehe dieser Gegenstand verlassen wird, bey welchem man meine Verweilung wegen seiner Wichtigkeit verzeihen wird, werde ich ein Verfahren kennen lehren, welches der Differentialcalcul darbietet, um den wahren

Werth der Differential-Coefficienten eine impliciten Function zu finden, wenn sie sich unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen.

Wenn man zu der Erzeugung der Differentialgleichungen von zwey veränderlichen Größen zurück steigt, so wird man sich erinnern, daß sie aus der Substitution von $x + h$ und von

$$y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

anstatt x und y, in einer ursprünglichen Gleichung $u=0$ (Num. 40) entstehen, und daß man sie bildet indem man successive den Coefficienten von jeder Potenz von h gleich Null setzt. Wenn aber irgend ein besonderer Werth von x, M und N verschwindend macht, so kann, da das erste Differential

$$M + N \frac{dy}{dx} = 0 \text{ (Num. 49)}$$

von selbst identisch wird, nicht mehr $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen dienen; in diesem Falle muß man zu dem zweyten Differential Zuflucht nehmen, daß weil $N = 0$, sich auf

$$P + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

reducirt: hier ist also $\frac{dy}{dx}$ durch eine Gleichung vom zweyten Grade gegeben. Wenn die Coefficienten P, Q, und R auch verschwinden, so macht man von dem dritten Differentiale Gebrauch, welches in dieser Hypothese, wird

$$S + T \frac{dy}{dx} + V \frac{dy^2}{dx^2} + W \frac{dy^3}{dx^3} = 0$$

und $\frac{dy}{dx}$ bestimmt. Wenn die Coefficienten von dieser letzten Gleichung sich noch vernichten, so würde man das 4te Differential suchen u. s. w.

Da

Da die mit $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. behafteten Glieder verschwinden, so sieht man, daß es hinlänglich ist, verschiedene mal hinter einander die ursprüngliche Gleichung $u = 0$ zu differentiiren, indem man dx und dy als beständig ansieht, bis daß man zu einem Resultate gelangt, welches die Substitution von dem besondern Werthe von x nicht verschwinden läßt.

Wendet man dieses Verfahren auf die Gleichung

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$$

an, so wird man sehen, daß die ersten und zweyten Differentialien für die Annahme von $x = 0$ verschwinden, und daß das dritte differential sich auf

$$6adx^3 - 6ady^3 = 0$$

reducirt, woraus $\frac{dy^3}{dx^3} - 1 = 0$ hervorgehet. Man hat also $\frac{dy}{dx} = 1$, eben so wie in der vorhergehenden Nummer.

Wenn man $\frac{dy}{dx}$ einer beliebigen Function von x gleich setzt, und die daraus entstehende Gleichung für das Differential einer ursprünglichen Gleichung genommen werden kann, so werden wiederholte Differentiationen wie im vorhergehenden Beyspiele den wahren Werth von dieser Function kennen lehren, wenn sie fähig ist $\frac{0}{0}$ zu werden. Dieses ist die Regel, welche Cousin (Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 1796 in 4to Tome 1er pag. 117) giebt, um in allen Fällen die Bedeutung der unbestimmten erscheinenden Functionen zu finden; man muß aber beobachten, daß unter dieser Form dargestellt, sie nicht so allgemein ist als es der Autor aussagt, und daß sie sich denn Fällen versagt, die der in Num.

136. gegebenen Regel sich entziehen, es sey dann, daß man vorhero die Wurzelgrößen wegschaft, eine Bedingung die auszudrücken unerlaßlich ist.

Wenn man die Function

$$\frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}}$$

vorgebe, so zöge man daraus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x - a)^{\frac{3}{2}}},$$

daraus

$$(x - a)^3\, dy^2 - (x^2 - a^2)^3\, dx^2 = a.$$

Nach drey Differentiationen, hätte man, indem man $x = a$ macht

$$6dx^3dy^2 - 48a^3dx^5 = 0,$$

welches $\frac{dy}{dx} = (2a)^{\frac{3}{2}}$ gebe, ein Resultat, welches dem von Nummero 139 gemäß ist. In einem viel verwickelteren Beyspiele hätte das Wegschaffen der Radicalien viel Calcul erheischen können, und aus dieser Ursache kann das gegenwärtige Verfahren im allgemeinen nicht bequem seyn.

143.

Um die Aufmerksamkeit des Lesers besser über die in den vorhergehenden Artikeln ausgesagten Sätze und Regeln zu fixiren, so wollen wir davon die Racapitulation machen.

1) Jede Function die sich unter die Form $\frac{0}{0}$ darstellt, wenn man der veränderlichen Größe von welcher sie abhängt einen besondern Werth giebt, hat immer einen bestimmten Werth, er sey Null, er sey endlich, oder unendlich.

Dem=

Demungeachtet, giebt es durch $\frac{0}{0}$ ausgedrückte Größen, die wirklich unbestimmt sind. Hätte man z. B. die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\} \text{so zöge man daraus wie man weiß} \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b} \\ y=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b} \end{array}\right.$$

Diese Werthe werden $\frac{0}{0}$, wenn man darin $a'=am$, $b'=bm$, $c'=cm$, macht, und in diesem Falle würde die Frage wirklich unbestimmt seyn, denn da die zweyte Gleichung sich in $max+bmy+cm=0$ verwandelt, so sagt sie nicht mehr als die erste. Wir haben ebenfalls in Num. 60 zwey wahrhaft unbestimmte Resultate angetroffen; aber in dem einem und in dem andern Umstande werden die Functionen $\frac{0}{0}$, weil mehrere Größen zugleich besondere Werthe annehmen. (M. s. Num. 147).

2) In allen Fällen wo die Function von welcher man den wahren Werth sucht keine Radicalgrößen enthält, oder auch, wenn die unter solchen Zeichen gesetzten Größen nicht verschwinden, dergestallt, daß keine einzige irrationale Größe verschwindet, so kann man sich der Regel von Num. 136 bedienen. Im entgegengesetzten Falle, muß man die von Num. 139 anwenden.

Uebrigens glauben wir denen von unsern Lesern, welche den Differentialcalcul zum erstenmale studiren vorhersagen zu müssen, daß die in den Num. 128 und 135 vorgelegten analytischen Wahrheiten, sich gewissermaaßen, durch krumme Linien zeichnen lassen, und daß sie sich auf gewisse Umstände ihrer Form beziehen lassen. Diese Zusammenstellung, die ein großes Licht über alles das was bisher gesagt ist werfen werden, sollen mit Sorgfalt, in dem vierten Capitel entwickelt werden.

144.

144.

Von der Entwickelung der Functionen von zwey veränderliche Größen.

Wir werden sehr wenig über die Art Functionen von zwey veränderliche Größen in Reihen zu reduciren sagen, weil es am öftersten vorkömmt, daß man sie nur in Rücksicht einer der von ihr enthaltenen veränderlichen Größen entwickelt, indem man für die andern einen beständigen Werth annimmt, und sie alsdann eben so behandelt werden müssen, als die Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe. Es wird vielleicht demungeachtet möglich seyn, zu zeigen, daß die Formel von Num. 32. sich eben so anwenden läßt die Functionen von zwey veränderlichen Größen zu entwickeln, wie sich die Formel von Num. 12 bey Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe.

Wenn man in der Formel von Num. 32, $x = 0$ und $y=0$ macht, d. h. in u und in jeder ihrer Differential-Coefficienten, so wird sie die Entwickelung von $f(h, k)$ nach den Potenzen der Größen h und k geordnet geben; man könnte aber x anstatt h, und y anstatt k schreiben, und es würde daraus entstehen.

$$f(x,y)=u+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}.x+\frac{du}{dy}.y\right\}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}.x^2+2\frac{d^2u}{dxdy}xy+\frac{d^2u}{dy^2}y^2\right\}$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

indem man beobachtet, daß man x und y sowohl in u als in den Ausdrücken, welchen man für jeden Differential-cofficienten erhalten wird zu Null macht. Dieses ist gänz-

lich

lich dem in Num. 100 Gesagten ähnlich, und bietet dieselben Bemerkungen dar.

Man könnte die Entwickelung von $f(x, y)$ noch durch die Differentiation erhalten, eben so wie man in Num. 109 zu der Entwickelung von $f(x)$ gekommen ist; denn wenn man annimmt

$$u = \left.\begin{array}{l} A + Bx + Cy \\ + Dx^2 + Exy + Fy^2 \\ + \ldots \end{array}\right\},$$

wo die Buchstaben A, B, C ... von x und y unabhängige Größen bezeichnen, und man diese Gleichung mehreremal hinter einander in Beziehung auf x und in Beziehung auf y differentiirt, damit man die Differential-Coefficienten

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx\,dy} \text{ u. s. w., erhält}$$

so wird man haben, wenn man nach den Differentiationen x und y gleich Null setzt,

$$\frac{du}{dx} = B, \frac{du}{dy} = C,$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2D, \quad \frac{d^2u}{dxdy} = 1.1.E,$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 1.2.F \text{ u. s. w.}$$

was A betrift, so wird man seinen Werth finden, indem man den Werth von der Function u sucht, wenn x und y Null sind.

145.

Wenn die zu entwickelnde Function implicite durch eine oder mehrere Gleichungen gegeben ist, so befolgt man ein dem in Num. 110 analogen Verfahren. Wir wollen

wollen uns z. B. aufgeben eine beliebige Function u, welche 4 veränderliche Größen enthält, zwischen welchen man die zwey Gleichungen $P = 0$, $Q = 0$ hat, in einer Reihe zu reduciren.

In allen Fragen von dieser Art, muß man zuerst erkennen, welches die veränderlichen Größen sind, die man als unabhängig ansehen soll; hier, weil zwey Gleichungen da sind, könnte man immer zwey veränderliche Größen als Functionen von zwey andern bestimmen. Gesetzt also dieses seyn t und x die man als unabhängig ansieht; so wird man leicht sehen, daß in dieser Hypothese u eine implicite Function von diesen letztern ist, weil man daraus y und z, vermittelst der gegebenen Gleichungen wegschaffen kann: ist dieses geschehen, so hat man das erste Glied von ihrer Entwickelung, wenn man darin t und x Null annimmt.

Um die durch x und y multiplicirten Glieder zu erhalten, muß man in t und in x die Ausdrücke der Differential-Coefficienten $\frac{d(u)}{dt}$, $\frac{d(u)}{dx}$ finden; man hat

$$\frac{d(u)}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Nach Num. 81 zieht man auch die Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP}{dt} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dP}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = 0 \\ \frac{dQ}{dt} + \frac{dQ}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dQ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dP}{dx}+\frac{dP}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dP}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0\\ \frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dQ}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0\end{array}\right\}.$$

Von diesen vier Gleichungen werden die zwey ersten geben $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dx}$, und die zwey letztern $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, in t, x, y und z; substituirt man in $\frac{d(u)}{dt}$ und $\frac{d(u)}{dx}$ die gefundenen Werthe; macht nachgehends $t=0$, $x=0$, und ersetzt y und z durch die besondern Werthe die sie bey diesem Umstande erhalten, so werden die Resultate, welche man erhält, diejenigen Größen seyn, welche die erste Potenz von x und die von y multipliciren müssen.

Wenn man den Ausdruck von

$$\frac{d^2(u)}{dt^2},\ \frac{d^2(u)}{dt.dx},\ \ldots\ \frac{d^{m+n}(u)}{dt^m\,dx^n},\ \text{u. s. w.}$$

sucht, so wird man die Coefficienten von t^2, tx, ... $t^m x^n$, u. s. w. in der Entwickelung der vorgegebenen Function erhalten; aber die Rechnungen werden zu sehr zusammengesetzt, um uns dabey aufzuhalten, und bietet übrigens keine Schwierigkeit dar, wenn man die Theorie der Differentiation der Functionen von mehreren veränderlichen Größen inne hat.

146.

Laplace der sich mit Functionen von einer beliebigen Anzahl von veränderlichen Größen, jenen von uns in Num. 111 betrachteten analog, beschäftiget hat, ist nach Lagrange in diesem allgemeinen Fall zu einer Entwickelung von sehr einfacher Form gelangt. Da ein Werk von einer Natur wie dieses, nicht alle Details verträgt, wel-

welche Laplace in seinem interessanten Memoire eingerückt hat, so werden wir uns mit dem begnügen was die Functionen von zwey veränderlichen Größen betrift, und indem wir die sinnreichen Kunstgriffe, welche Laplace in dieser Untersuchung angewendet hat vorlegen, so werden wir den uns vorgesetzten Zweck erfüllen, denjenigen nemlich; die merkwürdigsten analytischen Verfahrungsarten kennen zu lernen.

Es sey u eine beliebige Function von zwey veränderlichen Größen y und z, durch die beyden Gleichungen

$$y = F(a + t\varphi(y, z))$$

$$z = F_1(b + x\varphi_1(y, z))$$

bestimmt, wo F, F_1, φ und φ_1 auch beliebige Functionen bezeichnen; wenn man diese letztern particularisirt hätte, und daß die Form der obigen Gleichungen die Eliminirung erlaubte, so würde man dazu gelangen die Werthe von y und von z, in a und t, b und x jeden besondern kennen zu lernen. Man muß also die zwey ersten Größen, als Functionen der 4 letzten Größen ansehen, und indem man sie unter diesem Gesichtspuncte differentiirt, wird man folgende Differential-Coefficienten bilden.

$$\frac{dy}{da} = F'(a+t\varphi) \cdot \left(1 + t\frac{d\varphi}{da}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = F'(a+t\varphi) \cdot \left(\varphi + t\frac{d\varphi}{dt}\right)$$

$$\frac{dy}{db} = F'(a + t\varphi) \cdot t\frac{d\varphi}{db}$$

$$\frac{dy}{dx} = F'(a + t\varphi) \cdot t\frac{d\varphi}{dx}$$

Um abzukürzen, hat man nur φ statt $\varphi(y, z)$ geschrieben und man wird eben einen solchen Gebrauch in Betreff von $\varphi_1(y, z)$ machen; man hat überdem bey den Differenrentialien der Functionen u, ϕ und $\phi 1$ die Parenthesen weggelassen, denn da sie die veränderlichen Größen t und x nur implicite enthalten, so ist keine Verwirrung zu fürchten (Num. 70).

Wenn man t und x Null annimmt, so entstehet daraus

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy}{da} = F'(a)\\ \frac{dy}{dt} = F'(a).\phi\\ \frac{dy}{db} = 0\\ \frac{dy}{dx} = 0.\end{array}\right\}\ \text{Unter denselben Umständen wird man finden}\ \left\{\begin{array}{l}\frac{dz}{da} = 0\\ \frac{dz}{dt} = 0\\ \frac{dz}{db} = F'1(b)\\ \frac{dz}{dx} = F'1(b).\phi 1\end{array}\right.$$

u wird bloß von a und von b Function, weil alsdann

$$y = F(u) \text{ und } z = F1(b);$$

die in der vorhergehenden Nummer gegebene Ausdrücke von $\frac{d(u)}{dt}$ und $\frac{d(u)}{dx}$, reduciren sich also auf

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d(u)}{dt} = \frac{du}{dy}.\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dy}F'(a).\phi\\ \frac{d(u)}{dx} = \frac{du}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{du}{dz}F'1(b).\phi 1\end{array}\right\}$$

und weil $\left.\begin{array}{l}F'(a) = \frac{dy}{da}\\ F'(b) = \frac{dz}{db}\end{array}\right\}$ so hat man $\left\{\begin{array}{l}\frac{du}{dt} = \frac{du}{da}.\phi\\ \frac{du}{d} = \frac{du}{db}.\phi 1\end{array}\right.$

wenn x = 0 und t = 0.

Nehmen wir für einen Augenblick an, daß man aus der Gleichung $z = F1(b + x\phi 1)$ den Werth von z gezogen hat, und daß man ihn in der Function u substituirt hat; so wird alsdann diese Function nur noch von den veränderlichen Größen y und x abhangen; und in den Differentiationen in Beziehung auf t, gnüget es auf die erste Rücksicht zu nehmen, weil die zweyte eine von den unabhängigen veränderlichen Größen ist. Wenn man aber aus der Gleichung $y = F(a + t\varphi)$ zu gleicher Zeit z wegbringt, so könnte die Function φ, wenn man in Rücksicht von t differentiirt angesehen werden als wenn sie nur y enthielte; man wird also Num. 12 zufolge haben,

$$\frac{d^m u}{dt^m} = \frac{d^{m-1}.\varphi^m \frac{du}{da}}{da^{m-1}}$$

und folglich

$$\frac{d^{m+1}u}{dt^m dx^n} = \frac{d^n\left(\frac{d^{m-1}.\varphi^m\frac{du}{da}}{da^{m-1}}\right)}{dx^n} = \frac{d^{m-1}\left(\frac{d^n.\varphi^m\frac{du}{da}}{dx^n}\right)}{da^{m-1}}$$

Es ist klar, daß die Entwickelung von $d^n.\varphi^m\frac{du}{da}$ sich aus der von $d^n.\varphi\frac{du}{da}$ ableiten wird, indem man darin φ^m für φ, $d.\varphi^m$ für $d\varphi$, $d^2.\varphi^m$ für $d^2\varphi$; u. s. w. setzt: man könnte also anstatt $\varphi^m\frac{du}{da}$, bloß schreiben $\varphi\frac{du}{da}$; da aber diese letztere Größe gleich $\frac{du}{dt}$, wenn t Null ist, so entstehet daraus.

$$\frac{d^{m+n}u}{dt^m\,dx^n} = \frac{d^{m-1}\left(\frac{d^{n+1}u}{dx^n\,dt}\right)}{da^{m-1}}$$

Da alles unter den veränderlichen Größen y und z, t nud x, a und b ähnlich ist, so wird man auch haben

$d^m u$

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1} . \phi 1^m \frac{du}{db}}{db^{n-1}}$$

eine Gleichung, welche man in

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{d^{n-1} . \frac{du}{dx}}{db^{n-1}}$$

verwandeln könnte, indem man $\phi 1$, anstatt $\phi 1^m$ schreibt, und anstatt $\phi 1 \frac{du}{db}$, seinen Werth $\frac{du}{dx}$ in dem Fall, wo $x = o$ substituirt; man muß aber die Aufmerksamkeit haben im Resultate $\phi 1$ durch $\phi 1^m$ zu ersetzen.

Wir wollen den Ausdruck von $\frac{d^n u}{dx^n}$ in den oben gefundenen von $\frac{dt^{m+n} u}{dt^m dx^n}$ setzen, es wird kommen

$$\frac{d^{m+n} u}{dt^m dx^n} = \frac{d^{m+n-2} \left(\frac{d^2 u}{dt\, dx}\right)}{da^{m-1}\, db^{n-1}}$$

indem man sich immer erinnert, daß man ϕ^m für ϕ, $\phi 1^m$ für $\phi 1$, substituiren, und nach den Differentiationen $t = o$, und $x = o$ machen muß.

Die vorhergehenden Operationen haben uns den Vortheil verschaft den Coefficienten $\frac{d^{m+n} u}{dt^m\, dx^n}$ nur von den der zweyten Ordnung $\frac{d^2 u}{dt\, dx}$ abhängen zu lassen, und die Differentiationen in Beziehung auf a und auf b, werden keine Schwierigkeit verursachen, weil sie sich unter einer sehr einfachen Form darstellen, wenn t und x Null sind, wie man es zu Anfange dieser Artikeln hat bemerken müssen.

sen. Es bleibt also nur noch der Ausdruck von $\frac{d^2u}{dt\,du}$ zu bestimmen übrig, welches leicht seyn wird.

Wenn man die Gleichung $\frac{du}{dt} = \frac{du}{da}\varphi$ in Beziehung auf x differentiirt, so wird kommen

$$\frac{d^2u}{dxdt} = \frac{d^2u}{dx\,da}\varphi + \frac{du}{da}\cdot\frac{d\varphi}{dx};$$

man hat aber

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{db}\varphi 1:$$

also

$$\frac{d^2u}{dx\,dt} = \varphi\frac{d.\varphi 1\frac{du}{db}}{da} + \frac{du}{da}\cdot\frac{d\varphi}{dx}.$$

Da aber φ, sowohl als u eine beliebige Function von y und von z ausdrückt, so bestehet zwischen $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{d\varphi}{db}$ dieselbe Relation als zwischen $\frac{du}{dx}$ und $\frac{du}{db}$: man wird daher noch ferner haben

$$\frac{d\varphi}{dx} = \varphi 1\frac{d\varphi}{db},$$

woraus

$$\frac{d^2u}{dx\,dt} = \varphi\varphi 1\frac{d^2u}{da\,db} + \varphi\frac{d\varphi 1}{da}\cdot\frac{du}{db} + \varphi 1\frac{d\varphi}{db}\cdot\frac{du}{da};$$

und da man φ in φ^m, $\varphi 1$ in $\varphi 1^n$ verändern muß, so wird kommen

$$\frac{d^2u}{dx\,dt} = \varphi^m\varphi 1^n\frac{d^2u}{da\,db} + n\varphi^m\,\varphi 1^{n-1}\frac{d\varphi 1}{da}\cdot\frac{du}{db}$$
$$+ m\varphi^{m-1}\,\varphi 1^n\frac{d\varphi}{db}\cdot\frac{du}{da},$$

wohl

wohl verstanden, daß φ und $\varphi 1$ sowohl als u, auf Functionen von a und von b reducirt sind, indem man anstatt y und z ihre Werthe setzt, wenn t und x Null sind. Hat man auf diese Art $\frac{d^2 u}{dx\, dt}$ gebildet, welches wir durch $U^{(m!n)}$ vorstellen wollen, so wird man für das allgemeine Glied der Entwickelung von der vorgegebenen Function

$$\frac{d^{m+n-2}\, U^{(m+n)}}{da^{m-1}\, db^{n-1}}, \quad \frac{t^m x^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n};$$

man wird ein jeden der Glieder individuel erhalten, indem für m und für n alle ganze Zahlen von 0, 1, 2, 3, u. s. w. nimmt.

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß die eben gefundene Entwickelung, sich auf denen in Num. 113, 114 und 115 analogen Fragen anwenden läßt.

147.

Die Entwickelungen der Functionen von mehreren veränderlichen Größen, welche man durch das Vorhergehende erhält, hängen von den besondern Werthen ihrer Differential-Coefficienten ab, die in gewissen Fällen, wie die der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe, Null oder unendlich werden, oder endlich unbestimmt erscheinen können. Die Untersuchung von diesen verschiedenen Umständen wird den in Num. 135 u. f. gefundene analoge Details darbieten: wir werden uns dabey nicht aufhalten, weil sie uns zu weit führen würden, und es übrigens leicht ist, daß, was in Ansehung der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe gesagt ist, auf Funcionen von mehreren veränderlichen Größen auszudehnen; da aber die Fälle, wo die letztern

$\frac{0}{0}$ werden, wichtige Verschiedenheiten darstellen, so dürfen wir sie nicht mit Stillschweigen übergehen.

Eine Function von zwey veränderliche Größen, z. B. kann auf unterschiedene Art $\frac{0}{0}$ werden: 1) wenn eine der veränderlichen Größen unbestimmt bleibt, indem die andere einen besondern Werth annimmt; 2) wenn jede von ihnen eine ihr eigene Bestimmung erhält.

Es sey $z = \frac{c(x^2 - a^2)}{y(x - a) + (x - a)^2}$; indem man $x = a$ macht, so wird man $\frac{0}{0}$ haben, was auch y seyn mag: wenn man aber die gemeinschaftlichen Factoren gegen einander auslöscht, so reducirt sich die Function z auf $z = \frac{c(x + a)}{y + x - a}$, die $z = \frac{ac}{y}$ wird. Dieser Fall ist sehr einfach; so oft als er statt hat, führen die Anwendung der Regeln von Num. 136, 139 in Rücksicht auf x zu einem bestimmten Resultat, und welches nur noch von dem Werthe von y abhängt.

Es wird nicht dasselbe seyn, wenn man $z = \frac{c(x - a)}{y - b}$ hätte. Diese Functien, welche $\frac{0}{0}$ wird, wenn man $x = a$ und $y = b$ macht, ist wirklich unbestimmt; um sich davon zu überzeugen, macht man $y - b = m(x - a)$, welches erlaubt ist, weil y und x unbestimmt sind; aus dieser Annahme wird $z = \frac{c}{m}$ hervorgehen, eine Größe welche alle mögliche Werthe, den Werthen gemäß, welche man m geben kann, fähig ist: man hätte dieses Resultat voraussehen können, weil die Function z nur einzig von dem Verhältniß der Größen $(x - a)$ und $(y - b)$ abhängt Wenn man sich begnügte $x = a$ und $y = b$

zu machen, so würde sie im ersten Falle Null, und im zweyten unendlich.

Es kömmt auch öfters, daß alle die Werthe, welche die vorgegebene Function in einem besondern Falle haben kann, obgleich der Zahl nach unendlich, dennoch zwischen zwey gewisse Grenzen enthalten sind: dieses sind diejenigen welche die Function

$$x = \frac{c(x - a)(y - b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

erhält, wenn $x = a$ und $y = b$ ist. Wenn man $y - b = m(x - a)$ macht, so wird man haben

$$z = \frac{cm}{1 + m^2} = \frac{c}{\frac{1}{m} + m};$$

es ist leicht zu bemerken, daß die Annahme von $m = 1$ den größten Werth geben wird den z haben kann, und daß folglich diese Function immer zwischen den Grenzen $\frac{c}{2}$ und $-\frac{c}{2}$, welche man erhält, wenn man $+1$ und -1 an die Stelle von m setzt, enthalten seyn wird. Diese für sich selbst sehr leicht zu fassende Resultate, werden in der Folge noch durch geometrische Anwendungen vergewissert werden.

Wir wollen das allgemeinere Beyspiel

$$z = \frac{(x-a)^m + c(y-b)^n}{(x - a)^{m'} + c'(y - b)^{n'}}$$

nehmen: wenn $x = a$ und $y = b$, so wird $z = \frac{0}{0}$, und indem man $a + h$ und $b + k$ anstatt x und y schreibt, so entstehet daraus

$$z = \frac{h^m + ck^n}{h^{m'} + c'k^{n'}},$$

ein Ausdruck aus welchen man in Betreff von z nichts

 schlie-

schließen kann, so lange die Größen h und k von einander unabhängig bleiben. Macht man $k = Ah^\alpha$, wo α eine positive Zahl ist, damit daß k und h zu gleicher Zeit verschwinden können, so wird man

$$z = \frac{h^m + cA^n h^{\alpha n'}}{h^{m'} + c'A^{n'}h^{\alpha n'}}$$

finden, und nach den verschiedenen Hypothesen, welche man über α machen wird, wird man für z, in dem Fall von $h = 0$ Werthe erhalten, die Null, oder endlich, oder unendlich sind.

Wir wollen zuletzt noch die Function

$$z = \frac{(x-y)a^n - (a-y)x^n + (a-x)y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)}$$

betrachten; welche die Annahme von $x = y = a$, $\frac{0}{0}$ macht; substituirt man $a + h$ und $a + k$ anstatt x und y respective, so werden wir haben

$$z = \frac{(h-k)a^n (a+h)^n - h(a+k)^n}{(h-k)hk};$$

indem man die angezeigten Potenzen entwickelt, die Reductionen macht und die Division durch $(h-k)hk$ verrichtet,

$$z = \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}(h+k) + \ldots$$

Da dieser Ausdruck nur noch von h und k losgemachte Glieder hat, oder die fähig sind mit ihnen zu gleicher Zeit Null zu werden, so wird er von der vorgegebenen Function einen bestimmten Werth geben, und indem man h und k gleich Null macht, erhält man

$$z = \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}.$$

Ich bemerke, daß man auch zu diesem Werthe gelangt, indem man zuerst die vorgegebene Function so behandelt

als

als wenn sie nur die einzige veränderliche Größe x enthielte, und durch die Regel von Num. 136 suchte was sie wird, wenn man $x = y$ annimmt; nachgehends zweymal hinter einander den Zähler und Nenner des Resultats differentiirt, um sein wahren Werth für $y = a$ zu finden. Diese verschiedene Beyspiele reichen hin um den Leser zu den Schwierigkeiten vorzubereiten, welche er in der Folge antreffen könnte, und um ihm auf den Weg ihrer Auflösung zu setzen.

148.

Untersuchung der Maxima und Minima der Functionen von einer oder mehreren veränderlichen Größen.

Ehe dieses Kapitel geendigt wird, bleibt uns noch eine wichtige Frage abzuhandeln übrig; diejenige die zum Gegenstande die Untersuchung der größten und kleinsten Werthe deren eine gegebene Function fähig ist, hat.

Wir wollen zuerst eine Function von einer einzigen Größe betrachten, und annehmen, daß diese veränderliche Größe successive durch alle Grade von Größe steigt; es könnte kommen, daß die Reihe der Werthe, welche die vorgegebene Function erhält, und zuerst wachsend ist, nachgehends abnehmend wird; und alsdann wird einer dieser Werthe alle andern übertreffen. Wenn im Gegentheile die Reihe der Werthe der vorgegebenen Function zuerst abnehmend ist, und nachgehends steigend wird, so wird man nothwendig einen Werth antreffen, welcher kleiner als alle andern seyn wird: das Glied, wo der Wachsthum einer Function inne hält, nennt man Maximum, und dasjenige Glied, wo der Wachsthum aufhört abzunehmen, Minimum.

Wir wollen die Function $y = b - (x - a)^2$ als Beyspiel nehmen: indem man $x = 0$ macht, hat man $y = b - a^2$, und da die Größe $(x - a)$ abnimmt, wenn x zunimmt, so nimmt y auch zu, bis daß man $x = a$ hat, woraus für das Maximum $y = b$ hervorgeht; aber dieses Ziel überschritten, obgleich x von neuem Zuwachse nimmt, so nimmt y doch ab, und wird Null, wenn $(x - a)^2 = b$. Der Gang der vorgegebenen Function ist leicht zu folgen, und kan überdem vergewissern, daß der größte Werth von y, $x = a$ entspricht, indem man succeßive $a + \delta$ und $a - \delta$ anstatt x substituirt; man wird in einem und dem andern Falle ein Resultat $y = b - \delta^2$ finden, welches immer kleiner als b ist.

Es sey noch $y = b + (x - a)^2$. In diesem Beyspiele, wenn x Null ist, hat man $y = b + a^2$; nach Maaßgabe als nun x zunimmt, nimmt die Größe $(x - a)^2$ so wie auch y ab, bis daß $x = a$: über dieses Ziel hinaus, nimmt $(x - a)^2$ zu, und eben so ist es mit y dessen Minimum folglich der Annahme $x = a$ entspricht.

Jede Function welche ohne Aufhören wächst oder abnimmt, wenn die veränderliche Größe von welcher sie abhängt wächst, ist weder ein Maximum noch ein Minimum fähig, weil auf einem beliebigen Werthe immer ein größerer oder kleinerer darauf folgt.

Der wesentliche Caracter des Maximum bestehet darin, daß die ihm unmittelbar vorherhergehende oder folgende Werthe kleiner als er sind; das Minimum im Gegentheile, wird von den ihm unmittelbar vorhergehenden oder folgenden Werthen übertroffen.

Ich habe unmittelbar gesagt, weil es oft geschiehet, daß eine Function Werthe hat die ihr Maximum übertreffen oder die geringer als ihr Minimum sind oder endlich, daß sie mehrere unter sich ungleiche Maxima und Minima hat; alles dieses ist leicht zu begreifen; denn nachdem sie gewachsen und abgenommen hat, und z. B. diese Function von neuem und unbegrenzt, so wird sie damit endigen das zuerst gehabte Maximum zu überschreiten.

Anstatt anzunehmen, daß sie unbegrenzt wächst, können wir uns gedenken, daß sie nach einem gewissen Ziele abnimmt, und daraus wird ein neues Maximum entstehen, welches von dem erstern unterschieden seyn könnte: man wird ohne Mühe sehen was geschehen müßte, wenn diese Aenderungen in ihren respectiven Größen sich wiederholen und variiren. Wir wollen jetzt zu der Methode übergehen von welcher man Gebrauch macht, um die Maxima und Minima der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe zu entdecken.

149.

Es sey also y eine beliebige Function x, und es sey angenommen, daß x den Werth erreicht hat, welcher das Maximum und das Minimum von dieser Function giebt; so folgt aus dem Vorhergehenden, daß, wenn man die Werthe von y sucht, welche $x - h$ und $x + h$ correspondiren, so muß man in einem und in dem andern Falle Resultate erhalten die geringer als das Maximum

mum

mum oder größer als das Minimum sind. Indem man durch $,y$ den Werth von y welcher $x - h$ entspricht, und durch $y,$ denjenigen Werth welcher $x + h$ entspricht, so wird man nach dem Taylorischen Lehrsatze haben,

$$,y = y - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$y, = y + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

Da man nun im allgemeinen h klein genug nehmen kann, damit das Glied $\frac{dy}{dx}$ die Summe von allen ihn folgenden übertrift, so sieht man, daß y größer als der erste Werth y seyn wird, und geringer als der zweyte $y,$; die vorgegebene Function wird folglich weder ein Maximum noch ein Minimum seyn, so lange als $\frac{dy}{dx}$ nicht Null ist. Aber wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ hätte, und da alsdann

$$,y = y + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$y, = y + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots$$

würde, so hätte man zu gleicher Zeit $y < ,y$ und $y < y,$, wenn der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ eine positive Größe wäre; oder auch $y > ,y$ und $y > y,$ wenn er eine negative Größe wäre: der erste Fall würde y Minimum, und der zweyte y Maximum geben. Wir schließen daraus, daß um zu finden, wenn eher eine Function y ihr Maximum oder ihr Minimum errreichen muß, (den das eine und das andere sind durch einerley

Glei-

Gleichung gegeben), so muß man den Ausdruck des ersten Differential-Coefficienten $\frac{d}{dx}$ suchen und ihm gleich Null setzen.

In dem oben beygebrachten Beyspiele $y = b - (x - a)^2$, hat man $\frac{dy}{dx} = -2(x - a)$, und gleich Null gesetzt, so findet man $x = a$. Um nun zu wissen ob dieser Werth ein Maximum oder ein Minimum entspricht, so sucht man was $\frac{d^2y}{dx^2}$ wird, und da er sich auf -2 einer negativen Größe reducirt, so folgt daraus, daß die Annahme von $x = a$ ein Maximum giebt. Behandelt man die Function $y = b + (x - a)^2$ eben so, so hätte man auch gefunden $x = a$, aber $\frac{d^2y}{dx^2}$ würde positiv geworden seyn, und folglich findet in diesem Falle ein Minimum statt.

150.

Daraus daß man im Falle des Maximums oder des Minimums $\frac{dy}{dx} = 0$ haben muß, muß man nicht schließen, daß das eine oder das andere jedesmal nothwendig statt hat, wenn diese Bedingung erfüllt ist. In der That, wenn der Werth von x, der $\frac{dy}{dx}$ Null macht, zu gleicher Zeit $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden läßt, ohne daß $\frac{d^3y}{dx^3}$ verschwindet, und da man in diesem Umstande

$y =$

$$,y = y - \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$y, = y + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

finden würde, und das Glied $\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3}$, vermittelst einem schicklichen Werthe von h, die Summe von alle ihm folgende Glieder übertreffen kann, so würde zwischen den drey Größen $,y$, y, $y,$, die dem Maximum oder dem Minimum zukommende Subordination nicht mehr seyn: die mittlere würde größer als einer der äußern und geringer als die andern seyn.

Hätte man aber auch $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, so wird kommen

$$,y = y - \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

$$y, = y + \frac{d^4y}{dx^4} \cdot \frac{h^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

die Bedingungen des Maximums oder des Minimums wären noch erfüllt, und an den Zeichen von $\frac{d^4y}{dx^4}$ würde man erkennen, welches von beyden statt finden muß.

Ohne daß es nöthig seyn wird diese Betrachtungen weiter zu treiben, wird man sehen, daß überhaupt nur alsdann ein Maximum oder ein Minimum statt finden kann, wenn der erste der Differential-Coefficienten die nicht verschwinden von einer geraden Ordnung ist, und daß dieser Coefficient für das Maximum negativ, und für das Minimum positiv sey muß.

151.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir untersuchen, welches die Maxima und die Minima von der Function $y = b + (x - a)^n$ seyn können. Indem man sie differentiirt, so zieht man daraus $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1} = 0$, woraus $x = a$ folgt; wenn also jetzt n eine ganze Zahl wäre, so würden durch diesen Werth von x, alle Differential-Coefficienten bis exclusive zu dem von der Ordnung n verschwinden, und man sieht hieraus, daß in dem Falle wo n ungerade ist, sie ein Maximum haben wird, weil der Coefficient $\frac{d^ny}{dx^n}$, der erste von denen die nicht verschwinden, positiv seyn wird: er würde negativ gewesen seyn, wenn man $y = b - (x - a)^n$ gehabt hätte, und der Werth von $x = a$ hätte ein Minimum gegeben.

Wäre n eine gebrochene Zahl, so würden alsdann Differential-Coefficienten seyn die unendlich würden (Num. 128), und da die Entwickelungen von y, die $x - h$ und $x + h$ correspondiren, aufhören, die allgemeine Form zu haben auf welcher man die Regel von Num. 149 gegründet hat, so müßte man a priori suchen, was die vorgegebene Function würde, wenn man darin successive $a - h$ und $a + h$ anstatt x substituirte. Gelangte man zu zwey geringern oder größern Resultaten als der, welcher die Annahme von $x = a$ giebt, so wäre hier im ersten Falle ein Maximum, und im zweyten ein Minimum; wenn aber die gefundenen Resultate, eins größer das andere kleiner wäre, als der $x = a$ entsprechende Werth, so würde hier weder ein Maximum noch

Mini-

Minimum seyn. Es sey $n = \frac{p}{q}$ wo p und q Primzahlen unter sich sind, so wird man haben, wenn

$$\left.\begin{array}{l} x = a - h \\ x = a + h \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} {}_{,}y = b + (-h)^{\frac{p}{q}} \\ y_{,} = b + (+h)^{\frac{p}{q}} \end{array}\right\};$$

ist p gerade und q ungerade, so wird ein Minimum seyn; denn alsdann ist $(-h)^p = h^p$ und es wird

$${}_{,}y = b + h^{\frac{p}{q}}, \quad y_{,} = b + h^{\frac{p}{q}},$$

welche Größen beyde größer als b sind, die aus der Annahme von $x = a$ entstehet: im entgegengesetztem Falle, wo p ungerade und q gerade seyn wird, würde y unmöglich seyn, und man hätte

$$y_{,} = b \pm h^{\frac{p}{q}}$$

und der Werth $= a$ wird weder ein Maximum noch ein Minimum geben, er wird aber einer Grenze entsprechen, die überschritten die Function unmöglich macht. Wären p und q ungerade, so würde die vorgegebene Function, obgleich immer reel, noch kein Maximum noch Minimum haben. Da wir auf diesen Gegenstand bey Gelegenheit der Theorie der Curven wieder zurückkommen werden, so werden wir gegenwärtig nur noch einige Anwendungen geben.

152.

Es sey zuerst verlangt eine Größe a in zwey Theile dergestalt zu theilen, daß das Product von der Potenz m des ersten Theils in der Potenz

tenz n des zweyten Theils, größer sey als alle ähnliche Producte, welche man machen könnte.

Es sey x einer von den Theilen von a, so wird der andere a — x seyn, und wenn das Product von welchem man das Maximum sucht durch y vorgestellt wird, so wird man haben $y = x^m(a - x)^n$, woraus man ziehen wird

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(a - x)^n - nx^m(a - x)^{n-1}$$
$$= (ma - mx - nx)x^{m-1}(a - x)^{n-1};$$

und indem man jeden der Factoren von diesem Resultate, gleich Null setzt, so wird man $x = \frac{na}{m+n}$, $x = 0$, $x = a$ finden. Der erste von diesen Werthen entspricht einem Maximum, denn, wenn man ihm in den allgemeinen Ausdruck von

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

substituirt, so giebt er die negative Größe

$$-\frac{m^{m-1}n^{n-1}a^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}};$$

die beyden andern Werthe werden Minima entsprechen, wenn m und n gerade sind, wie man sich davon durch die Prüfung der Differential-Coefficienten versichern kann, oder noch einfacher, indem man

$$x = \pm h \text{ und } x = a \pm h$$

macht. Man wird jederzeit in einem und in dem andern Falle ein positives Resultat finden, was auch immer das Zeichen seyn mag, welches man h giebt, welches darthut, daß die vorgegebene Function, nachdem sie bis auf Null abgenommen hat, nicht zum negativen übergeht, sondern, daß sie zu wachsen anfängt.

153.

Wir wollen uns noch aufgeben das Maximum und das Minimum von der durch die Gleichung

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

gegebenen Function y, zu finden.

Da in diesem Beyspiele y drey Werthe in x hat, so muß solches angesehen werden, als, wenn es drey sich unterscheidende Functionen darstellte, dennoch aber unter sich durch den, denn Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade gemeinschaftlichen Caracter verbunden; jede von diesen Functionen hat ihren besondern Gang, und kann Maxima und Minima fähig seyn die ihr eigen sind: dieses ist was uns der Calcul wird kennen lehren. *)

Man hat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax};$$

macht man

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

so wird man eine neue Gleichung

$$ay - x^2 = 0$$

erhalten, welche man mit der vorgegebenen verbinden müßte um x und y zu bestimmen, und es wird daraus entstehen

$$x^6 - 2a^3 x^3 = 0;$$

woraus

*) Euler hat mit Recht den Nahmen vielförmige Functionen, denen Functionen gegeben, die für jeden der Werthe der veränderlichen, von welchen sie abhängen, mehrere Werthe fähig sind.

woraus

$$x^3 = 0, \quad x^3 - 2a^3 = 0.$$

Wenn man $x = 0$ macht, so kommt $y = 0$ und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0};$$

um also zu wissen, was die drey Werthe von der Gleichung $x^3 = 0$ bedeuten, setzt man x einer sehr kleinen Größe h gleich, und sucht in der Gleichung

$$h^3 - 3ahy + y^3 = 0$$

das erste Glied von der steigenden Reihe, welche y ausdrückt, so wird man die drey Größen

$$\frac{h^2}{3a}, \quad +\sqrt{3ah} \text{ und } -\sqrt{3ah}$$

finden, welche den drey Werthen die y haben muß, entsprechen. Man sieht jetzt, man mag

$$x = +h \text{ oder } x = -h$$

machen, so bleibt der erste Werth positiv, und daß sie folglich alle Kennzeichen von einem Minimum hat, wenn $h = 0$; es ist nicht eben so mit den beyden andern die unmöglich werden, wenn man h negativ nimmt. Die Gleichung

$$x^3 - 2a^3 = 0$$

giebt

$$x = a\sqrt[3]{2}$$

und wenn man diesen Werth in dem allgemeinen Ausdruck von $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituirt, indem man beobachtet, daß sie $\frac{dy}{dx}$ Null macht, so wird man $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{a}$ machen, welches uns lehrt, daß die Function y ein dem $x = a\sqrt[3]{2}$ correspondirenden Maximum hat.

Sucht man das Maximum von der Function $y = x^{\frac{1}{x}}$ so wird man finden, daß es statt hat, wenn x gleich der Zahl ist, die zum neperschen Logarithmus die Einheit hat, welches eine merkwürdige Eigenschaft dieser Zahl darbietet.

Diese Beyspiele sind hinlänglich um zu zeigen wie man sich in allen andern Fällen verhalten soll; dieserwegen gehen wir, uns mit den Functionen von mehreren veränderlichen Größen zu beschäftigen.

154.

Wenn die Function, welche man in Betrachtung zieht von zwey veränderlichen Größen abhängt, so kann man die eine als eine beständige Größe betrachten und der andern eine unendliche Menge Werthe geben, zu einem jeden derselben werden eine oder mehrere Werthe der vorgegebenen Function correspondiren. Unter diesen letztern, könnten sich welche finden die Maxima oder Minima wären, und nichts ist leichter als sie zu bestimmen. Weil man nur auf eine einzige veränderlich Rücksicht zu nehmen braucht, so gnügt es den Differential-Coefficienten in Beziehung auf dieser veränderlichen Größe gleich Null zu setzen; also da u eine Function von x und von y ist, wenn man y beständig annimmt, und man $\frac{du}{dx} = 0$ macht, so wird man die Werthe von x erhalten, welche die größten oder kleinsten Werthe von u, unter allen diejenigen die einerley Werth von y entsprechen, geben. Indem man vermittelst der Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

x aus

x aus der Function u wegschaft, so wird man ein Resultat erhalten, welches ich durch (u) vorstellen werde, und daß, da es noch die veränderliche Größe y enthält, ein Maximum oder ein Minimum fähig seyn könnte, welches die Gleichung

$$\frac{d(u)}{dy} = 0$$

wird kennen lehren. Man kann zu einer mit $\frac{d(u)}{dy} = 0$ bedeutenden Gleichung gelangen, ohne daß es nöthig sey x zu eliminiren; dazu muß man beobachten, daß die Gleichung

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

welche durch die Bedingung des Maximums und des Minimums in Beziehung auf x an die Hand gegeben ist, eine Relation zwischen den veränderlichen Größen x und y, gründet, dergestalt, daß man die erste als eine Function der zweyten ansehen soll. Indem man u in dieser Hypothese differentiirt, so wird man haben

$$\frac{d\,u)}{dy} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{du}{dy},$$

ein Resultat welches sich auf $\frac{du}{dy} = 0$ reducirt, weil man bereits $\frac{du}{dx} = 0$ hat: die größten oder die kleinsten Werthe von u, d. h. ihre absoluten Maxima oder ihre absoluten Minima, werden also diejenigen durch die Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0$$

gegebene Werthe von x und von y entsprechen. Dehnt man diese Betrachtungen auf Functionen von so viel veränderlichen Größen als man will aus, so wird man finden, daß um die absoluten Maxima und die absoluten Minima von diesen Functionen zu finden, man einzeln den Differential-Coefficienten von jeden der Werthe von welchen sie abhängen gleich Null setzen muß.

155.

Die Unterscheidung der Maxima mit den Minima, enthält mehr Schwierigkeit in Betracht der Functionen von mehreren veränderlichen Größen, als in Betracht der Functionen von einer einzigen veränderlichen Größe obgleich beyde Fälle auf einerley Principien beruhen.

Es sey u eine Function, welche eine beliebige Anzahl von veränderlichen Größen x, y, z, . . . enthält; nennt man a, b, c, . . . die Werthe welche ihren Maximum oder ihren Minimum entsprechen. und stelle durch A, B, C, D, . . . F, G, H, I, K, L, . . . vor, was

$$u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \ldots \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dxdy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^2u}{dxdz}, \frac{d^2u}{dydz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$$

werden. Wenn man darin a anstatt x, b anstatt y, c anstatt z setzt, u. s. w. so wird das Resultat der Substitution von a + h, b + k, c + l in u seyn (Num, 38)

$$A + Bh + Ck + Dl + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left\{Fh^2 + 2Ghk + Hk^2 + 2Ihl + 2Kkl + Ll^2 + \ldots\right\}$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

ein Ausdruck von welcher der Werth im Fall das Minimum kleiner als A seyn muß, und größer im Fall das Maxi-

Maximum, welches auch die Zeichen von den Buchstaben h, k, l, . . . seyn mögen, wenn sie nur nichts anders als kleine Aenderungen ausdrücken. Da aber die Glieder der ersten Ordnung, Bh, Ck, Dl, . . . welche man beträchtlicher als alle andern machen kann, indem man h, k, l, . . . von einer schicklichen Kleinheit nimmt, ihr Zeichen zu gleicher Zeit mit diesen Größen verändern, ein dem in Num. 149 ähnlichem Raisonnement zeigt, daß sie Null im Falle das Maximum oder das Minimum seyn müssen; man wird also haben

$$B = \frac{du}{dx} = 0, \quad C = \frac{du}{dy} = 0, \quad D = \frac{du}{dz} = 0, \text{ u.s.w.}$$

wie es aus der in der vorhergehenden Num. ausgesagten Regel hervorgehet. Nachdem diese Bedingungen durch die der Sache gemäß bestimmten Werthe von a, b, c, u. s. w. erfüllt sind, so müssen ferner die Coefficienten F, G, . . . L, u. s. w. nicht zu gleicher Zeit verschwinden, und das Zeichen der Größe von der zweyten Ordnung, welche von der obigen Entwickelung die zweyte Zeile ausmacht, muß von den Verhältnissen, welche man zwischen h, k, l, . . . aufstellen könnte und von ihren Zeichen unabhängig seyn.

Man weiß, durch die Theorie der algebraischen Gleichungen, daß jeder Ausdruck von ihrer Form nicht von dem positiven zum negativen übergehen kann, ohne in der Intervalle Null zu werden, und daß wenn sie bloß unmögliche Wurzeln haben, sie nicht das Zeichen verändern, was man auch immer der unbekannten Größe für einen Werth giebt. Es folgt daraus, daß wenn die Größe

$$Fh^2 + 2Ghk + Hk^2 + 2Ihl + 2Kkl + Ll^2 + \ldots$$

gleich Null gesetzt, und als eine Gleichung in Bezug auf eine der unbestimmten Größen h, k, l, . . . aufgelöst, nur unmögliche Wurzeln giebt, man hieraus schließen darf, daß sie dasselbe Zeichen beybehält was auch immer diese unbestimmten Größen seyn mögen. Nimmt man z. B. den Werth von h, so findet sich

$$h = \frac{-(Gk + Il + \ldots)}{F}$$

$$\frac{\pm\sqrt{-(Hk^2 + 2Kkl + Ll^2 + \ldots)F + (Gk + Il + \ldots)^2}}{F}$$

ein Resultat, welches unmöglich ist, wenn die unter dem Wurzelzeichen enthaltene Größe negativ ist; man kann aber diese Größe folgende Form geben

$$-(Pk^2 + 2Qkl + Rl^2 + \ldots),$$

indem man

$$FH - G^2 = P, \quad KF - GI = Q, \quad LF - I^2 = R, \text{ u. s. w.}$$

macht, und damit sie nicht das Zeichen verändert, so müßte sie noch, nachdem sie gleich Null gesetzt und in Bezug auf einen der Buchstaben k, l, . . . aufgelöst ist, ihre unmögliche Wurzeln haben.

Man wird durch diese Operationen daraus ziehen,

$$k = \frac{-(Ql + \ldots) \pm\sqrt{-(Rl^2 + \ldots)P + (Ql + \ldots)^2}}{P}.$$

Da k nicht unmöglich seyn kann, wenn nicht die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe negativ ist, so setzt man diese neue Größe unter der Form $-(Tl^2 + \ldots)$ indem man $PR - Q^2 = T$ macht, um sie auf dieselbe Art als die beyden vorhergehenden zu behandeln, und man wird so fortfahren, bis daß man zu der vorletzten der Größen h, k, l, . . . gelangt ist.

Um unsere Ideen zu fixiren, wollen wir annehmen, daß nicht mehr als drey veränderliche Größen in der Function u seyn, so wird die Operation bey dem Werth

von

von k bestimmt seyn; und weil T positiv seyn soll, so muß man $PR - Q^2$ oder $T > 0$ haben. Mit dieser Bedingung wird die Größe $Pk^2 + 2Qkl + Rl^2$ nicht das Zeichen verändern können, und da sie sich auf Pk^2 reducirt, wenn $l = 0$ ist, so müßte, (damit sie positiv seyn kann, so wie es die Natur der Frage erfordert,) man auch $P > 0$, oder $FH - G^2 > 0$ haben. Man sieht hieraus, daß die Coefficienten F und H zu gleicher Zeit positiv seyn müssen. Im ersten Falle, wo die Größe $Fh^3 + \ldots$, immer das negative Zeichen, welches sie hat, beybehält, wenn $k, l, \ldots$ gleich Null sind, zeigt sie ein Maximum an: das Minimum fände im zweyten Falle statt, wo sie positiv wäre.

Um sich a posteriori zu überführen, daß, wenn die eben gefundenene Bedingungen erfüllt sind, die Glieder der zweyten Ordnung von der Reihe $A + Bh + Ek + \ldots$ zusammengenommen immer dasselbe Zeichen behalten, was auch $h, k, l, \ldots$ seyn mögen, so wird es Gnügen zu bemerken, daß die Gleichung des zweyten Grades deren Wurzeln $t = -\alpha + \sqrt{-\beta^2}$ wären, die Form

$$(t + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$$

hätte; denn, wenn man durch $-Y^2$, $-Z^2$ . . . ., die Größen die unter denen Wurzelzeichen, Werthe von $h, k, \ldots$ sind, vorstellt, so wird man die Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l} Fh^2 + 2Gkl \ldots + Ll^2 + \ldots \\ Pk^2 + 2Qkl + Rl^2 + \ldots \text{ oder } Y^2 \end{array}\right\}$$

$$\text{in } \left.\begin{array}{l} F[(h + Gk + Il + \ldots)^2 + Y^2] \\ P[(k + Ql + \ldots)^2 + z^2] \end{array}\right\}$$

u. s. w.

transformiren.

Setzt man in Y^2, für Z^2 sein Werth $Tl^2 +$ u. s. w. und substituirt, das Resultat in

F[(h

$$F[(h + Gk + Il + \ldots)^2 + Y^2],$$

so entstehet

$$F(h + Gk + Il + \ldots)^2 + FP(k + Ql + \ldots)^2 + FPT(l + \ldots)^2.$$

Man sieht jetzt wohl, daß dieser Ausdruck das Zeichen nicht mit h, k, l, ... zu gleicher Zeit ändern kann, und daß da P und Q positiv sind, ihr Zeichen von dem Zeichen von F abhängt.

Wenn u nur zwey veränderliche Größen enthielte, so wären die Coefficienten D, u. s. w. I, K, L, ... Null, und die Bedingungen des Maximum und des Minimum reducirten sich auf $FH - G^2 > 0$, Euler in seiner Differentialrechnung gab nur die Nothwendigkeit an, F und H positiv oder negativ zu gleicher Zeit zu haben; Lagrange hat zuerst bewiesen, daß diese Bedingung nicht hinreichend wäre, und ihm verdankt man die von uns so eben vorgetragenen Theorie.

Wenn die Coefficienten der zweyten Ordnung sich zu gleicher Zeit, als die von der ersten Ordnung vernichteten, so würde kein Maximum oder Minimum seyn, so lange als die Coefficienten von der dritten Ordnung auch verschwinden, und die Glieder der vierten Ordnung eine Größe bildeten deren Zeichen keineswegens von h, k, l,... abhinge. Die Betrachtung der unmöglichen Factoren, welche diese Größe haben sollte, um der geforderten Bedingung zu befriedigen, würde zu dem, den vorhergehenden analogen Resultaten führen. Uebrigens werde ich bemerken, daß was auch nach der Substitution von a, b, c .. in u und in ihren Differentialcoefficienten geschiehet, so müssen immer die durch die Annahme von $x=a\pm h$, $y=b\pm k$, $z=c\pm l$, u. s. w. erhaltene Resultate, alle kleiner oder alle größer, seyn, als das welches $x=a$, $y=b$, $z=c$, u. s. w. entspricht; und daß

daß die verschiedenen geeigneten Methoden, kennen zu lehren ob dieses statt hat, es auch sind, um sich von dem Daseyn des Maximums oder des Minimums zu versichern.

156.

Um ein Beyspiel zu geben, wähle ich folgende Frage, der von Num. 152 analog: die Größe a in drey Theile x, y, a—x—y zu theilen, so daß das Product $x^m y^n (a-x-y)^p$ ein Maximum sey.

Man hat alsdann $u = x^m y^n (a-x-y)^p$

$$\frac{du}{dx} = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} [ma - mx - my - px] = 0$$

$$\frac{du}{dy} = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} [na - nx - ny - py] = 0$$

die Factoren $ma - mx - my - px$ und $na - nx - ny - py$, geben

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \qquad y = \frac{na}{m+n+p},$$

$$a - x - y = \frac{pa}{m+n+p}.$$

Um zu wissen ob diese Werthe in der That zu einem Maximum gehören, so wird man sie in den allgemeinen Ausdrücken von $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$ substituiren, indem man um abzukürzen $m+n+p=q$ macht, man wird finden

$$F = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

$$G = -m\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

$$H = -(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1}$$

Die Größen F und H sind negativ, und man wird sich ohne Mühe versichern, daß sie die Bedingung $FH - G^2 > 0$ erfüllen, man wird also das verlangte Maximum erhalten haben.

Druckfehler.

Seite 1 und 14 lies Metaphysik
— 4 Zeile 4 — das
— 14 — 13 — Werthe
— 65 lies Seite 61
— 62 in der 2ten Zeile der Note lies den statt dem
— 64 Zeile 7 von unten lies Quadratwurzel
— 83 — 4 lies Entwickelung
— 102 in der Note lies Bodleiische, und statt Verhältnißnahme lies Verhältnißzahl
— 132 Nr. 1 Zeile 2 lies $x + k$ wird
— 144 Zeile 2 lies $X^{I}_{I} = 2X_2$
— 193 lies Seite 225
— 400 — — 401
— 415 — — 414
— 414 — — 415