





Die
G e o m e t r i e

nach

Le Gendre, Simpson,
van Swinden, Gregorius a St. Vincentio,
und den Alten,



ausführlich dargestellt

von

L. W. G i l b e r t

Professor, Observator und Unterbibliothekar
auf der Universität zu Halle.



E r s t e r T h e i l.



Mit Kupfern,

H a l l e,
in der Rengerschen Buchhandlung
1798.

Die
Geometrie

von
L. G. G. G.
und
H. G. G. G.



L. G. G. G.
Prof. Dr. G. G. G.
1244

1244



H. G. G. G.
H. G. G. G.

Ausführliches
Lehrgebäude
der
elementaren und der höhern
G e o m e t r i e

T h e i l I.

Veröffentlichung
L. O. H. G. B. N. D. C.
für
Stenographen und ihre Lehren
L. O. H. G. B. N. D. C.

T. K. S. I. I.

V o r r e d e.

Was man in diesem Werke zu erwarten hat, geben die Titel vollständig an. Nicht bloße Anfangsgründe, oder so genannte Elemente, sondern *ein ausführliches* und, wo möglich, *vollständiges Lehrgebäude*, und zwar nicht bloß der elementaren, synthetischen, sondern *der gesammten Geometrie*, mit Einschluß der geometrischen Analysis und der Lehre von den Kegelschnitten, so weit es sich nemlich für uns noch der Mühe einer bloß darstellenden und rein geometrischen Behandlung dieser Materie lohnt.

Unsere Geometrien, so viel deren der Verfasser kennt, sind entweder bloße Compendien, die ursprünglich zum Leitfaden beym mündlichen Vortrage bestimmt, ihrer Natur nach mehr oder weniger skelettartig sind, und von denen noch keins an innerer Vollkommenheit Euklids Elemen-

te übertroffen hat; oder Commentare über Compendien, die mehrsten eben so sacharm als wortreich; oder weitschweifige Bücher für Praktiker, über denen kein wissenschaftlicher Geist schwebt, welche mehr die Hand, als den Kopf üben, und wahre Einsicht nur wenig befördern. An einem ausführlichen Lehrgebäude, welches sich unfrer Idee nach zu einem Compendium ungefähr so, wie ein Körper mit Fleisch und Blut zu einem bloßen Skelett verhalten müßte, fehlt es noch: und da es dem Verfasser schien, ein solches Werk müsse nicht nur dem Mathematiker, sondern auch dem Freunde geometrischer Untersuchungen, und selbst dem Manne von gereiftem Verstande, der sich in die Geometrie erst einweihen will, jedem von einer andern Seite, wichtig und wünschenswerth seyn; so schmeichelte er sich, mit dieser Arbeit, an der er keine Mühe und Sorgfalt gespart zu haben sich bewußt ist, einem wahren Bedürfnisse entgegen zu kommen.

Dem eigentlichen Mathematiker ist es Eines Theils darum zu thun, zu einem vollständigen Ueberblick über das Ganze der Geometrie zu gelangen, ohne deshalb eine Menge weitläufiger, großen Theils nicht mit Unrecht veralteter Werke durchzustudiren, aus denen er doch erst bloße

Materialien erhält, die in ein ausgewähltes System, ohne das keine rechte Uebersicht Statt findet, zu verschmelzen, noch manche Kunst, und mehr Mühe kostet, als Sammler geometrischer Sätze, z. B. *Gregorius a St. Vincentio*, *Kraft*, mit unter auch *Pappus*, daran gewandt haben. Andern Theils kommt es dem Mathematiker auf ein Hülfsmittel an, um die geometrischen Untersuchungen, auf die er sich einläßt, an das System der Wissenschaft mit Leichtigkeit anzuknüpfen, ohne grade bis zu den ersten Elementen hinauf zu steigen, und den Satz, der für ihn jedesmal als Lehrsatz der brauchbarste ist, und der den kürzesten Weg der Behandlung bestimmt, sonder Mühe unter den übrigen heraus zu finden, ohne doch deshalb alle Sätze und erleichternde Methoden der Geometrie, stets im Gedächtnisse gegenwärtig zu haben. Denn dieses wäre ohne eine beständige Beschäftigung mit der darstellenden Geometrie, und folglich uns neueren Mathematikern fürwahr unmöglich, indem für uns nicht mehr dieser Theil der Mathematik, sondern algebraische Analysis, die Hauptwissenschaft ist. Beydes macht also dem Mathematiker ein ausführliches Lehrgebäude, worin sich der ganze Schatz der Geometrie, und nicht die ersten Elementarsätze

in einem leicht überschaubaren Ganzen beyfam-
men finden, zum wahren Bedürfnis. Für ihn
ist darin vornemlich durch die möglichste Vollstän-
digkeit, (die jedoch hin und wieder den nicht we-
aer wichtigen Rücksichten auf Brauchbarkeit, und
auf Composition nachstehn muß,) und durch ein
sorgfältiges systematisches Aneinanderketten der
Materien zu sorgen. Der Verfasser dieses Lehr-
gebäudes hat ihm die Uebersicht noch dadurch zu
erleichtern gesucht, daß er alles, unter verhältnis-
mäsig wenigen Hauptsätzen, und bey jedem der-
selben die verwandten Sätze in Folgerungen, Zu-
sätzen und Anmerkungen zusammen stellte.

Ein Freund der Geometrie, der, vertraut
mit dem, was in den Compendien steht, sich mit
Erweiterung und Ausführung dessen, was ihm
bekannt ist, zu ergötzen wünscht, kann in einem
solchen ausführlichen Lehrgebäude ebenfalls die
beste Befriedigung finden, und zwar, wie uns
scheint, bey weitem eher, als in den Sammlungen
geometrischer Sätze, oder in den Schriften man-
cher ältern Mathematiker über einzelne geometri-
sche Materien. Denn, abgerechnet, daß wir aus
der ermüdenden Art, wie die Alten solche Mate-
rien zu behandeln pflegten, herausgewachsen
sind, so entspringen häufig, eben aus diesem Ver-

einzelnen, die Schwierigkeiten der geometrischen Behandlung, und gar Vieles erscheint an seinem Platze im Lehrgebäude erst im rechten Lichte, und läßt sich dort bey weitem leichter, vollständiger und genügender, als einzeln und abgerissen behandeln. In die Augen fallende Beyspiele davon findet man, wie ich mir schmeichle, in diesem Theile mehrere, besonders unter den Sätzen von ebenen Oertern gegen das Ende des dritten Buchs. — Wer dieses Werk zur Erweiterung seiner geometrischen Einsicht durchstudirt, dem empfehle ich es recht sehr, seine eignen Kräfte an den Sätzen zu versuchen, die den Lehrsätzen beygefügt sind, und ihren Beweis nicht eher nachzulesen, als bis er die Hoffnung, ihn selbst zu finden, aufgibt. Denn da er schon durch die Stellung dieser Sätze auf die Gründe geleitet wird, aus denen die Vorbereitung und der Beweis fließen, so geben sie ihm ein leichtes Mittel seine Erfindungskraft zu üben und zu prüfen. Ein Gleiches gilt von den Aufgaben am Ende jedes Buchs, die grade in dieser Hinsicht von den Lehrsätzen getrennt, und besonders zusammengestellt sind. Auch ist das der Grund, warum in den Folgerungen und Zusätzen mancher an sich gerade nicht wichtiger Satz, der unbeschadet der Vollständigkeit des

Systems hätte übergangen werden können, aufgenommen wurde. Die verschiedenartigen Anwendungen der Hauptsätze, die man in den zugefügten Sätzen kennen lernt, sind recht dazu geeignet jene Sätze, ihren Gebrauch, und die verschiedenen geometrischen Methoden sich geläufig zu machen, und zu einer recht gründlichen Kenntniß der Geometrie zu verhelfen. Denn das ist es, was man wissen muß, indess man mit den unwichtigern Folgesätzen das Gedächtniß nicht zu überladen braucht.

Männern, denen die Geometrie noch fremd ist, und die sich mit ihr, als mit der vollkommensten Wissenschaft, zu ihrer Geisteserhöhung und Verstandesstärkung beschäftigen wollen, pflegen Compendien, bey dem Selbststudium, gewöhnlich zu dürr und zu trocken vorzukommen, und das nicht mit Unrecht, da solche Bücher durch den mündlichen Unterricht erst recht genießbar zu werden, bestimmt sind. Sie können sich nach ihrer Anleitung nicht recht in die Wissenschaft hinein finden, und wünschen sich etwas Ausführlicheres; ein Wunsch, den ich durch dieses Lehrgebäude zu befriedigen hoffe. Für sie ist die wissenschaftliche Ansicht des Ganzen, und die größte Strenge in der Methode eine Hauptsache: und beyde an

sich schon unnachlässliche Forderungen hat der Verfasser immer im Auge gehabt. Die wissenschaftliche Ansicht der Geometrie in den Principien, hält er für neu, und so kurz er sich bey ihr auch fassen mußte, so wird sie doch, wie er glaubt, hinreichen, das Intresse des denkenden Mannes auf das Wissenschaftliche des Lehrgebäudes zu lenken, und ihn in den rechten Gesichtspunkt zu setzen. Der Verfasser würde indess dieses alles mehr ausgeführt, und in die Grundlage des Systems noch mehr wissenschaftliche Strenge hinein gebracht haben, hätte er sich der Fesseln, die ihm sein erster Plan, *Le Gendres Elementen* als Leitfaden zu folgen, angelegt hatte, früher entledigt.

Als er nemlich dieses Werk unternahm, hoffte er dem Mangel eines ausführlichen Lehrgebäudes durch eine deutsche Bearbeitung des vorzüglichsten französischen Werks über die Elementargeometrie, welches vor einigen Jahren erschien*,

*) *Eléments de Géométrie, avec des notes. Par Adrien Marie Le Gendre.* (Si quid novisti rectius istis, Candidus imperti.) A Paris chez Firmin Didot. An II. d. l. Rep. 1794., XII. und 334. S. gr. 8. und 13. Kupfertafeln, im Format derer, bey diesem Werke.

so ziemlich abhelfen zu können, besonders wenn er dabey auf die besten unter den ähnlichen Werken der Engländer * und Holländer ** beständige Rücksicht nähme: eine Absicht die er unter ändern in einer Rezension von Le Gendres Elementen in der Allg. Jenaischen Litt. Zeitung vom Jahre 1797. St. 135. äußerte, wohin er diejenigen verweist, die von dem Werke des französischen Geometers mehr zu wissen begehren. Noch im *ersten Buche* erlaubte sich der Verfasser bloß Zu-

*) Elements of Geometry; with their Application to the Mensuration of Superficies and Solids, to the determination of the Maxima and Minima of Geometrical Quantities, and to the Construction of a great Variety of Geometrical Problems. By *Thomas Simpson* Edit. 2. with large Alterations and Additions. London 1760. mit eingedruckten Holzschnitten, XI. und 276. S. gr. 8. (ganz compendiarisch, aber mit vielem Eignen Ausg. I erschien 1747.)

**) Grondbeginfels der Meetkunde door *J. H. van Swinden*, Hoogleeraar te Amsterdam. Amsterdam 1790. gr. 8., XLVI, 486, 44. S. und 7 Kupfertafeln in Quarto. Zwölf Bücher, wovon drey arithmetischen und trigonometrischen Inhalts sind. (Von einer deutschen Uebersetzung, deren Sprache aber herzlich schlecht ist, erschien zu Jena 1797 der erste Band.)

fätze und Anmerkungen, deren Zahl und Ausdehnungen er mit Fleiß beschränkte. Im zweyten arbeitete er das Ende schon gänzlich um, und im dritten gab er endlich den Plan, länger bey *Le Gendre* zu bleiben gänzlich auf. Da er jedoch einmal angefangen hatte, die Rolle des *Uebersetzers* zu spielen, so glaubte er, sie so lange als möglich beyhalten zu müssen. Doch hat er auch diese im dritten Buche verlassen, um sie in der Folge nicht wieder zu übernehmen. Wenn man erwägt das das erste Buch, bey *Le Gendre* bis S. 29, hier bis S. 95, das zweyte bey *Le Gendre* bis S. 56, hier bis S. 226 geht, und was vom dritten in diesem Theile enthalten ist, dort etwa 40, hier 230 Seiten einnimmt; so wird man sich leicht überzeugen das der Verfasser, dieses Werk, ob er gleich darin lange nur als *Uebersetzer* erscheint, doch mit Recht als eignes Geisteswerk in Anspruch nimmt. Denn schwerlich hat er dabey dem französischen Mathematiker mehr, als dieser einigen ändern Geometrie, besonders Th. Simpson, zu verdanken.

Die angeführten Werke sind alle drey keine ausführlichen Lehrgebäude, sondern vollständigere Compendien als die gewöhnlichen, doch ist *Le Gendre* unter ihnen am wenigsten aphoristisch, und

läßt sich im Ganzen am mehren auf weitere Auseinandersetzungen ein. Alle drey weichen von *Euklids Elementen* in der *Auswahl* und der *Anordnung der Materien*, und da ab, wo die *Sätze über Proportionalität von Ausdehnungen*, in das *Arithmetische* hineinreichen. Und das, unferer Ueberzeugung nach, mit Recht, wie es in der angeführten *Rez.* in der *Allg. Litt. Zeit.* weitläufiger auseinander gesetzt wird. Diesen *Geometern* folgt der *Verfasser* im Ganzen, und zwar am genauesten *Le Gendren*, weshalb er sie ausdrücklich auf dem *Titel* nennt. Uebrigens scheinen *Tacquet* und *Whiston* in ihren Bearbeitungen von *Euklids Elementen* zuerst auf diesen Weg hingeleitet zu haben.

Eben so viel, und fast noch mehr als ihnen, verdankt d. V. dem unermüdlichen Fleisse des *Iesuiten Gregorius a Sancto Vincentio* *, aus dem er das zweyte und dritte Buch mit vielen interessanten Sätzen und Aufgaben bereichert hat, und *Robert Simsons* Wiederherstellung von *Apollonius* eb-

*) *P. Gregorii a St. Vincentio Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni X libris comprehensum. Antwerpiae 1647. 2 Vol. fol.* (Die drey ersten Bücher enthalten größtentheils planimetrische Sätze, die sich in *Euklids Elementen* nicht finden.)

nen Oertern * , indem es eine neue, und wie er hofft, nicht unverdienstliche Seite dieser Arbeit ist, die *Lehre von den Ebenen Oertern*, und überhaupt die *Geometrische Analysis*, mit in das Lehrgebäude der Geometrie verwebt zu haben, von dem sie die Alten durch *Euklids Data*, wie durch eine Scheidewand, wohl nur mit Unrecht trennten. Doch davon im folgenden Theile. Hier findet man am Ende des dritten Buchs, besonders im Lehrsatz 20, 25, 26, das ganze, nicht wenig schwierige zweyte Buch von Apollonius ebenen Oertern, ungleich kürzer, und, wenn wir nicht irren, lichtvoller als von Simson vorgetragen. Besonders empfiehlt der Verfasser, Lehrsatz 20 und die dazu gehörigen Folgerungen und Zusätze der Aufmerksamkeit des Kenners. Fragte dieser überhaupt nach den Materien, worin der Verfasser etwas Eigenthümliches und Neues aufgestellt zu haben glaubt, so würden wir ihm überdies noch nennen: die Principien, und die Ansicht der wissenschaftlichen Seite des Lehrgebäudes; ferner die Beurtheilung von Le Gen-

*) *Apollonius von Pergen* ebne Oerter. Wiederhergestellt von *Robert Simson*. Aus dem Lateinischen überlezt, mit Berechnungen, Bemerkungen und einer Sammlung geometrischer Aufgaben begleitet, von *Johann Wilhelm Camerer*. Mit 18 Kupfer tafeln. Leipzig 1796. gr. 8. 446. S.

dres Theorie der Parallelinien (I. 22.), und der Schwierigkeiten in der Lehre vom Berührungswinkel (II. 12. A. 1.); die Erklärung warum die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile, die Kräfte der Elementar-Geometrie übersteigt (II. 30. A. 2.) den Vortrag in Buch. II. Aufgabe 19, 20, und einen grossen Theil des dritten Buchs.

Der zweyte Theil dieses Werks, der zu Michaelis erscheint, wird den Beschluß der Planimetrie, vieles aus der geometrischen Analysis, und die geometrischen Untersuchungen über isoperimetrischen Figuren enthalten, und ein dritter Theil, der die Stereometrie und höhere Geometrie in sich fassen soll, dieses ausführliche Lehrgebäude der reinen oder eigentlichen Geometrie beschliessen.

G i l b e r t .

D I E
E L E M E N T E
D E R
G E O M E T R I E.

E R S T E S B U C H.

D I E P R I N C I P I E N.

[Der Uebersetzer muß die, welche dieses Werk studiren wollen, gleich hier darauf aufmerksam machen, daß Hr. Le Gendre von den Principien der Geometrie, und von der Art, wie das Gebäude der Wissenschaft durch sie begründet wird, eine unrichtige Vorstellung zu haben scheint. Er sagt in einer der Anmerkungen am Ende des Werks: „mein Zweck wird erreicht seyn, wenn man findet, daß alles in diesem Werke *aus der einzigen Erklärung der geraden Linie, ohne weitere Voraussetzung und ohne irgend eine Forderung, streng bewiesen ist.*“ In der That findet sich

auch unter Hr. Le Gendres Principien keine einzige *Forderung*, obgleich seit Euklid noch kein Geometer Postulate entbehren zu können glaubte. Allein man wird bald gewahr, daß der französische Geometer sich hierin nur täuscht, und daß auch er, wenn gleich nicht ausdrücklich, doch stillschweigend voraussetzt und fordert, daß man Punkte, Winkel u. d. m. sich vorstellen, gerade Linien und Kreise beschreiben, und dergleichen geometrische Grundvorstellungen mehr müsse eingehen können. Der Uebersetzer fügt deshalb hinter den Erklärungen noch die *Forderungen* hinzu, welche man an jemand, der Geometrie studieren will, gewöhnlich zu machen pflegt. Nicht als wenn er glaubte, daß dieses die geometrischen Forderungen in ihrer wahren Gestalt, und jenes ihre gehörige Stellung sey, sondern weil beydes mit dem Herkommen seit Euklids Zeit übereinstimmt. Die Ansicht der Principien und die Art, wie man das Lehrgebäude durch sie begründet, scheint dem Uebersetzer der schwächste Theil aller bisherigen Systeme der Geometrie, und so auch des unsers Verfassers zu seyn, und nach seiner Ueberzeugung einer gänzlichen Umformung zu bedürfen. Hier war begreiflich nicht der Platz eine solche Umbildung zu versuchen; höchstens durfte sie in zerstreuten Bemerkungen und Berichtigungen angedeutet werden, indem es ganz Zweckwidrig gewesen seyn würde, wenn der Uebersetzer sich in eine polemische Materie hätte vertiefen wollen, die gehörig ausgeführt, ein eignes Werkchen füllen könnte. Er hat sich daher bey den Principien mit den unentbehrlichsten Berichtigungen, Einschaltungen und Bemerkungen begnügt, die, wenn er nicht irrt, hinreichen, den Leser auf den Standpunkt aufmerksam zu machen, welchen der Uebersetzer für den richtigen hält, und die überdem dem Anfänger mehr Intresse für die Principien beybringen, und ihn darin besser orientiren werden, als die kurzen Aphorismen Euklids und Le Gendres. Auch glaubt der Uebersetzer dadurch, daß er einige fruchtbare bisher unbenutzte Principien hier nicht bloß aufgestellt, sondern auch dem Systeme selbst eingewebt hat, (besonders solche, worauf die Beurtheilung des Schneidens und Berührens beruht,) in dem Lehrgebäude des Hr. Le

Gendres eine beträchtliche Lücke ausgefüllt zu haben, von der auch kein andres ihm bekanntes System, selbst nicht das System Euklids völlig frey zu sprechen ist. In der systematischen Folge bey unserm Verfasser etwas Wesentliches zu ändern, und Materien ganz zu verletzen, hat der Uebersetzer sich übrigens fast nie erlaubt, so rathsam ihm dieses auch hin und wieder zur Vollkommnung des Systems dünkte. Vielmehr hat er alle sein Bemühen darauf gewandt dieses Wissenschaftliche Gebäude, so wie es nun einmal da stand, besser zu stützen und zu gründen, und sich bestrebt ohne im Großen viel umzubauen, (lediglich dadurch dafs er manches ergänzte, einiges Untaugliche wegließ, und im Ausdruck und der Beweisart oft mehr umarbeitete als überfetzte) alles noch mehr in einander zu fügen, und abzurunden, womit man freylich bei eigner Begründung eines Systems ehr zu stande kommen kann, als bey einer fremden Arbeit, in der man manches nicht billigt. Zu allem was in Zeichen wie diesen [] eingeschlossen ist bekennt sich

der Uebersetzer.]

I. Erklärungen (Definitionen).

I.

Die *Geometrie* ist eine Wissenschaft, welche sich mit dem Messen des Ausgedehnten beschäftigt, und hierin besteht ihr eigenthümlicher Gegenstand. [Oder vielmehr, sie ist die Wissenschaft des Räumlichen; der Raum und alle Vorstellungsarten und Begriffe, die auf demselben beruhen, machen ihr eigenthümliches Gebieth aus, und ihr Geschäft besteht darin, die Eigenschaften, Beziehungen und Verhältnisse des Räumlichen durch allgemein gültige Schlüsse zu erforschen.

d. U.]

2.

Alles was ausgedehnt ist, hat *drey Dimensionen*, [und nicht mehr,] nemlich *Länge*, *Breite* und *Höhe* oder *Dicke*.

[Diese drey Dimensionen sollen sich nach der gewöhnlichen Behauptung von einem Körper nur durch *Abstraktion* absondern und für sich betrachten lassen. Allein die Abstraktion ist in der That weder der einzige noch der *an sich* erste und ursprüngliche Weg, wie wir zu der Vorstellung der drey Dimensionen des Ausgedehnten gelangen. Um uns einen Körper vorzustellen, müssen wir die Körperliche Gestalt erzeugen, den Körper beschreiben, und diese *Raumbeschreibung* ist ein zweyter Weg wie wir zu der Vorstellung der einzelnen Dimensionen gelangen, den aber die Geometer bey Aufstellung der Principien gewöhnlich übersehn. Und zwar geht auf diesem Wege die Vorstellung der einzelnen Dimensionen der Vorstellung des Körpers vorher, [indem wir bey der Raumbeschreibung vom Punkte anfangen, durch Fortbewegung desselben Linien erzeugen, durch Bewegung der Linien Flächen, und durch Bewegung der Flächen, Körper. Diese Unabhängigkeit und Priorität der Vorstellung des Punktes, der Linie und der Fläche scheint schon Enklid eingesehn zu haben, wie man aus der Stellung seiner Erklärungen urtheilen muß.

Das Vermögen der Raumbeschreibung muß der Geometer von jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, fordern, mithin auch die Vorstellungsarten, welche sie begründet, und die Begriffe die sich darauf unmittelbar beziehn. Solche Begriffe sind die der drey Dimensionen, und die Vorstellungen, welche die folgenden Erklärungen ausfagen, über die eben deshalb der Geometer sich in keinen Beweis einläßt. d. U.]

3.

Die *Linie* ist eine Länge ohne Breite.

„Man erhält die Vorstellung derselben,“ sagt van Swinden, wenn man das Ausgedehnte lediglich in Rücksicht seiner Länge

betrachtet, ohne auf dessen Breite und Dicke zu sehn, also von diesen beyden Dimensionen abstrahirt. Andre stellen sich die Linie als durch den stetigen Fortgang eines Punkts erzeugt vor, oder als die Spur eines fortbewegten Punktes." [Diese Vorstellungsarten sind beyde richtig, und man kann beyde Wege einschlagen, um zur Vorstellung der Linie zu gelangen, nur daß der letzte Weg, durch Raumbeschreibung, wie wir schon bemerkt haben, an sich der erste und ursprüngliche ist. Er führt nicht nur zu einer ächt geometrischen, sondern selbst zu der ursprünglichen und fundamentalen Vorstellungs- und Erklärungsart der Linie, indess man auf dem erstern Wege (durch Abstraction) nur zu einer abgeleiteten Vorstellung der Linie gelangt. Wollen wir uns eine Linie vorstellen, so müssen wir sie ziehn; und das Vermögen dazu fordert der Geometer, daher die letzte Erklärung der Linie, die sich auf den eigentlichen Weg bezieht, wie wir zur Vorstellung der Linie gelangen, in der That die vorzüglichere und fruchtbarere ist, wenn gleich viele Geometer zu glauben scheinen, daß sie höchstens so mit unter laufen dürfe.

d, U.]

4.

Die Gränzen oder das Aeufserste einer Linie, das worin eine Linie sich endigt, nennt man *Punkte*. — Ein Punkt ist also nach keiner Dimension, folglich gar nicht ausgedehnt, und hat keine Theile.

[Der Anschein von Unbegreiflichkeit welchen der Punkt durch diese an sich richtige und fruchtbare Erklärung bekommt, an den sich unter andern mehrere Scholastiker gestossen haben, fällt fort, sobald man sich den Punkt als einen Ort im Raume vorstellt. Ehr wir eine Linie ziehn können, müssen wir uns irgend einen Ort vorstellen, von welchem aus wir sie ziehn; folglich einen Punkt. Und endigen wir die Linie, so geschieht das wieder in irgend einem Punkte. Man sieht hieraus daß die Fähigkeit sich Punkte vorzustellen, so gut wie die, Linien zu ziehn,

zu dem gehören müsse, was der Geometer von seinem Lehrling fordert, bey ihm voraussetzt.

Man *bezeichnet* gewöhnlich einzelne *Punkte* durch einzelne *Buchstaben*, *Linien* durch die Buchstaben ihrer Endpunkte, oder wenn dieses zur Deutlichkeit nicht hinreicht, durch die Buchstaben einiger Punkte in ihnen und der Endpunkte, und *Flächen* und *Körper* durch die Buchstaben ihrer Eckpunkte, aller oder einiger.

Fig. 1. So spricht der Geometer von den Punkten A, C, D, von den Linien AB, AC, AEB, von der Fläche ACDB u. f. f. oft selbst ohne ausdrücklich zu erinnern daß diese Buchstaben, Punkte, Linien, etc, bezeichnen, welches sich dann von selbst versteht.
d. U.]

5.

Die *grade Linie* ist der kürzeste Weg von einem Punkt zum andern.

Eine Linie, welche keinen graden Theil hat, nennt man eine *krumme Linie* oder eine *Curve*.

Fig. 1. So z. B. ist AB. eine *grade*, AEB eine *krumme*, dagegen ACDB weder eine *grade*, noch eine *krumme*, sondern eine sogenannte *gebrochne Linie*, weil sie aus lauter graden Linien zusammengesetzt ist.

[Die Eigenschaft der graden Linie, daß sie von allen Linien zwischen zwey Punkten die *kürzeste* ist, hat zuerst *Archimed* als Princip geometrischer Beweise aufgestellt und gebraucht. Hr. Le
Gr. 6. Gendre vervollständigt im folgenden den darauf sich gründenden Begriff der graden Linie dahin, daß zwischen zwey Punkten nur eine einzige *grade Linie* möglich ist, und sucht auf diesen Begriff das System der Geometrie vorzüglich zu gründen. Die Einwendung, welche einige (unter ander *van Swinden*) gegen die Archimedische Erklärung machen, als setze sie den Satz voraus, daß zwey Seiten im Dreyeck stets größer als die dritte sind, ist nichtig. Das würde nur der Fall seyn, wann es darauf

ankäme diese Definition zu beweisen, welches aber jemand, der sie unter den Principien aufstellt, nicht Willens seyn kann.

Die Erklärung welche *Euklid* von der graden Linie giebt, und die nach der gewöhnlichen Uebersetzung so lautet: „eine Linie die den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt“ ist so dunkel, das unser Verfasser sie als nichts sagend und ohne Bedeutung gänzlich aufgibt. Verständlicher wird sie, wenn man sie mit van Swinden folgendermassen ausdrückt: „eine *grade Linie* ist die, welche überall auf einerley Art oder gleichförmig (gelyklyk) zwischen ihren Punkten liegt, indess die *krumme Linie* zwischen ihren Punkten ungleichförmig liegt;“ oder mit Simpson: „eine Linie welche überall gleichmäsig (evenly) zwischen ihren Endpunkten liegt, oder welche überall einerley Richtung hat (which every where tends the same way).“ Durch einige Erörterungen liesse sich das Dunkel wohl noch vermindern, das auf diesen Erklärungen ruht, und welches der holländische Geometer der Einfachheit des Begriffs der graden Linie zuschreibt. Eine grade Linie ziehn zu können, ist eine Forderung welche der Geometer an jeden thut, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will. Er setzt also voraus, das jedermann im Besitz des dazu nöthigen Verfahrens ist, mithin auch der Vorstellung, die sich darauf gründet, und es kömmt ihm nur darauf an, ein *fruchtbares Merkmal heraus zu heben*, wodurch sich diese Vorstellung von allen ähnlichen unterscheidet. Ein solches Merkmal ist allerdings das, welches unser Verfasser nach Archimeds Vorbild in seiner Erklärung der graden Linie aufstellt. Nur das dieses Merkmal nicht so unmittelbar in dem ursprünglichen Verfahren bey dem Ziehn einer graden Linie zu liegen scheint, das man sich nicht nach einem Beweise desselben sehnen sollte, welcher darthäte, das jenes Merkmal in diesem ursprünglichen Verfahren gegründet ist, und wie es daraus folgt. Unmittelbar aus diesem Verfahren ist das zuletzt von Simpson angeführte Merkmal geschöpft, *Einerleyheit der Richtung im Ziehn der graden Linie*, und zunächst hierauf scheint sich Euklids Definition zu beziehen, welcher der Uebersetzer deshalb den Vorzug geben würde, liesse sie sich nur eben so klar, fasslich und fruchtbar als jene Archimedische

machen. Das haben aber die Geometer bisher noch nicht geistert, und wir müssen daher Hr. Le Gendre loben, daß er die Archimedische Erklärung der graden Linie zum Grunde legt, aus welcher er manche Sätze leichter und kürzer beweist, als es bisher gelehrt ist, gründet sich gleich nicht darauf, wie er sagt, einzig und allein sein ganzes System. d. U.]

6.

Eine *Fläche* ist etwas das Länge und Breite, aber keine Höhe oder Dicke hat; oder, nach van Swinden „eine Ausdehnung, in der man sich lediglich Länge und Breite vorstellt, von der dritten Dimension, der Dicke, aber ganz abstrahirt.“

Die *Gränzen*, das Aeußerste *der Fläche*, das worin die Fläche sich endigt, sind *Linien*, entweder grade oder krumme.

„Man sieht auch wohl, bemerkt van Swinden, die Fläche als durch stetige Fortbewegung einer Linie erzeugt, oder als Spur einer sich bewegenden Linie an;“ und dieses ist wiederum nicht nur eine ächt geometrische, sondern auch die ursprüngliche und fundamentale Vorstellung der Ebene, von der dasselbe gilt, was wir bey der analogen Vorstellungsart der Linie bemerkt

* E. 3. haben *

d. U.

7.

Eine *Ebene* ist eine Fläche, welche in allen ihren Theilen vollkommen eben ist, d. h. in welcher jede grade Linie, die durch irgend zwey in der Fläche befindliche Punkte gezogen wird, ganz hineinfällt.

[Kein Theil einer solchen Linie fällt auferhalb der unbegrenzten Ebene. Dieses drückt Simpson auf eine uneygentliche, nicht zu billigende Art so aus: die Linie *berühre* die Ebene in allen

ihren Theilen; ein Ausdruck der keine Nachahmung verdient, obgleich er von mehreren Mathematikern in einem ähnlichen Sinn gebraucht worden ist. Euklid und mit ihm van Swinden erklären die Ebne durch „eine Fläche, welche überall gleichförmig zwischen ihren Gränzen und zwischen den auf ihr befindlichen Linien liegt.“ Auch hiervon gilt, was mir oben * bemerkt haben. * E. 5.
d. U.

8.

Flächen, worin kein Theil eben ist, sind *krumme Flächen*.

9.

Ein *Körper* ist nach allen drey Dimensionen ausgedehnt, [und jede Ausdehnung, welche Länge, Breite und Dicke, oder Höhe hat, ist ein *Körper*, ein *körperlicher Raum*.

Die *Gränzen*, das Aeußerste *eines Körpers*, das worin der Körper sich endigt, sind *Flächen*, entweder ebene oder krumme.]

Der körperliche Raum wird beschrieben, und ein Körper erzeugt durch stetige Fortbewegung einer Fläche, so daß man sich den Körper als die Spur einer bewegten Fläche vorstellen kann. Und dieses ist wiederum die ursprüngliche Vorstellungsart des Körpers. *

* E. 2.

Eine Ausdehnung von mehr Dimensionen als im Körper vereinigt sind, giebt es nicht.
d. U.

10.

[Eine *grade Linie* wird durch jeden Punkt *in* ihr (d. h. der zwischen ihren Endpunkten liegt) in zwey Stücke getheilt, welche *zu den entgegengesetzten Seiten* jenes Punktes liegen und in Rücksicht desselben eine

Fig. 2. *entgegengesetzte Lage* haben, z. B. AB durch den Punkt C in die Stücke AC, CB, welche zu den entgegengesetzten Seiten des Punktes C liegen, und die grade Linie DE durch denselben Punkt in die entgegengesetzt liegenden Stücke DC, CE.

Grade so wird eine *Ebne* durch jede grade Linie *in* ihr in zwey Theile getheilt, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Linie liegen, und ein *Körper* durch jede Ebne in demselben in zwey Theile, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Ebne liegen.]

II.

[Zwey Linien, welche einen Punkt gemein haben, *treffen einander*, und *stoßen in diesem Punkte zusammen*, z. B. CA, BA. Genugsam verlängert schneiden oder berühren sie sich. — Sie *schneiden einander*, Fig. 2. wenn der einen Linie AB Theile, AC, CB, welche zu entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Punktes C liegen, zugleich auch zu den entgegengesetzten Seiten der andern Linie DE liegen. — Lügen sie auf einerley Seite der Linie DE, so würden beyde Linien sich *berühren*, wie MN und AEB in Fig. 1.

Eine ähnliche Bewandniß hat es mit dem Zusammentreffen, Schneiden und Berühren zweyer Flächen, oder einer graden Linie und einer Fläche.]

Die unter 10. und 11. aufgestellten Erklärungen fehlen fast in allen geometrischen Systemen, auch bey Le Gendre, und sind als die unentbehrlichsten unter vielen andern mangelnden von mir eingeschoben worden.

d. U.

12.

Wenn zwey grade Linien AB, AC (oder EF, ED) Fig. 31 einander treffen, so nennt man die Gröfse um welche sie von einander entfernt sind einen *Winkel*. Die beyden Linien AB, AC selbst, heißen die *Schenkel des Winkels*, der Punkt A in welchem sie zusammenstoßen oder einander schneiden, die *Spitze* oder der *Scheitel des Winkels*. — Man bezeichnet einen Winkel entweder allein durch den Buchstaben seines Scheitelpunkts, z. B. $\angle A$, $\angle E$, oder, wo das zu Zweydeutigkeiten Anlaß gäbe, setzt man zu beyden Seiten dieses Buchstabens noch Buchstaben zweyer Punkte in beyden Schenkeln hinzu, z. B. $\angle BAC$, $\angle DEF$, doch so dafs der Buchstabe am Scheitel immer in der Mitte stehet. Auch bezeichnet man einen Winkel durch einen Buchstaben, der zwischen seinen Schenkeln hinein geschrieben wird, z. B. $\angle \alpha$.

[Da man gewöhnt ist Entfernungen durch Linien zu bestimmen, und bey Entfernungen an Linien zu denken, so muß man sich durch Le Gendres Erklärung zu keinem falschen Begriff vom Winkel verführen lassen. Ein Winkel, oder bestimmter, ein *ebner Winkel*, wie man ihn zum Unterschiede von Flächenwinkeln und körperlichen Winkeln nennt, ist keine Ausdehnung, weder eine Linie, noch eine Fläche (wofür ihn wohl einige durch Mißverständnis genommen haben,) sondern die *gegenseitige Lage zweyer sich durchschneidender grader Linien*, oder wie man gewöhnlich sagt, die *Neigung* zweyer solcher Linien; wiewohl dieser letztere Ausdruck auf rechte, stumpfe und hincingehende Winkel nicht recht zu passen scheint.

α , Die Gröfse eines *Winkels* hängt daher lediglich von der Gröfse in der Neigung oder vielmehr in der Lage, der bey-

den Schenkel ab, worauf die Länge dieser Linien keinen Einfluß hat.

β, Die Gleichheit oder Ungleichheit zweyer Winkel kann man unmittelbar danach beurtheilen, ob sie einander decken oder nicht. Wenn man sich vorstellt der Scheitel und zwey der Schenkel beyder Winkel würden auf einander gelegt; so fallen die beyden andern Schenkel entweder auch auf einander, oder nicht. Im erstern Fall decken sich beyde Winkel und sind gleich. * Im zweyten Fall decken sie einander nicht, und sind deshalb ungleich. Und zwar ist der Winkel der größere, dessen Schenkel die Schenkel des andern einschließen, wie z. B. $\angle DEF$ größer ist als $\angle GEF$. Der einschließende Winkel DEF ist um den Winkel DEG größer als der eingeschlossene GEF, und diesen beyden eingeschlossnen Winkeln zusammengenommen gleich.

* Gr. 9.

Fig. 4.

γ, Ueberhaupt ist jeder einschließende Winkel ACE, als Ganzes, allen von ihm eingeschlossnen um seine Spitze C aneinander liegenden Winkeln ACB, BCD, DCE aus seinen Theilen zusammengenommen gleich. * d. U.

* Gr. 5.

13.

Fig. 2. [Wenn eine grade Linie AB, von einer andern DE in einem Punkte z. B. in C durchschnitten wird, so bildet ein abgechnittnes Stück der einen Linie, z. B. CE mit den entgegengesetzt liegenden Stücken CA, CB der andern graden Linie * zwey Winkel ACE, ECB, welche man Nebenwinkel nennt.

Nebenwinkel sind also solche Winkel, deren Scheitel C und einer der Schenkel CE zusammenfallen, indess die beyden andern Schenkel AC, CB in grader Linie liegen. d. U.

14.

Steht eine grade Linie GH auf eine andre EF so Fig. 15.
auf, daß die beyden Nebenwinkel, welche sie mit EF
bildet gleich sind, so wird jeder dieser beyden glei-
chen Nebenwinkel HGE, HGF ein *rechter Winkel* ge-
nannt. Die Linie GH steht dann auf EF im Punkte G
senkrecht; ist ein *Perpendikel* auf EF im Punkte G.

Ein *rechter Winkel* ist also einer von zwey gleichen
Nebenwinkeln, und eine *senkrechte Linie* eine grade
Linie, welche auf eine andre unter rechten Winkeln
aufsteht.

Winkel kleiner als ein rechter, z. B. BAC, nennt Fig. 3.
man *spitze*, Winkel größer als ein rechter, z. B. DEF,
stumpfe Winkel.

[Im ersten Lehrsatze wird dargethan werden, daß alle rechte
Winkel einander gleich sind. Wegen der Winkel welche grö-
ßer als zwey rechte Winkel zusammengenommen sind, und die
man mit unserm Verfasser *hineingebende Winkel* (angles rentrants)
oder mit andern *erhabene Winkel* im Gegensatz der *hohlen Win-
kel* nennen kann, vergleiche man die Anm. zu Erkl. 16.]

[Alle bis hierher aufgestellten Erklärungen, (höchstens die
letzte ausgenommen) gehören zu den wahren Principien der Geo-
metrie, da sie Vorstellungsarten betreffen, welche unmittelbar
aus der Raumbeschreibung geschöpft sind, und die daher der Geo-
meter grade so, wie wir sie in diesen Erklärungen ausfagen, bey
jedem, der Geometrie treiben will, voraussetzt und fordert. * * E. 2.
Die folgenden Erklärungen stellen dagegen Begriffe auf, deren
Gültigkeit erst zu beweisen ist. Denn sie sind nicht wie jene un-
mittelbar aus der ursprünglichen Vorstellungsart des Ausgedehnten,

aus der Raumbeschreibung, geschöpft, die der Geometer postulirt, sondern verbinden Merkmale mit einander, von denen es die Frage ist, ob sie sich auch mit einander verbinden lassen, und ob sie nicht in dieser Verbindung einander, oder jener ursprünglichen Vorstellungsart widersprechen. Sie gehören zu den abgeleiteten Vorstellungen, deren Möglichkeit und Gültigkeit erst dann gegen Einsprüche gesichert ist, wenn man sie auf die ursprünglichen Vorstellungsarten zurückgeführt oder daraus abgeleitet, d. h. aus den wahren Principien bewiesen hat. Sie stehn daher hier in der That an ihrer unrechten Stelle, und würden schicklicher im Fortgang des Systems, da, wo man die Möglichkeit der Gegenstände, die sie erklären darthut, aufgestellt werden, wie dieses unfer

E. 19. Verfasser selbst bemerkt. * Man hat sie daher hier für *bloffe Wort-Erklärungen* zu nehmen, die insgesammt nichts anders ausfagen, als: „gesetzt ein solcher Gegenstand, als z. B. Parallellinien, Dreyecke u. s. w.) sey möglich, so will man ihn mit dem angegebnen Namen bezeichnen.“ Dagegen gehören die *Kreisbeschreibung* und die darauf sich beziehenden *Erklärungen des zweyten Buchs* zu den ursprünglichen Vorstellungsarten des Ausgedehnten, die der Geometer von jedem fordert, also zu den wahren Principien der Geometrie, und sollten deshalb hier als an ihrem eigentlichen Platze stehn, von welchem sie unfer Verfasser nicht ohne Nachtheil für das System fortgehoben hat.

d. U.]

15.

Wenn zwey grade Linien in einer Ebne so liegen, das sie nie zusammenstoßen, so weit man sie auch verlängert, so sind sie *gleichlaufend* oder *parallel*.

Fig. 31.

Diese Erklärung der Parallellinien stimmt mit der Euklids überein, gegen die van Swinden, wie uns dünkt mit Unrecht, den Zweifel erhebt, ob wohl darin die Begriffe vom Verlängern ohne Ende und vom Nie zusammentreffen, deutlich genug für ein Princip sind. Die Frage, welche von den mancherley

Erklärungen, auf die man die Sätze über parallele Linien zu gründen gesucht hat, den Vorzug verdiene, gehört, so wie die ganze Erklärung, nicht hierher, sondern zur Theorie der Parallellinien. Man findet einiges darüber in den Anmerkungen am Ende dieses Werks. d. U.

16.

[Jeder völlig begränzte Raum wird eine *Figur* genannt; doch bezeichnet man mit diesem Namen vorzugsweise begränzte Flächenräume, selbst solche, welche nur zum Theil, nicht ganz, begränzt sind.]

Eine Ebne, welche nach allen Seiten zu begränzt ist, bildet eine *ebne Figur*, und zwar, wenn sie nichts als grade Linien zu Gränzen hat, eine *gradelinige Figur*, die man auch vorzugsweise eine *vielseitige Figur*, oder ein *Vieleck* (*Polygon*) nennt, [wiewohl dieser Name manchmal ausschließlich gradelinige Figuren von mehr als vier Seiten bezeichnet.]

Jede Gränzlinie macht eine *Seite*, alle zusammen den *Umfang der Figur* (die *Peripherie des Vielecks*), und der Flächenraum den sie rings um gränzen, den *Inhalt* oder den *Flächenraum der Figur* aus.

[Eine *Diagonale* ist eine grade Linie, die quer durch die Figur von einem Winkelpunkt zum andern geht. So z. B. stellt Fig. 5 eine ebne gradelinige Figur vor, AB, BC, CD u. f. sind ihre Seiten, die zusammen genommen ihren Umfang ausmachen, AC eine Diagonale, A, B, C, etc. die Winkelpunkte oder Ecken der Figur.]

Anmerkung. Um Verwirrung zu verhindern betrachte man in der Geometrie nur *Vielecke*, welche lauter *hohle*, *heraus-*

gehende Winkel (*angles saillants*) und keine *erhabne* oder *hinein-*
gehende Winkel (*angles rentrants*) enthalten, obgleich auch die
letztern Winkel zur Bestimmung der Lage zweyer sich durch-

- schneidender Linien geschickt sind, und in Figuren vorkom-
- F. 6. men können. Ein Vieleck mit lauter herausgehenden Winkeln
 - F. 5, 7. ist gänzlich *convex*, nirgends *hohl*. Es kann von einer graden
Linie nur in zwey, nicht in mehr Punkten, geschnitten werden,
welches bey Vielecken mit hineingehenden Winkeln nicht der Fall
ist. (Ueberdem fällt jede Verlängerung der Seiten eines *convexen*
Vielecks ganz außser der Figur, durchschneidet diese nirgends
weiter, indess die Schenke eines hineingehenden Winkels, wenn
sie über ihren Scheitelpunkt hinaus verlängert werden den Um-
fang der Figur nochmals durchschneiden. Beyde Eigenschaften
kann man zu Erklärungen des *convexen Vielecks* nutzen. Viele
Sätze gelten blos für die *convexen Vielecke*, würden also, schloßse
man die Vielecke mit hineingehenden Winkeln nicht ganz aus,
unrichtig seyn, wenigstens besondere Modificationen heischen,
und dadurch zu sehr überladen werden.]

In den vier ersten Büchern dieser Elemente haben wir es
allein mit ebenen Figuren, und überhaupt nur mit Ausdehnungen
die in einerley Ebne gedacht werden, zu thun. [Sie bilden den
ersten Hauptheil der Geometrie, die *Planimetrie*, deren Name
darauf hindeutet.]

17.

Das dreyseitige Vieleck, (diejenige von allen Fi-
Gr. 6. f. 4 guren, welche die geringste Zahl von Seiten hat wird
ein *Dreyeck*, das vierseitige ein *Viereck*, das fünfseitige
ein *Fünfeck*, das sechsseitige ein *Sechseck* u. f. f. ge-
nannt, [indem in jeder gradelinigen Figur die Menge
der Winkel (Ecken) mit der Zahl der Seiten überein-
stimmt.]

Von

Von den Seiten dieser Vielecke, welche als Schenkel zu einem Winkel gehören, sagt man daß sie den Winkel *enschließen*, ihn *unspannen*; von den Winkeln selbst, daß sie an diesen Seiten *anliegen*. Im Dreyeck, wo an jeder Seite zwey Winkel anliegen, sagt man vom dritten nicht anliegenden Winkel daß er und die Seite *einander gegenüber stehn*.

So z. B. stehn im Dreyeck ABC die Seite AB und der Winkel C, ferner BC und A, und AC und B *einander gegenüber*. Die Seiten AB, AC *schließen den Winkel A ein*, und A und B sind die an der Seite AB *anliegenden Winkel*.] Fig. 8.

18.

Ein Dreyeck ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten hat, *gleichschenkelig* (isoscele) wenn es zwey gleiche Seiten, *ungleichseitig* (scalene) wenn es lauter ungleiche Seiten hat. Fig. 8.
Fig. 25.
Fig. 26.

Ein *rechtwinkliges Dreyeck* hat einen rechten Winkel. Die Seite desselben, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, nennt man die *Hypotenuse*, [die beyden an dem rechten Winkel anliegenden Seiten, welche die Schenkel des rechten Winkels ausmachen, die *Katheten* des rechtwinkligen Dreyecks.] So z. B. ist DEF ein bey E rechtwinkliges Dreyeck, DF dessen Hypotenuse, und ED, EF sind dessen Katheten. Fig. 30.

Ein Dreyeck worin ein stumpfer Winkel vorkömmt, ist *stumpfwinklig*. Enthält das Dreyeck nichts als spitze Winkel, so ist es *spitzwinklig*. Fig. 22.
Fig. 20.

Man pflegt irgend eine Seite des Dreyecks als *Grundlinie*, und den ihr gegenüberstehenden (nicht in ihr liegenden) Win-



kelpunkt, als *Spitze des Dreyecks* anzusehn. Welche! das ist gleichgültig. Nur nimmt man im gleichschenkligen Dreyeck mehrentheils die ungleiche Seite für die Grundlinie.

19.

Unter den *Vierecken* sind folgende zu bemerken:

- Fig. 9. Das *Quadrat*, welches lauter gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat;
- Fig. 11. Der *Rhombus* (losange, die *Raute*) dessen Seiten gleich, dessen Winkel aber keine rechte sind;
- Fig. 10. Das *Rechteck*, dessen Winkel insgesammt rechte, dessen Seiten aber nicht gleich sind;

Das *Parallelogramm*, dessen gegenüberstehende Seiten parallel laufen [und das, wenn es weder gleiche Seiten noch rechte Winkel hat, ein *Rhomboides* genannt wird.]

Fig. 13. Das *Trapezoid*, welches zwey gleichlaufende und zwey nicht parallele Seiten hat; und das *Trapezium*, mit welchem Namen man alle Vierecke mit ungleichen Seiten, wovon kein Paar parallel läuft, belegt; ein Sprachgebrauch von dem unser Verfasser zwar abweicht, indem er das Trapezoid ein Trapezium nennt, und für dieses kein Kunstwort aufstellt, den ich aber der Bequemlichkeit halber beybehalte.

Anmerkung. *Le Gendre* bemerkt hierbey, dafs man in den Erklärungen des Quadrats und des Rechtecks statt vier *rechte* eigentlich vier *gleiche Winkel* setzen sollte. Denn, sagt er, dafs die Winkel eines Vierecks insgesammt rechte seyn können, und dafs alle rechte Winkel gleich sind, ist etwas, dafs man nicht voraussetzen, sondern beweisen müfste. Diesen und ähnlichen Mißstand würde man vermeiden, wenn man die Erklärungen,

nicht, wie es gewöhnlich ist, [und wozu Euklid vielleicht nur durch die unbehülfliche Form der damaligen Bücher veranlaßt wurde,] an die Spitze jedes Buchs, sondern unter die andern Sätze, wo das, was sie voraussetzen, schon dargethan ist, stellte.

Auch schlägt unser Verfasser noch vor, die gar zu langen Kunstwörter *Parallelogramm*, und *Parallelepipedum*, die ihrer Etymologie nach ohnedem jede Figur mit parallelen gegenüberstehende Seiten oder Seitenflächen, ihre Zahl sey welche sie wolle bezeichnen, mit andern zu verwechseln, wozu er *Rhombus* und *Rhomboides* für schicklich hält. Aber dieser Vorschlag kann wohl nicht ernstlich gemeint seyn, denn zu was für einer Verwirrung würde das nicht führen, da diese letztern Kunstwörter schon eine ganz andre Bedeutung haben. d. U.

20.

α , *Ein Vieleck* ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten, *gleichwinklig*, wenn es lauter gleiche Winkel hat.

β , *Zwey Vielecke* sind dagegen *untereinander gleichseitig* (*équilatéraux entre eux*), wenn die Seiten des einen, den Seiten des andern, in derselben Folge gleich sind; d. h. so, daß wenn man in beyden Vielecken die Seiten von zwey die einander gleich sind an, der Ordnung nach zählt, in beyden auch die zweyten, die dritten, die vierten Seiten u. s. w. gleich sind. — Grade so sind *zwey Vielecke unter sich gleichwinklig*, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern in derselben Folge gleich sind. [Diese abkürzenden Kunstwörter sind zwar bey uns ungewöhnlich, dem Geist unsrer Sprache

aber nicht entgegen, daher ich glaubte sie beybehalten zu dürfen.]

γ, Bey zwey Vielecken von dieser Beschaffenheit werden nicht nur im ersten Fall die gleichen Seiten, sondern auch die von gleichen Seiten eingeschlossnen Winkel, und im zweyten Fall nicht nur die gleichen Winkel, sondern auch die an gleichen Winkeln in beyden anliegenden Seiten, *ähnlichliegende*, *gleichnamige* oder *homologe Stücke* genannt.

21.

[Wenn alle Punkte in einer Linie einer oder mehreren gegebenen Bedingungen entsprechen, (und zwar nur die Punkte in ihr, kein Punkt aufser ihr,) so nennt man diese Linie in so fern den *geometrischen Ort* für diese *Bedingungen*, oder für die *Aufgabe* in welcher diese Bedingunge vorkommenn; auch wohl den *geometrischen Ort des Punktes*, der den Bedingungen oder der Aufgabe entspricht. So z. B. ist die Kreislinie, ihrem

*II.E.1. Begriff gemäß, * der geometrische Ort eines Punkts, Fig. 45. der von einem gegebenen Punkt C um die gegebne gerade Linie CA absteht, oder der geometrische Ort für die Aufgabe, welche nach einem solchen Punkte frägt. Denn jeder Punkt in ihr ist der gesuchte Punkt, und kein Punkt aufser ihr thut der aufgestellten Bedingunge nüge. Man sieht hieraus leicht in wie fern auch eine Fläche oder ein Körper ein geometrischer Ort seyn kann. Nemlich nur in so fern alle Punkte in ihnen, und kein Punkt aufser ihnen, gegebenen Bedingungen entsprechen.

Die *grade Linie* und der Kreis werden ausschließungsweise *ebne Oerter* genannt.

Ueber diese ebenen Oerter hatte einer der vorzüglichsten Geometer des Alterthums *Apollonius* von Pergä ein besondres Werk geschrieben, wovon aber nur einzelne Sätze auf uns gekommen sind. Aus diesen hat ein Schottischer Mathematiker *Robert Simpson* (der mit unserm *Thomas Simpson* nicht zu verwechseln ist) die Schrift des Griechen wieder hergestellt. Die deutsche Uebersetzung dieser Wiederherstellung durch Hrn. *Camerer* (Leipzig 1796.) ist gemeint, so oft ich Apollonius ebne Oerter erwähne. Dafs ich aber diese Begriffe mit in die Elemente einwebte, wird man bey einer kleinen Ueberlegung nicht mißbilligen, obgleich ich sie in keinem der Lehrbücher, die mir vor Augen liegen, mit aufgenommen finde. d. U.

22.

Erklärung der abkürzenden arithmetischen Zeichen, die im folgenden gebraucht werden.

Das Zeichen der Gleichheit ist $=$ daher $A = B$ bedeutet, dafs die Gröfse A der Gröfse B gleich ist.

Durch das Zeichen $A < B$ zeigt man an, dafs A kleiner als B , durch $A > B$, dafs A gröfser als B ist.

Das Additions- oder Summenzeichen ist $+$.

Das Subtractions- oder Differenzzeichen $-$. So z. B. bedeutet $A + B - C$ dafs man A und B zusammennehmen, und von dieser Summe C abziehn soll.

Ein blofser Punkt $.$ oder ein \times ist das Multiplications- oder Produktenzeichen. So z. B. bedeutet $A + B).(A - C)$ das Produkt aus der eingeklammerten Summe und Differenz, und $AB \times BC$ das Produkt aus den beyden Linien AB , BC . [Was dies aber sagen will, und in wiefern dieses letztre Zeichen den Inhalt

des Rechtecks aus den beyden Linien AB, BC bedeutet, wird im dritten Buche auseinander gesetzt werden.] Zahlen als Multiplicatoren setzt man häufig vor andern Zeichen ohne Zwischenzeichen. Soz. B. bedeutet $3AB$ das man die Linie AB dreimal nehmen soll, und $\frac{1}{2}AB$ oder $\frac{AB}{2}$, das man die Hälfte dieser Linie setzen muß.

[Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren, heist eine *Potenz*; die Anzahl der gleichen Faktoren giebt den *Grad* der Potenz. Das Zeichen a^2 bedeutet die zweyte Potenz oder die Quadratzahl von a ; a^3 die dritte Potenz, oder die Kubikzahl von a , u. f. Auf dieselbe Art bedeutet $\overline{AB^2}$ das Produkt aus zwey gleichen Linien, nemlich $AB \times AB$ oder die zweyte Potenz der Linie AB; $\overline{AB^3}$ das Produkt aus drey gleichen Linien $AB \times AB \times AB$ oder die dritte Potenz von AB u. f. f.

Was dieses aber für einen Sinn hat, und in wie fern $\overline{AB^2}$ den Inhalt des Quadrats und $\overline{AB^3}$ den Inhalt des Kubus über die Linien AB bedeutet, das werden wir in der Folge sehn.

Das Zeichen $\sqrt{\quad}$ bedeutet eine Quadratwurzel; $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2, [d. h. die Zahl die mit sich selbst multiplicirt 2 zum Produkt giebt.] Eben so ist $\sqrt{A \cdot B}$ die Quadratwurzel aus dem Produkte A . B oder die mittlere Proportionalzahl zwischen A und B [und $\sqrt[3]{A}$ die Kubikwurzel aus A, das heist eine Gröfse wovon drey in einander multiplicirt, zum Produkt A geben.]

[Das Zeichen \sphericalangle , einem oder mehreren Buchstaben vorgesetzt, bedeutet einen Winkel; ein einzelnes R einen rechten Winkel.]

23.

[Erinnerung an die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen.

Der Uebersetzer schaltet diese Sätze welche Le Gendre als bekannt aus der Arithmetik voraussetzt, hier ein, um das Studium dieses Werks so viel, wie möglich, zu erleichtern, und wird in der Folge sters durch das Marginal V. auf sie verwiesen. Sollte ein Leser, bey der Kürze, womit sie abgeleitet werden anstoßen, so verspare er diese Erinnerung bis zu den letzten Sätzen des zweyten Buchs, wo zuerst von Verhältnissen gehandelt wird, und wo man durch den Gebrauch derselben und durch das, was dort steht, sich die Sätze geläufig machen, und sich in den Geist der Sache gehörig einweihen wird. Uebrigens werden überall in diesem Werke, wo von Verhältnissen und Proportionen die Rede ist, sogenannte geometrische Verhältnisse und Proportionen erstanden. Das Zeichen dieser Verhältnisse sind zwey senkrecht übereinanderstehende Punkte \cdot , welche man zwischen die Zeichen des Vordergliedes und des Hintergliedes eines Verhältnisses setzt, z. B. $4:8$.

I. Das *Verhältniß zweyer Größen a zu b* beruht auf die Vorstellung wie oft die erstere a (das Vorderglied), oder ein bestimmter Theil derselben, in der zweyten b (dem Hintergliede) enthalten ist.

Die Zahl, welche dieses angiebt, wird der *Exponent des Verhältnisses* genannt. Sie macht das Wesen des Verhältnisses aus; man erhält sie allemal, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt; (so ist der Exponent des vorigen Verhältnisses $\left. \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right)$ und sie kann sowohl eine ganze Zahl, als ein Bruch, als auch eine Irrationalzahl seyn, d. h. eine Gröfse die sich durch die Einheit und deren Theile nicht genau ausdrücken

läßt, in welchem Fall das Verhältniß ein *irrationales Verhältniß* genannt wird.

Bey 4 : 8 muß man also das Verhältniß der Zahl 4 zur Zahl 8 sich vorstellen, d. h. sich denken, wie oft das Vorderglied 4, oder ein bestimmter Theil desselben, im Hintergliede 8 enthalten ist. Die Zahl welche dieses ausagt, 2, ist der *Exponent* dieses Verhältnisses, Beym Verhältniß 6 : 10 ist der *Exponent* $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ und dieses zeigt an, daß der dritte Theil des Vorderglieds 5 mal gesetzt, das Hinterglied giebt. Beym Verhältniß $2 : \sqrt{3}$ ist der *Exponent* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und zeigt an, daß die Hälfte des Vorderglieds so gesetzt, wie in $\sqrt{3}$ die Einheit gesetzt ist, das Hinterglied giebt.

Grade so bedeutet $AB : BC$ oder $\angle A : \angle B$ das *Verhältniß der Linie AB zur Linie BC*, oder *des Winkels A zum Winkel B*, und dieses Verhältniß beruht auf die Vorstellung der *Zahl*, welche angeht, wie oft die Linie AB, oder der Winkel A, oder wie oft ein bestimmter Theil derselben, in der Linie BC oder dem Winkel B enthalten ist, das heißt auf die Vorstellung des *Exponenten*.

α , Nur zwischen *gleichartigen Gröößen* findet ein Verhältniß statt, also nur zwischen Zahl und Zahl, Linie und Linie, Winkel und Winkel u. s. f.

β , der Werth eines Verhältnisses $a : b$ wird nicht verändert, wenn beyde Glieder durch einerley GröÙse multiplicirt, oder beyde durch sie dividirt werden. Denn der *Exponent* bleibt nach wie vor derselbe, da $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a}$ ist.

2. Alle *Vergleichung der Verhältnisse untereinander* beruht auf die Vergleichung ihrer *Exponenten*, indem diese das Wesen der Verhältnisse ausmachen. Zwey Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ sind gleich oder ungleich,

und das erstere gröfser oder kleiner als das andre, je nachdem ihre Exponenten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$ gleich, oder jener gröfser oder kleiner als dieser sind.

Gleichheit der Verhältnisse wird *Proportionalität* genannt, und durch das Gleichheitszeichen =, welches man zwischen die gleichen Verhältnisse setzt, bezeichnet. Gröfsen, deren Verhältnisse gleich sind, sind *einander proportional*, bilden *Proportionalgröfsen*.

Ist also $a : b = c : d = e : f$, so sind die sechs Gröfsen a bis f Proportionalgröfsen, und e, f sind den Gröfsen c, d und a, b (oder nach Umständen auch die Hinterglieder b, d, f, den Vordergliedern a, c, e) proportional. Diese sind dann gleich oft in jenen enthalten, indem die Exponenten dieser gleichen Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$, gleich sind, oder, so oft a in b enthalten ist, ist c in d und e in f enthalten, und so wie b aus a durch Multiplication entsteht, so entsteht d aus c und f aus e. Auf so verschiedene Art läfst sich dieses eine Zeichen übersetzen.

(Eine unmittelbare Folge hieraus ist, dafs wenn $a : b = a : c = a : d$, die Gröfsen b, c, d, gleich seyn müssen, indem sie als Hinterglieder gleicher Verhältnisse dieselbe Gröfse gleich oft in sich enthalten *; und dafs eben so, falls $a : b = c : b = d : b$ ist, die Gröfsen a, c, d, welche in derselben Gröfse d gleich oft enthalten sind, gleich seyn müssen.)

Grade so bedeutet $AB : BC = \angle A : \angle B$, dafs die Linien AB, BC und die Winkel A, B, einerley Verhältnifs unter einander haben, oder proportional sind, das heifst, dafs der Winkel A oder ein bestimmter Theil dieses Winkels eben so oft im Winkel B enthalten ist, als die Linie AB oder derselbe Theil dieser Linie in der Linie BC. Gewöhnlich wird ein solches Zeichen so in Worten überetzt: „die Linie AB verhält sich zur Linie BC, wie der Winkel A zum Winkel B.“

Le Gendre bedient sich um die Proportionalität oder die Gleichheit der Verhältnisse zu bezeichnen des unter den Englä-

dem gebräuchlichen Zeichens $::$. Allein ich bin bey dem gewöhnlichen Gleichheitszeichen $=$ geblieben, weil dieses den wahren Begriff der Proportionalität, Gleichheit der Verhältnisse, uns immer vor Augen hält, und dadurch die richtige Vorstellung erleichtert.

3. Zwey gleiche Verhältnisse werden ins besondere eine *Proportion* genannt, wie zum Beyspiel $a:b = c:d$. In jeder Proportion sind also die Exponenten beyder Verhältnisse gleich oder $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

α , Folglich ist auch in jeder Proportion $\frac{b}{a} \cdot c = d$ *, welches die Regeln angiebt, wie man zu drey gegebenen Zahlen a, b, c , die *vierte Proportionalzahl* d finden kann. Sind in zwey Proportionen die drey ersten Proportionalgrößen gleich, so muß es auch die vierte seyn.

β , Ferner ist in jeder Proportion $b \cdot c = a \cdot d$ * oder *das Produkt der innern Glieder b, c , dem Produkt der äußern Glieder a, d gleich*. Auf diese Art läßt sich also aus jeder Proportion *eine Gleichung* zwischen den proportionalen Größen *ableiten*.

γ , Sind umgekehrt zwey Produkte, deren jedes aus zwey Faktoren besteht, gleich, $b \cdot c = a \cdot d$, so bilden die vier Faktoren eine richtige Proportion, $a:b = c:d$, wozu das eine Produkt die äußern, das andre die innern Glieder hergiebt. Denn aus der Gleichung folgt das $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *, das folglich beyder Verhältnisse Exponent gleich, also die Proportion richtig ist.

δ, Ist $a > b$ und $c < d$, so kann nicht $a : b = c : d$ feyn. Denn dann ist $1 > \frac{b}{a}$ und $1 < \frac{d}{c}$ *, beyde *Gr.2.*
Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ haben also ungleiche Exponenten. Führt mithin irgend ein Satz zur Behauptung des Gegentheils, so ist er ungereimt.

ε, Ist $a : b = c : d$ so muß, wenn $a = b$ gesetzt wird, auch $c = d$ feyn. Die beyden ersten und die beyden letzten Größen stehn dann beyde im Verhältniß der Gleichheit.

4. Auf die Eigenschaft der Proportionen, daß das Produkt der innern Glieder dem Produkt der äußern Glieder gleich ist, beruht die leichteste Methode die Richtigkeit einer Proportion zu prüfen, und sich von der Gültigkeit der *Ableitung einer Proportion* von einer oder mehreren richtigen Proportionen zu überzeugen.

α, Aus jeder Proportion lassen sich durch bloße Versetzungen, oder auch durch homologe Addition und Subtraction der Glieder, *andre Proportionen ableiten*, von denen ich hier nur einige die am häufigsten vorkommen anführe.

Ist $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
so ist auch $a : c = b : d$ indem dann $cb = ad$;
 $b : a = d : c$ indem $ad = bc$;
etc.

so daß es also erlaubt ist in jeder Proportion unbeschadet der Proportionalität *die mittlern Glieder mit einander zu vertauschen*, die Verhältnisse umzukehren etc.

β, Ferner ist dann (weil $bc = ad$ ist)

$$a + b : b = c + d : d \text{ indem } bc + bd = ad + bd$$

$$a - b : b = c - d : d \text{ indem } bc - bd = ad - bd$$

$$a : a + b = c : c + d \text{ indem } ac + bc = ac + ad$$

$$a : a - b = c : c - d \text{ indem } ac - bc = ac - ad$$

$$a : b = a + c : b + d \text{ indem } ab + bc = ab + ad$$

$$a : b = a - c : b - d \text{ indem } ab - bc = ab - ad$$

$$a : b = c - a : d - b \text{ indem } bc - ab = ad - ab$$

etc.

γ, Hat man *mehrere gleiche Verhältnisse*

$$* 2. \quad a : b = c : d = e : f \text{ etc.} * \text{ mithin } \begin{cases} bc = ad \\ bc = af \end{cases}$$

so ist *das Verhältniß der Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder ebenfalls jedem dieser Verhältnisse einzeln genommen gleich*, z. B.

$$a + c + e : b + d + f = a : b$$

indem $ab + cb + eb = ab + ad + af$ ist.

δ, Sind *mehrere richtige Proportionen gegeben*,

$$a : b = c : d \text{ mithin } bc = ad$$

$$e : f = g : h \text{ mithin } fg = eh$$

$$f : k = k : g \text{ mithin } kk = fg$$

so folgt *durch Zusammensetzung dieser Proportionen* (d. h. indem man die Produkte der ersten, zweyten, dritten, vierten Glieder, wie sie unter einander stehn, nimmt, und dabey die Faktoren fortläßt, die zugleich im ersten und zweyten, oder zugleich im dritten und vierten Produkte vorkommen), aufs neue eine richtige Proportion $ae : bk = ck : dh$ indem dann $bc \cdot fg \cdot kk = ad \cdot eh \cdot fg$ * also $bk \cdot ck = ae \cdot dh$ ist *.

*Gr. 2. δ

*Gr. 2. α

Auch folgt umgekehrt aus der *Trennung zweyer Proportionen* (indem man die ersten, zweyten, dritten, vierten Glieder in einander dividirt) aufs neue eine richtige Proportion. So folgt aus den beyden ersten der gegebenen die richtige Proportion

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h} \text{ indem dann } \frac{bc}{fg} = \frac{ad}{eh} \text{ ist}^* \quad *Gr. 2. \gamma$$

ε, Eine Proportion bleibt also auch richtig, wenn man *alle Glieder* derselben zu *einerley Potenzen* erhebt, oder aus den Gliedern *Wurzeln von gleichen Graden zieht*. Ist

$$a : b = c : d \text{ mithin } bc = ad, \text{ so ist auch}$$

$$a^n : b^n = c^n : d^n \text{ da } b^n \cdot c^n = a^n \cdot d^n^* \text{ und} \quad *Gr. 2. \gamma$$

$${}^n\sqrt{a} : {}^n\sqrt{b} = {}^n\sqrt{c} : {}^n\sqrt{d} \text{ da } {}^n\sqrt{b} \cdot {}^n\sqrt{c} = {}^n\sqrt{a} \cdot {}^n\sqrt{d}.$$

ζ, Sind die Vorderglieder einer Proportion, den Vordergliedern einer andern Proportion gleich, so sind die *Hinterglieder proportional*:

$$\text{Ist } a : b = c : d \text{ mithin } bc = ad$$

$$\text{und } a : e = c : f \text{ mithin } ec = af$$

$$\text{so ist } b : e = d : f \text{ indem } ed = bf$$

$$\text{weil } ec \cdot ad = bc \cdot af^*$$

$$\text{auch } a : b \mp e = c : d \mp f \text{ indem } bc \mp ec = ad \mp af. \quad *Gr. 2. \gamma$$

Grade so sind die Vorderglieder proportional, wenn die Hinterglieder untereinander gleich sind.

Sind dagegen die äufsern oder die mittlern Glieder untereinander gleich so sind die nichtgleichen Glieder *verkehrt proportional*:

$$\text{ist } a : b = c : d \text{ mithin } bc = ad$$

$$\text{und } a : e = f : d \text{ mithin } ef = ad$$

$$\text{so ist } b : e = f : c \text{ indem } bc = ef^*$$

*Gr. 1.

4, Endlich sind gleiche Vielfache der Vorderglieder und irgend andre der Hinterglieder einer richtigen Proportion, wiederum proportional; oder ist $a:b = c:d$ mithin $bc = ad$ so ist auch $am:bn = cm:dn$ indem $bn \cdot cm = am \cdot dn$

5. In einer *stetigen Proportion* sind die mittlern Glieder einander gleich $a:b = b:c$. Das letzte Glied wird die *dritte* , das zweye die *mittlere Proportionalzahl* genannt. Da $b^2 = ac$ *, so ist die mittlere Proportionalzahl zwischen a und c , dafs heißt $b = \sqrt{ac}$ *

*G. 2. δ Bey drey gleichen stetigen Verhältnissen $a:b = b:c = c:d$ sind zwischen den äußern Gliedern a und d zwey *mittlere Proportionalgrößen* ; bey viere drey u. f. f. Von zwey mittleren Proportionalgrößen ist die erste $b = \sqrt[3]{a^2d}$. Denn da $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ so ist $\frac{b^3}{a^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{a}$ *

6. *Verhältnisse werden zusammengesetzt*, wenn man sich die Produkte ihrer Vorderglieder und ihrer Hinterglieder im Verhältnisse denkt. Die Zeichen $A:B = (a:b) + (c:d) + (e:f)$ bedeuten das Verhältniß A zu B sey zusammengesetzt aus den drey eingeklammerten durch $+$ verbundenen Verhältnissen, folglich $A:B = ace : bdf$.

Ist umgekehrt ein Verhältniß $A : B$ dem Verhältniß zweyer Produkte $ace : bdf$ von gleich viel Faktoren gleich, so läßt jenes Verhältniß sich aus dem Verhältniß der einzelnen Faktoren zusammen setzen.

Ein Verhältniß $A:B$, welches aus zwey gleichen Verhältnissen $(a:b)$ zusammengesetzt ist, ist noch ein-

mal so hoch als dieses Verhältniß, welches man so bezeichnet $A : B = 2 (a : b)$, da denn $A : B = aa : bb$.

Eben so sagt man das Verhältniß $A : B$ sey *drey*mal, *vier*mal . . . *so hoch* als das Verhältniß $a : b$, wenn es aus drey, vier . . . solchen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist. Dann ist $A : B = 3 (a : b) = a^3 : b^3$ oder $A : B = 4 (a : b) = a^4 : b^4$ etc.

7. Wenn sich von drey Gröſſen a, b, c , die erste zur dritten, wie der Unterschied der beyden ersten zum Unterschied der beyden letzten verhält, das heißt $a : c = b - a : c - b$, so sagt man, daß diese Gröſſen *harmonisch-proportional* sind. Diese Benennung stammt von den Griechen her, und hat ihren Grund darin, daß die Längen drey gleich dicker und gleich gespannter Seiten, welche in der größten Harmonie, (der Oktave, Quinte und Quarte) tönen sollen, sich wie die Zahlen 3, 4, 6 verhalten müssen. Diese Zahlen sind weder in arithmetischer, noch in geometrischer Proportion, sondern haben die hier erklärte Abhängigkeit, $3 : 6 = 4 - 3 : 6 - 4$; daher man umgekehrt dieses Verhalten das harmonische genannt hat.

Von drey harmonisch proportionalen Gröſſen muß die mittlere b , größer als die eine der äußern und kleiner als die andre seyn.

Da sie so von einander abhängen, daß $c.(b - a) = a.(c - b)$ ist, und diese Abhängigkeit, auch zwischen den Produkten drey solcher Gröſſen in derselben Zahl d , (oder zwischen ihren Quotienten durch d statt findet; so sind auch alle solche Producte oder Quotien-

ten harmonisch proportionaler Gröſſen, harmoniſch proportional.

Iſt B das Mittel zwiſchen A und C (alſo $B - A = C - B$) ſo ſind die Produkte $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$ harmoniſch-proportional. Und nimmt man zwiſchen zwey Zahlen m , n das arithmetiſche Mittel a , und die mittlere harmoniſch-proportionale Zahl h , ſo bilden dieſe vier Zahlen eine richtige Proportion, oder es iſt $m : a = h : n$.

Dieſe wenigen Sätze reichen völlig hin, um das, was in dieſem Werke auf die Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen gebaut wird, ohne Anſtoß zu verſtehn. Die ganze Materie iſt arithmetiſch und unſer Verfaſſer verweiſt nicht mit Unrecht wegen ihrer auf die Lehrbücher der Arithmetik. Bequem iſt es inderſ die Quinteſſenz jener Lehren hier beyſammen zu haben, und dieſe Einſchaltung wird dem Leſer bey der Beſchäftigung mit dem dritten Buche, von groſſem Nutzen ſeyn. d. U.

II. Grundſätze (Axiome)

I.

Zwey Gröſſen die einer dritten gleich ſind, ſind untereinander ſelbſt gleich. Auch ſind zwey Verhältniſſe untereinander gleich, wenn beyde einem dritten Verhältniſſe gleich ſind, indem ihre Gleichheit von

* V. I. der Gleichheit der Exponenten abhängt. *

2.

α , Wenn zu gleichen Gröſſen gleiche *hinzugefügt* werden, ſo ſind die Summen gleich. Iſt z. B. $A = B + C$ und $D = B - C$, ſo iſt $A + D = 2 B$.

β , Wenn von gleichen Gröſſen gleiche *hineeggenommen* werden, ſo bleiben die Reſte gleich. So z. B. iſt im vorigen Fall $A - D = 2 C$.

γ , Gleiche Gröſſen mit gleichen *multiplicirt*, oder durch gleiche *dividirt* bleiben gleich. Iſt z. B. $A = B + C$, ſo bleibt auch $A \cdot M = B \cdot M + C \cdot M$

δ , Alſo ſind auch *Potenzen* von gleichem Grade aus gleichen Gröſſen, gleich; und eben ſo *Wurzeln* von gleichen Graden aus gleichen Gröſſen. Iſt z. B. $A = B$, ſo iſt auch $A^2 = B^2$ und $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

ϵ , Wenn $A > B$ iſt, ſo iſt auch $A + C > B + C$ und $A - C > B - C$, auch $A \cdot M > B \cdot M$ und $\frac{A}{M} > \frac{B}{M}$.

3.

Zwey Gröſſen, welche einerley dritte gleich oft enthalten, oder in einer dritten gleich oft enthalten ſind, ſind gleich

4.

Das Ganze iſt größer als ſein Theil.

5.

Das Ganze iſt der Summe aller feiner zuſammengehörigen Theile gleich.

C

[Dieses sind insgesammt arithmetische Grundsätze, deren Zahl sich noch beträchtlich vermehren ließe. Von den folgenden eigentlichen geometrischen finden sich bey Le Gendre nur der sechste und neunte, die, wie er behauptet, hinreichen, das folgende System zu begründen. Die übrigen, so wie die unmittelbaren Folgerungen aus dem fruchtbaren sechsten Grundsätze, habe ich, weil sie für das System unentbehrlich sind, hinzugefügt.] d. U

6.

Von einem Punkt läßt sich zu einem andern nur eine einzige grade Linie ziehn.

[Daraus fließen unmittelbar folgende Sätze, die bey unserm Verfasser völlig fehlen :

1) *Durch zwey Punkte wird die Lage einer graden Linie völlig bestimmt*, und eine grade Linie in der zwey Punkte bekannt sind, ist *ihrer Lage nach* gegeben. Sind ihre Endpunkte bekannt, so ist sie auch *der Größe nach* gegeben.

2. Zwey grade Linien, welche zwey Punkte gemein haben, fallen in einander, haben alle ihre Punkte mit einander gemein, und bilden nur eine einzige grade Linie. Dafs dieses in ihrer ganzen unbegrenzten Ausdehnung geschehen müsse, beweist unser Verfasser im dritten Lehrsatz. — Sind die beyden gemeinschaftlichen Punkte ihre Endpunkte, so *decken* sich beyde grade Linien völlig. Daraus folgt:

3. Dafs *zwey gleiche grade Linien sich decken*, d. h. wenn man sie so aufeinander legt, dafs zwey ihrer Endpunkte zusammen fallen, so fallen auch die beyden andern Endpunkte aufeinander.

4. Zwey grade Linien die sich schneiden, können außer dem einzigen Punkte, worin sie zusammentreffen, (ihrem Durchschnittspunkte,) nichts weiter mit einander gemein haben.

5. *Zwey grade Linien können keinen Raum einschließen.* Denn sollten sie einen Raum einschließen, so müßten sie sich selbst begränzen, also zwey Punkte gemein haben. Dann aber fallen sie Folg. 2 gemäß zusammen, ohne einen Raum einzuschließen. Also ist kein gradelinigtes *Zweyeck* möglich, wohl aber ein *Dreyeck*, und die übrigen *Vielecke*.

6. *Zwey grade Linien, können sich nicht berühren.* Denn Fig. 17. gesetzt zwey grade Linien wie z. B. AB, DC könnten sich berühren, so müßten beyde Stücke der einen Linie, die durch den Berührungspunkt C abgeschnitten werden, zu einerley Seite der graden Linie AB liegen. Dann müßten sie aber nothwendig zusammen fallen, weil sonst zwischen je zwey Punkten solcher graden Linie zwey verschiedene grade Linien DCG, DG, vorhanden wären, gegen unsern Grundsatz. Folglich können zwey grade Linien sich nicht berühren.

Zwey grade Linien, welche zusammentreffen, müssen also verlängert einander schneiden. d. U.

7.

[α , Es ist möglich jede grade Linie, welche der Gröfse nach gegeben ist, *in zwey gleiche Theile zu theilen*, und es läßt sich in einer solchen Linie allemal ein Punkt denken, welcher *in ihrer Mitte liegt*, durch welchen sie halbirt wird.

β, Es ist möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine andre grade Linie auf ihr *senkrecht* zu ziehn. *

* E. 12.

γ, Auch ist es möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine zweyte grade Linie zu ziehn, welche mit der erstern *einen*, *gegebenen Winkel* bildet.]

Wie das, was diese Grundsätze als möglich ausfagen, zu bewerkstelligen sey, lehrt Hr. Le Gendre in den Aufgaben, die dem zweyten Buche angehängt sind. *Dafs* es geschehen könne, setzt er gleich bey den ersten Lehrsätzen voraus, daher diese Grundsätze bey seiner Anordnung des Systems unentbehrlich sind. In der That kann man sie als Grundsätze vertheidigen, indem die Möglichkeit der Halbierung einer graden Linie von bestimmter Gröfse, die Möglichkeit senkrechter Linien und rechter Winkel, und die Möglichkeit der Nachbildung eines Winkels unmittelbar darauf beruhen, daß die grade Linie und der Winkel *stetige Gröfßen* sind, folglich keine absoluten, keine kleinsten Theile haben, und daher Theile von jeder Gröfse und jedem Verhältniß darin denkbar seyn müssen. Die beyden Theile, worin eine Linie durch einen Punkt in ihr getheilt wird, können also gegen einander jedes Verhältniß, folglich auch das der Gleichheit haben; eben so zwey Nebenwinkel, und so auch zwey Winkel an verschiedenen Scheitelpunkten; und nichts anders fagen diese Grundsätze aus.

d. U.

8.

[Wenn eine Ebne durch eine grade Linie in zwey Stücke getheilt wird, die zu entgegengesetzten Seiten jener Linie liegen, und man zieht durch zwey Punkte in den entgegengesetzt liegenden Stücken eine stetig zusammenhängende Linie, so trifft diese Linie mit der

ertern in irgend einem Punkte zusammen, und durch- * E. II.
schneidet sie in diesem Punkte. *

Dieser Satz, der gewöhnlich nicht unter den Principien aufgeführt wird, ist in Verbindung mit der zehnten und eilften Erklärung so evident, wie irgend einer der andern Grundsätze, und es stützen sich am Ende auf ihn und auf einen analogen Grundsatz bey dem Kreise fast alle unsere Urtheile über das Durchschneiden der Linien. d. U.

9.

Zwey Ausdehnungen, es mögen Linien, Flächen oder Körper seyn, sind gleich [und ähnlich, folglich innerlich einerley] wenn sie *sich decken*, das heist, wenn sie, indem man die eine auf die andre legt, [indem man ihre Ortsverschiedenheit aufhebt, und eine ganz im Ort der anderen denkt] in ihrer Ausdehnung, [und deren Begränzung] zusammenfallen.

[Umgekehrt müssen zwey Ausdehnungen *einander decken, congruiren*, wenn sie innerlich einerley, d. h. gleich und ähnlich sind, indem sie sich dann blos in ihrem Ort unterscheiden.]

Flächen und Körper, welche sich decken, haben nicht bloß gleiche Ausdehnung, oder gleichen *Inhalt* sondern auch alle Gränzen (Seiten sowohl als Seitenflächen) und alle Winkel der einen, sind den Gränzen und Winkeln der andern nicht nur in einerley Folge * sondern auch nach einerley Richtung hin gleich (worauf die Symmetrie und Aehnlichkeit, folglich die innere Einerleyheit, die Congruenz solcher Figuren beruht.) Le Gendre * E. 20.
gibt diesen Flächen und Körpern den Namen *figures* und *solides égaux*, nennt dagegen die, welche Gleichheit ohne Aehnlichkeit haben, die sich also zwar in der Ausdehnung oder dem Inhalte nach gleich sind, sich aber nicht decken, *figures* und *solides équivalentes* und scheint auf diese Unterscheidung und den so be-

stimmten Sprachgebrauch einen besondern Werth zu legen. Allein da Gleichheit (*égalité*) doch eigentlich nur Einerleyheit der Gröfse bedeutet, so scheint das erste Kunstwort, welches Figuren bezeichnen soll, die auch einerley Beschaffenheit oder Aehnlichkeit haben, nicht recht schicklich gewählt zu seyn. Ich verdeutliche *figures égales*, durch *sich deckende Figuren* oder *congruierende Figuren*, dagegen *Figures equivalentes* durch *gleiche Figuren*, oder, wo ein besondres Gewicht darauf gelegt wird, durch, *dem Inhalt nach gleiche Figuren*. Gleich geltende Figuren, würde ein etwas fremdartiger, auch kein so passender Ausdruck seyn; besser *gleichhaltige Figuren*, ein Ausdruck den ich zum Bürgerrecht in unsrer Sprache empfehlen möchte.

d. U.

§, Bey Körpern und krummen Flächen die gleich sind, sagt unser Verfasser, giebt es noch eine dritte Art von Verschiedenheit, die man nicht übersehn darf. Sie können einerley, Gränzen und Winkel in einerley Folge haben, ohne dafs sie sich deshalb decken, [wenn nemlich die gleichen Stücke *nicht auch nach einerley Richtung hin* auf einander folgen, wie das z. B. bey der rechten und der linken Hand der Fall ist, die, wären sie auch im Einzeln völlig gleich, so dafs Finger mit Finger congruirte, sich doch beyde nicht decken können, man lege sie, wie man wolle, oder bey zwey übrigen gleichen Schnecken, deren eine rechts die andre links gewunden ist. Dasselbe kann bey schiefen Prismen, Pyramiden, körperlichen Winkeln, sphärischen Dreyecken u. s. statt finden. Eine solche Verschiedenheit in der Zusammensetzung ausgleichen Stücken hat zwar auch bey ebenen Figuren statt, wie die Dreyecke ABC, ABD zeigen, in welchen die Winkel $C = D$, $CAB = DBA$, $CBA = DAB$ und die Seiten $CA = DB$, $CB = DA$ sind. Allein man braucht nur die eine dieser Figuren im Gedanken umzukehren, so deckt sie die ertere, daher bey ebenen Figuren durch diese Verschiedenheit in der Zusammensetzung keine wesentliche Verschiedenheit bewirkt wird, und man von ihr abstrahirt.] Aber bey *krummen Flächen und Körpern*, beruht darauf eine wesentliche Verschiedenheit,

Fig. 15.

welche man, fast in allen Elementen der Geometrie übersehn hat, ob schon mehrere Beweise, die sich auf das Decken, von gewissen Körpern oder krummen Flächen gründen, dadurch, daß man diesen Fall übersehn, mangelhaft und in so fern fehlerhaft werden. Dahin gehören unter andern die Sätze über das Decken sphärischer Dreyecke, welche mehrere glaubten lediglich unter den Bedingungen und grade auf die Art, wie bey den ebenen Dreyecken beweisen zu können. Ja, um noch ein auffallenderes Beyspiel zu erwähnen *Robert Simson*, der in seiner Ausgabe Euklids den Beweis des 28ten Satzes im 11ten Buche unzulässig findet, fällt selbst in den Fehler, daß er seinen Beweis auf eine Congruenz stützt, die nicht allgemein statt findet.

7, Ich habe daher, fährt unser Verfasser fort, geglaubt für diese dritte eigenthümliche Art von Gleichheit in Flächen und körperlichen Räumen ein neues Kunstwort bilden zu müssen, nemlich *Gleichheit durch Symmetrie* (*égalité par symmetrie*), und nenne hinfüro Figuren denen diese Art von Gleichheit zukommt, *symmetrische Figuren* (*figures symétriques*).

Auf diesen Unterschied zwischen *gleiche Figuren* die es bloß dem Inhalt nach sind, *symmetrische Figuren*, und *congruierende* oder *sich deckende Figuren*, muß man aufmerksam seyn, da durch diese Kunstworte Begriffe bezeichnet werden, die wesentlich verschieden sind.

10.

[Gleiche Winkel decken einander; d. h. wenn man die Spitze und einen der Schenkel des einen Winkels, auf die Spitze und einen der Schenkel des andern Winkels legt, und die beyden andern Schenkel in der Ebene auf einerley Seite des erstern sich denkt, so fallen auch diese Schenkel zusammen.

Daß umgekehrt Winkel, die einander decken, gleich sind, ist schon oben bemerkt worden. *

[III. Forderungen (Postulate)]

Man setzt die Möglichkeit folgender drey Dinge voraus, oder fordert vielmehr, daß jedermann, der sich mit der Geometrie beschäftigen will, folgende ursprüngliche Vorstellungsarten müsse eingehn können.

I.

Von jedem gegebenen Punkte aus, eine grade Linie zu ziehen, die durch irgend einen zweyten gegebenen Punkt geht, und zwar sowohl bis an diesen Punkt, als über ihn hinaus.

2.

Jede grade Linie so weit man will zu verlängern, nach einer oder nach beyden entgegengesetzten Seiten eines Punktes in ihr, und sie sich endlich größer als jede gegebne Linie vorzustellen.

Wem fällt hierbey nicht ein, daß der Geometer etwas ähnliches auch für das Verkleinern der graden Linie voraussetzt, und daß er alles dieses nicht bloß bey graden Linien, sondern bey Linien überhaupt auch etwas Analoges bey Flächen und bey körperlichen Räumen fordert. Schon hieraus kann man sich überzeugen, wie mangelhaft das ist, was Euklid und die meisten Geometer als Forderungen ihrer Wissenschaft aufführen, und wie es mit diesen Forderungen und mit der ganzen Grundlage der Geometrie wohl eine andre Bewandniß haben müsse, als man das gewöhnlich vorstellt. Vielleicht hat grade dieses unsern Verfasser bestimmt, die Forderungen gänzlich zu übergehn. Doch ist es wohl auf jeden Fall besser, die wichtigsten mangelhaft, wie es hier gesehn ist, als sie gar nicht aufzustellen.

3.

Um jeden gegebenen Punkt, mit jeder gegebenen graden Linie, als Halbmesser, einen Kreis zu beschreiben.

Diese Forderung scheint zwar erst zum zweyten Buch zu gehören, an dessen Spitze Le Gendre die Erklärungen, welche den Kreis betreffen, aufstellt, und wohin ich die verweisen muß, die mit dem Namen Kreis und Halbmesser noch keinen deutlichen Begriff verbinden. Allein man kann in der That die Construction des Kreises bey den Sätzen des ersten Buches nicht entbehren, ohne in logische Kreise zu gerathen, da das, was wir hier als unmittelbare Folgerungen dieses Postulats aufführen, zum Beweise vieler jener Sätze gebraucht wird. Auch stellen Euklid, Simpson und van Swinden, die so gut wie unter Verfaßer die Sätze über den Kreis in einem besondern Buche vortragen, die Construction des Kreises mit an die Spitze der Geometrie.

Diese dritte Forderung begründet zugleich die Möglichkeit folgender drey Constructionen, welche weiter nichts voraussetzen, als die Beschreibung des Kreises, und die ersten Begriffe über das Schneiden der Kreislinien, welche B. II, Erkl. II, unabhängig von allen Lehrsätzen des ersten Buchs aufgestellt werden, indem sich die Erklärungen des zweyten Buchs unmittelbar an die des ersten anschließen.

α, Auf einer gegebenen graden Linie AB, (und, wenn es nöthig ist, auf deren Verlängerung), von dem Punkte A ein Stück zu nehmen, welches einer gegebenen graden Linie CD gleich ist. Zu dem Ende beschreibe man mit CD als Halbmesser um den Punkt A einen Kreis. Dieser trifft entweder mit der Linie AB selbst, oder mit ihrer Verlängerung in irgend einem Punkte E zusammen, * und *II. E. schneidet denn in beyden Fällen auf ihr $AE = CD$ ab. * II. E. 2.

β, Aus einem gegebenen Punkte A eine grade Linie von gegebner Länge CD so zu ziehn, daß sie oder ihre Verlängerung durch einen zweyten gegebenen Punkt B geht. Zu dem Ende ziehe AB *, und schneide (nach α) aus A davon ein Stück gleich CD ab.

* For. 1.

7, Dreyecke, gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige zu beschreiben, wie das B. II. Erkl. II. Zuf. gelehrt wird.

Eben so giebt die Beschreibung des Kreises Mittel an die Hand, vermöge der Eigenschaften der senkrechten Linien, der Dreyecke u. s. f., die im ersten Buch dargethan werden, *Perpendikel auf gegebne Linien durch gegebne Punkte zu ziehn, grade Linien und Winkel zu halbiren, gleiche Winkel zu bilden u. d. m.* Diese Constructions müssen billig bey den Sätzen gelehrt werden, auf welche sie sich gründen, und vor denen, deren Beweis die Möglichkeit solcher Constructions voraussetzt; so thut das Euklid. Unser Verfasser, Simpson und van Swieden, reissen sie dagegen aus dem System hinaus, und stellen sie, die letztern Geometer am Ende der Planimetrie, unser Verfasser am Ende einzelner Bücher, beysammen. Ihr Zweck scheint zu seyn, durch die bey einander stehenden Aufgaben den Erfindungsgeist derer, die das Werk studiren, anzuregen; und in der That möchte dieser Vortheil wohl die Unbequemlichkeit aufwiegen, die daraus in dem System entsteht, und die ich durch das Hinweisen auf die Probleme im Lauf des Systems zu vermindern hoffe. d. U.

[Auch das wird von dem Leser noch gefordert, daß er sich bey den *planimetrischen Büchern* * alle Constructions in einerley Ebne vollführt denkt, wenn das gleich der Kürze halber nicht ausdrücklich bey jedem Satze wieder erinnert wird. Er darf also bey

E 17.

keinem Satze dieser Bücher in der Vorstellung aus der Ebne heraustreten. Alle Punkte die man denkt, alle Linien die gezogen, alle Kreise die beschrieben werden, muß man so denken und ziehn, daß alles in einerley Ebne bleibt, und das wird selten bey einem Satze ausdrücklich gesagt, auch wenn er nur unter dieser Bedingung wahr ist.

der Uebersetzer.

DIE GRADE LINIE, DAS DREYECK UND DAS VIERECK.

LEHRSATZ I.

Alle rechte Winkel sind einander gleich.

Die grade Linie DC stehe senkrecht auf AB, und Fig. 16.
GH senkrecht auf EF, (so daß die Winkel ACD, DCB,
eben so EGH, HGF gleiche Nebenwinkel sind *) so * E. 14.
behaupte ich, muß der Winkel ACD dem Winkel EGH
gleich seyn.

Man mache CA, CB, GE, GF einander gleich *; *Fo. 3. α.
so ist auch AB gleich EF, und diese beyden Linien
decken einander, wenn man EF so auf AB legt, daß
E auf A und F auf B fällt. * Dann müssen auch die *Gr. 6. f.
beyden Punkte G, C, welche in der Mitte dieser Li-
nien liegen, zusammenfallen. I. Gesezt nun, die in die-

sen Punkten senkrecht aufstehenden Linien GH, CD decken sich einander nicht, so würde GH auf eine von der CD verschiedenen graden Linie z. B. auf CK fallen. Da nach der Voraussetzung der Winkel $EGH = HGF$ ist, so müßte dann auch $ACK = KCB$ seyn. Nun aber ist der Winkel ACK größer als ACD , der Winkel KCB kleiner als DCB^* , und der Voraussetzung nach ACD gleich DCB : folglich muß der Winkel ACK , welcher größer als ACD , mithin auch als DCB ist, noch vielmehr größer als der Winkel KCB seyn. Es ist also unmöglich daß diese beyden Winkel ACK und KCB gleich seyn können, folglich unmöglich daß das Perpendikel GH auf CK, d. h. auf irgend eine von CD verschiedene grade Linie falle; also nothwendig daß es auf das Perpendikel CD liege, da denn der Winkel ACD sich mit EGH und der Winkel DCB mit HGF *E.12.β deckt.* Also sind nothwendig alle rechte Winkel einander gleich.*

[Zusatz I. Weil alle rechte Winkel gleich sind, so haben sie eine völlig bestimmte, unveränderliche Größe. Deshalb machen sie das natürliche und bestimmte *Maass aller Winkelgrößen* aus, und der Geometer bezieht diese insgesammt auf den rechten Winkel, und drückt sie in Theilen desselben aus.

Zusatz II. Durch jeden Punkt einer graden Linie ist nur eine einzige auf ihr senkrechte grade Linie möglich. Denn gesetzt durch den Punkt C der graden Linie AB, wären auf ihr zwey verschiedene senkrechte Linien CD, CK möglich, so müßten die Winkel ACD , ACK als

rechte, * dem Lehrsatz zu Folge einander gleich, folg- * E. 14.
lich der Theil dem Ganzen gleich seyn, welches un-
gereimt ist. * Daher ist es unmöglich das durch ir- * Gr. 4.
gend einen Punkt auf einer graden Linie mehr als eine
grade Linie senkrecht stehe.]

Anmerkung. Euklid nimmt den Lehrsatz als Grundsatz
an. Wir haben ihn hier bewiesen, weil er sich aus dem achten
Grundsatz streng beweisen läßt, und man die Grundsätze nicht
ohne Noth vervielfältigen muß. [Dafs er bewiesen werden könne
und müsse, bemerkt schon Proklus in seinem Commentar über das
erste Buch Euklids. Den zweyten Zusatz hat unser Verfasser ganz
übersehn, obgleich er ihn häufig braucht,]

L E H R S A T Z 2.

*Jede grade Linie CD, welche mit einer andern
AB zusammentrifft, bildet mit dieser Linie zwey Ne- Fig. 17.
benedwinkel ACD, BCD, * deren Summe zwey rechten * E. 11. 13.
Winkeln gleich ist.*

Sind die beyden Nebenwinkel gleich, so sind sie
rechte Winkel, also der Lehrsatz wahr. Sind sie un-
gleich, so stehe CG auf AB im Punkte C senkrecht. * * Gr. 7.
Durch dieses Perpendikel wird der grössere der beyden
Nebenwinkel ACD in zwey Theile ACG, GCD ge-
theilt, so das die Summe der beyden Nebenwinkel
ACD und DCB, den drey Winkeln ACG, GCD, DCB
zusammengenommen gleich ist. * Der Erste dieser * E. 12. 7.
Winkel ist ein rechter *, und die beyden andern zu- * E. 14.
sammengenommen bilden den rechten Winkel BCG:
folglich ist die Summe der beyden Nebenwinkel ACD,
DCB zwey rechten Winkeln gleich.

Folgerung 1. Ist einer von zwey Nebenwinkeln ein rechter Winkel, so ist es auch der andre. — Ein stumpfer Winkel ACD hat dagegen einen spitzen; ein spitzer BCD einen stumpfen Nebenwinkel.

Fig. 18. *Folgerung 2.* Wenn die Linie DE senkrecht auf AB steht, so steht umgekehrt auch AB senkrecht auf DE. Denn ist DE ein Perpendikel auf AB, so ist ACD ein rechter Winkel; folglich auch der Nebenwinkel ACE *Folg. I. dieses Winkels ein rechter *; folglich, ACD gleich ACE, folglich AC senkrecht auf DE.

Folgerung 3. Die Summe aller Winkel, die um einen Punkt einer graden Linie, an einerley Seite dieser graden Linie, von noch so viel graden Linien gebildet werden, (welche sich in einerley Ebne befinden) und insgesammt in diesem Punkte C schneiden, (z. B. der Winkel ACG, GCD DCB) ist zwey rechten Winkeln gleich. *] *E. 12. γ.

LEHRSATZ 3.

Fig. 17. *Zwey grade Linien, welche zwey Punkte A, F mit einander gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen, und bilden nur eine einzige grade Linie.*

Dafs sie zwischen den beyden gemeinschaftlichen Punkten A, F zusammenfallen, erhellet aus Grundfatz 6. Folg. 1. Fielen sie in ihrer Verlängerung über diese Punkte hinaus nicht auch zusammen, so würde es irgendwo einen Punkt C geben, wo sie sich von einander trennten, so dafs die eine Linie CB, die andre CD würde. Nun sey CG eine in C auf BC senkrecht ste-

hende grade Linie *; so ist sowohl GCB als GCD ein * Gr. 7
 rechter Winkel, indem sowohl ACB als ACD eine
 grade Linie ist, folglich $GCD = GCB$, d. i. das Gan- * 1.
 ze dem Theile gleich, welches unmöglich ist. Folg-
 lich ist es unmöglich das die beyden graden Linien,
 welche zwey Punkte A, F gemein haben, sich in ih-
 rer Verlängerung irgendwo trennen können. Sie bil-
 den also nur eine einzige grade Linie.

L E H R S A T Z 4.

*Wenn eine grade Linie CD auf den Durchschitts-
 punkt zweyer andrer graden Linien AC, CB so auf-
 steht, das sie mit ihnen zwey Winkel bildet, deren
 Summe zwey rechte Winkel beträgt, so liegen AC,
 CB in einer graden Linie.*

Denn gesetzt sie lägen nicht in einer graden Linie,
 so sey CE die gradelinigte Verlängerung von AC. * * Fo. 2.
 Dann wäre die Summe der beyden Nebenwinkel ACD,
 DCE zwey rechten Winkeln gleich; folglich, da nach
 der Voraussetzung auch die Summe von ACD, DCB
 zwey rechten Winkeln gleich ist, $ACD + DCB =$
 $ACD + DCE$ *, folglich $DCB = DCE$ *, folglich der * Gr. 1.
 Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich ist * * Gr. 2 β
 Also ist CB selbst die Verlängerung von AC, und liegt * Gr. 4.
 mit AC in grader Linie.

L E H R S A T Z 5.

*Wenn zwey grade Linien AB, DE einander Fig. 2.
 schneiden, so sind die Winkel, welche am Durch-
 schnittspunkt einander gegenüberstehen, und die man
 Scheitelwinkel nennt, einander gleich.*

Denn weil erstens DE eine grade Linie ist, so sind die beyden Winkel ACD, ACE zusammengenommen zwey rechten gleich. Weil zweytens AB eine grade Linie ist, sind die Winkel ACE, BCE zusammengenommen zwey rechten gleich. Folglich ist $ACD + ACE = ACE + BCE$ *, folglich $ACD = BCE$ *.

* Gr. 1.
* Gr. 2.

Grade so beweist man die Gleichheit der beyden andern Scheitelwinkel ACE, DCB.

Zusatz I. Die vier Winkel, welche zwey grade sich durchschneidende Linien um ihren Durchschnittspunkt bilden, sind zusammengenommen vier rechten Winkeln gleich. Denn die Summe der beyden Nebenwinkel ACE, BCE beträgt zwey rechte Winkel, und eben so viel die Summe der beyden andern Nebenwinkel ACD, BCD.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel in einer Ebne befindliche grade Linien CA, CB, CD etc. sämmtlich in einem Punkte C zusammen treffen, so beträgt die Summe aller Winkel, welche je zwey zunächstliegende Schenkel bilden, (ACB, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA) vier rechte Winkel. Denn wenn man durch den Punkt C zwey grade Linien zöge, so entstünden um C vier Winkel, welche vier rechten Winkel, und dabey allen jenen Winkeln zusammengenommen gleich wären *.

Fig. 2. Zusatz III. Wenn von einem Punkte C vier grade Linien ausgehn, und je zwey der einander gegenüberstehenden Winkel, sind gleich, so liegen die Schenkel CA, CB, und CD, CE in grader Linie. Denn

Denn da alle vier Winkel zusammengenommen vier rechten, und je zwey aneinander liegende Winkel den beyden andern, mithin zwey rechten Winkeln gleich sind, so sind sie Nebenwinkel*, und zwey ihrer Schenkel liegen in grader Linie. • 4.

LEHRSATZ 6.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn ein Winkel und die beyden ihn einschließenden Seiten in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey der Winkel A dem Winkel D, die Seite AB, der DE und die Seite AC der DF gleich; so behaupte ich, daß das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt. Fig. 19.

Denn zwey solche Dreyecke lassen sich so über einander legen, daß sie völlig zusammenfallen. Und zwar erst die Seite DE auf die ihr gleiche AB, so daß D auf A und E auf B fällt. * Dann müssen, weil D und A gleiche Winkel sind, und gleiche Winkel einander decken, auch die Seiten DF und AC*, und weil über dem DF gleich AC ist, auch die Punkte F und C auf einander fallen. Folglich müssen auch die dritten Seiten zusammen fallen*, also beyde Dreyecke einander decken. *Gr. 6. f. 2. *Gr. 10. *Gr. 6.

Folgerung 1. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel B, E, die Winkel C, F, und die Seiten BC, EF (d. h. die Winkel welche gleichen Seiten, und die Seiten welche gleichen Winkeln gegenüber stehn) so wie die Flächenräume beyder Drey-

ecke, einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, nemlich eines Winkels und der beyden einschließenden Seiten bestimmt.

Folgerung 2. *Zwey rechtwinklige Dreyecke decken sich, wenn die Katheten in beyden gleich sind.**

Folgerung 3. Durch zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel wird jedes Dreyeck characterisirt und völlig bestimmt. Wie aus zwey gegebenen Linien und dem Winkel den sie einschließen sollen, sich ein Dreyeck wirklich construiren läßt, lehrt Aufg. 8. am Ende des zweyten Buchs.

Anmerkung. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und einer der Winkel, welche sie nicht einschließen, gleich sind, so läßt sich daraus nur bey rechtwinkligen Dreyecken allgemein auf ihre Congruenz schließen*; bey schiefwinkligen lediglich unter den Bedingungen welche Lehrsatz 20. ausagt.

LEHRSATZ 7.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn eine Seite und die beyden Winkel, welche an ihr liegen, in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey die Seite BC der Seite EF, der Winkel B dem Winkel E, und der Winkel C dem Winkel F gleich, so behaupte ich, daß das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt.

Um die Deckung zu bewerkstelligen, lege man EF auf die ihr gleiche Seite BC, so daß die Endpunkte E auf B und F auf C fallen*. Weil der Winkel E dem Winkel B gleich ist, und gleiche Winkel sich decken, so fällt dann auch die Seite ED auf BA, und folglich

*Gr. 6.
f. 2.

der Punkt D auf irgend einen Punkt in der Linie BA. Eben so, weil der Winkel F dem Winkel C gleich ist, fällt FD auf CA, und der Punkt D auf irgend einen Punkt der Linie CA. Da folglich D sowohl in der Linie BA, als in der Linie CA liegt, so muß es auf den Durchschnittspunkt A dieser beyden Linien liegen, als den einzigen Punkt, den diese Linien mit einander gemein haben *. Folglich fallen alle drey Winkelpunkte, und also auch die Seiten des einen Dreyecks mit denen des andern zusammen, und also decken sich beyde Dreyecke.

* Gr. 6
f. 3.

Folgerung. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel A, D und die Seiten AB, DE und AC, DF (d. i. die Winkel die den gleichen Seiten, und die Seiten die den gleichen Winkeln gegenüberstehn) so wie die Flächenräume einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, einer Seite und zweyer anliegender Winkel bestimmt.

[Anmerkung. Auch wenn zwey Winkel und eine Seite, die nicht zwischen ihnen liegt, in zwey Dreyecken gleich sind, so decken sich diese Dreyecke. Doch ist das ein Satz der sich erst weiterhin * darthun laßt. Hierher gehört Aufg. 9.]

* 18.

LEHRSATZ 8.

In einem Dreyecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beyden andern Seiten.

Denn jede Seite, z. B. BC, ist als grade Linie der kürzeste Weg zwischen den beyden Winkelpunkten B, C, also nothwendig kleiner als die Summe der gebrochnen Linien BA + AC.

* E. 5.

Folgerung. Daraus folgt dafs im Dreyecke jede Seite AC gröfser als der Unterschied zweyer Seiten ^{Gr. 2. γ} $BC - BA$ ist*. Wegen beyder Sätze fehe man B. II. Erkl. II. Zuf.

L E H R S A T Z 9.

Fig. 20. Nimmt man innerhalb eines Dreyecks ABC irgend einen Punkt O, und zieht von demselben nach den Endpunkten einer der Seiten z. B. der BC, grade Linien OB, OC, so ist die Summe dieser beyden Linien kleiner als die Summe der beyden andern Seiten des Dreyecks, d. h. als $AB + AC$.

Man verlängere die Linie BO bis wo sie die Seite AC im Punkte D trifft; so ist im Dreyecke ODC die Seite $OC < OD + DC$ *, folglich wenn man beyderseits BO hinzufügr $BO + OC < BO + OD + DC$ d. i. $BO + OC < BD + DC$.

Nun aber ist auch im Dreyecke ABD die Seite $BD < BA + AD$, folglich wenn man beyderseits DC hinzufügr, $BD + DC < BA + AC$. Folglich ist noch vielmehr $BO + OC < BA + AC$.

Anmerkung. Dagegen ist der Winkel O den die beyden Linien im Dreyecke umschliessen, gröfser als der Winkel A an der Spitze des Dreyecks. Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, dafs der äufsere Winkel am Dreyecke gröfser ist, als jeder der gegenüberstehenden innern Winkel. Folglich $O > D > A$. Diese unmittelbare Folge aus Lehrsatz 30 beweist Euklid besonders, ehe er an den gegenwärtigen Satz kömmt. Bey unserm Verfasser müfste er ein Zusatz zu Lehrsatz 30. werden.

L E H R S A T Z 10.

Fig. 21 Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF

gleich sind, und der Winkel BAC den die erstern einschließen, ist grösser als der Winkel EDF , den die andern einschließen, so muß die dritte Seite BC , im ersten Dreyeck, grösser seyn als die dritte Seite EF im andern Dreyeck, [und ist umgekehrt $BC > EF$, so muß auch der Winkel $BAC > EDF$ seyn.]

Man denke sich die Linie AG durch A so gezogen, daß der Winkel CAG dem Winkel D gleich sey *, * Gr. 7. mache AG gleich DE * und ziehe GC , so decken sich * Fo. 3. α die Dreyecke GAC und EDF , weil in ihnen der Construction gemäfs zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich sind *. Folglich sind die dritten * 6. Seiten GC , EF einander gleich. Nun aber sind in Ablicht der Lage des Punktes G drey Fälle möglich, indem dieser Punkt entweder aufserhalb des Dreyecks ABC , oder auf die Linie BC , oder innerhalb des Dreyecks liegen kann.

Fall 1. Wenn G aufserhalb des Dreyecks ABC liegt. Als dritte Seite im Dreyeck ist $GC < GI + IC$ *; eben so $AB < IA + IB$; folglich auch $GC + AB < GI + IC + IA + IB$, d. h. $< GA + BC$. Nun aber ist der Construction gemäfs $AB = GA$. Also $GC < BC$ *, und da GC gleich EF ist, $EF < BC$. * G. 2. γ

Fall 2. Wenn G auf BC liegt. Dann ist GC ein Fig. 22. Theil der BC , folglich die der GC gleiche EF , $< BC$.

Fall 3. Wenn G innerhalb des Dreyecks AIC Fig. 23. liegt. Dann ist nach dem vorigen Lehratz $GA + GC < BA + BC$, folglich, da $GA = BA$ gemacht ist, $GC < BC$, also auch die der GC gleiche $EF < BC$.

Der Satz gilt also für jeden möglichen Fall, d. i. allgemein.

Wollte man den *umgekehrten Satz* leugnen, so müßte man behaupten, daß, wenn $BC > EF$ ist, der Winkel BAC kleiner oder gleich D seyn könnte. Im ersten Fall müßte, nach dem eben bewiesenen, $BC < EF$; im zweyten Fall, dem folgenden Lehrsatz gemäß, $BC = EF$ seyn, welches beydes der Voraussetzung widerspricht. Also muß der Winkel BAC größer als D seyn.

Anmerkung. In Simpsons Elementen folgt auf diesen Satz ein ähnlicher Lehrsatz, dessen Beweis die Theorie der Parallellinien voraussetzt, und den Le Gendre übergeht, der aber doch gekannt zu werden verdient. Denn obgleich er auch bey Euklid fehlt, so ist er doch, wie Simpson bemerkt, zur geometrischen Bestimmung größter und kleinster Werthe, von großem Nutzen. Dieser Satz lautet wie folgt: *Wenn in zwey Dreyecken*

Fig. 24. *ein Winkel sammt der gegenüberstehenden Seite gleich, ein zweyter Winkel aber in beyden ungleich ist, so sieht dem, unter diesen Winkeln, welcher dem rechten am nächsten kömmt, eine größere*

* Cf. II. Seite gegenüber *.
Z. 24. 2.

Wenn z. B. zwey Dreyecke (man nehme in unsrer Figur die beyden spitzwinkligen ABC und DEF , oder die beyden stumpfwinkligen ABC' und DEF' , oder ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges,) wenn in diesen Dreyecken der Winkel $A = D$, die gegenüberstehende Seite $BC = EF$ ist, und dabey der Winkel C einem rechten Winkel näher kömmt, als der Winkel F ; so muß die Seite $AB > DE$ seyn.

Ich theile hier nur Simpsons Vorbereitung zum Beweise mit, da sie für den geübtern den Beweis zu führen hinreicht, der Beweis selbst aber hier nicht an seinem Ort stehen würde. Aus den Winkelpunkten B, E fälle man auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel, nehme auf die Verlängerung dieser Perpendikel Punkte I und K welche von den Seiten eben so weit als

die Punkte B, E abstehn, und ziehe IC, KF, so wird mittelst Lehrsatz 6 und 10 bewiesen, daß $IB > KE$, folglich das Perpendikel BG im erstern Dreyeck grösser als das im zweyten FH ist. Vom grössern schneide man ein Stück BM, dem kleinern gleich, ab, und ziehe durch den Endpunkt dieses Stücks eine Parallellinie mit AC, so schneidet diese von der Seite AB ein Stück BN ab, welches gleich DE ist, woraus erheller, daß DE kleiner als AB ist.

Haben also zwey rechtwinklige Dreyecke gleiche Hypotenusen, so steht dem Winkel, welcher in beyden der grössere ist, auch eine grössere Seite gegenüber.

LEHRSATZ II.

*Zwey Dreyecke die untereinander gleichseitig Fig. 19. sind, sind auch untereinander gleichwinklig, * und * E. 20. decken sich.*

Es sey $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, so behaupte ich, daß auch die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel gleich sind, $A = D$, $B = E$, $C = F$, und daß sich beyde Dreyecke EDF, ABC einander decken.

Denn gesetzt der Winkel A sey dem Winkel D nicht gleich, so muß er entweder grösser oder kleiner als der Winkel D seyn. Da die Seiten welche diese Winkel einschliessen der Voraussetzung nach in beyden Dreyecken gleich sind; so müste, wäre $A > D$, dem vorigen Lehrsatz gemäß, auch die dritte Seite $BC > EF$, wäre dagegen $A < D$, auch $BC < EF$ seyn, welches der Bedingung daß $BC = EF$ ist, widerspricht. Also kann der Winkel A weder grösser noch kleiner als D seyn, muß folglich

dem Winkel D gleich seyn. — Eben so kann man die Gleichheit der beyden andern Winkel beweisen, die indess noch kürzer daraus folgt, dafs, weil dann zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel A, D in beyden Dreyecken gleich sind, diese Dreyecke einander decken *, folglich die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel B, E und C, F so wie die Flächenräume beyder Dreyecke gleich seyn müssen. Und diese Gleichheit folgt wiederum aus der Gleichheit dreier Stücke, nemlich der drey Seiten in beyden Dreyecken.

[Aus drey gegebenen Linien ein Dreyeck zu bilden, lehrt Buch II. Erklärung II. Zusatz.]

L E H R S A T Z 12.

Fig. 25. *In jedem gleichschenkligen Dreyeck sind die Winkel an der Grundlinie *, welche den gleichen Seiten gegenüberstehn, gleich.*

Wenn $AB = AC$ ist, so behaupte ich mus $B = C$ seyn.

Es sey B der Punkt, welcher auf der Grundlinie in der Mitte zwischen den beyden Endpunkten B und C
 * Gr. 7. liegt. * Ziehe AD, so entstehn dadurch zwey Dreyecke ABD, ACD, welche untereinander gleichseitig sind, indem AD beyden gemein, ferner nach der Voraussetzung $AB = AC$, und der Construction gemäß $AB = DC$ ist. Folglich sind die der gemeinschaftlichen Seite
 * 11. AD gegenüberstehenden Winkel einander gleich *,
 $B = C$.

Folgerung. Das *gleichseitige Dreyeck* ist für jede Fig. 8. Seite als Grundlinie gleichschenklige, und hat deshalb lauter gleiche Winkel, ist gleichwinklig.

Zufatz. Daraus daß die beyden Dreyecke ABD, Fig. 25. ACD sich decken, folgt auch noch die Gleichheit der übrigen Winkel $BAD = DAC$ und $BDA = ADC$. Letztere sind, da BC eine grade Linie ist, Nebenwinkel, und folglich, als gleiche Nebenwinkel, *rechte Winkel**: * E. 14. folglich, *theilt in jedem gleichschenkligen Dreyeck eine von der Spitze nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie gezogene grade Linie den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile, und steht zugleich auf der Grundlinie senkrecht.*

[Eben so theilt eine grade Linie welche den Winkel an der Spitze im gleichschenkligen Dreyeck halbirt, das Dreyeck in zwey sich deckende Dreyecke*: * 6. folglich steht auch diese Linie senkrecht auf der Grundlinie und halbirt sie.]

Daß endlich auch das aus der Spitze des gleichschenkligen Dreyecks auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt, erhellt aus Lehrsatz 18. Folg. 2.

Stets sind also diese drey Eigenschaften in derselben Linie im gleichschenkligen Dreyeck verbunden.

Findet folglich eine derselben in einem Dreyecke ABC ohne die andre statt, *so sind die beyden Schenkel des Winkels ungleich* durch dessen Spitze die halbirende Linie oder das Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite gezogen ist.]

[Anmerkung. Hierher gehören die fünf ersten Aufgaben am Ende des zweyten Buchs, und Aufg. 8 bis 11. über die Construction der Dreyecke.]

LEHRSATZ 13.

Hat umgekehrt ein Dreyeck zwey gleiche Winkel, so sind auch die Seiten welche den gleichen Winkeln gegenüberstehen gleich, und das Dreyeck ist gleichschenkelig.

Fig. 26. Es sey $ABC = ACB$, so behaupte ich muß $AC = AB$ seyn.

Denn wären diese beyden Seiten nicht gleich; so müßte eine derselben, z. B. AB , die grössere seyn: folglich ließe sich auf ihr ein Stück $BD = AC$ nehmen. Zieht man dann DC , so erhält man ein Dreyeck BDC , welches sich mit dem Dreyeck BAC decken müßte, weil in beyden die Seite BC gemeinschaftlich, ferner der Annahme gemäss $AD = AC$, und nach der Voraussetzung der Winkel $B = ACB$ ist *: folglich wäre der Theil dem Ganzen gleich, welches ungereimt ist. Also können die Seiten AC , AB nicht ungleich seyn, daher das Dreyeck ABC gleichschenkelig seyn muß.

Folgerung. Ein Dreyeck welches lauter gleiche Winkel hat, ist auch gleichseitig.

Ein Dreyeck dessen Seiten alle ungleich sind, hat lauter ungleiche Winkel.

LEHRSATZ 14.

Fig. 27. *Von zwey Seiten eines Dreyecks ist stets die die grössere, welche einem grössern Winkel gegenübersteht. — Umgekehrt ist von zwey Winkeln eines Dreyecks stets der der grössere, welcher einer grössern Seite gegenüber steht.*

1. Es sey der Winkel $C > B$, so behaupte ich, daß die dem Winkel C gegenüberstehende Seite $AB > AC$ ist, welche dem Winkel B gegenübersteht.

Denn man denke sich durch den Winkelpunkt des gröfsern Winkels eine grade Linie CD so gezogen, daß der Winkel $BCD = B$ sey *, so ist das Dreyeck BDC * Gr. 7. gleichschenkelig und $BD = DC$ *. Da nun $AC < AD + DC$ * 13. $AD + DC$ *, so ist auch $AC < AD + BD$, d. h. * 8. $< AB$, folglich AB gröfser als AC .

2. Es sey die Seite $AB > AC$, so behaupte ich daß der Winkel C , welcher der Seite AB gegenübersteht, gröfser als der Winkel B ist, welcher der Seite AC gegenübersteht.

Denn wäre C nicht gröfser als B , so müfste jener Winkel entweder kleiner als B , oder gleich B seyn. Wäre $C < B$ so müfste, wie eben bewiesen worden, $AB < AC$ gegen die Voraussetzung, seyn. Wäre $C = B$ so müfste $AB = AC$ gleichfalls gegen die Vor. * 12. aussetzung seyn. Also ist nothwendig $C > B$.

LEHRSATZ 15.

Von einem Punkte A auferhalb einer graden Linie DE , läfst sich nach dieser Linie nur eine einzige senkrechte Linie ziehn. Fig. 28.

Gesetzt man könnte ihrer zwey AB und AC ziehn; so verlängere man die eine AB , nehme auf dieser Verlängerung $BE = AB$ und ziehe EC .

Dann deckten sich die beyden bey B rechtwinkligen Dreyecke ABC und EBC , weil die eine Kathete CB , beyden Dreyecken gemein ist, und die zweyten

Katheten AB , BF der Construction gemäß gleich
 *6. Folg. sind *: folglich wäre der Winkel BCF gleich dem Winkel BCA , welcher der Annahme nach ein rechter ist. Also müßte auch der Winkel BCF ein rechter seyn: folglich, weil die Summe der beyden aneinander liegenden Winkel $BCA + BCF$ zwey rechte Winkel be-
 * 4. trüge, müßten CA , CF in einer graden Linie liegen *, folglich wären zwischen den beyden Punkten A , F zwey verschiedene grade Linien ABF , ACF möglich, welches Grundsatz 6 widerspricht. Also sind zwey verschiedene senkrechte Linien von einem Punkte außerhalb einer graden Linie, auf diese Linie unmöglich.

[*Folgerung.* Also ist kein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln möglich.]

[*Anmerkung.* Dafs auf eine grade Linie durch einen Punkt in ihr nur ein einziges Perpendikel möglich ist, haben wir schon Lehrsatz 1. Zusatz 2. bewiesen. Wie diese Perpendikel zu contruiren sind, lehrt Aufg. 2, 3.]

LEHRSATZ 16.

Fig. 28* Man denke sich von einem Punkte A nach einer graden Linie DE die senkrechte Linie AB , und mehrere schiefaufliehende grade Linien AE , AC , AD etc. gezogen, so ist:

1) die senkrechte AB unter allen diesen Linien die kürzeste.

2) Unter den schiefstehenden Linien sind je zwey, z. B. AC , AE , welche auf entgegengesetzten Seiten der senkrechten Linie AB gleich weit von B (d. h. so dafs $BC = BE$ ist) aufstehn, gleich.

3) Von allen andern schieffstehenden Linien (z. B. AC , AD oder AC , AE) ist stets die die grössere, welche weiter von der senkrechten aufsteht.

Man verlängere die senkrechte Linie AB um $BF = AB$, und ziehe FC , FD .

1. Da nach der Construction die Winkel ABC , CBF rechte, folglich gleich, und auch die Seiten AB , BF gleich sind, so decken sich die beyden über die gemeinschaftliche Seite BC beschriebnen Dreyecke ABC und FBC *. Folglich sind die dritten Seiten AC , CF * 6. einander gleich. Nun aber ist die grade Linie ABF kürzer als die gebrochne Linie ACF *, folglich auch * E. 5. AB die Hälfte der ABF kürzer als AC die Hälfte der ACF . Also ist die senkrechte Linie kürzer als jede schiefauftstehende.

2. Wenn $BE = BC$ ist, so decken sich die beyden über AB beschrieben bey B rechtwinkligen Dreyecke ABE , ABC *: folglich sind die dritten Seiten AC , * 6. Folg. AE , und folglich je zwey schiefstehende Linien, welche gleich weit von B aufstehn, gleich. — Diese Linien müssen aber zu entgegengesetzten Seiten des Perpendikels AB aufstehn, weil sie sonst zwey Punkte A und B gemein hätten, folglich zusammenfielen, und nur Eine, nicht zwey verschiedene grade Linien ausmachten *.

3. Im Dreyeck ADF ist die Summe der beyden Seiten AD und DF grösser als die Summe der beyden Linien CA und CF , die von einem Punkte innerhalb des Dreyecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen sind *. Also ist auch AD , die Hälfte von AD + * 9.

*Gr. 6.
E. 1.

DF gröfser als AC, die Hälfte von $AC + CF$: folglich find die fehiefftehenden Linien länger, die weiter vom Perpendikel ab aufftehn.

Folgerung 1. Die *fenkrechte Linie* ift das *wahre Maafs des Abftands eines Punkts von einer graden Linie*, weil fie nur auf eine einzige Art vorhanden (2), und zugleich die kürzeffe unter allen möglichen Linien ift, die fich vom Punkte zur graden Linie ziehn laffen. [Daher werden wir hinfüro den *Abftand eines Punkts von einer graden Linie*, und umgekehrt den *Abftand einer graden Linie von einem Punkte* ftets durch das Perpendikel, welches vom Punkte auf die Linie gefällt wird, beftimmen. Wenn wir von der Gröfse eines *folchen Abftands* reden, muß man darunter die Gröfse diefes Perpendikels zwifchen Punkt und Linie verftehn.]

Fig. 36. [Der *Abftand zweyer Linien AB, CD von einander* hängt vom Abftande der Punkte in der einen, von der andern Linie, ab. Folglich muß diefer Abftand durch die Gröfse der Perpendikel BA, FE, DC, die man von den Punkten in der einen BD, auf die andere AC zieht, beftimmt werden. Sind diefe Perpendikel insgefamt gleich, fo find die beyden Linien *gleich weit abftehend* (lineae aequidistantes), wo nicht, fo find fie *ungleich weit abftehend*.]

Folgerung 2. Von einem Punkte laffen fich nach einer und derfelben graden Linie nicht drey gleiche grade Linien ziehn. Denn fonft müfte es auf einerley Seite des Perpendikels zwey gleiche (nicht zufammenfallende) fehief aufftehende grade Linien geben, welches nach 2 unmöglich ift.

[Zufatz I. Aus der Deckung der beyden Dreyecke ABC, ABE in (2) folgt die Gleichheit der Winkel $C = E$ und der Winkel $CAB = BAE$; so wie umgekehrt aus der Gleichheit dieser Winkel und der Seiten $AC = AE$, oder der Seiten $BC = BE$ die Deckung der beyden Dreyecke. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

α , Die schiefen Linien AC, AE welche gleich weit von der senkrechten Linie AB abstehn (d. h. so daß $CB = BE$ ist) sind sowohl gegen die Linie DE, als auch gegen die senkrechte AB beyde unter gleichen Winkeln geneigt.

β , Zwey schiefe Linien AC, AE, die unter gleichen Winkeln $C = E$ auf die grade Linie DE aufstehn, sind gleich; und überdem gleich weit vom Perpendikel AB entfernt, d. h. so, daß sowohl $BC = CE$, als auch der Winkel $CAB = BAE$ ist, fallen folglich, wenn sie auf einerley Seite des Perpendikels liegen zusammen (2).

γ , Zwey schiefe - aufstehende Linien AC, AE die gleiche Winkel mit dem Perpendikel AB machen, sind gleich, und stehn von demselben gleich weit ab.]

[Zufatz. II. Jede der schieffstehenden Linien AE, AC, AD etc. steht auf DE unter ungleichen Nebenwinkeln *, einem spitzen und einem stumpfen auf. * E. 13, Und zwar liegt der spitze Winkel mit dem Perpendikel stets auf einerley, der stumpfe Winkel hingegen mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schieffstehenden Linie. Denn jede schieffstehende Linie z. B. AC bildet

mit dem Perpendikel AB und dem zwischen beyden liegenden Stück der graden Linie DE ein rechtwinkliges Dreyeck, worin der Winkel der schieffstehenden Linie vorkömmt, der mit dem Perpendikel auf einerley Seite der schieffstehenden Linie liegt. Nun ist das Perpendikel AB sters kleiner als AC (1), folglich auch der Winkel C kleiner als der rechte Winkel B *, folglich jener Winkel ein spitzer, dagegen sein Nebenwinkel ACD, der mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schieffstehenden Linie AC liegt, ein stumpfer.]

[*Folgerung 1.* Wenn zweyer schieffstehender Linien AC, AD spitze Winkel (oder auch ihre stumpfe Winkel) beyde nach einerley Seite jener Linien zu liegen, so liegen diese Linien selbst beyde auf einerley Seite des Perpendikels AB. Wenn dagegen, wie bey AC, AE die spitzen (oder auch die stumpfen Winkel auf entgegengesetzten Seiten jener Linien, (folglich gegeneinander gekehrt) liegen, so liegen diese Linien beyde auf entgegengesetzter Seite des Perpendikels AB.]

[*Folgerung 2.* Folglich fällt das Perpendikel, welches aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Grundlinie gefällt wird, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spitz sind, *innerhalb*, wenn einer dieser Winkel spitz der andre stumpf ist, *ausserhalb* des Dreyecks. — Ist keiner der Winkel an der Grundlinie ein rechter, so fällt das Perpendikel in die eine Kathete

Kathete des rechtwinkligen Dreyecks, weil aus einem Punkt auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist. d. U.

LEHRSATZ 17.

Es sey EF eine auf der graden Linie AB, in deren Fig. 29.
Mitte C, aufstehendes Perpendikel, so ist 1) jeder Punkt in diesem Perpendikel von den beyden Endpunkten der graden Linie AB gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt auferhalb des Perpendikels hingogen von diesen Endpunkten ungleich weit entfernt.

1. Da der Voraussetzung gemäfs $AC = CB$ ist, so stehn zwey aus irgend einem Punkte D des Perpendikels nach A und B gezogene grade Linien DA, DB , vom Perpendikel gleich weit ab, sind also gleich. * 16. 6.
Und folglich steht jeder Punkt im Perpendikel von den beyden Endpunkten A, B gleich weit ab.

2. Es sey I ein Punkt auferhalb des Perpendikels. Zieht man IA, IB , so mufs eine dieser beyden Linien z. B. IA das Perpendikel in irgend einem Punkte D durchschneiden. Man ziehe DB . Nun ist $IB < ID + DB$ *, und, da D ein Punkt im Perpendikel ist, nach (1) $DB = DA$; folglich $IB < ID + DA$ d. i. $< IA$, folglich jeder Punkt, auferhalb des Perpendikels von den Endpunkten A, B ungleich weit entfernt. * 8.

Folgerung 1. Umgekehrt mufs jeder Punkt, welcher von zwey Punkten A, B gleich weit absteht, in dem Perpendikel auf AB liegen, welches in der Mitte zwischen diesen Punkten aufsteht. Denn aufer-

halb dieses Perpendikels kann ein solcher Punkt nach (2) nicht liegen. Eine grade Linie, welche durch zwey von *A* und *B* gleich weit abstehende Punkte *D*, *F* gezogen ist, muß also dieses Perpendikel seyn.

Folgerung 2. Das Perpendikel durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks muß die Grundlinie, und folglich auch den Winkel an der Spitze halbiren. Denn die Spitze ist von den beyden Endpunkten gleichweit entfernt, und durch jeden Punkt ist nur ein Perpendikel auf eine grade Linie möglich *.

• 15.
Fig. 28. *Folgerung 3.* Wenn man von zwey gegebenen Punkten *C*, *E* noch so viel Paare sich durchschneidender Linien *CA*, *EA* so zieht, dafs je zwey, welche sich schneiden, gleich sind, (mithin im Verhältniß der Gleichheit stehn) so müssen die Durchschnittspunkte dieser Linien insgesammt in einem Perpendikel auf *CE*, das in der Mitte zwischen *C* und *E* aufsteht, liegen. Dieses Perpendikel ist daher der geometrische Ort des Durchschnittspunkts oder der Spitzen gleichschenkliger Dreyecke, welche über dieselbe Grundlinie be-
• E, 21. schrieben werden *.

[L E H R S A T Z 18.]

Fig. 24. *Zwey Dreyecke DEF, NBL decken sich, wenn in ihnen zwey Winkel und irgend eine Seite gleich sind.*

Liegen die gleichen Winkel beyde an der gleichen Seite an, so ist dieser Satz kein anderer, als der schon bewiesene 7te Lehrsatz. Wo nicht, so sey die Seite $NB = DE$, der Winkel $N = D$ und der Winkel $L = F$.

Aus der Spitze des dritten Winkels B, E, sey auf die gegenüberstehende Seite NL, DF, das Perpendikel BM, EH gefällt. Weil $DE = NB$ ist, decken sich diese beyde Linien, so daß die Endpunkte E, B und D, N zusammenfallen. Weil ferner die Winkel D, N gleich sind, so fällt auch die Seite DF auf NL*. *Gr. 10. Nun ist von Einem Punkte (den zusammenfallenden E, B) nach Einer graden Linie (den zusammenfallenden DF, NL) nur ein einziges Perpendikel möglich*; * 15. folglich müssen auch die Perpendikel EH, BM einander decken. In dieser Lage gehn die dritten Seiten EF, BC beyde durch denselben Punkt (E, B), und stehn auf dieselbe grade Linie DF, NL, zu einerley Seite des Perpendikels EH, BM, und zwar der Voraussetzung nach unter gleichen Winkeln $L = F$ auf. Folglich müssen sie zusammenfallen*, also die beyden Drey-^{*16. Z. 1.} ecke einander decken. ^{β.}

Folgerung 1. Aus der Gleichheit zweyer Winkel und einer Seite in zwey Dreyecken, folgt also die Gleichheit des Flächenraums beyder Dreyecke, der dritten Winkel B, E und der beyden andern, den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, $NL = DF$ und $BL = EF$.

Folgerung 2. Zwey rechtwinklige Dreyecke decken einander, wenn in ihnen aufser dem rechten noch ein anderer Winkel, und irgend eine der Seiten gleich sind.

Anmerkung. Dieser Satz fehlt bey Le Gendre. Bey *Euclid* ist er der 26ste Satz des ersten Buchs, wird dort aber anders bewiesen als hier, wo ich den Beweis gewählt habe, den man in *Kästners Geometrie* findet.

d. U.

L E H R S A T Z 19.

Zwey rechtwinklige Dreyecke decken sich, wenn die Hypotenuſe und eine der Katheten in beyden gleich ist.

- Fi .30. Es ſey die Hypotenuſe $AC = DF$ und die Kathete $AB = DE$, ſo wird die Deckung der beyden rechtwinkligen Dreyecke ABC , DEF dargethan ſeyn, wenn bewieſen wird, daß die beyden andern Katheten BC , EF gleich ſeyn müſſen. Geſetzt ſie könnten ungleich, und BC größer als EF ſeyn, ſo nehme man auf BC ein Stück $BG = EF$ und ziehe AG . Dann hätten die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABG , DEF gleiche Katheten, $AB = DE$ und $BG = EF$; ſie müſten ſich al-
- * 6. f. 2. ſo decken *, und auch ihre dritten Seiten AG , DF gleich ſeyn. Es iſt aber nach der Vorausſetzung $DF = AC$. Alſo wäre $AG = AC$, und wir hätten hier zwey gleiche, durch den Punkt A gezogene, auf BC ſchiefaufftehende grade Linien, in ungleichem Abſtand
- * 16. 3. vom Perpendikel, welches unmöglich iſt *. Alſo iſt es unmöglich daß BC und EF ungleich wären, alſo
- * 11. nothwendig, daß beyde Dreyecke ſich decken *.

[Anmerkung. Auch hieraus folgt, daß das Perpendikel aus der Spitze des gleichſchenklichen Dreyecks auf die Grundlinie, die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt.]

[L E H R S A T Z 20.]

Zwey ſchiefwinklige Dreyecke decken ſich, wenn in ihnen zwey Seiten und einer der Winkel, welcher dieſen Seiten gegenüberſteht, gleich ſind, und dabey

die zweyten gegenüberstehenden Winkel beyde spitz, oder beyde stumpf sind.

Es sey $NB = DE$, $BL = EF$ und der Winkel Fig. 24. $N = D$, so werden die beyden Dreyecke NBL , DEF sich unter der Bedingung decken, dafs die beyden andern, den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel, beyde spitz, oder beyde stumpf sind, welche Fälle die Figur beyde darstellt.

Man ziehe aus der Spitze der von den gleichen Seiten eingeschlossnen Winkel B , E auf die gegenüberstehende Grundlinie oder deren Verlängerung die senkrechten Linien BM , EH *, so decken sich die *Aufg. 3 rechtwinkligen Dreyecke NMB , DHE weil in ihnen einer der spitzen Winkel N , D und eine Seite NB , DE gleich sind *. Also fallen die Seiten NM , DH , die *18. f. 2. Punkte B , E , und zugleich die Perpendikel BM , EH zusammen. Folglich sind dann BL , EF zwey von einem Punkte eines Perpendikels, nach Einer graden Linie, (den zusammenfallenden NL , DF) gezogene schiefauftstehende Linien. Da nun, der Voraussetzung gemäß, erstens die Winkel L , F , welche den zusammenfallenden Linien NB , DE gegenüberstehn und daher auf einerley Seite der schiefauftstehenden Linie BL , EF liegen, entweder beyde spitz, oder beyde stumpf sind, so müssen diese schiefstehenden Linien BL , EF sich auf einerley Seite des Perpendikels befinden *, und *16. Z. 2. und da sie zweytens der Voraussetzung nach gleich sind, so müssen sie zusammenfallen *. — Folglich fal- * 16. 2. len alle drey Seiten der Dreyecke NBL , DEF zusammen, und beyde Dreyecke decken sich.

Anmerkung. Diesen Satz der bey *Euklid* und *Le Gen-dre* fehlt, habe ich aus *Simpson* entlehnt, den Beweis aber selbst geführt, da *Simpson* die Hauptsache, daß *BC*, *EF* auf einerley Seite des Perpendikels fallen müssen, nicht darthut, wozu ihm Sätze, wie die beym 16ten Lehrsatz nachgetragenen, fehlten. Daß dieser Satz übrigens allein unter der beygefügtten Bedingung gilt, erhellt aus dem Beweise. Denn nur unter dieser Bedingung ist es nothwendig daß die schieffstehenden Linien *BL*, *EF*, beyde auf einerley Seite des Perpendikels liegen und sich decken. Ohnedem könnten sie wie *BL*, *E'F* auf entgegengesetzten Seiten des Perpendikels liegen, und dann würden sie ihrer Gleichheit ungeachtet nicht zusammenfallen. Die Deckung bliebe also ohne jene Bedingung zweifelhaft. — Wie, wenn zwey Linien als Seiten eines Dreyecks, und ein ihnen gegenüberstehender Winkel gegeben sind, das Dreyeck zu finden ist, lehrt Aufg. 10.

d. U.

L E H R S A T Z 21.

Fig. 31. *Zwey grade Linien AC, BD, welche auf einer
 * E. 14. dritten AB senkrecht stehn*, sind parallel, d. h. tref-
 * E. 15. fen nie zusammen, so weit man sie auch verlängert*.*

Denn gesetzt sie träfen in irgend einem Punkte *O*
 * E. 10. oberhalb oder unterhalb der Linie *AB* zusammen*; so
 hätte man einen Punkt *O*, von welchem zwey ver-
 schiedne Perpendikel *OA*, *OB* noch derselben graden
 * 15. Linie *AB* giengen, welches unmöglich ist*.

[Hieraus erhellt die Möglichkeit parallaler Li-
 nien. — Die 15te Erklärung gehörte also hierher.]

L E H R S A T Z 22.

Fig. 32. *Wenn auf der graden Linie AB, eine andere BD
 senkrecht und eine zweyte AC schief aufsteht, so daß*

der spitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt, so müssen BD , AC genugsam verlängert [an der Seite der AB , auf welcher der spitze Winkel liegt] zusammen treffen.

Aus verschiedenen Punkten F , C , P , der schiefstehenden Linie AC seyen auf AB die Linien FG , CM , PN senkrecht gezogen.

Diese Perpendikel fallen insgesammt auf die Seite der AC , auf welcher der spitze Winkel liegt*, d. i. ^{*16.Z.2.} der Voraussetzung nach insgesammt nach der Seite des Perpendikels BD . Die Punkte G , M , N in welchen sie auf die AB aufstehn, können nicht mit dem Punkte A zusammenfallen, weil BAC kein rechter Winkel ist. Eben so wenig können sie in der entgegengesetzten Verlängerung AL der Linie AB liegen. Denn sonst müßte das im Punkte A auf AB errichtete Perpendikel AE von diesen Perpendikeln durchschnitten werden, (wie z. B. von FH in K)*, und dann wären von dem ^{* Gr. 8.} Durchschnittspunkte (K) zwey verschiedene Perpendikel auf AL vorhanden (KA , KH) welches unmöglich ist*: folglich müssen die Punkte G , M , N in der Linie AB von A nach B zu liegen. ^{* 15}

Grade aus denselben Gründen muß, wenn AC größer als AF ist, auch der Punkt M von G nach B zu in der Linie AB liegen. Sollte er mit G zusammenfallen, so stünden in G auf AB zwey verschiedene grade Linien GF , GC senkrecht, welches unmöglich ist*. ^{*1. Z. 2.} Sollte er in die entgegengesetzte Seite der AB fallen, so würde das Perpendikel aus C das Perpendikel FG durchschneiden, und aus einem Punkte außerhalb der

AB auf ihr zwey verschiedene Perpendikel vorhanden seyn, welches eben so wenig möglich ist. Folglich muß der Punkt M von G nach B zu fallen, so daß AM größer als AG ist.

Wenn man also auf AC stets in größern Entfernungen Punkte nimmt, und aus ihnen senkrechte Linien auf AB zieht, so fällt der Punkt wo sie auf AB aufstehn, immer weiter und weiter von A ab. In diesem Wachsthum der Entfernungen AG, AM, AN Gränzen annehmen zu wollen, würde ungereimt seyn. Denn gesetzt man wollte behaupten irgend eine der senkrechten Linien z.B. CM sey die letzte, folglich die, deren Fußpunkt M am weitesten von A abstände, so liesse sich allemal, auf die Art, wie es hier geschehn ist, dar-

* Fo. 2, thun, daß wenn man die AB verlängert *, ein aus irgend einem Punkte P der Verlängerung auf AB gefälltes Perpendikel PN in einer Entfernung AN, die größer als AM ist, aufstehn müßte; ein Resultat, welches der Annahme, daß CM die letzte am weitesten von A entfernte senkrechte Linie sey, widerspricht.

Folglich stehn auf AB in jeder beliebigen, noch so großen Entfernung von Punkte A Perpendikel, die aus einem Punkte der AC gefällt sind, auf: folglich auch in der Entfernung AB, und hier muß das Perpendikel mit der senkrechten Linie BD zusammenfallen, da in einem Punkte B einer graden Linie nur ein einziges Perpendikel auf diese Linie möglich ist *:

* I. Z. 2, folglich müssen die Linen AC, BD genugsam verlängert, in irgend einem Punkte zusammentreffen, und zwar

an der Seite der AB, auf welcher der spitze Winkel BAC liegt.

[Anmerkung. Dieses ist der Fundamentalsatz in der *Lehre von den Parallellinien*, dessen Beweis, wie ihn Le Gendre führt, ich auf das Vortheilhafteste darzustellen, und, (wie man aus den Citaten sehn kann) durch Einschaltung früherer von Le Gendre übergangener Sätze in das System, ich noch besser zu begründen gesucht habe. Aus diesem Satze folgt der 24ste Lehrsatz, dessen Beweis, wie es scheint, *Euklid* für unmöglich hielt, und den in der That noch niemand, so viele Wege man auch eingeschlagen hat, elementarisch und völlig bindend dargethan hat. Hr. Le Gendre würde sich daher ein bleibendes Verdienst um die Geometrie erworben haben, wenn der hier mitgetheilte Beweis biedend und ohne Lücke wäre, und sich dagegen nichts anders einwenden liesse, als was Le Gendre selbst in einer Anmerkung erinnert, daß die Idee des Unendlichen dabey mit ins Spiel komme (welches, wenn es nur auf gehörige geometrische Art geschieht, nicht tadelnswürdig seyn könnte). Ich glaube aber an Hr. Le Gendres Beweis zweyerley aussetzen zu müssen.

Erstens wird im indirecten Beweise im Ersten Absatz unbewiesen behauptet, daß die als senkrecht angenommene FH das Perpendikel AE durchschneiden müsse; eine Lücke die jedoch leicht auszufüllen ist, wenn man nur die von unserm Verfasser übergangnen Sätze vom Schneiden der Linien den Principien der Geometrie zufügt, wie ich das zu thun versucht, und deshalb auf Grundsatz 8 verwiesen habe,

Zweytens, und das ist die Hauptsache, thut dieser Beweis zwar überzeugend dar, daß, falls es in der Verlängerung einer graden Linie keine Grenzen giebt, (und daß es die nicht geben liegt in Forderung 2.) es auch kein letztes Perpendikel aus Punkten der AC auf AB geben könne. Allein daraus folgt keineswegs, wie im dritten Absatz stillschweigend angenommen wird, daß es in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A keine Grenze geben könne. Denn es wäre vielleicht doch denkbar, daß bey

gleich weit entfernten Punkten auf der AC, die Perpendikel auf AB immer weniger von einander abstünden, und ihre Entfernungen vielleicht in einer geometrischen oder andern unendlichen Reihe die eine endliche Summe hat, abnehmen könnten, da denn für gewisse Entfernungen der BD, die AC sich ihr affymptotisch nähern würde, ohne sie je zu erreichen. In diesem Fall wäre zwar eine Gränze in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A auf der Linie AB vorhanden, über die heraus für jede Entfernung von A kein Perpendikel aus einem Punkte in der AC die AB mehr durchschneite, allein dem ungeachtet gäbe es kein letztes Perpendikel, weil es bey allen Annäherungen ohne Ende keinen letzten Zustand giebt. Es scheint daher etwas übereilt zu seyn, wenn Hr. Le Gendre im vierten Absatz aus dem was dargethan ist (d. h. daraus daß es kein letztes Perpendikel giebt) unmittelbar folgert, daß in jeder noch so großen Entfernung von A ein Perpendikel aufstehe; eine Folgerung die nur dann gültig wäre, wenn er dargethan hätte, daß es in der Entfernung der Durchschnittspunkte der Perpendikel auf der Linie AB, vom Punkte A an gerechnet, keine Gränze giebt. So lange er uns dieses nicht beweist (und das möchte auf dem Wege, den er einschlägt, kaum möglich seyn) können wir seinen Beweis nicht als bindend erkennen, sondern müssen ihn, so viel Scharfsinn er übrigens verräth, den nicht ganz geglückten Versuchen die Schwierigkeit in der Theorie der Parallellinien zu heben, beyzählen. Unserm Leser wird er wenigstens dazu dienen, daß er einsieht, worauf die Schwierigkeit bey diesem Satze beruht, welches mehreren, die sich mit dieser Theorie beschäftigt haben, nicht scheint recht deutlich gewesen zu seyn. — Ueber die Versuche die Theorie der Parallellinien auf einem andern Wege zu begründen, sehe man die erste unter den Bemerkungen, welche diesen Elementen angehängt sind.

d. U.

L E H R S A T Z 23.

•Fig. 32. Wenn zwey grade Linien AC, BD mit einer
 25. An. dritten AB zwey innere Winkel CAB, ABD

bilden, deren Summe zwey rechten Winkeln gleich ist, so sind sie parallel.

Aus dem Punkt G in der Mitte zwischen A und B sey senkrecht auf AC die grade Linie EGF gezogen *. *Au. 1.3.
 Der Voraussetzung nach sind $GBD + GAE$ zwey rechten Winkeln gleich. Nun sind auch, als Nebenwinkel, $GBD + GBF$ zwey rechten Winkeln, also der Summe jener beyden Winkel gleich *. * Gr. 1.
 $= GBF$. * * Gr. 2. Ueberdem sind als Scheitelwinkel AGE, * Gr. 2.
 BGF, und der Construction gemäfs die Seiten GA, GB gleich. * 6.
 Folglich decken sich die beyden Dreyecke AEG, BFG *, und auch die Winkel GFB, GEA * 6.
 sind gleich. Nun ist GEA der Construction gemäfs ein rechter Winkel, also auch GFB. Folglich stehn die beyden Linien AC, BD auf einer dritten senkrecht, sind also parallel*.

* 21.

[*Folgerung.* Sollen also zwey grade Linien zusammenstreffen, so müssen sie mit jeder dritten, welche sie durchschneiden, zwey innere Winkel bilden, die zusammen genommen gröfser oder kleiner als zwey rechte sind.]

LEHRSATZ 24.

Wenn zwey grade Linien AI, BD, mit einer dritten AB zwey innere Winkel BAI, ABD bilden, deren Summe kleiner als zwey rechte Winkel ist, so treffen sie genugsam verlängert zusammen, und zwar an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, liegen.]

Man ziehe durch A die grade Linie AC, [unter einem Winkel, welcher dem Nebenwinkel von ABD

*Aufg. 4 gleich ist *] so dafs die beyden innern Winkel CAB, ABD zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich werden, und nehme dann dieselbe Construction als beym vorigen Satze vor. — Da dann AE das Perpendikel und AK eine schieffstehende Linie auf EG ist, die beyde durch denselben Punkt A gehn, so ist der Winkel AKE, welcher mit dem Perpendikel auf einer-
 *16 Z. 2. ley Seite der schieffstehenden AK liegt, spitz *, folg-
 * 5. lich auch sein Scheitelwinkel FKI *. Daher müssen KI, FD genugsam verlängert oberhalb EF zusammentref-
 * 22. fen *. [Nun aber können sie nicht in dem Stück BF zusammentreffen; weil sonst die Winkel BAI, ABD, gegen die Voraussetzung nicht auf einerley Seite der AB liegen würden. Folglich müssen sie in dem Stück BD, also oberhalb AB zusammentreffen, d. i. an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, liegen.]

Zusatz I. Dasselbe findet auch statt, wenn zwey Linien AM, BD mit der dritten AB zwey innere Winkel BAM, ABD bilden, deren Summe *größer als zwey rechte Winkel ist*. Denn da die Summe der Nebenwinkel BAM, BAN und ABD, ABF vier rechten Winkeln
 * 5. Z. 1. gleich ist *, und der Voraussetzung nach BAM + ABD größer als zwey rechte Winkel ist; so muß die Summe der beyden andern Winkel BAN + ABF kleiner als zwey rechte Winkel seyn, also AN dem vorigen Beweise zu folge mit BF zusammentreffen, [jetzt aber unterhalb AB, da in diesem Fall die innern Winkel, die kleiner als zwey rechte sind, unterhalb AB liegen.]

Zufatz II. Durch jeden Punkte A ist mit einer graden Linie BD nur eine einzige Parallellinie AC möglich. Denn jede von AC verschiedene grade Linie AI oder AM, bildet mit AB einen kleinern oder einen größern Winkel als AC, folglich zwey innere Winkel, deren Summe kleiner oder größer als zwey rechte ist, durchschneider also BD.

[Anmerkung. Die Bestimmung zu welcher Seite der AB, die beyden graden Linien zusammentreffen, fehlte bey unserm Verfasser mit Unrecht, da sie von vielem Gebrauch ist. — Der Lehrsatz selbst ist *Enklids* eilfer Grundsatz, über den man einige Bemerkungen am Ende dieses Werks findet, wo auch unser Verfasser eine überraschende analytische Methode angebr, wie sich die Hauptsätze der Geometrie unabhängig von der Theorie der Parallellinien darthun lassen.]

LEHRSATZ 25.

Wenn zwey Parallellinien AB, CD von einer graden Linie EF geschnitten werden, so ist die Summe der beyden innern Winkel AGO, GOC zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 34.

Denn gesetzt sie sey kleiner oder größer als zwey rechte Winkel, so müßten, dem vorigen Lehrsatz zu folge, beyde Linien zusammentreffen, wären also nicht parallel.

Folgerung I. Wenn AGO ein rechter Winkel ist, so muß es auch der zweyte innere Winkel GOC seyn. Folglich steht jede grade Linie, die auf einer von zwey Parallellinien senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.

Folgerung 2. Da $AGO + GOC$ zwey rechten Winkeln gleich ist, überdem auch die Summe der Nebenwinkel $GOD + GOC$ zwey rechte Winkel beträgt, so ist AGO gleich GOD , also auch gleich dem Scheitelwinkel des letztern COF . Also sind sowohl die vier spitzen Winkel EGG , AGO , GCD , COF einander gleich, als auch die vier stumpfen Winkel EGA , BGO , GOC , DOF ; und jeder der spitzen macht mit jedem der stumpfen Winkel zusammengenommen zwey rechte Winkel aus. — Umgekehrt ist, wenn AGO gleich GOD oder COF ist, auch $AGO + GOC$ gleich $GOD + GOC$ d. h. zwey rechten Winkeln gleich.

Anmerkung. Diese Winkel liegen um zwey verschiedne Durchschnittspunkte G , O . Ein Winkel an einem Durchschnittspunkt in Verbindung mit einem Winkel am andern Durchschnittspunkt betrachtet, geben Paare von Winkeln, denen man eigne Namen gegeben hat. Die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche zu einerley Seite der durchschneidenden Linie liegen, nennt man vorzugsweise *innere Winkel* (*angles internes*) z. B. AGO , GOC auch BGO , GOD ; die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie liegen, *Wechselfwinkel* (*angles alternes* oder *alternes internes*) z. B. AGO , GOD auch BGO , GOC ; endlich ein Paar Winkel auf einerley Seite der durchschneidenden Linie, wovon einer zwischen, der andere auferhalb der beyden Parallellinien liegt, *äußere Winkel* (*angles internes - externes*), dergleichen EOD , EGB , auch EGA , EOC ; FGB , FOD , und FGA , FOC sind. (Die Winkel auferhalb beyder Parallellinien, auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie, z. B. EGB , COF nennt *Le Gendre* *alternes - externes*; im Deutschen würden wir sie am schicklichsten *äußere Wechselfwinkel* nennen.) — In diese Benennungen übertragen, sagt unser Lehrsatz und die vorhergehenden folgendes aus.

1. Wenn zwey Parallellinien von einer dritten graden Linie durchschnitten werden, so sind α) die innern Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich; β) die Wechselfwinkel und γ) auch die äufsern Winkel untereinander gleich.

2. Wenn umgekehrt zwey grade Linien so von einer dritten durchschnitten werden, dafs die Summe der Innern Winkel zwey rechte beträgt, oder dafs die Wechselfwinkel, oder dafs die Außern-Winkel gleich sind; so sind die Linien parallel *. 23.
Dieser Merkinale zieht stets die beyden andern nach sich, wie aus Folgerung 2 erhellt.

[3. Werden dagegen zwey grade Linien von einer dritten so durchschnitten, dafs die innern Winkel nicht zwey rechten, und die Wechselfwinkel, so wie die äufsern Winkel, nicht untereinander gleich sind, so treffen diese Linien zusammen, und zwar an der Seite der durchschneidenden Linie, an welcher die innern Winkel $IAB + ABD < 2 R$ sind *; folglich an der Seite, wo der kleinere der Wechselfwinkel liegt $IAB < ABF$ oder $ABD < BAL$, oder an der Seite an welcher der kleinere von zwey äufsern Winkeln zwischen den Parallellinien liegt.] Fig. 33. * 24.

[4. Auf die Sätze unter 2 beruht die Construction der Parallellinien, in Aufgabe 6, und daher auch die Möglichkeit des Parallelogramms *, welches entsteht, wenn man von zwey Punkten einer Parallellinie nach der andern gleichlaufende Linien zieht, folglich Parallelen zwischen Parallelen bildet.] * E. 19. Fig. 34.

LEHRSATZ 26.

Zwey grade Linien AB, CD , welche mit einer dritten EF parallel sind, sind untereinander selbst parallel. Fig. 35.

Es sey RP ein Perpendikel auf EF . Weil nun AB mit EF parallel ist, so steht RP auch auf AB senkrecht *. Weil zweytens CD mit EF parallel ist, so steht RP auch auf CD senkrecht. Also stehn AB, CD beyde

auf einer graden Linie RP senkrecht; folglich find sie
 * 21. untereinander parallel *.

L E H R S A T Z 27.

Fig. 36. *Zwey Parallellinien stehn überall gleich weit von einander ab, d. h. Perpendikel, die von Punkten in der einen auf die andre gefällt werden, sind überall gleich.*

Es mögen BA, DC zwey Perpendikel seyn, welche aus Punkten in der einen Parallellinie BD auf die andre Parallellinie AC gefällt sind. Ferner sey F ein Punkt in der Mitte von BD, und FE das Perpendikel aus diesem Punkt auf AC. Alle drey Perpendikel stehn auf beyden Parallellinien zugleich
 * 25. f. 1. senkrecht *, daher die Winkel um A, E, C, D, F, B insgesammt rechte sind. Dieses vorausgesetzt behaupte ich, das das Viereck AEFB sich mit dem Viereck CEFB deckt. Beyden ist die Seite FE gemein. Da ferner die Winkel bey beyden rechte sind, folglich einander decken, und der Construction gemäß $BF = FD$ ist, so fällt der Punkt B auf D, und da die Winkel bey B und D beyde rechte, also ebenfalls gleich sind, fällt auch BA auf DC. Ueberdem fällt, weil bey E rechte Winkel sind, EA auf EC, folglich auch A auf C, als Durchschnittspunkte zweyer zusammenfallender Linien. Also decken sich die beyden Vierecke, und die Perpendikel AB, CD sind gleich. [Da dieser Beweis für alle Perpendikel gilt, so stehn folglich zwey Parallellinien durchgängig gleich weit von einander
 * 16. f. 1. ab *, sind lineae aequidistantes; eine Eigenschaft, woraus mehrere die Definition und die ganze Theorie

Theorie der Parallellinien zu gründen gesucht haben, wozu diese Eigenschaft jedoch erst vermöge des folgenden Lehrsatzes tüchtig wird. Siehe Bemerkung 1. am Ende dieses Bandes.]

Zusatz. Grade auf dieselbe Art wird *der umgekehrte Satz* bewiesen, daß eine Linie, welche von einer graden Linie in allen ihren Punkten gleich weit absteht, auch eine grade Linie, und zwar eine Parallellinie mit der erstern seyn muß. Daraus folgt daß eine Linie die mit einer gegebenen Linie parallel läuft, der *geometrische Ort* aller Punkte ist, welche von der gegebenen graden Linie gleich weit abstehn, oder der geometrische Ort für die Aufgabe einen Punkt anzugeben, der von einer gegebenen graden Linie um eine gegebne Linie absteht. Alle Punkte in der Parallellinie und keiner außer ihr, thun dieser Aufgabe genüge*.

* E. 21.

[LEHRSATZ 28.]

Zwey grade Linien in einer Ebene, welche nicht parallel sind, stehn überall ungleich weit von einander ab, und zwar wird ihr Abstand nach der Seite zu, wo sie einander durchschneiden, immer kleiner, nach der entgegengesetzten immer größer. Fig. 37.

Es mögen AC, BH, zwey grade Linien seyn, welche nach der Seite von C und H hin zusammentreffen. Von zwey Punkten B und H der einen, falle man auf die andere die Perpendikel BA und HC, so muß $HC < BA$ seyn.

F

Denn man errichte auf der Mitte von AC eine dritte senkrechte Linie EG; so muß, weil beyde Linien sich nach C und H zu, durchschneiden sollen, * 23. f. dieser Voraussetzung gemäß $EGH + GEC < 2R^*$, folglich $EGH < R$ also spitz seyn. Nun aber läßt das Viereck GECH sich wie im vorigen Beweise so auf das Viereck GEAB legen, daß GE, EC, CH, auf GE, EA, AB, fallen. Gesetzt nun erstens CH sey gleich AB, so würden beyde Vierecke völlig einander decken, also EGH ein rechter Winkel seyn, welches der Voraussetzung widerspricht. Gesetzt zweytens CH, sey größer als AB, so würde, indem CH auf AB liegt der Punkt H in der Verlängerung von AB, über B hinaus fallen; folglich müßten die Schenkel EG, GH, *E.12. β den Winkel EGB einschließen, also $EGH > EGB^*$, d. i. der spitze Winkel größer als der stumpfe seyn, welches ungereimt wäre. Also muß nothwendig HC, kleiner als BA seyn, also der Abstand zweyer solcher Linien nach |der Seite des Durchschnittspunktes hin immer kleiner, nach der entgegengesetzten stets größer werden.

Die beyden Linien also nähern sich einander immer mehr auf der Seite des Perpendikels, auf welcher der Durchschnittspunkt liegt, oder *convergiren* nach dem Durchschnittspunkte zu, *entfernen sich* dagegen von einander immer weiter oder *divergiren* auf der entgegengesetzten Seite des Perpendikels. Und zwar nimmt hier ihr Abstand ohne Grenzen zu, und kann deshalb größer als jede angebliche Größe werden.

d. U.

LEHRSATZ 29.

Zwey Winkel BAC , DEF sind gleich, wenn ihre Fig. 38.
Schenkel nach einerley Seite zu untereinander parallel
laufen, d. h. so, daß je zwey der parallelen auf ei-
nerley Seite der andern Schenkel liegen.

Man verlängere, falls es nöthig ist, den Schenkel
 DE des einen Winkels, bis er einen Schenkel des an-
dern Winkels in einem Punkte G durchschneidet.
Dann werden die beyden Parallellinien EF , AC von ei-
ner graden Linie DG durchschnitten, folglich sind,
als äußere Winkel, DEF , DGC gleich *. Ueberdem * 25. A.
sind auch DGC , BAC , als äußere Winkel an den
Parallellinien GD , AB gleich; folglich auch die Win-
kel DEF , BAC .

Anmerkung. Daraus, daß die Schenkel zweyer Winkel
untereinander parallel sind, läßt sich auf die Gleichheit beyder
Winkel nur unter der Bedingung schließen, daß die parallelen
Schenkel EF , AC nach einerley Seite der andern parallelen Schen-
kels ED , AB , und diese nach einerley Seite von jenen zu liegen
[qu'ils foyent dirigés dans le même sens; ein Wort dem im
Deutschen keins entspricht.] Auch sind die Winkel gleich, wenn
die parallelen Schenkel beyde auf entgegengesetzten Seiten der
andern liegen. Zwey Winkel wie DEH , EAC , in welchen zwey
der parallelen Schenkel ED , AB diese Lage haben, die beyden
andern $E'H$, AC aber auf entgegengesetzten Seiten der andern
Schenkel liegen, sind nicht gleich, sondern ergänzen einander
zu zwey rechten Winkeln.

LEHRSATZ 30.

Wenn man die Seite CA eines Dreyecks verläu-
ngert, so ist der von der Verlängerung AD und der Fig. 39.

andern nicht verlängerten Seite AB eingeschlossene äußere Winkel am Dreyeck BAD der Summe der beyden innern ihm entgegenstehenden Winkel B und C gleich.

*Aufg. 6 Ziehe durch den Winkelpunkt A parallel mit der gegenüberstehenden Seite BC die Linie AE *. An der die Parallelen durchschneidenden graden Linie AB sind die Wechswinkel B , BAE , an der andern sie durchschneidenden graden Linie CD die äußeren Winkel C , EAD gleich. Folglich ist $B + C$ gleich $BAE + EAD$ d. h. gleich dem äußern Winkel BAD .

[*Folgerung.* Der äußere Winkel ist also größer als jeder der beyden Innern die ihm gegenüberstehn.]

LEHRSATZ 31.

Die drey Winkel eines Dreyecks sind zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich.

Denn da nach dem vorigen Lehrsatz $B + C = BAD$ ist, so wird wenn man beyderseits den dritten Winkel A hinzufügt, $A + B + C = A + BAD =$ zwey rechten Winkeln. *

* 2.

Folgerung 1. Wenn zwey Winkel eines Dreyecks, oder ihre Summe gegeben wird, so ist auch der dritte Winkel (als der Unterschied zwischen zwey rechten Winkeln und dieser Summe) bekannt. Ihn zu finden lehrt Aufgabe 7.

Sind folglich in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich, so sind es auch die dritten Winkel, und beyde Dreyecke gleichwinklig.

Folgerung 2. Kein Dreyeck kann mehr als Einen rechten oder Einen stumpfen Winkel haben. Denn hätte

es deren zwey, so müßten die drey Winkel zusammen-
genommen gröfser als zwey rechte seyn.

In jedem rechtwinkligen oder stumpfwinkligen
Dreyeck sind zwey Winkel spitz. Im *rechtwinkligen*
beträgt die Summe der spitzen Winkel einen rechten
Winkel, und im *rechtwinkligen gleichschenkligen Dreyeck*
ist jeder der spitzen Winkel einem halben rechten
gleich *. Die Winkel an der Grundlinie eines *gleich-* * 12.
schenklichen Dreyecks sind allemal spitz.

Folgerung 3. Im gleichseitigen Dreyeck beträgt
*jeder Winkel zwey Drittel eines rechten *.* * 12. f.

[*Folgerung 4.* Nimmt man folglich auf dem ei- Fig. 17.
nen Schenkel eines rechten Winkels GCB ein beliebiges
Stück CG und beschreibt darüber ein gleichseitiges
Dreyeck *, so wird dadurch der rechte Winkel in *II.E.II.
zwey Stücke geschnitten, welche $\frac{2}{3}R$ und $\frac{1}{3}R$ betragen Z.
und halbirt man den Winkel im gleichseitigen Dreyeck
GCD *, so wird *der rechte Winkel in drey gleiche Theile* *Aufg. 5
getheilt.]

LEHRSATZ 32.

Die Summe aller innern Winkel eines gradelinig-
ten Vielecks beträgt so vielmal zwey rechte Winkel,
als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat.

Es sey Fig. 5. ein Vieleck von beliebig viel Sei-
ten. Zieht man die Diagonale AC so, daß sie ein Drey-
eck ABC abschneidet, so bleibt ein Vieleck ACDEFG
übrig, welches eine Seite weniger als das erste Vieleck
hat, und dessen Winkel zusammen genommen, ver-
mehrt um die Summe der Winkel des Dreyecks ABC,

d. h. um zwey rechte Winkel der Summe der Winkel des ersten Vielecks gleich sind. — Folglich ist die Summe aller Winkel eines *Vierecks* der Summe der Winkel eines Dreyecks und zwey rechten Winkeln, d. h. vier rechten Winkeln gleich; die Summe aller Winkel eines *Fünfecks*, der eines Vierecks und zwey rechten Winkeln, d. h. sechs rechten Winkeln, und so ferner, indem die Summe aller Winkel für jede hinzukommende Seite um zwey rechte Winkel gröfser wird. Da nun unser Satz vom Dreyeck, Viereck, Fünfeck gilt, so gilt er auch vom Sechseck u. s. w. Folglich beträgt *in jedem Viereck* die Summe aller Winkel so vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat. [Gefetzt also es habe n Seiten, so ist die Summe aller Winkel dieses n Ecks gleich $(n-2) \times 2 R.$]

Folgerung 1. In einem *gleichwinkligen Vieleck* erhält man die Gröfse jedes Winkels, wenn man die Summe aller, durch die Zahl der Winkel dividirt. Daher ist *jeder Winkel im gleichwinkligen Viereck* ein rechter, im *gleichwinkligen Fünfeck* $\frac{2}{5} R$; im *gleichwinkligen Sechseck* $\frac{2}{3} R$ oder $\frac{4}{3} R$ u. s. f; [überhaupt im gleichwinkligen n Ecks, $(n-2) \times 2 R.$]

u

Will man also lauter gleichwinklige Figuren von einer gleichen Anzahl von Seiten so um einen Punkt in einer Ebne zusammen legen, dafs sie ringsumher aneinander schliessen, und keine Lücke lassen, so läst sich das nur mit 6 gleichwinkligen Dreyecken, oder mit 4 gleichwinkligen Vierecken, oder mit 3 Sechsecken, und mit keiner andern gleichwinkligen Figur bewerkstelligen.]

[*Folgerung 2.* Verlängert man eine Seite des Vielecks, so entsteht ein äußerer Winkel, der als Nebenwinkel des innern, diesen zu zwey rechten Winkeln ergänzt. Verlängert man daher an jedem der Winkelpunkte eines n Ecks eine der Seiten, so sind die n äußern Winkel des Vielecks, die dadurch entstehen, zusammengenommen gleich dem, was der Summe aller innern Winkel des Vielecks an n rechten Winkeln fehlt, mithin allemal gleich zwey rechten Winkeln.

Doch gilt dieses nicht bey *Vielecken mit erhabnen Winkeln**, wiewohl für diese die Aussage des Lehrsatzes E. 16. wahr bleibt. Bey ihnen nimmt für jeden erhabnen Winkel die Summe der äußern Winkel mit zwey rechten Winkeln zu.]

[Anmerkung. Der hier geführte Beweis des Lehrsatzes ist unserm Verfasser eigen. Zieht man aus einem willkürlich in Vieleck angenommenen Punkte C nach den Eckpunkten grade Linien, so entstehen so viel Dreyecke als die Figur Seiten hat, im n Eck also n Dreyecke, deren Winkel zusammengenommen $n \times 2 R$ betragen. Die Summe dieser Winkel übertrifft die Summe aller Winkel des n Ecks um die Winkel, welche am Punkte C liegen, d. h. um vier Rechte *, oder $2 \times 2 R$, daher alle Winkel des n Ecks zusammengenommen $(n - 2) \times 2 R$ betragen. Das ist der gewöhnliche Weg diesen Satz zu beweisen.]

[LEHRSATZ 33.]

Wenn man auf den Schenkeln eines Winkels A zwey Perpendikel BD, CE, errichtet, so durchschneiden sich diese unter einen Winkel G, welcher dem Winkel A gleich ist. Fig. 40.

Das beyde Perpendikel sich in irgend einem Punkte G durchschneiden müssen, folgt daraus, weil sie sonst parallel seyn, also beyde sowohl auf dem einen als dem andern Schenkel des Winkels A senkrecht stehn *25. f. 1. müssten*, da denn diese Schenkel selbst, gegen die Voraussetzung, parallel wären. Hierbey giebt es nun zwey Fälle, je nachdem der Durchschnittpunkt G auferhalb der beyden Schenkel des Winkels A , oder zwischen ihnen fällt.

Liegt G *aufserhalb* der beyden Schenkel, so entstehn zwey Dreyecke GFB , ACF , worin B und C als rechte Winkel, und überdem die Scheitelwinkel bey F gleich sind. Folglich sind auch ihre dritten Winkel A und G gleich, welches zu erweisen war.

Liegt der Durchschnittpunkt g der Perpendikel Bg , cg *zwischen* den Schenkeln des Winkels A , so entsteht ein Viereck $ABgc$, worin die Winkel bey B und c rechte sind. Da nun die Summe aller vier Winkel des Vierecks nach dem vorigen Lehrsatz vier rechte beträgt, so ist $A + Egc = 2 R$. Es sind aber auch als Nebenwinkel $Bge + Bgc = 2 R$, folglich ist $A = Bge$, welches zu erweisen war.

Anmerkung. Im ersten Fall ist also der Winkel den die beyden Perpendikel BG , CG selbst einschließen, dem Winkel A gleich. Im zweyten ist es hingegen der Nebenwinkel des Winkels Bgc , den die beyden Perpendikel selbst einschließen, oder der Winkel den eins der Perpendikel und die Verlängerung des andern umspannt. Auf diese Bestimmung muß man bey der Anwendung dieses Satzes, den ich in keinem System der Geometrie finde, sorgfältig sehn, d. U.

LEHRSATZ 34.

Jedes Parallelogramm wird 1) durch eine Diagonale in zwey sich deckende Dreyecke getheilt; und 2) sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel Fig. 41 desselben einander gleich.

Es sey ABCD ein Parallelogramm *, und AC eine *25, A, 5. Diagonale desselben. Diese bildet mit den beyden Paa- ren gegenüberstehender paralleler Seiten gleiche Wech- felsewinkel $\text{DAC} = \text{BCA}$ und $\text{DCA} = \text{BAC}$ *, folglich * 25. zwey Dreyecke ADC, ABC, die, da sie über die ge- meinschaftliche Linie AC beschrieben sind, einander decken *, * 7.

Deshalb sind zweytens die sich deckenden Seiten AD, BC, und AB, DC welche im Parallelogramm ein- ander gegenüberstehn, gleich; ferner die gegenüber- stehenden Winkel $B = D$ und endlich auch, als Sum- men der gleichen Winkel $\text{DAC} + \text{BAC}$ und $\text{BCA} + \text{DCA}$, die gegenüberstehenden Winkel $A = C$.

[Folgerung 1. Folglich sind überhaupt Paralle- len zwischen Parallelen (nicht blos rechtwinklige *) ein- * 27. ander gleich. Wenn z. B. AB, CD, und zugleich EF, Fig. 34, HI, parallel sind, so ist $\text{GH} = \text{OI}$ und $\text{GO} = \text{HI}$.

Daraus folgt daß der geometrische Ort des End- punkts G einer gegebenen graden Linie OG, welche auf einer zweyten CD unter einer gegebenen Lage, z. B. parallel mit HI aufsteht, eine Parallellinie AB mit der erstern ist. (Apoll. eb. Oert. I. 20) steht sie auf ei- nem Kreise unter einer gegebenen Lage auf, so ist ihr

Ort ein Kreis, wie aus dem folgenden Buche erhellen wird.

Fig. 37. *Folgerung. 2.* Werden umgekehrt Parallelen von zwey andern Linien so durchschnitten daß der Abschnitt auf der einen kleiner als auf der andern ist, so convergiren die durchschneidenden Linien nach der Seite des kleinern Abschnitts zu einander, und treffen hier, gehörig verlängert, zusammen.]

Fig. 41. [Zufatz I. Ein Parallelogramm wird also durch drey Stücke völlig bestimmt, nemlich durch zwey aneinander liegenden Seiten, AB, AD, denen die gegenüberstehenden gleich seyn müssen, und durch einen Winkel z. B. den von AB, AD, eingeschlossnen Winkel A. Denn der Winkel C, der diesem gegenübersteht, ist ihm gleich, und die beyden Winkel, welche mit ihm an derselben Seite anliegen, ergänzen ihn wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten zu zwey rechten Winkeln *.

* 25.

Hat folglich ein Parallelogramm einen rechten Winkel, so sind sie alle recht und die Figur ist ein Rechteck.

Das Parallelogramm aus drey gegebenen Stücken wirklich zu beschreiben, lehrt mit Hülfe des folgenden Satzes Aufg. II, wo überdem die Möglichkeit der in Erkl. 19 erwähnten Arten der Parallelogramme dargethan wird.

Zufatz II. Unter allen Parallelogrammen ist das Rechteck das einzige das völlig bestimmt ist, wenn zwey Seiten gegeben werden; bey den übrigen kömmt es noch auf den Winkel an, unter welchem diese Sei-

ten gegen einander geneigt sind. Hierauf gründet sich der Sprachgebrauch $ABCD$ ein Rechteck aus den beyden Linien AB , BC , oder ein Rechteck unter diesen Linien zu nennen, und es lediglich durch diese beyden Linien zu bezeichnen, z. B. durch $ABBC$ oder ABC . So bedeutet also das Rechteck ABE ein Rechteck, welches aus den beyden Linien AB und BE beschrieben ist. Die Alten dehnten diesen Sprachgebrauch selbst so weit aus, daß sie ein solches Rechteck durch den Ausdruck: *das was zwischen den beyden Linien AB und BE eingeschlossen ist*, bezeichneten.

Ein Quadrat wird durch eine Seite völlig bestimmt, daher man die Quadrate durch ihre Seiten characterisirt. So ist Fig. 44. ein Quadrat aus AB beschrieben, oder das Quadrat der Linie AB .

Zusatz III. Zwey Rechtecke aus gleichen Seiten decken sich, denn sie sind, nach dem was hier gelagt ist, innerlich einerley, nur in ihrem Ort verschieden, und müssen deshalb congruiren *. Sie haben also auch stets einen gleichen Flächenraum. *Gr. 9.

Grade so decken sich zwey Quadrate welche über gleichen Seiten beschrieben sind.

Die Sätze in diesen Zusätzen werden uns im dritten Buche von großem Nutzen seyn. d. U.]

LEHRSATZ 35.

Umgekehrt ist jedes Viereck, worin die gegenüberstehenden Seiten [oder die gegenüberstehenden Winkel] einander gleich sind, ein Parallelogramm. Fig. 41.

- I. Ist im Viereck ABCD, $AB = CD$, und $AD = BC$; so theilt die Diagonale AC das Viereck in zwey Dreyecke, welche gleiche Seiten haben, folglich einander decken *, worin also die Winkel ACD, CAB und ACB, CAD, die gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich sind. Sind aber diese Winkel gleich, so müssen die einander gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel seyn. Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm,

- [2. Sind im Viereck ABCD die Winkel $A = C$, und $B = D$, so sind auch $A + B = C + D$. Alle Winkel des Vierecks sind aber zusammengenommen vier rechten gleich *. Mithin müssen $A + B$, folglich auch $A + D$, zwey rechten Winkeln gleich seyn, und daher die Seiten AD, BC, und AB, DC, parallel laufen *. Also ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.]

[Folgerung. Jedes Viereck mit vier rechten Winkeln ist also ein Parallelogramm, folglich nothwendig ein Rechteck *.

Auch ist jeder Rhombus und jedes Quadrat nothwendig ein Parallelogramm.]

[Anmerkung. Sind in einem Viereck zwey der gegenüberstehenden Winkel gleich, die beyden andern ungleich, so können nicht beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten parallel laufen; das Viereck ist also ein Trapezium. Und doch wird es durch eine der Diagonalen halbirt. Dieses Merkmal reicht also bey einem Viereck nicht hin es zu einem Parallelogramm zu machen. Dazu wird das Merkmal erfordert, welches Lehrsatz 37 ausagt.]

L E H R S A T Z 36.

Wenn zwey Seiten AB , CD eines Vierecks, welche einander gegenüberstehn, gleich und parallel sind; so sind auch die beyden andern Seiten AD , BC gleich und parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Ziehe die Diagonale AC . Diese bildet mit den Parallelen AB , CD gleiche Wechswinkel BAC , DCA *. 25.
Da überdem der Voraussetzung nach die Seiten AB , DC gleich sind und den Dreyecken ABC , DAC die Diagonale AC gemeinschaftlich ist, so decken sich diese beyden Dreyecke. * Also sind auch die Seiten * 7.
 AD , BC gleich, folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm. *

[Zusatz. Dagegen ist ein Viereck kein Parallelogramm, wenn zwar zwey gegenüberstehende Seiten gleich, aber nicht zugleich parallel *, oder wenn sie parallel aber nicht gleich sind. Denn gesetzt ein solches Viereck wäre ein Parallelogramm, so wären beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten gleich und parallel *, gegen die Voraussetzung.] * 34.

L E H R S A T Z 37.

Die beyden Diagonalen AC , BD eines Parallelogramms theilen einander wechselseitig in zwey gleiche Theile. Fig. 40

[Umgekehrt ist jedes Viereck, dessen Diagonalen sich wechselseitig in gleiche Theile zerschneiden, ein Parallelogramm.]

In den beyden Dreyecken ADO, CBO sind die Seiten AD, BC, nicht nur gleich, sondern auch parallel, folglich ebenfalls die Wechselfwinkel A, C und D, B gleich. Also decken sich beyde Dreyecke, und die den gleichen Winkeln A, C und D, B gegenüberstehenden Seiten sind gleich $BO = OD$, $AO = OC$ *. Es halbiren sich also beyde Diagonalen wechselseitig.

[Halbiren sich umgekehrt die beyden Diagonalen eines Vierecks im Punkte O, so decken sich die Dreyecke welche an ihrem Durchschnittspunkt einander gegenüber liegen *, also auch die gegenüberstehenden Seiten, daher das Viereck ein Parallelogramm ist.

Folgerung. Ein Punkt O welcher in der Mitte der einen Diagonale eines Parallelogramms liegt, muss folglich auch in der andern Diagonale, und zwar in deren Mitte liegen. Man kann ihn den Mittelpunkt des Parallelogramms nennen. Jede grade Linien, welche durch ihn gezogen wird, theilt das Parallelogramm in zwey sich deckende Figuren, und zwar, wenn es keine Diagonale ist, in zwey sich deckende Vierecke, wie sich ohne Schwierigkeit, aus den sich deckenden Dreyecken, die dann gebildet werden, zeigt.]

[Zusatz. Da im Parallelogramm je zwey Winkel von Seiten, die untereinander gleich sind, eingeschlossen werden, so muss im schiefwinkligen Parallelogramm die Diagonale BD, welche den kleinern Winkeln gegenübersteht, kleiner als die Diagonale

AC seyn, welche den größern Winkeln gegenüber-
 steht *. Im *Rechteck* sind dagegen die beyden Diago- * 10.
 nalen gleich *, folglich auch die Theile die sie auf • 6. f. 2.
 einander abschneiden, daher das gleichseitige Rechteck,
 d. h. das *Quadrat* durch seine beyden Diagonalen in Fig. 43.
 vier untereinander gleichseitige, folglich sich decken-
 de, gleichschenklige Dreyecke getheilt wird.] Fig. 44.



111

ZWEYTES BUCH.
D E R K R E I S.

Erklärungen.

[Die Vorstellung und die Beschreibung des Kreises gehört zu dem, was der Geometer bey jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, voraussetzt. Sie ist eine eigenthümliche, nicht von andern abgeleitete, und also ursprüngliche Art von Raumbeschreibung, die, sammt den Vorstellungsarten und Begriffen, welche unmittelbar darin liegen, zu den wahren Principien der Geometrie gehört, und schon von Euklid unter den Forderungen der Geometrie an der Spitze des Systems aufgeführt wird. Jeder, wer Geometrie treiben will, muß sich einen Kreis vorstellen, um einen gegebenen Mittelpunkt, mit gegebenem Halbmesser, einen Kreis erzeugen oder beschreiben können; das war unsere dritte Forderung unter den Principien. Die folgenden Erklärungen dienen größtentheils nur das zu verdeutlichen, was in dieser geforderten Vorstellungsart liegt, und einiges, was unmittelbar daraus fließt, herauszuheben, d. U.]

I.

Fig. 45. Der *Umfang des Kreises* oder die *Kreislinie* ist eine krumme Linie [welche ganz in einer Ebene liegt] und deren Punkte von einem einzigen Punkte, dem *Mittelpunkte* (*centrum*), insgesamt gleich weit entfernt sind.

Diese

Diese krumme Linie läuft in sich selbst zurück, und schließt einen Theil der Ebne, in welchem der Mittelpunkt liegt, völlig und nach allen Seiten zu ein. Die *Kreisfläche* ist der von der Kreislinie ringsum begrenzte ebne Flächenraum, folglich eine krummlinige ebne Figur *. [Unter *Kreis* pflegt man Kreislinie und Kreisfläche beyde zusammengenommen zu verstehn. Auch deutet man gewöhnlich den Mittelpunkt des Kreises dadurch an, daß man sagt, der Kreis sey *um ihn* beschrieben.] *I.E. 16.

[Alle Theile der Kreisfläche, und mithin alle Punkte und alle Linien in ihr, liegen *innerhalb* der Kreislinie, oder *im Kreise*, alle übrigen Theile der Ebne und alle Linien und Punkte in ihnen, *aufserhalb* der Kreislinie. Iene und diese liegen also auf *entgegengesetzten Seiten der Kreislinie**, und haben in Rück- *I.E. 10. sicht der Kreislinie eine entgegengesetzte Lage.]

2.

Jede grade Linie zwischen dem Mittelpunkte C und einem Punkt im Umfange wird ein *Radius* oder ein *Halbmesser des Kreises* genannt; so CA, CE, CD, CB. — Jede grade Linie, welche wie AB durch den Mittelpunkt geht, und von zwey Punkten im Umfange begrenzt wird, ist ein *Durchmesser des Kreises*. Daraus folgt:

α) Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich *. So auch alle Durchmesser, deren jeder zwey * E. 1. Halbmessern gleich ist.

[β] Jeder Durchmesser wird vom Mittelpunkte in zwey gleiche entgegengesetzt liegende Theile getheilt *.

*I.E.10. theilt *.

[γ] Jeder Punkt in der Ebene des Kreises steht vom Mittelpunkte um eine grade Linie ab, welche entweder dem Halbmesser *gleich*, oder *kleiner*, oder *größer* als der Halbmesser ist. Im ersten Fall liegt der Punkt *in* der Kreislinie selbst, im zweyten *innerhalb*, im dritten *ausserhalb* der Kreislinie und des Kreises.

Folglich liegt jeder Halbmesser und jeder Durchmesser ganz innerhalb, jede Verlängerung eines Durchmessers ausserhalb, und nur die beyden Endpunkte derselben auf der Kreislinie, und diese Linie ist der *geometrische Ort* eines Punktes, welcher von einem gegebenen Punkte um eine gegebne Linie absteht *.

*I.E.21. (Apollonius I.1.)]

3.

Jeder Theil der Kreislinie z. B. FHG ist ein *Kreisbogen*; [die Hälfte der Kreislinie insbesondere ein *Halbkreis*, und der vierte Theil der Kreislinie ein *Quadrant*. Manchmal versteht man unter diesen Benennungen auch die Hälfte oder den vierten Theil der Kreisscheibe. *

*2 f.7.Z

Alle Halbkreise, so auch alle Quadranten eines Kreises sind gleich.

4.

Jede grade Linie, welche von zwey Punkten in der Kreislinie begränzt wird, nennt man überhaupt eine *Sehne* oder *Chorde des Kreises*, und ins besondere

eine *Sehne des Bogens*, der sich in den beyden Gränzpunkten der Sehne endigt. So ist FG die Sehne des Bogens FHG.

[Folglich ist jeder Durchmesser eine Sehne, und zwar eine Sehne die durch den Mittelpunkt geht *.] E. 2.

5.

Ein *Kreis - Abschnitt (Segment)* ist der Theil der Kreisfläche, der zwischen einem Bogen und dessen Sehne liegt.

Zu jeder Sehne FG gehören zwey verschiedene Kreisbogen FHG, FEG, welche einander zur ganzen Kreislinie ergänzen, mithin auch zwey verschiedene Kreisabschnitte, welche zusammen die Kreisfläche ausmachen. Häufig spricht man indess nur von *einem* Bogen oder Kreisabschnitt der zu einer Sehne gehört; und dann versteht man darunter den *kleinern* der beyden Bogen oder Abschnitte, es sey denn, daß ausdrücklich das Gegentheil erinnert werde.

Was man unter *ähnlichen Bogen* und unter *ähnlichen Kreisabschnitten* versteht, findet man Lehrsatz 20, Zusatz 3, und im vierten Buche erklärt.

6.

Ein *Kreis - Auschnitt (Sector)* ist der Theil der Kreisfläche, der zwischen einem Bogen DE und den beyden Halbmessern CD, CE, welche nach den Endpunkten des Bogens gezogen werden, liegt.

7.

Fig. 46. [Einen Winkel in einem Kreis - Abschnitt BMND nennt man jeden Winkel wie A, dessen Scheitel im Bogen dieses Abschnitts liegt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte B, D des Bogens und der Sehne gehn. Der Kreisabschnitt BMND *faßt den Winkel A*, und der Winkel *ist in diesem Kreis - Abschnitt eingeschrieben*.

Hieraus erhellt, was ein *Winkel im Halbkreise* oder ein Winkel der im Halbkreise eingeschrieben ist, sagen will.]

8.

[Von einem Winkel dessen Schenkel eine Kreislinie schneiden, sagt man er *stehe auf dem Bogen*, den seine Schenkel umfassen oder einschließen, so z. B. der Winkel A auf dem Bogen BED.

Liegt der Scheitelpunkt eines solchen Winkels in der Kreislinie, so wird er ein *Winkel am Umfange* genannt, wie z. B. BAD. Liegt der Scheitelpunkt im Mittelpunkte des Kreises, so ist es ein *Winkel am Mittel-*

Fig. 45. *punkte*, wie z. B. der Winkel ECD.]

9.

Man sagt eine *grade Linie ist in einem Kreise eingeschrieben*, wenn sie sich in zwey Punkte des Umfangs endigt, (folglich eine Sehne des Kreises ist) wie z. B. FG.

Ein Winkel *ist im Kreise eingeschrieben*, wenn dessen Scheitelpunkt im Umfange liegt wie z. B. \angle BAD.

Fig. 46.

Ein Dreyeck ist im Kreise eingeschrieben, wenn die drey Winkelpunkte insgesammt im Umfange liegen, wie z. B. BAD, da denn die Seiten des Dreyecks insgesammt Sehnen des Kreises sind;

und überhaupt nennt man *eine Figur im Kreise eingeschrieben*, (oder dem Kreise eingeschrieben,) wenn alle Winkelpunkte der Figur in der Kreislinie liegen, (folglich ihre Seiten insgesammt Sehnen des Kreises sind.) Vom Kreise sagt man dagegen er sey *um diese Figur beschrieben* (oder der Figur umschrieben.)

Diese Benennungen behalten dieselbe Bedeutung, wenn man von Linien, Winkeln oder Figuren spricht, die *in Vielecken eingeschrieben* sind, oder von einem *Vieleck*, das *um ein anderes beschrieben* ist.

10.

Ein Vieleck ist um einen Kreis beschrieben, (oder dem Kreise umschrieben,) wenn alle Seiten des Vielecks die Kreislinie berühren *. Der Kreis ist dann *in das Vieleck eingeschrieben*, (oder dem Vieleck eingeschrieben.) E. II.

[Anmerkung. Noch vor dieser letzten Erklärung stellt Le Gendre folgende auf: „Eine den Kreis schneidende Linie ist die, welche die Kreislinie in zwey Punkten trifft; eine berührende, die mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat. Eben so haben Kreislinien die sich berühren nur einen einzigen Punkt gemein.“ Allein dieses sind offenbar abgeleitete Sätze, für die man einen Beweis erwartet, und die deshalb keineswegs zu Erklärungen taugen. Statt ihrer schiebe ich die folgenden beyden Erklärungen ein, welche die Fundamentalbegriffe über das Schneiden und Berühren der Kreislinien ausfagen, die von Le Gendre angegebenen Merkmale begründen, und eine beträchtliche Lücke in dem Sytem unsers Verfassers ausfüllen. d. U.

II.

[Weil die Theile der Kreisfläche und die übrigen Theile der Ebene auf entgegengesetzten Seiten der Kreislinie liegen, und die Kreisfläche ringsum nach

- E. 1. allen Seiten zu von der Kreislinie begrenzt wird *; so muß jede stetig zusammenhängende Linie, welche durch einen Punkt *im* Kreise und zugleich durch einen Punkt *aufser* dem Kreise geht, *sich mit der Kreislinie in*
- Gr. 8. *irgend einem Punkte durchschneiden* *. Denn wäre das nicht der Fall, so würde der Kreis nach irgend einer Seite zu nicht völlig begrenzt seyn.

- Fig. 47. α) Also müssen sich ins besondere ein Kreis *EFD* und eine grade Linie *AB* in irgend einem Punkte *E* durchschneiden, wenn die grade Linie durch einen Punkt innerhalb und einen Punkt außerhalb der Kreislinie geht. — Grade Linien lassen sich aber zu den beyden entgegengesetzten Seiten jedes Punktes in ihnen so weit verlängern, daß sie größer als jede
- Fo. 2. gegebne Linie werden *; folglich müssen *alle grade Linien, welche in der Ebene des Kreises durch einen Punkt im Kreise gehn, gehörig verlängert, auch auf bey-*
 - E. 2 γ . *den Seiten dieses Punktes durch Punkte außerhalb* * der Kreislinie gehn, also *die Kreislinie durchschneiden*. Das geschieht also in *zwey* Punkten, welche in der graden Linie zu entgegengesetzten Seiten des Punktes im Kreise liegen.

- Fig. 48. β) Eben so *durchschneiden sich zwey Kreise* wenn der eine *HEG* durch einen Punkt *im* andern Kreise und zugleich durch einen Punkt *aufserhalb* desselben, z. B. durch *I* und *H* geht. — Das ist aber allemal der Fall,

wenn die *Summe* ihrer Halbmesser AF, BI gröfser und zugleich der *Unterschied* derselben kleiner als die grade Linie zwischen ihren Mittelpunkten AB ist. Denn wenn $AF + BI > AB$ und $AF - BI$ oder was auf eins ^{*E. 2. α.} herauskömmt $AF - BH < AB$ ist, so muß er ^{*Gr. 2.}stens $AF > AB - BI$ d. h. $> AI$, zweytens $AF < AB + BH$ *, d. h. $< AH$ seyn. Folglich ist I ein ^{*E. 2. γ.} Punkt innerhalb und H ein Punkt aufserhalb der Kreislinie DEF, die mit dem Halbmesser AF um A beschrieben ist *, daher der Kreis HEIG die Kreislinie DEFG durchschneiden muß. Und zwar in einem Punkte E, der aufserhalb der graden Linie AB und ihrer Verlängerung liegt, weil sonst die Halbmesser BE, BI, BH nicht gleich seyn könnten *.

*1.16.f.2.

Sind beyde Kreise mit *gleichem* Halbmesser beschrieben, so werden sie sich folglich allemal schneiden, wenn ihr Halbmesser gröfser als die Hälfte von AB ist.

Auch muß jeder Kreis dessen Mittelpunkt auf einer andern Kreislinie liegt, diese durchschneiden.

Zu f a t z. So oft zwey Kreise sich in einem Punkte wie E durchschneiden, entsteht, wenn man die Halbmesser AE, BE zieht, zwischen den beyden Mittelpunkten A, B und dem Durchschnittspunkte E ein *Dreyeck* ABE, welches *gleichseitig* ist *, wenn man bey- ^{*I.E. 18.}de Kreise mit AB als Halbmesser beschrieben hat; *gleichschenkelig*, wenn die Länge der Halbmesser zwar gleich, aber von AB verschieden ist; *ungleichseitig*, wenn die Halbmesser weder untereinander noch mit AB gleich lang sind. Zwey Kreise durchschneiden sich aber gewiß in einem Punkte der aufserhalb der graden

Linie zwischen ihren Mittelpunkten liegt, wenn die Gröfse ihrer Halbmesser und die Entfernung ihrer Mittelpunkte der beyden unter β) aufgestellten Bedingungen entsprechen.

So ist also die *Möglichkeit* dieser drey verschiedenen Arten von Dreyecken, unabhängig von allen Lehrsätzen des ersten Buchs dargethan, und zugleich die *Construction des Dreyecks aus drey gegebenen Linien A, B, C* festgestellt, als unmittelbare Folge der Kreisbeschreibung, durch die sie unter den angeführten Bedingungen, vor allen Lehrsätzen und Aufgaben dieses Systems, begründet wird. Man beschreibe um die Endpunkte der einen dieser Linien A, mit den beyden andern, als

* Fo. 3 Halbmessern, Kreise *. Wenn die gegebenen Linien den Bedingungen unter β) entsprechen, (d. h. wenn $A < B + C$ und $> B - C$ ist) so durchschneiden sich diese Kreise in irgend einem Punkte aufserhalb der Linie

* Fo. 1. A, und die Halbmesser nach diesem Punkte gezogen *

* E. 2. α . ander gleich sind *, aus den drey gegebenen Linien besteht. Dafs diese Construction unmöglich wird, so oft auch nur einer der beyden erwähnten Bedingungen nicht genüge geschieht, wird in Lehrsatz 17 bewiesen werden.

Anmerkung. So wie die Construction des Dreyecks von den Sätzen über das Schneiden zweyer Kreise abhängt, so fliefsen umgekehrt diese Sätze aus jener Construction, und in dieser Abhängigkeit trägt sie unser Verfasser im zwölften Lehrsatz dieses Buches vor. Allein mir scheint es nothwendig zu seyn, dafs man sie, so weit es hier geschehn ist, im System vor der Construction der Dreyecke, aufstelle, da sie diese Construction erst

begründen, und ich glaube hierin zum Vortheil des Systems von unserm Verfasser abgewichen zu seyn. Schon *van Swinden* fand sich bewogen die angeführten Bedingungen, unter welche zwey Kreise sich schneiden, unter den *Grundsätzen* der Geometrie aufzustellen (wiewohl die Aussage seines sechsten Grundsatzes mangelhaft ist) und er bemerkt dabey, daß wenn gleich *Enklid* diesen Satz nicht ausdrücklich als *Axiom* aufführt, er sich dessen doch bey seinen drey ersten Sätzen stillschweigend bedient. *Wolf*, sagt er, habe ihn bewiesen, allein der Satz sey Sonnenklar und deshalb ein *Axiom*. Allein Sonnenklar ist er doch wahrlich nicht, und wird es höchstens erst dann, wenn man ihn, wie ich es hier versucht habe, aus dem Merkmale des Schneidens der Linien ableitet, die man bisher mit Unrecht aufser Augen gelassen hat.

Le Gendre übergeht den Beweis der Möglichkeit der Dreyecke ganz und gar, und lehrt die *Construction* derselben aus drey gegebenen Linien erst in der 8ten Aufgabe, nachdem er schon viele Eigenschaften des Dreyecks dargethan hat. Ueberdem gründen sich seine Beweise der ersten Aufgaben allesammt darauf, daß zwey Kreise unter den angeführten Bedingungen einander schneiden. Diese Behauptung sagt er aber nirgends ausdrücklich aus, weder als Grundsatz noch als Lehrsatz, sondern nimmt sie immer nur stillschweigend an. Sein System ist folglich in diesen beyden Rücksichten mangelhaft. Doch glaube ich durch die Einschaltung dieser eilften Erklärung und der Sätze über das Schneiden, von welchen sie abhängt, und die sie begründet, in die Prinzipien der Geometrie, diese Lücke ausgefüllt zu haben.

d. U.]

12.

[Zwey Kreislinien berühren einander, wenn sie einen Punkt I so miteinander gemein haben, daß die Theile, welche in der einen Kreislinie durch diesen Punkt abgeschnitten werden, beyde auf einerley Seite der andern Kreislinie liegen *; wenn mithin der eine ^{Fig. 49.} ^{I.E. II.}

* E. I. Kreis sich entweder ganz innerhalb, oder ganz außerhalb des andern befindet *. Im ersten Fall sagt man, daß sie sich *innerlich*, im zweyten daß sie sich *äußerlich berühren*.

Eben so *berühren sich eine grade Linie und ein Kreis*, wenn sie einen Punkt so miteinander gemein haben, daß die beyden durch diesen Punkt abgeschnittenen Stücke der graden Linie, zu einerley Seite der Kreislinie, und zwar beyde *aufserhalb* derselben liegen. Denn Linien *innerhalb* des Kreises durchschneiden die Kreislinie *, können sie also nicht berühren. — Eine grade den Kreis im Punkte F berührende Linie, z. B. LM, nennt man auch eine *Tangente des Kreises* im Punkte F.]

[L E H R S A T Z I.]

1) *Zwey Kreislinien, welche mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, decken sich, und schliessen Kreisflächen von gleicher Größe ein.*

2) *Sind umgekehrt zwey Kreisflächen gleich, so decken sie sich, und haben gleiche Kreislinien und gleiche Halbmesser.*

Fig. 51. I. Sind die beyden Kreise ADBK und EGFL mit gleichen Halbmessern beschrieben, und man legt den Mittelpunkt des einen auf den Mittelpunkt des andern, so daß die Kreise in einer Ebne bleiben, so sind alle Punkte in beyden Kreislinien gleich weit von den zusammenfallenden Mittelpunkten entfernt. Also ist dann

kein Punkt in der einen Kreislinie auferhalb der andern, beyde Kreislinien fallen folglich zusammen, und decken sich, mithin sind auch die Kreisfcheiben gleich.

2. Sind die beyden Kreisfcheiben gleich, fo lege man sie wiederum fo auf einander, dafs ihre Mittelpunkte zusammen fallen. Gefetzt nun die Kreislinien deckten sich nicht, fo müßten sie, nach dem oben bewiefenen, einen verschiedenen Halbmesser haben. Es sey also $EO > AC$. Dann liegen alle Punkte in der um O beschriebnen Kreislinie auferhalb der Kreislinie ADBK*, diese wird folglich von jener eingeschlossen, *E. 27. da denn die Kreisfcheibe ADBK nur ein Theil der Kreisfcheibe EGFL ist, ihr also nicht gleich seyn kann gegen die Voraussetzung. Wenn also die Kreisfcheiben gleich sind, fo decken sie sich; und dann sind auch die Kreislinien gleich, und mit gleichem Halbmesser beschrieben.

Folgerung 1. Nicht nur Gleichheit und Ungleichheit zweyer Kreise, sondern auch die Congruenz derselben hängt folglich lediglich von der Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Halbmesser ab. *Euclid* (B. III. Erkl. 1.) nimmt dieses als evident an.

Folgerung 2. Von zwey concentrischen Kreislinien, d. h. von Kreislinien die einerley Mittelpunkt C haben, Fig. 47. schließt die, welche mit größerm Halbmesser $CD > CG$ beschrieben ist, die kleinere völlig ein. Beyde haben keinen Punkt gemein, und alle Punkte in beyden, die auf demselben Halbmesser des größern lie-

gen, stehn gleich weit (um den Unterschied GD der Halbmesser) von einander ab.

Folgerung 3. Zwey Kreise, welche sich schneiden oder berühren, können nicht einerley Mittelpunkt haben. (Euklid II. 5 und 6.) Denn in diesem Fall hätten sie nicht nur einerley Mittelpunkt, sondern auch einerley Halbmesser, fielen also zusammen, und könnten sich weder schneiden, noch berühren.

Anmerkung. Diese für die Lehre vom Kreise so wichtigen Lehrrätze fehlen bey Le Gendre und ich habe sie ungeachtet ihres grossen Nutzens noch in keinem System der Geometrie bewiesen gefunden. d. U.

LEHRSATZ 2.

Fig. 52. *Jeder Durchmesser, z. B. AB, theilt die Kreis-scheibe und die Kreislinie in zwey sich deckende Theile.*

Denn wenn man den einen der Kreistheile, welche der Durchmesser AB abschneidet, z. B. AEB auf den andern ADB liegt, so daß AB in beyden nach wie vor zusammenfällt; so muß auch die krumme Linie AEB mit der krummen Linie ADB zusammenfallen, weil sonst in beyden Punkte vorhanden seyn würden, die ungleich weit vom Mittelpunkte C abständen; gegen den Begriff der Kreislinie *.

Folgerung. Also halbirt jeder Durchmesser AB die Kreis-scheibe und die Kreislinie, oder theilt beyde in Hälften, (*Halbkreise*), zu denen dieser Durchmesser als Sehne gehört *. Eines solchen Halbkreises Flächenraum ist der Hälfte des Kreises, und sein krummli-

niger Umfang der Hälfte der Kreislinie gleich. In so fern der Durchmesser eine Sehne ist, gehört er zu den Kreisabschnitten; in so fern aber der Durchmesser aus zwey Halbmessern * besteht, zu den Kreisabschnitten. E, s, u. 6.

[L E H R S A T Z 3.]

Wenn eine Kreislinie durch zwey Punkte *A*, *B* Fig. 52. in zwey gleiche Bogen *ADB*, *AEB*, getheilt wird, so ist die grade Linie *AB*, welche von einem dieser Punkte nach dem andern gezogen wird, ein Durchmesser des Kreises.

Denn gesetzt *AB* sey kein Durchmesser, so ist irgend eine andere grade Linie z. B. *AF* der Durchmesser, der durch den Punkt *A* geht. Dann sind *ADF*, *AEF* vermöge des vorigen Lehrsatzes gleich. Aber *ADF* ist $<$ *ADB* und *AEF* $>$ *AEB*. Folglich müßte noch mehr *ADB* $>$ *AEB* seyn, welches der Voraussetzung dafs *ADB* = *AEB* ist, widerspricht. Also ist es unmöglich dafs eine von *AB* verschiedne grade Linie *AF*, mithin nothwendig dafs *AB* ein Durchmesser des Kreises ist.

Anmerkung. Dieser Satz, der umgekehrte des vorigen, fehlt bey Le Gendre und in den übrigen Systemen der Geometrie, obgleich er häufig gebraucht wird. d. U.

[L E H R S A T Z 4.]

Jede Sehne *ED* liegt ganz innerhalb, ihre Ver- Fig. 47. längerung ganz außserhalb des Kreises.

Denn zieht man nach den Endpunkten der Sehne die beyden Halbmesser *CE*, *CD*, so müssen diese, weil

sie gleich sind, auf die Sehne ED schieß, und zwar in
 *I. 16. 2. gleicher Entfernung vom Perpendikel aufstehn *. Folglich ist jede grade Linie durch den Punkt C, die auf die Sehne zwischen E und D aufsteht, z. B. CH kleiner als CE, d. h. kleiner als der Halbmesser; hingegen jede auf die Verlängerung der Sehne schieß aufstehende grade Linie, wie CI grösser als CE, d. h. grösser als
 *I. 16. 3. der Halbmesser *. Mithin ist jeder Punkt der Sehne ED weniger, jeder Punkt in ihrer Verlängerung weiter, als um den Halbmesser, vom Mittelpunkte entfernt, daher die Sehne ganz innerhalb, ihre Verlängerung ganz ausserhalb der Kreislinie liegt *.

*E. 2. 7. *Folgerung. 1.* Also durchschneidet jede Sehne verlängert den Kreis.

*Gr. 8. *Folgerung 2.* Die beyden Kreisbogen, so wie die beyden Kreisabschnitte, die zu jeder Sehne gehören, liegen zu entgegengesetzten Seiten ihrer Sehne *. So also auch zwey Halbkreise zu entgegengesetzten Seiten ihres Durchmessers.

Anmerkung. Unser Verfasser übergeht diesen Lehrsatz mit Unrecht, den schon Euklid, doch auf eine andere Art bewies. d. U.

LEHRSATZ 5.

Fig. 52. *Jede Sehne die nicht durch den Mittelpunkt geht, ist kleiner als der Durchmesser.*

Denn wenn man aus den Endpunkten der Sehne AF die Halbmesser AC, FC zieht, so entsteht ein Dreyeck, worin $AF < AC + CF$, folglich kleiner
 *E. 2. als der Durchmesser des Kreises ist *.

Folgerung. Also ist der Durchmesser unter allen Sehnen und unter allen graden Linien, die sich in einen Kreis einschreiben lassen, die größte.

[Jede begränzte grade Linie, die durch einen Punkt im Kreise geht, und größer als der Durchmesser ist, muß folglich die Kreislinie schneiden.]

L E H R S A T Z 6.

Eine grade Linie kann nicht mehr als zwey Punkte mit einem Kreise gemein haben.

Denn gesetzt sie könnte mit dem Kreise drey Punkte gemein haben, so müßten diese drey Punkte vom Mittelpunkte des Kreises gleich weit entfernt seyn. Folglich gäbe es einen Punkt, von welchem sich nach einer graden Linie drey gleiche grade Linien ziehen ließen, welches unmöglich ist*; daher kein Kreis mit einer graden Linie mehr als zwey Punkte gemein haben kann.

L E H R S A T Z 7.

In einerley Kreise, oder in zwey gleichen Kreisen, gehören zu gleichen Bogen, gleiche Sehnen, und umgekehrt zu gleichen Sehnen, gleiche Bogen. Fig. 51

1. Denn wenn die Halbmesser AC, EO, folglich die mit ihnen beschriebnen Kreise AHBK, EGFL gleich sind, so decken sich die beyden Kreislinien*. Sind also AD, EG gleiche Bogen, so lassen sie sich so aufeinander legen, daß ihre Endpunkte E, A und G, D zusammenfallen, da denn die Sehnen EG, AD,

als grade Linien zwischen denselben Endpunkten,
 * Gr. 6. gleichfalls zusammenfallen müssen *, also gleich sind.

2. Sind dagegen die Sehnen AD, EG gleich, und man zieht die Halbmesser AC, DC, EO, GO, welche der Voraussetzung nach insgesammt gleich sind, so müssen die Dreyecke ADC, EGO sich decken, folglich die Winkel C, O gleich seyn. Legt man also die sich deckenden Halbkreise AHB, EGF so auf einander, daß die Mittelpunkte, und die Punkte E und A, folglich die Halbmesser AC, EO, mithin auch jene Dreyecke, und ihre Eckpunkte G und D zusammenfallen, so decken sich die Bogen AD, EG, sind also gleich.

Derselbe Beweis gilt für verschiedene Bogen und Sehnen eines Kreises.

[Zusatz. Aus diesem Beweise erhellt zugleich:

1. Daß in einerley Kreise oder in zwey gleichen Kreisen, zu gleichen Bogen gleiche Kreisabschnitte ACD, EOG, gehören * und umgekehrt.

2. Daß in ihnen zu gleichen Sehnen AD, EG (folglich auch zu gleichen Bogen) gleiche Winkel am Mittelpunkte O, C, und umgekehrt zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Sehnen und gleiche Bogen gehören, indem wegen Gleichheit der Halbmesser, so bald eins jener Stücke gleich ist, die Dreyecke ADC, EGO, einander decken.

Fig. 52. 3. Daß zwey Durchmesser wie AB, DE, welche auf einander senkrecht stehn, die Kreislinie sowohl als die Kreisfläche in vier gleiche Theile, folglich in

* E. 3. Quadranten * zerschneiden. Denn sie bilden vier rechte, folg-

folglich gleiche Winkel am Mittelpunkte. — Jeder Winkel am Mittelpunkte ACD, der ein rechter Winkel ist, umspannt folglich einen Quadranten des Kreifes.]

L E H R S A T Z 8.

So lange von Bogen die insgesamt kleiner als *Fig. 5A* der Halbkreis sind die Rede ist, gehört in einerley Kreis oder in gleichen Kreisen, zum größern Bogen eine größere Sehne, [ein größerer Winkel am Mittelpunkte und ein größerer Kreisabschnitt,] und umgekehrt.

Denn ist der Bogen $AIH > AID$, so schließt der Winkel am Mittelpunkte ACH den Winkel am Mittelpunkte ACD ein, ist also größer als dieser*. Da *1. E12ß* nun diese Winkel beyde von Halbmessern, also von gleichen Schenkeln eingeschlossen werden, so ist in den Dreyecken ACH, ACD die dritte Seite $AH > AD$. ** *1. 10.* Folglich gehört zum größern Bogen, der größere Winkel am Mittelpunkte, und die größere Sehne.

Ist umgekehrt die Sehne $AH > AD$ so folgt eben so daß der Winkel ACH den Winkel ACD einschließt, also der Bogen $AIH > AID$ ist. Und ist der Winkel ACH größer als ACD so muß, weil beyde von gleichen Seiten eingeschlossen werden, der größere eine größere Sehne, mithin auch einen größern Bogen umspannen.

Anmerkung. Da den größern unter zwey Bogen AID, AIH zum ganzen Kreise ein kleinerer Bogen $AKBH < AKBD$ ergänzt; so gilt für Bogen die größer als der Halbkreis sind, grade

das Gegentheil. Größere Bogen haben kleinere Sehnen und umgekehrt, [Was aber die Winkel betrifft, so gilt für sie der Satz allgemein, wenn man *hineingehende Winkel* (angles retrans) * mit in die geometrische Betrachtung aufnimmt, da denn zu Bogen größer als der Halbkreis, Winkel größer als zwey Rechte gehören. Von solchen Winkeln haben die größern kleinere Ergänzungen zu vier Rechten]

L E H R S A T Z 9.

Fig. 53. *Ein Halbmesser, welcher senkrecht auf eine Sehne steht, theilt die Sehne und ihren Bogen beyde in zwey gleiche Theile.*

Es sey CD senkrecht auf die Sehne AB, so stehn die Halbmesser CA, CB, welche man nach den Endpunkten der Sehne zieht, auf die Sehne schief auf, müssen sie also, da sie gleich sind, in gleicher Entfernung vom Perpendikel durchschneiden *, so daß $AD = DB$ ist.

Ist nun der Halbmesser CG ein Perpendikel, welches in der Mitte der Sehne AB aufsteht; so sind alle Punkte desselben von den Endpunkten A, B der Sehne gleich weit entfernt *, also auch die Punkte G und H, so daß $AG = GB$, $AH = HB$ ist. Zu diesen Linien, als gleichen Sehnen, gehören gleiche Bogen AG, GB und AH, HB *; mithin werden auch die zur Sehne AB gehörige Bogen AGB und AHB, beyde vom Halbmesser CD halbirt *.

Folgerung I. Der Mittelpunkt C des Kreises, und die beyden Punkte D in der Mitte einer Sehne und G in der Mitte des dazu gehörigen Kreisbogens, liegen also immer in grader Linie, und zwar in einem Perpendikel auf die

Sehne. Eine grade Linie die durch zwey dieser Punkte geht, muß also nothwendig auch durch den dritten gehn, und ein Perpendikel auf die Sehne feyn *. * Gr. 6.
f. 1.

Folgerung 2. Umgekehrt muß ein Perpendikel welches auf die Sehne in ihrer Mitte errichtet ist, durch den Mittelpunkt gehn, indem durch einen Punkt nur ein einziges Perpendikel auf eine grade Linie möglich ist *. * I. 15.

[*Folgerung 3.* Zwey Sehnen AB , DE deren keine ein Durchmesser ist, durchschneiden sich nicht unter rechte Winkel, und halbiren sich nicht. Fig. 79.

Denn ist keine von beyden ein Durchmesser, so liegt der Mittelpunkt C des Kreises außershalb beyder; folglich auch die grade Linie CO vom Mittelpunkte nach dem Durchschnittpunkte O beyder Sehnen. Gesezt nun sie durchschnitten sich im Punkte O rechtwinklig, so stünden in diesem Punkte zwey verschiedene grade Linien DO , CO auf die dritte AB senkrecht, welches unmöglich ist. Gesezt beyde Sehnen halbiren sich im Punkte O , so stünde CO auf beyden in ihrer Mitte, also senkrecht, auf, folglich AO , DO beyde im Punkte O auf CO senkrecht, welches gleichfalls unmöglich ist.]

[*Folgerung 4.* Auf jeder graden Linie PQ , welche zwey concentrische Kreise durchschneidet, werden zwischen den Kreislinien zwey gleiche Stücke PR , QS abgeschnitten. Fig. 47.

Für Durchmesser ist dieser Satz schon oben bewiesen *. Geht die Linie PQ nicht durch den Mittel- * 1. f. 3.

punkt, so fälle man aus diesem auf ihr ein Perpendikel CV. Dieses halbirt sowohl die ganze Linie PQ, als auch das Stück RS, welches im kleinern Kreiße liegt, als Sehnen beyder Kreiße, daher $VP - VR = VQ - VS$, folglich PR, QS gleich feyn müssen.]

L E H R S A T Z IO.

Fig. 54. Durch drey gegebne Punkte A, B, C, welche nicht in grader Linie liegen, läßt sich stets eine Kreislinie, und zwar nur eine einzige Kreislinie ziehn.

Verbinde die gegebenen Punkte durch die graden Linien AB, BC, halbire diese, und errichte auf ihrer Mitte die senkrechten Linien DH, FG, so müssen diese sich in irgend einem Punkte O durchschneiden. Denn gesetzt sie durchschnitten sich nicht, so wären sie parallel*, folglich stünde die Linie AD, welche auf DO senkrecht ist, gehörig verlängert auf beyde senkrecht*. Nun aber fällt die Verlängerung der Linie AB mit BC nicht zusammen, weil die drey Punkte A, B, C nach der Voraussetzung nicht in grader Linie liegen. Also gäbe es vom Punkte B zwey verschiedene Perpendikel BE, BF auf dieselbe grade Linie OF, welches unmöglich ist*. Die Perpendikel DH, FG müssen sich also nothwendig in irgend einem Punkte O durchschneiden.

Dieser Punkt steht gleich weit von den Endpunkten sowohl der Sehne AB, als auch der Sehne BC ab, weil er in den Perpendikeln liegt, die auf der Mitte dieser Sehnen errichtet sind. Also sind OA, OB, OC gleich, und eine mit dem Halbmesser OB um den

Punkt O beschriebne Kreislinie, muß durch die drey gegebenen Punkte A, B, C gehn *. Es ist also alle. ^{*E. 2. 7}
 mal möglich durch drey Punkte, welche nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben *. ^{*Au. 12.}

Durch drey Punkte läßt sich aber auch nur *eine einzige Kreislinie* beschreiben. Denn gesetzt es wäre durch die drey Punkte A, B, C noch eine zweyte, von der ersten verschiedene Kreislinie möglich, so müßte auch der Mittelpunkt dieser sowohl im Perpendikel DH als auch im Perpendikel FG, die in der Mitte der Sehnen aufstehn, liegen *, beyde Perpendikel würden sich al. ^{* 9. f. 2.}
 so in zwey verschiedenen Punkten durchschneiden *, ^{* I. f. I.}
 welches unmöglich ist *. ^{*Gr. 6 f. 4}

Folgerung 1. Also können zwey verschiedene Kreislinien nicht mehr als zwey Punkte mit einander gemein haben. Denn wären ihnen drey Punkte gemein, so hätten sie einerley Mittelpunkt, wären also einerley Kreis, nicht zwey verschiedene Kreise *. ^{* I. f. I.}

[*Folgerung 2.* Durch die drey Winkelpunkte jedes Dreyecks läßt sich ein Kreis beschreiben, worin jede der Seiten eine Sehnen wird. Da nun die Perpendikel auf die Mitte dieser Sehne, alle drey durch den Mittelpunkt gehn, so erhellt hieraus eine artige Eigenschaft der Dreyecke, *dass nemlich Perpendikel auf die Mitte der Seiten eines Dreyecks errichtet, sich stets alle drey in einem Punkte durchschneiden*, und zwar im Mittelpunkte eines Kreises, welcher dem Dreyeck umschrieben ist.]

LEHRSATZ II.

Fig. 55. 1) Gleiche Sehnen sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, [und umgekehrt sind alle Sehnen, die gleich weit vom Mittelpunkte abstehn, gleich.]

2) Von zwey ungleichen Sehnen ist die Kleinere weiter als die Größere vom Mittelpunkte entfernt.

1. Es mögen die Sehnen AB, DE gleich seyn, so ziehe man auf sie aus dem Mittelpunkte die senkrechten Linien CF, CG und die Halbmesser CA, CD. Die so entstehenden rechtwinkligen Dreyecke ACF, DCG decken einander, weil ihre Hypotenusen CA, CD als Halbmesser, und eine ihrer Katheten AF, DG als die

• I. 19. Hälften gleicher Sehnen gleich sind *. Also sind auch die dritten Seiten CF, CG, d. h. die Entfernung der

* I. 16. f1 Sehnen vom Mittelpunkte * gleich. Ist umgekehrt diese Entfernung für zwey Sehnen AB, DE gleich, so müssen aus denselben Gründen die halben Sehnen AF, DG, mithin auch die Sehnen selbst gleich seyn.

2. Ist hingegen die Sehne $AH > DE$, so ist auch

* 8. der Bogen $ANH > DME$ *, daher es auf ihm einen Punkt B geben muß, für welchen $ANB = DME$ ist. Zieht man die Sehne AB, und fällt auf sie das Perpendikel CF, so wie auf AH das Perpendikel CI, so ist offenbar $CF > CI$ [indem AH mithin auch O zwischen den Punkten C, F liegt] und wiederum $CO > CI$ als Hypotenuse im rechtwinkligen Dreyeck COI; also noch viel mehr $CF > CI$. Nun aber gehören die Sehnen AB, DE der Construction nach zu gleichen Bo-

* 7. gen, sind also gleich *, und stehn folglich gleich weit

vom Mittelpunkte ab, so daß $CF = CG$ ist. Folglich muß auch $CG > CI$ seyn, also die kleinere Sehne DE weiter als die grössere AH vom Mittelpunkte absteht.

Zufatz. Also muß auch von zwey Sehnen, welche ungleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, diejenige die kleinere seyn, welche weiter vom Mittelpunkte absteht.

L E H R S A T Z 12.

Jede grade Linie welche auf einem Halbmesser Fig. 56 in dessen Endpunkte senkrecht steht, berührt den Kreis;

und durch jeden Punkt der Kreislinie ist nur eine einzige Tangente möglich.

1. Ist die grade Linie BD auf den Halbmesser CA in dessen Endpunkte A senkrecht, so steht jede andre grade Linie z. B. CK die durch den Mittelpunkt geht, auf BD schief auf *, muß also grösser als das Perpendikel CA seyn *. Folglich liegt der Durchschnittspunkt derselben mit BD weiter als um den Halbmesser vom Mittelpunkte ab, d. h. ausserhalb des Kreises *. Und also liegt auch die ganze Linie BD ausserhalb des Kreises. Sie berührt mithin die Kreislinie im Punkte A , welchen sie mit ihr gemein hat *, und ist eine *E. 12.00 *Tangente des Kreises* im Punkte A .

2. Gesetzt nun es gäbe ausser dieser Tangente BD noch eine zweyte grade Linie, EF , welche die Kreislinie im Punkte A berührte, so könnte diese nicht senkrecht auf dem Halbmesser CA seyn *. Der Halb- * I. 15,

- messer BA würde also auf ihr schief aufstehn, und folglich müste das Perpendikel aus dem Mittelpunkte
- *1.16.1. auf diese Linie, kleiner als CA seyn *. Diese zweyte
- E. 2. Linie EF gienge also durch einen Punkt *im* Kreise *,
- *E. II. muß also nothwendig den Kreis durchschneiden *, und kann ihn nicht berühren. Daher ist außer der Linie BD, welche senkrecht auf dem Halbmesser in seinem Endpunkte aufsteht, keine andre grade den Kreis berührende Linie durch den Punkt A möglich.

[*Folgerung .I* Folglich muß 1) eine grade Linie CA, welche durch den Mittelpunkt des Kreises nach dem Berührungspunkte A gezogen wird, stets senkrecht auf die Tangente stehn; und 2) eine grade Linie welche senkrecht auf die Tangente im Berührungspunkte errichtet wird, stets durch den Mittelpunk des Kreises gehn. Denn keine andre grade Linie berührt den Kreis, als die, welche auf dem Radius in dessen Endpunkte senkrecht steht; und durch einen Punkt einer graden Linie ist nur ein einziges Perpendikel möglich.]

- [*Folgerung 2.* Zwey Tangenten, welche durch die Endpunkte eines Durchmesser gezogen werden, laufen parallel; denn sie stehn beyde auf dem Durchmesser senkrecht *.
- I 21.

Sind umgekehrt zwey Tangenten eines Kreises parallel, so ist die grade Linie durch die Berührungspunkte stets ein Durchmesser. Denn ein Durchmesser nach dem einen Berührungspunkte gezogen, steht auf der einen Tangente, folglich auch auf der mit ihr parallelen Tangente senkrecht *, muß also auch durch den zweyten Berührungspunkt gehn.

*1.25.f.1

Mit einer Sehne, welche kein Durchmesser ist, machen die Tangenten durch ihre Endpunkte spitze obschon gleiche Winkel, und zwar mit den kleinern Sehnen spitzere Winkel. Denn die Halbmesser durch ihre Endpunkte stehn unter gleichen, und zwar auf den kleineren Sehnen unter grössern Winkeln auf.

Durchschneiden sich umgekehrt zwey Tangenten, so ist die grade Linie durch ihre Berührungspunkte eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist.]

[Folgerung 3. Eine grade Linie IK, welche den Innern zweyer concentrischen Kreise berührt, wird durch den Berührungspunkt H halbirt. Denn sie ist Sehne des grössern Kreises und CH steht auf ihr als einer Tangente am kleinern senkrecht *.]

T. III.
Fig. 4.

* 9.

[Folgerung 4. Jede grade Linie welche einen Kreis durchschneidet, muß ihn in zwey Punkten durchschneiden. Denn durchschneidet EF den Kreis im Punkte A, und man zieht den Halbmesser CA, so steht dieser auf sie schief auf, nicht senkrecht, (denn sonst würde EF die Kreislinie nach dem eben geführten Beweise nicht durchschneiden). Folglich giebt es eine zweyte auf EF schiefaufliehende Linie CG welche der CA, das ist dem Halbmesser, gleich ist, also einen zweyten Punkt G, welcher der graden Linie EF und der Kreislinie gemein ist, das heisst, einen zweyten Durchschnittspunkt. Dafs es keinen dritten geben könne [sagt Lehrsatz 6.]

Fig. 56.

[Zufatz. So oft also eine grade Linie EF einen Kreis durchschneidet, wird ein Stück von ihr AG ei-

Fig. 58.

ne Sehne des Kreises, und dieses liegt ganz innerhalb
 * 4. der Kreislinie *. Dagegen liegt die Tangente AD ganz anserhalb der Kreislinie. Folglich muß stets *zwischen beyden* ein Bogen AHG liegen, so daß er von AD und AG eingeschlossen wird. Gefetzt also man wollte sich nach Analogie gradeliniger Winkel hier einen *krummlinigen Winkel* GHAD vorstellen, so würde dieser stets von dem gradelinigen GAD eingeschlossen,
 *I.E. 12. müßte also *kleiner* als dieser seyn *. Nun aber kann der gradelinige GAD kleiner gedacht werden, als jeder angebliche Winkel; und so klein er auch gedacht wird, so durchschneidet AF, weil es nur *eine* Tangente (AD) giebt, allemal den Kreis, wäre also immer der krummlinige noch kleinere Winkel GHAD vorhanden. Folglich müßte dieser Winkel kleiner als jeder angebliche seyn, könnte also gar keine Größe haben, müßte also gleich 0 seyn.

Folglich machen im Berührungspunkte der Kreis und die Tangente gar keinen Winkel, beyde fallen zusammen, und will man hier doch von einem sogenannten *Berührungswinkel* GHAD sprechen, so ist dieser gleich 0, d. h. er hat gar keine Größe, ist gar nicht vorhanden.

Fig. 57. Hierauf beruht die Vorstellung *krummliniger Winkel*. Denn da im Berührungspunkte Tangente und Kreis zusammenfallen, keinen Winkel mit einander machen, so muß auch ein Kreisbogen AH mit irgend einer graden Linie AB denselben Winkel als seine Tangente IAK machen, und eben so zwey Kreisbogen AH, AL mit einander denselben Winkel als ihre Tangen-

ten im Punkte A, AI, AB. Und diese Begriffe lassen sich in der höhern Geometrie auch auf alle andere krumme Linien übertragen.

Mithin *steht* insbesondere *jeder Halbmesser auf der Kreislinie senkrecht*; denn er macht mit der Tangente im Berührungspunkte rechte Winkel. — Jede Sehne, welche kein Durchmesser ist, macht dagegen in ihrem Endpunkte mit der Kreislinie ungleiche Winkel. — Endlich *stehn zwey concentrische Kreise überall gleich weit von einander ab*. Denn da die Halbmesser auf beyden senkrecht stehn, so geben die abgeschnittnen Stücke der Halbmesser den Abstand beyder von einander an *, *I. 16. f. 2 und diese Stücke sind überall gleich *] *I. f. 2.

[Anmerkung I. Ein Winkel ist die Lage zweyer *grader* Linien gegen einander *. Krummlinige Winkel denken zu *I. E. 12. wollen, wäre also ungereimt, wenn nicht im Berührungspunkte die Tangente und die krumme Linie zusammenfielen, also krummlinige Winkel sich durch den Winkel der Tangenten im Berührungspunkte denken ließen. So muß man daher diesen Begriff erklären.

Nur eine grade Linie hat in allen ihren Theilen gegen eine *andre einerley* Lage, und also läßt sich nur bey ihr aus der Lage eines Stückes GF auf die Lage der Linie bey A schließen. Eine krumme Linie hat in allen noch so kleinen Theilen eine verschiedene Lage gegen eine grade Linie AB. Man kann also aus der Lage der Theile H, I nicht wie bey graden Linien auf die Lage der Theile im Punkte A schließen. Man sieht daher auf welchen Mißverständnis folgende Einwendung gegen das hier Vorgetragne beruht. „Gefetzt HA, IA wären zwey Bogen die beyde die grade Linie AD im Punkte A berührten *, so müßten die Winkel * E. 12. HAD, IAD beyde o, also beyde gleich seyn. Nun aber schließt der Winkel IAD den Winkel HAD ein; also muß er größer

als HAD seyn, welches dem vorigen widerspricht. Also kann der Berührungswinkel nicht gleich null seyn." Aber die Schlussfolge, *also muß er größer als HAD seyn*, ist falsch. Sie gilt dem angeführten nach nur für gradelinige Winkel, keinesweges für die Lage krummer Linien, auf deren Lage im Punkte A wir aus der Lage in H und I nicht so unmittelbar schliessen können. Daraus daß der Bogen AI den Bogen AH einschließt läßt sich einzig und allein das folgern, daß der einschließende Bogen *schneller* von der Tangente, als der eingeschlossene abweicht, daß er mithin *krummer* oder *convexer*, der Bogen AH dagegen *flacher* oder *weniger gebogen ist*, und mehr nichts.

Und doch haben geschickte Mathematiker sich jenen Trugschluss nicht nur zu Schulden kommen lassen, sondern sogar mit Hitze als Wahrheit vertheidigt. (Man sehe *Clavius* und *Taquet's* Ausgaben *Euklids* B. 3. S. 16 besonders die erstere, wo diese Materie auf 20 klein gedruckten Octavseiten mit den Gründen dafür und dawider ausgeführt wird; auch *Clavius* Werk de triangulis planis et sphaericis und in *Wallis* Opera Mathematica Tom. II, p. 605 die Abhandlung de angulo contactus et semicirculi.) Ueberhaupt gehört diese an sich nicht sehr schwierige Materie zu den am mehrsten mißverstandnen in der reinen Mathematik. Selbst *van Swinden* geräth hier in die irrige Meynung: „wenn man behaupte der krummlinige Winkel $GHAD$ sey kleiner als der gradelinige GAD , so stelle man keine Vergleichung zwischen den bloßen Neigungen (Lagen) dieser Linien an, sondern zwischen dem Raume den diese Winkel einschliessen, und verweist deshalb auf *Vietae Opera* p. 322. Das wäre aber doch fürwahr eine Sonderbarkeit der ersten GröÙe, wenn man an Flächenräume dächte und von Winkeln spräche, und etwas das mit der berühmten Genauigkeit der Geometer gar sehr im Widerspruch stände.

Man sieht hier abermals eine Probe, wie es in der Geometrie, da wo es auf Lage ankommt, noch manches aus einer sorgfältiger entwickelten Theorie der Lage, zu berichtigen und zu ergänzen giebt. *Le Gendre* hat diese Materie vom Berührungswinkel, die

schon Euklid richtig vorträgt, sehr mit Unrecht ausgelassen; so auch *Thomas Simpson*. Hielten sie sie etwa noch für streitig, oder für zu schwierig. Für beydes erkennt sie nicht

d. U.

Anmerkung 2. Die berührende Linie ist die Gränze für alle schneidende Linien, welche auf dem Durchmesser, der durch den Berührungspunkt geht, senkrecht stehen. Denn die beyden Durchschnittspunkte dieser Linien mit dem Kreise, stehen gleich weit vom Durchmesser ab, und nähern sich immer mehr, wenn die durchschneidende Linie sich weiter vom Mittelpunkte entfernt. Rückt sie endlich um den Halbmesser vom Mittelpunkte ab, so fallen beyde Durchschnittspunkte in den einen Berührungspunkt zusammen, und zwar in dem Durchmesser; daher die Tangente mit in die Reihe dieser schneidenden Linien als letzte aufzunehmen ist; als Gränze der diese sich ohne Ende fort nähern, ohne sie doch je zu erreichen, so lange sie schneidende Linien bleiben. Man kann sich daher die berührende Linie als eine schneidende denken, für welche die beyden Durchschnittspunkte mit einander und mit dem Durchmesser zusammenfallen, und unter dieser Fiction, in der ein Widerspruch liegt, der sich jedoch selbst aufhebt, gelten von ihr alle Sätze der schneidenden Linien, in so fern sie mittelst dieser Fiction gehörig modificirt werden. Auch gründen sich auf diese Fiction die ersten Methoden an allen krummen Linien Tangenten zu ziehn, dergleichen *Fermat*, *Hudden* u. a. erdacht haben. — An einem gegebenen Kreise Tangenten verschiednen Bedingungen gemäß, oder umgekehrt zu einer gegebenen Tangente einen Kreis zu beschreiben, lehren Aufg. 14 und 13.

d. U.

L E H R S A T Z 13.

Wenn zwey Parallellinien AB , DE , beyde den Kreis durchschneiden, so sind die Kreisbogen MN , PQ welche zwischen ihnen liegen, gleich. Fig. 59.

[Die Stücke MP, NQ der beyden Parallellinien, welche innerhalb der Kreislinie fallen, sind Sehnen des Kreifes]. Ein Perpendikel CH aus dem Mittelpunkt auf die eine dieser Sehnen gefällt, steht auch auf die andre ihr parallele Sehne senkrecht *, halbirt also beyde Sehnen, und beyde zu diesen Sehnen gehörige

* 9. Bogen MHP, NHQ *. Folglich ist $MH = HP$ und

* Gr. 2. $NH = HQ$, also auch $MH - NH = HP - HQ$ *, das heißt $MN = PQ$.

Fig. 60. *Zu fatz I. Auch wenn eine Tangente DE mit einer Sehne MP parallel läuft, sind die Bogen zwischen der Sehne und dem Berührungspunkte H gleich.* Denn alsdann steht

* 12. f. 1. der Halbmesser CH auf die berührende Linie senkrecht *;

* 1. 25. f. 1. folglich auch auf die ihr parallellaufende Sehne MP *, halbirt also diese Sehne, mithin auch ihren Bogen, so

* 9. daß $MH = HP$ wird *.

Fig. 51. *[Zu fatz II. Auch in gleichen Kreisen schneidet eine Linie MQ, welche mit der graden Linie durch die Mittelpunkte CO parallel läuft, mit dieser Linie gleiche Bogen ab.*

Denn wegen des Parallelismus mit CO steht die Linie MQ von allen Punkten in CO, also auch von beyden Mittelpunkten gleich weit ab. Die Sehnen MN, PQ, welche beyde Kreislinien von MQ abschneiden sind also gleich *, mithin sind *erstens* die zu diesen Sehnen gehörige Bogen MKN, PLQ gleich, so wie ihre Unterschiede von den gleichen Halbkreisen, d. h. die Bogen $AM + BN = EP + FQ$, und folglich auch $AM = BN = EP = FQ$, indem die erstern und die letztern, als Bogen zwischen parallelen Sehnen eines Kreifes, gleich sind *.

* 13.

Zweytens sind auch die Hälften der gleichen Sehnen MN, PQ, welche die Perpendikel aus den Mittelpunkten CR, OS auf ihnen abschneiden, gleich, $MR = RN = PS = SQ$. Nun aber ist $RS = CO$ *, folglich sind auch MP und NQ beyde gleich CO. *Mitbin schneiden die ähnlich liegenden Theile beyder Kreislinien, von allen graden Linien, die mit der Linie durch ihre Mittelpunkte parallel laufen, gleiche Theile ab.* Umgekehrt ist also der geometrische Ort des Endpunkts P einer gegebenen graden Linie MP, welche in gegebner Lage, (z. B. parallel mit AF) mit ihrem andern Endpunkt M auf einer gegebenen Kreislinie ADBK aufsteht, eine gleiche Kreislinie EGFL, deren Mittelpunkt O, von C um gegebne Linien MP, in der gegebenen Lage, absteht *.

* I. 34.

* Cf. I. 34
f. 1.

Anmerkung. Dieser Zusatz ist im wesentlichen Satz 21. im ersten Buch von Apoll. ebenen Oertern, wird dort aber anders ausgedrückt und bewiesen. Der berühmte Fermat soll der Urheber desselben seyn,]

[L E H R S A T Z 14.]

Sind umgekehrt zwey Bogen MN, PQ eines Fig. 59. Kreises gleich, so sind 1) die Sehnen, welche durch die übereinstimmenden Endpunkte beyder gehn, MP, NQ, parallel. — 2) Die Sehnen welche durch die verkehrt liegenden Endpunkte beyder gezogen sind, MQ, NP, durchschneiden sich so, daß die ähnlich liegenden Theile in beyden gleich sind. — 3) Auch wenn die Sehnen der beyden gleichen Bogen MN, PQ selbst, sich ausserhalb des Kreises schneiden, so sind die

abgeschnittnen Stücke in der Verlängerung beyder gleich.

1. Halbire den Bogen NQ durch den Halbmesser CH; so wird durch diesen Halbmesser auch die Sehne NQ *, ferner, weil MN, PQ gleiche Bogen sind, auch der Bogen MHP und die Sehne MP dieses Bogens halbiert. Folglich stehn die Sehnen MP, NQ, welche durch die übereinstimmenden Endpunkte der beyden gleichen Bogen gehn, beyde auf die grade Linie CH senkrecht; sie sind also parallel *.

2. Die Sehnen MQ, NP, müssen, weil sie die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen Bogen verbinden, sich nothwendig in irgend einem Punkte I durchschneiden *. Ueberdem sind sie gleich, weil sie zu gleichen Bogen MHQ, NHP gehören *. Da nun auch die Sehnen MN, PQ gleich sind, so decken sich die Dreyecke MPQ, PMN *, und die Winkel bey M und P sind gleich. Das Dreyeck IMP ist daher gleichschenkelig *, und $IM = IP$, folglich auch, da die ganzen Sehnen MQ, NP gleich sind, $IN = IQ$.

3. Durchschneiden sich die beyden Sehnen der gleichen Bogen MN, PQ in irgend einem Punkte O auferhalb des Kreises, so ist das dadurch entstehende Dreyeck NOQ gleichschenkelig, mithin $NO = QO$. Denn aus dem, was unter 2 bewiesen ist, folgt, daß die Winkel IMN, IPQ, folglich auch, wegen des Parallelismus der Sehnen PM und QN, die Winkel QNO und NQO gleich sind *.

Folgerung 1. Weil in dem unter 2 betrachteten Fall, das Dreyeck MIP gleichschenkelig ist, so liegt die

die

die Spitze desselben in dem Halbmesser CH , welcher auf der Grundlinie MP in ihrer Mitte senkrecht steht *. *1.17.f.3
 Folglich liegt der Durchschnittspunkt I der beyden Sehnen MQ NP stets in dem Halbmesser, der die Bogen MHP , NHQ halbird. — Umgekehrt geht die grade Linie, welche durch die Punkte H und I gezogen wird, stets durch den Mittelpunkt des Kreises *. — Endlich * Gr. 6, schneiden zwey Sehnen, welche durch einen Punkt I eines Halbmessers unter gleichen Winkeln gegen denselben gezogen werden, gleiche Kreisbogen ab.

Folgerung 2. Weil eben so in dem unter 3 betrachteten Fall das Dreyeck MPO gleichschenkelig ist, so liegt die Spitze desselben O , in der Verlängerung des Halbmessers CH , welcher auf der Grundlinie in der Mitte aufsteht. — Umgekehrt muß also eine grade Linie welche den Winkel C am Durchschnittspunkte halbird, durch die Mitte der Sehnen MP und NQ und durch den Mittelpunkt des Kreises gehn; und grade Linien, welche unter gleichen Winkeln gegen die Verlängerung eines Halbmessers durch einen Punkt desselben gezogen werden, und den Kreis durchschneiden, schneiden in ihm gleiche Bogen ab.

Zusatz I. Diese Sätze lassen sich auch auf Tangenten übertragen. *Nimmt man auf beyden Seiten des Berührungspunktes H gleiche Bogen HM , HP , so läuft die Sehne durch ihre Endpunkte, MP , mit der Tangente DE parallel.* Denn zieht man nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CH , so halbird dieser den Bogen MHP , mithin auch die Sehne MP *, steht also auf ihr, so wie

Fig. 60.

* 9.

*12.f.1. auf der Tangente senkrecht *, und Sehne und Tangente laufen also parallel.

Tangenten durch die beyden Punkte M und P gezogen,

*12.f.2. machen mit der Sehne MP gleiche Winkel *, bilden also, wenn sie sich in einem Punkte O durchschneiden, ein gleichschenkliges Dreyeck. Daher sind die abgeschnittenen Stücke derselben MO, OO gleich, und ihr Durchschnittspunkt fällt in dem Halbmesser CH, der

*I.17.f.3 durch den Berührungspunkt geht *. Umgekehrt muß eine grade Linie durch O und H auch durch den Mittelpunkt, und eine grade Linie, welche den Winkel bey O halbirt, sowohl durch den Berührungspunkt, als auch durch den Mittelpunkt gehn.

Fig. 79. *Tangenten, welche von einem Punkte O auferhalb des Kreises nach dem Kreise gehn, sind überhaupt insgesammt gleich.* Denn zieht man CO und die Halbmesser nach den Berührungspunkten CF, CG, so entstehen rechtwinklige Dreyecke, worin die Hypothenuse CO und eine der Katheten gleich sind, die sich deshalb decken *, und worin $OG = OF$ ist.

Fig. 61. *Zusatz II. Ist ein Halbkreis ABC in eine grade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 6 getheilt, und man verbindet die übereinstimmenden Theilpunkte von den Endpunkten des Durchmesser an gerechnet durch grade Linien AC, HF, IG, so ist die Summe aller dieser parallelen Sehnen gleich dem Stück AK, welches eine grade Linie durch B und den nächsten Theilpunkt G gezogen, auf dem verlängerten Durchmesser abschneidet.*

Denn wegen der Gleichheit der Theile AH, CF und HI, FG sind die Sehnen AC, HF, IG parallel *.

*14. I.

Eben so sind wegen Gleichheit der Bogen HI, CF und IB, FG die Sehnen HC, IFL, BGK parallel. Folglich sind HFLC, IGKL Parallelogramme, also $HF = CL$, $IG = LK$ * und $AC + HF + IG = AK$. *I. 34. 2.

Zusatz III. Ist ein Halbkreis ADB in eine ungrade Taf. III.
Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 5, getheilt, und man F. 62.
verbindet die übereinstimmenden Theilpunkte durch grade
Linien AB, DG, EF, und zieht nach den Endpunkten E, F
der letztern dieser Linien die Halbmesser CE, CF; so sind
alle Abschnitte jener Linien zwischen diesen Halbmessern
EF, MN etc. zusammengenommen dem Halbmesser des Krei-
ses gleich.

Denn theilt man auch den andern Halbkreis AHB
auf dieselbe Art ein, in den Punkten H, I, K etc., so
gehn erstens EC und FC verlängert als Durchmesser
durch zwey Theilpunkte K, I *. Verbindet man zwey- * 2. u. 3.
tens die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden
gleichen Theile DE, HI, durch die Sehnen EH, DI,
so durchschneiden sich diese, nach Folgerung I, in ei-
nem Punkte L des Halbmessers CA, so das $CA = CL$
 $+ LA$ ist. Nun sind aber wegen Gleichheit der Thei-
le, die Sehnen FI, EH, DA welche gleiche Bogen ab-
schneiden, parallel *. Eben so die Sehnen AB, DG, * 14. I.
EF und die Sehnen EK, DI, etc. Mithin sind als Pa-
rallelen zwischen Parallelen, erstens $DN = AC$, und
zweytens $EF = LC = DM$ *, also auch $DN - DM$ * 1. 34. 1.
 $= AC - LC$, d. h. $MN = AL$ und folglich $EF + MN$
 $= LC + AL = AC$.

Grade so führt man den Beweis, wenn der Halbkreis in eine grössere Zahl von ungleichen Theilen getheilt ist.

Taf. III.
F. 63. **Zusatz IV.** *Ist ein Kreis in sechs gleiche Theile getheilt, und man verbindet einen der Theilpunkte, A, mit denen, welche um zwey Theile von demselben abstehn durch grade Linien AC, AE; so theilen diese Linien die Sehne BF zwischen den übergangnen Theilpunkten, welche zunächst bey A liegen, in drey gleiche Theile.*

Denñ erstens sind AC, BF, und zweytens auch AE, FB, zwey Sehnen, welche die verkehrt liegenden Endpunkte zwey gleicher Bogen AF, CB und AB, EF mit einander verbinden. Folglich durchschneiden
14. 2. sich diese Sehnen so, dafs $BH = AH$ und $FI = AI$ ist *.
Nun aber sind, wenn man CE zieht, die Bogen AC CE, EA, folglich auch die Sehnen dieser Bogen
* 7. gleich *. Also ist das Dreyeck ACE gleichseitig. Da überdem CE parallel mit BF läuft, so ist das Dreyeck
*I.25.A. AHI, mit jenem Dreyeck gleichwinklig *, also eben-
*I.21.f.2 falls gleichseitig, oder $AH = HI = AI$ *. Mithin ist auch $BH = HI = IF$, folglich die Sehne BF auf diese Art in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Dieser sehr brauchbare Lehrsatz und die Zusätze fehlen bey Le Gendre. Zusatz 2 entlehne ich aus *Clavius* Euklid, Zusatz 3 u 4 aus *Krafft's* Institut. Geometr. sublim., wo als Urheber des erstern *La Hire* in den *Mémoires de Mathématique*. Paris 1692. p. 92, und des letztern *Gregor von St. Vincenz* in seinem *Opus geometricum* prop. 196 de Circulo genannt wird. In den Beweisen bin ich indess von ihnen abgewichen. In den folgenden Büchern werden wir ähnliche interessante Sätze finden.

[L E H R S A T Z 15.]

Nimmt man außerhalb oder innerhalb eines Fig. 64.
 Kreises einen Punkt A und zieht durch ihn und den
 Mittelpunkt B eine grade Linie, welche die Kreislinie
 in den Punkten I und H durchschneidet; so hat

1) unter allen Punkten der Kreislinie der Punkt
 I , der in der Linie AH mit dem Punkte A zu einer-
 ley Seite des Mittelpunkts B liegt, den kleinsten; da-
 gegen der Punkt H , der mit A auf entgegengesetzter
 Seite des Mittelpunktes B liegt, den grössten Abstand
 vom Punkte A ;

2) haben unter mehreren Punkten E, K, G in
 der Kreislinie, diejenigen den kleinern Abstand vom
 Punkte A , welche näher beym Punkte I liegen; und

3) stehn je zwey Punkte, die zu entgegenge-
 setzten Seiten der Linie AH liegen und gleich weit
 von I entfernt sind, z. B. E, F , auch vom Punkte
 A gleich weit ab.

1. Denn zieht man nach den Punkten $E, K, F,$
 G in der Kreislinie die Halbmesser BE, BK, BF, BG
 und aus dem Punkte A die graden Linien $AE, AK,$
 AF, AG , so bilden diese mit AB Dreyecke, in deren
 jedem, z. B. in ABE , der Unterschied je zweyer Seiten
 kleiner und zugleich ihre Summe grösser als die dritte
 Seite *, folglich $AB - BE$ oder $AB - BI$, d. h. $AI < * 1. 8.$
 AE und zugleich $AB + BE$ oder $AB + BH$ d. h. AH
 $> AE$ ist. Folglich ist der Punkt I weniger, der Punkt
 H weiter als jeder andre Punkt E in der Kreislinie vom
 Punkte A entfernt; welches das erste ist.

2. Alle jene Dreyecke ABE, ABK, ABF, ABG haben unter einander zwey Seiten gemein, nemlich AB und die gleichen Halbmesser BE, BK, BF, BG. Folglich wird die Gröfse ihrer dritten Seiten AE, AK, AF, AG von der Gröfse der gegenüberstehenden Winkel ABE, ABK, ABF, ABG durch Lehrsatz 10. des ersten Buchs bestimmt. Alle diese Winkel sind aber zugleich Winkel am Mittelpunkte des Kreises um B, daher ihre Gröfse von der Gröfse ihrer Sehnen abhängt*, folglich von der gegenseitigen Entfernung der beyden Endpunkte dieser Sehnen, d. h. der Punkte E, K, F, G vom Punkte I. Ist der Punkt E weiter als K aber nicht so weit als G vom Punkte I entfernt, so ist

* I. 10. $AE > AK$ und $AE < AG$ *; welches das zweyte ist.

3. Sind endlich die Punkte E, F gleich weit von I entfernt; so ist auch $AE = AF$ *, da denn die beyden Punkte E, F zu entgegengesetzten Seiten der Linie AB liegen müssen, weil sie sonst (da die beyden Dreyecke AEB, AFB sich decken) zusammenfielen, und nicht zwey, sondern nur ein Punkt wären; welches das dritte ist.

Zusatz. Diese Sätze über die Entfernung eines Punktes von den Punkten in einer Kreislinie gelten gleichmäfsig, jener Punkt liege *aufserhalb* oder *innerhalb* der Kreislinie, und der Beweis ist für beyde Fälle derselbe, nur die Lage der Linien etwas verschieden, wie dieses die beyden grossen Kreisen unsrer Figur darstellen, daher es unnöthig ist mit Euklid (III. 8, 9) beyde Fälle besonders zu behandeln. *Auch gelten sie*

für jeden Punkt im Umfange, für welche nur I und A zusammenfallen, wie im dritten kleinern Kreise unfrer Figur.

Folgerung 1. Von jedem Punkte A, welcher nicht der Mittelpunkt ist, lassen sich nach einer Kreislinie stets zwey gleiche grade Linien ziehn, welche zu entgegengesetzter Seite der Linie durch den Mittelpunkt liegen *; (3) aber auch nicht mehr als zwey, indem es in der Kreislinie nicht mehr als zwey Punkte giebt, welche von Einem Punkte in derselben gleich weit abstehn *.

Folgerung 2. Kann man also von einem Punkte nach der Kreislinie mehr als zwey grade Linien ziehn, so ist dieser Punkt nothwendig der Mittelpunkt des Kreises.

Folgerung 3. Grade Linien, welche von einem Punkte außerhalb des Kreises so gezogen sind, daß sie von der Kreislinie gleiche Bogen abschneiden, sind gleich *. Deshalb sind von jedem Punkte außerhalb des Kreises nur zwey und nicht mehr solche grade Linien möglich. Umgekehrt schneiden alle gleiche grade Linien, welche von einem Punkte außerhalb des Kreises an die Kreislinie gezogen sind, von ihr gleiche Bogen ab. Solche Linien so zu ziehn, daß sie im Kreise Sehnen von gegebner Gröfse bilden, oder daß zwey derselben Bogen von gegebner Gröfse umspannen, lehrt Aufg. 15.

Folgerung 4. Auch alle Tangenten, welche Fig. 79. von einem Punkte nach einer Kreislinie gehn sind gleich *. Folglich sind von einem Punkte O außerhalb

eines Kreises nach dem Kreise stets zwey verschiedene, aber nicht mehr, Tangenten möglich. — Ist eine grade Linie OF , welche von einem Punkte O auſserhalb eines Kreises nach der Kreislinie geht, einer Tangente OG aus dieſem Punkte gleich, ſo iſt ſie ſelbſt eine Tangente des Kreises. — Endlich geht eine grade Linie, welche den Winkel O halbirt, den die beyden Tangenten aus dem Punkte O nach der Kreislinie bilden, durch den Mittelpunkt des Kreises und ſteht auf der Sehne durch die Berührungspunkte, in deren Mitte ſenkrecht auf *.

*14. Z. 1.

A n m e r k u n g. Der Lehrſatz und die Folgerungen, ſind den Sätzen des erſten Buchs über die Entfernung eines Punktes von den Punkten einer graden Linie * analog, und zeigen ſich für die Lehre des Kreises nicht weniger fruchtbar, als jene für die gradelinigen Figuren. Ich ſehe daher den Grund nicht ab, warum ſie Le Gendre übergeht, da er doch von jenen Sätzen des erſten Buchs einen ſo häufigen Gebrauch macht, und die fernern Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreiſe bloſſe Folgerungen aus dieſem Lehrſatz ſind.

d. U.

[L E H R S A T Z 16.]

Fig. 49.
u. 50.

1) *Zwey Kreiſe deren Mittelpunkte A, B um die Summe oder um den Unterſchied ihrer Halbmäſſer α, β von einander entfernt ſind, berühren ſich und zwar im erſten Fall äuſſerlich im zweyten innerlich.*

2) *Iſt die Summe ihrer Halbmäſſer größer oder der Unterſchied derſelben kleiner, ſo haben ſie keinen Punkt mit einander gemein, und liegen im erſten Fall*

der eine ganz auſſerhalb, im zweyten der eine ganz innerhalb des andern.

Die grade Linie durch beyde Mittelpunkte durchſchneide den um B beſchriebnen Kreis in den Punkten I und H, und zwar ſey I der Durchſchnittspunkt welcher mit A auf einerley Seite von B liegt; ſo ſind dem vorigen Lehrſatz gemäſs alle Punkte in der Kreislinie um B *weiter* als der Punkt I, aber *nicht ſo weit* als der Punkt H vom Mittelpunkte A der zweyten Kreislinie entfernt *.

* 14. 1.

I. Iſt daher AI *gleich* dem Halbmefſer α dieſer zweyten Kreislinie, ſo iſt zwar I ein Punkt in derſelben, aber alle andern Punkte der Kreislinie um B ſtehn weiter von A als um den Halbmefſer α ab, liegen alſo auſſerhalb der Kreislinie um A. Mithin berühren ſich beyde Kreislinien in dieſem Fall *äuſſerlich* *. Wenn aber $\alpha + \beta = AB$ iſt, ſo muſs auch $\alpha = AB - \beta$ *, oder $\alpha = AB - BI = AI$ ſeyn. Folglich iſt AI unter dieſer Bedingung dem Halbmefſer α gleich, und unter ihr müſſen ſich daher beyde Kreiſe *äuſſerlich berühren*.

Fig. 49.

* E. 12.

* Gr. 2.

Iſt AH *gleich* dem Halbmefſer α , ſo iſt zwar H ein Punkt in der Kreislinie um A, aber alle andere Punkte der Kreislinie um B ſind von A weniger als um den Halbmefſer α entfernt, liegen alſo innerhalb jener Kreislinie. Beyde Kreislinien berühren ſich alſo in dieſem Fall *innerlich* *. Wenn aber $\alpha - \beta = AB$ iſt, ſo muſs auch $\alpha = AB + \beta$ oder $\alpha = AB + BH = AH$ ſeyn. Folglich iſt unter dieſer Bedingung AH

Fig. 50.

* E. 12.

dem Halbmesser α gleich, und unter ihr müssen sich daher beyde Kreise *innerlich berühren*.

2) Ist dagegen AI *größer* als der Halbmesser α so fällt der Punkt I, der unter allen in der Kreislinie um B am nächsten bey A liegt, mithin diese ganze Kreislinie, außerhalb der Kreislinie um A und beyde haben keinen Punkt gemein. Das ist aber der Fall, wenn $\alpha + \beta > AB$ ist, da denn auch $\alpha > AB - \beta$ oder $> AB - BI$, d. h. $> AI$ ist.

Ist endlich AH *kleiner* als der Halbmesser α , so fällt der Punkt in der um B beschriebnen Kreislinie, welcher am weitesten von A entfernt ist, mithin diese ganze Kreislinie, innerhalb der Kreislinie um A, und beyde Kreislinien haben wiederum keinen Punkt gemein. Das ist aber der Fall, wenn $\alpha - \beta < AB$ ist, da denn $\alpha < AB + \beta$ oder $< AB + BH$ d. h. $< AH$ ist.

Folgerung 1. Wenn zwey Kreise einander berühren, so liegt *folglich stets* der Berührungspunkt mit den beyden Mittelpunkten in einer graden Linie, und zwar *zwei-*
 Fig. 49. *sehen* beyden Mittelpunkten wenn die Kreise *äußerlich*,
 Fig. 50. *nicht zwischen ihnen*, wenn sie sich *innerlich* berühren.

Denn nur unter diesen Bedingungen kann der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich seyn. Die grade Linie, welche durch zwey jener Punkte gezogen wird, muß also immer auch durch den dritten gehn.

Folgerung 2. Wenn umgekehrt zwey Kreislinien in einem Punkte I oder H, welcher in der graden Linie durch ihre Mittelpunkte liegt, *zusammentreffen*, so berüh-

ren sie sich. Denn dann ist allemal die Entfernung ihrer Mittelpunkte entweder der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich; ein sehr einfaches Kennzeichen von Kreisen die sich berühren, welches in der Lehre von den Berührungen von vielem Gebrauch ist.

Folgerung 3. *Zwey sich berührende Kreise haben im Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.* Denn da ihre Halbmesser AI, BI, welche nach dem Berührungspunkte gezogen werden, in grader Linie liegen *, so fallen die Perpendikel, welche auf beyde * f. 1. im Berührungspunkte I errichtet sind, mithin die Tangenten zusammen *. Ein Perpendikel auf die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkte errichtet, ^{* 12. u.} _{I. I. Z. 2.} geht also gewifs durch beyder Kreise Mittelpunkt.

Folgerung 4. *Haben umgekehrt zwey Kreise in einem Punkte I den sie gemein haben, eine gemeinschaftliche Tangente, so berühren sie sich, und zwar innerlich, wenn ihre Mittelpunkte auf einerley, äußerlich wenn sie auf entgegengesetzter Seite der Tangente liegen.* Denn ihre Mittelpunkte liegen dann beyde in dem Perpendikel, welches auf die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspunkt I errichtet wird *, sind also im ersten Fall um den Unterschied der Halbmesser beyder Kreise, im zweyten um ihre Summe von einander entfernt. Die Kreise müssen sich also unserm Lehrsatze zu folge berühren, im ersten Fall innerlich, im zweyten äußerlich. * f. 3.

Folgerung 5. *Alle Kreise, die durch einen Punkt I einer Kreislinie gehn, und um einen Punkt*

in dem Halbmesser IA, oder dessen Verlängerung, als Mittelpunkt beschrieben sind, berühren sich im Punkte I, weil sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente * f. 4. haben *, und liegen ganz zu einerley oder entgegengesetzter Seite dieser Tangente, d. h. des Perpendikels welches auf AI im Punkte I errichtet wird.

Anmerkung. Der erste Theil dieses Lehrsatzes steht zwar bey Le Gendre, und macht bey ihm sogar zwey Lehrsatze aus, allein seine Beweise sind sehr mangelhaft, da er sich nicht auf den vorhergehenden Lehrsatz berufen konnte. Die fruchtbaren Folgerungen fehlen bey ihm alle bis auf die erste.

d. U.

[L E H R S A T Z 17.]

T. III. F. 65. u. 66. *Wenn zwey um die Mittelpunkte C und O beschriebne Kreise sich innerlich oder äußerlich berühren, so liegen, im ersten Fall die beyden übereinstimmenden Endpunkte E, G, im zweyten die verkehrt liegenden Endpunkte E, G zweyer paralleler Durchmesser DE, FG, mit dem Berührungspunkte I in grader Linie.*

Denn verbindet man die Mittelpunkte durch die grade Linie CO, so geht diese auch durch den Berührungspunkt *. Zieht man daher von dem Berührungspunkte nach den genannten Endpunkten der parallelen Durchmesser die graden Linien IE, IG so entstehn zwey gleichschenklige Dreyecke ICE, IOG, worin wegen des Parallelismus der Durchmesser die Winkel an der Spitze, mithin auch die Winkel an der Grundlinie

* 16. f. I.
* E. 2. α

gleich sind *. Es sind also auch die dritten Winkel ^{*I.25; 12} CIE, OIG gleich *, und folglich bilden, da CI und ^{*I.31.f.1} IO in grader Linie liegen, auch AI und IO eine grade Linie *. Der Berührungspunkt liegt folglich ^{* I. 5.} mit den Endpunkten E und G der beyden parallelen Durchmesser in grader Linie.

Zusatz. Wenn umgekehrt zwey Kreise einen Punkt I gemein haben, und die Halbmesser OG, CE, welche man nach den Endpunkten einer graden Linie GE zieht, die durch den Punkt I geht, und beyde Kreise schneidet, sind untereinander parallel, so berühren sich beyde Kreise im Punkte I.

Denn man ziehe die Halbmesser OI, CI, so sind die Dreyecke IOG, ICE gleichschenkelig, mithin die Winkel E und EIC, G und GIO gleich. Nun aber sind wegen des Parallelismus der Halbmesser, und weil EG eine grade Linie ist, die Winkel E und G gleich *. ^{*I.25 A.} Also sind auch die Winkel EIC, GIO gleich *, mit- ^{* I. 5.} hin OI und IC in grader Linie *, und es liegt der ^{*16.f.2.} gemeinschaftliche Punkt I beyder Kreislinien in der graden Linie durch beyde Mittelpunkte. Folglich berühren sich in ihm beyde Kreise *. *16, f. 2.

Anmerkung. Diese Sätze entlehne ich aus *Pappus* mathematischen Sammlungen B. 7., wo sie als 15tes und 16tes Lemma aus Apollonius Werk von den Berührungen aufgeführt, aber auf eine schwierigere Art bewiesen werden. Auch ist der Lehrsatz *Archimedes* erstes Lemma im Buche von der Kugel und dem Cylinder. Noch ein paar ähnliche Sätze findet man Lehrsatz 25. Zuf. 2. und folgende.

[L E H R S A T Z 18.]

Fig. 48. *Zwey Kreise können sich nur dann durchschneiden, wenn sowohl die Summe ihrer Halbmesser α , β größer, als auch der Unterschied derselben kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte A , B ist.*

Denn gesetzt die erste dieser Bedingungen fände bey zwey Kreisen nicht statt, und es wäre $\alpha + \beta$ nicht größer als AB ; so müßte diese Summe entweder gleich AB , oder kleiner als AB seyn. Im ersten Fall würden sie beyde Kreise berühren, im zweyten keinen Punkt gemein haben *, könnten sich also nicht durchschneiden.

Fände die zweyte dieser Bedingungen nicht statt, und wäre $\alpha - \beta$ nicht kleiner als AB ; so müßte dieser Unterschied entweder gleich AB , oder größer als AB seyn. Im ersten Fall würden sich wiederum beyde Kreise berühren, und im zweyten keinen Punkt gemein haben *, könnten sich also nicht durchschneiden.

Zu s a t z. Dafs wenn beyde Bedingungen statt finden, die Kreise sich nothwendig durchschneiden müssen, haben wir schon als unmittelbare Folgen aus den *E.II.β. Principien gefehn *. Der dortige Satz wird also durch diese vervollständigt, und wir dürfen nun erst diese Bedingungen als *Bestimmung der Möglichkeit des Durchschneidens zweyer Kreise* aufstellen, ohne welche kein Schneiden statt findet, und unter der allein die Construction des Dreyecks aus drey gegebenen Linien möglich ist *.

[L E H R S A T Z 19.]

Zwey Kreise die sich durchschneiden treffen sich Fig. 48. stets in zwey Punkten, welche zu den entgegengesetzten Seiten der graden Linie durch beyde Mittelpunkte liegen.

Umgekehrt durchschneiden sich alle Kreise, welche zwey Punkte gemein haben, oder die in einem Punkte auferhalb der Linie durch ihre Mittelpunkte zusammen treffen.

1. Wenn zwey Kreise sich in einem Punkte E schneiden, so kann ihr Durchschnittspunkt nicht in der graden Linie DH liegen, welche durch die Mittelpunkte beyder Kreise geht *, liegt folglich zur einen *16. f. 2. Seite dieler Linie; daher zur andern Seite derselben in der einen Kreislinie ein zweyter Punkt F liegen muß, welcher eben so weit als jener vom Mittelpunkte A des andern Kreises entfernt ist *, folglich auf sei- *15. f. 1. nem Umfang liegt, also ein zweyter Durchschnittspunkt beyder Kreise ist. Und mehr als diese beyden Durchschnittspunkte sind nicht möglich *. *15 f. 1.

2. Haben zwey Kreise zwey Punkte E, F, gemein, so liegen diese auferhalb der graden Linie DH zwischen ihren Mittelpunkten, und es muß $AI < AE$ und $AH > AE$ seyn *. Folglich ist I ein Punkt in * 16. dem um A beschriebnen Kreise, H ein Punkt auferhalb desselben *, und folglich durchschneiden sich *E. 2. 7 beyde Kreise.

3. Liegt endlich der Punkt E, worin zwey Kreise zusammenreffen, auferhalb der Linie durch die Mittel-

- * 1. 8. punkte, so ist die Summe der beyden Halbmesser grösser als der Abstand der Mittelpunkte *; also durchschneiden sich beyde Kreislinien.

Anmerkung. Zwey sich durchschneidende Kreise, und zwey Kreise die zwey Punkte gemein haben, sind also einerley Gegenstand. Le Gendre braucht diesen letztern Begriff zur Erklärung des erstern, d. h. des Schneidens zweyer Kreislinien, doch, wie wir schon bemerkt haben, in so fern mit Unrecht*, als die Uebereinstimmung beyder Begriffe erst bewiesen werden muß. Es erhellt hieraus zugleich das zwey Kreise die sich berühren nur einen Punkt gemein haben können, und das umgekehrt alle Kreise die nur einen Punkt mit einander gemein haben, sich berühren, worauf Le Gendres Definition des Berührens zweyer Kreise sich gründet. d. U.

L E H R S A T Z 20.

Fig. 43. *Wenn zwey Kreise sich schneiden, so wird ihre gemeinschaftliche Sehne von der graden Linie, die durch die beyden Mittelpunkte O, B geht, senkrecht durchschnitten und halbirt.*

- Denn da zwey Kreise, die sich durchschneiden, zwey Punkte E, G gemein haben*, so gehört die grade Linie EG zwischen diesen Punkten als Sehne zu beyden Kreisen. Ein Perpendikel, welches auf diese Sehne in ihrer Mitte errichtet wird, muß folglich sowohl durch den einen, als durch den andern Mittelpunkt gehn*. Also (da zwischen zwey Punkten nur eine einzige grade Linie möglich ist*) muß auch umgekehrt eine grade Linie DH, welche durch die Mittelpunkte beyder Kreise A, B geht, die gemein-

meinschaftliche Sehne EG senkrecht durchschneiden und halbiren.

[Anmerkung. Die Tangente zweyer sich berührender Kreise stimmt also in der Eigenschaft mit der Sehne zweyer sich schneidender Kreise überein, daß die grade Linie durch die Mittelpunkte beyder Kreise auf sie senkrecht steht, und wir können sie also auch hier wieder als eine Sehne betrachten, bey welcher die beyden Durchschnittspunkte mit dem Kreise in einen zusammengefallen sind. In so fern kann man also den Berührungspunkt für einen doppelten Durchschnittspunkt nehmen.

d, U.]

L E H R S A T Z 21.

Wenn in einerley Kreis oder in zwey gleichen Fig. 67. Kreisen, zwey Winkel am Mittelpunkte ACB , DCE sich zu einander wie zwey ganze Zahlen verhalten; so müssen auch die beyden Bogen welche vor ihnen umspannt werden AB , DE sich wie dieselben Zahlen, und folglich wie jene Winkel verhalten.

Man setze, z. B. die beyden Winkel ACB , DCE verhielten sich zu einander wie die beyden Zahlen 7 und 4; so heist das, jene Winkel sollen so gedacht werden, daß sie von einem kleinern Winkel M grade so gemessen werden, wie die gegebenen ganzen Zahlen von der Einheit, daß folglich der Winkel M als gemeinschaftliches Maas im ersten Winkel ACB genau siebenmal, im letztern DCE genau 4 mal enthalten sey *. Dann lassen sich also in jenem genau 7, in v. 2. diesem genau 4 Winkeltheile (angles partiels) ACm , mCn , nCo . . , DCx , xCy . . . denken, welche insge-

sammt dem Winkel M, also auch unter sich gleich sind. Nun aber müssen zu diesen Winkeltheilen, als gleichen Winkeln am Mittelpunkte C in einerley oder * 7. Z. 2. in gleichen Kreisen, auch gleiche Bogen gehören *, folglich auch die Bogentheile (arcs partiels) Am, mn, no . . . Dx, xy . . . welche von jenen Winkeltheilen umspannt werden, unter sich gleich seyn. Jedem Winkeltheil entspricht aber ein Bogentheil. Folglich müssen auch die ganzen Bogen AB und DE sich wie die Zahlen 7 und 4 verhalten; also wie die Winkel. Dieselbe Schlussfolge findet bey jedem andern Zahlverhältnisse statt. So oft sich also das Verhältniß zweyer Winkel ACB, DCE in ganzen Zahlen ausdrücken läßt, verhalten sich die Bogen AB, DE, welche aus ihrem Scheitel mit gleichem Halbmesser beschrieben und von ihren Schenkeln umspannt werden, wie die Winkel, oder es ist

$$\angle ACB : \angle DCE = \text{bog. AB} : \text{bog. DE}$$

[d. h. wenn der Winkel ACB oder der n te Theil desselben im Winkel DCE m mal enthalten ist, so muß in diesem Fall auch der Bogen AB oder dessen n ter Theil in dem Bogen DE genau m mal enthalten seyn.]

Zusatz. Grade auf dieselbe Art erhellt umgekehrt, daß wenn in einerley Kreis oder in zwey gleichen Kreisen zwey Bogen AB, DE sich zu einander wie ganze Zahlen verhalten, auch die Winkel am Mittelpunkte, die auf ihnen stehn ACB, DCE, sich wie diese Zahlen, und mithin wie die Bogen verhalten müssen, so daß

$$AB : DE = \angle ACB : \angle DCE.$$

[Unter der Voraussetzung eines Verhaltens wie zwey ganze Zahlen zu einander, ist also stets das Verhältniß solcher Bogen und solcher Winkel gleich, *sind folglich Bogen und Winkel proportional* *.] * V. 2.

LEHRSATZ 22.

Wie auch zwey Winkel ACB , ACD sich zu ein- Fig. 68.
 ander verhalten mögen, immer verhalten sich auf die-
 selbe Art zwey Kreisbogen AB , AD , welche um ih-
 ren Scheitelpunkt mit gleichem Halbmesser beschrieben
 und von ihren Schenkeln umspannt werden.

Man lege den kleinern Winkel ACD so auf den
 größern, daß ihre Scheitel, der Schenkel CA , und
 ihre Kreisbogen zusammenfallen *. Wenn nun die * I.
 im Lehrsatz ausgefagte Proportion, d. h. Gleichheit
 der Verhältnisse, in irgend einem Fall nicht statt fän-
 de, so müßte dann der Winkel ACB zum Winkel ACD
 sich wie der Bogen AB zu einem Bogen AO , der größer
 oder kleiner als AD ist, verhalten *, also folgende * V. 3. α.
 Proportion richtig seyn

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog. } AB : \text{bog. } AO$$

Der Bogen AO sey *erstens* größer als AD , so kann
 man sich AD in lauter gleiche Theile getheilt denken,
 welche kleiner als der Unterschied beyder Bogen, DO ,
 sind *, [z. B. in n ,] da denn, wenn man diese Theile * Aufg. 5
 weiter nach O zu aufträgt, zwischen D und O wenig- Z. 2.
 stens ein Theilpunkt I fallen muß. Zieht man nun
 den Halbmesser CI , so sind ACD , ACI zwey Winkel
 am Mittelpunkte, deren Bogen AD , AI sich wie zwey

ganze Zahlen [n und $n + 1$] zu einander verhalten; folglich ist dann kraft des vorhergehenden Zusatzes

$$\angle ACB : \angle ACI = \text{bog. AB} : \text{bog AI}$$

Die Vorderglieder in den Verhältnissen dieser Proportion sind mit den Vordergliedern in der ersten Proportion einerley; folglich müssen die Hinterglieder proportional seyn, also

$$\angle ACD : \angle ACI = \text{bog. AO} : \text{bog AI}$$

[indem, wenn der Winkel ACB die Winkel ACD, ACI grade so misst, wie der Bogen AB die Bogen AO, AI, auch zwischen diesen Winkeln, und Bogen einerley Zahlverhältniss statt finden muß *.]

Nun aber ist der Bogen AO größer als AI, folglich müßte auch kraft der letztern Proportion der Winkel ACD größer als der Winkel ACI seyn, also der Theil größer als das Ganze, welches ungereimt ist *. Also ist es unmöglich das der Winkel ACB sich zum Winkel ACD, wie der Bogen AB zu einem Bogen, der größer als AD wäre, verhalten könne.

Aus einer ähnlichen Schlussfolge erhellt, das zweyten auch kein Bogen der kleiner als AD ist, mit den Winkel ACB, ACD und dem Bogen AB eine gültige Proportion bilden kann.

[Folglich muß die im Lehrsatz ausgesagte Proportion unter allen Umständen bestehn, da, bestände sie nicht, man in Ungereimtheiten verwickelt würde], und es ist also immer

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog AB} : \text{bog. AD.}$$

[Zufatz I. Grade fo beweist man den umgekehrten Satz, daß, wie auch zwey Bogen aus gleichen Kreisen sich verhalten mögen, die Winkel an ihren Mittelpunkten, von deren Schenkel sie umspannt werden, sich grade auf dieselbe Art verhalten.

So ist also die Proportionalität zwischen Winkel und Bogen allgemein dargethan, die beyden Bogen oder die beyden Winkel mögen durch einerley Bogen oder Winkel sich messen lassen oder nicht, d. h. *commensurabel* oder *incommensurabel* seyn, und folglich sich wie Zahlen verhalten oder nicht, d. h. ein *rationales* oder ein *irrationales Verhältniß* haben *.

* V. 1.

Der hier geführte sehr deutliche und evidente Beweis für diesen incommensurablen Fall, den ich durch die zweyte Anmerkung zur fünften Aufgabe noch vervollkommenet zu haben glaube, scheint, so wie der analoge Beweis Buch 3 Lehrsatz 4, von Le Gendre aus Simpfons Elementen entlehnt zu seyn, wo man ihn im Wesentlichen in der Anmerkung zum dritten Satze des fünften Buches findet. Simpfon bemerkt dabey daß schon Euklid im zwölften Buch seiner Elemente sich dieser Beweisart bedient, und daß sich mittelst derselben in jedem Falle die Schwierigkeiten, die aus der Incommensurabilität von Linien oder andern Ausdehnungen herühren, leicht und befriedigend heben lassen.]

Zufatz II. Was in diesem und dem vorigen Lehrsatze über die Proportionalität zwischen Winkeln und Bogen bewiesen worden ist, gilt ebenfalls für *Kreisabschnitte* und *ihre Bogen*, welche grade so wie Winkel und Bogen von einander abhängen, und auf

die der hier geführte Beweis sich ganz übertragen läßt. *Es verhalten sich also auch stets Kreisabschnitte in demselben Kreise oder in zwey gleichen Kreisen, wie ihre Bogen.*

Zu fatz III. Weil die Winkel am Mittelpunkte eines Kreises, (und so auch die Kreisabschnitte,) mit den Bogen worauf sie stehn (die sie umspannen) proportional sind, d. h. mit ihnen so zusammenhängen, daß beyde sich nach einerley Verhältniß ändern, und wenn die eine dieser Gröfsenarten zu oder abnimmt, die andre nach gleichem Verhältnisse zu oder abnimmt; so sind wir berechtigt die eine zum *Maafs* der andern zu brauchen. Wir wollen deshalb hinfür den Bogen AB, worauf ein Winkel am Mittelpunkte ACB (oder ein Kreisabschnitt) steht, für *das Maafs dieses Winkels* ACB (oder des Abschnitts) nehmen; wobey man sich aber wohl merken muß, daß, wenn man verschiedene Winkel (oder verschiedene Abschnitte) durch solche Bogen, als ihr Maafs, vergleichen will, die Bogen wie es der Lehrsatz voraussetzt, mit *gleichem* Halbmesser beschrieben seyn müssen.

[Daß hierbey von keinem *unmittelbaren* Messen, oder wie unser Verfasser sich nicht ganz richtig ausdrückt, von keinem absoluten Maafs, die Rede seyn kann, versteht sich von selbst. Das *unmittelbare Maafs* einer Gröfse muß mit ihr völlig gleichartig seyn, sich von ihr in nichts als in der Gröfse, und höchstens noch in der Form unterscheiden, daher Bogen sich nur durch Linien, und Winkel nur durch Winkel unmittelbar messen lassen. Wir müssen also zum unmittelbaren Messen für die Winkel einen Winkel zur Einheit

annehmen, und dazu haben wir schon den *rechten Winkel* erwählt, auf den wir alle übrige Winkel als auf ihr gemeinschaftliches Maafs, ihre Einheit, beziehen *. Da aber dieser Lehratz zeigt, daß Winkel ^{*I.I.Z.I.} untereinander stets dasselbe Verhältnifs als die dazu gehörigen Bogen haben, so läßt sich aus dem Verhältnifs der Bogen auf das der Winkel schliessen, folglich mittelst der Bogen erfahren, wie oft ein Winkel oder ein bestimmter Theil desselben in dem andern Winkel enthalten ist, daher man *mittelst* der Bogen einen Winkel mit dem rechten, als dem Maafse aller Winkel, vergleichen, folglich *mittelbar* messen kann *. Und ^{*Azo.A} von solchem *mittelbaren Maafs* ist hier nur die Rede.]

Nehmen wir den rechten Winkel zur Einheit, so muß jeder spitze Winkel durch eine Zahl die zwischen 0 und 1 fällt, also durch einen ächten Bruch, ein stumpfer Winkel durch einen Bruch der zwischen 1 und 2 fällt, ausgedrückt werden, welches etwas unbequem seyn würde. [Um die Brüche zu vermeiden nimmt man daher in der Ausübung nicht den rechten Winkel selbst, sondern den neunzigsten Theil desselben, den man einen *Grad* nennt, und dessen Sexagesimaltheile (die man nach der Ordnung durch *Minuten*, *Secunden*, *Tertien* bezeichnet) zum unmittelbaren Maafs aller Winkel oder zur *Winkleinheit*, und vergleicht, um die GröÙe eines Winkels in Graden, Minuten und Secunden zu erfahren, den Bogen, den ein Winkel umspannt, mit dem *neunzigsten Theil des Quadranten* und dessen Sexagesimaltheilen. Der *neunzigste Theil des Quadranten* (folglich der 360ste Theil der Kreislinie) wird gleichfalls

ein Grad genannt, und dient, sammt seinen Sexagesimaltheilen (Minuten, Secunden, Tertien), allen Kreisbogen zum gemeinschaftlichen Maafs oder zur Einheit, da denn jeder Winkel so viel Grad, Minuten und Secunden als sein Bogen enthält, jener *Winkelgrade*, dieser *Bogengrade* u. f., welches man gehörig unterscheiden muß. Hierauf beruht der Gebrauch aller Winkelmesser in der Ausübung.]

[Anmerkung 1. Den neunzigsten Theil des Quadranten oder einen Grad findet man durch Probiren ohne Schwierigkeit, indem man z. B. erst die Gröfse der Sehne, die sich genau drey-mal im Quadranten herumtragen läßt, dann die Sehne die sich im Drittel sechsmal, und endlich die, die sich im Sechstel des Drittels genau fünfmal umhertragen läßt, durch fortgesetztes Probiren auffucht. Denn da zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören, erhält man auf diese Art einen Bogen der 3. 6. 5 d. h. 90 mal im Quadranten enthalten ist, stellt also den neunzigsten Theil des Quadranten dar. Auf ähnliche Art läßt sich jeder andre willkühliche Theil der Kreislinie finden, der Kreis also nach Belieben eintheilen. Allein dieses Probiren ist ein *mechanisches Verfahren*, welches bloß für den vorgelegten einzelnen Fall den gesuchten Theil giebt; *kein Wissenschaftliches* welches aus allgemein gültigen Gründen abgeleitet, auf allgemeine Gültigkeit Anspruch machen könnte. Ein solches vermag, wie wir in

* 30. A. der Folge sehn werden *, die Elementargeometrie nicht aufzustellen. Für die Eintheilung der Winkelmesser ist indess jenes mechanische Verfahren völlig hinreichend, besonders seitdem neuere Künstler, (der *Herzog von Chaulnes*, *Bird* und *Ramsden*) diese Eintheilungsmethode durch scharfsinnige Erfindungen außerordentlich verfeinert und erleichtert haben.

Anmerkung 2. Ein Winkelmesser ist ein in Grade und kleinere Theile eingetheilter Kreis oder Kreisbogen. Bey denen die zum Messen und Auftragen der Winkel in Zeichnungen oder

auf dem Papier bestimmt sind (*Transporteurs*) ist der Mittelpunkt der Theilung durch eine Oefnung oder eine Spitze genau bestimmt. Jeden Winkel den man messen, oder an einer Linie auftragen will, legt man so, daß dessen Spitze in Mittelpunkte fällt. Dann ist er ein Winkel am Mittelpunkte des eingetheilten Kreises, faßt also so viel Winkelgrade, als auf dem Instrumente Bogengrade zwischen seinen Schenkeln liegen.

Bey den Winkelmessern die zum Messen auf dem Felde oder am Himmel bestimmt sind, (*Theodolite, Scheibeninstrumente, ganze Kreise, Quadranten etc.*), drehen sich genau im Mittelpunkte der Theilung ein oder zwey Lineale (*Albidaden*) mit Dioptern oder mit Fernröhren. Die Winkel der Gesichtslinien nach zwey Gegenständen, auf die man die Fernröhre richtet, werden folglich Winkel am Mittelpunkte dieser eingetheilten Kreise, und also durch die abgeschnittenen Bogen gemessen. Hierbey kömmt also alles, nächst der Güte der Eintheilung, darauf an, daß die Albidade oder das Fernrohr sich genau um den Mittelpunkt der Theilung (oder mit der Theilung concentrisch) drehn. Sonst sind die abgeschnittenen Bogen nicht das Maafs der Winkel, die dann *excentrisch* wären*.

d. U.] * 25. A.

[Zusatz IV. In zwey verschiedenen Kreisen, z. B. Fig. 47. den concentrischen EFD und KRG umspannen gleiche Winkel am Mittelpunkte ECD ähnliche Kreisbogen*, d. h. Bogen ED, KG, die sich auf einerley Art zum ganzen Umfange verhalten, nemlich wie der Winkel der sie umspannt zu vier rechten, und die daher eine gleiche Menge von Graden enthalten. Hierauf beruht die Messung der Kreisbogen durch Winkelmesser. Zieht man nemlich nach den Endpunkten eines Bogens DE, die Halbmesser, und legt einen Winkelmesser in der Ebne des Bogens so daß sein Mittelpunkt in den Mittelpunkt C fällt, so werden beyde Bogen concentrisch und die Schen-

kel CE, CD schneiden auf beyden gleich viel Grade ab; daher man die Gradmenge von DE, aus der in GK unmittelbar erieht.

Zuſatz V. *Ein Winkel am Mittelpunkte iſt recht, ſtumpf oder ſpitz je nachdem er auf einem Bogen ſteht, der dem Quadranten gleich, oder größer oder kleiner als der Quadrant iſt.*

Zwey Halbmesser welche einen Halbkreis umſpannen liegen in grader Linie, und die Schenkel eines erhab-
 *I. E. 16. *nen Winkels ACD * umſpannen einen Kreisbogen EFD, welcher größer als der Halbkreis iſt. — Ueberhaupt ſind ein Winkel oder mehrere Winkel zuſammen genommen, einem, zwey oder mehreren rechten Winkeln, oder einem ſtumpfen oder einen ſpitzen Winkel gleich, je nachdem ſie zu ihrem Maas einen Quadranten, einen Halbkreis, oder einen Bogen haben, der kleiner als ein Halbkreis aber größer als ein Quadrant, oder der kleiner als ein Quadrant iſt. d. U.]*

LEHRSATZ 23.

Jeder einem Kreiſe eingefchriebne Winkel (d. h. jeder Winkel am Umfange) hat zu ſeinem Maasſe den halben Bogen worauf er ſteht.

Fig. 69. [Wenn der eine Schenkel eines eingefchriebnen Winkels, AE, durch den Mittelpunkt des Kreiſes C geht, ſo ziehe man den Halbmesser CB. Denn entſteht ein gleichſchenkliges Dreyeck ACB, worin die Winkel A und B gleich ſind, und der äußere Winkel BCE = B + A * = 2 A, folglich $A = \frac{1}{2} BCE$ iſt. Nun iſt aber BCE ein Winkel am Mittelpunkte, der

* I. 30.

mit dem eingeschriebenen Winkel BAE über demselben Bogen BE steht, hat folglich diesen Bogen zu seinem Maafse. Also hat der Winkel A am Umfange, wovon ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht, den halben Bogen BE, worauf er steht, zu seinem Maafse *. ^{*21.Z.3.}

Geht kein Schenkel eines eingeschriebnen Winkels BAD durch den Mittelpunkt, so ziehe man durch die Spitze des Winkels den Durchmesser AE, welcher mit den Schenkeln des eingeschriebnen Winkels, AB, AD, zwey Winkel am Umfange BAE, DAE bildet, welche der Bedingung des ersten Falls entsprechen, folglich zu ihrem Maafs den halben Bogen haben, auf dem sie stehn.]

Liegt nun der Mittelpunkt, folglich AE, zwischen beyden Schenkeln des gegebenen Winkels BAD, so ist dieser Winkel der Summe jener beyden Winkel BAE, DAE, gleich, hat folglich zu seinem Maafse die Hälfte der Bogen BE + ED, d. h. die Hälfte des Bogens BD worauf er steht. — Liegt dagegen der Mittelpunkt, folglich auch AE, aufserhalb des Theils der Ebne den die beyden Schenkel AB, AD' umspannen, so ist der gegebne Winkel am Umfange BAD' dem Unterschiede jener Winkel BAE, D'AE gleich *, hat folglich zu seinem Maafs die Hälfte des Bogen D'E — BE, d. h. die Hälfte des Bogens BD' auf welchem er steht. ^{*E.127}

Also hat jeder in dem Kreis eingeschriebne Winkel, oder jeder Winkel am Umfang, zu seinem Maafse den halben Bogen, den er umspannt.

Zufatz I. *Alle Winkel in demselben Kreisabschnitt* * Fig. 70. *sind gleich, z. B. BAC, BDC, BEC etc.* Denn sie stehn * E. 7.

auf demselben Kreisbogen BOC, dessen Hälfte sie zu ihrem Maasse haben. [Eben so sind Winkel in Abschnitten gleicher Kreise, welche in beyden über gleiche Bogen oder Sehnen stehn, gleich. — Sind umgekehrt in einem Kreise, oder in zwey gleichen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich, so umspannen sie gleiche Bogen, und stehn in gleichen Kreisabschnitten.]

T. III. Dasselbe ist bey allen *ähnlichen Abschnitten verschiedener Kreise*, wie AEB, ADC der Fall, d. h. bey Abschnitten, deren Bogen gleich viel Grade enthalten*. Denn die Ergänzungen ihrer Bogen zum ganzen Umfange ANB, ANC enthalten alsdann auch gleich viel Grade, folglich auch die Winkel in den Abschnitten, E, D, welche durch die Hälfte dieser Bogen, auf die sie stehn, gemessen werden. Die Winkel in ähnlichen Abschnitten sind also immer gleich. Und *sind umgekehrt in verschiedenen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich, so sind die Bogen welche sie umspannen und die Abschnitte in welchen sie stehn ähnlich*, (d. h. enthalten gleich viel Grade.)

Fig. 71. Zusatz II. *Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter*, z. B. der Winkel BAD. Denn zieht man den Halbmesser CA, so erhält man zwey gleichschenklige Dreyecke BCA, ACD, worin die Winkel bey A den Winkeln B, D gleich sind, also auch ihre Summe $BAD = B + D$ ist. Nun sind die drey Winkel B, D, BAD, als Winkel in einem Dreyecke, zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich*; also ist ihre Hälfte BAD einem rechten Winkel gleich. — Auch erhellt

* I. 31.

der Satz unmittelbar daraus, daß BAD als Winkel im Umfang, der auf den Halbkreis steht, die Hälfte des Halbkreises, d. h. einen Quadranten zum Maafs hat; daher er nothwendig ein rechter ist *. *22 Z. 5.

[Folgerung. Sind folglich drey grade Linien AB, AC, AD, welche in einem Punkte A zusammenstossen gleich, und liegen zwey derselben, AB und AD, in gleicher Linie, so ist, wenn man BC, CD zieht, der Winkel BCD ein rechter. Denn dann läßt sich um A mit dem Halbmesser AB ein Kreis beschreiben, der durch die Punkte B, C, D geht *, worin BD Durchmesser, also *E. 2. § BCD ein Winkel im Halbkreise ist.

Halbirt man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreyecks BCD im Punkte A, und zieht AC, (oder zieht man diese Linie so, daß die Winkel B, BCA oder D, DCA gleich werden) so ist $AC = AB = AD$.

Errichtet man endlich auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks ABD, in ihrem Endpunkte ein Perpendikel CD, so durchschneidet diese den zweyten verlängerten Schenkel BA so, daß AD den Schenkeln AB, AC, und der Winkel bey D dem Winkel bey O gleich wird. Denn dann ist A der Mittelpunkt eines Halbkreises durch B, C, D.]

Zusatz III. Jeder Winkel BAC, der in einem Kreisabschnitt, grösser als der Halbkreis eingeschrieben ist, ist ein spitzer Winkel; denn er steht auf einem Bogen der kleiner als der Halbkreis ist, hat also zu seinem Maafs einen kleinern Bogen als den Quadranten *. — *22 Z. 5. Jeder Winkel BOC, in einem Kreisabschnitt der kleiner als der Halbkreis ist, ist dagegen ein stumpfer Winkel. Denn

ihn mißt die Hälfte eines Bogens, welcher größer als der Halbkreis ist.

Anmerkung. Diese Sätze über die Vergleichung der Winkel, welche in Kreisen eingeschrieben sind, mittelst der Bogen die sie umspannen, (und die folgenden Sätze welche sie vervollständigen) gehören zu den fruchtbarsten in der Geometrie. Unmittelbar auf den hier bewiesenen beruhen einige nette *Eigenschaften sich durchschneidender Kreise*, wovon ich die erstere aus *Clavius* Euklid, die übrigen aus *Gregor von St. Vincenz Opus Geometricum* entlehne.

Fig. 72. I. Wenn ein Kreis ABC durch den Mittelpunkt C eines andern Kreises geht, und man zieht in ihm den Durchmesser der durch C geht, CA , so schneidet der zweyte Kreis, und der Bogen in ihm, von allen graden Linien, die durch den Punkt A gehn, gleiche Stücke LM , MN ab. Denn zieht man CM , so ist AMC ein Win-

* Z. 2. kel im Halbkreis, mithin CM senkrecht auf AN *, und folglich
* 9. wird die Sehne LN des zweyten Kreises im Punkte M halbir *

T. III. 2. Auch wenn zwey gleiche Kreise sich schneiden, und man
Fig. 78. beschreibt um ihre gemeinschaftliche Sehne * BC als Durchmesser
20. einen Kreis, so wird jede grade Linie welche durch die Punkte B oder C geht, worin die Kreise sich schneiden, z. B. CM , von den drey Kreislinien halbir. Denn jede solche Linie bildet mit der Sehne BC einen Winkel BCM , welcher in beyden gleichen Kreisen ein Winkel am Umfange ist, und daher gleiche Bogen BF ,

* Z. 1. BM umspannt *. Also sind auch die Sehnen EF , BM gleich *,
* 7. und FBM ein gleichschenkl. Dreyeck. Zugleich ist BLC als

* Z. 2. Winkel im Halbkreise ein rechter *, folglich BL ein Perpendikel auf die Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreyecks, und deshalb $FL = LM$ *.

T. III. 3. Durchschneiden sich zwey Kreise in den Punkten I , L
Fig. 76. und man beschreibt um L einen dritten Kreis, der beyde durchschneidet, so liegen zwey der Durchschnittspunkte mit dem Punkte I in grader Linie. Denn zieht man HI , HK und LH , LK welche als Halbmesser des dritten Kreises gleich sind, so sind auch

die Winkel LKH LHK, gleich. Jener steht, als Winkel am Umfang, auf dem Bogen INL = IHL *, daher beyde Winkel die Hälfte dieser Bogen zu ihrem Maafs haben. Der Winkel am Umfang IHL umspannt den übrigen Theil des Umfangs. Beyde, LHK, LHI haben also den halben Umfang zu ihrem Maafs, sind also rechte Winkel *, und mithin liegen KH, IH in grader Linie *. * 7.
* 22. Z. 5.
* I. 4.

4. Wenn man über die Grundlinie BC eines Dreyecks ABC einen Kreis beschreibt, und dieser durchschneidet die Schenkel des Dreyecks, oder ihre Verlängerungen in den Punkten D, E, und man beschreibt ferner durch die Endpunkte eines der Schenkel, AB, und den Durchschnittspunkt des andern Schenkels mit der Kreislinie, E, einen zweyten Kreis, und eben so durch A, C, D, einen dritten Kreis; so entstehen dadurch ähnliche Kreisabschnitte über die Seiten des Dreyecks. T. III.
Fig. 77.

Denn zieht man BE, CD, so sind die Winkel BDC, BEC als Winkel am Umfange die über denselben Bogen BMC stehn gleich. Liegt folglich A innerhalb des Kreifes über BC, so sind die Abschnitte dieser Winkel in allen drey Kreifen ähnlich, folglich BEC, BEA, ADC ähnliche Kreisabschnitte. — Liegt A ausserhalb des Kreifes über BC, so sind auch die Nebenwinkel jener, d. h. die Winkel ADC, AEB gleich, umspannen folglich in beyden Kreifen Bogen AB, AC welche unter sich und mit der Ergänzung des Bogens BMC zum ganzen Kreife, d. h. mit dem Bogen BDEC ähnlich sind; daher auch in diesem Fall die Abschnitte über den drey Seiten des Dreyecks ähnlich sind. Fig. 77.

Liegt A auf der Kreislinie über BC, so fallen die beyden Durchschnittspunkte D, E in einen Berührungspunkt zusammen *, und man muß dann über jedem Schenkel des Dreyecks Kreife, welche den andern Schenkel berühren, beschreiben, um den folgenden Lehratz gemäfs ähnliche Kreisabschnitte über alle drey Seiten des Dreyecks zu erhalten. * 20. A.

5. Aus diesen Sätzen folgt umgekehrt, das wenn man über die drey Seiten eines Dreyecks ähnliche Kreisbogen beschreibt, je zwey derselben sich in einem der Schenkel des Dreyecks oder in deren

Verlängerung durchschneiden müssen. Mittelft desselben und des folgenden Lehrsatzes beweist *Gregor von St. Vincenz* in seinem großen Geometrischen Werke (Prop. II. bis 16, und 58 bis 64 de Circulo) eine Menge netter Eigenschaften vom Durchschnitt grader Linien, die durch die Spitze des Dreyecks *A* gehn, mit den Bogen der drey ähnlichen Kreisabschnitte, von deaen ich hier nur ein Paar anführe, deren Beweis keine Schwierigkeit hat, uns hier aber doch zu weit abführen würde.

6. Zieht man von dem Mittelpunkte des einen Kreisabschnitts *BDC* durch die Mittelpunkte der beyden andern grade Linien, so liegen die Durchschnitte dieser Linien mit den letztern Kreisbogen und die Spitze *A* des Dreyecks in grader Linie; und dasselbe ist der Fall mit den beyden Punkten worin die Tangente, die am Bogen des Kreisabschnitts *BEC* in den Punkten *B* und *C* gezogen werden, die beyden andern Kreisbogen durchschneiden.

7. Zieht man durch die Spitze *A* eine grade Linie, so sind die Stücke derselben, welche zwischen der Kreislinie *BECM* und den beyden andern Kreislinien liegen, allemal gleich.

8. Wenn ein Kreis, der um den Mittelpunkt des Abschnitts *BEC* beschrieben wird, den einen der beyden andern Kreise berührt oder schneidet, so berührt oder schneidet er auch den zweyten, und zwar schneidet er im letztern Fall von beyden ähnliche Bogen ab. Und noch ein Paar solche Sätze, die ich übergehn muß.

d. U.

LEHRSATZ 24.

Fig. 74.

1. Der Winkel *BIE*, den eine Tangente *IB* mit einer Sehne *IE* macht, welche die Tangente im Berührungspunkte durchschneidet, hat zu seinem Maaße die Hälfte des Bogens *INE* der von beyden Linien eingeschlossen wird.

[2. Umgekehrt muß jede grade Linie *IB*, welche durch den Endpunkt einer Sehne *IE* gegen diese Sehne

Sehne unter einem Winkel gezogen wird, den die Hälfte des von ihnen eingeschlossnen Bogens INE misst, den Kreis im Punkte I berühren.]

1. Zieht man nach dem Berührungspunkte I den Durchmesser DI , so ist erstens DIB ein rechter Winkel *, hat also als solcher zu seinem Maasse die Hälfte ^{* 12. S. 1.} eines Halbkreises *, also auch die Hälfte des Bogens ^{* 22. Z. 5.} DEI . Zweytens hat der Winkel DIE als ein Winkel am Umfang die Hälfte des Bogens DE zu seinem Maasse *. Folglich hat der Unterschied beyder Winkel * ^{23.} DIB und DIE , d. h. der Winkel DIE , zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE , welchen die Tangente IB und die Sehne IE umspannen. — Auch der Nebenwinkel desselben AIE hat daher zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens IME , welcher jenen Bogen zum ganzen Kreise ergänzt *.

[2. Ist dagegen IB so gezogen, daß der Winkel EIB die Hälfte des von beyden eingeschlossnen Bogens IE zu seinem Maasse hat, so sey ID der Durchmesser der durch den Punkt I geht. Zieht man die Sehne ED , so umspannen die Winkel D und DIE zusammengenommen den Halbkreis IED , haben also als Winkel am Umfange einen Quadranten zu ihrem Maasse *, und sind daher zusammengenommen ^{* 23.} einem rechten Winkel gleich. Werden aber, nach der Voraussetzung, die Winkel EIB und D von demselben Bogen ID gemessen, so sind sie gleich, und also sind auch die Winkel BIE , DIE zusammengenommen einem rechten Winkel gleich. Folglich ist

L

AB ein Perpendikel durch den Endpunkt des Durchmessers, also eine Tangente des Kreises im Punkte I *.]

[*Folgerung.* Der Winkel BIE zwischen einer berührenden Linie und einer Sehne die durch den Berührungspunkt geht, ist gleich den Winkeln am Umfang, welche mit ihnen denselben Bogen IE umspannen folglich den Winkeln in dem Kreisabschnitt, der mit der Tangente auf entgegengesetzter Seite der Sehne liegt. Denn alle diese Winkel werden von demselben Bogen gemessen. (Es gilt also auch hier von der Tangente, was von den Sehnen bewiesen ist.) Umgekehrt muß jede Linie IB, welche mit einer Sehne IE an ihrem Endpunkte einen Winkel macht, der den Winkeln im entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitt IME gleich ist, den Kreis im Punkte I berühren.]

Taf. III. [Zusatz I. Eine grade Linie EG, welche durch den Punkt I geht, worin zwey Kreise sich berühren, schneidet von beyden Kreisen ähnliche Bogen und ähnliche Kreisabschnitte ab.

Denn da beyde Kreise im Berührungspunkt eine gemeinschaftliche Tangente AB haben *, so bildet die grade Linie EG in beyden Kreisen mit der Tangente einen gleichen Winkel. Folglich müssen die Bogen IE, IG, deren Hälften diese Winkel unserm Lehrsatz zu folge messen, gleich viel Grade enthalten, oder gleiches Verhältniß zum ganzen Umfang haben, mithin ähnlich seyn *, und daher auch ähnliche Kreisabschnitte umspannen. Berühren die beyden Kreise sich innerlich, so ist GI ein Theil der Sehne IE, und

die ähnlichen Kreisbogen liegen auf einerley Seite der Linie EGI. Berühren sie sich dagegen *äußerlich*, so liegen GI, IE auf entgegengesetzten Seiten des Berührungspunktes, und eben so die ähnlichen Kreisbogen zu entgegengesetzten Seiten der durchschneidenden Linie GE.

In *gleichen Kreisen* welche sich berühren, werden von jeder graden Linie durch den Berührungspunkt, *gleiche Stücke* abgeschnitten *.

* 7.

Zusatz II. *Zieht man durch den Punkt I, worin zwey Kreise sich berühren grade Linien, und durch die beyden Punkte, worin sie einen jeden dieser Kreise nochmals durchschneiden, die Sehnen DE, FG; so sind diese Sehnen parallel.* Denn da beyde Linien in diesen Kreisen, nach Zusatz I. ähnliche Bogen IE, IG und ID, IF abschneiden, so sind die Winkel am Umfange, welche auf diesen Bogen stehn, D und F, auch E und G gleich *, mithin die Sehnen DE, FG parallel *, und die Dreyecke IDE, IFG gleichwinklig.

* 23. Z. I.
* 1. 25. A.

In *gleichen Kreisen* decken sich diese beyden Dreyecke *. In ihnen sind also die Sehnen DE, FG überdem noch gleich. Zieht man daher, wenn sich die Kreise *äußerlich* berühren, EF, DG, so sind auch diese Linien gleich, und DFG ist ein Parallelogramm. In *ungleichen Kreisen* ist, wenn IG kleiner als IE ist, auch FG kleiner als DE, und dann durchschneiden sich EF und DG.

* Z. I.

Zusatz III. *Haben umgekehrt zwey Kreise einen Punkt I gemein, und zwey grade Linien EG, DF durch-*

schneiden beyde im Punkte I so, das die Sehnen DE, FG durch die Durchschnittspunkte parallel sind; so berühren sich beyde Kreise im Punkte I. Denn man ziehe durch I am Kreise IDE die Tangente AB, so ist der Winkel DIA, dem

- * 24. f. Winkel am Umfange E *, mithin auch, wegen des Parallelismus der Sehnen DE und FG, dem Winkel G
 * 1. 25. A. gleich *. Ist daher, wie in Figur 75, IF ein Theil der Linie ID, so ist der Winkel FGI dem Winkel G gleich, d. h. dem Winkel in dem Kreisabschnitte, welcher mit IA auf entgegengesetzter Seite der Sehne IF
 * 24. f. liegt, und daher berührt IA den Kreis IFG*. — Liegt IF in der Verlängerung von ID, wie in Fig. 75 *, so sind FIB, DIA Scheitelwinkel, folglich ist auch FIB gleich G, und also auch in diesem Fall IB eine Tangente am Kreise IGF. — In beyden Fällen haben also die Kreise eine gemeinschaftliche Tangente AIB, daher
 * 16. f. 4. sie sich in beyden Fällen im Punkte I berühren *.

Zusatz IV. Wenn zwey gleiche Kreise sich im
 Taf. III. Punkte I durchschneiden, so ist ihr *krummliniger Winkel*
 F. 76. MIH d. h. der Winkel ihrer Tangenten im Berührungspunkte I *, dem Winkel gleich, welchen die Tangente IB, mit einer ihr gleichen Sehne ID des zweyten Kreises macht. Denn das Maafs des Winkels der beyden Tangenten IA, IB ist, weil IB zugleich eine Sehne des ersten Kreises ist, der halbe Bogen IMB. Das Maafs des Winkels BID ist eben so der halbe Bogen IHD. Die Bogen IMB, IHD sind aber als Bogen gleicher Kreise, die zu gleichen Sehnen IB, ID gehören, gleich *, also auch die Winkel DIB, BIA.]

* 7.

Anmerkung. Den ersten dieser Zusätze entlehne ich aus Pappus B. 4. S. 9, wo er mit unnöthiger Weitläufigkeit bewie-

fen wird; die beyden folgenden aus *Pappus* B. 7., wo sie das 7te
9te und 11te Lemma aus *Apollonius* Werk von den Berührungen
ausmachen, und den letzten Zusatz aus *Krafft* und *Vietas* Opp.
p. 382. d. U.

[LEHRSATZ 25.]

1. Der Winkel AOD , unter welchem zwey Sch-^{Fig. 794}
nen AB, DE eines Kreises sich durchschneiden, hat
zu seinem Maasse die halbe Summe der Bogen, welche
sine Schenkel umspannen $\frac{AD + BE}{2}$.

2

2. Der Winkel, unter welchem zwey verlängerte
Sehnen AO', BO' , oder eine verlängerte Sehne AO'
und eine Tangente GO sich durchschneiden, haben zu
ihrem Maasse den halben Unterschied der Bogen, wel-
che ihre Schenkel umspannen $\frac{AD' - BE'}{2}$ oder
 $\frac{AG - GB}{2}$.

2

3. Der Winkel $FO'G$ unter welchem zwey Tan-
genten eines Kreises $FO' GO'$ sich durchschneiden, hat
zu seinem Maasse die Ergänzung des Bogens, welchen
beyde Tangenten umspannen, zum Halbkreise, oder
Halbkr. — FG .

1. Durchschneiden sich die beyden Sehnen $AB,$
 DE selbst in einen Punkte O , so entsteht, wenn man
 BD zieht, ein Dreyeck OBD , worin der Winkel am
Durchschnitt AOD der äußere Winkel, mithin AOD
 $= B + D$ ist *. Dieser Winkel hat also zu seinem
Maasse die Summe des Maasses der Winkel B und $D,$
folglich die Bogen $\frac{AD + BE}{2}$ *.

1. 30

* 23.

2

2. Durchschneiden sich dagegen die Verlängerungen zweyer Sehnen, und man zieht BD , so entsteht Dreyeck $D'O'B$, worin der Winkel am Durchschnittpunkt O' ein innerer, und mithin $D'O'B = D'BA - D'$ ist. Dieser Winkel hat also zu seinem Maasse den halben Unterschied der Bogen AD' , BE' oder $\underline{AD' - BE'}$.

Dasselbe ist der Fall wenn die Tangente GO' und eine Sehne AB sich in einem andern Punkte als im Berührungspunkte durchschneiden. Denn auch dann entsteht, wenn man BG zieht, ein Dreyeck BGO' , worin der Winkel am Durchschnittpunkt ein innerer, und $O' = ABG - G$ ist, folglich zu seinem Maasse die Bogen $\underline{AG - GB}$ hat.

3. Durchschneiden sich endlich zwey Tangenten GO' , FO' , und man zieht nach den Berührungspunkten die Halbmesser CG , CF , so entsteht ein Viereck $CFO'G$, welches zwey rechte Winkel F , G hat, und worin der dritte Winkel C als ein Winkel am Mittelpunkte durch den Bogen FG , welchen beyde Tangenten umspannen, gemessen wird. Der vierte Winkel $FO'G$ hat folglich zu seinem Maasse den Halbkreis weniger diesen Bogen, den die Tangenten, als Schenkel, umspannen*.

Folgerung I. Unter Winkeln, welche auf demselben Kreisbogen nach der hohlen Seite des Bogens zu stehn, ist der Winkel, dessen Spitze im Umfange liegt, grösser als jeder dessen Spitze ausserhalb der Kreislinie fällt, dagegen kleiner als jeder Winkel dessen Spitze innerhalb der Kreislinie liegt.

Folgerung 2. Grade Linien welche von den Endpunkten gleicher Bogen eines Kreises AB , EF etc. durch die Endpunkte eines andern Bogens CD gezogen sind, und entweder alle im Kreise oder alle auſſer dem Kreise ſammentreffen, durchſchneiden ſich unter gleichen Winkeln O , Q etc. Denn ſie haben alle zu ihrem Maafſe im erſten Fall die Summe, im letztern den Unterſchied gleicher Bogen, AB , EF etc. und des Bogens CD .

Folgerung 3. Der Winkel O unter welchem zwey Tangenten ſich durchſchneiden, iſt das Doppelte des Winkels GKH , welchen die Linie zwiſchen den Berührungspunkten mit dem Durchmeſſer durch den Berührungspunkt K bildet. Denn GKH hat als Winkel am Umfange zu ſeinem Maafſe die Hälfte des Bogens HG , welcher (nach 3) den Winkel O mißt.

Zuſatz I. Zieht man durch den zweyten Endpunkt dieſes Durchmeſſers und durch den zweyten Berührungspunkt eine grade Linie HG , ſo durchſchneidet dieſe die Tangente KO in ihrer Verlängerung ſo daſſ die Winkel I und GKH , und die Linien OI , OG , OK , gleich ſind. Denn KGH iſt als Winkel im Halbkreiſe ein rechter *; alſo ſteht GI auf der Grundlinie eines gleichſchenklichen Dreyecks KGO in deren Endpunkt ſenkrecht, und durchſchneidet daher den gegenüberliegenden Schenkel im Punkt I , ſo daſſ $OI = OG = OK$ und $I = G$ iſt *.

Zuſatz II. Beſchreibt man um ein gegebenes Dreyeck ABC einen Kreis, ferner um eine der Seiten z. B. um BC mit gleichem Halbmefſer einen zweyten Kreis, und fällt dann von dem gegenüberſtehenden Winkelpunkte A ein Perpendikel auf BC , welches die

T. III.
F. 104.T. III.
F. 78.*

*23. Z. 2.

*23. Z. 2.
f. 1.Fig. 78.
u. 78*.

Kreise und diese Linie in den Punkten D, E, F durchschneidet; so stehn die graden Linien welche man aus den beyden andern Winkelpunkten B, C durch den Punkt D zieht, ebenfalls auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks senkrecht.

Denn weil die Kreise gleich sind, so gehören *erstens* zu der gemeinschaftlichen Sehne gleiche Bogen * 7. BDC, BFC *, und diese halbirt beyde die grade Linie durch die Mittelpunkte der Kreise, welche zugleich * 20. auf EC senkrecht steht *. Mit dieser Linie läuft das * 1. 21. Perpendikel DF parallel *, daher die Bogen zwischen * 13. Z. 2. beyden *, und also auch die Bogen BD, BF, und DC, CF gleich sind. *Zweytens* ist der Winkel BCH, dessen Spitze im Durchschnittspunkte beyder Kreise liegt, in beyden ein Winkel am Umfange, muß also in bey- * 23. Z. 1. den gleiche Bogen BD, BH umspannen *, so das also Bog. BD = Bog. BF = Bog. BH.

Nun hat der rechte Winkel bey E zu seinem Maasse die Hälfte der Bogen AC + BF, und der Winkel bey G die Hälfte der Bogen AC + BH *. (in F. 78* VC + BD = AC + BH). Beyde Winkel sind also gleich, da die Bogen BF, BH und mithin die Bogen, welche beyde Winkel messen gleich sind. Also ist G so gut wie E, und aus denselben Gründen auch I ein rechter Winkel.

Da aus einem Punkte auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist, so durchschneiden sich folglich die Perpendikel, welche aus den Mittelpunkten eines Dreyecks ABC auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, allemal in Einem Punkte D. Und zwar steht dieser Punkt D mit jedem der Punkte F, H, K,

(worin die Perpendikel, die aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, einen Kreis der um das Dreyeck beschrieben ist durchschneiden) von den Seiten des Dreyecks gleich weit ab, so dafs $DE = EF$, $DG = GH$ und $DI = IK$ ist; (wie daraus erhellt, weil die Dreyecke DBF , DBH , DCK gleichschenkelig* und BE , BG , CI Perpendikel auf ihre Grundlinien sind*. Eine artige Eigenschaft des Dreyecks, welche man mit der in Lehrsatz 10 Folgerung 2 vergleiche.

Anmerkung. Auf den ersten Theil dieses Lehrsatzes gründet sich eine Methode Scheibensinstrumente oder ganze Kreise zu prüfen, ob sie auch nicht an dem Fehler der Excentricität leiden*, und, gesetzt dies wäre der Fall, doch mit solchen fehlerhaften Instrumenten richtig zu messen. Dreht sich nemlich die Alhidade oder das Fernrohr nicht um den Mittelpunkt der Theilung, so sind die Winkel, welche abgeschnitten werden, keine Winkel am Mittelpunkte, sondern excentrische, wie O in Fig. 79. Folglich werden in solchen Instrumenten von den entgegengesetzt liegenden Endpunkten der Alhidade ungleiche Bogen abgeschnitten; und so oft das der Fall ist, leidet das Instrument am Fehler der Excentricität. Und dann werden, dem ersten Theil dieses Lehrsatzes zu folge, die Winkel durch die halbe Summe der beyden abgeschnittenen Bogen, die einander gegenüber liegen, gemessen.

Die beyden letzten Folgerungen und die beyden Zusätze entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* Satz 7, 50, 51 und 53 de Circulo, wo sie aber aus andern Gründen, und nicht so kurz bewiesen werden. d. U.

[LEHRSATZ 26.]

Die Spitzen aller gleichen Winkel, welche über Fig. 70. derselbe graden Linie BC stehn, liegen insgesammt in

einer Kreislinie, die durch die Endpunkte dieser graden Linie B, C geht.

- * 10. Man ziehe durch B, C und die Spitze A eines dieser Winkel eine Kreislinie *. Gesetzt nun, es fielen nicht alle Spitzen der andern Winkel in diese Kreislinie, sondern wie α oder β , so könnten der Winkel
- * Folg. α, β nach dem vorigen Lehrsatz * nicht dem Winkel A gleich seyn, sondern β wäre größer, α kleiner als A , gegen die Voraussetzung. Folglich sind alle solche Winkel in demselben Kreisabschnitt über der gegebenen Linie BC befindlich *, welchen zu bilden Aufg. 16 lehrt.
- * E. 7.

Folgerung 1. Ueber derselben graden Linie sind also auf einerley Seite nicht zwey verschiedene Kreisabschnitte möglich, welche denselben Winkel fassen, folglich nicht

* IV. E. 2. zwey verschiedene ähnliche Kreisabschnitte *; und ähnliche Abschnitte über gleichen Linien decken sich und sind gleich (Euklid III. 23. 24.)

- Folgerung 2.* Der Bogen des Kreisabschnitts über BC , welcher den Winkel A faßt, ist der geometrische Ort für die Spitze aller Dreyecke, die über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen dieser Grundlinie
- * I. E. 21. ein gleicher Winkel A gegenübersteht *. Oder er ist der geometrische Ort für die Aufgabe, aus zwey gegebenen Punkten B, C zwey grade Linien zu ziehn, die sich unter einem gegebenen Winkel A durchschneiden. Jeder Punkt im Kreisbogen BAC thut dieser Aufgabe genüge, und keiner der Punkte die auferhalb desselben
- * 25. f. liegen *.

Anmerkung. Diese letzte Folgerung ist im ersten Buch von Apollonius ebenen Oertern der zweyte Satz, und wird dort

nach der deutschen Uebersetzung folgendermassen ausgedrückt:
 „Wenn zwey grade Linien, die einen Winkel von gegebner
 Grösse einschliessen, durch zwey gegebne Punkte gehn, so liegt
 der Durchschnittspunkt dieser Linien auf einem der Lage nach
 gegebenen Kreisumfang, oder auch: so *berührt* ihr Durchschnitts-
 punkt die hohle Seite eines der Lage nach gegebenen Kreises“;
 in welchem letztern Ausdruck der Begriff des Berührens unricht-
 tig gebraucht wird. Uebrigens fehlt auch dieser wichtige Lehr-
 satz sammt den folgenden Zusätzen bey Le Gendre.

Zu f a t z I. *Wenn ein rechtwinkliges Dreyeck ABD* Fig. 71.
mit einem andern rechtwinkligen EBD eine gleiche Hypo-
tenuuse hat, die eine Kathete AB aber kleiner als die Kathete
EB des andern Dreyecks ist, so ist dagegen die zweyte Ka-
thete AD des erstern grösser als die Kathete ED des zweyten
Dreyecks; und umgekehrt. Denn legt man die Hypoten-
 usen aufeinander, so fallen die Spitzen, unserm Lehr-
 satz zu folge, in einen Halbkreis *, und die Katheten * 23 Z. 1.
 jedes dieser rechtwinkligen Dreyecke werden Seh-
 nen, deren Bogen sich zum Halbkreise ergänzen. Nun
 gehört zur kleinern Sehne der kleinere Bogen *, mit- * 8.
 hin die grössere Ergänzung zum Halbkreise, und also
 auch eine grössere Sehne der Ergänzung, d. i. eine
 grössere zweyte Kathete; und ist $AB < EB$ so ist noth-
 wendig $AD > ED$.

Zu f a t z II. Dasselbe gilt aus den nemlichen Fig. 70.
 Gründen, für alle Dreyecke, welche gleiche Grundlinie
 und gleiche Winkel an der Spitze haben, und man kann
 daher diesen Satz allgemein so ausdrücken: *sind in*
zwey Dreyecken ABC, DBC, eine Seite BC und der ihr ge-
genüberstehende Winkel A, D in beyden gleich, hingegen
ein Schenkel ungleich $AB < DB$, so ist der zweyte Schenkel

in dem Dreyecke gröfser, in welchem der erstere Schenkel der kleinere war, $AC > DC$; ein Satz, dem in der Anmerkung zu Lehrsatz 10 des ersten Buchs analog, statt dessen man sich gewöhnlich mit dem vorigen Satz, als Folgerung aus dem Pythagoreischen Lehrsatz begnügt. Auch der folgende interessante Satz fehlt in unsern Lehrbegriffen, obgleich er schon in einem Werke eines alten Griechen *Serenus de sectione cylindri*, Satz 46 und 47, vorkömmt.

T. III. Zusatz III. Ist *ADEB* ein beliebiger Kreisabschnitt, und *D* ein Punkt in der Mitte des Kreisbogens, so ist die Summe der beyden Schenkel jedes Winkels im Kreisabschnitt, z. B. des Winkels *AEB*, gleich der Sehne *AG*, welche durch Verlängerung des einen seiner Schenkel in dem Kreise entsteht, der um *D* als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser *DA*, beschrieben ist. Denn man verlängere *AD* bis *F*, und ziehe *FB*, *GB*, so entstehn dadurch zwey Dreyecke *FDB*, *GEB*, wovon das erstere gleichschenkelig ist*. Nun sind erstens die Winkel *ADB*, *AEB* als Winkel in demselben Kreisabschnitt*, folglich auch ihre Nebenwinkel *FDB*, *GEB* gleich. Zweytens sind die Winkel *F* und *G* gleich, als Winkel am Umfange des gröfsern Kreises, welche beyde über dem Bogen *AB* stehn. Mithin sind in den Dreyecken zwey Winkel des einen, denen des andern, also auch die dritten Winkel *DBF*, *EBG* untereinander gleich*. Nun aber sind in dem gleichschenkligen Dreyeck *FDB* die Winkel bey *F* und *B* gleich; folglich sind auch im Dreyeck *GEB* die Winkel bey *G* und *B*, mithin auch die Schenkel *EG*, *EB* gleich. Es ist also $AE + EB = AE + EG = AG$.

Folgerung 1. Unter allen Sehnen des größern Kreises, ist die, welche durch den Mittelpunkt D geht, d. h. der Durchmesser, die größte*. Die übrigen werden immer kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkte abstehn, oder je größer der Bogen FG, (mithin auch DE oder der Winkel DAE) wird*. Folglich ist die Summe der beyden Schenkel eines Winkels in einem Kreisabschnitt, bey dem Winkel, dessen Spitze in D liegt, die größte, und wird immer kleiner, je weiter die Spitze vom Punkte D ab, und je näher sie bey der Sehne AB liegt.

Unter allen Dreyecken über derselben Grundlinie und mit demselben Winkel an der Spitze, ist folglich im gleichschenkligen die Summe der beyden andern Seiten am größten. Auch ist das gleichschenklige Dreyeck auf einerley Seite der Linie AB nur auf eine Art, jedes der andern doppelt vorhanden.

Folgerung 2. Aus denselben Gründen, woraus wir bewiesen haben, das $AG = AE + EB$ ist, folgt das auch $BH = BE + EA$, folglich $AG = BH$ und $AE = EH$ ist. Mithin umspannen zwey solche verlängerte Schenkel einen Bogen und eine Sehne GH, welche dem Bogen und der Sehne AB gleich sind; je zwey folglich gleiche Bogen und gleiche Sehnen.

L E H R S A T Z 27.

I. In jedem Viereck, welches in einem Kreise Fig. 20. eingeschrieben ist, sind die gegenüberstehenden Winkel zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.

[2. Umgekehrt läßt sich um ein Viereck, worin die Summe der gegenüberstehenden Winkel zwey rechten gleich ist, allemal ein Kreis umschreiben.]

1. Ist das Viereck ABCD in einem Kreise eingeschrieben, so umspannen je zwey der gegenüberstehenden Winkel die ganze Kreislinie, haben also, als Winkel am Umfange, zusammengenommen die halbe

* 23. Kreislinie zu ihrem Maafs *, und betragen also zwey *22.Z.5. rechte Winkel *.

[2. Liefse sich umgekehrt um ein Viereck, dessen gegenüberstehende Winkel $A + C$ zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich sind, kein Kreis beschreiben, so würde der durch die Eckpunkte A,

* 10. B, D beschriebene Kreis * nicht durch den vierten Eckpunkt C gehn, sondern dieser müßte innerhalb oder außerhalb der Kreislinie fallen. Dann würde aber der Winkel C größer oder kleiner seyn, als ein Winkel G am Umfange, der mit ihm über dem Bogen DAB *25. f. 1. steht *, und da dann dieser letztere Winkel mit dem Winkel A zwey rechten gleich wäre, so müßte $A + C$ größer oder kleiner als zwey rechte Winkel seyn, welches der Voraussetzung widerspricht.]

[Folgerung 1. Hier hat man also die Bedingung unter der sich durch vier gegebne Punkte ein Kreis beschreiben läßt. Diese Bedingung wird hier durch die Winkel gegeben. In B. 3. Lehrsatz 18 wird sie durch Liniengrößen angedeutet.

Auch sieht man hieraus das sich kein schiefwinkliges Parallelogramm in einen Kreis einschreiben, oder ein Kreis

sich demselben umschreiben läßt. Dieses ist nur bey Rechtecken, oder bey einem Trapez oder Trapezoid möglich. *Um jedes Rechteck läßt sich aber ein Kreis beschreiben.*

Folgerung 2. Verlängert man eine der Seiten eines Vierecks, welches einem Kreise eingeschrieben ist, so ist der äußere Winkel EAD stets dem innern gegenüberstehenden C gleich.

Anmerkung. Laufen zwey Seiten eines Vierecks, welches dem Kreise eingeschrieben ist, parallel, so schneiden sie zwar gleiche Bogen ab *, daher auch die beyden andern Seiten, als Sehnen gleicher Bogen, gleich sind; deshalb braucht aber das Viereck kein Parallelogramm zu seyn. Denn aus dem Parallelismus zweyer, und die Gleichheit der beyden andern Seiten folgt nicht, daß die parallelen Seiten auch gleich, und die gleichen auch parallel seyn müßten. — Die Art ein Dreyeck einem gegebenen Kreise einzuschreiben oder zu umschreiben, und umgekehrt einen Kreis in ein gegebenes Dreyeck einzuschreiben, lehrt Aufg. 17 und 18. Von der Einschreibung der ordentlichen Vielecke in den Kreis, werden wir im fünften Buche handeln, auch in den beyden folgenden Büchern die Lehre vom Kreise noch beträchtlich erweitern.

[L E H R S A T Z 28.]

Wenn man auf der Sehne eines Kreisabschnitts T. III.
AEB ein Perpendikel ED errichtet, und nimmt auf Fig. 22.
der andern Seite des Perpendikels im Bogen einen Punkt G, und in der Sehne oder deren Verlängerung einen Punkt F, wovon jener von E, dieser von D, eben so weit als diese letztern Punkte selbst vom Punkte B abstehn; so sind G und F vom andern Endpunkte A

der Sehne gleich weit entfernt; oder wenn $EG = EB$ und $DF = DB$ ist, so ist immer $AG = AF$.

Ist das Perpendikel weniger als um den Halbmesser vom Punkte B entfernt, so liegt F in der Sehne, und G im Bogen des Kreisabchnitts. Ziehe EB, EF, GF, so ist, weil nach der Construction ED in der Mitte von FB senkrecht aufsteht, und die Bogen EB und EG gleich *7: I. 13. sind, $EB = EF = EG$ *, mithin der Winkel $B =$ * I. 12. EFB und $EFG = EGF$ *.

Nun aber ist ABEG ein im Kreise eingeschriebnes * 27. Viereck, folglich sind die Winkel $B + EGA = 2 R$ *, also auch $EFB + EGA = 2 R$. Als Nebenwinkel sind auch $EFB + EFA = 2 R$, folglich ist $EGA = EFA$, und zieht man von diesen gleichen Winkeln die gleichen $FGF = EFG$ ab, auch $AGF = AFG$. Folglich ist das Dreyeck AGF gleichschenkelig, und $AG = AF$.

Fig. 82*. 2. Ist BD größer als der Halbmesser, so fällt F in die Verlängerung der Sehne über A hinaus, und G' in dem Bogen, welcher den Bogen des Kreisabchnitts zum ganzen Kreise ergänzt. Zieht man EB, EF' und EG' so sind aus den nemlichen Gründen wie vorhin BEF' und F'EG' gleichschenkelige Dreyecke, mithin die Winkel an ihren Grundlinien gleich, $EF'G' = EG'F'$ und $EF'B = EBF'$. Ueberdem sind, als Winkel am Umfange, welche auf gleichen Bogen stehn, $EGA = EBF'$ mithin auch $EF'B = EGA$, und zieht man diese gleichen Winkel von den erstern gleichen ab, $EF'G' - EF'B = EG'F' - EGA$ das heißt $AF'G' = AG'F'$. Das Dreyeck AG'F' ist also auch in diesem Fall gleichschenkelig, und $AG' = AF'$.

Anmerk.

Anmerkung. Der erste Fall dieses eleganten Satzes ist das dritte Lemma in *Archimeds* Werk über die Kugel und den Cylinder. Auch war der Fall desselben, wenn ABC ein Halbkreis ist, dem Astronomen *Ptolemäus* zur Berechnung des Canons der Sehnen unentbehrlich. Den zweyten Fall füge ich hinzu. Auch folgenden nicht unbrauchbaren Lehrsatz, den ich eben so wenig in einem der benutzten Werke finde.

d. U

[L E H R S A T Z 29.]

Wenn eine grade Linie DE die Sehne eines Kreis- T. III.
abschnitts ABD unter einem Winkel AFD, welcher den Fig. 83.
Winkeln im Abschnitt gleich ist, durchschneidet, so steht der Durchmesser, welcher durch den Punkt A geht, auf der durchschneidenden Linie DE senkrecht, und die Durchschnittspunkte D, E sind vom Punkte A gleich weit entfernt.

Denn zieht man AD, DB, AE, EB, so ist der Voraussetzung gemäß der Winkel AFD gleich dem Winkel ADB, und zweyten auch, als äußerer Winkel im Dreyeck AEF, den Winkeln AEF + FAE. Folglich ist der Winkel ADB, d. h. ADF + FDB gleich AEF + FAE, und da FDB und FAE gleich sind, indem beyde auf dem Bogen EB stehn, so sind auch ADF, AEF gleich, also auch die Sehnen und die Bogen AE, AD; weshalb der Durchmesser AG die Linie DE halbirt und auf ihr senkrecht steht*.

*I.17.f.2

Folgerung. Der Durchmesser der durch den Punkt A geht, steht auch auf allen graden Linien, HG, KI senkrecht, welche die Verlängerung der Sehne unter einem Win-

kel, der dem Winkel des Abschnitts gleich ist, durchschneiden. Denn alle diese Linien laufen mit der Sehne DE *I. 25 f. 2 parallel *. Nur durchschneiden sie weiterhin nicht mehr den Kreis.

[L E H R S A T Z 30.]

T. III.
Fig. 84. Trägt man auf die Verlängerung einer Sehne AB, den Halbmesser des Kreises von B nach O auf, so schneiden die Sehne und der Durchmesser des Kreises, der verlängert durch O geht, von der Kreislinie zwey Bogen AD, BE' ab, wovon jener das Dreyfache dieses ist, oder $Bog. AD = 3. Bog. BE'$.

Denn zieht man die Halbmesser CB, CA, so sind die Dreyecke OBC und BCA gleichschenkelig, folglich * I. 12. sind die Winkel O, OCB, so auch A, B gleich *. Also sind als äußere Winkel $B = 2 O$ und $DCA = B + O = 3 O$. Mithin ist auch $DCA = 3 E'CB$, und * 22. also $Bog. AD = 3. Bog. BE' *$.

Zufatz I. Verlängert man die Schenkel des Winkels O, und schneidet auf dieselbe Art auf beyden Schenkeln mit dem Halbmesser OB abwechselnd Punkte E', F, G etc. ab, und zieht die Linien AE, EF, FG; so bilden je zwey derselben, die in demselben Punkte zusammenstoßen, ein gleichschenkliges Dreyeck, worin die Winkel an der Grundlinie gleich sind, $DCA = DEA$, $EAF = EFA$, $FEG = FGE$ etc. Mithin sind, als äußere Winkel, $EAF = DEA + O = DCA + O = 4 O$; $FEG = EFA + O = EAF + O = 5 O$ etc., so das die gleichen Linien, welche zwischen

den Schenkeln des Winkels O eingeschrieben sind, die Schenkel abwechselnd unter Winkeln durchschneiden, welche der Ordnung nach alle ganze Vielfache des Winkels O darstellen; ein elegantes Theorem, worauf *Newton* die Formel für die Sinus und Cofinus vielfacher Winkel gründet.

Anmerkung 1. Der Lehrsatz rührt von *Archimed* her, und ist sein gros Lemma von der Kugel und dem Cylinder; der ihn erweiternde Zusatz von *Newton*. Mitteltst desselben könnte man einen jeden gegebenen Winkel oder Kreisbogen in drey gleiche Theile theilen, wäre es nur möglich eine Sehne und einen Durchmesser so zu ziehn, daß sie der Bedingung des Lehrsatzes genüge thun, d. h. daß sie sich verlängert so durchschneiden, daß die Verlängerung der Sehne dem Halbmesser gleich ist. Allein bloß durch Hülfe der graden Linie und des Kreises läßt dieses sich nicht wissenschaftlich, sondern nur mechanisch, durch Probiren oder durch Instrumente bewerkstelligen *. Wie man auch die Sache angreift, so wird man durch jenes Problem wieder auf das zurückgeworfen, einen Winkel oder Bogen in drey gleiche Theile zu theilen. *22.Z.3.
A. 1.

Auf jene für die Elementargeometrie gleich unauflöslche Aufgabe, führen *Vieta* in seinem *Supplementum Geometriae* Satz 9, und *Newton* in seiner *Arithmetica Universalis* die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück, und ein Jesuit *Thomas Ceva* gründet darauf folgendes Instrument, welches dieses bewerkstelligen soll. Zwey Lineale, welche sich um den Punkt O drehen, sind durch vier andre Lineale AC , CD , CE , CB , welche sich insgesammt um ihre beyden Endpunkte drehen, und mit den Stücken OE , OB gleiche Länge haben, verbunden. Man öfnet das Instrument so daß ACD dem gegebenen Winkel gleich ist, so wird O der dritte Theil dieses Winkels seyn. (*Acta Erudit. A. 1695. p. 291*). Verbindet man mit diesen noch mehrere gleiche Lineale auf dieselbe Art, so erhält man ein Instrument, womit sich auch der vierte, der fünfte Theil

u. s. f. eines Winkels, Newtons Satz zu folge, finden läßt, dergleichen der *Marquis von Hospital* in seinem *Tractatus de sectionibus concis* I. 10. pr. 6. beschreibt. Diese Instrumente sind aber mehr ein Spielwerk als von wahrem Nutzen, indem man einen bestimmten Theil eines Winkels oder Bogens mit viel größerer Genauigkeit mittelst der Sehnen, entweder durch Probiren, oder aus den Sehmentafeln findet.

Zufatz II. Wenn durch den einen Endpunkt eines gegebenen Kreisbogens *AB* ein Durchmesser *BI*, und auf diesen senkrecht der Halbmesser *CD* gezogen ist, und dieser schneidet von einer Sehne *AF*; die durch den andern Endpunkt des Bogens geht, ein Stück *EF* dem Halbmesser des Kreises gleich ab; so ist der Bogen *FI* der dritte Theil des gegebenen Bogens *AB*, oder $Bog. AB = 3. Bog. FI.$

Man ziehe den Durchmesser *GH* parallel mit der

* 14. Sehne *AF*, so sind erstens die Bogen *AG*, *FH* gleich*; und zweytens sind auch die Stücke dieser Parallelen *CH*, *EF* gleich, indem *EF* nach der Voraussetzung dem Halbmesser gleich seyn soll. Zieht man daher *HF*, so

* I. 36. ist *CEFH* ein Parallelogramm*, und die Sehne *HF* läuft mit *CE* parallel, wird folglich, da *CI* auf *CD* senkrecht steht, gleichfalls vom Halbmesser *CI* senkrecht durchschnitten*, und daher der Bogen *HF* im

* 9. Punkte *I* halbirt*. Nun aber sind die Bogen *HI*, *BG* als Maafs gleicher Winkel gleich, und der Bogen *GA* = *HF* = 2 *HI*. Folglich ist $BG = \frac{1}{3} BA$ und also auch $Bog. AB = 3 Bog. FI$. Halbirt man daher noch

*Aufg. 5 den Bogen *GA* im Punkte *K**, so ist der Bogen *AB*, und mithin auch der Winkel der ihn umspannt, in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung 2. Also auch auf diese Art ließe sich ein gegebner Bogen AB oder ein gegebner Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen, wäre es nur möglich auf eine wissenschaftliche Art die Sehne AF so zu ziehn, dafs das abgesehne Stück derselben EF dem Halbmesser gleich sey; ein Problem worauf schon *Campanus von Novara*, der erste Commentator Euklids zur Zeit der Wiederherstellung der Wissenschaften, in einer Scholie zum vierten Buch Euklids, die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurückführt. Allein auch diese Aufgabe wirft uns, wir mögen sie in der Elementargeometrie angreifen, wie wir wollen, wieder auf die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück. Denn gesetzt das Gesuchte sey bewerkstelligt, und vom gegebenen Punkte A aus, sey eine Sehne AF durch einen gegebenen Halbmesser CD so gezogen, dafs EF dem Halbmesser gleich werde, so sind, wenn man CA und CF zieht, die Dreyecke ACF und CFE gleichschenkelig, mithin $A = F$, und $\angle FCE = FEC = R - \frac{1}{2} F^*$ und zugleich $FEC = A^* I. 31. \div ACD^*$. Folglich ist $R - \frac{1}{2} A = A \div ACD$ oder $R - \frac{1}{2} A = A + ACD$ oder $R - \frac{1}{2} A = A + ACD$ d. h. $ACB = \frac{2}{3} A$, oder $A = \frac{3}{2} ACB$. Um also AF gegen den Halbmesser CA unter dem gehörigen Winkel A zu ziehn, bey welchem AF von CD auf die verlangte Art geschnitten wird, müssen wir den Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen können.

Anmerkung 3. Der Grund warum die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie übersteigt, liegt darin, weil mittelst des Kreises und der graden Linie, die sich nur in zwey Punkten durchschneiden, keine Frage, in der es auf drey oder mehrere Durchschnittspunkte ankömmt, beantwortet werden kann, und dafs es bey der allgemeinen Aufgabe irgend einen Kreisbogen, oder irgend einen Winkel in drey gleiche Theile zu theilen, allemal auf drey oder mehrere Durchschnittspunkte ankömmt. Warum, das finde ich bey andern Geometern nur angedeutet, und noch nicht so ganz befriedigend ins Klare gesetzt, wie dieses vielleicht durch folgende Betrachtungen geschieht.

Gesetzt wir *halbiren* den Bogen $\overset{1}{2}$ HF und den Winkel HCF durch die grade Linie CI, so scheint es zwar auf dem ersten Anblick als werde nur der Bogen FH und der Winkel HCF durch jene Linie und ihren Durchschnitt I mit dem Kreise halbit. Allein was den *Kreisbogen* betrifft, so liegt zwischen den beyden Punkten H und F, als Endpunkten, nicht blofs der kleine Bogen HF, sondern es ist zwischen ihnen auch ein Bogen enthalten, der aus der ganzen Kreislinie P und dem Bogen HF zusammengesetzt ist, ferner der Bogen $2P + HF$, $3P + HF$ u. f. f. In dem wir also die Hälfte des Bogens suchen, der sich in den Punkten H und F endigt, und beym wissenschaftlichen Verfahren von dem, was uns gegeben ist, ausgehn, d. h. davon, daß H und F Endpunkte des Bogens sind, fragen wir nach sehr viel mehr, als es auf dem ersten Anblick scheint, und als der Frager sich mehrentheils selbst bewußt ist; nemlich nach der Hälfte aller jener Bogen, die sich in H und F endigen, d. h. HF, $P + HF$, $2P + HF$, $3P + HF$ etc. Diese Hälften sind $\frac{1}{2} HF$, $\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} HF$, $P + \frac{1}{2} HF$, $\frac{3}{2} P + \frac{1}{2} HF$ etc., oder da $\frac{1}{2} HF = HI = GB$ ist, HI, $\frac{1}{2} P + GB$, $P + HI$, $\frac{3}{2} P + GB$ etc. Alle diese halben Bogen liegen zwischen den Punkten H, I und H, B; zwischen jenen Punkten der erste, dritte, fünfte, etc., zwischen diesen der zweyte, vierte etc. Daher sind die beyden Punkte I und B die *halbirenden Punkte*, welche jene ganze Reihe von Bogen insgesamt in zwey gleiche Theile theilen; und beyde Punkte finden sich zugleich, auch wenn wir nur nach dem einen I fragen wollten, als Durchschnit der halbirenden graden Linie CI mit der Kreislinie. Uns selbst unbewußt erhalten wir also hier eine vollständige Antwort, welche in den zusammengesetzten Fällen, die Mathematiker der vorigen Jahrhunderte nicht wenig befremdet und überrascht hat.

Eben das ist bey der *Theilung eines unbestimmten Bogens HF in mehrere gleiche Theile* der Fall; d. h. bey der Theilung eines Bogens, den wir bloß dadurch denken, daß er zwischen den Punkten H und F liegt, und nicht etwa als einen bestimmten

Theil des Umfangs. Denn dann theilen wir durch ein wissenschaftliches Verfahren nie den kleinen Bogen HF allein, sondern immer zugleich alle Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen. Da wir davon ausgehn müßten, daß der zu theilende Bogen zwischen den Punkten H und F liegt, so paßt die Schlußfolge, vermittelt der wir ein solches wissenschaftliches Verfahren begründen, immer zugleich auf alle Bogen, die sich in diesen Punkten endigen, muß also immer eine Zahl von theilenden Punkten geben, durch welche die Theile aller der Bogen, die sich in den Punkten H und F endigen, *zugleich* bestimmt werden. Daß diese stets mit der Anzahl der gesuchten Theile übereinstimmt, nimmt man leicht wahr. So finden wir bey der wissenschaftlichen Halbierung eines unbestimmten Bogens zwey, und bey der Trisection drey verschiedene Punkte, zwischen welchen die Drittel jener ganzen Reihe von Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen, enthalten sind.

Nun aber finden drey, und noch viel weniger mehrere Durchschnittspunkte zwischen zwey Kreisen oder zwischen einem Kreise und einer graden Linie nicht statt. Deshalb übersteigt die Theilung unbestimmter Kreisbogen in drey, fünf und mehrere solche gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie, und sie läßt sich geometrisch nur durch Hülfe anderer krummer Linien bewerkstelligen. So zum Beyspiel werden wir mittelst der Kegelschnitte in den folgenden Büchern einen Bogen in drey gleiche Theile theilen.

Was die *Winkel* betrifft, so hat es mit ihnen völlig dieselbe Bewandnis. So gut wir erhabne oder hineingehende Winkel, welche größer als zwey rechte sind annehmen mußten *, können wir uns auch Winkel denken, die größer als vier rechte, größer als acht rechte, und so ferner sind. Denn aber liegen zwischen zwey Schenkeln HC, CF eine ganze Reihe von Winkeln, HCF, $4 R + HCF$, $8 R + HCF$ etc, und diese werden insgesamt durch wissenschaftliche Theilung zugleich getheilt, daher von der Theilung der unbestimmten Winkel dasselbe gilt, was wir hier von der Theilung der Kreisbogen bemerkt haben.

Ich rede hierbey mit Fleiß von der Theilung *unbestimmter Bogen und Winkel*, d. h. solcher Bogen die wir in Absicht ihres Verhältnisses zum ganzen Umfange, oder solcher Winkel die wir in ihrem Verhältniß zu vier rechten ganz unbestimmt, und nur durch das Merkmal denken, das H und F ihre Endpunkte seyn sollen. Denn nur von diesen gelten unsere Gründe; nicht von einzelnen Bogen oder Winkeln, die wir als bestimmte Theile der Kreislinie oder des rechten Winkels, also durch ein anderes Merkmal denken. Bey diesen kann es allerdings Methoden geben, sie in drey, oder fünf gleiche Theile etc. zu theilen, die aus ihrem Verhältniß zum rechten Winkel oder zum Umfang abgeleitet werden, dergleichen wir beym rechten Winkel schon haben kennen gelernt *, der sich ohne Schwierigkeit geometrisch in drey gleiche Theile theilen läßt.

der Ueberfetter.

A N N A N G.

A u f g a b e n

welche zu den beyden ersten Büchern
gehören.

[Bey jeder der folgenden Aufgaben wird zuerst die Construction angegeben, vermöge der das geforderte geleistet, und also die Aufgabe aufgelöst wird; und darauf bewiesen daß die Construction möglich ist, und daß man durch sie grade das findet, was man sucht. Beydes geschieht mehrentheils in besondern Absätzen, denen die Wörter *Auflösung*; *Beweis* vorzusetzen überflüssig gewesen wäre. Da diese Aufgaben in das System der Geometrie gehören, aus dem sie blos herausgehoben sind, so mußten sie synthetisch vorgetragen werden, und es würde Zweckwidrig gewesen seyn, der Auflösung eine Analysis voranzuschicken, obgleich dazu meist ein paar Worte hingereicht hätten. Le Genre übergeht die einfachsten, unmittelbar in den Principien gegründeten Constructionen theils ganz, (wie z. B. das Bilden und Uebertragen gleicher grader Linien) *, theils trägt er sie zu späth vor (z. B. die Construction der Dreyecke aus drey gegebenen Linien); und macht überdem den Beweis der ersten Aufgaben von Sätzen abhängig, die es gar nicht nothig gewesen wäre, dabey mit ins Spiel zu bringen, und die uns in logische Kreise verwickeln würden, wenn wir nicht dieser Unbequemlichkeit durch die Anmerkung zur ersten Aufgabe abgeholfen hatten. Aus beydem entstehn wahre Mängel in seinem System, die wir hier so viel als möglich zu verwickeln gesucht haben.

• Fo. 3.
α. β.

A U F G A B E I.

Fig. 86. *Eine gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.*

Um jeden der beyden Endpunkte A und B der gegebenen Linie, beschreibe man mit *gleichen* Halbmessern, von willkürlicher Länge (nur müssen sie grösser als die Hälfte von AB seyn) zwey Kreisbogen, ^{*E.11 β.} die sich in einem Punkte D schneiden *, und eben so, entweder mit demselben oder mit einem andern Halbmesser, um dieselben Endpunkte, zwey Kreisbogen, die sich in einem andern Punkte E schneiden. Zieht man durch beyde Durchschnittspunkte D, E eine grade ^{*Fo. 1.} Linie *, so behaupte ich, wird diese die gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile AC, CB zerschneiden.

Denn die Punkte D und E liegen jeder in zwey Kreislinien, welche um die Mittelpunkte A, B beschrieben sind, stehn also beyde gleich weit von den ^{*E.2. α.} Endpunkten der gegebenen Linie AB ab *. Mithin müssen sie in einer graden Linie liegen, welche auf ^{*I.17 f.1} AB in ihrer Mitte senkrecht steht *. Da nun durch zwey Punkte nur eine einzige grade Linie möglich ist, so muß DE selbst dieses Perpendikel seyn, also die gegebne Linie AB durch DE im Punkte C halbirt werden.

Anmerkung. Die Construction, mittelst welcher Le Gen-dre diese Aufgabe auflöst, dient eigentlich unmittelbar und zunächst über der gegebenen graden Linie AB zwey verschiedne gleichschenklige Dreyecke ABD, ABE zu bilden, wie wir das schon ^{*E.11. Z.} oben gelehrt haben *. Man könnte die Auflösung daher auch

so ausdrücken. Beschreibe über AB als Grundlinie zwey gleichschenklige Dreyecke, und verbinde ihre Spitzen durch die grade Linie DE, so muß diese die gegebne AB halbiren. Denn es entfehn alsdann zwey Dreyecke ADE, BDE, die sich decken, weil sie untereinander gleichseitig sind *. Mithin sind die Winkel bey D gleich, daher auch die Dreyecke ACD, DCB sich decken, und CD senkrecht auf AB, in der Mitte zwischen den Endpunkten A und B aufsteht. Diese Linie halbirt also den Winkel D, und die Linie AB, und ist zugleich ein Perpendikel auf die Linie AB, welches durch die bestimmten Punkte C in der Linie, D außerhalb der Linie AB geht. Und zwar ist das der Fall, die Dreyecke mögen beyde auf einer oder auf entgegengesetzter Seite der Linie AB liegen. Dieses Perpendikel thut also den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 (β) zugleich genüge, daher diese Aufgaben in das System nach I. 12 gehören.

d, U.

A U F G A B E 2.

Auf eine grade Linie, durch einen in ihr gegebenen Punkt A, eine grade Linie senkrecht zu ziehn;

oder an einem gegebenen Punkt A einer graden Linie BC einen rechten Winkel zu bilden. Fig. 87.

Man nehme auf der gegebenen Linie zwey Punkte B und C, welche vom gegebenen Punkte A gleich weit entfernt sind *, und beschreibe um diese Punkte mit gleichen Halbmessern, größer als AB, zwey Kreisbogen, die sich in irgend einem Punkte D schneiden *; so ist, wenn man AD zieht, dieses die gesuchte senkrechte Linie, und DAB ein rechter Winkel.

Denn da der Punkt D gleich weit von B und von C absteht, so liegt er in einer graden Linie, welche

auf BC in der Mitte zwischen B und C, folglich im Punkte A senkrecht aufstehet *. Die Linie AD ist daher das gefuchte Perpendikel, und DAB der verlangte rechte Winkel.

[*Andere Auflösungen.* Man nehme aufserhalb der gegebenen Linie einen beliebigen Punkt C, und beschreibe mit CA als Halbmesser um C einen Kreis; so durchschneidet dieser die gegebne Linie in A und einem zweyten Punkte B *. Zieht man von B aus den Durchmesser BE, und dann EA, so ist EAB ein Winkel im Halbkreise, also ein rechter *, also EA das gefuchte Perpendikel.

Oder man beschreibe über einen beliebigen Theil AB, der gegebenen Linie, ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, und nehme auf der Verlängerung von BC, $CE = CB = CA$. Zieht man EA, so ist EAB ein rechter Winkel * und EA das gefuchte Perpendikel.

Diese letztern Auflösungen sind besonders bequem, wenn das Perpendikel auf dem Endpunkt einer Linie, die sich nicht verlängern läßt, errichtet werden soll.

d. U.

A U F G A B E 3.

Fig. 88. *Von einem aufserhalb einer graden Linie gegebenen Punkte A, ein Perpendikel auf diese Linie zu fällen.*

Aus A als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreisbogen, der die gegebne Linie in zwey Punkten B und D durchschneide, [welches allemal geschehn muß, wenn man auf der andern Seite der graden Li-

nie BD einen Punkt E nimmt *, und den Kreisbogen * Gr. 8. mit AE als Halbmesser beschreibt *.] Sucht man dann *E.11.α. den Punkt C, der zwischen B und D in der Mitte liegt *, * A, 1. und zieht AC, so ist dieses das gesuchte Perpendikel.

Denn da sowohl A als auch C gleich weit von den Punkten B, D entfernt sind, so steht AC senkrecht auf BD, und zwar in der Mitte zwischen B und D *. *17.f.I

[*Eine andere Auflösung.* Um irgend einen Punkt B in der gegebenen Linie, beschreibe man mit dem Halbmesser BA einen Kreis, der jene Linie in F durchschneide, und um F mit FA als Halbmesser gleichfalls einen Kreis. Die grade Linie AE durch die Durchschnittspunkte beyder Kreise gezogen, ist das gesuchte Perpendikel *. * 20.

Zu f a t z. Auf eine ähnliche Art läßt sich ein Punkt Fig. 89. finden, der in der Verlängerung einer graden Linie AB liegt, die zu kurz ist, als daß man sie mittelst eines Lineals mit Sicherheit verlängern könnte. Man beschreibe um A und B mit gleichen Halbmessern Kreisbogen, die sich in C, D schneiden, und aus diesen Punkten mit einem hinlänglich grossen Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkte E schneiden, so ist E der gesuchte Punkt. Denn da sich alsdann sowohl die Dreyecke ABC, ABD, als auch $\angle BEC$, $\angle BED$ decken, so sind die Winkel CBA, CBE beyde Hälften des Winkels CBD, mithin gleich. Es fallen daher BA, BE in eine grade Linie zusammen, und E liegt in der Verlängerung von BA.

d. U.

A U F G A B E 4.

Fig. 90. 1. An einem Punkte A der graden Linie AB einen Winkel zu bilden, welcher einem gegebenen Winkel K gleich ist.

[2. Durch einen Punkt R auſſerhalb AB , nach dieſer Linie eine grade Linie ſo zu ziehn, daſs ſie die AB unter einem gegebenen Winkel K durchſchneide.]

1. Beſchreibe um den Scheitelpunkt K mit einem willkührlichen Halbmesser einen Kreisbogen, der die beyden Schenkel des Winkels in I und L durchſchneide. Mit demſelben Halbmesser beſchreibe um A als Mittelpunktpunkt einen Kreisbogen BO ; und dann auch mit der Sehne IL , als Halbmesser, um B einen Kreisbogen, der jenen in irgend einem Punkte D durchſchneiden muſs *. Zieht man AD , ſo iſt DAB der gefuchte Winkel, dem gegebenen Winkel K gleich.

Denn da die beyden Kreisbogen IL , BD zu gleichen Halbmessern und gleichen Sehnen gehören, ſo
* 7. ſind ſie gleich *, alſo auch die Winkel BAD , IKL *.
[Dieſes erhellt auch unabhängig von dem angeführten Satze des zweyten Buchs. Durch die Conſtruction entſtehn nemlich zwey gleichſchenkliche Dreyecke ABD , KIL , welche untereinander gleichſeitig ſind,
* 1. 11. ſoſglich ſich decken *, daher der Winkel A dem gegebenen Winkel K gleich wird.]

[Eine andere Auflöſung. Nimm auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels K einen Punkt M , und mache AP gleich KM , errichte in P und M Perpendikel

auf diese Linien*, nimm $MN = PQ$ und ziehe AQ , *Aufg. 2
so ist PAQ der gefuchte Winkel*.] *I.6. f.1.

[2. Um durch einen gegebenen Punkt R , außershalb der Linie AB , eine grade Linie nach AB unter einem gegebenen Winkel K zu ziehn, bilde man an einem beliebigen Punkt A dieser Linie, einen Winkel $BAD = K$ und ziehe mit AD , durch den gegebenen Punkt R , parallel RS , so ist der Winkel $RSA = DAB = K$ * und RS die gefuchte Linie.] *I.25.A.

A U F G A B E 5.

Einen gegebenen Kreisbogen oder einen gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen. Fig. 91.

1. Um den gegebenen Kreisbogen AB in zwey gleiche Theile zu theilen, beschreibe man mit gleichen Halbmessern um A und um B Kreisbogen, welche sich in einem Punkte D durchschneiden*. Zieht man durch diesen Punkt und den Mittelpunkt C des Kreises, wozu der gegebne Bogen gehört, die grade Linie CD , so zerschneidet diese den Bogen in zwey gleiche Theile. *E.11.β.

Denn da die Punkte C und D beyde gleich weit von den Endpunkten der Sehne AB entfernt sind, so steht die grade Linie CD auf der Sehne im ihrer Mitte senkrecht*, und theilt also den Bogen AB in zwey gleiche Theile*. *I.17. f.1.

2. Soll ein gegebner Winkel ACB in zwey gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man um seinen Scheitelpunkt einen Kreisbogen AB und halbire ihn auf die eben gezeigte Art, so wird CD auch jenen * 9.

- 9. Winkel halbiren *. [Eine andre Auflösung ist in der Anmerkung zur ersten Aufgabe enthalten.]

Zufatz I. Um einen Kreisbogen oder einen Winkel in vier, in acht, in sechzehn gleiche Theile u. s. f. zu theilen. braucht man mit diesem Halbiren nur fortzufahren. [Ueber die Theilung eines Winkels oder eines Bogens in irgend eine andere Anzahl von gleichen Theilen, z. B. in 3 oder 5 gleiche Theile, siehe Lehrsatz 30. Anmerkung.]

[Zufatz II. Da uns nichts hindert dieses Halbiren, wenigstens im Gedanken, so weit fortzusetzen als man will, so kann man durch dasselbe allemal auf einen Theil kommen, welcher in einer gegebenen Linie A nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als eine jede gegebne Linie B ist; und eben so auf einen Bogentheil, welcher in einem gegebenen Kreisbogen nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als ein jeder gegebner Bogen ist.

d. U.

A U F G A B E 6.

Fig. 92. *Durch einen Punkt A, der auferhalb einer graden Linie BC gegeben ist, mit dieser graden Linie eine Parallellinie zu ziehn.*

Man beschreibe um A mit einem hinlänglich grossen Halbmesser einen Kreisbogen ED, welcher die gegebne Linie in E durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe man um E als Mittelpunkt den Kreisbogen

bogen AF, nehme ED gleich AF, und ziehe AD, so ist dieses die gesuchte Parallellinie.

Denn wenn man die grade Linie AE zieht, so sieht man, das vermöge der Construction in der vorigen Aufgabe die Wechswinkel AEF, EAD gleich, folglich die Linien BC, AD parallel sind *.

*I.25.A.

[Zweyte Auflöfung. Man ziehe durch den gegebenen Punkt A und irgend einen Punkt E der gegebenen Linie eine grade Linie EA, und bilde am Punkte A dieser Linie eine WinkelHAE, welcher dem äußern Winkel bey E, gleich ist *, so sind GH, BC, wegen der * A. 4. Gleichheit der äußern Winkel parallel *. Um auf die leichteste mechanische Art diese Gleichheit äußerer Winkel zu bewerkstelligen, dient das *deutsche Parallellineal* mit seinem materiellen unveränderlichen Winkel, den man längs der Linie AE verschiebt.

Dritte Auflöfung. Nimm in BC einen beliebigen Punkt F, und von diesem aus ein Stück FC gleich FA, beschreibe um C und A mit dieser Linie als Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkt D durchschneiden, und ziehe AD, so ist dieses die gesuchte Parallellinie. Denn in den sich deckenden gleichschenkligen Dreyecken AFC, ADC sind alle Winkel an der Grundlinie, mithin die Wechswinkel für FC, AD gleich.

Vierte Auflöfung. Beschreibe um einen willkürlichen Mittelpunkt eine Kreislinie, die durch den gegebenen Punkt A gehe und die gegebne Linie in den

N

T. III.
Fig. 85.

Punkten G und H schneide; nimm den Bogen HF gleich GA und ziehe die Sehne AF, so ist AF mit der gegebenen Linie GH parallel *.]

A U F G A B E 7.

Fig. 93. *Aus zwey gegebenen Winkeln A und B eines Dreyecks, den dritten Winkel zu finden.*

Man ziehe eine grade Linie DF in unbestimmter Länge, und bilde an einem Punkte E dieser Linie einen Winkel $DEG = A$ und $FEH = B$ *, so ist GEH der gefuchte Winkel, weil er mit den beyden übrigen zusammengenommen zwey rechte Winkel bildet *. [So findet man also geometrisch, d. i. durch Construction, die Ergänzung zweyer Winkel zu zwey rechten, mithin zu zwey gegebenen Winkeln des Dreyecks den dritten.]

A U F G A B E 8.

Fig. 94. *Wenn zwey Seiten A, B eines Dreyecks und der von ihnen eingeschlossene Winkel C gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

An irgend einem Punkte D einer unbestimmt gezogenen graden Linie DE, bilde man einen Winkel EDH, der dem gegebenen Winkel C gleich ist *. Auf dessen Schenkel nimm $DG = A$, $DH = B$ * und ziehe GH, so ist DGH das gefuchte Dreyeck *.

A U F G A B E 9.

Fig. 95. *Wenn eine Seite B und zwey Winkeln C und C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

Liegen die gegebenen Winkel nicht beyde an der gegebenen Seite an, so suche man nach Aufgabe 7. den zweyten anliegenden Winkel. Dann nehme man auf einer unbestimmt gezogenen graden Linie ein Stück DE der gegebenen Seite gleich, und bilde an den Punkten D, E zwey Winkel, den anliegenden Winkeln gleich *, ^{A. 4.} so ist, wenn ihre Schenkel sich in einem Punkte H durchschneiden, DEH das gesuchte Dreyeck.

[Die Schenkel durchschneiden sich aber nur dann, wenn die Summe der beyden gegebenen Winkel weniger als zwey rechte Winkel beträgt *; daher dieses die ^{I. 23. 24.} Bedingung der Möglichkeit der Aufgabe ist. Wäre die Summe größer als zwey rechte Winkel, so durchschneidet sich die entgegengesetzt liegende Verlängerung der beyden Schenkel *, und dann entstände ein ^{I. 24.} Dreyeck, worin die beyden Nebenwinkel der gegebenen Winkel, an der gegebenen Seite anliegen.]

Anmerkung. Hier folgt bey Le Gendre die Aufgabe, aus drey gegebenen graden Linien A, B, C ein Dreyeck zu beschreiben, von welcher wir an einer schicklichen Stelle * schon umständlich ^{E. II. Z} gehandelt haben.

A U F G A B E 10.

Wenn zwey Seiten A und B und der der Seite Fig. 96. B gegenüberstehende Winkel C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.

Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels C, oder eines Winkels D welcher ihm gleich ist, $DE = A$, und beschreibe mit B als Halb-

messer um den Punkt E einen Kreisbogen. Wenn dieser den andern Schenkel in einem Punkte F schneidet, so ist DEF das gesuchte Dreyeck.

- Dieses Schneiden kann nur dann erfolgen, wenn die Linie B gröfser als der senkrechte Abstand des
- *I. 16. 1. Punkts E von dem andern Schenkel DF ist *, welches mithin die allgemeine *Bedingung* der Möglichkeit für diese Aufgabe abgiebt, die ohnedem unmöglich wird. Geschiehet indess auch dieser Bedingung genüge, so muß, im Fall C, folglich auch D, ein *rechter* oder ein
 - *I. 16. 3. *stumpfer Winkel* ist, überdem $B > A$ seyn*, wie es
 - I. 14. auch die Natur des Dreyecks mit sich bringt*; sonst findet auch unter der erstern Bedingung kein Schneiden des Schenkels DF statt.

Fig. 97. Ist hingegen C, folglich auch D ein *spitzer Winkel*, so mag die Seite B, welche diesem Winkel gegenübersteht, gröfser oder kleiner als A seyn, immer wird, wenn der erstern Bedingung genüge geschieht, der Schenkel DF vom Kreisbogen, der mit B als Halbmesser um den Punkt E beschrieben wird, durchschnit-

ten, nur dafs, wenn die gegenüberstehende Seite B kleiner als

*I. 16. 2. u. Z. 2. die anliegende Aoder ED ist, der um E beschriebene Kreisbogen diesen Schenkel in zwey Punkten F und G, die

Fig. 98. zu einerley Seite des Scheitels D liegen*, durchschneidet, in welchem Fall wir zwey Dreyecke DEF, DEG bekommen, welche beyde gleichmäfsig der Aufgabe genüge thun.

[Wenn also ein Dreyeck durch zwey Seiten und einen der gegenüberstehenden Winkel bestimmt wird, so ist diese Bestimmung im letzten Fall *zweydeutig*.

Diese Zweydeutigkeit aber wird gehoben, wenn man zugleich anzeigt, ob das spitzwinklige oder das stumpfwinklige Dreyeck gemeint ist *.] • I. 20.

A U F G A B E II.

Wenn ein Winkel C und zwey ihn einschliessen- Fig. 99.
de Seiten A und B eines Parallelogramms gegeben
sind, das Parallelogramm zu beschreiben.

Man nehme eine grade Linie DE gleich A , bilde am Punkte D einen Winkel EDF gleich dem gegebenen Winkel C , nehme auf dessen zweytem Schenkel das Stück DF gleich B , und beschreibe um den Punkt E mit dem Halbmesser $DE = A$ zwey Kreisbogen, die sich in einem Punkte G durchschneiden werden, weil die Summe ihrer Halbmesser größer, und der Unterschied ihrer Halbmesser kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte EF ist *. Zieht man dann FG , EG , so ist $DEGF$ das gefuchte Parallelogramm. • I. 8. u.
II. E. 11.

Denn vermöge der Construction sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, daher die vierseitige Figur ein Parallelogramm ist *; und zugleich • I. 34.
ist es aus den gegebenen Stücken beschrieben.

Zusatz. Ist der gegebene Winkel spitz oder stumpf, so wird die Figur, wenn die gegebenen Seiten gleich sind, ein *Rhombus* *, wenn sie ungleich sind, ein *Rhomboides*. Ist dagegen der gegebene Winkel ein rechter, so wird die Figur ein *Rechteck*, das, im Fall auch • I. E. 19.

die Seiten gleich sind, ein *Quadrat* wird; woraus also die Construction und die Möglichkeit dieser Arten von Vierecken erhellt.

A U F G A B E 12.

Taf. III.
F. 100.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises, oder eines gegebenen Kreisbogens zu finden.

Man nehme in der Kreislinie oder im Kreisbogen willkürlich drey Punkte A, B, C, verbinde sie durch die graden Linien AB, BC, welche folglich Sehnen des gegebenen Kreises oder Bogens seyn müssen, halbire diese Sehnen, und errichte auf ihrer Mitte die Perpendikel DE, FG *, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen. Dieser Punkt O ist der gesuchte

* A. 1. 2. 10. Mittelpunkt *.

Zusatz I. Mitteltst derselben Construction läßt sich

- 1) ein Kreis bilden, der durch drey gegebene Punkte A, B, C, oder durch zwey gegebene Punkte A, B geht, [welches letztere eine unbestimmte Aufgabe ist, die unendlich viel Auflösungen zuläßt, indem jeder Punkt im Perpendikel DE der Mittelpunkt eines solchen Kreises, der durch die Punkte A und B geht, seyn kann *]
- 2) Wenn ein Kreisbogen gegeben ist, der ganze Kreis, wozu er gehört, vollenden; und
- 3) ein Kreis einem gegebenen Dreyeck ABC umschreiben, d. h. so bilden, das die Kreislinie durch die drey

Winkelpunkte des gegebenen Dreyecks geht *. [Ist in * E. 9. dieser letztern Aufgabe das gegebne Dreyeck bey B *rechtwinklig*, so ist ABC ein Halbkreis *, und folglich *23.Z.2. liegt dann der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises *in der Hypotenuse* AC. Ist das Dreyeck bey B *stumpfwinklig*, so steht es in einem Kreisabschnitt, der kleiner als der Halbkreis ist *, und so fällt alsdann der *23.Z.3. Mittelpunkt O *ausserhalb des Dreyecks*. Hat endlich das Dreyeck lauter spitze Winkel, so steht jeder die- E. 107. ser Winkel in einem Kreisabschnitt, der grösser als der Halbkreis ist *, und der folglich den Mittelpunkt um- *23.Z.3. schliesst. Der Mittelpunkt liegt dann also in dem Theil, der allen drey Kreisabschnitten gemein ist, d. i. *im Dreyeck ABC.*]

[Z u s a t z II. Liegen die drey gegebenen Punkte F. 101. A, B, C, durch die ein Kreis gehn soll, so, das die Perpendikel DE, FG sich in einer zu weiten Entfernung schneiden, als das man den Halbmesser bequem fassen könnte, so kann man durch folgende *Methoden noch mehrere Punkte in der Kreislinie, welche durch A, B, und C geht, einzeln finden.* Verbinde die drey gegebenen Punkte durch grade Linien, ziehe durch einen derselben C, unter beliebigen Winkeln mit CB, grade Linien CD, CE etc., und unter denselben Winkeln mit AB, nach derselben Seite zu, grade Linien durch den Punkt A *, so liegen die Durchschnittspunkte D, * A. 4. E etc. in der Kreislinie durch A, B, C. Denn die Winkel B, D, E sind insgesamt gleich, und sie umspannen alle die Sehne AC, daher, ihre Spitzen in dem Kreisbogen durch A, B, C liegen *. -- Oder man * 26.

- ziehe durch C, unter Winkeln gleich BAC, dem kleinsten der beyden die an AB anliegen, mehrere grade Linien, CG, CH u. f., und schneide mit CB als Halbmesser, von A, G etc. aus, Punkte G, H etc. unter spitzen Winkeln ab, so liegen diese Punkte in der Kreislinie, die durch A, B, C geht. Denn da die Winkel BAC, ACG, GCH etc. in dem gesuchten Kreise gleiche Winkel am Umfange sind; so umfassen
- * 7. sie gleiche Sehnen CB, AG, GH *, und da überdem die Sehnen CG, CH näher nach dem Mittelpunkte zu
 - * 8. liegen, müssen sie zunehmen *, folglich AGC, GHC
 - * 1. 14. kleine stumpfe Winkel seyn *, daher G, H etc. nothwendig in der Kreislinie durch A, B, C liegen.]

[A U F G A B E 13.]

Um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene grade Linie oder einen gegebenen Kreis berührt.

- F. 102. 1. Füle vom Mittelpunt C ein Perpendikel auf die gegebene Linie HI, so berührt der Kreis, welcher mit diesem Perpendikel beschrieben ist, die gegebene
- * 12. ne Linie *.
- Taf. II. 2. Ziehe durch beyde Mittelpunkte eine grade
Fig. 49. Linie AB, so durchschneidet diese den gegebenen Kreis in zwey Punkten I, H und Kreise mit AI oder AH
- * 16. als Halbmesser beschrieben, berühren den erstern *.
- F. 102. Zusatz I. *Ist blos der Mittelpunkt C des Kreises gegeben, der die Linie AB berührt, und man sucht dessen*

Halbmesser und den Berührungspunkt, so ziehe man nach einem beliebigen Punkt A in der gegebenen Linie die grade Linie CA, halbire sie in O, und beschreibe mit OA um O einen Bogen. Wo dieser die AB durchschneidet, da ist der gesuchte Berührungspunkt B, und zieht man CB, so ist dieses der gesuchte Halbmesser. Denn $\angle ABC$ ist als Winkel im Halbkreis ein rechter *, ^{* 23. Z. 2.} mithin BA ein Perpendikel auf dem Halbmesser CB in dessen Endpunkte, also eine Tangente *. ^{* 12.}

Zusatz II. Sucht man einen Kreis der die grade Linie AD im Punkte D berührt, und zugleich durch einen gegebenen Punkt E geht, so ziehe man DE, halbire diese Linie im Punkte F, und errichte auf ihr in diesem Punkte, so auch auf AD im Punkte D, Perpendikel. Wo beyde Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises *. ^{* 10.}

Grade so findet man den Mittelpunkt eines Kreises, der durch einen gegebenen Punkt geht, und einen andern Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

Zusatz III. Um einen Kreis zu finden der zwey ge- ^{Taf. II.}
gebene Kreise berührt, beschreibe man mit einem will- ^{Fig. 48.}
kürlichen Halbmesser um den Mittelpunkt A des einen Kreises einen Kreisbogen, und um den Mittelpunkt B des zweyten der gegebenen Kreise ebenfalls einen Bogen, mit einem Halbmesser, der vom erstern um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebenen Kreise verschieden ist. Wo beyde Bogen sich schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises. Denn die graden Linien welche von

diesem Durchschnittspunkte, die eine durch A, die andre durch B bis an die Kreislinien gezogen werden, sind alsdann gleich lang, und ein Kreis mit diesen Linien als Halbmesser um den gefundenen Durchschnittspunkt beschrieben, berührt sowohl den einen als den andern Kreis, weil die Punkte, worin er mit ihnen zusammen trifft, in der graden Linie durch die Mittelpunkte liegen *.

*Soll der Mittelpunkt des berührenden Kreises mit den Mittelpunkten A, B, der beyden andern in grader Linie liegen, so ziehe man durch die Mittelpunkte A, B der gegebenen Kreise eine grade Linie, welche die Kreise in den Punkten D, I, F, H schneide. In je zwey dieser Punkte aus verschiedenen Kreislinien kann die Berührung geschehn. Den Abstand dieser beyden Punkte halbire man, so erhält man den Mittelpunkt des dritten Kreises, der die gegebenen in diesen Punkten berührt *.*

Soll der dritte Kreis den Kreis um A in einem andern gegebenen Punkte berühren, so ziehe durch diesen Punkt einen Durchmesser, und beschreibe um B, mit einem Halbmesser der vom Halbmesser des Kreises um A, um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebenen Kreise verschieden ist, einen Kreisbogen; so ist der Durchschnitt dieses Bogens mit jenem Durchmesser der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises.

A U F G A B E 14.

T. III. *Durch einen gegebenen Punkt A eine Tangente*
 F. 102. *an einen gegebenen Kreis zu ziehn,*

1. Liegt der gegebne Punkt A' auf der Kreislinie, so ziehe den Halbmesser CA' , und errichte auf ihn in seinem Endpunkte die senkrechte Linie IH , so ist IH die gefuchte Tangente *.

* 12.

2. Liegt der gegebne Punkt A auſſerhalb des Kreiſes, ſo ziehe nach ihm aus dem Mittelpunkte eine gerade Linie CA , theile dieſe in zwey gleiche Theile im Punkte O , und beſchreibe um dieſen mit dem Halbmesser OC einen Kreis, der, weil er durch den Mittelpunkt und einen Punkt auſſerhalb des um C beſchriebnen Kreiſes geht, dieſen durchſchneiden muß *, *E.12.3 und zwar in zwey Punkten B, D , welche zu entgegengeſetzten Seiten der Linie CA liegen, und von dem Durchſchnittspunkte E derſelben mit der Kreislinie, ſo auch vom Punkte A , gleichweit abſtehn *. Zieht man * 19. AB, AD , ſo iſt jede beyder Linien die gefuchte Tangente. — Denn zieht man die Halbmesser CB, CD , ſo ſind die Winkel ABC, ADC , Winkel im Halbkreiſe, alſo rechte; folglich ſtehn AB, AD auf den Halbmessern CB, CD in ihren Endpunkten ſenkrecht, ſind alſo Tangenten am gegebenen Kreiſe *.

* 15. f. 4.

Zuſatz. Um an einem Kreiſe mit einer gegebenen Sehne parallel eine Tangente zu ziehn, fälle man vom Mittelpunkte auf die Sehne ein Perpendikel, und ziehe an dem Punkte, wo dieſes den Kreis durchſchneidet eine Tangente, ſo läuft dieſe mit der gegebenen Sehne parallel *.

* I. 21.

[A U F G A B E 15.]

In einem gegebenen Kreiſe eine Sehne einzutragen, welche einer gegebenen Linie MN (kleiner als der

F. 103.

Durchmesser) gleich ist, und 1) durch einen gegebenen Punkt P geht, oder 2) einer gegebenen graden Linie Q parallel läuft.

Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte A in der Kreislinie, mit der gegebenen Linie MN als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den erstern Kreis in B durchschneide, und ziehe AB , so ist AB eine Sehne des gegebenen Kreises, von der verlangten Gröfse MN . Zieht man auf die Mitte dieser Sehne, aus dem Mittelpunkte, die grade Linie CD , und beschreibe mit ihr als Halbmesser um C einen Kreis, so berührt dieser die grade Linie AB , welche auf dem Halbmesser in *9f. 1; 12. dessen Endpunkte senkrecht steht *.

1. An diesem Kreise ziehe man vom gegebenen * A. 14. Punkte P aus eine Tangente PE *, so ist das Stück dieser berührenden Linie, welches innerhalb des erstern Kreises liegt, d. h. FG , die verlangte Sehne.

2. Vom Mittelpunkte falle man auf die gegebne * A. 14. Linie Q ein Perpendikel, und ziehe durch den Punkt H , wo dieses den zweyten Kreis berührt, an diesem Kreise eine Tangente *, so ist das Stück IK dieser Tangente, welches innerhalb jenes Kreises liegt, die verlangte Sehne.

Denn als Tangenten an dem innern Kreise, stehn beyde Sehnen FG , IK auf den Halbmessern CE , CH * 12. senkrecht *, sind also beyde vom Mittelpunkte um den Halbmesser CD , folglich eben so weit als die Sehne AB entfernt, mithin dieser Sehne, und der gegebenen Linie MN , gleich *. Die erstere geht aber durch den * 9.

Punkt P, die letztere ist zugleich mit Q auf CH senkrecht, also mit Q parallel *.

* I. 21.

Sowohl für die erste als für die andre Aufgabe, giebt es in jedem Kreise zwey Sehnen, auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, welche ihr genüge thun.

Zusatz. Mittelt dieser Auflösung ist man auch im Stande folgendes zu bewerkstelligen: 1. *Von einem gegebenen Punkte P ausserhalb eines Kreises, nach dem Kreise zwey grade Linien so zu ziehn, daß sie zwischen sich Bogen EF, GH abschneiden, welche zusammengenommen den Bogen zwischen den Schenkeln eines andern Winkels, dessen Spitze O ausser dem Kreise liegt, gleich sind.* F. 104.

Man ziehe nemlich nach dem eben gelehrtten Verfahren, vom Punkte P aus die graden Linien PE, PF so, daß die Sehnen FH, EG, welche die Kreislinie auf ihnen abschneidet, den Sehnen AC, BD auf den Schenkeln des Winkels O gleich sind. Es gehören alsdann zu jenen und zu diesen Sehnen gleiche Bogen, deren Unterschiede, d. h. die Bogen AB + CD, und EF + GH auch gleich seyn müssen.

2. *Von einem gegebenen Punkte O in der Verlängerung einer Sehne AC an, eine grade Linie so zu ziehn, daß die Bogen zwischen ihm und dieser Sehne, einem gegebenen Bogen AE gleich sind.* Ziehe zwischen den gegebenen Punkten C und E die Sehne CE, und eine zweyte Sehne BD so, daß sie verlängert durch den gegebenen Punkt O, gehe, und der erstern CE gleich sey *; so ist dieses die gesuchte grade Linie. Denn wegen Gleichheit der Sehnen sind die Bogen CA + AE, *14. (2)

und $DC + CA + AB$ gleich, mithin die Bogen AE
 $\text{Gr. } 2.\beta = DC + BA$ *.

Anmerkung. Aufgabe und Zusatz entlehne ich, doch mit verkürzten Beweisen aus Gregor von St. Vincenz.

d. U.

A U F G A B E 16.

- F. 105. Ueber eine gegebne grade Linie AB einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebenen Winkel C faßt, (d. h. wo jeder in diesem Kreisabschnitt*
** E. 7. eingeschriebne Winkel, dem Winkel C gleich ist *.)*

Man verlängere die gegebne Linie AB, und bilde am Punkte B und der Verlängerung BD, einen Winkel DBE, dem gegebenen Winkel C gleich. Auf dem Schenkel BE errichte man im Punkte B ein Perpendikel, so auch auf der gegebenen Linie AB in deren Mitte, und beschreibe aus dem Durchschnittspunkt O beyder Perpendikel als Mittelpunkt, mit OB als Halbmesser einen Kreis, so erhält man den gesuchten Kreisabschnitt AMB.

- Denn BE ist, als ein Perpendikel auf dem Halbmesser OB in dessen Endpunkt B, eine Tangente des
 • 12. Kreises im Punkte B *, und wird im Berührungspunkte von der Sehne AB durchschnitten. Folglich hat der Winkel ABF, mithin auch dessen Scheitelwinkel DBE,
 • 25. zu seinem Maasse den halben Bogen BKA *, und ist jedem Winkel im Kreisabschnitte AMB, der zur entgegengesetzten Seite der Sehne liegt, gleich. Nun ist
 • 25. f. aber DBE der Construction gemäß dem gegebenen Winkel C gleich; also der Kreisabschnitt AMD der Gesuch-

te, indem er über der Linie AB steht, und den Winkel C faßt.

[Anmerkung. Wäre der gegebne Winkel C ein rechter, so fiel das Perpendikel BO mit der Sehne AB zusammen, und es gäbe keinen Durchschnittspunkt O. Dann aber wissen wir ohnedem das der gefuchte Kreisabschnitt, der über AB beschriebene Halbkreis ist. Mehrere Aufgaben, welche diese begründet, erwähnt Lehrsatz 26. Folg. Um in einem gegebenen Kreise einen Abschnitt zu bilden welcher einen gegebenen Winkel faßt, verfährt man grade auf dieselbe Art.]

[Eine andere Auflösung. Errichte auf dem einen Schenkel CG des gegebenen Winkels C, im Scheitelpunkte, ein Perpendikel CI, und ziehe an den Endpunkten A, B der gegebenen Linie, unter dem Winkel ICH, zwey Linien AO, BO, und zwar, wenn der gegebne Winkel stumpf ist, unterhalb, wenn er spitz ist, oberhalb der Linie AB. Ein Kreisbogen, um ihren Durchschnittspunkt O beschrieben, bildet den verlangten Kreisabschnitt AMB.

Denn der Winkel O am Mittelpunkte ist nach der Construction gleich $2R - 2ICH$ *. Folglich ist im * 1. 31. zweyten Fall jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB halb so groß *, d. h. gleich $R - ICH$, und also dem gegebenen Winkel C gleich. Im ersten Fall ist jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB der halben Ergänzung dieses Winkels zu vier rechten, d. h. $R - ICH$, also auch dem gegebenen Winkel C gleich.]

[Zusatz. Es sind drey Punkte A, B, C gegeben, die E. 106, so liegen, daß der Mittelpunkte des Kreises der durch sie geht, zu weit abliegt, als daß man ihn nach Aufgabe 12

darstellen könnte; aus einem derselben *A*, eine grade Linie zu ziehn, welche nach dem Mittelpunkte dieses Kreises zu läuft.

Verbinde die drey Punkte durch grade Linien, und ziehe durch *A* die grade Linie *AD*, unter einem Winkel *BAD*, welcher dem Winkel an dem gegenüberliegenden Punkte *C* gleich ist; so ist ein Perpendikel auf *AB* im Punkte *A*, die gefuchte Linie. — Denn der Winkel *C* ist in dem erwähnten Kreise ein Winkel am Umfange, der den halben Bogen *AB* zum Maafs hat. Dieser ist folglich auch das Maafs des Winkels *BAD*, mithin muß, da *BA* eine Sehne ist, *AD* eine Tangente des Kreises im Punkte *A* seyn *, also das Perpendikel *AM* nach dem Mittelpunkte des Kreises * 19. laufen *.]

[A U F G A B E 17.]

Ein Dreyeck, welches mit einem gegebenen Dreyeck **F. 107.** *PQR* gleichwinklig ist, 1) in einen gegebenen Kreis einzuschreiben, und 2) um einen gegebenen Kreis zu umschreiben.

I. Nach dem Punkte *A* der Kreislinie, welcher einer der Winkelpunkte des einzuschreibenden Dreyecks werden soll, ziehe den Halbmesser *OA*, und trage den Winkel *Q* zweymal neben einander am Punkte **Aufg. 4** *O* dieser Linie *. Durchschneidet der dritte Schenkel den Kreis in *B*, so ziehe *AB* und mache den Winkel *ABC* gleich *P*, so ist, wenn man *AC* zieht, *ABC* das verlangte Dreyeck, welches mit dem gegebenen *PQR* gleich-

gleichwinklig ist. Denn der Winkel C ist gleich der Hälfte des Winkels AOB *, folglich gleich Q. Da * 23. auch B gleich P ist, so müssen die dritten Winkel R, A ebenfalls gleich *, also beyde Dreyecke unter einander gleichwinklig seyn. I. 31 f. 1

Eine andere Auflösung. Ziehe durch A eine Tangente GH an dem gegebenen Kreise *, und mache am Punkte A den Winkel GAC gleich P, den Winkel HAB gleich Q, und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreyeck. Denn die Winkel, welche die Tangente mit den beyden Sehnen, die durch den Berührungspunkt gehn, bildet, sind den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Abschnitten gleich *, also B = GAC = P und C = HAB = Q, und folglich ist das eingeschriebene Dreyeck ABC mit dem gegebenen PQR gleichwinklig. * 25. A. 14.

2. Verlängere eine Seite PQ des gegebenen Dreyecks, und mache DOE = RQS und DOF = RPT. Durch D, E und F ziehe man Tangenten an dem gegebenen Kreise, so bilden diese das gesuchte Dreyeck ABC, welches dem Kreise *umschrieben*, und mit dem gegebenen PQR gleichwinklig ist. — Denn da bey D, E, F rechte Winkel sind, so sind die einander gegenüberstehenden Winkel in den Vierecken EDOE und ADOF in jedem zusammengenommen zwey rechten Winkel gleich *. Folglich B gleich dem Nebenwinkel von RQS, d. h. gleich Q, und A gleich dem Nebenwinkel von RPT, d. h. gleich P. Mithin ist I. 32.

das umschriebene mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklig.

A U F G A B E 18.

Einen Kreis, 1) in ein gegebenes Dreyeck ABC einzuschreiben; 2) um ein gegebenes Dreyeck zu umschreiben.

- F. 108. I. Theile zwey der Winkel des Dreyecks, A, B, durch die graden Linien AO, BO, welche sich in einem Punkte O schneiden müssen *, in zwey gleiche Theile; fälle vom Punkte O auf eine der Seiten des Dreyecks ein Perpendikel OD, und beschreibe mit OD als Halbmesser, um O als Mittelpunk, einen Kreis; so ist dieser der gefuchte, in dem Dreyeck ABC eingeschriebene Kreis.

Der so gefundene Punkt O steht nemlich von allen Seiten des gegebenen Dreyecks gleich weit ab, indem die Perpendikel auf die Seiten des Dreyecks, OD, OE und so auch OD, OF, gleich sind. Denn sie sind Katheten in rechtwinkligen Dreyecken ODB, OEB und ODA, OFA, wovon die ersten, so wie die letzten, sich wegen Gleichheit der Hypothenusen und eines der spitzen Winkel decken *. Die drey Fußspunkte der Perpendikel, D, E, F liegen also im Umfange der Kreislinie, welche um O mit dem Halbmesser OD beschrieben ist *. Diese Kreislinie berührt folglich die drey Seiten des Dreyecks ABC *, und ist daher in dem gegebenen Dreyeck eingeschrieben *.

2. Die Methode einen Kreis um ein gegebenes Dreyeck zu beschreiben, steht in Aufgabe 12.

[Zu f a t z I. Zieht man noch CO, so decken sich auch die beyden rechtwinkligen Dreyecke COE, COF, daher die Linie CO den Winkel C ebenfalls halbird. Folglich *durchschneiden sich die graden Linien, welche die Winkel eines Dreyecks halbiren, alle drey in einem Punkte, und zwar in dem Punkte, welcher von allen drey Seiten gleich weit entfernt ist, und deshalb einem Kreise, der dem Dreyeck eingeschrieben wird, zum Mittelpunkte dient.* Diese Linien zertheilen das ganze Dreyeck in drey kleinere Dreyecke, wovon ein jedes über eine Seite des Größern als Grundlinie steht, und worin die Perpendikel aus den Spitzen auf die Grundlinien gleich find.]

[Zu f a t z II. Die Seiten des Dreyecks werden durch diese Perpendikel so zerschnitten, dafs 1) an jedem *Winkelpunkte gleiche Stücke anliegen*, und 2) *jedes abgeschnittene Stück sammt der gegenüberliegenden Seite dem halben Umfang des Dreyecks gleich ist.* Das erstere folgt aus der bewiesenen Deckung der kleinen rechtwinkligen Dreyecke, und hieraus wiederum die zweyte Behauptung. Denn bezeichnet man den *halben Umfang des Dreyecks* mit S, so ist $S = AD + BE + CF$, und setzt man in diesem Ausdruck der Folge nach, statt der darin vorkommenden Linien, das Stück an demselben Durchschnittpunkt, welches ihr gleich ist, so erhält man für den *halben Umfang S eines Dreyecks*, folgende Ausdrücke :

$$S = AD + BE + EC = AD + BC = AF + BC$$

$$S = AF + BE + CF = BE + AC = BD + AC$$

$$S = AD + BD + CF = CF + AB = CE + AB$$

Und daraus lassen sich umgekehrt wieder Ausdrücke für die Größe der abgetheilten Stücke ableiten, welche uns in der Folge von Nutzen seyn werden.

$$AD = AF = S - BC$$

$$BE = BD = S - AC$$

$$CF = CE = S - AB.$$

Fig. 78* [Zufatz III. Vergleicht man die Lage des hier betrachteten Durchschnittspunkts (O) dreier grader Linien, welche *die Winkel eines Dreyecks halbiren*, mit der Lage des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts (C) *dreyer Perpendikel*, welche auf der Mitte jeder der drey Seiten eines Dreyecks errichtet sind*, oder was dasselbe sagt, die Lage der *Mittelpunkte* des dem Dreyeck eingeschriebenen, und des *umschriebenen Kreises*; und mit diesen *drittens* den Punkt (P), worin die Perpendikel welche aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Seiten gefällt sind, alle drey sich durchschneiden*, und *viertens* den Punkt (S), worin, wie wir in den folgenden Büchern sehn werden, die drey graden Linien, die aus den Winkelpunkten nach den Punkten in der Mitte der gegenüberstehenden Seiten gezogen werden, sich durchschneiden, (den Schwerpunkt des Dreyecks); so erhält man folgende interessanten Sätze. 1) *Im gleichschenkligen Dreyeck liegen diese vier Punkte in einer graden Linie, und zwar im Perpendikel, welches aus der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie gefällt wird.* Denn dieses Perpendikel halbirt zu-

* 10.

*24 Z.2.

gleich den Winkel an der Spitze und die gegenüberstehende Grundlinie *. 2) *Im gleichseitigen Dreyeck fallen diese Punkte alle vier in einem Punkt zusammen.* *I.17.f.2
Denn jedes Perpendikel, welches aus einem Winkel-
punkte auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird,
halbirt im gleichseitigen Dreyeck diese Seite und den
Winkel an der Spitze *. *I.17 f.1

3) *In keinem ungleichseitigen Dreyeck liegen diese Punkte alle vier in grader Linie.* Denn sonst müfste eins der Perpendikel, welche aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, zugleich diese Seite und den Winkel an der Spitze halbiren, da das Dreyeck denn nothwendig gleichschenklig wäre.

4) *Der erste O, und der vierte S, dieser Durchschnittspunkte (der Mittelpunkt des eingeschriebnen Kreises, und der Schwerpunkt) liegen bey jedem Dreyecke innerhalb desselben; der zweyte, C', und dritte, P, aber (der Mittelpunkt des umschriebnen Kreises, und der Durchschnittspunkt der Perpendikel aus den Spitzen) liegen in spitzwinkligen Dreyecken innerhalb, in stumpfwinkligen auferhalb des Dreyecks* und in rechtwink-* *A.12.Z
1; 1.16
Z.2.f.2,
ligen, jener auf der Hypotenuse, dieser in der Spitze des rechten Winkels.]

Anmerkung. Ueber die Lage dieser vier merkwürdigen Punkte bey jedem Dreyeck, hat L. Euler eine interessante algebraische Untersuchung angestellt, (*Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* in den Nov. Comment Ac. Sc. Petropol. ad. A. 1765) in welcher er den sehr netten Satz darthut, *dafs in jedem Dreyeck drey dieser Punkte, nemlich C', P und S in grader Linie liegen, und zwar so, dafs immer S zwischen C' und P liegt, und PS das Doppelte von CS, oder*

PS = 2. C'S ist, wie man dieses auch in unserer Figur wahrnimmt. Hat man also zwey dieser Punkte, so findet man den dritten durch eine sehr leichte Construction. Auch lehrt *Euler* in dieser Abhandlung, wie man, wenn die drey Punkte O, P, S gegeben sind, aus der Lage dieser drey Punkte das Dreyeck ABC finden kann, welches von der Auflösung einer Cubischen Gleichung abhängt, deren drey Wurzeln die Zahlausdrücke für die Seiten dieses Dreyecks sind.

d. U

A U F G A B E 19.

F. 109. *Das Verhältniß zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältniß dieser Linien zu finden.*

Trage auf die grössere Linie AB, die kleinere CD ^{Fo. 3. α} so oft stetig nebeneinander, als es angeht *, wir wollen setzen zweymal. Wird jene durch diese nicht genau gemessen, so bleibt ein Stück BE, kleiner als CD, übrig.

Trage ferner auf CD diesen Rest BE wieder so oft stetig nebeneinander, als es angeht, in unserm Fall einmal, da denn aufs neue ein Rest DF bleibt, der kleiner als BE ist.

Trage diesen zweyten Rest DF wieder auf den ersten BE so oft es angeht nebeneinander, in unserm Fall einmal, wobey der Rest BG bleibt.

Trage diesen dritten Rest BG wieder auf den zweyten DF so oft es angeht nebeneinander, und so fahre fort.

[Bey diesem Verfahren kömmt man nun entweder zuletzt auf einen Rest, der den vorhergehenden *genau*

mifst, oder man *erreicht nie einen solchen Rest*, so lange man auch fortführt, welches letztere, wie wir im folgenden Buche sehn werden, allerdings bey gewissen Linien der Fall ist.

Erster Fall. *Kömmt man endlich auf einen Rest der den vorhergehenden genau misst*, und folglich in ihm nach irgend einer ganzen Zahl enthalten ist, *so ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maafs der beyden gegebenen Linien AB, CD.* Sieht man ihn als Einheit an, so lassen sich alle vorhergehenden Reste, mithin AB, CD selbst, in Beziehung auf ihn als *Zahlen* ausdrücken, woraus sich denn das *Zahlverhältniß* der beyden gegebenen Linien AB, CD findet. Und zwar ist dieser letzte Rest *das grösste gemeinschaftliche Maafs* der beyden gegebenen Linien, und daher ihr so gefundnes *Zahlverhältniß* sogleich *in kleinsten Zahlen* (in Primzahlen unter sich) ausgedrückt.]

Denn gesetzt in unserm Beyspiele sey BG jener letzte Rest, welcher den vorhergehenden DF genau misst, und zwar sey BG genau zweymal in FD enthalten, so ist, wenn man BG zur Einheit nimmt, also $BG = 1$ setzt, $FD = 2$; ferner, da FD und BG zusammengekommen gleich EB sind, ist $EB = 1. 2 + 1 = 3$; und da wieder EB und FD zusammengekommen gleich CD sind, ist $CD = 1. 3 + 2 = 5$, und da endlich zwey CD und BE zusammengekommen gleich AB sind, so ist $AB = 2. 5 + 3 = 13$. Folglich lassen sich alsdann die beyden gegebenen Linien AB, CD, in Beziehung auf BG als Einheit, durch die Zahlen 13 und 5 ausdrücken; in beyden ist BG nach ganzen Zah-

len enthalten, in AB 13 mal, in CD 5 mal, und dieser letzte Rest ist mithin für beyde gegebne Linien ein gemeinschaftliches Maafs.

Er ist aber auch *ihr größtes gemeinschaftliches Maafs*. Denn wer dieses leugnen wollte, müßte behaupten irgend eine grade Linie $M > BG$ könnte ein gemeinschaftliches Maafs der beyden gegebenen Linien AB und CD seyn. Nun aber wird ein Theil der Linie AB, nemlich AE, von CD gemessen ($AE = 2 \cdot CD$), folglich müßte auch der Unterschied von AB und AE, d. h. EB, und da $EB = CF$ ist, auch CF von der Linie M gemessen werden. Wird aber CD und zugleich das Stück derselben CF von M gemessen, so muß nothwendig auch das zweyte Stück $FD = EG$ von M gemessen werden, und da das wieder eben so bey EB und dem Stück EG der Fall ist, so muß auch ihr Unterschied GB von M genau gemessen werden, folglich *entweder gleich oder kleiner* als BG seyn, welches der Voraussetzung daß $M > BG$ sey widerspricht. Es ist also kein größeres gemeinschaftliches Maafs beyder Linien AB, CD möglich, als der so gefundene letzte Rest BG, dieser mithin ihr größtes gemeinschaftliches Maafs.

Aus diesem Beweise erhellet zugleich, 1) *daß jede Linie M, welche zwey gegebne grade Linien AB, CD genau mißt, auch ihr größtes gemeinschaftliches Maafs GB genau messen müsse.* — 2) *Daß die beyden Zablausdrücke der gegebenen Linien AB, CD, welche auf diese Art gefunden werden (13 und 5) keinen gemeinschaftlichen Factor haben können, also Primzahlen unter sich*

sind, und das Verhältniß beyder Linien in kleinsten Zahlen $13 : 5$ ausdrücken.]

Dieses Zahlverhältniß sagt aus, daß die beyden Linien grade so wie diese beyden Zahlen aus einander entstehn, und daß folglich, wenn AB in 13 gleiche Theile getheilt wird, 5 solcher Theile die Linie CD ausmachen. Nähme man daher nicht BG sondern AB zur Lineareinheit, setze also $AB = 1$, so müßte CD durch den Bruch $\frac{5}{13}$ ausgedrückt werden, indem dann CD 5 solchen Theilen, wovon in der Lineareinheit 13 gleiche enthalten sind, gleich seyn würde. Und setze man umgekehrt $CD = 1$ so wäre AB durch die Zahl $\frac{13}{5}$ auszudrücken.

[Zweyter Fall. Kömmt man auf keinen Rest der den nächst vorhergehenden genau mißt, man mag das angegebne Verfahren so weit fortsetzen als man nur immer will, so giebt es für die beyden gegebenen Linien AB , CD kein gemeinschaftliches Maas, d. h. keine Linie die selbst, oder deren noch so kleine Theile, in beyden Linien zugleich genau enthalten wären, und beyde sind also *incommensurabel*; wovon wir im folgenden Buche ein Beyspiel an dem Verhältnisse zwischen der Seite und der Diagonale eines Quadrats werden kennen lernen. Da alsdann beyde Linien sich nicht auf einerley Einheit beziehen, nicht durch einerley Einheit, oder noch so kleine Theile derselben, sich ausdrücken lassen; so giebt es kein Zahlverhältniß, wodurch ein solches *incommensurables* Verhältniß sich völlig ausdrücken ließe. Vernachlässigt man aber den letzten Rest und nimmt z. B., wenn BG in dem vorhergehenden Rest FD zwar

nicht genau, aber doch beynahe zweymal enthalten ist, an, es sey genau $FD = 2 BG$; so findet man ein Zahlverhältniß, welches von dem incommensurablen nur um wenig abweicht, und das sich demselben um so mehr nähert, je weiter man auf dem angegebenen Wege fortgeschritten ist, und je weiter der vernachlässigte Rest hinaus fällt; so dafs man in diesem Fall wenigstens ein Zahlverhältniß findet, welches dem Verhältniß der incommensurablen Linien so nahe kömmt als man nur immer will, und das sich demselben ohne alles Ende nähern läßt, wiewohl es dasselbe nie erreichen, nie völlig erschöpfen kann.]

[Zusatz I. Dieser Satz begründet *die Methoden grade Linien unmittelbar zu messen*, und sich über das Verhältniß zweyer grader Linien völlig ins Klare zu bringen. Dieses ist man nur dann, wenn man weiß, wie oft die eine Linie die andere, oder einen bestimmten Theil derselben, in sich enthält, wenn man also das Zahlverhältniß beyder kennt, und um dieses zu erforschen muß man die eine Linie mit der andern, oder mit einem Theil derselben, als Einheit vergleichen; grade darin besteht aber *das Messen*. Dieses kann man *entweder* auf die Art, welche hier gelehrt ist, bewerkstelligen, indem man Rest auf Rest nebeneinander trägt; *oder* man hat einen *Maassstab* d. h. eine grade Linie, welche nach irgend einer Lineareinheit und deren Theilen, so klein als man sie zur jedesmaligen Absicht nöthig hat, eingetheilt ist (z. B. nach Zollen und Decimal- und Centesimaltheilen des Zolls.) Trägt man

die gegebne zu messende Linie auf den Maafsstab auf, so sieht man sogleich wie viel dieser Lineareinheiten und deren Theile sie enthält, z. B. 8,25, erhält also auf diese Art mit größter Leichtigkeit den *Zahlausdruck* der gegebenen Linie in Beziehung auf die angenommene Lineareinheit des Maafsstabs. Verfährt man eben so mit der zweyten Linie, so findet man auch ihren *Zahlausdruck* in Beziehung auf dieselbe Lineareinheit, z. B. 14,75 und dann ist das *Zahlverhältniß* der beyden gegebenen Linien 8,25 : 14,75 oder 33 : 59.]

[Zusatz II. Gesezt wir sehn die grössere der beyden gegebenen Linien AB, CD als Lineareinheit an, setzen also $AB = 1$, so ist der Zahlausdruck von CD, d. h. $\frac{CD}{AB}$, ein ächter Bruch, der in unserm Fall, wo

AB die Linie CD zweymal und noch das Stück EB in sich enthält, gleich ist, $\frac{CD}{2CD + EB} = \frac{1}{2 + \frac{EB}{CD}}$, indem

der Bruchwerth unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerley Gröfse dividirt werden. Nun aber war $CD = EB + FD$, $EB = FD + GB$ und $FD = 2 GB$, also ist $\frac{EB}{CD} = \frac{EB}{EB + FD} = \frac{1}{1 + \frac{FD}{EB}}$;

$\frac{FD}{FD + GB} = \frac{1}{1 + \frac{GB}{FD}}$ und $\frac{GB}{FD} = \frac{1}{2}$. Diese Werthe der

Folge nach in den erstern Ausdruck gesetzt, geben

$$CD = \frac{1}{2+1} \cdot AB \text{ (oder } CD = \frac{1}{m+1} \cdot AB$$

$$\frac{1+1}{1+1} \qquad \frac{n+1}{p+1}$$

$$\frac{1+1}{2} \qquad \frac{p+1}{q}$$

wenn überhaupt $AB = m \cdot CD + EB$, $CD = n \cdot EB + FD$, $EB = p \cdot FD + GB$ und $FD = q \cdot GB$ ist;) so daß also auf diesem Wege die eine Linie in Beziehung auf die andre als Einheit, durch einen *Stufenbruch* ausgedrückt wird, dessen Werth sich entweder aus der Lehre von der Addition und Division der Brüche in jedem Fall finden, oder durch eine allgemeine algebraische Formel darstellen, und nach ihr berechnen läßt. Und zwar ist diese Formel folgende $CD = \frac{(1+pq) \cdot n + q}{(1+pq)(1+mn+mq)}$, wie man leicht findet, wenn man den Werth des Bruchs *Stufenweise* vom untersten an, den Regeln der Bruchrechnung gemäß entwickelt,

$$\text{z. B. } p + \frac{1}{q} = \frac{pq+1}{q}, \quad \frac{1}{p+\frac{1}{q}} = \frac{1}{\frac{pq+1}{q}} = \frac{q}{pq+1}$$

u. s. f. So berechnet ist der Werth unsers *Stufenbruchs*, $CD = \frac{5}{13} \cdot AB$, wie oben. Wenn bey zwey Linien sich darthun ließe, daß dieser *Stufenbruch*, der die eine in Beziehung auf die andre als *Lineareinheit* ausdrückt, ins Unendliche fortließe; so wäre dadurch, dem zweyten Fall gemäß, die *Incommensurabilität der beyden gegebenen Linien* dargethan. Beyspiele davon, werden wir im folgenden finden.]

Anmerkung. Schon *Euklid* lehrt durch die Methode des ersten Falls das größte gemeinschaftliche Maass zweyer grader Linien oder auch zweyer Zahlen finden, ersteres gleich zu Anfang des zehnten Buchs, welches von der *Incommensurabilität* ausgehender Gröfsen handelt, (Satz 3) letzteres an der Spitze des ersten seiner drey arithmetischen Bücher (Buch VII. Satz 2), wo überhaupt die ersten Sätze, den ersten Sätzen des zehnten Buchs parallel laufen, (und von denen *Clavius* meint, *Euklid* habe diese Bücher bloß zum Behuf des zehnten Buchs seinen Elementen einverleibt.) Ferner zeigt er, daß um dreyer Linien (X. 4.) oder dreyer Zahlen (VII. 3) größtes gemeinschaftliches Maass zu finden, man dieses zuerst für zwey derselben, und dann aufs neue für ihr gefundenes Maass und für die dritte Linie oder Zahl suchen müsse. Endlich beweist er auch, daß wenn unter zweyter Fall eintritt, beyde Linien *incommensurabel* seyn müssen (X. 2), und daß, wenn man die Methode auf zwey gegebne Zahlen überträgt, und man kömmt bey ihnen auf keinen Rest, größer als die Einheit, der in dem nächst vorhergehenden Reste genau aufgeht, bey solchen Zahlen etwas Aehnliches statt findet; indem sie dann Primzahlen unter sich sind, und keinen größern gemeinschaftlichen Factor als die Einheit selbst haben (VII. 1.)

Die fernern Sätze *Euklids*, daß *commensurable Gröfsen sich wie Zahlen*, *incommensurable Gröfsen hingegen nicht wie Zahlen verhalten*, und daß umgekehrt alle Gröfsen für die sich ein genaues Zahlverhältniß finden läßt, *incommensurabel* seyn müssen, (X. 5-8. und VII. 4) sind unmittelbare Folgerungen aus unserm Beweise. Und aus diesen Sätzen fließt wiederum, das zwey *incommensurable Gröfsen* mit jeder dritten beyde zugleich *commensurabel* oder *incommensurabel* sind, und eine mit ihnen *commensurable* Summe haben, und umgekehrt; daß hingegen, wenn von zwey *commensurablen Gröfsen* die eine mit einer dritten *commensurabel* ist, die andre mit ihr *incommensurabel* seyn muß, und daß beyde mit ihrer Summe *incommensurabel* sind, und umgekehrt (X. 12 - 17)

Diese Sätze dienen *Euklid* jedoch nur zu einer Art von Einleitung in die Materie, welche den eigentlichen Gegenstand des zehnten Buchs ausmacht, nemlich in die *Untersuchung über die Abhängigkeit, welche zwischen der Commensurabilität und Incommensurabilität von Rechtecken oder Quadraten und deren Seiten statt findet*. Diese Untersuchung, die *Euklid* zur Theorie der regulären Körper braucht, stellt er zwar mit grossem Scharffinn, aber auf einem ganz geometrischen Wege an, auf welchem sie so weitläufig und schwierig wird, das man dieses Buch mit Recht für das schwerste in den Elementen hält, und das *Wolf* behauptet „es sey so dunkel, das ein Anfänger unmöglich das geringste davon verstehn könne“. Seitdem man in der neuern Mathematik in den *Wurzelgrößen* ein Mittel gefunden hat, incommensurable Größen arithmetisch darzustellen, und sie als sogenannte *Irrationalzahlen* mit unter die Zahlbegriffe aufzunehmen, stehn uns weit einfachere und leichtere Methoden zu Geboth, das, was wir von dieser Untersuchung brauchen können, arithmetisch zu entwickeln und zu erörtern, ohne das wir der grossen Menge von Distinctionen zwischen irrationalen Linien verschiedner Art, des Heers von Kunstwörtern welche diese Materie bey *Euklid* besonders erschweren, und des zehnten Theils der Sätze die bey *Euklid* vorkommen, von Nöthen hätten; eine Erleichterung die besonders daher rührt, das wir, statt Rechtecke und Quadrate aus commensurablen und incommensurablen Linien, die Producte

* III. 4. aus rationalen und irrationalen Zahlen betrachten *.

An. I. *Euklid* lehrt wie man zu jeder gegebenen Linie 13 verschiedne Arten von irrationalen Linien darstellen kann, die er insgesammt genauer untersucht, und mit besondern abschreckenden Kunstwörtern bezeichnet, (z. B. nach *Lorenz* Uebersetzung: *Mediale, Binomiale, erste und zweyte Bimediale, grössere und kleinere Irrationale, Apotome, erste und zweyte Medialapotome, des Rationalen und Medialen Quadratsseite, die zwey Mediale Gebende etc.* (X. 112), und zeigt, wie ausser diesen 13, (die sich nach unsrer Art insgesammt aus Rationalzahlen, Quadrat- und Biquadratwurzeln ausdrücken und zusammensetzen lassen), noch unzählige andte Irrationali-

nien entsehn, die mit keiner unter jenen einerley sind" (X. 116.) (die nemlich auf Wurzeln vom 8ten, 16ten und fernern Graden beruhen. Der letzte Satz in diesem Buche thut dies Incommensurabilität zwischen der Seite und dem Durchmesser eines Quadrats dar. Irrationallinien (ein Ausdruck, den schon Euklid hat) welche sich auf Wurzeln von andern Graden als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. f. beziehn, (die man also weder durch einmaliger noch durch wiederholter Darstellung einer mittleren Proportionallinie, sondern nur durch Auffindung zweyer mittlerer Proportionallinien, u. s. f., also nur auf Wegen, welche der Elementargeometrie unzugänglich sind *, findet,) erwähnt Euklid mit keinem Wort. * III 242 Seine Untersuchung ist also sehr eingeschränkt, statt dass wir durch die arithmetischen Begriffe sie sogleich ganz allgemein führen können. Ueberdem hat Euklids Vortrag noch das Unangenehme, dass er, wie überhaupt die Alten, *nur ganze Zahlen kennt*, und unter seinen Zahlbegriffen keinen für Brüche aufnimmt, so dass wir seine Worte nicht in den uns geläufigen Sinn nehmen dürfen (denn nach diesem sagten manche Sätze offenbare Falschheiten aus), sondern erst in seine Begriffe von Zahlen übersetzen müssen. Alles das trägt dazu bey, dieses Buch für uns überflüssig und ungenießbar zu machen. Ueberhaupt ist die Materie in der Geometrie nur für die Art, wie Euklid die Theorie der regelmässigen Körper behandelt, von Wichtigkeit; was uns davon unentbehrlich ist, findet man theils hier, theils in der Folge dieses Werks. Dem allen ungeachtet, ist folgendes Urtheil sehr ungerecht, welches der bekannte *Peter Ramus* in seinen *Scholiis Mathematicis* (lib. 21, p. 252.) über diese Arbeit Euklids fällt: „*Materies decimo libro proposita, eo modo est tradita, ut in humanis literis atque artibus similem obscuritatem nusquam deprehenderim, obscuritatem dico, non ad intelligendum, quid praecipiat Euklides, — — sed ad perspicendum penitus et explorandum, quis finis et usus sit operi propositus, (die Theorie der regulären Körper,) quae genera, species, differentiae sint rerum subjectarum, (Euklid verweilt sich un-*

standlich dabey die Verschiedenheit aller jener Irrationallinien an

Klare zu setzen) *nihil enim unquam tam confusum vel involutum legi vel audiri.* Andere preisen es dagegen als ein Meisterstück beharrlichen Tiefsinns, und das mit Recht, gehört es auch für uns nur zu den blossen Schaustücken, und zu den veralteren Rüstzeugen im Zeughaufe der Wissenschaft. d. U]

A U F G A B E 20.

F. 113. Wenn zwey Winkel A, B gegeben sind, ihr gemeinschaftliches Maass, und daraus ihr Zahlverhältniß zu finden.

Man beschreibe mit gleichem Halbmesser um die Scheitelpunkte beyder Winkel Kreisbogen CD, EF , so * 22. Z. sind diese das Maass beyder Winkel *. Mit diesen beyden Kreisbogen verfare man so, wie in der vorigen Aufgabe mit den beyden graden Linien; und das ist immer möglich, da Kreisbogen, die mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, gehörig gelegt sich decken, also ineinander fallen *, und sich mittelst ihrer Sehnen einer auf dem andern stetig nebeneinander legen * 7. lassen *. Auf diese Art findet man sogleich das grösste gemeinschaftliche Maass OD beyder Bogen, wenn es ein * A. 14. Fall 1. ausgedrückt *. Dieses ist zugleich das Verhältniß der beyden gegebenen Winkel A, B , die sich stets wie * 27. jene Bogen verhalten *. Der Winkel OAD , dessen Schenkel das gemeinschaftliche Maass beyder Bogen umspannen, ist zugleich das grösste gemeinschaftliche Maass dieser beyden Winkel.

Haben die beyden Bogen CD, EF , die man auf diese Art mit einander vergleicht, kein gemeinschaftliches

ches Maafs *, so sind sie, und die Winkel A, B de. * A. 19.
 ren Schenkel diese Bogen umspannen, incommensura- Fall 2.
 bel, und dann giebt es *kein Zahlverhältniß*, welches
 dem Verhältniß dieser Bogen, und dieser Winkel völ-
 lig entspräche. Allein man findet dann, wie in der
 vorigen Aufgabe, Zahlverhältnisse, die sich ihrem wahren
 (irrationalen) Verhältniß immer mehr und ohne
 Gränze nähern, je weiter man das angegebene Verfahr-
 en fortgesetzt hat; folglich Zahlverhältnisse, die man
 zum Gebrauch statt des irrationalen Verhältnisses setzen
 kann.

[Zusatz. Um den unmittelbaren Zahl Ausdruck eines
 gegebenen Winkels in Theilen des rechten Winkels, als dem
 festgesetzten Maasse alle Winkel zu finden, braucht
 man nur auf diese Art das gemeinsamme Maafs und
 das Zahlverhältniß zwischen dem Bogen, der den ge-
 gebenen Winkel misst, und der Kreislinie, oder dem
 Quadranten, aufzusuchen. Gesetzt man findet so das
 Zahlverhältniß des Bogens und der Kreislinie 3:25,
 also des Bogens und des Quadranten $3:\frac{25}{4}$, so ist der
 Winkel $\frac{25}{3}$ von vier rechten, oder $\frac{25}{12}$ eines rechten
 Winkels, läßt sich also durch den Bruch $\frac{25}{12}$ ausdrü-
 cken, in so fern wir den rechten Winkel zum allge-
 meinen Maafs, zur Einheit der Winkelgrößen, ma-
 chen. Oder nimmt man den neunzigsten Theil des
 rechten Winkels, d. h. einen Grad, und dessen Sexage-
 simaltheile zum allgemeinen Maafs, oder zur Einheit
 der Winkel *, so läßt sich jener Bogen durch die Zahl * 22.Z.3.
 $\frac{25}{12} \cdot 90 \text{ Grade} = 187 \frac{1}{2} \text{ Grad} = 187^\circ 30'$ ausdrü-

cken. Eben so der Bogen den er umspannt in Bogengraden. Dabey muß man sich denken, der *Winkel* enthält 187 Winkleinheiten und 30 Sechzigtheile derselben, der Bogen 187 Bogeneinheiten und 30 Sechzigtheile derselben; ein Ausdruck welchem also immer das Zahlverhältniß des Winkels zum rechten, und des Bogens zu Kreislinie, zum Grunde liegt, wie wir das

*22.Z.3, umständlich erläutert haben *.

Gesetzt der gegebene Bogen B sey in dem *Halbkreise* m (4) mal enthalten, messe ihn aber nicht genau, sondern es bleibe ein Stück übrig, welches in dem Bogen B selbst n (2) mal enthalten sey, und einen Rest lasse, der in dem vorigen Reste, p (3) mal enthalten sey, sammt einem Bogenstück, welches wiederum von diesem Reste der q te (3te) Theil sey; so ist nach dem Zusatz der vorigen Aufgabe, $B =$

$$\frac{1}{m+1} \cdot \text{Halbkr.} = \frac{(1+pq) \cdot n + q}{(1+pq)(1+mn+mq)} \cdot 180^\circ$$

$$\frac{n+1}{p+1} \cdot \frac{p+1}{q}$$

$$= \frac{10 \cdot 2 + 3}{10 \cdot 25} \cdot 180^\circ = \frac{23 \cdot 180^\circ}{250} = \frac{414^\circ}{25} = 16^\circ 31' 36''.$$

Dieses artige *Verfahren*, *Winkel lediglich mit Hülfe des Zirkels zu messen*, trägt schon *Lagny* in den *Memoires de l'Acad. des Sc. de Paris A. 1724. p. 250* vor.

DRITTES BUCH.

DER INHALT GRADELINIGER
FIGUREN.

[Dieses Buch beschäftigt sich mit Untersuchungen über den Inhalt der gradelinigen Figuren, worauf sich alles Ausmessen und Ausrechnen dieser Figuren gründet, und mit Vergleichen des Inhalts von Figuren, besonders von Rechtecken und Quadraten, welche über Linien von einer gewissen Eintheilung, oder über Seiten bestimmter Figuren, oder über Linien im Kreise beschrieben sind; Vergleichen aus denen sich nicht nur manche interessante Eigenschaft dieser Figuren und des Kreises ergibt, sondern die auch für die folgenden Materien von großer Wichtigkeit sind. Le Gendre trägt überdem im dritten Buch die Lehre von der Aehnlichkeit der Flächenräume vor; allein da beyde Materien durch meine Bearbeitung noch mehr als die in den vorigen Büchern (bis zum Dreyfachen und Vierfachen) angeschwollen sind; so verweise ich die letzte Materie ganz in das vierte Buch. Im Ganzen konnte ich zwar hier die Ordnung Le Gendres beybehalten, (nur dafs er die Sätze über den Kreis welche am Ende dieses Buchs stehn, und von denen bey ihm nur ein Paar vorkommen) aus der Lehre von der Aehnlichkeit ableitet; allein sein Vortrag ist so mangelhaft, so voller Lücken, und übergeht so viele wichtige und zur feinem Kenntniß der Geometrie unentbehrliche Sätze, die zwar in Compendien, aber in keinem vollständigen Lehrbegriff der Wissenschaft fehlen dürfen, dafs ich dieses Buch größtentheils habe umschmelzen müssen, Um indess nicht die Gleichförmigkeit der Behandlung zu stören,

werde ich die Rolle des Uebersetzers beybehalten, und was mir alleingehört, wie in den vorigen Büchern noch ferner mit diesem Zeichen [] unklammern

G i l b e r t.

E r k l ä r u n g e n.

I.

Taf. III. [Die *Höhe einer Figur* wird durch den Abstand zweyer Parallellinien bestimmt, wovon die eine durch irgend eine Seite der Figur (*ihre Grundlinie*) die andere durch den Punkt, oder durch die Punkte, der Figur geht, die am weitesten von dieser Linie entfernt sind. *Die Höhe einer Figur wird mithin durch das Perpendikel gegeben, welches man aus einem jener Punkte*

I. 16. f. I auf die Grundlinie oder deren Verlängerung fällt.

u. 27.

α) Sind also *zwey Figuren* so beschaffen, daß, wenn man ihre Grundlinien in grader Linie stellt, ihre Spitzen, oder ihre der Grundlinie gegenüberstehende Seiten, in derselben Parallellinie fallen, so haben sie *gleiche Höhe*.

β) Umgekehrt lassen *Figuren von gleicher Höhe* sich immer zwischen einerley Parallellinien so legen, daß ihre Grundlinien in die eine, ihre Spitzen oder höchsten Seiten in die andre fallen.

Wendet man diese Sätze insbesondere auf das Dreyeck und auf das Parallelogramm an, so ergeben sich daraus die folgenden Erklärungen.]

2.

Nimmt man irgend eine Seite AB eines *Dreyecks* Fig. 1. ABC zur Grundlinie an *, so ist das Perpendikel CD, *I. E. 18. welches aus der *Spitze*, das heißt aus dem gegenüberstehenden Winkelpunkt C, auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällt wird, die *Höhe des Dreyecks*.

[α) Legt man die Grundlinien zweyer Dreyecke in grader Linie, und zieht durch ihre Spitzen eine grade Linie, so sind *beyde Dreyecke von gleicher oder ungleicher Höhe, je nachdem diese Linie mit der Grundlinie parallel läuft, oder nicht* *.

*E. I, 20.

β) Ist im *rechtwinkligen Dreyeck* die eine Kathete Grundlinie, so stellt die andere die Höhe dar.]

3.

Nimmt man eine Seite eines *Parallelogramms* ABEC, z. B. AB zur Grundlinie *, so wird der Abstand * E. 1. der gegenüberstehenden Seite CE von dieser Grundlinie, (mithin das Perpendikel CD oder EF zwischen diesen beyden parallelen Seiten oder deren Verlängerung) die *Höhe des Parallelogramms* genannt. Eben so ist die *Höhe eines Trapezoid* * das Perpendikel EF zwischen den beyden parallelen Seiten des Fig. 14. selben, deren eine man stets für die Grundlinie annimmt. *I. E. 19.

[Legt man die Grundlinien zweyer Parallelogramme Fig. 6. in grader Linie, so liegen, ist die Höhe dieser Parallelogramme gleich, die gegenüberstehenden Seiten

auch in grader Linie, und zwar in einer graden Linie, welche mit der erstern parallel läuft; und ist umgekehrt dieses bey zwey Parallelogrammen der Fall, so haben sie gleiche Höhe. Wo nicht so ist ihre Höhe ungleich.]

4.

Fig. 2. [In jedem Rechteck ABCD stellen zwey an einander liegende Seiten z. B. AB, BC die Grundlinie und die Höhe dar; denn je zwey Seiten desselben stehn aufeinander senkrecht*. Im gleichseitigen Rechteck, d. h. im *Quadrat* stellt also jede Seite zugleich Grundlinie und Höhe dar. — Dem im ersten Buch * I. E. 19. A. 2. erklärten Kunstausdruck zu folge, ist also jedes Rechteck aus seiner Grundlinie und Höhe beschrieben, unter seiner Grundlinie und Höhe enthalten.

α) Rechtecke aus gleicher Grundlinie und gleicher Höhe beschrieben decken sich, und haben gleichen Inhalt*. Sind also die Grundlinien AB, EF und die Höhen BC, FG zweyer Rechtecke gleich, so ist es auch der Inhalt, und sie decken sich.

Fig. 3. β) Eben so haben Quadrate über gleiche Linien AB, EF beschrieben, gleichen Inhalt.

γ) Haben umgekehrt zwey Quadrate gleichen Inhalt, so haben sie auch gleiche Seiten und decken sich. Denn da sie beyde rechtwinklig sind, so kann man sie so aufeinander legen, dasz zwey Seiten auf einander fallen. Wären nun die Seiten ungleich, wie z. B. AB, AK so wäre das eine Quadrat über AK = EFGH, nur ein

Theil des andern ACDE, und also wären beyde nicht gleich, gegen die Voraussetzung.

[d. U.]

5.

[α] Rechtecke von gleicher Höhe haben zusammenge- Fig. 2.
nommen gleichen Inhalt mit einem Rechteck AG von derselben Höhe AB, dessen Grundlinie AH allen ihren Grundlinien zusammengenommen gleich ist.

Denn jene Rechtecke decken sich zusammenge-
nommen mit diesem einen Rechteck, weil sich dessen Grundlinie AH aus den Grundlinien jener Rechtecke, z. B. aus AD, DE, EH, der Voraussetzung gemäß zusammensetzen läßt. Errichtet man nemlich Perpendikel auf AH durch D und E, so theilen diese das Rechteck AG, in kleinere AC, DF, EG *, welche mit II. A. 12
den gegebenen gleiche Grundlinien und Höhen haben, sich also mit ihnen decken *, daher auch das ganze * 4. α .
Rechteck AG sich mit ihnen zusammengenommen deckt, und folglich mit ihnen gleichen Inhalt hat.

β) Besteht überdem die zweyte Seite eines Rechtecks aus mehreren Abschnitten AI, IB etc, und man errichtet auch auf ihr in den Theilpunkten Perpendikel IM etc., so laufen auch diese mit dem Seiten AH, BG, parallel *, durchschneiden die parallelen Linien I. 21.
DC, EF, HG insgesammt rechtwinklig * und zerthei- I. 25. f. 1
len deshalb jedes der vorigen Rechtecke AC, DF, EG I. E. 19.
in kleinere Rechtecke *, welche die Abschnitte der Seite AB zur Grundlinie, und die erstern AD, die zwey-

* I. 34 ten DE etc. zur gemeinschaftlichen Höhe haben"; daher das Rechteck aus zwey graden Linien AB, AH, die beyde aus mehreren Abschnitten bestehn, gleichen Inhalt hat mit allen den Rechtecken zusammengenommen, welche aus je zwey Abschnitten der einen und der andern beschrieben sind.

γ) Aus denselben Gründen ist der Unterschied zweyer Rechtecke von gleicher Höhe AF, AC einem Rechteck DF von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie ED dem Unterschiede ihrer Grundlinien AC, AD gleich ist.

Fig. 4. δ) Und besteht eine grade Linie AB aus zwey Theilen AC, CD, so sind die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem der beyden Theile, d. h. Rechteck aus AB', AC und Rechteck aus AB', CB, mit dem Rechteck aus AB', und $(AC + CB')$ d. h. mit dem Rechteck aus AB' und AB, also mit dem Quadrat aus der ganzen Linie AB, von gleichem Inhalt.

Fig. 5. ε) Hingegen ist das Rechteck aus einer Linie AB, die aus den beyden Theilen AC, CB besteht, und aus einem der beyden Theile, z. B. aus AC, gleich dem Rechteck aus AC', CB und dem Rechteck aus AC', AC, d. h. gleich dem Rechteck aus den beyden Theilen AC, CB, sammt dem Quadrat des Theiles AC.

Ist umgekehrt die Ergänzung eines Rechtecks CC', welches über einem Abschnitt AC einer graden Linie steht, zum (gleich hohen) Rechteck über der ganzen Linie ein Quadrat; so ist das erstere Rechteck aus den beyden Abschnitten AC, CB der gegebenen Linie beschrieben. (Euklid Lemma zu X. 18.)

Anmerkung. Die Sätze unter α , δ , ε machen die drey ersten Lehrsätze in *Euklids zweytem Buch* aus, wo sie mit umständlichern Beweisen, als es nöthig war, versehen sind. *Le Geodre* übergeht sie und die Sätze unter γ ganz und gar, und das sehr mit Unrecht, da sie die Fundamentalsätze über die Vergleichung des Inhalts gradeliniger Figuren enthalten. Ihrer grossen Einfachheit wegen, habe ich sie hierher, und nicht unter die Lehrsätze gestellt. Dafs man sie mit einer kleinen Modification auf alle Parallelogramme übertragen könne, sieht jeder. Sie sind den einfachsten Sätzen der Buchstabenrechnung analog, und wir werden in den Zusätzen zum vierten Lehrsatze zeigen, in wie fern sie auf diese hinauslaufen; nemlich die in *Erklärung 4*, auf die Sätze, dafs, falls $a = c$ und $b = d$ ist, $ab = cd$ und $a^2 = c^2$, und umgekehrt, wenn $a^2 = c^2$, auch $a = c$ seyn mus. Die in *Erklärung 5* hingegen auf die Sätze, dafs $ab + ac + ad \dots = a(b + c + d \dots)$; ferner $ab - ac = a(b - c)$; und falls $a = b + c$ ist, $a^2 = ab + ac$ und $ac = bc + c^2$; und dafs endlich $(a + b + c \dots)(e + f \dots) = ae + be + ce + af + bf + cf \dots$ ist.

d. U.]

6.

[*Erklärung über die Verhältnisse und Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen, und über dem wahren Sinn eines Produkts aus Linien.*

Wir haben in den beyden letzten Aufgaben des zweyten Buchs Methoden kennen gelehrt, wie sich jedes Verhältnifs zwischen zwey Linien, zwey Kreisbogen, oder zwischen zwey Winkeln, auf ein gleichgeltendes Zahlverhältnifs bringen läßt. Da nun ein Verhältnifs, z. B. zwischen zwey Linien A, B, auf der Vorstellung beruht, wie oft die eine A, oder ein bestimmter Theil derselben, in der andern B enthalten ist *, also auf * v. 1.

Vorstellung durch einen Zahlausdruck, (der nach
 II A. 16 Umständen selbst irrational seyn kann); so sieht man
 Fall 2. leicht *dass es jenes Zahlverhältniß ist, an das man sich
 halten muß, wenn man über Verhältnisse und Proportionen
 zwischen ausgedehnten Gröſſen, sich richtige Begriffe ma-
 chen will.*

Darauf macht auch Le Gendre aufmerksam, als auf
 etwas, das zur Einsicht in den wahren Sinn der fol-
 genden Sätze sehr wichtig ist. „Bey allen Verän-
 drungen, sagt er, die man in diesem und dem folgen-
 den Buche mit Proportionen zwischen ausgedehnten
 Gröſſen vornimmt, muß man stets die Glieder dieser
 Proportionen *als Zahlen* betrachten, deren jede sich
 auf ihre eigenthümliche Einheit bezieht. Thut man
 das, so wird man bey keinem dieser Verfahren, und
 bey keiner Folgerung die wir daraus ziehn, anstoſſen.“

Bey jeder richtigen Proportion $A : B = C : D$ ist,
 wie bekannt, das Produkt der äußern Glieder $A \cdot D$
 dem Produkt der innern Glieder $B \cdot C$ gleich. Das
 muß also auch der Fall seyn, wenn diese proportiona-
 len Gröſſen alle vier Linien oder A und B Linien, C und
 D Flächen, oder andre Ausdehnungen sind, *vorausge-
 setzt* das man sich beyde Verhältnisse in gleichelten-
 de Zahlverhältnisse verwandelt denkt. So kömmt man
 dann auf *Produkte aus Linien* oder auf *Produkte aus Li-
 nien in Flächen* u. d. m., doch *immer nur unter der Vor-
 aussetzung, das die Linien, Flächen u. f. durch Zahlen aus-
 gedrückt sind*, indem man sie auf ein bestimmtes Maas
 als Einheit bezieht. Außer dieser Rücksicht hätten
 jene Begriffe keinen Sinn. *Das Produkt aus zwey Li-*

nien *A* und *D* ist also nichts anders als ein *Zahlprodukt*, und zwar das Produkt aus den Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in *A* und wie viel deren in *B* enthalten sind.

Eben so ist das *Produkt aus einer Linie A in eine Fläche B* nichts anders als das Produkt der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in *A* und wie viel Flächeneinheiten in *B* enthalten sind, u. f. f.]

Anmerkung. Die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen, sind *Buch I, Erkl. 23* beyfammen gestellt, und man wird sich mittelst ihrer leicht helfen können, wenn man bey einer arithmetischen Vorstellung über die Verhältnisse in den folgenden Sätzen anstossen sollte. Ich verweise auf sie auch hier *durch das Marginal V*, z. B. *V. 4. α*, worunter man einen der Sätze über die Verhältnisse zu verstehn hat, die *B. I. Erkl. 23.* unter *4, α* aufgestellt sind. Welchen? das wird jeder leicht herausfinden. d. U.

7.

[Die Seiten zweyer Figuren, z. B. die Seiten *AB*, Fig. 10. *AD* und *AF*, *AE* der beyden Rechtecke von gleichem Inhalt *ABCD*, *AFGE*, sind *verkehrt proportional*, wenn sie in einer solchen Abhängigkeit von einander stehn, das in eben dem Verhältniß als die eine Seite der einen Figur gegen die eine Seite der andern gröfser ist, z. B. *AB* gegen *AF*, die zweyte Seite der ersten Figur, *AD*, gegen die zweyte Seite *AE* der andern kleiner ist, oder das, wenn $AB = m \cdot AF$ ist, $AD = \frac{1}{m} \cdot AE$ seyn muß.

Dann verhält sich aber allemal $AB : AF = AE : AD$ (indem die so gestellten Verhältnisse alsdann beyde * V. 2. gleiche Exponenten m haben *) und mithin gehören dann die Vorderglieder, so wie die Hinterglieder der beyden gleichen Verhältnisse, als Seiten zu verschiednen Figuren.

Grade so können *die beyden Abschnitte zweyer zweytheiligen Linien verkehrt proportional seyn.*

Anmerkung. Dieser Begriff ist in der Arithmetik current und wird in der hier erklärten Bedeutung auch schon von Euklid gebraucht, wiewohl von ihm so wenig als von Le Gendre und den übrigen Geometern besonders erklärt. Eben so mangeln bey ihnen die fruchtbaren Begriffe der folgenden Erklärung, die gleichfalls aus arithmetischem Boden herkommen. d. U.]

8.

[Zwey grade Linien sind proportional getheilt, wenn in der einen die Theile nach demselben Verhältniß und in derselben Anzahl und Folge wie in der andern vorhanden sind. So z. B. die beyden zweytheiligen Linien *Fig. 15.* AB, AC , in deren jeder die beyden Theile in gleichem Verhältniß unter sich und zur ganzen Linie stehn, ($AD : DB : AB = AE : EC : AC$); oder die beyden *Fig. 16.* dreytheiligen Linien AB, AC , in deren jeder die drey Theile in gleichem Verhältniß unter sich und zur ganzen Linie, und zwar in beyden in derselben Folge, gedacht werden ($Ab : bD : DB : AB = Ac : cE : EC : AC$)

α) Ueberhaupt nennt man die ersten Theile zweyer eingetheilten Linien, und die, welche von den ersten

um gleich viel Stellen abstehn, also die zweyten, dritten u. s. f. *übereinstimmende Theile*, und eben so die Gränzpunkte beyder Linien, und die welche von ihnen um gleich viel Stellen abstehn, *übereinstimmende Theilpunkte*. β) Diese liegen entweder in *gleicher Folge*, oder in *verkehrter (entgegengesetzter) Folge* wie z. B. wenn man in der einen Linie die Theilpunkte von der Linken zur Rechten, in der andern von der Rechten zur Linken zählt. γ) Zwey grade Linien sind also unserer Erklärung zu Folge proportional getheilt, wenn die übereinstimmenden Theile in der einen dasselbe Verhältniß untereinander und zur ganzen Linie, als in der andern haben. δ) Liegen die übereinstimmenden Theile in verkehrter Folge, so pflegt man auch wohl zu sagen, daß zwey solche Linien *in entgegengesetzter Folge proportional* sind.

Anmerkung. Ein Zeichen wie dieses $a : b : c = d : e : f$ sagt aus, daß je zwey der Größen links vom Gleichheitszeichen unter einander dasselbe Verhältniß haben, als die beyden Größen die rechts vom Gleichheitszeichen in denselben Stellen stehn, z. B. die ersten und zweyten, die ersten und dritten und die zweyten und dritten. Die obigen eingeklammerten Zeichen charakterisiren also die proportionalen Eintheilungen zweyer Linien sehr gut. In so fern eine Proportion in der Gleichheit zweyer Verhältnisse besteht, sind in diesen Zeichen eine Menge Proportionen eingewickelt, von denen man die herausheben kann, die man zu der jedesmaligen Absicht, braucht.

Da ferner die ersten Größen a, d in den zweyten b, e , und eben so in den dritten c, f , u. s. f. beyde (dem Begriff der Gleichheit unter Verhältnissen gemäß) gleich oft, ganz oder Theilweise, enthalten sind, und z. B. wenn $b = ma$ und $c = na$ ist, auch $e = md$ und $f = nd$ seyn muß; so stehn dann auch die ersten Glied-

der, die zweyten Glieder, u. f. untereinander in demselben Verhältniß $a : d = b : c = e : f$ etc; und ist das der Fall, so sind auch die Summen zweyer, dreyer oder aller übereinstimmender Glieder links vom Gleichheitszeichen und rechts von diesem

V. 47. Zeichen in demselben Verhältniß.

α) Dieses auf proportionale Linien angewandt, sieht man also das in ihnen je zwey übereinstimmende Theile in gleichem Verhältniß stehn, und so auch die Summe je zweyer, dreyer, kurz beliebig vieler, und folglich auch die Summe aller, d. h. die ganzen Linien; ein Satz den ich der Anwendung halber gleich mit in die Erklärung proportional getheilter Linien aufgenommen habe.

β) Sind umgekehrt zwey Linien AB, AC so eingetheilt, das je zwey übereinstimmende Theile in demselben Verhältniß stehn, $Ab : Ac = bD : cE = DB : EC$, so sind sie proportional getheilt. Denn dann verhalten sich die Vorderglieder aller dieser Verhältnisse zu einander, wie die Hinterglieder, und das macht das Wesen einer proportionalen Theilung aus. d. U.]

L E H R S A T Z I.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

Fig. 6. [Man lege beyde Parallelogramme so aufeinander, das ihre Grundlinien sich decken. Dann stehn beyde über der gemeinschaftlichen Grundlinie AB, und weil sie gleiche Höhe haben, fallen die Seiten DC, FE, welche der AB gegenüberstehn, in einerley Parallellinien mit der Grundlinie AB*. Und zwar liegen sie

entweder ganz auseinander, oder fallen zum Theil aufeinander, welche Fälle die Figur beyde darstellt.]

In jedem der beyden Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Seiten gleich; $AD = BC$, $AF = BE$ und $DC = AB = FE$; und da auch das gleich seyn muß, was übrig bleibt, wenn man die gleichen Linien DC , FE beyde von der Linie DE abzieht, so ist auch $CE = DF$ *. Mithin sind die beyden Drey-^{*Gr. 2. 3.}ecke ADF , BCE untereinander gleichseitig, müssen sich also decken *, und haben gleichen Inhalt; daher • I. 11. auch ihr Unterschied vom Trapez $ABED$ gleich seyn muß. Zieht man aber von diesem Trapez das Dreyeck ADF ab, so bleibt das Parallelogramm $ABCD$, und zieht man das Dreyeck BCE ab, so bleibt das Parallelogramm $ABED$ übrig. Folglich haben diese beyden Parallelogramme, weil ihre Grundlinien und ihre Höhen gleich sind, auch gleichen Inhalt.

Folgerung 1. Jedes Parallelogramm $ABED$, Fig. 1. hat also insbesondre gleichen Inhalt mit einem Rechteck $CEFD$, welches mit demselben von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe ist.

Folgerung 2. Haben zwey Parallelogramme gleiche Höhe, aber ungleiche Grundlinie, so ist das das Größere, welches über der größern Grundlinie steht. Denn ein Theil desselben, ist dann dem erstern gleich.

[Anmerkung. Dieser Lehrsatz läßt sich auch auf Trapezoide von gleicher Höhe *, deren parallele Seiten in beyden gleich sind, ausdehnen, und für diese grade auf dieselbe Art beweisen.] E. 3.

LEHRSATZ 2.

Fig. 1. *Der Inhalt eines Dreyecks ABC, ist halb so groß als der Inhalt eines Parallelogramms, welches mit dem Dreyecke gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.*

[Man ziehe durch zwey Winkelpunkte des Dreyecks B, C Parallellinien mit den gegenüberstehenden Seiten, CE parallel mit AB, und BE parallel mit AC, so entsteht ein Parallelogramm ABEC, welches mit dem Dreyeck ABC einerley Grundlinie AB, und gleiche Höhe hat, da beyde zwischen denselben Parallellinien AB, CE liegen *. In diesem Parallelogramm ist BC eine Diagonale. Also sind die Dreyecke ABC, BCE gleich *, und mithin das Dreyeck ABC die Hälfte des Parallelogramm ABEC. Da aber mit diesem Parallelogramm ein jedes andere von gleicher Höhe und gleicher Grundlinie gleichen Inhalt hat, so gilt unser Satz allgemein.]

Folgerung 1. Der Inhalt eines Dreyecks ABC ist also ins besondere halb so groß als der Inhalt eines Rechtecks CDFE, welches mit Dreyeck gleiche Grundlinie AB und gleiche Höhe CD hat.

[*Folgerung 2. Alle Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt. Denn sie sind die Hälften von Parallelogrammen, die nach Lehrf. 1. gleichen Inhalt haben müssen.*

[*Zusatz. Haben umgekehrt zwey Dreyecke ABC, DBC gleiche Grundlinie und gleichen Inhalt, so haben sie*
und

auch gleiche Höhe. Denn gesetzt sie hätten ungleiche, und zwar ABC die gröfsere Höhe, so nehme man in einem der Schenkel des höhern einen Punkt G, der so weit, als im andern Dreyeck die Spitze, von der Grundlinie absteht, und ziehe von demselben nach dem gegenüberstehenden Endpunkte der Grundlinie eine grade Linie GC, so entstünde dadurch ein Dreyeck GBC, welches mit dem Dreyeck DBC gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, also gleichen Inhalt, mithin auch mit dem Dreyeck DBC, wovon es doch nur ein Theil ist, gleichen Flächenraum hätte; welches ungereimt ist.

Die Spitzen aller Dreyecke von gleichem Inhalt, welche über derselben Grundlinie BC stehn, liegen folglich in einer Parallellinie mit der Grundlinie, und *eine solche Parallellinie AE ist der geometrische Ort für diese Spitzen* oder für die Aufgabe, von zwey gegebenen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich so durchschneiden, dafs das Dreyeck zwischen dem Durchschnittspunkt und den beyden gegebenen Punkten, eine gegebne Gröfse habe. Alle Punkte der Parallellinie, und keiner der Punkte aufser ihr, thun dieler Aufgabe genüge *. (Apollonius 1. 3.)] I.E. 21.

L E H R S A T Z 3.

Die Flächenräume zweyer Rechtecke von gleicher Höhe, verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Q

Fig. 8. Wenn die Rechtecke ABCD, AEFD beyde die Linie AD zur Höhe haben, [folglich sich beyde zwischen zwey Parallellinien AB, DC legen lassen, deren Abstand AD ist*,] so, behaupte ich, verhält sich der Inhalt dieser beyden Rechtecke, wie ihre Grundlinien AB, AE.

Denn gesetzt *erstens* die Grundlinien AB, AE sind *commensurabel*, so läßt sich ihr Verhältniß in ein gleichgeltendes Zahlverhältniß verwandeln*. Dieses sey z. B. das Verhältniß 7 : 4; so muß, wenn man AB in 7 gleiche Theile theilt, AE genau 4 solcher Theile enthalten. Errichtet man in jedem der Theilungspunkte ein Perpendikel auf der Grundlinie AB, so entstehn dadurch 7 kleine Rechtecke (rectangles partiels) die allesammt gleiche Grundlinien und gleiche

• II.A.19 Fall 1. i. Höhe, folglich auch gleichen Inhalt* haben, und wovon 7 im Rechteck ABCD, 4 im Rechteck AEFD enthalten sind. Folglich verhalten sich diese beyden Rechtecke zu einander wie 7 zu 4, also wie die Grundlinien AB zu AE. Da sich dieselbe Schlussfolge auf jedes andre Zahlverhältniß übertragen läßt, so verhalten sich allgemein, wenn die Grundlinien *commensurabel* sind, die Flächenräume der Rechtecke von gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien, oder

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Fig. 9. Gefetzt *zweytens* die Grundlinien AB, AE sind *unter einander incommensurabel*, hätten kein gemeinsames Maafs*, so muß demungeachtet dieselbe Proportionalität zwischen den Flächenräumen und den Grundlinien statt finden. Denn wollte man dieses läugnen,

• II.A.19 Fall 2.

so müßte man behaupten nicht AE, sondern irgend eine andre Linie AO, die größer oder kleiner als AE ist, sey die richtige vierte Proportionallinie zu den drey andern Linien. Wir wollen also setzen dieses AO sey um EO größer als AE, und es sey dann

$$ABCD : AEFD = AB : AO.$$

Theilt man nun die grade Linie AB in gleiche Theile, welche kleiner als EO sind *, so muß zwischen E und O wenigstens ein Theilpunkt I fallen. Durch diesen ziehe man auf die Grundlinie senkrecht IK, so entsteht ein Rechteck AIKD, welches mit dem Rechteck ABCD gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie AI mit der Grundlinie AB commensurabel ist [indem der angenommne Theil beyde mißt.] Die Flächenräume dieser beyden Rechtecke sind also, nach dem was vorhin bewiesen ist, den Grundlinien proportional, also

$$ABCD : AIKD = AB : AI$$

Diese Proportion hat mit der Vorhergehenden, gleiche Vorderglieder in beyden Verhältnissen. Also müßten die Hinterglieder proportional seyn *, oder

$$AEFD : AIKD = AO : AI,$$

Nun aber ist AI kleiner als AO, also müßte auch das Rechteck AIKD kleiner als das Rechteck AEFD seyn; folglich AI kleiner als AE, welches der Voraussetzung widerspricht. Also kann keine Linie AO, welche größer als AE ist, die richtige vierte Proportionallinie zu den drey Größen ABCD, AEFD, AB seyn.

Durch eine ähnliche Schlussfolge beweist man daß auch keine Linie welche *kleiner* als AE ist, die richtige vierte Proportionalgröße sein kann.

Nothwendig muß dieses also AE selbst seyn.

Wie sich demnach auch in zwey Rechtecken von gleichen Höhen die Grundlinien verhalten, immer sind ihre Flächenräume ABCD, AEFD den Grundlinien AB, AE proportional.

Folgerung 1. Gleich hohe Rechtecke über incommensurable Grundlinien beschreiben, sind folglich ebenfalls incommensurabel, indem ihr Verhältniß

* II. A. gleichfalls irrational ist *.

19. a.

Folgerung 2. Zwey grade Linien AC:CB verhalten sich stets wie das Quadrat der einen, zum Rechteck aus beyden, also wie Qdrat AC: Rechteck aus AC, CB oder wie Rechteck aus AC, CB: Qdrat CB, (Eukl. X. 23. Lemma). Auch verhalten sie sich wie Rechteck AB, AC: Rechteck AB, CB (Euklid X. 33.)]

[Anmerkung. Der Beweis dieses dritten Lehrsatzes stimmt in allem mit dem Beweis des 22sten Lehrsatzes im Zweyten Buche überein. Einige Bemerkungen über diese Beweisart findet man dort in Zusatz I.]

LEHRSATZ 4.

Fig. 10. Die Flächenräume zweyer Rechtecke ABCD, AEGF verhalten sich zu einander wie die Produkte aus der Grundlinie eines jeden in dessen Höhe, oder es ist allgemein

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$

[Man lege beyde Rechtecke so an einander, daß sie einen Winkelpunkt A gemein haben, zugleich zwey ihrer Seiten AB, AE eine grade Linie bilden, und die beyden Rechtecke sich auf entgegengesetzten Seiten dieser Linie befinden. Da dann AD, AF auf demselben Punkte einer graden Linie senkrecht stehn, so liegen auch sie in grader Linie.*] Verlängert man ^{*I.1.Z.2} die Seiten CD, GE bis zu ihrem Durchschnittspunkt H, so entsteht ein Rechteck AEHD, welches mit jedem der gegebenen Rechtecke zwischen denselben Parallelen CH, BE und DF, HG liegt *, mit ihnen ^{*II.A.II} also einerley Höhe hat *, und dessen Flächenraum ^{* E. 3.} sich deshalb zu den Flächenräumen jener Rechtecke, wie die Grundlinien EA, AB und DA, AF verhalten *, * 3. oder

$$ABCD : AEHD = AB : AE$$

$$AEHD : AEGF = AD : AF.$$

Setzt man diese beyden Proportionen zusammen *, so ^{*V.4.δ.} erhält man, da aus den beyden ersten Produkten der Zahlausdruck des Rechtecks AEHD als gemeinschaftlicher Factor hinausfällt,

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF *. \quad * E. 6.$$

[Also sind die Flächenräume je zweyer Rechtecke den Produkten aus ihren Grundlinien in ihren Höhen proportional*, oder, was dasselbe sagt, *das Verhältniß* * E. 6. *der Flächenräume ist aus dem Verhältniß der Grundlinien und aus dem Verhältniß der Höhen beyder Rechtecke zusammengesetzt* *.] * V. 4. δ

[Folgerung I. Haben die beyden Rechtecke ABCD, AEGF gleichen Inhalt, so stehn sie im Verhältniß der

Gleichheit. Folglich müssen die Produkte aus den beyden Seiten, woraus sie beschrieben sind, d. h. die

- * E. 6. Produkte aus den Zahlausdrücken dieser Seiten *) ebenfalls im Verhältniß der Gleichheit stehn, oder es muß $AB \times AD = AE \times AF$ seyn, daher zwischen diesen Zahlausdrücken stets folgende Proportion besteht

$$* V. 3. \gamma \quad AB : AE = AF : AD *$$

Die Seiten zweyer Rechtecke von gleichem Inhalt sind

- * E. 7. *mithin stets verkehrt proportional **.

Sind umgekehrt zweyer Rechtecke Seiten, verkehrt

- * E. 7. *proportional **, so sind ihre Flächenräume gleich. Denn verhält sich $AB : AE = AF : AD$, so sind die Produk-

- * E. 6. te $AB \times AD$ und $AE \times AF$ gleich *, daher auch die
 V. 3. β . Flächenräume beyder Rechtecke, welche dem Lehrsatz zu folge, in demselben Verhältnisse wie diese Produkte stehn, gleich seyn müssen.

Hat man also vier proportionale Linien, so ist allemal das Rechteck aus den mittlern dem Rechteck aus den äußern gleich.]

- Fig. 11. [Folgerung 2. Sind die Linien AB, CD, EF, GH , und so auch die Linien AK, CL, EM, GN , untereinander proportional, so sind auch die Rechtecke proportional, welche man aus den ersten, zweyten dritten und vierten dieser Linien beschreibt, oder

$$\text{Rechtk. } AB, AK : \text{Rechtk. } CD, CL = \text{Rechtk. } EF, EM : \text{Rechtk. } GH, GN.$$

Denn aus der Zusammensetzung der beyden gegebenen Proportionen folgt, daß dann auch die Produkte aus den ersten, zweyten, dritten, vierten dieser

proportionalen Linien *, proportional sind, oder dafs * E. 6.
 sich verhält $AB \times AK : CD \times CL = EF \times EM : GH \times$
 GN *. Nun aber ist nach unserm Lehrsatz das erstere *V. 4. d.
 Verhältniß dieser Produkte, dem Verhältniß des In-
 halts der Rechtecke, die aus den Linien in ihnen be-
 schrieben sind, gleich, (Rechteck aus AB, AK : Recht-
 eck aus CD, CL). Eben so ist das zweyte Verhältniß
 dieser Produkte dem Verhältniß der Rechtecke gleich,
 die aus den Linien in ihnen beschrieben sind (Rechteck
 aus EF, EM : Rechteck aus GH, GN). Da nun bey-
 de Verhältnisse jener Produkte gleich sind, so sind es
 auch die Verhältnisse dieser Rechtecke, und diese vier
 Rechtecke sind proportional.

*Insbesondere sind also die Quadrate vier proportionä-
 ler Linien proportional*, z. B. in unserm Fall ($q. AK : q.$
 $CL = q. EM : q. GN$.) Denn sind die Seiten der vier
 Quadrate proportional, so sind es auch immer ihre
 Grundlinien und Höhen *.

* E. 4.

Die Wahrheit dieser Sätze erhellt unmittelbar
 auch daraus, dafs unserm Lehrsatz zu Folge das Ver-
 hältniß der Flächenräume von Rechtecken aus dem
 Verhältniß ihrer Grundlinien und ihrer Höhen zusam-
 mengesetzt ist. Denn ist dieses, so müssen zwey
 Rechtecke untereinander dasselbe Verhältniß, als zwey
 andere haben, wenn die Grundlinien, so wie die Höhen
 der Erstern untereinander dasselbe Verhältniß, als die
 Grundlinien und die Höhen der Letztern haben.]

[*Folgerung 3. Sind umgekehrt vier Rechtecke,
 und zugleich deren Grundlinien, proportional, so müssen
 auch ihre zweyten Seiten proportional seyn;*

und stehn vier Quadrate in gleichen Verhältnissen ($q \cdot AK : q \cdot CL = q \cdot EM : q \cdot GN$), so stehn darin auch ihre Seiten.

Denn da nach unserm Lehrsatz Rechtecke sich wie die Produkte aus ihren Seiten verhalten, so folgt *V. 4. d. durch Trennung * dieser Proportion und der, welche die Proportionalität einer Seite in den Rechtecken angiebt, die Proportionalität der zweyten Seiten. — Insbesondere folgt aus der gegebenen Proportionalität der Quadrate, die Proportionalität der Produkte $AK \times AK : CL \times CL = EM \times EM : GN \times GN$, und daraus die Proportionalität der Seiten $AK : CL =$ *V. 1. b. $EM : GN$ *]

Zufatz I. Die hier! erwiesene *Proportionalität zwischen den Flächenräumen der Rechtecke und den Produkten aus ihren Seiten*, berechtigt uns die Produkte aus der Grundlinie in die Höhe eines jeden Rechtecks zum Maaß des Flächenraums der Rechtecke zu nehmen. Es versteht sich, daß hierbey von den Zahlenausdrücken der Grundlinie und der Höhe, und von * E. 6. deren Produkten die Rede ist *; d. h. von Produkten der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten die Grundlinie, und wie viel deren die Höhe enthält.

Bey diesem Maaß ist dasselbe als bey dem zu bemerken, welches wir in den Zufätzen zu Lehrsatz 22 des zweyten Buchs für die Winkel aufgestellt haben. Es ist nicht absolut, sondern nur Beziehungsweise ein Maaß [oder vielmehr kein unmittelbares, sondern nur

ein mittelbares Maafs]. Es setzt voraus, daß man irgend eines andern Rechtecks Flächenraum auf dieselbe Art bestimmt, indem man die Seiten desselben mit derselben Lineareinheit mißt, und das Produkt dieser Zahlausdrücke nimmt. Das Verhältniß beyder Produkte giebt dann das Verhältniß der Flächenräume. Enthält z. B. die Grundlinie eines Rechtecks A 7, dessen Höhe 3 Lineareinheiten, so wird der Flächenraum dieses Rechtecks durch die Zahl 7×3 oder 21 vorgestellt, welche Zahl einzeln und für sich nichts bedeuten würde. Hat man aber ein zweytes Rechteck, dessen Grundlinie 12, und dessen Höhe 7 Lineareinheiten enthält, so wird der Inhalt desselben durch die Zahlen 12×7 oder 84 vorgestellt; woraus man schliessen muß, daß die Flächenräume beyder Rechtecke A und B sich zu einander wie die beyden Zahlen 21 und 84 verhalten, dieses also das Vierfache von jenem ist, [da dem eben bewiesenen zu Folge die Flächenräume zweyer Rechtecke sich wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen verhalten.] Gesetzt man käme darin überein, das Rechteck A allgemein als Einheit bey dem Messen der Flächenräume zu gebrauchen, [also die Gröfse aller Flächenräume dadurch auszudrücken, wie vielmal sie das Rechteck A, oder welchen Theil desselben, sie enthalten] so wäre $\frac{84}{21}$ oder 4 das absolute [vielmehr das unmittelbare] Maafs des Rechtecks B, und das hiefse dann nichts anders, als, dieses Rechteck ist 4 solcher Flächeneinheiten gleich.

Nun ist es allgemein gebräuchlich, und in der That am einfachsten, ein Quadrat zur Flächeneinheit zu nehmen, und zwar braucht man dazu das Quadrat, des-

sen Seite die Lineareinheit ist, z. B. den Quadratzoll, den Quadratzuß, die Quadratruthe u. s. f. | Wenn dieses einmal festgesetzt ist, so geht jenes mittelbare Maafs für den Flächenraum eines Rechtecks, durch die Produkte der Grundlinie in die Höhe, in ein unmittelbares über. Die Zahl 21, welche das Maafs des Rechtecks A angab, bezeichnet dann 21 Flächeneinheiten, d. h. 21 Quadrate, deren Seite die Lineareinheit ist; und daß ein Rechteck dessen Höhe 3 und dessen Grundlinie 7 Lineareinheiten gleich ist, in der That 21 solcher Quadrate in sich enthalten müsse, springt so gleich aus Erkl. 5. ε, und auch unmittelbar aus der

Fig. 12. Figur in die Augen, indem ein solches Rechteck sich mittelst Perpendikel aus den Theilungspunkten in 3 Bänden, deren jede 7 kleine Quadrate faßt, zertheilen läßt. — Jeder andre völlig begränzte Flächenraum ist dem Inhalt nach irgend einem Rechteck gleich, [indem uns nichts hindert Rechtecke von jeder möglichen Gröfse zu denken,] wird sich also ebenfalls, durch ein Produkt aus zwey Linien messen lassen, [womit es denn immer die hier entwickelte Bewandniß hat, indem ein solches Produkt zunächst den Inhalt eines Rechtecks giebt, das mit der andern Figur gleichen Flächenraum hat.]

Fig. 10. [Zufatz II. Sind wir berechtigt uns den Flächenraum eines jeden Rechtecks ABCD durch ein Produkt aus der Grundlinie AB in die Höhe BC vorzustellen; so sind wir auch befugt den Flächenraum eines Rechtecks durch dieses Produkt, oder durch $AB \times BC$ zu bezeichnen, indem wir die Zeichen für die Grund-

linie und die Höhe durch das Multiplicationszeichen \times verbinden. Und dieses Zeichens wollen wir uns hinfüro beständig bedienen um den Inhalt eines Rechtecks, das aus den Linien AB, BC beschrieben ist, oder dessen Grundlinie AB, dessen Höhe BC ist, zu bezeichnen.

Ein solches Produktenzeichen zweyer Linien z. B. $EF \times GH$ kann man also hinfüro nach Willkühr *entweder durch Produkt aus den beyden Linien EF, GH, oder durch Rechteck aus den Linien EF, GH* übersetzen. Beydes kömmt nach dem hier Erklärten auf eins hinaus. Um indess nicht gänzlich in die rechnende Geometrie überzutreten, wird es vortheilhafter seyn, wenn man sich im folgenden an die letztere Auslegung hält, und also bey einem solchen Zeichen stets an *ein Rechteck* aus den genannten Linien denkt. Hierbey fällt es sogleich in die Augen, daß *diese Bezeichnung für den Flächenraum eines Rechtecks*, (welche aus den Zeichen der Seite mittelst einer arithmetischen Beziehung abgeleitet ist), *lediglich unter der Bedingung gültig und sinnvoll ist*, unter der es allein erlaubt war, den Flächenraum eines Rechtecks als ein *Produkt* aus seinen Seiten anzutehn; nemlich unter der Voraussetzung, daß wir ein für allemal den Flächenraum aller Rechtecke mit einem Rechtecke (als Flächeneinheit) messen, mit dessen einer Seite wir alle Grundlinien, mit dessen andrer wir alle Höhen gegebner Rechtecke vergleichen und ausmessen; und zwar haben wir dazu ein für allemal das *Quadrat* erwählt, welches über der Lineareinheit als Seite beschrieben ist. Und so ist demnach der *arithmetische*

Sinn dieses Zeichens $AB \times BC$, als Zeichen eines Flächenraums, stets so zu erklären, wie wir es mit der Vorstellung selbst, worauf das Zeichen fusst, im vorigen Zusatz gethan haben.

Mit dem *geometrischen Sinn* dieses Zeichens, bey dem wir ganz davon absehn, das es eigentlich ein Produkt bedeutet, würden wir ohne die Sätze, welche die *Folgerungen* aus unserm Lehrsatze, besonders die erste, auslagen, nicht weit reichen. Diese berechtigen uns aber, grade so, wie wir aus der Proportionalität von vier Zahlen auf die Gleichheit der Produkte der innern und äußern Glieder schliessen, aus der Proportionalität von vier Linien $AB : AE = AF : AD$ auf die Gleichheit des Flächenraums der Rechtecke aus den mittlern und aus den äußern Linien $AB \times AD = AE \times AF$ zu schliessen, und umgekehrt, abgesehn von aller arithmetischen Befugniss zu diesem Schlusse. Mittelst ihrer wird daher der Geometer in den Stand gesetzt, die *arithmetische Ansicht* der Abhängigkeit zwischen Seiten und Inhalt der Rechtecke, größtentheils zu umgehn, und die Begriffe von *Produkten aus Linien* ganz zu vermeiden. Das thut Euklid, und die ihm folgen; daher sie auch das Rechteck nicht auf die Art wie unser Verfasser, sondern durch ein den Eckbuchstaben vorgezeichnetes \square oder *Rect.* bezeichnen, z. B. \square ABBC oder *Rect.* AC. Allein da das Wesen des Verhältnisses und der Proportion am Ende doch auf Zahl, also auf arithmetische Vorstellungen beruht; so dünkt es mich auf einen kleinen Mißverständnis hinaus zu laufen, wenn man aus der Lehre des Ver-

haltens und der Proportionalität ausgedehnter Größen, alles Arithmetische verbannen und es darin sorgfältig vermeiden will. Höchstens kann man es verstecken, wodurch aber diese Lehre wahrlich nicht erleichtert, sondern nur verdunkelt wird. Ueberdem müssen wir da, wo wir durch Zusammenfetzen linearer Proportionen oder durch Multiplicationen auf Ausdrücke wie z. B. folgende kommen $AB \times BC \times EF \times GH$, doch nothwendig zum arithmetischen Sinn unsere Zuflucht nehmen. Ich bleibe daher bey *Le Gendres* Bezeichnung, (welche dieser aus *Tacquets* und *Whiffons Euklid*, oder vielmehr aus *Simpsons* Elementen, die sich ihrer durchgängig bedienen, entlehnt zu haben scheint), und die eben durch den arithmetischen Sinn, der zugleich in ihr liegt, vorzüglich und recht charakteristisch wird. Hier im Lehrgebäude der Geometrie übersetzen wir das Zeichen $AB \times BC$ durch *Rechteck* aus den Linien AB, BC , und das ist der *geometrische Sinn* desselben. Dagegen brauchen wir es nur nach seinem *arithmetischen Sinn*, als Produkt zweyer Linien AB, BC zu nehmen, um uns unmittelbar in die rechnende Geometrie zu versetzen.]

[Zufatz III. Produkte von gleichen Faktoren nennt der Arithmetiker *Potenzen*, und zwar nach der Anzahl der gleichen Faktoren, die wir in ihnen denken, die zweyte, dritte Potenz u. f. Das arithmetische Zeichen der zweyten Potenz aus einer Gröfse a ist a^2 , der dritten Potenz a^3 , u. f. f. * α) Ganz dem ^{1.E. 22.} Geiste unserer Bezeichnung gemäß, werden wir daher den *Flächenraum eines Quadrats*, welches aus der Linie

- Fig. 4. *AB* beschrieben ist, mit AB^2 bezeichnen †). Denn als gleichseitiges Rechteck wird es durch ein Produkt aus
- * Z. 1. zwey gleichen Faktoren, $AB \times AB$ gemessen *, und muß also durch das Zeichen der zweyten Potenz von
- * Z. 2. *AB*, bezeichnet werden *; eine Bezeichnung, von der alles gilt, was wir über die vorige bemerkt haben, und bey der man sich also allemal den *Flächenraum* des über der Linie *AB* beschriebnen Quadrats denke, welches Euklid durch das Zeichen $\square AB$, andre, z. B. Tacquet, durch $ABq.$, wie mich dünkt nicht ganz so vor-
- * Z. 2. theilhaft bezeichnen *. β) Mißt man ferner die Seite *AB* mit der Lineareinheit, und verwandelt sie auf diese Art in einen Zahlausdruck, so enthält $\square AB$ so viel über der Lineareinheit beschriebene Quadrate (d. i. Flächeneinheiten) in sich, als die zweyte Potenz jener Zahl an-
- * Z. 1. giebt *. — γ) Weiß man endlich umgekehrt den Zahlausdruck eines Quadrats, $\square AB$, in Beziehung auf die Flächeneinheit, so giebt die Quadratwurzel aus dieser Zahl den Zahlausdruck für die Seite *AB* dieses Quadrats in Lineareinheiten. Diese beyden Sätze springen auch durch Construction, mittelst Erkl. 5. β . sogleich ins Auge.

†) Le Gendre fügt diesem Zeichen durchgängig noch einen Strich über die beyden Buchstabe hinzu, z. B. $\overline{AB^2}$. Allein da wir hinlänglich daran gewöhnt sind, diese Buchstaben stets als Ein Zeichen, nemlich als das Zeichen einer Linie anzusehn, folglich nicht zu fürchten haben, daß jemand ein Zeichen wie AB^2 für folgendes $A \cdot (B)^2$ nehmen, und als solches übersetzen werde, so ist dieser den Druck erschwerende Zusatz, in den mehrsten Fällen überflüssig. Auch bedient sich Simpson durchgängig des Potenzenzeichens ohne diesen Zusatz,

Denn enthält z. B. die Linie AB 2 oder 3 Lineareinheiten in sich, so läßt sich das Quadrat aus AB (d. h. ABDC oder AB' D'C) durch Perpendikel, welche auf den Seiten in den Theilungspunkten errichtet werden, in 2 oder 3 gleiche Banden zerschneiden, deren jede im ersten Fall aus 2, im zweyten aus 3 Quadraten besteht, welche über der Lineareinheit als Seite beschrieben sind; enthält mithin im ersten Fall 4, im zweyten 9 solche Flächeneinheiten in sich. Umfaßt es umgekehrt eine solche Zahl von Flächeneinheiten, so ist dessen Seite 2 oder 3 Lineareinheiten gleich.]

Anmerkung 1. Der Zahlausdruck eines jeden Quadrats ist also eine Quadratzahl, nemlich die zweyte Potenz aus dem Zahlausdruck der Seite; und der Zahlausdruck der Seite umgekehrt eine Quadratwurzel, nemlich aus dem Zahlausdruck der Quadratfläche. Die Flächen zweyer Quadrate verhalten sich also zu einander stets wie zwey Quadratzahlen, nemlich wie die zweyten Potenzen aus dem Zahlausdruck der Seiten, und umgekehrt verhalten sich die Seiten zweyer Quadrate wie zwey Quadratwurzeln nemlich wie die Quadratwurzeln aus dem Zahlausdrücken der Flächen.

Hieraus folgt erstens, die Reduction verschiedener Flächenmaasse auf einander. Alle unsere Flächenmaasse sind nemlich Quadrate, verhalten sich also wie die zweyten Potenzen der Zahlausdrücke ihrer Seiten. Enthält so z. B. 1 Ruthe 16 Fufs, 1 Fufs 12 Zoll, 1 Zoll 10 Theile in sich; so gehn auf 1 Quadratruthe $16^2 = 256$ Quadratfufs, auf 1 Quadratfufs $12^2 = 144$ Quadrat Zoll, und auf 1 Quadrat Zoll $10^2 = 100$ Quadrattheile; und verhalten sich der Pariser und Rheinländische Fufs zu einander wie $1440 : 1391$, so ist das Verhältniß beyder Quadratfusse wie $1440^2 : 1391^2$ d. i. ungefähr wie $207 : 193$.

Wissen wir zweytens dafs ein Quadrat z. B. 25 oder 169 Quadratzoll enthält, so ist die Seite desselben $\sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{169} = 13$ Zoll lang. Ist folglich der Zahlausdruck eines Quadrats in Beziehung auf ein anderes, als Einheit, keine Quadratzahl, z. B. 15, so ist der Zahlausdruck für die Seite desselben, in Beziehung auf die Seite des andern, eine Irrationalzahl, $\sqrt{15}$; beyde Seiten sind also *incommensurabel*.

Drittens wird vermöge dieser Sätze und der analogen im zweyten Zusatze die ganze *Theorie von commensurablen und incommensurablen Flächen*, und deren Verhalten, auf die Lehre von den *Irrationalzahlen* zurück geführt, (wovon der eben aufgestellte Satz ein Beyspiel giebt, der bey Euklid X. 6, freylich anders ausgedrückt vorkömmt,) und mithin der eigentliche Gegenstand von Euklids zehntem Buch * aus der Geometrie in die

* II, A. 19, a. Arithmetik verwiesen.

Anmerkung 2. So wie unsere Bezeichnung für Rechtecke und Quadrate aus der Arithmetik entlehnt ist, so haben schon die *griechischen Mathematiker* (gestützt auf der Analogie des Produkts aus zwey Linien, und der Fläche eines Rechtecks welches aus diesen beyden Linien beschrieben ist, so wie zweyter Potenzen und der Flächen von Quadraten) theils die Begriffe von Flächen, Rechtecken, Quadraten und andre verwandte, aus der Geometrie in die Arithmetik, theils umgekehrt die arithmetischen Begriffe des Multiplicirens auf geometrische Constructionen übertragen. Nach dieser Analogie nennen sie z. B. in der *Arithmetik* ein jedes Produkt aus zwey Zahlen eine *Flächenzahl*, die zweyte Potenz einer Zahl ein *Quadrat*, und die Division einer Zahl in die andre, *Applicatio numeri ad numerum*, nach der Aehnlichkeit mit dem Verfahren in Aufg. 3. am Ende dieses Buchs.

Umgekehrt deuten sie (oder vielmehr die Geometer des Mittelalters) die *Construction* eines Rechtecks aus zwey gegebenen Linien AB, BC so an: *multiplicire AB in BC*; das Rechteck selbst durch

durch den Ausdruck: *quod fit ex ductu alterius Lineae in alteram*, und das Quadrat einer Linie durch *Potestas lineae*, oder blos durch *potest*. Ausdrücke, die ohne diese Erläuterung allerdings sehr sonderbar schienen. So z. B. fragt *Clavius* nach dem Unterschiede der Quadrate zweyer Linien folgendermassen: *invenire id, quod plus potest major, quam minor*, und der Pythagoreische Lehrsatz wird oft so vorgetragen: *hypotenufa potest cathetos*; d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist dem Quadrat der beyden Katheten gleich. Selbst Euklid bezeichnet auf diese Art die Gleichheit des Quadrats einer Linie mit einem andern Rechteck, „Wenn eine Linie nach stetigem Verhältniß geschnitten ist, so kann das Quadrat des größern Abschnitts das Rechteck aus dem kleinern Abschnitt und der Linie“.

Anmerkung 3. Aus den Erörterungen zu diesem Lehrs. erhellet endlich, in wie fern wir oben behaupten konnten, daß die in Erklärung 4 und 5 aufgestellten Sätze, auf die Arithmetischen Sätze, welche dort angeführt werden, hinaus laufen.

d. U.

LEHRSATZ 5.

Der Flächenraum eines Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe gemessen;

der Flächenraum eines Dreyecks durch das halbe Produkt aus der Grundlinie in die Höhe.

Denn ein Parallelogramm ABEC hat mit einem Fig. 1. RechteckCDFE, welches von gleicher Grundlinie AB und gleicher Höhe CD mit diesem Parallelogramme ist, gleichen Inhalt *, und also auch zum Maasse seines • I. f. 1 Flächenraums ebenfalls das Produkt $AB \times CD$ *. — 4. Z. 1.

R

Ein Dreyeck ABC ist aber nur halb so groß als ein solches Rechteck *, hat folglich zum Maasse seines Inhalts das Produkt $\frac{1}{2} CD \times AB$.

Folgerung. 1. Zwey Parallelogramme und so auch zwey Dreyecke von gleicher Höhe, verhalten sich folglich dem Inhalt nach, wie ihre Grundlinien; und haben sie gleiche Grundlinien, so verhalten sie sich wie ihre Höhen. Denn aus dem Verhältniß der Produkte wodurch ihr Inhalt bestimmt wird, fallen die gleichen *V. 1. 3. Factoren unbeschadet des Verhältnisses hinaus*, daher dieses Verhältniß im ersten Fall mit dem Verhältniß der Grundlinien, im zweyten mit dem Verhältniß der Höhen übereinstimmt.

Fig. 15. [*Folgerung 2.* Da das Verhältniß zweyer Produkte aus dem Verhältniß der Faktoren zusammengesetzt ist, so ist folglich auch das Verhältniß des Inhalts zweyer Parallelogramme, so wie zweyer Dreyecke, zusammengesetzt aus dem Verhältniß der Grundlinien und der Höhen, z. B.

$$\begin{aligned} \triangle ABC : \triangle EFG &= AD \times BC : EH \times FG \\ * V. 6. &= (AD : EH) (BC : FG) * \end{aligned}$$

Folgerung 3. Sind die Glieder des erstern dieser beyden gleichen Verhältnisse untereinander gleich, so sind es auch die des zweyten, und umgekehrt. Ist aber $AD \times BC = EH \times FG$ so ist allemal auch $AD : EH = FG : BC$. Mithin sind in Dreyecken von gleichem Inhalt stets die Höhen und die Grundlinien verkehrt proportional *, und sind umgekehrt die Höhen und Grundlinien zweyer Dreyecke verkehrt proportional, so haben diese Dreyecke gleichen Inhalt.

Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen für die Parallelogramme. Diese Eigenschaft kömmt also den Rechtecken nicht ausschliesslich zu *.] 4. 1. 1.

Anmerkung. Der Kürze halber pflegt man unsern Lehrsatz auch wohl so auszudrücken: ein Parallelogramm ist dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe, und ein Dreyeck der Hälfte dieses Produktes gleich. Hat man sich hierüber so wie wir im vierten Lehrsatze erklärt, so sieht man sogleich, daß hier bloß von den Zahlausdrücken für den Inhalt und die Seiten die Rede ist, und dann fällt alles Anstößige in diesem Ausdruck weg. Berechnet man diese Zahlausdrücke mit i , g , h , so ist für das

Parallelogramm $i = gh$ und umgekehrt $g = \frac{i}{h}$ oder $h = \frac{i}{g}$

und für das Dreyeck $i = \frac{1}{2} gh$, $g = \frac{2i}{h}$, $h = \frac{2i}{g}$, so daß

also jede dieser drey Gröfsen durch den Zahlausdruck der beyden andern, nach diesen leichten Formeln bestimmt wird. Ein parallelogramm von 280 Quadratfuß, das über einer Grundlinie von 14 Fuß steht, hält so z. B. zur Höhe 20 Fuß, und ein Dreyeck von 400 Quadratfuß, dessen Höhe 20 Fuß ist, eine Grundlinie von 40 Fuß,

d. W.

LEHRSATZ 6.

Der Inhalt eines Trapezoid $ABCD$ wird durch Fig. 14, das Produkt aus der Höhe EF in die halbe Summe der parallelen Grundlinien desselben, AB , CD * ge * B. 3, gemessen.

Man halbire eine der nicht parallelen Seiten, z. B. BC im Punkte I , ziehe durch diesen Punkt parallel mit der gegenüberstehenden Seite AD die Linie KI , und verlängere DC , bis wo sie diese Linie trifft,

F 2

In den Dreyecken IBL, ICK, sind vermöge der Construction die Seiten IB, IC und die Scheitelwinkel CIK, LIB gleich. Ueberdem sind die Winkel ICK, IBL vermöge des Parallelismus der Seiten AB, DC gleich. Also decken sich beyde Dreyecke, daher das Trapezoid ABCD mit dem Parallelogramm ADKL gleichen Inhalt, und folglich, so wie dieses, das Produkt $EF \times AL$ zu seinem Maafse hat. — Nun sind aber auch die dritten Seiten CK, LB jener beyden Dreyecke gleich, mithin $DC + AB = DK + AL = 2AL$, weil in jedem Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten gleich sind. Es ist also $AL = \frac{DC + AB}{2}$, und folglich hat der Flächenraum des Trapezoids ABCD zu seinem Maafse das Produkt $EF \times \left(\frac{AB + DC}{2}\right)$.

Zusatz I. Zieht man durch den Punkt I, der in der Mitte der Seite BC liegt, mit den parallelen Grundlinien des Trapezoids eine Parallellinie, IH, so entstehn zwey gleichwinklige Parallelogramme AHIL, * I. 35. HDKI*, worin *erstens* (weil nach dem eben bewiesenen $KI = IL$) auch $DH = HA$ ist, also auch die zweyte Seite DA halbirt wird; und *zweytens* $HI = AL$ ist. Folglich läßt sich *der Inhalt eines Trapezoids* auch durch das Produkt $EF \times HI$ messen, d. h. durch das Produkt aus der Höhe in die grade Linie zwischen den Punkten, welche in der Mitte der nicht parallelen Seiten liegen.

[Zusatz II. *Jede gradelinige Figur läßt sich sowohl in lauter Dreyecke, als auch in Dreyecke und Trape-*

zoide zerlegen, daher man mit Hülfe dieses und des vorigen Lehrsatzes *den Inhalt jeder gradelinigen Figur* ohne Schwierigkeit findet. Um die Figur in *Dreyecke* zu zerfallen, nimmt man irgend einen Punkt in ihr, oder in ihrem Umfange, und zieht von demselben nach allen Eckpunkten grade Linien, (läge der Punkt ausserhalb der Figur, so bekäme man additive und subtrac-tive Dreyecke, welches unbequem wäre), und zwar ist es bey unregelmäßigen Figuren am vortheilhaftesten, wenn man sie durch *Diagonalen*, die von einem Winkelpunkte aus nach den übrigen gezogen werden, in Dreyecke zertheilt. Jede dieser *Diagonalen* giebt die Grundlinie für zwey an einanderliegende Dreyecke ab. Mißt man sie und die Höhen, so findet sich der *Zahlausdruck* für den Inhalt jedes der Dreyecke nach *Lehrsatz 5*, und ihre Summe ist der *Zahlausdruck* für die ganze Figur. *Figur und Beyspiele* wird sich jeder leicht selbst hierzu bilden.

Um eine gradelinige Figur in *Trapezoide* zu zerfallen, nehme man willkührlich eine grade Linie, und zwar ist es am vortheilhaftesten, wenn man hierzu die längste *Diagonale* wählt. Auf diese fälle man von allen Eckpunkten der Figur *Perpendikel*; so bilden je zwey dieser *Perpendikel*, sammt der Seite der Figur und dem Abschnitt der *Diagonale*, die zwischen ihnen liegen, ein *Trapezoid*, worin diese parallelen *Perpendikel* die Grundlinie, und der Abschnitt der *Diagonale*, der auf beyden senkrecht steht, die Höhe abgiebt. Die äußersten *Perpendikel* bilden mit den Seiten der Figur und dem Abschnitt der *Grundlinie*, rechtwinklige

Dreyecke. Diese Zerfällung und Ausrechnung gradeliniger Figuren ist in vielen Fällen, besonders bey dem Feldmessen, sehr bequem.

Beide Zerfällungen, besonders die letztere, kann man selbst auf krummlinige Figuren übertragen, nimmt man nur die Höhen der Trapezoide so klein, daß die krummlinige Seite sich ohne merklichen Fehler für gradelinig nehmen läßt, oder substituirt man statt der krummen Linie eine grade, so daß der Inhalt dabey nicht merklich verändert wird.]

[L E H R S A T Z 7.]

Fig. 11. 1. Jede grade Linie, welche, wie DE , durch ein Dreyeck ABC mit einer Seite desselben, z. B. mit BC , parallel gezogen ist, theilt die beyden andern Seiten des Dreyecks in proportionale Theile, so daß sich verhält $AD : DB : AB = AE : EC : AC$,

2. Sind umgekehrt zwey Seiten AB , AC eines Dreyecks in den Punkten D und E proportional getheilt, so ist die grade Linie DE , zwischen den beyden Theilpunkten, mit der dritten Seite BC des Dreyecks parallel.

Ist DE mit der Seite BC parallel, und man zieht BE , DC , so entstehn zwey Dreyecke BDE , CED , welche über gleicher Grundlinie DE , und zwischen gleichen Parallelen DE , BC stehn, und deshalb gleichen Inhalt haben. Zugleich sind die Dreyecke BDE , EDA , EBA von gleicher Höhe, denn ihre Grundlinien liegen in einer graden Linie und ihre Spitzen fallen

in einem Punkte E zusammen *; und eben so sind * E. 2.
 auch CDE, EDA, CDA Dreyecke von gleicher Höhe.
 Folglich verhalten sich die Flächenräume dieser Drey-
 ecke wie ihre Grundlinien *, oder * 5. f. 1.

$$\triangle ADE : \triangle BDE : \triangle ABE = AD : DB : AB$$

und $\triangle ADE : \triangle DEC : \triangle ACD = AE : EC : AC$

Da nun die Dreyecke BDE, DEC, und mithin auch
 die Dreyecke ABE, ACD gleichen Inhalt haben, so
 sind die Verhältnisse links vom Gleichheitszeichen in
 beyden Proportionen gleich; also auch die Verhältnisse
 rechts vom Gleichheitszeichen *, * Gr. 1

$$AD : DB : AB = AE : EC : AC,$$

und die beyden Linien AB, AC sind folglich propor-
 tional getheilt *. * E. 8.

2. Sind umgekehrt zwey Seiten eines Dreyecks
 AB, AC in D und E proportional getheilt, so verhält
 sich vermöge der proportionalen Theilung $AD : DB$
 $= AE : EC$. * Wäre bey dieser Voraussetzung die * E. 8. a.
 grade Linie DE mit der dritten Seite BC des Dreyecks
nicht parallel, so müßte eine andere grade Linie DO,
 die Parallellinien mit BC durch den Punkt D seyn.
 Dann verhielte sich aber, vermöge des eben Bewiesenen,
 $AD : DB = AO : OC$, und folglich, da dann
 in dieser und der vorigen Proportion die erstern Ver-
 hältnisse gleich sind, wäre auch $AE : EC = AO : OC$ *; * Gr. 1.
 welches unmöglich ist, da $AE > AO$, hingegen EC
 $< OC$ ist *. Also muß DE mit BC parallel seyn. * V. 3. d.

Zufatz I. Auch wenn man zwey Schenkel AD, AE
 eines Dreyecks ADE über die Grundlinie DE oder über die Fig. 16.

Spitze *A* hinaus verlängert, so werden diese Verlängerungen durch jede Parallellinie mit der dritten Seite, z. B. durch *BC* oder durch $\beta\gamma$, den Schenkeln des Dreyecks proportional geschnitten. Denn im erstern Fall bildet *ABC* ein Dreyeck, dessen Schenkel *AB*, *AC* von einer Linie *DE* parallel mit der Grundlinie *FG* geschnitten, und folglich, unserm Lehrsatz zu Folge, proportional getheilt werden. — Im zweyten Fall nehme man auf dem Schenkel, auf dessen Verlängerung der Punkt β liegt, *Ab* gleich *A β* , und auf dem zweyten *Ac* gleich *A γ* , und ziehe *bc*; so decken sich die beyden Dreyecke

- I. 6. *Abc* und *A $\beta\gamma$* *, folglich sind die Winkel *b*, β , *D*
- I. 25. gleich, und daher die Linien $\beta\gamma$, *bc*, *DE* parallel *.

Mithin werden, unserm Lehrsatz zu Folge, die Schenkel *AD*, *AE* durch die Parallellinie *bc* proportional getheilt, so das sich verhält *Ab* : *AD* = *Ac* : *AE*, und

- * E. 8. a. also auch *A β* : *AD* : βD = *A γ* : *AE* : γE *, daher auch in diesem Fall die Linien βD , γE proportional getheilt sind.

Grade auf dieselbe Art beweist man (nach 2) das wenn zwey Linien βD , γE sich so in einem Punkte *A* durchschneiden, das dieser Punkt beyde proportional theilt, die graden Linien zwischen den übereinstimmenden Theilpunkten $\beta\gamma$, *DE*, parallel seyn müssen.

Zusatz II. Zwey grade Linien, zwischen welchen Parallellinien in beliebiger Zahl und Entfernung gezogen sind, werden durch diese proportional getheilt.

Fig. 10. Denn sind erstens diese beyden Linien selbst parallel, wie *AB*, *CD*, so schneiden je zwey der Parallellinien

auf beyden gleiche Theile ab *, daher die überein- • I. 33. f.
 stimmenden Theile beyder im Verhältniß der Gleich-
 heit stehn, und also beyde Linien proportional ge-
 theilt sind *. *E. 8. a.

Treffen dagegen *zweytens* die beyden Linien in ei- Fig 17.
 nem Punkte A *zusammen*, wie z. B. BC, DE; so ent-
 steht ein Dreyeck AGK, dessen Schenkel, in ihrer Ver-
 längerung, von Parallellinien mit der Grundlinie GK
 durchschnitten, folglich, dem vorigen Zusatz gemäß,
 proportional getheilt werden, so daß je zwey überein-
 stimmende Theile der einen, und deren Summe, un-
 tereinander dasselbe Verhältniß wie in der andern
 haben *. * E. 8.

*Sind umgekehrt zwey grade Linien proportional ge-
 theilt, so sind die graden Linien durch die übereinstimmenden
 Theilpunkte, insgesamt parallel, jene beyden Linien
 mögen parallel seyn oder sich durchschneiden. Dieses
 folgt auf dieselbe Art aus dem zweyten Theil des vori-
 gen Zusatzes.*

Anmerkung. Die übrigen fruchtbaren Sätze über pro-
 portionale Eintheilungen von Linien, verspare ich bis zum fol-
 genden Buche. Der Beweis der hier vorgetraggen stützt sich un-
 mittelbar auf dem Vorhergehenden, und ist uns in den gleich
 folgenden Materien von so vielem Nutzen, daß sie hier untrenn-
 bar an der schicklichsten Stelle stehn. Sie begründen nicht nur
 die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, sondern geben uns
 auch sogleich die einfachte *Methode* an die Hand, *zu drey gegeb-
 nen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*; eine Methode,
 welche Aufg. 4 vorträgt, und die uns zur Verwandlung der Figu-
 ren in einander unentbehrlich ist.

Fig. 18. Zusatz III. Wenn man die Seiten eines Dreyecks *ABC* insgesammt in zwey gleiche Theile theilt, und die halbirenden Punkte *D*, *E*, *F* durch grade Linien verbindet, so wird das gegebne Dreyeck dadurch in vier kleinere Dreyecke getheilt, welche insgesammt mit dem Gegebenen gleichwinklig sind, und sich einander decken.

Denn je zwey Seiten des gegebenen Dreyecks sind halbirt, d. i. nach dem Verhältniß von $1:1$, und mit
 * E. 8. hin proportional getheilt *, daher die Linien *DE*, *EF*, *FD* mit den gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks *ABC* parallel laufen. Folglich sind die kleinen Dreyecke an den Ecken nach I. 25, und das Dreyeck *DEF* in der Mitte nach I. 31. Anm., mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklig. Dieses mittlere bildet mit jedem der Dreyecke an den Ecken, wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten ein kleines Parallelogramm, wie *AFDE*, deckt sich folglich mit jedem derselben, und daher auch diese untereinander, so daß jedes der vierte Theil des ganzen Dreyecks ist.

Grade Linien *AD*, *BE*, *CF*, welche man von den Eckpunkten des gegebenen Dreyecks nach den Punkten in der Mitte der gegenüberstehenden Seiten zieht, geben für diese kleinen Parallelogramme die zweyten Diagonalen ab, halbiren sich also mit den Seiten des Dreyecks *DEF* wechselseitig *. Verbindet man daher aufs
 * I. 37. neue ihre Durchschnittspunkte, so entstehn wiederum vier den vorigen gleichwinklige, sich deckende Dreyecke, die ein Sechzehntel des Gegebenen, und dessen Seiten ebenfalls halbirt sind, und umgekehrt die in dem kleinern Dreyeck liegenden Stücke der Li-

nien AD, BE, CF, halbiren. Verbindet man immer wieder die halbirenden Punkte durch grade Linien, so geht dieses ohne Ende fort; daher AG in Beziehung auf AF als Einheit, durch eine geometrische ohne Ende fortlaufende Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \dots$ deren Summe, wie die Arithmetik lehrt, $\frac{2}{3}$ ist, gegeben wird; ein Satz, den wir im folgenden Buche auf ganz geometrischem Wege darthun werden.

Zusatz IV. Wenn man alle Seiten irgend eines Vierecks ABCD halbirt, und die halbirenden Punkte je zweyer Seiten, welche an einander stoßen, durch grade Linien verbindet, so bilden diese stets ein Parallelogramm EFGH, dessen Seiten mit den Diagonalen AC, BD des gegebenen Vierecks parallel sind. Denn jede dieser Diagonalen zertheilt das Viereck in zwey Dreyecke, wie ADC, ABC, denen die Diagonale zur Grundlinie, und zwey der halbirenden Seiten des Vierecks zu Schenkeln dienen. Diese Schenkel sind proportional getheilt, daher HG und EF beyde mit der Diagonale AC, also auch untereinander, und eben so GF, HE mit der Diagonale BD und untereinander parallel laufen. Mithin ist EFGH ein Parallelogramm von der erwähnten Beschaffenheit. 7. (2)

Der Inhalt dieses Parallelogramms ist halb so groß als der Inhalt des gegebenen Vierecks. Denn da CO und DO beyde nach demselben Verhältniß wie DC durch die Parallelen GH und GF eingetheilt *, mithin halbirt werden, so hat jedes der vier Dreyecke, in welche das gegebne Viereck durch beyde Diagonalen getheilt wird, z. B. AOD, eine doppelt so große Grundlinie und Höhe 7. (1)

* 5. als das kleine Parallelogramm OH , mithin auch einen doppelten Inhalt*. Die vier kleinen Parallelogramme zusammengenommen sind also halb so groß als die vier Dreyecke, d. h. als das gegebne Viereck.

Die *Quadrate der beyden Diagonalen AC, BD sind noch einmal so groß, als die Quadrate der vier Seiten des Parallelogramms $EFGH$ zusammengenommen.* Denn jede der Diagonalen ist, nach dem eben Bewiesenen, das Doppelte der Seite des Parallelogramms, welche mit ihr parallel läuft*.

Endlich sind *die vier Dreyecke, worin die Diagonalen das gegebne Viereck theilen, einander proportional.* Denn je zwey dieser aneinander liegenden Dreyecke, z. B. AOD, DOC und so auch AOB, BOC , stehn über einer graden Linie, und ihre Spitzen fallen zusammen. * E. 2. Sie haben also gleiche Höhe*, und verhalten sich folglich, jene sowohl als diese, wie ihre Grundlinien AO, OC *, sind also Proportionalflächen.

[L E H R S A T Z 8.]

Fig. 20. *Zwey grade Linien FH, GI , welche man durch einen Punkt E in der Diagonale eines Parallelogramms $ABCD$, mit den Seiten parallel zieht, theilen*

1) *die Flächen in vier kleinere Parallelogramme, welche unter sich, und mit dem Gegebenen, gleichwinklig und proportional sind,*

und 2) *die Seiten in zwey proportionale Abschnitte.*

3) *Die parallelen Seiten der Parallelogramme um die Diagonale, GF, HI, AC , stehn in*

gleichem Verhältniß, und die Ergänzungen dieser Parallelogramme, EA, EC, haben gleichen Inhalt, und sind mittlere Proportionalflächen zwischen jenen.

4) Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat ist, so sind auch die beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale Rhomben oder Quadrate aus beyden Abschnitten der gegebenen Seite, und die beyden Ergänzungen decken sich; und zwar sind sie im Fall eines Quadrats Rechtecke, die aus den beyden Abschnitten der gegebenen Seite beschrieben sind.

1) Vermöge der Construction sind AB, HF, DC miteinander parallel, und so auch AD, GI, BC. Beym Durchschneiden dieser Linien entstehn also lauter Parallelen zwischen Parallelen, folglich lauter *Parallelogramme*, die unter sich und mit dem gegebenen *gleichwinklig* sind.

Je zwey derselben, welche an einander liegen, z. B. HI, EC, haben gleiche Höhe, verhalten sich folglich wie ihre Grundlinien HE, EF*. Diesen Li-^{* 5. l. 1.} nien sind die Grundlinien der beyden andern, ebenfalls gleich hohen Parallelogramme AE, GF gleich. Mithin sind diese vier Parallelogramme *Proportionalflächen*, oder es ist $p \text{ HI} : p \text{ EC} : p \text{ HC} = p \text{ AE} : p \text{ GF} : p \text{ AF} = p \text{ AI} : p \text{ GC} : p \text{ AC}^*$.

* V. 4. β.

2) Weil EH mit AB, und EI mit BC parallel ist, werden in den Dreyecken BDA, BDC die Schenkel DA, DC beyde dem gemeinschaftlichen Schenkel DB

* 7. I. proportional *, folglich auch *untereinander* felbft pro-
 * Gr. I. portional getheilt *, fo dafs ſich verhält $DH : HA : DA$
 $= DI : IC : DC$.

3) Jedes der *Parallelogramme um die Diagonale*,
 HI, GF, AC, iſt aus zwey Seiten beſchrieben, wel-
 che in dieſer proportionalen Theilung übereinſtimmen-
 * 2. 2. de Glieder ausmachen *, das erſte aus den erſten Glie-
 dern DH, DI, das zweyte aus den zweyten HA, IC,
 das dritte aus den dritten DA, DC. Folglich ſtehen
 die *parallelen Seiten* dieſer Parallelogramms *in gleichem*
Verhältniß. (Hingegen ſind die *Ergänzungen* aus den
 nicht-übereinſtimmenden Gliedern dieſer proportional
 getheilten Glieder beſchrieben).

Da Parallelogramme, die einerley Höhe haben, ſich
 * 5. f. 1. wie ihre Grundlinien verhalten *, ſo verhält ſich ver-
 * (a) möge der obigen Proportionalität * $p DE : p HG =$
 $p DE : p IF$, daher wegen Gleichheit der Vorder-
 glieder auch die Hinterglieder, Parallelogramm HG und
 Parallelogramm IF gleich ſeyn müſſen. Die beyden Er-
 gänzungen haben alſo immer gleichen Inhalt, und es ver-
 * (1) hält ſich mithin * $p DE : p HG = p HG : p EB$ oder
 $p DE : p DG = p DG : p DB$, ſo dafs die Ergänzungen
 die *mittleren Proportionalflächen* zwiſchen den Paral-
 lelogrammen um die Diagonale ſind.

4) Iſt das gegebene Parallelogramm ein *Rhombus*
 oder ein *Quadrat*, ſo ſtehn deſſen Seiten, mithin auch
 * (1) dieſe übereinſtimmenden Abſchnitts derſelben *, in
 * E. 3. Verhältniß der Gleichheit *. Folglich ſind dann die
 * 2. 2. beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale

HI, GF, auch gleichseitig *, und überdem mit dem * (3)
 Gegebenen gleichwinklig *, mithin Rhomben oder * (1)
 Quadrate, und zwar jenes aus dem Abschnitt AG,
 dieses ist aus dem Abschnitt GB beschrieben. — Die
 Seiten der Ergänzungen sind dann gleichfalls unterein-
 ander gleich *, beyde Ergänzungen decken sich *, und * (3)
 im Fall des Quadrats ist jede das Rechteck aus AG, GB. * 1.34Zt

*Z u f a t z I. Auch wenn man durch mehrere Punkte
 der Diagonale, z. B. durch E und L, (oder durch Punkte
 in der Verlängerung der Diagonale) Parallellinien mit
 den Seiten des Parallelogramms AC zieht, wird das
 Parallelogramm in lauter gleichwinklige Parallelogramme
 getheilt, von denen die Ausfagen des Lehrsatze gelten.
 Denn alsdann sind die Parallelogramme HI und MN
 beyde auf die Art, wie es der Lehrsatz voraussetzt,
 eingetheilt; folglich haben die Parallelogramme um
 die Diagonale, LD, EL, ED, BE, BL und BD insge-
 sammt proportionale Seiten, und sind, falls das Gege-
 bene BD ein Rhombus oder Quadrat ist, allesammt
 Rhomben oder Quadrate, über den Abschnitten der
 Seite AB beschrieben *. Die Ergänzungen LI und * (3)
 LH, EN und EM, EC und EA und folglich auch NI
 und MH, sind von gleichem Inhalt, und falls AC
 ein Rhombus oder ein Quadrat ist, decken sie sich,
 und sind aus je zwey Abschnitten der gegebenen Seite
 AB beschrieben. Endlich sind EN, EC, GC mittlere
 Proportionalflächen zwischen GF, und zwischen EL,
 ED, BD u. s. f.*

*Z u f a t z II. Nimmt man auf der einen Seite eines
 Parallelogramms AC einen Punkt G, und auf der darat*

stossenden Seite einen Punkt F , so daß B und BF in demselben Verhältniß als die Seiten BA und BC stehn *, und zieht durch G und F mit den Seiten des Parallelogramms Parallellinien GI , FH ; so durchschneiden sich diese beyden Parallellinien in einem Punkte E , der in der Diagonale des gegebenen Parallelogramms liegt.

Denn da durch einen Punkt F nur eine einzige Parallellinie EF mit einer graden Linie AB *, so wie zu drey gegebenen Linien nur eine einzige vierte Proportionallinie möglich ist *, und nach unserm Lehrsatz die Parallellinie EF die Seite BC so durchschneidet, daß $BA : BC$ sich verhält wie $BG : BF$; so muß, wenn man umgekehrt den Punkt F dieser Proportion gemäß bestimmt, und durch ihn eine Parallellinie mit der Seite AB zieht, diese Parallellinie durch den Punkt E gehn, worin die Parallellinie GI die Diagonale durchschneidet. Folglich gelten von den so gezogenen Parallellinien alle Ausagen unsers Lehrsatzes; und also auch ins besondere, wenn AC ein Rhombus oder ein Quadrat ist, und man BF gleich BG nimmt.

Zusatz III. Dasselbe ist endlich der Fall, wenn man zwey gleichwinklige Parallelogramme, deren Seiten in gleichem Verhältniß stehn, wie GF , HI , so aneinander, oder wie GF , AC so in einander setzt, daß die proportionalen Seiten in grader Linie liegen, und wenn man dann durch Verlängerung der Seiten dieser Parallelogramme, das Parallelogramm AC ergänzt.

Anmerk.

Anmerkung. Die Sätze kommen Theilweise schon bey *Euklid* vor I. 43, VI. 24 und 26, und X. 54 Lemma. Bey *Legendre* fehlen sie, obschon sie gleich bey den folgenden Sätzen, und noch mehr für die Verwandlung der Figuren, und für die geometrische Analysis von Nutzen sind,

d. Ü.

LEHRSATZ 9.

Ein Quadrat aus einer zweytheiligen Linie *AC* ^{Fig. 21.} ist den Quadraten über den beyden Abschnitten *AB*, *BC*, und zwey Rechtecken, welche aus den beyden Abschnitten beschrieben sind, zusammengenommen gleich; oder es ist AC^2 d. h. $(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2 AB \times BC$.

Beschreibe über *AC* ein Quadrat *ACDE* *, nimm ^{II. A. 11} *AF* gleich *AB*, und ziehe *FG* mit *AB*, und *BH* mit *AE* parallel. Dem vorigen Lehrsatz gemäß theilen diese Parallellinien das Quadrat über *AC* in zwey Quadrate *AI*, *ID*, welche über den beyden Abschnitten *AB*, *BC* der Seite des gegebenen Quadrats * beschrieben ^{8. (2)} sind, und in zwey sich deckende Rechtecke *IE*, *IC*, deren jedes aus diesen beyden Abschnitten beschrieben ist *. Folglich ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 AB \times BC$ ^{8. (3)} $\times BC$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus, welcher die Zusammensetzung der zweyten Potenz einer zweytheiligen Zahl, aus den beyden Theilen derselben, ausagt: $(a + b)^2 = a^2 + 2 ab + b^2$

[Folgerung. Fügt man zu den Gröſsen, welche der Lehrsatz als gleich angiebt, beyderseits noch das

Quadrat aus dem einen Abschnitt, z. B. BC^2 , hinzu, so wird, weil $2 \cdot BC^2 + 2 \cdot AB \times BC$ gleich ist $2 \cdot BC \times (AB + BC)$ d. h. gleich $2 \cdot BC \times AC$ *, auch

$$AC^2 + BC^2 = 2 \cdot BC \times AC + AB^2$$

eine Eigenschaft, die also gleichfalls non jeder zweytheiligen Linie gilt, und deren Wahrheit auch in Fig. 20 so gleich in die Augen fällt.]

Fig. 22. [Zu Satz I. Besteht eine grade Linie AB aus mehreren Abschnitten, AR, RS, SB etc., so ist das Quadrat derselben gleichfalls den Quadraten aller einzelnen Abschnitte und den doppelten Rechtecken aus je zwey Abschnitten zusammengenommen gleich, oder $AB^2 = AR^2 + RS^2 + SB^2 + 2 \cdot AR \times RS + 2 \cdot AR \times SB + 2 \cdot RS \times SB$ (ein Ausdruck, in welchem man statt der doppelten Rechtecke auch die Rechtecke $2 \cdot AR \times RB + 2 \cdot RS \times SB$ setzen kann *). Denn auch hier sind wiederum *erstens* die Rechtecke an der Diagonale α, β, γ , Quadrate, und zwar die Quadrate aus den einzelnen Abschnitten der gegebenen Linie AB. *Zweytens* sind unter den Ergänzungsrechtecken je zwey einander gleich δ und δ, ϵ und ϵ, ζ und ζ etc., und diese Rechtecke sind überdem aus je zwey der verschiedenen Abschnitte beschrieben, $\delta = AR \times RS, \epsilon = AR \times SB, \zeta = RS \times SB$ etc. *

*8. Z. 1.

Zu Satz II. Diese drey Rechtecke sind zusammengenommen gleich $AR \times RB + RS \times SB$ *, oder auch $AR \times RS + AS \times SB$, oder auch $RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, je nachdem man zwey, die einerley Höhe haben, in ein Rechteck zusammen nimmt. Daraus folgt

1) dafs bey jeder dreytheiligen Linie $AR \times RB + RS \times SB = BS \times SA + SR \times RA$ ist, und dafs diese Eigenschaft auf ähnliche Art für jede in noch so viel Abschnitte getheilte Linien gilt (Gregor von St. Vincenz B. 1. S. 55.)

2) Dafs eben so für jede dreytheilige Linie $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$ ist. Denn fügt man zum ersten und dritten jener Ausdrücke beyderseits RS^2 hinzu, so wird $AR \times RB + RS \times SB + RS^2 = RS^2 + RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, oder, da $AR \times RB + RS \times RB$ gleich $AS \times RB$ ist, $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$; eine artige Eigenschaft dreytheiliger Linien, auf welcher Euler den Beweis eines Satzes baut, den man vor ihm noch nicht bewiesen hatte, und den man im folgenden Buche findet.

Zusatz III. Da die dreytheilige Linie AB , erstens aus den beyden Abschnitten AS , SB besteht, so ist vermöge der Folgerung zu unserm Lehrsatze $AB^2 + BS^2 = 2 BS \times AB + AS^2$; und da zweytens auch AS aus zwey Theilen AR , RS besteht, $AS^2 + RS^2 = 2 RS \times AS + AR^2$. Folglich ist für jede dreytheilige Linie auch $AB^2 + BS^2 + RS^2 = 2 BS \times AB + 2 RS \times AS + AR^2$.

Anmerkung. Dem ersten dieser Sätze ist der arithmetische Satz $a(b+c) + bc = c(a+b) + ab$, dem zweyten der arithmetische Satz $(a+b)(b+c) = b(a+b+c) + ac$ analog.

L E H R S A T Z IO.

Fig. 23. Ein Quadrat aus einer Linie AC , welche der Unterschied zweyer Linien AB, BC ist, beschrieben, ist gleich den Quadraten dieser beyden Linien zusammen genommen, weniger zweymal dem Rechteck aus beyden Linien AB, BC ; oder es ist AC^2 d. h. $(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \times BC$.

Beschreibe über AC das Quadrat $ABIF$, mache AE gleich AC , und ziehe CG mit AF , und HE mit IF parallel, so wird das erstere Quadrat durch diese Parallellinie, wie Lehrsatz 8 Zusatz 2 ausagt, eingetheilt. Beschreibt man folglich noch über EF , welches gleich BC ist, das Quadrat $EFLK$ gleich BC^2 , so ist dieses sammt AI , d. i. dem Quadrat über AB , gleich AD d. i. dem Quadrat aus AC und den beyden Rechtecken $CBIG, GLKD$. Jedes dieser Rechtecke ist aber aus $AB = LG$ und BC beschrieben, und folglich $AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \times BC = AC^2$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

L E H R S A T Z II.

Fig. 24. Ein Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien AB, BC beschrieben, ist dem Unterschiede der Quadrate aus beyden Linien gleich, oder $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

Beschreibe über AB und so auch über AC ein Quadrat, verlängere AB um BK , gleich BC , und vollende das Rechteck $KCDL$ und das Quadrat $DHIG$.

Die Grundlinie AK jenes Rechtecks ist der Summe, die Höhe desselben AE dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC gleich, und folglich ist jenes Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC beschrieben, oder Rechteck AKLE = (AB + BC) × (AB - BC.) Nun besteht dieses Rechteck aus den beyden Stücken ABHE und BKLH, welches letztere dem Rechteck EDGF gleich ist, da beyde aus den Linien AC, CB beschrieben sind*. Also ist AKLE = ABHE + EDGF. Diese ^{* 8. Z. 2.} beyden Stücke sind aber gleich dem Quadrat über AB, weniger dem Quadrat über DH, d. i. h. über BC; also ist AKLE = AB² - BC², und deshalb (AB + BC) × (AB - BC) = AB² - BC²,

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: (a + b).
(a - b) = a² - b².

[Folgerung 1. α) Ist eine grade Linie MN im Punkte O in zwey gleiche, im Punkte P dagegen in zwey ungleiche Theile getheilt, (MO = ON und MP > PN;) so ist MP = MO + OP, und NP = ON - OP = MO - OP und folglich stets

$$MP \times NP = MO^2 - OP^2$$

β) Nimmt man auf der Verlängerung einer solchen Linie MN, welche in O gleich getheilt ist, einen Punkt p, so ist Mp = Op + MO und Np = Op - MO folglich stets

$$Mp \times Np = Op^2 - MO^2,$$

In beyden Fällen ist also das Rechteck aus den beyden ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np dem Unterschiede der Quadrate aus der Hälfte der Linie MN und aus dem

Fig. 25.

Abstand der beyden Theilpunkte O, P oder O, p (welche die Linie in gleiche und ungleiche Theile zerschneiden), von einander gleich. — Der Lehrsatz gehört in dieser Form zu den fruchtbarern Sätzen der Geometrie, ist in ihr in geometrischen Untersuchungen von nicht minderm Gebrauch, als der Analoge arithmetische in der Buchstabenrechnung, und verdient vorzüglich gemerkt zu werden. Schon in den Zusätzen zu diesem Lehrsatze findet man einige interessante Anwendungen desselben.]

[*Folgerung 2.* Verbindet man mit diesen Sätzen Lehrsatz 9 und 10, so geben sie noch ein Paar ähnliche Sätze, die gleichfalls Bemerkung verdienen, obgleich sie nicht von so häufigem Gebrauch als die vorigen sind,

α) Im *ersten Fall* war nemlich $MP + NP = MN = 2. MO$. Folglich müssen auch die Quadrate dieser ^{*2. 4. β.} gleichen Linien gleich seyn*, mithin $MP^2 + NP^2 +$
^{* 9.} $2 MP \times NP^* = 4. MO^2^*$. Da nun in diesem Fall ^{* 4. 2. 3.} nach Folgerung 1. α. auch $2 MP \times NP = 2. MO^2 - 2. OP^2$ ist, so folgt hieraus, wenn wir Gleiches von Gleichem abziehn,

$$MP^2 + NP^2 = 2. MO^2 + 2. OP^2.$$

Denn da die Gröfse die wir abziehn sollen um $2. OP^2$ kleiner als $2. MO^2$ ist, so ziehn wir, wenn wir $2. MO^2$ wegnehmen, um $2. OP^2$ zu viel ab, müssen also zum Reste, der bey jener Wegnahme bleibt, $2. OP^2$ hinzufügen, um den richtigen Unterschied zu erhalten.

β) Im zweyten Fall war $Mp - Np = MN = 2 \cdot MO$.
 Folglich sind auch die Quadrate dieser Linien gleich,
 also $Mp^2 + Np^2 - 2 \cdot Mp \times Np^* = 4 \cdot MO^2$. Da ^{10.}
 nun nach Folgerung 1. β. in diesem Fall, $2 \cdot Mp \times Np$
 $= 2 \cdot Op^2 - 2 \cdot MO^2$ ist, so folgt daraus, wenn wir
 Gleiches zu Gleichem hinzufügen

$$Mp^2 + Np^2 = 2 \cdot MO^2 + 2 \cdot OP^2.$$

In beyden Fällen ist also die Summe der Quadrate aus
 den ungleichen Stücken MP , NP oder Mp , Np gleich dem
 doppelten Quadrat der halben Linie MN , und des Abstands
 der beyden Theilpunkte O , P oder O , p von einander.
 Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus:
 $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2$]

[Folgerung 3. Im zweyten Fall der ersten Fol-
 gerung, d. h. wenn $Mp = MN + Np = 2 \cdot MO + Np$
 ist, ist auch $Mp^2 = 4 \cdot MO^2 + 4 \cdot MO \times Np + Np^2$ * 9.
 oder, da $MO + Np = Op$, und folglich $MO^2 + MO$
 $\times Np = MO \times Op$ ist *,

$$Mp^2 = 4 \cdot MO \times Op + Np^2$$

ein Satz der auf den arithmetischen hinausläuft
 $(2a + b)^2 = 4 \cdot a \cdot (a + b) + b^2$].

Anmerkung. Man sieht leicht, daß man solche Sätze
 nach Anleitung analoger arithmetischer ins Unbestimmte verviel-
 fältigen kann, und das ist vielleicht der Grund, warum *Le Gendre*
 und *Simpson* die fünf Sätze, die in diesen Folgerungen stehn,
 ganz weggelassen haben; doch sehr mit Unrecht, da durch sie
 manche Beweise sich abkürzen, und ohne sie die Schriften alter
 Geometer sich nicht ohne Anstoß verstehn lassen. Bey *Euklid*
 machen sie im zweyten Buch der Elemente fünf besondre Lehr-
 sätze aus, und werden sehr umständlich, jeder durch besondere

Constructions bewiesen. Diese Beweise sind besonders für die beyden Sätze in der zweyten Folgerung, die von Euklid aus dem Pythagoreischen Lehrsatz abgeleitet werden, ermüdend weitläufig. Sollte Euklid diese langen Umwege, nach welchen blos die Beweise dieser beyden Sätze zwey enggedruckte Seiten füllen, nicht blos deshalb erwählt haben, weil die arithmetischen Vorstellungen, mittelst derer wir sie abgeleitet haben, den ältern Geometern noch nicht so recht geläufig waren,

Mit ähnlichen Sätzen ist fast jedes geometrische Werk, welches tiefer in die Wissenschaft hineingeht, reichlich ausgestattet. Nun ist es zwar nicht zu leugnen, daß Sätze von dieser Art, zur gelegnen Zeit gebraucht, geometrische Untersuchungen außerordentlich abkürzen können; allein sie sind jedesmal, besonders auf arithmetischem Wege, (durch die einfachste Buchstabenrechnung) so leicht zu finden, daß es in der That unnütz und schädlich ist, mit ihnen die geometrischen Werke zu überfüllen. Sie haben in der geometrischen Analysis einen ähnlichen Nutzen, wie die Verwandlung einer Formel in die andre in der Buchstabenrechnung, und billig nimmt man daher diese bey jener mit zu Hülfe. *Clavius*, *Gregor von St. Vincenz* und selbst *Tacquet* standen noch in der Meynung, die Regeln der Buchstabenrechnung müßten aus diesen geometrischen Sätzen abgeleitet, und durch sie bewiesen werden; ein sonderbarer Wahn, welcher zeigt, wie sehr noch vor hundert Jahren die arithmetischen Wissenschaften in ihrer Kindheit lagen, und der vielleicht nicht wenig dazu mag beygetragen haben, die geometrischen Werke mit Sätzen über Rechtecke und Quadrate aus Linien, welche nach einer gewissen Art eingetheilt sind, so sehr zu überladen. Von [solchen Sätzen] führe ich hier nur noch ein Paar an, die den Sätzen in [der]er-

Fig. 25 stern Folgerung ähnlich sind; Sind an einer Linie CD zwey gleiche Linien AC, DB angesetzt, so ist immer $CB^2 = AB^2 + AB \times CD$, und nimmt man in der Linie CD irgend einen beliebigen Punkt E , so ist $AE \times EB = DE \times EA + EC \times CA + AC^2$ (*Gregor von St. Vinc. B. I. S. 57. 58.*)

d. U.

[Zusatz I. Unter allen Rechtecken die sich aus zwey Fig. 25. Abschnitten einer gegebenen graden Linie MN bilden lassen, ist das Quadrat über ihre Hälfte MO das grösste, und der Inhalt wird immer kleiner, je mehr die Abschnitte MP, PN verschieden sind. Denn denkt man sich die Linie in O gleich, und in P ungleich getheilt, so ist, nach Folgerung 1. $\alpha.$, $MP \times NP = MO^2 - OP^2$, und dieser subtractive Theil OP^2 wächst mit dem Unterschiede der beyden ungleichen Theile, und nimmt mit demselben ab, und fällt ganz fort, wenn beyde Abschnitte gleich sind.

α) Unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat mithin das Quadrat den grössten Inhalt.

β) Und wenn zwey Rechtecke, welche aus Abschnitten gleicher Linien beschrieben sind, gleichen Inhalt haben, so sind auch die Abschnitte, welche ihre Seiten bilden, selbst gleich.

Zusatz II. Dagegen wird die Summe der Quadrate aus den beyden Abschnitten MP, NP kleiner, wenn der Unterschied der beyden Abschnitte von einander abnimmt. Denn da die Summe dieser Quadrate $MP^2 + NP^2 = MN^2 - 2 \cdot MP \times PN$ ist *; nimmt sie ab, wenn das Rechteck aus den beyden Abschnitten MP, PN zunimmt, folglich wenn die beyden Abschnitte von einander weniger verschieden werden. (Eukl. X. 42. Lemma).] 9.

LEHRSATZ 12.

Das Quadrat der Hypotenuse BC eines recht- Fig. 27. winkligen Dreyecks ABC ist gleich den Quadraten

über den beyden Katheten zusammen genommen, oder
 $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Es sey ABC ein bey A rechtwinkliges Dreyeck, über dessen Seiten Quadrate beschrieben sind. Fällt vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse ein Perpendikel AD, welches verlängert, die gegenüberstehende Seite des Quadrats in E durchschneide; so läuft dieses Perpendikel mit den Perpendikeln BF, CG parallel * und theilt also das Quadrat der Hypotenuse in zwey Rechtecke DF, DG. Jedes dieser Rechtecke, behaupte ich, ist dem Quadrat über einer Kathete, mit dem es einen Eckpunkt gemein hat, gleich.

¶ 1. E. 19.

Der Winkel ABF besteht aus dem Stücke AEC und dem rechten Winkel CBF; eben so besteht der Winkel CBH aus demselben Stück ABC und dem rechten Winkel ABH. Also sind die beyden Winkel ABF, HBC gleich. Ueberdem sind die Schenkel des einen den Schenkeln des andern gleich, indem, als Seiten eines Quadrats, $AB = BH$ und $BF = BC$ ist. Zieht man folglich AF und CH, so entstehn zwey Dreyecke ABF, HBC, welche sich decken, und mithin gleichen

¶ 1. 6. Inhalt haben *.

Nun ist aber der Inhalt des Dreyecks ABF halb so groß als der des Rechtecks BE, welches mit jenem Dreyeck über gleicher Grundlinie BF steht, und zwischen gleichen Parallelen BF, AE liegt *. Eben so ist der Inhalt des Dreyecks HBC halb so groß als der des Quadrats AH, indem beyde über der Grundlinie HB stehn, und zwischen den Parallelen HB, LA liegen,

¶ 2.

von welcher letztern AC eine blofse Verlängerung ist, da BAL, BAC beyde rechte Winkel, folglich LA, AC in grader Linie sind *. Daraus dafs der Inhalt der beyden Dreyecke ABF, HBC gleich ist, folgt also, dafs das Rechteck BE, als das Doppelte des Dreyecks ABF, dem Quadrat AH als dem Doppelten des Dreyecks HBC, dem Inhalt nach gleich seyn mus.

Grade auf dieselbe Art läfs sich darthun, dafs das Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Flächenraum hat, indem, wenn man AG und BI zieht, ebenfalls zwey sich deckende Dreyecke ACG, ICB entstehen, welche die Hälften jener Vierecke sind.

Folglich sind beyde Quadrate AH, AI den beyden Rechtecken BE DG zusammengenommen, mithin dem Quadrat der Hypotenuse gleich, oder es ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[Diesen Satz, einen der Wichtigsten in der Geometrie, soll nach der allgemeinen Sage des Alterthums *Pythagoras* erfunden haben, und er wird deshalb gewöhnlich der *pythagoreische Lehrsatz* genannt.]

Folgerung 1. Das Quadrat einer der Katheten ist gleich dem Quadrat der Hypotenuse, weniger dem Quadrat der andern Kathete *, z. B. $AB^2 = BC^2 - AC^2$. ^{Gr. 2. §} Mit hin ist das Quadrat einer der Katheten auch gleich einem Rechtecke, welches aus der Summe und dem Unterschiede der Hypotenuse und der andern Kathete beschrieben ist, oder $AB^2 = (BC + AC) \times (BC - AC)$ *

* II.

[*Folgerung 2.* Unferm Beweise gemäfs hat das Rechteck BE mit dem Quadrate AH, und eben so das

Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Inhalt.

α) Ein Perpendikel AD, welches aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreyecks auf die Hypotenuse gefällt wird, zerschneidet diese folglich so, daß das Rechteck aus jedem der beyden Abschnitte und der ganzen Hypotenuse, dem Quadrate derjenigen Kathete, welche an dem Abschnitte anliegt, gleich ist, oder daß $BD \times BC = AB^2$ und $CD \times BC = AC^2$ ist,

β) Das rechtwinklige Dreyeck selbst wird durch das Perpendikel AD in zwey kleinere rechtwinklige Dreyecke ABD, ACD zerfällt, und zwar sind diese untereinander und mit dem Ganzen gleichwinklig, indem die Winkel B + BAD und BAD + DAC beyde einem Rechten *I 31.f.2 gleich * , mithin $B = DAC$ und $C = DAB$ sind.

γ) Von jedem dieser kleinern Dreyecke gilt also * (f. 1.) auch das Bewiesene, und es ist $AD^2 = AB^2 - BD^2 = BD \times BC - BD^2 = BD \times (BC - BD)$, also $AD^2 = BD \times DC$, * E. 5. \gamma. Das Quadrat über dem Perpendikel ist also dem Rechteck aus den beyden Abschnitten der Hypotenuse gleich; eine elegante und fruchtbare Eigenschaft des rechtwinkligen Dreyecks,

δ) Verbindet man hiermit den Satz, daß die Seiten gleicher Rechtecke verkehrt proportional sind * 4 f. 1. , so folgt aus γ , daß sich stets verhält $BD : AD = AD : DC$, und eben so folgen aus α , die Proportionen $BD : AB = AB : BC$ und $CD : AC = AC : BC$. Also wird die Hypotenuse durch das Perpendikel AD so zerschritten, daß 1) dieses Perpendikel selbst die mittlere Proportionallinie zwi-

schen den beyden Abschnitten, *2) jede der Katheten die mit- * V. 5.
lere Proportionallinie zwischen dem Abschnitt unter der
Kathete und der ganzen Hypotenuse ist. Hierauf wer-
den wir einfache Methoden gründen, um zu zwey ge-
gebenen Linien, oder zu einer Linie und einem Ab-
schnitt derselben, mittlere Proportionallinien zu finden,
und gegebne Rechtecke in Quadrate zu verwandeln.

ε) Die Quadrate der beyden Katheten und der Hypo-
tenuse verhalten sich zu einander, wie die beyden Abschnitte
der Hypotenuse untereinander und zur ganzen Hypotenuse,
oder

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 = BD : DC : BC.$$

Denn die Rechtecke BE, DG, BG, denen jene Quadra-
te gleich sind, haben die Hypotenuse zur gemeinschaft-
lichen Höhe, verhalten sich also wie ihre Grundli-
nien * — Durch Bildung eines rechtwinkligen Drey- * 3.
ecks wird es also möglich seyn Linien darzustellen, die
sich wie zwey gegebne Quadrate verhalten, und um-
gekehrt.]

[Folgerung 3. α) Das Rechteck aus den beyden
Katheten hat gleichen Inhalt mit dem Rechteck aus der
Hypotenuse und aus dem Perpendikel, oder $AB \times AC =$
 $AD \times BC$. Denn diese beyden Rechtecke haben mit
dem rechtwinkligen Dreyeck gleiche Grundlinien und
Höhe, folglich beyde einen doppelt so grossen Inhalt
als dieses Dreyeck, und mithin beyde einen gleichen
Flächenraum. (Euklid. X. 34. Lemma)

β) Der Inhalt des rechtwinkligen Dreyecks selbst ist
gleich $\frac{1}{2} AB \times AC$ oder $\frac{1}{2} AD \times BC$, und verhält sich

zum Quadrat der Hypotenuse wie $\frac{1}{2} AD : BC$; und zum Quadrat über einer Kathete, z. B. über AB , wie $\frac{1}{2} AC : AB$ oder wie $\frac{1}{2} AD : BD$. Denn es ist

$$\begin{aligned} \triangle ABC : BC^2 &= \frac{1}{2} AD \times BC : BC^2 = \frac{1}{2} AD : BC \text{ und} \\ \triangle ABC : AB^2 &= \frac{1}{2} AB \times AC : AB^2 = \frac{1}{2} AC : AB \\ &\text{oder} = \frac{1}{2} AD \times BC : BD \times BC = \frac{1}{2} AD : BD. \end{aligned}$$

γ) Da bey zwey gleichen Verhältnissen die Vorderglieder auch dem Doppelten der Hinterglieder proportional sind *, so verhält sich

$$\begin{aligned} \triangle ABC : BC^2 + AB^2 + AC^2 &= \frac{1}{2} AD : 2 BC \\ &= AD : 4 BC. \end{aligned}$$

(Gregor von St. Vincenz I. 23. 24.)

Fig. 28. [Folgerung 4. Fällt man im gleichschenkligen Dreyeck ABC , aus der Spitze eines der gleichen Winkel an der Grundlinie, z. B. aus B , ein Perpendikel BD auf den gegenüberliegenden Schenkel, so ist die Summe der Quadrate über alle drey Seiten des Dreyecks gleich $CD^2 + 2 AD^2 + 3 BD^2$. Denn es ist $BC^2 = CD^2 + BD^2$ und $AB^2 = AC^2 = AD^2 + BD^2$, folglich $BC^2 + AB^2 + AC^2 = CD^2 + 2 AD^2 + 3 BD^2$. (Gregor von St. Vincenz I. 40.)

Sätze die ich mehr ihrer Nettigkeit als ihrer Brauchbarkeit halber hier mit aufnehme.]

Fig. 29. Zusatz. Ein Quadrat $ABCD$ wird durch die Diagonale AC in zwey rechtwinklige Dreyecke getheilt, wovon jedes, wie z. B. ABC , gleichschenkelig ist. Also sind die beyden Quadrate über die Katheten dieses Dreyecks einander gleich, folglich $AC^2 = 2 \cdot AB^2$. In jedem Quadrate ist folglich das Quadrat der Diagonale doppelt so groß als das Quadrat einer der

Seiten. — Dieses läßt sich auch so beweisen. Man ziehe durch die gegenüberstehenden Winkelpunkte des Quadrats Parallellinien mit der zwischen ihnen liegenden Diagonale, so entsteht dadurch ein Parallelogramm EFGH, welches, da beyde Diagonalen gleich und auf einander senkrecht sind *, das Quadrat der Diagonale * I. 37. ist. Dieses Quadrat enthält 8 rechtwinklige Dreyecke in sich, die sich decken, und deren 4 das Quadrat ABCD ausmachen; daher jenes Quadrat das Doppelte von diesem ist.

Es verhalten sich also in jedem Quadrate ABCD, die über eine der Diagonalen und über eine der Seiten beschriebnen Quadrate $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$, folglich die Seiten dieser beyden Quadrate, wie die Quadratwurzeln aus 2 und 1 *, oder $AC : AB = \sqrt{2} : 1$. Diese *4.Z.3.7 beyden Linien haben also ein irrationales Zahlverhältniß, und mithin sind die Diagonale und die Seite eines jeden Quadrats untereinander incommensurabel *; ein Satz, *II.Auf. 19. 2. womit Euklid seine Abhandlung über incommensurable Flächen schließt (X. 117), und den wir weiterhin noch auf eine andre Art beweisen werden.

[LEHRSATZ 13.]

In jedem schiefwinkligen Dreyeck ist das Quadrat Fig. 30. einer Seite BC, welche einem spitzen Winkel A gegenüber steht, kleiner, dagegen das Quadrat einer Seite bc, welche einem stumpfen Winkel a gegenüber steht, größer als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten. Und

zwar, wenn man von einem der Endpunkte dieser Seite, z. B. aus B, auf die gegenüberstehende Seite AC, oder deren Verlängerung, ein Perpendikel fällt; so ist das doppelte Rechteck aus AC und dem Abschnitte dieser Seite, welcher am Winkelpunkte A (nicht an BC) anliegt, jenem Unterschiede gleich. Oder es ist

1) wenn der Winkel A spitz ist,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AC \times AD$$

2) wenn dagegen der Winkel a stumpf ist,

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 + 2 ac \times ad$$

I. Ist A eine spitzer Winkel, so liegt das Perpendikel BD zwischen den beyden Schenkeln dieses Winkels, und folglich mit der Grundlinie des Dreyecks,

* I. 16. d. h. mit AB auf einerley Seite des Punktes A *. Ist Z. 2. überdem auch der Winkel C spitz, so fällt das Perpendikel BD innerhalb des Dreyecks, und es ist $CD = AC - AD$; ist dagegen der Winkel C stumpf, so fällt das Perpendikel BD über den Schenkel LC hinaus,

* 1. 16. Z. 2. f. 2. außerhalb des Dreyecks *, und es ist umgekehrt $CD = AD - AC$. In beyden Fällen ist also CD dem Unterschiede zwischen AC und AD gleich, nur dafs im ersten Fall die Grundlinie AC, im zweyten AD gröfser ist; und mithin ist in beyden Fällen gleichmäfsig

* 10. $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 AC \times AD$ *. Fügt man nun zu diesen gleichen Flächenräumen beyderseits BD^2 hinzu, und setzt statt der Quadrate der beyden Katheten

* 12. $BD^2 + CD^2$, das Quadrat der Hypotenuse, BC^2 *,
und

und eben so statt $BD_2 + AD_2, AB^2$, so erhält man

$$BC_2 = AB^2 + AC^2 - 2 AC \times AD.$$

2) Ist a ein *stumpfer Winkel*, so liegt das Perpendikel bd auſserhalb beyder Schenkel*, (zwischen den ^{1. 16. Z.} Schenkeln des spitzen Nebenwinkels) und steht daher ^{2. l. 2.} nicht auf der Grundlinie ac ſelbſt, ſondern auf deren Verlängerung auf, die in Abſicht des Punktes a entgegengesetzt liegt. In dieſem Fall iſt alſo $cd = ad + ac$, folglich $cd^2 = ad^2 + ac^2 + 2 ac \times ad$, und wenn man beyderſeits bd_2 hinzufügt,

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 + 2 ac \times ad.$$

Folgerung 1. Der Winkel A mag alſo *ſpitz* oder *ſtumpf* ſeyn, ſo wird in beyden Fällen das Quadrat der gegenüberſtehenden Seite BC , durch die Summe der Quadrate der anliegenden Seiten AB, AC , und durch das doppelte Rechteck $2 AC \times AD$ beſtimmt, nur daſſ dieſes für *ſpitz* Winkel *abzuziehn*, für *ſtumpfe* *hinzuzufügen* iſt. Die Ausſage für beyde Fälle laſſen ſich daher bequem in folgende allgemeine zuſammen ziehn

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2 AC \times AD$$

wo, wenn A *ſpitz* iſt, für den letzten Theil das *obere* Zeichen, wenn A hingegen *ſtumpf* iſt, das *untere* Zeichen gilt.

Iſt A ein *rechter Winkel*, ſo muß dieſer Theil fortfallen, damit wir die Ausſage des *Pythagoreiſchen Lehrsatzes* erhalten. In der That fällt dann das Perpendikel BD mit der Kathete BA zuſammen, daher dann kein

Abschnitt AD, mithin auch kein Rechteck $AC \times AD$ vorhanden ist.

Grade so liegt der Abschnitt AD, so lange der Winkel A spitz ist, mit der Grundlinie AC auf einerley Seite des Punktes A, hingegen wenn A stumpf ist, auf der entgegengesetzten Seite, hat also in diesem zweyten Fall eine entgegengesetzte Lage als im erstern, und von diesem Entgegengesetzten in der Lage des Abschnitts rührt es her, daß das Rechteck $2AC \times AD$ in beyden Fällen auf entgegengesetzte Art vorkömmt, in jenem wegzunehmen, in diesem hinzuzufügen ist.

Anmerkung 1. Dieses Entgegengesetzte in Absicht der Lage, (es sey nun zweyer Linien, oder zweyer Winkel, u. s. f.) in Fällen, die sich sonst ganz gleich sind, pflegt man in der rechnenden Geometrie durch die Benennungen *positiv* und *negativ* zu charakterisiren, indem man die Linien, Winkel u. s. f., welche dieselbe Lage als in dem Fall haben, von dem man ausgeht, *positive Linien, Winkel* u. s. f. nennt; diejenigen hingegen, die auf entgegengesetzte Art liegen, *negative Linien, Winkel* u. s. f. In so fern man sich dann bloß an den arithmetischen Sinn der geometrischen Sätze und Formeln hält, und es lediglich mit Zahlausdrücken für ausgedehnte Größen zu thun hat, kann man das, was durch dieses Entgegengesetzte in der Lage, in den Sätzen und Formeln abgeändert wird, nach den Regeln der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlgrößen, wie sie die Arithmetik entwickelt, beurtheilen, wobey uns die Aussage für einen einzigen Fall genügt, hier z. B. für den Fall eines spitzen Winkels, für den $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AD$ ist. Denn mittelst des Begriffs *negativer Größen*, und den darauf gebauten Rechnungsregeln, liegt in dieser Formel zugleich die Aussage für den Fall eines stumpfen Winkels, für welchen AD auf eine entgegengesetzte Art als für den spitzen Winkel liegt, foiglich einen *negati-*

tiven Zahlwerth erhält, daher alsdann das subtractive Produkt $2 AB \times AD$ den Regeln der Rechnung gemäß, in ein Additives übergeht. Allein dieses Zusammenfassen mehrerer Fälle, die in allem, bis auf das Entgegengesetzte in der Lage gewisser Linien, Winkel u. s. f. übereinstimmen, in einen Linzigen, gehört eigentlich nicht hierher, sondern in die rechnende Geometrie, welche eben dadurch so manche geometrische Untersuchung, die auf dem ostensiven Wege, durch die Menge solcher Fälle sehr weitläufig und langwierig wird, außerordentlich abkürzt und erleichtert. Auf dem ostensiven, eigentlich geometrischen Wege, muß man diese Fälle einzeln betrachten, und für jeden die Aussage einzeln aufstellen und darthun, weil, wie gesagt, der Kunstgriff, alle Aussagen in Eine durch den Begriff des Negativen zusammenzufassen, und aus ihr zu entwickeln, auf arithmetischen Gründen beruht, und der rechnenden Geometrie ausschließlich eigen ist.

Daraus folgt aber nicht, daß man im System der Geometrie aus solchen einzelnen Fällen auch einzelne Sätze machen müsse. Dadurch würde die Uebersicht und das Behalten viel zu sehr erschwert. Vielmehr muß man sie, wenn ich nicht irre, auch hier als bloße Modificationen eines und desselben Hauptsatzes unter einer allgemeinen Aussage zusammenstellen, die blos, je nachdem gewisse Linien, Winkel u. s. f. eine entgegengesetzte Lage haben, nüancirt wird. Euklid, Le Gendre und fast alle andern Geometer pflegen sie zwar durchgängig als einzelne Sätze aufzuführen, und machen so z. B. aus den beyden Fällen dieses Lehrsatzes, zwey verschiedene Sätze. Weil aber dadurch die Uebersicht der Wissenschaft in der That nicht wenig gestört und erschwert wird, so glaube ich dieses für einen Fehler gegen die Methode halten zu müssen, den ich zu vermeiden durchgängig Bedacht gewesen bin. Diese Zusammenstellung gewährt überdem noch den Nutzen, daß sie von selbst darauf führt, genau nachzusehn, worin sich jedesmal die verschiedenen Fälle unterscheiden.

den, und wie sie sich mittelst des Begriffs des Negativen unter eine Aussage zusammenziehn, und aus ihr entwickeln lassen; Uebungen, die ich dem Anfänger recht sehr empfehle, und durch die er sich in dem rechten Sinne und dem Gebrauch dieses für die Analysis und ihre Anwendungen so wichtigen Begriffs festsetzen wird. Und zwar versuche er das sogleich an Lehrsatz 10 und bey den Folgerungen zu Lehrsatz 11, so wie bey den folgenden Lehrsätzen, bey denen ich hierauf nicht wieder zurückkommen werde.

Was unsern Lehrsatz betrifft, so umfaßt er, wie wir gesehen haben, zugleich den *Pythagoreischen Lehrsatz*, als einen von *drey Hauptfällen*, und gehnt ihn mit gehörigen Modificationen auf alle Arten von Dreyecken aus. Und zwar beruhen diese drey Fälle unmittelbar auf der Beschaffenheit und Lage des Abschnitts AD, welcher den Abstand des Perpendikels BD vom Winkelpunkte A bestimmt, und sogleich mittelbar auf der Beschaffenheit des Winkels A. Je nachdem dieser Winkel A *spitz*, *stumpf* oder *recht* ist, fällt das Perpendikel BD und zugleich der Abschnitt AD, entweder auf *die* Seite des Punktes A, auf welcher die Grundlinie AC des Dreyecks liegt, oder auf die entgegengesetzte Seite, oder in den Punkt A selbst hinein. Und das macht die Verschiedenheit der drey Fälle aus, und begründet die Verschiedenheit in der Aussage des Satzes. Dafs indess selbst dieser so verallgemeinerte Satz sich wiederum nur als einen *besondern Fall* eines noch allgemeinem Satzes über das Dreyeck ansehen lasse; davon wird uns Lehrsatz 15 überzeugen.

Fig. 31.

Folgerung 2. Fällt man aus beyden Endpunkten der Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC, oder auf deren Verlängerungen, Perpendikel BD, CE; so ist, unserm Lehrsatz zu Folge, sowohl $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2AC \times AD$ als auch $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2AB \times AE$; wo in beyden Fäl-

len das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A spitz oder stumpf ist. Mithin muß in jedem Dreyeck, der Winkel A sey spitz oder stumpf, $AC \times AD = AB \times AE$ seyn, und folglich auch $AC : AB = AE : AD$ *.

* 4, f. I.

Zieht man durch den Durchschnittspunkt der beyden Perpendikel BD, CE die grade Linie AF, so steht auch diese auf der gegenüberstehenden Seite BC senkrecht *; daher gleichfalls $BC \times BF = BA \times BE$ und $CA \times CD = CB \times CF$ ist, und sich auch verhält $BC : BA = BE : BF$ und $CA : CB = CF : CD$.

* II. 2;
Z. 2.

*Perpendikel aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt, durchschneiden diese folglich so, daß je zwey Rechtecke, welche aus einer Seite und demjenigen Abschnitt derselben, der an beyder Seiten Durchschnittspunkt anliegt, stets gleich sind; oder daß je zweyer Seiten Abschnitte, die an demselben Winkelpunkte liegen, sich verkehrt wie die Seiten verhalten *.*

* E. 7.

Folgerung 3. Für einen spitzen Winkel 'A ist das Rechteck $2 AC \times AD = AB^2 + AC^2 - BC^2$; für einen stumpfen Winkel a hingegen $2 ac \times ad = bc^2 - ab^2 - ac^2$. Für beyde wird also dieses Rechteck durch die Quadrate der Seiten auf gleiche Art gegeben, nur daß im erstern BC^2 kleiner, im zweyten bc^2 größer ist, als die Quadrate der beyden andern Schenkel zusammengenommen.

Jeder der einzelnen Abschnitte, z. B. AD, wird mit-
hin durch die drey Seiten des Dreyecks! folgendermassen
bestimmt, $AD = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AC}$ und

$$ad = \frac{bc^2 - ab^2 - ac^2}{2 ac};$$

Ausdrücke, welche, je nach-

dem man den geometrischen oder den arithmetischen
*4. Z. 3. Sinn der Zeichen nimmt *, verschieden zu übersetzen
sind. Dem *geometrischen Sinn gemäss* verlangen sie, daß
man erstens ein Quadrat, welches den ; Quadraten von
AB, AC zusammengenommen gleich, und zweytens
ein Quadrat welches dem Unterschiede zwischen die-
sem und dem Quadrat von BC gleich sey, bilde, und
dieses dritte Quadrat in ein Rechteck, das 2 AC zur
Grundlinie hat, verwandle, (wozu man die Methoden
unter den Aufgaben am Ende dieses Buches findet) um
den Abschnitt AD, als die Höhe dieses Rechtecks zu
finden. Nach dem *arithmetischen Sinn* genommen, er-
hält man, wenn man die Zahlwerthe der Seiten auf die
Art, wie die Formel es ausagt, zusammen nimmt,
den Zahl Ausdruck des Abschnitts AD, der für die
Trigonometrie, wenn man aus den Zahl Ausdrücken der
drey Seiten des Dreyecks den des Winkels A sucht,
und für Lehrf. 20, von Wichtigkeit ist.

Aus AD und BC findet sich endlich geometrisch
* 12. f. I. sowohl als arithmetisch *das Perpendikel AD* *, und
aus dem Zahlwerth desselben der *Inhalt des Dreyecks*
* 3. ABC *, der also auf diese Art aus dem Zahlwerth der
drey Seiten gefunden ist. Indess werden wir im fol-
genden Buche dazu einen bequemern Weg finden.

Folgerung 4. Endlich werden die an dem Winkel A anliegenden Seiten des Dreyecks ABC durch folgende Ausdrücke gegeben. Erstens die Seite AB, auf welcher das Perpendikel nicht steht, durch $AB^2 = BC^2 - AC^2 \pm 2 AC \times AD$. Zweytens die Seite AC, auf die das Perpendikel gefällt ist, durch $AC^2 \mp 2 AC \times AD = BC^2 - AB^2$, (folglich der Zahlausdruck derselben durch eine unreine quadratische Gleichung,) wo wiederum das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A spitz oder stumpf ist.

Aus der zweyten Formel folgt, daß $AC \times (AC \mp 2 AD) = BC^2 - AB^2$ ist *. Theilt man ^{* E. 5.} daher die Grundlinie des Dreyecks, AC, im Punkte O in zwey gleiche Theile, da denn $AC \times (AC \mp 2 AD)$ gleich $AC \times (2 AO \mp 2 AD)$ gleich $2 AC \times OD$ wird, und zwar sowohl für spitze als für stumpfe Winkel; so ist $2 AC \times OD = BC^2 - AB^2$; ein sehr brauchbarer Satz, den wir weiter unten nochmals als besondern Lehrsatz aufstellen, und noch auf andre Art herleiten werden *. ^{* 17.}

Folgerung 5. Ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig, A die Spitze, BC die Grundlinie, und AF das Perpendikel auf die Grundlinie, so wie BD das Perpendikel auf den Schenkel AC (folglich $AB = AE$, $BF = \frac{1}{2} BC$ * ^{Fig. 28.} ^{* 1. 12. Z.} und die Winkel an der Grundlinie B, C nothwendig spitz *) so ist, dem hier Bewiesenen gemäß ^{* I. 31.}

$$\alpha) BC^2 = 2 AC^2 \mp 2 AC \times AD^* = 2 AC \times (AC \mp AD) * \text{ (f. 1.)}$$

$$= 2 AC \times CD^*$$

^{* E. 5.}

A sey spitz oder stumpf, da im erstern Fall das obere, im zweyten das untere Zeichen gilt. Und das ist aller-

- * f. 2. dings richtig, da $CA \times CD = CB \times CF$ * und $CF = \frac{1}{2} CB$ ist.
- * f. 3. β) $AD = \frac{2 AC^2 - BC^2}{2 AC}$ und $ad = \frac{bc^2 - 2 \cdot ac^2}{2 \cdot ac}$ *

Anmerkung 2. Folgenden eleganten Beweis, welcher beyde Fälle unsers Lehrsatzes, ganz nach der Art, wie wir den Pythagoreischen Lehrsatz bewiesen haben, und zwar unabhängig von diesem, darthut, halte ich der Mühe werth, hierher aus Gregor von St. Vincenz (l. 44. u. 45) zu übertragen, obgleich er sich auf einen Satz über die Sehnen stützt, den wir erst weiterhin be-

- * 22. weisen werden *, indem dieser Hülfssatz sich auch leicht unmittelbar aus Lehrsatz 7 ableiten läßt. Unfre Figur stellt zwar nur den Fall des stumpfen Winkels dar, reicht aber hin sich daran auch den Fall des spitzen Winkels zu denken, der nur wenig verschieden ist, und für den jeder sich leicht selbst eine Zeichnung entwerfen wird.

Man beschreibe über die drey Seiten des gegebenen Dreyecks ABC Quadrate AH, AI, BG, und über die Grundlinie BC, als Durchmesser, einen Halbkreis. Je nachdem nun der Winkel A *recht*, *spitz*, oder *stumpf* ist, fällt der Winkelpunkt A *auf* die Kreislinie, oder *aufserhalb*, oder *innerhalb* des Kreises *. In den beyden letztern Fällen wird also die Kreislinie entweder von den Schenkeln, oder von deren Verlängerung, in den Punkten P, Q durchschnitten, und zieht man durch diese Durchschnittspunkte die graden Linien CPM, BQN, so sind P, Q als Winkel im Halbkreise, Rechte *, folglich BPMH und CQNI Rechtecke, so wie auch AFML, AQNK; und zwar sind diese letztern Rechtecke, jenes aus den Linien AP, AB, dieses aus AQ, AC beschrieben, also (da BP, CQ Sehnen sind,

die sich in einem Punkte A durchschneiden,) vermöge der Natur des Kreises gleich *. Theilt man nun, * 22. wie bey dem Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes, das Quadrat über der Grundlinie BC durch das Perpendikel AE in zwey Rechtecke, und zieht AG, BI; so entstehn zwey Dreyecke AGC, BIC, welche, jenes mit dem Rechteck DG, dieses mit dem Rechteck CN über gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen stehn, folglich halb so groß als diese Rechtecke sind *. *2. f. 1. Beyde Dreyecke decken sich aber, sind also gleich, und folglich haben auch die Rechtecke DG und CN gleichen Inhalt. Grade so thut man dar, daß auch die Rechtecke DF und BM gleichen Inhalt haben. Folglich ist $BC^2 = \text{Recht. CN} + \text{Recht. BM}$ oder $BC^2 = AC^2 \mp AC \times AQ + AB^2 \mp AB \times AP$; und da die beyden Rechtecke gleich sind,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2 AC \times AQ$$

wo das untere Zeichen gilt, wenn A stumpf, das obere wenn A spitz ist, und wo man statt des letztern Rechtecks auch das Rechteck $\mp 2 \cdot AB \times AP$ setzen kann. d. U.

[LEHRSATZ 14.]

Ein Dreyeck ABC ist bey A rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig, je nachdem das Quadrat der Seite BC, welche diesem Winkel gegenübersteht, den Quadraten der beyden Seiten AB, AC, welche den Winkel A einschließen, zusammengenommen gleich ist, oder kleiner, oder größer ist, als diese beyden Quadrate. Fig. 30.

- Denn gesetzt es ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, und doch wäre A kein rechter, sondern ein spitzer oder ein stumpfer Winkel, so müßte zugleich auch $BC^2 =$
 * 13. $AB^2 + AC^2 \mp 2 AC \times AD$ seyn *, welches der Voraussetzung widerspricht.

Eben so müssen, wenn $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2 AC \times AD$ ist, und der Winkel A wäre nicht im Fall des *obern* Zeichens *spitz*, sondern recht oder stumpf, und nicht im Fall des *untern* Zeichens *stumpf*, sondern recht oder spitz, vermöge der beyden vorigen Lehrrätze zugleich $BC^2 = AB^2 + AC^2$ oder $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2 AC \times AD$ seyn, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Aehnliche *Kriterien* um aus der Größe der drey Seiten eines Dreyecks ABC, und eines der Stücke, welche durch die Perpendikel aus den Spitzen auf den gegenüberstehenden Seiten abgechnitten werden, zu beurtheilen, ob ein bestimmter Winkel A des Dreyecks, *recht, spitz oder stumpf* ist, geben die Formeln in Lehrsatz 13 Folgerung 3 und 4 an die Hand, so wie Folgerung 5 Merkmale, wonach sich aus der Größe der Seiten beurtheilen läßt, ob ein Dreyeck *gleichschenkelig* ist, oder nicht.

[LEHRSATZ 15.]

Fig. 33. Wenn man über zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zwey Parallelogramme ABDE, ACFG, unter beliebigen Winkeln, und von beliebiger Größe und Lage beschreibet, die Seiten derselben, welche den

Seiten des Dreyecks gegenüberstehn, bis zu ihrem Durchschnittspunkte H verlängert, und durch diesen und die Spitze des Dreyecks die grade Linie HAK zieht:

so ist, wenn diese Linien die Grundlinie BC selbst schneidet, die Summe; wenn sie hingegen die Verlängerung der Grundlinie schneidet, der Unterschied der beyden Parallelogramme über AB und AC , einem Parallelogramme $BCML$ gleich, welches über die dritte Seite BC des Dreyecks so beschrieben wird, dass dessen zweyte Seite der Linie HA gleich und parallel ist.

Zieht man durch die Endpunkte der Grundlinie BC , parallel mit KH , zwey grade Linien, welche die Linien DE , FG , in den Punkten L und M , durchschneiden, so sind die Vierecke $ABLH$, $ACMH$, Parallelogramme, da sie der Construction gemäfs, durch Parallelen zwischen Parallelen gebildet werden*. Und * I. 34. zwar stehn diese Parallelogramme mit denen, welche über die Seiten AB , AC beschrieben sind, auf gleicher Grundlinie und zwischen gleichen Parallelen, haben also mit ihnen gleichen Inhalt*.

* I.

In ihnen sind die gegenüberstehenden Seiten BL , AH , und CM , AH , mithin auch BL und CM , gleich. Da diese Linien überdem der Construction gemäfs parallel laufen, so ist $CBLM$ ein Parallelogramm*, und * I. 36. zwar ein Parallelogramm, welches aus den Linien BC und AH , letzterer in paralleler Lage mit KH , beschrieben ist.

Ueberdem bildet die Linie HK mit den Seiten dieses Parallelogramms, oder deren Verlängerungen, ebenfalls zwey Parallelogramme LK, KM, welche mit den Parallelogrammen BLHA, CMHA, über gleichen Grundlinien BL, CM, und zwischen gleichen Parallelen stehn, folglich gleichen Inhalt haben *.

Diese letztern hatten aber mit den Parallelogrammen ABDE und ACFG gleichen Inhalt. Also ist das Prlgr. ABDE = Prlgr. LK und Prlgr. ACFG = Prlgr. MK.

Durchschneidet nun die Linie AK die Grundlinie des Dreyecks BC selbst, so ist das Parallelogramm über BC die Summe der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG + Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;
und dann ist dieses letztere Parallelogramm unter Winkeln $LBC = B + BAK$ und $MCB = C + CAK$ beschrieben.

Durchschneidet dagegen die Linie AH die Verlängerung der Grundlinie in einem Punkte K, so ist das Parallelogramm über BC der Unterschied der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG — Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;
und dann sind die Winkel, worunter das letztere Parallelogramm beschrieben ist, $LBC = B - BAK$ und $MCB = C - CAK$.

Zu f a t z. Im Fall die beyden Parallelogramme, welche man über die Seiten AB, AC des Dreyecks, ABC beschreibt, *Quadrate* sind, geht die Aussage dieses Sat-

zes, für rechtwinklige Dreyecke in den *Pythagoreischen Lehrsatz* *, und für schiefwinklige in die allgemeinere * 12. Aussage *des 13ten Lehrsatzes* über. In diesem Fall ist nemlich das dritte Parallelogramm über BC, welches jenen beyden gleich ist, bey dem rechtwinkligen Dreyeck auch ein Quadrat, bey schiefwinkligen hingegen ein Parallelogramm, das um zwey Rechtecke, wie sie *Lehrsatz 13* angiebt, gröfser oder kleiner als das Quadrat über BC ist. Dieses läfst sich leicht mittelst folgendes *Lemmas* zeigen.

Hülfsatz. Beschreibt man über eine der Katheten *Fig. 34.* eines bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC, z. B. über AC, ein Quadrat, verlängert die Seite desselben, welche der Kathete gegenübersteht, und zieht durch die Spitzen des rechten Winkels und des Winkels C, senkrecht auf der Hypotenuse, bis an jene Seite oder deren Verlängerung, die graden Linien KAH und CM; so sind AH und CM beyde der Hypotenuse des gegebenen rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Denn vermöge dieser Construction sind erstens CMAH Parallelen zwischen Parallelen, also $CM = AH$ *. • I. 34. Zweytens sind BAC und F rechte Winkel; eben so BCM und ACF, weshalb der Unterschied derselben vom Winkel ACM, d. h. die Winkel BCA und MCF gleich seyn müssen. Endlich sind, als Seiten eines Quadrats, AC und CF gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke ABC, FMC *, und es ist allemal * I. 7. $FM = AB$ und $CM = BC$, oder AH und CM sind der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Folgerung 1. Werden folglich in einem *rechtwinkligen Dreyeck* über *beyde Katheten* Quadrate *AF*, *AD* beschrieben, und auf den Endpunkten der Hypotenuse Perpendikel *BL*, *CM* errichtet, welche die den Katheten gegenüberstehenden Seiten der Quadrate, oder deren Verlängerungen, in *L* und *M* durchschneiden, so sind diese Perpendikel beyde der Hypotenuse *BC* gleich, und folglich ist *BCML* ein über der Hypotenuse beschriebnes Quadrat. Ueberdem durchschneidet das Perpendikel *KA* jede dieser beyden Verlängerungen in einem Punkte *H* so, daß für die eine *AH* gleich *CM*, für die andre *AH* gleich *BL*, mithin für beyde gleich ist, folglich in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beyder Verlängerungen. Da nun

† 15. überdem *AH* mit *BL* und *CM* parallel läuft, so ist * das Quadrat über der Hypotenuse *BC*, den Quadraten über den beyden Katheten zusammengenommen gleich, wie dieses der Pythagoreische Lehrsatz ausagt.

Fig. 35. *Folgerung 2.* Werden in einem *schiefwinkligen Dreyeck* *ABD*, über zwey Seiten *AB*, *AC* Quadrate *AD*, *AE* beschrieben, und man fällt aus den Endpunkten der dritten Seite *BC* auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel *CP*, *EQ*, und beschreibt über die Seiten *BP*, *CQ* Quadrate, *BPed*, und *CQgf*, so gilt auch für diese Quadrate unser Lehrsatz, indem vermöge dieser Construction *BCP* und *BCQ* rechtwinklige Dreyecke sind, welche *BC* gemeinschaftlich zur Hypotenuse haben. Errichtet man folglich auf *B* und *C* die Perpendikel *Bl* *Cm*, welche bis an die Seiten dieser letztern Quadrate,

oder ihre Verlängerungen reichen, so ist jedes dieser Perpendikel der Hypotenuse BC gleich, also auch in diesem Fall BCml das Quadrat über der dritten Seite BC. Zugleich muß auch in diesem Fall das Perpendikel KA sich mit den Seiten, welche den beyden Katheten gegenüber stehn, in demselben Punkte h schneiden, weil dieses Perpendikel, sowohl mit AB, Bl, lh, als auch mit AC, Cm, mh, Parallelen zwischen Parallelen bildet, folglich für beyde Seiten gleiche Länge $Bl = Cm$ hat; Mithin ist nach Lehrsatz 15 $BCq = \text{Rechtk. Ad} \mp \text{Rechtk. Af}$. Nun aber ist $\text{Rechtk. Ad} = AB^2 \mp AB \times AP^*$ und $\text{Rechtk. Af} = AC^2 \mp AC \times AQ$, wo das * 8.Z. 2. untere Zeichen gilt, wenn A (wie in unsrer Figur) stumpf, das obere wenn A spitz ist, (für welchen Fall man sich die Figur leicht selbst zeichnen wird). Ueberdem sind BQPC Punkte in einem Halbkreise *, und * 23.Z. 2. folglich $AB \times AP = AC \times AQ$ der Natur der Sehnen gemäß *. Mithin ist $BC^2 = AB^2 \mp AC^2 \mp 2 AB \times AP$, * 22. wie dieses Lehrsatz 13 ausagt.

Anmerkung. Der intressante Lehrsatz, von dem, wie wir sehn, die Sätze von den Quadraten, welche über Seiten eines Dreyecks beschrieben sind, nur einen besondern Fall ausagen, kömmt im Wesentlichen schon bey Pappus, an der Spitze des vierten Buchs seiner mathematischen Sammlungen vor (Collectiones mathematicae lib. 4. pr. 1.) und wird vom ältern Castillon in den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften (Propositions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une maniere nouvelle. Mém. de Berlin An. 1766. p. 354.) auf eine ähnliche Art wie hier behandelt.

[L E H R S A T Z 16.]

Fig. 36.

1. Ein Perpendikel, welches aus einem der Eckpunkte eines Dreyecks, z. B. aus A , auf die gegenüberstehende Seite BC , oder deren Verlängerung gefällt wird, schneidet diese so, daß der Unterschied der Quadrate aus beyden Abschnitten BD , DC , dem Unterschiede der Quadrate aus den beyden andern Seiten des Dreyecks, AB , AC , gleich ist ($BD^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$;) und zwar liegt stets der grössere Abschnitt BD an dem grössern beyder Schenkel AB an.

2. Und theilt man die Grundlinie BC im Punkte O in zwey gleiche Theile, so ist der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB , AC gleich dem doppelten Rechteck aus der Grundlinie und aus dem Abstände des Perpendikels AD von der Mitte der Grundlinie; oder $AB^2 - AC^2 = 2 \cdot BC \times DO$.

1. Da nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $AB^2 = AD^2 + BD^2$ und $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ist, so muß auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ seyn, wie dieses der erste Theil des Lehrsatzes ausagt; und dabey kömmt es auf die Beschaffenheit der Winkel weiter nicht an. Ist der Schenkel AB grösser als AC , so muß folglich auch der an diesem Schenkel anliegende Abschnitt BD der Grundlinie, der grössere seyn.

2. Da der Unterschied zweyer Quadrate dem Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede ihrer Seiten gleich

gleich ist *, so folgt aus dem eben Bewiesenen, das * 11.
 $AE^2 - AC^2 = (BD + CD) \times (BD - CD)$ ist. Nun
 ist im *spitzwinkligen* Dreyeck die Summe, im *stumpf-*
winkligen der Unterschied der beyden Theile BD, CD
 der Grundlinie BC des Dreyecks gleich. Halbirt man
 überdem die Grundlinie im Punkte O, und trägt OE
 gleich OD auf, so ist auch BE gleich DC *, folglich *Gr. 2 β
 im *spitzwinkligen* Dreyeck der Unterschied der Linien
 BD, DC gleich $BD - BE = DE = 2DO$, im *stumpf-*
winkligen Dreyeck dagegen die Summe der Linien BD,
 DC gleich $BD + BE = DE = 2 . DO$. Mithin ist im
 spitzwinkligen Dreyeck sowohl als im stumpfwink-
 ligen

$$AE^2 - AC^2 = 2 . BC \times DO.$$

Und diese Aussage gilt auch für das bey C rechtwink-
 lige Dreyeck, für welches C und D zusammenfallen
 und $2 DO \times BC = BC^2$ ist; mithin für jedes Dreyeck.
 Eine Allgemeinheit, in der wir diesen Satz schon wei-
 ter oben unter den Folgerungen aus Lehrsatz 13 ken-
 nen gelernt haben *.

* 13. f. 4.

Folgerung. 1. Da nach dem ersten Theil des
 Lehrsatzes, für jedes Dreyeck $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$
 ist, so muß auch, wenn man beyderseits $AC^2 + DC^2$
 hinzufügt, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ seyn. In jedem
 Dreyeck sind also die Quadrate der beyden Schenkel, sämmt
den Quadraten der ihnen gegenüberstehenden Abschnitte der
 Grundlinie, die durch ein Perpendikel aus der Spitze ge-
 bildet werden, untereinander gleich.

Fig. 37. *Folgerung 2.* Eine grade Linie CG, welche man aus dem Scheitelpunkte C eines der spitzen Winkel des bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC, nach der gegenüberstehenden Kathete, oder nach deren Verlängerung willkürlich zieht, theilt diese folglich so, daß $CB^2 + AG^2 = CG^2 + AB^2$ oder $CB^2 + Ag^2 = Cg^2 + AB^2$ ist. (Gregor von St. Vincenz I. 41.)

Fig. 36. *Folgerung 3.* Da nach dem zweyten Theil des Lehrsatzes in jedem Dreyeck der Unterschied der Quadrate zweyer Seiten, $AB^2 - AC^2$, dem Rechtecke $2 BC \times DO$ gleich ist; so muß in allen Dreyecken, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und für welche der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC derselbe, folglich einem gegebenen Flächenraume F gleich ist ($AB^2 - AC^2 = F$), auch DO von einerley Größe seyn, ($DO = \frac{F}{2 BC}$). In allen diesen Dreyecken

steht folglich ein Perpendikel, welches aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, vom Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit ab, und da für alle diese Dreyecke der Punkt C derselbe ist, so müssen ihre Spitzen insgesammt in dasselbe Perpendikel auf BC fallen, welches um die bestimmte Linie $OD = \frac{F}{2 BC}$ von der

Mitte der Grundlinie absteht. Dieses Perpendikel ist mithin der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweyer grader Linien, welche von den gegebenen Punkten B und C aus gezogen, sich so durchschneiden, daß der Unterschied ihrer Quadrate einem gegebenen Flächenraum F gleich ist*.
 *I.E. 21. Oder es ist der geometrische Ort für die Spitzen eines

Dreyecks, von welchem die Grundlinie BC und der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln, d. i. F, gegeben ist. Verwandelt man diesen Flächenraum F in ein Rechteck, welches über 2 BC als Grundlinie steht *, so giebt die Höhe dieses Rechtecks den Abstand DO; und jeder Punkt A in dem Perpendikel, welches auf BC in der Entfernung DO von der Mitte der Grundlinie errichtet wird, giebt als Durchschnittspunkt zwey grade Linien BA, CA, oder als dritter Eckpunkt ein Dreyeck ABC, dessen Schenkel die verlangte Beschaffenheit haben. Dieses Perpendikel fällt innerhalb oder auferhalb des Dreyecks, oder auf dem Schenkel CB, je nachdem der gegebne Flächenraum F kleiner, oder größer als AB^2 , oder diesem Quadrate gleich ist. * Ag. 64

Anmerkung. Unser Lehrsatz, der bey Euklid fehlt, ist das erste Lemma, und die Aussage der dritten Folgerung der erste Satz im Zweyten Buche von *Apollonius* ebenen Oertern; auch eben dafelbst der erste Fall des vierten Satzes. d. U.

[LEHRSATZ 17.]

I. Wenn man in einem Dreyeck ABC von einem Fig. 36 der Winkelpunkte, z. B. von A, eine grade Linie AO nach dem Punkte O in der Mitte der gegenüberstehenden Seite BC zieht, so ist allemal $AB^2 + AC^2 = 2 AO^2 + 2 OC^2$.

Fälle von A auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel AD. Wie dieses auch liegen möge, so theilt allemal die Linie AO das gegebne Dreyeck in zwey Dreyecke AOB, AOC, welche, je nachdem die-

se halbirende Linie auf BC senkrecht oder schief aufsteht, entweder *beyde bey O rechtwinklig*, oder das *eine bey O stumpfwinklig*, das *andre spitzwinklig* ist. Im *ersten Fall* (der ein gleichschenkliges Dreyeck, def.

* 12. Z. *sen Spitze A ist, voraussetzt **,) fallen die Punkte O und D zusammen, und es ist $AB^2 + AC^2 = 2 AC^2 =$
 * 12. $2 AO^2 + 2 OC^2$ *, wie der Lehrsatz ausagt. Ist im *zweyten Fall* AOB der stumpfe, AOC der spitze Winkel, so steht in dem *bey O spitzwinkligen* Dreyeck, dem Winkel O die Seite AC gegenüber, und aus A ist auf OC das Perpendikel AD gefällt, folglich,

$$* 13. (1) \quad AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2 OC \times OD *;$$

(eine Aussage, die für den Fall, daß C ein rechter Winkel ist, folglich AD mit AC zusammenfällt, und OD in OC übergeht, sich in diese, $AC^2 = AO^2 - OC^2$ verwandelt.) In dem *bey O stumpfwinkligen* Dreyeck AOB, wo der Schenkel AB dem Winkel bey O gegenübersteht, ist $AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2 OB \times OD$ *, oder,

$$* 13. (2) \quad AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2 OB \times OD *,$$

$$weil nach der Voraussetzung OB gleich OC ist,$$

$$AB^2 = AO^2 + OC^2 + 2 OC \times OD$$

(eine Aussage, die falls bey C ein rechter Winkel, und OD gleich OC ist, in diese übergeht, $AB^2 = AO^2 + 3 OC^2$). Es ist daher auch in diesem zweyten Fall

$$AB^2 + AC^2 = 2 AC^2 + 2 OC^2$$

es sey bey C ein schiefer oder ein rechter Winkel. Die Aussage des Lehrsatzes gilt also für jeden möglichen Fall.

Ein anderer viel kürzerer Beweis dieses Satzes läßt sich unmittelbar aus Lehrsatz 11. Folgerung 2. ableiten. Denn da vermöge der Construction, die Grundlinie

BC des Dreyecks, in O gleich, und in D ungleich getheilt ist, so ist $BD^2 + DC^2 = 2 CO^2 + 2 OD^2$, folglich, wenn man beyderseits $2 AD$ hinzufügt, dem Pythagoreischen Lehrsatz gemäß, $AB^2 + AC^2 = 2 AO^2 + 2 OC^2$. — Umgekehrt kann man aus dem letztern Satze den erstern ableiten, wenn man für ihn noch einen andern Beweis, als den oben * mitgetheilten *II. f. 2. wünscht.

Folgerung I. Für alle Dreyecke, wie ABC, welche über derselben Grundlinie BC stehn, ist die Hälfte dieser Grundlinie, OC, also auch $2 \cdot OC^2$ von gleicher GröÙe *. Diejenigen unter diesen Dreyecken, für welche überdem noch die Quadrate der beyden Schenkel AB, AC einerley GröÙe haben, also $AB^2 + AC^2 = F$, d. h. irgend einem gegebenen Flächenraum gleich sind, müssen folglich alleämmtlich beschaffen seyn, daß ihre Spitze A von dem Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit abstehn. Denn da unserm Lehrsatz gemäß für sie alle $AB^2 + AC^2 = 2 AO^2 + 2 OC^2$ ist, so ist in jedem dieser Dreyecke $2 AO^2 = F - 2 OC^2$, mithin $AO = \sqrt{\left(\frac{1}{2}F - OC^2\right)}$, also AO für alle von gleicher GröÙe. Folglich ist eine um den Mittelpunkt der Grundlinie BC, mit einem Halbmesser, dessen Zahl- ausdruck $\sqrt{\left(\frac{1}{2}F - OC^2\right)}$ ist, beschriebne Kreislinie, der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und für welche die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln gleiche GröÙe hat. Oder sie ist der geometrische Ort für die Aufgabe, welche verlangt, von zwey gegebenen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich in einem Punkte A so durchschnei-

Cf. 16. f. 3. den, dass ihre Quadrate zusammengenommen einem gegebenen Flächenraum gleich sind *. Den Halbmesser dieser Kreislinie findet man aus den gegebenen Gröſſen F und BC geometriſch, wenn man nach Anleitung der Aufgaben zu Ende dieſes Buchs, die Figur F in ein gleichgeltendes Rechteck, und die Hälfte deſſelben in ein Quadrat verwandelt, und dann die Seite des Quadrats ſucht, welches dem Unterſchiede des erſtern Quadrats von $\left(\frac{BC}{2}\right)^2$ gleich iſt.

Fig. 39. *Folgerung 2.* Nimmt man umgekehrt auf den Durchmesser eines gegebenen Kreiſes, oder auf deſſen Verlängerung, zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, in gleicher Entfernung von demſelben, zwey Punkte B, C; ſo iſt die Summe der Quadrate je zweyer Linien BM, CM, die man von dieſen Punkten nach einem Punkte M in der Kreislinie zieht, für jeden ſolchen Punkt von gleicher Gröſſe. Eine artige Eigenschaft der Kreislinie, welche, wenn man MO zieht, unmittelbar aus unſerm Lehrſatz folgt.

Sie ſtellt uns jedoch nur den einfachſten Fall einer viel allgemeineren und weiter greifenden Eigenschaft der Kreislinie dar, die grade ſo aus der Verallgemeinerung unſers Lehrſatzes *, wie die hier entwickelte aus dieſem Lehrſatze ſelbſt flieſt, und von der man gleich nach den Anwendungen des gegenwärtigen Lehrſatzes auf das Parallelogramm und Trapez *, nach dem Beweiſe jenes verallgemeinerten Satzes, einiges finden wird.

Fig. 40. *Zuſatz I.* Werden alle Seiten eines Dreyecks ABC durch grade Linien aus den gegenüberſtehenden Winkelpunk-

ten, AD , BE , CF halbirt, so ist die Summe der Quadrate über diese Linien, gleich $\frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate aus den Seiten des Dreyecks. Denn da das doppelte Quadrat aus der Hälfte einer Linie, z. B. $2BD^2$, der Hälfte des Quadrats aus der ganzen Linie, $\frac{1}{2}BC^2$, gleich ist, so ist unserm Lehrsatz gemäß

$$AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 = 2AD^2$$

$$AB^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2 = 2BE^2$$

$$AC^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AB^2 = 2CF^2$$

folglich $\frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = (AD^2 + BE^2 + CF^2)$

Zusatz II. Ist ABC ein schiefwinkliges Drey- Fig. 411
eck, so ist das Quadrat der Seite AB , kleiner oder größer als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten AC , BC^* . Dann muß es folglich auf der Seite • 131
 AB , oder auf deren Verlängerung, einen Punkt O geben, der auf ihr zwey Stücke AO , BO abschneidet, deren Quadrate zusammengenommen den Quadraten der beyden andern Seiten AC , BC gleich sind. Diesen Punkt O findet man allemal, wenn man AB über B hinaus, und die Seite AC über C hinaus verlängert, auf dieser Verlängerung $CF = CA$ nimmt, FB zieht, auf der erstern Verlängerung $BG = FB$ anträgt, und dann AG halbirt. Der halbirende Punkt ist der gesuchte Punkt O .

Denn weil dann AG in O gleich und in B ungleich getheilt ist, so ist erstens $AB^2 + BG^2 = 2AG^2 + 2BO^2$ *; und weil zweitens auch im Dreyeck *II. f. 1
 ABF , die Seite AF halbirt ist, ist $AB^2 + BF^2 = 2BC^2 + 2AC^2$. Nun aber ist der Construction gemäß BF gleich BG , folglich $AO^2 + BO^2 = BC^2 + AC^2$, mit-

hin O der gefuchte Punkt, der auf der Seite AB oder deren Verlängerung, zwey Stücke abschneidet, deren Quadrate den Quadraten der beyden Seiten AC, CB zusammengenommen gleich find.

Da in den Dreyecken BCA, BCF, die Schenkel, welche die Winkel bey C einschliessen, untereinander gleich find, so ist, falls AB einem *spitzen* Winkel gegenübersteht, $AB < FB$, also $< BG$, und mithin fällt alsdann der Punkt O allemal in die Verlängerung der Seite AB. Steht hingegen AB einem *stumpfen* Winkel gegenüber, so ist $AB > FB$, also $> BG$ und der Punkt O liegt dann stets in der Seite AB, wie dieses auch Lehrsatz 13 gemäß seyn muß.

Fig. 42. Zusatz III. Wenn man von irgend einem Punkte F nach den vier Eckpunkten eines Rechtecks ABCD grade Linien zieht, so ist die Summe der Quadrate je zweyer dieser Linien, die nach den gegenüberstehenden Winkelpunkten gezogen sind, einander gleich, oder $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$.

Denn zieht man die beyden Diagonalen AC, BD, so halbiren sich diese wechselseitig, so dafs $AO = OC = OB = OD$ ist *. Zieht man FO, so ist im Dreyeck AFC vermöge unsers Lehrsatzes $FA^2 + FC^2 = 2FO^2 + 2AO^2$, und im Dreyeck BFD eben so $FB^2 + FD^2 = 2FO^2 + 2DO^2$, folglich $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$ *.

Anmerkung. Bey *Le Gendre* findet sich zwar der Lehrsatz, aber sein Beweis ist mangelhaft. Folgerung 2 und Zusatz 3 kommen in *Simpsons* Elementen vor; Zusatz 1 und 2 entlehne

ich aus Gregor von St. Vincenz I, 42 und 49, und Folgerung I macht in Apollonius ebenen Oertern II, 5, den ersten Theil des ersten Falls aus.

d. U.

LEHRSATZ 18.

In jedem Parallelogramm ABCD ist die Fig. 43.
Summe der Quadrate aus allen Seiten, den Quadraten der beyden Diagonalen AC, BD zusammengenommen gleich.

Da jedes Parallelogramm durch eine der Diagonalen, z. B. durch AC, in zwey Dreyecke ABC, ADC getheilt wird, welche über der Diagonale als Grundlinie stehn, und überdem die beyden Diagonalen sich in ihrem Durchschnittspunkte O wechselseitig halbiren, so dafs $AO = OC$ und $BO = OD$ wird, so ist, erstens im Dreyeck ABC

$$AB^2 + BC^2 = 2 AO^2 + 2 BO^2$$

und zweytens im Dreyeck ADC

$$AD^2 + DC^2 = 2 AO^2 + 2 OD^2$$

folglich, wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, und statt des vierfachen Quadrats der halben Diagonalen ($4 AO^2$, $4 BO^2$) die Quadrate der Ganzen setzt *, * 4, Z. 3.

$$AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$$

Folgerung. Da im Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten, folglich auch die Quadrate derselben, gleich sind, so läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: *In jedem Parallelogramm sind die Quadrate der beyden Diagonalen, das Doppelte von den Quadraten aus*

zwey an einander liegenden Seiten, oder $AC^2 + BD^2 = 2 AB^2 + 2 AD^2$; ein Satz, der für das Parallelogramm etwas Aehnliches, als Lehrsatz 17 für das Dreyeck aus-
sagt.]

[L E H R S A T Z 19.]

Fig. 44.

In jedem Trapez $ABCD$ übertrifft die Summe der Quadrate aller Seiten, die beyden Quadrate der Diagonalen AC, BD zusammen genommen; und zwar um ein Quadrat, welches man erhält, wenn man über zwey aneinander liegende Seiten des Trapezes ein Parallelogramm $ABCE$ errichtet, den Abstand der beyden Eckpunkte D des Trapezes und E des Parallelogramms, die beyden nicht gemein sind, nimmt, und über diesen Abstand DE als Seite, ein Quadrat beschreibt. Oder es ist $AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Ein Parallelogramm, welches man über zwey an einander liegende Seiten eines Trapezes, z. B. über AB, BC beschreibt, hat mit dem Trapez die drey Eckpunkte A, B, C und die Diagonale AC gemein, hingegen ist der vierte Eckpunkt, D, E , und daher auch die zweyte Diagonale BD, BE in beyden verschieden, weil sonst das erstere Viereck, gegen die Voraussetzung, ein Parallelogramm seyn würde.

Ziehe vom Winkelpunkte C eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite DA des Trapezes, und von B aus eine Parallellinie mit DE , so durchschneiden sich diese Parallellinien in einem Punkte F so, daß sich die

Dreyecke CFB, ADE decken. Denn die Linien AE, BC*, und die Winkel an den Punkten C, A so wie an B, E sind einander gleich*. Folglich ist auch $CF = AD$ und $BF = DE$. Zieht man also noch die Linien FA, FE, so entstehn zwey Parallelogramme ADCF und BDEF*, von deren Seiten und Diagonalen folglich der so eben bewiesene Satz* gilt. Es ist also im Parallelogramm ADCF

$$2 \cdot AD^2 + 2 \cdot CD^2 = AC^2 + DF^2.$$

Eben so ist im Parallelogramm BDEF

$$2 \cdot BD^2 + 2 \cdot DE^2 = BE^2 + DF^2.$$

Zieht man folglich Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$2 \cdot AD^2 + 2 \cdot CD^2 - 2 \cdot BD^2 - 2 \cdot DE^2 = AC^2 - BE^2.$$

Und wenn man beyderseits wieder hinzufügt $2 \cdot BD^2 + 2 \cdot DE^2$,

$$2 \cdot AD^2 + 2 \cdot CD^2 = 2 \cdot BD^2 + 2 \cdot DE^2 + AC^2 - BE^2$$

Nun ist endlich auch im Parallelogramm ABCE

$$2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 = AC^2 + BE^2.$$

Verbindet man wieder diese Gleichung mit der vorigen, so wird

$$2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2 + 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot CD^2 = 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot BD^2 + 2 \cdot DE^2; \text{ mithin auch, wenn}$$

man von beyden gleichen Gröſſen die Hälfte nimmt,

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2.$$

Folgerung 1. Also ist kein Viereck möglich, worin die beyden Quadrate der Diagonalen größer als die Quadrate aus allen Seiten zusammengenommen wären. Weicht ein Trapez vom Parallelogramm mehr

ab, wird folglich DE gröfser, fo wird auch die Summe aus den Quadraten der Diagonale, gegen die Summe aus den Quadraten aller Seiten immer kleiner.

Folgerung 2. Halbirt man beyde Diagonalen des Trapezes in den Punkten P, Q, fo wird durch den Punkt P zugleich die Diagonale AC des Parallelogramms ABCE, welche diesem mit dem Trapez gemein *I. 37 ist, mithin auch die andre Diagonale BE halbirt *. Zieht man daher PQ, fo theilt diese Linie sowohl BD als BE in zwey gleiche Theile, daher auch PQ die Hälfte von 7. DE, und mit dieser Linie parallel ist *. Ist aber DE = 2. PQ, fo wird $DE^2 = 4. PQ^2$. Setzt man diese Gröfse statt der erstern, fo ist also auch in jedem Viereck

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 4. PQ^2.$$

Anmerkung. Diesen Lehrsatz entlehne ich von Euler, der ihn zuerst gefunden, und auf die hier mitgetheilte Art bewiesen hat, in seinen *Variis Demonstrationibus Geometricis*, in den *Novis Comm. Acad. Imp. Petrop. T. 1. p. 409. seq.*

d. U.

[L E H R S A T Z 20 †.]

Fig. 45. Wenn man aus einem der Winkelpunkte eines Dreyecks ABC, z. B. aus A, nach irgend einem

†) Wer mit den bisherigen Sätzen noch nicht ganz im Deutlichen ist, und sich noch nicht stark genug fühlt, um sich in das Feinere der Geometrie zu vertiefen, überschlage fürs erste diesen Lehrsatz sammt allen seinen Folgerungen und Zufätzen, und wende sich sogleich zu Lehrsatz 21, wo

Punkte *G* in der gegenüberstehenden Seite *BC*, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie *AG* zieht, so ist allemal

$$\alpha) BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$$

oder, was auf eins hinauskömmt,

$$\begin{aligned} \beta) AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} &= BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG} \\ &= BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG} \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG} \end{aligned}$$

oder $\gamma) AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$
 $= BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG \pm AG^2 \times BC$

oder, wenn *GE* irgend eine beliebige Linie ist,

$$\begin{aligned} AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} &= BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE} \\ &\pm AG^2 \times \frac{BC}{GE} = \frac{BG}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2) \end{aligned}$$

oder endlich

$$\delta) AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

wo, je nachdem der Punkt *G* in der Seite *BC* selbst, oder in deren Verlängerung liegt, die obern oder die untern Zeichen gelten, und zugleich angenommen wird, das im zweyten Fall $Bg > Cg$ ist.

er ohne Anstos fortfahren kann. Der gegenwärtige Lehrsatz, und die hinzugefügten Sätze, enthalten vom zweyten Buche der ebenen Oerter des Apollonius, so viel als es nur immer der Zweck dieses Werks erlaubte, auf eine, wie mir scheint, leichtere Art als von andern vorgetragen, und wird hinreichen einen deutlichen Begriff von jenem interes-

Fig. 48. Steht AG 1) auf der Grundlinie BC selbst, oder 2) auf deren Verlängerung senkrecht, so bildet diese Linie mit den Schenkeln des Dreyecks zwey rechtwinklige Dreyecke, worin $BG^2 = AB^2 - AG^2$ und $CG^2 = AC^2 - AG^2$, mithin auch $BG = \frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ und $CG = \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ ist. Nun ist im ersten Fall die Grundlinien $BC = BG + CG$, im zweyten Fall $BC = BG - CG$, vorausgesetzt daß $BG > CG$ ist. Daraus folgt für diesen Fall die Aussage α , und mithin die Wahrheit der andern Aussagen, die, wie wir gleich sehn werden, unmittelbar aus ihr abgeleitet sind.

Fig. 45. Steht dagegen AG schief auf, und zwar 1) auf der Grundlinie BC selbst, so daß AGB ein spitzer, AGC aber ein stumpfer Winkel ist, so theilt diese Linie das gegebne Dreyeck in zwey kleinere Dreyecke, ein spitzwinkliges AGB , und ein stumpfwinkliges AGC , denen die Spitze A und das Perpendikel AD auf die gegenüberstehende Seite gemein ist, und in denen beyden das Perpendikel, von dieser Seite oder deren Verlängerung, ein gleiches Stück GD abschneidet. Die Gröfse dieses Abschnitts wird in jedem Dreyeck durch **13, f. 3.** die Gröfse der drey Seiten bestimmt*, und zwar ist

fantan Theile der Geometrie zu geben, und eine Menge netter und allgemeiner Sätze, besonders über den Kreis, dem Leser, der die kleine Mühe des Durchstudirens nicht scheur, bekannt zu machen.

Gilbert.

in dem bey G spitzwinkligen Dreyeck AGB, $GD = \frac{BG^2 + AG^2 - AB^2}{2 BG}$, hingegen in dem bey G stumpf-

winkligen Dreyeck AGC, $GD = \frac{AC^2 - CG^2 - AG^2}{2 CG}$;

Ausdrücke, die wir ihrem geometrischen und ihrem arithmetischen Sinne nach, am angeführten Orte erklärt haben. Folglich sind, da für beyde Dreyecke der Abschnitt GD derselbe ist, diese Ausdrücke gleich;

mithin auch ihr Zweyfaches, und da überdem $\frac{BG^2}{BG} = BG$ und $\frac{CG^2}{CG} = CG$ ist, $BG + \frac{AG^2 - AB^2}{BG} = \frac{AC^2 - AG^2}{CG} - CG$. Fügt man beyderseits CG und

$\frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ hinzu, so bleiben auch diese Größen gleich, und folglich ist

$$BG + CG \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - BG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG},$$

welches in der Aussage α , der erste Fall ist. Und da hier AB, AC und BG, CG völlig auf einerley Art vorkommen, so hat es auf den Ausdruck von BC weiter keinen Einfluß, welcher von den beyden Schenkeln AB, oder ob AC dem stumpfen Winkel bey G gegenübersteht. Dieser Ausdruck gilt daher unbedingt für jeden Punkt G in der Grundlinie (selbst dann, wenn G mit B oder C zusammenfällt).

Steht 2) Ag auf der Verlängerung der Grundlinie schieß auf, und zwar zuerst auf der Verlängerung derselben

über C hinaus, so dafs $Bg > Cg$ ist, so unterscheidet sich dieser Fall von dem vorigen darin, dafs nun die Schenkel AB, AC entweder beyde dem spitzen, oder beyde dem stumpfen Winkel bey g gegenüberstehn. Ist das *erstere* der Fall, und die Dreyecke AgB, AgC sind beyde bey g spitzwinklig, so ist

$$gD = \frac{Bg^2 + Ag^2 - AB^2}{2 Bg} \text{ und zugleich}$$

$$gD = \frac{Cg^2 + Ag^2 - AC^2}{2 Cg}, \text{ mithin } Bg + \frac{Ag^2 - AB^2}{Bg}$$

$$= Cg + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}. \text{ Ist hingegen das zweyte der}$$

Fig. 47. Fall, und stehn beyde Schenkel AB, AC dem stumpfen Winkel bey g gegenüber, so ist in diesen stumpfwinkligen Dreyecken $gD = \frac{AB^2 - Bg^2 - Ag^2}{2 Bg}$ und zu-

$$\text{gleich } gD = \frac{AC^2 - Cg^2 - Ag^2}{2 Cg}, \text{ folglich } \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$$

$$- Bg = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - Cg. \text{ In beyden Fällen ist der}$$

Voraussetzung gemäß $Bg - Cg = BC$. Zieht man daher im *erstern* Fall beyderseits Cg ab, und fügt zugleich

$$\frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} \text{ beyderseits hinzu, und verfährt dagegen}$$

im *zweyten* Fall grade umgekehrt, so erhält man *in beyden Fällen gleichmäfsig*

$$a) Bg - Cg \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$$

oder, da es einerley ist, ob man den Unterschied Ag^2

$Ag^2 - AC^2$ hinzufügt, oder umgekehrt den Unterschied $AC^2 - Ag^2$ abzieht,

$$b) Bg - Cg \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} - \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg}$$

welches oben in der Aussage α der zweyte Fall ist, bey welchem es also wiederum nicht weiter auf die Beschaffenheit des Winkels bey g ankömmt, wenn nur g ein Punkt in der Verlängerung der Grundlinie über C hinaus ist.

Liegt dagegen g in der entgegengesetzten Verlängerung, und steht, Ag nicht wie wir hierbey voraussetzen, auf der Verlängerung der Grundlinie über den Punkt C , sondern *auf der entgegengesetzt liegenden Verlängerung über den Punkt B hinaus auf*; so ist $Bg < Cg$, und folglich $Cg - Bg = BC$, daher wir unter diesen Umständen nicht den Werth $Bg - Cg$, sondern den umgekehrten, $Cg - Bg$, hätten herleiten müssen, für welchen sich $BC = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$, also BC ebenfalls als der Unterschied der beyden Theile in $b)$ findet nur dafs in jenem Fall der erstere, in diesem der letztere dieser Theile gröfser ist. Will man daher die Form in $b)$ auch auf diesen Fall übertragen, so giebt sie in ihm für BC einen subtractiven Zahlwerth, oder etwas *Negatives* *, welches also allemal ein Zeichen ist, dafs ^{13 a 1.}

die Linie Ag eine entgegengesetzte Lage hat, als die, für welche die Formel unmittelbar gebildet ist, und welche wir im Lehrsatz ausdrücklich bemerkt haben; d. h. dafs sie so aufsteht, dafs nicht, wie die Formel voraussetzt, $Bg > Cg$, sondern umgekehrt $Bg < Cg$

ist. *Unter dieser Bedingung* gilt auch die Formel b allgemein für jeden beliebigen Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie. (Durch die Vorstellung des Negativen läßt sich diese Formel selbst mit unter die Aussage für den ersten Fall ziehn, wenn der Punkt G in der Grundlinie liegt, indem beyde Fälle sich lediglich durch das Entgegengesetzte in der Lage des Abschnitts CG unterscheiden, und daher die erstere, wenn man in ihr CG negativ setzt, in die zweyte übergeht. Doch haben wir es nicht nöthig uns hier bis zu dieser gänzlichen Verallgemeinerung zu erheben.)

Die Aussage unter α läßt sich noch *auf eine andre Art sehr leicht beweisen*, die ich hier wenigstens andeuten will. Man fälle im gegebenen Dreyeck ABC auf die Grundlinie das Perpendikel AD , und es sey D sowohl als G ein Punkt, in der Grundlinie selbst, so ist die Grundlinie $BC = BD + GD + CD - GD$. Nun ist das Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien, dem Unterschiede ihrer Qua-

* II. drate gleich *, folglich $BD + GD = \frac{BD^2 - GD^2}{BD - GD}$ und

$CD - GD = \frac{CD^2 - GD^2}{CD + GD}$, und da überdem im Drey-

* 16. I. eck ABG , $BD^2 - GD^2 = AB^2 - AG^2$ *, und im Dreyeck AGC , $CD^2 - GD^2 = AC^2 - AG^2$ ist, so muß

in diesem Fall $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ seyn,

welches der erste Fall in der Aussage α ist. Eben so leicht lassen sich die übrigen Fälle, je nachdem G und D verschieden liegen, auf diese Art herleiten.

Aus diesen Sätzen dafs für Punkte *G* in der Grundlinie, $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$, hingegen

für Punkte *g* in ihrer Verlängerung, $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$ ist, (wobey $Bg > Cg$ angenommen

wird,) lassen sich die übrigen Aussagen des Lehrsatzes folgendermaßen herleiten. Man füge zu den gleichen

Größen im ersten Fall beyderseits $\frac{AG^2}{BG} + \frac{AG^2}{CG}$, und

im zweyten Fall $\frac{Ag^2}{Bg} - \frac{Ag^2}{Cg}$ hinzu, d. i. Linien, deren

Zahlausdruck auf gleiche Benennungen, nach den Regeln der Bruchrechnung, gebracht, im ersten Fall

$\frac{AG^2 \times (CG + BG)}{BG \times CG}$, das ist $\frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG}$, im zweyten Fall

$\frac{Ag^2 \times (Cg - Bg)}{Bg \times Cg}$ das ist $-\frac{AG^2 \times BC}{Bg \times Cg}$ ist (da unfreer

Voraussetzung gemäß $Bg > Cg$ ist); so verwandeln sich durch diese Hinzufetzung jene Aussagen für beyde

Fälle in folgende: $BC \pm \frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG} = \frac{AB^2}{BG} \pm \frac{AC^2}{CG}$,

wo die oberen Zeichen für den ersten Fall gelten, wenn *G* in der Grundlinie *BC* selbst liegt, die unteren Zeichen für den zweyten Fall, wenn *g* in der Verlängerung der Grundlinie liegt, (wobey zugleich $Bg > Cg$ angenommen wird). Und das ist ein für allemal, auch bey allen folgenden Ausdrücken zu merken.

Ferner sind auch die Producte dieser Zahlausdrücke in den Zahlwerth der Linie BG gleich, oder

$$AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = EC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{BG}$$

und hier läßt sich wieder statt $BC \times BG$ setzen

$$(BG \pm CG) \times BG \text{ oder, } BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG}, \text{ welches die}$$

Formen des Satzes unter β sind.

Nimmt man aufs neue die Produkte dieser Ausdrücke in den Zahlausdruck von CG, so erhält man die erste Form unter γ ,

$$AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG \\ = BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

und diese Gleichheit bleibt, wenn man alle Glieder, zum Behuf der geometrischen Auslegung derselben, durch den Zahlausdruck irgend einer willkürlichen Linie GE dividirt, wie in der zweyten Form unter γ . — Da endlich die beyden Theile $BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG$ sich in das Produkt $BG \times CG \times (BG \pm CG)$, das ist $BG \times CG \times BC$ zusammen ziehn lassen, so ist auch, wie die dritte Formel unter γ ausagt

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

und diese Gleichheit bleibt wiederum, wenn man alle Glieder durch den Zahlausdruck $\frac{BC}{GE}$ dividirt, da denn, wie δ ausagt, ist

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

Auslegung. Die geometrischen Sätze, welche diesen verschiedenen Formen, wenn man die Zeichen in ihrem geometrischen Sinne nimmt *, entsprechen, * 4. Z. 2. lauten folgendermassen.

α) Wenn man von der Spitze A eines Dreyecks ABC nach der gegenüberstehenden Grundlinie BC, oder nach deren Verlängerung eine grade Linie AG zieht, und den Unterschied der Quadrate über AB und AG in ein Rechteck, welches über der Grundlinie BG steht *, und eben so den Unterschied der Quadrate über AC und AG in ein Rechteck über CG verwandelt; so ist die Grundlinie BC des gegebenen Dreyecks, gleich den Höhen dieser beyden Rechtecke zusammen genommen oder von einander abgezogen, je nachdem G in der Grundlinie selbst, oder in deren Verlängerung über C, oder über B hinaus liegt, und je nachdem AG gröfser oder kleiner als AB oder als AC ist, welches denn jedesmal durch die Formel α diesen Umständen gemäfs bestimmt wird. Diese Formel schliesst daher in der That so viel verschiedene Sätze, als Unterfälle des Hauptsatzes, in sich, als hierin Modificationen möglich sind; und sie alle müfste der Geometer einzeln aufführen, der (wie wohl vor Zeiten geschah) die Vortheile unfser Bezeichnung verschmähte.

Abf. 4.

Bey der Auslegung der andern Formen, muß man bemerken, daß ein Ausdruck wie dieser, $AC^2 \times \frac{BG}{CG}$ (den wir der Kürze wegen mit a bezeichnen wollen) in seinem geometrischen Sinne genommen *, einen * 4. Z. 2. Flächenraum bedeutet, welcher vom Quadrate über AC

ein bestimmter Theil $\frac{BG}{CG}$, d. h. der nemliche Theil, als

* BG von CG ist; oder was auf eins heraus kömmt, einen Raum dessen Verhältniß zum Quadrate über AB bestimmt, nemlich $BG : CG$, ist; oder einen Raum, zu dem AB^2 sich wie $CG : BG$ verhält (denn dieser Ausdruck läßt sich stets als vierte Proportionalgröße zu folgenden drey *V. 2. α $CG : BG = AB^2 : a$ betrachten *;) oder endlich eine * (f. 3.) der Gattung nach gegebne und über AC beschriebne Figur*, deren Verhältniß zum Quadrate über AC eben deshalb gegeben, nemlich $BG : CG$, ist. Je nachdem man in unsern Formen β , γ , δ , eine dieser Bedeutungen für solche Ausdrücke setzt, verwandelt sich eine jede in mannigfaltig ausgedrückte geometrische Sätze. an deren Ausdruck man sich jedoch nicht stoßen wird, wenn man das hier bemerkte fest hält. — 2) Muß man sich dabey aus der Lehre von den Verhältnissen des Satzes erinnern, worauf unter andern in der Arithmetik die Gesellschaftsrechnung beruht, dafs, nemlich, wenn eine Gröfse A aus mehreren Theilen α , β , γ , besteht, und entweder diese Gröfse A selbst, oder einer ihrer Theile α bekannt, und überdem das Verhältniß dieser Theile untereinander ($m:n:p$) oder zum Ganzen gegeben wird, dadurch zugleich die Gröfse aller Theile einzeln bestimmt ist, weil wir nemlich dann auch das Verhältniß des Ganzen zu jedem der Theile ($m+n+p:m$, und $:n$, und $:p$) kennen. Ist also z. B. die Linie BC und das Verhältniß $BG:CG$ gegeben, so ist auch die Gröfse der Linien BG, CG bekannt, und mithin auch das Rechteck $BG \times CG$, wel-

ches also in diesem Fall auch ein gegebner Raum ist. — Dieses vorausgesetzt, lassen sich also z. B. die andern Formen folgendermassen übersetzen:

β) Fall I: „Zieht man nach einem Punkt G in der Grundlinie BC eine grade Linie AG, so ist die Summe des Quadrats über AB, und eines Raums zu welchem das Quadrat über AC ein gegebenes Verhältniß (CG:BG) hat, gleich der Summe des Rechtecks BC × BG und eines Raums zu welchem das Quadrat über AG ein gegebenes Verhältniß (CG:BC) hat. — Oder: „Zieht man von zwey gegebenen Punkten B, C aus zwey grade Linien, welche sich so in einem Punkte A durchschneiden, dafs das Quadrat über AB und ein Raum, dessen Verhältniß zum Quadrat über AC gegeben ist, zusammengenommen einem gegebenen Flächenraum gleich sind, so ist auch die Summe eines gegebenen Raums (BC × BG) und eines Raums, dessen Verhältniß zu AG² gegeben ist ($AG^2 \times \frac{BC}{BG}$) bekannt.

γ) Fall I: „Unter denselben Umständen ist die Summe einer Figur gegebner Gattung über AB ($AB^2 \times \frac{CG}{GL}$) und einer Figur gegebner Gattung über AC ($AC^2 \times \frac{BG}{GE}$), gleich der Summe eines gegebenen Raums ($BG^2 \times \frac{CG}{GE} + CG^2 \times \frac{BG}{GE}$) und einer über AG beschriebnen Figur gegebner Gattung ($AG^2 \times \frac{BC}{GE}$) u. s. f.;

Auslegungen die Folgerung I noch verdeutlichen wird.

Anmerkung. Mein Beweis dieser weitreichenden, für geometrische Untersuchungen außerordentlich brauchbaren Sätze, von welchen Lehrsatz 17, und eine Menge anderer bekannter Theoreme bloß einzelne Fälle ausfagen, tritt zwar aus dem eigentlich Constructiven hinaus, und in die arithmetischen Vorstellungen der rechnenden Geometrie über; allein bey geometrischen Sätzen von dieser Art, welche eine so große Menge verschieden modificirter Fälle in sich fassen, möchte das eher ein Vorzug als ein Mangel seyn. Ueberdem wäre es nicht schwierig gewesen den zweyten Beweis der Formel α , und die Herleitung der übrigen Formeln aus dieser, ganz in ein geometrisches Gewand zu kleiden, welches aber durch die Beschreibung der geometrischen Constructionen, welche der Division und Multiplication, so wie der geometrischen Begriffe, die den Producten u. s. f. entsprechen, zu weiterschweifig geworden wäre. Solche ganz geometrische Beweise für den ersten Fall der Formen β und γ (wenn G in der Grundlinie liegt,) giebt *Robert Simson* in seiner *Wiederherstellung von Apollonius ebenen Oertern Buch II Lemma 10*, und *Anhang Lemma 3*, und diese Beweise, welche doch nur Einen Fall betreffen, sind beynabe eben so weitläufig, als mein Beweis für alle Formen in ihrer Allgemeinheit. Einen andern Beweis für die Form β giebt, wie *Simson* anführt, *Matthias Steward* in seinem Buche *de quibusdam Theorematis generalibus etc. Edinb. 1746*, und zeigt den Gebrauch derselben bey dem Beweise mehrerer Theoreme. Die Hauptsätze im zweyten Buche von Apollonius ebenen Oertern (und sie gehören zu den nettesten und allgemeinsten, aber auch zu den schwierigsten in der Geometrie,) gründen sich am Ende auf unserm Hauptsatz, und können durch eine ähnliche Behandlung erleichtert werden.

Die Formen unter α und δ finde ich bey *Simson* nicht. Die beyden andern eignet sich *Simson* (S. 351) als seine Er-

findung zu, beweist sie aber mittelst eines Lehnatzes über dreytheilige Linien, dessen nach *Pappus* Bericht, schon *Apollonius* sich in seinem Werke bedient hat, und aus dem sie nicht schwer abzuleiten waren, wie denn *dieser Lehnatz* rückwärts unmittelbar aus unserm Hauptatz sich ohne die geringste Schwierigkeit ableiten läßt. Werden nemlich in einer graden Linie vier Punkte *B, C, D, G* willkürlich angenommen, und man errichtet über *D* ein Perpendikel, und zieht aus irgend einem Punkte *A* des Perpendikels, nach den übrigen Punkten *B, C, G* grade Linien, so entsteht ein Dreyeck *AEC*, worin aus der Spitze nach einem Punkte *G* in der Grundlinie, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie gezogen ist. Für diese Dreyecke ist nach unsrer Form α unter den oben angegebenen Voraussetzungen $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG}$

$$\pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG};$$

und da zugleich das Perpendikel *AD* die Grundlinie so zerschneidet, daß $AB^2 - AG^2 = BD^2 - DG^2$ und $AC^2 - AG^2 = CD^2 - DG^2$ ist *

* 16. l.

$$\alpha) BC = \frac{BD^2 - DG^2}{BG} \pm \frac{CD^2 - DG^2}{CG}.$$

Diese Formel stimmt in ihrer ganzen Zusammensetzung mit der vorigen überein, und ist an denselben Voraussetzungen gebunden, daher sich aus ihr, grade auf dieselbe Art, wie es in unserm Lehratz geschehn ist, drey andre Formen für jede dreytheilige Linie *BC* herleiten lassen, in welchen die obern oder die untern Zeichen zu nehmen sind, je nachdem *G* in oder aufserhalb *BC* liegt, auch im letztern Fall, $Bg > Cg$ gesetzt ist, die Verschiedenheit in der Lage von *D* aber nichts ändert:

$$\beta) BD^2 \pm CD^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

(In dieser Form kömmt der Satz bey *Pappus* Buch 7. Satz 125, und als 7tes Lemma zum zweyten Buche von *Apollonius* ebenen Oertern, doch nur, wenn *G* ein Punkt in der Grundlinie ist, vor.

Beschreibt man über BC einen Halbkreis, und errichtet auf C und G Perpendikel, so läßt sich der Satz leicht unmittelbar mittelst * 12. f. 2. unfreer Folgerungen zum Pythagoreischen Lehrsatze * beweisen.) Ist die Grundlinie BC, der Punkt D und das Verhältniß des Flächenraums $CD^2 \times \frac{BG}{CG}$ zum Quadrat über CD, mithin $CG : BG$ gegeben, so ist es auch der Punkt G, und mithin auch *(Al. 2.) $BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$ gegeben * (Apollonius II Lemma 8, bey Pappus Buch 7, Satz 126.)

$$\begin{aligned} \gamma) \quad BD^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CD^2 \times \frac{BG}{GE} \\ = BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE} \pm DG^2 \times \frac{BC}{GE} \end{aligned}$$

(Diese Form beweist *Simson* als Lehrsatz I im Anhang.) Sind hier wiederum BC, der Punkt D, und die Verhältnisse $GE : CG$ und $GE : BG$ gegeben, so sind auch der Punkt G und die gleichen Flächenräume bestimmt. (Anhang Lemma 2.) Wenn überhaupt auf einer graden Linie mehrere Punkte B, G, H, C etc. gegeben sind, so ist allemal auch ein Punkt D gegeben, der auf dieser Linie so liegt, daß der Inhalt von Figuren gegebner Gattung, die über DB, DC, DG etc. beschrieben sind, einen gegebenen Inhalt haben. (Anh. Lemma 4.)

Folgerung 1. *Figuren, welche der Gattung nach gegeben sind, und Figuren, welche unter einander ähnlich sind, bedeutet nach dem geometrischen Sprachgebrauch dasselbe. Mit diesen Figuren werden wir uns im nächsten Buche beschäftigen, und ich verspare es bis dorthin, diesen Begriff genauer auseinander zu setzen. Hier kömmt es nur auf die Eigenschaft ähnlicher Figuren an, daß ihr Inhalt sich zum Inhalte des Qua-*

drats über eine ihrer homologen Seiten, in allen auf einerley Art verhält, und dafs folglich, *so wie eine Figur, welche über eine Linie AC beschrieben ist, der Gattung nach gegeben wird, das Verhältniß dieser Figur zum Quadrate über AB völlig bestimmt, unveränderlich und bekannt ist; ein Lehrsatz aus dem folgenden Buche, den wir dort streng beweisen werden.* Mittelft dieses Satzes lassen sich unmittelbar aus der Auslegung unfers Hauptsatzes in feinen verschiedenen Formen, folgende interessante Sätze über das Dreyeck und den Kreis folgern:

A) Für alle Dreyecke, welche über derselben Grund- Fig. 50
linie BC stehn, und in welchen entweder die Summe oder der Unterschied des Quadrats über den einen Schenkel AB, und einer über den andern Schenkel AC beschriebenen Figur (*a*) von gegebner Gattung, einem gegebenen Flächenraum *F* gleich ist ($AB^2 \pm AC^2 \times \frac{m}{q} = F$); ist der geometrische Ort der Spitze *A* eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse.

Denn ist die Gattung der über AC beschriebenen Figur *a* gegeben, so ist auch, unserm Lehrsatz zu Folge, ihr Verhältniß zum Quadrat über AC gegeben, und zwar ist dieses Verhältniß, welches *m* : *q* feyn mag, für alle solche Figuren einerley und unveränderlich. Nimmt man daher im Fall der Summe auf der gegebenen Grundlinie BC selbst, hingegen im Fall des Unterschieds auf der Verlängerung der Grundlinie einen Punkt *G* so, dafs sich verhält $BG : CG = m : q$; so ist erstens $\frac{BG}{CG} = \frac{m}{q}$,

folglich, unfern Voraussetzungen gemäß, $F = AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG}$, das ist, der Form β gemäß, $= BC \times CG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$, und mithin

$$AG^2 \times \frac{BC}{CG} \begin{cases} = F - BC \times CG \text{ im Fall der Summe} \\ = BC \times CG - F \text{ im Fall des Untersch.} \end{cases}$$

Zweytens sind dann, weil BC gegeben ist, auch die beyden Linien BG, CG, so wie *der Punkt G*, das Recht-

^{*(Al.2.)*}eck $BC \times CG$ und der Exponent $\frac{BC}{CG}$ gegeben *; und

daher ist dann in beyden Fällen *eine Figur gegebner Gattung, welche über AG beschrieben wird*, (nemlich $u = AG^2 \times \frac{BC}{CG}$,) *auch der Grösse nach gegeben*, indem sie

dem Unterschiede gegebner Flächenräume (F und $BC \times CG$) gleich ist. Zu dieser Figur steht das *Quadrat über AG*, weil sie der Gattung nach gegeben ist, in einem gegebenen Verhältnisse ($CG:BC$ oder $q:m \pm q$) daher auch das *Quadrat über AG*, und mithin *AG selbst*, der Grösse nach gegeben und unveränderlich ist. Da nun zugleich der eine Endpunkt G dieser Linie gegeben und unveränderlich ist; so muß der *geometrische Ort des zweyten Endpunkts A* eine *Kreislinie* feyn, welche um G als Mittelpunkt, mit AG als Halbmesser beschrie-

^{*II.E. v.}ben wird *. Und zwar findet man diesen Halbmesser durch Construction, wenn man, nach den Methoden in den Aufgaben zu diesem Buche, den Unterschied des gegebenen Raums F und des Rechtecks $BC \times CG$ in ein Quadrat verwandelt, und darauf ein Quadrat

bildet, zu welchem sich das gefundene wie $BC : CG$ verhält *. Die Seite dieses Quadrats ist der Halbmesser AG.

Apollonius ebne Oerter II. 5. Fall 1 Aussage 2, auch II. 3. A; doch fehlt an beyden Stellen der Fall, wenn der Unterschied gegeben ist. --- Aus der Bestimmung des Punktes G und der Linie AG, sieht man, das für den Fall der Summe der Mittelpunkt G in der Grundlinie, für den Fall des Unterschieds allemal auf ihrer Verlängerung liegt, und das im ersten Fall der gegebne Raum F nothwendig gröfser, im zweyten kleiner als das Rechteck $BC \times CG$ seyn mus. Sonst würde AG negativ, und der erste Fall gieng in den zweyten, und umgekehrt über.

B) Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen, entweder die Summe, oder der Unterschied einer Figur gegebner Gattung (a), welche über den einen Schenkel AB, und einer andern Figur gegebner Gattung (b), welche über den andern Schenkel AC steht, einem gegebenen Flächenraum F gleich ist ($a \pm b = F$); mus der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse seyn.

Denn da a und b der Gattung nach gegeben sind, so ist das Verhältnifs der erstern Figur zum Quadrat über AB, welches $m : q$ seyn mag, und das Verhältnifs der letztern zum Quadrat über AC, welches $n : q$ seyn mag, mithin auch das Verhältnifs $m : n$ gegeben, und dieses ist das Verhältnifs, worin die beyden der Gattung nach gegebenen Figuren, wenn man sie über dieselbe willkührliche Linie beschreibt, zu einander stehn. Nimmt man im Fall der Summe in der Grundlinie, im Fall des Unterschieds auf ihrer Verlängerung einen Punkte

G, und zugleich eine grade Linie GE, so dass sich verhält, $BG : CG : GE = m : n : q$, so sind, da BC gegeben ist, diese Linien, folglich auch das Rechteck $BG \times CG = R$ gegeben. Da nun nach γ ,

$a = AB^2 \times \frac{CG}{GE}$ und $b = AC^2 \times \frac{BG}{GE}$ ist, $a \pm b$ das ist

$F = \frac{BC}{GE} \times (R \pm AG^2)$ seyn muss; so ist, falls a und b

Figuren gegebner Gattung, folglich $\frac{m}{q}, \frac{n}{q}$ gegeben

sind, und der Raum $F = a \pm b$ gegeben wird, auch eine Figur gegebner Gattung über AG gegeben, und zwar ist

$AG^2 \times \frac{m+n}{q} = F - \frac{m+n}{q} \times R$ im Fall der Summe

$AG^2 \times \frac{m-n}{q} = R \times \frac{m-n}{q} - F$ im Fall des Untersch.

In beyden Fällen ist also, auch unter dieser Voraussetzung, nicht nur der Punkt G, sondern auch das Quadrat über AG, und also auch AG selbst, als Seite dieses Quadrats, gegeben und unveränderlich, daher eine um den Mittelpunkt G, mit AG als Halbmesser beschriebene *Kreislinie* der *geometrische Ort der Spitze A* seyn muss.

Apollonius II. 5. Fall 1. Aussage 3. Wo doch wiederum der Fall, wenn der Unterschied der Figuren gegeben ist, fehlt. — Aus der Bestimmung von AG fällt übrigens in die Augen, dass hier für den Fall der *Summe* $F > \frac{m+n}{q} \times BG \times CG$ und für den Fall des *Unterschieds* $F < \frac{m-n}{q} \times Bg \times Cg$, folglich ein Raum, der sich zum Raum F im ersten Fall wie die Summe, im

zweyten wie der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, wenn sie über derselben Linie stehn, zum Quadrat dieser Linie, verhält, im ersten Fall nothwendig gröfser, im zweyten nothwendig kleiner als das Rechteck aus den beyden Abschnitten auf der Grundlinie seyn mus; und das ist die Bestimmung dieser Aussage.

Für den zweyten Fall (wenn der Unterschied der Figuren gegebner Gattung a und b gegeben wird) ist die Aussage unter B noch besonders dahin einzuschränken, daß a und b nicht ähnliche Figuren seyn dürfen. Denn dann würden sich a und b zu den Quadraten über AB und AC auf gleiche Art verhalten, folglich m und n , mithin auch Bg und Cg gleich seyn müssen; welches unmöglich ist, da in diesem Fall der Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, und für jeden solchen Punkt die Linien Bg und Cg um BC verschieden sind. In der That ist dann auch $a - b = F = AB^2 \times \frac{m}{q} - AC^2 \times \frac{m}{q}$, folglich $AB^2 - AC^2 = F \times \frac{q}{m}$, mithin der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln gegeben und unveränderlich, daher in diesem Fall der Ort des Punktes A keine Kreislinie, sondern nach Lehrsatze 16 Folgerung 3 eine grade Linie seyn mus, und zwar ein Perpendikel auf der Grundlinie BC , dessen Abstand vom Mittelpunkt der Grundlinie gegeben ist *.

*16. f. 3.

C) Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen das Quadrat, oder eine andere der Gattung nach gegebne Figur a über dem einen Schenkel AB , gleich ist, der Summe oder dem Unterschiede eines gegebenen Raumes S und des Quadrats, oder einer andern der Gattung nach gegebner Figur b , über dem zweyten Schenkel AC ; mus der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebener Lage und Gröfse seyn.

Denn, ist *erstens* $a = b \pm S$, so ist im Fall *der Summe* $a - b = S$, im Fall *des Unterschieds* $b - a = S$, in beyden Fällen also der Unterschied zweyer der Gattung nach gegebenen Figuren, die über AB und AC beschrieben sind, einem gegebenen Raume S gleich. *Folglich tritt hier der zweyte Fall der Aussage B ein.* Verhalten sich daher die beyden Figuren gegebner Gattung a und b, zu den Quadraten über AB und AC, wie $m : q$ und $n : q$, und man nimmt auf der Verlängerung der Grundlinie BC einen Punkt g, so das sich verhält $m : n = Bg : Cg$, so ist *eine Kreislinie*, welche um g als Mittelpunkt, und mit der Seite des Quadrats $Ag^2 = Bg \times Cg \times \frac{m - n}{q} = S$ als Halbmesser be-

- (B) schieben wird, der Ort der Spitze A*^{*}; es sey denn, das m und n im Verhältniß der Gleichheit stehn, also a und b ähnliche Figuren sind, indem alsdann der Ort der Spitze A*^{*} eine grade Linie wird*. — Ist *zweytens* $a = S - b$, mithin $a + b = S$, oder die *Summe* der beyden Figuren a und b einem gegebenen Raume S gleich, so muß, nach *B Fall 1*, der Ort der Spitze A ebenfalls eine Kreislinie seyn, deren Mittelpunkt nun aber in der Grundlinie BC selbst liegt, und zwar der Punkt G in der Grundlinie ist, für welchen sich verhält, $BG : CG = m : n$, und deren Halbmesser AG nun als Seite eines Quadrats $AG^2 = S - \frac{m + n}{q} \times BG \times CG$, gefunden wird.

Bey dieser Aussage C) wird vorausgesetzt, das a und b Figuren gegebner Gattung sind, und zwar das a glei-

a gleich $AB^2 \times \frac{m}{q}$, und zugleich diese Figur $AB^2 \times \frac{m}{q}$
 $= b \pm S$, oder umgekehrt $= S - b$ sey; eine Voraus-
 setzung, die mit der auf eins hinausläuft, dafs sich
 verhalte $b \pm S$ (oder $S - b$): $AB^2 = m : q$ *, dafs folg- *V. 3. y.
 lich *das Verhältnifs* der Summe oder des Unterschieds
 der Figur b und eines gegebenen Raums S , zum Qua-
 drat über AB , *gegeben und unveränderlich* sey. Der Satz
 C) läfst sich daher auch folgendermassen ausdrücken:
Für Dreyecke über derselben Grundlinie BC, für die das
Verhältnifs der Summe oder des Unterschieds einer der
Gattung nach gegebenen Figur, welche über dem einen Schen-
kel AC steht, und eines gegebenen Raums S, zum Quadrat
über dem andern Schenkel AB gegeben ist; ist der geometri-
sche Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und
Gröfse, den Fall ausgenommen, wenn beyde Figuren
ähnlich sind, für welchen dieser Ort eine der Lage nach
gegebne grade Linie wird.

Auf diese Art wird der Satz in *Apollonius ebenen Oertern II, 4*
 vorgetragen, wiewohl er dort weder in seiner Allgemeinheit
 (nur für den Fall, wenn b ein Quadrat ist) dargethan, noch auf
 den vorigen Ort B zurückgeführt wird. (Vielmehr stellt ihn Apol-
 lonius vor den Ort B, und scheint daher umgekehrt diesen aus
 unserm Satze C abgeleitet zu haben, sind anders nicht, wie Sim-
 son vernuthet, diese Sätze von spätern Abschreibern fälschlich ver-
 setzt worden. *Simson* beweist ihn dagegen, Satz 2 und 3 des An-
 hangs, allgemein, mit Hülfe unsers Lehrsatzes 20.

D) Ist das Quadrat über dem einen Schenkel AB , einer Figur
 gegebner Gattung, welche über den andern Schenkel AC beschrie-
 ben wird, selbst gleich, $AB^2 = AC^2 \times \frac{m}{2}$, mithin das Verhält-

nifs der beyden Quadrate der Schenkel $AB^2 : AC^2 = m : q$, und folglich auch das Verhältniß der beyden Schenkel selbst zu einander gegeben und unveränderlich; so ist diese Voraussetzung zwar *algebraisch* unter der Bedingung unserer Aussage C enthalten, als der Fall derselben, da der gegebne Raum $S = 0$ ist, d. h. gar kein solcher Raum gesetzt wird, indem die Arithmetik lehrt, daß man 0 mit unter die Reihe aller möglichen Werthe einer GröÙe nicht nur aufnehmen darf, sondern auch aufnehmen muß. Allein hier ist die Gültigkeit unserer Aussage für diesen Fall noch besonders darzuthun, und ausdrücklich zu beweisen, daß auch unter diesen Umständen der Ort des Durchschnittspunktes A eine Kreislinie von gegebner Lage und GröÙe sey, wie dieses in Zusatz VI und VII geschehn soll.

Folgerung 2. Alle diese Sätze sind nicht bloß auf die Schenkel von Dreyecken, welche über einer gegebenen Grundlinie BC stehn eingeschränkt, oder, was dasselbe sagt, gelten nicht bloß von graden Linien, welche von zwey gegebenen Punkten B, C aus gezogen, sich so durchschneiden, wie die Bedingungen der Sätze A), B), C) ausfagen; sondern sie gelten auch für grade Linien, welche von 3, von 4, von 5 gegebenen Punkten, u. s. f., kurz von jeder beliebigen Zahl gegebner Punkte aus gezogen, sich insgesammt in einem Punkte A so durchschneiden, daß die Figuren gegebner Gattung, welche man über sie beschreibt, sie mögen Quadrate seyn oder nicht,

a) entweder alle zusammen genommen einem gegebenen Raume F gleich;

b) oder so beschaffen sind, daß der Unterschied zwischen der Summe einiger dieser Figuren und der Summe andrer einem gegebenen Raume F gleich ist;

c) oder endlich so, dass die Summe einiger, gleich ist der Summe der andern, vermehrt oder vermindert um einen gegebenen Raum S:

Immer ist unter diesen Bedingungen der geometrische Ort des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes A aller solcher Linien, eine Kreislinie von gegebner Lage und Größe, ausgenommen in dem Fall, wenn in b, alle diese Figuren einander ähnlich sind, oder wenn in c, der Raum S dem Unterschiede ähnlicher Figuren gleich ist, in welchen Fällen der Ort des Durchschnittspunktes eine grade Linie von gegebner Lage wird.

α) Wenn zwey Punkte B und C gegeben sind, von denen grade Linien so gezogen werden, dass sie sich zwey und zwey in Punkten A durchschneiden, und es werden beliebige Figuren gegebner Gattungen * (z. B.)

$$a = \frac{m}{q} \times MN^2 \text{ über die ersten BA, und } b = \frac{n}{q} \times MN^2$$

über die zweyten AC beschriebn, (wo MN irgend eine willkührliche Linie bedeutet,) und man nimmt auf der Linie BC, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt G, und überdem eine Linie GE, so, dass sich verhält $BC:BG:CG:GE = m+n:m:n:q$, und zieht AG; so ist allemal, wo auch die Spitze A des Dreyecks BAC liegen möge, der Natur des Dreyecks gemäß,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2) * \text{ z. B. } \text{z. 10. 11.}$$

$$\text{mithin stets } a \pm b = \frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2), \text{ wie in}$$

Folg. I. B., die beyden Figuren gegebner Gattung a und b mögen zur Summe oder zum Uterschied einen beständigen, oder einen veränderlichen Flächenraum F haben, worauf es hierbey weiter nicht ankömmt. Nur hat im erstern Fall AG^2 einen beständigen und immer einerley, im letztern hingegen einen veränderlichen und ungleichen Werth, weshalb zwar im erstern, nicht aber im letztern Fall, der Ort der Durchschnittpunkte A eine mit dem Halbmesser GA , um *f. I. B. den Mittelpunkt G , beschriebne Kreislinie ist*.

Fig. 52. Wird also noch ein dritter Punkt D gegeben, und der

Gattung nach noch eine dritte Figur $c = \frac{p}{q} \times MN^2$, und

durchschneiden sich nun drey von den Punkten B, C, D aus gezogene grade Linien in Einem Punkte A so, daß die Summe oder der Uterschied der drey Figuren gegebner Gattungen a, b, c , über diese Linien beschrieben, einem gegebenen, unveränderlichen Flächenraum F' gleich sind, ($a \pm b \pm c = F'$), so muß, wenn man statt $a \pm b$, setzt $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2)$, welches für jede Bedingung er-

laubt ist, alleinal auch $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2) \pm c = F'$,

folglich

$$AG^2 \times \frac{m \pm n}{q} \pm c = F' - R \times \frac{m \pm n}{q} \text{ im Fall von } a \pm b$$

$$AG^2 \times \frac{m - n}{q} \pm c = R \times \frac{m - n}{q} - F' \text{ im Fall von } a - b$$

seyn. Mithin müssen dann in beyden Fällen die Li-

nien BA, CA, DA sich drey und drey so in Punkten A durchschneiden, das wenn man von dem Punkte G aus, (der auf die angezeigte Art, durch die Gattung der Figuren a und b bestimmt, und also gegeben ist,) GA zieht, entweder die Summe, oder der Unterschied zweyer Figuren gegebner Gattungen über GA und DA beschrieben, einem gegebenen Flächenraume gleich ist, nemlich dem Unterschiede der gegebenen Räume F' und $R \times \frac{m \pm n}{q}$. Es tritt dann also allemal für die Linien

GA, DA der *Fall A, der vorigen Folgerung* ein, und vermöge des dort Bewiesenen muß *der geometrische Ort der Durchschnittspunkte A jener drey Linien*, wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Gröfse seyn. Und zwar, wenn man *erst*, im Fall der Summe $a + b$ auf BC selbst, im Fall des Unterschieds $a - b$ hingegen auf ihrer Verlängerung einen Punkt G so bestimmt, das sich verhält $BG : CG = m : n$, und *dann* auf ähnliche Art, je nachdem c additiv oder subtractiv ist, auf GD oder auf deren Verlängerung einen Punkt G' so nimmt, das sich verhält $GG' : DG = m \pm n : p$, (da denn die Punkte G, G', die Abschnitte BG, CG und GG', DG', und die Rechtecke aus den erstern R, und aus den letztern R' gegeben sind); *so ist G' der Mittelpunkt dieser Kreislinie*, und auf diese Bestimmung des Mittelpunkts hat *lediglich die Gattung*, nicht aber die Gröfse der Figuren a, b, c Einfluß. *Der Halbmesser* der Kreislinie bestimmt sich hingegen daraus, das dann, *im Fall die Summe aller drey Figuren*

gegebner Gattung dem Raume F' gleich ist, nach Folg.
I. B. seyn muß

$$G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} = F' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}$$

(und auf eine ähnliche Art, *im Fall der Unterschied* einiger der Figuren gegebner Gattung von den andern, dem Raume F' gleich ist, nur dafs (dann einige der subtractiven Theile dieser Formel additiv, und umgekehrt einige der additiven subtractiv werden, wie man sich das leicht aus Folgerung I. B. entwickeln wird.) Folglich ist dann sowohl die Gattung, als die Gröfse einer über $G'A$ beschriebnen Figur, mithin $G'A$ selbst, zugleich mit F' gegeben und unveränderlich, und dieser Halbmesser des Ortes läfst sich nach den Aufgaben zu Ende dieses Buchs ohne Schwierigkeit durch geometrische Construction so wie dessen Zahlwerth durch Rechnung finden. Ist aber F' kein unveränderlicher Raum, so ist auch die Figur gegebner Gattung über $G'A$, und diese Linie selbst, von veränderlicher Gröfse, und dann also der Ort der Punkte A keine um G' beschriebne Kreislinie.

Ist dann aber noch ein vierter Punkt E gegeben, und der Gattung nach eine vierte Figur $d = \frac{r}{q} \times MN^2$, und

durchschneiden sich die aus den vier Punkten B, C, D, E gezogene grade Linien, je vier in Einem Punkte A , so, dafs die *Summe* der vier Figuren gegebner Gattungen a, b, c, d , über diese Linien beschrieben, *einem gegebenen unveränderlichen Flächenraum F'' gleich sind,*

($a + b + c + d = F''$); so muß, (wenn man aus der Gattung von drey dieser Figuren, z. B. aus a, b, c, und aus der Lage der Punkte B, C, D, wie im vorigen Fall, den Punkt G' bestimmt, und nach den Durchschnittspunkten A die grade Linie G'A zieht,) wiederum die vorige Gleichung bestehn. Fügt man folglich, beyderseits die vierte Figur gegebner Gattung d hinzu, und setzt statt $F' + d$ den Raum F'' , so erhält man für jeden Durchschnittspunkt A die Gleichung

$$G'A^2 \times \frac{m + n + p}{q} + d = F'' - R \times \frac{m + n}{q} - R' \times \frac{m + n + p}{q}.$$

Die Durchschnittspunkte A je vier solcher Linien, sind folglich wiederum so beschaffen, daß wenn man von den beyden gegebenen Punkten G' und E aus, nach ihnen die graden Linien G'A und EA zieht, Figuren gegebner Gattungen über diese Linien beschrieben, zusammengenommen einem gegebenen und unveränderlichen Flächenraume gleich sind. *Der Ort dieser Durchschnittspunkte* ist also wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Größe,* deren Mittelpunkt und ^{*f. I. B.} Halbmesser man wieder grade so, wie im vorigen Fall, nach Folg. I. B. findet. Man theile nemlich, nachdem man den Punkt G' bestimmt hat, die Linie G'E im Punkte G'' nach dem Verhältnisse von $m + n + p : r$ ein, (d. h. nach dem Verhältnisse der beyden Figuren gegebner Gattung über G'A und EA, wenn sie auf der selben Grundlinie stehn); so erhält man den *Mittelpunkt*.

und der *Halbmesser* $G''A$ wird wider durch eine ähnliche Formel wie vorhin bestimmt,

$$G''A^2 \times \frac{m+n+p+r}{q} = F'' - R \times \frac{m+n}{q} \\ - R' \times \frac{m+n+p}{q} - R'' \times \frac{m+n+p+r}{q}.$$

Wird noch ein fünfter, und dann noch ein sechster, ein siebenter Punkt u. f. f. unter ähnlichen Bedingungen gegeben, so geht, wie man leicht sieht, die Schlussfolge grade so, wie hier für drey und vier Punkte fort, daher unsere Behauptung auch für 5, für 6, für 7, kurz für jede Zahl von Punkten gilt.

Wenn man folglich aus einer beliebigen Anzahl gegebener Punkte grade Linien so zieht, daß sie sich insgesammt in Einem Punkte, und zwar so durchschneiden, daß Figuren von gegebener Gattung, welche man über diese Linien beschreibt, zusammengenommen einem gegebenen Flächenraum gleich sind; so ist allemal der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes eine der Lage und GröÙe nach gegebene Kreislinie, so daß jeder Punkt einer bestimmten Kreislinie, und kein Punkt außerhalb derselben, mit den gegebenen Punkten grade Linien bestimmt, welche die erwähnte Eigenschaft haben. — Verhalten sich die der Gattung nach gegebenen, über BA , CA , DA , EA , u. f. f. zu beschreibenden Figuren, zu den Quadraten dieser Linien, wie m , n , p , r , u. f. f. zu q ; und man theilt die grade Linie BC , im Punkte G nach dem Verhältnisse $m:n$ ein, ferner GD , im Punkte G' nach dem

Verhältnisse $m + n : p$, und $G'E$ im Punkte G'' nach dem Verhältnisse $m + n + p : r$ u. f. f.; so findet man den *Mittelpunkt dieses Kreises*: und der *Halbmesser* desselben wird durch den gegebenen Flächenraum, durch die gegebenen Gattungen der Figuren a, b, c etc., und durch die Rechtecke aus den Abschnitten der Linien $BC, G'D, G''E$ u. f. f., durch Formeln, deren Gesetz leicht zu übersehn ist, bestimmt.

b) *Dass der Satz in dieser Allgemeinheit auch für den Fall gilt, da der Unterschied der Figuren gegebner Gattungen, einem gegebenen unveränderlichen Flächenraum gleich ist*, fällt aus unserer Erörterung für 2 und 3 Punkte in die Augen. Der einzige Unterschied dabey ist, daß für jede subtractive Figur, der durch ihre Gattung bestimmte Punkt G in einer Verlängerung zu nehmen, und die GröÙe der Figur gegebner Gattung über GA aus F, R, R' etc. auf andre Art zusammenzusetzen ist.

c) *Ist endlich die Summe einiger der Figuren gegebner Gattung, der Summe der übrigen, sammt einem gegebenen Raume S gleich*; so ist der Unterschied der Figur gegebner Gattungen dem Raume S gleich: also auch der Satz C, in dieser Allgemeinheit wahr *.

*(f. 1.C)

Der erstere von diesen Sätzen, welche zu den allgemeinsten und elegantesten in der geometrischen-Analytis gehören, wird in *Apollonius ebenen Oertern II. 5. Fall 2 und 3* dargethan. Bloß der Beweis für 3 Punkte und den Fall der Summe, nimmt dort 16 Seiten ein, indem er durch alle Verschiedenheiten, (wenn alle 3 Figuren gegebner Gattung Quadrate sind, oder wenn ihrer 2, oder wenn 1, oder wenn keine ein Quadrate ist,) umständlich

durchgeführt wird, und obgleich *Simfon* den Fall des Unterschieds ganz übergeht, so füllt doch der ganze Satz über 30 Seiten. Der deutsche Uebersetzer, *Camerer*, hat dort arithmetische und trigonometrische Formeln zur Bestimmung des Halbmessers hinzugefügt, die aber, wie sich schon aus unsern Formeln schließen läßt, außerordentlich weitläufig werden. — Dafs im Fall der Summe der gegebne Raum *F* nothwendig gröfser seyn muß als die Summe aller subtractiven Räume, fällt aus der Bestimmung des Halbmessers in die Augen.

Stellt man sich alle gegebene Punkte *B*, *C*, *D* etc. als gleich schwer vor, so findet man den Lehren der Statik gemäfs, ihren *Schwerpunkt* grade auf dieselbe Art, wie man hier den Mittelpunkt *G* der Kreislinie findet, welche der geometrische Ort des Durchschnittspunktes *A* für den Fall ist, dafs alle Figuren über *BA*, *CA* u. s. f. Quadrate sind. Daher hat umgekehrt jeder Kreis, welcher aus dem Schwerpunkte mehrerer in einer Ebne gegebener, und gleich schwerer Punkte beschrieben wird, die Eigenschaft, dafs wenn man von allen diesen Punkten, nach irgend einem Punkte der Kreislinie, grade Linien zieht, die Quadrate über diese Linien zusammengenommen immer dem nemlichen Flächenraume gleich sind; ein Satz den *Simfon* aus *Hughens Horologium Oscillatorium prop. 12* entlehnt, und unserm Satz *a* gemäfs noch erweitert.

Folgerung 3. Aus diesen Sätzen fliefsen in Verbindung mit unserm Lehrsatz umgekehrt folgende interessante *Eigenschaften der Kreislinie*, wodurch die Eigenschaft, welche wir in Lehrsatz 17, *Folgerung 2* kennen gelernt haben, ausnehmend verallgemeinert wird.

Fig. 51. Nimmt man nemlich auf einem der Durchmesser einer Kreislinie, oder auf deren Verlängerung, willkührlich zwey Punkte *B* und *C*, und zieht von beyden nach einem beliebigen

Punkte *M* der Kreislinie grade Linien *BM*, *CM*; so haben zwey Figuren gegebner Gattung, welche man über diese Linien beschreibet, (nemlich solche Figuren, die über einerley Linie beschrieben, sich wie die Entfernungen *CG* und *BG* verhalten,) für jeden Punkt der Kreislinie, falls *B* und *C* zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes *G* liegen, immer einerley Summe: falls hingegen *B* und *C* zu einerley Seite des Mittelpunktes *G* liegen, immer einerley Unterschied. Denn ist erstens *M* ein Punkt außerhalb des Durchmessers *BC*, und man zieht *MB*, *MC*, *MG*, so entsteht ein Dreyeck *MBC*, von dessen Spitze, im ersten Fall nach der gegenüberstehenden Grundlinie, im zweyten nach ihrer Verlängerung eine grade Linie *AG* gezogen ist, für welches folglich nach der Form γ unsers Lehrsatzes, $MB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm MC^2 \times \frac{BG}{GE}$

$$= \frac{BC}{GE} \pm (BG \times CG \pm MG^2) \text{ ist.}$$

Nun sind *B*, *G*, *C* gegebne Punkte, also *BG* und *CG* unveränderliche Linien, wie auch der Halbmesser des Kreises *MG*, und die beliebig gegebne Linie *GE*. Mithin sind die Räume rechts vom Gleichheitszeichen, für jeden Punkt *M* in der Kreislinie, der außerhalb *BC* liegt, von einerley Gröfse, also auch die Räume links vom Gleichheitszeichen. Folglich haben zwey der Gattung nach gegebne Figuren über *MB* und *MC* beschrieben, und zwar zwey Figuren, die über dieselbe Linie beschrieben sich wie *CG*:*BG* verhalten, im ersten Fall zusammengenommen, im zweyten von einander abgezogen, immer einerley Gröfse. Dafs dieses zweytens auch für die bey-

den Punkte N der Kreislinie, welche in der Linie BC liegen, und für welche kein Dreyeck MBC vorhanden *S. 329. ist, gilt, folgt aus *Proklus Lehrsatz* in Anmerk. 1*, indem nach der Form γ dieses Lehrsatzes, auch für jene beyden Punkte, $NE^2 \times \frac{CG}{GE} \pm NC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm MG^2)$ ist.

Fig. 54. Nimmt man in oder auferhalb der Kreislinie willkürlich drey Punkte, B, C, D , und zieht von ihnen nach Einem Punkte M der Kreislinie grade Linien, so haben auf dieselbe Art drey Figuren bestimmter Gattungen über diese Linien beschrieben, für jeden Punkt Meinerley Summe, oder nach Umständen einerley Unterschied. Und zwar, wenn man BC , und von D nach dem Mittelp. G , DG zieht, und diese beyden Linien sich in einem Punkte H durchschneiden, so wird die Gattung der Figuren über BM, CM, DM , durch das Verhältniß der Abschnitte $CH : BH$ und $HG : DG$, wie in Folgerung 2. bestimmt. Und dasselbe gilt für 4, für 5, kurz für jede beliebige Zahl willkürlich angenommener Punkte, wofür der Beweis nach Anleitung des Beweises in Folgerung 2. sich ohne Schwierigkeit, grade so wie für 2 Punkte führen läßt.

Anmerkung 2. Diese interessanten Folgerungen aus unserm allgemeinen Lehrsatze, habe ich unmittelbar auf die Auslegung der verschiedenen Formen desselben folgen lassen, weil sie sich lediglich auf diese gründen. In den folgenden Zusätzen füge ich nun noch die Entwicklung einiger besondrer Sätze hinzu,

- * 20. die in unserm allgemeinen Lehrsatze* liegen, und aus deren großer Brauchbarkeit in geometrischen Untersuchungen, die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes noch einleuchtender werden wird.

Zufatz I. 1) Wenn in einem Dreyeck ABC aus Fig. 45. der Spitze nach der Verlängerung der Grundlinie BC eine grade Linie Ag so gezogen ist, daß, wenn S einen gegebenen Raum bedeutet, sich verhält $AB^2 - S : AC^2 = Bg : Cg$; so ist allemal das Rechteck aus der Grundlinie und dem größern Abschnitt BG, größer als der gegebne Raum S.

Denn es ist alsdann $AB^2 - S = AC^2 \times \frac{Bg}{Cg}$, *V. 3. α.

folglich $S = AB^2 - AC^2 \times \frac{Bg}{Cg} = BC \times Bg - Ag^2 \times \frac{BC}{Cg}$, * 20. β.

und mithin $S > BC \times Bg$.

2) Wird hingegen AG nach einem Punkte in der Grundlinie selbst so gezogen, daß sich verhält $S - AB^2 : AC^2 = BG : CG$, so muß das Rechteck $BC \times BG$ kleiner als der gegebne Raum S seyn. Denn alsdann ist $S = AB^2 +$

$AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG + AG^2 \times \frac{BC}{CG}$, also * 20. β.

$S > BC \times BG$.

Beide Sätze kommen in Apollonius ebenen Oertern II Lemma 4 und 5 vor, und ihr Beweis wird dort weit hergeholt.

Zufatz II. Nach der Aussage δ unsers Lehr Fig. 45. Satzes, ist, wenn man in einem Dreyeck ABC, die Linie AG willkührlich nach einem Punkte der Grundlinie oder deren Verlängerung zieht, immer

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2,$$

wo die obern Zeichen für den erstern, die untern für den letztern Fall gelten.

Fig. 36. 1) Zieht man folglich AG nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie, da dann $BG = CG = \frac{1}{2} BC$ wird, so ist immer $\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 = BG^2 + AG^2$; unser Lehrsatz 17, welcher also der einfachste Fall dieses allgemeinen Satzes ist. — Zieht man AG nach einem Punkte in der verlängerten Grundlinie, so daß $BC = Cg$ wird, so erhält man ebenfalls die Aussage jenes Lehrsatzes.

Fig. 45. 2) Zieht man AG so, daß $BG = 2 CG$, und mithin $BC = 3 CG$ ist, so ist $\frac{1}{3} AB^2 + \frac{2}{3} AC^2 = 2 CG^2 + AG^2$ u. s. f.

3) Ist überhaupt $BG = m \cdot CG$, folglich, im Fall G in der Grundlinie liegt $BC = (m + 1) CG$, falls aber G in der verlängerten Grundlinie liegt $BC = (m - 1) CG$; so ist

$$\text{im ersten Fall } \frac{1}{m+1} AB^2 + \frac{m}{m+1} AC^2 = m \cdot CG^2 + AG^2$$

$$\text{im zweyten } \frac{1}{m-1} AB^2 - \frac{m}{m-1} AC^2 = m \cdot CG^2 - AG^2;$$

Ausagen, welche sich beyde in folgende Formel zusammenziehen lassen,

$$AG^2 = \frac{1}{1 \pm m} \cdot AB^2 \pm \frac{m}{1 \pm m} \cdot AC^2 \mp m \cdot CG^2$$

wo die obern Zeichen für den ersten, die untern Zeichen für den zweyten Fall gelten.

Fig. 48. Zusatz III. 1) Zieht man AG senkrecht auf die Grundlinie oder deren Verlängerung, so wird $AG^2 = AB^2 - BG^2$, und setzt man diesen Werth in δ , so

geht die allgemeine Aussage, je nachdem der Winkel B spitz oder stumpf (d. i. $BC = BG + CG$ oder $BG - CG$) ist, in die beyden Ausfagen des dreyzehnten Lehrsatzes über; eine Ableitung, die ich dem Leser überlasse. Auch dieser Satz ist also nur ein besondrer Fall unfers Allgemeinen.

2) Ist das Dreyeck ABC gleichschenkelig, und AG von Fig. 48. der Spitze nach der Grundlinie oder deren Verlängerung gezogen, so verwandeln sich in δ die Theile links vom Gleichheitszeichen in diese $AB^2 \times \left(\frac{CG \pm BG}{BC} \right) = \pm AE^2$,

indem, im Fall G in der Verlängerung der Grundlinie liegt, der Voraussetzung bey unsern Formeln gemäß, $Bg - Cg = BC$ ist. Es ist also im gleichschenkligen Dreyeck $\pm AB^2 = BG \times CG \pm AG^2$ oder $AB^2 = AG^2 \pm BG \times CG$; ein fruchtbarer Satz, bey dem ich mich hier weiter nicht verweile, weil ich ihn, zum Behuf derer, die unsern allgemeinen Lehrsatz überschlagen haben, bald als einen besondern Lehrsatz aufführen und noch auf andre Art beweisen werde*.

Zusatz IV. 1) Zieht man in einem Dreyeck ABC Fig. 50. die grade Linie AG so nach der Grundlinie BC oder nach deren Verlängerung, daß sich die beyden Abschnitte BG, CG, wie die Schenkel, an welchen sie anliegen, verhalten, $BG : CG = AB : AC$; so ist das Rechteck aus den beyden Schenkeln, gleich, im ersten Fall der Summe, im zweyten dem Unterschiede des Rechtecks aus den beyden Abschnitten BG, CG, und des Quadrats der theilenden Linie, oder $AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2$.

Denn aus der vorausgesetzten Proportion fließt auch die Proportionalität folgender Größen

*V.4.β. $BG \pm CG : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$ *, d. h. da im ersten Fall $BG + CG = BC$, im zweyten aber, der Bedingung unsers Lehrsatzes gemäß, $BG - CG = BC$ ist, $BC : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$. Folglich ist $\frac{BG}{BC} = \frac{AB}{AB \pm AC}$ und $\frac{CG}{BC} = \frac{AC}{AB \pm AC}$

Setzt man diese Werthe in unsrer Form δ , so wird in diesem Fall der Theil links vom Gleichheitszeichen,

das ist $AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC}$

$$= \frac{AB^2 \times AC}{AB \pm AC} \pm \frac{AC^2 \times AB}{AB \pm AC} = AB \times AC \times \frac{AB \pm AC}{AB \pm AC}$$

= $AB \times AC$; und mithin ist in diesem Fall immer

$$AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2.$$

Auch dieser bekannte und brauchbare Satz, der gewöhnlich aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke bewiesen wird, und der auch bey *Le Gendre* und *van Swinden* vorkömmt, ist also ein besonderer Fall unsers allgemeinen Lehrsatzes. Dafs er auch für einen Punkt in der Verlängerung der Grundlinie, nur mit der Verschiedenheit gelte, dafs dann die Summe in den Unterschied übergeht, scheint man bey dem gewöhnlichen Beweise desselben übersehn zu haben.

2) Es sey $AB = m \cdot AC$, und folglich, da $BG : CG$, dem Verhältnisse $AB : AC$ gleich ist, $BG = m \cdot CG$, so erhält unsere Aussage folgende Gestalt, $m \cdot AC^2 = m \cdot CG^2 \pm AG^2$, so dafs also unter der Bedingung dieses Zusatzes für jeden Punkt G in der BG

BG

Grundlinie, $AG^2 = m \cdot (AC^2 - CG^2) = \frac{1}{m} \cdot (AB^2 - BG^2)$,

und für jeden Punkt g in der verlängerten Grundlinie

$Ag^2 = m (Cg^2 - AC^2) = \frac{1}{m} (Bg^2 - AB^2)$ ist.

Zusatz V. 1) Zieht man endlich von der Spitze eines Dreyecks ABC , die grade Linie Ag so nach der Verlängerung der Grundlinie, daß die Abschnitte Bg , Cg sich wie die Quadrate der Schenkel, an welche sie anliegen verhalten, $Bg : Cg = AB^2 : AC^2$; so ist allemal das Rechteck aus den Abschnitten, dem Quadrat der theilenden Linie gleich, $Bg \times Cg = Ag^2$, oder diese Linie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten.

Denn aus der angenommenen Proportion folgt, daß $AB^2 \times Cg = AC^2 \times Bg$, folglich $AB^2 \times \frac{Cg}{BC} - AC^2 \times \frac{Bg}{BC} = 0$ sey. Da nun dieser Unterschied, nach un-

frer Form δ , gleich ist $Bg \times Cg - Ag^2$, so müssen auch diese Räume keinen Unterschied haben, also gleich seyn, oder es ist alsdann immer $Bg \times Cg = Ag^2$, und folglich $Bg : Ag = Ag : Cg$ *.

* 4. f. 1.

Apollonius ebne Oerter II. Lemma 2, und Pappus VII. 119, wo dieser Hülfssatz aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke abgeleitet wird.

2) Für einen Punkt G in der Grundlinie, der diese so schneidet, daß die Abschnitte sich wie die Quadrate der anliegenden Schenkel verhalten, ist $2 AB^2 \times \frac{CG}{BC}$

$= BG \times CG + AG^2$; eine Erweiterung dieses Hülfssatzes, die ich nicht erwähnt finde.

Zusatz VI. Wenn man von zwey gegebenen Punkten B, C aus, grade Linien zieht, die sich in einem Punkte A so durchschneiden, daß je zwey dieser Linien zwar ungleich sind, aber ein gegebenes und unveränderliches Verhältniß zu einander haben; so ist der geometrische Ort ihres Durchschnittpunktes, eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse.

Denn ist das Verhältniß dieser Linien AB, AC gegeben, so ist auch das Verhältniß ihrer Quadrate bekannt. Nimmt man daher auf der Verlängerung der Linie BC einen Punkt g so, daß Bg, Cg in diesem Verhältniß der Quadrate über AB, AC stehn, und zieht Ag, so ist nach Zusatz V, $Ag^2 = Bg \times Cg$. Nun sind die Punkte B, C, und g gegeben und unveränderlich; also auch Ag^2 , und die Seite Ag. Mithin ist der Ort der Spitze A, eine mit Ag um g beschriebne Kreislinie.

*Ist das gegebne Verhältniß der Linien BA:CA, das Verhältniß der Gleichheit, so ist kein Punkt in der Verlängerung der Linie BC möglich, für welchen Bg:Cg in dem gegebenen Verhältniß stünden, da Bg immer um BC größer oder kleiner als Cg ist. — Hingegen giebt es einen solchen Punkt G in der Linie BC selbst, für welchen $BG = CG = \frac{1}{2} BC$ ist, und für diesen wird, laut der zweyten Ausfage in Zusatz V, $AB^2 = BG^2 + AG^2$, also der Ort der Durchschnittpunkte A für diesen Fall ein Perpendikel auf der Mitte der Linie BC *.*

* 14. Perpendikel auf der Mitte der Linie BC *.

Zusatz VII. Umgekehrt hat jede Kreislinie die Eigenschaft, daß wenn man innerhalb oder außerhalb des Kreises willkürlich einen Punkt, z. B. C nimmt, und auf dem Durchmesser durch C, nach derselben Seite hin, einen zweyten Punkt B so, daß das Rechteck aus den Entfernungen dieser beyden Punkte vom Mittelpunkte g, dem Quadrat des Halbmessers gN gleich ist, $gC \times gB = gN^2$, oder, was auf eins hinaus kömmt, so daß gB die dritte Proportionallinie zu gC und dem Halbmesser gN ist; so stehn je zwey grade Linien, MB : MC, welche man von diesen Punkten C, B aus, nach demselben Punkte M der Kreislinie zieht, insgesamt in gleichem Verhältniß, und zwar im Verhältniß des Halbmessers und eines der Abschnitte, $gB : gN$, oder der beyden Linien NB : NC, oder BP : CP.

Denn zieht man nach demselben Punkte M der Kreislinie BM, CM, gM, so entsteht ein Dreyeck BMC, von dessen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, Mg so gezogen ist, daß $Bg \times Cg = Ng^2 = Mg^2$ ist, daher vermöge δ auch $MB^2 \times Cg = MC^2 \times Bg$ feyn *, und folglich sich verhalten muß $MB^2 : MC^2 = 20. \delta. = Bg : Cg$. Nun aber ist der Mittelpunkt g, der Halbmesser gN, und einer der Punkte B, C, mithin auch der andre, also das Verhältniß der Linien Bg : Cg, folglich das diesen gleiche Verhältniß der Quadrate $MB^2 : MC^2$, und also auch das Verhältniß der Seiten dieser Quadrate MB : MC gegeben und unveränderlich.

Da nun die Punkte B und C, der Voraussetzung nach so bestimmt sind, daß sich verhält $gB : gN$

- = $gN : gC$, oder, wenn man diese gleichen und stetigen Verhältnisse zusammen setzt * $gB : gC = gB^2 : gN^2$ oder auch wie $gN^2 : gC^2$; so verhalten sich die Quadrate $MB^2 : MC^2 = gB^2 : gN^2$, und folglich je zwey Linien $MB : MC = gB : gN$ oder wie $gN : gC$, oder endlich wie $gB \mp gN : gN \mp gC$ d. i. wie $BN : NC$ oder wie *V. 4. §. $BP : CP$ *. Mithin *verhält sich die grössere je zwey solcher Linien MB, MC zur kleinern, wie der grössere Abschnitt zum Halbmesser, oder wie der Halbmesser zum kleinern Abschnitt, oder wie die beyden an diesen Linien anliegenden Abschnitte, in welche BC durch die Kreislinie getheilt wird.*

Da der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen den Entfernungen der beyden Punkte B, C, vom Mittelpunkte g ist; so können die Linien gB, gC , nicht beyde zugleich grösser, oder beyde zugleich kleiner als der Halbmesser seyn, folglich die Punkte B, C nicht beyde zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreifes, eben so wenig als zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes genommen werden.

Anmerkung. Die Ausfagen in Zusatz 6 und 7, welche zu den schönsten Sätzen über den Kreis gehören, machen in Apollonius ebenen Oertern den zweyten Ort des zweyten Buchs aus, und lassen sich auch aus Sätzen des nächsten Buchs folgern. In der That sind sie aber nur der einfachste Fall der Ausfage C *f. 1. D. in Folgerung 1*, und lassen sich daher noch sehr verallgemeinern.

Wenn nemlich beliebig viel Punkte z. B. B, C, D in einer Ebne gegeben sind, und grade Linien von diesen Punkten aus gezogen sich (in diesem Fall je drey) so in Punkten A durchschneiden, daß sie zu einander stets in demselben gegebenen Verhältnisse stehn, so ist der Ort der Durchschnittpunkte A stets eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse. Denn da alsdann auch die

Quadrate über diese Linien in einem gegebenen, unveränderlichen Verhältnisse stehn, z. B. $BA^2 : CA^2 : DA^2 = m : n : p$; so ist $BA^2 + CA^2 : DA^2 = m + n : p$, und mithin $BA^2 + CA^2 = DA^2 \times \frac{m + n}{p}$

oder eine Figur gegebner Gattung über DA beschrieben, gleich der Summe der Quadrate über die anderen Linien. Es ist dann also auch der Unterschied dieser Quadrate und der Figur gegebner Gattung über DA, gleich einem gegebenen Flächenraume, nemlich dem Flächenraume \circ , und deshalb der Ort der Punkte A eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Halbmesser, wie in Folgerung 2., bestimmt wird.

[LEHRSATZ 21.]

Zieht man aus der Spitze A eines gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, oder nach einem Punkte g in deren Verlängerung, eine grade Linie, so ist stets der Unterschied der Quadrate aus dieser Linie und aus einem der gleichen Schenkel, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten auf der Grundlinie, BG, CG, oder auf der verlängerten Grundlinie, Bg, Cg. Fig. 38.

Da ein Perpendikel AD, aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, diese in Punkte D halbirte *, so geht für diesen Punkt das Rechteck aus den beyden Abschnitten in das Quadrat der halben Grundlinie, und also die Aussage des Lehrsatzes in folgende über, $AB^2 - AD^2 = BD^2$, welche vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes wahr ist. *

*12. f. 1.

Jeder andre Punkt G in der Grundlinie theilt diese überdem in zwey ungleiche Abschnitte, BG, GC, mit-

III. f. l. α hin so, daß $BG \times GC = BD^2 - DG^2$ ist *, oder, da im Dreyeck BAG der Unterschied dieser Quadrate, dem Unterschiede der Quadrate aus den Schenkeln AB, AG

• 16. 1. gleich ist *, so, daß ist

$$BG \times GC = AB^2 - AG^2.$$

Für jeden Punkt *in der Verlängerung der Grundlinie*, haben wir eine in D gleich getheilte Linie BC, welcher ein Stück Cg angesetzt, für die folglich $Bg \times gC = Dg^2 - DC^2$ ist. Und da wiederum im Dreyeck CAg der Unterschied dieser Quadrate aus den Abschnitten der Grundlinie, dem Unterschiede der Quadrate aus

• 16. 1. den Schenkeln Ag und AC = AB gleich ist *,

$$Bg \times gC = Ag^2 - AB^2.$$

Man nehme also den Punkt G in der Grundlinie selbst, oder in deren Verlängerung, allemal ist *das Rechteck aus dem Abstände dieses Punktes von den beyden Endpunkten B, C der Grundlinie, gleich dem Unterschiede der Quadrate aus der Linie AG und einem der gleichen Schenkel*, nur mit dem Unterschiede, daß im ersten Fall der Schenkel *größer*, im zweyten *kleiner* als die Linie AG ist; welches sich aus der Natur des gleichschenkligen

• I. 16. Dreyecks von selbst versteht *.

Folgerung. Das Quadrat einer graden Linie AG, welche durch die Spitze des gleichschenkligen Dreyecks gezogen wird, ist folglich, je nachdem sie auf der Grundlinie, oder auf deren Verlängerung aufsteht,

$$AG^2 = AB^2 - BG \times GC \text{ oder } Ag^2 = AB^2 + Bg \times gC;$$

Ausagen, die man bequem in folgende zusammenfaßt

$$AG^2 = AB^2 \mp BG \times GC$$

wo das *obere* oder das *untere* Zeichen gilt, je nachdem der Punkt G *in der Grundlinie* BC selbst, oder *in deren Verlängerung* liegt. Grade so ist

$$AB^2 = AG^2 \pm BG \times GC;$$

ein Satz, den wir schon oben gehabt haben *.

*20Z3,2

Zu f a t z. Jede *Sehne eines Kreises, welche kein Durchmesser ist*, z. B. AB, bildet mit den beyden Halbmessern, die nach ihren Endpunkten gezogen werden, ein gleichschenkliges Dreyeck ABC, welches den Mittelpunkt zur Spitze, die Sehne selbst zur Grundlinie, und den Halbmesser zu Schenkeln hat. Durch unsern Lehrsatz wird mithin folgende artige *Eigenschaft dieser Sehnen* begründet:

Taf. IV.
Fig. 55.

1) Jede grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte C eines Kreises nach irgend einem Punkte O *in einer Sehne wie AB, gezogen ist*, theilt diese so in zwey Abschnitte AO, OB, das $AO \times OB = CA^2 - CO^2$ ist. Und auf diese Art wird auch der Durchmesser HI, der durch den Punkt O geht, (folglich jede Sehne durch O) mittelst dieses Punktes eingetheilt. Denn giebt es gleich, da der Mittelpunkt C in HI liegt, alsdann kein gleichschenkliges Dreyeck, wie für die übrigen Sehnen, so ist doch HI im Punkte C gleich, im Punkte O ungleich getheilt, und deshalb gleichfalls das Rechteck $HO \times OI = CI^2 - CO^2$ *.

*11.f.10

2) Eine grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte o *in der Verlängerung einer Sehne wie AB* gezogen ist, schneidet dagegen auf ihr zwey Abschnitte Ao, Bo, so ab, das $Ao \times oB = Co^2 - CA^2$

ist. Und auch der Durchmesser, der durch den Punkt o geht, (folglich jede Sehne durch o) wird mittelst des Punktes o auf diese Art eingetheilt, da dem in C gleich getheilten Durchmesser HI , in diesem Fall, ein Stück $\text{IIL.}\beta$ Io angefetzt, folglich $Ho \times oI = Co^2 - CI^2$ ist *.

In beyden Fällen, der Punkt O liege in einer Sehne, oder in deren Verlängerung, ist also immer das Rechteck aus den Abschnitten, die durch diesen Punkt gebildet werden, (oder noch bestimmter das Rechteck aus dem Abstand des Punktes O von den beyden Endpunkten A, B der Sehne), gleich dem Unterschiede der Quadrate aus dem Halbmesser und aus der Linie CO .

3) Diese Linie CO selbst, und der Halbmesser CA , werden durch folgende Ausdrücke gegeben,

$$CO^2 = CA^2 \mp AO \times OB$$

$$CA^2 = CO^2 \pm AO \times OB$$

wo die obern oder die untern Zeichen gelten, je nachdem der Punkt O in der Sehne, oder in deren Verlängerung liegt.

[L E H R S A T Z 22.]

Taf. III.
Fig. 55.

I) Wenn mehrere Sehnen insgesamt durch einen Punkt O im Kreise gehn, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche auf jeder Sehne durch diesen Punkt abgeschnitten werden, sowohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der halben Sehne gleich, welche mit dem Punkte O gleich weit vom Mittelpunkte absteht, z. B. $AO \times OB = DO \times OE = OF^2$.

2) Wenn dagegen die Verlängerungen mehrerer Sehnen insgesamt durch einen Punkt o ausserhalb des Kreises gehn, so sind die Rechtecke aus der ganzen schneidenden Linie und aus der Verlängerung, so wohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der Tangente gleich, welche vom Punkte o nach dem Kreise gezogen wird, z. B. $AO \times oB = Do \times oE = oG^2$.

Ist O der Mittelpunkt des Kreises, so sind alle Sehnen, welche durch diesen Punkt gehn, Durchmesser, die sich im Punkte O halbiren, mithin die Aussage richtig. — Ist O nicht der Mittelpunkt, so ziehe man nach demselben die grade Linie OC . Für alle Sehnen, welche sich entweder selbst, oder verlängert in demselben Punkte O durchschneiden, ist diese Linie CO , und mithin der Unterschied der Quadrate des Halbmessers und dieser Linie, von gleicher Grösse. Da nun dieser Unterschied den Rechtecken $AO \times OB$, $DO \times OE$, $HO \times OI$ etc. dem vorigen Zusatz gemäß * gleich ist, * 21. Z. der Punkt O liege im Kreise oder ausserhalb des Kreises, so sind auch in beyden Fällen alle diese Rechtecke unter sich gleich.

Im ersten Fall wird eine Sehne GF , welche durch den Punkt O geht, und vom Mittelpunkte um CO absteht, vom Durchmesser durch O senkrecht durchschnitten und halbirt *, so das $GO \times OF = OF^2$ ist. Und * IL 9. da dieses Rechteck jedem der übrigen Rechtecke aus den beyden Abschnitten der Sehnen, die durch den

Punkt O gehn, gleich ist, so muß auch *jedes dieser Rechtecke dem Quadrate über OF gleich seyn.*

Im zweyten Fall ist, wenn man vom Punkte o aus eine Tangente oG am Kreise, und nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CG zieht, CG auf oG
 * II. 10. senkrecht *, daher $oG^2 = oC^2 - CG^2$ *, und folglich
 * 12. *das Quadrat der Tangente oG, gleich dem Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder verlängerten Sehne, die durch den Punkt o geht, indem jedes dieser Rechtecke, dem Unterschiede der Quadrate über Co und über dem Halb-*
 * 21 Z. 2 *messer CG, gleich ist *.*

Folgerung 1. Da in Rechtecken von gleichem
 * 4. f. 1. Inhalt, die Seiten verkehrt proportional sind *, so ergeben sich hieraus unmittelbar folgende Sätze:

α) *Zwey Sehnen, welche einen Punkt O innerhalb der Kreislinie gemein haben, durchschneiden sich in diesem*
 * E. 7. *Punkte verkehrt proportional *, so daß sich verhält*
 $AO : DO = OE : OB$;

β) *und die Hälfte der Sehne FG, welche vom Mittelpunkte um CO absieht (oder die auf dem Durchmesser im Punkte O senkrecht steht) ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten einer jeden solchen Sehne, so daß sich verhält* $AO : OF = OF : OB$.

γ) *Eben so werden zwey Sehnen, die sich verlängert in einem Punkte o außerhalb des Kreises durchschneiden, durch die Kreislinie verkehrt proportional eingetheilt, so daß sich verhält* $Ao : Do = oE : oB$;

δ) *und die Tangente, welche von diesem Punkte o nach dem Kreise geht, ist zwischen der Verlängerung und*

der ganzen durchschneidenden Linie die mittlere Proportionallinie, so das sich verhält $Ao : oG = oG : oB$.

Ueberhaupt werden also zwey grade Linien, welche von Einem Punkte O nach der Kreislinie gehn, von dieser stets so geschnitten, das die Entfernungen des Punktes O von den beyden Durchschnittpunkten einer jeden dieser Linien, verkehrt proportional sind *, oder das die Rechtecke aus diesen Entfernungen insgesammt unter einander gleich sind. Das sich auf diese Eigenschaften der Sehne und der Tangenten Methoden gründen lassen, zu drey gegebenen Linien die vierte, oder zu zwey die dritte Proportionallinie, so wie zwischen zwey gegebenen die mittlere Proportionallinie zu finden, fällt in die Augen. * E. 7.

Folgerung 2. Ist von einem Punkte einer Sehne AB, eine grade Linie OF nach dem Kreise so gezogen, das $OF^2 = OB \times OA$ ist; so ist OF ein Perpendikel auf dem Durchmesser, der durch den Punkt O geht. Denn verlängert man die Linie FO, bis wo sie zum zweyten male den Kreis in G durchschneidet, so ist $OG \times OF = OB \times OA$, folglich $OF^2 = OG \times OF$ und also $OF = OG$; d. h. die Sehne GF wird im Punkte O halbirt, und steht daher auf dem Durchmesser durch O senkrecht.

Von allen Sehnen die durch den Punkt O gehn, ist diese Sehne FG (die auf dem Durchmesser durch O senkrecht steht) die kürzeste. Denn unter allen Rechtecken, welche von gleichem Inhalt sind, hat das Quadrat den kleinsten Umfang *.

Folgerung 3. α) Ist von einem Punkte in der Verlängerung einer Sehne AB , eine grade Linie oG nach dem Kreise so gezogen, daß $oG^2 = oA \times oB$ ist; so berührt oG den Kreis im Punkte G . Denn zieht man von o durch den Mittelpunkt des Kreises oH , so ist $oA \times oB$ * 22. 2. = $oH \times oI$ * und also $oG^2 = oH \times oI = oC^2 - CG^2$, weil dem in C halbirten Durchmesser HI , das Stück * 11. 1. Io angesetzt ist *. Folglich muß das Dreyeck COG * 14. bey G rechtwinklig * seyn, und daher oG den Kreis * II. 12. im Punkte G berühren *.

Diese berührende Linie ist stets kleiner als die Hälfte der Summe aus den beyden Abschnitten Ao , Bo jeder Sehne, * 11. Z. I. die durch den Punkt o geht *, und je zwey Abschnitte Ao , Bo einer Sehne zusammen genommen, sind stets kleiner als die beyden Abschnitte Ho , Io auf dem Durchmesser.

β) Sind endlich nach irgend drey Punkten A, B, o einer graden Linie, von einem Punkte K grade Linien so gezogen, daß $Ko^2 = Ao \times Bo$ ist, und man beschreibet durch AKB einen Kreis, so berührt oK diesen Kreis, vermöge α , und folglich sind dann allemal die Winkel $BKo = KAB$, * II. 24. $AKL = ABK$ *, und als die Nebenwinkel der letztern $KBo = AKo$, mithin die Dreyecke KBo und AKo gleichwinklig.

Folgerung 4. α) Liegen vier Punkte A, D, B, E so, daß, wenn man sie Paarweise durch grade Linie wie AB, DE verbindet, diese Linien sich entweder selbst in einem Punkte O , oder verlängert in einem Punkte o durchschneiden, und das Rechteck aus den Abschnitten AO, BO der einen, dem Rechteck aus den Abschnitten DO, EO

der andern gleich ist, oder, was auf eins hinauskömmt, so, daß die Entfernungen des Durchschnittspunkts O von den beyden Punkten, die auf jeder dieser Linien gegeben sind, in verkehrtem Verhältniß stehr; so läßt sich durch diese vier Punkte stets eine Kreislinie beschreiben, und ein Kreis, der z. B. durch die drey Punkte A, B, C gezogen wird, muß nothwendig auch durch den vierten E gehn. Denn wer dieses leugnen wollte, müßte behaupten daß ein solcher Kreis die Linie DE nicht in E, sondern in einem andern Punkte F durchschneide, da denn das Rechteck aus DO, FO dem Rechteck aus AO, BO, mithin, der Voraussetzung gemäß, dem Rechteck aus DO, EO gleich feyn müßte, welches nur dann möglich ist, wenn $FO = EO$, und also F und E einerley Punkt sind.

β) Umgekehrt läßt sich durch vier gegebne Punkte nur dann ein Kreis ziehn, wenn sie entweder auf diese Art liegen, oder wenn sie die Eckpunkte eines Rechtecks sind. Denn laufen unter den Linien, welche die vier Punkte verbinden, je zwey der gegenüberstehenden parallel; so bilden sie ein Parallelogramm, und um kein Parallelogramm, das Rechteck ausgenommen, läßt sich ein Kreis beschreiben *. Durchschneiden sich hingegen diese Linien, und die vier gegebnen Punkte lägen nicht auf die angezeigte Art, und doch in einem Kreise, so müßte eine grade Linie einem Kreis in drey verschiedenen Punkten D, E, F schneiden können, welches unmöglich ist. *II, 27ft

γ) Gehn überhaupt mehrere grade Linien durch Eisen Punkt O, und es liegen entweder auf allen zu einerley,

oder auf allen zu entgegengesetzten Seiten desselben zwey Punkte so, daß die Rechtecke aus ihren Entfernungen vom Punkte O gleich sind; so liegen alle diese Punkte in einer Kreislinie, und ein Kreis durch drey derselben beschrieben, geht auch durch alle übrigen. Und zwar liegt im ersten Fall der Punkt O auferhalb, im zweyten innerhalb dieses Kreises. — Umgekehrt giebt dieses eine Bedingung ab, unter der allein ein Kreis durch gegebne Punkte gehn kann.

Alle drey Ausfagen sind für die Theorie des Kreises von Wichtigkeit, und besonders wird uns der Satz α , in Verbindung mit Lehrsatz 23 und 26 im zweyten Buch, gleich im Folgenden sehr nützlich seyn.

Fig. 56. *Folgerung 5. Jedes Perpendikel, welches auf dem Durchmesser eines Kreises aufsteht, und vom Durchmesser bis zur Kreislinie reicht, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken, welche es auf dem Durchmesser abschneidet, z. B. PM zwischen AP und PB, und das Quadrat über dem Perpendikel ist dem Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers gleich, $PM^2 = AP \times PB$; Ausfagen, die schon in unserm Lehrsatz und in Folgerung 1. β) liegen, und die auch unmittelbar daraus folgen, daß wenn man von dem Punkte M, wo das Perpendikel den Kreis durchschneidet, nach den Endpunkten des Durchmessers grade Linien MA, MB zieht, stets ein rechtwinkliges Dreyeck entsteht, worin der Durchmesser Hypotenufe, und MP ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf*

• 12. f. 2. die Hypotenufe ist *.

Die Quadrate zweyer solcher Perpendikel stehn also auch zu einander in demselben Verhältniß, wie die Rechtecke aus den Abschnitten, z. B. $PM^2:QN^2 = AP \times PB : AQ \times QB$; eine Eigenschaft, worin der Kreis, wie wir in der Folge sehn werden, mit den übrigen Kegelschnitten übereinstimmt, nur daß für diese das Quadrat jedes Perpendikels gröfser oder kleiner ist, als das Quadrat der beyden Abschnitte.

Durch Perpendikel welche man aus Punkten einer Linie auf eine grade Linie AB fällt, wird die Lage dieser Punkte, und mithin die Lage der ganzen Linie, gegen die grade Linie AB bestimmt *. Folglich dient *diese Eigenschaft der Perpendikel*, welche *I. 16. f. auf einem Durchmesser errichtet werden, *die Natur der Kreislinie in Beziehung auf ihren Durchmesser völlig zu bestimmen*, und wir können uns ihrer als *eines unterscheidenden Charakters der Kreislinie*, wodurch sie sich von allen andern Arten krummer Linien auszeichnet, bedienen, wie wir dieses besonders in dem Buche von den Kegelschnitten thun werden. — Bezeichnet man den Halbmesser der Kreislinie mit r , folglich den Durchmesser mit $2r$, jedes Perpendikel mit y , und den Abschnitt des Durchmessers vom Anfangspunkte desselben A an, bis zum Perpendikel mit x , folglich den zweyten Abschnitt mit $2r - x$, (da denn natürlich die Zeichen y und x keinen festen unveränderlichen Werth haben, sondern einen Werth, der für jedes Perpendikel anders ist); so ist dieser Eigenschaft des Kreises gemäß $y^2 = x \cdot (2r - x)$; und dieser Gleichung bedient man sich in der analytischen Geometrie als Charakter der Kreislinie, so wie umgekehrt mittelst der Natur des Kreises sich für jede solche Gleichung Linien darstellen lassen, welche zu einander das in der algebraischen Gleichung ausgedrückte Verhalten haben. Diese Linien darstellen, nennt man *eine Gleichung construiren*,

Zusatz I. *Jede Sehne AM ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser und dem an ihr lie-*

genden Stücke AP , welches durch ein Perpendikel aus dem einen Endpunkt der Sehne auf dem Durchmesser, der durch den andern Endpunkt geht, abgeschnitten wird. Denn ist AB dieser Durchmesser, und man zieht MB , so ist $\triangle AMB$ ein rechtwinkliges Dreyeck, worin AM , BM Katheten, folglich $AM^2 = AB \times AP$ und $BM^2 = AB \times BP$ *, diese Sehnen also die mittleren Proportionallinien zwischen dem Durchmesser AB und den Abschnitten AP , BP sind*. — In einem der folgenden Lehrsätze wird dieser fruchtbare Satz noch beträchtlich erweitert werden*. Hier einige Folgerungen daraus.

α) Setzt man mit der Proportion

$$AM^2 : BM^2 = AP : BP$$

V. 4. δ . die identische $AM : BM = AM : BM$ zusammen, so ergibt sich daraus

$$AM^3 : BM^3 = AM \times AP : BM \times BP.$$

Diese letztern Rechtecke verhalten sich folglich wie die dritten Potenzen aus den Zahlausdrücken der Sehnen AM , BM , oder stehn im dreymal so hohen Verhältniß*.

*V. 6. δ . Grade so ist $AM^2 : PM^2 = AB : PB$ * und mithin $AM^3 : PM^3 = AB \times AM : PB \times PM$. (Gregor. a. St. Vincentio III. 91. 92.)

Auch verhält sich $PM^2 : AB \times PM = AB \times PM : AB^2$ indem die erstern und die letztern Rechtecke von gleicher Höhe sind, und sich daher wie ihre Grundlinien $PM : AB$ verhalten. Nun ist $PM^2 = AP \times PB$ und $AB \times PM = AM \times BM$ *. Folglich ist auch $AP \times PB : AM$

; $AM \times BM = AM \times BM : AC^2$, oder das Rechteck aus den beyden Abschnitten, das Rechteck aus den beyden Sehnen, und das Quadrat des Durchmessers sind in stetigem Verhältniß (Greg. III. 81.)

β) Zieht man von einem Punkt der Kreislinie aus mehrere Sehnen, AM, AN, AR , so verhalten sich die Quadrate derselben untereinander und zum Quadrat des Durchmessers, wie die Abschnitte AP, AQ, AS unter einander und zum Durchmesser AD . Denn da $AM^2 = AB \times AP$, $AN^2 = AB \times AQ$, $AR^2 = AB \times AS$ ist, so verhält sich $AM^2 : AN^2 : AR^2 : AB^2 = AP : AQ : AS : AB$. Sind also z. B. die letztern Abschnitte stetig proportional, so sind es auch die Quadrate der Sehnen, und mithin die Sehnen selbst (Gregor III. 20).

Folglich verhalten sich auch hier, aus denselben Gründen wie in α , $AM^3 : AN^3 : AR^3 = AP \times AM : AQ \times AN : AR \times AS$, und auch diese Rechtecke stehn in dreymal so hohem Verhältniß als die Sehnen AM, AN, AR . (Gregor III. 92.)

γ) Berühren sich zwey Kreise im Punkte A , so sind Fig. 57. ihre Durchmesser Stücke derselbe graden Linie, die durch den Punkt A geht *.

*II. 16.
E. I.

Sind daher DF, GI etc. Perpendikel auf diesem Durchmesser, welche den einen Kreis in E, H etc. den andern in F, I etc. durchschneiden, so verhält sich sowohl $AE^2 : AH^2 = AD : AG$, als auch $AF^2 : AI^2 = AD : AG$, und mithin sind die Quadrate der Sehnen im einen Kreise, mit den Quadraten der beyden Sehnen des an-

dern Kreifes, und also diese Sehnen untereinander proportional, oder $AE : AH = AF : AI$. (Greg. III. 18.)

Auch verhalten sich die Quadrate je zwey solcher Sehnen aus den verschiednen Kreifen $AF^2 : AE^2 : AD^2$ wie die Durchmesser der Kreife $AB : AC : AD$, weil $AF^2 = AD \times AB$ und $AE^2 = AD \times AC$ ist. Ist daher AD die dritte Proportionallinie zu den beyden Durchmessern, so verhält sich auch $AF^2 : AE^2 = AE^2 : AD^2$ und $AF : AE = AE : AD$, daher dann auch AE die mittlere proportionallinie zwischen AD und AF ist. (Greg. III. 19.)

Fig. 58. *Zusatz II. Wenn sich mehrere Kreise im Punkte A berühren, und man zieht aus einem Punkte B ihrer gemeinschaftlichen Tangente grade Linien, welche diese Kreise durchschneiden, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche jeder der Kreise auf den durchschneidenden Linien abschneidet, von gleicher Größe, z. B. $BD \times BI = BE \times BH = BF \times BG$, oder $bf \times bg = bd \times be$. Denn jedes dieser Rechtecke ist dem Quadrat der berührenden Linie, AB^2 oder ab^2 , gleich *.* (Greg. III. 68.)

* 22. 2.

Beschreibt man daher um irgend einen Punkt B in der gemeinschaftlichen Tangente einen Kreis, der die sich berührenden Kreise in den Punkten F durchschneidet, und zieht durch diese Punkte F grade Linien, welche die Kreise zum zweyten male in Punkten G durchschneiden, so liegen alle diese Punkte G im Umfange eines mit dem erstern concentrischen Kreises. Denn die Rechtecke $BF \times BG$ und die Linien BF sind insgesammt gleich, folglich auch die Linien BG . (Greg. III. 56.)

Zufatz III. Ist die Sehne IG dem Halbmesser des Fig. 55. Kreises gleich, und man zieht durch den einen Endpunkte derselben einen Durchmesser, durch den andern eine Tangente, die sich beyde in o schneiden, so wird GCI ein gleichseitiges Dreyeck, aus dessen Spitze Go nach der verlängerten Grundlinie geht. Folglich muß $Go^2 = Co \times Io + CG^2$, und da zugleich $Go^2 = Ho \times Io$ ist*, * 21. $CG^2 = Ho \times Io - Co \times Io = HC \times Io$, folglich, da $HC = CG$ ist, auch $Io = CG$ feyn. Die Tangente durchschneidet also in diesem Fall den verlängerten Durchmesser so, das Io dem Halbmesser gleich, folglich $Co = HI$, und da sich die rechtwinkligen Dreyecke CGI, IGH decken, auch $Co = GH$ ist, daher $GI^2 = Io \times Ho = IG \times (IG + HI) = 3. CG^2$ wird. (Greg. III. 22.) * 22. 2.

Zufatz IV. α) Sind von einem Punkte O außerhalb eines Kreises zwey schneidende Linien OBA, OED so nach dem Kreise gezogen, das das Quadrat der einen Verlängerung EO, dem Rechteck aus der andern Sehne AB und ihrer Verlängerung BO gleich ist, so ist umgekehrt auch das Quadrat der zweyten Verlängerung BO dem Rechteck aus der erstern Sehne DE und ihrer Verlängerung EO gleich. Denn ist $EO^2 = AB \times BO$, so ist auch, wenn man beyderseits BO^2 hinzufügt, $EO^2 + BO^2 = AB \times BO + BO^2 = BO \times AO = EO \times DO$ * = $EO^2 + EO \times DE$, und mit- hin $BC^2 = EO \times DE$. Ist also EO eine mittlere Proportionallinie zwischen AB, BO, so ist umgekehrt auch BO eine mittlere Proportionallinie zwischen DE und EO. * 21. 2.

β) Sind dagegen die beyden Sehnen so gezogen, daß die Rechtecke aus den Sehnen, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen gleich sind, $AB \times DE = BO \times EO$ so sind diese Verlängerungen in verkehrter Ordnung genommen, zwischen den beyden Sehnen AB, DE zwey mittlere Proportionallinien*. Denn ist

$$\alpha) AB \times DE = BO \times EO, \text{ mithin } \frac{AB}{EO} = \frac{BO}{DE}, \text{ und}$$

man fügt $AB \times BO$ zu den gleichen Rechtecken hinzu, so wird $AB \times DO = AO \times EO$. Nun ist,

$$* 22. 2. \quad EO \times DO = AO \times BO *,$$

mithin, wenn man Gleiches durch Gleichem dividirt,

$$\frac{AB}{EO} = \frac{EO}{BO} = \frac{BO}{DE} \text{ vermöge } \alpha).$$

Betrachtet man also diese Brüche als Exponenten von Verhältnissen, so sind alle diese Verhältnisse gleich,

$$AB : EO = EO : BO = BO : DE *$$

* V. 2. und folglich sind die Verlängerungen EO, BO zwey mittlere Proportionallinien zwischen den Sehnen $AB,$

* V. 5. DE *.

Auch folgt aus jenen Gleichheiten, daß

$$\frac{AB^3}{EO^3} = \frac{AB}{EO} \times \frac{EO}{BO} \times \frac{BO}{DE} = \frac{AB}{DE} \text{ ist, daß mithin sich}$$

verhält $AB : DE = AB^3 : EO^3$.

Anmerkung. Wäre es also nur möglich zwey gegebne grade Linien AB, DC so in einen Kreis als Sehnen zu legen, daß die Rechtecke aus denselben, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen bis zu ihrem Durchschnittspunkte gleich wären; so hätte man die Aufgabe, zu zwey gegebenen Linien AB, DE zwey

mittlere Proportionallinien zu finden, und zugleich auch das berühmte Delische Problem von der Verdopplung des Kubus aufgelöst. Denn man fände auf diese Art eine grade Linie EO, deren Kubus zum Kubus von AB des Verhältnißs zwey beliebiger Linien DE : AB hätte, indem wir in der Streometrie sehn werden, daß die Würfel zweyer Linien sich wie die dritten Potenzen der Zahlausdrücke dieser Linien verhalten, grade so wie die Quadrate im Verhältniß der zweyten Potenzen dieser Zahlausdrücke stehn. Auf jene Aufgabe hat *Vieta* (*Opera* p. 242) dieses berühmte Problem zurückgeführt, doch auf einen langwierigeren und weniger eleganten Wege, als es hier geschehn ist.

Allein zwey grade Linien auf die geforderte Art einem Kreis einzuschreiben, ist eine Forderung, welche die Kräfte der Elementargeometrie übersteigt. Dieses läßt sich nicht durch grade Linie und Kreis allein, sondern nur durch Hülfe der Kegelschnitte oder anderer Curven wissenschaftlich bewerkstelligen, und zwar aus ähnlichen Gründen, aus denen wir die Unmöglichkeit auf diesem Wege einen Bogen oder Winkel in drey gleiche Theile zu theilen deducirt haben *. *Mechanische Verfahren und Instrumente* dieses zu bewerkstelligen, lassen sich indes mehrere erdenken.

* II. 30.
a. 2.

Noch einige andre Wege, dieses Problem aufzulösen, findet man in den Bemerkungen zu diesem Werke.

Zusatz V. α) Ist in einem Dreyeck ABC, aus der Spitze nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, die grade Linie AG gezogen, und man nimmt in einem der Schenkel, z. B. in AB, einen Punkt E so, daß sich verhält $BE : AE = BG \times CG : AG^2$, und zieht GE; so ist allemal der Winkel AGE, gleich dem Winkel ACG des gegebenen Dreyecks. Denn zieht man durch B eine Parallellinie mit EG, welche die verlängerte Linie AG im Punkte F durchschneidet, so theilen die beyden Parallellinien

- * 7. EG, BF die Schenkel des Winkels A proportional *,
 * 3. f. 2. so dafs sich verhält $BE : AE = FG : AG = FG \times AG : AG^2$ *.
 Die Verhältnisse der Rechtecke, $BG \times CG : AG^2$ und
 $FG \times AG : AG^2$ sind also demselben Verhältniß, $BE : AE$,
 mithin untereinander gleich, daher auch die Rechtecke
 * V. 2. $BG \times CG$ und $FG \times AG$ gleich seyn müssen *. Da über-
 dem BC und AF grade Linien sind, die sich im Punkte
 G schneiden, so liegen die vier Punkte A, B, F, G in
 *(f. 4.) einer Kreislinie *, und da in dieser die Winkel F und
 *II23Z1 C über derselben Sehne AB stehn, so sind sie gleich *,
 *I.25 ax. also $\angle F = AGE = C$.

β) Ist Ag nach einem Punkt in der verlängerten
 Grundlinie gezogen, und man nimmt auf der Verlänge-
 rung des Schenkels AB einem Punkt e so, dafs sich verhält
 $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$, und zieht ge, so ist, je nachdem
 e auf der Verlängerung über A oder über B hinaus liegt,
 der Winkel Age dem Winkel ACg, oder dessen Nebenwinkel
 ACB gleich. Denn vermöge derselben Gründe sind,
 wenn man die vorige Construction wiederholt, die
 Rechtecke $Bg \times Cg$ und $Ag \times fg$ gleich, mithin A, B,
 C, f Punkte in einer Kreislinie, nur dafs die Winkel
 ACB und $f = Age$ im ersten Fall einander gegenüber,
 im zweyten hingegen auf derselben Sehne AB stehn,
 und daher f im ersten Fall dem Nebenwinkel von
 * II. 27. ACB *, d. h. ACg, im zweyten aber dem Winkel ACB
 selbst gleich ist. Diese Lage des Punktes e richtet
 sich aber danach, ob das Rechteck $Bg \times Cg$ grösser oder
 kleiner als Ag^2 ist. Im ersten Fall muß der Punkt e in
 der Verlängerung über A, im zweyten in der Verlän-
 gerung über B hinaus liegen.

7) Durch die umgekehrte Schlussfolge erhellt auch der umgekehrte Satz, daß falls man GE oder ge so zieht, daß der Winkel $AGE = ACG$ oder $\angle Age$ im ersten Fall $= ACg$, im zweyten $= ACB$ ist, sich allemal verhält $BE : AE = BG \times CG : AG^2$ oder $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$.

Diese Ausfagen, eigentlich Zusätze zu Lehrsatz 20, sind in Simsons Wiederherstellung von Apollonius ebenen Oertern, de zweyten Buchs drittes Lemma.

[LEHRSATZ 23.]

Wenn zwey Sehnen sich unter rechten Winkeln Fig. 60. durchschneiden, so sind stets die Quadrate aus den vier Abschnitten zusammengenommen dem Quadrat des Durchmessers gleich.

Durchschneiden sich beyde Sehnen im Mittelpunkte, so sind sie Durchmesser, mithin die vier Abschnitte Halbmesser. Durchschneiden sie sich rechtwinklig in einem Punkte des Umfangs, so bilden sie einen Winkel der auf einem Halbkreise steht*, und folglich mit dem Durchmesser als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreyeck*. In diesen beyden Fällen liegt die Wahrheit des Satzes aus Lehrsatz 4. Zusatz 3. und durch den Pythagoreischen Lehrsatz* am Tage. * 12.

Durchschneiden sich hingegen die beyden Sehnen AB , DE rechtwinklig in einem Punkte F , der entweder innerhalb oder aufserhalb des Kreises liegt, so verbinde man ihre Endpunkte durch grade Linien AE , DB , und ziehe durch einen derselben einen Durchmesser DCG .

Im *ersten Fall*, wenn F im Kreise liegt, hat der Winkel DFB zu seinem Maafse die halbe Summe der

* II. 24. Bogen DB, AE *, welche seine Schenkel umspannen. Da er nun als ein rechter Winkel den vierten Theil der Kreislinie zu seinem Maafse hat, so müssen die Bogen DB + AE dem Halbkreise, folglich dem Bogen DB + BG gleich seyn. Mithin sind die Bogen AE und BG, also auch ihre Sehnen, untereinander gleich. Ueberdem ist, wenn man BG zieht, DBG ein Dreyeck im Halbkreise, folglich rechtwinklig. Es ist also vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes in den drey rechtwinkligen Dreyecken AFE, DFB, DBG, erstens $BG^2 = AE^2 = AF^2 + FE^2$, zweytens $DB^2 = DF^2 + FB^2$, und drittens $DG^2 = BG^2 + DB^2$, folglich $DG^2 = AF^2 + FE^2 + DF^2 + FB^2$. (Greg. III. 77)

Im *zweyten Fall*, wenn F *aufserhalb* des Kreises liegt, hat der Rechte Winkel F zu seinem Maafse den halben Unterschied der beyden Bogen BMD — AE, die seine Schenkel umspannen *, daher der Unterschied dieser Bogen dem Halbkreise BMD — BG, mithin AE = BG seyn muß. Alles übrige ist wie im vorigen Fall. Auch hier haben wir wieder drey rechtwinklige Dreyecke AFE, BFD, GBD, und aus der Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes auf sie, folgt eben so wie vorhin,

$$DG^2 = AF^2 + BF^2 + DF^2 + EF^2;$$

so daß also in allen Fällen die Quadrate der abge schnittenen Stücke zusammengenommen dem Quadrat des Durchmessers gleich sind.

Zufatz I. Zieht man, falls beyde Sehnen sich in Kreise rechtwinklig durchschneiden, noch AD und EB, so sind in dem Viereck ABED die Quadrate von je zwey der gegenüberstehenden Seiten zusammengenommen untereinander, und mit dem Quadrat des Durchmessers von gleicher Gröfse, $AD^2 + EB^2 = AE^2 + DB^2 = DC^2$, indem sie vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes den Quadraten aus den vier Abschnitten der Sehnen, die sich in F rechtwinklig durchschneiden, gleich sind. Der Inhalt des Vierecks AEBD ist gleich $\frac{1}{2} AB \times DE$ *, oder wie wir im folgenden Buche sehn werden, vermöge des Ptolemäischen Lehrsatzes gleich $\frac{1}{2} AD \times EB + \frac{1}{2} AE \times BD$. (Greg. III. 75. 76.) — Liegt der Durchschnittspunkt F ausserhalb des Kreises, so durchschneiden sich zwar die Linien AD, BE, und bilden mit AE, BD kein Viereck, aber dem ungeachtet gilt auch von ihren Quadraten dieser Zufatz. * 5.

Zufatz II. Eine Sehne FG, welche mehrere parallele Sehnen DE rechtwinklig in den Punkten H, und den mit ihnen parallelen Durchmesser AB im Punkte K durchschneidet, theilt jede derselben so ein, daß $DH \times HE + HK^2$ stets von einerley Gröfse, und zwar dem Rechteck $AK \times KB$ gleich ist. Denn da der Durchmesser AB die Sehne FG, die auf ihn senkrecht steht, im Punkte K halbirt *, * II. 9. und diese von jeder der parallelen Sehnen in einem Punkte H ungleich getheilt wird; so ist stets $GH \times HF = KF^2 - KH^2$ *, und zugleich $GH \times HF = DH \times HE$ *, * II. 9. so wie $KF^2 = AK \times KB$ *, folglich $DH \times HE = AK \times KB - KH^2$ und $DH \times HE + KH^2 = AK \times KB$. (Greg. III. 72.) * II. 9. * 22. 1. (f. 5.)

[LEHRSATZ 24.]

Fig. 62.

Wenn man auf dem Durchmesser AB eines Kreises, oder auf dessen Verlängerung, in einem willkürlichen Punkte D oder d ein Perpendikel errichtet, und zieht von dem einen Endpunkte des Durchmessers z. B. von A aus, grade Linien, welche die Kreislinie in Punkten F , das Perpendikel in Punkten G oder g durchschneiden, so sind die Rechtecke aus je zwey Abschnitten AF und AG gleich dem Rechtecke aus dem Durchmesser AB und dem Abschnitt AD desselben, der am Punkte A anliegt, und jene Rechtecke sind insgesamt untereinander gleich.

Man ziehe FB , so ist der Winkel AFB ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter, und so auch sein Nebenwinkel BFG . Ueberdem sind die Winkel bey D und d , der Voraussetzung gemäß rechte.

Für Perpendikel welche auf dem Durchmesser selbst, oder auf dessen Verlängerung über B hinaus aufstehn, sind daher die beyden Winkel D und F oder d und F , zusammengenommen zwey rechten gleich, daher sich um das Viereck $BDGF$ oder $BdgF$ ein Kreis beschreiben läßt *, worin FG , BD oder gF , dB Sehnen sind, die sich verlängert im Punkte A durchschneiden, daher stets $AF \times AG = AB \times AD$, so wie $AF \times Ag = AB \times Ad$ ist *.

Für Perpendikel, welche auf der Verlängerung des Durchmessers über A hinaus errichtet sind, stehn die Schenkel der rechten Winkel bey F' und d' über derselben Grundlinie Bg' , daher auch in diesem Fall B ,

F', d', g' Punkte in einer Kreislinie *, und F'g', Bd' * II. 26, Sehnen sind, die sich jetzt aber innerhalb des Kreises im Punkte A durchschneiden, so dafs auch für diesen Fall stets $AF' \times Ag' = AB \times Ad'$ ist.

Für ein Perpendikel, welches im Endpunkte des Durchmessers B aufsteht, und daher zugleich eine Tangente des Kreises ist, ist $A\gamma \times \gamma F = \gamma B^2$ *, überdem $A\gamma^2$ * 22. 2, $= \gamma B^2 + AB^2$, folglich auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $A\gamma \times AF = AB^2$ *.

Wo also auch auf dem Durchmesser oder auf dessen Verlängerung, das Perpendikel aufstehe, und wie man auch aus dem Punkte A grade Linien nach dem Kreise und dem Perpendikel gezogen haben möge, immer ist das Rechteck aus den beyden Abschnitten einer solchen Linie AF, oder Ag, oder F'g, dem Rechteck $AB \times AD$, oder $AB \times Ad$ etc. gleich, daher auch bey demselben Kreise und für dasselbe Perpendikel (für die AB und AD von gegebenner und unveränderlicher Gröfse sind) jene Rechtecke $AF \times AG$ etc. insgesamt unter einander gleich seyn müssen.

Folgerung I. Steht das Perpendikel auf dem Durchmesser selbst auf, so durchschneidet es die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und dann ist $AE^2 = AB \times AD$ *. Mithin ist in diesem Fall jedes der Rechtecke $AF \times AG = AE^2$, und folglich die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen je zwey Abschnitten AF und AG; welches eine artige Verallgemeinerung der Aussage in Lehrsatz 22 Zusatz I ist. Wenn man folglich durch den einen Endpunkt irgend einer Sehne AE eines

Durchmesser, und durch den andern ein Perpendikel auf diesem Durchmesser zieht, so ist die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen jeder andern Sehne, die durch den Punkt A geht, und dem an A anliegenden Stück derselben, das durch den Perpendikel abgeschnitten wird. (Hugenii Horol. Oscillat. p. 49. Edit. 1673.)

Fig. 63. α) Beschreibt man mit AE um A einen Kreis, welcher die Linien AF in Punkten H durchschneidet; so sind folglich auf ihnen allen von A aus drey stetig proportionale Stücke AG, AH, AF abgeschnitten, da $AE^2 = AH^2 = AG \times AF$ ist. (Greg. III. 39.)

Fig. 62. β) Zieht man FE, so entsteht ein Dreyeck FEG, aus dessen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, eine grade Linie EA so gezogen ist, daß $EA^2 = GA \times FA$ ist. Folglich verhält sich stets $GE^2 : FE^2 = GA$
20. Z. 5 : FA.

Folgerung 2. Verlängert man eine Sehne AF, bis sie in γ die Tangente durchschneidet, welche den Kreis im entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers durch A berührt; so ist *allemal der Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Sehne AF und der verlängerten Sehne Ag*, weil nach unserm Beweise $AF \times A\gamma = AB^2$ ist. Fällt man von F auf diesen Durchmesser das Perpendikel F δ , so ist überdem $AF^2 =$
*22. Z. 1. $AB \times A\delta$ *, und es verhält sich daher $A\delta : AF = AF : AB = AB : A\gamma$, oder AF und AB sind zwey mittlere Proportionallinien zwischen A δ und A γ ; ein Satz worauf sich mechanische Vorrichtungen gründen lassen, um zu zwey

gegebenen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden *. (Greg. III. 17.)

*22.Z41

Folgerung 3. Wenn man durch einen gegebenen Punkt *A* willkührlich grade Linien zieht, und auf diesen zwey Punkte *F* und *G* so nimmt, das ein Rechteck aus den Abschnitten *AF*, *AG* stets einerley Flächenraum, z. B. dem gegebenen Raume *S* gleich ist; so muss 1) falls der geometrische Ort des einen dieser Punkte *G* eine grade Linie *EE'* von gegebner Lage ist, der geometrische Ort des zweyten Punktes *F* eine Kreislinie von gegebner Größe und Lage seyn: und 2) falls umgekehrt der Ort des Punktes *F* eine gegebne Kreislinie ist, die durch den gegebenen Punkt *A* geht, der geometrische Ort des zweyten Punktes *G* eine grade Linie von gegebner Lage seyn. Man fälle nemlich in Fall I von *A* auf die gegebne Linie *EE'* ein Perpendikel *AD*, verwandle den gegebenen Raum *S* in ein Rechteck über *AD*, und nehme auf *AD* oder dessen Verlängerung, *AB* gleich der Höhe dieses Rechtecks, so das $AD \times AB = S$ wird, und beschreibe dann um *AB* als Durchmesser eine Kreislinie; so, behaupte ich, ist diese der geometrische Ort der Endpunkte *F*. Denn erstens wird diese Kreislinie von jeder Linie die durch den Punkt *A* geht, die einzige Tangente *AK* ausgenommen, in *A* und einem zweyten Punkte *F* durchschnitten*; die Tangente aber *III. 12. steht auf dem Durchmesser *AB* senkrecht*, läuft folglich mit der gegebenen Linie *EE'* parallel*, und jede andre Linie durch *A* durchschneidet nothwendig auch *EE'* in irgend einem Punkte *G*, weil sonst durch einen Punkt *A* mit einer gegebenen Linie *EE'* verschiedne *II. 12. * I. 21.

*124.Z₂ Parallellinien möglich wären *. Zweytens ist für jede durchschneidende Linie nach unserm Lehratz $AF \times AG = AD \times AB = S$ weshalb alle Punkte F der so beschriebnen Kreislinie die verlangte Eigenschaft haben, aber kein Punkt aufserhalb derselben. — Verwandelt man umgekehrt *in Fall 2* den gegebenen Raum S in ein Rechteck über dem Durchmesser AB, nimmt AD der Höhe dieses Rechtecks gleich, und errichtet durch D auf AB ein Perpendikel EE'; so ist dieses der Ort der Punkte G, grade aus denselben Gründen. In diesem Fall darf man jedoch die Bestimmung nicht übersehn, *dass der gegebne Punkt A in der gegebenen Kreislinie liegen soll*. Denn ist dieses nicht der Fall, und liegt er innerhalb des Kreises, so werden wir in der Folge sehn, dass der Ort der Punkte G keine grade Linie, sondern gleichfalls eine Kreislinie ist*.

Cf. 24f. I
Anm.

Dieser interessante Satz wird in *Apollonius ebenen Oeetern* I. 8 und 9 Fall 1. folgendermassen ausgedrückt: „Wenn aus einem gegebenen Punkte A, auf einer graden Linie zwey Stücke AF, AG abge schnitten werden, welche ein gegebenes Rechteck enthalten, und der Endpunkt des einen Stücks G eine der Lage nach gegebne grade Linie EE' *berührt*, so *berührt* der Endpunkte F des andern Stücks einen der Lage nach gegebenen Umkreis“; ein Ausdruck der keine Nachahmung verdient. Die Analysis bey Simson in Fall 1 läuft darauf hinaus, dass wenn G ein Punkt in der gegebenen Linie EE' ist, und es soll $AF \times AG = S = AD \times AB$ seyn, F, G, D, B Punkte in einer Kreislinie*, folglich wenn man FB zieht, die Winkel bey F und D gleich, und da D ein rechter ist, auch bey F stets rechte Winkel seyn müssen. Jeder solcher Winkel steht aber auf der gegebenen Linie AB; folglich ist der Ort der Punkte F eine Kreislinie über AB als Durch-

*22. f. 4

messer beschrieben *. Die Analysis in Fall 2 liegt am Tage. — *II. 26.
 Mehrere analoge Sätze, findet man im nächsten Buche. f. 2.

Zusatz I. α) Nimmt man dagegen auf jeder ^{Fig. 64.} Sehne AF , die aus einem gegebenen Punkte A im Umfange eines gegebenen Kreises gezogen wird, einen Punkt G so, daß das Rechteck aus den beyden Abschnitten einem gegebenen unveränderlichen Raum gleich ist, $AG \times GF = S$; so ist der geometrische Ort der Punkte G , eine Kreislinie, welche mit der gegebenen concentrisch ist. Denn ist G ein Punkt von der bedungenen Beschaffenheit, und man zieht durch ihn einen Durchmesser HI , so ist erstens $AG \times GF = HG \times GI$ *, und zweytens, * 22. 1., weil der Durchmesser in C gleich und in G ungleich getheilt ist, $HG \times GI = CI^2 - CG^2$ *. Mithin muß *II. f. 12. $AG \times GF = S = CI^2 - CG^2$ oder $CG^2 = CI^2 - S$ seyn. Nun aber ist der Kreis, also auch das Quadrat über dessen Halbmesser, CI^2 , mithin auch CG gegeben und unveränderlich, und daher der Ort der Punkte G eine Kreislinie, die mit der Seite eines Quadrats $= CI^2 - S$ als Halbmesser, um den Mittelpunkt C beschrieben wird. Der Ort ist unmöglich, wenn $S < CI^2$ ist; da in der That jedes Rechteck aus den beyden Abschnitten einer Sehne kleiner als das Quadrat des Halbmessers seyn muß *.

*II. Z. 1.

β) Nimmt man auf den Verlängerungen der Sehnen AF , welche aus dem Punkte A in einer gegebenen Kreislinie gezogen sind, Punkte g so, daß die Rechtecke $Ag \times gF = S$ sind, und zieht von g durch den Mittelpunkt gH' ; so ist erstens $Ag \times gF = H'g \times gI' = S$, * 22. 2.

*II. f. 1 zweyten $H'g \times gI = Cg^2 - CI'^2$ *, folglich $Cg^2 = S + CI'^2$, also wiederum *der Ort der Punkte g eine mit der gegebenen concentrische Kreislinie*, deren Halbmesser in diesem Fall die Seite eines Quadrats $S + CI'^2$ ist, und die also den gegebenen Kreis einschließt.

Diese brauchbaren Oerter, werden bey Apollonius nicht ausdrücklich aufgeführt. Man sieht leicht, daß der letztere Ort auch für den Fall gilt, wenn g auf der Verlängerung der Sehne über A hinaus liegt, und $Ag' \times g'F = S$ ist.

Zu Satz II. α) Da für jedes Perpendikel auf dem Durchmesser AB oder auf dessen Verlängerung, erstens * 12. nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $AG^2 = AD^2 + GD^2$ *, oder $AG \times AG = AD \times AD + GD^2$ und zweyten nach unserm jetzigen Lehrsatze $AG \times AF = AD \times AB$ ist; so muß, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, auch, *falls G im Kreise liegt*, also $AF > AG$ ist, $AG \times GF = AD \times DB + GD^2$ seyn, *falls hingegen g außershalb des Kreises liegt*, also $AF < Ag$ ist, $Ag \times gF = ga^2 \pm Ad \times dB$, wo das obere Zeichen gilt, wenn d außershalb des Kreises liegt, das *untere*, wenn d noch im Kreise fällt, indem in diesem letztern Fall Ad^2 um das Rechteck $Ad \times dB$ kleiner als $Ad \times AB$, folglich dieses Rechteck noch von gd^2 abzuziehn ist.

β) Auf eine ähnliche Art ist im rechtwinkligen Dreyeck AFB, $AF^2 = AB^2 - FB^2$ oder $AF \times AF = AB \times AB - FB^2$ folglich $AF \times FG = AB \times BD - FB^2$, und $AF \times Fg = FB^2 \pm AB \times dB$, wo wieder das *obere* oder *untere*

untre Zeichen gilt, je nachdem d *aufserhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt.

γ) Zieht man daher von irgend *einem Punkte g* *aufserhalb des Kreises* ein Perpendikel gd nach einem beliebigen Durchmesser AB oder nach dessen Verlängerung, und zugleich irgend eine den Kreis in H und I durchschneidende Linie; so ist immer, *falls* das Perpendikel gd auf dem Durchmesser selbst aufsteht, also d im Kreise liegt, $gd^2 - Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$ *, *falls* hingegen das Perpendikel gd auf der Verlängerung des Durchmessers aufsteht, $gd^2 + Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$. (Greg. III. 87.) — Ist G ein Punkt im Kreise, so ist $AD \times DB - GD^2 = AG \times GF = Hg \times gI$. (Apollonius ebne Oerter II. 8. 9. Zuf.)

[LEHRSATZ 25.]

Wenn man durch einen beliebigen Punkt M einer Fig. 6a. Sehne AH, oder durch irgend einen Punkt m in deren Verlängerung, eine grade Linie MD oder md parallel mit der Tangente AK, welche durch den einen Endpunkt A dieser Sehne geht, zieht, so werden auf jeder andern graden Linie, welche durch den Punkt A geht, und daher den Kreis in einem zweyten Punkte F, die Linie MD oder md hingegen in Punkten G oder g durchschneidet *, zwey Stücke AF und AG *24.f.3. oder Ag so abgeschnitten, daß die Rechtecke AF × AG insgesamt dem Rechteck AH × AM, und daher auch untereinander gleich sind.

Denn ist AB der Durchmesser, der durch den Endpunkt A der gegebenen Sehne AH geht, so steht die Tangente AK, und also auch jede der Linien MD und md, welche mit ihr parallel laufen, auf dem Durchmesser AB, oder dessen Verlängerung senkrecht *. Die

* II. 12. graden Linien, welche durch den Punkt A gezogen werden, durchschneiden folglich ein solches Perpendikel MD, wo es auch auf dem Durchmesser, oder dessen Verlängerung aufsteht, und durch welchen Punkt der Sehne A oder deren Verlängerung es folglich geht, stets so, daß die Rechteck AF \times AG insgesammt untereinander, also auch insgesammt dem Rechteck AH \times

* 24. AM gleich sind*, so wie die Rechtecke AF \times Ag alle untereinander und mit dem Rechteck AH \times Am gleiche Größe haben.

Diese Verallgemeinerung des vorigen Lehrsatzes, läßt sich auch leicht durch eine ähnliche Schlusfolge, wie jener, oder aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke beweisen. Da der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne macht, die durch den Berührungspunkt geht, den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten, z. B. KAm' den Winkeln im Abschnitt AEH, und KAH den Winkeln im Abschnitt ABH, gleich ist; so läßt sich die Lage der Linien MD auch dadurch bestimmen, daß sie die Sehne unter Winkeln durchschneiden, welche den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten gleich sind, und so drückt Greg. a St. Vinc. III. 73 diesen Satz aus.

Folgerung. I. Werden von einem gegebenen Punkte A aus, willkürlich grade Linien gezogen, und auf jeder derselben von diesem Punkte an zwey Abschnitte AF und AG, so genommen, daß, (wenn man von den Punkten G mit ei-

ner gegebenen Linie Q Parallellinien zieht, und diese eine der Grösse und Lage nach gegebne grade Linie AH entweder selbst, oder deren Verlängerung über H hinaus, in Punkten M durchschneiden,) immer das Rechteck $AF \times AG = AH \times AM$ ist; so ist der geometrische Ort der Punkte F , eine der Lage und Grösse nach gegebne Kreislinie.

Denn zieht man durch den gegebenen Punkt A , parallel mit der gegebenen Linie Q , die Linie Kk , und beschreibt zu dieser Linie als Tangente und über AH als Sehne einen Kreis; so hat, unserm Lehrsatz zu Folge, diese Kreislinie die Eigenschaft, das wenn man aus A irgend eine Sehne AF , und aus irgend einem Punkte G auf ihr, oder auf ihrer Verlängerung, parallel mit der Tangente die Linie GM zieht, $AF \times AG = AH \times AM$ ist. Folglich thut jeder Punkt F dieser Kreislinie unsrer Bedingung genüge. Hingegen kein Punkt P , der nicht in ihr, und doch mit ihr zu einerley Seite der Tangente Kk liegt, weil sonst sowohl $AG \times AP$ als auch $AG \times AF$ gleich $AM \times AH$, und doch AP gröfser oder kleiner als AF seyn müfste, welches unmöglich ist.

Verlängert man AH über A hinaus, auf die entgegengesetzte Seite der Tangente Kk , nimmt AH' gleich AH , und auch hier auf die durch A gezogenen Linien zwey Abschnitte AF , AG so, das Parallellinien GM mit der Tangente Kk gezogen, auf AH' Linien AM' so abschneiden, das $AF \times AG = aH' \times AM'$ ist; so mus der Ort der Punkte F ebenfalls eine über AH' als Sehne zu Kk als Tangente beschriebne Kreislinie seyn; welche folglich mit der erstern gleich ist, sich mit ihr im Punkte

A berührt, und deren Mittelpunkt mit dem der erstern zu entgegengesetzten Seiten der Linie HH' liegt.

Deshalb ist es einerley ob die Abschnitte AF und AG auf einerley, oder zu verschiedner Seite des Punktes A genommen werden. Immer sind zwey gleiche im Punkte A sich berührende Kreislinien, von der erwähnten Beschaffenheit, der Ort Punkte F . Auf dieselbe Art gilt der Ort in Lehrsatz 24 Folg. 3 auch für den Fall, wenn AF und AG Abschnitte einer graden Linie sind, die zu entgegengesetzten Seiten des Punktes A liegen.

Uebrigens bleibt der Ort der Punkte G unter unfrer gegenwärtigen Voraussetzung gänzlich unbestimmt, da G jeden Punkt in jeder Sehne AF bedeutet. Kömmt aber eine zweyte Bedingung hinzu, so wird dadurch auch der Ort der Punkte G bestimmt. Noch einen andern Beweis für die Aussage in dieser Folgerung findet man in Zusatz. 1.

Folgerung. 2. Durchschneidet die Linie MD die Kreislinie in irgend einem Punkte E , und man zieht AE , so fallen die Punkte F und G beyde in E zusammen, und es ist $AE^2 = AM \times AH$. — Zieht man durch H eine Parallellinie mit der Tangente AK , so fallen die Punkte M und H zusammen, und es ist $AF \times A\gamma = AH^2$. Man findet also zu zwey gegebenen Sehnen AH , AE , oder AF , AH , die von demselben Punkte A ausgezogen sind, die dritte Proportionallinie AM oder $A\gamma$, wenn man durch den zweyten Endpunkt der Sehne, welche die mittlere Proportionallinie seyn soll, eine Parallellinie mit der Tangente durch den Punkt A zieht.

Fig. 65. *Folgerung 3.* Zieht man von den beyden Endpunkten einer Sehne AH nach irgend einem Punkte im

Kreise grade Linien AE, HE, und parallel mit den Tangenten durch die Endpunkte der Sehne die Linien EM, EN, so ist also $AE^2 = AH \times AM$ und $HE^2 = AH \times HN$. Daraus folgt

α) das sich verhält $AE^2 : HE^2 = AM : HN$ und, wenn man diese gleichen Verhältnisse beyde mit dem * v. 6. Verhältniß $AE : HE$ zusammensetzt *, $AE^3 : HE^3 = AM \times AE : HN \times HE$. Diese Rechtecke stehn also im dreyfachen Verhältnisse der Sehnen AE, HE; eine Aussage, denen in Lehrsatz 22, Zusatz I analog. (Greg. III. 93.)

β) Da im Dreyeck HEM aus der Spitze E nach der verlängerten Grundlinie eine grade Linie EA geht, deren Quadrat gleich ist dem Rechteck aus den Abschnitten HA, MA auf der verlängerten Grundlinie, $AE^2 = HA \times MA$; so müssen sich die Quadrate über den Schenkeln dieses Dreyecks, wie die Abschnitte verhalten, oder $HE^2 : ME^2 = HA : MA$ *, und aus den^{v. 20, Z. 5.} selben Gründen $AE^2 : NE^2 = AH : NH$. Folglich verhält sich auch *erstens* $HE^2 : ME^2 = HA \times LN : MA \times HN$ *. Nun aber ist dem obigen zu Folge $HE^2 =$ ^{• 3. f. r.} $HA \times HN$, also muß auch $ME^2 = MA \times HN$ seyn *, ^{• v. 6.} und aus ähnlichen Gründen $NE^2 = NH \times AM$, mithin $ME^2 = NE^2$. Die beyden mit den Tangenten parallel gezogenen Linien EM, EN sind also stets von gleicher Länge, und schneiden von der Sehne zwey Stücke AM, HN so ab, *dass* $ME^2 = NE^2 = AM \times HN$ ist, (ein Satz den Clairaut als zwölfjähriger Knabe gefunden haben soll; Krafft Instit. geom. subl. §. 105.)

γ) Ist *zweytens*, zu Folge der ersten Proportion in β, $HE^2 : ME^2 = HA : MA$; so verhält sich auch

* 3. f. 1. $HE^2 : ME^2 = HA^2 : HA \times MA$ * oder, da Folgerung 2 gemäß $HA \times MA = AE^2$ ist, $HE^2 : ME^2 = HA^2 : AE^2$.

Folglich sind auch die Seiten dieser Quadrate proportional $HE : ME = HA : AE$ *, und mithin ist $AE \times HE = AH \times EM$. Folglich *muß in jedem Dreyeck, welches einem Kreise eingeschrieben ist, wenn man von der Spitze nach der Grundlinie eine Parallellinie EM mit einer der Tangenten durch die Endpunkte der Grundlinie zieht, das Rechteck aus den beyden Schenkeln AE, HE gleich seyn dem Rechteck aus der Grundlinie AH in diese Parallellinie EM.* (Greg. III. 70.)

Fig. 66. δ) Zieht man hingegen in einem Dreyeck, welches dem Kreise eingeschrieben ist, aus der Spitze E, durch den Punkt O, der in der Mitte der Grundlinie AH liegt, eine

* 17. Sehne EOF, so ist $AE^2 + EH^2 = 2AO^2 + 2EO^2$ *, oder, da $AO^2 = AO \times OH = EO \times OF$ *, und $EO \times OF + EO^2 = EO \times EF$ ist, *stets* $AE^2 + EH^2 = 2EO \times EF$.

Fig. 67. Folgerung 4. Wenn eine grade Linie AH der Gröfse und Lage nach gegeben ist, und grade Linien MN, welche auf AH oder auf deren Verlängerung über H hinaus in Punkten M aufstehn, und mit einer gegebenen Linie parallel laufen, werden jede von einer aus dem Punkte A gezogenen graden Linie, so in einem Punkte E durchschnitten, das Quadrat über AE, dem Rechteck aus den Linien AH und AM gleich ist, $AE^2 = AH \times AM$; so ist der Ort der Durchschnittpunkte E stets eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse. Und zwar eine Kreislinie, die man findet, wenn man mit der gegebenen Linie Q, durch den gegebenen Punkt A eine Parallellinie

Kk zieht, und dann über der gegebenen Linie AH, als Sehne, einen Kreis beschreibt, den Kk im Punkte A berührt *. Denn nach Folgerung 2, hat jeder Punkt E in dieser Kreislinie die Eigenschaft, daß wenn man AE, und parallel mit der Tangente durch A, EM zieht, $AE^2 = AH \times AM$ ist: und kein Punkt F, der nicht in der Kreislinie liegt, kann diese Eigenschaft haben, weil sonst entweder eine grade Linie den Kreis in drey Punkten E, F, E durchschneiden, oder es eine Sehne geben müßte, die größer als der Durchmesser wäre. *II. Afig. 16. 2.

Nimmt man auch auf der Verlängerung der gegebenen Linie AH über A hinaus solche Parallellinien, so wird für diese der Ort der Durchschnittspunkte E' eine der vorigen gleiche Kreislinie, welche jene im Punkte A so berührt, daß die Mittelpunkte und die gleichen Abschnitte zu entgegengesetzten Seiten der verlängerten Linie AH liegen.

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 1. Simfons Analysis führt dort den Beweis dieses Orts noch auf andre Sätze zurück. Ge- setzt nemlich E' sey ein solcher Punkt, für welchen $AE'^2 = AH' \times AM'$ ist, so muß, wenn man durch die drey Punkte E', H', M' einen Kreis beschreibt, AE' diesen Kreis im Punkte E' berühren *; folglich, wenn man E'H' zieht, der Winkel AE'H', dem Winkel AM'E', gleich seyn *. Nun sind für alle Parallellinien M'E', die außern Winkel AM'E' zu einerley Seite der Linie AH', von gleicher gegebner Gröfse, nemlich gleich KAH oder kAH, mithin auch der Winkel AE'H' von gegebner, unveränderlicher Gröfse. Jeder der Durchschnittspunkte E' ist also die Spitze eines Dreyecks AE'H' welches über der gegebenen, unveränderlichen Grundlinie AH' steht, und dessen Winkel an der Spitze E', gleichfalls von gegebner Gröfse ist, liegt mithin *22f. 3. α
*22f. 3. β

im Bogen, *entweder* des Kreisabchnitts über AH' , welcher den gegebenen Winkel KAH faßt, oder des *Kreisabchnitts* unter AH' der den Nebenwinkel KAH faßt, mithin in einem *Kreise*, den man findet, wenn man über AH als Sehne und zu Kk als Tangente, einen Kreis beschreibt.

Fig. 68. *Zu f a t z I. Bleibt alles, wie im vorigen Fall, nur mit dem Unterschied, daß die Linien aus dem Punkte A gezogen, die parallelen Linien MN so in Punkten E durchschneiden, daß entweder 1) das Quadrat über AE um einen gegebenen Raum S größer oder kleiner als das Rechteck aus den Abschnitten AH, AM ist, $AE^2 = AH \times AM \pm S$; oder daß 2) $AE^2 = S - AH \times AM$ ist; so ist ebenfalls der geometrische Ort der Durchschnittpunkte E, eine Kreislinie von gegebener Größe und Lage.*

1) Gesetzt es sind ME und AE zwey Linien, von der Beschaffenheit, daß $AE^2 = AH \times AM \pm S$ ist; so muß für den Fall des obern Zeichens AE^2 größer, im Fall des untern kleiner als das Rechteck $AH \times AM$ seyn, und daher muß es in jenem Fall auf AE selbst, in diesem auf der Verlängerung von AE über E hinaus, einen Punkt von der Beschaffenheit geben, daß das Rechteck $AE \times AD = AH \times AM$ ist; und zugleich muß in beyden Fällen $AE \times ED = S$ seyn. Dann liegen aber *erstens* die vier Punkte E, D, H, M auf derselben Kreis-

*22. f. 4. *linie* *, und zieht man DH, so sind die Winkel ADH und AME von gleicher Größe, weil entweder die Nebenwinkel von beyden, Winkel am Umfange sind, die

* II, 23. *auf demselben Bogen stehn* *, oder weil der Nebenwinkel von ADH dem Winkel AME, in einem Vierecke, welches dem Kreise eingeschrieben ist, gegenübersteht,

oder umgekehrt*. Nun ist der Voraussetzung gemäß * II. 27. ME der gegebenen Linie AK parallel, also der Winkel AME immer von einerley Gröfse; folglich auch ADH; und da' überdem AH von gegebner unveränderlicher Gröfse ist, so ist *der geometrische Ort der Punkte D eine Kreislinie*, welche über AH als Sehne, und zu AK als Tangente beschrieben wird, die mithin durch den Punkt A geht, und deren *Halbmesser* CA feyn mag. Nun liegen *zweytens* auf den Sehnen AD dieser Kreislinie, die insgesammt aus dem gegebenen Punkte A ausgehn, die Punkte E so, daß im Fall des *obern* Zeichens $AE \times ED = S$, im Fall des *untern* $AE \times Ed = S$ ist. Mithin muß vermöge des Orts in Lehrsatz 24 Zusatz 1, *der geometrische Ort der Punkte E, eine der vorigen concentrische Kreislinie*, und zwar *ibr Halbmesser CE* die Seite eines Quadrats feyn, welches im Fall des *obern* Zeichens gleich $CA^2 + S^*$, *24Z1.β im Fall des *untern* $CA^2 - S$ ist*. — Nimmt man auch *24Z.1α auf der Verlängerung der gegebenen Linie AH über A hinaus Parallellinien M' E', so sind *zwey gleiche Kreise*, die im Fall des *obern* Zeichens sich durchschneiden, im Fall des *untern* aber um den doppelten Unterschied der beyden Halbmesser von einander abstehn, und in denen AH verlängert zwar gleiche, aber entgegengesetzt liegende Abschnitte bildet, *der Ort der Punkte E* *. *24. f. 1.

2) Soll $AE^2 = S - AH \times AM$ feyn, so müssen die Parallellinien MN so von den Linien AE durchschnitten werden, daß $AE^2 + AH \times AM = S$ ist, folglich $AE^2 < S$ feyn. In diesem Fall muß es also auf der Verlängerung jeder Linie AE, über A hinaus, einen Punkt

D' geben, der so liegt, daß das Rechteck aus AE und ED' dem gegebenen Raume S gleich, oder $AE \times ED' = S$ ist, da denn $AE^2 + AH \times AM = AE \times ED'$, mithin, wenn man beyderseits AE^2 fortnimmt, $AH \times AM = AE \times AD'$ seyn muß. Nimmt man daher auf der Verlängerung von AH über A hinaus, AH' gleich AH, so ist auch $AH' \times AM = AE \times AD'$, und da H'M und D'E grade Linien sind, die sich im Punkte A schneiden, so liegen die vier Punkte H', D', E, M in einer

* II. 23. Kreislinie, und es ist der Winkel $AD'H = AME$ *, mithin, von gegebner, unveränderlicher Größe: und da er über AH' steht, so muß *der Ort der Punkte D'*, für Perpendikel, welche auf AH und deren Verlängerung über H hinaus genommen werden, eine *Kreislinie* seyn, die über AH' als Sehne, und zu Kk als Tangente beschrieben wird. Und da überdem $AE \times ED' = S$ ist, so wird zugleich *der Ort der Punkte E*, eine *mit jener concentrische Kreislinie*, deren *Halbmesser C'E* die Seite eines Quadrats ist, welches das Quadrat des erstern Halbmessers C'A um den Raum S übertrifft, oder $C'E^2 = C'A^2 + S$. Dieses wird auf dieselbe Art wie in Lehrsatz 24. Z. I. 2. bewiesen. — Für *alle Parallellinien* machen wiederum *zwey gleiche, sich schneidende, um C' und C beschriebne Kreislinien*, den Ort der Punkte E aus.

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 2, wo jedoch dieser Ort etwas anders ausgedrückt wird. Unmittelbar auf ihn lassen sich mehrere ebne Oerter, die zu den Zusammengesetztesten gehören, mit Leichtigkeit zurückführen, welches ich im Folgenden Zusatze (den der, wer Lehrsatz 20 überschlagen hat, gleichfalls übergehe) wenigstens andeuten will.

Zusatz II. α) Der Ort der Punkte E ist auch in Fig. 69. dem Fall eine gegebne Kreislinie, wenn der Anfang der parallelen Linien MN auf irgend einer andren, der Gröfse und Lage nach gegebenen Linie BL genommen wird, die nicht durch den Punkt A geht. Denn man mache AH gleich und parallel BL, und zöhe durch B, parallel mit AK, die grade Linie BC; so schneidet jede der Linien MN, welche mit AK parallel laufen, auf beyden Linien und deren Verlängerungen, von B und C an gleiche Stücke ab, so dafs $BL \times BM = AH \times (AM' \pm AC) = AH \times AM' \pm AH \times AC$, wird, wo das Rechteck $AH \times AC$ ein gegebner Flächenraum P ist. Ist daher $AE^2 = BL \times BM \pm S$; so wird auch $AE^2 = AH \times AM' \pm S \pm P$, mithin dem vorigen Zusatz gemäfs, der Ort des Punktes E eine gegebne Kreislinie seyn. (Apollonius II. 3. Fall 3.)

β) Der Ort der Punkte E ist ferner auch dann eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse, wenn die Linien AE die Parallellinien so durchschneiden, dafs eine Figur gegebner Gattung über AE beschrieben, $AE^2 \propto \frac{m}{q}$, ent- ^{* 20. f. 1.}
weder gleich ist dem Rechtecke aus irgend einer Linie BI, und dem Stück BM derselben, welches die Parallellinien auf ihr oder ihrer Verlängerung abschneiden, $BI \times BM$: oder gleich diesem Rechtecke vermehrt oder vermindert um einen gegebenen Raum, $BI \times BM \pm S$: oder endlich einem gegebenen Raum weniger diesem Rechteck, $S - BI \times BM$. Denn da die Figur über AE der Gattung nach gegeben ist, so ist ihr Verhältnifs zum Quadrat über AE, $m : q$, gegeben. Man nehme auf der gegebenen Linie BH oder

deren Verlängerung, einen Abschnitt so, daß sich verhält $BI:BL = m:q$, so ist BL gegeben, und $BI = BL \times \frac{m}{q}$. Setzt man diesen Werth statt BI , und dividirt dann beyderseits durch $\frac{m}{q}$; so verwandeln sich unsere Voraussetzungen in folgende: $AE^2 = BL \times BM$; oder $AE^2 = BL \times BM \pm S$; oder $AE^2 = S - BL \times BM$. Und für alle drey ist nach ∞) der Ort der Punkte E ein Kreis von gegebner Lage und Gröfse. (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius* ebenen Oertern.)

γ) Endlich ist der Ort der Punkte E auch unter der Voraussetzung eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse, daß, wenn zwey Punkte A, C und die graden Linien Q und BH der Lage, und die letztere auch der Gröfse nach, in einer Ebne, gegeben sind; grade Linien von den Punkten A und C aus gezogen, sich in den Punkten E so durchschneiden, daß eine mit Q durch E parallel gezogene Linie, auf BH , oder deren Verlängerung, ein Stück BM so abschneide, daß die Summe oder der Unterschied zweyer Figuren gegebner Gattung über AE und CE beschrieben, dem Rechteck aus den Abschnitten BH und BM gleich ist,

$$AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = BH \times BM. \quad \text{Denn da die Fi-}$$

guren über AE und CE der Gattung nach gegeben sind, so ist das Verhältniß $m:n:q$ gegeben. Man nehme im Fall der Summe auf AC , im Fall des Unterschieds auf deren Verlängerung zwey Abschnitte CG, AG , und überdem eine Linie Ge so, daß sich verhält $m:n:q =$

CG : AG : Ge, so ist $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = AE^2 \times \frac{CG}{Ge}$
 $\pm CE^2 \times \frac{BG}{Ge}$, und diese Summe ist nach Lehrsatz 20

Form. γ gleich $\frac{AC}{Ge} \times (AG \times CG \pm EG^2)$, also auch

dieser Raum der Bedingung unserer Aussage gemäß,
 gleich $BH \times BM$. Nun sind die Punkte A, C und G,
 mithin auch AC und das Rechteck $AG \times CG = R$ ge-
 geben, überdem die Linie Ge, also auch der Raum

$R \times \frac{AC}{Ge} = S$, und also ist $EG^2 \times \frac{AC}{Ge} = BH \times BM - S$

im Fall der Summe, oder $= S - BH \times BM$ im Fall des
 Unterschieds. Folglich sind dann vom gegebenen
 Punkte G aus, die Linien GE so gezogen, daß eine
 Figur gegebner Gattung über GE beschrieben, gleich
 ist dem Rechteck $BH \times BM$ vermindert um den gegeb-
 nen Raum S, oder umgekehrt, und daher vermöge β ,
 der Ort der Punkte E eine Kreislinie von gegebner Lage
 und Gröfse. (*Apollonius II. 6.* wo jedoch der Fall des
 Unterschieds übersehn ist, und dieser Ort in allen sei-
 nen Fällen 10 Seiten einnimmt. Auch ist er dahin ein-
 zuschränken, daß wenn im *Fall des Unterschieds die*
Figuren gegebner Gattung ähnlich sind, es keinen Punkt G
 giebt, und der Ort der Punkte E keine Kreislinie, son-
 dern eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

Ist die Summe oder der Unterschied der beyden
 Figuren gegebner Gattung, *vermehrt oder vermindert*
um einen gegebenen Raum P, dem Rechteck $BH \times BM$,
 oder jene Summe oder Unterschied dem Raume P we-

niger diesem Rechteck gleich; so ändert dieses weiter nichts, als daß statt des gegebenen Raums S , ein anderer gegebenner Raum in die letzte Bestimmung mit eingeht, daher auch für diese Fälle der Ort der Punkte E eine Kreislinie ist, mit der eben erwähnten Einschränkung.

Ueberdem läßt dieser Ort sich grade so, wie der in den Folgerungen zu Lehrsatz 20 vorgetragne, auch auf drey, vier, und jede beliebige Zahl von Punkten ausdehnen: „Sind nemlich beliebig viel Punkte $A, C, D,$ etc. in einer Ebene gegeben, und grade Linien aus ihnen gezogen durchschneiden sich insgesammt in einem Punkte E so, daß die Summe oder der Unterschied von Figuren gegebner Gattung, über diese Linien beschrieben, dem Rechtecke $BH \times BM \pm S$ gleich ist; so ist der Ort der Punkte E eine Kreislinie von gegebner Lage und GröÙe, doch mit der erwähnten Einschränkung.“ (Camerers Bemerkungen zu Apollonius ebenen Oertern).

Anmerkung. Die Sätze in Folgerung 4 und in diesem Satze betreffen den Ort der Durchschnittspunkte E , worinn grade Linien, von einem gegebenen Punkte A aus gezogen, Parallellinien so durchschneiden, daß das Quadrat über AE entweder allein, oder in Verbindung mit beständigen GröÙen, durch ein veränderliches Rechteck bestimmt wird, dessen GröÙe zulerzt von dem veränderlichen Abstände dieser Parallellinien vom gegebenen Punkte A abhängt. — Der folgende Ort betrifft die Durchschnittspunkte E , worin grade Linien, von einem gegebenen Punkte A aus gezogen, Sehnen eines gegebenen Kreises so durchschneiden, daß das Quadrat über AE durch das Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder Sehne bestimmt wird. Diesen Ort führe ich im folgenden Lehrsatz auf, um mit demselben nach Simsons Beyspiel diesen Haupttheil aus der Lehre der ebenen Oerter zu beschließen.

[LEHRSATZ 26.]

1) Wenn ein Kreis, mithin auch dessen Mittel-^{Fig. 71.} punkt C , und irgend ein zweyter Punkt A gegeben sind, gleich viel ob A innerhalb, oder außserhalb, oder auf der Kreislinie liegt, und wenn grade Linien, vom Punkte A aus gezogen, sich mit den Sehnen BD dieses Kreises je zwey und zwey so in Punkten e durchschneiden, 1) daß entweder $Ae^2 = Be \times De$, oder, wenn S einen gegebenen Flächenraum bedeutet, $Ae^2 = Be \times De \mp S$ ist: und irgend einer dieser Punkte e liegt außserhalb des Kreises, auf der Verlängerung einer Sehne; so ist stets der geometrische Ort aller solcher Punkte e eine grade Linie von gegebner Lage. — 2) Durchschneiden sie sich hingegen, unter übrigens gleichen Umständen, so, daß $Ae^2 = S - Be \times De$ ist; so ist der Ort der Punkte e eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse.

2) Wenn aber von den graden Linien, die vom gegebenen Punkte A aus gezogen werden, irgend eine sich mit einer der Sehnen BD selbst, folglich innerhalb des Kreises, in einem Punkte E so durchschneidet, 1) daß entweder $AE^2 = BE \times DE$, oder $AE^2 = BE \times DE \mp S$ ist; so ist umgekehrt stets der geometrische Ort aller Punkte E , eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse: und durchschneiden sie sich 2) so, daß $AE^2 = S - BE \times DE$ ist; so ist der Ort aller Punkte E eine grade Linie von gegebner Lage.

Da diesen Voraussetzungen gemäß der Punkte A und der Mittelpunkt des Kreises, C, gegeben sind, so ist auch die grade Linie AC der Lage und Größe nach, und überdem der Halbmesser CG oder CM des Kreises der Größe nach gegeben. Man ziehe von dem Punkte e oder E, welcher den Bedingungen des Satzes genüge thun möge, durch den Mittelpunkt die grade Linie eH, oder EH, von der der Kreis den Durchmesser FG abschneide.

1.) *Liegt dieser Punkt e außerhalb des Kreises, in der Verlängerung einer der Sehnen BD*, so ist $Be \times De =$
 * 22. 2. $Fe \times Ge^* = Ce^2 - CG^2$, weil in diesem Fall dem
 in C gleich getheilten Durchmesser CG, das Stück Ge
 • II. f. I. angesetzt ist*. Folglich muß der *ersten Voraussetzung*
 β. gemäß, nach welcher $Ae^2 = Be \times De \mp S$ feyn soll, Ae^2
 $= Ce^2 - CG^2 \mp S$, und also $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S$
 feyn, wo das *obere* oder das *untre* Zeichen gilt, je nach-
 dem Ae^2 um den gegebenen Raum S *kleiner* oder *größer*
 als das Rechteck $Be \times De$ gesetzt wird. Unter dieser
 Voraussetzung durchschneiden folglich die vom Punkte
 A aus gezogenen Linien, die verlängerten Sehnen
 so in Punkten e, daß in den Dreyecken CAe, die ins-
 gesammt über der gegebenen unveränderlichen Linie
 CA stehn, der *Unterschied der Quadrate aus den beyden*
Schenkeln gegeben und unveränderlich ist, nemlich
 gleich dem Quadrate des gegebenen Halbmessers, ver-
 mehrt oder vermindert um den gegebenen Raum S.
 Deshalb muß der *Ort der Durchschnittpunkte e*, als Spi-
 tzen dieser Dreyecke, *ein Perpendikel auf der*
gegebenen

gegebenen Linie CA*, und zwar dasjenige Perpendikel seyn, welches vom Punkte O, der in der Mitte der Grundlinie CA liegt, nach der Seite des kleinern Schenkels zu, um eine Linie Oh absteht, deren Größe dadurch bestimmt wird, daß $2 Oh \times CA = CG^2 \pm S$ oder $4 CO \times Oh = CG^2 \pm S$ ist. Und daraus findet man Oh durch Construction grade wie in Lehrsatz 16 Folgerung 3. (Apollonius ebne Oerter II. 7. 8. 9.)

Ist aber der zweyten Voraussetzung gemäß $Ae^2 = S - Be \times De$, so muß $Ae^2 + Be \times De = S$ und folglich $Ae^2 + Ce^2 - CG^2 = S$, oder $Ae^2 + Ce^2 = S + CG^2$ seyn. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden sich also die Schenkel der Dreyecke ACe, welche über der gegebenen Linie AC stehn, so, daß die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln einem gegebenen Flächenraum gleich ist, weshalb nun der Ort der Durchschnittspunkte e keine grade Linie, sondern eine Kreislinie von gegebner Lage und Größe wird*. Und zwar, wenn man die Linie CA im Punkte O halbirt, so ist O der Mittelpunkt dieser Kreislinie, und ihren Halbmesser Oe findet man daraus, daß $Oe^2 = \frac{1}{2}(S + CG^2) - CO^2$ seyn muß*. (Apollonius II. 14.)

2) Liegt der Durchschnittspunkt E in der Sehne BD selbst, und also innerhalb des Kreises, so wird diese Sehne vom Durchmesser FG, der durch den Punkt E geht, so durchschnitten, daß $BE \times DE = FE \times GE$ * 22. I. = $CG^2 - CE^2$ ist, indem der Durchmesser EG in diesem Fall im Punkte C gleich, und im Punkte E ungleich getheilt ist*.

Ist also nach der *ersten Voraussetzung* $AE^2 = BE \times DE \mp S$, so muß in diesem Fall $AE^2 = CG^2 - CE^2 \mp S$, und $AE^2 + CE^2 = CG^2 \mp S$ seyn. Also ist dann, nicht wie unter 1) der Unterschied, sondern *die Summe der Quadrate* aus den Linien AE, CE, welche von zwey gegebenen Punkten aus gezogen, sich durchschneiden, einem gegebenen Raume gleich, mithin *der Ort der Punkte E* jetzo eine *Kreislinie*, um einen Punkt O, der in der Mitte zwischen A und C liegt, als Mittelpunkt beschrieben, mit einem *Halbmesser OE*, für den $OE^2 =$
 * 17. f. $\frac{1}{2}(CG^2 \mp S) - OC^2$ ist*. (Apollonius II. 11. 12. 13)

Ist aber *nach der zweyten Voraussetzung*, $AE^2 = S - BE \times DE$, so muß in diesem Fall $AE + BE \times DE = S$, oder $AE^2 + CG^2 - CE^2 = S$, und folglich $AE^2 - CE^2 = S - CG^2$ und umgekehrt $CE^2 - AE^2 = CG^2 - S$ seyn. Da also der *Unterschied der Quadrate* über den Schenkeln AE, CE einem gegebenen Raume gleich ist, so wird *der Ort der Punkte E* in diesem Fall ein *Perpendikel auf AC*, welches, wie in der ersten Voraussetzung unter 1) aus Lehrsatz 16. Folgerung 3. dadurch gegeben wird, daß $4 CO \times OH = CG^2 - S$ seyn muß. (Apollonius II. 10.)

Bestimmung, im Fall der Ort eine grade Linie ist, und zwar 1) für Punkte e außerhalb des Kreises. Da der Ort dieser Punkte das Perpendikel eh, und für die-
 * 16. i. f. $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S = 4 CO \times Oh = Ch^2 - Ah^2$ ist, so muß, wenn S gleich null ist, und im Fall des *obern Zeichens*, immer $Ce > Ae$ und $Ch > Ah$ seyn, folglich das Perpendikel zu der Seite von O, auf welcher

A liegt, aufstehn. Folglich, wenn O *ausserhalb* des Kreises liegt, oder $CA > 2 CM$ ist, auch der Punkt h und das ganze Perpendikel eh nothwendig *ausserhalb des Kreises* fallen. Dasselbe findet *im Fall des untern Zeichens* statt, wenn $CG^2 > S$ ist, da hingegen, wenn $CG^2 < S$ ist, $Ce < Ae$ wird, und das Perpendikel eh nach der Seite von C zufällt.

Da ferner der Halbmesser $CG = CM$ ist, muss auch $4 CO \times Oh - CM^2 = \pm S$ seyn. Ist A ein Punkt im Kreise, so besteht der Halbmesser CM aus zwey gleichen Theilen CO, OA und einem dritten diesen angeetzten Stück AM, $CM = 2 CO + AM$, und deshalb ist dann $CM^2 = 4 CO \times OM + AM^2$ *, folglich $4 CO \times$ *II. f. 3.
 $(Oh - CM) - AM^2 = \pm S$. Daher muss, wenn S gleich null ist, und im Fall des *obern* Zeichens, nothwendig $Oh > OM$, also h ein Punkt *ausserhalb des Kreises* seyn, welches im Fall des *untern* Zeichens nicht nöthig ist, da für dieses, nach Umständen, Oh kleiner oder grösser als OM seyn, und h innerhalb oder *ausserhalb des Kreises* liegen kann. — Wenn A in der Kreislinie liegt, ist $CM^2 = 4 CO \times OA$, mithin $4 CO \times (Oh - OA) = \pm S$. Ist folglich alsdann S gleich null, so muss Oh gleich OA seyn, also h in A fallen, und eh den Kreis im Punkte A berühren*. Im Fall des *obern* Zeichens liegt * 22. 2.
dagegen h *ausserhalb*, im Fall des *untern* innerhalb des Kreises. — Wenn endlich A *ausserhalb des Kreises* liegt, ist $CM = 2 CO - AM$, folglich $CM^2 = 4 CO^2 - 4 CO \times AM + AM^2$ * = $4 CO \times (AO - AM) + AM^2 = \pm 4 CO$ • 9.
 $\times OM + AM^2$, wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem M mit A oder mit C auf einerley Seite

von O liegt, d. h. O ein Punkt innerhalb oder aufserhalb des Kreifes, und CA kleiner oder gröfser als 2 CM ist. Wenn daher S gleich null oder additiv genommen wird, und O liegt im Kreife, so mufs $4 CO \times (Oh - OM) - AM^2 = 0$ oder S feyn, welches nur dann möglich ist, wenn $Oh > OM$, also h ein Punkt aufserhalb des Kreifes ist. — Folglich liegt, wenn S gleich null oder additiv ist, das Perpendikel eh, als Ort der Punkte e, unter allen Umständen aufserhalb des gegebenen Kreifes, nur dafs es den Kreis in dem Fall, wenn S gleich null und A ein Punkt der Kreislinie ist, berührt.

2) Für Punkte E innerhalb des Kreifes, für welche der Ort ein Perpendikel EH auf dem Durchmesser AE oder dessen Verlängerung ist, mufs der Fußpunkt H immer innerhalb des Kreifes liegen, weil $CH < CE$ * und E ein Punkt im Kreife ist, und es ist für dasselbe $CE^2 - AE^2 = CH^2 - AH^2 = CM^2 - S = 4CO \times OH$. Ist also der gegebne Raum S dem Quadrate über dem Halbmesser des gegebenen Kreifes gleich, $S = CM^2$, so ist $CA = AH$, H fällt in O, und das Perpendikel EH steht im Punkte O selbst auf. — Ist $S < CM^2$, so fällt H mit A auf einerley Seite von O, indem dann $CH > AH$ ist, und dann mufs nothwendig O ein Punkt im Kreife, also $CA < 2 CM$ feyn, und, wie wir eben gesehen haben, $CM^2 = 4CO \times OM + AM^2$ oder $CM^2 - AM^2 = 4CO \times OM$ feyn. Da nun $OM > OH$ ist, so mufs in diesem Fall immer $CM^2 - AM^2 > CM^2 - S$ und daher $S > AM^2$ feyn. Wenn der gegebne Raum kleiner als dieses Quadrat ist, so giebt es keine Punkte

*L16. I.

E welche den Voraussetzungen, die sich widersprechen, genüge thun könnten. — Ist endlich $S > CM^2$, so ist $AH > AC$ und der Punkt H fällt mit dem Mittelpunkte C zu einerley Seite des Punktes O; und in dielem Fall können die Punkte A und O auch aufserhalb des Kreifes liegen.

Bestimmung im Fall der Ort eine Kreislinie ist.

1) Für Punkte e aufserhalb des Kreifes, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $Ae^2 + Ce^2 = S + CM^2$ ist; und dann ist O der Mittelpunkt, und für den Halbmesser $2Oe^2 = S + CM^2 - 2CO^2$. Ist O ein Punkt im gegebenen Kreise; so muß immer $S > AM^2$ feyn, sonst ist der Ort unmöglich. Ist O ein Punkt aufserhalb des gegebenen Kreifes, und $S < AM^2$, so liegen der Ort und der gegebne Kreis ganz aufserhalb einander; ist $S > AK^2$, so schliesst der Ort den gegebenen Kreis ringsum ein, und ist $S < AK^2$ aber $> AM^2$, so durchschneidet der Ort den gegebenen Kreis, da denn einige Punkte e aufserhalb, andre innerhalb des gegebenen Kreifes liegen; daher sich daraus, daß ein Punkt e auf der Verlängerung der Sehne BD liegt, keineswegs schliessen läßt, daß auch alle andre Punkte e auf Verlängerungen der Sehnen BD liegen müssen.

2) Für Punkte E innerhalb des Kreifes, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $AE^2 + CE^2 = CM^2 \mp S$ ist, und dann ist O der Mittelpunkt, und für den Halbmesser des Orts $2OE^2 = CM^2 - 2CO^2 \mp S$. In diesem Fall muß, wenn S gleich null ist, der Ort von dem gegebenen Kreise ringsum eingeschlossen werden. Im Fall

des obern additiven Zeichens durchschneiden sich der Ort und der gegebne Kreis, wenn O *ausserhalb* des gegebenen Kreifes liegt; ist aber O ein Punkt *in diesem Kreise*, so wird, je nachdem OM gröfser, gleich, oder kleiner als ON ist, der Ort ganz innerhalb des gegebenen Kreifes fallen, oder ihn innerlich berühren, oder ihn schneiden. *Im Fall des untern subtractiven Zeichens* wird der Ort wiederum vom gegebenen Kreise eingeschlossen.

Anmerkung. Diese Bestimmungen lassen sich mit Hülfe der Ausfagen in Lehratz 11, Folgerung 2 und Lehratz 17 auf eine ähnliche Art, als für den Fall, wenn der Ort eine grade Linie ist, entwickeln, weshalb ich aber auf Simons Wiederherstellung von Apollonius ebenen Oertern verweisen mus, um mich hier nicht in zu grofse Weitläufigkeit zu verlieren.

Simfon macht aus den Theilen dieses Orts acht verschiedene Sätze, und seine Entwicklung derselben nimmt 18 Seiten ein. In Pappus Bericht über den Inhalt der Ebenen Oerter des Apollonius, findet sich nur ein eingeschränkter Fall der ersten Voraussetzung unter 1) und selbst dieser ist durch die Abschreiber entstellt worden. Auch stimmt Lemma 33 aus *Enklids Porismen* (Pappus VII, 159) mit dem einfachsten Fall von 1) überein, indem dieser Lehratz ausfagt, dafs falls eh auf dem verlängerten Durchmesser LM so senkrecht steht, dafs $Lh \times hM = Ch^2$ ist, auch für jeden Punkt e in diesem Perpendikel, wenn man eL zieht, $Fe \times eG = Ce^2$ seyn mus.

Man sieht leicht, dafs man die Aussage dieses Orts nach Art der vorigen Oerter noch erweitern und verallgemeinern kann, welches aber, wie es scheint, schon Simfon für überflüssig gehalten hat. Ich endige daher mit diesem Satze nach Simons Beyspiel diesen Haupttheil der Lehre von den Ebenen Oertern, den ich hier ziemlich ausführlich vorgetragen habe, weil theils meine Absicht, wo möglich, die Geometrie in ihrem ganzen Umfange, wie

sie von Alten und Neuern behandelt worden ist, im Kurzen darzustellen, dieses erforderte, theils die Sätze an sich so nett und brauchbar sind, theils sehr gute Uebungen in der geometrischen Analysis, und Beyspiele von zusammenhängenderen geometrischen Untersuchungen an die Hand geben.

Auf *algebraischem Wege*, wo man die Eigenschaften der Curven lediglich aus ihrer Gleichung *, durch algebraische Mittel, *22. L. 5. und nicht wie hier durch Darstellung der Figur und durch geometrische Constructionsarten erforscht, läßt sich indess schon manches von, dem hier Vorgetragenen erleichtern, und überdem der Kreis noch auf allgemeinere Arten als Ort eines bestimmten Punktes darstellen, und die Bedingung, unter welcher ein Kreis allein der Ort von Punkten seyn kann, allgemein entwickeln, daher man die weitre Ausbildung dieser Lehre, billig der algebraischen Analysis vorbehält.

Ich wende mich nun zu den **Aufgaben**, welche zu diesem Buche gehören, werde hier aber nicht viel mehr als die unentbehrlichsten Constructionsarten, auf die ich mich zum Theil schon berufen habe, vortragen. Andre Aufgaben, und besonders den Gebrauch der aufgestellten Oerter in Auflösung geometrischer Aufgaben, verspare ich für das Buch des folgenden Theils, welches der geometrischen Analysis bestimmt ist.

A U F G A B E N

welche zum dritten Buche gehören.

A U F G A B E I.

Fig. 72. *Ein gegebenes Vieleck in ein Dreyeck von gleichem Inhalt zu verwandeln.*

Man ziehe eine Diagonale, z. B. AF, so, daß dadurch von dem ganzen Vieleck ein Dreyeck AFG abgeschnitten wird, und durch die Spitze G dieses Dreyecks eine Parallellinie mit der Diagonale. Darauf verlängere man eine von den Seiten der Figur, welche an das abgeschnittene Dreyeck anstoßen, z. B. AB, bis zu ihrem Durchschnitt H mit der Parallellinie, und ziehe von dem andern Endpunkte der Diagonale die grade Linie FH, so erhält man ein Vieleck mit den Seiten FH, HE, welches eine Seite weniger als das Gegebene, und doch mit demselben gleichen Inhalt hat.

Denn das so gebildete Dreyeck FHA steht mit dem abgeschnittnen FGA über gleicher Grundlinie FA und zwischen gleichen Parallelen FA, GH, hat also mit * 2. f. 2. demselben gleichen Inhalt *, daher es sich unbeschadet des Flächenraums statt des abgeschnittnen Dreyecks setzen läßt. Der Construction gemäß liegen aber

BA und AH in grader Linie, folglich hat das letztere Vieleck *gleichen Inhalt*, aber *eine Seite weniger als das Gegebne*.

Führt man auf diese Art fort, und schneidet z. B. durch die Diagonale BD wiederum ein Dreyeck BCD ab, für welches, wenn HB bis I verlängert wird, man ein Vieleck FHIDEF erhält, welches *zwey Seiten weniger und denselben Inhalt* als das Gegebne hat.

Da man nun dieses Verfahren so lange fortsetzen kann, bis man endlich auf ein *Dreyeck* kömmt, so läßt sich mittelst desselben jede gradelinige Figur von beliebig viel Seiten, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandeln.

Bemerkung 1. Oder überhaupt kann man mittelst dieser Methode *zu jeder gegebenen gradelinigen Figur, eine ihr gleiche Figur von einer beliebigen Seitenzahl, die geringer als die Seitenzahl der gegebenen Figur ist, bilden*. Mit gehöriger Vorsicht läßt sich dieses Verfahren selbst auf krummlinige Figuren übertragen *, und *5. Z. 2. ist beym Ausmessen von unregelmäßigen Flächenräumen oft von Nutzen.

Bemerkung 2. *Hohle Winkel*, wie E, ändern bey *I. E. 16 diesem Verfahren nichts. Sie geben Diagonalen, wie DF, welche außserhalb der Figur fallen, und schneiden Dreyecke wie DEF ab, welche dem Flächenraume der Figur an dem Raume mangeln den die Diagonale mit den übrigen Seiten umschließt. Die Parallele durch die Spitze E mit einer solchen Diagonale, durchschneidet die Seiten der Figur, z. B. die Seite ID der reducir-

ten Figur in K. Zieht man FK, so sind die Dreyecke DEF, DKF gleich, und mithin hat dann das Vieleck HIKF, mit dem Vieleck HIDEF gleichen Inhalt, aber eine Anzahl von Seiten, die um eins kleiner ist.

Fig. 73. Bemerkung 3. α) Zieht man alle Diagonalen, durch welche man Dreyecke Schrittweise abschneidet, von demselben Winkelpunkt D aus, und schafft aus jedem Dreyeck die Seite weg, welche der Spitze D gegenüber steht, so erhält das Dreyeck, auf welches man

Fig. 74. zuletzt kömmt, den Winkel D als Winkelpunkt. — β) Zieht man dagegen alle Diagonale von einem Punkt in einer Seite der Figur ABCD aus, so liegt eine Spitze des entstehenden Dreyecks in diesem Punkte der Seite. — γ) Und auf dieselbe Art läßt sich irgend ein anderer Punkt bestimmen, in welchem die Spitze, und eine Seite der Figur, in welche die Grundlinie des zu bildenden Dreyecks liegen soll, dergleichen in practischen Büchern mit großer Umständlichkeit, und mit weit mehr Wortaufwand als die Sache verdient, gelehrt zu werden pflegt.

A U F G A B E 2.

Ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu bilden, welches mit einem gegebenen Parallelogramm, oder Trapezoid, oder Dreyeck, gleichen Inhalt hat.

Taf. III. 1) Ziehe von den Endpunkten der Grundlinie
Fig. 6. des gegebenen Parallelogramms, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien nach der gegenüberstehenden Seite, so entsteht ein Parallelogramm unter dem

gegebenen Winkel, welches mit dem erstern gleichen Inhalt hat *.

* 1

2) Theile die eine der nicht- parallelen Seiten des Fig. 14. Trapezoids, z. B. CB, in zwey gleiche Theile im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite AD, und nach dieser von den Punkten A, D, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm unter dem gegebenen Winkel beschrieben, und hat mit dem Trapezoid gleichen Inhalt *.

* 6.

3) Im Dreyeck theile man eine der Seiten, z. B. Taf. V. LB, in zwey gleiche Theile im Punkte A, ziehe durch die gegenüberstehende Spitze mit LB eine Parallellinie, und nach dieser aus den Punkten L, B, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm das Gesuchte. Fig. 75.

Folgerung. Da sich jedes Vieleck, der vorigen Aufgabe gemäß, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandeln läßt, so kann man also auch jedes Vieleck in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel verwandeln. — Also auch in ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel, d. h. in ein Rechteck.

A U F G A B E 3.

Ueber eine gegebne grade Linie MN ein Parallelogramm zu beschreiben, welches mit einem gegebenen Parallelogramm ABCD gleichen Inhalt hat, und unter gleichem Winkel enthalten ist. Fig. 76.

Man verlängere eine der Seiten des gegebenen Parallelogramms, z. B. AB, schneide auf der Verlängerung BE, gleich der gegebenen Linie MN, ab und ziehe durch E und den Eckpunkt C eine grade Linie. Durchschneidet diese die verlängerte Seite AD des gegebenen Parallelogramms in einem Punkte F; so ist *DF die zweyte Seite des gesuchten Parallelogramms*. Und verlängert man die beyden andern Seiten des Gegebenen über C hinaus, und zieht durch E und F mit ihnen Parallellinien; so ist *die Ergänzung BGHI, welche auf diese Art entsteht, das gesuchte Parallelogramm*.

Denn da vermöge der Construction die Linien AE, DI, FH, und auch die Linien AF, BG, EH, parallel laufen, so sind die Vierecke welche auf diese Art gebildet werden, insgesammt gleichwinklige Parallelo-

* 8. (1) gramme *. Ueberdem sind die Ergänzungs-Paral-

* 8. (3) lelogramme ABCD und CGHI einander gleich *; so auch die gegenüberstehenden Seiten $DF = CH$ und $CI = BE = MN$ *. Folglich ist CGHI das gesuchte Parallelogramm, welches über der gegebenen Linie MN = CI steht, und mit dem gegebenen Parallelogramm ABCD gleichwinklig und gleich groß ist.

Folgerung 1. Auf die Art läßt sich also auch ein gegebenes Rechteck in ein anderes, von gleicher Größe, welches über einer gegebenen Grundlinie steht, verwandeln. Und zwar, da es mehrentheils nur darauf ankömmt, die Höhe dieses zweyten Rechtecks zu finden, und hierzu der erste Theil der Construction hinreicht; so verdient diese einfache Methode selbst vor der den Vorzug, die

wir in den folgenden Aufgaben, mittelst Auffindung einer vierten Proportionallinie, werden kennen lernen.

Folgerung 2. Ferner läßt sich auf diese Art jedes gegebne Dreyeck LMN , oder jedes Trapezoid in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt, welches über eine gegebne Linie MN , und unter einem gegebenen Winkel W beschrieben ist, und zwar insbesondere, in ein Rechteck über gegebner Grundlinie verwandeln. Man verwandle zu dem Ende das gegebne Dreyeck oder Trapezoid in ein gleich großes Parallelogramm, unter dem gegebenen Winkel \ast , oder in ein gleich großes Rechteck, und ^{*Afg. 2.} verfare dann wie unsere Construction angiebt. Eine ^(2. 3.) andre Methode lehrt Aufgabe 8.

Folgerung 3. Endlich läßt sich auch durch dieses Verfahren jedes gradelinige Vieleck in ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel, und zwar insbesondere in ein Rechteck, welches über eine gegebne Grundlinie MN steht, verwandeln. Dazu führen verschiedene Wege.

α) Entweder man verwandelt das Vieleck in Ein Dreyeck von gleichem Inhalt \ast , das Dreyeck in ein Recht- ^{*Afg. 1.} eck \ast , und dieses nach dem eben gelehrtten Verfahren ^{*Afg. 2.} in ein gleich großes Rechteck, welches über der gegebenen Linie MN steht \ast . — β) Oder man zertheilt \ast f. 1. die gegebne vielseitige Figur, entweder in lauter Dreyecke, oder in Trapezoide \ast , verwandelt jeden ^{*6. Z. 2.} dieser Theile einzeln in Rechteck \ast , und diese in ^{*Afg. 2} gleich große Rechtecke über der gegebenen Seite MN \ast , \ast f. 1. trägt dann die zweyten Seiten aller dieser Rechtecke in

eine grade Linie zusammen, und beschreibt über sie als Grundlinie, und mit MN als Höhe, ein Rechteck;

* E. 5. so erhält man das gesuchte Rechteck *.

Auf dieselbe Art läßt sich über eine gegebne Linie MN ein Rechteck bilden, welches der Summe oder dem Unterschiede zweyer Vielecke R, S gleich ist, je nachdem man die Rechtecke über MN, denen beyde Vielecke einzeln gleich sind, zu entgegengesetzter oder zu einerley Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie MN, neben oder auf einander legt.

Anmerkung 1. Die Geometer des Mittelalters hatten für diese Construction ein eignes Kuntwort: *Applicatio*. Doch bezeichnet im weitläufigen Sinn *applicare figuram ad lineam* oder *secundum lineam* überhaupt das Beschreiben einer Figur über eine bestimmte Linie *.

* Afig. 12
a.

Anmerkung 2. Da der Zahlausdruck eines Rechtecks das Produkt aus den Zahlausdrücken der Grundlinie und Höhe ist, z. B. $AB \times AD$, und umgekehrt der Zahlausdruck der Höhe aus dem des Inhalts und der Grundlinie durch Division gefunden

* 6. a. wird, $h = \frac{i}{g}$, so ist im Fall der ersten Folgerung, der Zahlausdruck der gesuchten Höhe DF des zweyten Rechtecks,

$$DF = \frac{AB \times AD}{BE}$$

Ein solcher Zahlausdruck läßt sich daher in Linien darstellen, d. h. *construiren*, wenn man das Rechteck, dessen Zahlausdruck $AB \times AD$, d. h. welcher aus den Seiten AB und AD beschrieben ist *, in ein gleich großes Rechteck über die Grundlinie BE verwandelt; und dieses berechtigt uns in geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck durch: *Höhe eines Rechtecks, welches über der Grundlinie BE steht, und mit dem Rechteck*

* 4.

$AB \times AD$ gleichen Inhalt hat, zu übersetzen, wie wir das z. B. in der Auslegung des 20sten Lehrsatzes gethan haben.

Anmerkung 3. Da das, was bey den Zahlausdrücken der Linien und Flächen *Division* ist, in der geometrischen Darstellung sich durch diese Construction bewerkstelligen läßt; so übertragen die ältern Mathematiker das Kunstwort für dieses Verfahren auch auf die Division, und sagten z. B. *numernum applicare ad numerum*, um das Dividiren einer Zahl durch eine andre anzuzeigen *.

*4. A. 2.

A U F G A B E 4.

1) Eine gegebne grade Linie AB in beliebig viel gleiche Theile zu theilen.

2) Eine gegebne grade Linie AB , entweder mehrererern gegebnen Linien P, Q, R , oder einer gegebnen eingetheilten Linie MN , proportional einzutheilen.

1) Gefetzt man soll die grade Linie AB in 5 gleiche Theile theilen; so ziehe man durch den Endpunkt A dieser Linie, unter einem beliebigen Winkel gegen dieselbe, und in gehöriger Länge, eine andre grade Linie, trage auf diese eine beliebige Linie AC fünfmal nebeneinander auf, und ziehe vom letzten Endpunkt G dieser Theile, nach dem Endpunkte B eine grade Linie GB . Dann schneidet, behaupte ich, eine Parallellinie mit GB , die durch den ersten Theilpunkt C gezogen wird, auf der gegebnen Linie AB den fünften Theil AI ab, und trägt man AI fünfmal nebeneinander, oder zieht man durch alle fernern Theilpunkte D, E, F , mit GB Parallellinien, so wird AB auf

die verlangte Art, das heißt in fünf gleiche Theile eingetheilt.

Denn da vermöge dieser Construction die Parallellinien CI, DK etc. die Schenkel AB, AG des Winkels A durchschneiden, so theilen sie diese Schenkel einander proportional *. Sind also, der Construction gemäß, die Stücke AC, CD etc. insgesammt unter einander gleich, und jedes fünfmal in der Linie AG enthalten; so müssen auch die Stücke AI, IK etc, untereinander gleich, und jedes der fünfte Theil der gegebenen Linie AB seyn. Mithin ist diese in fünf gleiche Theile getheilt.

Fig. 78. 2) Soll die grade Linie AB den gegebenen Linien P, Q, R, in dieser angegebenen Folge proportional getheilt werden *, so trage man auf eine grade Linie, welche durch den einen Endpunkt A der gegebenen, unbestimmt gezogen ist, die gegebenen Linien P, Q, R in der verlangten Folge nebeneinander, so daß $AC = P$, $CD = Q$, $DE = R$ wird, ziehe durch die beyden Endpunkte B, E der gegebenen Linie, und der letzten aufgetragenen, eine grade Linie BE, und mit ihr parallel durch die Punkte C und D Parallellinien, so wird durch diese Parallelen die Linie AB auf die verlangte Art, das heißt nach dem Verhältniß der Linien P, Q, R, in der verlangten Ordnung eingetheilt. Denn wegen des Parallelismus der Linien CI, DK, EB, verhalten sich die Theile AI, IK, KB des einen Schenkels, wie die übereinstimmenden Theile AC, CD, DE des andern Schenkels

kels *, und diese Theile sind vermöge der Construc- * 7.
tion den gegebenen Linien P, Q, R gleich.

Soll endlich die grade Linie AB einer gegebenen eingetheilten Linien MN proportional getheilt werden, so verfährt man mit den Theilen, welche auf dieser Linie gegeben sind, grade so, wie hier mit den gegebenen Linien P, Q, R.

Noch andre Methoden beyde Aufgaben aufzulösen, werden wir im folgenden Buche kennen lernen.

Bemerkung 1. Man sieht leicht dafs diese Construction sich auch auf den Fall ausdehnen läßt, wenn die gegebne Linie nur ein bestimmter Theil der einzutheilenden werden soll, z. B. der erste, der mit dem Theil AC der eingetheilten, gegebenen Linie übereinstimmt *. Denn in diesem Fall ziehe man durch die übereinstimmenden Punkte B und C eine grade Linie, * E. 8. α. und mit dieser durch die Punkte D und E Parallellinien; so theilen diese, wegen des Parallelismus der Linien durch C, D, E, die verlängerte AB, der gegebenen Linie proportional ein *. • 7.

Bemerkung 2. Da ferner nicht bloß die Schenkel eines Winkels, sondern je zwey grade Linien, welche Parallellinien durchschneiden, von diesen proportional eingetheilt werden *; so sieht man leicht, dafs * 7. Z. 2. man diese Constructionen auch dahin abändern kann, dafs man durch die Theilpunkte * der eingetheilten Linie * E. 8. α. AG oder AE, willkührlich Parallellinien zieht, und dann um irgend einen Punkt T in der äußersten Pa-

rallellinie, mit der einzutheilenden Linie als Halbmeßer, einen Kreisbogen beschreibt, der die andre äußerste Parallellinie im Punkte V durchschneide. Zieht man TV, so ist diese Linie der gegebenen gleich, und auf die verlangte Art (z. B. in 5 gleiche Theile) eingetheilt, und man kann dann ihre Eintheilung durch einen Zirkel unmittelbar auf die gegebne Linie übertragen.

Zu *Theilungen von Linien in gleiche Theile*, mittelst dieser Construction, dient ein besonderes *Instrument*, worauf eine Menge Parallellinien in gleichen Entfernungen von einander eingegraben sind, und welches uns der Mühe überhebt, jedesmal erst gleiche willkührliche Theile aufzutragen, und durch die Theilpunkte Parallellinien zu ziehn.

Auf dieselbe Art findet man auf den Verlängerungen einer gegebenen Linie AB die Punkte, welche mit ihr eine Linie bilden, die einer gegebenen AE so proportional eingetheilt ist, daß AB mit einem der mittlern Theile CD übereinstimmt. Man ziehe nemlich durch alle Theilpunkte willkührlich Parallellinien, trage zwischen die beyden durch C und D die gegebne Linie AB ein, und verlängere sie, bis sie von allen jenen Parallellinien durchschnitten ist. — Dann hat man die verlangte eingetheilte Linie.

Zusatz I. *Um ein gegebenes Dreyeck durch Linien aus der Spitze in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, oder in Theile, welche zu einander ein gegebenes Ver-*

hältnifs haben einzutheilen, theile man die Grundlinie nach der verlangten Art ein, und ziehe aus der Spitze grade Linien nach allen Theilpunkten.

Denn das gegebne Dreyeck wird dadurch in kleine Dreyecke getheilt, die insgesammt auf derselben graden Linien stehn, und deren Spitze in einem Punkte liegen, folglich in Dreyecke von gleicher Höhe * ^{E. 2.} Solche Dreyecke verhalten sich aber wie ihre Grundlinien *; daher das gegebne Dreyeck dann auf die ver- ^{5. f. 1.} langte Art eingetheilt ist.

Zusatz II. *Um ein gegebenes Parallelogramm durch Parallellinien mit einer der Seiten in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, oder in Theile, welche zu einander ein gegebenes Verhältnifs haben, einzutheilen*, theile man die zweyte, an jener anstossende Seite auf die verlangte Art ein, und ziehe durch die Theilpunkte Parallellinien mit der erstern Seite.

Denn die kleinen Parallelogramme, welche auf diese Art entstehn *, liegen insgesammt zwischen zwey ^{1. 34. f. 1} Parallellinien; haben also gleiche Höhe *, verhalten ^{E. 3.} sich folglich wie ihre Grundlinien *, und das gegebne ^{5. f. 1.} Parallelogramm ist daher auf die verlangte Art eingetheilt.

A U F G A B E 5.

I) *Eine gegebne grade Linie BC, nach einem gegebenen Zahlverhältniffe $m:n$, einzutheilen.*

2) Auf der Verlängerung einer gegebenen graden Linie BC so einen Punkt g zu bestimmen, daß die beyden Abschnitte Bg , Cg , in dem gegebenen Zahlverhältnisse $m : n$ stehn.

Das gegebne Zahlverhältniß $m : n$ sey welches es wolle, so läßt es sich jedesmal leicht in ein Linearverhältniß verwandeln. Denn man braucht zu dem Ende nur aus einer willkührlichen Linie zwey Linien P , Q , grade so zusammensetzen, wie die beyden Zahlen m und n aus der Einheit zusammengesetzt sind. Alsdann verhält sich $m : n = P : Q$ und P und Q sind bekannte Linien.

1) Nun soll im ersten Fall der Aufgabe die gegebne Linie BC selbst nach dem Verhältnisse $m : n$, folglich den Linien P und Q proportional eingetheilt werden; welches durch das Verfahren der vorigen Aufgabe geleistet wird *.

* Afg. 4.
(2).

Fig. 79.

2) Im zweyten Fall soll auf der Verlängerung der gegebenen Linie BC ein Punkt g so gefunden werden, daß sich verhalte $Bg : Cg = m : n = P : Q$. Die beyden Abschnitte Bg , Cg sind in diesem Fall um die gegebne Linie BC von einander verschieden, können also nicht im Verhältniß der Gleichheit stehn; und würde dieses gefordert, so wäre die Aufgabe in diesem Fall unmöglich. Ueberdem muß, je nachdem m größer oder kleiner als n ist, auch Bg größer oder kleiner als Cg seyn, mithin der gesuchte Punkt g auf der Verlängerung der Linie BC über C oder über B hinaus liegen. Alles dieses zeigt auch die folgende Construction.

Gesetzt nemlich, es sey $m > n$, so verhält sich $Bg : Cg : Bg - Cg = m : n : m - n = P : Q : P - Q^*$, oder $P - Q : P = BC : Bg$. Man ziehe daher durch B eine grade Linie unter einem willkührlichen Winkel gegen BC, trage auf sie von B aus, $BE = P$, und vom Endpunkte E dieser Linie, rückwärts $EF = Q$ auf, (so daß $BF = P - Q$ wird) und ziehe FC so schneidet eine Parallellinie mit FC, durch E gezogen, auf der Verlängerung von B über C hinaus den gesuchten Punkt g ab. Denn wegen des Parallelismus dieser Linien verhält sich $BC : Bg : Cg = BF : BE : EF^* = P - Q : P : Q^*$, ^{V. 4.β.} 7. 2, folglich $Bg : Cg = m : n$.

Ist dagegen $m < n$, mithin auch $P < Q$ und $BE < EF'$, so fällt der Punkt F' über B hinaus, auf dem Stück der willkührlich gezogenen Linie, welche mit dem erstern gegen B auf entgegengesetzte Art liegt, und zieht man nun CF' , und mit ihr durch E eine Parallellinie, so durchschneidet auch diese die Linie BC, nur auf der entgegengesetzten Verlängerung, über B hinaus.

Sollte endlich $m = n$, folglich auch $P = Q$ und $BE = EF$ seyn, so müßten die Punkte B und F, mithin auch die Linien FC und BC zusammen fallen. Eine Parallellinie durch E mit FC, wäre also in diesem Fall auch mit BC parallel, durchschnitte folglich BC auf beyden Seiten verlängert, nie, und es ist dann kein Durchschnittspunkt g möglich.

Wollte man sich indess vorstellen, daß zwey Parallellinien sich in einer unendlichen Entfernung (d. h. aber *gar nicht*) durch-

schneiden, so rückt in diesem Fall der Punkt g ins Unendliche fort. Ein Kreis mit einem Halbmesser Ag beschrieben, gieng dann in einen Kreis, mit einem unendlich großen Halbmesser beschrieben, d. h. in eine grade Linie über, und so würden durch diese bloß eingebildete Idee in Lehrsatz 20 die Fälle, wo ein Ort, der, falls m und n ungleich sind ein Kreis ist, wenn m und n gleich sind, in eine grade Linie übergeht, auf jenen Hauptfall zurückgebracht; und dieses Verallgemeinern ist überhaupt eine der vorzüglichsten Anwendungen, die der Mathematiker von diesen bloß eingebildeten Ideen des Unendlichen macht. Doch gehört dieses mehr in die algebraische Analysis, als hierher.

Zufatz. Sind in einer graden Linie mehrere Punkte, z. B. B, D, C gegeben, und man sucht auf ihr oder ihrer Verlängerung einen Punkt G , der so liegt, daß die Entfernung desselben von den gegebenen Punkten zu einander in gegebenem Verhältniß stehen sollen, z. B. $Bg : Cg : Dg = m : n : p$; so ist dieses nicht für jedes Verhalten, sondern nur unter gewissen Bedingungen möglich. Denn es muß dann z. B. sich verhalten $Bg - Cg : Cg - Dg$ d. h. $BC : CD = m - n : n - p$, welches eine besondere Bedingung für das gegebene Verhältniß $m : n : p$ an die Hand giebt.

Anmerkung. Dieses ist die vollständige Auflösung einer Aufgabe, auf die wir uns in den Folgerungen und Zusätzen zu Lehrsatz 20 durchgehends berufen haben. Das dort Vorgetragene, beruht größtentheils auf ihr, und besonders wird hieraus die *Auslegung* S. 326. 2, ganz deutlich werden. *Apollonius ebne Oerter* II. Lemma 9.)

Die Aufgabe von einer gegebenen Linie BC einen bestimmten Theil, z. B. den sechsten abzuschneiden, oder sie um diesen Theil zu verlängern, ist nur ein besonderer Fall, dieser Allgemeinern.

A U F G A B E 6.

Wenn ein Winkel A , und ein Punkt B gegeben Fig. 80.
sind, durch diesen Punkt eine grade Linie so zu ziehn,
dass durch die Schenkel des Winkels auf ihr zwey Stü-
cke BC , BD abgeschnitten werden, die in einem ge-
gebenen Verhältniß stehn, sich nemlich wie die gegeb-
nen Linien $P:Q$ verhalten.

Liegt der gegebne Punkt B zwischen den beyden
Schenkeln des gegebenen Winkels, so ziehe man durch ihn
eine Parallellinie mit dem einen Schenkel AH , welche
den andern im Punkte E durchschneide, nehme auf
diesem ein Stück ED so, dass AE , ED , den gegebenen
Linien P , Q proportional sind, und ziehe DB , so ist ^{*Afg. 2.}
dieses die verlangte Linie. Denn wegen des Parallelis-
mus der Linie EB , AH , durchschneidet sie auch den
zweyten Schenkel in irgend einem Punkte C *, und ^{*I. 24 Z 3.}
zwar so, dass sich verhält $AE:ED = CB:BD = P:Q$ *. 7.

Liegt der gegebne Punkt B außerhalb des Winkels,
so ziehe man durch ihn und einen beliebigen Punkt
 E des einen Schenkels eine grade Linie, nehme auf
ihr ein Stück BE , so dass BE , BF den gegebenen Linien
 P , Q , proportional sind *, und ziehe durch F eine ^{*Afg. 2.}
Parallellinie mit jenem Schenkel, welche den zweyten
Schenkel in irgend einem Punkte D schneiden muss *, ^{*I. 24 Z 3}
so ist DB die verlangte Linie. Denn wegen des Paral-
lismus der Linie FD , AE , durchschneidet sie den er-
sten Schenkel AE nothwendig in irgend einem Punk-
te C *, und zwar so, dass sich verhält $BC:BD = BE$ ^{*I. 24 Z 3}
 $:BF = P:Q$.

(*Gregorius a St. Vinc. I. 28. 29.*) Man sieht leicht, daß sich diese Aufgaben noch auf mannigfaltige Art abändern lassen, z. B. wenn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel gegeben ist, die Linie durch den Punkt B so zu ziehn, daß die Abschnitte derselben zwischen den beyden parallelen Linien, und zwischen B und dem andern Schenkel, in dem Verhältnisse von P zu Q stehn; eine Aufgabe, die grade so aufgelöst wird (*Greg. I. 25.*)

Zu Satz. Um durch den Punkt B eine grade Linie so zu ziehn, daß sie auf den Schenkeln des gegebenen Winkels zwey Stücke AC, AD abschneide, die sich wie P zu Q verhalten, trage man auf den einen Schenkel $AE = P$, auf den andern $AF = Q$ auf, ziehe EF, und damit parallel durch B, CD. Denn dann verhält sich wegen des

* 7. Parallelismus dieser Linien, $AC : AD = AE : AF$ * = $P : Q$. (*Greg. I. 30.*)

A U F G A B E 7.

Fig. 82. Zu drey gegebenen Linien P, Q, R, die vierte Proportionallinie zu finden

Man bilde einen willkührlichen Winkel K, und trage von der Spitze K aus, auf dem einen Schenkel desselben die erste und zweyte der gegebenen Linien, $P = KA$, $Q = KB$, und auf dem andern Schenkel die dritte Linie $R = KC$ auf, verbinde dann die Endpunkte A, C der ersten und dritten durch eine grade Linie, und ziehe mit dieser durch den Endpunkt B der zweyten eine Parallellinie BX. Das Stück KX, welches diese Parallellinie auf dem zweyten Schenkel abschneidet, ist die gefuchte vierte Proportionallinie.

Denn da die Parallellinien die beyden Schenkel einander Proportional eintheilen, so verhält sich $KA:KB = KC:KX$ *, mithin $P:Q = R:KX$. *7.Z.1.

Bemerkung 1. So wie sich, unbeschadet des vierten Glieds, die mittlern Glieder jeder Proportion vertauschen lassen, so ist es auch für diese Construction ganz gleichgültig, ob man die zweyte oder die dritte der gegebenen Linien, mit der ersten auf demselben Schenkel legt. Nur daß man immer *durch den Endpunkt der erstern Linie*, und der, welche auf dem andern Schenkel liegt, *die grade Linie ziehen muß*, durch welche die Lage der Parallellinie bestimmt wird.

Zieht man *durch die Endpunkte der beyden Linien, welche in der Proportion die mittlern Glieder ausmachen*, eine grade Linie BC , und mit dieser durch den Endpunkt der ersten eine Parallellinie AY , so verhält sich $KA:KB = KY:KC$ und *man erhält daher eine vierte Linie KY , welche mit den drey andern*, nicht, wie unsere Aufgabe verlangt, *direkt*, sondern *verkehrt proportional* ist: und eine solche Linie läßt sich daher auf diese Art immer ganz leicht finden. Eine andre Methode dazu haben wir in Aufgabe 3 kennen gelernt. * *Afg3fr

Bemerkung 2. Ferner ist es nicht nöthig, daß man die drey gegebenen Linien auf den Schenkeln zu einerley Seite des Punktes K , oder überhaupt von diesem Winkelpunkte an auftrage; vielmehr kann man sie ganz willkührlich legen, wenn nur die übereinstimmenden Endpunkte der Linien P, R in zwey Parallellinien fallen. Denn auch in diesem Fall schneiden

7. Z. 2 zwey durch die Endpunkte der Linie Q mit jenen parallel gezogene Linien, vermöge Lehrsatz 7, vom gegenüberstehenden Schenkel ein Stück ab, welches zu den drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie ist. Allein die oben angegebne Construction ist von allen die einfachste.

Bemerkung 3. Auch Lehrsatz 13. Folgerung 2 führt auf ein ganz *bequemes Verfahren*, zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden, welches ich dem Leser selbst zu entwickeln überlasse. Eben so unsere Sätze über den Kreis, besonders Lehrsatz 24 und 25, aus denen leichte und artige Methoden folgen.

Bemerkung 4. Diese Construction ist übrigens für die geometrische Darstellung dasselbe, was die sogenannte *Regel de Tri* für die Arithmetik ist, und für sie nicht weniger wichtig. In so fern man einen jeden Ausdruck wie folgenden $\frac{AB \times AD}{DE}$ als vierte Proportio-

V. 3. α nalgröße zu den Linien DE, AB, AD ansehen kann, dient dieses Verfahren, ähnliche Ausdrücke noch auf eine andre Art in Lineargrößen anzugeben, d. i. zu *construiren*, und bey geometrischen Untersuchungen noch auf eine andre Art zu *übersetzen*, als wir dieses im Vorigen gethan haben*; nemlich durch *vierte Proportionallinie zu den drey Linien DE, AB, AD*; eine Auslegung, die indess vermöge Lehrsatz 4 Folgerung 1. in der That mit der erstern zusammen fällt.

*Afg. 3.
a. 2.

A U F G A B E 8.

Ein gegebenes Parallelogramm, oder ein gegebenes Dreyeck oder ein gegebenes Trapezoid, in eine Figur von einer dieser drey Gattungen zu verwandeln, welche mit der gegebenen gleichen Inhalt hat, und entweder über einer gegebenen Grundlinie MN steht, oder eine gegebne Höhe hat.

Alle einzelnen Aufgaben, welche in dieser allgemeinen enthalten sind, lassen sich durch Auffindung einer vierten Proportionalinie auflösen, und mithin auf die vorige Aufgabe zurückführen, sind aber, wie sie hier ausgedrückt werden, unbestimmt. Denn der Inhalt des Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe bestimmt, der Inhalt des Dreyecks durch die Hälfte dieses Produkts *, und der Inhalt des Trapezoids durch das Produkt aus der Höhe in die halbe Summe beyder Grundlinien *. Sol-
 len folglich zwey Figuren dieser Gattungen gleichen Inhalt haben, so müssen zwey solche Produkte gleich seyn, wodurch eine Proportionalität zwischen den Grundlinien und Höhen beyder gegeben wird *. Nun
 aber sind von der gegebenen Figur, die Grundlinie und die Höhe bekannt, und von der zweyten soll entweder die Grundlinie oder die Höhe gegeben seyn. Folglich kennt man in dieser Proportion drey Glieder, und sucht man aus ihnen, nach der vorigen Aufgabe, die vierte Proportionalinie, so findet man auch der gesuchten Figur Grundlinie oder Höhe, wodurch jedoch diese Figur nicht völlig bestimmt wird.

Nach diesem Fingerzeig entwickle und löse der Anfänger selbst die einzelnen Aufgaben auf, die in dieser allgemeinen enthalten sind. Hier, zum Beyspiel, nur ein Paar.

Fig. 75. *Das gegebne Parallelogramm ABCD in ein Parallelogramm über die gegebne Grundlinie CI zu verwandeln.*

Man suche die Höhe DK des gegebenen Parallelogramms *, und zu CI, CB, DK die vierte Proportionallinie, so ist diese die Höhe des gesuchten Parallelogramms *, und errichtet man auf CI ein Perpendikel, trägt darauf IL, dieser Höhe gleich, und zieht durch L eine Parallellinie mit CI, so schneiden je zwey Parallellinien durch C und I ein Parallelogramm ab, welches der Aufgabe genüge thut. Diese Aufgabe ist also *unbestimmt*, weshalb unzählige Parallelogramme ihr genüge leisten. Bestimmt wird sie, so bald noch der Winkel gegeben ist, unter dem dieses Parallelogramm beschrieben werden soll, wie in Aufgabe 3., und dieses ist, wenn nach Rechtecken gefragt wird, immer der Fall.

Hätte das Parallelogramm ABCD in ein Dreyeck über CI verwandelt werden sollen, so sey die Höhe des gesuchten Dreyecks h. Dann wird der Inhalt des Parallelogramms ausgedrückt durch $BC \times DK$, des Dreyecks durch $\frac{1}{2} CI \times h$ *, und da beyde gleich seyn sollen, muß $BC \times DK = \frac{1}{2} CI \times h$ seyn, folglich sich verhalten $\frac{1}{2} CI : BC = DK : h$ *. Man suche also die vierte Proportionallinie zu $\frac{1}{2} CI$, BC, DK, schneide auf dem Perpendikel auf CI, dieser Linie gleich IM ab, und ziehe durch M mit CI eine Parallellinie; so ist die Pa-

parallelinie der Ort der Spitze des gefuchten Dreyecks*, * 2. Z. und die Aufgabe ebenfalls unbestimmt. etc.

A U F G A B E 9.

Zu zwey gegebenen Linien P , Q , als äußere Glieder einer Proportion, zwey andre Linien r , x , deren Unterschied oder deren Summe einer gegebenen Linie N gleich ist, als mittlere Glieder der Proportion zu finden.

Man ziehe willkührlich zwey Linien, welche sich **Fig. 60.** im Punkte F rechtwinklig durchschneiden.

Im Fall des Unterschieds trage man zu entgegengesetzten Seiten des Punktes F auf die eine dieser Linien $FA = P$ und $FB = Q$, und auf die zweyte Linie $FH = N$. Halbire AB und FH , und errichte auf beyden Linien in den halbirenden Punkten Perpendikel. Der Punkt C , wo diese Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt eines Kreises, der mit AC als Halbmesser beschrieben, auf der zweyten Linie die beyden gefuchten Linien FD , FE abschneidet.

Denn da dieser Kreis vermöge der Construction durch die Punkte A und B geht, so sind AB , DE Sehnen, die sich im Punkte F durchschneiden, folglich $FA : FE = FD : FB$ *; und da das Perpendikel aus dem ***22.f.12** Mittelpunkte C die Sehne DE halbirt, auch $EF = HD$ und mithin $FD - FE = FH = N$.

Im Fall der Summe trage man $FA = P$ und $FB = Q$ zu einerley Seite des Punktes F auf, und verfare im

übrigen wie vorhin. Durchschneidet dann die Kreislinie, die durch A und B geht, die zweyte Linie in den Punkten D, E, so sind jetzt AB, DE Sehnen, die verlängert im Punkte F sich durchschneiden, folglich wiederum $FA:FE = FD:FB^*$, jetzt aber $FD + FE = FH = N$.

In diesem Fall wird jedoch der Kreis die zweyte Linie nur dann durchschneiden, wenn die Summe der beyden Abschnitte $FE + FD = N$ grösser ist, als das Zweyfache der Tangente, die aus F am Kreise gezogen wird *; oder, da das Quadrat dieser Tangente $22f.3.a$ gleich ist dem Rechteck $FA \times FB^*$, nur dann, wenn $N^2 > 4.FA \times FB$ ist. Ist N kleiner, so wird die Aufgabe unmöglich.

Bemerkung 1. Da das Rechteck aus der mittlern von vier Proportionallinien, stets dem Rechteck aus den äussern gleich, mithin in diesem Fall $(N - FE) \times FE = P \times Q$ ist; so läuft diese Aufgabe auf eins mit folgender hinaus: „*Ein Rechteck von gegebenem Inhalt, zu beschreiben, wenn entweder der Unterschied, oder die Summe zweyer anliegenden Seiten desselben gegeben ist.*“ Noch eine andre Form und Auflösung derselben, findet sich in Aufgabe 18.

Bemerkung 2. Wo es überhaupt auf Gleichheit von Rechtecken ankömmt, wird diese Constructionsart vermittelt des Kreises, mehrentheils mit Vortheil gebraucht werden.

Zufatz. Sind die beyden gegebenen Linien P und Q gleich, so geht die gesuchte Proportion, in diese $P:X = Y:P$, und daher unsere Aufgabe (da es gleich-

gültig ist, ob die gesuchten Linien innere oder äußere Glieder in der Proportion ausmachen, in folgende über:

Wenn eine mittlere Proportionallinie P, und von den beyden andern proportionalen Linien, entweder die Summe, oder der Unterschied N gegeben sind, diese Linien selbst zu finden.

Oder: Ein gegebenes Quadrat P^2 in ein Rechteck zu verwandeln, von dessen beyden anliegenden Seiten die Summe oder der Unterschied N gegeben ist.

Oder endlich: Auf einer gegebenen graden Linie N, oder auf deren Verlängerung einen Punkt so zu bestimmen, daß das Rechteck aus den beyden Abschnitten, einem gegebenen Quadrate P^2 gleich sey.

Diese drey Aufgaben fragen, nur unter verschiedener Gestalt, nach ein und dasselbe, und sind ein einzelner Fall unserer allgemeineren Aufgabe. Dadurch daß für sie die gegebenen Linien $P = FA$, und $Q = FB$ gleich sind, wird die Construction in beyden Fällen beträchtlich vereinfacht.

Im Fall des Unterschieds beschreibe über $FH = N$ Fig. 89. als Durchmesser einen Kreis, welchen $FA = P$ berührt, und ziehe von A durch den Mittelpunkt eine grade Linie, welche den Kreis in D und E durchschneide, so sind AD, AE die gesuchten Linien. Denn es ist $AD \times AE = AF^2 = P^2$ und $AD = AE - N$.

Im Fall der Summe beschreibe über $FH = N$ einen Halbkreis, ziehe mit FH in einer Entfernung

gleich P , eine Parallellinie, und fälle vom Punkte, wo sie den Kreis durchschneidet, ein Perpendikel IK auf den Durchmesser, so schneidet dieses auf dem Durchmesser die beyden verlangten Abschnitte FK, KH ab. Denn es ist $FK \times KH = IK^2 = P^2$, und $FK + KH = EH = N$.

A U F G A B E IO.

Wenn zwey Rechtecke, aus den Linien A, B und P, Q , gegeben sind, eine Linie zu finden, zu welcher sich eine Seite des einen Rechtecks, wie der Inhalt beyder Rechtecke zu einander verhält.

Gesetzt es sey X die Linie, zu welcher die Seite A in dem Verhältnisse des Inhalts beyder Rechtecke steht, $A \times B : P \times Q = A : X$; so ist das erste Verhältniß auch gleich dem Verhältniß $A \times B : X \times B^*$; folglich, da die Vorderglieder gleich sind, müssen es auch die Hinterglieder seyn, $P \times Q = X \times B^*$, oder es muß sich verhalten $B : P = Q : X^*$.

Man suche also zu der einen Seite des einen, und zu den beyden Seiten des andern Rechtecks die vierte Proportionallinie*, so verhält sich zu dieser die andre Seite des erstern, wie der Inhalt beyder Rechtecke, oder $A : X = A \times B : P \times Q$.

Bemerkung. Auf diese Art findet man zwey Linien, die im zusammengesetzten Verhältniß zweyer Paar gegebner Linien stehn, $A : X = (A : P) + (B : Q)^*$. Sind die gegebenen Verhältnisse gleich, so ist $A : X = 2(A : P) = A^2 : P^2$ und $A : P = P : X$, da denn diese Auflösung

in

in die übergeht, welche wir in Aufgabe 12 für diesen Fall haben werden. *

* 12. f. 2.

A U F G A B E II.

Zwey Linien darzustellen, deren Verhältniß aus den gegebenen Verhältnissen dreyer Paar Linien A, B, C und P, Q, R zusammengesetzt ist, oder die sich wie die Produkte dreyer Linien, zu den Produkten dreyer andrer Linien * verhalten.

* E. 6.

Geſetzt Y und X ſind die beyden geſuchten Linien, ſo ſoll ſich verhalten $Y : X = A \times B \times C : P \times Q \times R$ oder

$$= \frac{E \times C}{P} : \frac{Q \times R^*}{A} . \text{ Setzt man ſolglich } Y = \frac{B \times C}{P} \text{ * V. 1. } \beta .$$

und $X = \frac{Q \times R}{A}$, ſo erhält man gewiß zwey Linien in

dem geſuchten Verhältniß, und von dieſen Linien iſt dann die *Eine* die vierte Proportionallinie zu P, B, C, und die *Andre* die vierte Proportionallinie zu A, Q, R *.

* Afg. 7.
B. 3.

Zuſatz I. Soll, wie in der vorigen Aufgabe, eine der gegebenen Linien, z. B. A, das Vorderglied des geſuchten Verhältniſſes ſeyn, ſich ſolglich verhalten $A \times B \times C : P \times Q \times R = A : X = A \times B \times C : X \times B \times C^*$; ſo muß, wegen Gleichheit der Vorderglieder, $P \times Q \times R = X \times B \times C$, mithin $B \times C : Q \times R = P : X$ ſeyn. Denkt man ſich daher eine Linie Z ſo, daß ſich verhalte $B : Z = P : X$ mithin auch $B \times C : Z \times C = P : X$, ſo muß dieſe Linie ſo beſchaffen ſeyn, daß $Q \times R = Z \times C^*$, ſolglich $C : Q = R : Z$ iſt. — Sucht man daher zu C,

* V. 1. } \beta .

* V. 3 } \alpha

Q, R die vierte Proportionallinie Z, und dann zu B, Z, P abermals die vierte Proportionallinie, so erhält man die gefuchte Linie X, zu welcher A in dem verlangten Verhältnisse steht.

Zufatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel Verhältnisse gegeben seyn, und man sucht ein Verhältniß $G : X$, welches aus allen diesen gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt ist, so findet man dieses durch fortgesetzte Auffindung vierter Proportionallinien a, b, c etc., z. B.

$$A : P = G : a$$

$$B : Q = a : b$$

$$C : R = a : X$$

so ist, wenn man zusammensetzt $G : X = (A : P) \dagger$
 * V. 4 d. $(B : Q) \dagger (C : R) = A \times B \times C : P \times Q \times R$ *

A U F G A B E 12.

Fig. 82. Zu zwey gegebenen Linien P, Q die dritte Proportionallinie zu finden.

Diese Aufgabe fordert eine stetige Proportion zu denken, worin die mittlern Glieder beyde der zweyten V. 5. ten gegebenen Linie gleich sind *, und zu dieser die vierte Proportionallinie zu finden. Man wiederhole daher die Construction der siebenten Aufgabe, nur daß man jetzt $Q = KB$ auf beyde Schenkel des Winkels K auftrage, und man ziehe AB' und damit parallel BC , so ist KC die gefuchte dritte Proportionallinie. Denn es verhält sich $KA : KB = KB : KC$.

Fig. 88. Oder setze auf dem Endpunkte von $P = AD$, die zweyte Linie $Q = DF$ senkrecht, ziehe AF , und errichte

darauf im Punkte F ein Perpendikel. Wenn dieses die verlängerte AD im Punkte B durchschneidet, so ist BD die dritte gefuchte Proportionallinie. Denn es ist dann $AD:DF = DF:DB$ *.

Oder beschreibe einen Kreis, trage P und Q von demselben Punkte A aus als Sehnen hinein, und ziehe vom Endpunkt der einen eine Parallellinie mit der Tangente durch A, so ist das Stück AM oder Aγ, welches diese Parallellinie auf der andern, oder auf deren Verlängerung abschneidet, die dritte Proportionallinie zu den beyden Sehnen *.

Und solcher Auflösungen mehrere; die sich ohne Schwierigkeit aus unsern Sätzen über den Kreis ausheben lassen.

Folgerung 1. Da zu den Zahlausdrücken der beyden Linien KA, KB die dritte Proportionalzahl

$\frac{KB^2}{KA}$ ist *, so muß dieses auch der Zahlausdruck für die dritte Proportionallinie KC seyn. Folglich dient diese Construction einen solchen Ausdruck in Lineargrößen anzugeben, d. i. zu construiren: und man ist umgekehrt berechtigt bey geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck durch dritte Proportionallinie zu den Linien KA und KB zu übersetzen.

Folgerung 2. Setzt man die gleichen Verhältnisse in dieser stetigen Proportion zusammen *, so sieht man, daß sich verhalte $KA:KC = 2(KA:KB) = KA^2:KB^2$, d. h. daß das Verhältniß der ersten zur dritten Pro-

portion $KA:KB = \sqrt{2} \cdot \frac{KA}{KB}$ ist. V. 9.

portionallinie noch einmal so hoch, als das Verhältniß der ersten zur zweyten, oder dem Verhältnisse der zweyten Potenzen aus den Zahlausdrücken dieser Linien, mithin dem Verhältnisse der Quadrate über diese Linien, gleich *4. Z. 2. ist*.

α) Um folglich zwey Linien zu bilden, die sich wie zwey gegebne Quadrate verhalten, braucht man nur zu den Seiten dieser Quadrate die dritte Proportionallinie zu finden;

β) und umgekehrt findet man die Seiten zweyer Quadrate, die sich wie zwey gegebne Linien verhalten, wenn man zwischen diesen beyden Linien die mittlere Proportionallinie bildet*; wichtige Bemerkungen, von denen wir im folgenden Buche häufig Gebrauch machen werden.

Folgerung 3. Fährt man in der angegebenen Construction fort, trägt ferner KC' auf den zweyten Schenkel auf, und zieht $C'D$ parallel mit $B'C$, so ist wiederum KD die dritte Proportionallinie zu KB und KC ; trägt man weiter KD' auf den andern Schenkel und zieht $D'E$ parallel mit $C'D$, eben so KE die dritte Proportionallinie zu KC und KD u. s. f.

Auf diese Art läßt sich folglich eine ganze Reihe stetig proportionaler Linien KA, KB, KC, KD etc. bilden, wo jede die dritte Proportionallinie zu den beyden vorhergehenden, und die mittlere Proportionallinie zwischen der nächst vorhergehenden und folgenden ist, so daß sich verhält $KA : KB = KB : KC = KC : KD = KD : KE$ etc.

Setzt man diese stetigen Verhältnisse Schrittweise zusammen *, so erhält man * V. 6.

$$KA : KC = 2 (KA : KB) = KA^2 : KB^2$$

$$KA : KD = 3 (KA : KB) = KA^3 : KB^3$$

$$KA : KE = 4 (KA : KB) = KA^4 : KB^4 \text{ etc.}$$

Man wird daher durch diese Construction im Stande gesetzt *Linien zu bilden, welche sie wie irgend zwey Potenzen von gleichem Grade aus den Zahlausdrücken zweyer gegebner Linien KA, KB verhalten.*

Allein wenn zwey Linien, wie KA, KE gegeben sind, die Linie KB zu finden, so daß KA : KE sich z. B. wie KA⁴ : KB⁴ verhielte, dazu erhalten wir durch diese Construction kein Mittel.

Anmerkung 1. Andere Mittel eine ganze Reihe solcher stetig proportionaler Linien zu bilden, giebt Lehrsatz 24. Folgerung 1, und Lehrsatz 25. Folgerung 3 an die Hand, und wer diese Construction interessant findet, wird sie ohne Schwierigkeit daraus entwickeln können. Die leichteste Methode verspare ich für das folgende Buch.

Anmerkung 2. Um ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck, oder in ein Dreyeck etc. über gegebner Grundlinie zu verwandeln, muß man auf eine ähnliche Art, wie in Aufgabe 8, zur gegebenen Grundlinie und zur Seite des gegebenen Quadrats eine dritte Proportionallinie suchen. Dieses drückt z. B. Tacquet folgendermaßen aus: *ad datam rectam AB, datae rectae M quadratum facile est applicare, inveniendò rectis AB, M tertiam proportionalem CD et rectangulum ABCD construendo. Est enim dato quadrato M² aequale rectangulum, ad rectam AB applicatum.* Fig. 83.

A U F G A B E 13.

1) Zwischen zwey gegebenen graden Linien P und Q eine mittlere Proportionallinie zu finden, und Fig.

2) zwischen einer graden Linie AB und einem gegebenen Abschnitt derselben AD , eine mittlere Proportionallinie darzustellen.

1) Man trage die beyden gegebenen Linien auf eine willkürlich gezogene grade Linie nebeneinander, $AD = P$ und $DB = Q$, beschreibe um die Summe beyder AB als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AB im Punkte D ein Perpendikel. Durchschneidet dieses den Kreisbogen im Punkte E , so ist DE die gesuchte mittlere Proportionallinie. Denn es verhält sich dann vermöge der Natur des Kreises $AD : DE = DE :$

*22.f.1α DB *.

2) Soll zu AB und dem Abschnitt AD dieser Linie, die mittlere Proportionallinie gefunden werden, so beschreibe man wiederum um die ganze Linie AB als Durchmesser einen Kreis, errichte in D das Perpendikel DE , und ziehe von Punkte E , wo dieses die Kreislinie durchschneidet, nach A eine Sehne AE , so ist diese Sehne die gesuchte mittlere Proportionallinie. Denn vermöge der Natur des Kreises verhält sich dann $AD : AE$

*22, Z.1 = $AE : AB$ *.

Oder man beschreibe um AB irgend einen beliebigen Kreisabschnitt, ziehe durch A eine Tangente an demselben, da mit durch D eine Parallellinie, und nach dem Punkte F , wo diese den Kreisbogen durchschneidet AF , so ist AF die gesuchte mittlere Proportionallinie *.

*25.f.3. nallinie *.

Oder man beschreibe um den übrigen Theil DB der gegebenen Linie, als Sehne, oder Durchmesser,

einen Kreis, und ziehe an diesen vom Punkte A aus eine Tangente AG, so ist AG die gesuchte mittlere Proportionallinie *.

*22f.1.8

Folgerung. Die mittlere Proportionallinie zwischen zwey Linien, kann nie grösser seyn, als die Hälfte der Summe beyder Linien. Denn kein Perpendikel auf dem Durchmesser, das bis an die Kreislinie reicht, kann grösser seyn als der Halbmesser. Und so folgt auch aus der Construction, dieser aus der Arithmetik bekannte Satz.

Bemerkung 1. Da zu den Zahlausdrücken zweyer Linien P, Q die mittlere Proportionalzahl $\sqrt{P \times Q}$ ist *, so muß diese auch der Zahlausdruck * V, 5: für die mittlere Proportionallinie M seyn. Ein Ausdruck, wie $\sqrt{P \times Q}$, d. i. eine Quadratwurzel, läßt sich daher mittelst des Verfahrens in dieser Aufgabe in Lineargrößen darstellen, und folglich durch Verbindung derselben mit den Verfahren der vorigen Aufgaben, jede reine Quadratische Gleichung construiren. Was die Construction einer unreinen quadratischen Gleichung betrifft, so verspare ich sie für die Bemerkungen am Ende der Planimetrie.

Bemerkung 2. Ist M die mittlere Proportionallinie zwischen P und Q, so verhält sich $P : M = M : Q$, und $P : Q = P^2 : M^2 = M^2 : Q^2$, wie wir schon in der vorigen Aufgabe bemerkt haben *.

*Afg. 12
f. 2.

α) Sind vier Linien proportional, $A : B = C : D$, und man nimmt zwischen den ersten A, B und zwischen den letzten C, D mittlere Proportionallinien M, N, so sind auch

diese mit den Vordergliedern, und eben so mit den Hintergliedern der gegebenen Proportion, proportional. Denn es verhält sich $A : B = A^2 : M^2 = M^2 : B^2$ und $C : D = C^2 : N^2 = N^2 : D^2$. Wenn also die vordern Verhältnisse gleich sind, so sind es auch die hintern, $A^2 : M^2 = C^2 : N^2$, also auch $A : M = C : N$ *; oder $M : B = N : D$, oder $A : M = N : D$.

β) Grade so sind in gleichen Verhältnissen $A : B = C : D$ die dritten Proportionallinien P, Q mit den Vordergliedern, und folglich auch mit den Hintergliedern proportional. Denn es verhält sich $A^2 : B^2 = A : P$ und *Afg. 12 f. 2. $C^2 : D^2 = C : Q$ *, mithin $A : P = C : Q$ und $A : C = B : D = P : Q$.

γ) Da im Kreise die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen einer verlängerten Sehne und der *22.f.1 δ Verlängerung ist, $AE : AG = AG : AF$ *, so verhält sich immer $AE : AP = AE^2 : AG^2$: und auf diese Art lassen sich andere brauchbare Sätze mittelst dieser Bemerkung aus unsern Lehrsätzen ableiten.

Bemerkung 3. Sucht man erst zwischen zwey gegebenen Linien P, Q , die mittlere Proportionallinie M , und fährt dann fort zwischen P, M und zwischen M, Q mittlere Proportionallinien zu suchen, so erhält man zwischen $P, Q, 2 + 1$, d. i. drey, und fährt man mit diesen wieder eben so fort, $4 + 3$, d. i. sieben mittlere Proportionallinien u. s. f. Aber auf zwey, vier oder fünf mittlere Proportionallinien kömmt man durch diese Construction nicht. Jene geben Constructionen von Wurzeln des vierten, achten, sechzehnten Grades u. s. f.

Diese würden Constructionen von Wurzeln des dritten, fünften Grads, u. s. f. an die Hand geben; allein zu solchen Constructionen reicht die Elementargeometrie nicht hin. Man lese deshalb Lehrsatz 22 Zusatz 4, Lehrsatz 24. Folgerung 2, und die Bemerkungen am Ende dieses Werkes nach.

A U F G A B E 14.

Eine gegebne gradelinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Dieses geschieht durch Auffindung *mittlerer Proportionallinien*, und also durch die Verfahren der vorigen Aufgabe, durch welche man jedesmal die Seite des gesuchten Quadrats, und zwar auf verschiedenen Wegen, finden kann.

α) Bey einem gegebenen *Rechteck* ABCD, suche zwischen den beyden anliegenden Seiten AB, BC die mittlere Proportionallinie M, so ist $M^2 = AB \times BC$ *, folglich das gesuchte Quadrat. Fig. 84.
*14. f. 3.

β) Bey einem gegebenen *Parallelogramm*, suche eben so zwischen der Grundlinie, g, und Höhe, h; — bey einem gegebenen *Dreyeck* zwischen der Grundlinie, g, und halben Höhe, $\frac{1}{2} h$; — und bey eine gegebenen *Trapezoid* zwischen der halben Summe beyder Grundlinien, $\frac{1}{2} (G + g)$, und der Höhe, h, die mittlere Proportionallinie M, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats. Denn es ist dann M^2 im ersten Fall gleich gh, im zweyten $\frac{1}{2} gh$, im dritten $\frac{1}{2} (G + g) h$,

und dieses sind die Zahlausdrücke für den Inhalt der *5. u. 6. drey gegebenen Figuren*.

7) *Andere unregelmässige Vielecke* verwandle man *Afg. 1. erst in ein grosses Dreyeck*, so lassen auch sie sich nach β in ein Quadrat von gleichem Inhalt umbilden. Und dieses ist eine von den Constructionen, auf die wir uns in den Folgerungen zu Lehrsatz 20, und bey den fernern geometrischen Oertern; oft bezogen haben.

Folgerung. Jedes gradelinige Vieleck läßt sich also im eigentlichen geometrischen Sinn quadriren.

Anmerkung. Der Ausdruck *eine Figur quadriren* oder *die Quadratur einer Figur* finden, läßt sich im *geometrischen* oder im *arithmetischen* Sinn nehmen. In jenem, welcher der *eigentliche* und *ursprüngliche* ist, bedeutet er: ein *Quadrat geometrisch darstellen*, welches mit der *Figur gleichen Inhalt hat*, und das können wir bey jedem gradelinigen Vieleck mittelst dieser Construction bewerkstelligen. In diesem, dem *arithmetischen Sinn*, bedeutet er. „einen *Zahlausdruck für den Inhalt der Figur* *4. Z. *in Flächeneinheiten (Quadraten*)* finden, wenn man den *Zahlausdruck gewisser Linien*, in ihr in *Lineareinheiten* kennt.“ Aus der geometrischen Quadratur folgt daher leicht die arithmetische, nicht aber umgekehrt; denn das bilden eines Quadrats dem gefunden Zahlausdruck gemäß, darf man wohl kaum eine geometrische Construction nennen. — Man sieht hieraus, was die *Quadratur des Kreises*, und die *Quadratur der Curven* sagen will. — Die arithmetische Quadratur ist im Grunde nichts anders als die *Berechnung der Figur*, d. h. die Bestimmung des Zahlausdrucks für ihren Inhalt, aus dem Zahlausdruck der Seiten, und da dieses für die Anwendung das eigentlich brauchbare und wichtige ist so pflegt man, mit seltenen Ausnahmen, diese Bestimmung des Inhalts, oder die arithmetische Quadratur zu verstehn, wenn man von Quadratur des Kreises oder der Curven spricht.

A U F G A B E 15.

Ein Quadrat zu bilden, welches der Summe *Fig. 85.*
zweyer oder mehrerer gegebner Quadrate gleich ist.

α) Man beschreibe einen rechten Winkel A, trage auf seine Schenkel die Seiten der beyden gegebenen Quadrate $AB = M$ und $AC = N$ auf, und ziehe EC, so ist diese Linie die Seite des Quadrats, welches den beyden Quadraten über M und über N zusammengenommen gleich ist. Denn BAC ist vermöge der Construction ein rechtwinkliges Dreyeck, folglich dem Pythagoreischen Lehrsatze zu folge $BC^2 = AE^2 + AC^2 = M^2 + N^2$ *.

* 121

β) Soll das gefuchte Quadrat den drey Quadraten über M, N, P gleich seyn, so errichte man aufs neue im Punkte C auf AC ein Perpendikel, trage auf dieses $CD = P$ auf, und ziehe BD, so ist $BD^2 = BC^2 + CD^2 = M^2 + N^2 + P^2$, also BD die Seite des gefuchten Quadrats.

γ) Grade so fährt man fort, wenn man ein Quadrat sucht, welches vier, oder fünf oder mehreren gegebenen Quadraten zusammengenommen gleich ist, indem man Schrittweise die Seiten der Quadrate sucht, welchem vier, fünf, sechs u. f. f. der gegebenen Quadrate zusammengenommen gleich sind.

Zusatz I. Auf diese Art lassen sich also auch *Fig. 86.*
Schrittweise Seiten von Quadraten finden, welche den doppelten, dreyfachen, vierfachen Inhalt u. f. f. eines gegebenen Quadrats M^2 haben, dergleichen die sogenannte Flächen-
seite des Visirstaabs zum Messen cylindrischer Gefäße, oder

von Tonnen angeht. Zu dem Ende trage man auf beyde Schenkel des rechten Winkels, AB und AB' gleich M , d. i. gleich der Seite des gegebenen Quadrats auf; so wird BB' die Seite des doppelten Quadrats, $2 M^2$. Mit dieser schneide man von A aus, $A_2 = BB'$ ab, so ist B_2 die Seite des dreyfachen Quadrats $3 M^2$. Schneidet man mit dieser wieder $A_3 = B_2$ ab, und zieht B_3 , so erhält man die Seite des vierfachen Quadrats $4 M^2$, mit der man wieder A_4 abschneide, u. s. f. Und so erhält man einen Maafsstab AE , vermöge dessen man den Inhalt jedes gegebenen Quadrats sogleich, aus dessen Seite, mit dem Inhalt des bekannten Quadrats M^2 , vergleichen kann. Man fasse die Seite mit dem Zirkel, und trage sie auf AE von A aus auf. Schneidet sie da z. B. die Länge A_5 ab, so ist der Inhalt jenes Quadrats das Fünffache vom Inhalt des Bekannten. Kleinere Abtheilungen in Hälften, Viertel etc., lassen sich mittelst der folgenden Aufgabe finden.

Zusatz II. Wollte man ein Quadrat haben, welches das Zwanzigfache eines gegebenen ist, so suche man erst das doppelte Quadrat, aus diesem das Vierfache, und aus diesem sammt dem Gegebenen, das Fünffache. Aus den Fünffachen findet man das Zehnfache, und aus diesem das Zwanzigfache.

A U F G A B E 16.

Fig. 87. *Ein Quadrat zu bilden, welches dem Unterschiede zweyer oder mehrerer gegebenen Quadrate gleich ist.*

α) Man beschreibe wiederum einen rechten Winkel A, trage auf den einen Schenkel desselben die Seite des kleinern Quadrats $N = AC$ auf, und beschreibe mit der Seite des größern M , als Halbmesser, um D als Mittelpunkt, einen Kreisbogen. Schneidet dieser den andern Schenkel in B, so ist AB die Seite des gesuchten Quadrats. Denn das so beschriebne Dreyeck ist rechtwinklig, und deshalb $AB^2 = BC^2 - AC^2 = * *_{12. f. 1.} M^2 - N^2$.

β) Soll das gesuchte Quadrat dem Unterschiede zweyer Quadrate N^2 und P^2 von M^2 gleich seyn, so suche man wieder auf dieselbe Art den Unterschied von AB^2 und P^2 u. s. f., so dafs man also auf diese Art beliebig viel Quadrate, von einem Gegebenen, welches gröfser ist als alle zusammen genommen, abzieln kann.

Zusatz. Auf dieselbe Art bildet man ein rechtwinkliges Dreyeck, wenn die Hypotenuse M und eine der Katheten N gegeben sind; welches sich auch folgendermaafsen bewerkstelligen läfst: beschreibe über die Hypotenuse M einen Halbkreis, und um ihren Endpunkt, mit der gegebenen Kathete N einen Kreisbogen. Wo dieser den Halbkreis durchschneidet, da ist die Spitze des gesuchten rechtwinkligen Dreyecks. Denn der Halbkreis ist der Ort der Spitze *, und der angegebne Punkt der, welcher durch die gegebne Gröfse der Kathete bestimmt wird. * II. 26.
f. 2.

So kann man folglich rechtwinklige Dreyecke beschreiben, wovon die eine Kathete die Hälfte, oder das Drittel, oder das Viertel der Hypotenuse ist etc.

Anmerkung. Da sich jedes Vieleck in ein Quadrat ver-
 *Afg. 14. wandeln läßt *, so findet man mittelst des Verfahrens in dieser
 und der vorigen Aufgabe ohne Schwierigkeit ein Quadrat,
 welches die Summe oder dem Unterschiede gegebner gradeliniger
 Figuren gleich ist; Constructionen, auf die wir uns im letzten
 Theil des dritten Buchs mehreremal bezogen haben.

A U F G A B E 17.

Fig. 88. Ein Quadrat zu beschreiben, zu welchem ein
 gegebenes Quadrat M^2 , in dem Verhältnisse zweyer
 gegebenen Linien P, Q steht.

Nimmt zwischen den gegebenen Linien P, Q die
 mittlere Proportionallinie V , so verhält sich $P : Q =$
 *13. B. 2. $P^2 : V^2$ *. Folglich stehn die Quadrate über P und V
 in demselben Verhältniß als das gegebne und das ge-
 suchte Quadrat, weshalb auch ihre Seiten proportional
 *4. f. 3. sind *. Mithin ist die Seite des gesuchten Quadrats die
 vierte Proportionallinie zu P, V und AB .

Diese beyden Operationen lassen sich indess in-
 einander ziehn, und auf solche geschickte Zusammen-
 ziehungen beruht die Eleganz geometrischer Auflöfun-
 gen, wozu häufig, wie auch hier, geometrische
 Theoreme den Weg zeigen.

Trage z. B. auf eine beliebige Linie $AD = P$ und
 $AB = Q$ auf, beschreibe über AB einen Halbkreis,
 errichte in D ein Perpendickel, welches den Kreisbo-
 gen in F durchschneide, und ziehe AF , so verhält sich
 *12. f. 28 $AF^2 : AE^2 = AD : AB$ *. Trägt man daher auf AF
 von A aus, die Seite M des gegebenen Quadrats auf,
 $AG = M$, zieht FB , und damit parallel GH ; so ist GH
 die Seite des gesuchten Quadrats. Denn wegen des

Parallelismus dieser Linien verhält sich $AF : AB = AG : AH$, d. h. $= M : AH$, mithin auch $M^2 : AH^2 = AF^2 : AB^2 = * P : Q$.

* 4. f. 3.

Noch andre Constructionen lassen sich aus Lehrf. 12. Folg. 2. δ, ϵ ; und Lehrfatz 22, Zusatz 1. β, γ ; und nicht minder elegante von ganz andrer Art, aus Lehrfatz 25. Folg. 3, Lehrfatz 20. Zusatz 5, und aus dem schönen Ort am Kreise in Lehrfatz 20. Zusatz 7 herleiten, welches ich dem Leser, dem dieses Vergnügen machen wird, selbst überlasse.

A U F G A B E 18.

Eine gegebne grade Linie AB so zu verlängern, Fig. 90. daß das Rechteck aus der verlängerten Linie AF, und der Verlängerung BF, dem Rechteck aus zwey gegebenen Linien P und Q gleich, oder $AF \times BF = P \times Q$ sey.

Nimm zwischen P und Q die mittlere Proportionalinie M, so soll $AF \times BF = M^2$ seyn. Beschreibt man folglich über AB einen Halbkreis, so kömmt es darauf an, eine berührende Linie so zu ziehen, daß die verlängerte AB ein Stück von ihr, gleich M, abschneidet. Zu dem Ende ziehe durch B eine Tangente, mache $BD = M$, und schneide vom Mittelpunkte C aus, auf der verlängerten AB, $CF = CD$ ab, so ist BF die gesuchte Verlängerung.

Denn zieht man CD, welche Linien den Kreis in E durchschneide, und EF, so decken sich die beyden Dreyecke CBD, CEF, daher EF auf dem Halbmesser CE in seinem Endpunkte senkrecht steht, also den Kreis berührt*, und überdem gleich BD, d. i. gleich * II. 12. M, folglich $M^2 = AF \times BF$ * ist.

* 22. 2.

Fig. 83. *Zufatz. Soll die gegebne grade Linie AB selbst so eingetheilt werden, daß das Rechteck aus ihren beyden Stücken $AD \times BD$ dem gegebenen Rechteck $P \times Q$ gleich sey, so beschreibe man wiederum über AB einen Halbkreis, ziehe mit AB eine Paralellinie, in einer Entfernung, gleich der mittlern Proportionallinie M, und fälle vom Durchschnittspunkt derselben mit der Kreislinie, ein Perpendikel auf dem Durchmesser, so theilt dieser die*
 * 22. I. *Linie AB* auf die verlangte Art ein; wobey aber erfordert wird, daß M nicht gröfser als $\frac{1}{2}$ AB sey.*

Anmerkung. Beyde Aufgaben werden auf diese Art durch eine leichtere Contruction als in Aufg. 9, wo wir sie schon einmal, nur unter einer andern Form gehabt haben, aufgelöst.

A U F G A B E 19.

Eine gegebne grade Linie BH, so in zwey Theile BF, FH einzutheilen, daß das Quadrat des einen Theils, gleich sey dem Rechteck aus dem andern Theile und einer gegebenen Linie P, oder $BF^2 = P \times FH$.

Nimm auf die Verlängerung von HB, BA gleich P, so soll $BF^2 = AB \times FH$, und folglich, wenn man beyderseits $AB \times BF$ hinzufügt, $AF \times FB = AB \times BH$ seyn. Nun aber sind AB, BH gegeben; folglich tritt hier der Fall der vorigen Aufgabe ein.

Beschreibe also über AH einen Halbkreis, so ist das Perpendikel BD die mittlere Proportionallinie zwischen AB, BH*, und beschreibt man um AB einen Halbkreis, welcher CD in E durchschneidet, und errichtet

richtet in E das Perpendikel EF auf diese Linie, so wird $EF^2 = AF \times FB$, und mithin ist F der gefuchte Punkt, der BH auf die verlangte Art eintheilt.

Anmerkung. Im Fall die gegebne Linie P, gleich der einzutheilenden BH ist, wird $BF^2 = BH \times FH$, oder das Quadrat des einen Theils ist dann gleich dem Rechteck aus dem andern Theil und der ganzen Linie; oder die beyden Theile und die ganze Linie bilden eine stetige Proportion. Von dieser Eintheilung einer Linie nach stetigem Verhältniss, werden wir im folgenden Buche einige interessante Eigenschaften und Anwendungen kennen lernen.

A U F G A B E 20.

Eine grade Linie AB, in welcher ein Punkt E Fig. 91. gegeben ist, aufs neue so in einem Punkte D einzutheilen, das $AD^2 = ED \times DB$ sey.

Vermöge dieser Forderung muß der Punkt D so liegen, das, wenn durch B und F ein Kreis beschrieben wird, die Tangente aus D nach der Kreislinie gezogen, gleich AD ist *.

* 12. 2.

Man halbire daher EB im Punkte G, errichte in G ein Perpendikel, nehme GK gleich GA, und beschreibe um CKB einen Kreis *. Vom Punkte H, wo AK diese Kreislinie durchschneidet, falle man auf AB ein Perpendikel HD, so theilt dieses die Linie AB auf die verlangte Art ein.

* II. Af. 15

Denn weil AEK vermöge der Construction ein rechtwinkliges, gleichschenkliches Dreyeck ist, sind die Winkel A, K der Hälfte eines rechten Winkel gleich *. Eben so groß sind mithin in den rechtwink-

* I. 31. f. 2.

ligen Dreyecken ADH, KIH die Winkel bey H, folglich diese Dreyecke beyde gleichschenklig, $AD = DH$, und $HI = IG$, weshalb das Perpendikel HI im Mittelpunkte auf FG aufsteht, und ein Halbmesser * II. 12. seyn muß. Daher ist HD eine Tangente *; folglich $DH^2 = AD^2 = DC \times DB$, folglich AB auf die verlangte Art eingetheilt. (Greg. I. 73.)

Diese und die beyden vorigen, so wie alle ähnlichen Aufgaben, lassen sich nach Anleitung des Zusatzes zu Aufgabe 9 noch auf ganz verschiedene Art ausdrücken, welche ich dem Leser überlasse.

A U F G A B E 21.

Fig. 92. Von einem gegebenen Punkte A ausserhalb eines Kreises eine grade Linie so zu ziehn, daß sie von der Kreislinie, zweyen gegebenen Linien P, Q proportional eingetheilt werde.

Gesetzt es sey AEF die gesuchte Linie, so soll sich verhalten $P : Q = AE : EF$, folglich auch $P : P + Q = AE : AF$. Zieht man nun von A die Tangente *II Afg. 14. AG *, so ist AS die mittlere Proportionallinie zwischen AE und AE *. Man suche daher zwischen P und $P + Q$ *Afg. 12. die mittlere Proportionallinie M *, so muß sich verhalten $P : M = AE : AG$. Nun sind P, M und AG gegeben. Man suche daher zu M, P und AG die vierte Proportionallinie, und beschreibe mit ihr um A einen Kreisbogen. Wo dieser den gegebenen Kreis durchschneidet, da ist der Punkt E, durch den AE gezogen, die verlangte Linie giebt.

Denn verhält sich $AG : AE = M : P$, so ist auch $AG^2 : AE^2 = M^2 : P^2$. Und da AG und M mittlere Proportionallinien, erstere zwischen AF, AE , letztere zwischen $P + Q$ und P sind; sich mithin verhält $AF : AE = AG^2 : AE^2$, und $P + Q : P = M^2 : P^2$; so verhält sich auch $AF : AE = P + Q : P$ und $FE : AE = Q : P$.

Bestimmung. Geht ABD durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist AB die kleinste, AD die größte von allen Linien, die von A aus nach dem Kreise gezogen werden können *, und daher hat von allen ähnlichen Verhältnissen, das der Abschnitte $AB : BD$ den größten Exponenten *. Folglich darf $\frac{Q}{P}$ nicht größer als $\frac{BD}{AB}$ seyn, v. 1. 2. sonst ist die Aufgabe unmöglich. (Greg. III. 46.)

A U F G A B E 22.

Das Verhältniß zwischen der Seite AB und der Diagonale AC eines Quadrats zu finden. Fig. 93.

Beschreibe um C mit der Seite BC als Halbmesser einen Kreis, so berührt die Seite AB diese Kreislinie, denn sie steht auf dem Endpunkte des Halbmessers CB senkrecht *. Daher verhält sich $AD : AB = AB : AE$, * II. 12. und AD ist derselbe Theil von AB , als AB von AE .

oder $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$. Nun aber ist AE gleich $2 CD + AD$, * V. 1. 2.

folglich auch $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{2 AB + AD} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}$. In dem * Afg 19. Z. 2.

letzten Ausdruck läßt sich für $\frac{AD}{AB}$ dieser Ausdruck

selbst wieder setzen, da denn $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}$ wird, und

da sich der Stufenbruch, der so entsteht, immer wieder mit dem Bruch $\frac{AD}{AB}$ endigt, so kann man mit dieser

Substitution ohne Ende fortfahren, daher der Exponent

$\frac{AD}{AB}$ durch einen Stufenbruch von der Form

$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}$, der ohne Ende fortläuft, gegeben wird. Es

läßt sich also AD nicht in Theilen von AB ausdrücken, *Afg. 19 und beyde Linien sind incommensurabel*. Mithin auch die Diagonale und die Seite des Quadrats, da die Diagonale AC gleich $AB + AD$ ist, und also, wenn man die Seite AB als Einheit annimmt, der Zahlausdruck der Diagonale AC, $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}$ wird; ein Aus-

druck, dessen Werth sich nie genau in Zahlen darstellen läßt, weil er ohne Ende fortgeht, und dem man sich nur nähern kann, ohne ihn je völlig zu erreichen.

Anmerkung. Auf diesem Wege wird die Incommensurabilität zwischen der Diagonale und der Seite eines jeden Quadrats, die wir übrigens schon oben dargethan haben *, noch evident. * 12. Z. Zugleich ist dieses ein unterrichtendes Beyspiel der leichtesten Methode, wie sich die Incommensurabilität von Ausdehnungen, in geometrischen Untersuchungen erweisen läßt.

Erklärungen der Marginalien.

Die römischen Zahlen sind die Zahlen, die man in diesem Buche und arabische Zahlen vor dem Buche römische haben einen Satz in demselben Buche, wenn das Citat verstanden, z. B.

II. q. den 1sten Buches des zweiten Buches;
 18. den 18ten Buches des gegenwärtigen Buches;
 also des zweiten Buches, wenn das Citat in
 zweiten Buche steht.

I bedeutet eine Erklärung, und diese steht zu An-
 fang jedes Buches z. B. I. E. 10. die 10te Erklärung
 lang an der Spitze des ersten Buches;

2. einen Absatz, z. B. I. 10. 2. 27

Erklärungen der Marginalien.

Die *römischen Zahlen* bezeichnen das Buch, die *arabischen*, die dahinter stehn, den gemeinten Satz in diesem Buche, und *arabische Zieffern vor denen keine römische stehn*, einen Satz in demselben Buche, worin das Citat vorkömmt, z. B.

II. 9. den 9ten Lehrsatz des zweyten Buchs;

18. den 18ten Lehrsatz des gegenwärtigen Buchs, also des zweyten Buchs, wenn das Citat im zweyten Buche steht.

E bedeutet eine *Erklärung*, und diese stehn zu Anfang jedes Buchs, z. B., I. E. 16., die 16te Erklärung an der Spitze des ersten Buchs;

Z. einen *Zusatz*, z. B., I. 16. Z. 2;

f. eine *Folgerung*, z. B., III. 22. f. 1. ε., den Satz ε
in der ersten Folgerung zum 22sten Lehrsatz des
dritten Buchs;

a. oder A eine *Anmerkung*, z. B., III. 4. a. 1;

B. eine *Bemerkung*;

Afg. oder A. eine *Aufgabe*, die insgesammt am Ende
des zweyten und dritten Buchs stehn.

V. bedeutet endlich die arithmetischen Lehrsätze über
Verhältnisse und Proportionen, die in der 23sten
Erklärung des ersten Buchs stehn.

Sind einige Citate nicht ganz genau, so wird
der aufmerksame Leser sie leicht berichtigen.



Einige Druckfehler.

So viel Sorgfalt man auch angewandt hat, um alle Sinnstörenden Druckfehler zu vermeiden, so muß man doch den Leser bitten, folgende vor dem Gebrauch des Werks zu verbessern:

Seite 23. Zeile 4. von unten steht $\frac{b}{a}$ statt $\frac{b}{a}$.

S. 64. Z. 2. v. u. keiner der Winkel st. *einer der Winkel.*

S. 65, Z. 5. eine st. *ein* Perpendikel

S. 77. fehlt Zusatz III. „Eine grade Linie, welche eine von zwey Parallellinien, (mit denen sie in derselben Ebne liegt) durchschneidet, muß auch die andre schneiden,“ weil sonst durch einen Punkt, mit einer graden Linie, zwey verschiedene grade Parallellinien möglich wären.

S. 277. fehlt im Marginal *Taf. IV.*

S. 279. Z. 7. st. OP_2 st. OP_2 .

S. 295. st. das Marginal 17. st. 16.

S. 307. das Marginal Afg. 6. st. Afg. 3. a. 2.

S. 317. in der dritten Formel unter γ steht $\frac{BG}{GE}$ st. $\frac{BC}{GE}$

S. 359. im Marginal Taf. IV. st. *Taf. V.*, und

S. 360. Taf. III. st. *Taf. V.*

























