Die

Geometrie

nach

Le Gendre, Simpson, van Swinden, Gregorius a St. Vincentio, und den Alten,

ausführlich dargestellt

von

L. W. Gilbert

Professor, Observator und Unterbibliothekar auf der Universität zu Halle.

Erster Theil.

Mit Kupfern.

Halle,
in der Rengerschen Buchhandlung
1798.

Ausführliches Lehrgebäude der elementaren und der höhern Geometrie

Theil I.

Vorrede.

Was man in diesem Werke zu erwarten hat, geben die Titel vollständig an. Nicht bloſse Anfangsgründe, oder ſo genannte Elemente, ſondern *ein ausführliches* und, wo möglich, *vollständiges Lehrgebäude*, und zwar nicht bloſs der elementaren, ſynthetiſchen, ſondern *der geſammten Geometrie*, mit Einſchluſs der geometriſchen Analyſis und der Lehre von den Kegelſchnitten, ſo weit es ſich nemlich für uns noch der Mühe einer bloſs darſtellenden und rein geometriſchen Behandlung dieſer Materie lohnt.

Unſere Geometrien, ſo viel deren der Verfaſſer kennt, ſind entweder bloſse Compendien, die urſprünglich zum Leitfaden beym mündlichen Vortrage beſtimmt, ihrer Natur nach mehr oder weniger ſkelettartig ſind, und von denen noch keins an innerer Vollkommenheit Euklids Elemente übertroffen hat; oder Commentare über Compendien, die mehrsten eben so sacharm als wortreich; oder weitschweifige Bücher für Praktiker, über denen kein wissenschaftlicher Geist schwebt, welche mehr die Hand, als den Kopf üben, und wahre Einsicht nur wenig befördern. An einem ausführlichen Lehrgebäude, welches sich unsrer Idee nach zu einem Compendium ungefähr so, wie ein Körper mit Fleisch und Blut zu einem blossen Skelett verhalten müfste, fehlt es noch: und da es dem Verfasser schien, ein solches Werk müsse nicht nur dem Mathematiker, sondern auch dem Freunde geometrischer Untersuchungen, und selbst dem Manne von gereiftem Verstande, der sich in die Geometrie erst einweihen will, jedem von einer andern Seite, wichtig und wünschenswerth seyn; so schmeichelte er sich, mit dieser Arbeit, an der er keine Mühe und Sorgfalt gespart zu haben sich bewust ist, einem wahren Bedürfnise entgegen zu kommen.

Dem eigentlichen Mathematiker ist es Eines Theils darum zu thun, zu einem vollständigen Ueberblick über das Ganze der Geometrie zu gelangen, ohne deshalb eine Menge weitläufiger, grossen Theils nicht mit Unrecht veralteter Werke durchzustudiren, aus denen er doch erst blosse

Materialien erhält, die in ein ausgewähltes System, ohne das keine rechte Ueberſicht Statt findet, zu verſchmelzen, noch manche Kunſt, und mehr Mühe koſtet, als Sammler geometriſcher Sätze, z. B. *Gregorius a St. Vincentio*, *Krafft*, mit unter auch *Pappus*, daran gewandt haben. Andern Theils kommt es dem Mathematiker auf ein Hülfsmittel an, um die geometriſchen Unterſuchungen, auf die er ſich einläſst, an das Syſtem der Wiſſenſchaft mit Leichtigkeit anzuknüpfen, ohne grade bis zu den erſten Elementen hinauf zu ſteigen, und den Satz, der für ihn jedesmal als Lehrſatz der brauchbarſte iſt, und der den kürzeſten Weg der Behandlung beſtimmt, ſonder Mühe unter den übrigen heraus zu finden, ohne doch deshalb alle Sätze und erleichternde Methoden der Geometrie, ſtets im Gedächtniſſe gegenwärtig zu haben. Denn dieſes wäre ohne eine beſtändige Beſchäftigung mit der darſtellenden Geometrie, und folglich uns neueren Mathematikern fürwahr unmöglich, indem für uns nicht mehr dieſer Theil der Mathematik, ſondern algebraiſche Analyſis, die Hauptwiſſenſchaft iſt. Beydes macht alſo dem Mathematiker ein ausführliches Lehrgebäude, worin ſich der ganze Schatz der Geometrie, und nicht die erſten Elementarſätze in einem leicht überſchaubaren Ganzen beyſammen finden, zum wahren Bedürfniſs. Für ihn iſt darin vornemlich durch die möglichſte Vollſtändigkeit, (die jedoch hin und wieder den nicht weaer wichtigen Rückſichten auf Brauchbarkeit, und auf Compoſition nachſtehn muſs,) und durch ein ſorgfältiges ſyſtematiſches Aneinanderketten der Materien zu ſorgen. Der Verfaſſer dieſes Lehrgebäudes hat ihm die Ueberſicht noch dadurch zu erleichtern geſucht, daſs er alles, unter verhältniſsmäſsig wenigen Hauptſätzen, und bey jedem derſelben die verwandten Sätze in Folgerungen, Zuſätzen und Anmerkungen zuſammen ſtellte.

Ein Freund der Geometrie, der, vertraut mit dem, was in den Compendien ſteht, ſich mit Erweiterung und Ausführung deſſen, was ihm bekannt iſt, zu ergötzen wünſcht, kann in einem ſolchen ausführlichen Lehrgebäude ebenfalls die beſte Befriedigung finden, und zwar, wie uns ſcheint, bey weitem eher, als in den Sammlungen geometriſcher Sätze, oder in den Schriften mancher ältern Mathematiker über einzelne geometriſche Materien. Denn, abgerechnet, daſs wir aus der ermüdenden Art, wie die Alten ſolche Materien zu behandeln pflegten, herausgewachſen ſind, ſo entſpringen häufig, eben aus dieſem Vereinzeln, die Schwierigkeiten der geometrischen Behandlung, und gar Vieles erscheint an seinem Platze im Lehrgebäude erst im rechten Lichte, und läßst sich dort bey weitem leichter, vollständiger und genügender, als einzeln und abgerissen behandeln. In die Augen fallende Beyspiele davon findet man, wie ich mir schmeichle, in diesem Theile mehrere, besonders unter den Sätzen von ebnen Oertern gegen das Ende des dritten Buchs. — Wer dieses Werk zur Erweiterung seiner geometrischen Einsicht durchstudirt, dem empfehle ich es recht sehr, seine eignen Kräfte an den Sätzen zu versuchen, die den Lehrsätzen beygefügt sind, und ihren Beweis nicht eher nachzulesen, als bis er die Hoffnung, ihn selbst zu finden, aufgibt. Denn da er schon durch die Stellung dieser Sätze auf die Gründe geleitet wird, aus denen die Vorbereitung und der Beweis fließsen, so geben sie ihm ein leichtes Mittel seine Erfindungskraft zu üben und zu prüfen. Ein Gleiches gilt von den Aufgaben am Ende jedes Buchs, die grade in dieser Hinsicht von den Lehrsätzen getrennt, und besonders zusammengestellt sind. Auch ist das der Grund, warum in den Folgerungen und Zusätzen mancher an sich gerade nicht wichtiger Satz, der unbeschadet der Vollständigkeit des

Systems hätte übergangen werden können, aufgenommen wurde. Die verschiedenartigen Anwendungen der Häuptsätze, die man in den zugefügten Sätzen kennen lernt, sind recht dazu geeignet jene Sätze, ihren Gebrauch, und die verschiednen geometrischen Methoden sich geläufig zu machen, und zu einer recht gründlichen Kenntniss der Geometrie zu verhelfen. Denn das ist es, was man wissen muss, indess man mit den unwichtigern Folgesätzen das Gedächtniss nicht zu überladen braucht.

Männern, denen die Geometrie noch fremd ist, und die sich mit ihr, als mit der vollkommensten Wissenschaft, zu ihrer Geisteserhohlung und Verstandesstärkung beschäftigen wollen, pflegen Compendien, beym Selbststudium, gewöhnlich zu dürr und zu trocken vorzukommen, und das nicht mit Unrecht, da solche Bücher durch den mündlichen Unterricht erst recht geniessbar zu werden, bestimmt sind. Sie können sich nach ihrer Anleitung nicht recht in die Wissenschaft hinein finden, und wünschen sich etwas Ausführlicheres; ein Wunsch, den ich durch dieses Lehrgebäude zu befriedigen hoffe. Für sie ist die wissenschaftliche Ansicht des Ganzen, und die grösste Strenge in der Methode eine Hauptsache: und beyde an ſich ſchon unnachlaſsliche Forderungen hat der Verfaſſer immer im Auge gehabt. Die wiſſenſchaftliche Anſicht der Geometrie in den Principien, hält er für neu, und ſo kurz er ſich bey ihr auch faſſen muſste, ſo wird ſie doch, wie er glaubt, hinreichen, das Intreſſe des denkenden Mannes auf das Wiſſenſchaftliche des Lehrgebäudes zu lenken, und ihn in den rechten Geſichtspunkt zu ſetzen. Der Verfaſſer würde indeſs dieſes alles mehr ausgeführt, und in die Grundlage des Syſtems noch mehr wiſſenſchaftliche Strenge hinein gebracht haben, hätte er ſich der Feſſeln, die ihm ſein erſter Plan, *Le Gendres Elementen* als Leitfaden zu folgen, angelegt hatte, früher entledigt.

Als er nemlich dieſes Werk unternahm, hoffte er dem Mangel eines ausführlichen Lehrgebäudes durch eine deutſche Bearbeitung des vorzüglichſten franzöſiſchen Werks über die Elementargeometrie, welches vor einigen Jahren erſchien*,

*) Eléments de Géométrie, avec des notes. Par *Adrien Marie Le Gendre*. (Si quid noviſti rectius iſtis, Candidus imperti.) A Paris chez Firmin Didot. An II. d. l. Rep. 1794., XII. und 334. S. gr. 8. und 13. Kupfertafeln, im Format derer, bey dieſem Werke.

ſo ziemlich abhelfen zu können, beſonders wenn er dabey auf die beſten unter den ähnlichen Werken der Engländer * und Holländer ** beſtändige Rückſicht nähme: eine Abſicht die er unter andern in einer Rezenſion von Le Gendres Elementen in der Allg. Jenaiſchen Litt. Zeitung vom Jahre 1797. St. 135. äuſserte, wohin er diejenigen verweiſt, die von dem Werke des franzöſiſchen Geometers mehr zu wiſſen begehren. Noch im *erſten Buche* erlaubte ſich der Verfaſſer bloſs Zu-

*) Elements of Geometry; with their Application to the Menſuration of Superficies and Solids, to the determination of the Maxima and Minima of Geometrical Quantities, and to the Conſtruction of a great Variety of Geometrical Problems. By *Thomas Simpſon* Edit. 2. with large Alterations and Additions. London 1760. mit eingedruckten Holzſchnitten, XI. und 276. S. gr. 8. (ganz compendiariſch, aber mit vielem Eignen Ausg. 1 erſchien 1747.)

**) Grondbeginſels der Meetkunde door *J. H. van Swinden*, Hoogleeraar te Amſterdam. Amſterdam 1790. gr. 8., XLVI, 486, 44. S. und 7 Kupfertafeln in Quarto. Zwölf Bücher, wovon drey arithmetiſchen und trigonometriſchen Inhalts ſind. (Von einer deutſchen Ueberſetzung, deren Sprache aber herzlich ſchlecht iſt, erſchien zu Jena 1797 der erſte Band.)

ſätze und Anmerkungen, deren Zahl und Ausdehnungen er mit Fleiſs beſchränkte. Im *zweyten* arbeitete er das Ende ſchon gänzlich um, und im *dritten* gab er endlich den Plan, länger bey *Le Gendre* zu bleiben gänzlich auf. Da er jedoch einmal angefangen hatte, die Rolle *des Ueberſetzers* zu ſpielen, ſo glaubte er, ſie ſo lange als möglich beybehalten zu müſſen. Doch hat er auch dieſe im dritten Buche verlaſſen, um ſie in der Folge nicht wieder zu übernehmen. Wenn man erwägt daſs das erſte Buch, bey Le Gendre bis S. 29, hier bis S. 95, das zweyte bey Le Gendre bis S. 56, hier bis S. 226 geht, und was vom dritten in dieſem Theile enthalten iſt, dort etwa 40, hier 230 Seiten einnimmt; ſo wird man ſich leicht überzeugen daſs der Verfaſſer, dieſes Werk, ob er gleich darin lange nur als Ueberſetzer erſcheint, doch mit Recht als eignes Geiſteswerk in Anſpruch nimmt. Denn ſchwerlich hat er dabey dem franzöſiſchen Mathematiker mehr, als dieſer einigen andern Geometrie, beſonders Th. Simpſon, zu verdanken.

Die angeführten Werke ſind alle drey keine ausführlichen Lehrgebäude, ſondern vollſtändigere Compendien als die gewöhnlichen, doch iſt Le Gendre unter ihnen am wenigſten aphoriſtiſch, und läſst ſich im Ganzen am mehrſten auf weitere Auseinanderſetzungen ein. Alle drey weichen von *Euklids Elementen* in der *Auswahl* und der *Anordnung der Materien*, und da ab, wo die *Sätze über Proportionalität von Ausdehnungen*, in das Arithmetiſche hineinreichen. Und das, unſerer Ueberzeugung nach, mit Recht, wie es in der angeführten Rez. in der Allg. Litt. Zeit. weitläufiger auseinander geſetzt wird. Dieſen Geometern folgt der Verfaſſer im Ganzen, und zwar am genauſten *Le Gendren*, weshalb er ſie ausdrücklich auf dem Titel nennt. Uebrigens ſcheinen *Tacquet* und *Whiſton* in ihren Bearbeitungen von Euklids Elementen zuerſt auf dieſen Weg hingeleitet zu haben.

Eben ſo viel, und faſt noch mehr als ihnen, verdankt d. V. dem unermüdlichen Fleiſse des Iesuiten *Gregorius a Sancto Vincentio* *), aus dem er das zweyte und dritte Buch mit vielen intereſſanten Sätzen und Aufgaben bereichert hat, und *Robert Simſons* Wiederherſtellung von *Apollonius* eb-

*) *P. Gregorii a St. Vincentio* Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni X libris comprehenſum. Antwerpiae 1647. 2 Vol. fol. (Die drey erſten Bücher enthalten gröſstentheils planimetriſche Sätze, die ſich in Euklids Elementen nicht finden.)

nen Oertern *, indem es eine neue, und wie er hofft, nicht unverdienstliche Seite dieser Arbeit ist, die *Lehre von den Ebnen Oertern*, und überhaupt die *Geometrische Analysis*, mit in das Lehrgebäude der Geometrie verwebt zu haben, von dem sie die Alten durch *Euklids Data*, wie durch eine Scheidewand, wohl nur mit Unrecht trennten. Doch davon im folgenden Theile. Hier findet man am Ende des dritten Buchs, besonders im Lehrsatz 20, 25, 26, das ganze, nicht wenig schwierige zweyte Buch von Apollonius ebnen Oertern, ungleich kürzer, und, *wenn wir* nicht irren, lichtvoller als von Simson vorgetragen. Besonders empfiehlt der Verfasser, Lehrsatz 20 und die dazu gehörigen Folgerungen und Zusätze der Aufmerksamkeit des Kenners. Fragte dieser überhaupt nach den Materien, worin der Verfasser etwas Eigenthümliches und Neues aufgestellt zu haben glaubt, so würden wir ihm überdies noch nennen: die Principien, und die Ansicht der wissenschaftlichen Seite des Lehrgebäudes; ferner die Beurtheilung von Le Gen-

*) *Apollonius von Pergen* ebne Oerter. Wiederhergestellt von *Robert Simson*. Aus dem Lateinischen übersetzt, mit Berechnungen, Bemerkungen und einer Sammlung geometrischer Aufgaben begleitet, von *Johann Wilhelm Camerer*. Mit 18 Kupfertafeln. Leipzig 1796. gr. 8. 446. S.

dres Theorie der Parallellinien (I. 22.), und der Schwierigkeiten in der Lehre vom Berührungswinkel (II. 12. A. 1.); die Erklärung warum die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile, die Kräfte der Elementar-Geometrie überfteigt (II. 30. A. 2.) den Vortrag in Buch. II. Aufgabe 19, 20, und einen grofsen Theil des dritten Buchs.

Der *zweyte Theil* diefes Werks, der zu Michaelis erfcheint, wird den Befchlufs der Planimetrie, vieles aus der geometrifchen Analyfis, und die geometrifchen Unterfuchungen über ifoperimetrifchen Figuren enthalten, und ein dritter Theil, der die Stereometrie und höhere Geometrie in fich faffen foll, diefes ausführliche Lehrgebäude der reinen oder eigentlichen Geometrie befchliefsen.

Gilbert.

DIE

ELEMENTE

DER

GEOMETRIE.

ERSTES BUCH.

DIE PRINCIPIEN.

[Der Uebersetzer muss die, welche dieses Werk studiren wollen, gleich hier darauf aufmerksam machen, dass Hr. Le Gendre von den Principien der Geometrie, und von der Art, wie das Gebäude der Wissenschaft durch sie begründet wird, eine unrichtige Vorstellung zu haben scheint. Er sagt in einer der Anmerkungen am Ende des Werks: „mein Zweck wird erreicht seyn, wenn man findet, dass alles in diesem Werke *aus der einzigen Erklärung der geraden Linie, ohne weitere Voraussetzung und ohne irgend eine Forderung*, streng bewiesen ist." In der That findet sich auch unter Hr. Le Gendres Principien keine einzige *Forderung*, obgleich seit Euklid noch kein Geometer Postulate entbehren zu können glaubte. Allein man wird bald gewahr, dafs der französische Geometer sich hierin nur täuscht, und dafs auch er, wenn gleich nicht ausdrücklich, doch stillschweigend voraussezet und fordert, dafs man Punkte, Winkel u. d. m. sich vorstellen, gerade Linien und Kreise beschreiben, und dergleichen geometrische Grundvorstellungen mehr müsse eingehen können. Der Uebersetzer fügt deshalb hinter den Erklärungen noch die *Forderungen* hinzu, welche man an jemand, der Geometrie studieren will, gewöhnlich zu machen pflegt. Nicht als wenn er glaubte dafs dieses die geometrischen Forderungen in ihrer wahren Gestalt, und jenes ihre gehörige Stellung sey, sondern weil beydes mit dem Herkommen seit Euklids Zeit übereinstimmt. Die Ansicht der Principien und die Art, wie man das Lehrgebäude durch sie begründet, scheint dem Uebersetzer der schwächste Theil aller bisherigen Systeme der Geometrie, und so auch des unsers Verfassers zu seyn, und nach seiner Ueberzeugung einer gänzlichen Umformung zu bedürfen. Hier war begreiflich nicht der Platz eine solche Umbildung zu versuchen; höchstens durfte sie in zerstreuten Bemerkungen und Berichtigungen angedeutet werden, indem es ganz Zweckwidrig gewesen seyn würde, wenn der Uebersetzer sich in eine polemische Materie hätte vertiefen wollen, die gehörig ausgeführt, ein eignes Werkchen füllen könnte. Er hat sich daher bey den Principien mit den unentbehrlichsten Berichtigungen, Einschaltungen und Bemerkungen begnügt, die, wenn er nicht irrt, hinreichen, den Leser auf den Standpunkt aufmerksam zu machen, welchen der Uebersetzer für den richtigen hält, und die überdem dem Anfänger mehr Intresse für die Principien beybringen, und ihn darin besser orientiren werden, als die kurzen Aphorismen Euklids und Le Gendres. Auch glaubt der Uebersetzer dadurch, dafs er einige fruchtbare bisher unbenutzte Principien hier nicht blos aufgestellt, sondern auch dem Systeme selbst eingewebt hat, (besonders solche, worauf die Beurtheilung des Schneidens und Berührens beruht,) in dem Lehrgebäude des Hr. Le

Gendres eine beträchtliche Lücke ausgefüllt zu haben, von der auch kein andres ihm bekanntes System, selbst nicht das System Euklids völlig frey zu sprechen ist. In der systematischen Folge bey unserm Verfasser etwas Wesentliches zu ändern, und Materien ganz zu versetzen, hat der Uebersetzer sich übrigens fast nie erlaubt, so rathsam ihm dieses auch hin und wieder zur Vervollkommnung des Systems dünkte. Vielmehr hat er alle sein Bemühen darauf gewandt dieses Wissenschaftliche Gebäude, so wie es nun einmal da stand, besser zu stützen und zu gründen, und sich bestrebt ohne im Grossen viel umzubauen, (lediglich dadurch dass er manches ergänzte, einiges Untaugliche wegliess, und im Ausdruck und der Beweisart oft mehr umarbeitete als übersetzte) alles noch mehr in einander zu fügen, und abzurunden, womit man freylich bei eigner Begründung eines Systems ehr zu stande kommen kann, als bey einer fremden Arbeit, in der man manches nicht *billigt*. Zu allem was in Zeichen wie diesen [ ] eingeschlossen ist bekennt sich

der Uebersetzer.]

I. Erklärungen (Definitionen).

1.

Die *Geometrie* ist eine Wissenschaft, welche sich mit dem Messen des Ausgedehnten beschäftigt, und hierin besteht ihr eigenthümlicher Gegenstand. [Oder vielmehr, sie ist die Wissenschaft des Räumlichen; der Raum und alle Vorstellungsarten und Begriffe, die auf demselben beruhen, machen ihr eigenthümliches Gebieth aus, und ihr Geschäft besteht darin, die Eigenschaften, Beziehungen und Verhältnisse des Räumlichen durch allgemein gültige Schlüsse zu erforschen.

d. U.]

2.

Alles was ausgedehnt ist, hat *drey Dimensionen,* [und nicht mehr,] nemlich *Länge, Breite* und *Höhe* oder *Dicke.*

[Diese drey Dimensionen sollen sich nach der gewöhnlichen Behauptung von einem Körper nur durch *Abstraktion* absondern und für sich betrachten lassen. Allein die Abstraktion ist in der That weder der einzige noch der *an sich* erste und ursprüngliche Weg, wie wir zu der Vorstellung der drey Dimensionen des Ausgedehnten gelangen. Um uns einen Körper vorzustellen, müssen wir die Körperliche Gestalt erzeugen, den Körper beschreiben, und diese *Raumbeschreibung* ist ein zweyter Weg wie wir zu der Vorstellung der einzelnen Dimensionen gelangen, den aber die Geometer bey Aufstellung der Principien gewöhnlich übersehn. Und zwar geht auf diesem Wege die Vorstellung der einzelnen Dimensionen der Vorstellung des Körpers vorher, [indem wir bey der Raumbeschreibung vom Punkte anfangen, durch Fortbewegung desselben Linien erzeugen, durch Bewegung der Linien Flächen, und durch Bewegung der Flächen, Körper. Diese Unabhängigkeit und Priorität der Vorstellung des Punktes, der Linie und der Fläche scheint schon Euklid eingesehn zu haben, wie man aus der Stellung seiner Erklärungen urtheilen muss.

Das Vermögen der Raumbeschreibung muss der Geometer von jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, fordern, mithin auch die Vorstellungsarten, welche sie begründet, und die Begriffe die sich darauf unmittelbar beziehn. Solche Begriffe sind die der drey Dimensionen, und die Vorstellungen, welche die folgenden Erklärungen aussagen, über die eben deshalb der Geometer sich in keinen Beweis einläst. d. U.]

3.

Die *Linie* ist eine Länge ohne Breite.

„Man erhält die Vorstellung derselben, sagt van Swinden, wenn man das Ausgedehnte lediglich in Rücksicht seiner Länge betrachtet, ohne auf dessen Breite und Dicke zu sehn, also von diesen beyden Dimensionen abstrahirt. Andre stellen sich die Linie *als durch den stetigen Fortgang eines Punkts erzeugt vor*, oder als die Spur eines fortbewegten Punktes." [Diese Vorstellungsarten sind beyde richtig, und man kann beyde Wege einschlagen, um zur Vorstellung der Linie zu gelangen, nur daſs der letzte Weg, durch Raumbeschreibung, wie wir schon bemerket haben, an sich der erste und ursprüngliche ist. Er führt nicht nur zu einer ächt geometrischen, sondern selbst zu der ursprünglichen und fundamentalen Vorstellungs- und Erklärungsart der Linie, indeſs man auf dem erstern Wege (durch Abstraction) nur zu einer abgeleiteten Vorstellung der Linie gelangt. Wollen wir uns eine Linie vorstellen, so müssen wir sie ziehn, und das Vermögen dazu fordert der Geometer, daher die letzte Erklärung der Linie, die sich auf den eigentlichen Weg bezieht, wie wir zur Vorstellung der Linie gelangen, in der That die vorzüglichere und fruchtbarere ist, wenn gleich viele Geometer zu glauben scheinen, daſs sie höchstens so mit unter laufen dürfe.

d. U.]

4.

Die Gränzen oder das Aeuſserste einer Linie, das worin eine Linie sich endigt, nennt man *Punkte.* — Ein Punkt ist also nach keiner Dimension, folglich gar nicht ausgedehnt, und hat keine Theile.

[Der Anschein von Unbegreiflichkeit welchen der Punkt durch diese an sich richtige und fruchtbare Erklärung bekömmt, an den sich unter andern mehrere Scholastiker gestoſsen haben, fällt fort, sobald man sich den Punkt als einen *Ort* im Raume vorstellt. Ehr wir eine Linie ziehn können, müssen wir uns irgend einen Ort vorstellen, von welchem aus wir sie ziehn; folglich einen Punkt. Und endigen wir die Linie, so geschieht das wieder in irgend einem Punkte. Man sieht hieraus daſs die Fähigkeit sich Punkte vorzustellen, so gut wie die, Linien zu ziehn, zu dem gehören müsse, was der Geometer von seinem Lehrling fordert, bey ihm voraussetzt.

Man *bezeichnet* gewöhnlich einzelne *Punkte* durch einzelne Buchstaben, *Linien* durch die Buchstaben ihrer Endpunkte, oder wenn dieses zur Deutlichkeit nicht hinreicht, durch die Buchstaben einiger Punkte in ihnen und der Endpunkte, und *Flächen* und *Körper* durch die Buchstaben ihrer Eckpunkte, aller oder einiger.

Fig. 1. So spricht der Geometer von den Punkten A, C, D, von den Linien AB, AC, AEB, von der Fläche ACDB u. s. f. oft selbst ohne ausdrücklich zu erinnern dass diese Buchstaben, Punkte, Linien, etc. bezeichnen, welches sich dann von selbst versteht.

d. U.]

5.

Die *grade Linie* ist der kürzeste Weg von einem Punkt zum andern.

Eine Linie, welche keinen graden Theil hat, nennt man eine *krumme Linie* oder eine *Curve*.

Fig. 1. So z. B. ist AB. eine *grade*, AEB eine *krumme*, dagegen ACDB weder eine grade, noch eine krumme, sondern eine sogenannte *gebrochne Linie*, weil sie aus lauter graden Linien zusammengesetzt ist.

[Die Eigenschaft der graden Linie, dass sie von allen Linien zwischen zwey Punkten die *kürzeste* ist, hat zuerst *Archimed* als Princip geometrischer Beweise aufgestellt und gebraucht. Hr. Le

Gr. 6. Gendre vervollständigt im folgenden den darauf sich gründenden Begriff der graden Linie dahin, dass zwischen zwey Punkten nur eine einzige grade Linie möglich ist, und sucht auf diesen Begriff das System der Geometrie vorzüglich zu gründen. Die Einwendung, welche einige (unter ander *van Swinden*) gegen die Archimedeische Erklärung machen, als setze sie den Satz voraus, dass zwey Seiten im Dreyeck stets grösser als die dritte sind, ist nichtig. Das würde nur der Fall seyn, wann es darauf ankäme diese Definition zu beweisen, welches aber jemand, der sie unter den Principien aufstellt, nicht Willens seyn kann.

Die Erklärung welche *Euklid* von der graden Linie giebt, und die nach der gewöhnlichen Uebersetzung so lautet: „eine Linie die den auf ihr befindlichen Punkten gleichförmig liegt" ist so dunkel, dass unser Verfasser sie als nichtssagend und ohne Bedeutung gänzlich aufgiebt. Verständlicher wird sie, wenn man sie mit van Swinden folgendermassen ausdrückt: „eine *grade Linie* ist die, welche überall auf einerley Art oder gleichförmig (gelyklyk) zwischen ihren Punkten liegt, indess die *krumme Linie* zwischen ihren Punkten ungleichförmig liegt;" oder mit Simpson: „eine Linie welche überall gleichmäsig (evenly) zwischen ihren Endpunkten liegt, oder welche überall' einerley Richtung hat (which every where tends the same way)." Durch einige Erörterungen liesse sich das Dunkel wohl noch vermindern, das auf diesen Erklärungen ruht, und welches der holländische Geometer der Einfachheit des Begriffs der graden Linie zuschreibt. Eine grade Linie ziehn zu können, ist eine Forderung welche der Geometer an jeden thut, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will. Er setzt also voraus, dass jedermann im Besitz des dazu nöthigen Verfahrens ist, mithin auch der Vorstellung, die sich darauf gründet, und es kömmt ihm nur darauf an, *ein fruchtbares Merkmal heraus zu heben*, wodurch sich diese Vorstellung von allen ähnlichen unterscheidet. Ein solches Merkmal ist allerdings das, welches unser Verfasser nach Archimeds Vorbild in seiner Erklärung der graden Linie aufstellt. Nur dass dieses Merkmal nicht so unmittelbar in dem ursprünglichen Verfahren beym Ziehn einer graden Linie zu liegen scheint, dass man sich nicht nach einem Beweise desselben sehnen sollte, welcher darthäte, dass jenes Merkmal in diesem ursprünglichen Verfahren gegründet ist, und wie es daraus folgt. Unmittelbar aus diesem Verfahren ist das zulezt von Simpson angeführte Merkmal geschöpft, *Einerleyheit der Richtung im Ziehn der graden Linie*, und zunächst hierauf scheint sich Euklids Definition zu beziehn, welcher der Uebersetzer deshalb den Vorzug geben würde, liesse sie sich nur eben so klar, fasslich und fruchtbar als jene Archimedeische machen. Das haben aber die Geometer bisher noch nicht geleistet, und wir müssen daher Hr. Le Gendre loben, dass er die Archimedeische Erklärung der graden Linie zum Grunde legt' aus welcher er manche Sätze leichter und kürzer beweist, als es bisher geschehn ist, gründet sich gleich nicht darauf, wie er sagt, einzig und allein sein ganzes System. d. U.]

6.

Eine *Fläche* ist etwas das Länge und Breite, aber keine Höhe oder Dicke hat; oder, nach van Swinden „eine Ausdehnung, in der man sich lediglich Länge und Breite vorstellt, von der dritten Dimension, der Dicke, aber ganz abstrahirt."

Die *Gränzen*, das Aeusserste *der Fläche*, das worin die Fläche sich endigt, sind *Linien*, entweder grade oder krumme.

„Man sieht auch wohl, bemerkt van Swinden, die Fläche als durch stetige Fortbewegung einer Linie erzeugt, oder als Spur einer sich bewegenden Linie an;" und dieses ist wiederum nicht nur eine ächt geometrische, sondern auch die ursprüngliche und fundamentale Vorstellung der Ebene, von der dasselbe gilt, was wir bey der analogen Vorstellungsart der Linie bemerkt
* E. 3. haben * d. U.

7.

Eine *Ebene* ist eine Fläche, welche in allen ihren Theilen vollkommen eben ist, d. h. in welcher jede grade Linie, die durch irgend zwey in der Fläche befindliche Punkte gezogen wird, ganz hineinfällt.

[Kein Theil einer solchen Linie fällt ausserhalb der unbegränzten Ebne. Dieses drückt Simpson auf ein uneigentliche, nicht zu billigende Art so aus: die Linie *berühre* die Ebene in allen

ihren Theilen; ein Ausdruck der keine Nachahmung verdient, obgleich er von mehreren Mathematikern in einem ähnlichen Sinn gebraucht worden ist. Euklid und mit ihm van Swinden erklären die Ebne durch „eine Fläche, welche überall gleichförmig zwischen ihren Gränzen und zwischen den auf ihr befindlichen Linien liegt." Auch hiervon gilt, was mir oben * bemerkt haben. * E. 5.
d. U.

8.

Flächen, worin kein Theil eben ist, sind *krumme Flächen.*

9.

Ein *Körper* ist nach allen drey Dimensionen ausgedehnt, [und jede Ausdehnung, welche Länge, Breite und Dicke oder Höhe hat, ist ein *Körper*, ein *körperlicher Raum.*

Die *Gränzen*, das Aeusserste *eines Körpers*, das worin der Körper sich endigt, sind *Flächen*, entweder ebene oder krumme.]

Der körperliche Raum wird beschrieben, und ein Körper erzeugt durch stetige Fortbewegung einer Fläche, so dass man sich den Körper als die Spur einer bewegten Fläche vorstellen kann. Und dieses ist wiederum die ursprüngliche Vorstellungsart des Körpers. * * E. 2.

Eine Ausdehnung von mehr Dimensionen als im Körper vereinigt sind, giebt es nicht. d. U.

10.

[Eine *grade Linie* wird durch jeden Punkt *in* ihr (d. h. der zwischen ihren Endpunkten liegt) in zwey Stücke getheilt, welche *zu den entgegengesetzten Seiten* jenes Punktes liegen und in Rücksicht desselben eine

Fig. 2. *entgegengesetzte Lage* haben, z. B. AB durch den Punkt C in die Stücke AC, CB, welche zu den entgegengesezten Seiten des Punktes C liegen, und die grade Linie DE durch denselben Punkt in die entgegengesetzt liegenden Stücke DC, CE.

Grade so wird eine *Ebne* durch jede grade Linie *in* ihr in zwey Theile getheilt, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Linie liegen, und ein *Körper* durch jede Ebne in demselben in zwey Theile, die zu den *entgegengesetzten Seiten* der Ebne liegen.]

II.

[Zwey Linien, welche einen Punkt gemein haben, *treffen einander*, und *stossen in diesem Punkte zu-*
Fig. 3. *sammen*, z. B. CA, BA. Genugsam verlängert schneiden oder berühren sie sich. — Sie *schneiden einander*,
Fig. 2. wenn der einen Linie AB Theile, AC, CB, welche zu entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Punktes C liegen, zugleich auch zu den entgegengesetzten Seiten der andern Linie DE liegen. — Lägen sie auf einerley Seite der Linie DE, so würden beyde Linien sich *berühren*, wie MN und AEB in Fig. 1.

Eine ähnliche Bewandniss hat es mit dem Zusammentreffen, Schneiden und Berühren zweyer Flächen, oder einer graden Linie und einer Fläche.]

Die unter 10. und 11. aufgestellten Erklärungen fehlen fast in allen geometrischen Systemen, auch bey Le Gendre, und sind als die unentbehrlichsten unter vielen andern mangelnden von mir eingeschoben worden. d. U.

12.

Wenn zwey grade Linien AB, AC (oder EF, ED) einander treffen, so nennt man die Grösse um welche sie von einander entfernt sind einen *Winkel.* Die beyden Linien AB, AC selbst, heissen die *Schenkel des Winkels*, der Punkt A in welchem sie zusammenstossen oder einander schneiden, die *Spitze* oder der *Scheitel des Winkels.* — Man bezeichnet einen Winkel entweder allein durch den Buchstaben seines Scheitelpunkts, z. B. $\angle A$, $\angle E$, oder, wo das zu Zweydeutigkeiten Anlass gäbe, setzt man zu beyden Seiten dieses Buchstabens noch Buchstaben zweyer Punkte in beyden Schenkeln hinzu, z. B. $\angle BAC$, $\angle DEF$, doch so dass der Buchstabe am Scheitel immer in der Mitte stehet. Auch bezeichnet man einen Winkel durch einen Buchstaben, der zwischen seinen Schenkeln hinein geschrieben wird, z. B. $\angle\alpha$. Fig. 31

[Da man gewöhnt ist Entfernungen durch Linien zu bestimmen, und bey Entfernungen an Linien zu denken, so muss man sich durch Le Gendres Erklärung zu keinem falschen Begriff vom Winkel verführen lassen. Ein Winkel, oder bestimmter, ein *ebner Winkel*, wie man ihn zum Unterschiede von Flächenwinkeln und körperlichen Winkeln nennt, ist keine Ausdehnung, weder eine Linie, noch eine Fläche (wofür ihn wohl einige durch Missverstand genommen haben,) sondern *die gegenseitige Lage zweyer sich durchschneidender grader Linien*, oder wie man gewöhnlich sagt, die *Neigung* zweyer solcher Linien; wiewohl dieser letztere Ausdruck auf rechte, stumpfe und hineingehende Winkel nicht recht zu passen scheint.

α, Die *Grösse eines Winkels* hängt daher lediglich von der Grösse in der Neigung oder vielmehr in der Lage, der beyden Schenkel ab, worauf die Länge dieſer Linien keinen Einfluſs hat.

β, Die *Gleichheit* oder *Ungleichheit zweyer Winkel* kann man unmittelbar danach beurtheilen, ob ſie einander decken oder nicht. Wenn man ſich vorſtellt der Scheitel und zwey der Schenkel beyder Winkel würden auf einander gelegt; ſo fallen die beyden andern Schenkel entweder auch auf einander, oder nicht. Im erſtern Fall *decken ſich beyde Winkel* und
* Gr. 9. *ſind gleich.* * Im zweyten Fall decken ſie einander nicht, und *ſind* deshalb *ungleich.* Und zwar iſt *der Winkel der gröſsere*, deſſen Schenkel die Schenkel des andern einſchlieſsen, wie z. B. ∠DEF gröſser iſt als ∠GEF. Der einſchlieſsende Winkel DEF iſt um den Winkel DEG gröſser als der eingeſchloſsne GEF, und dieſen beyden eingeſchloſsnen Winkeln zuſammengenommen gleich.

γ, Ueberhaupt iſt *jeder einſchlieſsende Winkel* ACE, als Gan-
Fig. 4. zes, *allen von ihm eingeſchloſsnen um* ſeine Spitze C aneinander liegenden *Winkeln ACB*, BCD, *DCE* aus ſeinen Thei-
* Gr. 5. len *zuſammengenommen gleich.* * d. U.

13.

Fig. 2. [Wenn eine grade Linie AB, von einer andern DE in einem Punkte z. B. in C durchſchnitten wird, ſo bildet ein abgeſchnittnes Stück der einen Linie, z. B. CE mit den entgegengeſetzt liegenden Stücken CA,
* E. 2. CB der andern graden Linie * zwey Winkel ACE, ECB, welche man *Nebenwinkel* nennt.

Nebenwinkel ſind alſo ſolche Winkel, deren Scheitel C und *einer* der Schenkel CE zuſammenfallen, indeſs die beyden andern Schenkel AC, CB *in grader Linie* liegen. d. U.

14.

Steht eine grade Linie GH auf eine andre EF so auf, dafs die beyden Nebenwinkel, welche sie mit EF bildet gleich sind, so wird jeder dieser beyden gleichen Nebenwinkel HGE, HGF ein *rechter Winkel* genannt. Die Linie GH steht dann auf EF im Punkte G *senkrecht*; ist *ein Perpendikel* auf EF im Punkte G. Fig. 15.

Ein *rechter Winkel* ist also *einer* von zwey gleichen Nebenwinkeln, und eine *senkrechte Linie* eine grade Linie, welche auf eine andre unter rechten Winkeln aufsteht.

Winkel kleiner als ein rechter, z. B. BAC, nennt man *spitze*, Winkel gröſser als ein rechter, z. B. DEF, *stumpfe Winkel.* Fig. 3.

[Im ersten Lehrsatze wird dargethan werden, dafs alle rechte Winkel einander gleich sind. Wegen der Winkel welche gröſser als zwey rechte Winkel zusammengenommen sind, und die man mit unserm Verfasser *hineingehende Winkel* (angles rentrants) oder mit andern *erhabene Winkel* im Gegensatz der *hohlen Winkel* nennen kann, vergleiche man die Anm. zu Erkl. 16.]

[Alle bis hierher aufgestellten Erklärungen, (höchstens die letzte ausgenommen) *gehören zu den wahren Principien der Geometrie*, da sie Vorstellungsarten betreffen, welche unmittelbar aus der Raumbeschreibung geschöpft sind, und die daher der Geometer grade so, wie wir sie in diesen Erklärungen aussagen, bey jedem, der Geometrie treiben will, voraussetzt und fordert. * * E. 2. Die *folgenden Erklärungen* stellen dagegen Begriffe auf, *deren Gültigkeit erst zu beweisen ist.* Denn sie sind nicht wie jene unmittelbar aus der ursprünglichen Vorstellungsart des Ausgedehnten,

aus der Raumbeschreibung, geschöpft, die der Geometer postulirt, sondern verbinden Merkmale mit einander, von denen es die Frage ist, ob sie sich auch mit einander verbinden lassen, und ob sie nicht in dieser Verbindung einander, oder jener ursprünglichen Vorstellungsart widersprechen. Sie gehören zu den abgeleiteten Vorstellungen, deren Möglichkeit und Gültigkeit erst dann gegen Einsprüche gesichert ist, wenn man sie auf die ursprünglichen Vorstellungsarten zurückgeführt oder daraus abgeleitet, d. h. aus den wahren Principien bewiesen hat. Sie stehn daher hier in der That an ihrer unrechten Stelle, und würden schicklicher im Fortgang des Systems, da, wo man die Möglichkeit der Gegenstände, die sie erklären darthut, aufgestellt werden, wie dieses unser
E. 19. Verfasser selbst bemerkt. * Man hat sie daher hier für *blosse Wort-Erklärungen* zu nehmen, die insgesammt nichts anders aussagen, als: „gesetzt ein solcher Gegenstand, als z. E. Parallellinien, Dreyecke u. s. w) sey möglich, so will man ihn mit dem angegebnen Namen bezeichnen." Dagegen gehören die *Kreisbeschreibung* und die darauf sich beziehenden *Erklärungen des zweyten Buchs* zu den ursprünglichen Vorstellungsarten des Ausgedehnten, die der Geometer von jedem fordert, also zu den wahren Principien der Geometrie, und sollten deshalb hier als an ihrem eigentlichen Platze stehn, von welchem sie unser Verfasser nicht ohne Nachtheil für das System fortgehoben hat.

d. U.]

15.

Wenn zwey grade Linien in einer Ebne so liegen, dass sie nie zusammenstossen, so weit man sie auch
Fig. 31. verlängert, so sind sie *gleichlaufend* oder *parallel.*

Diese Erklärung der Parallellinien stimmt mit der Euklids überein, gegen die van Swinden, wie uns dünkt mit Unrecht, den Zweifel erhebt, ob wohl darin die Begriffe vom Verlängern ohne Ende und vom Nie zusammentreffen, deutlich genug für ein Princip sind. Die Frage, welche von den mancherley

Erklärungen, auf die man die Sätze über parallele Linien zu gründen gesucht hat, den Vorzug verdiene, gehört, so wie die ganze Erklärung, nicht hierher, sondern zur Theorie der Parallellinien. Man findet einiges darüber in den Anmerkungen am Ende dieses Werks. d. U.

16.

[Jeder völlig begränzte Raum wird eine *Figur* genannt; doch bezeichnet man mit diesem Namen vorzugsweise begränzte Flächenräume, selbst solche, welche nur zum Theil, nicht ganz, begränzt sind.]

Eine Ebne, welche nach allen Seiten zu begränzt ist, bildet eine *ebne Figur*, und zwar, wenn sie nichts als grade Linien zu Gränzen hat, eine *gradelinige Figur*, die man auch vorzugsweise eine *vielseitige Figur*, oder ein *Vieleck* (*Polygon*) nennt, [wiewohl dieser Name manchmal ausschliesslich gradelinige Figuren von mehr als vier Seiten bezeichnet.]

Jede Gränzlinie macht eine *Seite*, alle zusammen den *Umfang der Figur* (die *Peripherie des Vielecks*), und der Flächenraum den sie rings um gränzen, *den Inhalt* oder den *Flächenraum der Figur* aus.

[Eine *Diagonale* ist eine grade Linie, die quer durch die Figur von einem Winkelpunkt zum andern geht. So z. B. stellt Fig. 5 eine ebne gradelinige Figur vor, AB, BC, CD u. s. sind ihre Seiten, die zusammengenommen ihren Umfang ausmachen, AC eine Diagonale, A, B, C, etc. die Winkelpunkte oder Ecken der Figur.]

Anmerkung. Um Verwirrung zu verhindern betrachtet man in der Geometrie nur *Vielecke*, welche lauter *hohle*, *heraus-*

gehende Winkel (angles saillants) und keine *erhabne* oder *hineingehende Winkel* (angles rentrants) enthalten, obgleich auch die letztern Winkel zur Bestimmung der Lage zweyer sich durchschneidender Linien geschickt sind, und in Figuren vorkom-
* F. 6. men können. Ein Vieleck mit lauter herausgehenden Winkeln
* F. 5, 7. ist gänzlich *convex*, nirgends *hohl.* Es kann von einer graden Linie nur in zwey, nicht in mehr Punkten, geschnitten werden, welches bey Vielecken mit hineingehenden Winkeln nicht der Fall ist. (Ueberdem fällt jede Verlängerung der Seiten eines *convexen Vielecks* ganz außer der Figur, durchschneidet diese nirgends weiter, indeſs die Schenke eines hineingehenden Winkels, wenn sie über ihren Scheitelpunkt hinaus verlängert werden den Umfang der Figur nochmals durchschneiden. Beyde Eigenschaften kann man zu Erklärungen des convexen Vielecks nutzen. Viele Sätze gelten blos für die convexen Vielecke, würden also, schlöſse man die Vielecke mit hineingehenden Winkeln nicht ganz aus, unrichtig seyn, wenigstens besondre Modificationen heischen, und dadurch zu sehr überladen werden.]

In den vier ersten Büchern dieser Elemente haben wir es allein mit ebnen Figuren, und überhaupt nur mit Ausdehnungen die in einerley Ebne gedacht werden, zu thun. [Sie bilden den ersten Haupttheil der Geometrie, *die Planimetrie*, deren Name darauf hindeutet.]

17.

Das dreyseitige Vieleck, (diejenige von allen Fi-
Gr. 6. f. 4 guren, welche die geringste Zahl von Seiten hat wird ein *Dreyeck*, das vierseitige ein *Viereck*, das fünfseitige ein *Fünfeck*, das sechsseitige ein *Sechseck* u. s. f. genannt, [indem in jeder gradelinigen Figur die Menge der Winkel (Ecken) mit der Zahl der Seiten übereinstimmt.]

Von

Von den Seiten dieser Vielecke, welche als Schenkel zu einem Winkel gehören, sagt man dass sie den Winkel *einschliessen*, ihn *umspannen*; von den Winkeln selbst, dass sie an diesen Seiten *anliegen*. Im Dreyeck, wo an jeder Seite zwey Winkel anliegen, sagt man vom dritten nicht anliegenden Winkel dass er und die Seite *einander gegenüber stehn*.

So z. B. stehn im Dreyeck ABC die Seite AB und der Winkel C, ferner BC und A, und AC und B *einander gegenüber*. Die Seiten AB, AC *schliessen den Winkel* A *ein*, und A und B sind die an der Seite AB *anliegenden Winkel*.] Fig. 8.

18.

Ein *Dreyeck* ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten hat, *gleichschenklig* (isoscele) wenn es zwey gleiche Seiten, *ungleichseitig* (scalene) wenn es lauter ungleiche Seiten hat. Fig. 8. Fig. 25. Fig. 26.

Ein *rechtwinkliges Dreyeck* hat einen rechten Winkel. Die Seite desselben, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, nennt man die *Hypotenuse*, [die beyden an dem rechten Winkel anliegenden Seiten, welche die Schenkel des rechten Winkels ausmachen, die *Katheten* des rechtwinkligen Dreyecks.] So z. B. ist DEF ein bey E rechtwinkliges Dreyeck, DF dessen Hypotenuse, und ED, EF sind dessen Katheten. Fig. 30.

Ein Dreyeck worin ein stumpfer Winkel vorkömmt, ist *stumpfwinklig*. Enthält das Dreyeck nichts als spitze Winkel, so ist es *spitzwinklig*. Fig. 22. Fig. 20.

Man pflegt irgend eine Seite des Dreyecks als *Grundlinie*, und den ihr gegenüberstehenden (nicht in ihr liegenden) Winkelpunkt, als *Spitze des Dreyecks* anzusehn. Welche? das ist gleichgültig. Nur nimmt man im gleichschenkligen Dreyeck mehrentheils die ungleiche Seite für die Grundlinie.

19.

Unter den *Vierecken* sind folgende zu bemerken:

Fig. 9. Das *Quadrat*, welches lauter gleiche Seiten und lauter rechte Winkel hat;

Fig. 11. Der *Rhombus* (losange, die *Raute*) dessen Seiten gleich, dessen Winkel aber keine rechte sind;

Fig. 10. Das *Rechteck*, dessen Winkel insgesammt rechte, dessen Seiten aber nicht gleich sind;

Das *Parallelogramm*, dessen gegenüberstehende Seiten parallel laufen [und das, wenn es weder glei-
Fig. 12. che Seiten noch rechte Winkel hat, ein *Rhomboides* genannt wird.]

Das *Trapezoid*, welches zwey gleichlaufende und
Fig. 13. zwey nicht parallele Seiten hat; und das *Trapezium*, mit welchem Namen man alle Vierecke mit ungleichen Seiten, wovon kein Paar parallell läuft, belegt; ein Sprachgebrauch von dem unser Verfasser zwar abweicht, indem er das Trapezoid ein Trapezium nennt, und für dieses kein Kunstwort aufstellt, den ich aber der Bequemlichkeit halber beybehalte.

Anmerkung. *Le Gendre* bemerkt hierbey, daſs man in den Erklärungen des Quadrats und des Rechtecks statt vier *rechte* eigentlich vier *gleiche Winkel* setzen sollte. Denn, sagt er, daſs die Winkel eines Vierecks insgesammt rechte seyn können, und daſs alle rechte Winkel gleich sind, ist etwas, daſs man nicht voraussetzen, sondern beweisen müſste. Diesen und ähnlichen Miſsstand würde man vermeiden, wenn man die Erklärungen, nicht, wie es gewöhnlich ist, [und wozu Euklid vielleicht nur durch die unbehülfliche Form der damaligen Bücher veranlaſst wurde,] an die Spitze jedes Buchs, sondern unter die andern Sätze, wo das, was sie voraussetzen, schon dargethan ist, stellte.

Auch schlägt unser Verfasser noch vor, die gar zu langen Kunstwörter *Parallelogramm*, und *Parallelepipedum*, die ihrer Etymologie nach ohnedem jede Figur mit parallelen gegenüberstehende Seiten oderSeitenflächen, ihre Zahl sey welche sie wolle' bezeichnen, mit anderen zu verwechseln, wozu er *Rhombus* und *Rhomboides* für schicklich hält. Aber dieser Vorschlag kann wohl nicht ernstlich gemeint seyn, denn zu was für einer Verwirrung würde das nicht führen, da diese letztern Kunstwörter schon eine ganz andre Bedeutung haben. d. U.

20.

α, *Ein Vieleck* ist *gleichseitig*, wenn es lauter gleiche Seiten, *gleichwinklig*, wenn es lauter gleiche Winkel hat.

β, *Zwey Vielecke* sind dagegen *untereinander gleichseitig* (équilatéraux entre eux), wenn die Seiten des einen, den Seiten des andern, in derselben Folge gleich sind; d. h. so, daſs wenn man in beyden Vielecken die Seiten von zwey die einander gleich sind an, der Ordnung nach zählt, in beyden auch die zweyten, die dritten, die vierten Seiten u. s. w. gleich sind. — Grade so sind *zwey Vielecke unter sich gleichwinklig*, wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern in derselben Folge gleich sind. [Diese abkürzenden Kunstwörter sind zwar bey uns ungewöhnlich, dem Geist unsrer Sprache aber nicht entgegen, daher ich glaubte sie beybehalten zu dürfen.]

γ, Bey zwey Vielecken von dieser Beschaffenheit werden nicht nur im ersten Fall die gleichen Seiten, sondern auch die von gleichen Seiten eingeschlossnen Winkel, und im zweyten Fall nicht nur die gleichen Winkel, sondern auch die an gleichen Winkeln in beyden anliegenden Seiten, *ähnlichliegende*, *gleichnamige* oder *homologe Stücke* genannt.

21.

[Wenn alle Punkte in einer Linie einer oder mehreren gegebnen Bedingungen entsprechen, (und zwar nur die Punkte in ihr, kein Punkt ausser ihr,) so nennt man diese Linie in so fern den *geometrischen Ort* für diese *Bedingungen*, oder für die *Aufgabe* in welcher diese Bedingunge vorkommenn; auch wohl den *geometrischen Ort des Punktes*, der den Bedingungen oder der Aufgabe entspricht. So z. B. ist die Kreislinie, ihrem
*II.E.1. Begriff gemäss, * der geometrische Ort eines Punkts,
Fig. 45. der von einem gegebnen Punkt C um die gegebne grade Linie CA absteht, oder der geometrische Ort für die Aufgabe, welche nach einem solchen Punkte frägt. Denn jeder Punkt in ihr ist der gesuchte Punkt, und kein Punkt ausser ihr thut der aufgestellten Bedingung genüge. Man sieht hieraus leicht in wie fern auch eine Fläche oder ein Körper ein geometrischer Ort seyn kann. Nemlich nur in so fern alle Punkte in ihnen, und kein Punkt ausser ihnen, gegebnen Bedingungen entsprechen.

Die *grade Linie* und der Kreiſs werden ausſchlieſsungsweiſe *ebne Oerter* genannt.

Ueber dieſe ebnen Oerter hatte einer der vorzüglichſten Geometer des Alterthums *Apollonius* von Pergä ein beſondres Werk geſchrieben, wovon aber nur einzelne Sätze auf uns gekommen ſind. Aus dieſen hat ein Schottiſcher Mathematiker *Robert Simſon* (der mit unſerm *Thomas Simpſon* nicht zu verwechſeln iſt) die Schrift des Griechen wieder hergeſtellt. Die deutſche Ueberſetzung dieſer Wiederherſtellung durch Hrn. *Camerer* (Leipzig 1796.) iſt gemeint, ſo oft ich Apollonius ebne Oerter erwähne. Daſs ich aber dieſe Begriffe mit in die Elemente einwebe, wird man bey einer kleinen Ueberlegung nicht miſsbilligen, obgleich ich ſie in keinem der Lehrbücher, die mir vor Augen liegen, mit aufgenommen finde. d. U.

22.

Erklärung der abkürzenden arithmetiſchen Zeichen, die im folgenden gebraucht werden.

Das Zeichen der Gleichheit iſt = daher $A = B$ bedeutet, daſs die Gröſse A der Gröſse B gleich iſt.

Durch das Zeichen $A < B$ zeigt man an, daſs A kleiner als B, durch $A > B$, daſs A gröſser als B iſt.

Das Additions- oder Summenzeichen iſt $+$.

Das Subtractions- oder Differenzzeichen $-$. So z. B. bedeutet $A + B - C$ daſs man A und B zuſammennehmen, und von dieſer Summe C abziehn ſoll.

Ein bloſser Punkt . oder ein $\times$ iſt das Multiplications- oder Produktenzeichen. So z. B. bedeutet $A + B).(A - C)$ das Produkt aus der eingeklammerten Summe und Differenz, und $AB \times BC$ das Produkt aus den beyden Linien AB, BC. [Was dies aber ſagen will, und in wiefern dieſes letztre Zeichen den Inhalt des Rechtecks aus den beyden Linien AB, BC bedeutet, wird im dritten Buche auseinander gesetzt werden.] Zahlen als Multiplicatoren setzt man häufig vor andern Zeichen ohne Zwischenzeichen. So z. B. beteutet 3AB dass man die Linie AB dreimal nehmen soll, und $\frac{1}{2}$ AB oder $\frac{AB}{2}$, dass man die Hälfte dieser Linie setzen muss.

[Ein Produkt von lauter gleichen Faktoren, heisst eine *Potenz*; die Anzahl der gleichen Faktoren giebt den *Grad* der Potenz. Das Zeichen a^2 bedeutet die zweyte Potenz oder die Quadratzahl von a; a^3 die dritte Potenz, oder die Kubikzahl von a, u. f. Auf dieselbe Art bedeutet $\overline{AB}^2$ das Produkt aus zwey gleichen Linien, nemlich $AB \times AB$ oder die zweyte Potenz der Linie AB; $\overline{AB}^3$ das Produkt aus drey gleichen Linien $AB \times AB \times AB$ oder die dritte Potenz von AB u. s. f.

Was dieses aber für einen Sinn hat, und in wie fern $\overline{AB}^2$ den Inhalt des Quadrats und $\overline{AB}^3$ den Inhalt des Kubus über die Linien AB bedeutet, das werden wir in der Folge sehn.

Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet eine Quadratwurzel; $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2, [d. h. die Zahl die mit sich selbst multiplicirt 2 zum Produkt giebt.] Eben so ist $\sqrt{\overline{A.B}}$ die Quadratwurzel aus dem Produkte A . B oder die mittlere Proportionalzahl zwischen A und B [und $\sqrt[3]{A}$ die Kubikwurzel aus A, das heisst eine Grösse wovon drey in einander multiplicirt, zum Produkt A geben.]

[Das Zeichen $\angle$, einem oder mehreren Buchstaben vorgesetzt, bedeutet einen Winkel; ein einzelnes R einen rechten Winkel.]

23.

[*Erinnerung an die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen.*

Der Uebersetzer schaltet diese Sätze welche Le Gendre als bekannt aus der Arithmetik voraussetzt, hier ein, um das Studium dieses Werks so viel, wie möglich, zu erleichtern, und wird in der Folge stets durch das Marginal V. auf sie verwiesen Sollte ein Leser, bey der Kürze, womit sie abgeleitet werden anstoſsen, so verspare er diese Erinnerung bis zu den letzten Sätzen des zweyten Buchs, wo zuerst von Verhältnissen gehandelt wird, und wo man durch den Gebrauch derselben und durch das, was dort steht, sich die Sätze geläufig machen, und sich in den Geist der Sache gehörig einweihen wird. Uebrigens werden überall in diesem Werke, wo von Verhältnissen und Proportionen die Rede ist, sogenannte geometrische Verhältnisse und Proportionen erstanden. Das *Zeichen dieser Verhältnisse* sind zwey senkrecht übereinanderstehende Punkte :, welche man zwischen die Zeichen des *Vordergliedes* und des *Hintergliedes* eines Verhältnisses setzt, z. B. 4 : 8.

1. Das *Verhältniſs zweyer Gröſsen* a zu b beruht auf die Vorstellung wie oft die erstere a (das Vorderglied), oder ein bestimmter Theil derselben, in der zweyten b (dem Hintergliede) enthalten ist.

Die Zahl, welche dieses angiebt, wird der *Exponent des Verhältnisses* genannt. Sie macht das Wesen des Verhältnisses aus; man erhält sie allemal, wenn man das Hinterglied durch das Vorderglied dividirt; (so ist der Exponent des vorigen Verhältnisses $\frac{b}{a}$) und sie kann sowohl eine ganze Zahl, als ein Bruch, als auch eine Irrationalzahl seyn, d. h. eine Gröſse die sich durch die Einheit und deren Theile nicht genau ausdrücken läſst, in welchem Fall das Verhältniſs ein *irrationales Verhältniſs* genannt wird.

Bey 4 : 8 muſs man alſo das Verhältniſs der Zahl 4 zur Zahl 8 ſich vorſtellen, d. h. ſich denken, wie oft das Vorderglied 4, oder ein beſtimmter Theil deſſelben, im Hintergliede 8 enthalten iſt. Die Zahl welche dieſes ausſagt, 2, iſt der *Exponent* dieſes Verhältniſſes. Beym Verhältniſs 6 : 10 iſt der *Exponent* $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ und dieſes zeigt an, daſs der dritte Theil des Vorderglieds 5 mal geſetzt, das Hinterglied giebt. Beym Verhältniſs 2 : $\sqrt{3}$ iſt der Exponent $\frac{\sqrt{3}}{2}$ und zeigt an, daſs die Hälfte des Vorderglieds ſo geſetzt, wie in $\sqrt{3}$ die Einheit geſetzt iſt, das Hinterglied giebt.

Grade ſo bedeutet AB : BC oder $\angle$A : $\angle$B das *Verhältniſs der Linie AB zur Linie BC*, oder *des Winkels A zum Winkel B*, und dieſes Verhältniſs beruht auf die Vorſtellung der *Zahl*, welche angiebt, wie oft die Linie AB, oder der Winkel A, oder wie oft ein beſtimmter Theil derſelben, in der Linie BC oder dem Winkel B enthalten iſt, das heiſst auf die Vorſtellung des Exponenten.

α, Nur zwiſchen *gleichartigen Gröſsen* findet ein Verhältniſs ſtatt, alſo nur zwiſchen Zahl und Zahl, Linie und Linie, Winkel und Winkel u. ſ. f.

β, der Werth eines Verhältniſſes a : b wird nicht verändert, wenn beyde Glieder durch einerley Gröſse multiplicirt, oder beyde durch ſie dividirt werden. Denn der Exponent bleibt nach wie vor derſelbe, da $\frac{bm}{am} = \frac{b}{a}$ iſt.

2. Alle *Vergleichung der Verhältniſſe untereinander* beruht auf die Vergleichung ihrer Exponenten, indem dieſe das Weſen der Verhältniſſe ausmachen. Zwey Verhältniſſe a : b und c : d ſind gleich oder ungleich,

und das erstere grösser oder kleiner als das andre, je nachdem ihre Exponenten $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$ gleich, oder jener grösser oder kleiner als dieser sind.

Gleichheit der Verhältnisse wird *Proportionalität* genannt, und durch das Gleichheitszeichen =, welches man zwischen die gleichen Verhältnisse setzt, bezeichnet. Grösen, deren Verhältnisse gleich sind, sind *einander proportional*, bilden *Proportionalgrösen.*

Ist also $a:b = c:d = e:f$, so sind die sechs Grösen a bis f Proportionalgrösen, und e, f sind den Grösen c, d und a, b (oder nach Umständen auch die Hinterglieder b, d, f, den Vordergliedern a, c, e) proportional. *Diese sind dann gleich oft in jenen enthalten*, indem die Exponenten dieser gleichen Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{f}{e}$, gleich sind, oder, so oft a in b enthalten ist, ist c in d und e in f enthalten, und so wie b aus a durch Multiplication entsteht, so entsteht d aus c und f aus e. Auf so verschiedne Art läst sich dieses eine Zeichen übersetzen.

(Eine unmittelbare Folge hieraus ist, dass wenn $a:b = a:c = a:d$, die Grösen b, c, d, gleich seyn müssen, indem sie als Hinterglieder gleicher Verhältnisse dieselbe Gröse gleich oft in sich enthalten *; und dass eben so, falls $a:b = c:b = d:b$ ist, die Grösen a, c, d, welche in derselben Gröse d gleich oft enthalten sind, gleich seyn müssen.)

Grade so bedeutet $AB:BC = \angle A : \angle B$, dass die Linien AB, BC und die Winkel A, B, einerley Verhältniss unter einander haben, oder proportional sind, das heisst, dass der Winkel A oder ein bestimmter Theil dieses Winkels eben so oft im Winkel B enthalten ist, als die Linie AB oder derselbe Theil dieser Linie in der Linie BC. Gewöhnlich wird ein solches Zeichen so in Worten übersetzt: „die Linie AB verhält sich zur Linie BC, wie der Winkel A zum Winkel B."

Le Gendre bedient sich um die Proportionalität oder die Gleichheit der Verhältnisse zu bezeichnen des unter den Engländern gebräuchlichen Zeichens ∷. Allein ich bin bey dem gewöhnlichen Gleichheitszeichen = geblieben, weil dieses den wahren Begriff der Proportionalität, Gleichheit der Verhältnisse, uns immer vor Augen hält, und dadurch die richtige Vorstellung erleichtert.

3. Zwey gleiche Verhältnisse werden ins besondre eine *Proportion* genannt, wie zum Beyspiel $a : b = c : d$. In jeder Proportion sind also die Exponenten beyder Verhältnisse gleich oder $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

α, Folglich ist auch in jeder Proportion $\frac{b}{a} \cdot c = d$ *, welches die Regeln angiebt, wie man zu drey gegebnen Zahlen a, b, c, die *vierte Proportionalzahl* d finden kann. Sind in zwey Proportionen die drey ersten Proportionalgrössen gleich, so muss es auch die vierte seyn.

*Gr. 2. γ

β, Ferner ist in jeder Proportion $b \cdot c = a \cdot d$* oder *das Produkt der innern Glieder b, c, dem Produkt der äussern Glieder a, d gleich.* Auf diese Art lässt sich also aus jeder Proportion *eine Gleichung* zwischen den proportionalen Grössen *ableiten.*

*Gr. 2. γ

γ, Sind umgekehrt zwey Produkte, deren jedes aus zwey Faktoren besteht, gleich, $b \cdot c = a \cdot d$, so bilden die vier Faktoren eine richtige Proportion, $a : b = c : d$, wozu das eine Produkt die äussern, das andre die innern Glieder hergiebt. Denn aus der Gleichung folgt dass $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *, dass folglich beyder Verhältnisse Exponent gleich, also die Proportion richtig ist.

*Gr. 2. γ

δ, Ist $a > b$ und $c < d$, so kann nicht $a : b = c : d$ seyn. Denn dann ist $1 > \frac{b}{a}$ und $1 < \frac{d}{c}$ *, beyde Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ haben also ungleiche Exponenten. Führt mithin irgend ein Satz zur Behauptung des Gegentheils, so ist er ungereimt.

*Gr. 2. γ

ε, Ist $a : b = c : d$ so muss, wenn $a = b$ gesetzt wird, auch $c = d$ seyn. Die beyden ersten und die beyden letzten Grössen stehn dann beyde im Verhältniss der Gleichheit.

4. Auf die Eigenschaft der Proportionen, dass das Produkt der innern Glieder dem Produkt der äussern Glieder gleich ist, beruht die leichteste Methode die Richtigkeit einer Proportion zu prüfen, und sich von der Gültigkeit der *Ableitung einer Proportion* von einer oder mehreren richtigen Proportionen zu überzeugen.

α, Aus jeder Proportion lassen sich durch blosse Versetzungen, oder auch durch homologe Addition und Subtraction der Glieder, *andre Proportionen ableiten*, von denen ich hier nur einige die am häufigsten vorkommen anführe.

Ist $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
so ist auch $a : c = b : d$ indem dann $cb = ad$;
$b : a = d : c$ indem $ad = bc$;
etc.

so dass es also erlaubt ist in jeder Proportion unbeschadet der Proportionalität *die mittlern Glieder mit einander zu vertauschen*, die Verhältnisse umzukehren etc.

β, Ferner ist dann (weil $bc = ad$ ist)

$a + b : b = c + d : d$ indem $bc + bd = ad + bd$
$a - b : b = c - d : d$ indem $bc - bd = ad - bd$
$a : a + b = c : c + d$ indem $ac + bc = ac + ad$
$a : a - b = c : c - d$ indem $ac - bc = ac - ad$
$a : b = a + c : b + d$ indem $ab + bc = ab + ad$
$a : b = a - c : b - d$ indem $ab - bc = ab - ad$
$a : b = c - a : d - b$ indem $bc - ab = ad - ab$
etc.

γ, Hat man *mehrere gleiche Verhältnisse*

* 2. $a : b = c : d = e : f$ etc.* mithin $\begin{cases} bc = ad \\ bc = af \end{cases}$

so ist *das Verhältniſs der Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder* ebenfalls *jedem dieser Verhältnisse einzeln genommen gleich*, z. B.

$a + c + e : b + d + f = a : b$
indem $ab + cb + eb = ab + ad + af$ ist.

δ, Sind *mehrere richtige Proportionen gegeben*,

$a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
$e : f = g : h$ mithin $fg = eh$
$f : k = k : g$ mithin $kk = fg$

so folgt *durch Zusammensetzung dieser Proportionen* (d. h. indem man die Produkte der ersten, zweyten, dritten, vierten Glieder, wie sie unter einander stehn, nimmt, und dabey die Faktoren fortläſst, die zugleich im ersten und zweyten, oder zugleich im dritten und vierten Produkte vorkommen), aufs neue eine richtige Proportion $ae : bk =$
*Gr. 2. δ $ck : dh$ indem dann $bc . fg . kk = ad . eh . fg$ * also
*Gr. 2 α $bk . ck = ae . dh$ ist *.

Auch folgt umgekehrt aus der *Trennung zweyer Proportionen* (indem man die erſten, zweyten, dritten, vierten Glieder in einander dividirt) aufs neue eine richtige Proportion. So folgt aus den beyden erſten der gegebnen die richtige Proportion $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$ indem dann $\frac{bc}{fg} = \frac{ad}{eh}$ iſt * *Gr. 2. γ

ε, Eine Proportion bleibt alſo auch richtig, wenn man *alle Glieder* derſelben zu *einerley Potenzen* erhebt, oder aus den Gliedern *Wurzeln von gleichen Graden zieht.* Iſt

$a : b = c : d$ mithin $bc = ad$, ſo iſt auch

$a^n : b^n = c^n : d^n$ da $b^n . c^n = a^n . d^n$ * und *Gr. 2. γ

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ da $\sqrt[n]{b} . \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{d}$.

ζ, Sind die Vorderglieder einer Proportion, den Vordergliedern einer andern Proportion gleich, ſo ſind *die Hinterglieder proportional*:

Iſt $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
und $a : e = c : f$ mithin $ec = af$
ſo iſt $b : e = d : f$ indem $ed = bf$
weil $ec . ad = bc . af$ *

auch $a : b \mp e = c : d \mp f$ indem $bc \mp ec = ad \mp af$. *Gr. 2. γ

Grade ſo ſind die Vorderglieder proportional, wenn die Hinterglieder untereinander gleich ſind.

Sind dagegen die äuſsern oder die mittlern Glieder untereinander gleich ſo ſind die nichtgleichen Glieder *verkehrt proportional*:

iſt $a : b = c : d$ mithin $bc = ad$
und $a : e = f : d$ mithin $ef = ad$
ſo iſt $b : e = f : c$ indem $bc = ef$ * *Gr. 1.

η, Endlich sind gleiche Vielfache der Vorderglieder und irgend andre der Hinterglieder einer richtigen Proportion, wiederum proportional; oder ist $a:b = c:d$ mithin $bc = ad$ so ist auch
$am : bn = cm : dn$ indem $bn \cdot cm = am \cdot dn$

5. In einer *stetigen Proportion* sind die mittlern Glieder einander gleich $a:b = b:c$. Das letzte Glied wird die *dritte*, das zweye die *mittlere Proportionalzahl* genannt. Da $b^2 = ac$ *, so ist die mittlere Proportionalzahl zwischen a und c, dass heisst $b = \sqrt{ac}$ *

* β

*G. 2. δ

Bey drey gleichen stetigen Verhältnissen $a:b = b:c = c:d$ sind zwischen den äussern Gliedern a und d *zwey mittlere Proportionalgrössen*; bey vieren drey u. s. f. Von zwey mittleren Proportionalgrössen ist die erste $b = \sqrt[3]{a^2d}$. Denn da $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ so ist $\frac{b^3}{a^3} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{a}$.

6. *Verhältnisse werden zusammengesetzt*, wenn man sich die Produkte ihrer Vorderglieder und ihrer Hinterglieder im Verhältnisse denkt. Die Zeichen $A:B = (a:b) + (c:d) + (e:f)$ bedeuten das Verhältniss A zu B sey zusammengesetzt aus den drey eingeklammerten durch + verbundnen Verhälnissen, folglich $A:B = ace:bdf$.

Ist umgekehrt ein Verhältniss $A : B$ dem Verhältnisse zweyer Produkte $ace : bdf$ von gleich viel Faktoren gleich, so lässt jenes Verhältniss sich aus dem Verhältniss der einzelnen Faktoren zusammen setzen.

Ein Verhältniss $A:B$, welches aus *zwey gleichen* Verhältnissen $(a:b)$ zusammengesetzt ist, ist *noch ein-*

mal ſo hoch als dieſes Verhältniſs, welches man ſo bezeichnet $A:B = 2\,(a:b)$, da denn $A:B = aa:bb$.

Eben ſo ſagt man das Verhältniſs $A:B$ ſey *dreymal, viermal ... ſo hoch* als das Verhältniſs $a:b$, wenn es aus drey, vier ... ſolchen gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetzt iſt. Dann iſt $A:B = 3\,(a:b) = a^3:b^3$ oder $A:B = 4\,(a:b) = a^4:b^4$ etc.

7. Wenn ſich von drey Gröſsen a, b, c, die erſte zur dritten, wie der Unterſchied der beyden erſten zum Unterſchied der beyden letzten verhält, das heiſst $a:c = b-a:c-b$, ſo ſagt man, daſs dieſe Gröſsen *harmoniſch-proportional* ſind. Dieſe Benennung ſtammt von den Griechen her, und hat ihren Grund darin, daſs die Längen drey gleich dicker und gleich geſpannter Seiten, welche in der gröſsten Harmonie, (der Oktave, Quinte und Quarte) tönen ſollen, ſich wie die Zahlen 3, 4, 6 verhalten müſſen. Dieſe Zahlen ſind weder in arithmetiſcher, noch in geometriſcher Proportion, ſondern haben die hier erklärte Abhängigkeit, $3:6 = 4-3:6-4$; daher man umgekehrt dieſes Verhalten das harmoniſche genannt hat.

Von drey harmoniſch proportionalen Gröſsen muſs die mittlere b, gröſser als die eine der äuſsern und kleiner als die andre ſeyn.

Da ſie ſo von einander abhängen, daſs $c.(b-a) = a\,(c-b)$ iſt, und dieſe Abhängigkeit, auch zwiſchen den Produkten drey ſolcher Gröſsen in derſelben Zahl d, (oder zwiſchen ihren Quotienten durch d ſtatt findet; ſo ſind auch alle ſolche Producte oder Quotienten harmonisch proportionaler Grösen, harmonisch proportional.

Ist B das Mittel zwischen A und C (also B — A = C — B) so sind die Produkte A . B, A . C, B . C harmonisch-proportional. Und nimmt man zwischen zwey Zahlen m, n das arithmetische Mittel a, und die mittlere harmonisch-proportionale Zahl h, so bilden diese vier Zahlen eine richtige Proportion, oder es ist m : a = h : n.

Diese wenigen Sätze reichen völlig hin, um das, was in diesem Werke auf die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen gebaut wird, ohne Anstoss zu verstehn. Die ganze Materie ist arithmetisch und unser Verfasser verweist nicht mit Unrecht wegen ihrer auf die Lehrbücher der Arithmetik. Bequem ist es indess die Quintessenz jener Lehren hier beysammen zu haben, und diese Einschaltung wird dem Leser bey der Beschäftigung mit dem dritten Buche, von grossem Nutzen seyn. d. U.

II. Grundsätze (Axiome)

1.

Zwey Grössen die einer dritten gleich sind, sind untereinander selbst gleich. Auch sind *zwey Verhältnisse* untereinander gleich, wenn beyde einem dritten Verhältnisse gleich sind, indem ihre Gleichheit von
* V. 1. der Gleichheit der Exponenten abhängt. *

2.

2.

α, Wenn zu gleichen Gröſsen gleiche *hinzugefügt* werden, ſo ſind die Summen gleich. Iſt z. B. $A = B + C$ und $D = B - C$, ſo iſt $A + D = 2\,B$.

β, Wenn von gleichen Gröſsen gleiche *hinweggenommen* werden, ſo bleiben die Reſte gleich. So z. B iſt im vorigen Fall $A - D = 2\,C$.

γ, Gleiche Gröſsen mit gleichen *multiplicirt*, oder durch gleiche *dividirt* bleiben gleich. Iſt z. B. $A = B + C$, ſo bleibt auch $A \,.\, M = B \,.\, M + C \,.\, M$

δ, Alſo ſind auch *Potenzen* von gleichem Grade aus gleichen Gröſsen, gleich; und eben ſo *Wurzeln* von gleichen Graden aus gleichen Gröſsen. Iſt z. B. $A = B$, ſo iſt auch $A^2 = B^2$ und $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

ε, Wenn $A > B$ iſt, ſo iſt auch $A + C > B + C$ und $A - C > B - C$, auch $A \,.\, M > B \,.\, M$ und $\frac{A}{M} > \frac{B}{M}$.

3.

Zwey Gröſsen, welche einerley dritte gleich oft enthalten, oder in einer dritten gleich oft enthalten ſind, ſind gleich.

4.

Das Ganze iſt gröſser als ſein Theil.

5.

Das Ganze iſt der Summe aller ſeiner zuſammengehörigen Theile gleich.

[Dieses sind insgesammt arithmetische Grundsätze, deren Zahl sich noch beträchtlich vermehren liesse. Von den folgenden eigentlichen geometrischen finden sich bey Le Gendre nur der sechste und neunte, die, wie er behauptet, hinreichen, das folgende System zu begründen. Die übrigen, so wie die unmittelbaren Folgerungen aus dem fruchtbaren sechsten Grundsatze, habe ich, weil sie für das System unentbehrlich sind, hinzugefügt.] d. U

6.

Von einem Punkt läfst sich zu einem andern nur eine einzige grade Linie ziehn.

[Daraus fliefsen unmittelbar folgende Sätze, die bey unserm Verfasser völlig fehlen:

1) *Durch zwey Punkte wird die Lage einer graden Linie völlig bestimmt*, und eine grade Linie in der zwey Punkte bekannt sind, ist *ihrer Lage nach* gegeben. Sind ihre Endpunkte bekannt, so ist sie auch *der Gröfse nach* gegeben.

2. Zwey grade Linien, welche zwey Punkte gemein haben, fallen in einander, haben alle ihre Punkte mit einander gemein, und bilden nur eine einzige grade Linie. Dafs dieses in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung geschehen müsse, beweist unser Verfasser im dritten Lehrsatz. — Sind die beyden gemeinschaftlichen Punkte ihre Endpunkte, so *decken* sich beyde grade Linien völlig. Daraus folgt:

3. Dafs *zwey gleiche grade Linien sich decken*, d. h. wenn man sie so aufeinander legt, dafs zwey ihrer Endpunkte zusammen fallen, so fallen auch die beyden andern Endpunkte aufeinander.

4. Zwey grade Linien die ſich ſchneiden, können auſser dem einzigen Punkte, worin ſie zuſammentreffen, (ihrem Durchſchnittspunkte,) nichts weiter mit einander gemein haben.

5. *Zwey grade Linien können keinen Raum einſchlieſsen.* Denn ſollten ſie einen Raum einſchlieſsen, ſo müſsten ſie ſich ſelbſt begränzen, alſo zwey Punkte gemein haben. Dann aber fallen ſie Folg. 2 gemäſs zuſammen, ohne einen Raum einzuſchlieſsen. Alſo iſt kein gradelinigtes *Zweyeck* möglich, wohl aber ein Dreyeck, und die übrigen Vielecke.

6. *Zwey grade Linien, können ſich nicht berühren.* Denn geſetzt zwey grade Linien wie z. B. AB, DC könnten ſich berühren, ſo müſsten beyde Stücke der einen Linie, die durch den Berührungspunkt C abgeſchnitten werden, zu einerley Seite der graden Linie AB liegen. Dann müſten ſie aber nothwendig zuſammen fallen, weil ſonſt zwiſchen je zwey Punkten ſolcher graden Linie zwey verſchiedne grade Linien DCG, DG, vorhanden wären, gegen unſern Grundſatz. Folglich können zwey grade Linien ſich nicht berühren. Fig. 17.

Zwey grade Linien, welche zuſammentreffen, müſſen alſo verlängert einander ſchneiden. d. U.

7.

[α, Es iſt möglich jede grade Linie, welche der Gröſse nach gegeben iſt, *in zwey gleiche Theile zu theilen*, und es läſst ſich in einer ſolchen Linie allemal ein Punkt denken, welcher *in ihrer Mitte liegt*, durch welchen ſie halbirt wird.

β, Es ist möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine andre grade Linie auf ihr *senkrecht* zu
* E. 12. ziehn. *

γ, Auch ist es möglich durch jeden Punkt einer graden Linie, eine zweyte grade Linie zu ziehn, welche mit der erstern *einen gegebnen Winkel* bildet.]

Wie das, was diese Grundsätze als möglich aussagen, zu bewerkstelligen sey, lehrt Hr. Le Gendre in den Aufgaben, die dem zweyten Buche angehängt sind. *Daſs* es geschehen könne, setzt er gleich bey den ersten Lehrsätzen voraus, daher diese Grundsätze bey seiner Anordnung des Systems unentbehrlich sind. In der That kann man sie als Grundsätze vertheidigen, indem die Möglichkeit der Halbirung einer graden Linie von bestimmter Gröſse, die Möglichkeit senkrechter Linien und rechter Winkel, und die Möglichkeit der Nachbildung eines Winkels unmittelbar darauf beruhen, daſs die grade Linie und der Winkel *stetige Gröſsen* sind, folglich keine absoluten, keine kleinsten Theile haben, und daher Theile von jeder Gröſse und jedem Verhältniſs darin denkbar seyn müssen. Die beyden Theile, worin eine Linie durch einen Punkt in ihr getheilt wird, können also gegen einander jedes Verhältniſs, folgsich auch das der Gleichheit haben; eben so zwey Nebenwinkel, und so auch zwey Winkel an verschiedenen Scheitelpunkten; und nichts anders sagen diese Grundsätze aus. d. U.

8.

[Wenn eine Ebne durch eine grade Linie in zwey Stücke getheilt wird, die zu entgegengesetzten Seiten jener Linie liegen, und man zieht durch zwey Punkte in den entgegengesetzt liegenden Stücken eine stetig zusammenhängende Linie, so trift diese Linie mit der erstern in irgend einem Punkte zusammen, und durchschneidet sie in diesem Punkte. * *E. II.

Dieser Satz, der gewöhnlich nicht unter den Principien aufgeführt wird, ist in Verbindung mit der zehnten und eilften Erklärung so evident, wie irgend einer der andern Grundsätze, und es stützen sich am Ende auf ihn und auf einen analogen Grundsatz beym Kreise fast alle unsere Urtheile über das Durchschneiden der Linien. d. U.

9.

Zwey Ausdehnungen, es mögen Linien, Flächen oder Körper seyn, sind gleich [und ähnlich, folglich innerlich einerley] wenn sie *sich decken*, das heisst, wenn sie, indem man die eine auf die andre legt, [indem man ihre Ortsverschiedenheit aufhebt, und eine ganz im Ort der anderen denkt] in ihrer Ausdehnung, [und deren Begränzung] zusammenfallen.

[Umgekehrt müssen zwey Ausdehnungen *einander decken*, *congruiren*, wenn sie innerlich einerley, d. h. gleich und ähnlich sind, indem sie sich dann blos in ihrem Ort unterscheiden.]

Flächen und Körper, welche sich decken, haben nicht bloss gleiche Ausdehnung, oder gleichen *Inhalt* sondern auch alle Gränzen (Seiten sowohl als Seitenflächen) und alle Winkel der einen, sind den Gränzen und Winkeln der andern nicht nur in einerley Folge * sondern auch nach einerley Richtung hin gleich *E. 20. (worauf die Symmetrie und Aehnlichkeit, folglich die innere Einerleyheit, die Congruenz solcher Figuren beruht.) Le Gendre giebt diesen Flächen und Körpern den Namen *figures* und *solides égaux*, nennt dagegen die, welche Gleichheit ohne Aehnlichkeit haben, die sich also zwar in der Ausdehnung oder dem Inhalte nach gleich sind, sich aber nicht decken, *figures* und *solides equivalentes* und scheint auf diese Unterscheidung und den so bestimmten Sprachgebrauch einen besondern Werth zu legen. Allein da Gleichheit (*égálité*) doch eigentlich nur Einerleyheit der Gröſse bedeutet, so scheint das erste Kunstwort, welches Figuren bezeichnen soll, die auch einerley Beschaffenheit oder Aehnlichkeit haben, nicht recht schicklich gewählt zu seyn. Ich verdeutsche *figures égaux*, durch *sich deckende Figuren* oder *congruirende Figuren*, dagegen *Figures equivalentes* durch *gleiche Figuren*, oder, wo ein besondres Gewicht darauf gelegt wird, durch, *dem Inhalt nach gleiche Figuren*. Gleich geltende Figuren, würde ein etwas fremdartiger, auch kein so passender Ausdruck seyn; besser *gleichhaltige Figuren*, ein Ausdruck den ich zum Bürgerrecht in unsrer Sprache empfehlen möchte. d. U.

β, Bey Körpern und krummen Flächen die gleich sind, sagt unser Verfasser, giebt es noch eine dritte Art von Verschiedenheit, die man nicht übersehn darf. Sie können einerley, Gränzen und Winkel in einerley Folge haben, ohne daſs sie sich deshalb decken, [wenn nemlich die gleichen Stücke *nicht auch nach einerley Richtung hin* auf einander folgen, wie das z. B. bey der rechten und der linken Hand der Fall ist, die, wären sie auch im Einzelnen völlig gleich, so daſs Finger mit Finger congruirte, sich doch beyde nicht decken können, man lege sie, wie man wolle, oder bey zwey übrigens gleichen Schneken, deren eine rechts die andre links gewunden ist. Dasselbe kann bey schiefen Prismen, Pyramiden, körperlichen Winkeln, sphärischen Dreyecken u. f. statt finden. Eine solche Verschiedenheit in der Zusammensetzung aus gleichen Stücken hat zwar auch bey ebnen Figuren statt, wie die Dreyecke ABC, ABD zeigen, in welchen
Fig. 15. die Winkel C = D, CAB = DBA, CBA = DAB und die Seiten CA = DB, CB = DA sind. Allein man braucht nur die eine dieser Figuren im Gedanken umzukehren, so deckt sie die erstere, daher bey ebnen Figuren durch diese Verschiedenheit in der Zusammensetzung keine wesentliche Verschiedenheit bewirkt wird, und man von ihr abstrahirt.] Aber bey *krummen Flächen* und *Körpern*, beruht darauf eine wesentliche Verschiedenheit,

welche man, fast in allen Elementen der Geometrie übersehn hat, obschon mehrere Beweise, die sich auf das Decken, von gewissen Körpern oder krummen Flächen gründen, dadurch, dass man diesen Fall übersah, mangelhaft und in so fern fehlerhaft werden. Dahin gehören unter andern die Sätze über das Decken sphärischer Dreyecke, welche mehrere glaubten lediglich unter den Bedingungen und grade auf die Art, wie bey den ebnen Dreyecken beweisen zu können. Ja, um noch ein auffallenderes Beyspiel zu erwähnen *Robert Simson*, der in seiner Ausgabe Euklids den Beweis des 28sten Satzes im 11ten Buche unzulässig findet, fällt selbst in den Fehler, dass er seinen Beweiss auf eine Congruenz stützt, die nicht allgemein statt findet.

γ. Ich habe daher, fährt unser Verfasser fort, geglaubt für diese dritte eigenthümliche Art von Gleichheit in Flächen und körperlichen Räumen ein neues Kunstwort bilden zu müssen, nehmlich *Gleichheit durch Symmetrie* (égalité par symmetrie), und nenne hinführo Figuren denen diese Art von Gleichheit zukömmt, *symmetrische Figuren* (figures symmétriques).

Auf diesen Unterschied zwischen *gleiche Figuren* die es bloss *dem Inhalt nach* sind, *symmetrische Figuren*, und *congruirende* oder *sich deckende Figuren*, muss man aufmerksam seyn, da durch diese Kunstworte Begriffe bezeichnet werden, die wesentlich verschieden sind.

10.

[Gleiche Winkel decken einander; d. h. wenn man die Spitze und einen der Schenkel des einen Winkels, auf die Spitze und einen der Schenkel des andern Winkels legt, und die beyden anderen Schenkel in der Ebne auf einerley Seite des erstern sich denkt, so fallen auch diese Schenkel zusammen.

Dass umgekehrt Winkel, die einander decken, gleich sind, ist schon oben bemerkt worden.* *E. 12.

[III. Forderungen (Postulate)]

Man setzt die Möglichkeit folgender drey Dinge voraus, oder fordert vielmehr, daſs jedermann, der sich mit der Geometrie beschäftigen will, folgende ursprüngliche Vorstellungsarten müsse eingehn können.

1.

Von jedem gegebnen Punkte aus, eine grade Linie zu ziehn, die durch irgend einen zweyten gegebnen Punkt geht, und zwar sowohl bis an diesen Punkt, als über ihn hinaus.

2.

Jede grade Linie so weit man will zu verlängern, nach einer oder nach beyden entgegengesetzten Seiten eines Punktes in ihr, und sie sich endlich gröſser als jede gegebne Linie vorzustellen.

Wem fällt hierbey nicht ein, daſs der Geometer etwas ähnliches auch für das Verkleinern der graden Linie voraussetzt, und daſs er alles dieses nicht bloſs bey graden Linien, sondern bey Linien überhaupt auch etwas Analoges bey Flächen und bey körperlichen Räumen fördert. Schon hieraus kann man sich überzeugen, wie mangelhaft das ist, was Euklid und die mehrsten Geometer als Forderungen ihrer Wissenschaft aufführen, und wie es mit diesen Forderungen und mit der ganzen Grundlage der Geometrie wohl eine andre Bewandtniſs haben müsse, als man das gewöhnlich vorstellt. Vielleicht hat grade dieses unsern Verfasser bestimmt, die Forderungen gänzlich zu übergehn. Doch ist es wohl auf jeden Fall besser, die wichtigsten mangelhaft, wie es hier geschehn ist, als sie gar nicht aufzustellen.

3.

Um jeden gegebnen Punkt, mit jeder gegebnen graden Linie, als Halbmesser, einen Kreis zu beschreiben.

Diese Fordrung scheint zwar erst zum zweyten Buch zu gehören, an dessen Spitze Le Gendre die Erklärungen, welche den Kreis betreffen, aufstellt, und wohin ich die verweisen muss, die mit dem Namen Kreis und Halbmesser noch keinen deutlichen Begriff verbinden. Allein man kann in der That die Construction des Kreises bey den Sätzen des ersten Buches nicht entbehren, ohne in logische Kreise zu gerathen, da das, was wir hier als unmittelbare Folgerungen dieses Postulats aufführen, zum Beweise vieler jener Sätze gebraucht wird. Auch stellen Euklid, Simpson und van Swinden, die so gut wie unser Verfasser die Sätze über den Kreis in *einem* besondern Buche vortragen, die Construction des Kreises mit an die Spitze der Geometrie.

Diese dritte Forderung begründet zugleich die Möglichkeit folgender drey Constructionen, welche weiter nichts voraussetzen, als die Beschreibung des Kreises, und die ersten Begriffe über das Schneiden der Kreislinien, welche B. II, Erkl. 11. unabhängig von allen Lehrsätzen des ersten Buchs aufgestellt werden, indem sich die Erklärungen des zweyten Buchs unmittelbar an die des ersten anschliessen.

α, Auf einer gegebnen graden Linie AB, (und, wenn es nöthig ist, auf deren Verlängerung), von dem Punkte A ein Stück zu nehmen, welches einer gegebnen graden Linie CD gleich ist. Zu dem Ende beschreibe man mit CD als Halbmesser um den Punkt A einen Kreis. Dieser trifft entweder mit der Linie AB selbst, oder mit ihrer Verlängerung in irgend einem Punkte E zusammen,* und schneidet denn in beyden Fällen auf ihr AE = CD ab.* Fig. 14.

*II. E. II.

*II. E. 2.

β, Aus einem gegebnen Punkte A eine grade Linie von gegebner Länge CD so zu ziehn, daſs sie oder ihre Verlängerung durch einen zweyten gegebnen
* For. 1. Punkt B geht. Zu dem Ende ziehe AB *, und schneide (nach α) aus A davon ein Stück gleich CD ab.

γ, Dreyecke, gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige zu beschreiben, wie das B. II. Erkl. 11. Zus. gelehrt wird.

Eben so giebt die Beschreibung des Kreises Mittel an die Hand, vermöge der Eigenschaften der senkrechten Linien, der Dreyecke u. s. f., die im ersten Buch dargethan werden, *Perpendikel auf gegebne Linien durch gegebne Punkte zu ziehn*, *grade Linien* und *Winkel zu halbiren*, *gleiche Winkel zu bilden* u. d. m. Diese Constructionen müssen billig bey den Sätzen gelehrt werden, auf welche sie sich gründen, und vor denen, deren Beweis die Möglichkeit solcher Constructionen voraussetzt; so thut das Euklid. Unser Verfasser, Simpson und van Swieden, reiſsen sie dagegen aus dem System hinaus, und stellen sie, die letztern Geometer am Ende der Planimetrie, unser Verfasser am Ende einzelner Bücher, beysammen. Ihr Zweck scheint zu seyn, durch die bey einander stehenden Aufgaben den Erfindungsgeist derer, die das Werk studiren, anzuregen; und in der That möchte dieser Vortheil wohl die Unbequemlichkeit aufwiegen, die daraus in dem System entsteht, und die ich durch das Hinweisen auf die Probleme im Lauf des Systems zu vermindern hoffe. d. U.

[Auch das wird von dem Leser noch gefordert,
E 17. daſs er sich bey den *planimetrischen Büchern* * *alle Constructionen in einerley Ebne vollführt denkt*, wenn das gleich der Kürze halber nicht ausdrücklich bey jedem Satze wieder erinnert wird. Er darf also bey

keinem Satze dieſer Bücher in der Vorſtellung aus der Ebne heraustreten. Alle Punkte die man denkt, alle Linien die gezogen, alle Kreiſe die beſchrieben werden, muſs man ſo denken und ziehn, daſs alles in einerley Ebne bleibt, und das wird ſelten bey einem Satze ausdrücklich geſagt, auch wenn er nur unter dieſer Bedingung wahr iſt.

der Ueberſetzer.

DIE GRADE LINIE, DAS DREYECK UND DAS VIERECK.

LEHRSATZ I.

Alle rechte Winkel ſind einander gleich.

Die grade Linie DC ſtehe ſenkrecht auf AB, und GH ſenkrecht auf EF, (ſo daſs die Winkel ACD, DCB, eben ſo EGH, HGF gleiche Nebenwinkel ſind *) ſo behaupte ich, muſs der Winkel ACD dem Winkel EGH gleich ſeyn. Fig. 16. * E. 14.

Man mache CA, CB, GE, GF einander gleich *; ſo iſt auch AB gleich EF, und dieſe beyden Linien decken einander, wenn man EF ſo auf AB legt, daſs E auf A und F auf B fällt. * Dann müſſen auch die beyden Punkte G, C, welche in der Mitte dieſer Linien liegen, zuſammenfallen. Geſetzt nun, die in die- *Fo.3.α. *Gr.6.f. 1.

sen Punkten senkrecht aufstehenden Linien GH, CD decken sich einander nicht, so würde GH auf eine von der CD verschiednen graden Linie z. B. auf CK fallen. Da nach der Voraussetzung der Winkel EGH = HGF ist, so müsste dann auch ACK = KCB seyn. Nun aber ist der Winkel ACK grösser als ACD, der Winkel KCB
E. 12. β kleiner als DCB*, und der Voraussetzung nach ACD gleich DCB: folglich muss der Winkel ACK, welcher grösser als ACD, mithin auch als DCB ist, noch vielmehr grösser als der Winkel KCB seyn. Es ist also unmöglich dass diese beyden Winkel ACK und KCB gleich seyn können, folglich unmöglich dass das Perpendikel GH auf CK, d. h. auf irgend eine von CD verschiedene grade Linie falle; also nothwendig dass es auf das Perpendikel CD liege, da denn der Winkel ACD sich mit EGH und der Winkel DCB mit HGF
E. 12. β deckt. Also sind nothwendig alle rechte Winkel ein-
Gr. 10. ander gleich.

[Zusatz I. Weil alle rechte Winkel gleich sind, so haben sie eine völlig bestimmte, unveränderliche Grösse. Deshalb machen sie das natürliche und bestimmte *Maass aller Winkelgrössen* aus, und der Geometer bezieht diese insgesammt auf den rechten Winkel, und drückt sie in Theilen desselben aus.

Zusatz II. *Durch jeden Punkt einer graden Linie ist nur eine einzige auf ihr senkrechte grade Linie möglich.* Denn gesetzt durch den Punkt C der graden Linie AB, wären auf ihr zwey verschiedne senkrechte Linien CD, CK möglich, so müssten die Winkel ACD, ACK als

rechte, * dem Lehrſatz zu Folge einander gleich, folg- * E. 14.
lich der Theil dem Ganzen gleich ſeyn, welches ungereimt iſt. * Daher iſt es unmöglich daſs durch ir- * Gr. 4.
gend einen Punkt auf einer graden Linie mehr als eine grade Linie ſenkrecht ſtehe.]

Anmerkung. Euklid nimmt den Lehrſatz als Grundſatz an. Wir haben ihn hier bewieſen, weil er ſich aus dem achten Grundſatz ſtreng beweiſen läſst, und man die Grundſätze nicht ohne Noth vervielfältigen muſs. [Daſs er bewieſen werden könne und müſſe, bemerkt ſchon *Proklus* in ſeinem Commentar über das erſte Buch Euklids. Den zweyten Zuſatz hat unſer Verfaſſer ganz überſehn, obgleich er ihn häufig braucht.]

LEHRSATZ 2.

Jede grade Linie CD, welche mit einer andern AB zuſammentrifft, bildet mit dieſer Linie zwey Ne- Fig. 17.
*benwinkel ACD, BCD, * deren Summe zwey rechten* *E. 11. 13.
Winkeln gleich iſt.

Sind die beyden Nebenwinkel gleich, ſo ſind ſie rechte Winkel, alſo der Lehrſatz wahr. Sind ſie ungleich, ſo ſtehe CG auf AB im Punkte C ſenkrecht. * * Gr. 7.
Durch dieſes Perpendikel wird der gröſsere der beyden Nebenwinkel ACD in zwey Theile ACG, GCD getheilt, ſo daſs die Summe der beyden Nebenwinkel ACD und DCB, den drey Winkeln ACG, GCD, DCB zuſammengenommen gleich iſt. * Der Erſte dieſer *E. 12. 7.
Winkel iſt ein rechter *, und die beyden andern zu- * E. 14.
ſammengenommen bilden den rechten Winkel BCG: folglich iſt die Summe der beyden Nebenwinkel ACD, DCB zwey rechten Winkeln gleich.

Folgerung 1. Iſt *einer* von zwey Nebenwinkeln ein *rechter* Winkel, ſo iſt es auch der andre. — Ein *ſtumpfer* Winkel ACD hat dagegen einen *ſpitzen*; ein *ſpitzer* BCD einen *ſtumpfen* Nebenwinkel.

Fig. 18. *Folgerung* 2. *Wenn die Linie DE ſenkrecht auf AB ſteht, ſo ſteht umgekehrt auch AB ſenkrecht auf DE.* Denn iſt DE ein Perpendikel auf AB, ſo iſt ACD ein rechter Winkel; folglich auch der Nebenwinkel ACE
*Folg. 1. dieſes Winkels ein rechter *; folglich, ACD gleich ACE, folglich AC ſenkrecht auf DE.

Folgerung 3. *Die Summe aller Winkel, die um einen Punkt einer* graden Linie, an einerley Seite dieſer
Fig. 17. graden Linie, von noch ſo viel graden Linien gebildet werden, (welche ſich in einerley Ebne befinden) und insgeſammt in dieſem Punkte C ſchneiden, (z. B. der Winkel ACG, GCD DCB) *iſt zwey rechten* Winkeln
*E. 12. γ. gleich. *]

LEHRSATZ 3.

Fig. 17. *Zwey grade Linien, welche zwey Punkte A, F mit einander gemein haben, fallen in ihrer ganzen Ausdehnung zuſammen, und bilden nur eine einzige grade Linie.*

Daſs ſie zwiſchen den beyden gemeinſchaftlichen Punkten A, F zuſammenfallen, erhellet aus Grundſatz 6. Folg. 1. Fielen ſie in ihrer Verlängerung über dieſe Punkte hinaus nicht auch zuſammen, ſo würde es irgendwo einen Punkt C geben, wo ſie ſich von einander trennten, ſo daſs die eine Linie CB, die andre CD würde. Nun ſey CG eine in C auf BC ſenkrecht ſtehende grade Linie *; so ist sowohl GCB als GCD ein rechter Winkel, indem sowohl ACB als ACD eine grade Linie ist, folglich GCD = GCD *, d. i. das Ganze dem Theile gleich, welches unmöglich ist. Folglich ist es unmöglich dass die beyden graden Linien, welche zwey Punkte A, F gemein haben, sich in ihrer Verlängerung irgendwo trennen können. Sie bilden also nur eine einzige grade Linie.

* Gr. 7.
* 1.

LEHRSATZ 4.

Wenn eine grade Linie CD auf den Durchschnittspunkt zweyer andrer graden Linien AC, CB so aufsteht, dass sie mit ihnen zwey Winkel bildet, deren Summe zwey rechte Winkel beträgt, so liegen AC, CB in einer graden Linie.

Denn gesetzt sie lägen nicht in einer graden Linie, so sey CE die gradelinigte Verlängerung von AC. * Dann wäre die Summe der beyden Nebenwinkel ACD, DCE zwey rechten Winkeln gleich; folglich, da nach der Voraussetzung auch die Summe von ACD, DCB zwey rechten Winkeln gleich ist, ACD + DCB = ACD + DCE *, folglich DCB = DCE *, folglich der Theil dem Ganzen gleich, welches unmöglich ist *. Also ist CB selbst die Verlängerung von AC, und liegt mit AC in grader Linie.

* Fo. 2.
* Gr. 1.
* Gr. 2 β
* Gr. 4.

LEHRSATZ 5.

Wenn zwey grade Linien AB, DE einander schneiden, so sind die Winkel, welche am Durchschnittspunkt einander gegenüberstehen, und die man Scheitelwinkel nennt, einander gleich. Fig. 2.

Denn weil erstens DE eine grade Linie ist, so sind die beyden Winkel ACD, ACE zusammengenommen zwey rechten gleich. Weil zweytens AB eine grade Linie ist, sind die Winkel ACE, BCE zusammengenommen zwey rechten gleich. Folglich ist ACD + ACE = ACE + BCE *, folglich ACD = BCE. *

* Gr. 1.
* Gr. 2.

Grade so beweist man die Gleichheit der beyden andern Scheitelwinkel ACE, DCB.

Zusatz I. Die vier Winkel, welche zwey grade sich durchschneidende Linien um ihren Durchschnittspunkt bilden, sind zusammengenommen vier rechten Winkeln gleich. Denn die Summe der beyden Nebenwinkel ACE, BCE beträgt zwey rechte Winkel, und eben so viel die Summe der beyden andern Nebenwinkel ACD, BCD.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel in einer Ebne befindliche grade Linien CA, CB, CD etc. sämmtlich in einem Punkte C zusammen treffen, so beträgt die Summe aller Winkel, welche je zwey zunächstliegende Schenkel bilden, (ACB, BCD, DCE, ECF, FCG, GCA) vier rechte Winkel. Denn wenn man durch den Punkt C zwey grade Linien zöge, so entstünden um C vier Winkel, welche vier rechten Winkel, und dabey allen jenen Winkeln zusammengenommen gleich wären *.

Fig. 4.

* E. 11. 7

Fig. 2. Zusatz III. Wenn von einem Punkte C vier grade Linien ausgehn, und je zwey der einander gegenüberstehenden Winkel, sind gleich, so liegen die Schenkel CA, CB, und CD, CE in grader Linie. Denn

Denn da alle vier Winkel zuſammengenommen vier rechten, und je zwey aneinander liegende Winkel den beyden andern, mithin zwey rechten Winkeln gleich ſind, ſo ſind ſie Nebenwinkel*, und zwey ihrer Schenkel liegen in grader Linie. * 4.

LEHRSATZ 6.

Zwey Dreyecke decken ſich, wenn ein Winkel und die beyden ihn einſchlieſsenden Seiten in beyden Dreyecken gleich ſind.

Es ſey der Winkel A dem Winkel D, die Seite AB der DE und die Seite AC der DF gleich; ſo behaupte ich, daſs das Dreyeck *DEF ſich mit dem* Dreyeck ABC deckt. Fig. 19.

Denn zwey ſolche Dreyecke laſſen ſich ſo über einander legen, daſs ſie völlig zuſammenfallen. Und zwar erſt die Seite DE auf die ihr gleiche AB, ſo daſs D auf A und E auf B fällt.* Dann müſſen, weil D und A gleiche Winkel ſind, und gleiche Winkel einander decken, auch die Seiten DF und AC*, und weil überdem DF gleich AC iſt, auch die Punkte F und C auf einander fallen. Folglich müſſen auch die dritten Seiten zuſammen fallen*, alſo beyde Dreyecke einander decken. *Gr. 6. f. 2. *Gr. 10. *Gr. 6.

Folgerung 1. Folglich ſind in ſolchen Dreyecken auch die Winkel B, E, die Winkel C, F, und die Seiten BC, EF (d. h. die Winkel welche gleichen Seiten, und die Seiten welche gleichen Winkeln gegenüber ſtehn) ſo wie die Flächenräume beyder Dreyecke, einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, nemlich eines Winkels und der beyden einschliessenden Seiten bestimmt.

Folgerung 2. Zwey *rechtwinklige Dreyecke* de-
.E.17. cken sich, wenn die Katheten in beyden gleich sind.

Folgerung 3. Durch zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel wird jedes Dreyeck characterisirt und völlig bestimmt. Wie aus zwey gegebnen Linien und dem Winkel den sie einschliessen sollen, sich ein Dreyeck wirklich construiren läst, lehrt Aufg. 8. am Ende des zweyten Buchs.

Anmerkung. Wenn in zwey Dreyecken zwey Seiten und einer der Winkel, welche sie *nicht* einschliessen, gleich sind, so läst sich daraus nur bey rechtwinkligen Dreyecken allgemein auf ihre Congruenz schliessen *; bey schiefwinkligen lediglich
* 19. unter den Bedingungen welche Lehrsatz 20. aussagt.

LEHRSATZ 7.

Zwey Dreyecke decken sich, wenn eine Seite und die beyden Winkel, welche an ihr liegen, in beyden Dreyecken gleich sind.

Es sey die Seite BC der Seite EF, der Winkel B dem Winkel E, und der Winkel C dem Winkel F gleich, so behaupte ich, dass das Dreyeck DEF sich mit dem Dreyeck ABC deckt.

Um die Deckung zu bewerkstelligen, lege man EF auf die ihr gleiche Seite BC, so dass die Endpunkte
*Gr. 6. E auf B und F auf C fallen *. Weil der Winkel E dem
f. 2. Winkel B gleich ist, und gleiche Winkel sich decken, so fällt dann auch die Seite ED auf BA, und folglich

der Punkt D auf irgend einen Punkt in der Linie BA. Eben so, weil der Winkel F dem Winkel C gleich ist, fällt FD auf CA, und der Punkt D auf irgend einen Punkt der Linie CA. Da folglich D sowohl in der Linie BA, als in der Linie CA liegt, so muss es auf den Durchschnittspunkt A dieser beyden Linien liegen, als den einzigen Punkt, den diese Linien mit einander gemein haben *. Folglich fallen alle drey Winkelpunkte, und also auch die Seiten des einen Dreyecks mit denen des andern zusammen, und also decken sich beyde Dreyecke. * Gr. 6 f. 3.

Folgerung. Folglich sind in solchen Dreyecken auch die Winkel A, D und die *Seiten AB*, *DE* und AC, DF (d. i. *die Winkel die den gleichen* Seiten, und die Seiten die den gleichen Winkeln gegenüberstehn) so wie die Flächenräume einander gleich. Und diese Gleichheit wird durch die Gleichheit dreyer Stücke, einer Seite und zweyer anliegender Winkel bestimmt.

[Anmerkung. Auch wenn zwey Winkel und eine Seite, die nicht zwischen ihnen liegt, in zwey Dreyecken gleich sind, so decken sich diese Dreyecke. Doch ist das ein Satz der sich erst weiterhin * darthun lässt. Hierher gehört Aufg. 9.] *. 18.

LEHRSATZ 8.

In einem Dreyecke ist jede Seite kleiner als die Summe der beyden andern Seiten.

Denn jede Seite, z. B. BC, ist als grade Linie der kürzeste Weg zwischen den beyden Winkelpunkten B, C, also nothwendig kleiner als die Summe der gebrochnen Linien BA + AC. * F. 5.

Folgerung. Daraus folgt dafs im Dreyecke jede Seite AC gröfser als der Unterfchied zweyer Seiten
Gr.2.γ BC — BA ift. Wegen beyder Sätze fehe man B. II. Erkl. 11. Zuf.

LEHRSATZ 9.

Fig. 20. *Nimmt man innerhalb eines Dreyecks ABC irgend einen Punkt O, und zieht von demfelben nach den Endpunkten einer der Seiten z. B. der BC, grade Linien OB, OC, fo ift die Summe diefer beyden Linien kleiner als die Summe der beyden andern Seiten des Dreyecks, d. h. als AB + AC.*

Man verlängere die Linie BO bis wo fie die Seite AC im Punkte D trift; fo ift im Dreyecke ODC die
* 8. f. Seite $OC < OD + DC$ *, folglich wenn man beyderfeits BO hinzufügr $BO + OC < BO + OD + DC$ d. i. $BO + OC < BD + DC$.

Nun aber ift auch im Dreyecke ABD die Seite BD $< BA + AD$, folglich wenn man beyderfeits DC hinzufügt, $BD + DC < BA + AC$. Folglich ift noch vielmehr $BO + OC < BA + AC$.

Anmerkung. Dagegen ift der Winkel O den die beyden Linien im Dreyecke umfchliefsen, gröfser als der Winkel A an der Spitze des Dreyecks. Der Beweis diefes Satzes beruht darauf, dafs der äufsere Winkel am Dreyecke gröfser ift, als jeder der gegenüberftehenden innern Winkel. Folglich $O > D > A$. Diefe unmittelbare Folge aus Lehrfatz 30 beweift Euklid befonders, ehe er an den gegenwärtigen Satz kömmt. Bey unferm Verfaffer müfte er ein Zufatz zu Lehrfatz 30. werden.

LEHRSATZ 10.

Wenn zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC
Fig. 21 *zweyen Seiten DE, DF eines andern Dreyecks DEF*

gleich ſind, und der Winkel BAC den die erſtern einſchlieſsen, iſt gröſser als der Winkel EDF, den die andern einſchlieſsen, ſo muſs die dritte Seite BC, im erſten Dreyeck, gröſser ſeyn als die dritte Seite EF im andern Dreyeck, [und iſt umgekehrt BC > EF, ſo muſs auch der Winkel BAC > EDF ſeyn.]

Man denke ſich die Linie AG durch A ſo gezogen, daſs der Winkel CAG dem Winkel D gleich ſey *, mache AG gleich DE * und ziehe GC, ſo decken ſich die Dreyecke GAC und EDF, weil in ihnen der Conſtruction gemäſs zwey Seiten mit dem eingeſchloſsenen Winkel gleich ſind *. Folglich ſind die dritten Seiten GC, EF einander gleich. Nun aber ſind in Abſicht der Lage des Punktes G drey Fälle möglich, indem dieſer Punkt entweder auſserhalb des Dreyecks ABC, oder auf die Linie BC, oder innerhalb des Dreyecks liegen kann. * Gr. 7. *Fo.3.α * 6.

Fall 1. Wenn G auſserhalb des Dreyecks ABC liegt. Als dritte Seite im Dreyeck iſt GC < GI + IC *; eben ſo AB < IA + IB; folglich auch GC + AB < GI + IC + IA + IB, d. h. < GA + BC. Nun aber iſt der Conſtruction gemäſs AB = GA. Alſo GC < BC *, und da GC gleich EF iſt, EF < BC. * 8. *G. 2.γ

Fall 2. Wenn G auf BC liegt. Dann iſt GC ein Theil der BC, folglich die der GC gleiche EF, < BC. Fig. 22.

Fall 3. Wenn G innerhalb des Dreyecks ABC liegt. Dann iſt nach dem vorigen Lehrſatz GA + GC < BA + BC, folglich, da GA = BA gemacht iſt, GC < BC, alſo auch die der GC gleiche EF < BC. Fig. 23.

Der Satz gilt alſo für jeden möglichen Fall, d. i. allgemein.

Wollte man den *umgekehrten Satz* leugnen, ſo müſte man behaupten, daſs, wenn BC > EF iſt, der Winkel BAC kleiner oder gleich D ſeyn könnte. Im erſten Fall müſte, nach dem eben bewieſenen, BC < EF; im zweyten Fall, dem folgenden Lehrſatz gemäſs, BC = EF ſeyn, welches beydes der Vorausſetzung widerſpricht. Alſo muſs der Winkel BAC gröſser als D ſeyn.

Anmerkung. In Simpſons Elementen folgt auf dieſen Satz ein ähnlicher Lehrſatz, deſſen Beweis die Theorie der Parallellinien vorausſetzt, und den Le Gendre übergeht, der aber doch gekannt zu werden verdient. Denn obgleich er auch bey Euklid fehlt, ſo iſt er doch, wie Simpſon bemerkt, zur geometriſchen Beſtimmung gröſter und kleinſter Werthe, von groſsem Nutzen. Dieſer Satz lautet wie folgt: *Wenn in zwey Dreyecken* Fig. 24. *ein Winkel ſammt der gegenüberſtehenden Seite gleich, ein zweyter Winkel aber in beyden ungleich iſt, ſo ſteht dem, unter dieſen Winkeln, welcher dem rechten am nächſten kömmt, eine gröſsere Seite gegenüber* *.

* Cf. II. Z. 24. 2.

Wenn z. B. zwey Dreyecke (man nehme in unſrer Figur die beyden ſpitzwinkligen ABC und DEF, oder die beyden ſtumpfwinkligen ABC′ und DEF′, oder ein ſpitzwinkliges und ein ſtumpfwinkliges,) wenn in dieſen Dreyecken der Winkel A = D, die gegenüberſtehende Seite BC = EF iſt, und dabey der Winkel C einem rechten Winkel näher kömmt, als der Winkel F; ſo muſs die Seite AB > DE ſeyn.

Ich theile hier nur Simpſons Vorbereitung zum Beweiſe mit, da ſie für den geübtern den Beweis zu führen hinreicht, der Beweis ſelbſt aber hier nicht an ſeinem Ort ſtehen würde. Aus den Winkelpunkten B, E fälle man auf die gegenüberſtehenden Seiten Perpendikel, nehme auf die Verlängerung dieſer Perpendikel Punkte I und K welche von den Seiten eben ſo weit als die Punkte B, E abſtehn, und ziehe IC, KF, ſo wird mittelſt Lehrſatz 6 und 10 bewieſen, daſs IB $>$ KE, folglich das Perpendikel BG im erſtern Dreyeck gröſser als das im zweyten EH iſt. Vom gröſsern ſchneide man ein Stück BM, dem kleinern gleich, ab, und ziehe durch den Endpunkt dieſes Stücks eine Parallellinie mit AC, ſo ſchneidet dieſe von der Seite AB ein Stück BN ab, welches gleich DE iſt, woraus erhellet, daſs DE kleiner als AB iſt.

Haben alſo zwey rechtwinklige Dreyecke gleiche Hypotenuſen, ſo ſteht dem Winkel, welcher in beyden der gröſsere iſt, auch eine gröſsere Seite gegenüber.

LEHRSATZ II.

Zwey Dreyecke die untereinander gleichſeitig ſind, ſind auch untereinander gleichwinklig, * *und decken ſich.* Fig. 19.
* E. 20.

Es ſey AB = DE, AC = DF, BC = EF, ſo behaupte ich, daſs auch die den gleichen Seiten gegenüberſtehenden Winkel gleich ſind, A = D, B = E, C = F, und daſs ſich beyde Dreyecke EDF, ABC einander decken.

Denn geſetzt der Winkel A ſey dem Winkel D nicht gleich, ſo muſs er entweder gröſser oder kleiner als der Winkel D ſeyn. Da die Seiten welche dieſe Winkel einſchlieſsen der Vorausſetzung nach in beyden Dreyecken gleich ſind; ſo müſte, wäre A $>$ D, dem vorigen Lehrſatz gemäſs, auch die dritte Seite BC $>$ EF, wäre dagegen A $<$ D, auch BC $<$ EF ſeyn, welches der Bedingung daſs BC = EF iſt, widerſpricht. Alſo kann der Winkel A weder gröſser noch kleiner als D ſeyn, muſs folglich

dem Winkel D gleich seyn. — Eben so kann man die Gleichheit der beyden andern Winkel beweisen, die indess noch kürzer daraus folgt, dass, weil dann zwey Seiten mit dem eingeschlossnen Winkel A, D in beyden Dreyecken gleich sind, diese Dreyecke einander
* 6. decken *, folglich die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel B, E und C, F so wie die Flächenräume beyder Dreyecke gleich seyn müssen. Und diese Gleicheit folgt wiederum aus der Gleichheit dreyer Stücke, nemlich der drey Seiten in beyden Dreyecken.

[Aus drey gegebnen Linien ein Dreyeck zu bilden, lehrt Buch II. Erklärung 11. Zusatz.]

LEHRSATZ 12.

Fig. 25. *In jedem gleichschenkligen Dreyeck sind die Win-*
* E. 17. *kel an der Grundlinie *, welche den gleichen Seiten gegenüberstehn, gleich.*

Wenn AB = AC ist, so behaupte ich muss B = C seyn.

Es sey B der Punkt, welcher auf der Grundlinie in der Mitte zwischen den beyden Endpunkten B und C
* Gr. 7. liegt. * Ziehe AD, so entstehn dadurch zwey Dreyecke ABD, ACD, welche untereinander gleichseitig sind, indem AD beyden gemein, ferner nach der Voraussetzung AB = AC, und der Construction gemäss AB = DC ist. Folglich sind die der gemeinschaftlichen Seite
* 11. AD gegenüberstehenden Winkel einander gleich *, B = C.

Folgerung. Das *gleichseitige Dreyeck* ist für jede Seite als Grundlinie gleichschenklig, und hat deshalb lauter gleiche Winkel, ist gleichwinklig. Fig. 8.

Zusatz. Daraus dass die beyden Dreyecke ABD, ACD sich decken, folgt auch noch die Gleichheit der übrigen Winkel BAD = DAC und BDA = ADC. Letztere sind, da BC eine grade Linie ist, Nebenwinkel, und folglich, als gleiche Nebenwinkel, *rechte Winkel**: folglich, *theilt in jedem gleichschenkligen Dreyeck eine von der Spitze nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie gezogne grade Linie den Winkel an der Spitze in zwey gleiche Theile, und steht zugleich auf der Grundlinie senkrecht.* Fig. 25. * E. 14.

[Eben so theilt eine grade Linie welche den Winkel an der Spitze im gleichschenkligen Dreyeck halbirt, das Dreyeck in zwey sich deckende Dreyecke*: folglich steht auch diese Linie senkrecht auf der Grundlinie und halbirt sie. * 6.

Dass endlich auch das aus der Spitze des gleichschenkligen Dreyecks auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt, erhellt aus Lehrsatz 18. Folg. 2.

Stets sind also diese drey Eigenschaften in derselben Linie im gleichschenkligen Dreyeck verbunden.

Findet folglich eine derselben in einem Dreyecke ABC ohne die andre statt, *so sind die beyden Schenkel des Winkels ungleich* durch dessen Spitze die halbirende Linie oder das Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite gezogen ist.]

[Anmerkung. Hierher gehören die fünf ersten Aufgaben am Ende des zweyten Buchs, und Aufg. 8 bis 11. über die Construction der Dreyecke.]

LEHRSATZ 13.

Hat umgekehrt ein Dreyeck zwey gleiche Winkel, so sind auch die Seiten welche den gleichen Winkeln gegenüberstehen gleich, und das Dreyeck ist gleichschenklig.

Fig. 26. Es sey ABC = ACB, so behaupte ich muss AC = AB seyn.

Denn wären diese beyden Seiten nicht gleich; so müsste eine derselben, z. B. AB, die grössere seyn: folglich liesse sich auf ihr ein Stück BD = AC nehmen. Zieht man dann DC, so erhält man ein Dreyeck BDC, welches sich mit dem Dreyeck BAC decken müsste, weil in beyden die Seite BC gemeinschaftlich, ferner der Annahme gemäss AD = AC, und nach der Voraus-
* 6. setzung der Winkel B = ACB ist *: folglich wäre der Theil dem Ganzen gleich, welches ungereimt ist. Also können die Seiten AC, AB nicht ungleich seyn, daher das Dreyeck ABC gleichschenklig seyn muss.

Folgerung. Ein Dreyeck welches lauter gleiche Winkel hat, ist auch gleichseitig.

Ein Dreyeck dessen Seiten alle ungleich sind, hat lauter ungleiche Winkel.

LEHRSATZ 14.

Fig. 27. *Von zwey Seiten eines Dreyecks ist stets die die grössere, welche einem grössern Winkel gegenübersteht. — Umgekehrt ist von zwey Winkeln eines Dreyecks stets der der grössere, welcher einer grössern Seite gegenüber steht.*

1. Es ſey der Winkel C > B, ſo behaupte ich, daſs die dem Winkel C gegenüberſtehende Seite AB > AC iſt, welche dem Winkel B gegenüberſteht.

Denn man denke ſich durch den Winkelpunkt des gröſsern Winkels eine grade Linie CD ſo gezogen, daſs der Winkel BCD = B ſey *, ſo iſt daſs Dreyeck BDC * Gr. 7. gleichſchenklig und BD = DC *. Da nun AC < * 13. AD + DC *, ſo iſt auch AC < AD + BD, d. h. * 8. < AB, folglich AB gröſser als AC.

2. Es ſey die Seite AB > AC, ſo behaupte ich daſs der Winkel C, welcher der Seite AB gegenüberſteht, gröſser als der Winkel B iſt, welcher der Seite AC gegenüberſteht.

Denn wäre C *nicht gröſser als* B, ſo müſte jener Winkel entweder kleiner als B, oder gleich B ſeyn. Wäre C < B ſo müſste, wie eben bewieſen worden, AB < AC gegen die Vorausſetzung, ſeyn. Wäre C = B ſo müſste AB = AC gleichfalls gegen die Vor- * 12. ausſetzung ſeyn. Alſo iſt nothwendig C > B.

LEHRSATZ 15.

Von einem Punkte A auſserhalb einer graden Fig. 28. *Linie DE, läſst ſich nach dieſer Linie nur eine einzige ſenkrechte Linie ziehn.*

Geſetzt man könnte ihrer zwey AB und AC ziehn; ſo verlängere man die eine AB, nehme auf dieſer Verlängerung BE = AB und ziehe FC.

Dann deckten ſich die beyden bey B rechtwinkligen Dreyecke ABC und FBC, weil die eine Kathete CB, beyden Dreyecken gemein iſt, und die zweyten

Katheten AB, BF der Conſtruction gemäſs gleich
*6.Folg. ſind *: folglich wäre der Winkel BCF gleich dem Winkel BCA, welcher der Annahme nach ein rechter iſt. Alſo müſste auch der Winkel BCF ein rechter ſeyn: folglich, weil die Summe der beyden aneinander liegenden Winkel BCA + BCF zwey rechte Winkel be-
* 4. trüge, müſsten CA, CF in einer graden Linie liegen *, folglich wären zwiſchen den beyden Punkten A, F zwey verſchiedne grade Linien ABF, ACF möglich, welches Grundſatz 6 widerſpricht. Alſo ſind zwey verſchiedne ſenkrechte Linien von einem Punkte auſserhalb einer graden Linie, auf dieſe Linie unmöglich.

[*Folgerung.* Alſo iſt kein Dreyeck mit zwey rechten Winkeln möglich.]

[Anmerkung. Daſs auf eine grade Linie durch einen Punkt in ihr nur ein einziges Perpendikel möglich iſt, haben wir ſchon Lehrſatz 1. Zuſatz 2. bewieſen. Wie dieſe Perpendikel zu conſtruiren ſind, lehrt Aufg. 2, 3.]

LEHRSATZ 16.

Fig. 28. *Man denke ſich von einem Punkte A nach einer graden Linie DE die ſenkrechte Linie AB, und mehrere ſchiefaufſtehende grade Linien AE, AC, AD etc. gezogen, ſo iſt:*

1) die ſenkrechte AB unter allen dieſen Linien die kürzeſte.

2) Unter den ſchiefſtehenden Linien ſind je zwey, z. B. AC, AE, welche auf entgegengeſetzten Seiten der ſenkrechten Linie AB gleich weit von B (d. h. ſo daſs BC = BE iſt) aufſtehn, gleich.

3) *Von allen andern schiefstehenden Linien (z. B. AC, AD oder AC, AE) ist stets die die grösere, welche weiter von der senkrechten aufsteht.*

Man verlängere die senkrechte Linie AB um BF = AB, und ziehe FC, FD.

1. Da nach der Construction die Winkel ABC, CBF rechte, folglich gleich, und auch die Seiten AB, BF gleich sind, so decken sich die beyden über die gemeinschaftliche Seite BC beschriebnen Dreyecke ABC und FBC *. Folglich sind die dritten Seiten AC, CF einander gleich. Nun aber ist die grade Linie ABF kürzer als die gebrochne Linie ACF *, folglich auch AB die Hälfte der ABF kürzer als AC die Hälfte der ACF. Also ist die senkrechte Linie kürzer als jede schiefaufstehende. * 6. * E. 5.

2. Wenn BE = BC ist, so decken sich die beyden über AB beschrieben bey B rechtwinkligen Dreyecke ABE, ABC *; folglich sind die dritten Seiten AC, AE, und folglich je zwey schiefstehende Linien, welche gleich weit von B aufstehn, gleich. — Diese Linien müssen aber zu entgegengesetzten Seiten des Perpendikels AB aufstehn, weil sie sonst zwey Punkte A und B gemein hätten, folglich zusammenfielen, und nur Eine, nicht zwey verschiedne grade Linien ausmachten *. *6. Folg. *Gr. 6. F. 1.

3. Im Dreyeck ADF ist die Summe der beyden Seiten AD und DF grösser als die Summe der beyden Linien CA und CF, die von einem Punkte innerhalb des Dreyecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen sind *. Also ist auch AD, die Hälfte von AD + * 9.

DF gröſser als AC, die Hälfte von AC + CF: folglich ſind die ſchiefſtehenden Linien länger, die weiter vom Perpendikel ab aufſtehn.

Folgerung 1. Die *ſenkrechte Linie* iſt das *wahre Mauſs des Abſtands eines Punkts von einer graden Linie*, weil ſie nur auf eine einzige Art vorhanden (2), und zugleich die kürzeſte unter allen möglichen Linien iſt, die ſich vom Punkte zur graden Linie ziehn laſſen. [Daher werden wir hinfüro den *Abſtand eines Punkts von einer graden Linie*, und umgekehrt den *Abſtand einer graden Linie von einem Punkte* ſtets durch das Perpendikel, welches vom Punkte auf die Linie gefällt wird, beſtimmen. Wenn wir von der Gröſse *eines ſolchen Abſtands* reden, muſs man darunter die Gröſse dieſes Perpendikels zwiſchen Punkt und Linie verſtehn.]

Fig. 36. [Der *Abſtand zweyer Linien AB, CD von einander* hängt vom Abſtande der Punkte in der einen, von der andern Linie, ab. Folglich muſs dieſer Abſtand durch die Gröſse der Perpendikel BA, FE, DC, die man von den Punkten in der einen BD, auf die andere AC zieht, beſtimmt werden. Sind dieſe Perpendikel insgeſammt gleich, ſo ſind die beyden Linien *gleich weit abſtehend* (lineae aequidiſtantes), wo nicht, ſo ſind ſie *ungleich weit abſtehend.*]

Folgerung 2. *Von einem Punkte laſſen ſich nach einer und derſelben graden Linie nicht drey gleiche grade Linien ziehn.* Denn ſonſt müſte es auf einerley Seite des Perpendikels zwey gleiche (nicht zuſammenfallende) ſchief aufſtehende grade Linien geben, welches nach 2 unmöglich iſt.

[Zusatz I. Aus der Deckung der beyden Dreyecke ABC, ABE in (2) folgt die Gleichheit der Winkel C = E und der Winkel CAB = BAE; so wie umgekehrt aus der Gleicheit dieser Winkel und der Seiten AC = AE, oder der Seiten BC = BE die Deckung der beyden Dreyecke. Daraus ergeben sich folgende Sätze:

α, Die schiefen Linien AC, AE welche gleich weit von *der senkrechten Linie AB abstehn* (d. h. so dass CB = BE ist) sind sowohl gegen die Linie DE, als auch gegen die senkrechte AB beyde unter gleichen Winkeln geneigt.

β, Zwey schiefe Linien AC, AE, *die unter* gleichen Winkeln C = E auf die grade Linie DE aufstehn, sind gleich; und überdem gleich weit vom Perpendikel AB entfernt, d. h. so, dass sowohl BC = CE, als auch der Winkel CAB = BAE ist, fallen folglich, wenn sie auf einerley Seite des Perpendikels liegen zusammen (2).

γ, Zwey schief-aufstehende Linien AC, AE die gleiche Winkel mit dem Perpendikel AB machen, sind gleich, und stehn von demselben gleich weit ab.]

[Zusatz. II. Jede der schiefstehenden Linien AE, AC, AD etc. steht auf DE unter ungleichen Nebenwinkeln *, einem spitzen und einem stumpfen auf. * E. 13,
Und zwar *liegt der spitze Winkel mit dem Perpendikel stets auf einerley, der stumpfe Winkel hingegen mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie.* Denn jede schiefstehende Linie z. B. AC bildet

mit dem Perpendikel AB und dem zwischen beyden liegenden Stück der graden Linie DE ein rechtwinkliges Dreyeck, worin der Winkel der schiefstehenden Linie vorkömmt, der mit dem Perpendikel auf einerley Seite der schiefstehenden Linie liegt. Nun ist das Perpendikel AB stets kleiner als AC (1), folglich auch der Winkel C kleiner als der rechte Winkel B *, folglich jener Winkel ein spitzer, dagegen sein Nebenwinkel ACD, der mit dem Perpendikel auf entgegengesetzter Seite der schiefstehenden Linie AC liegt, ein stumpfer.]

[*Folgerung* 1. Wenn zweyer schiefstehender Linien AC, AD spitze Winkel (oder auch ihre stumpfe Winkel) beyde nach einerley Seite jener Linien zu liegen, so liegen diese Linien selbst beyde auf einerley Seite des Perpendikels AB. Wenn dagegen, wie bey AC, AE die spitzen (oder auch die stumpfen Winkel auf entgegengesetzten Seiten jener Linien, (folglich gegeneinander gekehrt) liegen, so liegen diese Linien beyde auf entgegengesetzter Seite des Perpendikels AB.]

[*Folgerung* 2. Folglich fällt das Perpendikel, welches aus der Spitze eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Grundlinie gefällt wird, wenn beyde Winkel an der Grundlinie spitz sind, *innerhalb*, wenn einer dieser Winkel spitz der andre stumpf ist, *ausserhalb* des Dreyecks. — Ist keiner der Winel an der Grundlinie ein rechter, so fällt das Perpendikel in die eine

Kathete

Kathete des rechtwinkligen Dreyecks, weil aus einem Punkt auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich ist. d. U.

LEHRSATZ 17.

Es sey EF eine auf der graden Linie AB, in deren Mitte C, aufstehendes Perpendikel, so ist 1) jeder Punkt in diesem Perpendikel von den beyden Endpunkten der graden Linie AB gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt ausserhalb des Perpendikels hingegen von diesen Endpunkten ungleich weit entfernt. Fig. 29.

1. Da der Voraussetzung gemäss AC = CB ist, so stehn zwey aus irgend einem Punkte *D* des Perpendikels nach A und *B* gezogene grade Linien DA, DB, vom Perpendikel gleich weit ab, sind also gleich.** 16. 2.
Und folglich steht jeder Punkt im Perpendikel von den beyden Endpunkten A, B gleich weit ab.

2. Es sey I ein Punkt ausserhalb des Perpendikels. Zieht man IA, IB, so muss eine dieser beyden Linien z. B IA das Perpendikel in irgend einem Punkte *D* durchschneiden. Man ziehe *DB*. Nun ist IB < ID + DB *, und, da D ein Punkt im Perpendikel ist, * 8.
nach (1) DB = DA; folglich IB < ID + DA d. i. < IA, folglich jeder Punkt, ausserhalb des Perpendikels von den Endpunkten A, B ungleich weit entfernt.

Folgerung 1. Umgekehrt muss jeder Punkt, welcher von zwey Punkten A, B gleich weit absteht, in dem Perpendikel auf AB liegen, welches in der Mitte zwischen diesen Punkten aufsteht. Denn ausserhalb dieses Perpendikels kann ein solcher Punkt nach (2) nicht liegen. *Eine grade Linie, welche durch zwey von A und B gleich weit abstehende Punkte D, F gezogen ist, muss also dieses Perpendikel seyn.*

Folgerung 2. *Das Perpendikel durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks muss die Grundlinie, und folglich auch den Winkel an der Spitze halbiren.* Denn die Spitze ist von den beyden Endpunkten gleichweit entfernt, und durch jeden Punkt ist nur ein Perpen-
* 15. dikel auf eine grade Linie möglich *.

Fig. 28. *Folgerung* 3. Wenn man von zwey gegebnen Punkten C, E noch so viel Paare sich durchschneidender Linien CA, EA so zieht, dass je zwey, welche sich schneiden, gleich sind, (mithin im Verhältniss der Gleichheit stehn) so müssen die Durchschnittspunkte dieser Linien insgesammt in einem Perpendikel auf CE, das in der Mitte zwischen C und E aufsteht, liegen. Dieses Perpendikel ist daher der *geometrische Ort* des Durchschnittspunkts oder der Spitzen gleichschenkliger Dreyecke, welche über dieselbe Grundlinie be-
* E. 21. schrieben werden *.

[LEHRSATZ 18.]

Fig. 24. *Zwey Dreyecke DEF, NBL decken sich, wenn in ihnen zwey Winkel und irgend eine Seite gleich sind.*

Liegen die gleichen Winkel beyde an der gleichen Seite an, so ist dieser Satz kein andrer, als der schon bewiesene 7te Lehrsatz. Wo nicht, so sey die Seite NB = DE, der Winkel N = D und der Winkel L = F.

Aus der Spitze des dritten Winkels B, E, ſey auf die gegenüberſtehende Seite NL, DF, das Perpendikel BM, EH gefällt. Weil DE = NB iſt, decken ſich dieſe beyde Linien, ſo daſs die Endpunkte E, B und D, N zuſammenfallen. Weil ferner die Winkel D, N gleich ſind, ſo fällt auch die Seite DF auf NL*. *Gr.10.
Nun iſt von Einem Punkte (den zuſammenfallenden E, B) nach Einer graden Linie (den zuſammenfallenden DF, NL) nur ein einziges Perpendikel möglich*; * 15.
folglich müſſen auch die Perpendikel EH, BM einander decken. In dieſer Lage gehn die dritten Seiten EF, BC beyde durch denſelben Punkt (E, B), und ſtehn auf dieſelbe grade Linie DF, NL, zu einerley Seite des Perpendikels EH, BM, und zwar der Vorausſetzung nach unter gleichen Winkeln L = F auf. Folglich müſſen ſie zuſammenfallen*, alſo die beyden Dreyecke einander decken. *16.Z.1. β.

Folgerung 1. Aus der Gleichheit zweyer Winkel und einer Seite in zwey Dreyecken, folgt alſo die Gleichheit des Flächenraums beyder Dreyecke, der dritten Winkel B, E und der beyden andern, den gleichen Winkeln gegenüberſtehenden Seiten, NL = DF und BL = EF.

Folgerung 2. Zwey rechtwinklige Dreyecke decken einander, wenn in ihnen auſser dem rechten noch ein andrer Winkel, und irgend eine der Seiten gleich ſind.

Anmerkung. Dieſer Satz fehlt bey Le Gendre. Bey *Euklid* iſt er der 26ſte Satz des erſten Buchs, wird dort aber anders bewieſen als hier, wo ich den Beweis gewählt habe, den man in *Käſtners* Geometrie findet. d. U.

LEHRSATZ 19.

Zwey rechtwinklige Dreyecke decken ſich, wenn die Hypotenuſe und eine der Katheten in beyden gleich iſt.

Fig. 30. Es ſey die Hypotenuſe AC = DF und die Kathete AB = DE, ſo wird die Deckung der beyden rechtwinkligen Dreyecke ABC, DEF dargethan ſeyn, wenn bewieſen wird, daſs die beyden andern Katheten BC, EF gleich ſeyn müſſen. Geſetzt ſie könnten ungleich, und BC gröſser als EF ſeyn, ſo nehme man auf BC ein Stück BG = EF und ziehe AG. Dann hätten die beyden rechtwinkligen Dreyecke ABG, DEF gleiche Katheten, AB = DE und BG = EF; ſie müſten ſich al-
*6. f. 2. ſo decken *, und auch ihre dritten Seiten AG, DF gleich ſeyn. Es iſt aber nach der Vorausſetzung DF = AC. Alſo wäre AG = AC, und wir hätten hier zwey gleiche, durch den Punkt A gezogne, auf BC ſchiefaufſtehende grade Linien, in ungleichem Abſtand
* 16. 3. vom Perpendikel, welches unmöglich iſt *. Alſo iſt es unmöglich daſs BC und EF ungleich wären, alſo
* 11. nothwendig, daſs beyde Dreyecke ſich decken *.

[Anmerkung. Auch hieraus folgt, daſs das Perpendikel aus der Spitze des gleichſchenkligen Dreyecks auf die Grundlinie, die Grundlinie und den Winkel an der Spitze halbirt.]

[LEHRSATZ 20.]

Zwey ſchiefwinklige Dreyecke decken ſich, wenn in ihnen zwey Seiten und einer der Winkel, welcher dieſen Seiten gegenüberſteht, gleich ſind, und dabey *die zweyten gegenüberſtehenden Winkel beyde ſpitz, oder beyde ſtumpf ſind.*

Es ſey NB = DE, BL = EF und der Winkel N = D, ſo werden die beyden Dreyecke NBL, DEF ſich unter der Bedingung decken, daſs die beyden andern, den gleichen Seiten gegenüberſtehenden Winkel, beyde ſpitz, oder beyde ſtumpf ſind, welche Fälle die Figur beyde darſtellt. Fig. 24.

Man ziehe aus der Spitze der von den gleichen Seiten eingeſchloſsnen Winkel B, E auf die gegenüberſtehende Grundlinie oder deren Verlängerung die ſenkrechten Linien BM, EH *, ſo decken ſich die rechtwinkligen Dreyecke *NMB*, *DHE* weil in ihnen einer der ſpitzen Winkel N, D und eine Seite NB, DE gleich ſind *. Alſo fallen die Seiten NM, DH, die Punkte B, E, und zugleich die Perpendikel BM, EH zuſammen. Folglich ſind dann BL, EF, zwey von Einem Punkte eines Perpendikels, nach Einer graden Linie, (den zuſammenfallenden NL, DF) gezogne ſchiefaufſtehende Linien. Da nun, der Vorausſetzung gemäſs, erſtens die Winkel L, F, welche den zuſammenfallenden Linien NB, DE gegenüberſtehn und daher auf einerley Seite der ſchiefaufſtehenden Linie BL, EF liegen, entweder beyde ſpitz, oder beyde ſtumpf ſind, ſo müſſen dieſe ſchiefſtehenden Linien BL, EF ſich auf einerley Seite des Perpendikels befinden *, und und da ſie zweytens der Vorausſetzung nach gleich ſind, ſo müſſen ſie zuſammenfallen *. — Folglich fallen alle drey Seiten der Dreyecke NBL, DEF zuſammen, und beyde Dreyecke decken ſich.

*Aufg. 3

*18. f. 2.

*16. Z. 2.

*16. 2.

Anmerkung. Diesen Satz der bey *Euklid* und *Le Gendre* fehlt, habe ich aus *Simpson* entlehnt, den Beweis aber selbst geführt, da Simpson die Hauptsache, dass BC, EF auf einerley Seite des Perpendikels fallen müssen, nicht darthut, wozu ihm Sätze, wie die beym 16ten Lehrsatz nachgetragnen, fehlten. Dass dieser Satz übrigens allein unter der beygefügten Bedingung gilt, erhellt aus dem Beweise. Denn nur unter dieser Bedingung ist es nothwendig dass die schiefstehenden Linien BL, EF, beyde auf einerley Seite des Perpendikels liegen und sich decken. Ohnedem könnten sie wie BL, E'F auf entgegengesetzten Seiten des Perpendikels liegen, und dann würden sie ihrer Gleichheit ungeachtet nicht zusammenfallen. Die Deckung bliebe also ohne jene Bedingung zweifelhaft. — Wie, wenn zwey Linien als Seiten eines Dreyecks, und ein ihnen gegenüberstehender Winkel gegeben sind, das Dreyeck zu finden ist, lehrt Aufg. 10.

d. U.

LEHRSATZ 21.

Fig. 31. *Zwey grade Linien AC, BD, welche auf einer*
* E. 14 *dritten AB senkrecht stehn*, sind parallel, d. h. tref-*
* E. 15. *fen nie zusammen, so weit man sie auch verlängert*.*

Denn gesetzt sie träfen in irgend einem Punkte O
* E. 10. oberhalb oder unterhalb der Linie AB zusammen*; so hätte man einen Punkt O, von welchem zwey verschiedne Perpendikel OA, OB noch derselben graden
* 15. Linie AB giengen, welches unmöglich ist *.

[Hieraus erhellt die Möglichkeit parallaler Linien. — Die 15te Erklärung gehörte also hierher.]

LEHRSATZ 22.

Fig. 32. *Wenn auf der graden Linie AB, eine andere BD senkrecht und eine zweyte AC schief aufsteht, so dass*

der spitze Winkel BAC nach der Seite jenes Perpendikels zu liegt, so müssen BD, AC genugsam verlängert [an der Seite der AB, auf welcher der spitze Winkel liegt] zusammen treffen.

Aus verschiednen Punkten F, C, P, der schiefstehenden Linie AC seyen auf AB die Linien FG, CM, PN senkrecht gezogen.

Diese Perpendikel fallen insgesammt auf die Seite der AC, auf welcher der spitze Winkel liegt *, d. i. der Voraussetzung nach insgesammt nach der Seite des Perpendikels BD. Die Punkte G, M, N in welchen sie auf die AB aufstehn, können nicht mit dem Punkte A zusammenfallen, weil BAC kein rechter Winkel ist. Eben so wenig können sie in der entgegengesetzten Verlängerung AL der Linie AB liegen. Denn sonst müfste das im Punkte A auf AB errichtete Perpendikel AE von diesen Perpendikeln durchschnitten werden, (wie z. B. von FH in K)*, und dann wären von dem Durchschnittspunkte (K) zwey verschiedne Perpendikel auf AL vorhanden (KA, KH) welches unmöglich ist *: folglich müssen die Punkte G, M, N in der Linie AB von A nach B zu liegen. *16.Z.2. * Gr. 8. * 15

Grade aus denselben Gründen muss, wenn AC gröfser als AF ist, auch der Punkt M von G nach B zu in der Linie AB liegen. Sollte er mit G zusammenfallen, so stünden in G auf AB zwey verschiedne grade Linien GF, GC senkrecht, welches unmöglich ist*. Sollte er in die entgegengesetzte Seite der AB fallen, so würde das Perpendikel aus C das Perpendikel FG durchschneiden, und aus einem Punkte ausserhalb der *1. Z. 2

AB auf ihr zwey verschiedne Perpendikel vorhanden seyn, welches eben so wenig möglich ist. Folglich muss der Punkt M von G nach B zu fallen, so dass AM grösser als AG ist.

Wenn man also auf AC stets in grössern Entfernungen Punkte nimmt, und aus ihnen senkrechte Linien auf AB zieht, so fällt der Punkt wo sie auf AB aufstehn, immer weiter und weiter von A ab. In diesem Wachsthum der Entfernungen AG, AM, AN Gränzen annehmen zu wollen, würde ungereimt seyn. Denn gesetzt man wollte behaupten irgend eine der senkrechten Linien z. B. CM sey die letzte, folglich die, deren Fusspunkt M am weitesten von A abstünde, so liesse sich allemal, auf die Art, wie es hier geschehn ist, dar-
* Fo. 2. thun, dass wenn man die AB verlängert *, ein aus irgend einem Punkte P der Verlängerung auf AB gefälltes Perpendikel PN in einer Entfernung AN, die grösser als AM ist, aufstehn müsste; ein Resultat, welches der Annahme, dass CM die letzte am weitesten von A entfernte senkrechte Linie sey, widerspricht.

Folglich stehn auf AB in jeder beliebigen, noch so grossen Entfernung von Punkte A Perpendikel, die aus einem Punkte der AC gefällt sind, auf: folglich auch in der Entfernung AB, und hier muss das Perpendikel mit der senkrechten Linie BD zusammenfallen, da in einem Punkte B einer graden Linie nur ein ein-
* 1. Z. 2. ziges Perpendikel auf diese Linie möglich ist *: folglich müssen die Linen AC, BD genugsam verlängert, in irgend einem Punkte zusammentreffen, und zwar

an der Seite der AB, auf welcher der ſpitze Winkel BAC liegt.

[Anmerkung. Dieſes iſt der Fundamentalſatz in der *Lehre von den Parallellinien*, deſſen Beweis, wie ihn Le Gendre führt, ich auf das Vortheilhafteſte darzuſtellen, und, (wie man aus den Citaten ſehn kann) durch Einſchaltung früherer von Le Gendre übergangener Sätze in das Syſtem, ich noch beſſer zu begründen geſucht habe. Aus dieſem Satze folgt der 24ſte Lehrſatz, deſſen Beweis, wie es ſcheint, *Euklid* für unmöglich hielt, und den in der That noch niemand, ſo viele Wege man auch eingeſchlagen hat, elementariſch und völlig bindend dargethan hat. *Hr. Le Gendre* würde ſich daher ein bleibendes Verdienſt um die Geometrie erworben haben, wenn der hier mitgetheilte Beweis biedend und ohne Lücke wäre, und ſich dagegen nichts anders einwenden lieſse, als was Le Gendre ſelbſt in einer Anmerkung erinnert, daſs die Idee des Unendlichen dabey mit ins Spiel komme (welches, wenn es nur auf gehörige geometriſche Art geſchieht, nicht tadelnswürdig ſeyn könnte). Ich glaube aber an Hr. *Le Gendres* Beweis zweyerley ausſetzen zu müſſen.

Erſtens wird im indirecten Beweiſe im Erſten Abſatz unbewieſen behauptet, daſs die als ſenkrecht angenommene FH das Perpendikel AE durchſchneiden müſſe; eine Lücke die jedoch leicht auszufüllen iſt, wenn man nur die von unſerm Verfaſſer übergangnen Sätze vom Schneiden der Linien den Principien der Geometrie zufügt, wie ich das zu thun verſucht, und deshalb auf Grundſatz 8 verwieſen habe.

Zweytens, und das iſt die Hauptſache, thut dieſer Beweis zwar überzeugend dar, daſs, falls es in der Verlängerung einer graden Linie keine Gränzen giebt, (und daſs es die nicht gebe liegt in Forderung 2.) es auch *kein letztes Perpendikel* aus Punkten der AC auf AB *geben könne*. Allein daraus folgt keineswegs, wie im dritten Abſatz ſtillſchweigend angenommen wird, daſs es *in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte* A *keine Gränze* geben könne. Denn es wäre vielleicht doch denkbar, daſs bey gleich weit entfernten Punkten auf der AC, die Perpendikel auf AB immer weniger von einander abstünden, und ihre Entfernungen vielleicht in einer geometrischen oder andern unendlichen Reihe die eine endliche Summe hat, abnehmen könnten, da denn für gewisse Entfernungen der BD, die AC sich ihr assymptotisch nähern würde, ohne sie je zu erreichen. In diesem Fall *wäre zwar eine Gränze* in der Entfernung jener Perpendikel vom Punkte A auf der Linie AB *vorhanden*, über die heraus für jede Entfernung von A kein Perpendikel aus einem Punkte in der AC die AB mehr duchschnitte, allein dem ungeachtet gäbe es kein *letztes Perpendikel*, weil es bey allen Annäherungen ohne Ende keinen letzten Zustand giebt. Es scheint daher etwas übereilt zu seyn, wenn *Hr. Le Gendre* im vierten Absatz aus dem was dargethan ist (d. h. daraus dass es kein letztes Perpendikel giebt) unmittelbar folgert, dass in jeder noch so grossen Entfernung von A ein Perpendikel aufstehe; eine Folgerung die nur dann gültig wäre, wenn er dargethan hätte, dass es in der Entfernung der Durchschnittspunkte der Perpendikel auf der Linie AB, vom Punkte A an gerechnet, *keine Gränze* giebt. So lange er uns dieses nicht beweist (und das möchte auf dem Wege, den er einschlägt, kaum möglich seyn) können wir seinen Beweis nicht als bindend erkennen, sondern müssen ihn, so viel Scharfsinn er übrigens verräth, den nicht ganz geglückten Versuchen die Schwierigkeit in der Theorie der Parallellinien zu heben, beyzählen. Unserm Leser wird er wenigstens dazu dienen, dass er einsieht, worauf die Schwierigkeit bey diesem Satze beruht, welches mehreren, die sich mit dieser Theorie beschäftigt haben, nicht scheint recht deutlich gewesen zu seyn. — Ueber die Versuche die Theorie der Parallellinien auf einem andern Wege zu begründen, sehe man die erste unter den Bemerkungen, welche diesen Elementen angehängt sind.

d. U.

LEHRSATZ 23.

*Fig. 32. *Wenn zwey grade Linien AC, BD mit einer dritten AB zwey innere Winkel* * *CAB, ABD*

*25. An.

bilden, deren Summe zwey rechten Winkeln gleich iſt, ſo ſind ſie parallel.

Aus dem Punkt G in der Mitte zwiſchen A und B ſey ſenkrecht auf AC die grade Linie EGF gezogen *. *Au.1.3.
Der Vorausſetzung nach ſind GBD + GAE zwey rechten Winkeln gleich. Nun ſind auch, als Nebenwinkel, GBD + GBF zwey rechten Winkeln, alſo der Summe jener beyden Winkel gleich*. Folglich GAE * Gr. 1.
= GBF.* Ueberdem ſind als Scheitelwinkel AGE, * Gr. 2.
BGF, und der Conſtruction gemäſs die Seiten GA, GB gleich. Folglich decken ſich die beyden Dreyecke AEG, BFG *, und auch die Winkel GFB, GEA * 6.
ſind gleich. Nun iſt GEA der Conſtruction gemäſs ein rechter Winkel, alſo auch GFB. Folglich ſtehn die beyden Linien AC, BD auf *einer* dritten ſenkrecht, ſind alſo parallel*. * 21.

[*Folgerung.* Sollen alſo zwey grade Linien zuſammentreffen, ſo müſſen ſie mit jeder dritten, welche ſie durchſchneiden, zwey innere Winkel bilden, die zuſammen genommen gröſser oder kleiner als zwey rechte ſind.]

LEHRSATZ 24.

Wenn zwey grade Linien AI, BD, mit einer dritten AB zwey innere Winkel BAI, ABD bilden, deren Summe kleiner als zwey rechte Winkel iſt, ſo treffen ſie genugſam verlängert zuſammen, und zwar an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte ſind, liegen.]

Man ziehe durch A die grade Linie AC, [unter einem Winkel, welcher dem Nebenwinkel von ABD

*Aufg.4 gleich ist *] so daſs die beyden innern Winkel CAB, ABD zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich werden, und nehme dann dieſelbe Conſtruction als beym vorigen Satze vor. — Da dann AE das Perpendikel und AK eine ſchiefſtehende Linie auf EG iſt, die beyde durch denſelben Punkt A gehn, ſo iſt der Winkel AKE, welcher mit dem Perpendikel auf einer-
*16 Z.2. ley Seite der ſchiefſtehenden AK liegt, ſpitz *, folg-
* 5. lich auch ſein Scheitelwinkel FKI *. Daher müſſen KI, FD genugſam *verlängert* oberhalb EF zuſammentref-
* 22. fen *. [Nun aber können ſie nicht in dem Stück BF zuſammentreffen; weil ſonſt die Winkel BAI, ABD, gegen die Vorausſetzung nicht auf einerley Seite der AB liegen würden. Folglich müſſen ſie in dem Stück BD, alſo oberhalb AB zuſammentreffen, d. i. an der Seite der AB, an welcher die beyden innern Winkel, die kleiner als zwey rechte ſind, liegen.]

Zuſatz I. Daſſelbe findet auch ſtatt, wenn zwey Linien AM, BD mit der dritten AB zwey innere Winkel BAM, ABD bilden, deren Summe *gröſser als zwey rechte Winkel iſt.* Denn da die Summe der Nebenwinkel BAM, BAN und ABD, ABF vier rechten Winkeln
*5. Z. 1. gleich iſt *, und der Vorausſetzung nach BAM + ABD gröſser als zwey rechte Winkel iſt; ſo muſs die Summe der beyden andern Winkel BAN + ABF kleiner als zwey rechte Winkel ſeyn, alſo AN dem vorigen Beweiſe zu folge mit BF zuſammentreffen, [jetzt aber unterhalb AB, da in dieſem Fall die innern Winkel, die kleiner als zwey rechte ſind, unterhalb AB liegen.]

Zusatz II. *Durch jeden Punkt* A *ist mit einer graden Linie BD nur eine einzige Parallellinie AC möglich.* Denn jede von AC verschiedne grade Linie AI oder AM, bildet mit AB einen kleinern oder einen gröſsern Winkel als AC, folglich zwey innere Winkel, deren Summe kleiner oder gröſser als zwey rechte ist, durchschneidet also BD.

[Anmerkung. Die Bestimmung zu welcher Seite der AB, die beyden graden Linien zusammentreffen, fehlte bey unserm Verfasser mit Unrecht, da sie von vielem Gebrauch ist. — Der Lehrsatz selbst ist *Euklids* eilfer Grundsatz, über den man einige Bemerkungen am Ende dieses Werks findet, wo auch unser Verfasser eine überraschende analytische Methode angiebt, wie sich die Hauptsätze der Geometrie unabhängig von der Theorie der Parallellinien darthun lassen.]

LEHRSATZ 25.

Wenn zwey Parallellinien AB, CD von einer graden Linie EF geschnitten werden, so ist die Summe der beyden innern Winkel AGO, GOC zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 34.

Denn gesetzt sie sey kleiner oder gröſser als zwey rechte Winkel, so müſsten, dem vorigen Lehrsatz zu folge, beyde Linien zusammentreffen, wären also nicht parallel.

Folgerung 1. Wenn AGO ein rechter Winkel ist, so muſs es auch der zweyte innere Winkel GOC seyn. Folglich *steht jede grade Linie, die auf einer von zwey Parallellinien senkrecht steht, auch auf der andern senkrecht.*

Folgerung 2. Da AGO + GOC zwey rechten Winkeln gleich ist, überdem auch die Summe der Nebenwinkel GOD + GOC zwey rechte Winkel beträgt, so ist AGO gleich GOD, also auch gleich dem Scheitelwinkel des letztern COF. Also sind sowohl die vier spitzen Winkel EGB, AGO, GOD, COF einander gleich, als auch die vier stumpfen Winkel EGA, BGO, GOC, DOF; und jeder der spitzen macht mit jedem der stumpfen Winkel zusammengenommen zwey rechte Winkel aus. — Umgekehrt ist, wenn AGO gleich GOD oder COF ist, auch AGO + GOC gleich GOD + GOC d. h. zwey rechten Winkeln gleich.

Anmerkung. Diese Winkel liegen um zwey verschiedne Durchschnittspunkte G, O. Ein Winkel an einem Durchschnittspunkt in Verbindung mit einem Winkel am andern Durchschnittspunkt betrachtet, geben Paare von Winkeln, denen man eigne Namen gegeben hat. Die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche zu einerley Seite der durchschneidenden Linie liegen, nennt man vorzugsweise *innere Winkel* (angles internes) z. B. AGO, GOC auch BGO, GOD; die Winkel zwischen beyden Parallellinien, welche auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie liegen, *Wechselswinkel* (angles alternes oder alternes internes) z. B. AGO, GOD auch BGO, GOC; endlich ein Paar Winkel auf einerley Seite der durchschneidenden Linie, wovon einer zwischen, der andere ausserhalb der beyden Parallellinien liegt, *äussere Winkel* (angles internes - externes), dergleichen EOD, EGB, auch EGA, EOC; FGB, FOD, und FGA, FOC sind. (Die Winkel ausserhalb beyder Parallellinien, auf entgegengesetzter Seite der durchschneidenden Linie, z. B. EGB, COF nennt *Le Gendre* alternes - externes; im Deutschen würden wir sie am schicklichsten *äussere Wechselswinkel* nennen.) — In diese Benennungen übertragen, sagt unser Lehrsatz und die vorhergehenden folgendes aus.

1. *Wenn zwey Parallellinien von einer dritten graden Linie durchschnitten werden, so sind* α) *die innern Winkel zusammen genommen zwey rechten Winkeln gleich;* β) *die Wechselswinkel und* γ) *auch die äusern Winkel untereinander gleich.*

2. Wenn *umgekehrt* zwey grade Linien so von einer dritten durchschnitten werden, dafs die Summe der Innern Winkel zwey rechte beträgt, oder dafs die Wechselswinkel, oder dafs die Aeufsern-Winkel gleich sind; so sind die Linien parallel *. Eins dieser Merkmale zieht stets die beyden andern nach sich, wie aus Folgerung 2 erhellt. * 23.

[3. Werden dagegen zwey grade Linien von einer dritten so durchschnitten, dafs die innern Winkel *nicht* zwey rechten, und Fig. 33. die Wechselswinkel, so wie die äufsern Winkel, *nicht* untereinander gleich sind, *so treffen diese Linien zusammen*, und zwar an der Seite der durchschneidenden Linie, an welcher die innern Winkel IAB + ABD < 2 R sind *; folglich an der Seite, wo * 24. *der kleinere der Wechselswinkel liegt* IAB < ABF oder ABD < BAL, oder an der Seite an welcher der kleinere von zwey äufsern Winkeln zwischen den Parallellinien liegt.]

[4. Auf die Sätze unter 2 beruht die *Construction der Parallellinien*, in Aufgabe 6, und daher auch die *Möglichkeit des Parallelogramms* *, welches entsteht, wenn man von zwey Punkten * E. 19. einer Parallellinie nach der andern gleichlaufende Linien zieht, Fig. 34. folglich Parallelen zwischen Parallelen bildet.]

LEHRSATZ 26.

Zwey grade Linien AB, CD, welche mit einer Fig. 35. *dritten EF parallel sind, sind untereinander selbst parallel.*

Es sey RP ein Perpendikel auf EF. Weil nun AB mit EF parallel ist, so steht RP auch auf AB senkrecht *. * 25. f. 1. Weil zweytens CD mit EF parallel ist, so steht RP auch auf CD senkrecht. Also stehn AB, CD beyde

auf einer graden Linie RP senkrecht; folglich sind sie
* 21. untereinander parallel *.

LEHRSATZ 27.

Fig. 36. *Zwey Parallellinien stehn überall gleich weit von einander ab, d.h. Perpendikel, die von Punkten in der einen auf die andre gefällt werden, sind überall gleich.*

Es mögen BA, DC zwey Perpendikel seyn, welche aus Punkten in der einen Parallellinie BD auf die andre Parallellinie AC gefällt sind. Ferner sey F ein Punkt in der Mitte von BD, und FE das Perpendikel aus diesem Punkt auf AC. Alle drey Perpendikel stehn auf beyden Parallellinien zugleich
*25. f. 1. senkrecht *, daher die Winkel um A, E, C, D, F, B insgesammt rechte sind. Dieses vorausgesetzt behaupte ich, dass das Viereck AEFB sich mit dem Viereck CEFD deckt. Beyden ist die Seite FE gemein. Da ferner die Winkel bey beyden rechte sind, folglich einander decken, und der Construction gemäss BF = FD ist, so fällt der Punkt B auf D, und da die Winkel bey B und D beyde rechte, also ebenfalls gleich sind, fällt auch BA auf DC. Ueberdem fällt, weil bey E rechte Winkel sind, EA auf EC, folglich auch A auf C, als Durchschnittspunkte zweyer zusammenfallender Linien. Also decken sich die beyden Vierecke, und die Perpendikel AB, CD sind gleich. [Da dieser Beweis für alle Perpendikel gilt, so stehn folglich zwey Parallellinien durchgängig gleich weit von einander
*16. f. 1. ab *, sind lineae aequidistantes; eine Eigenschaft, woraus mehrere die Definition und die ganze

Theorie

Theorie der Parallellinien zu gründen gesucht haben, wozu diese Eigenschaft jedoch erst vermöge des folgenden Lehrsatzes tüchtig wird. Siehe Bemerkung 1. am Ende dieses Bandes.]

Zusatz. Grade auf dieselbe Art wird *der umgekehrte Satz* bewiesen, daſs eine Linie, welche von einer graden Linie in allen ihren Punkten gleich weit absteht, auch eine grade Linie, und zwar eine Parallellinie mit der erstern seyn muſs. Daraus folgt daſs eine Linie die mit einer gegebnen Linie parallel läuft, der *geometrische Ort* aller Punkte ist, welche von der gegebnen graden Linie gleich weit abstehn, oder der geometrische Ort für die Aufgabe einen Punkt anzugeben, der von einer gegebnen graden Linie um eine gegebne Linie absteht. Alle Punkte in der Parallellinie und keiner auſser ihr, thun dieser Aufgabe genüge *.

* E. 21.

[LEHRSATZ 28.]

Zwey grade Linien in einer Ebne, welche nicht parallel sind, stehn überall ungleich weit von einander ab, und zwar wird ihr Abstand nach der Seite zu, wo sie einander durchschneiden, immer kleiner, nach der entgegengesetzten immer gröſser. Fig. 37.

Es mögen AC, BH, zwey grade Linien seyn, welche nach der Seite von C und H hin zusammentreffen Von zwey Punkten B und H der einen, fälle man auf die andere die Perpendikel BA und HC, so muſs HC < BA seyn.

Denn man errichte auf der Mitte von AC eine dritte ſenkrechte Linie EG; ſo muſs, weil beyde Linien ſich nach C und H zu, durchſchneiden ſollen,
* 23. f. dieſer Vorausſetzung gemäſs EGH + GEC < 2 R *, folglich EGH < R *alſo ſpitz ſeyn.* Nun aber läſst das Viereck GECH ſich wie im vorigen Beweiſe ſo auf das Viereck GEAB legen, daſs GE, EC, CH, auf GE, EA, AB, fallen. Geſetzt nun erſtens CH ſey gleich AB, ſo würden beyde Vierecke völlig einander decken, alſo EGH ein rechter Winkel ſeyn, welches der Vorausſetzung widerſpricht. Geſetzt zweytens CH, ſey gröſser als AB, ſo würde, indem CH auf AB liegt der Punkt H in der Verlängerung von AB, über B hinaus fallen; folglich müſten die Schenkel EG, GH,
*E.12.β den Winkel EGB einſchlieſsen, alſo EGH > EGB *, d. i. der ſpitze Winkel gröſser als der ſtumpfe ſeyn, welches ungereimt wäre. Alſo muſs nothwendig HC, kleiner als BA ſeyn, alſo der Abſtand zweyer ſolcher Linien nach der Seite des Durchſchnittspunktes hin immer kleiner, nach der entgegengeſetzten ſtets gröſser werden.

Die beyden Linien alſo *nähern ſich einander* immer mehr auf der Seite des Perpendikels, auf welcher der Durchſchnittspunkt liegt, oder *convergiren* nach dem Durchſchnittspunkte zu, *entfernen ſich* dagegen *von einander immer weiter* oder *divergiren* auf der entgegengeſetzten Seite des Perpendikels. Und zwar nimmt hier ihr Abſtand ohne Gränzen zu, und kann deshalb gröſser als jede angebliche Gröſse werden.

d. U.

LEHRSATZ 29.

Zwey Winkel BAC, DEF ſind gleich, wenn ihre Schenkel nach einerley Seite zu untereinander parallel laufen, d. h. ſo, daſs je zwey der parallelen auf einerley Seite der andern Schenkel liegen. Fig. 38.

Man verlängere, falls es nöthig iſt, den Schenkel DE des einen Winkels, bis er einen Schenkel des andern Winkels in einem Punkte G durchſchneidet. Dann werden die beyden Parallellinien EF, AC von einer graden Linie DG durchſchnitten, folglich ſind, als äuſsere Winkel, DEF, DGC gleich *. Ueberdem ſind auch DGC, BAC, als äuſsere Winkel an den Parallellinien GD, AB gleich; folglich auch die Winkel DEF, BAC. * 25. A.

Anmerkung. Daraus, daſs die Schenkel zweyer Winkel untereinander parallel ſind, läſst ſich auf die Gleichheit beyder Winkel nur unter der Bedingung ſchlieſsen, daſs die parallelen Schenkel EF, AC nach einerley Seite der andern parallelen Schenkels ED, AB, und dieſe nach einerley Seite von jenen zu liegen [qu'ils ſoyent dirigés dans le même ſens; ein Wort dem im Deutſchen keins entſpricht.] Auch ſind die Winkel gleich, wenn die parallelen Schenkel *beyde* auf entgegengeſetzten Seiten der andern liegen. Zwey Winkel wie DE'H, BAC, in welchen zwey der parallelen Schenkel E'D, AB dieſe Lage haben, die beyden andern E'H, AC aber auf entgegengeſetzten Seiten der andern Schenkel liegen, ſind nicht gleich, ſondern erganzen einander zu zwey rechten Winkeln.

LEHRSATZ 30.

Wenn man die Seite CA eines Dreyecks verlängert, ſo iſt der von der Verlängerung AD und der Fig. 39.

andern nicht verlängerten Seite AB eingeschloßne äussere Winkel am Dreyeck BAD der Summe der beyden innern, ihm entgegenstehenden Winkel B und C gleich.

Ziehe durch den Winkelpunkt A parallel mit der
*Aufg. 6 gegenüberstehenden Seite BC die Linie AE *. An der die Parallelen durchschneidenden graden Linie AB sind die Wechselswinkel B, BAE, an der andern sie durchschneidenden graden Linie CD die äusseren Winkel C, EAD gleich. Folglich ist B + C gleich BAE + EAD d. h. gleich dem äussern Winkel BAD.

[*Folgerung*. Der äussere Winkel ist also grösser als jeder der beyden Innern die ihm gegenüberstehn.]

LEHRSATZ 31.

Die drey Winkel eines Dreyecks sind zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.

Denn da nach dem vorigen Lehrsatz B + C = BAD ist, so wird wenn man beyderseits den dritten Winkel A hinzufügt, A + B + C = A + BAD = zwey rech-
* 2. ten Winkeln. *

Folgerung 1. *Wenn zwey Winkel eines Dreyecks, oder ihre Summe gegeben wird, so ist auch der dritte Winkel* (als der Unterschied zwischen zwey rechten Winkeln und dieser Summe) *bekannt*. Ihn zu finden lehrt Aufgabe 7.

Sind folglich *in zwey Dreyecken zwey Winkel gleich, so sind es auch die dritten Winkel*, und beyde Dreyecke gleichwinklig.

Folgerung 2. *Kein Dreyeck kann mehr als Einen rechten oder Einen stumpfen Winkel haben.* Denn hätte es deren zwey, ſo müſten die drey Winkel zuſammengenommen gröſser als zwey rechte ſeyn.

In jedem rechtwinkligen oder ſtumpfwinkligen Dreyeck ſind zwey Winkel ſpitz. Im *rechtwinkligen* beträgt die Summe der ſpitzen Winkel einen rechten Winkel, und im *rechtwinkligen gleichſchenkligen Dreyeck* iſt jeder der ſpitzen Winkel einem halben rechten gleich *. Die Winkel an der Grundlinie eines *gleichſchenkligen Dreyecks* ſind allemal ſpitz. * 12.

Folgerung 3. *Im gleichſeitigen Dreyeck beträgt jeder Winkel zwey Drittel eines rechten* *. * 12. f.

[*Folgerung* 4. Nimmt man folglich auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels GCB ein beliebiges Stück CG und beſchreibt darüber ein gleichſeitiges Dreyeck *, ſo wird dadurch der rechte Winkel in zwey Stücke geſchnitten, welche $\frac{2}{3}$ R und $\frac{1}{3}$ R betragen und halbirt man den Winkel im gleichſeitigen Dreyeck GCD *, ſo wird *der rechte Winkel in drey gleiche Theile getheilt.*] Fig. 17. *II.E.11. Z. *Aufg. 5

LEHRSATZ 32.

Die Summe aller innern Winkel eines gradelinigten Vielecks beträgt ſo vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat.

Es ſey Fig. 5. ein Vieleck von beliebig viel Seiten. Zieht man die Diagonale AC ſo, daſs ſie ein Dreyeck ABC abſchneidet, ſo bleibt ein Vieleck ACDEFG übrig, welches eine Seite weniger als das erſte Vieleck hat, und deſſen Winkel zuſammengenommen, vermehrt um die Summe der Winkel des Dreyecks ABC,

d. h. um zwey rechte Winkel der Summe der Winkel des erſten Vielecks gleich ſind. — Folglich iſt die Summe aller Winkel eines *Vierecks* der Summe der Winkel eines Dreyecks und zwey rechten Winkeln, d. h. vier rechten Winkeln gleich; die Summe aller Winkel eines *Fünfecks*, der eines Vierecks und zwey rechten Winkeln, d. h. ſechs rechten Winkeln, und ſo ferner, indem die Summe aller Winkel für jede hinzukommende Seite um zwey rechte Winkel gröſser wird. Da nun unſer Satz vom Dreyeck, Viereck, Fünfeck gilt, ſo gilt er auch vom Sechseck u. ſ. w. Folglich beträgt *in jedem Viereck* die Summe aller Winkel ſo vielmal zwey rechte Winkel, als das Vieleck Seiten, weniger zwey, hat. [Geſetzt alſo es habe n Seiten, ſo iſt die Summe aller Winkel dieſes n Ecks gleich $(n-2) \times 2R$.]

Folgerung 1. In einem *gleichwinkligen Vieleck* erhält man die Gröſse jedes Winkels, wenn man die Summe aller, durch die Zahl der Winkel dividirt. Daher iſt *jeder Winkel im gleichwinkligen Viereck* ein rechter, im *gleichwinkligen Fünfeck* $\frac{6}{5}$ R; im *gleichwinkligen Sechseck* $\frac{8}{6}$ R oder $\frac{4}{3}$ R u. ſ. f; [überhaupt im gleichwinkligen n Eck, $\frac{(n-2) \times 2R}{n}$.]

Will man alſo lauter gleichwinklige Figuren von einer gleichen Anzahl von Seiten ſo um einen Punkt in einer Ebne zuſammen legen, daſs ſie ringsumher aneinander ſchlieſsen, und keine Lücke laſſen, ſo läſt ſich das nur mit 6 gleichwinkligen Dreyecken, oder mit 4 gleichwinkligen Vierecken, oder mit 3 Sechsecken, und mit keiner andern gleichwinkligen Figur bewerkſtelligen.]

[*Folgerung* 2. Verlängert man eine Seite des Vielecks, so entsteht ein äußerer Winkel, der als Nebenwinkel des innern, diesen zu zwey rechten Winkeln ergänzt. Verlängert man daher an jedem der Winkelpunkte eines n Ecks eine der Seiten, so sind *die n äußern Winkel des Vielecks*, die dadurch entstehn, *zusammengenommen gleich* dem, was der Summe aller innern Winkel des Vielecks an n rechten Winkeln fehlt, mithin allemal *gleich zwey rechten Winkeln.*

Doch gilt dieses nicht bey *Vielecken mit erhabnen Winkeln**, wiewohl für diese die Aussage des Lehrsatzes wahr bleibt. Bey ihnen nimmt für jeden erhabnen Winkel die Summe der äußern Winkel mit zwey rechten Winkeln zu.] * E. 16.

[Anmerkung. Der hier geführte Beweis des Lehrsatzes ist unserm Verfasser eigen. Zieht man aus einem willkührlich im Vieleck angenommenen Punkte C nach den Eckpunkten grade Fig. 74 Linien, so entstehn so viel Dreyecke als die Figur Seiten hat, im n Eck also n Dreyecke, deren Winkel zusammengenommen $n \times 2$ R betragen. Die Summe dieser Winkel übertrifft die Summe aller Winkel des n Ecks um die Winkel, welche am Punkte C liegen, d. h. um vier Rechte *, oder 2×2 R, daher alle * 5. Z 2. Winkel des n Ecks zusammengenommen $(n - 2) \times 2$ R betragen. Das ist der gewöhnliche Weg diesen Satz zu beweisen.]

[LEHRSATZ 33.]

Wenn man auf den Schenkeln eines Winkels A Fig. 40. *zwey Perpendikel BD, CE, errichtet, so durchschneiden sich diese unter einen Winkel G, welcher dem Winkel A gleich ist.*

Dafs beyde Perpendikel fich in irgend einem Punkte G durchfchneiden müffen, folgt daraus, weil fie fonft parallel feyn, alfo beyde fowohl auf dem einen als dem andern Schenkel des Winkels A fenkrecht ftehn
*25. f. 1. müften *, da denn diefe Schenkel felbft, gegen die Vorausfetzung, parallel wären. Hierbey giebt es nun *zwey Fälle*, je nachdem der Durchfchnittspunkt G aufserhalb der beyden Schenkel des Winkels A, oder zwifchen ihnen fällt.

Liegt G *aufserhalb* der beyden Schenkel, fo entftehn zwey Dreyecke GFB, ACF, worin B und C als rechte Winkel, und überdem die Scheitelwinkel bey F gleich find. Folglich find auch ihre dritten Winkel A und G gleich, welches zu erweifen war.

Liegt der Durchfchnittspunkt g der Perpendikel Bg, cg *zwifchen* den Schenkeln des Winkels A, fo entfteht ein Viereck ABgc, worin die Winkel bey B und c rechte find. Da nun die Summe aller vier Winkel des Vierecks nach dem vorigen Lehrfatz vier rechte beträgt, fo ift A + Bgc = 2 R. Es find aber auch als Nebenwinkel Bge + Bgc = 2 R, folglich ift A = Bge, welches zu erweifen war.

Anmerkung. Im *erften Fall* ift alfo *der Winkel den die beyden Perpendikel BG, CG felbft einfchliefsen*, dem Winkel A gleich. Im *zweyten* ift es hingegen *der Nebenwinkel des Winkels Bgc*, den die beyden Perpendikel felbft einfchliefsen, oder der Winkel den eins der Perpendikel und die Verlängerung des andern umfpannt. Auf diefe Beftimmung mufs man bey der Anwendung diefes Satzes, den ich in keinem Syftem der Geometrie finde, forgfältig fehn.

d. U.

LEHRSATZ 34.

Jedes Parallelogramm wird 1) durch eine Diagonale in zwey sich deckende Dreyecke getheilt; und 2) sind die gegenüberstehenden Seiten und Winkel desselben einander gleich. Fig. 41

Es sey ABCD ein Parallelogramm *, und AC eine Diagonale desselben. Diese bildet mit den beyden Paaren gegenüberstehender paralleler Seiten gleiche Wechselswinkel DAC = BCA und DCA = BAC *, folglich zwey Dreyecke ADC, ABC, die, da sie über die gemeinschaftliche Linie AC beschrieben sind, einander decken *.

*25. A. 5.
* 25.
* 7.

Deshalb sind zweytens die sich deckenden Seiten AD, BC, und AB, DC welche im Parallelogramm einander gegenüberstehn, gleich; ferner die gegenüberstehenden Winkel B = D und endlich auch, als Summen der gleichen Winkel DAC + BAC und BCA + DCA, die gegenüberstehenden Winkel A = C.

[*Folgerung* 1. Folglich *sind* überhaupt *Parallelen zwischen Parallelen* (nicht blos rechtwinklige *) *einander gleich*. Wenn z. B AB, CD, und zugleich EF, HI, parallel sind, so ist GH = OI und GO = HI. * 27. Fig. 34.

Daraus folgt dass der *geometrische Ort* des Endpunkts G einer gegebnen graden Linie OG, welche auf einer zweyten CD unter einer gegebnen Lage, z. B. parallel mit HI aufsteht, eine Parallellinie AB mit der erstern ist. (Apoll. eb. Oert. I. 20) Steht sie auf einem Kreise unter einer gegebnen Lage auf, so ist ihr

Ort ein Kreis, wie aus dem folgenden Buche erhellen wird.

Fig. 37. *Folgerung. 2. Werden umgekehrt Parallelen von zwey andern Linien so durchschnitten daſs der Abschnitt auf der einen kleiner als auf der andern ist, so convergiren die durchschneidenden Linien* nach der Seite des kleinern Abschnitts zu einander, und treffen hier, gehörig verlängert, zusammen.]

Fig. 41. [Zusatz I. *Ein Parallelogramm wird also durch drey Stücke völlig bestimmt*, nemlich durch *zwey* aneinander liegenden *Seiten*, AB, AD, denen die gegenüberstehenden gleich seyn müssen, und durch *einen Winkel* z. B. den von AB, AD, eingeschloſsnen Winkel A. Denn der Winkel C, der diesem gegenübersteht, ist ihm gleich, und die beyden Winkel, welche mit ihm an derselben Seite anliegen, ergänzen ihn wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten zu zwey
* 25. rechten Winkeln *.

Hat folglich *ein Parallelogramm einen rechten Winkel, so sind sie alle recht und die Figur ist ein Rechteck.*

Das Parallelogramm aus drey gegebnen Stücken wirklich zu beschreiben, lehrt mit Hülfe des folgenden Satzes Aufg. 11, wo überdem die Möglichkeit der in Erkl. 19 erwähnten Arten der Parallelogramme dargethan wird.

Zusatz II. Unter allen Parallelogrammen ist das *Rechteck* das einzige das völlig bestimmt ist, wenn zwey Seiten gegeben werden; bey den übrigen kömmt es noch auf den Winkel an, unter welchem diese Seiten gegen einander geneigt ſind. Hierauf gründet ſich der Sprachgebrauch ABCD ein *Rechteck aus den beyden Linien AB, BC*, oder *ein Rechteck unter dieſen Linien* zu nennen, und es lediglich durch dieſe beyden Linien zu bezeichnen, z. B. durch ABBC oder ABC. So bedeutet alſo das Rechteck ABE ein Rechteck, welches aus den beyden Linien AB und BE beſchrieben iſt. Die Alten dehnten dieſen Sprachgebrauch ſelbſt ſo weit aus, daſs ſie ein ſolches Rechteck durch den Ausdruck: *das was zwiſchen den beyden Linien AB und BE eingeſchloſſen iſt*, bezeichneten. Fig. 43

Ein *Quadrat* wird durch eine Seite völlig beſtimmt, daher man die Quadrate durch ihre Seiten characteriſirt. So iſt Fig. 44. ein *Quadrat aus AB* beſchrieben, oder das *Quadrat der Linie AB*.

Zuſatz III. *Zwey Rechtecke aus gleichen Seiten decken ſich*, denn ſie ſind, nach dem was hier geſagt iſt, innerlich einerley, nur in ihrem Ort verſchieden, und müſſen deshalb congruiren *. *Sie haben* alſo auch ſtets einen *gleichen Flächenraum*. *Gr. 9.

Grade ſo *decken ſich zwey Quadrate welche über gleichen Seiten beſchrieben ſind*.

Die Sätze in dieſen Zuſätzen werden uns im dritten Buche von groſsem Nutzen ſeyn. d. U.]

LEHRSATZ 35.

Umgekehrt iſt jedes Viereck, worin die gegenüberſtehenden Seiten [oder die gegenüberſtehenden Winkel] einander gleich ſind, ein Parallelogramm. Fig. 41.

1. Ist im Viereck ABCD, AB = CD, und AD = BC; so theilt die Diagonale AC das Viereck in zwey Dreyecke, welche gleiche Seiten haben, folglich ein-
* 11. ander decken *, worin also die Winkel ACD, CAB und ACB, CAD, die gleichen Seiten gegenüberstehen, gleich sind. Sind aber diese Winkel gleich, so müssen die einander gegenüberstehenden Seiten des Vierecks parallel seyn. Folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

[2. Sind im Viereck ABCD die Winkel A = C, und B = D, so sind auch A + B = C + D. Alle Winkel des Vierecks sind aber zusammengenommen
* 32. vier rechten gleich *. Mithin müssen A + B, folglich auch A + D, zwey rechten Winkeln gleich seyn, und daher die Seiten AD, BC, und AB, DC, paral-
* 25. lel laufen *. Also ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm.]

[*Folgerung.* Jedes Viereck mit vier rechten Winkeln ist also ein Parallelogramm, folglich nothwendig
* E. 19. ein Rechteck *.

Auch ist jeder Rhombus und jedes Quadrat nothwendig ein Parallelogramm.]

[*Anmerkung.* Sind in einem Viereck zwey der gegenüberstehenden Winkel gleich, die beyden andern ungleich, so können nicht beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten parallel laufen; das Viereck ist also ein Trapezium. Und doch wird es durch eine der Diagonalen halbirt. Dieses Merkmal reicht also bey einem Viereck nicht hin es zu einem Parallelogramm zu machen. Dazu wird das Merkmal erfordert, welches Lehrsatz 37 aussagt.]

LEHRSATZ 36.

Wenn zwey Seiten AB, CD eines Vierecks, welche einander gegenüberstehn, gleich und parallel sind; so sind auch die beyden andern Seiten AD, BC gleich und parallel, und das Viereck ist ein Parallelogramm.

Ziehe die Diagonale AC. Diese bildet mit den Parallelen AB, CD gleiche Wechselswinkel BAC, DCA*. * 25.
Da überdem der Voraussetzung nach die Seiten AB, DC gleich sind und den Dreyecken ABC, DAC die Diagonale AC gemeinschaftlich ist, so decken sich diese beyden Dreyecke.* Also sind auch die Seiten * 7.
AD, BC gleich, folglich ist das Viereck ABCD ein Parallelogramm. * * 34.

[Zusatz. *Dagegen ist ein Viereck kein Parallelogramm, wenn zwar zwey gegenüberstehende Seiten gleich, aber nicht zugleich parallel* *, *oder wenn sie parallel aber nicht gleich sind.* Denn gesetzt ein solches Viereck wäre ein Parallelogramm, so wären beyde Paar der gegenüberstehenden Seiten gleich und parallel *, gegen die Voraussetzung.] * 34.

LEHRSATZ 37.

Die beyden Diagonalen AC, BD eines Parallelogramms theilen einander wechselseitig in zwey gleiche Theile. Fig. 40

[*Umgekehrt ist jedes Viereck, dessen Diagonalen sich wechselseitig in gleiche Theile zerschneiden, ein Parallelogramm.*]

In den beyden Dreyecken ADO, CBO ſind die Seiten AD, BC, nicht nur gleich, ſondern auch parallel, folglich ebenfalls die Wechſelswinkel A, C und D, B gleich. Alſo decken ſich beyde Dreyecke, und die den gleichen Winkeln A, C und D, B gegenüberſtehenden Seiten ſind gleich BO = OD, AO
* 7. = OC *. Es halbiren ſich alſo beyde Diagonalen wechſelſeitig.

[Halbiren ſich umgekehrt die beyden Diagonalen eines Vierecks im Punkte O, ſo decken ſich die Dreyecke welche an ihrem Durchſchnittspunkt einander gegen-
* 6. über liegen *, alſo auch die gegenüberſtehenden Seiten, daher das Viereck ein Parallelogramm iſt.

Folgerung. Ein Punkt O welcher in der Mitte der einen Diagonale eines Parallelogramms liegt, muſs folglich auch in der andern Diagonale, und zwar in deren Mitte liegen. Man kann ihn den *Mittelpunkt* des Parallelogramms nennen. Jede grade Linien, welche durch ihn gezogen wird, theilt das Parallelogramm in zwey ſich deckende Figuren, und zwar, wenn es keine Diagonale iſt, in zwey ſich deckende Vierecke, wie ſich ohne Schwierigkeit, aus den ſich deckenden Dreyecken, die dann gebildet werden, zeigt.]

[Zuſatz. Da im Parallelogramm je zwey Winkel von Seiten, die untereinander gleich ſind, eingeſchloſſen werden, ſo muſs im ſchiefwinkligen Parallelogramm die Diagonale BD, welche den kleinern Winkeln gegenüberſteht, kleiner als die Diagonale

AC ſeyn, welche den gröſsern Winkeln gegenüberſteht *. Im *Rechteck* ſind dagegen die beyden Diagonalen gleich *, folglich auch die Theile die ſie auf einander abſchneiden, daher das gleichſeitige Rechteck, d. h. das *Quadrat* durch ſeine beyden Diagonalen in vier untereinander gleichſeitige, folglich ſich deckende, gleichſchenklige Dreyecke getheilt wird.]

* 10.
* 6. f. 2.
Fig. 43.
Fig. 44.

ZWEYTES BUCH.
DER KREIS.

Erklärungen.

[Die Vorstellung und die Beschreibung des Kreises gehört zu dem, was der Geometer bey jedem, der sich mit seiner Wissenschaft beschäftigen will, voraussetzt. Sie ist eine eigenthümliche, nicht von andern abgeleitete, und also ursprüngliche Art von Raumbeschreibung, die, sammt den Vorstellungsarten und Begriffen, welche unmittelbar darin liegen, zu den wahren Principien der Geometrie gehört, und schon von Euklid unter den Forderungen der Geometrie an der Spitze des Systems aufgeführt wird. Jeder, wer Geometrie treiben will, muss sich einen Kreis vorstellen, um einen gegebnen Mittelpunkt, mit gegebnem Halbmesser, einen Kreis erzeugen oder beschreiben können; das war unsre dritte Forderung unter den Principien. Die folgenden Erklärungen dienen gröſstentheils nur das zu verdeutlichen, was in dieser geforderten Vorstellungsart liegt, und einiges, was unmittelbar daraus fliest, herauszuheben. d. U.]

1.

Fig. 45. Der *Umfang des Kreises* oder die *Kreislinie* ist eine krumme Linie [welche ganz in einer Ebne liegt] und deren Punkte von einem einzigen Punkte, dem *Mittelpunkte* (*centrum*), insgesammt gleich weit entfernt sind.

Diese

Diese krumme Linie läuft in sich selbst zurück, und schliest einen Theil der Ebne, in welchem der Mittelpunkt liegt, völlig und nach allen Seiten zu ein. Die *Kreisscheibe* ist der von der Kreislinie ringsum begränzte ebne Flächenraum, folglich eine krummlinige ebne Figur *. [Unter *Kreis* pflegt man Kreislinie und Kreisscheibe beyde zusammengenommen zu verstehn. Auch deutet man gewöhnlich den Mittelpunkt des Kreises dadurch an, daſs man sagt, der Kreis sey *um ihn* beschrieben.] *I.E.16.

[Alle Theile der Kreisscheibe, und mithin alle Punkte und alle Linien in ihr, liegen *innerhalb* der Kreislinie, oder *im Kreise*, alle übrigen Theile der Ebene und alle Linien und Punkte in ihnen, *außerhalb* der Kreislinie. Iene und diese liegen also auf *entgegengesetzten Seiten der Kreislinie* *, und haben in Rücksicht der Kreislinie eine entgegengesetzte Lage.] *I.E.10.

2.

Jede grade Linie zwischen dem Mittelpunkte C und einem Punkt im Umfange wird ein *Radius* oder ein *Halbmesser des Kreises* genannt; so CA, CE, CD, CB. — Jede grade Linie, welche wie AB durch den Mittelpunkt geht, und von zwey Punkten im Umfange begränzt wird, ist ein *Durchmesser des Kreises*. Daraus folgt:

α) Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich *. So auch alle Durchmesser, deren jeder zwey Halbmessern gleich ist. * E. 1.

[β) Jeder Durchmesser wird vom Mittelpunkte in zwey gleiche entgegengesetzt liegende Theile ge-
*I. E.10. theilt *.

γ) Jeder Punkt in der Ebne des Kreises steht vom Mittelpunkt um eine grade Linie ab, welche entweder dem Halbmesser *gleich*, oder *kleiner*, oder *grösser* als der Halbmesser ist. Im ersten Fall liegt der Punkt *in* der Kreislinie selbst, im zweyten *innerhalb*, im dritten *ausserhalb* der Kreislinie und des Kreises.

Folglich liegt jeder Halbmesser und jeder Durchmesser ganz innerhalb, jede Verlängerung eines Durchmessers ausserhalb, und nur die beyden Endpunkte desselben auf der Kreislinie, und diese Linie ist der *geometrische Ort* eines Punktes, welcher von einem gegeb-
*I.E.21. nen Punkte um eine gegebne Linie absteht *. (Apollonius I.1.)]

3.

Jeder Theil der Kreislinie z. B. FHG ist ein *Kreisbogen*; [die Hälfte der Kreislinie insbesondere ein *Halbkreis*, und der vierte Theil der Kreislinie ein *Quadrant*. Manchmal versteht man unter diesen Benennungen auch die Hälfte oder den vierten Theil der Kreis-
*2 f;7.Z scheibe. *

Alle Halbkreise, so auch alle Quadranten eines Kreises sind gleich.

4.

Jede grade Linie, welche von zwey Punkten in der Kreislinie begränzt wird, nennt man überhaupt eine *Sehne* oder *Chorde des Kreises*, und ins besondere eine *Sehne des Bogens*, der sich in den beyden Gränzpunkten der Sehne endigt. So ist FG die Sehne des Bogens FHG.

[Folglich ist jeder Durchmesser eine Sehne, und zwar eine Sehne die durch den Mittelpunkt geht *. * E. 2.

5.

Ein *Kreis-Abschnitt* (*Segment*) ist der Theil der Kreisscheibe, der zwischen einem Bogen und dessen Sehne liegt.

Zu jeder Sehne FG gehören zwey verschiedene Kreisbogen FHG, FEG, welche einander zur ganzen Kreislinie ergänzen, *mithin* auch zwey verschiedne Kreisabschnitte, welche zusammen die Kreisscheibe ausmachen. Häufig spricht man indess nur von *einem* Bogen oder Kreisabschnitt der zu einer Sehne gehört; und dann versteht man darunter den *kleinern* der beyden Bogen oder Abschnitte, es sey denn, dass ausdrücklich das Gegentheil erinnert werde.

Was man unter *ähnlichen Bogen* und unter *ähnlichen Kreisabschnitten* versteht, findet man Lehrsatz 20, Zusatz 3, und im vierten Buche erklärt.

6.

Ein *Kreis-Ausschnitt* (Sector) ist der Theil der Kreisscheibe, der zwischen einem Bogen DE und den beyden Halbmessern CD, CE, welche nach den Endpunkten des Bogens gezogen werden, liegt.

7.

Fig. 46. [*Einen Winkel in einem Kreis-Abschnitt* BMND nennt man jeden Winkel wie A, dessen Scheitel im Bogen dieses Abschnitts liegt, und dessen Schenkel durch die Endpunkte B, D des Bogens und der Sehne gehn. Der Kreisabschnitt BMND *fasst den Winkel* A, und der Winkel *ist in diesem Kreis-Abschnitt eingeschrieben.*

Hieraus erhellt, was ein *Winkel im Halbkreise* oder ein Winkel der im Halbkreise eingeschrieben ist, sagen will.]

8.

[Von einem *Winkel* dessen Schenkel eine Kreislinie schneiden, sagt man er *stehe auf dem Bogen*, den seine Schenkel umfassen oder einschliessen, so z. B der Winkel A auf dem Bogen BED.

Liegt der Scheitelpunkt eines solchen Winkels in der Kreislinie, so wird er ein *Winkel am Umfange* genannt, wie z. B. BAD. Liegt der Scheitelpunkt im Mittelpunkte des Kreises, so ist es ein *Winkel am Mittelpunkte*, wie z. B. der Winkel ECD.] Fig. 45.

9.

Man sagt *eine grade Linie ist in einem Kreise eingeschrieben*, wenn sie sich in zwey Punkte des Umfangs endigt, (folglich eine Sehne des Kreises ist) wie z. B FG.

Ein Winkel ist im Kreise eingeschrieben, wenn dessen Fig. 46. Scheitelpunkt im Umfange liegt wie z. B. $\angle$ BAD.

Ein Dreyeck ist im Kreise eingeschrieben, wenn die drey Winkelpunkte insgesammt im Umfange liegen, wie z. B. BAD, da denn die Seiten des Dreyecks insgesammt Sehnen des Kreises sind;

und überhaupt nennt man *eine Figur im Kreise eingeschrieben*, (*oder dem Kreise eingeschrieben*,) wenn alle Winkelpunkte der Figur in der Kreislinie liegen, (folglich ihre Seiten insgesammt Sehnen des Kreises sind.) Vom Kreise sagt man dagegen er sey *um diese Figur beschrieben* (*oder der Figur umschrieben.*)

Diese Benennungen behalten dieselbe Bedeutung, wenn man von Linien, Winkeln oder Figuren spricht, die *in Vielecken eingeschrieben* sind, oder von einem *Vieleck, das um ein anderes beschrieben ist.*

10.

Ein Vieleck ist um einen Kreis beschrieben, (oder dem Kreise *umschrieben*,) wenn alle Seiten des Vielecks die Kreislinie *berühren* *. Der Kreis ist dann *in das Vieleck eingeschrieben*, (*oder dem Vieleck eingeschrieben.*)

* E. II.

[Anmerkung. Noch vor dieser letzten Erklärung stellt Le Gendre folgende auf: „*Eine den Kreis schneidende Linie* ist die, welche die Kreislinie in zwey Punkten trifft; eine *berührende*, die mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat. Eben so haben *Kreislinien die sich berühren* nur einen einzigen Punkt gemein." Allein dieses sind offenbar abgeleitete Sätze, für die man einen Beweis erwartet, und die deshalb keinesweges zu Erklärungen taugen. Statt ihrer schiebe ich die folgenden beyden Erklärungen ein, welche die Fundamentalbegriffe über das Schneiden und Berühren der Kreislinien aussagen, die von Le Gendre angegebenen Merkmale begründen, und eine beträchtliche Lücke in dem System unsers Verfassers ausfüllen. d. U.

II.

[Weil die Theile der Kreisscheibe und die übrigen Theile der Ebne auf entgegengesetzten Seiten der Kreislinie liegen, und die Kreisscheibe ringsum nach
* E. 1. allen Seiten zu von der Kreislinie begränzt wird *; so muss jede stetig zusammenhängende Linie, welche durch einen Punkt *im* Kreise und zugleich durch einen Punkt *ausser* dem Kreise geht, *sich mit der Kreislinie in*
* Gr. 8. *irgend einem Punkte durchschneiden* *. Denn wäre das nicht der Fall, so würde der Kreis nach irgend einer Seite zu nicht völlig begränzt seyn.

Fig. 47. α) *Also müssen sich ins besondere ein Kreis EFD und eine grade Linie AB in irgend einem Punkte E durchschneiden*, wenn die grade Linie durch einen Punkt innerhalb und einen Punkt ausserhalb der Kreislinie geht. — Grade Linien lassen sich aber zu den beyden entgegengesetzten Seiten jedes Punktes in ihnen so weit verlängern, dass sie grösser als jede
* Fo. 2. gegebne Linie werden *; folglich müssen *alle grade Linien, welche* in der Ebne des Kreises *durch einen Punkt im Kreise gehn, gehörig verlängert, auch auf bey-*
* E. 2 γ. *den Seiten dieses Punkts* durch Punkte ausserhalb * der Kreislinie gehn, also *die Kreislinie durchschneiden*. Das geschieht also in *zwey* Punkten, welche in der graden Linie zu entgegengesetzten Seiten des Punkts im Kreise liegen.

Fig. 48 β) Eben so *durchschneiden sich zwey Kreise* wenn der eine HEG durch einen Punkt *im* andern Kreise und zugleich durch einen Punkt *ausserhalb* desselben, z. B. durch I und H geht. — Das ist aber allemal der Fall, wenn die *Summe* ihrer Halbmesser AF, BI grösser und zugleich der *Unterschied* derselben kleiner als die grade Linie zwischen ihren Mittelpunkten AB ist. Denn wenn $AF + BI > AB$ und $AF - BI$ oder was auf eins herauskömmt * $AF - BH < AB$ ist, so muss er stens $AF > AB - BI$ d. h. $> AI$, zweytens $AF < AB + BH$ *, d. h. $< AH$ seyn. Folglich ist I ein Punkt innerhalb und H ein Punkt ausserhalb der Kreislinie DEF, die mit dem Halbmesser AF um A beschrieben ist *, daher der Kreis HEIG die Kreislinie DEFG durchschneiden muss. Und zwar in einem Punkte E, der ausserhalb der graden Linie AB und ihrer Verlängerung liegt, weil sonst die Halbmesser BE, BI, BH nicht gleich seyn könnten *.

*E. 2. α. * Gr. 2. *E. 2. γ. *I. 16. f. 2.

Sind beyde Kreise mit *gleichem* Halbmesser beschrieben, so werden sie sich folglich allemal schneiden, wenn ihr Halbmesser grösser als die Hälfte von AB ist.

Auch muss jeder Kreis dessen Mittelpunkt auf einer andern Kreislinie liegt, diese durchschneiden.

Zusatz. So oft zwey Kreise sich in einem Punkte wie E durchschneiden, entsteht, wenn man die Halbmesser AE, BE zieht, zwischen den beyden Mittelpunkten A, B und dem Durchschnittspunkte E ein *Dreyeck* ABE, welches *gleichseitig* ist *, wenn man beyde Kreise mit AB als Halbmesser beschrieben hat; blos *gleichschenklig*, wenn die Länge der Halbmesser zwar gleich, aber von AB verschieden ist; *ungleichseitig*, wenn die Halbmesser weder untereinander noch mit AB gleich lang sind. Zwey Kreise durchschneiden sich aber gewiss in einem Punkte der ausserhalb der graden

*I. E. 18.

Linie zwifchen ihren Mittelpunkten liegt, wenn die Gröfse ihrer Halbmeffer und die Entfernung ihrer Mittelpunkte den beyden unter β) aufgeftellten Bedingungen entfprechen.

So ift alfo die *Möglichkeit* diefer drey verfchiednen Arten von Dreyecken, unabhängig von allen Lehrfätzen des erften Buchs dargethan, und zugleich *die Conftruction des Dreyecks aus drey gegebnen Linien A, B, C* feftgeftellt, als unmittelbare Folge der Kreisbefchreibung, durch die fie unter den angeführten Bedingungen, vor allen Lehrfätzen und Aufgaben diefes Syftems, begründet wird. Man befchreibe um die Endpunkte der einen diefer Linien A, mit den beyden andern, als
* Fo. 3 Halbmeffern, Kreife *. Wenn die gegebnen Linien den Bedingungen unter β) entfprechen, (d. h. wenn A < B + C und > B — C ift) fo durchfchneiden fich diefe Kreife in irgend einem Punkte aufserhalb der Linie
* Fo. 1. A, und die Halbmeffer nach diefem Punkte gezogen * bilden ein Dreyeck, welches, da alle Halbmeffer ein-
* E. 2. α. ander gleich find *, aus den drey gegebnen Linien befteht. Dafs diefe Conftruction unmöglich wird, fo oft auch nur einer der beyden erwähnten Bedingungen nicht genüge gefchieht, wird in Lehrfatz 17 bewiefen werden.

Anmerkung. So wie die Conftruction des Dreyecks von den Sätzen über das Schneiden zweyer Kreife abhängt, fo fliefsen umgekehrt diefe Sätze aus jener Conftruction, und in diefer Abhängigkeit trägt fie unfer Verfaffer im zwölften Lehrfatz diefes Buches vor. Allein mir fcheint es nothwendig zu feyn, dafs man fie, fo weit es hier gefchehn ift, im Syftem vor der Conftruction der Dreyecke aufftelle, da fie diefe Conftruction erft begründen, und ich glaube hierin zum Vortheil des Systems von unserm Verfasser abgewichen zu seyn. Schon *van Swinden* fand sich bewogen die angeführten Bedingungen, unter welche zwey Kreise sich schneiden, unter den *Grundsätzen* der Geometrie aufzustellen (wiewohl die Aussage seines sechsten Grundsatzes mangelhaft ist) und er bemerkt dabey, dass wenn gleich *Euklid* diesen Satz nicht ausdrücklich als *Axiom* aufführt, er sich dessen doch bey seinen drey ersten Sätzen stillschweigend bedient. *Wolf*, sagt er, habe ihn bewiesen, allein der Satz sey Sonnenklar und deshalb ein Axiom. Allein Sonnenklar ist er doch wahrlich nicht, und wird es höchstens erst dann, wenn man ihn, wie ich es hier versucht habe, aus dem Merkmale des Schneidens der Linien ableitet, die man bisher mit Unrecht ausser Augen gelassen hat.

Le Gendre übergeht den Beweis der Möglichkeit der Dreyecke ganz und gar, und lehrt die *Construction* derselben aus drey gegebnen Linien *erst in der 8ten* Aufgabe, nachdem er schon viele Eigenschaften des Dreyecks dargethan hat. Ueberdem gründen sich seine Beweise der ersten Aufgaben allesammt darauf, dass zwey Kreise unter den angeführten Bedingungen einander schneiden. Diese Behauptung sagt er aber nirgends ausdrücklich aus, weder als Grundsatz noch als Lehrsatz, sondern nimmt sie immer nur stillschweigend an. Sein System ist folglich in diesen beyden Rücksichten mangelhaft. Doch glaube ich durch die Einschaltung dieser eilften Erklärung und der Sätze über das Schneiden, von welchen sie abhängt, und die sie begründet, in die Prinzipien der Geometrie, diese Lücke ausgefullt zu haben.

d. U.]

12.

[*Zwey Kreislinien berühren einander*, wenn sie einen Punkt I so miteinander gemein haben, dass die Theile, welche in der einen Kreislinie durch diesen Punkt abgeschnitten werden, beyde auf einerley Seite der andern Kreislinie liegen *; wenn mithin der eine Fig. 49. *I.E.11.

Kreis sich entweder ganz innerhalb, oder ganz ausserhalb des andern befindet *. Im ersten Fall sagt man dass sie sich *innerlich*, im zweyten dass sie sich *äusserlich berühren.*
* E. 1.

Eben so *berühren sich eine grade Linie und ein Kreis*, wenn sie einen Punkt so miteinander gemein haben, dass die beyden durch diesen Punkt abgeschnittnen Stücke der graden Linie, zu einerley Seite der Kreislinie, und zwar beyde *ausserhalb* derselben liegen. Denn Linien innerhalb des Kreises durchschneiden die
*E. 11.α Kreislinie *, können sie also nicht berühren. — Eine
Fig. 47. grade den Kreis im Punkte F berührende Linie, z. B. LM, nennt man auch eine *Tangente des Kreises* im Punkte F.]

[LEHRSATZ I.]

1) *Zwey Kreislinien, welche mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, decken sich, und schliessen Kreisscheiben von gleicher Grösse ein.*

2) *Sind umgekehrt zwey Kreisscheiben gleich, so decken sie sich, und haben gleiche Kreislinien und gleiche Halbmesser.*

Fig. 51.

1. Sind die beyden Kreise ADBK und EGFL mit gleichen Halbmessern beschrieben, und man legt den Mittelpunkt des einen auf den Mittelpunkt des andern, so dass die Kreise in einer Ebne bleiben, so sind alle Punkte in beyden Kreislinien gleich weit von den zusammenfallenden Mittelpunkten entfernt. Also ist dann

kein Punkt in der einen Kreislinie aufserhalb der andern, beyde Kreislinien fallen folglich zusammen, und decken sich, mithin sind auch die Kreisscheiben gleich.

2. Sind die beyden Kreisscheiben gleich, so lege man sie wiederum so auf einander, dass ihre Mittelpunkte zusammen fallen. Gesetzt nun die Kreislinien deckten sich nicht, so müssten sie, nach dem oben bewiesenen, einen verschiedenen Halbmesser haben. Es sey also EO > AC. Dann liegen alle Punkte in der um O beschriebnen Kreislinie ausserhalb der Kreislinie ADBK *, diese wird folglich von jener eingeschlossen, *E. 2. γ.
da denn die Kreisscheibe ADBK nur ein Theil der Kreisscheibe EGFL ist, ihr also nicht gleich seyn kann gegen die Voraussetzung. Wenn also die Kreisscheiben gleich sind, so decken sie sich; und dann sind auch die Kreislinien gleich, und mit gleichem Halbmesser beschrieben.

Folgerung 1. Nicht nur *Gleichheit* und *Ungleichheit zweyer Kreise*, sondern auch die *Congruenz* derselben hängt folglich lediglich von der Gleichheit oder Ungleichheit ihrer Halbmesser ab. *Euklid* (B. III. Erkl. 1.) nimmt dieses als evident an.

Folgerung 2. Von *zwey concentrischen Kreislinien*, d. h. von Kreislinien die einerley Mittelpunkt C haben, Fig. 47.
schliesst die, welche mit grösserm Halbmesser CD > CG beschrieben ist, die kleinere völlig ein. Beyde haben keinen Punkt gemein, und alle Punkte in beyden, die auf demselben Halbmesser des grössern lie-

gen, ſtehn gleich weit (um den Unterſchied GD der Halbmeſſer) von einander ab.

Folgerung 3. *Zwey Kreiſe, welche ſich ſchneiden oder berühren, können nicht einerley Mittelpunkt haben.* (*Euklid* II. 5 und 6.) Denn in dieſem Fall hätten ſie nicht nur einerley Mittelpunkt, ſondern auch einerley Halbmeſſer, fielen alſo zuſammen, und könnten ſich weder ſchneiden, noch berühren.

Anmerkung. Dieſe für die Lehre vom Kreiſe ſo wichtigen Lehrſätze fehlen bey Le Gendre und ich habe ſie ungeachtet ihres groſsen Nutzens noch in keinem Syſtem der Geometrie bewieſen gefunden. d. U.

LEHRSATZ 2.

Fig. 52. *Jeder Durchmeſſer, z. B. AB, theilt die Kreisſcheibe und die Kreislinie in zwey ſich deckende Theile.*

Denn wenn man den einen der Kreistheile, welche der Durchmeſſer AB abſchneidet, z. B. AEB auf den andern ADB liegt, ſo daſs AB in beyden nach wie vor zuſammenfällt; ſo muſs auch die krumme Linie AEB mit der krummen Linie ADB zuſammenfallen, weil ſonſt in beyden Punkte vorhanden ſeyn würden, die ungleich weit vom Mittelpunkte C abſtänden; gegen den Begriff der Kreislinie *.

* E. 1.

Folgerung. Alſo halbirt jeder Durhmeſſer AB die Kreisſcheibe und die Kreislinie, oder theilt beyde in Hälften, (*Halbkreiſe*,) zu denen dieſer Durchmeſſer als Sehne gehört *. Eines ſolchen Halbkreiſes Flächenraum iſt der Hälfte des Kreiſes, und ſein krummli-

* E. 3. u 4

niger Umfang der Hälfte der Kreislinie gleich. In so fern der Durchmesser eine Sehne ist, gehört er zu den Kreisabschnitten; in so fern aber der Durchmesser aus zwey Halbmessern * besteht, zu den Kreisausschnitten. E.5.u.6.

[LEHRSATZ 3.]

Wenn eine Kreislinie durch zwey Punkte A, B in zwey gleiche Bogen ADB, AEB, getheilt wird, so ist die grade Linie AB, welche von einem dieser Punkte nach dem andern gezogen wird, ein Durchmesser des Kreises. Fig. 52.

Denn gesetzt AB sey kein Durchmesser, so ist irgend eine andere grade Linie z. B. AF der Durchmesser, der durch den Punkt A geht. Dann sind ADF, AEF vermöge des vorigen Lehrsatzes gleich. Aber ADF ist $<$ ADB und AEF $>$ AEB. Folglich müsste noch mehr ADB $>$ AEB seyn, welches der Voraussetzung dass ADB $=$ AEB ist, widerspricht. Also ist es unmöglich dass eine von AB verschiedne grade Linie AF, mithin nothwendig dass AB ein Durchmesser des Kreises ist.

Anmerkung. Dieser Satz, der umgekehrte des vorigen, fehlt bey Le Gendre und in den übrigen Systemen der Geometrie, obgleich er häufig gebraucht wird. d. U.

[LEHRSATZ 4.]

Jede Sehne ED liegt ganz innerhalb, ihre Verlängerung ganz ausserhalb des Kreises. Fig 47.

Denn zieht man nach den Endpunkten der Sehne die beyden Halbmesser CE, CD, so müssen diese, weil

sie gleich sind, auf die Sehne ED schief, und zwar in
*I. 16. 2. gleicher Entfernung vom Perpendikel aufstehn *. Folglich ist jede grade Linie durch den Punkt C, die auf die Sehne zwischen E und D aufstehet, z. B. CH kleiner als CE, d. h. kleiner als der Halbmesser; hingegen jede auf die Verlängerung der Sehne schief aufstehende grade Linie, wie CI grösser als CF, d. h. grösser als
*I. 16. 3. der Halbmesser *. Mithin ist jeder Punkt der Sehne ED weniger, jeder Punkt in ihrer Verlängerung weiter, als um den *Halbmesser*, vom Mittelpunkte entfernt, daher die Sehne ganz innerhalb, ihre Verlän-
*E. 2. γ gerung ganz ausserhalb der Kreislinie liegt *.

Folgerung. 1. Also durchschneidet jede Sehne verlängert den Kreis.

Folgerung 2. Die beyden Kreisbogen, so wie die beyden Kreisabschnitte, die zu jeder Sehne gehö-
*Gr. 8. ren, liegen zu entgegengesetzten Seiten ihrer Sehne *. So also auch zwey Halbkreise zu entgegengesetzten Seiten ihres Durchmessers.

Anmerkung. Unser Verfasser übergeht diesen Lehrsatz mit Unrecht, den schon Euklid, doch auf eine andere Art bewies. d. U.

LEHRSATZ 5.

Fig. 52. *Jede Sehne die nicht durch den Mittelpunkt geht, ist kleiner als der Durchmesser.*

Denn wenn man aus den Endpunkten der Sehne AF die Halbmesser AC, FC zieht, so entsteht ein Dreyeck, worin AF $<$ AC $+$ CF, folglich kleiner
* E. 2. als der Durchmesser des Kreises ist *.

Folgerung. Alſo iſt der Durchmeſſer unter allen Sehnen und unter allen graden Linien, die ſich in einen Kreis einſchreiben laſſen, die gröſste.

[Jede begränzte grade Linie, die durch einen Punkt im Kreiſe geht, und gröſser als der Durchmeſſer iſt, muſs folglich die Kreislinie ſchneiden.]

LEHRSATZ 6.

Eine grade Linie kann nicht mehr als zwey Punkte mit einem Kreiſe gemein haben.

Denn geſetzt ſie könnte mit dem Kreiſe drey Punkte gemein haben, ſo müſsten dieſe drey Punkte vom Mittelpunkte des *Kreiſes gleich* weit entfernt ſeyn. Folglich gäbe es einen Punkt, von welchem ſich nach einer graden Linie drey gleiche grade Linien ziehen lieſen, welches unmöglich iſt *; daher kein Kreis mit einer graden Linie mehr als zwey Punkte gemein haben kann. *I. 16. Z.

LEHRSATZ 7.

In einerley Kreiſe, oder in zwey gleichen Kreiſen, gehören zu gleichen Bogen, gleiche Sehnen, und umgekehrt zu gleichen Sehnen, gleiche Bogen. Fig. 51.

1. Denn wenn die Halbmeſſer AC, EO, folglich die mit ihnen beſchriebnen Kreiſe AHBK, EGFL gleich ſind, ſo decken ſich die beyden Kreislinien *. Sind alſo AD, EG gleiche Bogen, ſo laſſen ſie ſich ſo aufeinander legen, daſs ihre Endpunkte E, A und G, D zuſammenfallen, da denn die Sehnen EG, AD, * 1.

als grade Linien zwischen denselben Endpunkten,
* Gr. 6. gleichfalls zusammenfallen müssen *, also gleich sind.

2. Sind dagegen die Sehnen AD, EG gleich, und man zieht die Halbmesser AC, DC, EO, GO, welche der Voraussetzung nach insgesammt gleich sind, so müssen die Dreyecke ADC, EGO sich decken, folglich die Winkel C, O gleich seyn. Legt man also die sich deckenden Halbkreise AHB, EGF so auf einander, dass die Mittelpunkte, und die Punkte E und A, folglich die Halbmesser AC, EO, *mithin* auch jene Dreyecke, und ihre Eckpunkte G und D zusammenfallen, so decken sich die Bogen AD, EG, sind also gleich.

Derselbe Beweis gilt für verschiedne Bogen und Sehnen *eines* Kreises.

[Zusatz. Aus diesem Beweise erhellt zugleich:

1. Dass *in einerley Kreise oder in zwey gleichen Krei-*
* E. 6. *sen, zu gleichen Bogen gleiche Kreisausschnitte* ACD, EOG, *gehören* * und umgekehrt.

2. *Dass in ihnen zu gleichen Sehnen AD, EG* (folglich auch zu gleichen Bogen) *gleiche Winkel am Mittelpunkte* O, C, und umgekehrt zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte gleiche Sehnen und gleiche Bogen *gehören*, indem wegen Gleichheit der Halbmesser, so bald eins jener Stücke gleich ist, die Dreyecke ADC, EGO, einander decken.

Fig. 52. 3. Dass zwey Durchmesser wie AB, DE, welche auf einander senkrecht stehn, die Kreislinie sowohl als die Kreisscheibe in vier gleiche Theile, folglich in
* E. 3. *Quadranten* * zerschneiden. Denn sie bilden vier rechte,

folg-

folglich gleiche Winkel am Mittelpunkte. — Jeder Winkel am Mittelpunkte ACD, der ein rechter Winkel ist, umspannt folglich einen Quadranten des Kreises.]

LEHRSATZ 8.

So lange von Bogen die insgesammt kleiner als der Halbkreis sind die Rede ist, gehört in einerley Kreis oder in gleichen Kreisen, zum grössern Bogen eine grössere Sehne, [ein grösserer Winkel am Mittelpunkte und ein grösserer Kreisabschnitt,] und umgekehrt. Fig. 5.

Denn ist der Bogen AIH > AID, so schliesst der Winkel am Mittelpunkte ACH den Winkel am Mittelpunkte ACD ein, ist also grösser als dieser *. Da nun diese Winkel beyde von Halbmessern, also von gleichen Schenkeln eingeschlossen werden, so ist in den Dreyecken ACH, ACD die dritte Seite AH > AD.* Folglich gehört zum grössern Bogen, der grössere Winkel am Mittelpunkte, und die grössere Sehne. * I. E12β * I. 10.

Ist umgekehrt die Sehne AH > AD so folgt eben so dass der Winkel ACH den Winkel ACD einschliesst, also der Bogen AIH > AID ist. Und ist der Winkel ACH grösser als ACD so muss, weil beyde von gleichen Seiten eingeschlossen werden, der grössere eine grössere Sehne, mithin auch einen grössern Bogen umspannen.

Anmerkung. Da den grössern unter zwey Bogen AID, AIH zum ganzen Kreise ein kleinerer Bogen AKBH < AKBD ergänzt; so gilt für *Bogen die grösser als der Halbkreis sind*, grade das Gegentheil. Gröſsere Bogen haben kleinere Sehnen und umgekehrt. [Was aber die Winkel betrifft, ſo gilt für ſie der Satz allgemein, wenn man *hineingehende Winkel* (angles rentrants) * mit in die geometriſche Betrachtung aufnimmt, da denn zu Bogen gröſser als der Halbkreis, *Winkel gröſser als zwey Rechte* gehören. Von ſolchen Winkeln haben die gröſsern kleinere Ergänzungen zu vier Rechten.]

*I. E.16.

LEHRSATZ 9.

Fig. 53. *Ein Halbmeſſer, welcher ſenkrecht auf eine Sehne ſteht, theilt die Sehne und ihren Bogen beyde in zwey gleiche Theile.*

Es ſey CD ſenkrecht auf die Sehne AB, ſo ſtehn die Halbmeſſer CA, CB, welche man nach den Endpunkten der Sehne zieht, auf die Sehne ſchief auf, müſſen ſie alſo, da ſie gleich ſind, in gleicher Entfernung vom Perpendikel durchſchneiden *, ſo daſs AD = DB iſt.

*I.16.2.

Iſt nun der Halbmeſſer CG ein Perpendikel, welches in der Mitte der Sehne AB aufſteht; ſo ſind alle Punkte deſſelben von den Endpunkten A, B der Sehne gleich weit entfernt *, alſo auch die Punkte G und H, ſo daſs AG = GB, AH = HB iſt. Zu dieſen Linien, als gleichen Sehnen, gehören gleiche Bogen AG, GB und AH, HB *; mithin werden auch die zur Sehne AB gehörige Bogen AGB und AHB, beyde vom Halbmeſſer CD halbirt *.

* I. 17. * 7. *Au.5.1.

Folgerung 1. *Der Mittelpunkt C des Kreiſes, und die beyden Punkte D in der Mitte einer Sehne und G in der Mitte des dazu gehörigen Kreisbogens, liegen alſo immer in grader Linie, und zwar in einem Perpendikel auf die*

Sehne. Eine grade Linie die durch zwey dieſer Punkte geht, muſs alſo nothwendig auch durch den dritten gehn, und ein Perpendikel auf die Sehne ſeyn *. * Gr. 6. f. 1.

Folgerung 2. Umgekehrt *muſs ein Perpendikel welches auf die Sehne in ihrer Mitte errichtet iſt, durch den Mittelpunkt gehn*, indem durch einen Punkt nur ein einziges Perpendikel auf eine grade Linie möglich iſt *. * I. 15.

[*Folgerung* 3. *Zwey Sehnen AB, DE deren keine ein Durchmeſſer iſt, durchſchneiden ſich nicht unter rechte Winkel, und halbiren ſich nicht.* Fig. 79.

Denn iſt keine von beyden ein Durchmeſſer, ſo liegt der Mittelpunkt C des Kreiſes auſserhalb beyder; folglich auch die grade Linie CO vom Mittelpunkte nach dem Durchſchnittspunkte O beyder Sehnen. Geſetzt nun ſie durchſchnitten ſich im Punkte O rechtwinklig, ſo ſtünden in dieſem Punkte zwey verſchiedene grade Linien DO, CO auf die dritte AB ſenkrecht, welches unmöglich iſt. Geſetzt beyde Sehnen halbirten ſich im Punkte O, ſo ſtünde CO auf beyden in ihrer Mtite, alſo ſenkrecht, auf, folglich AO, DO beyde im Punkte O auf CO ſenkrecht, welches gleichfalls unmöglich iſt.]

[*Folgerung* 4. *Auf jeder graden Linie PQ, welche zwey concentriſche Kreiſe durchſchneidet, werden zwiſchen den Kreislinien zwey gleiche Stücke PR, QS abgeſchnitten.* Fig. 47.

Für Durchmeſſer iſt dieſer Satz ſchon oben bewieſen *. Geht die Linie PQ nicht durch den Mittel- * 1. f. 3.

punkt, so fälle man aus diesem auf ihr ein Perpendikel CV. Dieses halbirt sowohl die ganze Linie PQ, als auch das Stück RS, welches im kleinern Kreise liegt, als Sehnen beyder Kreise, daher VP — VR = VQ — VS, folglich PR, QS gleich seyn müssen.]

LEHRSATZ 10.

Fig. 54. *Durch drey gegebne Punkte A, B, C, welche nicht in grader Linie liegen, läſst sich stets eine Kreislinie, und zwar nur eine einzige Kreislinie ziehn.*

Verbinde die gegebnen Punkte durch die graden Linien AB, BC, halbire diese, und errichte auf ihrer Mitte die senkrechten Linien DH, FG, so müssen diese sich in irgend einem Punkte O durchschneiden. Denn gesetzt sie durchschnitten sich nicht, so wären
*I. E. 15. sie parallel *, folglich stünde die Linie AD, welche auf DO senkrecht ist, gehörig verlängert auf beyde
*I. 25. f. 1. senkrecht *. Nun aber fällt die Verlängerung der Linie AB mit BC nicht zusammen, weil die drey Punkte A, B, C nach der Voraussetzung nicht in grader Linie liegen. Also gäbe es vom Punkte B zwey verschiedne Perpendikel BE, BF auf dieselbe grade Linie
* I. 15. OF, welches unmöglich ist *. Die Perpendikel DH, FG müssen sich also nothwendig in irgend einem Punkte O durchschneiden.

Dieser Punkt steht gleich weit von den Endpunkten sowohl der Sehne AB, als auch der Sehne BC ab, weil er in den Perpendikeln liegt, die auf der Mitte dieser Sehnen errichtet sind. Also sind OA, OB, OC gleich, und eine mit dem Halbmesser OB um den

Punkt O beſchriebne Kreislinie, muſs durch die drey gegebnen Punkte A, B, C gehn *. Es iſt alſo allemal möglich durch drey Punkte, welche nicht in grader Linie liegen, einen Kreis zu beſchreiben *. *E. 2. γ *Au. 12.

Durch drey Punkte läſst ſich aber auch nur *eine einzige Kreislinie* beſchreiben. Denn geſetzt es wäre durch die drey Punkte A, B, C noch eine zweyte, von der erſten verſchiedne Kreislinie möglich, ſo müſte auch der Mittelpunkt dieſer ſowohl im Perpendikel DH als auch im Perpendikel FG, die in der Mitte der Sehnen aufſtehn, liegen *, beyde Perpendikel würden ſich alſo in zwey verſchiednen Punkten durchſchneiden *, welches unmöglich iſt *. *9. f. 2. *1. f. 1. *Gr. 6 f. 4

Folgerung 1. Alſo *können zwey verſchiedne Kreislinien nicht mehr als zwey Punkte mit einander gemein haben.* Denn wären ihnen drey Punkte gemein, ſo hätten ſie einerley Mittelpunkt, wären alſo einerley Kreis, nicht zwey verſchiedne Kreiſe *. *1. f. 1.

[*Folgerung* 2. Durch die drey Winkelpunkte jedes Dreyecks läſst ſich ein Kreis beſchreiben, worin jede der Seiten eine Sehnen wird. Da nun die Perpendikel auf die Mitte dieſer Sehne, alle drey durch den Mittelpunkt gehn, ſo erhellt hieraus eine artige Eigenſchaft der Dreyecke, *daſs nemlich Perpendikel auf die Mitte der Seiten eines Dreyecks errichtet, ſich ſtets alle drey in einem Punkte durchſchneiden*, und zwar im Mittelpunkte eines Kreiſes, welcher dem Dreyeck umſchrieben iſt.]

LEHRSATZ II.

Fig. 55. *1) Gleiche Sehnen ſind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt, [und umgekehrt ſind alle Sehnen, die gleich weit vom Mitttelpunkte abſtehn, gleich.]*

2) Von zwey ungleichen Sehnen iſt die Kleinere weiter als die Gröſsere vom Mittelpunkte entfernt.

1. Es mögen die Sehnen AB, DE gleich ſeyn, ſo ziehe man auf ſie aus dem Mittelpunkt die ſenkrechten Linien CF, CG und die Halbmeſſer CA, CD. Die ſo entſtehenden rechtwinkligen Dreyecke ACF, DCG decken einander, weil ihre Hypotenuſen CA, CD als Halbmeſſer, und eine ihrer Katheten AF, DG als die
* I. 19. Hälften gleicher Sehnen gleich ſind *. Alſo ſind auch die dritten Seiten CF, CG, d. h. die Entfernung der
I.16.f1 Sehnen vom Mittelpunkte gleich. Iſt umgekehrt dieſe Entfernung für zwey Sehnen AB, DE gleich, ſo müſſen aus denſelben Gründen die halben Sehnen AF, DG, mithin auch die Sehnen ſelbſt gleich ſeyn.

2. Iſt hingegen die Sehne AH > DE, ſo iſt auch
* 8. der Bogen ANH > DME *, daher es auf ihm einen Punkt B geben muſs, für welchen ANB = DME iſt. Zieht man die Sehne AB, und fällt auf ſie das Perpendikel CF, ſo wie auf AH das Perpendikel CI, ſo iſt offenbar CF > CO [indem AH mithin auch O zwiſchen den Punkten C, F liegt] und wiederum CO > CI als Hypotenuſe im rechtwinkligen Dreyeck COI; alſo noch viel mehr CF > CI. Nun aber gehören die Sehnen AB, DE der Conſtruction nach zu gleichen Bo-
* 7. gen, ſind alſo gleich*, und ſtehn folglich gleich weit

vom Mittelpunkte ab, ſo daſs CF = CG iſt. Folglich muſs auch CG > CI ſeyn, alſo die kleinere Sehne DE weiter als die gröſsere AH vom Mittelpunkte abſtehn.

Zuſatz. Alſo muſs auch von zwey Sehnen, welche ungleich weit vom Mittelpunkte entfernt ſind, diejenige die kleinere ſeyn, welche weiter vom Mittelpunkte abſteht.

LEHRSATZ 12.

Jede grade Linie welche auf einem Halbmeſſer in deſſen Endpunkte ſenkrecht ſteht, berührt den Kreis; Fig. 56

und durch jeden Punkt der Kreislinie iſt nur eine einzige Tangente möglich.

1. Iſt die grade Linie BD auf den Halbmeſſer CA in deſſen Endpunkte A ſenkrecht, ſo ſteht jede andre grade Linie z. B. CK die durch den Mittelpunkt geht, auf BD ſchief auf *, muſs alſo gröſser als das Perpendikel CA ſeyn *. Folglich liegt der Durchſchnittspunkt derſelben mit BD weiter als um den Halbmeſſer vom Mittelpunkte ab, d h. auſserhalb des Kreiſes *. Und alſo liegt auch die ganze Linie BD auſserhalb des Kreiſes. Sie berührt mithin die Kreislinie im Punkte A, welchen ſie mit ihr gemein hat *, und iſt eine *Tangente des Kreiſes* im Punkte A.

* I. 15.
* I. 16. 3.
* E. 2.
* E. 12. α

2. Geſetzt nun es gäbe auſser dieſer Tangente BD noch eine zweyte grade Linie, EF, welche die Kreislinie im Punkte A berührte, ſo könnte dieſe nicht ſenkrecht auf dem Halbmeſſer CA ſeyn *. Der Halb- * I. 15.

meſſer BA würde alſo auf ihr ſchief aufſtehn, und folglich müſte das Perpendikel aus dem Mittelpunkte
*I.16.1. auf dieſe Linie, kleiner als CA ſeyn *. Dieſe zweyte
* E. 2. Linie EF gienge alſo durch einen Punkt *im* Kreiſe *,
*.E. 11. muſs alſo nothwendig den Kreis durchſchneiden *, und kann ihn nicht berühren. Daher iſt auſser der Linie BD, welche ſenkrecht auf dem Halbmeſſer in ſeinem Endpunkte aufſteht, keine andre grade den Kreis berührende Linie durch den Punkt A möglich.

[*Folgerung* .1 *Folglich muſs* 1) *eine grade Linie CA, welche durch den Mittelpunkt des Kreiſes nach dem Berührungspunkte A gezogen wird, ſtets ſenkrecht auf die Tangente ſtehn*; und 2) *eine grade Linie welche ſenkrecht auf die Tangente im Berührungspunkte errichtet wird, ſtets durch den Mittelpunk des Kreiſes gehn.* Denn keine andre grade Linie berüht den Kreis, als die, welche auf dem Radius in deſſen Endpunkte ſenkrecht ſteht; und durch einen Punkt einer graden Linie iſt nur ein einziges Perpendikel möglich.]

[*Folgerung* 2. *Zwey Tangenten, welche durch die Endpunkte eines Durchmeſſers gezogen werden, laufen parallel*; denn ſie ſtehn beyde auf dem Durchmeſſer ſenk-
* I. 21. recht *.

Sind umgekehrt zwey Tangenten eines Kreiſes parallel, ſo iſt die grade Linie durch die Berührungspunkte ſtets ein Durchmeſſer. Denn ein Durchmeſſer nach dem einen Berührungspunkte gezogen, ſteht auf der einen Tangente, folglich auch auf der mit ihr parallelen Tan-
*I.25.f.1 gente ſenkrecht *, muſs alſo auch durch den zweyten Berührungspunkt gehn.

Mit einer Sehne, welche kein Durchmesser ist, machen die Tangenten durch ihre Endpunkte spitze obschon gleiche Winkel, und zwar mit den kleinern Sehnen spitzere Winkel. Denn die Halbmesser durch ihre Endpunkte stehn unter gleichen, und zwar auf den kleineren Sehnen unter gröfseren Winkeln auf.

Durchschneiden sich umgekehrt zwey Tangenten, so ist die grade Linie durch ihre Berührungspunkte eine Sehne, die kleiner als der Durchmesser ist.]

[*Folgerung* 3. Eine grade Linie IK, welche den Innern zweyer *concentrischen Kreise* berührt, wird durch den Berührungspunkt H halbirt. Denn sie ist Sehne des gröfsern Kreises und CH steht auf ihr als einer Tangente am kleinern senkrecht *.] T. III. Fig. 4.

* 9.

[*Folgerung*. 4. *Jede grade Linie welche einen Kreis durchschneidet, muss ihn in zwey Punkten durchschneiden.* Denn durchschneidet EF den Kreis im Punkte A, und man zieht den Halbmesser CA, so steht dieser auf sie schief auf, nicht senkrecht, (denn sonst würde EF die Kreislinie nach dem eben geführten Beweise nicht durchschneiden). Folglich giebt es eine zweyte auf EF schiefaufstehende Linie CG welche der CA, das ist dem Halbmesser, gleich ist, also einen zweyten Punkt G, welcher der graden Linie EF und der Kreislinie gemein ist, das heisst, einen zweyten Durchschnittspunkt. Dafs es keinen dritten geben könne sagt Lehrsatz 6.] Fig. 56.

[*Zusatz.* So oft also eine grade Linie EF einen Kreis durchschneidet, wird ein Stück von ihr AG ei- Fig. 58.

ne Sehne des Kreifes, und diefes liegt ganz innerhalb
* 4. der Kreislinie *. Dagegen liegt die Tangente AD ganz aufserhalb der Kreislinie. Folglich mufs ftets *zwifchen beyden* ein Bogen AHG liegen, fo dafs er von AD und AG eingefchloffen wird. Gefetzt alfo man wollte fich nach Analogie gradeliniger Winkel hier einen *krummlinigen Winkel* GHAD vorftellen, fo würde diefer ftets von dem gradelinigen GAD eingefchloffen,
*I.E. 12. müfte alfo *kleiner* als diefer feyn *. Nun aber kann der gradelinige GAD kleiner gedacht werden, als jeder angebliche Winkel; und fo klein er auch gedacht wird, fo durchfchneidet AF, weil es nur *eine* Tangente (AD) giebt, allemal den Kreis, wäre alfo immer der krummlinige noch kleinere Winkel GHAD vorhanden. Folglich müfte diefer Winkel kleiner als jeder angebliche feyn, könnte alfo gar keine Gröfse haben, müfte alfo gleich o feyn.

Folglich machen im Berührungspunkte der Kreis und die Tangente gar keinen Winkel, beyde fallen zufammen, und will man hier doch von einem fogenannten *Berührungswinkel GHAD* fprechen, fo ift diefer gleich o, d. h. er hat gar keine Gröfse, ift gar nicht vorhanden.

Fig. 57. Hierauf beruht die Vorftellung *krummliniger Winkel.* Denn da im Berührungspunkte Tangente und Kreis zufammenfallen, keinen Winkel mit einander machen, fo mufs auch ein Kreisbogen AH mit irgend einer graden Linie AB denfelben Winkel als feine Tangente IAK machen, und eben fo zwey Kreisbogen AH, AL mit einander denfelben Winkel als ihre Tangen-

ten im Punkte A, AI, AB. Und diese Begriffe lassen sich in der höhern Geometrie auch auf alle andere krumme Linien übertragen.

Mithin *steht* insbesondere *jeder Halbmesser auf der Kreislinie senkrecht;* denn er macht mit der Tangente im Berührungspunkte rechte Winkel. — Jede Sehne, welche kein Durchmesser ist, macht dagegen in ihrem Endpunkte mit der Kreislinie ungleiche Winkel. — Endlich *stehn zwey concentrische Kreise überall gleich weit von einander ab.* Denn da die Halbmesser auf beyden senkrecht stehn, so geben die abgeschnittnen Stücke der Halbmesser den Abstand beyder von einander an *, *I. 16. f. 2. und diese Stücke sind überall gleich *] *. 1. f. 2.

[Anmerkung 1. Ein Winkel ist die Lage zweyer *grader* Linien gegen einander *. Krummlinige Winkel denken zu *I. E. 12. wollen, wäre also ungereimt, wenn nicht im Berührungspunkte die Tangente und die krumme Linie zusammenfielen, also krummlinige Winkel sich durch den Winkel der Tangenten im Berührungspunkte denken liefsen. So muss man daher diesen Begriff erklären.

Nur eine grade Linie hat in allen ihren Theilen gegen eine Fig. 58. andre einerley Lage, und also läfst sich nur bey ihr aus der Lage eines Stücks GF auf die Lage der Linie bey A schliefsen. Eine krumme Linie hat in allen noch so kleinen Theilen eine verschiedene Lage gegen eine grade Linie AB. Man kann also aus der Lage der Theile H, I nicht wie bey graden Linien auf die Lage der Theile im Punkte A schliefsen. Man sieht daher auf welchen Misverstand folgende Einwendung gegen das hier Vorgetragne beruht. „Gesetzt HA, IA wären zwey Bogen die beyde die grade Linie AD im Punkte A berührten *, so müssten die Winkel * E. 12. HAD, IAD beyde o, also beyde gleich seyn.‹ Nun aber schliest der Winkel IAD den Winkel HAD ein; also muss er gröfser als HAD seyn, welches dem vorigen widerspricht. Also kann der Berührungswinkel nicht gleich null seyn." Aber die Schlussfolge, *also muss er grösser als HAD seyn*, ist falsch. Sie gilt dem angeführten nach nur für gradelinige Winkel, keinesweges für die Lage krummer Linien, auf deren Lage im Punkte A wir aus der Lage in H und I nicht so unmittelbar schliessen können. Daraus dass der Bogen AI den Bogen AH einschliesst lässt sich einzig und allein das folgern, dass der einschliessende Bogen *schneller* von der Tangente, als der eingeschlossne abweicht, dass er mithin *krummer* oder *convexer*, der Bogen AH dagegen *flächer* oder *weniger gebogen ist*, und mehr nichts.

Und doch haben geschickte Mathematiker sich jenen Trugschluss nicht nur zu Schulden kommen lassen, sondern sogar mit Hitze als Wahrheit vertheidigt. (Man sehe *Clavius* und *Taquets* Ausgaben *Euklids* B. 3. S. 16 besonders die erstere, wo diese Materie auf 20 klein gedrukten Octavseiten mit den Gründen dafür und dawider ausgeführt wird; auch Clavius Werk de triangulis planis et sphaericis und in *Wallis* Opera Mathematica Tom. II, p. 605 die Abhandlung de angulo contactus et semicirculi.) Ueberhaupt gehört diese an sich nicht sehr schwierige Materie zu den am mehrsten missverstandnen in der reinen Mathematik. Selbst *van Swinden* geräth hier in die irrige Meynung: „wenn man behaupte der krummlinige Winkel GHAD sey kleiner als der gradelinige GAD, so stelle man keine Vergleichung zwischen den blossen Neigungen (Lagen) dieser Linien an, *sondern zwischen dem Raume den diese Winkel einschliessen*, und verweist deshalb auf *Vietae Opera p. 382.* Das wäre aber doch fürwahr eine Sonderbarkeit der ersten Grösse, wenn man an Flächenräume dächte und von Winkeln spräche, und etwas das mit der gerühmten Genauigkeit der Geometer gar sehr im Widerspruch stände.

Man sieht hier abermals eine Probe, wie es in der Geometrie, da wo es auf Lage ankömmt, noch manches aus einer sorgfältiger entwickelten Theorie der Lage, zu berichtigen und zu ergänzen giebt. *Le Gendre* hat diese Materie vom Berührungswinkel, die ſchon Euklid richtig vorträgt, ſehr mit Unrecht ausgelaſſen; ſo auch *Thomas Simpſon*. Hielten ſie ſie etwa noch für ſtreitig, oder für zu ſchwierig. Für beydes erkennt ſie nicht

d. U.

Anmerkung 2. *Die berührende Linie iſt die Gränze für alle ſchneidende Linien, welche auf dem Durchmeſſer, der durch den Berührungspunkt geht, ſenkrecht ſtehn.* Denn die beyden Durchſchnittspunkte dieſer Linien mit dem Kreiſe, ſtehn gleich weit vom Durchmeſſer ab, und nähern ſich immer mehr, wenn die durchſchneidende Linie ſich weiter vom Mittelpunkte entfernt. Rückt ſie endlich um den Halbmeſſer vom Mittelpunkte ab, ſo fallen beyde durchſchnittspunkte in den einen Berührungspunkt zuſammen, und zwar in dem Durchmeſſer; daher die Tangente mit in die Reihe dieſer ſchneidenden Linien *als letzte* aufzunehmen iſt; *als Gränze* der dieſe ſich ohne Ende fort näheren, ohne ſie doch je zu erreichen, ſo lange ſie ſchneidende Linien bleiben. Mann kann ſich daher *die berührende Linie als eine ſchneidende denken, für welche die beyden Durchſchnittspunkte mit einander und mit dem Durchmeſſer zuſammenfallen*, und unter dieſer Fiction, in der ein Widerſpruch liegt, der ſich jedoch ſelbſt aufhebt, gelten von ihr alle Sätze der ſchneidenden Linien, in ſo fern ſie mitteiſt dieſer Fiction gehörig modificirt werden. Auch gründen ſich auf dieſe Fiction die erſten Methoden an allen krummen Linien Tangenten zu ziehn, dergleichen *Fermat*, *Hudden* u. a. erdacht haben. — An einem gegebnen Kreiſe Tangenten verſchiednen Bedingungen gemäſs, oder umgekehrt zu einer gegebnen Tangente einen Kreis zu beſchreiben, lehren Aufg. 14 und 13.

d. U.

LEHRSATZ 13.

Wenn zwey Parallellinien AB, DE, beyde den Kreis durchſchneiden, ſo ſind die Kreisbogen MN, PQ welche zwiſchen ihnen liegen, gleich. Fig. 59.

[Die Stücke MP, NQ der beyden Parallellinien, welche innerhalb der Kreislinie fallen, sind Sehnen des Kreises]. Ein Perpendikel CH aus dem Mittelpunkt auf die eine dieser Sehnen gefällt, steht auch auf die
*I.25.f.1 andre ihr parallele Sehne senkrecht *, halbirt also
* beyde Sehnen, und beyde zu diesen Sehnen gehörige
* 9. Bogen MHP, NHQ *. Folglich ist MH = HP und
* Gr. 2. NH = HQ, also auch MH — NH = HP — HQ *, das heist MN = PQ.

Fig. 60. Zusatz I. *Auch wenn eine Tangente DE mit einer Sehne MP parallel läuft, sind die Bogen zwischen der Sehne und dem Berührungspunkte H gleich.* Denn alsdann steht
*12. f. 1. der Halbmesser CH auf die berührende Linie senkrecht *;
*I.25 f.1. folglich auch auf die ihr parallellaufende Sehne MP *, halbirt also diese Sehne, mithin auch ihren Bogen, so
* 9. dass MH = HP wird *.

Fig. 51. [Zusatz II. *Auch in gleichen Kreisen schneidet eine Linie MQ, welche mit der graden Linie durch die Mittelpunkte CO parallel läuft, mit dieser Linie gleiche Bogen ab.*

Denn wegen des Parallelismus mit CO steht die Linie MQ von allen Punkten in CO, also auch von beyden Mittelpunkten gleich weit ab. Die Sehnen MN, PQ, welche beyde Kreislinien von MQ abschnei-
* 11. den sind also gleich *, mithin sind *erstens* die zu diesen Sehnen gehörige Bogen MKN, PLQ gleich, so wie ihre Unterschiede von den gleichen Halbkreisen, d. h. die Bogen AM + BN = EP + FQ, und folglich auch AM = BN = EP = FQ, indem die erstern und die letztern, als Bogen zwischen parallelen Sehnen ei-
* 13. nes Kreises, gleich sind *.

Zweytens sind auch die Hälften der gleichen Sehnen MN, PQ, welche die Perpendikel aus den Mittelpunkten CR, OS auf ihnen abschneiden, gleich, MR = RN = PS = SQ. Nun aber ist RS = CO *, folglich sind auch MP und NQ beyde gleich CO. *Mithin schneiden die ähnlich liegenden Theile beyder Kreislinien, von allen graden Linien, die mit der Linie durch ihre Mittelpunkte parallel laufen, gleiche Theile ab.* Umgekehrt ist also der *geometrische Ort* des Endpunkts P einer gegebnen graden Linie MP, welche in gegebner Lage, (z. B. parallel mit AF) mit ihrem andern Endpunkt M auf einer gegebnen Kreislinie ADBK aufsteht, eine gleiche Kreislinie EGFL, deren Mittelpunkt O, von C um gegebne Linien MP, in der gegebnen Lage, absteht *.

* I. 34.

*Cf. I. 34 f. 1.

Anmerkung. Dieser Zusatz ist im wesentlichen Satz 21. im ersten Buch von Apoll. ebnen Oertern, wird dort aber anders ausgedrückt und bewiesen. Der berühmte *Fermat* soll der Urheber desselben seyn.]

[LEHRSATZ 14.]

Sind umgekehrt zwey Bogen MN, PQ eines Kreises gleich, so sind 1) die Sehnen, welche durch die übereinstimmenden Endpunkte beyder gehn, MP, NQ, parallel. — 2) Die Sehnen welche durch die verkehrt liegenden Endpunkte beyder gezogen sind, MQ, NP, durchschneiden sich so, dass die ähnlich liegenden Theile in beyden gleich sind. — 3) Auch wenn die Sehnen der beyden gleichen Bogen MN, PQ selbst, sich außerhalb des Kreises schneiden, so sind die Fig. 59.

abgeſchnittnen Stücke in der Verlängerung beyder gleich.

1. Halbire den Bogen NQ durch den Halbmeſſer CH; ſo wird durch dieſen Halbmeſſer auch die Sehne
* 9. NQ *, ferner, weil MN, PQ gleiche Bogen ſind, auch der Bogen MHP und die Sehne MP dieſes Bogens halbirt. Folglich ſtehn die Sehnen MP, NQ, welche durch die übereinſtimmenden Endpunkte der beyden gleichen Bogen gehn, beyde auf die grade Linie CH
* I. 21. ſenkrecht; ſie ſind alſo parallel *.

2. Die Sehnen MQ, NP, müſſen, weil ſie die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen Bogen verbinden, ſich nothwendig in irgend einem
* Gr. 8. Punkte I durchſchneiden *. Ueberdem ſind ſie gleich,
* 9. weil ſie zu gleichen Bogen MHQ, NHP gehören *. Da nun auch die Sehnen MN, PQ gleich ſind, ſo decken ſich
* I. 11. die Dreyecke MPQ, PMN *, und die Winkel bey M und P ſind gleich. Das Dreyeck IMP iſt daher gleichſchenklig *, und IM = IP, folglich auch, da die
* I. 13. ganzen Sehnen MQ, NP gleich ſind, IN = IQ.

3. Durchſchneiden ſich die beyden Sehnen der gleichen Bogen MN, PQ in irgend einem Punkte O auſserhalb des Kreiſes, ſo iſt das dadurch entſtehende Dreyeck NOQ gleichſchenklig, mithin NO = QO. Denn aus dem, was unter 2 bewieſen iſt, folgt, daſs die Winkel IMN, IPQ, folglich auch, wegen des Parallelismus der Sehnen PM und QN, die Winkel
* I. 25. QNO und NQO gleich ſind *.

Folgerung 1. Weil in dem unter 2 betrachteten Fall, das Dreyeck MIP gleichſchenklig iſt, ſo liegt die

die Spitze desselben in dem Halbmesser CH, welcher auf der Grundlinie MP in ihrer Mitte senkrecht steht*. *I.17.f.3
Folglich *liegt der Durchschnittspunkt I der beyden Sehnen MQ NP stets in dem Halbmesser, der die Bogen MHP, NHQ halbirt.* — Umgekehrt geht die grade Linie, welche durch die Punkte H und I gezogen wird, stets durch den Mittelpunkt des Kreises *. — Endlich * Gr. 6.
schneiden zwey Sehnen, welche durch einen Punkt I eines Halbmessers unter gleichen Winkeln gegen denselben gezogen werden, gleiche Kreisbogen ab.

Folgerung 2. Weil eben so in dem unter 3 betrachteten Fall das Dreyeck MPO gleichschenklig ist, so liegt die Spitze desselben O, in der Verlängerung des Halbmessers CH, welcher auf der Grundlinie in der Mitte aufsteht. — Umgekehrt muss also eine grade Linie welche den Winkel C am Durchschnittspunkte halbirt, durch die Mitte der Sehnen MP und NQ und durch den Mittelpunkt des Kreises gehn; und grade Linien, welche unter gleichen Winkeln gegen die Verlängerung eines Halbmessers durch einen Pnnkt desselben gezogen werden, und den Kreis durchschneiden, schneiden in ihm gleiche Bogen ab.

Zusatz I. Diese Sätze lassen sich auch auf Tangenten übertragen. Fig. 60.
Nimmt man auf beyden Seiten des Berührungspunktes H gleiche Bogen HM, HP, so läuft die Sehne durch ihre Endpunkte, MP, mit der Tangente DE parallel. Denn zieht man nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CH, so halbirt dieser den Bogen MHP, mithin auch die Sehne MP *, steht also auf ihr, so wie * 9.

*12.f.1. auf der Tangente senkrecht *, und Sehne und Tangente laufen also parallel.

Tangenten durch die beyden Punkte M und P gezogen, *12.f.2. machen mit der Sehne MP gleiche Winkel *, bilden also, wenn sie sich in einem Punkte O durchschneiden, ein gleichschenkliges Dreyeck. Daher sind *die abgeschnittnen Stücke derselben MO, QO gleich*, und ihr Durchschnittspunkt fällt in dem Halbmesser CH, der *I.17.f.3 durch den Berührungspunkt geht *. Umgekehrt muss eine grade Linie durch O und H auch durch den Mittelpunkt, und eine grade Linie, welche den Winkel bey O halbirt, sowohl durch den Berührungspunkt, als auch durch den Mittelpunkt gehn.

Fig. 79. *Tangenten, welche von einem Punkte O ausserhalb des Kreises nach dem Kreise gehn, sind überhaupt insgesammt gleich.* Denn zieht man CO und die Halbmesser nach den Berührungspunkten CF, CG, so entstehn rechtwinklige Dreyecke, worin die Hypothenuse CO und eine der Katheten gleich sind, die sich deshalb de- * I. 19. cken *, und worin OG = OF ist.

Fig. 61. Zusatz II. *Ist ein Halbkreis ABC in eine grade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 6 getheilt, und man verbindet die übereinstimmenden Theilpunkte von den Endpunkten des Durchmesser an gerechnet durch grade Linien AC, HF, IG, so ist die Summe aller dieser parallelen Sehnen gleich dem Stück AK, welches eine grade Linie durch B und den nächsten Theilpunkt G gezogen, auf dem verlängerten Durchmesser abschneidet.*

Denn wegen der Gleichheit der Theile AH, CF *14. 1. und HI, FG sind die Sehnen AC, HF, IG parallel *.

Eben ſo ſind wegen Gleichheit der Bogen HI, CF und IB, FG die Sehnen HC, IFL, BGK parallel. Folglich ſind HFLC, IGKL Parallelogramme, alſo HF = CL, IG = LK * und AC + HF + IG = AK. *I. 34. 2.

Zuſatz III. *Iſt ein Halbkreis ADB in eine ungrade Zahl von gleichen Theilen, z. B. in 5, getheilt, und man verbindet die übereinſtimmenden Theilpunkte durch grade Linien AB, DG, EF, und zieht nach den Endpunkten E, F der letztern dieſer Linien die Halbmeſſer CE, CF; ſo ſind alle Abſchnitte jener Linien zwiſchen dieſen Halbmeſſern EF, MN etc. zuſammengenommen dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich.* Taf. III. F. 62.

Denn theilt man auch den andern Halbkreis AHB auf dieſelbe Art ein, in den Punkten H, I, K etc., ſo gehn erſtens EC und FC verlängert als Durchmeſſer durch zwey Theilpunkte K, I *. Verbindet man zweytens die verkehrt liegenden Endpunkte der beyden gleichen Theile DE, HI, durch die Sehnen EH, DI, ſo durchſchneiden ſich dieſe, nach Folgerung 1, in einem Punkte L des Halbmeſſers CA, ſo daſs CA = CL + LA iſt. Nun ſind aber wegen Gleichheit der Theile, die Sehnen FI, EH, DA welche gleiche Bogen abſchneiden, parallel *. Eben ſo die Sehnen AB, DG, EF und die Sehnen EK, DI, etc. Mithin ſind als Parallelen zwiſchen Parallelen, erſtens DN = AC, und zweytens EF = LC = DM *, alſo auch DN — DM = AC — LC, d. h. MN = AL und folglich EF + MN = LC + AL = AC. * 2. u. 3. * 14. 1. * I. 34. 1.

Grade so führt man den Beweis, wenn der Halbkreis in eine gröſsere Zahl von ungleichen Theilen getheilt ist.

Taf. III. F. 63. Zusatz IV. *Ist ein Kreis in sechs gleiche Theile getheilt, und man verbindet einen der Theilpunkte, A, mit denen, welche um zwey Theile von demselben abstehn durch grade Linien AC, AE; so theilen diese Linien die Sehne BF zwischen den übergangnen Theilpunkten, welche zunächst bey A liegen, in drey gleiche Theile.*

Denn erstens sind AC, BF, und zweytens auch AE, FB, zwey Sehnen, welche die verkehrt liegenden Endpunkte zwey gleicher Bogen AF, CB und AB, EF mit einander verbinden. Folglich durchschneiden
14. 2. sich diese Sehnen so, daſs BH = AH und FI = AI ist *. Nun aber sind, wenn man CE zieht, die Bogen AC CE, EA, folglich auch die Sehnen dieser Bogen
* 7. gleich *. Also ist das Dreyeck ACE gleichseitig. Da überdem CE parallel mit BF läuft, so ist das Dreyeck
*I. 25. A. AHI, mit jenem Dreyeck gleichwinklig *, also eben-
*I. 21. f. 2 falls gleichseitig, oder AH = HI = AI *. Mithin ist auch BH = HI = IF, folglich die Sehne BF auf diese Art in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung. Dieser sehr brauchbare Lehrsatz und die Zusätze fehlen bey Le Gendre. Zusatz 2 entlehne ich aus *Clavius* Euklid, Zusatz 3 u 4 aus *Kraffts'* Institut. Geometr. sublim., wo als Urheber des erstern *La Hire* in den Mémoires de Mathematique. Paris 1692. p. 92, und des letztern *Gregor von St. Vincenz* in seinem Opus geometricum prop. 396 de Circulo genannt wird. In den Beweisen bin ich indeſs von ihnen abgewichen. In den folgenden Büchern werden wir ähnliche interessante Sätze finden.

d. U.

[LEHRSATZ 15.]

Nimmt man außerhalb oder innerhalb eines Kreißes einen Punkt A und zieht durch ihn und den Mittelpunkt B eine grade Linie, welche die Kreislinie in den Punkten I und H durchschneidet; so hat Fig. 64.

1) unter allen Punkten der Kreislinie der Punkt I, der in der Linie AH mit dem Punkte A zu einerley Seite des Mittelpunkts B liegt, den kleinsten; dagegen der Punkt H, der mit A auf entgegengesetzter Seite des Mittelpunktes B liegt, den größten Abstand vom Punkte A;

2) haben unter mehreren Punkten E, K, G in der Kreislinie, diejenigen den kleinern Abstand vom Punkte A, welche näher beym Punkte I liegen; und

3) stehn je zwey Punkte, die zu entgegengesetzten Seiten der Linie AH liegen und gleich weit von I entfernt sind, z. B. E, F, auch vom Punkte A gleich weit ab.

1. Denn zieht man nach den Punkten E, K, F, G in der Kreislinie die Halbmesser BE, BK, BF, BG und aus dem Punkte A die graden Linien AE, AK AF, AG, so bilden diese mit AB Dreyecke, in deren jedem, z. B. in ABE, der *Unterschied* je zweyer Seiten *kleiner* und zugleich ihre *Summe größer* als die dritte Seite *, folglich AB — BE oder AB — BI, d. h. AI < AE und zugleich AB + BE oder AB + BH d. h. AH > AE ist. Folglich ist der Punkt I *weniger*, der Punkt H *weiter* als jeder andre Punkt E in der Kreislinie vom Punkte A entfernt; welches das erste ist. * I. 8.

2. Alle jene Dreyecke ABE, ABK, ABF, ABG
haben unter einander zwey Seiten gemein, nemlich
AB und die gleichen Halbmesser BE, BK, BF, BG.
Folglich wird die Grösse ihrer dritten Seiten AE, AK,
AF, AG von der Grösse der gegenüberstehenden Win-
kel ABE, ABK, ABF, ABG durch Lehrsatz 10. des
ersten Buchs bestimmt. Alle diese Winkel sind aber
zugleich Winkel am Mittelpunkte des Kreises um B,
* 7; 8. daher ihre Grösse von der Grösse ihrer Sehnen abhängt *,
folglich von der gegenseitigen Entfernung der beyden
Endpunkte dieser Sehnen, d. h. der Punkte E, K, F,
G vom Punkte I. Ist der Punkt E weiter als K aber
nicht so weit als G vom Punkte I entfernt, so ist
* I. 10. AE > AK und AE < AG *; welches das zweyte ist.

3. Sind endlich die Punkte E, F gleich weit von
* I. 6. I entfernt; so ist auch AE = AF *, da denn die
beyden Punkte E, F zu entgegengesetzten Seiten der
Linie AB liegen müssen, weil sie sonst (da die beyden
Dreyecke AEB, AFB sich decken) zusammenfielen,
und nicht zwey, sondern nur ein Punkt wären; wel-
ches das dritte ist.

Zusatz. Diese Sätze über die Entfernung eines Punktes von den Punkten in einer Kreislinie gelten gleichmäsig, jener Punkt liege *ausserhalb* oder *innerhalb* der Kreislinie, und der Beweis ist für beyde Fälle derselbe, nur die Lage der Linien etwas verschieden, wie dieses die beyden grossen Kreisen unsrer Figur darstellen, daher es unnöthig ist mit Euklid (III. 8, 9.) beyde Fälle besonders zu behandeln. *Auch gelten sie* *für jeden Punkt im Umfange*, für welche nur I und A zusammenfallen, wie im dritten kleinern Kreise unsrer Figur.

Folgerung. 1. *Von jedem Punkte A, welcher nicht der Mittelpunkt ist, lassen sich nach einer Kreislinie stets zwey gleiche grade Linien ziehn, welche zu entgegengesetzter Seite der Linie durch den Mittelpunkt liegen* *; * (3)
aber auch nicht mehr als zwey, indem es in der Kreislinie nicht mehr als zwey Punkte giebt, welche von Einem Punkte in derselben gleich weit abstehn *. * Z.

Folgerung 2. *Kann man also von einem Punkte nach der Kreislinie mehr als zwey grade Linien ziehn, so ist dieser Punkt nothwendig der Mittelpunkt des Kreises.*

Folgerung 3. *Grade Linien, welche* von einem Punkte ausserhalb des Kreises so gezogen sind, dass sie *von der Kreislinie gleiche Bogen abschneiden*, sind gleich *. Deshalb sind von jedem Punkte ausserhalb * 14. f. 3.
des Kreises nur zwey und nicht mehr solche grade Linien möglich. Umgekehrt schneiden alle *gleiche* grade Linien, welche von einem Punkte ausserhalb des Kreises an die Kreislinie gezogen sind, von ihr gleiche Bogen ab. Solche Linien so zu ziehn, dass sie im Kreise Sehnen von gegebner Grösse bilden, oder dass zwey derselben Bogen von gegebner Grösse umspannen, lehrt Aufg. 15.

Folgerung 4. Auch alle Tangenten, welche Fig. 79.
von einem Punkte nach einer Kreislinie gehn sind gleich *. Folglich sind *von einem Punkte O ausserhalb* * 14. Z. 1.

eines Kreises nach dem Kreise stets zwey verschiedne, aber nicht mehr, Tangenten möglich. — Ist eine grade Linie OF, welche von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises nach der Kreislinie geht, einer Tangente OG aus diesem Punkte gleich, so ist sie selbst eine Tangente des Kreises. — Endlich geht eine grade Linie, welche den Winkel O halbirt, den die beyden Tangenten aus dem Punkte O nach der Kreislinie bilden, durch den Mittelpunkt des Kreises und steht auf der Sehne durch die Berührungspunkte, in
*14.Z.1. deren Mitte senkrecht auf *.

Anmerkung. Der Lehrsatz und die Folgerungen, sind den Sätzen des ersten Buchs über die Entfer-
*I. 16. nung eines Punktes von den Punkten einer graden Linie * analog, und zeigen sich für die Lehre des Kreises nicht weniger fruchtbar, als jene für die gradelinigen Figuren. Ich sehe daher den Grund nicht ab, warum sie Le Gendre übergehr, da er doch von jenen Sätzen des ersten Buchs einen so häufigen Gebrauch macht, und die fernern Sätze über das Schneiden und Berühren der Kreise blosse Folgerungen aus diesem Lehrsatz sind.

d. U.

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 49. u. 50. 1) *Zwey Kreise deren Mittelpunkte A, B um die Summe oder um den Unterschied ihrer Halbmesser α, β von einander entfernt sind, berühren sich und zwar im ersten Fall äusserlich im zweyten innerlich.*

2) *Ist die Summe ihrer Halbmesser grösser oder der Unterschied derselben kleiner, so haben sie keinen Punkt mit einander gemein, und liegen im ersten Fall*

der eine ganz aufserhalb, im zweyten der eine ganz innerhalb des andern.

Die grade Linie durch beyde Mittelpunkte durchschneide den um B beschriebnen Kreis in den Punkten I und H, nnd zwar sey I der Durchschnittspunkt welcher mit A auf einerley Seite von B liegt; so sind dem vorigen Lehrsatz gemäfs alle Punkte in der Kreislinie um B *weiter* als der Punkt I, aber *nicht so weit* als der Punkt H vom Mittelpunkte A der zweyten Kreislinie entfernt *. * 14. 1.

1. Ist daher AI *gleich* dem Halbmesser α dieser zweyten Kreislinie, so ist zwar I ein Punkt in derselben, aber alle andern Punkte der Kreislinie um B stehn weiter von A als um den Halbmesser α ab, liegen also aufserhalb der Kreislinie um A. Mithin berühren sich beyde Kreislinien in diesem Fall *äufserlich* *. Wenn aber $\alpha + \beta = AB$ ist, so mufs auch $\alpha = AB - \beta$ *, oder $\alpha = AB - BI = AI$ seyn. Folglich ist AI unter dieser Bedingung dem Halbmesser α gleich, und unter ihr müssen sich daher beyde Kreise *äufserlich berühren*. Fig. 49. * E. 12. * Gr. 2.

Ist AH *gleich* dem Halbmesser α, so ist zwar H ein Punkt in der Kreislinie um A, aber alle andere Punkte der Kreislinie um B sind von A weniger als um den Halbmesser α entfernt, liegen also innerhalb jener Kreislinie. Beyde Kreislinien berühren sich also in diesem Fall *innerlich* *. Wenn aber $\alpha - \beta = AB$ ist, so mufs auch $\alpha = AB + \beta$ oder $\alpha = AB + BH = AH$ seyn. Folglich ist unter dieser Bedingung AH Fig. 50. * E. 12.

dem Halbmesser α gleich, und unter ihr müssen sich daher beyde Kreise *innerlich berühren.*

2) Ist dagegen AI *größer* als der Halbmesser α so fällt der Punkt I, der unter allen in der Kreislinie um B am nächsten bey A liegt, mithin diese ganze Kreislinie, ausserhalb der Kreislinie um A und beyde haben keinen Punkt gemein. Das ist aber der Fall, wenn $\alpha + \beta > AB$ ist, da denn auch $\alpha > AB - \beta$ oder $> AB - BI$, d. h. $> AI$ ist.

Ist endlich AH *kleiner* als der Halbmesser α, so fällt der Punkt in der um B beschriebnen Kreislinie, welcher am weitesten von A entfernt ist, mithin diese ganze Kreislinie, innerhalb der Kreislinie um A, und beyde Kreislinien haben wiederum keinen Punkt gemein. Das ist aber der Fall, wenn $\alpha - \beta < AB$ ist, da denn $\alpha < AB + \beta$ oder $< AB + BH$ d. h. $< AH$ ist.

Folgerung 1. *Wenn zwey Kreise einander berühren, so liegt folglich stets der Berührungspunkt mit den beyden Mittelpunkten in einer graden Linie*, und zwar *zwi-*
Fig. 49. *schen* beyden Mittelpunkten wenn die Kreise *äusserlich*,
Fig. 50. *nicht zwischen ihnen*, wenn sie sich *innerlich* berühren. Denn nur unter diesen Bedingungen kann der Abstand ihrer Mittelpunkte der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich seyn. Die grade Linie, welche durch zwey jener Punkte gezogen wird, muss also immer auch durch den dritten gehn.

Folgerung 2. *Wenn umgekehrt zwey Kreislinien in einem Punkte I oder H, welcher in der graden Linie durch ihre Mittelpunkte liegt, zusammentreffen, so berüh-*

ren ſie ſich. Denn dann iſt allemal die Entfernung ihrer Mittelpunkte entweder der Summe oder dem Unterſchiede ihrer Halbmeſſer gleich; ein ſehr einfaches Kennzeichen von Kreiſen die ſich berühren, welches in der Lehre von den Berührungen von vielem Gebrauch iſt.

Folgerung 3. *Zwey ſich berührende Kreiſe haben im Berührungspunkte eine gemeinſchaftliche Tangente.* Denn da ihre Halbmeſſer AI, BI, welche nach dem Berührungspunkte gezogen werden, in grader Linie liegen *, ſo fallen die Perpendikel, welche auf beyde im Berührungspunkte I errichtet ſind, mithin die Tangenten zuſammen *. Ein Perpendikel auf die gemeinſchaftliche Tangente im Berührungspunkte errichtet, geht alſo gewiſs durch *beyder* Kreiſe Mittelpunkt.

* f. 1.

* 12. u. I. 1. Z. 2.

Folgerung 4. *Haben umgekehrt zwey Kreiſe in einem Punkte I den ſie gemein haben, eine gemeinſchaftliche Tangente, ſo berühren ſie ſich,* und zwar *innerlich,* wenn ihre Mittelpunkte auf einerley, *äuſserlich* wenn ſie auf entgegengeſetzter Seite der Tangente liegen. Denn ihre Mittelpunkte liegen dann beyde in dem Perpendikel, welches auf die gemeinſchaftliche Tangente im Berührungspunkt I errichtet wird *, ſind alſo im erſten Fall um den Unterſchied der Halbmeſſer beyder Kreiſe, im zweyten um ihre Summe von einander entfernt. Die Kreiſe müſſen ſich alſo unſerm Lehrſatz zu folge berühren, im erſten Fall innerlich, im zweyten äuſserlich.

* f. 3.

Folgerung 5. Alle Kreiſe, die durch einen Punkt I einer Kreislinie gehn, und um einen Punkt

in dem Halbmesser IA, oder dessen Verlängerung, als Mittelpunkt beschrieben sind, berühren sich im Punkte I, weil sie in ihm eine gemeinschaftliche Tangente
* f. 4. haben *, und liegen ganz zu einerley oder entgegengesetzter Seite dieser Tangente, d. h. des Perpendikels welches auf AI im Punkte I errichtet wird.

Anmerkung. Der erste Theil dieses Lehrsatzes steht zwar bey Le Gendre, und macht bey ihm sogar zwey Lehrsatze aus, allein seine Beweise sind sehr mangelhaft, da er sich nicht auf den vorhergehenden Lehrsatz berufen konnte. Die fruchtbaren Folgerungen fehlen bey ihm alle bis auf die erste.

d. U.

[LEHRSATZ 17.]

T. III. F. 65. u. 66. *Wenn zwey um die Mittelpunkte C und O beschriebne Kreise sich innerlich oder äusserlich berühren so liegen, im ersten Fall die beyden übereinstimmenden Endpunkte E, G, im zweyten die verkehrt liegenden Endpunkte E, G zweyer paralleler Durchmesser DE, FG, mit dem Berührungspunkte I in grader Linie.*

Denn verbindet man die Mittelpunkte durch die grade Linie CO, so geht diese auch durch den Berührungs-
*16. f. 1. punkt *. Zieht man daher von dem Berührungspunkte nach den genannten Endpunkten der parallelen Durchmesser die graden Linien IE, IG so entstehn zwey
*E. 2. α gleichschenklige Dreyecke ICE, IOG, worin wegen des Parallelismus der Durchmesser die Winkel an der Spitze, mithin auch die Winkel an der Grundlinie

gleich ſind *. Es ſind alſo auch die dritten Winkel CIE, OIG gleich *, und folglich bilden, da CI und IO in grader Linie liegen, auch AI und IO eine grade Linie *. Der Berührungspunkt liegt folglich mit den Endpunkten F und G der beyden parallelen Durchmeſſer in grader Linie. *I.25; 12 *I.31.f.1 * I. 5.

Zuſatz. *Wenn umgekehrt zwey Kreiſe einen Punkt I gemein haben, und die Halbmeſſer OG, CE, welche man nach den Endpunkten einer graden Linie GE zieht, die durch den Punkt I geht, und beyde Kreiſe ſchneidet, ſind untereinander parallel, ſo berühren ſich beyde Kreiſe im Punkte I.*

Denn man ziehe die Halbmeſſer OI, CI, ſo ſind die Dreyecke IOG, ICE gleichſchenklig, mithin die Winkel E und EIC, G und GIO gleich. Nun aber ſind wegen des Parallelismus der Halbmeſſer, und weil EG eine grade Linie iſt, die Winkel E und G gleich *. *I.25 A.
Alſo ſind auch die Winkel EIC, GIO gleich *, mit- * I. 5.
hin OI und IC in grader Linie *, und es liegt der *16. f. 2.
gemeinſchaftliche Punkt I beyder Kreislinien in der graden Linie durch beyde Mittelpunkte. Folglich berühren ſich in ihm beyde Kreiſe *. *16. f. 2.

Anmerkung. Dieſe Sätze entlehne ich aus *Pappus* mathematiſchen Sammlungen B. 7., wo ſie als 15tes und 16tes Lemma aus Apollonius Werk von den Berührungen aufgeführt, aber auf eine ſchwierigere Art bewieſen werden. Auch iſt der Lehrſatz *Archimedes* erſtes Lemma im Buche von der Kugel und dem Cylinder. Noch ein paar ähnliche Sätze findet man Lehrſatz 25. Zuſ. 2. und folgende.

[LEHRSATZ 18.]

Fig. 48. *Zwey Kreise können sich nur dann durchschneiden, wenn sowohl die Summe ihrer Halbmesser α, β grösser, als auch der Unterschied derselben kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte A, B ist.*

Denn gesetzt die erste dieser Bedingungen fände bey zwey Kreisen nicht statt, und es wäre $\alpha + \beta$ nicht *grösser* als AB; so müste diese Summe entweder gleich AB, oder kleiner als AB seyn. Im ersten Fall würden sie beyde Kreise berühren, im zweyten kei-
* 16. nen Punkt gemein haben *, könnten sich also nicht durchschneiden.

Fände die zweyte dieser Bedingungen nicht statt, und wäre $\alpha - \beta$ nicht *kleiner* als AB; so müste dieser Unterschied entweder gleich AB, oder grösser als AB seyn. Im ersten Fall würden sich wiederum beyde Kreise berühren, und im zweyten keinen Punkt ge-
* 16. mein haben *, könnten sich also nicht durcschneiden.

Zusatz. Dass wenn beyde Bedingungen statt finden, die Kreise sich nothwendig durchschneiden müssen, haben wir schon als unmittelbare Folgen aus den
*E.II.β. Principien gesehn *. Der dortige Satz wird also durch diese vervollständigt, und wir dürfen nun erst diese Bedingungen als *Bestimmung der Möglichkeit des Durchschneidens zweyer Kreise* aufstellen, ohne welche kein Schneiden statt findet, und unter der allein die Construction des Dreyecks aus drey gegebnen Linien mög-
*E.II.A lich ist *.

[LEHRSATZ 19.]

Zwey Kreiſe die ſich durchſchneiden treffen ſich ſtets in zwey Punkten, welche zu den entgegengeſetzten Seiten der graden Linie durch beyde Mittelpunkte liegen. Fig. 48.

Umgekehrt durchſchneiden ſich alle Kreiſe, welche zwey Punkte gemein haben, oder die in einem Punkte auſserhalb der Linie durch ihre Mittelpunkte zuſammen treffen.

1. Wenn zwey Kreiſe ſich in einem Punkte E ſchneiden, ſo kann ihr Durchſchnittspunkt nicht in der graden Linie DH liegen, welche durch die Mittelpunkte beyder Kreiſe geht *, liegt folglich zur einen Seite dieſer Linie; daher zur andern Seite derſelben in der einen Kreislinie ein zweyter Punkt F liegen muſs, welcher eben ſo weit als jener vom Mittelpunkte A des andern Kreiſes entfernt iſt *, folglich auf ſeinem Umfang liegt, alſo ein zweyter Durchſchnittspunkt beyder Kreiſe iſt. Und mehr als dieſe beyden Durchſchnittspunkte ſind nicht möglich *.

*16. f. 8. *15. f. 1. *15 f. 1.

2. Haben zwey Kreiſe zwey Punkte E, F, gemein, ſo liegen dieſe auſserhalb der graden Linie DH zwiſchen ihren Mittelpunkten, und es muſs AI < AE und AH > AE ſeyn *. Folglich iſt I ein Punkt in dem um A beſchriebnen Kreiſe, H ein Punkt auſserhalb deſſelben *, und folglich durchſchneiden ſich beyde Kreiſe.

* 16. *E. 27.

3. Liegt endlich der Punkt E, worin zwey Kreiſe zuſammentreffen, auſserhalb der Linie durch die Mittel-

punkte, so ist die Summe der beyden Halbmesser grö-
* I. 8. sser als der Abstand der Mittelpunkte *; also durchschneiden sich beyde Kreislinien.

Anmerkung. Zwey sich durchschneidende Kreise, und zwey Kreise die zwey Punkte gemein haben, sind also einerley Gegenstand. Le Gendre braucht diesen letztern Begriff zur Erklärung des erstern, d. h. des Schneidens zweyer Kreislinien,
E.10.A. doch, wie wir schon bemerkt haben, in so fern mit Unrecht, als die Uebereinstimmung beyder Begriffe erst bewiesen werden muss. Es erhellt hieraus zugleich dass zwey Kreise die sich berühren nur einen Punkt gemein haben können, und dass umgekehrt alle Kreise die nur einen Punkt mit einander gemein haben, sich berühren, worauf Le Gendres Définition des Berührens zweyer Kreise sich gründet. d. U.

LEHRSATZ 20.

Fig. 48. *Wenn zwey Kreise sich schneiden, so wird ihre gemeinschaftliche Sehne von der graden Linie, die durch die beyden Mittelpunkte O, B geht, senkrecht durchschnitten und halbirt.*

Denn da zwey Kreise, die sich durchschneiden,
* 19. zwey Punkte E, G gemein haben*, so gehört die grade Linie EG zwischen diesen Punkten als Sehne zu beyden Kreisen. Ein Perpendikel, welches auf diese Sehne in ihrer Mitte errichtet wird, muss folglich sowohl durch den einen, als durch den andern
* 9. f. 2. Mittelpunkt gehn *. Also (da zwischen zwey Punk-
* Gr. 6. ten nur eine einzige grade Linie möglich ist *) muss auch umgekehrt eine grade Linie DH, welche durch die Mittelpunkte beyder Kreise A, B geht, die gemein-

meinſchaftliche Sehne EG ſenkrecht durchſchneiden und halbiren.

[Anmerkung. Die Tangente zweyer ſich berührender Kreiſe ſtimmt alſo in *der* Eigenſchaft mit der Sehne zweyer ſich ſchneidender Kreiſe überein, daſs die grade Linie durch die Mittelpunkte beyder Kreiſe auf ſie ſenkrecht ſteht, und wir können ſie alſo auch hier wieder als eine Sehne betrachten, bey welcher die beyden Durchſchnittspunkte mit dem Kreiſe in einen zuſammengefallen ſind. In ſo fern kann man alſo den Berührungspunkt für einen doppelten Durchſchnittspunkt nehmen.

d, U.]

LEHRSATZ 21.

Wenn in einerley Kreis oder in zwey gleichen Kreiſen, zwey Winkel am Mittelpunkte ACB, DCE ſich zu einander wie zwey ganze Zahlen verhalten; ſo müſſen auch die beyden Bogen welche vor ihnen umſpannt werden AB, DE ſich wie dieſelben Zahlen, und folglich wie jene Winkel verhalten. Fig. 67.

Man ſetze, z. B. die beyden Winkel ACB, DCE verhielten ſich zu einander wie die beyden Zahlen 7 und 4; ſo heiſst das, jene Winkel ſollen ſo gedacht werden, daſs ſie von einem kleinern Winkel M grade ſo gemeſſen werden, wie die gegebnen ganzen Zahlen von der Einheit, daſs folglich der Winkel M als gemeinſchaftliches Maaſs im erſten Winkel ACB genau ſiebenmal, im letztern DCE genau 4 mal enthalten ſey *. Dann laſſen ſich alſo in jenem genau 7, in dieſem genau 4 Winkeltheile (angles partiels) ACm, mCn, nCo . . ., DCx, xCy . . . denken, welche insge-

* V, 2.

ſammt dem Winkel M, alſo auch unter ſich gleich ſind. Nun aber müſſen zu dieſen Winkeltheilen, als gleichen Winkeln am Mittelpunkte C in einerley oder
* 7. Z. 2. in gleichen Kreiſen, auch gleiche Bogen gehören *, folglich auch die Bogentheile (arcs partiels) Am, mn, no ... Dx, xy ... welche von jenen Winkeltheilen umſpannt werden, unter ſich gleich ſeyn. Jedem Winkeltheil entſpricht aber ein Bogentheil. Folglich müſſen auch die ganzen Bogen AB und DE ſich wie die Zahlen 7 und 4 *verhalten*; *alſo* wie die Winkel. Dieſelbe Schluſsfolge findet bey jedem andern Zahlverhältniſſe ſtatt. So oft ſich alſo das Verhältniſs zweyer Winkel ACB, DCE in ganzen Zahlen ausdrücken läſst, verhalten ſich die Bogen AB, DE, welche aus ihrem Scheitel mit gleichem Halbmeſſer beſchrieben und von ihren Schenkeln umſpannt werden, wie die Winkel, oder es iſt

$$\angle ACB : \angle DCE = \text{bog. } AB : \text{bog. } DE$$

[d. h. wenn der Winkel ACB oder der n te Theil deſſelben im Winkel DCE m mal enthalten iſt, ſo muſs in dieſem Fall auch der Bogen AB oder deſſen n ter Theil in dem Bogen DE genau m mal enthalten ſeyn.]

Zuſatz. Grade auf dieſelbe Art erhellt umgekehrt, daſs *wenn in einerley Kreis oder in zwey gleichen Kreiſen zwey Bogen AB, DE ſich zu einander wie ganze Zahlen verhalten, auch die Winkel am Mittelpunkte, die auf ihnen ſtehn ACB, DCE, ſich wie dieſe Zahlen, und mithin wie die Bogen verhalten müſſen*, ſo daſs

$$AB : DE = \angle ACB : \angle DCE.$$

[Unter der Vorausſetzung eines Verhaltens wie zwey ganze Zahlen zu einander, iſt alſo ſtets das Verhältniſs ſolcher Bogen und ſolcher Winkel gleich, *ſind folglich Bogen und Winkel proportional* *.] * V. 2.

LEHRSATZ 22.

Wie auch zwey Winkel ACB, ACD ſich zu einander verhalten mögen, immer verhalten ſich auf dieſelbe Art zwey Kreisbogen AB, AD, welche um ihren Scheitelpunkt mit gleichem Halbmeſſer beſchrieben und von ihren Schenkeln umſpannt werden. Fig. 68.

Man lege den kleinern Winkel ACD ſo auf den gröſsern, daſs ihre Scheitel, der Schenkel CA, und ihre Kreisbogen zuſammenfallen *. Wenn nun die * 1. im Lehrſatz ausgeſagte Proportion, d. h. Gleichheit der Verhältniſſe, in irgend einem Fall nicht ſtatt fände, ſo müſte dann der Winkel ACB zum Winkel ACD ſich wie der Bogen AB zu einem Bogen AO, der *gröſser* oder *kleiner* als AD iſt, verhalten *, alſo folgende *V. 3. α. Proportion richtig ſeyn

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog. } AB : \text{bog. } AO$$

Der Bogen AO ſey *erſtens gröſser* als AD, ſo kann man ſich AD in lauter gleiche Theile getheilt denken, welche kleiner als der Unterſchied beyder Bogen, DO, ſind *, [z. B. in n,] da denn, wenn man dieſe Theile *Aufg. 5 Z. 2. weiter nach O zu aufträgt, zwiſchen D und O wenigſtens ein Theilpunkt I fallen muſs. Zieht man nun den Halbmeſſer CI, ſo ſind ACD, ACI zwey Winkel am Mittelpunkte, deren Bogen AD, AI ſich wie zwey ganze Zahlen [n und n + 1] zu einander verhalten; folglich ist dann kraft des vorhergehenden Zusatzes

$$\angle ACB : \angle ACI = \text{bog. } AB : \text{bog } AI$$

Die Vorderglieder in den Verhältnissen dieser Proportion sind mit den Vordergliedern in der ersten Proportion einerley; folglich müssen die Hinterglieder proportional seyn, also

$$\angle ACD : \angle ACI = \text{bog. } AO : \text{bog } AI$$

[indem, wenn der Winkel ACB die Winkel ACD, ACI grade so misst, wie der Bogen AB die Bogen AO, AI, auch zwischen diesen Winkeln, und Bogen einerley Zahlverhältniss statt finden muss *.]

*V. 3. ε.

Nun aber ist der Bogen AO grösser als AI, folglich müsste auch kraft der letztern Proportion der Winkel ACD grösser als der Winkel ACI seyn, also der Theil grösser als das Ganze, welches ungereimt ist *. Also ist es unmöglich dass der Winkel ACB sich zum Winkel ACD, wie der Bogen AB zu einem Bogen, der grösser als AD wäre, verhalten könne.

*V. 3. δ.

Aus einer ähnlichen Schlussfolge erhellt, dass *zweytens* auch kein Bogen der *kleiner* als AD ist, mit den Winkel ACB, ACD und dem Bogen AB eine gültige Proportion bilden kann.

[Folglich muss die im Lehrsatz ausgesagte Proportion unter allen Umständen bestehn, da, bestände sie nicht, man in Ungereimtheiten verwickelt würde], und es ist also immer

$$\angle ACB : \angle ACD = \text{bog } AB : \text{bog. } AD.$$

[Zusatz I. Grade so beweist man den umgekehrten Satz, daſs, *wie auch zwey Bogen aus gleichen Kreisen sich verhalten mögen, die Winkel an ihren Mittelpunkten, von deren Schenkel sie umspannt werden, sich grade auf dieselbe Art verhalten.*

So ist also die Proportionalität zwischen Winkel und Bogen allgemein dargethan, die beyden Bogen oder die beyden Winkel mögen durch einerley Bogen oder Winkel sich messen lassen oder nicht, d. h. *commensurabel* oder *incommensurabel* seyn, und folglich sich wie Zahlen verhalten oder nicht, d. h. ein *rationales* oder ein *irrationales Verhältniſs* haben *. * V. 1.

Der hier geführte sehr deutliche und evidente *Beweis für diesen incommensurablen Fall*, den ich durch die zweyte Anmerkung zur fünften Aufgabe noch vervollkommnet zu haben glaube, scheint, so wie der analoge Beweis Buch 3 Lehrsatz 4, von Le Gendre aus Simpsons Elementen entlehnt zu seyn, wo man ihn im Wesentlichen in der Anmerkung zum dritten Satze des fünften Buches findet. Simpson bemerkt dabey daſs schon *Euklid* im zwölften Buch seiner Elemente sich dieser Beweisart bedient, und daſs sich mittelst derselben in jedem Falle die Schwierigkeiten, die aus der Incommensurabilität von Linien oder andern Ausdehnungen herrühren, leicht und befriedigend heben lassen.]

Zusatz II. Was in diesem und dem vorigen Lehrsatz über die Proportionalität zwischen Winkeln und Bogen bewiesen worden ist, gilt ebenfalls für *Kreisausschnitte* und *ihre Bogen*, welche grade so wie Winkel und Bogen von einander abhängen, und auf die der hier geführte Beweis sich ganz übertragen läfst. *Es verhalten sich also auch stets Kreisausschnitte in demselben Kreise oder in zwey gleichen Kreisen, wie ihre Bogen.*

Zusatz III. Weil die Winkel am Mittelpunkte eines Kreises, (und so auch die Kreisausschnitte,) mit den Bogen worauf sie stehn (die sie umspannen) proportional sind, d. h. mit ihnen so zusammenhängen, dafs beyde sich nach einerley Verhältnifs ändern, und wenn die eine dieser Gröfsenarten zu oder abnimmt, die andre nach gleichem Verhältnisse zu oder abnimmt; so sind wir berechtigt die eine zum *Maafs* der andern zu brauchen. Wir wollen deshalb hinfüro den Bogen AB, worauf ein Winkel am Mittelpunkte ACB (oder ein Kreisausschnitt) steht, für *das Maafs dieses Winkels* ACB (oder des Ausschnitts) nehmen; wobey man sich aber wohl merken mufs, dafs, wenn man verschiedne Winkel (oder verschiedne Ausschnitte) durch solche Bogen, als ihr Maafs, vergleichen will, die Bogen wie es der Lehrsatz voraussetzt, mit *gleichem* Halbmesser beschrieben seyn müssen.

[Dafs hierbey von keinem *unmittelbaren* Messen, oder wie unser Verfasser sich nicht ganz richtig ausdrückt, von keinem absoluten Maafs, die Rede seyn kann, versteht sich von selbst. Das *unmittelbare Maafs* einer Gröfse mufs mit ihr völlig gleichartig seyn, sich von ihr in nichts als in der Gröfse, und höchstens noch in der Form unterscheiden, daher Bogen sich nur durch Linien, und Winkel nur durch Winkel unmittelbar messen lassen. Wir müssen also zum unmittelbaren Messen für die Winkel einen Winkel zur Einheit

annehmen, und dazu haben wir schon den *rechten Winkel* erwählt, auf den wir alle übrige Winkel als auf ihr gemeinschaftliches Maafs, ihre Einheit, beziehn *. Da aber dieser Lehrsatz zeigt, dafs Winkel *I.1.Z.1.
untereinander stets dasselbe Verhältnifs als die dazu gehörigen Bogen haben, so läfst sich aus dem Verhältnifs der Bogen auf das der Winkel schliefsen, folglich mittelst der Bogen erfahren, wie oft ein Winkel oder ein bestimmter Theil desselben in dem andern Winkel enthalten ist, daher man *mittelst* der Bogen einen Winkel mit dem rechten, als dem Maafse aller Winkel, vergleichen, folglich *mittelbar* messen kann *. Und *A20.A
von solchem *mittelbaren Maafs* ist hier nur die Rede.]

Nehmen wir den rechten Winkel zur Einheit, so mufs jeder spitze Winkel durch eine Zahl die zwischen 0 und 1 fällt, also durch einen ächten Bruch, ein stumpfer Winkel durch einen Bruch der zwischen 1 und 2 fällt, ausgedrückt werden, welches etwas unbequem seyn würde. [Um die Brüche zu vermeiden nimmt man daher in der Ausübung nicht den rechten Winkel selbst, sondern den neunzigsten Theil desselben, den man einen *Grad* nennt, und dessen Sexagesimal-Theile (die man nach der Ordnung durch *Minuten, Secunden, Tertien* bezeichnet) zum unmittelbaren Maafs aller Winkel oder zur *Winkeleinheit*, und vergleicht, um die Gröfse eines Winkels in Graden, Minuten und Secunden zu erfahren, den Bogen, den ein Winkel umspannt, mit dem *neunzigsten Theil des Quadranten* und dessen Sexagesimaltheilen. *Der neunzigste Theil des Quadranten* (folglich der 360ste Theil der Kreislinie) wird gleichfalls ein Grad genannt, und dient, sammt seinen Sexagesimaltheilen (Minuten, Secunden, Tertien), allen Kreisbogen zum gemeinschaftlichen Maass oder zur Einheit, da denn jeder Winkel so viel Grad, Minuten und Secunden als sein Bogen enthält, jener *Winkelgrade*, dieser *Bogengrade* u. s., welches man gehörig unterscheiden muss. Hierauf beruht der Gebrauch aller Winkelmesser in der Ausübung.]

[Anmerkung 1. Den neunzigsten Theil des Quadranten oder *einen Grad findet man durch Probiren ohne Schwierigkeit*, indem man z. B. erst die Grösse der Sehne, die sich genau dreymal im Quadranten herumtragen lässt, dann die Sehne die sich im Drittel sechsmal, und endlich die, die sich im Sechstel des Drittels genau fünfmal umhertragen lässt, durch fortgesetztes Probiren aufsucht. Denn da zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören, erhält man auf diese Art einen Bogen der 3. 6. 5 d. h. 90 mal im Quadranten enthalten ist, stellt also den neunzigsten Theil des Quadranten dar. Auf ähnliche Art lässt sich jeder andre willkührliche Theil der Kreislinie finden, der Kreis also nach Belieben eintheilen. Allein dieses Probiren ist ein *mechanisches Verfahren*, welches blos für den vorgelegten einzelnen Fall den gesuchten Theil giebt; *kein Wissenschaftliches* welches aus allgemein gültigen Gründen abgeleitet, auf allgemeine Gültigkeit Anspruch machen könnte. Ein solches vermag, wie wir in
* 30. A. der Folge sehn werden *, die Elementargeometrie nicht aufzustellen. Für die Eintheilung der Winkelmesser ist indess jenes mechanische Verfahren völlig hinreichend, besonders seitdem neuere Künstler, (der *Herzog von Chaulnes*, *Bird* und *Ramsden*) diese Eintheilungsmethode durch scharfsinnige Erfindungen ausserordentlich verfeinert und erleichtert haben.

Anmerkung 2. *Ein Winkelmesser* ist ein in Grade und kleinere Theile eingetheilter Kreis oder Kreisbogen. Bey denen die zum Messen und Auftragen der Winkel in Zeichnungen oder auf dem Papier bestimmt sind (*Transporteurs*) ist der Mittelpunkt der Theilung durch eine Oefnung oder eine Spitze genau bestimmt. Jeden Winkel den man messen, oder an einer Linie auftragen will, legt man so, dass dessen Spitze im Mittelpunkt fällt. Dann ist er ein Winkel am Mittelpunkte des eingetheilten Kreises, fasst also so viel Winkelgrade, als auf dem Instrumente Bogengrade zwischen seinen Schenkeln liegen.

Bey den Winkelmessern die zum Messen auf dem Felde oder am Himmel bestimmt sind, (*Theodolite, Scheibeninstrumente, ganze Kreise, Quadranten etc.*), drehen sich genau im Mittelpunkt der Theilung ein oder zwey Lineale (*Albidaden*) mit Dioptern oder mit Fernröhren. Die Winkel der Gesichtslinien nach zwey Gegenständen, auf die man die Fernröhre richtet, werden folglich Winkel am Mittelpunkte dieser eingetheilten Kreise, und also durch die abgeschnittnen Bogen gemessen. Hierbey kömmt also alles, nächst der Güte der Eintheilung, darauf an, dass die Alhidade oder das Fernrohr sich genau um den Mittelpunkt der Theilung (oder mit der Theilung concentrisch) drehn. Sonst sind die abgeschnittnen Bogen nicht das Maass der Winkel, die dann *excentrisch* wären *.

d. U.] * 25. A.

[Zusatz IV. In *zwey verschiednen Kreisen, z. B. den concentrischen EFD und KRG umspannen gleiche Winkel am Mittelpunkte ECD ähnliche Kreisbogen*, d. h. Bogen ED, KG, die sich auf einerley Art zum ganzen Umfange verhalten,* nemlich wie der Winkel der sie umspannt zu vier rechten, und die daher *eine gleiche Menge von Graden enthalten.* Hierauf *beruht die Messung der Kreisbogen durch Winkelmesser.* Zieht man nemlich nach den Endpunkten eines Bogens DE, die Halbmesser, und legt einen Winkelmesser in der Ebne des Bogens so dass sein Mittelpunkt in den Mittelpunkt C fällt, so werden beyde Bogen concentrisch und die Schen- Fig. 47. *IV. E. 4

kel CE, CD schneiden auf beyden gleich viel Grade ab; daher man die Gradmenge von DE, aus der in GK unmittelbar ersieht.

Zusatz V. *Ein Winkel am Mittelpunkte ist recht, stumpf oder spitz* je nachdem er auf einem Bogen steht, der dem Quadranten gleich, oder gröſser oder kleiner als der Quadrant ist.

Zwey Halbmesser welche einen Halbkreis umspannen liegen in grader Linie, und die Schenkel eines *erhab-*
*I. E. 16. *nen Winkels* ACD * umspannen einen Kreisbogen EFD, welcher gröſser als der Halbkreis ist. — Ueberhaupt sind ein Winkel oder mehrere Winkel zusammen genommen, einem, zwey oder mehreren rechten Winkeln, oder einem stumpfen oder einen spitzen Winkel gleich, je nachdem sie zu ihrem Maaſs einen Quadranten, einen Halbkreis, oder einen Bogen haben, der kleiner als ein Halbkreis aber gröſser als ein Quadrant, oder der kleiner als ein Quadrant ist. d. U.]

LEHRSATZ 23.

Jeder einem Kreise eingeschriebne Winkel (d. h. jeder Winkel am Umfange) hat zu seinem Maaſse den halben Bogen worauf er steht.

Fig. 69. [Wenn der eine Schenkel eines eingeschriebnen Winkels, AE, durch den Mittelpunkt des Kreises C geht, so ziehe man den Halbmesser CB. Denn entsteht ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, worin die Winkel A und B gleich sind, und der äuſsere Winkel
* I. 30. BCE = B + A * = 2 A, folglich A = $\frac{1}{2}$ BCE ist. Nun ist aber BCE ein Winkel am Mittelpunkte, der

mit dem eingeschriebenen Winkel BAE über demselben Bogen BE steht, hat folglich diesen Bogen zu seinem Maasse. Also hat der Winkel A am Umfange, wovon ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht, den halben Bogen BE, worauf er steht, zu seinem Maasse *. *21. Z. 3.

Geht kein Schenkel eines eingeschriebnen Winkels BAD durch den Mittelpunkt, so ziehe man durch die Spitze des Winkels den Durchmesser AE, welcher mit den Schenkeln des eingeschriebnen Winkels, AB, AD, zwey Winkel am Umfange BAE, DAE bildet, welche der Bedingung des ersten Falls entsprechen, folglich zu ihrem Maass den halben Bogen haben, auf dem sie stehn.]

Liegt nun der Mittelpunkt, folglich AE, zwischen beyden Schenkeln des gegebnen Winkels BAD, so ist dieser Winkel der Summe jener beyden Winkel BAE, DAE, gleich, hat folglich zu seinem Maasse die Hälfte der Bogen BE + ED, d. h. die Hälfte des Bogens BD worauf er steht. — Liegt dagegen der Mittelpunkt, folglich auch AE, ausserhalb des Theils der Ebne den die beyden Schenkel AB, AD′ umspannen, so ist der gegebne Winkel am Umfange BAD′ dem Unterschiede jener Winkel BAE, D′AE gleich *, hat folglich zu seinem Maass die Hälfte des Bogen D′E — BE, d. h. die Hälfte des Bogens BD′ auf welchem er steht. *I. E. 12. γ

Also hat jeder in dem Kreis eingeschriebne Winkel, oder jeder Winkel am Umfang, zu seinem Maasse den halben Bogen, den er umspannt.

Zusatz I. *Alle Winkel in demselben Kreisabschnitt* * *sind gleich, z. B. BAC, BDC, BEC etc.* Denn sie stehn Fig. 70. * E. 7.

auf demselben Kreisbogen BOC, dessen Hälfte sie zu ihrem Maasse haben. [Eben so sind Winkel in Abschnitten gleicher Kreise, welche in beyden über gleiche Bogen oder Sehnen stehn, gleich. — Sind umgekehrt in einem Kreise, oder in zwey gleichen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich, so umspannen sie gleiche Bogen, und stehn in gleichen Kreisabschnitten.

T. III. Fig. 77. Dasselbe ist bey allen *ähnlichen Abschnitten verschiedner Kreise*, wie AEB, ADC der Fall, d. h. bey Abschnitten, deren Bogen gleich viel Grade enthalten *. *IV.E.2 Denn die Ergänzungen ihrer Bogen zum ganzen Umfange ANB, ANC enthalten alsdann auch gleich viel Grade, folglich auch die Winkel in den Abschnitten, E, D, welche durch die Hälfte dieser Bogen, auf die sie stehn, gemessen werden. Die Winkel in ähnlichen Abschnitten sind also immer gleich. Und *sind umgekehrt in verschiednen Kreisen zwey Winkel am Umfange gleich, so sind die Bogen welche sie umspannen und die Abschnitte in welchen sie stehn ähnlich*, (d. h. enthalten gleich viel Grade.)

Fig. 71. Zusatz II. *Jeder Winkel im Halbkreise ist ein Rechter*, z. B. der Winkel BAD. Denn zieht man den Halbmesser CA, so erhält man zwey gleichschenklige Dreyecke BCA, ACD, worin die Winkel bey A den Winkeln B, D gleich sind, also auch ihre Summe BAD = B + D ist. Nun sind die drey Winkel B, D, BAD, als Winkel in einem Dreyecke, zusammengenommen zwey rechten Winkeln gleich *; also ist ihre Hälfte *I. 31. BAD einem rechten Winkel gleich. — Auch erhellt

der Satz unmittelbar daraus, daſs BAD als Winkel im Umfang, der auf den Halbkreis ſteht, die Hälfte des Halbkreiſes, d. h. einen Quadranten zum Maaſs hat; daher er nothwendig ein rechter iſt *. *22. Z. 5.

[*Folgerung. Sind folglich drey grade Linien AB, AC, AD, welche in einem Punkte A zuſammenſtoſsen gleich, und liegen zwey derſelben, AB und AD, in grader Linie, ſo iſt, wenn man BC, CD zieht, der Winkel BCD ein rechter.* Denn dann läſst ſich um A mit dem Halbmeſſer AB ein Kreis beſchreiben, der durch die Punkte B, C, D geht *, worin BD Durchmeſſer, alſo BCD ein Winkel im Halbkreiſe iſt. Fig. 37 *E. 2. 3

Halbirt man die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreyecks BCD im Punkte A, und zieht AC, (oder zieht man dieſe Linie ſo, daſs die Winkel B, BCA oder D, DCA gleich werden) ſo iſt AC = AB = AD.

Errichtet man endlich auf der Grundlinie eines gleichſchenkligen Dreyecks ABD, in ihrem Endpunkte ein Perpendikel CD, ſo durchſchneidet dieſe den zweyten verlängerten Schenkel BA ſo, daſs AD den Schenkeln AB, AC, und der Winkel bey D dem Winkel bey C gleich wird. Denn dann iſt A der Mittelpunkt eines Halbkreiſes durch B, C, D.]

Zuſatz III. *Jeder Winkel BAC, der in einem Kreisabſchnitt, gröſser als der Halbkreis eingeſchrieben iſt, iſt ein ſpitzer Winkel;* denn er ſteht auf einem Bogen der kleiner als der Halbkreis iſt, hat alſo zu ſeinem Maaſs einen kleinern Bogen als den Quadranten *. — *Jeder Winkel BOC, in einem Kreisabſchnitt der kleiner als der Halbkreis iſt, iſt dagegen ein ſtumpfer Winkel.* Denn Fig. 70. *22. Z. 5.

ihn misst die Hälfte eines Bogens, welcher grösser als der Halbkreis ist.

Anmerkung. Diese Sätze über die Vergleichung der Winkel, welche in Kreisen eingeschrieben sind, mittelst der Bogen die sie umspannen, (und die folgenden Sätze welche sie vervollständigen) gehören zu den fruchtbarsten in der Geometrie. Unmittelbar auf den hier bewiesenen beruhen einige nette *Eigenschaften sich durchschneidender Kreise*, wovon ich die erstere aus *Clavius* Euklid, die übrigen aus *Gregor von St. Vincenz* Opus Geometricum entlehne.

Fig. 72. 1. *Wenn ein Kreis ABC durch den Mittelpunkt C eines andern Kreises geht, und man zieht in ihm den Durchmesser der durch C geht, CA, so schneidet der zweyte Kreis, und der Bogen in ihm, von allen graden Linien, die durch den Punkt A gehn, gleiche Stücke LM, MN ab.* Denn zieht man CM, so ist AMC ein Win-
* Z. 2. kel im Halbkreis, mithin CM senkrecht auf AN *, und folglich
* 9. wird die Sehne LN des zweyten Kreises im Punkte M halbirt *.

T. III. 2. *Auch wenn zwey gleiche Kreise sich schneiden, und man*
Fig. 78. *beschreibt um ihre gemeinschaftliche Sehne * BC als Durchmesser*
* 20. *einen Kreis, so wird jede grade Linie welche durch die Punkte B oder C geht, worin die Kreise sich schneiden, z. B. CM, von den drey Kreislinien halbirt.* Denn jede solche Linie bildet mit der Sehne BC einen Winkel BCM, welcher in beyden gleichen Kreisen ein Winkel am Umfange ist, und daher gleiche Bogen BF,
* Z 1. BM umspannt *. Also sind auch die Sehnen BF, BM gleich *,
* 7. und FBM ein gleichschenklig Dreyeck. Zugleich ist BLC als
* Z. 2. Winkel im Halbkreise ein rechter *, folglich BL ein Perpendikel auf die Grundlinie dieses gleichschenkligen Dreyecks, und des-
*I.17.f.2 halb FL = LM *.

T. III. 3. Durchschneiden sich zwey Kreise in den Punkten I, L
Fig. 76. und man beschreibt um L einen dritten Kreis, der beyde durchschneidet, *so liegen zwey der Durchschnittspunkte mit dem Punkte I in grader Linie.* Denn zieht man HI, HK und LH, LK welche als Halbmesser des dritten Kreises gleich sind, so sind auch

die Winkel LKH LHK, gleich. Jener ſteht, als Winkel am Umfang, auf dem Bogen INL = IHL *, daher beyde Winkel die Hälfte dieſer Bogen zu ihrem Maaſs haben. Der Winkel am Umfang IHL umſpannt den übrigen Theil des Umfangs. Beyde, LHK, LHI haben alſo den halben Umfang zu ihrem Maaſs, ſind alſo rechte Winkel *, und mithin liegen KH, IH in grader Linie *. * 7. *22. Z. 5. * I. 4.

4. *Wenn man über die Grundlinie BC eines Dreyecks ABC einen Kreis beſchreibt, und dieſer durchſchneidet die Schenkel des Dreyecks, oder ihre Verlängerungen in den Punkten D, E, und man beſchreibt ferner durch die Endpunkte eines der Schenkel, AB, und den Durchſchnittspunkt des andern Schenkels mit der Kreislinie, E, einen zweyten Kreis, und eben ſo durch A, C, D, einen dritten Kreis; ſo entſtehn dadurch ähnliche Kreisabſchnitte über die Seiten des Dreyecks.* T. III. Fig. 77.

Denn zieht man BE, CD, ſo ſind die Winkel BDC, BEC als Winkel am Umfange die über demſelben Bogen BMC ſtehn gleich. Liegt folglich A *innerhalb* des Kreiſes über BC, ſo ſind die Abſchnitte dieſer Winkel in allen drey Kreiſen ähnlich, folglich BEC, BEA, ADC ähnliche Kreisabſchnitte. — Liegt A *auſserhalb* des Kreiſes über BC, ſo ſind auch die Nebenwinkel jener, d. h. die Winkel ADC, AEB gleich, umſpannen folglich in beyden Kreiſen Bogen AB, AC welche unter ſich und mit der Ergänzung des Bogens BMC zum ganzen Kreiſe, d. h. mit dem Bogen BDEC ähnlich ſind; daher auch in dieſem Fall die Abſchnitte über den drey Seiten des Dreyecks ähnlieh ſind. Fig. 77. Fig. 77*

Liegt A *auf* der Kreislinie über BC, ſo fallen die beyden Durchſchnittspunkte D, E in einen Berührungspunkt zuſammen *, und man muſs dann über jedem Schenkel des Dreyecks Kreiſe, welche den andern Schenkel berühren, beſchreiben, um den folgenden Lehrſatz gemäſs ähnliche Kreisabſchnitte über alle drey Seiten des Dreyecks zu erhalten. * 20. A.

5. Aus dieſen Sätzen folgt umgekehrt, daſs *wenn man über die drey Seiten eines Dreyecks ähnliche Kreisbogen beſchreibt, je zwey derſelben ſich in einem der Schenkel des Dreyecks oder in deren*

Verlängerung durchschneiden müssen. Mittelst desselben und des folgenden Lehrsatzes beweist *Gregor von St. Vincenz* in seinem grossen Geometrischen Werke (Prop. 11. bis 16. und 58 bis 64 de Circulo) eine Menge netter Eigenschaften vom Durchschnitt grader Linien, die durch die Spitze des Dreyecks A gehn, mit den Bogen der drey ähnlichen Kreisabschnitte, von denen ich hier nur ein Paar anführe, deren Beweis keine Schwierigkeit hat, uns hier aber doch zu weit abführen würde.

6. *Zieht man von dem Mittelpunkte des einen Kreisabschnitts BDC durch die Mittelpunkte der beyden andern grade Linien, so liegen die Durchschnitte dieser Linien mit den letztern Kreisbogen und die Spitze A des Dreyecks in grader Linie*; und dasselbe ist der Fall mit den beyden Punkten worin die *Tangente*, die am Bogen des Kreisabschnitts BEC in den Punkten B und C gezogen werden, die beyden andern Kreisbogen durchschneiden.

7. *Zieht man durch die Spitze A eine grade Linie, so sind die Stücke derselben, welche zwischen der Kreislinie BECM und den beyden andern Kreislinien liegen, allemal gleich.*

8. *Wenn ein Kreis, der um den Mittelpunkt des Abschnitts BEC beschrieben wird, den einen der beyden andern Kreise berührt oder schneidet, so berührt oder schneidet er auch den zweyten, und zwar schneidet er im letztern Fall von beyden ähnliche Bogen ab.* Und noch ein Paar solche Sätze, die ich übergehn muss.

d. U.

LEHRSATZ 24.

Fig. 74. 1. *Der Winkel BIE, den eine Tangente IB mit einer Sehne IE macht, welche die Tangente im Berührungspunkte durchschneidet, hat zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE der von beyden Linien eingeschlossen wird.*

[2. *Umgekehrt muss jede grade Linie IB, welche durch den Endpunkt einer Sehne IE gegen diese*

Sehne

Sehne unter einem Winkel gezogen wird, den die Hälfte des von ihnen eingeschlossnen Bogens INE misst, den Kreis im Punkte I berühren.]

1. Zieht man nach dem Berührungspunkte I den Durchmesser DI, so ist erstens DIB ein rechter Winkel *, hat also als solcher zu seinem Maass die Hälfte *12 §. 1. eines Halbkreises *, also auch die Hälfte des Bogens *22. Z 5. DEI. Zweytens hat der Winkel DIE als ein Winkel am Umfang die Hälfte des Bogens DE zu seinem Maasse *. Folglich hat der Unterschied beyder Winkel * 23. DIB und DIE, d. h. der Winkel DIE, zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens INE, welchen die Tangente IB und die Sehne IE umspannen. — Auch der Nebenwinkel desselben AIE hat daher zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens IME, welcher jenen Bogen zum ganzen Kreise ergänzt *. *22. Z. 5

[2. Ist dagegen IB so gezogen, dass der Winkel EIB die Hälfte des von beyden eingeschlossnen Bogens IE zu seinem Maasse hat, so sey ID der Durchmesser der durch den Punkt I geht. Zieht man die Sehne ED, so umspannen die Winkel D und DIE zusammengenommen den Halbkreis IED, haben also als Winkel am Umfange einen Quadranten zu ihrem Maasse *, und sind daher zusammengenommen * 23. einem rechten Winkel gleich. Werden aber, nach der Voraussetzung, die Winkel EIB und D von demselben Bogen ID gemessen, so sind sie gleich, und also sind auch die Winkel BIE, DIE zusammengenommen einem rechten Winkel gleich. Folglich ist

AB ein Perpendikel durch den Endpunkt des Durchmessers, also eine Tangente des Kreises im Punkte I *.]

* 12.

[*Folgerung. Der Winkel BIE zwischen einer berührenden Linie und einer Sehne die durch den Berührungspunkt geht, ist gleich den Winkeln am Umfang, welche mit ihnen denselben Bogen IE umspannen* folglich den Winkeln in dem Kreisabschnitt, der mit der Tangente auf entgegengesetzter Seite der Sehne liegt. Denn alle diese Winkel werden von demselben Bogen gemessen. (Es gilt also auch hier von der Tangente, was von den Sehnen bewiesen ist.) Umgekehrt muss jede Linie IB, welche mit einer Sehne IE an ihrem Endpunkte einen Winkel macht, der den Winkeln im entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitt IME gleich ist, den Kreis im Punkte I berühren.]

Taf. III. F. 75. [Zusatz I. *Eine grade Linie EG, welche durch den Punkt I geht, worin zwey Kreise sich berühren, schneidet von beyden Kreisen ähnliche Bogen und ähnliche Kreisabschnitte ab.*

Denn da beyde Kreise im Berührungspunkt eine
*16. f. 3. gemeinschaftliche Tangente AB haben *, so bildet die grade Linie EG in beyden Kreisen mit der Tangente einen gleichen Winkel. Folglich müssen die Bogen IE, IG, deren Hälften diese Winkel unserm Lehrsatz zu folge messen, gleich viel Grade enthalten, oder gleiches Verhältniss zum ganzen Umfang haben, mit-
*IV. E. 2. hin ähnlich seyn *, und daher auch ähnliche Kreisabschnitte umspannen. Berühren die beyden Kreise sich *innerlich*, so ist GI ein Theil der Sehne IE, und

die ähnlichen Kreisbogen liegen auf einerley Seite der Linie EGI. Berühren sie sich dagegen *äusserlich*, so liegen GI, IE auf entgegengesetzten Seiten des Berührungspunktes, und eben so die ähnlichen Kreisbogen zu entgegengesetzten Seiten der durchschneidenden Linie GE.

In *gleichen Kreisen* welche sich berühren, werden von jeder graden Linie durch den Berührungspunkt, *gleiche Stücke* abgeschnitten *. * 7.

Zusatz II. *Zieht man durch den Punkt I, worin zwey Kreise sich berühren grade Linien, und durch die beyden Punkte, worin sie einen jeden dieser Kreise nochmals durchschneiden, die Sehnen DE, FG; so sind diese Sehnen parallel.* Denn da beyde Linien in diesen Kreisen, nach Zusatz I. ähnliche Bogen IE, IG und ID, IF abschneiden, so sind die Winkel am Umfange, welche auf diesen Bogen stehn, D und F, auch E und G gleich *, mithin die Sehnen DE, FG parallel *, und die Dreyecke IDE, IFG gleichwinklig. *23.Z.1. *1,25.A.

In *gleichen Kreisen* decken sich diese beyden Dreyecke *. In ihnen sind also die Sehnen DE, FG überdem noch gleich. Zieht man daher, wenn sich die Kreise äusserlich berühren, EF, DG, so sind auch diese Linien gleich, und DFG ist ein Parallelogramm. In *ungleichen Kreisen* ist, wenn IG kleiner als IE ist, auch FG kleiner als DE, und dann durchschneiden sich EF und DG. * Z. I.

Zusatz III. *Haben umgekehrt zwey Kreise einen Punkt I gemein, und zwey grade Linien EG, DF durch-*

schneiden beyde im Punkte I so, daſs die Sehnen DE, FG durch die Durchschnittspunkte parallel sind; so berühren sich beyde Kreise im Punkte I. Denn man ziehe durch I am Kreise IDE die Tangente AB, so ist der Winkel DIA, dem
* 24. f. Winkel am Umfange E *, mithin auch, wegen des Parallelismus der Sehnen DE und FG, dem Winkel G
*I.25.A. gleich *. Ist daher, wie in Figur 75, IF ein Theil der Linie ID, so ist der Winkel FGI dem Winkel G gleich, d. h. dem Winkel in dem Kreisabschnitte, welcher mit IA auf entgegengesetzter Seite der Sehne IF
* 24. f. liegt, und daher berührt IA den Kreis IFG *. — Liegt IF in der Verlängerung von ID, wie in Fig. 75 *, so sind FIB, DIA Scheitelwinkel, folglich ist auch FIB gleich G, und also auch in diesem Fall IB eine Tangente am Kreise IGF. — In beyden Fällen haben also die Kreise eine gemeinschaftliche Tangente AIB, daher
*16. f. 4. sie sich in beyden Fällen im Punkte I berühren *.

Taf. III. F. 76. Zusatz IV. Wenn zwey *gleiche Kreise* sich im Punkte I durchschneiden, so ist ihr *krummliniger Winkel* MIH d. h. der Winkel ihrer Tangenten im Berührungs-
*12. Z. punkte I *, dem Winkel gleich, welchen die Tangente IB, mit einer ihr gleichen Sehne ID des zweyten Kreises macht. Denn das Maaſs des Winkels der beyden Tangenten IA, IB ist, weil IB zugleich eine Sehne des ersten Kreises ist, der halbe Bogen IMB. Das Maaſs des Winkels BID ist eben so der halbe Bogen IHD. Die Bogen IMB, IHD sind aber als Bogen gleicher Kreise, die zu gleichen Sehnen IB, ID gehören,
* 7. gleich *, also auch die Winkel DIB, BIA.]

Anmerkung. Den ersten dieser Zusätze entlehne ich aus *Pappus* B. 4. S. 9, wo er mit unnöthiger Weitläufigkeit bewieſen wird; die beyden folgenden aus *Pappus* B. 7., wo ſie das 7te 9te und 11te Lemma aus *Apollonius* Werk von den Berührungen ausmachen, und den letzten Zuſatz aus *Krafft* und Vietas Opp. p. 382. d. U.

[LEHRSATZ 25.]

1. *Der Winkel AOD, unter welchem zwey Sehnen AB, DE eines Kreiſes ſich durchſchneiden, hat zu ſeinem Maaſs die halbe Summe der Bogen, welche ſeine Schenkel umſpannen* $\frac{AD + BE}{2}$. Fig. 79.

2. *Der Winkel, unter welchem zwey verlängerte Sehnen AO', BO', oder eine verlängerte Sehne AO' und eine Tangente GO' ſich durchſchneiden, haben zu ihrem Maaſse den halben Unterſchied der Bogen, welche ihre Schenkel umſpannen* $\frac{AD' - BE'}{2}$ *oder* $\frac{AG - GB}{2}$.

3. *Der Winkel FO'G unter welchem zwey Tangenten eines Kreiſes FO' GO' ſich durchſchneiden, hat zu ſeinem Maaſse die Ergänzung des Bogens, welchen beyde Tangenten umſpannen, zum Halbkreiſe, oder Halbkr. — FG.*

1. Durchſchneiden ſich die beyden Sehnen AB, DE ſelbſt in einen Punkte O, ſo entſteht, wenn man BD zieht, ein Dreyeck OBD, worin der Winkel am Durchſchnitt AOD der äuſsere Winkel, mithin AOD = B + D iſt *. Dieſer Winkel hat alſo zu ſeinem Maaſse die Summe des Maaſses der Winkel B und D, folglich die Bogen $\frac{AD + BE}{2}$ *.

* I. 30

* 23.

2. Durchſchneiden ſich dagegen die Verlängerungen zweyer Sehnen, und man zieht BD, ſo entſteht Dreyeck D′O′B, worin der Winkel am Durchſchnittspunkt O′ ein innerer, und mithin D′O′B = D′BA — D′ iſt. Dieſer Winkel hat alſo zu ſeinem Maaſse den halben Unterſchied der Bogen AD′, BE′ oder $\frac{AD' - BE'}{2}$.

Daſſelbe iſt der Fall wenn die Tangente GO′ und eine Sehne AB ſich in einem andern Punkte als im Berührungspunkte durchſchneiden. Denn auch dann entſteht, wenn man BG zieht, ein Dreyeck BGO′, worin der Winkel am Durchſchnitt ein innerer, und O′ = ABG — G iſt, folglich zu ſeinem Maaſse die Bogen $\frac{AG - GB}{2}$ hat.

3. Durchſchneiden ſich endlich zwey Tangenten GO′, FO′, und man zieht nach den Berührungspunkten die Halbmeſſer CG, CF, ſo entſteht ein Viereck CFO′G, welches zwey rechte Winkel F, G hat, und worin der dritte Winkel C als ein Winkel am Mittelpunkte durch den Bogen FG, welchen beyde Tangenten umſpannen, gemeſſen wird. Der vierte Winkel FO′G hat folglich zu ſeinem Maaſs den Halbkreis weniger dieſen Bogen, den die Tangenten, als Schen-
* I. 32. kel, umſpannen *.

Folgerung 1. *Unter Winkeln, welche auf demſelben Kreisbogen nach der hohlen Seite des Bogens zu ſtehn, iſt der Winkel, deſſen Spitze im Umfange liegt, gröſser als jeder deſſen Spitze auſserhalb der Kreislinie fällt, dagegen kleiner als jeder Winkel deſſen Spitze innerhalb der Kreislinie liegt.*

Folgerung 2. *Grade Linien welche von den End-punkten gleicher Bogen eines Kreises AB, EF etc. durch die Endpunkte eines andern Bogens CD gezogen sind, und entweder alle im Kreise oder alle ausser dem Kreise zusammentreffen, durchschneiden sich unter gleichen Winkeln O, Q etc.* Denn sie haben alle zu ihrem Maasse im ersten Fall die Summe, im letztern den Unterschied gleicher Bogen, AB, EF etc. und des Bogens CD. T. III. F. 104.

Folgerung 3. *Der Winkel O unter welchem zwey Tangenten sich durchschneiden, ist das Doppelte des Winkels GKH, welchen die Linie zwischen den Berührungspunkten mit dem Durchmesser durch den Berührungspunkt K bildet.* Denn GKH hat als Winkel am Umfange zu seinem Maasse die Hälfte des Bogens HG, welcher (nach 3) den Winkel O misst. T. III. F. 78.**

Zusatz I. *Zieht man durch den zweyten Endpunkt dieses Durchmessers und durch den zweyten Berührungspunkt eine grade Linie HG, so durchschneidet diese die Tangente KO in ihrer Verlängerung so dass die Winkel I und GKH, und die Linien OI, OG, OK, gleich sind.* Denn KGH ist als Winkel im Halbkreise ein rechter *; also steht GI auf der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreyecks KGO in deren Endpunkt senkrecht, und durchschneidet daher den gegenüberliegenden Schenkel im Punkt I, so dass OI = OG = OK und I = G ist *. *23 Z. 2. *23. Z. 2. f. 1.

Zusatz II. Beschreibt man um ein gegebenes Dreyeck ABC einen Kreis, ferner um eine der Seiten z. B. um BC mit gleichem Halbmesser einen zweyten Kreis, und fällt dann von dem gegenüberstehenden Winkelpunkte A ein Perpendikel auf BC, welches die Fig. 78. u. 78*.

Kreiſe und dieſe Linie in den Punkten D, E, F durchſchneidet; *ſo ſtehn die graden Linien welche man aus den beyden andern Winkelpunkten B, C durch den Punkt D zieht, ebenfalls auf die gegenüberſtehenden Seiten des Dreyecks ſenkrecht.*

Denn weil die Kreiſe gleich ſind, ſo gehören *erſtens* zu der gemeinſchaftlichen Sehne gleiche Bogen
* 7. BDC, BFC *, und dieſe halbirt beyde die grade Linie durch die Mittelpunkte der Kreiſe, welche zugleich
* 20. auf BC ſenkrecht ſteht *. Mit dieſer Linie läuft das
* I. 31. Perpendikel DF parallel *, daher die Bogen zwiſchen
* 13. Z. 2. beyden *, und alſo auch die Bogen BD, BF, und DC, CF gleich ſind. *Zweytens* iſt der Winkel BCH, deſſen Spitze im Durchſchnittspunkte beyder Kreiſe liegt, in beyden ein Winkel am Umfange, muſs alſo in bey-
* 23. Z. 1. den gleiche Bogen BD, BH umſpannen *, ſo das alſo Bog. BD = Bog. BF = Bog. BH.

Nun hat der rechte Winkel bey E zu ſeinem Maaſse die Hälfte der Bogen AC + BF, und der Win-
* (1) kel bey G die Hälfte der Bogen AC + BH *. (in F. 78* VC + BD = AC + BH). Beyde Winkel ſind alſo gleich, da die Bogen BF, BH und mithin die Bogen, welche beyde Winkel meſſen gleich ſind. Alſo iſt G ſo gut wie E, und aus denſelben Gründen auch I ein rechter Winkel.

Da aus einem Punkte auf eine grade Linie nur ein einziges Perpendikel möglich iſt, ſo *durchſchneiden ſich folglich die Perpendikel, welche aus den Mittelpunkten eines Dreyecks ABC auf die gegenüberſtehenden Seiten gefällt werden, allemal in Einem Punkte D.* Und zwar ſteht dieſer Punkt D mit jedem der Punkte F, H, K, (worin die Perpendikel, die aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, einen Kreis der um das Dreyeck beschrieben ist durchschneiden) von den Seiten des Dreyecks gleich weit ab, so daſs DE = EF, DG = GH und DI = IK ist; (wie daraus erhellt, weil die Dreyecke DBF, DBH, DCK gleichschenklig * und BE, BG, CI Perpendikel auf ihre Grundlinien sind *. Eine artige Eigenschaft des Dreyecks, welche man mit der in Lehrsatz 10 Folgerung 2 vergleiche. * 7. *17. f. 2.

Anmerkung. Auf den ersten Theil dieses Lehrsatzes gründet sich eine Methode *Scheibeninstrumente oder ganze Kreise zu prüfen*, ob sie auch nicht an dem *Fehler der Excentricität* leiden *, und, gesetzt dies wäre der Fall, doch mit solchen fehlerhaften Instrumenten richtig zu messen. Dreht sich nemlich die Alhidade oder das Fernrohr nicht um den Mittelpunkt der Theilung, so sind die Winkel, welche abgeschnitten werden, keine Winkel am Mittelpunkte, sondern excentrische, wie O in Fig. 79. Folglich werden in solchen Instrumenten von den entgegengesetzt liegenden Endpunkten der Alhidade ungleiche Bogen abgeschnitten; und so oft das der Fall ist, leidet das Instrument am Fehler der Excentricität. Und dann werden, dem ersten Theil dieses Lehrsatzes zu folge, die Winkel durch die halbe Summe der beyden abgeschnittenen Bogen, die einander gegenüber liegen, gemessen. *22. A2.

Die beyden letzten Folgerungen und die beyden Zusätze entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* Satz 7, 50, 51 und 53 de Circulo, wo sie aber aus andern Gründen, und nicht so kurz bewiesen werden. d. U.

[LEHRSATZ 26.]

Die Spitzen aller gleichen Winkel, welche über derselbe graden Linie BC stehn, liegen insgesammt in Fig. 70.

einer Kreislinie, die durch die Endpunkte dieſer graden Linie B, C geht.

Man ziehe durch B, C und die Spitze A eines
* 10. dieſer Winkel eine Kreislinie *. Geſetzt nun, es fielen nicht alle Spitzen der andern Winkel in dieſe Kreislinie, ſondern wie α oder β, ſo könnten der Winkel
* Folg. α, β nach dem vorigen Lehrſatz * nicht dem Winkel A gleich ſeyn, ſondern β wäre gröſser, α kleiner als A, gegen die Vorausſetzung. Folglich ſind alle ſolche Winkel in demſelben Kreisabſchnitt über der ge-
* E. 7. gebenen Linie BC befindlich *, welchen zu bilden Aufg. 16 lehrt.

F o l g e r u n g 1. *Ueber derſelben graden Linie ſind alſo auf einerley Seite nicht zwey verſchiedene Kreisabſchnitte möglich, welche denſelben Winkel faſsten*, folglich nicht
*IV.E.2. zwey verſchiedene *ähnliche Kreisabſchnitte* *; und ähnliche Abſchnitte über gleichen Linien decken ſich und ſind gleich (Euklid III. 23. 24.)

F o l g e r u n g 2. *Der Bogen des Kreisabſchnitts* über BC, welcher den Winkel A faſst, iſt *der geometriſche Ort für die Spitze aller Dreyecke*, die über derſelben Grundlinie BC ſtehn, und in welchen dieſer Grundlinie
*I.E.21. ein gleicher Winkel A gegenüberſteht *. Oder er iſt *der geometriſche Ort* für die Aufgabe, *aus zwey gegebenen Punkten B, C zwey grade Linien zu ziehn, die ſich unter einem gegebnen Winkel A durchſchneiden.* Jeder Punkt im Kreisbogen BAC thut dieſer Aufgabe genüge, und keiner der Punkte die auſserhalb deſſelben
* 25. f. liegen *.

A n m e r k u n g. Dieſe lezte Folgerung iſt im erſten Buch von *Apollonius* ebnen Oertern der zweyte Satz, und wird dort nach der deutschen Uebersetzung folgendermaßsen ausgedrückt: „Wenn zwey grade Linien, die einen Winkel von gegebner Gröſse einschlieſsen, durch zwey gegebne Punkte gehn, so liegt der Durchschnittspunkt dieser Linien auf einem der Lage nach gegebnen Kreisumfang, oder auch: so *berührt* ihr Durchschnittspunkt die hohle Seite eines der Lage nach gegebnen Kreises"; in welchem letztren Ausdruck der Begriff des Berührens unrichtig gebraucht wird. Uebrigens fehlt auch dieser wichtige Lehrsatz sammt den folgenden Zusätzen bey Le Gendre.

Zusatz I. *Wenn ein rechtwinkliges Dreyeck ABD mit einem andern rechtwinkligen EBD eine gleiche Hypotenuse hat, die eine Kathete AB aber kleiner als die Kathete EB des andern Dreyecks ist, so ist dagegen die zweyte Kathete AD des erstern gröſser als die Kathete ED des zweyten Dreyecks; und umgekehrt.* Denn legt man die Hypotenusen aufeinander, so fallen die Spitzen, unserm Lehrsatz zu folge, in einen Halbkreis *, und die Katheten jedes dieser rechtwinkligen Dreyecke werden Sehnen, deren Bogen sich zum Halbkreise ergänzen. Nun gehört zur kleinern Sehne der kleinere Bogen *, mithin die gröſsere Ergänzung zum Halbkreise, und also auch eine gröſsere Sehne der Ergänzung, d. i. eine gröſsere zweyte Kathete; und ist AB < EB so ist nothwendig AD > ED. Fig. 71. *23 Z. 1. * 8.

Zusatz II. Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen, *für alle Dreyecke, welche gleiche Grundlinie und gleiche Winkel an der Spitze haben*, und man kann daher diesen Satz allgemein so ausdrücken: *sind in zwey Dreyecken ABC, DBC, eine Seite BC und der ihr gegenüberstehende Winkel A, D in beyden gleich, hingegen ein Schenkel ungleich AB < DB, so ist der zweyte Schenkel* Fig. 70.

in dem Dreyecke grösser, in welchem der erstere Schenkel der kleinere war, $AC > DC$; ein Satz, dem in der Anmerkung zu Lehrsatz 10 des ersten Buchs analog, statt dessen man sich gewöhnlich mit dem vorigen Satz, als Folgerung aus dem Pythagoreischen Lehrsatz begnügt. Auch der folgende intressante Satz fehlt in unsern Lehrbegriffen, obgleich er schon in einem Werke eines alten Griechen *Serenus* de sectione cylindri, Satz 46 und 47, vorkömmt.

T. III. Fig. 81. Zusatz III. *Ist ADEB ein beliebiger Kreisabschnitt, und D ein Punkt in der Mitte des Kreisbogens, so ist die Summe der beyden Schenkel jedes Winkels im Kreisabschnitt, z. B. des Winkels AEB, gleich der Sehne AG, welche durch Verlängerung des einen seiner Schenkel in dem Kreise entsteht, der um D als Mittelpunkt, mit dem Halbmesser DA, beschrieben ist.* Denn man verlängere AD bis F, und ziehe FB, GB, so entstehn dadurch zwey Dreyecke FDB, GEB, wovon das erstere gleichschenk-
*E. 2. α lig ist *. Nun sind erstens die Winkel ADB, AEB
*23. Z. 1. als Winkel in demselben Kreisabschnitt *, folglich auch ihre Nebenwinkel FDB, GEB gleich. Zweytens sind die Winkel F und G gleich, als Winkel am Umfange des grössern Kreises, welche beyde über dem Bogen AB stehn. Mithin sind in den Dreyecken zwey Winkel des einen, denen des andern, also auch die
*I. 31. f. 1 dritten Winkel DBF, EBG untereinander gleich *. Nun aber sind in dem gleichschenkligen Dreyeck FDB die Winkel bey F und B gleich; folglich sind auch im Dreyeck GEB die Winkel bey G und B, mithin auch die Schenkel EG, EB gleich. Es ist also $AE + EB = AE + EG = AG$.

Folgerung 1. Unter allen Sehnen des gröſsern Kreiſes, iſt die, welche durch den Mittelpunkt D geht, d.h. der Durchmeſſer, die gröſste*. Die übrigen werden immer kleiner, je weiter ſie vom Mittelpunkte abſtehn, oder je gröſser der Bogen FG, (mithin auch DE oder der Winkel DAE) wird*. Folglich iſt die Summe der beyden Schenkel eines Winkels in einem Kreisabſchnitt, bey *dem* Winkel, deſſen Spitze in D liegt, die gröſte, und wird immer kleiner, je weiter die Spitze vom Punkte D ab, und je näher ſie bey der Sehne AB liegt. * 5. * 8.

Unter allen Dreyecken über derſelben Grundlinie und mit demſelben Winkel an der Spitze, iſt folglich im gleichſchenkligen die Summe der beyden andern Seiten am gröſsten. Auch iſt das gleichſchenklige Dreyeck auf einerley Seite der Linie AB nur auf eine Art, jedes der andern doppelt vorhanden.

Folgerung 2. Aus denſelben Gründen, woraus wir bewieſen haben, daſs AG = AE + EB iſt, folgt daſs auch BH = BE + EA, folglich AG = BH und AE = EH iſt. Mithin umſpannen zwey ſolche verlängerte Schenkel einen Bogen und eine Sehne GH, welche dem Bogen und der Sehne AB gleich ſind; je zwey folglich gleiche Bogen und gleiche Sehnen.

LEHRSATZ 27.

1. *In jedem Viereck, welches in einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, ſind die gegenüberſtehenden Winkel zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich.* Fig. 80.

[2. *Umgekehrt läſst ſich um ein Viereck, worin die Summe der gegenüberſtehenden Winkel zwey rechten gleich iſt, allemal ein Kreis umſchreiben.*]

1. Iſt das Viereck ABCD in einem Kreiſe eingeſchrieben, ſo umſpannen je zwey der gegenüberſtehenden Winkel die ganze Kreislinie, haben alſo, als Winkel am Umfange, zuſammengenommen die halbe
* 23. Kreislinie zu ihrem Maaſs *, und betragen alſo zwey
*22.Z.5. rechte Winkel *.

[2. Lieſse ſich umgekehrt um ein Viereck, deſſen gegenüberſtehende Winkel A + C zuſammengenommen zwey rechten Winkeln gleich ſind, kein Kreis beſchreiben, ſo würde der durch die Eckpunkte A,
* 10. B, D beſchriebene Kreis * nicht durch den vierten Eckpunkt C gehn, ſondern dieſer müſste innerhalb oder auſserhalb der Kreislinie fallen. Dann würde aber der Winkel C gröſser oder kleiner ſeyn, als ein Winkel G am Umfange, der mit ihm über dem Bogen DAB
*25.f.1. ſteht *, und da dann dieſer letztere Winkel mit dem Winkel A zwey rechten gleich wäre, ſo müſste A + C gröſser oder kleiner als zwey rechte Winkel ſeyn, welches der Vorausſetzung widerſpricht.]

[*Folgerung* 1. Hier hat man alſo *die Bedingung unter der ſich durch vier gegebne Punkte ein Kreis beſchreiben läſst.* Dieſe Bedingung wird hier durch die Winkel gegeben. In B. 3. Lehrſatz 18 wird ſie durch Lineargröſsen angedeutet.

Auch ſieht man hieraus daſs ſich *kein ſchiefwinkliges Parallelogramm in einen Kreis einſchreiben, oder ein Kreis* *ſich demſelben umſchreiben läſst.* Dieſes iſt nur bey Rechtecken, oder bey einem Trapez oder Trapezoid möglich. *Um jedes Rechteck läſst ſich aber ein Kreis beſchreiben.*

Folgerung 2. Verlängert man eine der Seiten eines Vierecks, welches einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, ſo iſt der äuſsere Winkel EAD ſtets dem innern gegenüberſtehenden C gleich.

Anmerkung. Laufen zwey Seiten eines Vierecks, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, parallel, ſo ſchneiden ſie zwar gleiche Bogen ab *, daher auch die beyden andern Seiten, als Sehnen gleicher Bogen, gleich ſind; deshalb braucht aber das Viereck kein Parallelogramm zu ſeyn. Denn aus dem Parallelismus zweyer, und die Gleichheit der beyden andern Seiten folgt nicht, daſs die parallelen Seiten auch gleich, und die gleichen auch parallel ſeyn müſsten. — Die Art *ein Dreyeck einem gegebenen Kreiſe einzuſchreiben oder zu umſchreiben*, und umgekehrt einen Kreis in ein gegebnes Dreyeck einzuſchreiben, lehrt Aufg. 17 und 18. Von der Einſchreibung der ordentlichen Vielecke in den Kreis, werden wir im fünften Buche handeln, auch in den beyden folgenden Büchern die Lehre vom Kreiſe noch beträchtlich erweitern.

* 13.

[LEHRSATZ 28.]

T. III. Fig. 82.

Wenn man auf der Sehne eines Kreisabſchnitts AEB ein Perpendikel ED errichtet, und nimmt auf der andern Seite des Perpendikels im Bogen einen Punkt G, und in der Sehne oder deren Verlängerung einen Punkt F, wovon jener von E, dieſer von D, eben ſo weit als dieſe letztern Punkte ſelbſt vom Punkte B abſtehn; ſo ſind G und F vom andern Endpunkte A *der Sehne gleich weit entfernt; oder wenn EG = EB und DF = DB ist, so ist immer AG = AF.*

Ist das Perpendikel weniger als um den Halbmesser vom Punkte B entfernt, so liegt F in der Sehne, und G im Bogen des Kreisabschnitts. Ziehe EB, EF, GF, so ist, weil nach der Construction ED in der Mitte von FB senkrecht aufsteht, und die Bogen EB und EG gleich
*7; I. 13. sind, EB = EF = EG *, mithin der Winkel B =
* I. 12. EFB und EFG = EGF *.

Nun aber ist ABEG ein im Kreise eingeschriebnes
* 27. Viereck, folglich sind die Winkel B + EGA = 2 R *, also auch EFB + EGA = 2 R. Als Nebenwinkel sind auch EFB + EFA = 2 R, folglich ist EGA = EFA, und zieht man von diesen gleichen Winkeln die gleichen FGF = EFG ab, auch AGF = AFG. Folglich ist das Dreyeck AGF gleichschenklig, und AG = AF.

Fig. 82*. 2. Ist BD grösser als der Halbmesser, so fällt F′ in die Verlängerung der Sehne über A hinaus, und G′ in dem Bogen, welcher den Bogen des Kreisabschnitts zum ganzen Kreise ergänzt. Zieht man EB, EF′ und EG′ so sind aus den nemlichen Gründen wie vorhin BEF′ und F′EG′ gleichschenklige Dreyecke, mithin die Winkel an ihren Grundlinien gleich, EF′G′ = EG′F′ und EF′B = EBF′. Ueberdem sind, als Winkel am Umfange, welche auf gleichen Bogen stehn, EG′A = EBF′ mithin auch EF′B = EG′A, und zieht man diese gleichen Winkel von den erstern gleichen ab, EF′G′ — EF′B′ = EG′F′ — EG′A das heisst AF′G′ = AG′F′. Das Dreyeck AG′F′ ist also auch in diesem Fall gleichschenklig, und AG′ = AF′.

Anmerk.

Anmerkung. Der erste Fall dieses eleganten Satzes ist das dritte Lemma in *Archimeds* Werk über die Kugel und den Cylinder. Auch war der Fall desselben, wenn ABC ein Halbkreis ist, dem Astronomen *Ptolemäus* zur Berechnung des Canons der Sehnen unentbehrlich. Den zweyten Fall füge ich hinzu. Auch folgenden nicht unbrauchbaren Lehrsatz, den ich eben so wenig in einem der benutzten Werke finde.

d. U

[LEHRSATZ 29.]

Wenn eine grade Linie DE die Sehne eines Kreisabschnitts ABD unter einem Winkel AFD, welcher den Winkeln im Abschnitt gleich ist, durchschneidet, so steht der Durchmesser, welcher durch den Punkt A geht, auf der durchschneidenden Linie DE senkrecht, und die Durchschnittspunkte D, E sind vom Punkte A gleich weit entfernt. T. III. Fig. 83.

Denn zieht man AD, DB, AE, EB, so ist der Voraussetzung gemäss der Winkel AFD gleich dem Winkel ADB, und zweytens auch, als äusserer Winkel im Dreyeck AEF, den Winkeln AEF + FAE. Folglich ist der Winkel ADB, d. h. ADF + FDB gleich AEF + FAE, und da FDB und FAE gleich sind, indem beyde auf dem Bogen EB stehn, so sind auch ADF, AEF gleich, also auch die Sehnen und die Bogen AE, AD; weshalb der Durchmesser AG die Linie DE halbirt und auf ihr senkrecht steht*.

* I. 17. f. 2

Folgerung. Der Durchmesser der durch den Punkt A geht, steht auch auf allen graden Linien HG, KI senkrecht, welche die Verlängerung der Sehne unter einem Win-

kel, der dem Winkel des Abschnitts gleich ist, durchschneiden. Denn alle diese Linien laufen mit der Sehne DE
*I.25.f.2 parallel *. Nur durchschneiden sie weiterhin nicht mehr den Kreis.

[LEHRSATZ 30.]

T. III. Fig. 84. *Trägt man auf die Verlängerung einer Sehne AB, den Halbmesser des Kreises von B nach O auf, so schneiden die Sehne und der Durchmesser des Kreises, der verlängert durch O geht, von der Kreislinie zwey Bogen AD, BE' ab, wovon jener das Dreyfache dieses ist, oder Bog. AD = 3. Bog. BE'.*

Denn zieht man die Halbmesser CB, CA, so sind die Dreyecke OBC und BCA gleichschenklig, folglich
* I. 12. sind die Winkel O, OCB, so auch A, B gleich *. Also sind als äussere Winkel B = 2 O und DCA = B + O = 3 O. Mithin ist auch DCA = 3 E'CB, und
* 22. also Bog. AD = 3. Bog. BE' *.

Zusatz I. Verlängert man die Schenkel des Winkels O, und schneidet auf dieselbe Art auf beyden Schenkeln mit dem Halbmesser OB abwechselnd Punkte E', F, G etc. ab, und zieht die Linien AE, EF, FG; so bilden je zwey derselben, die in demselben Punkte zusammenstossen, ein gleichschenkliges Dreyeck, worin die Winkel an der Grundlinie gleich sind, DCA = DEA, EAF = EFA, FEG = FGE etc. Mithin sind, als äussere Winkel, EAF = DEA + O = DCA + O = 4 O; FEG = EFA + O = EAF + O = 5 O etc., so dass *die gleichen Linien, welche zwischen* *den Schenkeln des Winkels O eingeschrieben sind, die Schenkel abwechselnd unter Winkeln durchschneiden, welche der Ordnung nach alle ganze Vielfache des Winkels O darstellen*; ein elegantes Theorem, worauf *Newton* die Formel für die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel gründet.

Anmerkung 1. Der Lehrsatz rührt von *Archimed* her, und ist sein 8tes Lemma von der Kugel und dem Cylinder; der ihn erweiternde Zusatz von *Newton*. Mittelst desselben könnte man *einen jeden gegebnen Winkel oder Kreisbogen in drey gleiche Theile theilen*, wäre es nur möglich eine Sehne und einen Durchmesser so zu ziehn, dass sie der Bedingung des Lehrsatzes genüge thun, d. h. *dass sie sich verlängert so durchschneiden, dass die Verlängerung der Sehne dem Halbmesser gleich ist*. Allein bloss durch Hülfe der graden Linie und des Kreises läſst dieses sich *nicht wissenschaftlich*, sondern nur mechanisch, durch Probiren oder durch Instrumente *bewerkstelligen* *. Wie man auch die *22.Z.3. A. 1.
Sache angreift, so wird man durch jenes Problem wieder auf das zurückgeworfen, einen Winkel oder Bogen in drey gleiche Theile zu theilen.

Auf jene für die Elementargeometrie gleich unauflösliche Aufgabe, führen *Vieta* in seinem *Supplementum Geometriae* Satz 9, und *Newton* in seiner *Arithmetica Universali* die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück, und ein Jesuit *Thomas Ceva* gründet darauf folgendes *Instrument*, welches dieses bewerkstelligen soll. Zwey Lineale, welche sich um den Punkt O drehen, sind durch vier andre Lineale AC, Fig. 84.
CD, CE, CB, welche sich insgesammt um ihre beyden Endpunkte drehen, und mit den Stücken OE, OB gleiche Länge haben, verbunden. Man öfnet das Instrument so dass ACD dem gegebnen Winkel gleich ist, so wird O der dritte Theil dieses Winkels seyn. (*Acta Erudit. A. 1695. p. 291*). Verbindet man mit diesen noch mehrere gleiche Lineale auf dieselbe Art, so erhält man ein Instrument, womit sich auch der vierte, der fünfte Theil

u. f. f. eines Winkels, Newtons Satz zu folge, finden läfst, dergleichen der *Marquis von Hospital* in feinem *Tractatus de fectionibus conicis* l. 10. pr. 6. befchreibt. Diefe Inftrumente find aber mehr ein Spielwerk als von wahrem Nutzen, indem man einen beftimmten Theil eines Winkels oder Bogens mit viel gröfserer Genauigkeit mittelft der Sehnen, entweder durch Probiren, oder aus den Sehnentafeln findet.

Zufatz II. *Wenn durch den einen Endpunkt eines gegebnen Kreisbogens AB ein Durchmeffer BI, und auf diefen fenkrecht der Halbmeffer CD gezogen ift, und diefer fchneidet von einer Sehne AF, die durch den andern Endpunkt des Bogens geht, ein Stück EF dem Halbmeffer des*
Fig. 85 *Kreifes gleich ab; fo ift der Bogen FI der dritte Theil des gegebnen Bogens AB, oder Bog. AB = 3. Bog. FI.*

Man ziehe den Durchmeffer GH parallel mit der
* 14. Sehne AF, fo find erftens die Bogen AG, FH gleich *; und *zweytens* find auch die Stücke diefer Parallelen CH, EF gleich, indem EF nach der Vorausfetzung dem Halbmeffer gleich feyn foll. Zieht man daher HF, fo
* I. 36. ift CEFH ein Parallelogramm *, und die Sehne HF läuft mit CE parallel, wird folglich, da CI auf CD fenkrecht fteht, gleichfalls vom Halbmeffer CI fenk-
*I.25.f.1 recht durchfchnitten *, und daher der Bogen HF im
* 9. Punkte I halbirt *. Nun aber find die Bogen HI, BG als Maafs gleicher Winkel gleich, und der Bogen GA = HF = 2 HI. Folglich ift BG = $\frac{1}{3}$. BA und alfo auch Bog. AB = 3 Bog. FI. Halbirt man daher noch
*Aufg.5 den Bogen GA im Punkte K *, fo ift der Bogen AB, und mithin auch der Winkel der ihn umfpannt, in drey gleiche Theile getheilt.

Anmerkung 2. Alſo *auch auf dieſe Art lieſse ſich ein gegebner Bogen AB oder ein gegebner Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen*, wäre es nur möglich auf eine wiſſenſchaftliche Art die Sehne AF ſo zu ziehn, daſs das abgeſchnittne Stück derſelben EF dem Halbmeſſer gleich ſey; ein Problem worauf ſchon *Campanus von Novara*, der erſte Commentator Euklids zur Zeit der Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften, in einer Scholie zum vierten Buch Euklids, die Frage nach der Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurückführt. Allein auch dieſe Aufgabe wirft uns, wir mögen ſie in der Elementargeometrie angreifen, wie wir wollen, wieder auf die Theilung eines Winkels in drey gleiche Theile zurück. Denn geſetzt das Geſuchte ſey bewerkſtelligt, und vom gegebnen Punkte A aus, ſey eine Sehne AF durch einen gegebnen Halbmeſſer CD ſo gezogen, daſs EF dem Halbmeſſer gleich werde, ſo ſind, wenn man CA und CF zieht, die Dreyecke ACF und CFE gleichſchenklig, mithin A = F, und $\angle$ FCE = FEC = R $-$ $\frac{1}{2}$ F * und zugleich FEC = A * I. 31.
$+$ ACD *. Folglich iſt R $-$ $\frac{1}{2}$ A = A $+$ ACD oder R $-$ * I. 30.
ACD d. h. ACB = $\frac{3}{2}$ A, oder A = $\frac{2}{3}$ ACB. Um alſo AF gegen den Halbmeſſer CA unter dem gehörigen Winkel A zu ziehn, bey welchem AF von CD auf die verlangte Art geſchnitten wird, müſſen wir den Winkel ACB in drey gleiche Theile theilen können.

Anmerkung 3. *Der Grund warum die Theilung des Winkels in drey gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie überſteigt*, liegt darin, weil mittelſt des Kreiſes und der graden Linie, die ſich nur in zwey Punkten durchſchneiden, keine Frage, in der es auf drey oder mehrere Durchſchnittspunkte ankömmt, beantwortet werden kann, und daſs es bey der allgemeinen Aufgabe *irgend einen Kreisbogen*, oder *irgend einen Winkel* in drey gleiche Theile zu theilen, allemal auf drey oder mehrere Durchſchnittspunkte ankömmt. *Warum*, das finde ich bey andern Geometern nur angedeutet, und noch nicht ſo ganz befriedigend ins Klare geſetzt, wie dieſes vielleicht durch folgende Betrachtungen geſchieht.

Gesetzt wir *halbiren* den Bogen HF und den Winkel HCF durch die grade Linie CI, so scheint es zwar auf dem ersten Anblick als werde nur der Bogen FH und der Winkel HCF durch jene Linie und ihren Durchschnitt I mit dem Kreise halbirt. Allein was den *Kreisbogen* betrifft, so liegt zwischen den beyden Punkten H und F, als Endpunkten, nicht bloss der kleine Bogen HF, sondern es ist zwischen ihnen auch ein Bogen enthalten, der aus der ganzen Kreislinie P und dem Bogen HF zusammengesetzt ist, ferner der Bogen 2P + HF, 3P + HF u. s. f. Indem wir also die Hälfte des Bogens suchen, der sich in den Punkten H und F endigt, und beym wissenschaftlichen Verfahren von dem, was uns gegeben ist, ausgehn, d. h. davon, dass H und F Endpunkte des Bogens sind, fragen wir nach sehr viel mehr, als es auf dem ersten Anblick scheint, und als der Frager sich mehrentheils selbst bewust ist; nemlich nach der Hälfte aller jener Bogen, die sich in H und F endigen, d. h. HF, P + HF, 2 P + HF, 3 P + HF etc. Diese Hälften sind $\frac{1}{2}$ HF, $\frac{1}{2}$ P + $\frac{1}{2}$ HF, P + $\frac{1}{2}$ HF, $\frac{3}{2}$ P + $\frac{1}{2}$ HF etc., oder da $\frac{1}{2}$ HF = HI = GB ist, HI, $\frac{1}{2}$ P + GB, P + HI, $\frac{3}{2}$ P + GB etc. Alle diese halben Bogen liegen zwischen den Punkten H, I und H, B; zwischen jenen Punkten der erste, dritte, fünfte, etc., zwischen diesen der zweyte, vierte etc. Daher sind die beyden Punkte I und B *die halbirenden Punkte, welche jene ganze Reihe von Bogen insgesammt in zwey gleiche Theile theilen; und beyde Punkte finden sich zugleich*, auch wenn wir nur nach dem einen I fragen wollten, als Durchschnitt der halbirenden graden Linie CI mit der Kreislinie. Uns selbst unbewust erhalten wir also hier eine vollständige Antwort, welche in den zusammengesetztern Fällen, die Mathematiker der vorigen Iahrhunderte nicht wenig befremdet und überrascht hat.

Eben das ist bey der *Theilung eines unbestimmten Bogens HF in mehrere gleiche Theile* der Fall; d. h. bey der Theilung eines Bogens, den wir blos dadurch denken, dass er zwischen den Punkten H und F liegt, und nicht etwa als einen bestimmten

Theil des Umfangs. Denn dann theilen wir durch ein wissenschaftliches Verfahren nie den kleinen Bogen HF allein, sondern immer zugleich alle Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen. Da wir davon ausgehn müssen, daſs der zu theilende Bogen zwischen den Punkten H und F liegt, so paſst die Schluſsfolge, vermittelst der wir ein solches wissenschaftliches Verfahren begründen, immer zugleich auf alle Bogen, die sich in diesen Punkten endigen, muſs also immer eine Zahl von theilenden Punkten geben, durch welche die Theile aller der Bogen, die sich in den Punkten H und F endigen, *zugleich* bestimmt werden. Daſs diese stets mit der Anzahl der gesuchten Theile übereinstimmt, nimmt man leicht wahr. So finden wir bey der wissenschaftlichen Halbirung eines unbestimmten Bogens zwey, und bey der Trisection drey verschiedene Punkte, zwischen welchen die Drittel jener ganzen Reihe von Bogen, die zwischen den Punkten H und F liegen, enthalten sind.

Nun aber finden drey, und noch viel weniger mehrere Durchschnittspunkte zwischen zwey Kreisen oder zwischen einem Kreise und einer graden Linie nicht statt. Deshalb übersteigt die Theilung unbestimmter Kreisbogen in drey, fünf und mehrere solche gleiche Theile die Kräfte der Elementargeometrie, und sie läſst sich geometrisch nur durch Hülfe anderer krummer Linien bewerkstelligen. So zum Beyspiel werden wir mittelst der Kegelschnitte in den folgenden Büchern einen Bogen in drey gleiche Theile theilen.

Was die *Winkel* betrifft, so hat es mit ihnen völlig dieselbe Bewandniſs. So gut wir erhabne oder hineingehende Winkel, welche gröſser als zwey rechte sind annehmen muſsten *, können wir uns auch Winkel denken, die gröſser als vier rechte, gröſser als acht rechte, und so ferner sind. Denn aber liegen zwischen zwey Schenkeln HC, CF eine ganze Reihe von Winkeln, HCF, 4 R + HCF, 8 R + HCF etc, und diese werden insgesammt durch wissenschaftliche Theilung zugleich getheilt, daher von der Theilung der unbestimmten Winkel dasselbe gilt, was wir hier von der Theilung der Kreisbogen bemerkt haben.

Ich rede hierbey mit Fleiſs von der Theilung *unbeſtimmter Bogen und Winkel*, d. h. ſolcher Bogen die wir in Abſicht ihres Verhältniſſes zum ganzen Umfange, oder ſolcher Winkel die wir in ihrem Verhältniſs zu vier rechten ganz unbeſtimmt, und nur durch das Merkmal denken, das H und F ihre Endpunkte ſeyn ſollen. Denn nur von dieſen gelten unſere Gründe; nicht von einzelnen Bogen oder Winkeln, die wir als beſtimmte Theile der Kreislinie oder des rechten Winkels, alſo durch ein anderes Merkmal denken. Bey dieſen kann es allerdings Methoden geben, ſie in drey, oder fünf gleiche Theile etc. zu theilen, die aus ihrem Verhältniſs zum rechten Winkel oder zum Umfang abgeleitet werden, dergleichen wir beym rechten Winkel ſchon haben kennen
*I.31.f.4 gelernt *, der ſich ohne Schwierigkeit geometriſch in drey gleiche Theile theilen läſst.

der Ueberſetzer.

A N H A N G.

A u f g a b e n welche zu den beyden erſten Büchern gehören.

[Bey jeder der folgenden Aufgaben wird zuerſt die Conſtruction angegeben, vermöge der das geforderte geleiſtet, und alſo die Aufgabe aufgelöſt wird; und darauf bewieſen daſs die Conſtruction möglich iſt, und daſs man durch ſie grade das findet, was man ſucht. Beydes geſchieht mehrentheils in beſondern Abſätzen, denen die Wörter *Auflöſung*; *Beweis* vorzuſetzen überflüſsig geweſen wäre. Da dieſe Aufgaben in das Syſtem der Geometrie gehören, aus dem ſie blos herausgehoben ſind, ſo muſten ſie ſynthetiſch vorgetragen werden, und es würde Zweckwidrig geweſen ſeyn, der Auflöſung eine Analyſis vorauszuſchicken, obgleich dazu meiſt ein paar Worte hingereicht hätten. Le Gendre übergeht die einfachſten, unmittelbar in den Principien gegrüdeten Conſtructionen theils ganz, (wie z. B. das Bilden und Uebertragen gleicher grader Linien) *, theils trägt er ſie zu ſpäth vor (z. B. die Conſtruction der Dreyecke aus drey gegebnen Linien); und macht überdem den Beweis der erſten Aufgaben von Sätzen abhängig, die es gar nicht nöthig geweſen wäre, dabey mit ins Spiel zu bringen, und die uns in logiſche Kreiſe verwickeln würden, wenn wir nicht dieſer Unbequemlichkeit durch die Anmerkung zur erſten Aufgabe abgeholfen hätten. Aus beydem entſtehn wahre Mängel in ſeinem Syſtem, die wir hier ſo viel als möglich zu verwiſchen geſucht haben.

d. U.

* Fo. 3. α, β.

AUFGABE I.

Fig. 86. *Eine gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.*

Um jeden der beyden Endpunkte A und B der gegebenen Linie, beschreibe man mit *gleichen* Halbmessern, von willkührlicher Länge (nur müssen sie grösser als die Hälfte von AB seyn) zwey Kreisbogen, *E.11 β. die sich in einem Punkte D schneiden *, und eben so, entweder mit demselben oder mit einem andern Halbmesser, um dieselben Endpunkte, zwey Kreisbogen, die sich in einem andern Punkte E schneiden. Zieht man durch beyde Durcschnittspunkte D, E eine grade *Fo. 1. Linie *, so behaupte ich, wird diese die gegebne grade Linie AB in zwey gleiche Theile AC, CB zerschneiden.

Denn die Punkte D und E liegen jeder in zwey Kreislinien, welche um die Mittelpunkte A, B beschrieben sind, stehn also beyde gleich weit von den *E.2. α. Endpunkten der gegebnen Linie AB ab *. Mithin müssen sie in einer graden Linie liegen, welche auf *I.17 f.1 AB in ihrer Mitte senkrecht steht *. Da nun durch zwey Punkte nur eine einzige grade Linie möglich ist, so muss DE selbst dieses Perpendikel seyn, also die gegebne Linie AB durch DE im Punkte C halbirt werden.

Anmerkung. Die Construction, mittelst welcher Le Gendre diese Aufgabe auflöst, dient eigentlich unmittelbar und zunächst *über der gegebnen graden Linie AB zwey verschiedne gleichschenklige Dreyecke ABD, ABE zu bilden*, wie wir das schon *E.11.Z. oben gelehrt haben *. Man könnte die Auflösung daher auch so ausdrücken. Beschreibe über AB als Grundlinie zwey gleichschenklige Dreyecke, und verbinde ihre Spitzen durch die grade Linie DE, so muss diese die gegebne AB halbiren. Denn es entstehn alsdann zwey Dreyecke ADE, BDE, die sich decken, weil sie untereinander gleichseitig sind *. Mithin sind die Winkel bey D gleich, daher auch die Dreyecke ACD, DCB sich decken, und CD senkrecht auf AB, in der Mitte zwischen den Endpunkten A und B aufsteht. Diese Linie halbirt also den Winkel D, und die Linie AB, und ist zugleich ein Perpendikel auf die Linie AB, welches durch die bestimmten Punkte C in der Linie, D ausserhalb der Linie AB geht. Und zwar ist das der Fall, die Dreyecke mögen beyde auf einer oder auf entgegengesetzter Seite der Linie AB liegen. Dieses Perpendikel thut also den Aufgaben 1, 2, 3 und 5 (β) zugleich genüge, daher diese Aufgaben in das System nach I. 12 gehören. * I. 11.

d. U.

AUFGABE 2.

Auf eine grade Linie, durch einen in ihr gegebnen Punkt A, eine grade Linie senkrecht zu ziehn;

oder an einem gegebnen Punkt A einer graden Linie BC einen rechten Winkel zu bilden. Fig. 87.

Man nehme auf der gegebnen Linie zwey Punkte B und C, welche vom gegebnen Punkte A gleich weit entfernt sind *, und beschreibe um diese Punkte mit gleichen Halbmessern, grösser als AB, zwey Kreisbogen, die sich in irgend einem Punkte D schneiden *; so ist, wenn man AD zieht, dieses die gesuchte senkrechte Linie, und DAB ein rechter Winkel. *Fo.3.α *E.11.β.

Denn da der Punkt D gleich weit von B und von C absteht, so liegt er in einer graden Linie, welche

auf BC in der Mitte zwischen B und C, folglich im
*I.17 f.1 Punkte A senkrecht aufstehet *. Die Linie AD ist daher das gesuchte Perpendikel, und DAB der verlangte rechte Winkel.

[*Andere Auflösungen.* Man nehme ausserhalb der gegebnen Linie einen beliebigen Punkt C, und beschreibe mit CA als Halbmesser um C einen Kreis; so durchschneidet dieser die gegebne Linie in A und
*E.11.α. einem zweyten Punkte B *. Zieht man von B aus den Durchmesser BE, und dann EA, so ist EAB ein Win-
*23.Z.2. kel im Halbkreise, also ein rechter *, also EA das gesuchte Perpendikel.

Oder man beschreibe über einen beliebigen Theil AB, der gegebnen Linie, ein gleichschenkliges Dreyeck ACB, und nehme auf der Verlängerung von BC, CE = CB = CA. Zieht man EA, so ist EAB ein
*23.Z.2. f. 1. rechter Winkel * und EA das gesuchte Perpendikel.

Diese letztern Auflösungen sind besonders bequem, wenn das Perpendikel auf dem Endpunkt einer Linie, die sich nicht verlängern läfst, errichtet werden soll.

d. U.

AUFGABE 3.

Fig. 88. *Von einem ausserhalb einer graden Linie gegebnen Punkte A, ein Perpendikel auf diese Linie zu fällen.*

Aus A als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreisbogen, der die gegebne Linie in zwey Punkten B und D durchschneide, [welches allemal geschehn mufs, wenn man auf der andern Seite der graden Li-

nie BD einen Punkt E nimmt *, und den Kreisbogen * Gr. 8.
mit AE als Halbmesser beschreibt *.] Sucht man dann * E. 11. α.
den Punkt C, der zwischen B und D in der Mitte liegt *, * A, 1.
und zieht AC, so ist dieses das gesuchte Perpendikel.

Denn da sowohl A als auch C gleich weit von den Punkten B, D entfernt sind, so steht AC senkrecht auf BD, und zwar in der Mitte zwischen B und D *. * I. 17. f. 1

[*Eine andere Auflösung.* Um irgend einen Punkt B in der gegebnen Linie, beschreibe man mit dem Halbmesser BA einen Kreis, der jene Linie in F durchschneide, und um F mit FA als Halbmesser gleichfalls einen Kreis. Die grade Linie AE durch die Durchschnittspunkte beyder Kreise gezogen, ist das gesuchte Perpendikel *. * 20.

Zusatz. Auf eine ähnliche Art läst sich *ein Punkt* Fig. 89.
finden, der in der Verlängerung einer graden Linie AB liegt, die zu kurz ist, als dass man sie mittelst eines Lineals mit Sicherheit verlängern könnte. Man beschreibe um A und B mit gleichen Halbmessern Kreisbogen, die sich in C, D schneiden, und aus diesen Punkten mit einem hinlänglich grossen Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkte E schneiden, so ist E der gesuchte Punkt. Denn da sich alsdann sowohl die Dreyecke ABC, ABD, als auch ∠BEC, BED decken, so sind die Winkel CBA, CBE beyde Hälften des Winkels CBD, mithin gleich. Es fallen daher BA, BE in eine grade Linie zusammen, und E liegt in der Verlängerung von BA.

d. U.

AUFGABE 4.

Fig. 90. 1. *An einem Punkte A der graden Linie AB einen Winkel zu bilden, welcher einem gegebnen Winkel K gleich ist.*

[2. *Durch einen Punkt R ausserhalb AB, nach dieser Linie eine grade Linie so zu ziehn, dass sie die AB unter einem gegebnen Winkel K durchschneide.*]

1. Beschreibe um den Scheitelpunkt K mit einem willkührlichen Halbmesser einen Kreisbogen, der die beyden Schenkel des Winkels in I und L durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe um A als Mittelpunkt einen Kreisbogen BO; und dann auch mit der Sehne IL, als Halbmesser, um B einen Kreisbogen, der jenen in irgend einem Punkte D durchschneiden
*E.11.β. muss *. Zieht man AD, so ist *DAB* der gesuchte Winkel, dem gegebnen Winkel K gleich.

Denn da die beyden Kreisbogen IL, BD zu gleichen Halbmessern und gleichen Sehnen gehören, so
* 7. sind sie gleich *, also auch die Winkel BAD, IKL *. [Dieses erhellt auch unabhängig von dem angeführten Satze des zweyten Buchs. Durch die Construction entstehn nemlich zwey gleichschenklige Dreyecke ABD, KIL, welche untereinander gleichseitig sind,
* I. 11. folglich sich decken *, daher der Winkel A dem gegebnen Winkel K gleich wird.]

[*Eine andere Auflösung.* Nimm auf dem einen Schenkel des gegebnen Winkels K einen Punkt M, und mache AP gleich KM, errichte in P und M Perpendikel

auf diese Linien *, nimm MN = PQ und ziehe AQ, *Aufg. 2
so ist PAQ der gesuchte Winkel *.] *I. 6. f. 1.

[2. Um durch einen gegebnen Punkt R, ausserhalb der Linie AB, eine grade Linie nach AB unter einem gegebnen Winkel K zu ziehn, bilde man an einem beliebigen Punkt A dieser Linie, einen Winkel BAD = K und ziehe mit AD, durch den gegebnen Punkt R, parallel RS, so ist der Winkel RSA = DAB = K * und RS die gesuchte Linie.] *I. 25. A.

AUFGABE 5.

Einen gegebnen Kreisbogen oder einen gegebnen Fig. 91.
Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen.

1. Um den gegebnen *Kreisbogen* AB in zwey gleiche Theile zu theilen, beschreibe man mit gleichen Halbmessern um A und um B Kreisbogen, welche sich in einem Punkte D durchschneiden *. Zieht man durch *E. 11. β.
diesen Punkt und den Mittelpunkt C des Kreises, wozu der gegebne Bogen gehört, die grade Linie CD, so zerschneidet diese den Bogen in zwey gleiche Theile.

Denn da die Punkte C und D beyde gleich weit von den Endpunkten der Sehne AB entfernt sind, so steht die grade Linie CD auf der Sehne im ihrer Mitte senkrecht *, und theilt also den Bogen AB in zwey *I. 17. f. 1
gleiche Theile *. * 9.

2. Soll ein gegebner *Winkel* ACB in zwey gleiche Theile getheilt werden, so beschreibe man um seinen Scheitelpunkt einen Kreisbogen AB und halbire ihn auf die eben gezeigte Art, so wird CD auch jenen

9. Winkel halbiren *. [Eine andre Auflösung ist in der Anmerkung zur ersten Aufgabe enthalten.]

Zusatz I. Um einen Kreisbogen oder einen Winkel in vier, in acht, in sechzehn gleiche Theile u. s. f. zu theilen, braucht man mit diesem Halbiren nur fortzufahren. [Ueber die Theilung eines Winkels oder eines Bogens in irgend eine andere Anzahl von gleichen Theilen, z. B. in 3 oder 5 gleiche Theile, siehe Lehrsatz 30. Anmerkung.]

[Zusatz II. Da uns nichts hindert dieses Halbiren, wenigstens im Gedanken, so weit fortzusetzen als man will, so kann man durch dasselbe allemal auf einen Theil kommen, welcher in einer gegebnen Linie A nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als eine jede gegebne Linie B ist; und eben so auf einen Bogentheil, welcher in einem gegebnen Kreisbogen nach einer ganzen Zahl enthalten, und dabey kleiner als ein jeder gegebner Bogen ist.

d. U.

AUFGABE 6.

Fig. 92. *Durch einen Punkt A, der ausserhalb einer graden Linie BC gegeben ist, mit dieser graden Linie eine Parallellinie zu ziehn.*

Man beschreibe um A mit einem hinlänglich grossen Halbmesser einen Kreisbogen ED, welcher die gegebne Linie in E durchschneide. Mit demselben Halbmesser beschreibe man um E als Mittelpunkt den Kreisbogen

bogen AF, nehme ED gleich AF, und ziehe AD, so ist dieses die gesuchte Parallellinie.

Denn wenn man die grade Linie AE zieht, so sieht man, dass vermöge der Construction in der vorigen Aufgabe die Wechselswinkel AEF, EAD gleich, folglich die Linien BC, AD parallel sind *. *I.25.A.

[*Zweyte Auflösung.* Man ziehe durch den gegebnen Punkt A und irgend einen Punkt E der gegebnen Linie eine grade Linie EA, und bilde am Punkte A dieser Linie eine Winkel HAE, welcher dem äussern Winkel bey E, gleich ist *, so sind GH, BC, wegen der Gleichheit der äussern Winkel parallel *. Um auf die leichteste mechanische Art diese *Gleichheit* äusserer Winkel zu bewerkstelligen, *dient das deutsche Parallellineal* mit seinem materiellen unveränderlichen Winkel, den man längs der Linie AE verschiebt. * A. 4. *I.25.A.

Dritte Auflösung. Nimm in BC einen beliebigen Punkt F, und von diesem aus ein Stück FC gleich FA, beschreibe um C und A mit dieser Linie als Halbmesser Kreisbogen, die sich in einem Punkt D durchschneiden, und ziehe AD, so ist dieses die gesuchte Parallellinie. Denn in den sich deckenden gleichschenkligen Dreyecken AFC, ADC sind alle Winkel an der Grundlinie, mithin die Wechselswinkel für FC, AD gleich.

Vierte Auflösung. Beschreibe um einen willkührlichen Mittelpunkt eine Kreislinie, die durch den gegebnen Punkt A gehe und die gegebne Linie in den T. III. Fig. 85.

N

Punkten G und H schneide; nimm den Bogen HF gleich GA und ziehe die Sehne AF, so ist AF mit der gegeb-
* 13. nen Linie GH parallel *.]

AUFGABE 7.

Fig. 93. *Aus zwey gegebnen Winkeln A und B eines Dreyecks, den dritten Winkel zu finden.*

Man ziehe eine grade Linie DF in unbestimmter Länge, und bilde an einem Punkte E dieser Linie ei-
* A. 4. nen Winkel DEG = A und FEH = B *, so ist GEH der gesuchte Winkel, weil er mit den beyden übrigen
* I. 31. zusammengenommen zwey rechte Winkel bildet *. [So findet man also geometrisch, d. i. durch Construction, die Ergänzung zweyer Winkel zu zwey rechten, mithin zu zwey gegebnen Winkeln des Dreyecks den dritten.]

AUFGABE 8.

Fig. 94. *Wenn zwey Seiten A, B eines Dreyecks und der von ihnen eingeschlossne Winkel C gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

An irgend einem Punkte D einer unbestimmt gezognen graden Linie DE, bilde man einen Winkel
* A. 4. EDH, der dem gegebnen Winkel C gleich ist *. Auf
* Fo. 3. α. dessen Schenkel nimm DG = A, DH = B * und ziehe
* I. 6. GH, so ist DGH das gesuchte Dreyeck *.

AUFGABE 9.

Fig. 95. *Wenn eine Seite B und zwey Winkeln C und C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben.*

Liegen die gegebnen Winkel nicht beyde an der gegebnen Seite an, so suche man nach Aufgabe 7. den zweyten anliegenden Winkel. Dann nehme man auf einer unbestimmt gezognen graden Linie ein Stück DE der gegebnen Seite gleich, und bilde an den Punkten D, E zwey Winkel, den anliegenden Winkeln gleich *, so ist, wenn ihre Schenkel sich in einem Punkte H durchschneiden, DEH das gesuchte Dreyeck. * A. 4.

[Die Schenkel durchschneiden sich aber nur dann, wenn die Summe der beyden gegebnen Winkel weniger als zwey rechte Winkel beträgt *; daher dieses die *Bedingung* der Möglichkeit der Aufgabe ist. Wäre die Summe grösser als zwey rechte Winkel, so durchschneidet sich die entgegengesetzt liegende Verlängerung der beyden Schenkel *, und dann entstünde ein Dreyeck, worin die beyden Nebenwinkel der gegebnen Winkel, an der gegebnen Seite anliegen.] *I.23.24 * I. 24.

Anmerkung. Hier folgt bey Le Gendre die Aufgabe, *aus drey gegebnen graden Linien A, B, C ein Dreyeck zu beschreiben*, von welcher wir an einer schiklichern Stelle * schon umständlich gehandelt haben. *E. 11, Z

AUFGABE 10.

Wenn zwey Seiten A und B und der der Seite B gegenüberstehende Winkel C eines Dreyecks gegeben sind, das Dreyeck zu beschreiben. Fig. 96.

Man nehme auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels C, oder eines Winkels D welcher ihm gleich ist, DE = A, und beschreibe mit B als Halbmesser um den Punkt E einen Kreisbogen. Wenn dieser den andern Schenkel in einem Punkte F schneidet, so ist DEF das gesuchte Dreyeck.

Dieses Schneiden kann nur dann erfolgen, wenn die Linie B grösser als der senkrechte Abstand des
*I. 16. 1. Punkts E von dem andern Schenkel DF ist *, welches mithin die allgemeine *Bedingung* der Möglichkeit für diese Aufgabe abgiebt, die ohnedem unmöglich wird. Geschihet indess auch dieser Bedingung genüge, so muss, im Fall C, folglich auch D, ein *rechter* oder ein
*I. 16. 3. *stumpfer Winkel* ist, überdem B > A seyn*, wie es
* I. 14. auch die Natur des Dreyecks mit sich bringt *; sonst findet auch unter der erstern Bedingung kein Schneiden des Schenkels DF statt.

Fig. 97. Ist hingegen C, folglich auch D ein *spitzer Winkel*, so mag die Seite B, welche diesem Winkel gegenübersteht, grösser oder kleiner als A seyn, immer wird, wenn der erstern Bedingung genüge geschieht, der Schenkel DF vom Kreisbogen, der mit B als Halbmesser um den Punkt E beschrieben wird, durchschnit-
*I. 16. 8. ten, nur dass, *wenn die gegenüberstehende Seite B kleiner als*
u. Z. 2. *die anliegende A oder ED ist*, der um E beschriebene Kreis-
Fig. 98. bogen diesen Schenkel in *zwey* Punkten F und G, die
*II. 6. 2. zu einerley Seite des Scheitels D liegen *, durchschneidet, in welchem Fall wir *zwey Dreyecke* DEF, DEG bekommen, welche beyde gleichmässig der Aufgabe genüge thun.

[Wenn also ein Dreyeck durch zwey Seiten und einen der gegenüberstehenden Winkel bestimmt wird, so ist diese Bestimmung im letzten Fall *zweydeutig*.

Diese Zweydeutigkeit aber wird gehoben, wenn man zugleich anzeigt, ob das spitzwinklige oder das stumpfwinklige Dreyeck gemeint ist *.] * I. 20.

AUFGABE II.

Wenn ein Winkel C und zwey ihn einschliessende Seiten A und B eines Parallelogramms gegeben sind, das Parallelogramm zu beschreiben. Fig. 95.

Man nehme eine grade Linie DE gleich A, bilde am Punkte D einen Winkel EDF gleich dem gegebenen Winkel C, nehme auf dessen zweytem Schenkel das Stück DF gleich B, und beschreibe um den Punkt E mit dem Halbmesser DF = B, und um den Punkt F mit dem Halbmesser DE = A zwey Kreisbogen, die sich in einem Punkte G durchschneiden werden, weil die Summe ihrer Halbmesser grösser, und der Unterschied ihrer Halbmesser kleiner als der Abstand ihrer Mittelpunkte EF ist *. Zieht man dann FG, EG, so * I. 8. u. ist DEGF das gesuchte Parallelogramm. II. E. 11.

Denn vermöge der Construction sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, daher die vierseitige Figur ein Parallelogramm ist *; und zugleich * I. 34. ist es aus den gegebenen Stücken beschrieben.

Zusatz. Ist der gegebene Winkel spitz oder stumpf, so wird die Figur, wenn die gegebnen Seiten gleich sind, ein *Rohmbus* *, wenn sie ungleich sind, ein * I. E. 19. *Rhomboides.* Ist dagegen der gegebene Winkel ein rechter, so wird die Figur ein *Rechteck*, das, im Fall auch die Seiten gleich ſind, ein *Quadrat* wird; woraus alſo die Conſtruction und die Möglichkeit dieſer Arten von Vierecken erhellt.

AUFGABE 12.

Taf. III. F. 100. *Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreiſes, oder eines gegebenen Kreisbogens zu finden.*

Man nehme in der Kreislinie oder im Kreisbogen willkührlich drey Punkte A, B, C, verbinde ſie durch die graden Linien AB, BC, welche folglich Sehnen des gegebenen Kreiſes oder Bogens ſeyn müſſen, halbire dieſe Sehnen, und errichte auf ihrer Mitte die
*A. 1. 2. Perpendikel DE, FG *, welche ſich in einem Punkte O ſchneiden müſſen. Dieſer Punkt O iſt der geſuchte
* 10. Mittelpunkt *.

Zuſatz I. Mittelſt derſelben Conſtruction läſst ſich

1) *ein Kreis bilden, der durch drey gegebene Punkte A, B, C, oder durch zwey gegebene Punkte A, B geht,* [welches letztere eine unbeſtimmte Aufgabe iſt, die unendlich viel Auflöſungen zuläſst, indem jeder Punkt im Perpendikel DE der Mittelpunkt eines ſolchen Kreiſes, der durch die Punkte A und B geht, ſeyn
*I. 17. f. 3 kann *]

2) *Wenn ein Kreisbogen gegeben iſt, der ganze Kreis, wozu er gehört, vollenden*; und

3) *ein Kreis einem gegebenen Dreyeck ABC umſchreiben*, d. h. ſo bilden, daſs die Kreislinie durch die drey

Winkelpunkte des gegebenen Dreyecks geht *. [Ist in * E. 9.
dieser letztern Aufgabe das gegebne Dreyeck bey B
rechtwinklig, so ist ABC ein Halbkreis *, und folglich *23.Z.2.
liegt dann der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises *in der Hypotenuse* AC. Ist das Dreyeck bey B *stumpfwinklig*, so steht es in einem Kreisabschnitt, der kleiner als der Halbkreis ist *, und so fällt alsdann der *23.Z.3.
Mittelpunkt O *ausserhalb des Dreyecks*. Hat endlich das Dreyeck lauter spitze Winkel, so steht jeder die- F. 107.
ser Winkel in einem Kreisabschnitt, der grösser als der Halbkreis ist *, und der folglich den Mittelpunkt um- *23.Z.3.
schliesst. Der Mittelpunkt liegt dann also in dem Theil, der allen drey Kreisabschnitten gemein ist, d. i. *im Dreyeck* ABC.]

[Zusatz II. Liegen die drey gegebnen Punkte F. 101.
A, B, C, durch die ein Kreis gehn soll, so, dass die Perpendikel DE, FG sich in einer zu weiten Entfernung schneiden, als dass man den Halbmesser bequem fassen könnte, so kann man durch folgende *Methoden noch mehrere Punkte in der Kreislinie, welche durch A, B, und C geht, einzeln finden*. Verbinde die drey gegebenen Punkte durch grade Linien, ziehe durch einen derselben C, unter beliebigen Winkeln mit CB, grade Linien CD, CE etc., und unter denselben Winkeln mit AB, nach derselben Seite zu, grade Linien durch den Punkt A *, so liegen die Durchschnittspunkte D, * A. 4.
E etc. in der Kreislinie durch A, B, C. Denn die Winkel B, D, E sind insgesammt gleich, und sie umspannen alle die Sehne AC, daher ihre Spitzen in dem Kreisbogen durch A, B, C liegen *. — Oder man * 26.

ziehe durch C, unter Winkeln gleich BAC, dem kleinsten der beyden die an AB anliegen, mehrere grade Linien, CG, CH u. f., und schneide mit CB als Halbmesser, von A, G etc. aus, Punkte G, H etc. unter spitzen Winkeln ab, so liegen diese Punkte in der Kreislinie, die durch A, B, C geht. Denn da die Winkel BAC, ACG, GCH etc. in dem gesuchten Kreise gleiche Winkel am Umfange sind; so umfassen
* 7. sie gleiche Sehnen CB, AG, GH *, und da überdem die Sehnen CG, CH näher nach dem Mittelpunkte zu
* 8. liegen, müssen sie zunehmen *, folglich AGC, GHC
* I. 14. kleine stumpfe Winkel seyn *, daher G, H etc. nothwendig in der Kreislinie durch A, B, C liegen.]

[AUFGABE 13.]

Um einen gegebenen Mittelpunkt einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene grade Linie oder einen gegebenen Kreis berührt.

F. 102. 1. Fälle vom Mittelpunkt C ein Perpendikel auf die gegebene Linie HI, so berührt der Kreis, welcher mit diesem Perpendikel beschrieben ist, die gegebe-
* 12. ne Linie *.

Taf. II. Fig. 49. 2. Ziehe durch beyde Mittelpunkte eine grade Linie AB, so durchschneidet diese den gegebenen Kreis in zwey Punkten I, H und Kreise mit AI oder AH
* 16. als Halbmesser beschrieben, berühren den erstern *.

F. 102. Zusatz I. *Ist blos der Mittelpunkt C des Kreises gegeben, der die Linie AB berührt, und man sucht dessen*

Halbmesser und den Berührungspunkt, so ziehe man nach einem beliebigen Punkt A in der gegebenen Linie die grade Linie CA, halbire sie in O, und beschreibe mit OA um O einen Bogen. Wo dieser die AB durchschneidet, da ist der gesuchte Berührungspunkt B, und zieht man CB, so ist dieses der gesuchte Halbmesser. Denn ABC ist als Winkel im Halbkreis ein rechter *, mithin BA ein Perpendikel auf dem Halbmesser CB in dessen Endpunkte, also eine Tangente *. * 23. Z. 2. * 12.

Zusatz II. *Sucht man einen Kreis der die grade Linie AD im Punkte D berühret, und zugleich durch einen gegebenen Punkt E geht*, so ziehe man DE, halbire diese Linie im Punkte F, und errichte auf ihr in diesem Punkte, so auch auf AD im Punkte D, Perpendikel. Wo beyde Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises *. * 10.

Grade so findet man den Mittelpunkt eines Kreises, der durch einen gegebenen Punkt geht, und einen andern Kreis in einem gegebnen Punkte berührt.

Zusatz III. *Um einen Kreis zu finden der zwey gegebene Kreise berührt*, beschreibe man mit einem willkührlichen Halbmesser um den Mittelpunkt A des einen Kreises einen Kreisbogen, und um den Mittelpunkt B des zweyten der gegebnen Kreise ebenfalls einen Bogen, mit einem Halbmesser, der vom erstern um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebnen Kreise verschieden ist. Wo beyde Bogen sich schneiden, ist der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises. Denn die graden Linien welche von Taf. II. Fig. 48.

diesem Durchschnittspunkte, die eine durch A, die andre durch B bis an die Kreislinien gezogen werden, sind alsdann gleich lang, und ein Kreis mit diesen Linien als Halbmesser um den gefundnen Durchschnittspunkt beschrieben, berührt sowohl den einen als den andern Kreis, weil die Punkte, worin er mit ihnen zusammen trifft, in der graden Linie durch die Mittel-
* 16. f. 2. punkte liegen *.

Soll der Mittelpunkt des berührenden Kreises mit den Mittelpunkten A, B, der beyden andern in grader Linie liegen, so ziehe man durch die Mittelpunkte A, B der gegebnen Kreise eine grade Linie, welche die Kreise in den Punkten D, I, F, H schneide. In je zwey dieser Punkte aus verschiedenen Kreislinien kann die Berührung geschehn. Den Abstand dieser beyden Punkte halbire man, so erhält man den Mittelpunkt des dritten Kreises, der die gegebnen in diesen Punkten
* 16. berührt *.

Soll der dritte Kreis den Kreis um A in einem andern gegebnen Punkte berühren, so ziehe durch diesen Punkt einen Durchmesser, und beschreibe um B, mit einem Halbmesser der vom Halbmesser des Kreises um A, um den Unterschied der Halbmesser der beyden gegebnen Kreise verschieden ist, einen Kreisbogen; so ist der Durchschnitt dieses Bogens mit jenem Durchmesser der Mittelpunkt des gesuchten berührenden Kreises.

AUFGABE 14.

T. III. F. 102. *Durch einen gegebnen Punkt A eine Tangente an einen gegebnen Kreis zu ziehn.*

1. Liegt der gegebne Punkt A' *auf der Kreislinie*, so ziehe den Halbmesser CA', und errichte auf ihn in seinem Endpunkte die senkrechte Linie IH, so ist IH die gesuchte Tangente *. * 12.

2. Liegt der gegebne Punkt A *ausserhalb des Kreises*, so ziehe nach ihm aus dem Mittelpunkte eine grade Linie CA, theile diese in zwey gleiche Theile im Punkte O, und beschreibe um diesen mit dem Halbmesser OC einen Kreis, der, weil er durch den Mittelpunkt und einen Punkt ausserhalb des um C beschriebnen Kreises geht, diesen durchschneiden muss *, *.E.12.3 und zwar in zwey Punkten B, D, welche zu entgegengesetzten Seiten der Linie CA liegen, und von dem Durchschnittspunkte E derselben mit der Kreislinie, so auch vom Punkte A, gleichweit abstehn *. Zieht man * 19. AB, AD, so ist jede beyder Linien die gesuchte Tangente. — Denn zieht man die Halbmesser CB, CD, so sind die Winkel ABC, ADC, Winkel im Halbkreise, also rechte; folglich stehn AB, AD auf den Halbmessern CB, CD in ihren Endpunkten senkrecht, sind also Tangenten am gegebnen Kreise *. * 15. f. 4.

Zusatz. *Um an einem Kreise mit einer gegebnen Sehne parallel eine Tangente zu ziehn*, fälle man vom Mittelpunkte auf die Sehne ein Perpendikel, und ziehe an dem Punkte, wo dieses den Kreis durchschneidet eine Tangente, so läuft diese mit der gegebnen Sehne parallel *. * I. 21.

[AUFGABE 15.]

In einem gegebnen Kreise eine Sehne einzutragen, welche einer gegebnen Linie MN (kleiner als der F. 103.

Durchmesser) gleich ist, und 1) durch einen gegebnen Punkt P geht, oder 2) einer gegebnen graden Linie Q parallel läuft.

Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte A in der Kreislinie, mit der gegebnen Linie MN als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher den erstern Kreis in B durchschneide, und ziehe AB, so ist AB eine Sehne des gegebnen Kreises, von der verlangten Grösse MN. Zieht man auf die Mitte dieser Sehne, aus dem Mittelpunkte, die grade Linie CD, und beschreibt mit ihr als Halbmesser um C einen Kreis, so berührt dieser die grade Linie AB, welche auf dem Halbmesser in
*9f.1;12. dessen Endpunkte senkrech steht *.

1. An diesem Kreise ziehe man vom gegebnen
* A, 14. Punkte P aus eine Tangente PE *, so ist das Stück dieser berührenden Linie, welches innerhalb des erstern Kreises liegt, d. h. FG, die verlangte Sehne.

2. Vom Mittelpunkte fälle man auf die gegebne Linie Q ein Perpendikel, und ziehe durch den Punkt H, wo dieses den zweyten Kreis berührt, an diesem
* A. 14. Kreise eine Tangente *, so ist das Stück IK dieser Tangente, welches innerhalb jenes Kreises liegt, die verlangte Sehne.

Denn als Tangenten an dem innern Kreise, stehn beyde Sehnen FG, IK auf den Halbmessern CE, CH
* 12. senkrecht *, sind also beyde vom Mittelpunkte um den Halbmesser CD, folglich eben so weit als die Sehne AB entfernt, mithin dieser Sehne, und der gegebnen Li-
* 9. nie MN, gleich *. Die erstere geht aber durch den

Punkt P, die letztere ist zugleich mit Q auf CH senkrecht, also mit Q parallel *. * I. 21.

Sowohl für die erste als für die andre Aufgabe, giebt es in jedem Kreise zwey Sehnen, auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunkts, welche ihr genüge thun.

Zusatz. Mittelst dieser Auflösung ist man auch im Stande folgendes zu bewerkstelligen: 1. *Von einem gegebnen Punkte P ausserhalb eines Kreises, nach dem Kreise zwey grade Linien so zu ziehn, dass sie zwischen sich Bogen EF, GH abschneiden, welche zusammengenommen den Bogen zwischen den Schenkeln eines andern Winkels, dessen Spitze O ausser dem Kreise liegt, gleich sind.* F. 104.

Man ziehe nemlich nach dem eben gelehrten Verfahren, vom Punkte P aus die graden Linien PE, PF so, dass die Sehnen FH, EG, welche die Kreislinie auf ihnen abschneidet, den Sehnen AC, BD auf den Schenkeln des Winkels O gleich sind. Es gehören alsdann zu jenen und zu diesen Sehnen gleiche Bogen, deren Unterschiede, d. h. die Bogen AB + CD, und EF + GH auch gleich seyn müssen.

2. *Von einem gegebnen Punkte O in der Verlängerung einer Sehne AC an, eine grade Linie so zu ziehn, dass die Bogen zwischen ihm und dieser Sehne, einem gegebnen Bogen AE gleich sind.* Ziehe zwischen den gegebnen Punkten C und E die Sehne CE, und eine zweyte Sehne BD so, dass sie verlängert durch den gegebnen Punkt O gehe, und der erstern CE gleich sey *; so ist dieses die gesuchte grade Linie. Denn wegen Gleichheit der Sehnen sind die Bogen CA + AE, *14. (2)

und DC + CA + AB gleich, mithin die Bogen AE
*Gr. 2. β = DC + BA *.

Anmerkung. Aufgabe und Zusatz entlehne ich, doch mit verkürzten Beweisen aus Gregor von St. Vincenz.

d. U.

AUFGABE 16.

F. 105. *Ueber eine gegebne grade Linie AB einen Kreisabschnitt zu beschreiben, welcher einen gegebnen Winkel C fasst, (d. h wo jeder in diesem Kreisabschnitt*
* E. 7. *eingeschriebne Winkel, dem Winkel C gleich ist *.)*

Man verlängere die gegebne Linie AB, und bilde am Punkte B und der Verlängerung BD, einen Winkel DBE, dem gegebnen Winkel C gleich. Auf dem Schenkel BE errichte man im Punkte B ein Perpendikel, so auch auf der gegebenen Linie AB in deren Mitte, und beschreibe aus dem Durchschnittspunkt O beyder Perpendikel als Mittelpunkt, mit OB als Halbmesser einen Kreis, so erhält man den gesuchten Kreisabschnitt AMB.

Denn BE ist, als ein Perpendikel auf dem Halbmesser OB in dessen Endpunkt B, eine Tangente des
* 12. Kreises im Punkte B *, und wird im Berührungpunkte von der Sehne AB durchschnitten. Folglich hat der Winkel ABF, mithin auch dessen Scheitelwinkel DBE,
* 25. zu seinem Maasse den halben Bogen BKA *, und ist jedem Winkel im Kreisabschnitte AMB, der zur ent-
* 25. f. gegengesetzten Seite der Sehne liegt, gleich. Nun ist aber DBE der Construction gemäss dem gegebnen Winkel C gleich; also der Kreisabschnitt AMD der Gesuch-

te, indem er über der Linie AB steht, und den Winkel C fasst.

[Anmerkung. Wäre der gegebne Winkel C ein *rechter*, so fiele das Perpendikel BO mit der Sehne AB zusammen, und es gäbe keinen Durchschnittspunkt O. Dann aber wissen wir ohnedem dass der gesuchte Kreisabschnitt, der über AB beschriebene Halbkreis ist. Mehrere Aufgaben, welche diese begründet, erwähnt Lehrsatz 26. Folg. Um in einem gegebnen Kreise einen Abschnitt zu bilden welcher einen gegebnen Winkel fasst, verfährt man grade auf dieselbe Art.]

[*Eine andere Auflösung.* Errichte auf dem einen Schenkel CG des gegebnen Winkels C, im Scheitelpunkte, ein Perpendikel CI, und ziehe an den Endpunkten A, B der gegebnen Linie, unter dem Winkel ICH, zwey Linien AO, BO, und zwar, wenn der gegebne Winkel stumpf ist, unterhalb, wenn er spitz ist, oberhalb der Linie AB. Ein Kreisbogen, um ihren Durchschnittspunkt O beschrieben, bildet den verlangten Kreisabschnitt AMB.

Denn der Winkel O am Mittelpunkte ist nach der Construction gleich 2R — 2ICH *. Folglich ist im zweyten Fall jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB halb so gross *, d. h. gleich R — ICH, und also dem gegebnen Winkel C gleich. Im ersten Fall ist jeder Winkel im Kreisabschnitt AMB der halben Ergänzung dieses Winkels zu vier rechten, d. h. R + ICH, also auch dem gegebnen Winkel C gleich.]

* I. 31.

* 23.

[Zusatz. *Es sind drey Punkte A, B, C gegeben, die so liegen, dass der Mittelpunkt des Kreises der durch sie geht, zu weit abliegt, als dass man ihn nach Aufgabe 12* F. 106.

darstellen könnte; aus einem derselben A, eine grade Linie zu ziehn, welche nach dem Mittelpunkte dieses Kreises zu läuft.

Verbinde die drey Punkte durch grade Linien, und ziehe durch A die grade Linie AD, unter einem Winkel BAD, welcher dem Winkel an dem gegenüber-liegenden Punkte C gleich ist; so ist ein Perpendikel auf AB im Punkte A, die gesuchte Linie. — Denn der Winkel C ist in dem erwähnten Kreise ein Winkel am Umfange, der den halben Bogen AB zum Maafs hat. Dieser ist folglich auch das Maafs des Winkels BAD, mithin mufs, da BA eine Sehne ist, AD eine Tangen-
* 24. Z. te des Kreises im Punkte A seyn *, also das Perpendikel AM nach dem Mittelpunkte des Kreises
* 12. laufen *.]

[AUFGABE 17.]

Ein Dreyeck, welches mit einem gegebnen Dreyeck
F. 107. *PQR gleichwinklig ist, 1) in einen gegebenen Kreis einzuschreiben, und 2) um einen gegebenen Kreis zu umschreiben.*

1. Nach dem Punkte A der Kreislinie, welcher einer der Winkelpunkte des einzuschreibenden Dreyecks werden soll, ziehe den Halbmesser OA, und trage den Winkel Q zweymal neben einander am Punkte
*Aufg. 4 O dieser Linie *. Durchschneidet der dritte Schenkel den Kreis in B, so ziehe AB und mache den Winkel ABC gleich P, so ist, wenn man AC zieht, ABC das verlangte Dreyeck, welches mit dem gegebenen PQR gleich-

gleichwinklig ist. Denn der Winkel C ist gleich der Hälfte des Winkels AOB *, folglich gleich Q. Da auch B gleich P ist, so müssen die dritten Winkel R, A ebenfalls gleich *, also beyde Dreyecke unter einander gleichwinklig seyn. * 23. *I.31 f.1

Eine andere Auflösung. Ziehe durch A eine Tangente GH an dem gegebnen Kreise *, und mache am Punkte A den Winkel GAC gleich P, den Winkel HAB gleich Q, und ziehe BC, so ist ABC das gesuchte Dreyeck. Denn die Winkel, welche die Tangente mit den beyden Sehnen, die durch den Berührungspunkt gehn, bildet, sind den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Abschnitten gleich *, also B = GAC = P und C = HAB = Q, und folglich ist das eingeschriebene Dreyeck ABC mit dem gegebenen PQR gleichwinklig. A. 14. * 25.

2. Verlängere eine Seite PQ des gegebenen Dreyecks, und mache DOE = RQS und DOF = RPT. Durch D, E und F ziehe man Tangenten an dem gegebnen Kreise, so bilden diese das gesuchte Dreyeck ABC, welches dem Kreise *umschrieben*, und mit dem gegebenen PQR gleichwinklig ist. — Denn da bey D, E, F rechte Winkel sind, so sind die einander gegenüberstehenden Winkel in den Vierecken EDOE und ADOF in jedem zusammengenommen zwey rechten Winkel gleich *. Folglich B gleich dem Nebenwinkeln von RQS, d. h. gleich Q, und A gleich dem Nebenwinkel von RPT, d. h. gleich P. Mithin ist * I. 32.

das umschriebene mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklig.

AUFGABE 18.

Einen Kreis, 1) in ein gegebnes Dreyeck ABC einzuschreiben; 2) um ein gegebnes Dreyeck zu umschreiben.

F. 108. 1. Theile zwey der Winkel des Dreyecks, A, B, durch die graden Linien AO, BO, welche sich in ei-
* I. 24. nem Punkte O schneiden müssen *, in zwey gleiche Theile; fälle vom Punkte O auf eine der Seiten des Dreyecks ein Perpendikel OD, und beschreibe mit OD als Halbmesser, um O als Mittelpunk, einen Kreis; so ist dieser der gesuchte, in dem Dreyeck ABC eingeschriebene Kreis.

Der so gefundene Punkt O steht nemlich von allen Seiten des gegebnen Dreyecks gleich weit ab, indem die Perpendikel auf die Seiten des Dreyecks, OD, OE und so auch OD, OF, gleich sind. Denn sie sind Katheten in rechtwinkligen Dreyecken ODB, OEB und ODA, OFA, wovon die ersten, so wie die letzten, sich wegen Gleichheit der Hypothenusen und eines der
*I. 18. f. 2 spitzen Winkel decken *. Die drey Fusspunkte der Perpendikel, D, E, F liegen also im Umfange der Kreislinie, welche um O mit dem Halbmesser OD be-
*E. 2. γ. schrieben ist *. Diese Kreislinie berührt folglich die
* 12. drey Seiten des Dreyecks ABC *, und ist daher in
* E. 10. dem gegebenen Dreyeck eingeschrieben *.

2. Die Methode einen Kreis um ein gegebenes Dreyeck zu beschreiben, steht in Aufgabe 12.

[Zusatz I. Zieht man noch CO, so decken sich auch die beyden rechtwinkligen Dreyecke COE, COF, daher die Linie CO den Winkel C ebenfalls halbirt. Folglich *durchschneiden sich die graden Linien, welche die Winkel eines Dreyecks halbiren, alle drey in einem Punkte*, und zwar in dem Punkte, welcher von allen drey Seiten gleich weit entfernt ist, und deshalb *einem Kreise, der dem Dreyeck eingeschrieben wird, zum Mittelpunkte dient*. Diese Linien zertheilen das ganze Dreyeck in drey kleinere Dreyecke, wovon ein jedes über eine Seite des Grössern als Grundlinie steht, und worin die Perpendikel aus den Spitzen auf die Grundlinien gleich sind.]

[Zusatz II. Die Seiten des Dreyecks werden durch diese Perpendikel so zerschnitten, dass 1) an jedem *Winkelpunkte gleiche Stücke anliegen*, und 2) *jedes abgeschnittene Stück sammt der gegenüberliegenden Seite dem halben Umfang des Dreyecks gleich ist*. Das erstere folgt aus der bewiesenen Deckung der kleinen rechtwinkligen Dreyecke, und hieraus wiederum die zweyte Behauptung. Denn bezeichnet man den *halben Umfang des Dreyecks* mit S, so ist S = AD + BE + CF, und setzt man in diesem Ausdruck der Folge nach, statt der darin vorkommenden Linien, das Stück an demselben Durchschnittspunkt, welches ihr gleich ist, so erhält man für den *halben Umfang* S eines Dreyecks, folgende Ausdrücke:

$$S = AD + BE + EC = AD + BC = AF + BC$$
$$S = AF + BE + CF = BE + AC = BD + AC$$
$$S = AD + BD + CF = CF + AB = CE + AB$$

Und daraus laſſen ſich umgekehrt wieder Ausdrücke für die Gröſse der abgeſchnittenen Stücke ableiten, welche uns in der Folge von Nutzen ſeyn werden.

$$AD = AF = S - BC$$
$$BE = BD = S - AC$$
$$CF = CE = S - AB.$$

Fig. 78. [Zuſatz III. Vergleicht man die Lage des hier betrachteten Durchſchnittspunkts (O) dreyer grader Linien, welche *die Winkel eines Dreyecks halbiren*, mit der Lage des gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkts (C) *dreyer Perpendikel*, welche auf der Mitte jeder der drey Seiten eines Dreyecks errichtet ſind*, oder was daſſelbe ſagt, die Lage der *Mittelpunkte* des dem Dreyeck *eingeſchriebenen*, und des *umſchriebnen Kreiſes*; und mit dieſen *drittens* den Punkt (P), worin die Perpendikel welche aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberſtehende Seiten gefällt ſind, alle drey ſich durchſchneiden *, und *viertens* den Punkt (S), worin, wie wir in den folgenden Büchern ſehn werden, die drey graden Linien, die aus den Winkelpunkten nach den Punkten in der Mitte der gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, ſich durchſchneiden, (den Schwerpunkt des Dreyecks); ſo erhält man folgende intereſſanten Sätze. 1) *Im gleichſchenkligen Dreyeck liegen dieſe vier Punkte in einer graden Linie, und zwar im Perpendikel, welches aus der Spitze des Dreyecks auf die Grundlinie gefällt wird.* Denn dieſes Perpendikel halbirt zu-

* 10.

*24 Z. 2.

gleich den Winkel an der Spitze und die gegenüberstehende Grundlinie *. 2) *Im gleichseitigen Dreyeck fallen diese Punkte alle vier in einem Punkt zusammen.* Denn jedes Perpendikel, welches aus einem Winkelpunkte auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird, halbirt im gleichseitigen Dreyeck diese Seite und den Winkel an der Spitze *. *I.17.f.2 *I.17 f.1

3) *In keinem ungleichseitigen Dreyeck liegen diese Punkte alle vier in grader Linie.* Denn sonst müsste eins der Perpendikel, welche aus den Winkelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gefällt werden, zugleich diese Seite und den Winkel an der Spitze halbiren, da das Dreyeck denn nothwendig gleichschenklig wäre.

4) *Der erste O, und der vierte S, dieser Durchschnittspunkte* (der Mittelpunkt des eingeschriebnen Kreises, und der Schwerpunkt) *liegen bey jedem Dreyecke innerhalb desselben;* der *zweyte, C', und dritte, P,* aber (der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, und der Durchschnittspunkt der Perpendikel aus den Spitzen) *liegen in spitzwinkligen Dreyecken innerhalb, in stumpfwinkligen ausserhalb des Dreyecks* und* in *rechtwinkligen*, jener auf der Hypotenuse, dieser in der Spitze des rechten Winkels.] *A.12.Z 1; I.16 Z.2.f 2.

Anmerkung. Ueber die Lage dieser *vier merkwürdigen Punkte* bey jedem Dreyeck, hat *L. Euler* eine interessante algebraische Untersuchung angestellt, *(Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum* in den Nov. Comment Ac. Sc. Petropol. ad. A. 1765) in welcher er den sehr netten Satz darthut, *dass in jedem Dreyeck drey dieser Punkte, nemlich C', P und S in grader Linie liegen*, und zwar so, dass immer S zwischen C' und P liegt, und PS das Doppelte von C'S, oder

PS = 2. C'S ist, wie man dieses auch in unserer Figur wahrnimmt. Hat man also zwey dieser Punkte, so findet man den dritten durch eine sehr leichte Construction. Auch lehrt *Euler* in dieser Abhandlung, wie man, wenn die drey Punkte O, P, S gegeben sind, aus der Lage dieser drey Punkte das Dreyeck ABC finden kann, welches von der Auflösung einer Cubischen Gleichung abhängt, deren drey Wurzeln die Zahlausdrücke für die Seiten dieses Dreyecks sind.

d. U

AUFGABE 19.

F. 109. *Das Verhältniſs zweyer grader Linien AB, CD, welche gegeben sind, in Zahlen auszudrücken, oder das Zahlverhältniſs dieser Linien zu finden.*

Trage auf die gröſsere Linie AB, die kleinere CD
*Fo.3.α so oft stetig nebeneinander, als es angeht *, wir wollen setzen zweymal. Wird jene durch diese nicht genau gemessen, so bleibt ein Stück BE, kleiner als CD, übrig.

Trage ferner auf CD diesen Rest BE wieder so oft stetig nebeneinander, als es angeht, in unserm Fall einmal, da denn aufs neue ein Rest DF bleibt, der kleiner als BE ist.

Trage diesen zweyten Rest DF wieder auf den ersten BE so oft es angeht nebeneinander, in unserm Fall einmal, wobey der Rest BG bleibt.

Trage diesen dritten Rest BG wieder auf den zweyten DF so oft es angeht nebeneinander, und so fahre fort.

[Bey diesem Verfahren kömmt man nun entweder zuletzt auf einen Rest, der den vorhergehenden *genau* *misst*, oder man *erreicht nie einen solchen Rest*, so lange man auch fortfährt, welches letztere, wie wir im folgenden Buche sehn werden, allerdings bey gewissen Linien der Fall ist.

Erster Fall. Kömmt man endlich auf einen Rest der den vorhergehenden genau misst, und folglich in ihm nach irgend einer ganzen Zahl enthalten ist, *so ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maass der beyden gegebnen Linien AB, CD.* Sieht man ihn als Einheit an, so lassen sich alle vorhergehenden Reste, mithin AB, CD selbst, in Beziehung auf ihn als *Zahlen* ausdrücken, woraus sich denn das *Zahlverhältniss* der beyden gegebnen Linien AB, CD findet. Und zwar ist dieser letzte Rest *das grösste gemeinschaftliche Maass* der beyden gegebnen Linien, und daher ihr so gefundnes Zahlverhältniss sogleich *in kleinsten Zahlen* (in Primzahlen unter sich) ausgedrückt.]

Denn gesetzt in unserm Beyspiele sey BG jener letzte Rest, welcher den vorhergehenden DF genau misst, und zwar sey BG genau zweymal in FD enthalten, so ist, wenn man *BG* zur Einheit nimmt, also $BG = 1$ setzt, $FD = 2$; ferner, da FD und BG zusammengenommen gleich EB sind, ist $EB = 1.2 + 1 = 3$; und da wieder EB und FD zusammengenommen gleich CD sind, ist $CD = 1.3 + 2 = 5$, und da endlich zwey CD und BE zusammengenommen gleich AB sind, so ist $AB = 2.5 + 3 = 13$. Folglich lassen sich alsdann die beyden gegebnen Linien AB, CD, in Beziehung auf BG als Einheit, durch die Zahlen 13 und 5 ausdrücken; in beyden ist BG nach ganzen Zahlen enthalten, in AB 13 mal, in CD 5 mal, und dieser letzte Rest ist mithin für beyde gegebne Linien ein gemeinschaftliches Maafs.

Er ist aber auch *ihr gröfstes gemeinschaftliches Maafs.* Denn wer dieses leugnen wollte, müfste behaupten irgend eine grade Linie M > BG könnte ein gemeinschaftliches Maafs der beyden gegebnen Linien AB und CD seyn. Nun aber wird ein Theil der Linie AB, nemlich AE, von CD gemessen (AE = 2.CD), folglich müste auch der Unterschied von AB und AE, d. h. EB, und da EB = CF ist, auch CF von der Linie M gemessen werden. Wird aber CD und zugleich das Stück derselben CF von M gemessen, so mufs nothwendig auch das zweyte Stück FD = EG von M gemessen werden, und da das wieder eben so bey EB und dem Stück EG der Fall ist, so mufs auch ihr Unterschied GB von M genau gemessen werden, folglich M *entweder gleich* oder *kleiner* als BG seyn, welches der Voraussetzung dafs M > BG sey widerspricht. Es ist also kein gröfseres gemeinschaftliches Maafs beyder Linien AB, CD möglich, als der so gefundne letzte Rest BG, dieser mithin ihr gröfstes gemeinschaftliches Maafs.

Aus diesem Beweise erhellet zugleich, 1) *dafs jede Linie M, welche zwey gegebne grade Linien AB, CD genau misst, auch ihr gröfstes gemeinschaftliches Maafs* GB *genau messen müsse.* — 2) Dafs *die beyden Zahlausdrücke* der gegebnen Linien AB, CD, welche auf diese Art gefunden werden (13 und 5) keinen gemeinschaftlichen Factor haben können, also *Primzahlen unter sich* *ſind*, und *das Verhältniſs beyder Linien in kleinſten Zahlen* 13 : 5 *ausdrücken*.]

Dieſes Zahlverhältniſs ſagt aus, daſs die beyden Linien grade ſo wie dieſe beyden Zahlen aus einander entſtehn, und daſs folglich, wenn AB in 13 gleiche Theile getheilt wird, 5 ſolcher Theile die Linie CD ausmachen. Nähme man daher nicht BG ſondern AB zur Lineareinheit, ſezte alſo AB = 1, ſo müſte CD durch den Bruch $\frac{5}{13}$ ausgedrückt werden, indem dann CD 5 ſolchen Theilen, wovon in der Lineareinheit 13 gleiche enthalten ſind, gleich ſeyn würde. Und ſezte man umgekehrt CD = 1 ſo wäre AB durch die Zahl $\frac{13}{5}$ auszudrücken.

[*Zweyter Fall. Kömmt man auf keinen Reſt der den nächſt vorhergehenden genau miſst*, man mag das angegebne Verfahren ſo weit fortſetzen als man nur immer will, *ſo giebt es für die beyden gegebnen Linien AB, CD kein gemeinſchaftliches Maaſs*, d. h. keine Linie die ſelbſt, oder deren noch ſo kleine Theile, in beyden Linien zugleich genau enthalten wären, und beyde ſind alſo *incommenſurabel*; wovon wir im folgenden Buche ein Beyſpiel an dem Verhältniſſe zwiſchen der Seite und der Diagonale eines Quadrats werden kennen lernen. Da alsdann beyde Linien ſich nicht auf einerley Einheit beziehn, nicht durch einerley Einheit, oder noch ſo kleine Theile derſelben, ſich ausdrücken laſſen; *ſo giebt es kein Zahlverhältniſs, wodurch ein ſolches incommenſurables Verhältniſs ſich völlig ausdrücken lieſse.* Vernachläſſigt man aber den letzten Reſt und nimmt z. B., wenn BG in dem vorhergehenden Reſt FD zwar nicht genau, aber doch beynahe zweymal enthalten ist, an, es sey genau FD = 2 BG; so findet man ein Zahlverhältniss, welches von dem incommensurablen nur um wenig abweicht, und das sich demselben um so mehr nähert, je weiter man auf dem angegebnen Wege fortgeschritten ist, und je weiter der vernachlässigte Rest hinaus fällt; so dass man in diesem Fall wenigstens ein Zahlverhältniss findet, welches dem Verhältniss der incommensurablen Linien so nahe kömmt als man nur immer will, und das sich demselben ohne alles Ende nähern lässt, wiewohl es dasselbe nie erreichen, nie völlig erschöpfen kann.]

[Zusatz I. Dieser Satz begründet *die Methoden grade Linien* unmittelbar *zu messen*, und sich *über das Verhältniss zweyer grader Linien völlig ins Klare zu bringen.* Dieses ist man nur dann, wenn man weiss, wie oft die eine Linie die andere, oder einen bestimmten Theil derselben, in sich enthält, wenn man also das Zahlverhältniss beyder kennt, und um dieses zu erforschen muss man die eine Linie mit der andern, oder mit einem Theil derselben, als Einheit vergleichen; grade darin besteht aber *das Messen.* Dieses kann man *entweder* auf die Art, welche hier gelehrt ist, bewerkstelligen, indem man Rest auf Rest nebeneinander trägt; *oder* man hat einen *Maassstab* d. h. eine grade Linie, welche nach irgend einer Lineareinheit und deren Theilen, so klein als man sie zur jedesmaligen Absicht nöthig hat, eingetheilt ist (z. B. nach Zollen und Decimal- und Centesimaltheilen des Zolls.) Trägt man die gegebne zu messende Linie auf den Maafsstab auf, so sieht man sogleich wie viel dieser Lineareinheiten und deren Theile sie enthält, z. B. 8,25, erhält also auf diese Art mit gröfster Leichtigkeit den *Zahlausdruck* der gegebnen Linie in Beziehung auf die angenommne Lineareinheit des Maafsstabs. Verfährt man eben so mit der zweyten Linie, so findet man auch ihren Zahlausdruck in Beziehung auf dieselbe Lineareinheit, z. B. 14,75 und dann ist das *Zalverhältnifs* der beyden gegebnen Linien 8,25 : 14,75 oder 33 : 59.]

[Zufatz II. Gesetzt wir sehn die gröfsere der beyden gegebnen Linien AB, CD als Lineareinheit an, setzen also AB = 1, so ist der Zahlausdruck von CD, d. h. $\frac{CD}{AB}$, ein ächter Bruch, der in unserm Fall, wo AB die Linie CD zweymal und noch das Stück EB in sich enthält, gleich ist, $\frac{CD}{2CD+EB} = \frac{1}{2+\frac{EB}{CD}}$, indem der Bruchwerth unverändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch einerley Gröfse dividirt werden. Nun aber war CD = EB + FD, EB = FD + GB und FD = 2 GB, also ist $\frac{EB}{CD} = \frac{EB}{EB+FD} = \frac{1}{1+\frac{FD}{EB}}$; $\frac{FD}{EB} = \frac{FD}{FD+GB} = \frac{1}{1+\frac{GB}{FD}}$ und $\frac{GB}{FD} = \frac{1}{2}$. Diese Werthe der Folge nach in den erstern Ausdruck gesetzt, geben

$$CD = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} \cdot AB \text{ (oder } CD = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}}} \cdot AB$$

wenn überhaupt $AB = m \,.\, CD + EB$, $CD = n \,.\, EB + FD$, $EB = p \,.\, FD + GB$ und $FD = q \,.\, GB$ ist;) so daſs also auf diesem Wege die eine Linie in Beziehung auf die andre als Einheit, durch einen *Stuffenbruch* ausgedrückt wird, dessen Werth sich entweder aus der Lehre von der Addition und Division der Brüche in jedem Fall finden, oder durch eine allgemeine algebraische Formel darstellen, und nach ihr berechnen läſst. Und zwar ist diese Formel folgende $CD = \frac{(1 + pq) . n + q}{(1 + pq)(1 + mn + mq)}$, wie man leicht findet, wenn man den Werth des Bruchs Stuffenweise vom untersten an, den Regeln der Bruchrechnung gemäſs entwickelt,

z. B. $p + \frac{1}{q} = \frac{pq + 1}{q}$, $\cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}} = \cfrac{1}{\cfrac{pq+1}{q}} = \frac{q}{pq+1}$

u. s. f. So berechnet ist der Werth unsers Stuffenbruchs, $CD = \frac{5}{13} . AB$, wie oben. Wenn bey zwey Linien sich darthun liesse, daſs dieser Stuffenbruch, der die eine in Beziehung auf die andre als Lineareinheit ausdrückt, ins Unendliche fortliefe; so wäre dadurch, dem zweyten Fall gemäſs, *die Incommensurabilität der beyden gegebnen Linien* dargethan. Beyspiele davon, werden wir im folgenden finden.]

Anmerkung. Schon *Euklid* lehrt durch die Methode des *ersten Falls das gröste gemeinschaftliche Maafs zweyer grader Linien* oder auch zweyer *Zahlen finden*, ersteres gleich zu Anfang des *zehnten Buchs*, welches von der *Incommensurabilität ausgedehnter Gröfsen handelt*, (Satz 3) letzteres an der Spitze des ersten seiner drey arithmetischen Bücher (Buch VII. Satz 2), wo überhaupt die ersten Sätze, den ersten Sätzen des zehnten Buchs parallel laufen, (und von denen *Clavius* meint, Euklid habe diese Bücher blos zum Behuf des zehnten Buchs seinen Elementen einverleibt.) Ferner zeigt er, dafs um *dreyer Linien* (X. 4.) oder dreyer *Zahlen* (VII. 3.) *gröfstes gemeinschaftliches Maafs zu finden*, man dieses zuerst für zwey derselben, und dann aufs neue für ihr gefundenes Maafs und für die dritte Linie oder Zahl suchen müsse. Endlich beweist er auch, dafs wenn unser *zweyter Fall* eintritt, beyde Linien *incommensurabel* seyn müssen (X. 2), und dafs, wenn man die Methode auf zwey gegebne *Zahlen* überträgt, und man kömmt bey ihnen auf keinen Rest, gröfser als die Einheit, der in dem nächst vorhergehenden Reste genau aufgeht, bey solchen Zahlen etwas Aehnliches statt findet; indem sie dann Primzahlen unter sich sind, und keinen gröfsern gemeinschaftlichen Factor als die Einheit selbst haben (VII. 1.)

Die fernern Sätze Euklids, dafs *commensurable Gröfsen sich wie Zahlen, incommensurable* Gröfsen hingegen *nicht wie Zahlen verhalten*, und dafs umgekehrt alle Gröfsen für die sich ein genaues Zahlverhältnifs finden läfst, *incommensurabel* seyn müssen, (X. 5-8. und VII. 4) sind unmittelbare Folgerungen aus unserm Beweise. Und aus diesen Sätzen fliefst wiederum, das *zwey incommensurable Gröfsen* mit jeder dritten beyde zugleich commensurabel oder incommensurabel sind, und eine mit ihnen commensurable Summe haben, und umgekehrt; dafs hingegen, wenn von *zwey commensurablen Gröfsen* die eine mit einer dritten commensurabel ist, die andre mit ihr incommensurabel seyn mufs, und dafs beyde mit ihrer Summe incommensurabel sind, und umgekehrt (X. 12 - 17.)

Diese Sätze dienen *Euklid* jedoch nur zu einer Art von Einleitung in die Materie, welche den eigentlichen Gegenstand des *zehnten Buchs* ausmacht, nemlich in die *Untersuchung über die Abhängigkeit, welche zwischen der Commensurabilität und Incommensurabilität von Rechtecken oder Quadraten und deren Seiten statt findet.* Diese Untersuchung, die Euklid zur Theorie der regulären Körper braucht, stellt er zwar mit grossem Scharfsinn, aber auf einem ganz geometrischen Wege an, auf welchem sie so weitläufig und schwierig wird, dass man dieses Buch mit Recht für das schwerste in den Elementen hält, und dass *Wolf* behauptet „es sey so dunkel, dass ein Anfänger unmöglich das geringste davon verstehn könne". Seitdem man in der neuern Mathematik in den *Wurzelgrössen* ein Mittel gefunden hat, incommensurable Grössen arithmetisch darzustellen, und sie als sogenannte *Irrationalzahlen* mit unter die Zahlbegriffe aufzunehmen, stehn uns weit einfachere und leichtere Methoden zu Geboth, das, was wir von dieser Untersuchung brauchen können, arithmetisch zu entwickeln und zu erörtern, ohne dass wir der grossen Menge von Distinctionen zwischen irrationalen Linien verschiedner Art, des Heers von Kunstwörtern welche diese Materie bey Euklid besonders erschweren, und des zehnten Theils der Sätze die bey Euklid vorkommen, von Nöthen hätten; eine Erleichterung die besonders daher rührt, dass wir, statt Rechtecke und Quadrate aus commensurablen und incommensurablen Linien, die Producte aus rationalen und irrationalen Zahlen betrachten *.

* III. 4. An. 1.

Euklid lehrt wie man zu jeder gegebnen Linie 13 verschiedne Arten von irrationalen Linien darstellen kann, die er insgesammt genauer untersucht, und mit besondern abschreckenden Kunstwörtern bezeichnet, (z. B. nach Lorenz Uebersetzung: *Mediale, Binomiale, erste und zweyte Bimediale, grössere und kleinere Irrationale, Apotome, erste und zweyte Medialapotome, des Rationalen und Medialen Quadratseite, die zwey Mediale Gebende etc.* (X. 112), und zeigt, wie ausser diesen 13, (die sich nach unsrer Art insgesammt aus Rationalzahlen, Quadrat- und Biquadratwurzeln ausdrücken und zusammensetzen lassen) „noch unzählige andre Irrationalli-

nien entstehn, die mit keiner unter jenen einerley sind" (X. 116.) (die nemlich auf Wurzeln vom 8ten, 16ten und fernern Graden beruhen. Der letzte Satz in diesem Buche thut dies Incommensurabilität zwischen der Seite und dem Durchmesser eines Quadrats dar. Irrationallinien (ein Ausdruck, den schon Euklid hat) welche sich auf Wurzeln von andern Graden als dem 2ten, 4ten, 8ten u. s. f. beziehn, (die man also weder durch einmaliger noch durch wiederholter Darstellung einer mittleren Proportionallinie, sondern nur durch Auffindung zweyer mittlerer Proportionallinien, u. s. f., also nur auf Wegen, welche der Elementargeometrie unzugänglich sind *, findet,) erwähnt Euklid mit keinem Wort. *III242
Seine Untersuchung ist also sehr eingeschränkt, statt dass wir durch die arithmetischen Begriffe sie sogleich ganz allgemein führen können. Ueberdem hat Euklids Vortrag noch das Unangenehme, dass er, wie überhaupt die Alten, *nur ganze Zahlen kennt*, und unter seinen Zahlbegriffen keinen für Brüche aufnimmt, so dass wir seine Worte nicht in den uns geläufigern Sinn nehmen dürfen (denn nach diesem sagten manche Sätze offenbare Falschheiten aus), sondern erst in *seine* Begriffe von Zahlen übersetzen müssen. Alles das trägt dazu bey, dieses Buch für uns überflüssig und ungeniessbar zu machen. Ueberhaupt ist die Materie in der Geometrie nur für die Art, wie Euklid die Theorie der regelmässigen Körper behandelt, von Wichtigkeit; was uns davon unentbehrlich ist, findet man theils hier, theils in der Folge dieses Werks. Dem allen ungeachtet, ist folgendes Urtheil sehr ungerecht, welches der bekannte *Peter Ramus* in seinen Scholiis Mathematicis (lib. 21, p. 252.) über diese Arbeit Euklids fällt: „*Materies decimo libro proposita, eo modo est tradita, ut in humanis literis atque artibus similem obscuritatem nusquam deprehenderim, obscuritatem dico; non ad intelligendum, quid praecipiat Euklides; — — sed ad perspiciendum penitus et explorandum, quis finis et usus sit operi propositus*, (die Theorie der regulären Körper,) *quae genera, species, differentiae sint rerum subjectarum*, (Euklid verweilt sich umständlich dabey die Verschiedenheit aller jener Irrationallinien ins

Klare zu setzen) *nihil enim unquam tam confusum vel involutum legi vel audivi.* Andere preisen es dagegen als ein Meisterstück beharrlichen Tiefsinns, und das *mit* Recht, gehört es auch für uns nur zu den blossen Schaustücken, und zu den veralteten Rüstzeugen im Zeughause der Wissenschaft. d. U]

AUFGABE 20.

F. 110. *Wenn zwey Winkel A, B gegeben sind, ihr gemeinschaftliches Maass, und daraus ihr Zahlverhältniss zu finden.*

Man beschreibe mit gleichem Halbmesser um die Scheitelpunkte beyder Winkel Kreisbogen CD, EF, so
* 22. Z. sind diese das Maass beyder Winkel *. Mit diesen beyden Kreisbogen verfahre man so, wie in der vorigen Aufgabe mit den beyden graden Linien; und das ist immer möglich, da Kreisbogen, die mit gleichem Halbmesser beschrieben sind, gehörig gelegt sich de-
* 1. cken, also ineinander fallen *, und sich mittelst ihrer Sehnen einer auf dem andern stetig nebeneinander legen
* 7. lassen *. Auf diese Art findet man sogleich das *grösste gemeinschaftliche Maass* OD beyder Bogen, *wenn es eins giebt*, und ihr Verhältniss in den kleinsten Zahlen
* A. 14. Fall 1. ausgedrückt *. Dieses ist zugleich das Verhältniss der beyden gegebenen Winkel A, B, die sich stets wie
* 22. jene Bogen verhalten *. Der Winkel OAD, dessen Schenkel das gemeinschaftliche Maass beyder Bogen umspannen, ist zugleich das grösste gemeinschaftliche Maass dieser beyden Winkel.

Haben die beyden Bogen CD, EF, die man auf diese Art mit einander vergleicht, *kein* gemeinschaftliches

ches Maaſs *, ſo ſind ſie, und die Winkel A, B deren Schenkel dieſe Bogen umſpannen, incommenſurabel, und dann giebt es *kein Zahlverhältniſs*, welches dem Verhältniſs dieſer Bogen, und dieſer Winkel völlig entſpräche. Allein man findet dann, wie in der vorigen Aufgabe, Zahlverhältniſſe, die ſich ihrem wahren (irrationalen) Verhältniſſe immer mehr und ohne Gränze nähern, je weiter man das angegebene Verfahren fortgeſetzt hat; folglich Zahlverhältniſſe, die man zum Gebrauch ſtatt des irrationalen Verhältniſſes ſetzen kann. * A. 19. Fall 2.

[Zuſatz. *Um den unmittelbaren Zahlausdruck eines gegebenen Winkels in Theilen des rechten Winkels*, als dem feſtgeſetzten Maaſse alle Winkel *zu finden*, braucht man nur auf dieſe Art das gemeinſamme Maaſs und das Zahlverhältniſs zwiſchen dem Bogen, der den gegebenen Winkel miſst, und der Kreislinie, oder dem Quadranten, aufzuſuchen. Geſetzt man findet ſo das Zahlverhältniſs des Bogens und der Kreislinie $3:25$, alſo des Bogens und des Quadranten $3:\frac{25}{4}$, ſo iſt der Winkel $\frac{25}{3}$ von vier rechten, oder $\frac{25}{12}$ eines rechten Winkels, läſst ſich alſo durch den Bruch $\frac{25}{12}$ ausdrücken, in ſo fern wir den rechten Winkel zum allgemeinen Maaſs, zur Einheit der Winkelgröſsen, machen. Oder nimmt man den neunzigſten Theil des rechten Winkels, d. h. einen *Grad*, und deſſen Sexageſimaltheile zum allgemeinen Maaſs, oder zur Einheit der Winkel *, ſo läſst ſich jener Bogen durch die Zahl $\frac{25}{12}\cdot 90$ Grade $= 187 + \frac{1}{2}$ Grad $= 187^\circ\ 30'$ ausdrü- *22.Z.3.

cken. Eben ſo der Bogen den er umſpannt in Bogengraden. Dabey muſs man ſich denken, der *Winkel* enthält 187 Winkeleinheiten und 30 Sechzigtheile derſelben, der Bogen 187 Bogeneinheiten und 30 Sechzigtheile derſelben; ein Ausdruck welchem alſo immer das Zahlverhältniſs des Winkels zum rechten, und des Bogens zu Kreislinie, zum Grunde liegt, wie wir das
*22.Z.3. umſtändlich erläutert haben *.

Geſetzt der gegebene Bogen B ſey in dem *Halbkreiſe m* (4) mal enthalten, meſſe ihn aber nicht genau, ſondern es bleibe ein Stück übrig, welches in dem Bogen B ſelbſt *n* (2) mal enthalten ſey, und einen Reſt laſſe, der in dem vorigen Reſte, *p* (3) mal enthalten ſey, ſammt einem Bogenſtück, welches wiederum von dieſem Reſte der *qte* (3te) Theil ſey; ſo iſt nach dem Zuſatz der vorigen Aufgabe, B =

$$\frac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q}}}} \cdot \text{Halbkr.} = \frac{(1+pq).n+q}{(1+pq)(1+mn+mq)} \cdot 180^\circ$$

$$= \frac{10 \cdot 2+3}{10 \cdot 25} \cdot 180^\circ = \frac{23 \cdot 180^\circ}{250} = \frac{414^\circ}{25} = 16^\circ\ 31'\ 36''.$$

Dieſes artige *Verfahren, Winkel lediglich mit Hülfe des Zirkels zu meſſen*, trägt ſchon *Lagny* in den *Memoires de l' Acad. des Sc. de Paris A.* 1724. *p.* 250 vor.

DRITTES BUCH.

DER INHALT GRADELINIGER FIGUREN.

[Dieses Buch beschäftigt sich mit Untersuchungen über den Inhalt der gradelinigen Figuren, worauf sich alles Ausmessen und Ausrechnen dieser Figuren gründet, und mit Vergleichungen des Inhalts von Figuren, besonders von Rechtecken und Quadraten, welche über Linien von einer gewissen Eintheilung, oder über Seiten bestimmter Figuren, oder über *Linien im Kreise* beschrieben sind; Vergleichungen aus denen sich nicht nur manche interessante Eigenschaft dieser Figuren und des Kreises ergiebt, sondern die auch für die folgenden Materien von großer Wichtigkeit sind. Le Gendre trägt überdem im dritten Buch die Lehre von der Aehnlichkeit der Flächenräume vor; allein da beyde Materien durch meine Bearbeitung noch mehr als die in den vorigen Büchern (bis zum Dreyfachen und Vierfachen) angeschwollen sind; so verweise ich die letzte Materie ganz in das vierte Buch. Im Ganzen konnte ich zwar *hier* die Ordnung Le Gendres beybehalten, (nur dafs er die Sätze über den Kreis welche am Ende dieses Buchs stehn, und von denen bey ihm nur ein Paar vorkommen) aus der Lehre von der Aehnlichkeit ableitet; allein sein Vortrag ist so mangelhaft, so voller Lücken, und übergeht so viele wichtige und zur feinern Kenntniss der Geometrie unentbehrliche Sätze, die zwar in Compendien, aber in keinem vollständigen Lehrbegriff der Wissenschaft fehlen dürfen, dass ich dieses Buch gröfstentheils habe umschmelzen müssen. Um indess nicht die Gleichförmigkeit der Behandlung zu stören, werde ich die Rolle des Ueberſetzers beybehalten, und was mir allein gehört, wie in den vorigen Büchern noch ferner mit dieſem Zeichen [ ] umklammern

Gilbert.

Erklärungen.

1.

Taf. III. [Die *Höhe einer Figur* wird durch den Abſtand zweyer Parallellinien beſtimmt, wovon die eine durch irgend eine Seite der Figur (*ihre Grundlinie*) die andere durch den Punkt, oder durch die Punkte, der Figur geht, die am weiteſten von dieſer Linie entfernt ſind. *Die Höhe einer Figur wird mithin durch das Perpendikel gegeben, welches man aus einem jener Punkte auf die Grundlinie oder deren Verlängerung fällt* *.

* I. 16. f. 1 u. 27.

α) Sind alſo *zwey Figuren* ſo beſchaffen, daſs, wenn man ihre Grundlinien in grader Linie ſtellt, ihre Spitzen, oder ihre der Grundlinie gegenüberſtehende Seiten, in derſelben Parellellinie fallen, ſo haben ſie *gleiche Höhe*.

β) Umgekehrt laſſen Figuren von gleicher Höhe ſich immer zwiſchen einerley Parallellinien ſo legen, daſs ihre Grundlinien in die eine, ihre Spitzen oder höchſten Seiten in die andre fallen.

Wendet man dieſe Sätze insbeſondere auf das Dreyeck und auf das Parallelogramm an, ſo ergeben ſich daraus die folgenden Erklärungen.]

2.

Nimmt man irgend eine Seite AB eines *Dreyecks* Fig. 1.
ABC zur Grundlinie an *, so ist das Perpendikel CD, *I. E. 18.
welches aus der *Spitze*, das heißt aus dem gegenüberstehenden Winkelpunkt C, auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällt wird, die *Höhe des Dreyecks.*

[α) Legt man die Grundlinien zweyer Dreyecke in grader Linie, und zieht durch ihre Spitzen eine grade Linie, so sind *beyde Dreyecke von gleicher oder ungleicher Höhe, je nachdem diese Linie mit der Grundlinie parallel läuft, oder nicht* *. *E. I. α.

β) Ist im *rechtwinkligen Dreyeck* die eine Kathete Grundlinie, so stellt die andere die Höhe dar.]

3.

Nimmt man eine Seite eines *Parallelogramms*
ABEC, z. B. AB zur *Grundlinie* *, so wird der Abstand * E. 1.
der gegenüberstehenden Seite CE von dieser Grundlinie, (mithin das Perpendikel CD oder EF zwischen diesen beyden parallelen Seiten oder deren Verlängerung) die *Höhe des Parallelogramms* genannt. Eben
so ist die *Höhe eines Trapezoid* * das Perpen- *I. E. 19.
dikel EF zwischen den beyden parallelen Seiten des- Fig. 14.
selben, deren eine man stets für die Grundlinie annimmt.

[Legt man die Grundlinien zweyer Parallelogramme Fig. 6.
in grader Linie, so liegen, ist die Höhe dieser Parallelogramme gleich, die gegenüberstehenden Seiten

auch in grader Linie, und zwar in einer graden Linie, welche mit der erstern parallel läuft; und ist umgekehrt dieses bey zwey Parallelogrammen der Fall, so haben sie gleiche Höhe. Wo nicht so ist ihre Höhe ungleich.]

4.

Fig. 2. [In jedem *Rechteck* ABCD stellen zwey an einander liegende Seiten z.B. AB, BC die *Grundlinie* und *die Höhe* dar; denn je zwey Seiten desselben stehn
*I.E.19. aufeinander senkrecht *. Im gleichseitigen Rechteck, d. h. im *Quadrat* stellt also jede Seite zugleich
* I. 34. A. 2. Grundlinie und Höhe dar. — Dem im ersten Buch * erklärten Kunstausdruck zu folge, ist also *jedes Rechteck aus seiner Grundlinie und Höhe beschrieben*, unter seiner Grundlinie und Höhe enthalten.

α) Rechtecke aus gleicher Grundlinie und gleicher Höhe beschrieben decken sich, und haben gleichen In-
* I. 34 A. 3. halt *. *Sind also die Gurndlinien AB, EF und die Höhen BC, FG zweyer Rechtecke gleich, so ist es auch der Inhalt, und sie decken sich.*

Fig. 3. β) Eben so *haben Quadrate über gleiche Linien AB, EF beschrieben, gleichen Inhalt.*

γ) *Haben* umgekehrt *zwey Quadrate gleichen Inhalt, so haben sie auch gleiche Seiten und decken sich.* Denn da sie beyde rechtwinklig sind, so kann man sie so aufeinander legen, daſs zwey Seiten auf einander fallen. Wären nun die Seiten ungleich, wie z. B. AB, AK so wäre das eine Quadrat über AK = EFGH, nur ein

Theil des andern ACDE, und alſo wären beyde nicht gleich, gegen die Vorausſetzung.

[d. U.]

5.

[α) *Rechtecke von gleicher Höhe haben zuſammengenommen gleichen Inhalt mit einem Rechteck AG von derſelben Höhe AB, deſſen Grundlinie AH allen ihren Grundlinien zuſammengenommen gleich iſt.* Fig. 2.

Denn jene Rechtecke decken ſich zuſammengenommen mit dieſem einen Rechteck, weil ſich deſſen Grundlinie AH aus den Grundlinien jener Rechtecke, z. B. aus AD, DE, EH, der Vorausſetzung gemäſs zuſammenſetzen läſst. Errichtet man nemlich Perpendikel auf AH durch D und E, ſo theilen dieſe das Rechteck AG, in kleinere AC, DF, EG *, welche mit *II.A.11 den gegebnen gleiche Grundlinien und Höhen haben, ſich alſo mit ihnen decken *, daher auch das ganze * 4. α. Rechteck AG ſich mit ihnen zuſammengenommen deckt, und folglich mit ihnen gleichen Inhalt hat.

β) Beſteht überdem die zweyte Seite eines Rechtecks aus mehreren Abſchnitten AI, IB etc, und man errichtet auch auf ihr in den Theilpunkten Perpendikel IM etc., ſo laufen auch dieſe mit dem Seiten AH, BG, parallel *, durchſchneiden die parallelen Linien * I. 21. DC, EF, HG insgeſammt rechtwinklig * und zertheijen deshalb jedes der vorigen Rechtecke AC, DF, EG *I.25.f.1 in kleinere Rechtecke *, welche die Abſchnitte der Seite AB zur Grundlinie, und die erſtern AD, die zwey- *I.E.19.

* I. 34 ten DE etc. zur gemeinschaftlichen Höhe haben*; daher *das Rechteck aus zwey graden Linien AB, AH, die beyde aus mehreren Abschnitten bestehn, gleichen Inhalt hat mit allen den Rechtecken zusammengenommen, welche aus je zwey Abschnitten der einen und der andern beschrieben sind.*

γ) Aus denselben Gründen ist *der Unterschied zweyer Rechtecke von gleicher Höhe* AF, AC einem Rechteck DF von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie ED dem Unterschiede ihrer Grundlinien AC, AD gleich ist.

Fig. 4. δ) Und *besteht eine grade Linie AB aus zwey Theilen AC, CD, so sind die Rechtecke aus der ganzen Linie und jedem der beyden Theile*, d. h. Rechteck aus AB', AC und Rechteck aus AB', CB, mit dem Rechteck aus AB', und (AC + CB') d. h. mit dem Rechteck aus AB' und AB, also *mit dem Quadrat aus der ganzen Linie AB, von gleichem Inhalt.*

Fig. 5. ε) Hingegen ist *das Rechteck aus einer Linie AB, die aus den beyden Theilen AC, CB besteht, und aus einem der beyden Theile*, z. B. aus AC, gleich dem Rechteck aus AC', CB und dem Rechteck aus AC', AC, d. h. *gleich dem Rechteck aus den beyden Theilen AC, CB, sammt dem Quadrat des Theiles AC.*

Ist umgekehrt die Ergänzung eines Rechtecks CC', welches über einem Abschnitt AC einer graden Linie steht, zum (gleich hohen) Rechteck über der ganzen Linie ein Quadrat; so ist das erstere Rechteck aus den beyden Abschnitten AC, CB der gegebnen Linie beschrieben. (Euklid Lemma zu X. 18.)

Anmerkung. Die Sätze unter α, δ, ε machen die drey erſten Lehrſätze in *Euklids* zweytem Buch aus, wo ſie mit umſtändlichern Beweiſen, als es nöthig war, verſehen ſind. *Le Gendre* übergeht ſie und die Sätze unter 4 ganz und gar, und das ſehr mit Unrecht, da ſie die Fundamentalſätze über die Vergleichung des Inhalts gradeliniger Figuren enthalten. Ihrer groſsen Einfachheit wegen, habe ich ſie hierher, und nicht unter die Lehrſätze geſtellt. Daſs man ſie mit einer kleinen Modification auf alle Parallelogramme übertragen könne, ſieht jeder. Sie ſind den einfachſten Sätzen der Buchſtabenrechnung analog, und wir werden in den Zuſätzen zum vierten Lehrſatze zeigen, in wie fern ſie auf dieſe hinauslaufen; nemlich die in *Erklärung* 4, auf die Sätze, daſs, falls $a = c$ und $b = d$ iſt, $ab = cd$ und $a^2 = c^2$, und umgekehrt, wenn $a^2 = c^2$, auch $a = c$ ſeyn muſs. Die in *Erklärung* 5 hingegen auf die Sätze, daſs $ab + ac + ad \ldots = a\ (b + c + d \ldots)$; ferner $ab - ac = a\ (b - c)$; und falls $a = b + c$ iſt, $a^2 = ab + ac$ und $ac = bc + c^2$; und daſs endlich $(a + b + c \ldots)(e + f \ldots) = ae + be + ce + af + bf + cf \ldots$ iſt. d. U.]

6.

[*Erklärung über die Verhältniſſe und Proportionen zwiſchen ausgedehnten Gröſsen, und über dem wahren Sinn eines Produkts aus Linien.*

Wir haben in den beyden letzten Aufgaben des zweyten Buchs Methoden kennen gelernt, *wie ſich jedes Verhältniſs zwiſchen zwey Linien, zwey Kreisbogen, oder zwiſchen zwey Winkeln, auf ein gleichgeltendes Zahlverhältniſs bringen läſst.* Da nun ein Verhältniſs, z. B. zwiſchen zwey Linien A, B, auf der Vorſtellung beruht, wie oft die eine A, oder ein beſtimmter Theil derſelben, in der andern B enthalten iſt *, alſo auf * V. 1.

Vorstellung durch einen Zahlausdruck, (der nach
II A.16 Fall 2. Umständen selbst irrational seyn kann); so sieht man leicht *dass es jenes Zahlverhältniss ist, an dass man sich halten muss, wenn man über Verhältnisse und Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen, sich richtige Begriffe machen will.*

Darauf macht auch Le Gendre aufmerksam, als auf etwas, das zur Einsicht in den wahren Sinn der folgenden Sätze sehr wichtig ist. „Bey allen Veränderungen, sagt er, die man in diesem und dem folgenden Buche mit Proportionen zwischen ausgedehnten Grössen vornimmt, muss man stets die Glieder dieser Proportionen *als Zahlen* betrachten, deren jede sich auf ihre eigenthümliche Einheit bezieht. Thut man das, so wird man bey keinem dieser Verfahren, und bey keiner Folgerung die wir daraus ziehn, anstossen."

Bey jeder richtigen Proportion A : B = C : D ist, wie bekannt, das Produkt der äussern Glieder A . D dem Produkt der innern Glieder B . C gleich. Das muss also auch der Fall seyn, wenn diese proportionalen Grössen alle vier Linien oder A und B Linien, C und D Flächen, oder andre Ausdehnungen sind, *vorausgesetzt* dass man sich beyde Verhältnisse in gleichgeltende Zahlverhältnisse verwandelt denkt. So kömmt man dann auf *Produkte aus Linien* oder auf *Produkte aus Linien in Flächen* u. d. m., doch *immer nur unter der Voraussetzung, dass die Linien, Flächen u. s. durch Zahlen ausgedrückt sind*, indem man sie auf ein bestimmtes Maass als Einheit bezieht. Ausser dieser Rücksicht hätten jene Begriffe keinen Sinn. *Das Produkt aus zwey Li-*

nien A und D ist also nichts anders als ein *Zahlprodukt*, und zwar das Produkt aus den Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in A und wie viel deren in B enthalten sind.

Eben so ist *das Produkt aus einer Linie A in eine Fläche B* nichts anders als das Produkt der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten in A und wie viel Flächeneinheiten in B enthalten sind, u. s. f.]

Anmerkung. Die wichtigsten arithmetischen Sätze über Verhältnisse und Proportionen, sind *Buch I. Erkl. 23* beysammen gestellt, und man wird sich mittelst ihrer leicht helfen können, wenn man bey einer arithmetischen Vorstellung über die Verhältnisse in den folgenden Sätzen anstoßen sollte. Ich verweise auf sie auch hier *durch das Marginal V*, z. B. V. 4. α, worunter man einen der Sätze über die Verhältnisse zu verstehn hat, die B. I. Erkl. 23. unter 4, α aufgestellt sind. Welchen? das wird jeder leicht herausfinden. d. U.

7.

[*Die Seiten zweyer Figuren*, z. B. die Seiten AB, AD und AF, AE der beyden Rechtecke von gleichem Inhalt ABCD, AFGE, *sind verkehrt proportional*, wenn sie in einer solchen Abhängigkeit von einander stehn, dass in eben dem Verhältniss als die eine Seite der einen Figur gegen die eine Seite der andern grösser ist, z. B. AB gegen AF, die zweyte Seite der ersten Figur, AD, gegen die zweyte Seite AE der andern kleiner ist, oder dass, wenn $AB = m \cdot AF$ ist, $AD = \frac{1}{m} \cdot AE$ seyn muss. Fig. 10.

Dann verhält ſich aber allemal AB : AF = AE : AD (indem die ſo geſtellten Verhältniſſe alsdann beyde
* V. 2. gleiche Exponenten m haben *) und mithin gehören dann die Vorderglieder, ſo wie die Hinterglieder der beyden gleichen Verhältniſſe, als Seiten zu verſchiednen Figuren.

Grade ſo können *die beyden Abſchnitte zweyer zweytheiligen Linien verkehrt proportional* ſeyn.

Anmerkung. Dieſer Begriff iſt in der Arithmetik current und wird in der hier erklärten Bedeutung auch ſchon von Euklid gebraucht, wiewohl von ihm ſo wenig als von Le Gendre und den übrigen Geometern beſonders erklärt. Eben ſo mangeln bey ihnen die fruchtbaren Begriffe der folgenden Erklärung, die gleichfalls aus arithmetiſchem Boden herſtammen. d. U.]

8.

[*Zwey grade Linien ſind proportional getheilt*, wenn in der einen die Theile nach demſelben Verhältniſs und in derſelben Anzahl und Folge wie in der andern vor-
Fig. 15. handen ſind. So z. B. die beyden *zweytheiligen Linien* AB, AC, in deren jeder die beyden Theile in gleichem Verhältniſs unter ſich und zur ganzen Linie ſtehn, (AD : DB : AB = AE : EC : AC); oder die beyden
Fig. 16. *dreytheiligen Linien* AB, AC, in deren jeder die drey Theile in gleichem Verhältniſs unter ſich und zur ganzen Linie, und zwar in beyden in derſelben Folge, gedacht werden (Ab : bD : DB : AB = Ac : cE : EC : AC)

α) Ueberhaupt nennt man die erſten Theile zweyer eingetheilten Linien, und die, welche von den erſten um gleich viel Stellen abſtehn, alſo die zweyten, dritten u. ſ. f. *übereinſtimmende Theile*, und eben ſo die Gränzpunkte beyder Linien, und die welche von ihnen um gleich viel Stellen abſtehn, *übereinſtimmende Theilpunkte.* β) Dieſe liegen entweder in *gleicher* Folge, oder in *verkehrter* (*entgegengeſetzter*) *Folge* wie z. B. wenn man in der einen Linie die Theilpunkte von der Linken zur Rechten, in der andern von der Rechten zur Linken zählt. γ) Zwey grade Linien ſind alſo unſerer Erklärung zu Folge proportional getheilt, wenn die übereinſtimmenden Theile in der einen daſſelbe Verhältniſs untereinander und zur ganzen Linie, als in der andern haben. δ) Liegen die übereinſtimmenden Theile in verkehrter Folge, ſo pflegt man auch wohl zu ſagen, daſs zwey ſolche Linien *in entgegengeſetzter Folge proportional* ſind.

Anmerkung. Ein Zeichen wie dieſes $a : b : c = d : e : f$ ſagt aus, daſs je zwey der Gröſsen links vom Gleichheitszeichen unter einander daſſelbe Verhältniſs haben, als die beyden Gröſsen die rechts vom Gleichheitszeichen in denſelben Stellen ſtehn, z. B. die erſten und zweyten, die erſten und dritten und die zweyten und dritten. Die obigen eingeklammerten Zeichen charakteriſiren alſo die proportionalen Eintheilungen zweyer Linien ſehr gut. In ſo fern eine Proportion in der Gleichheit zweyer Verhältniſſe beſteht, ſind in dieſen Zeichen eine Menge Proportionen eingewickelt, von denen man die herausheben kann, die man zu der jedesmaligen Abſicht braucht.

Da ferner die erſten Gröſsen a, d in den zweyten b, e, und eben ſo in den dritten c, f, u. ſ. beyde (dem Begriff der Gleichheit unter Verhältniſſen gemäſs) gleich oft, ganz oder Theilweiſe, enthalten ſind, und z. B. wenn $b = ma$ und $c = na$ iſt, auch $e = md$ und $f = nd$ ſeyn muſs; ſo ſtehn dann auch die erſten Glie-

der, die zweyten Glieder, u. f. untereinander in demfelben Verhältnifs a : d = b : c = e : f etc; und ift das der Fall, fo find auch die Summen zweyer, dreyer oder aller übereinftimmender Glieder links vom Gleichheitszeichen und rechts von diefem
*V. 4. 7. Zeichen in demfelben Verhältnifs *.

α) Diefes auf proportionale Linien angewandt, fieht man alfo dafs in ihnen je zwey übereinftimmende Theile in gleichem Verhältnifs ftehn, und fo auch die Summe je zweyer, dreyer, kurz beliebig vieler, und folglich auch die Summe aller, d. h. die ganzen Linien; ein Satz den ich der Anwendung halber gleich mit in die Erklärung proportional getheilter Linien aufgenommen habe.

β) Sind umgekehrt zwey Linien AB, AC fo eingetheilt, dafs je zwey übereinftimmende Theile in demfelben Verhältnifs ftehn, Ab : Ac = bD : cE = DB : EC, fo find fie proportional getheilt. Denn dann verhalten fich die Vorderglieder aller diefer Verhältniffe zu einander, wie die Hinterglieder, und das macht das Wefen einer proportionalen Theilung aus. d. U.]

LEHRSATZ I.

Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

Fig. 6. [Man lege beyde Parallelogramme fo aufeinander, dafs ihre Grundlinien fich decken. Dann ftehn beyde über der gemeinfchaftlichen Grundlinie AB, und weil fie gleiche Höhe haben, fallen die Seiten DC, FE, welche der AB gegenüberftehn, in einerley Parallel-
* E. 3. linien mit der Grundlinie AB *. Und zwar liegen fie

entweder ganz auseinander, oder fallen zum Theil aufeinander, welche Fälle die Figur beyde darſtellt.]

In jedem der beyden Parallelogramme ſind die gegenüberſtehenden Seiten gleich; AD = BC, AF = BE und DC = AB = FE; und da auch das gleich ſeyn muſs, was übrig bleibt, wenn man die gleichen Linien DC, FE beyde von der Linie DE abzieht, ſo iſt auch CE = DF *. Mithin ſind die beyden Dreyecke ADF, BCE untereinander gleichſeitig, müſſen ſich alſo decken *, und haben gleichen Inhalt; daher auch ihr Unterſchied vom Trapez ABED gleich ſeyn muſs. Zieht man aber von dieſem Trapez das Dreyeck ADF ab, ſo bleibt das Parallelogramm ABCD, und zieht man das Dreyeck BCE ab, ſo bleibt das Parallelogramm ABED übrig. Folglich haben dieſe beyden Parallelogramme, weil ihre Grundlinien und ihre Höhen gleich ſind, auch gleichen Inhalt. *Gr. 2. 3 * I. 11.

Folgerung 1. *Jedes Parallelogramm ABED, hat alſo insbeſondre gleichen Inhalt mit einem Rehteck CEFD, welches mit demſelben von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe iſt.* Fig. 1.

Folgerung 2. Haben zwey Parallelogramme gleiche Höhe, aber ungleiche Grundlinie, ſo iſt das das Gröſsere, welches über der gröſsern Grundlinie ſteht. Denn ein Theil deſſelben, iſt dann dem erſtern gleich.

[Anmerkung. Dieſer Lehrſatz läſst ſich auch auf *Trapezoide* von gleicher Höhe *, deren parallele Seiten in beyden gleich ſind, ausdehnen, und für dieſe grade auf dieſelbe Art beweiſen.] * E. 3.

LEHRSATZ 2.

Fig. 1. *Der Inhalt eines Dreyecks ABC, ist halb so grofs als der Inhalt eines Parallelogramms, welches mit dem Dreyecke gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.*

[Man ziehe durch zwey Winkelpunkte des Dreyecks B, C Parallellinien mit den gegenüberstehenden Seiten, CE parallel mit AB, und BE parallel mit AC, so entsteht ein Parallelogramm ABEC, welches mit dem Dreyeck ABC einerley Grundlinie AB, und gleiche Höhe hat, da beyde zwischen denselben Pa-
* E. 1. rallellinien AB, CE liegen *. In diesem Parallelogramm ist BC eine Diagonale. Also sind die Drey-
* I. 34. ecke ABC, BCE gleich *, und mithin das Dreyeck ABC die Hälfte des Parallelogramm ABEC. Da aber mit diesem Parallelogramm ein jedes andere von gleicher Höhe und gleicher Grundlinie gleichen Inhalt hat, so gilt unser Satz allgemein.]

Folgerung. 1. *Der Inhalt eines Dreyecks ABC ist also ins besondre halb so grofs als der Inhalt eines Rechtecks CDFE, welches mit Dreyeck gleiche Grundlinie AB und gleiche Höhe CD hat.*

[*Folgerung* 2. *Alle Dreyecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.* Denn sie sind die Hälften von Parallelogrammen, die nach Lehrs. 1. gleichen Inhalt haben müssen.

[Zusatz. *Haben umgekehrt zwey Dreyecke ABC, DBC gleiche Grundlinie und gleichen Inhalt, so haben sie* und *auch gleiche Höhe.* Denn gesetzt sie hätten ungleiche, und zwar ABC die grössere Höhe, so nehme man in einem der Schenkel des höhern einen Punkt G, der so weit, als im andern Dreyeck die Spitze, von der Grundlinie absteht, und ziehe von demselben nach dem gegenüberstehenden Endpunkte der Grundlinie eine grade Linie GC, so entstünde dadurch ein Dreyeck GBC, welches mit dem Dreyeck DBC gleiche Grundlinie und gleiche Höhe, also gleichen Inhalt, mithin auch mit dem Dreyeck DBC, wovon es doch nur ein Theil ist, gleichen Flächenraum hätte; welches ungereimt ist.

Die Spitzen aller Dreyecke von gleichem Inhalt, welche über derselben Grundlinie BC stehn, liegen folglich in einer Parallellinie mit der Grundlinie, und *eine solche Parallellinie AE ist der geometrische Ort für diese Spitzen* oder für die Aufgabe, von zwey gegebnen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich so durchschneiden, dass das Dreyeck zwischen dem Durchschnittspunkt und den beyden gegebnen Punkten, eine gegebne Grösse habe. Alle Punkte der Parallellinie, und keiner der Punkte ausser ihr, thun dieser Aufgabe genüge *. (Apollonius I. 3.)] *I.E. 21.

LEHRSATZ 3.

Die Flächenräume zweyer Rechtecke von gleicher Höhe, verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Fig. 8. Wenn die Rechtecke ABCD, AEFD beyde die Linie AD zur Höhe haben, [folglich sich beyde zwischen zwey Parallellinien AB, DC legen lassen, deren Ab-
* E. 3. stand AD ist*,] so, behaupte ich, verhält sich der Inhalt dieser beyden Rechtecke, wie ihre Grundlinien AB, AE.

Denn gesetzt *erstens* die Grundlinien AB, AE sind *commensurabel*, so läſst sich ihr Verhältniſs in ein
* II. A. 19 Fall 1. gleichgeltendes Zahlverhältniſs verwandeln *. Dieses sey z. B. das Verhältniſs 7 : 4; so muſs, wenn man AB in 7 gleiche Theile theilt, AE genau 4 solcher Theile enthalten. Errichtet man in jedem der Theilungspunkte ein Perpendikel auf der Grundlinie AB, so entstehn dadurch 7 kleine Rechtecke (rectangles partiels) die allesammt gleiche Grundlinien und gleiche
* 1. Höhe, folglich auch gleichen Inhalt * haben, und wovon 7 im Rechteck ABCD, 4 im Rechteck AEFD enthalten sind. Folglich verhalten sich diese beyden Rechtecke zu einander wie 7 zu 4, also wie die Grundlinien AB zu AE. Da sich dieselbe Schluſsfolge auf jedes andre Zahlverhältniſs übertragen läſst, so verhalten sich allgemein, wenn die Grundlinien commensurabel sind, die Flächenräume der Rechtecke von gleicher Höhe, wie ihre Grundlinien, oder

$$ABCD : AEFD = AB : AE.$$

Gesetzt *zweytens* die Grundlinien AB, AE sind un-
Fig. 9. ter einander *incommensurabel*, hätten kein gemeinsammes
* II. A. 19 Fall 2. Maaſs *, so muſs demungeachtet dieselbe Proportionalität zwischen den Flächenräumen und den Grundlinien statt finden. Denn wollte man dieses läugnen,

so müsste man behaupten nicht AE, sondern irgend eine andre Linie AO, die grösser oder kleiner als AE ist, sey die richtige vierte Proportionallinie zu den drey andern Linien. Wir wollen also setzen dieses AO sey um EO *grösser* als AE, und es sey dann

ABCD : AEFD = AB : AO.

Theilt man nun die grade Linie AB in gleiche Theile, welche kleiner als EO sind *, so muss zwischen E und O wenigstens ein Theilpunkt I fallen. Durch diesen ziehe man auf die Grundlinie senkrecht IK, so entsteht ein Rechteck AIKD, welches mit dem Rechteck ABCD gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie AI mit der Grundlinie AB commensurabel ist [indem der angenommne Theil beyde misst.] Die Flächenräume dieser beyden Rechtecke sind also, nach dem was vorhin bewiesen ist, den Grundlinien proportional, also

*II. A §. a. 2.

ABCD : AIKD = AB : AI

Diese Proportion hat mit der Vorhergehenden, gleiche Vorderglieder in beyden Verhältnissen. Also müssten die Hinterglieder proportional seyn *, oder

*V. 4. §.

AEFD : AIKD = AO : AI.

Nun aber ist AI kleiner als AO, also müsste auch das Rechteck AIKD kleiner als das Rechteck AEFD seyn; folglich AI kleiner als AE, welches der Voraussetzung widerspricht. Also kann keine Linie AO, welche *grösser* als AE ist, die richtige vierte Proportionallinie zu den drey Grössen ABCD, AEFD, AB seyn.

Durch eine ähnliche Schlufsfolge beweift man dafs auch keine Linie welche *kleiner* als AE ift, die richtige vierte Proportionalgröfse fein kann.

Nothwendig mufs diefes alfo AE felbft feyn.

Wie fich demnach auch in zwey Rechtecken von gleichen Höhen die Grundlinien verhalten, immer find ihre Flächenräume ABCD, AEFD den Grundlinien AB, AE proportional.

Folgerung 1. Gleich hohe Rechtecke über incommenfurabele Grundlinien befchreiben, find folglich ebenfalls incommenfurabel, indem ihr Verhältnifs gleichfalls irrational ift *.

* II. A. 19. a.

Folgerung 2. *Zwey grade Linien AC : CB verhalten fich ftets wie das Quadrat der einen, zum Rechteck aus beyden,* alfo wie Qdrat AC : Rechteck aus AC, CB oder wie Rechteck aus AC, CB : Qdrat CB, (Eukl. X. 23. Lemma). Auch verhalten fie fich wie Rechteck AB, AC : Rechteck AB, CB (Euklid X. 33.)]

[Anmerkung. Der Beweis diefes dritten Lehrfatzes ftimmt in allem mit dem Beweis des 22ften Lehrfatzes im Zweyten Buche überein. Einige Bemerkungen über diefe Beweisart findet man dort in Zufatz I.]

LEHRSATZ 4.

Fig. 10. *Die Flächenräume zweyer Rechtecke ABCD, AEGF verhalten fich zu einander wie die Produkte aus der Grundlinie eines jeden in deffen Höhe, oder es ift allgemein*

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF.$$

[Man lege beyde Rechtecke ſo an einander, daſs ſie einen Winkelpunkt A gemein haben, zugleich zwey ihrer Seiten AB, AE eine grade Linie bilden, und die beyden Rechtecke ſich auf entgegengeſetzten Seiten dieſer Linie befinden. Da dann AD, AF auf demſelben Punkte einer graden Linie ſenkrecht ſtehn, ſo liegen auch ſie in grader Linie.*] Verlängert man die Seiten CD, GE bis zu ihrem Durchſchnittspunkt H, ſo entſteht ein Rechteck AEHD, welches mit jedem der gegebnen Rechtecke zwiſchen denſelben Parallellen CH, BE und DF, HG liegt *, mit ihnen alſo einerley Höhe hat *, und deſſen Flächenraum ſich deshalb zu den Flächenräumen jener Rechtecke, wie die Grundlinien *EA*, *AB* und *DA*, *AF* verhalten *, oder

*I.1.Z.2 · *II.A.11 · * E. 3. · * 3.

$$ABCD : AEHD = AB : AE$$
$$AEHD : AEGF = AD : AF.$$

Setzt man dieſe beyden Proportionen zuſammen *, ſo erhält man, da aus den beyden erſten Produkten der Zahlausdruck des Rechtecks AEHD als gemeinſchaftlicher Factor hinausfällt, *V.4.δ.

$$ABCD : AEGF = AB \times AD : AE \times AF *. \qquad * E. 6.$$

[Alſo ſind die Flächenräume je zweyer Rechtecke den Produkten aus ihren Grundlinien in ihren Höhen proportional*, oder, was daſſelbe ſagt, *das Verhältniſs der Flächenräume iſt aus dem Verhältniſs der Grundlinien und aus dem Verhältniſs der Höhen beyder Rechtecke zuſammengeſetzt* *.] * E. 6. *V.4.δ

[*Folgerung* 1. *Haben die beyden Rechtecke ABCD, AEGF gleichen Inhalt*, ſo ſtehn ſie im Verhältniſs der

Gleichheit. Folglich müssen die Produkte aus den beyden Seiten, woraus sie beschrieben sind, d. h. die
* E. 6. Produkte aus den Zahlausdrücken dieser Seiten*) ebenfalls im Verhältniss der Gleichheit stehn, oder es muss AB × AD = AE × AF seyn, daher zwischen diesen Zahlausdrücken stets folgende Proportion besteht

*V. 3. 7

$$AB : AE = AF : AD \text{ *}.$$

Die Seiten zweyer Rechtecke von gleichem Inhalt sind
* E. 7. *mithin stets verkehrt proportional* *.

Sind umgekehrt zweyer Rechtecke Seiten, verkehrt
* E. 7. *proportional* *, *so sind ihre Flächenräume gleich.* Denn verhält sich AB : AE = AF : AD, so sind die Produk-
* E. 6. te AB × AD und AE × AF gleich *, daher auch die
V. 3. β. Flächenräume beyder Rechtecke, welche dem Lehrsatz zu folge, in demselben Verhältnisse wie diese Produkte stehn, gleich seyn müssen.

Hat man also vier proportionale Linien, so ist allemal das Rechteck aus den mittlern dem Rechteck aus den äussern gleich.]

Fig. 11. [*Folgerung 2. Sind die Linien AB, CD, EF, GH, und so auch die Linien AK, CL, EM, GN, untereinander proportional, so sind auch die Rechtecke proportional, welche man aus den ersten, zweyten dritten und vierten dieser Linien beschreibt, oder*

Rechtk. AB, AK : Rechtk. CD, CL = Rechtk. EF, EM : Rechtk. GH, GN.

Denn aus der Zusammensetzung der beyden gegebnen Proportionen folgt, dass dann auch die Produkte aus den ersten, zweyten, dritten, vierten dieser

proportionalen Linien *, proportional sind, oder dass * E. 6.
sich verhält AB × AK : CD × CL = EF × EM : GH × GN *. Nun aber ist nach unserm Lehrsatz das erstere *V. 4. δ.
Verhältniss dieser Produkte, dem Verhältniss des Inhalts der Rechtecke, die aus den Linien in ihnen beschrieben sind, gleich, (Rechteck aus AB, AK : Rechteck aus CD, CL). Eben so ist das zweyte Verhältniss dieser Produkte dem Verhältniss der Rechtecke gleich, die aus den Linien in ihnen beschrieben sind (Rechteck aus EF, EM : Rechteck aus GH, GN). Da nun beyde Verhältnisse jener Produkte gleich sind, so sind es auch die Verhältnisse dieser Rechtecke, und *diese vier Rechtecke sind proportional.*

Insbesondere sind also die Quadrate vier proportionaler Linien proportional, z. B. in unserm Fall (q. AK : q CL = q. EM : q. GN.) Denn sind die Seiten der vier Quadrate proportional, so sind es auch immer ihre Grundlinien und Höhen *. * E. 4.

Die Wahrheit dieser Sätze erhellt unmittelbar auch daraus, dass unserm Lehrsatz zu Folge das Verhältniss der Flächenräume von Rechtecken aus dem Verhältniss ihrer Grundlinien und ihrer Höhen zusammengesetzt ist. Denn ist dieses, so müssen zwey Rechtecke untereinander dasselbe Verhältniss, als zwey andere haben, wenn die Grundlinien, so wie die Höhen der Erstern untereinander dasselbe Verhältniss, als die Grundlinien und die Höhen der Letztern haben.]

[Folgerung 3. *Sind umgekehrt vier Rechtecke, und zugleich deren Grundlinien, proportional, so müssen auch ihre zweyten Seiten proportional seyn;*

und ſtehn vier Quadrate in gleichen Verhältniſſen ($q . AK : q . CL = q . EM : q . GN$,) *ſo ſtehn darin auch ihre Seiten.*

Denn da nach unſerm Lehrſatz Rechtecke ſich wie die Produkte aus ihren Seiten verhalten, ſo folgt
*V. 4. δ. durch Trennung * dieſer Proportion und der, welche die Proportionalität einer Seite in den Rechtecken angiebt, die Proportionalität der zweyten Seiten. — Insbeſondere folgt aus der gegebenen Proportionalität der Quadrate, die Proportionalität der Produkte $AK \times AK : CL \times CL = EM \times EM : GN \times GN$, und daraus die Proportionalität der Seiten $AK : CL =$
*V. 1. β. $EM : GN$ *]

Zuſatz I. Die hier erwieſene *Proportionalität zwiſchen den Flächenräumen der Rechtecke und den Produkten aus ihren Seiten*, berechtiget uns die Produkte aus der Grundlinie in die Höhe eines jeden Rechtecks zum Maaſs des Flächenraums der Rechtecke zu nehmen. Es verſteht ſich, daſs hierbey von den Zahlausdrücken der Grundlinie und der Höhe, und von
* E. 6. deren Produkten die Rede iſt *; d. h. von Produkten der Zahlen, welche angeben, wie viel Lineareinheiten die Grundlinie, und wie viel deren die Höhe enthält.

Bey dieſem Maaſs iſt daſſelbe als bey dem zu bemerken, welches wir in den Zuſätzen zu Lehrſatz 22 des zweyten Buchs für die Winkel aufgeſtellt haben. Es iſt nicht abſolut, ſondern nur Beziehungsweiſe ein Maaſs [oder vielmehr kein unmittelbares, ſondern nur ein mittelbares Maafs]. Es fetzt voraus, dafs man irgend eines andern Rechtecks Flächenraum auf dieselbe Art beſtimmt, indem man die Seiten deſſelben mit derfelben Lineareinheit miſst, und das Produkt dieſer Zahlausdrücke nimmt. Das Verhältniſs beyder Produkte giebt dann das Verhältniſs der Flächenräume. Endhält z. B. die Grundlinie eines Rechtecks A 7, deſſen Höhe 3 Lineareinheiten, ſo wird der Flächenraum dieſes Rechtecks durch die Zahl 7 × 3 oder 21 vorgeſtellt, welche Zahl einzeln und für ſich nichts bedeuten würde. Hat man aber ein zweytes Rechteck, deſſen Grundlinie 12, und deſſen Höhe 7 Lineareinheiten enthält, ſo wird der Inhalt deſſelben durch die Zahlen 12 × 7 oder 84 vorgeſtellt; woraus man ſchlieſsen muſs, daſs die Flächenräume beyder Rechtecke A und B ſich zu einander wie die beyden Zahlen 21 und 84 verhalten, dieſes alſo das Vierfache von jenem iſt, [da dem eben bewieſenen zu Folge die Flächenräume zweyer Rechtecke ſich wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen verhalten.] Geſetzt man käme darin überein, das Rechteck A allgemein als Einheit beym Meſſen der Flächenräume zu gebrauchen, [alſo die Gröſse aller Flächenräume dadurch auszudrücken, wie vielmal ſie das Rechteck A, oder welchen Theil deſſelben, ſie enthalten] ſo wäre $\frac{84}{21}$ oder 4 das abſolute [vielmehr das unmittelbare] Maaſs des Rechtecks B, und das hieſse dann nichts anders, als, dieſes Rechteck iſt 4 ſolcher Flächeneinheiten gleich.

Nun iſt es allgemein gebräuchlich, und in der That am einfachſten, *ein Quadrat zur Flächeneinheit zu nehmen*, und zwar braucht man dazu *das Quadrat, des-*

ſen Seite die Lineareinheit iſt, z. B. den Quadratzoll, den Quadratfuſs, die Quadratruthe u. ſ. f. [Wenn dieſes einmal feſtgeſetzt iſt, ſo geht jenes mittelbare Maaſs für den Flächenraum eines Rechtecks, durch die Produkte der Grundlinie in die Höhe, in ein unmittelbares über. Die Zahl 21, welche das Maaſs des Rechtecks A angab, bezeichnet dann 21 Flächeneinheiten, d. h. 21 Quadrate, deren Seite die Lineareinheit iſt; und daſs ein Rechteck deſſen Höhe 3 und deſſen Grundlinie 7 Lineareinheiten gleich iſt, in der That 21 ſolcher Quadrate in ſich enthalten müſſe, ſpringt ſogleich aus Erkl. 5. ε, und auch unmittelbar aus der
Fig. 12. Figur in die Augen, indem ein ſolches Rechteck ſich mittelſt Perpendikel aus den Theilungspunkten in 3 Banden, deren jede 7 kleine Quadrate faſst, zertheilen läſst. — *Jeder andre* völlig begränzte *Flächenraum* iſt dem Inhalt nach irgend einem Rechteck gleich, [indem uns nichts hindert Rechtecke von jeder möglichen Gröſse zu denken,] wird ſich alſo ebenfalls, *durch ein Produkt aus zwey Linien* meſſen laſſen, [womit es denn immer die hier entwickelte Bewandtniſs hat, indem ein ſolches Produkt zunächſt den Inhalt eines Rechtecks giebt, das mit der andern Figur gleichen Flächenraum hat.]

Fig. 10. [Zuſatz II. Sind wir berechtigt uns den Flächenraum eines jeden Rechtecks ABCD durch ein Produkt aus der Grundlinie AB in die Höhe BC vorzuſtellen; ſo ſind wir auch befugt den *Flächenraum eines Rechtecks durch dieſes Produkt*, *oder durch AB × BC zu bezeichnen*, indem wir die Zeichen für die Grund-

linie und die Höhe durch das Multiplicationszeichen × verbinden. Und dieses Zeichens wollen wir uns hinfüro beständig bedienen um den Inhalt eines Rechtecks, das aus den Linien AB, BC beschribeen ist, oder dessen Grundlinie AB, dessen Höhe BC ist, zu bezeichnen.

Ein solches Produktenzeichnen zweyer Linien z. B. EF × GH kann man also hinfüro nach Willkühr *entweder durch Produkt aus den beyden Linien EF, GH, oder* durch *Rechteck aus den Linien EF, GH* übersetzen. Beydes kömmt nach dem hier Erklärten auf eins hinaus. Um indess nicht gänzlich in die rechnende Geometrie überzutreten, wird es vortheilhafter seyn, wenn man sich im folgenden an die letztere Auslegung hält, und also bey einem solchen Zeichen stets an *ein Rechteck* aus den genannten Linien denkt. Hierbey fällt es sogleich in die Augen, dass *diese Bezeichnung für den Flächenraum eines Rechtecks*, (welche aus den Zeichen der Seite mittelst einer arithmetischen Beziehung abgeleitet ist), *lediglich unter der Bedingung gültig und sinnvoll ist*, unter der es allein erlaubt war, den Flächenraum eines Rechtecks als ein *Produkt* aus seinen Seiten anzusehn; nemlich unter der Voraussetzung, dass wir ein für allemal den Flächenraum aller Rechtecke mit einem Rechtecke (als Flächeneinheit) messen, mit dessen einer Seite wir alle Grundlinien, mit dessen andrer wir alle Höhen gegebner Rechtecke vergleichen und ausmessen; und zwar haben wir dazu ein für allemal das *Quadrat* erwählt, welches über der Lineareinheit als Seite beschrieben ist. Und so ist demnach der *arithmetische*

Sinn dieſes Zeichens AB × BC, als Zeichen eines Flächenraums, ſtets ſo zu erklären, wie wir es mit der Vorſtellung ſelbſt, worauf daſs Zeichen fuſst, im vorigen Zuſatz gethan haben.

Mit dem *geometriſchen Sinn* dieſes Zeichens, bey dem wir ganz davon abſehn, daſs es eigentlich ein Produkt bedeutet, würden wir ohne die Sätze, welche die *Folgerungen* aus unſerm Lehrſatze, beſonders die erſte, ausſagen, nicht weit reichen. Dieſe berechtigen uns aber, grade ſo, wie wir aus der Proportionalität von vier Zahlen auf die Gleichheit der Produkte der innern und äuſsern Glieder ſchlieſsen, aus der Proportionalität von vier Linien AB : AE = AF : AD auf die Gleichheit des Flächenraums der Rechtecke aus den mittlern und aus den äuſsern Linien AB × AD = AE × AF zu ſchlieſsen, und umgekehrt, abgeſehn von aller arithmetiſchen Befugniſs zu dieſem Schluſse. Mittelſt ihrer wird daher der Geometer in den Stand geſetzt, die *arithmetiſche Anſicht* der Abhängigkeit zwiſchen Seiten und Inhalt der Rechtecke, gröſstentheils zu umgehn, und die Begriffe von *Produkten aus Linien* ganz zu vermeiden. Das thut Euklid, und die ihm folgen; daher ſie auch das Rechteck nicht auf die Art wie unſer Verfaſſer, ſondern durch ein den Eckbuchſtaben vorgezeichnetes ▭ oder *Rect.* bezeichnen, z. B. ▭ ABBC oder *Rect.* AC. Allein da das Weſen des Verhältniſſes und der Proportion am Ende doch auf Zahl, alſo auf arithmetiſche Vorſtellungen beruht; ſo dünkt es mich auf einen kleinen Miſsverſtand hinaus zu laufen, wenn man aus der Lehre des Verhaltens und der Proportionalität ausgedehnter Gröſsen, alles Arithmetiſche verbannen und es darin ſorgfältig vermeiden will. Höchſtens kann man es verſtecken, wodurch aber dieſe Lehre wahrlich nicht erleichtert, ſondern nur verdunkelt wird. Ueberdem müſſen wir da, wo wir durch Zuſammenſetzen linearer Proportionen oder durch Multiplicationen auf Ausdrücke wie z. B. folgende kommen $AB \times BC \times EF \times GH$, doch nothwendig zum arithmetiſchen Sinn unſere Zuflucht nehmen. Ich bleibe daher bey *Le Gendres* Bezeichnung, (welche dieſer aus *Tacquets* und *Whiſtons Euklid*, oder vielmehr aus *Simpſons* Elementen, die ſich ihrer durchgängig bedienen, entlehnt zu haben ſcheint), und die eben durch den arithmetiſchen Sinn, der zugleich in ihr liegt, vorzüglich und recht charakteriſtiſch wird. Hier im Lehrgebäude der Geometrie überſetzen wir das Zeichen $AB \times BC$ durch *Rechteck* aus den Linien AB, BC, und das iſt der *geometriſche Sinn* deſſelben. Dagegen brauchen wir es nur nach ſeinem *arithmetiſchen Sinn*, als Produkt zweyer Linien AB, BC zu nehmen, um uns unmittelbar in die rechnende Geometrie zu verſetzen.]

[Zuſatz III. Produkte von gleichen Faktoren nennt der Arithmetiker *Potenzen*, und zwar nach der Anzahl der gleichen Faktoren, die wir in ihnen denken, die zweyte, dritte Potenz u. ſ. f. Das arithmetiſche Zeichen der zweyten Potenz aus einer Gröſse a iſt a^2, der dritten Potenz a^3, u. ſ. f. * α) Ganz dem *I. E. 28.
Geiſte unſerer Bezeichnung gemäſs, werden wir daher den *Flächenraum eines Quadrats, welches aus der Linie*

Fig. 4. *AB beschrieben ist*, *mit* AB^2 *bezeichnen* †). Denn als gleichseitiges Rechteck wird es durch ein Produkt aus
*Z. 1. zwey gleichen Faktoren, AB × AB gemessen *, und muss also durch das Zeichen der *zweyten Potenz* von
*Z. 2. AB, bezeichnet werden *; eine Bezeichnung, von der alles gilt, was wir über die vorige bemerkt haben, und bey der man sich also allemal den *Flächenraum* des über der Linie AB beschriebnen Quadrats denke, welches Euklid durch das Zeichen □ AB, andre, z. B Tacquet, durch ABq., wie mich dünkt nicht ganz so vor-
*Z. 2. theilhaft bezeichnen *. β) Misst man ferner *die Seite AB* mit der Lineareinheit, und verwandelt sie auf diese Art in einen Zahlausdruck, *so enthält* □ *AB so viel über der Lineareinheit beschriebene Quadrate* (d. i. Flächeneinheiten) *in sich*, *als die zweyte Potenz jener Zahl an-*
*Z. 1. *giebt* *. — γ) *Weiss man endlich umgekehrt den Zahlausdruck eines Quadrats*, □ *AB*, *in Beziehung auf die Flächeneinheit*, *so giebt die Quadratwurzel aus dieser Zahl den Zahlausdruck für die Seite AB dieses Quadrats in Lineareinheiten.* Diese beyden Sätze springen auch durch Construction, mittelst Erkl. 5. β. sogleich ins Auge.

†) *Le Gendre* fügt diesem Zeichen durchgängig noch einen Strich über die beyden Buchstabe hinzu, z. B. $\overline{AB}^2$. Allein da wir hinlänglich daran gewöhnt sind, diese Buchstaben sters als Ein Zeichen, nemlich als das Zeichen einer Linie anzusehn, folglich nicht zu fürchten haben, dass jemand ein Zeichen wie AB^2 für folgendes $A.(B)^2$ nehmen, und als solches übersetzen werde, so ist dieser den Druck erschwerende Zusatz, in den mehrsten Fällen überflüssig. Auch bedient sich Simpson durchgängig des Potenzenzeichens ohne diesen Zusatz.

Denn enthält z. B. die Linie AB 2 oder 3 Lineareinheiten in sich, so läſst sich das Quadrat aus AB (d. h. ABDC oder AB' D'C) durch Perpendikel, welche auf den Seiten in den Theilungspunkten errichtet werden, in 2 oder 3 gleiche Banden zerschneiden, deren jede im ersten Fall aus 2, im zweyten aus 3 Quadraten besteht, welche über der Lineareinheit als Seite beschrieben sind; enthält mithin im ersten Fall 4, im zweyten 9 solche Flächeneinheiten in sich. Umfaſst es umgekehrt eine solche Zahl von Flächeneinheiten, so ist dessen Seite 2 oder 3 Lineareinheiten gleich.]

Anmerkung 1. *Der Zahlausdruck eines jeden Quadrats ist also eine Quadratzahl*, nemlich die zweyte Potenz aus dem Zahlausdruck der Seite; und *der Zahlausdruck der Seite umgekehrt eine Quadratwurzel*, nemlich aus dem Zahlausdruck der Quadratfläche. *Die Flächen zweyer Quadrate verhalten sich also zu einander stets wie zwey Quadratzahlen*, nemlich wie die zweyten Potenzen aus dem Zahlausdruck der Seiten, und umgekehrt *verhalten sich die Seiten zweyer Quadrate wie zwey Quadratwurzeln* nemlich wie die Quadratwurzeln aus dem Zahlausdrücken der Flächen.

Hieraus folgt *erstens, die Reduction verschiedener Flächenmaaſse auf einander.* Alle unsere Flächenmaaſse sind nemlich Quadrate, verhalten sich also wie die zweyten Potenzen der Zahlausdrücke ihrer Seiten. Enthält so z. B. 1 Ruthe 16 Fuſs, 1 Fuſs 12 Zoll, 1 Zoll 10 Theile in sich; so gehn auf 1 Quadratruthe $16^2 = 256$ Quadratfuſs, auf 1 Quadratfuſs $12^2 = 144$ Quadratzoll, und auf 1 Quadratzoll $10^2 = 100$ Quadrattheile; und verhalten sich der Pariser und Rheinländische Fuſs zu einander wie 1440 : 1391, so ist das Verhältniſs beyder Quadratfüſse wie $1440^2 : 1391^2$ d. i. ungefähr wie 207 : 193.

Wissen wir *zweytens* dass ein Quadrat z. B. 25 oder 169 Quadratzoll enthält, so ist die Seite desselben $\sqrt{25} = 5$ oder $\sqrt{169} = 13$ Zoll lang. Ist folglich der Zahlausdruck eines Quadrats in Beziehung auf ein anderes, als Einheit, keine Quadratzahl, z. B. 15, so ist der Zahlausdruck für die Seite desselben, in Beziehung auf die Seite des andern, eine *Irrationalzahl*, $\sqrt{15}$; beyde Seiten sind also *incommensurabel*.

Drittens wird vermöge dieser Sätze und der analogen im zweyten Zusatze die ganze *Theorie von commensurablen und incommensurablen Flächen, und deren Verhalten*, auf die Lehre von den *Irrationalzahlen* zurück geführt, (woven der eben aufgestellte Satz ein Beyspiel giebt, der bey Euklid X. 6, freylich anders ausgedrückt vorkömmt,) und mithin der eigentliche Gegenstand von Euklids zehntem Buch * aus der Geometrie in die Arithmetik verwiesen.

* II. A. 19, a.

Anmerkung 2. So wie unsere Bezeichnung für Rechtecke und Quadrate aus der Arithmetik entlehnt ist, so haben schon die *griechischen Mathematiker* (gestützt auf der Analogie des *Produkts* aus zwey Linien, und der *Fläche eines Rechtecks* welches aus diesen beyden Linien beschrieben ist, so wie *zweyter Potenzen* und der *Flächen von Quadraten*) theils die Begriffe von Flächen, Rechtecken, Quadraten und andre verwandte, aus der Geometrie in die Arithmetik, theils umgekehrt die arithmetischen Begriffe des Multiplicirens auf geometrische Constructionen übertragen. Nach dieser Analogie nennen sie z. B *in der Arithmetik* ein jedes Produkt aus zwey Zahlen eine *Flächenzahl*, die zweyte Potenz einer Zahl ein *Quadrat*, und die Division einer Zahl in die andre, *Applicatio numeri ad numerum*, nach der Aehnlichkeit mit dem Verfahren in Aufg. 3. am Ende dieses Buchs.

Umgekehrt deuten sie (oder vielmehr die Geometer des Mittelalters) die *Construction* eines Rechtecks aus zwey gegebnen Linien AB, BC so an: *multiplicire AB in BC*; das *Rechteck* selbst durch

durch den Ausdruck: *quod fit ex ductu alterius Lineae in alteram*, und das *Quadrat* einer Linie durch *Potestas lineae*, oder blos durch *potest.* Ausdrücke, die ohne diese Erläuterung allerdings sehr sonderbar schienen. So z. B. frägt *Clavius* nach dem Unterschiede der Quadrate zweyer Linien folgendermaßen: *invenire id, quod plus potest major, quam minor*, und der Pythagoreische Lehrsatz wird oft so vorgetragen: *hypotenusa potest cathetos*; d. h. das Quadrat der Hypotenuse ist dem Quadrat der beyden Katheten gleich. Selbst Euklid bezeichnet auf diese Art die Gleichheit des Quadrats einer Linie mit einem andern Rechteck, „Wenn eine Linie nach stetigem Verhältniß geschnitten ist, so *kann* das Quadrat des größern Abschnitts das Rechteck aus dem kleinern Abschnitt und der Linie".

Anmerkung 3. Aus den Erörtrungen zu diesem Lehrs. erhellet endlich, in wie fern wir oben behaupten konnten, daß die in Erklärung 4 und 5 aufgestellten Sätze, auf die Arithmetischen Sätze, welche dort angeführt werden, hinaus laufen.

d. U.

LEHRSATZ 5.

Der Flächenraum eines Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe gemessen;

der Flächenraum eines Dreyecks durch das halbe Produkt aus der Grundlinie in die Höhe.

Denn ein Parallelogramm ABEC hat mit einem Fig. 1.
Rechteck CDFE, welches von gleicher Grundlinie AB und gleicher Höhe CD mit diesem Parallelogramme ist, gleichen Inhalt *, und also auch zum Maaße seines * 1. f. 1
Flächenraums ebenfalls das Produkt AB × CD *. — * 4. Z. 1.

Ein Dreyeck ABC ist aber nur halb so grofs als ein sol-
* 2. f. 1. ches Rechteck *, hat folglich zum Maafse seines Inhalts das Produkt $\frac{1}{2}$ CD $\times$ AB.

Folgerung. 1. *Zwey Parallelogramme* und so auch *zwey Dreyecke* von *gleicher Höhe*, *verhalten sich* folglich dem Inhalt nach, wie ihre Grundlinien; und haben sie *gleiche Grundlinien*, so verhalten sie sich wie ihre Höhen. Denn aus dem Verhältnifs der Produkte wodurch ihr Inhalt bestimmt wird, fallen die gleichen
V. 1. 3. Factoren unbeschadet des Verhältnisses hinaus, daher dieses Verhältnifs im ersten Fall mit dem Verhältnifs der Grundlinien, im zweyten mit dem Verhältnifs der Höhen übereinstimmt.

Fig. 13. [*Folgerung* 2. Da das Verhältnifs zweyer Produkte aus dem Verhältnifs der Faktoren zusammengesetzt ist, so ist folglich auch] *das Verhältnifs des Inhalts zweyer Parallelogramme, so wie zweyer Dreyecke, zusammengesetzt aus dem Verhältnifs der Grundlinien und der Höhen*, z. B.

* V. 6.

$$\triangle ABC : \triangle EFG = AD \times BC : EH \times FG$$
$$= (AD : EH)\ (BC : FG)^{*}.$$

Folgerung 3. Sind die Glieder des erstern dieser beyden gleichen Verhältnisse untereinander gleich, so sind es auch die des zweyten, und umgekehrt. Ist aber AD $\times$ BC $=$ EH $\times$ FG so ist allemal auch AD : EH $=$ FG : BC. Mithin sind *in Dreyecken von gleichem Inhalt stets die Höhen und die Grundlinien verkehrt propor-*
* E. 7. *tional* *, und *sind* umgekehrt *die Höhen und Grundlinien zweyer Dreyecke verkehrt proportional, so haben diese Dreyecke gleichen Inhalt.*

Dasselbe gilt aus den nemlichen Gründen für die Parallelogramme. Diese Eigenschaft kömmt also den Rechtecken nicht ausschliesslich zu *.] *4. f. 1.

Anmerkung. Der Kürze halber pflegt man unsern Lehrsatz auch wohl so auszudrücken: *ein Parallelogramm ist dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe; und ein Dreyeck der Hälfte dieses Produktes gleich.* Hat man sich hierüber so wie wir im vierten Lehrsatze erklärt; so sieht man sogleich, dass hier bloss von den Zahlausdrücken für den Inhalt und die Seiten die Rede ist, und dann fällt alles Anstössige in diesem Ausdruck weg. Bezeichnet man diese Zahlausdrücke mit i, g, h, so ist für das *Parallelogramm* $i = gh$ und umgekehrt $g = \frac{i}{h}$ oder $h = \frac{i}{g}$ und für das *Dreyeck* $i = \frac{1}{2} gh$, $g = \frac{2i}{h}$, $h = \frac{2i}{g}$, so dass also jede dieser drey Grössen durch den Zahlausdruck der beyden andern, nach diesen leichten Formeln bestimmt wird. Ein Parallelogramm von 280 Quadratfuss, das über einer Grundlinie von 14 Fuss steht, hält so z. B. zur Höhe 20 Fuss, und ein Dreyeck von 400 Quadratfuss, dessen Höhe 20 Fuss ist, eine Grundlinie von 40 Fuss.

A. K.

LEHRSATZ 6.

*Der Inhalt eines Trapezoid ABCD wird durch das Produkt aus der Höhe EF in die halbe Summe der parallelen Grundlinien desselben, AB, CD * gemessen.* Fig. 14. * B. 3.

Man halbire eine der nicht parallelen Seiten, z. B. BC im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt parallel mit der gegenüberstehenden Seite AD die Linie KL, und verlängere DC, bis wo sie diese Linie trifft, In den Dreyecken IBL, ICK, ſind vermöge der Conſtruction die Seiten IB, IC und die Scheitelwinkel CIK, LIB gleich. Ueberdem ſind die Winkel ICK, IBL vermöge des Parallelismus der Seiten AB, DC gleich. Alſo decken ſich beyde Dreyecke, daher das Trapezoid ABCD mit dem Parallelogramm ADKL gleichen Inhalt, und folglich, ſo wie dieſes, das Produkt $EF \times AL$ zu ſeinem Maaſse hat. — Nun ſind aber auch die dritten Seiten CK, LB jener beyden Dreyecke gleich, mithin $DC + AB = DK + AL = 2AL$, weil in jedem Parallelogramm die gegenüberſtehenden Seiten gleich ſind. Es iſt alſo $AL = \frac{DC + AB}{2}$, und folglich hat der Flächenraum des Trapezoids ABCD zu ſeinem Maaſse das Produkt $EF \times (\frac{AB + DC}{2})$.

Zuſatz I. Zieht man durch den Punkt I, der in der Mitte der Seite BC liegt, mit den parallelen Grundlinien des Trapezoids eine Parallellinie, IH, ſo entſtehn zwey gleichwinklige Parallelogramme AHIL, * I. 35. HDKI*, worin *erſtens* (weil nach dem eben bewieſenen $KI = IL$;) auch $DH = HA$ iſt, alſo auch die zweyte Seite DA halbirt wird; und *zweytens* $HI = AL$ iſt. Folglich läſst ſich *der Inhalt eines Trapezoids* auch durch das Produkt $EF \times HI$ meſſen, d. h. durch das Produkt aus der Höhe in die grade Linie zwiſchen den Punkten, welche in der Mitte der nicht parallelen Seiten liegen.

[Zuſatz II. *Jede gradelinige Figur läſst ſich ſowohl in lauter Dreyecke, als auch in Dreyecke und Trape-*

zoide zerlegen, daher man mit Hülfe dieses und des vorigen Lehrsatzes *den Inhalt jeder gradelinigen Figur* ohne Schwierigkeit findet. Um die Figur in *Dreyecke* zu zerfällen, nimmt man irgend einen Punkt in ihr, oder in ihrem Umfange, und zieht von demselben nach allen Eckpunkten grade Linien, (läge der Punkt ausserhalb der Figur, so bekäme man additive und subtractive Dreyecke, welches unbequem wäre), und zwar ist es bey unregelmäfsigen Figuren am vortheilhaftesten, wenn man sie durch Diagonalen, die von einem Winkelpunkte aus nach den übrigen gezogen werden, in Dreyecke zertheilt. Jede dieser Diagonalen giebt die Grundlinie für zwey an einanderliegende Dreyecke ab. Mifst man sie und die Höhen, so findet sich der Zahlausdruck für den Inhalt jedes der Dreyecke nach Lehrsatz 5, und ihre Summe ist der Zahlausdruck für die ganze Figur. Figur und Beyspiele wird sich jeder leicht selbst hierzu bilden.

Um eine gradelinige Figur in *Trapezoide* zu zerfällen, nehme man willkührlich eine grade Linie, und zwar ist es am vortheilhaftesten, wenn man hierzu die längste Diagonale wählt. Auf diese fälle man von allen Eckpunkten der Figur Perpendikel; so bilden je zwey dieser Perpendikel, sammt der Seite der Figur und dem Abschnitt der Diagonale, die zwischen ihnen liegen, ein *Trapezoid*, worin diese parallelen Perpendikel die Grundlinie, und der Abschnitt der Diagonale, der auf beyden senkrecht steht, die Höhe abgiebt. Die äufsersten Perpendikel bilden mit den Seiten der Figur und dem Abschnitt der Grundlinie rechtwinklige

Dreyecke. Diese Zerfällung und Ausrechnung gradelinigen Figuren ist in vielen Fällen, besonders beym Feldmessen, sehr bequem.

Beyde Zerfällungen, besonders die letztere, kann man selbst auf krummlinige Figuren übertragen, nimmt man nur die Höhen der Trapezoide so klein, daſs die krummlinige Seite sich ohne merklichen Fehler für gradelinig nehmen läſst, oder substituirt man statt der krummen Linie eine grade, so daſs der Inhalt dabey nicht merklich verändert wird.]

[LEHRSATZ 7.]

Fig. 15. 1. *Jede grade Linie, welche, wie DE, durch ein Dreyeck ABC mit einer Seite desselben, z. B. mit BC, parallel gezogen ist, theilt die beyden andern Seiten des Dreyecks in proportionale Theile, so daſs sich verhält AD : DB : AB = AE : EC : AC.*

2. *Sind umgekehrt zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks in den Punkten D und E proportional ge-*
*E. 8. *theilt*, so ist die grade Linie DE, zwischen den beyden Theilpunkten, mit der dritten Seite BC des Dreyecks parallel.*

Ist DE mit der Seite BC parallel, und man zieht BE, DC, so entstehn zwey Dreyecke BDE, CED, welche über gleicher Grundlinie DE, und zwischen gleichen Parallelen DE, BC stehn, und deshalb glei-
1. 5. 2. chen Inhalt haben. Zugleich sind die Dreyecke BDE, EDA, EBA von gleicher Höhe, denn ihre Grundlinien liegen in einer graden Linie und ihre Spitzen fallen

in einem Punkte E zusammen *; und eben so sind auch CDE, EDA, CDA Dreyecke von gleicher Höhe. Folglich verhalten sich die Flächenräume dieser Dreyecke wie ihre Grundlinien *, oder * E. 2. * 5. f. 1.

$$\triangle ADE : \triangle BDE : \triangle ABE = AD : DB : AB$$

$$\text{und } \triangle ADE : \triangle DEC : \triangle ACD = AE : EC : AC$$

Da nun die Dreyecke BDE, DEC, und mithin auch die Dreyecke ABE, ACD gleichen Inhalt haben, so sind die Verhältnisse links vom Gleichheitszeichen in beyden Proportionen gleich; also auch die Verhältnisse rechts vom Gleichheitszeichen *, * Gr. 1

$$AD : DB : AB = AE : EC : AC,$$

und die beyden Linien AB, AC sind folglich proportional getheilt *. * E. 8.

2. Sind umgekehrt zwey Seiten eines Dreyecks AB, AC in D und E proportional getheilt, so verhält sich vermöge der proportionalen Theilung AD : DB = AE : EC. * Wäre bey dieser Voraussetzung die grade Linie DE mit der dritten Seite BC des Dreyecks *nicht parallel*, so müsste eine andere grade Linie DO, die Parallellinien mit BC durch den Punkt D seyn. Dann verhielte sich aber, vermöge des eben Bewiesenen, AD : DB = AO : OC, und folglich, da dann in dieser und der vorigen Proportion die erstern Verhältnisse gleich sind, wäre auch AE : EC = AO : OC*; welches unmöglich ist, da AE > AO, hingegen EC < OC ist *. Also muss DE mit BC parallel seyn. * E. 8. a. * Gr. 1. * V. 3. δ.

Zusatz I. *Auch wenn man zwey Schenkel AD, AE eines Dreyecks ADE über die Grundlinie DE oder über die* Fig. 16.

Spitze A hinaus verlängert, so werden diese Verlängerungen durch jede Parallellinie mit der dritten Seite, z. B. durch BC oder durch β γ, den Schenkeln des Dreyecks proportional geschnitten. Denn im *erstern Fall* bildet ABC ein Dreyeck, dessen Schenkel AB, AC von einer Linie DE parallel mit der Grundlinie FG geschnitten, und folglich, unserm Lehrsatz zu Folge, proportional getheilt werden. — Im *zweyten Fall* nehme man auf dem Schenkel, auf dessen Verlängerung der Punkt β liegt, Ab gleich Aβ, und auf dem zweyten Ac gleich Aγ, und ziehe bc; so decken sich die beyden Dreyecke
* I. 6. Abc und Aβγ *, folglich sind die Winkel b, β, D
* I. 25. gleich, und daher die Linien βγ, bc, DE parallel *. Mithin werden, unserm Lehrsatz zu Folge, die Schenkel AD, AE durch die Parallellinie bc proportional getheilt, so dass sich verhält Ab : AD = Ac : AE, und
* E. 8. a. also auch Aβ : AD : βD = Aγ : AE : γE *, daher auch in diesem Fall die Linien βD, γE proportional getheilt sind.

Grade auf dieselbe Art beweist man (nach 2) *dass wenn zwey Linien βD, γE sich so in einem Punkte A durchschneiden, dass dieser Punkt beyde proportional theilt, die graden Linien zwischen den übereinstimmenden Theilpunkten βγ, DE, parallel seyn müssen.*

Zusatz II. *Zwey grade Linien, zwischen welchen Parallellinien in beliebiger Zahl und Entfernung gezogen sind, werden durch diese proportional getheilt.*

Fig. 10. Denn sind *erstens* diese beyden Linien selbst *parallel*, wie AB, CD, so schneiden je zwey der Parallellinien

auf beyden gleiche Theile ab *, daher die übereinstimmenden Theile beyder im Verhältniſs der Gleichheit ſtehn, und alſo beyde Linien proportional getheilt ſind *. *I. 33. f. *E. 8. a.

Treffen dagegen *zweytens* die beyden Linien in einem Punkte A *zuſammen*, wie z. B. BC, DE; ſo entſteht ein Dreyeck AGK, deſſen Schenkel, in ihrer Verlängerung, von Parallellinien mit der Grundlinie GK durchſchnitten, folglich, dem vorigen Zuſatz gemäſs, proportional getheilt werden, ſo daſs je zwey übereinſtimmende Theile der einen, und deren Summe, untereinander daſſelbe Verhältniſs wie in der andern haben *. Fig. 17. * E. 8.

Sind umgekehrt zwey grade Linien proportional getheilt, ſo ſind die graden Linien durch die übereinſtimmenden Theilpunkte, insgeſammt parallel, jene beyden Linien mögen parallel ſeyn oder ſich durchſchneiden. Dieſes folgt auf dieſelbe Art aus dem zweyten Theil des vorigen Zuſatzes.

Anmerkung. Die übrigen fruchtbaren Sätze über proportionale Eintheilungen von Linien, verſpare ich bis zum folgenden Buche. Der Beweis der hier vorgetragnen ſtützt ſich unmittelbar auf dem Vorhergehenden, und iſt uns in den gleich folgenden Materien von ſo vielem Nutzen, daſs ſie hier unſtreitig an der ſchicklichſten Stelle ſtehn. Sie begründen nicht nur die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren, ſondern geben uns auch ſogleich die einfachſte *Methode* an die Hand, *zu drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*; eine Methode, welche Aufg. 4 vorträgt, und die uns zur Verwandlung der Figuren in einander unentbehrlich iſt.

d. U.]

Fig. 18. Zusatz III. *Wenn man die Seiten eines Dreyecks ABC insgesammt in zwey gleiche Theile theilt, und die halbirenden Punkte D, E, F durch grade Linien verbindet, so wird das gegebne Dreyeck dadurch in vier kleinere Dreyecke getheilt, welche insgesammt mit dem Gegebnen gleichwinklig sind, und sich einander decken.*

Denn je zwey Seiten des gegebnen Dreyecks sind halbirt, d. i. nach dem Verhältniss von 1 : 1, und mithin proportional getheilt *, daher die Linien DE, EF, FD mit den gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC parallel laufen. Folglich sind die kleinen Dreyecke an den Ecken nach I. 25, und das Dreyeck DEF in der Mitte nach I. 31. Anm., mit dem gegebnen Dreyeck gleichwinklig. Dieses mittlere bildet mit jedem der Dreyecke an den Ecken, wegen des Parallelismus der gegenüberstehenden Seiten ein kleines Parallelogramm, wie AFDE, deckt sich folglich mit jedem derselben, und daher auch diese untereinander, so dass jedes der vierte Theil des ganzen Dreyecks ist.

* E. 8.

Grade Linien AD, BE, CF, welche man von den Eckpunkten des gegebnen Dreyecks nach den Punkten in der Mitte der gegenüberstehenden Seiten zieht, geben für diese kleinen Parallelogramme die zweyten Diagonalen ab, *halbiren sich also mit den Seiten des Dreyecks DEF wechselseitig* *. Verbindet man daher aufs neue ihre Durchschnittspunkte, so entstehn wiederum vier den vorigen gleichwinklige, sich deckende Dreyecke, die ein Sechzehntel des Gegebnen, und dessen Seiten ebenfalls halbirt sind, und umgekehrt die in dem kleinern Dreyeck liegenden Stücke der Li-

* I. 37.

nien AD, BE, CF, halbiren. Verbindet man immer wieder die halbirenden Punkte durch grade Linien, so geht dieses ohne Ende fort; daher AG in Beziehung auf AF als Einheit, durch eine geometrische ohne Ende fortlaufende Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \ldots$ deren Summe, wie die Arithmetik lehrt, $\frac{2}{3}$ ist, gegeben wird; ein Satz, den wir im folgenden Buche auf ganz geometrischem Wege darthun werden.

Zusatz IV. *Wenn man alle Seiten irgend eines Vierecks ABCD halbirt, und die halbirenden Punkte je zweyer Seiten, welche an einander stoſsen, durch grade Linien verbindet, so bilden diese stets ein Parallelogramm EFGH, deſsen Seiten mit den Diagonalen AC, BD des gegebnen Vierecks parallel sind.* Denn jede dieser Diagonalen zertheilt das Viereck in zwey Dreyecke, wie ADC, ABC, denen die Diagonale zur Grundlinie, und zwey der halbirenden Seiten des Vierecks zu Schenkeln dienen. Diese Schenkel sind proportional getheilt, daher HG und EF beyde mit der Diagonale AC, also auch untereinander, und eben so GF, HE mit der Diagonale BD und untereinander parallel laufen. Mithin ist EFGH ein Parallelogramm von der erwähnten Beschaffenheit. Fig. 19. * 7. (2)

Der Inhalt dieses Parallelogramms ist halb so groſs als der Inhalt des gegebnen Vierecks. Denn da CO und DO beyde nach demselben Verhältniſs wie DC durch die Parallelen GH und GF eingetheilt *, mithin halbirt werden, so hat jedes der vier Dreyecke, in welche das gegebne Viereck durch beyde Diagonalen getheilt wird, z. B. AOD, eine doppelt so groſse Grundlinie und Höhe * 7. (1)

als das kleine Parallelogramm OH, mithin auch
* 5. einen doppelten Inhalt *. Die vier kleinen Parallelogramme zusammengenommen sind also halb so groſs als die vier Dreyecke, d. h. als das gegebne Viereck.

Die Quadrate der beyden Diagonalen AC, BD sind noch einmal so groſs, als die Quadrate der vier Seiten des Parallelogramms EFGH zusammengenommen. Denn jede der Diagonalen ist, nach dem eben Bewiesenen, das Doppelte der Seite des Parallelogramms, welche mit ihr pa-
*4.Z.3.3 rallel läuft *.

Endlich sind *die vier Dreyecke, worin die Diagonalen das gegebne Viereck theilen, einander proportional.* Denn je zwey dieser aneinander liegenden Dreyecke, z. B. AOD, DOC und so auch AOB, BOC, stehn über einer graden Linie, und ihre Spitzen fallen zusammen.
* E. 2. Sie haben also gleiche Höhe *, und verhalten sich folglich, jene sowohl als diese, wie ihre Grundlinien AO,
*2 f. 1. OC *, sind also Proportionalflächen.

[LEHRSATZ 8.]

Fig. 20. *Zwey grade Linien FH, GI, welche man durch einen Punkt E in der Diagonale eines Parallelogramms ABCD, mit den Seiten parallel zieht, theilen*

1) die Flächen in vier kleinere Parallelogramme, welche unter sich, und mit dem Gegebnen, gleichwinklig und proportional sind,

und 2) die Seiten in zwey proportionale Abschnitte.

3) Die parallelen Seiten der Parallelogramme um die Diagonale, GF, HI, AC, stehn in *gleichem Verhältniſs, und die Ergänzungen dieſer Parallelogramme, EA, EC, haben gleichen Inhalt, und ſind mittlere Proportionalflächen zwiſchen jenen.*

4) *Wenn das gegebene Parallelogramm ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, ſo ſind auch die beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale Rhomben oder Quadrate aus beyden Abſchnitten der gegebnen Seite, und die beyden Ergänzungen decken ſich; und zwar ſind ſie im Fall eines Quadrats Rechtecke, die aus den beyden Abſchnitten der gegebnen Seite beſchrieben ſind.*

1) Vermöge der Conſtruction ſind AB, HF, DC miteinander parallel, und ſo auch AD, GI, BC. Beym Durchſchneiden dieſer Linien entſtehn alſo lauter Parallelen zwiſchen Parallelen, folglich lauter *Parallelogramme*, die unter ſich und mit dem gegebnen *gleichwinklig* ſind.

Je zwey derſelben, welche an einander liegen, z. B. HI, EC, haben gleiche Höhe, verhalten ſich folglich wie ihre Grundlinien HE, EF *. Dieſen Linien ſind die Grundlinien der beyden andern, ebenfalls gleich hohen Parallelogramme AE, GF gleich. Mithin ſind dieſe vier Parallelogramme *Proportionalflächen*, oder es iſt p HI : p EC : p HC = p AE : p GF : p AF = p AI : p GC : p AC *. *5. f. 1. *V. 4. β.

2) Weil EH mit AB, und EI mit BC parallel iſt, werden in den Dreyecken BDA, BDC die Schenkel DA, DC beyde dem gemeinſchaftlichen Schenkel DB

* 7. I. proportional *, folglich auch *untereinander* selbst *pro-*
* Gr. I. *portional getheilt* *, so dass sich verhält DH : HA : DA = DI : IC : DC.

3) Jedes der *Parallelogramme um die Diagonale*, HI, GF, AC, ist aus zwey Seiten beschrieben, welche in dieser proportionalen Theilung übereinstimmen-
* 8. α. de Glieder ausmachen *, das erste aus den ersten Gliedern DH, DI, das zweyte aus den zweyten HA, IC, das dritte aus den dritten DA, DC. Folglich stehen die *parallelen Seiten* dieser Parallelogramms *in gleichem Verhältniss*. (Hingegen sind die *Ergänzungen* aus den nicht-übereinstimmenden Gliedern dieser proportional getheilten Glieder beschrieben).

Da Parallelogramme, die einerley Höhe haben, sich
*5. f. I. wie ihre Grundlinien verhalten *, so verhält sich ver-
* (2) möge der obigen Proportionalität * p DE : p. HG = p DE : p IF, daher wegen Gleichheit der Vorderglieder auch die Hinterglieder, Parallelogramm HG und Parallelogramm IF gleich seyn müssen. *Die beyden Ergänzungen* haben also immer *gleichen Inhalt*, und es ver-
* (1) hält sich mithin * p DE : p HG = p HG : p EB oder p DE : p DG = p DG : p DB, so dass die Ergänzungen die *mittleren Proportionalflächen* zwischen den Parallelogrammen um die Diagonale sind.

4) Ist das gegebene Parallelogramm ein *Rhombus* oder ein *Quadrat*, so stehn dessen Seiten, mithin auch
* (1) die übereinstimmenden Abschnitte derselben *, im
* E. 8. Verhältniss der Gleichheit *. Folglich sind dann die
α, β. beyden kleinen Parallelogramme um die Diagonale

HI, GF, auch gleichſeitig *, und überdem mit dem * (3)
Gegebnen gleichwinklig *, mithin Rhomben oder * (1)
Quadrate, und zwar jenes aus dem Abſchnitt AG, dieſes iſt aus dem Abſchnitt GB beſchrieben. — Die Seiten der Ergänzungen ſind dann gleichfalls untereinander gleich *, beyde Ergänzungen decken ſich *, und * (3) *I.34Z1
im Fall des Quadrats iſt jede das Rechteck aus AG, GB.

Zuſatz I. *Auch wenn man durch mehrere Punkte der Diagonale, z. B. durch E und L,* (oder durch Punkte in der Verlängerung der Diagonale) *Parallellinien mit den Seiten des Parallelogramms AC zieht, wird das Parallelogramm in lauter gleichwinklige Parallelogramme getheilt, von denen die Ausſagen des Lehrſatze gelten.* Denn alsdann ſind die Parallelogramme HI und MN beyde auf die Art, wie es der Lehrſatz vorausſetzt, eingetheilt; folglich haben die Parallelogramme um die Diagonale, LD, EL, ED, BE, BL und BD insgeſammt proportionale Seiten, und ſind, falls das Gegebene BD ein Rhombus oder Quadrat iſt, alleſammt Rhomben oder Quadrate, über den Abſchnitten der Seite AB beſchrieben *. Die Ergänzungen LI und * (3)
LH, EN und EM, EC und EA und folglich auch NI und MH, ſind von gleichem Inhalt, und falls AC ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, decken ſie ſich, und ſind aus je zwey Abſchnitten der gegebnen Seite AB beſchrieben. Endlich ſind EN, EC, GC mittlere Proportionalflächen zwiſchen GF, und zwiſchen EL, ED, BD u. ſ. f.

Zuſatz II. *Nimmt man auf der einen Seite eines Parallelogramms AC einen Punkt G, und auf der daran*

stoſsenden Seite einen Punkt F, ſo daſs B und BF in dem-
*Ag. 4. *ſelben Verhältniſs als die Seiten BA und BC ſtehn *, und zieht durch G und F mit den Seiten des Parallelogramms Parallellinien GI, FH; ſo durchſchneiden ſich dieſe beyden Parallellinien in einem Punkte E, der in der Diagonale des gegebnen Parallelogramms liegt.*

Denn da durch einen Punkt F nur eine einzige Pa-
*124.Z 2 rallellinie EF mit einer graden Linie AB *, ſo wie zu drey gegebnen Linien nur eine einzige vierte Pro-
*V. 3.α. portionallinie möglich iſt *, und nach unſerm Lehrſatz die Parallellinie EF die Seite BC ſo durchſchneidet, daſs BA : BC ſich verhält wie BG : BF; ſo muſs, wenn man umgekehrt den Punkt F dieſer Proportion gemäſs beſtimmt, und durch ihn eine Parallellinie mit der Seite AB zieht, dieſe Parallellinie durch den Punkt E gehn, worin die Parallellinie GI die Diagonale durchſchneidet. *Folglich gelten von den ſo gezognen Parallellinien alle Ausſagen unſers Lehrſatzes;* und alſo auch ins beſondere, wenn AC ein Rhombus oder ein Quadrat iſt, und man BF gleich BG nimmt.

Zuſatz III. Daſſelbe iſt endlich der Fall, wenn man *zwey gleichwinklige Parallelogramme*, deren Seiten in gleichem Verhältniſs ſtehn, wie GF, HI, ſo *aneinander*, oder wie GF, AC ſo *in einander* ſetzt, daſs die proportionalen Seiten in grader Linie liegen, und wenn man dann durch Verlängerung der Seiten dieſer Parallelogramme, das Parallelogramm AC ergänzt.

Anmerk.

Anmerkung. Die Sätze kommen Theilweiſe ſchon bey *Euklid* vor I. 43, VI. 24 und 26, und X. 54 Lemma. Bey Le Gendre fehlen ſie, obſchon ſie gleich bey den folgenden Sätzen, und noch mehr für die Verwandlung der Figuren, und für die geometriſche Analyſis von Nutzen ſind.

d. U.

LEHRSATZ 9.

Ein Quadrat aus einer zweytheiligen Linie AC Fig. 21.
iſt den Quadraten über den beyden Abſchnitten AB, BC, und zwey Rechtecken, welche aus den beyden Abſchnitten beſchrieben ſind, zuſammengenommen gleich; oder es iſt AC^2 *d. h.* $(AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2\, AB \times BC$.

Beſchreibe über AC ein Quadrat ACDE *, nimm *II.A.11
AF gleich AB, und ziehe FG mit AB, und BH mit AE parallel. Dem vorigen Lehrſatz gemäſs theilen dieſe Parallellinien das Quadrat über AC in zwey Quadrate AI, ID, welche über den beyden Abſchnitten AB, BC der Seite des gegebnen Quadrats *beſchrieben * 8. (2)
ſind, und in zwey ſich deckende Rechtecke IE, IC, deren jedes aus dieſen beyden Abſchnitten beſchrieben iſt *. Folglich iſt $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\, AB \times BC$. * 8. (3)

Dieſer Satz läuft auf den arithmetiſchen hinaus, welcher die Zuſammenſetzung der zweyten Potenz einer zweytheiligen Zahl, aus den beyden Theilen derſelben, ausſagt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

[*Folgerung.* Fügt man zu den Gröſsen, welche der Lehrſatz als gleich angiebt, beyderſeits noch das

Quadrat aus dem einen Abschnitt, z. B BC^2, hinzu, so wird, weil $2 . BC^2 + 2 . AB \times BC$ gleich ist $2 . BC \times$
*E. 5. α. $(AB + BC)$ d. h. gleich $2\, BC \times AC$ *, auch

$$AC^2 + BC^2 = 2 . BC \times AC + AB^2$$

eine Eigenschaft, die also gleichfalls von jeder zweytheiligen Linie gilt, und deren Wahrheit auch in Fig. 20 sogleich in die Augen fällt.]

Fig. 22. [Zusatz I. *Besteht eine grade Linie AB aus mehreren Abschnitten, AR, RS, SB etc., so ist das Quadrat derselben gleichfalls den Quadraten aller einzelnen Abschnitte und den doppelten Rechtecken aus je zwey Abschnitten zusammengenommen gleich, oder* $AB^2 = AR^2 + RS^2 + SB^2 + 2\, AR \times RS + 2\, AR \times SB + 2\, RS \times SB$ (ein Ausdruck, in welchem man statt der doppelten Rechtecke auch die Rechtecke $2\, AR \times RB + 2\, RS \times SB$ set-
*E. 5. α zen kann *). Denn auch hier sind wiederum *erstens* die Rechtecke an der Diagonale α, β, γ, Quadrate, und zwar die Quadrate aus den einzelnen Abschnitten der gegebnen Linie AB. *Zweytens* sind unter den Ergänzungsrechtecken je zwey einander gleich δ und δ, ε und ε, ζ und ζ etc., und diese Rechtecke sind überdem aus je zwey der verschiednen Abschnitte beschrieben, $\delta = AR \times RS$, $\varepsilon = AR \times SB$, $\zeta = RS \times SB$ etc. *
*8. Z. 1.

Zusatz II. Diese drey Rechtecke sind zusammengenommen gleich $AR \times RB + RS \times SB$ *, oder
*E. 5. α. auch $AR \times RS + AS \times SB$, oder auch $RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, je nachdem man zwey, die einerley Höhe haben, in ein Rechteck zusammen nimmt. Daraus folgt

1) dafs *bey jeder dreytheiligen Linie* $AR \times RB + RS \times SB = BS \times SA + SR \times RA$ *ist*, und dafs diese Eigenschaft auf ähnliche Art *für jede* in noch so viel Abschnitte *getheilte Linien gilt* (Gregor von St. Vincenz B. 1. S. 55.)

2) Dafs eben so *für jede dreytheilige Linie* $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$ *ist*. Denn fügt man zum ersten und dritten jener Ausdrücke beyderseits RS^2 hinzu, so wird $AR \times RB + RS \times SB + RS^2 = RS^2 + RS \times (AR + SB) + AR \times SB$, oder, da $AR \times RB + RS \times RB$ gleich $AS \times RB$ ist, $AS \times RB = RS \times AB + AR \times SB$; eine artige Eigenschaft *dreytheiliger Linien*, auf welcher *Euler* den Beweis eines Satzes baut, den man vor ihm noch nicht bewiesen hatte, und den man im folgenden Buche findet.

Zusatz III. Da die dreytheilige Linie AB, erstens aus den beyden Abschnitten AS, SB besteht, so ist vermöge der Folgerung zu unserm Lehrsatz $AB^2 + BS^2 = 2\,BS \times AB + AS^2$; und da zweytens auch AS aus zwey Theilen AR, RS besteht, $AS^2 + RS^2 = 2\,RS \times AS + AR^2$. Folglich ist *für jede dreytheilige Linie* auch $AB^2 + BS^2 + RS^2 = 2\,BS \times AB + 2\,RS \times AS + AR^2$.

Anmerkung. Dem ersten dieser Sätze ist der arithmetische Satz $a\,(b + c) + bc = c\,(a + b) + ab$, dem zweyten der arithmetische Satz $(a + b)\,(b + c) = b\,(a + b + c) + ac$ analog.

LEHRSATZ 10.

Fig. 23. *Ein Quadrat aus einer Linie AC, welche der Unterschied zweyer Linien AB, BC ist, beschrieben, ist gleich den Quadraten dieser beyden Linien zusammen genommen, weniger zweymal dem Rechteck aus beyden Linien AB, BC; oder es ist AC^2 d. h. $(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2 . AB \times BC$.*

Beschreibe über AC das Quadrat ABIF, mache AE gleich AC, und ziehe CG mit AF, und HE mit IF parallel, so wird das erstere Quadrat durch diese Parallellinie, wie Lehrsatz 8 Zusatz 2 aussagt, eingetheilt. Beschreibt man folglich noch über EF, welches gleich BC ist, das Quadrat EFLK gleich BC^2, so ist; dieses sammt AI, d. i. dem Quadrat über AB, gleich AD d. i. dem Quadrat aus AC und den beyden Rechtecken CBIG, GLKD. Jedes dieser Rechtecke ist aber aus AB = LG und BC beschrieben, und folglich $AB^2 + BC^2 - 2\, AB \times BC = AC^2$.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a - b)^2 = a^2 - 2\, ab + b^2$.

LEHRSATZ 11.

Fig. 24. *Ein Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien AB, BC beschrieben, ist dem Unterschiede der Quadrate aus beyden Linien gleich, oder $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$.*

Beschreibe über AB und so auch über AC ein Quadrat, verlängere AB um BK, gleich BC, und vollende das Rechteck KCDL und das Quadrat DHIG.

Die Grundlinie AK jenes Rechtecks ist der Summe, die Höhe desselben AE dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC gleich, und folglich ist jenes Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede der beyden Linien AB, BC beschrieben, oder Rechteck $AKLE = (AB + BC) \times (AB - BC.)$ Nun besteht dieses Rechteck aus den beyden Stücken ABHE und BKLH, welches letztere dem Rechteck EDGF gleich ist, da beyde aus den Linien AC, CB beschrieben sind *. Also ist $AKLE = ABHE + EDGF$. Diese beyden Stücke sind aber gleich dem Quadrat über AB, weniger dem Quadrat über DH, d.i.h. über BC; also ist $AKLE = AB^2 - BC^2$, und deshalb $(AB + BC) \times (AB - BC) = AB^2 - BC^2$. * 8. Z. 2.

Dieser Satz läuft auf den arithmetischen hinaus: $(a + b).(a - b) = a^2 - b^2$.

[*Folgerung* 1. α) *Ist eine grade Linie MN im Punkte O in zwey gleiche, im Punkte P dagegen in zwey ungleiche Theile getheilt*, ($MO = ON$ und $MP > PN$;) so ist $MP = MO + OP$, und $NP = ON - OP = MO - OP$ und folglich stets Fig. 25.

$$MP \times NP = MO^2 - OP^2$$

β) *Nimmt man auf der Verlängerung einer solchen Linie MN, welche in O gleich getheilt ist, einen Punkt p*, so ist $Mp = Op + MO$ und $Np = Op - MO$ folglich stets

$$Mp \times Np = Op^2 - MO^2.$$

In beyden Fällen ist also das Rehteck aus den beyden ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np dem Unterschiede der Quadrate aus der Hälfte der Linie MN und aus dem

Abstand der beyden Theilpunkte O, P oder O, p (welche die Linie in gleiche und ungleiche Theile zerschneiden), *von einander gleich.* — Der Lehrsatz gehört in dieser Form zu den fruchtbarern Sätzen der Geometrie, ist in ihr in geometrischen Untersuchungen von nicht minderm Gebrauch, als der Analoge arithmetische in der Buchstabenrechnung, und verdient vorzüglich gemerkt zu werden. Schon in den Zusätzen zu diesem Lehrsatze findet man einige interessante Anwendungen desselben.]

[*Folgerung* 2. Verbindet man mit diesen Sätzen Lehrsatz 9 und 10, so geben sie noch ein Paar ähnliche Sätze, die gleichfalls Bemerkung verdienen, obgleich sie nicht von so häufigem Gebrauch als die vorigen sind.

α) Im *ersten Fall* war nemlich MP + NP = MN = 2. MO. Folglich müssen auch die Quadrate dieser
Z. 4. β. gleichen Linien gleich seyn, mithin $MP^2 + NP^2 +$
* 9. $2\,MP \times NP$ * $= 4 . MO^2$ *. Da nun in diesem Fall
*4. Z. 3. nach Folgerung 1. α. auch $2\,MP \times NP = 2 . MO^2 - 2 . OP^2$ ist, so folgt hieraus, wenn wir Gleiches von Gleichem abziehn,

$$MP^2 + NP^2 = 2 . MO^2 + 2 . OP^2.$$

Denn da die Gröfse die wir abziehn sollen um $2 . OP^2$ kleiner als $2 . MO^2$ ist, so ziehn wir, wenn wir $2 . MO^2$ wegnehmen, um $2 . OP^2$ zu viel ab, müssen also zum Reste, der bey jener Wegnahme bleibt, $2 . OP^2$ hinzufügen, um den richtigen Unterschied zu erhalten.

β) Im *zweyten Fall* war $Mp - Np = MN = 2 . MO$. Folglich sind auch die Quadrate dieser Linien gleich, also $Mp^2 + Np^2 - 2 . Mp \times Np$ * $= 4 . MO^2$. Da * 10.
nun nach Folgerung 1. β. in diesem Fall, $2 . Mp \times Np = 2 . Op^2 - 2 . MO^2$ ist, so folgt daraus, wenn wir Gleiches zu Gleichem hinzufügen

$$Mp^2 + Np^2 = 2 . MO^2 + 2 . OP^2.$$

In beyden Fällen ist also die Summe der Quadrate aus den ungleichen Stücken MP, NP oder Mp, Np gleich dem doppelten Quadrat der halben Linie MN, und des Abstands der beyden Theilpunkte O, P oder O, p von einander. Dieser Satz läuft auf den arithmethischen hinaus: $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 . a^2 + 2 . b^2$.]

[*Folgerung* 3. Im *zweyten Fall* der ersten Folgerung, d. h. wenn $Mp = MN + Np = 2 . MO + Np$ ist, ist auch $Mp^2 = 4 . MO^2 + 4 . MO \times Np + Np^2$ * * 9.
oder, da $MO + Np = Op$, und folglich $MO^2 + MO \times Np = MO \times Op$ ist *, * 3. f. 2.

$$Mp^2 = 4 . MO \times Op + Np^2$$

ein Satz der auf den arithmethischen hinausläuft $(2a + b)^2 = 4 . a . (a + b) + b^2$].

Anmerkung. Man sieht leicht, dass man solche Sätze nach Anleitung analoger arithmetischer ins Unbestimmte vervielfältigen kann, und das ist vielleicht der Grund, warum *Le Gendre* und *Simpson* die fünf Sätze, die in diesen Folgerungen stehn, ganz weggelassen haben; doch sehr mit Unrecht, da durch sie manche Beweise sich abkürzen, und ohne sie die Schriften alter Geometer sich nicht ohne Anstoss verstehn lassen. Bey *Euklid* machen sie im zweyten Buch der Elemente fünf besondre Lehrsätze aus, und werden sehr umständlich, jeder durch besondere

Constructionen bewiesen. Diese Beweise sind besonders für die beyden Sätze in der zweyten Folgerung, die von Euklid aus dem Pythagoreischen Lehrsatz abgeleitet werden, ermüdend weitläufig. Sollte Euklid diese langen Umwege, nach welchen blos die Beweise dieser beyden Sätze zwey enggedruckte Seiten füllen, nicht bloss deshalb erwählt haben, weil die arithmetischen Vorstellungsarten, mittelst derer wir sie abgeleitet haben, den ältern Geometern noch nicht so recht geläufig waren.

Mit ähnlichen Sätzen ist fast jedes geometrische Werk, welches tiefer in die Wissenschaft hineingeht, reichlich ausgestattet. Nun ist es zwar nicht zu leugnen, dass Sätze von dieser Art, zur gelegnen Zeit gebraucht, geometrische Untersuchungen ausserordentlich abkürzen können; allein sie sind jedesmal, besonders auf arithmetischem Wege, (durch die einfachste Buchstabenrechnung) so leicht zu finden, dass es in der That unnütz und schädlich ist, mit ihnen die geometrischen Werke zu überfüllen. Sie haben in der geometrischen Analysis einen ähnlichen Nutzen, wie die Verwandlung einer Formel in die andre in der Buchstabenrechnung, und billig nimmt man daher diese bey jener mit zu Hülfe. *Clavius*, *Gregor von St. Vincenz* und selbst *Tacquet* standen noch in der Meynung, die Regeln der Buchstabenrechnung müssten aus diesen geometrischen Sätzen abgeleitet, und durch sie bewiesen werden; ein sonderbarer Wahn, welcher zeigt, wie sehr noch vor hundert Jahren die arithmetischen Wissenschaften in ihrer Kindheit lagen, und der vielleicht nicht wenig dazu mag beygetragen haben, die geometrischen Werke mit Sätzen über Rechtecke und Quadrate aus Linien, welche nach einer gewissen Art eingetheilt sind, so sehr zu überladen. Von solchen Sätzen führe ich hier nur noch ein Paar an, die den Sätzen in der ersten Folgerung ähnlich sind; *Sind an einer Linie CD zwey gleiche Linien AC, DB angesetzt, so ist immer* $CB^2 = AB^2 + AB \times CD$, *und nimmt man in der Linie CD irgend einen beliebigen Punkt E, so ist* $AE \times EB = DE \times EA + EC \times CA + AC^2$ (*Gregor von St. Vinc.* B. 1. S. 57. 58.)

Fig. 26

d. U.

[Zusatz I. *Unter allen Rechtecken die sich aus zwey Abschnitten einer gegebnen graden Linie MN bilden lassen, ist das Quadrat über ihre Hälfte MO das gröſste, und der Inhalt wird immer kleiner, je mehr die Abschnitte MP, PN verschieden sind.* Denn denkt man sich die Linie in O gleich, und in P ungleich getheilt, so ist, nach Folgerung 1. α., $MP \times NP = MO^2 - OP^2$, und dieser subtractive Theil OP^2 wächst mit dem Unterschiede der beyden ungleichen Theile, und nimmt mit demselben ab, und fällt ganz fort, wenn beyde Abschnitte gleich sind. Fig. 25.

α) *Unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat mithin das Quadrat den gröſsten Inhalt.*

β) Und wenn zwey Rechtecke, welche aus Abschnitten gleicher Linien beschrieben sind, gleichen Inhalt haben, so sind auch die Abschnitte, welche ihre Seiten bilden, selbst gleich.

Zusatz II. Dagegen wird *die Summe der Quadrate aus den beyden Abschnitten MP, NP kleiner, wenn der Unterschied der beyden Abschnitte von einander abnimmt.* Denn da die Summe dieser Quadrate $MP^2 + NP^2 = MN^2 - 2 . MP \times PN$ ist *; nimmt sie ab, wenn das Rechteck aus den beyden Abschnitten MP, PN zunimmt, folglich wenn die beyden Abschnitte von einander weniger verschieden werden. (Eukl. X. 42. Lemma).]

* 9.

LEHRSATZ 12.

Das Quadrat der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreyecks ABC ist gleich den Quadraten Fig. 27.

über den beyden Katheten zusammen genommen, oder $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Es sey ABC ein bey A rechtwinkliges Dreyeck, über dessen Seiten Quadrate beschrieben sind. Fälle vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse ein Perpendikel AD, welches verlängert, die gegenüberstehende Seite des Quadrats in E durchschneide; so läuft dieses Perpendikel mit den Perpen-
*I.E.19. dikeln BF, CG parallel * und theilt also das Quadrat der Hypotenuse in zwey Rechtecke DF, DG. Jedes dieser Rechtecke, behaupte ich, ist dem Quadrat über einer Kathete, mit dem es einen Eckpunkt gemein hat, gleich.

Der Winkel ABF besteht aus dem Stücke ABC und dem rechten Winkel CBF; eben so besteht der Winkel CBH aus demselben Stück ABC und dem rechten Winkel ABH. Also sind die beyden Winkel ABF, HBC gleich. Ueberdem sind die Schenkel des einen den Schenkeln des andern gleich, indem, als Seiten eines Quadrats, AB = BH und BF = BC ist. Zieht man folglich AF und CH, so entstehn zwey Dreyecke ABF, HBC, welche sich decken, und mithin gleichen
* I. 6. Inhalt haben *.

Nun ist aber der Inhalt des Dreyecks ABF halb so groſs als der des Rechtecks BE, welches mit jenem Dreyeck über gleicher Grundlinie BF steht, und zwi-
* 2. schen gleichen Parallelen BF, AE liegt *. Eben so ist der Inhalt des Dreyecks HBC halb so groſs als der des Quadrats AH, indem beyde über der Grundlinie HB stehn, und zwischen den Parallelen HB, LA liegen,

von welcher letztern AC eine bloſse Verlängerung iſt, da BAL, BAC beyde rechte Winkel, folglich LA, AC in grader Linie ſind *. Daraus daſs der Inhalt der bey- *I. 4. den Dreyecke ABF, HBC gleich iſt, folgt alſo, daſs das Rechteck BE, als das Doppelte des Dreyecks ABF, dem Quadrat AH als dem Doppelten des Dreyecks HBC, dem Inhalt nach gleich ſeyn muſs.

Grade auf dieſelbe Art läſs ſich darthun, daſs das Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Flächenraum hat, indem, wenn man AG und BI zieht, ebenfalls zwey ſich deckende Dreyecke ACG, ICB entſtehn, welche die Hälften jener Vierecke ſind.

Folglich ſind beyde Quadrate AH, AI den beyden Rechtecken BE DG zuſammengenommen, mithin dem Quadrat der Hypotenuſe gleich, oder es iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[Dieſen Satz, einen der Wichtigſten in der Geometrie, ſoll nach der allgemeinen Sage des Alterthums *Pythagoras* erfunden haben, und er wird deshalb gewöhnlich der *pythagoreiſche Lehrſatz* genannt.]

*Folgerung 1. Das Quadrat einer der Katheten iſt gleich dem Quadrat der Hypotenuſe, weniger dem Quadrat der andern Kathete *, z. B.* $AB^2 = BC^2 - AC^2$. Mit- *Gr.2.β hin iſt das Quadrat einer der Katheten auch gleich einem Rechtecke, welches aus der Summe und und dem Unterſchiede der Hypotenuſe und der andern Kathete beſchrieben iſt, oder $AB^2 = (BC + AC) \times (BC - AC)$ * *II.

[*Folgerung* 2. Unſerm Beweiſe gemäſs hat das Rechteck BE mit dem Quadrate AH, und eben ſo das

Rechteck DG mit dem Quadrate AI gleichen Inhalt.

α) *Ein Perpendikel AD, welches aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreyecks auf die Hypotenuſe gefällt wird, zerſchneidet dieſe folglich ſo, daſs das Rechteck aus jedem der beyden Abſchnitte und der ganzen Hypotenuſe, dem Quadrate derjenigen Kathete, welche an dem Abſchnitte anliegt, gleich iſt, oder daſs* $BD \times BC = AB^2$ *und* $CD \times BC = AC^2$ *iſt.*

β) *Das rechtwinklige Dreyeck ſelbſt* wird durch das Perpendikel AD *in zwey kleinere rechtwinklige Dreyecke ABD, ACD zerfällt*, und zwar ſind dieſe untereinander und mit dem Ganzen *gleichwinklig*, indem die Winkel $B + BAD$ und $BAD + DAC$ beyde einem Rechten
*I 31. f. 2 gleich *, mithin $B = DAC$ und $C = DAB$ ſind.

γ) Von jedem dieſer kleinern Dreyecke gilt alſo
* (f. 1.) auch das Bewieſene, und es iſt $AD^2 = AB^2 - BD^2$ * =
* (α) $BD \times BC$ * $- BD^2 = BD \times (BC - BD)$ *, alſo AD^2
*E. 5. γ. $= BD \times DC$. *Das Quadrat über dem Perpendikel iſt alſo dem Rechteck aus den beyden Abſchnitten der Hypotenuſe gleich*; eine elegante und fruchtbare Eigenſchaft des rechtwinkligen Dreyecks.

δ) Verbindet man hiermit den Satz, daſs die Sei-
*4. f. 1. ten gleicher Rechtecke verkehrt proportional ſind *, ſo folgt aus γ, daſs ſich ſtets verhält $BD : AD = AD : DC$, und eben ſo folgen aus α, die Proportionen $BD : AB = AB : BC$ und $CD : AC = AC : BC$. Alſo wird *die Hypotenuſe durch das Perpendikel AD ſo zerſchnitten, daſs 1) dieſes Perpendikel ſelbſt die mittlere Proportionallinie zwi-*

ſchen den beyden Abſchnitten, *2) *jede der Katheten die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Abſchnitt unter der Kathete und der ganzen Hypotenuſe iſt.* Hierauf werden wir einfache Methoden gründen, um zu zwey gegegebnen Linien, oder zu einer Linie und einem Abſchnitt derſelben, mittlere Proportionallinien zu finden, und gegebne Rechtecke in Quadrate zu verwandeln. * V. 5.

ε) *Die Quadrate der beyden Katheten und der Hypotenuſe verhalten ſich zu einander, wie die beyden Abſchnitte der Hypotenuſe untereinander und zur ganzen Hypotenuſe, oder*

$$AB^2 : AC^2 : BC^2 = BD : DC : BC.$$

Denn die Rechtecke BE, DG, BG, denen jene Quadrate gleich ſind, haben die Hypotenuſe zur gemeinſchaftlichen Höhe, verhalten ſich alſo wie ihre Grundlinien *. — Durch Bildung eines rechtwinkligen Dreyecks wird es alſo möglich ſeyn Linien darzuſtellen, die ſich wie zwey gegebne Quadrate verhalten, und umgekehrt.] * 3.

[Folgerung 3. α) *Das Rechteck aus den beyden Katheten hat gleichen Inhalt mit dem Rechteck aus der Hypotenuſe und aus dem Perpendikel, oder* $AB \times AC = AD \times BC$. Denn dieſe beyden Rechtecke haben mit dem rechtwinkligen Dreyeck gleiche Grundlinien und Höhe, folglich beyde einen doppelt ſo groſsen Inhalt als dieſes Dreyeck, und mithin beyde einen gleichen Flächenraum. (Euklid. X. 34. Lemma)

β) *Der Inhalt des rechtwinkligen Dreyecks* ſelbſt iſt gleich $\frac{1}{2}$ AB × AC oder $\frac{1}{2}$ AD × BC, und *verhält ſich* *zum Quadrat der Hypotenuse wie* $\frac{1}{2}$ *AD : BC;* und *zum Quadrat über einer Kathete, z.B. über AB, wie* $\frac{1}{2}$ *AC : AB oder wie* $\frac{1}{2}$ *AD : BD. Denn es ist*

$$\triangle ABC : BC^2 = \tfrac{1}{2} AD \times BC : BC^2 = \tfrac{1}{2} AD : BC \text{ und}$$

$$\triangle ABC : AB^2 = \tfrac{1}{2} AB \times AC : AB^2 = \tfrac{1}{2} AC : AB$$

$$\text{oder} = \tfrac{1}{2} AD \times BC : BD \times BC = \tfrac{1}{2} AD : BD.$$

γ) Da bey zwey gleichen Verhältnissen die Vorderglieder auch dem Doppelten der Hinterglieder pro-
*V. 4. η. portional sind *, so verhält sich

$$\triangle ABC : BC^2 + AB^2 + AC^2 = \tfrac{1}{2} AD : 2\,BC$$
$$= AD : 4\,BC.$$

(Gregor von St. Vincenz I. 23. 24.)

[Folgerung 4. Fällt man *im gleichschenkligen Drey-*
Fig. 28. *eck* ABC, aus der Spitze eines der gleichen Winkel an der Grundlinie, z. B. aus B, ein Perpendikel BD auf den gegenüberliegenden Schenkel, so ist *die Summe der Quadrate über alle drey Seiten des Dreyecks gleich* $CD^2 + 2\,AD^2 + 3\,BD^2$. Denn es ist $BC^2 = CD^2 + BD^2$ und $AB^2 = AC^2 = AD^2 + BD^2$, folglich $BC^2 + AB^2 + AC^2 = CD^2 + 2\,AD^2 + 3\,BD^2$. (Gregor von St. Vincenz I. 40.)

Sätze die ich mehr ihrer Nettigkeit als ihrer Brauchbarkeit halber hier mit aufnehme.]

Fig. 29. Zusatz. Ein Quadrat ABCD wird durch die Diagonale AC in zwey rechtwinklige Dreyecke getheilt, wovon jedes, wie z. B. ABC, gleichschenklig ist. Also sind die beyden Quadrate über die Katheten dieses Dreyecks einander gleich, folglich $AC^2 = 2 \cdot AB^2$. *In jedem Quadrate ist folglich das Quadrat der Diagonale doppelt so groß als das Quadrat einer der*

Seiten. — Dieses läſst ſich auch ſo beweiſen. Man ziehe durch die gegenüberſtehenden Winkelpunkte des Quadrats Parallellinien mit der zwiſchen ihnen liegenden Diagonale, ſo entſteht dadurch ein Parallelogramm EFGH, welches, da beyde Diagonalen gleich und auf einander ſenkrecht ſind *, das Quadrat der Diagonale iſt. Dieſes Quadrat enthält 8 rechtwinklige Dreyecke in ſich, die ſich decken, und deren 4 das Quadrat ABCD ausmachen; daher jenes Quadrat das Doppelte von dieſem iſt. * I. 37.

Es verhalten ſich alſo in jedem Quadrate ABCD, die über eine der Diagonalen und über eine der Seiten beſchriebnen Quadrate $AC^2 : AB^2 = 2 : 1$, *folglich die* Seiten dieſer beyden Quadrate, wie die Quadratwurzeln aus 2 und 1 *, oder $AC : AB = \sqrt{2} : 1$. Dieſe beyden Linien haben alſo *ein irrationales Zahlverhältniſs, und mithin ſind die Diagonale und die Seite eines jeden Quadrats untereinander incommenſurabel* *; ein Satz, womit Euklid ſeine Abhandlung über incommenſurable Flächen ſchlieſst (X. 117), und den wir weiterhin noch auf eine andre Art beweiſen werden. *4. Z 3. γ *II. Auf. 19. a.

[L E H R S A T Z 13.]

In jedem ſchiefwinkligen Dreyeck iſt das Quadrat einer Seite BC, welche einem **ſpitzen Winkel** *A gegenüber ſteht,* **kleiner**, *dagegen das Quadrat einer Seite bc, welche einem* **ſtumpfen Winkel** *a gegenüber ſteht,* **gröſser** *als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten. Und* Fig. 30.

zwar, wenn man von einem der Endpunkte dieſer Seite, z. B. aus B, auf die gegenüberſtehende Seite AC, oder deren Verlängerung, ein Perpendikel fällt; ſo iſt das doppelte Rechteck aus AC und dem Abſchnitte dieſer Seite, welcher am Winkelpunkte A (nicht an BC) anliegt, jenem Unterſchiede gleich. Oder es iſt

1) *wenn der Winkel A ſpitz iſt,*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC \times AD$$

2) *wenn dagegen der Winkel a ſtumpf iſt,*

$$bc^2 = ab^2 + ac^2 + 2\,ac \times ad$$

1. Iſt A eine *ſpitzer* Winkel, ſo liegt das Perpendikel BD zwiſchen den beyden Schenkeln dieſes Winkels, und folglich mit der Grundlinie des Dreyecks,
* I. 16. Z. 2. d. h. mit AB auf einerley Seite des Punktes A *. Iſt überdem auch der Winkel C ſpitz, ſo fällt das Perpendikel BD innerhalb des Dreyecks, und es iſt CD = AC — AD; iſt dagegen der Winkel C ſtumpf, ſo fällt das Perpendikel BD über den Schenhel LC hinaus,
*I. 16. Z. 2. f. 2. auſserhalb des Dreyecks *, und es iſt umgekehrt CD = AD — AC. In beyden Fällen iſt alſo CD dem Unterſchiede zwiſchen AC und AD gleich, nur daſs im erſten Fall die Grundlinie AC, im zweyten AD gröſser iſt; und mithin iſt in beyden Fällen gleichmäſsig
* 10. $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2\,AC \times AD$ *. Fügt man nun zu dieſen gleichen Flächenräumen beyderſeits BD^2 hinzu, und ſetzt ſtatt der Quadrate der beyden Katheten
* 12. $BD^2 + CD^2$, das Quadrat der Hypotenuſe, BC^2 *, und

und eben so statt $BD_2 + AD_2$, AB^2, so erhält man

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AC \times AD.$$

2) Ist a ein *stumpfer Winkel*, so liegt das Perpendikel bd ausserhalb beyder Schenkel*, (zwischen den Schenkeln des spitzen Nebenwinkels) und steht daher nicht auf der Grundlinie ac selbst, sondern auf deren Verlängerung auf, die in Absicht des Punktes a entgegengesetzt liegt. In diesem Fall ist also $cd = ad + ac$, folglich $cd^2 = ad^2 + ac^2 + 2\ ac \times ad$, und wenn man beyderseits bd_2 hinzufügt,

*I. 16 Z. 2. f. 2.

$$bc^2 = ab^2 + ac_2 + 2\ ac \times ad.$$

Folgerung 1. Der Winkel A mag also *spitz* oder *stumpf* seyn, so wird in beyden Fällen das Quadrat der gegenüberstehenden Seite BC, durch die Summe der Quadrate der anliegenden Seiten AB, AC, und durch das doppelte Rechteck 2 AC × AD bestimmt, nur dass dieses für spitze Winkel *abzuziehn*, für stumpfe *hinzuzufügen* ist. Die Aussage für beyde Fälle lassen sich daher bequem in folgende allgemeine zusammen ziehn

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$$

wo, wenn A spitz ist, für den letzten Theil das *obere* Zeichen, wenn A hingegen *stumpf* ist, das *untere* Zeichen gilt.

Ist A ein *rechter Winkel*, so muss dieser Theil fortfallen, damit wir die Aussage des *Pythagoreischen Lehrsatzes* erhalten. In der That fällt dann das Perpendikel BD mit der Kathete BA zusammen, daher dann kein

Abschnitt AD, mithin auch kein Rechteck AC × AD vorhanden ist.

Grade so liegt der Abschnitt AD, so lange der Winkel A spitz ist, mit der Grundlinie AC auf einerley Seite des Punktes A, hingegen wenn a stumpf ist, auf der entgegengesetzten Seite, hat also in diesem zweyten Fall eine entgegengesetzte Lage als im erstern, und von diesem Entgegengesetzten in der Lage des Abschnitts rührt es her, dass das Rechteck 2 AC × AD in beyden Fällen auf entgegengesetzte Art vorkömmt, in jenem wegzunehmen, in diesem hinzuzufügen ist.

Anmerkung 1. Dieses Entgegengesetzte in Absicht der Lage, (es sey nun zweyer Linien, oder zweyer Winkel, u. s. f.) in Fällen, die sich sonst ganz gleich sind, pflegt man *in der rechnenden Geometrie* durch die Benennungen *positiv* und *negativ* zu charakterisiren, indem man die Linien, Winkel u. s. f., welche dieselbe Lage als in dem Fall haben, von dem man ausgeht, *positive Linien*, *Winkel* u. s. f. nennt; diejenigen hingegen, die auf entgegengesetzte Art liegen, *negative Linien*, *Winkel* u. s. f. In so fern man sich dann bloss an den arithmetischen Sinn der geometrischen Sätze und Formeln hält, und es lediglich mit Zahlausdrücken für ausgedehnte Grössen zu thun hat, kann man das, was durch dieses Entgegengesetzte in der Lage, in den Sätzen und Formeln abgeändert wird, nach den Regeln der Rechnung mit entgegengesetzten Zahlgrössen, wie sie die Arithmetik entwickelt, beurtheilen, wobey uns die Aussage für einen einzigen Fall genügt, hier z. B. für den Fall eines spitzen Winkels, für den $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AD$ ist. Denn mittelst des Begriffs *negativer Grossen*, und den darauf gebauten Rechnungsregeln, liegt in dieser Formel zugleich die Aussage für den Fall eines stumpfen Winkels, für welchen AD auf eine entgegengesetzte Art als für den spitzen Winkel liegt, folglich einen *nega-*

tiven Zahlwerth erhält, daher alsdann das subtractive Produkt $2 AB \times AD$ den Regeln der Rechnung gemäss, in ein Additives übergeht. Allein *dieses Zusammenfassen mehrerer Fälle, die in allem, bis auf das Entgegengesetzte in der Lage gewisser Linien, Winkel u. s. f. übereinstimmen, in einen Einzigen*, gehört eigentlich nicht hierher, sondern *in die rechnende Geometrie*, welche eben dadurch so manche geometrische Untersuchung, die auf dem ostensiven Wege, durch die Menge solcher Fälle sehr weitläufig und langwierig wird, ausserordentlich abkürzt und erleichtert. Auf dem ostensiven, eigentlich geometrischen Wege, muss man diese Fälle *einzeln* betrachten, und für jeden die Aussage *einzeln* aufstellen und darthun, weil, wie gesagt, der Kunstgriff, alle Aussagen in Eine durch den Begriff des Negativen zusammenzufassen, und aus ihr zu entwickeln, auf arithmetischen Gründen beruht, und der rechnenden Geometrie ausschliesslich eigen ist.

Daraus folgt aber nicht, dass man im System der Geometrie aus solchen einzelnen Fällen auch *einzelne Sätze* machen müsse. Dadurch würde die Uebersicht und das Behalten viel zu sehr erschwert. Vielmehr muss man sie, wenn ich nicht irre, auch hier als blosse Modificationen eines und desselben Hauptsatzes unter einer allgemeinen Aussage zusammenstellen, die blos, je nachdem gewisse Linien, Winkel u. s. f. eine entgegengesetzte Lage haben, nüancirt wird. *Euklid*, *Le Gendre* und fast alle andern Geometer pflegen sie zwar durchgängig als einzelne Sätze aufzuführen, und machen so z. B. aus den beyden Fällen dieses Lehrsatzes, zwey verschiedne Sätze. Weil aber dadurch die Uebersicht der Wissenschaft in der That nicht wenig gestörht und erschwert wird, so glaube ich dieses für einen Fehler gegen die Methode halten zu müssen, den ich zu vermeiden durchgängig Bedacht gewesen bin. Diese Zusammenstellung gewährt überdem noch den Nutzen, dass sie von selbst darauf führt, genau nachzusehn, worin sich jedesmal die verschiednen Fälle unterscheiden, und wie sie sich mittelst des Begriffs des Negativen unter eine Aussage zusammenziehn, und aus ihr entwickeln lassen; Uebungen, die ich dem Anfänger recht sehr empfehle, und durch die er sich in dem rechten Sinne und dem Gebrauch dieses für die Analysis und ihre Anwendungen so wichtigen Begriffs festsetzen wird. Und zwar versuche er das sogleich an Lehrsatz 10 und bey den Folgerungen zu Lehrsatz 11, so wie bey den folgenden Lehrsätzen, bey denen ich hierauf nicht wieder zurückkommen werde.

Was unsern Lehrsatz betrifft, so umfasst er, wie wir gesehn haben, zugleich den *Pythagoreischen Lehrsatz*, als einen von *drey Hauptfällen*, und dehnt ihn mit gehörigen Modificationen auf alle Arten von Dreyecken aus. Und zwar beruhen diese drey Fälle unmittelbar auf der Beschaffenheit und Lage des Abschnitts AD, welcher den Abstand des Perpendikels BD vom Winkelpunkte A bestimmt, und folglich mittelbar auf der Beschaffenheit des Winkels A. Je nachdem dieser Winkel A *spitz*, *stumpf* oder *recht* ist, fällt das Perpendikel BD und zugleich der Abschnitt AD, entweder auf *die* Seite des Punktes A, auf welcher die Grundlinie AC des Dreyecks liegt, oder auf die entgegengesetzte Seite, oder in den Punkt A selbst hinein. Und das macht die Verschiedenheit der drey Fälle aus, und begründet die Verschiedenheit in der Aussage des Satzes. Dass indess selbst dieser so verallgemeinerte Satz sich wiederum nur als einen *besondern Fall* eines noch allgemeinern Satzes über das Dreyeck ansehn lasse; davon wird uns Lehrsatz 15 überzeugen.

Fig. 31. *Folgerung* 2. Fällt man aus beyden Endpunkten der Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks ABC, oder auf deren Verlängerungen, Perpendikel BD, CE; so ist, unserm Lehrsatz zu Folge, sowohl $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ als auch $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AB \times AE$; wo in beyden Fäl-

len das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A ſpitz oder ſtumpf iſt. Mithin muſs in jedem Dreyeck, der Winkel A ſey ſpitz oder ſtumpf, $AC \times AD = AB \times AE$ ſeyn, und folglich auch $AC : AB = AE : AD$ *. *4. f. 1.

Zieht man durch den Durchſchnittspunkt der beyden Perpendikel BD, CE die grade Linie AF, ſo ſteht auch dieſe auf der gegenüberſtehenden Seite BC ſenkrecht *; daher gleichfalls $BC \times BF = BA \times BE$ und $CA \times CD = CB \times CF$ iſt, und ſich auch verhält $BC : BA = BE : BF$ und $CA : CB = CF : CD$. * II. 25. Z. 2.

Perpendikel aus den Winkelpunkten eines Dreyecks auf die gegenüberſtehenden Seiten gefällt, durchſchneiden dieſe folglich ſo, daſs je zwey Rechtecke, welche aus einer Seite und demjenigen Abſchnitt derſelben, der an beyder Seiten Durchſchnittspunkt anliegt, ſtets gleich ſind; oder daſs *je zweyer Seiten Abſchnitte, die an demſelben Winkelpunkte liegen, ſich verkehrt wie die Seiten verhalten* *. * E. 7.

Folgerung 3. Für einen ſpitzen Winkel A iſt *das Rechteck* $2\,AC \times AD = AB^2 + AC^2 - BC^2$; für einen ſtumpfen Winkel a hingegen $2\,ac \times ad = bc^2 - ab^2 - ac^2$. Für beyde wird alſo dieſes Rechteck durch die Quadrate der Seiten auf gleiche Art gegeben, nur daſs im erſtern BC^2 kleiner, im zweyten bc^2 gröſser iſt, als die Quadrate der beyden andern Schenkel zuſammengenommen.

Jeder der einzelnen Abſchnitte, z. B. AD, wird mithin *durch die drey Seiten des Dreyecks* folgendermaſsen beſtimmt, $AD = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AC}$ und

$ad = \frac{bc^2 - ab^2 - ac^2}{2\,ac}$; Ausdrücke, welche, je nachdem man den geometriſchen oder den arithmetiſchen
*4.Z.2. Sinn der Zeichen nimmt *, verſchieden zu überſetzen ſind. Dem *geometriſchen Sinn gemäſs* verlangen ſie, daſs man erſtens ein Quadrat, welches den Quadraten von AB, AC zuſammengenommen gleich, und zweytens ein Quadrat welches dem Unterſchiede zwiſchen dieſem und dem Quadrat von BC gleich ſey, bilde, und dieſes dritte Quadrat in ein Rechteck, das 2 AC zur Grundlinie hat, verwandle, (wozu man die Methoden unter den Aufgaben am Ende dieſes Buches findet) um den Abſchnitt AD, als die Höhe dieſes Rechtecks zu finden. Nach dem *arithmetiſchen Sinn* genommen, erhält man, wenn man die Zahlwerthe der Seiten auf die Art, wie die Formel es ausſagt, zuſammen nimmt, den Zahlausdruck des Abſchnitts AD, der für die Trigonometrie, wenn man aus den Zahlausdrücken der drey Seiten des Dreyecks den des Winkels A ſucht, und für Lehrſ. 20. von Wichtigkeit iſt.

Aus AD und BC findet ſich endlich geometriſch
*12.f.1. ſowohl als arithmetiſch *das Perpendikel* AD *, und aus dem Zahlwerth deſſelben der *Inhalt des Dreyecks*
*5. ABC *, der alſo auf dieſe Art aus dem Zahlwerth der drey Seiten gefunden iſt. Indeſs werden wir im folgenden Buche dazu einen bequemern Weg finden.

Folgerung 4. Endlich werden *die an dem Winkel A anliegenden Seiten des Dreyecks ABC durch folgende Ausdrücke gegeben. Erstens* die Seite AB, auf welcher das Perpendikel *nicht* steht, durch $AB^2 = BC^2 - AC^2 \pm 2\,AC \times AD$. *Zweytens* die Seite AC, auf die das Perpendikel gefällt ist, durch $AC^2 \mp 2\,AC \times AD = BC^2 - AB^2$, (folglich der Zahlausdruck derselben durch eine unreine quadratische Gleichung,) wo wiederum das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem A spitz oder stumpf ist.

Aus der zweyten Formel folgt, dass $AC \times (AC \mp 2\,AD) = BC^2 - AB^2$ ist *. Theilt man daher die Grundlinie des Dreyecks, AC, im Punkte O in zwey gleiche Theile, da denn $AC \times (AC \mp 2\,AD)$ gleich $AC \times (2\,AO \mp 2\,AD)$ gleich $2\,AC \times OD$ wird, und zwar sowohl für spitze als für stumpfe Winkel; so ist $2\,AC \times OD = BC^2 - AB^2$; ein sehr brauchbarer Satz, den wir weiter unten nochmals als besondern Lehrsatz aufstellen, und noch auf andre Art herleiten werden *. * E. 5. * 17.

Folgerung 5. Ist das Dreyeck ABC gleichschenklig, A die Spitze, BC die Grundlinie, und AF das Perpendikel auf die Grundlinie, so wie BD das Perpendikel auf den Schenkel AC (folglich $AB = AE$, $BF = \frac{1}{2} BC$ * und die Winkel an der Grundlinie B, C nothwendig spitz *) so ist, dem hier Bewiesenen gemäss Fig. 28. * I. 12. Z. * I. 31.

α) $BC^2 = 2\,AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ * $= 2\,AC \times (AC \mp AD)$ * * (f. 1.)

$= 2\,AC \times CD$ * * E. 5.

A sey spitz oder stumpf, da im erstern Fall das obere, im zweyten das untere Zeichen gilt. Und das ist aller-

* f. 2. dings richtig, da $CA \times CD = CB \times CF$* und $CF = \frac{1}{2} CB$ ist.

* f. 3. β) $AD = \frac{2\,AC^2 - BC^2}{2\,AC}$ und $ad = \frac{bc^2 - 2\,.\,ac^2}{2\,.\,ac}$.*

Anmerkung 2. *Folgenden* eleganten *Beweis*, welcher *beyde Fälle unsers Lehrsatzes*, ganz nach der Art, wie wir den Pythagoreischen Lehrsatz bewiesen haben, und zwar unabhängig von diesem, darthut, halte ich der Mühe werth hierher aus *Gregor von St. Vincenz* (l. 44. u. 45) zu übertragen, obgleich er sich auf einen Satz über die Sehnen stützt, den wir erst weiterhin be-
* 22. weisen werden *, indem dieser Hülfssatz sich auch leicht unmit-
Fig. 32. telbar aus Lehrsatz 7 ableiten läſst. Unsre Figur stellt zwar nur den Fall des stumpfen Winkels dar, reicht aber hin sich daran auch den Fall des spitzen Winkels zu denken, der nur wenig verschieden ist, und für den jeder sich leicht selbst eine Zeichnung entwerfen wird.

Man beschreibe über die drey Seiten des gegebnen Dreyecks ABC Quadrate AH, AI, BG, und über die Grundlinie BC, als Durchmesser, einen Halbkreis. Je nachdem nun der Winkel A *recht*, *spitz*, oder *stumpf* ist, fällt der Winkelpunkt A *auf* die Kreislinie, oder
*II 25.f. *ausserhalb*, oder *innerhalb* des Kreises *. In den bey-
1, u. 26. den letztern Fällen wird also die Kreislinie entweder von den Schenkeln, oder von deren Verlängerung, in den Punkten P, Q durchschnitten, und zieht man durch diese Durchschnittspunkte die graden Linien CPM, BQN, so sind P, Q als Winkel im Halbkreise,
*II 23 Z 2 Rechte *, folglich BPMH und CQNI Rechtecke, so wie auch APML, AQNK; und zwar sind diese letztern Rechtecke, jenes aus den Linien AP, AB, dieses aus AQ, AC beschrieben, also (da BP, CQ Sehnen sind,

die ſich in einem Punkte A durchſchneiden,) vermöge der Natur des Kreiſes gleich *. Theilt man nun, * 22.
wie beym Beweiſe des Pythagoreiſchen Lehrſatzes, das Quadrat über der Grundlinie BC durch das Perpendikel AE in zwey Rechtecke, und zieht AG, BI; ſo entſtehn zwey Dreyecke AGC, BIC, welche, jenes mit dem Rechteck DG, dieſes mit dem Rechteck CN über gleicher Grundlinie und zwiſchen gleichen Parallelen ſtehn, folglich halb ſo groſs als dieſe Rechtecke ſind *. *2. f. 1.
Beyde Dreyecke decken ſich aber, ſind alſo gleich, und folglich haben auch die Rechtecke DG und CN gleichen Inhalt. Grade ſo thut man dar, daſs auch die Rechtecke DF und BM gleichen Inhalt haben. Folglich iſt BC^2 = Rechtk. CN + Rechtk. BM oder $BC^2 = AC^2 \mp AC \times AQ + AB^2 \mp AB \times AP$; und da die beyden Rechtecke gleich ſind,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \mp 2\, AC \times AQ$$

wo das untere Zeichen gilt, wenn A ſtumpf, das obere wenn A ſpitz iſt, und wo man ſtatt des letztern Rechtecks auch das Rechteck $\mp 2 \cdot AB \times AP$ ſetzen kann. d. U.

[LEHRSATZ 14.]

Ein Dreyeck ABC iſt bey A rechtwinklig, ſpitzwinklig oder ſtumpfwinklig, je nachdem das Quadrat der Seite BC, welche dieſem Winkel gegenüberſteht, den Quadraten der beyden Seiten AB, AC, welche den Winkel A einſchlieſsen, zuſammengenommen gleich iſt, oder kleiner, oder gröſser iſt, als dieſe beyden Quadrate. Fig. 30.

Denn gesetzt es ist $BC^2 = AB^2 + AC^2$, und doch wäre A kein rechter, sondern ein spitzer oder ein stumpfer Winkel, so müsste zugleich auch $BC^2 =$
* 13. $AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ seyn *, welches der Voraussetzung widerspricht.

Eben so müssen, wenn $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AC \times AD$ ist, und der Winkel A wäre nicht im Fall des *obern* Zeichens *spitz*, sondern recht oder stumpf, und nicht im Fall des *untern* Zeichens *stumpf*, sondern recht oder spitz, vermöge der beyden vorigen Lehrsätze zugleich $BC^2 = AB^2 + AC^2$ oder $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2\,AC \times AD$ seyn, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht.

Zusatz. Aehnliche *Kriterien* um aus der Grösse der drey Seiten eines Dreyecks ABC, und eines der Stücke, welche durch die Perpendikel aus den Spitzen auf den gegenüberstehenden Seiten abgeschnitten werden, *zu beurtheilen, ob ein bestimmter Winkel A des Dreyecks, recht, spitz oder stumpf ist*, geben die Formeln in Lehrsatz 13 Folgerung 3 und 4 an die Hand, so wie Folgerung 5 Merkmale, wonach sich aus der Grösse der Seiten beurtheilen läst, ob ein Dreyeck *gleichschenklig* ist, oder nicht.

[Lehrsatz 15.]

Fig. 33. *Wenn man über zwey Seiten AB, AC eines Dreyecks ABC zwey Parallelogramme ABDE, ACFG, unter beliebigen Winkeln, und von beliebiger Grösse und Lage beschreibt, die Seiten derselben, welche den*

Seiten des Dreyecks gegenüberſtehn, bis zu ihrem Durchſchnittspunkte H verlängert, und durch dieſen und die Spitze des Dreyecks die grade Linie HAK zieht:

ſo iſt, wenn dieſe Linien die Grundlinie BC ſelbſt ſchneidet, die Summe; wenn ſie hingegen die Verlängerung der Grundlinie ſchneidet, der Unterſchied der beyden Parallelogramme über AB und AC, einem Parallelogramme BCML gleich, welches über die dritte Seite BC des Dreyecks ſo beſchrieben wird, daſs deſſen zweyte Seite der Linie HA gleich und parallel iſt.

Zieht man durch die Endpunkte der Grundlinie BC, parallel mit KH, zwey grade Linien, welche die Linien DE, FG, in den Punkten L und M, durchſchneiden, ſo ſind die Vierecke ABLH, ACMH, Parallelogramme, da ſie der Conſtruction gemäſs, durch Parallelen zwiſchen Parallelen gebildet werden *. Und zwar ſtehn dieſe Parallelogramme mit denen, welche über die Seiten AB, AC beſchrieben ſind, auf gleicher Grundlinie und zwiſchen gleichen Parallelen, haben alſo mit ihnen gleichen Inhalt *.

* I. 34.

* I.

In ihnen ſind die gegenüberſtehenden Seiten BL, AH, und CM, AH, mithin auch BL und CM, gleich. Da dieſe Linien überdem der Conſtruction gemäſs parallel laufen, ſo iſt CBLM ein Parallelogramm *, und zwar ein Parallelogramm, welches aus den Linien BC und AH, letzterer in paralleler Lage mit KH, beſchrieben iſt.

* I. 36.

Ueberdem bildet die Linie HK mit den Seiten dieses Parallelogramms, oder deren Verlängerungen, ebenfalls zwey Parallelogramme LK, KM, welche mit den Parallelogrammen BLHA, CMHA, über gleichen Grundlinien BL, CM, und zwischen gleichen Parallelen stehn, folglich gleichen Inhalt haben *.

* 1.

Diese letztern hatten aber mit den Parallelogrammen ABDE und ACFG gleichen Inhalt. Also ist das Prlgr. ABDE = Prlgr. LK und Prlgr ACFG = Prlgr. MK.

Durchschneidet nun die Linie AK die Grundlinie des Dreyecks BC selbst, so ist das Parallelogramm über BC die Summe der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG + Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;

und dann ist dieses letztere Parallelogramm unter Winkeln LBC = B + BAK und MCB = C + CAK beschrieben.

Durchschneidet dagegen die Linie AH die Verlängerung der Grundlinie in einem Punkte K, so ist das Parallelogramm über BC der Unterschied der beyden Parallelogramme MK, LK, folglich

Prlgr. ACFG — Prlgr. ABDE = Prlgr. BCML;

und dann sind die Winkel, worunter das letztere Parallelogramm beschrieben ist, LBC = B — BAK und MCB = C — CAK.

Zusatz. Im Fall die beyden Parallelogramme, welche man über die Seiten AB, AC des Dreyecks, ABC beschreibt, *Quadrate* sind, geht die Aussage dieses Sat-

zes, für rechtwinklige Dreyecke in den *Pythagoreischen Lehrsatz* *, und für schiefwinklige in die allgemeinere * 12.
Aussage *des 13ten Lehrsatzes* über. In diesem Fall ist nemlich das dritte Parallelogramm über BC, welches jenen beyden gleich ist, beym rechtwinkligen Dreyeck auch ein Quadrat, bey schiefwinkligen hingegen ein Parallelogramm, das um zwey Rechtecke, wie sie Lehrsatz 13 angiebt, gröfser oder kleiner als das Quadrat über BC ist. Dieses läfst sich leicht mittelst folgendes *Lemmas* zeigen.

Hülfssatz. Beschreibt man über eine der Katheten Fig. 34.
eines bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC, z. B. über AC, ein Quadrat, verlängert die Seite desselben, welche der Kathete gegenübersteht, und zieht durch die Spitzen des rechten Winkels und des Winkels C, senkrecht auf der Hypotenuse, bis an jene Seite oder deren Verlängerung, die graden Linien KAH und CM; so sind AH und CM beyde der Hypotenuse des gegebnen rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Denn vermöge dieser Construction sind erstens CMAH Parallelen zwischen Parallelen, also CM = AH *. * I. 34.
Zweytens sind BAC und F rechte Winkel; eben so BCM und ACF, weshalb der Unterschied derselben vom Winkel ACM, d. h. die Winkel BCA und MCF gleich seyn müssen. Endlich sind, als Seiten eines Quadrats, AC und CF gleich. Folglich decken sich die beyden Dreyecke ABC, FMC *, und es ist allemal * I. 7.
FM = AB und CM = BC, oder AH und CM sind der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreyecks gleich.

Folgerung 1. Werden folglich in einem *rechtwinkligen Dreyeck* über *beyde* Katheten Quadrate AF, AD beschrieben, und auf den Endpunkten der Hypotenuse Perpendikel BL, CM errichtet, welche die den Katheten gegenüberstehenden Seiten der Quadrate, oder deren Verlängerungen, in L und M durchschneiden, so sind diese Perpendikel beyde der Hypotenuse BC gleich, und folglich ist BCML ein über der Hypotenuse beschriebnes Quadrat. Ueberdem durchschneidet das Perpendikel KA jede dieser beyden Verlängerungen in einem Punkte H so, dass für die eine AH gleich CM, für die andre AH gleich BL, mithin für beyde gleich ist, folglich in dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte beyder Verlängerungen. Da nun
* 15. überdem AH mit BL und CM parallel läuft, so ist * *das Quadrat über der Hypotenuse BC, den Quadraten über den beyden Katheten zusammengenommen gleich*, wie dieses der Pythagoreische Lehrsatz aussagt.

Fig. 35. *Folgerung* 2. Werden in einem *schiefwinkligen Dreyeck* ABD, über zwey Seiten AB, AC Quadrate AD, AF beschrieben, und man fällt aus den Endpunkten der dritten Seite BC auf die gegenüberstehenden Seiten Perpendikel CP, BQ, und beschreibt über die Seiten BP, CQ Quadrate, BPed, und CQgf, so gilt auch für diese Quadrate unser Lehnsatz, indem vermöge dieser Construction BCP und BCQ rechtwinklige Dreyecke sind, welche BC gemeinschaftlich zur Hypotenuse haben. Errichtet man folglich auf B und C die Perpendikel Bl Cm, welche bis an die Seiten dieser letztern Quadrate,

oder ihre Verlängerungen reichen, so ist jedes dieser Perpendikel der Hypotenuse BC gleich, also auch in diesem Fall BCml das Quadrat über der dritten Seite BC. Zugleich muss auch in diesem Fall das Perpendikel KA sich mit den Seiten, welche den beyden Katheten gegenüber stehn, in demselben Punkte h schneiden, weil dieses Perpendikel, sowohl mit AB, Bl, lh, als auch mit AC, Cm, mh, Parallelen zwischen Parallelen bildet, folglich für beyde Seiten gleiche Länge Bl = Cm hat. Mithin ist nach Lehrsatz 15 BCq = Rechtk. Ad + Rechtk. Af. Nun aber ist Rechtk. Ad = $AB^2 \mp AB \times AP$ * und Rechtk. Af = $AC^2 \mp AC \times AQ$, wo das *8.Z.2.
untere Zeichen gilt, wenn A (wie in unsrer Figur) stumpf, das obere wenn A spitz ist, (für welchen Fall man sich die Figur leicht selbst zeichnen wird). Uebердem sind BQPC Punkte in einem Halbkreise *, und *23.Z.2.
folglich $AB \times AP = AC \times AQ$ der Natur der Sehnen gemäss *. Mithin ist $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2\,AB \times AP$, * 22.
wie dieses Lehrsatz 13 *aussagt.*

Anmerkung. Der intressante Lehrsatz, von dem, wie wir sehn, die Sätze von den Quadraten, welche über Seiten eines Dreyecks beschrieben sind, nur einen besondern Fall aussagen, kömmt im Wesentlichen schon bey *Pappus*, an der Spitze des vierten Buchs seiner mathematischen Sammlungen vor (Collectiones mathematicae lib. 4. pr. 1.) und wird vom ältern *Castillon* in den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften (Propositions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une maniere nouvelle. Mém. de Berlin An. 1766. p. 354.) auf eine ähnliche Art wie hier behandelt.

[LEHRSATZ 16.]

Fig. 36. 1. *Ein Perpendikel, welches aus einem der Eckpunkte eines Dreyecks, z. B. aus A, auf die gegenüberstehende Seite BC, oder deren Verlängerung gefällt wird, schneidet diese so, dass der Unterschied der Quadrate aus beyden Abschnitten BD, DC, dem Unterschiede der Quadrate aus den beyden andern Seiten des Dreyecks, AB, AC, gleich ist* ($BD^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$;) *und zwar liegt stets der grössere Abschnitt BD an dem grössern beyder Schenkel AB an.*

2. *Und theilt man die Grundlinie BC im Punkte O in zwey gleiche Theile, so ist der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC gleich dem doppelten Rechteck aus der Grundlinie und aus dem Abstande des Perpendikels AD von der Mitte der Grundlinie; oder* $AB^2 - AC^2 = 2 \cdot BC \times DO$.

1. Da nach dem Pythagoreischen Lehrsatze $AB^2 = AD^2 + BD^2$ und $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ist, so muss auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ seyn, wie dieses der erste Theil des Lehrsatzes aussagt; und dabey kömmt es auf die Beschaffenheit der Winkel weiter nicht an. Ist der Schenkel AB grösser als AC, so muss folglich auch der an diesem Schenkel anliegende Abschnitt BD der Grundlinie, der grössere seyn.

2. Da der Unterschied zweyer Quadrate dem Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede ihrer Seiten gleich

gleich ist *, so folgt aus dem eben Bewiesenen, dass $AB^2 - AC^2 = (BD + CD) \times (BD - CD)$ ist. Nun ist im *spitzwinkligen* Dreyeck die Summe, im *stumpfwinkligen* der Unterschied der beyden Theile BD, CD der Grundlinie BC des Dreyecks gleich. Halbirt man überdem die Grundlinie im Punkte O, und trägt OE gleich OD auf, so ist auch BE gleich DC *, folglich im *spitzwinkligen* Dreyeck der Unterschied der Linien BD, DC gleich $BD - BE = DE = 2DO$, im *stumpfwinkligen* Dreyeck dagegen die Summe der Linien BD, DC gleich $BD + BE = DE = 2 . DO$. Mithin ist im spitzwinkligen Dreyeck sowohl als im stumpfwinkligen

* 11.

* Gr. 2 β

$$AB^2 - AC^2 = 2 . BC \times DO.$$

Und diese Aussage gilt auch für das bey C rechtwinklige Dreyeck, für welches C und D zusammenfallen und $2 DO \times BC = BC^2$ ist; mithin für jedes Dreyeck. Eine Allgemeinheit, in der wir diesen Satz schon weiter oben unter den Folgerungen aus Lehrsatz 13 kennen gelernt haben *.

* 13. f. 4.

Folgerung. 1. Da nach dem ersten Theil des Lehrsatzes, für jedes Dreyeck $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$ ist, so muss auch, wenn man beyderseits $AC^2 + DC^2$ hinzufügt, $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ seyn. *In jedem Dreyeck sind also die Quadrate der beyden Schenkel, sammt den Quadraten der ihnen gegenüberstehenden Abschnitte der Grundlinie, die durch ein Perpendikel aus der Spitze gebildet werden, untereinander gleich.*

Fig. 37. *Folgerung* 2. Eine grade Linie CG, welche man aus dem Scheitelpunkte C eines der spitzen Winkel *des bey A rechtwinkligen Dreyecks ABC*, nach der gegenüberstehenden *Kathete*, *oder nach deren Verlängerung willkührlich zieht*, theilt diese folglich so, dass $CB^2 + AG^2 = CG^2 + AB^2$ oder $CB^2 + Ag^2 = Cg^2 + AB^2$ ist. (Gregor von St. Vincenz I. 41.)

Fig. 36. *Folgerung* 3. Da nach dem zweyten Theil des Lehrsatzes in jedem Dreyeck der Unterschied der Quadrate zweyer Seiten, $AB^2 - AC^2$, dem Rechtecke $2\,BC \times DO$ gleich ist; so muss *in allen Dreyecken, welche über derselben Grundlinie BC stehn*, und *für welche der Unterschied der Quadrate aus beyden Schenkeln AB, AC derselbe*, folglich einem gegebnen Flächenraume F gleich ist ($AB^2 - AC^2 = F$,) auch *DO von einerley Grösse seyn*, ($DO = \frac{F}{2\,BC}$). In allen diesen Dreyecken steht folglich das Perpendikel, welches aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, vom Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit ab, und da für alle diese Dreyecke der Punkt C derselbe ist, so müssen ihre Spitzen insgesammt in dasselbe Perpendikel auf BC fallen, welches um die bestimmte Linie $OD = \frac{F}{2\,BC}$ von der Mitte der Grundlinie absteht. *Dieses Perpendikel ist mithin der geometrische Ort des Durchschnittspunktes zweyer grader Linien, welche von den gegebnen Punkten B und C aus gezogen, sich so durchschneiden, dass der Unterschied ihrer Quadrate einem gegebnen Flächenraum F gleich ist* *.
*I. E. 21.
Oder es ist der geometrische Ort *für die Spitzen eines*

Dreyecks, von welchem die Grundlinie BC und der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln, d. i. F, gegeben ist. Verwandelt man diesen Flächenraum F in ein Rechteck, welches über 2 BC als Grundlinie steht *, so giebt die Höhe dieses Rechtecks den Abstand DO; und jeder Punkt A in dem Perpendikel, welches auf BC in der Entfernung DO von der Mitte der Grundlinie errichtet wird, giebt als Durchschnittspunkt zwey grade Linien BA, CA, oder als dritter Eckpunkt ein Dreyeck ABC, dessen Schenkel die verlangte Beschaffenheit haben. Dieses Perpendikel fällt innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks, oder auf dem Schenkel CB, je nachdem der gegebne Flächenraum F kleiner, oder grösser als AB^2, oder diesem Quadrate gleich ist. * Ag. 6

Anmerkung. Unser Lehrsatz, der bey Euklid fehlt, ist das erste Lemma, und die Aussage der dritten Folgerung der erste Satz im Zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern; auch eben daselbst der erste Fall des vierten Satzes. d. U.

[LEHRSATZ 17.]

1. *Wenn man in einem Dreyeck ABC von einem der Winkelpunkte, z. B. von A, eine grade Linie AO nach dem Punkte O in der Mitte der gegenüberstehenden Seite BC zieht, so ist allemal* $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$. Fig. 36

Fälle von A auf die gegenüberstehende Seite das Perpendikel AD. Wie dieses auch liegen möge, so theilt allemal die Linie AO das gegebne Dreyeck in zwey Dreyecke AOB, AOC, welche, je nachdem die-

ſe halbirende Linie auf BC ſenkrecht oder ſchief aufſteht, entweder *beyde bey O rechtwinklig*, oder das *eine* bey O ſtumpfwinklig, das *andre* ſpitzwinklig iſt. Im *erſten Fall* (der ein gleichſchenkliges Dreyeck, deſ-
* 12. 7. ſen Spitze A iſt, vorausſetzt *,) fallen die Punkte O und D zuſammen, und es iſt $AB^2 + AC^2 = 2\,AC^2 =$
* 12. $2\,AO^2 + 2\,OC^2$ *, wie der Lehrſatz ausſagt. Iſt im *zweyten Fall* AOB der ſtumpfe, AOC der ſpitze Winkel, ſo ſteht in dem bey O *ſpitzwinkligen* Dreyeck, dem Winkel O die Seite AC gegenüber, und aus A iſt auf OC das Perpendikel AD gefällt, folglich,

* 13. (1) $$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2\,OC \times OD \text{ *};$$

(eine Ausſage, die für den Fall, daſs C ein rechter Winkel iſt, folglich AD mit AC zuſammenfällt, und OD in OC übergeht, ſich in dieſe, $AC^2 = AO^2 - OC^2$ verwandelt.) In dem bey O *ſtumpfwinkligen* Dreyeck AOB, wo der Schenkel AB dem Winkel bey O gegen-
* 13. (2) überſteht, iſt $AB^2 = AO^2 + OB^2 + 2\,OB \times OD$ *, oder, weil nach der Vorausſetzung OB gleich OC iſt,

$$AB^2 = AO^2 + OC^2 + 2\,OC \times OD$$

(eine Ausſage, die falls bey C ein rechter Winkel, und OD gleich OC iſt, in dieſe übergeht, $AB^2 = AO^2 + 3\,OC^2$). Es iſt daher auch in dieſem zweyten Fall

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AC^2 + 2\,OC^2$$

es ſey bey C ein ſchiefer oder ein rechter Winkel. Die Ausſage des Lehrſatzes gilt alſo für jeden möglichen Fall.

Ein andrer viel kürzerer *Beweis* dieſes Satzes läſst ſich unmittelbar aus Lehrſatz 11. Folgerung 2. ableiten. Denn da vermöge der Conſtruction, die Grundlinie

BC des Dreyecks, in O gleich, und in D ungleich getheilt ist, so ist $BD^2 + DC^2 = 2\,CO^2 + 2\,OD^2$, folglich, wenn man beyderseits 2 AD hinzufügt, dem Pythagoreischen Lehrsatz gemäss, $AB^2 + AC^2 = 2\ AO^2 + 2\ OC^2$. — Umgekehrt kann man aus dem letztern Satze den erstern ableiten, wenn man für ihn noch einen andern Beweis, als den oben * mitgetheilten wünscht. *11. f. 2.

Folgerung 1. *Für alle Dreyecke, wie ABC, welche über derselben Grundlinie BC stehn*, ist die Hälfte dieser Grundlinie, OC, also auch $2 \cdot OC^2$ von gleicher Grösse *. Diejenigen unter diesen Dreyecken, für welche überdem noch *die Quadrate der beyden Schenkel AB, AC einerley Grösse haben*, also $AB^2 + AC^2 = F$, d. h. irgend einem gegebnen Flächenraum gleich sind, müssen folglich allesammt so beschaffen seyn, *dass ihre Spitze A von dem Mittelpunkte der Grundlinie O gleich weit abstehn.* Denn da unserm Lehrsatz gemäss für sie alle $AB^2 + AC^2 = 2\,AO^2 + 2\,OC^2$ ist, so ist in jedem dieser Dreyecke $2\,AO^2 = F - 2\,OC^2$, mithin $AO = \sqrt{(\frac{1}{2}F - OC^2)}$, also AO für alle von gleicher Grösse. Folglich ist eine um den Mittelpunkt der Grundlinie BC, mit einem Halbmesser, dessen Zahlausdruck $\sqrt{(\frac{1}{2}F - OC^2)}$ ist, beschriebne *Kreislinie*, der *geometrische Ort für die Spitzen aller Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und für welche die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln gleiche Grösse hat.* Oder sie ist der *geometrische Ort für die Aufgabe*, welche verlangt, *von zwey gegebnen Punkten B, C aus, zwey grade Linien zu ziehn, die sich in einem Punkte A so durchschnei-* *E. 5. 5.

den, daſs ihre Quadrate zuſammengenommen einem gegeb-
*Cf. 16. §. 3. *nen Flächenraum gleich ſind* *. Den Halbmeſſer dieſer Kreislinie findet man aus den gegebnen Gröſsen F und BC geometriſch, wenn man nach Anleitung der Aufgaben zu Ende dieſes Buchs, die Figur F in ein gleichgeltendes Rechteck, und die Hälfte deſſelben in ein Quadrat verwandelt, und dann die Seite des Quadrats ſucht, welches dem Unterſchiede des erſtern Quadrats von $(\frac{BC}{2})^2$ gleich iſt.

Fig. 39. Folgerung 2. *Nimmt man umgekehrt auf dem Durchmeſſer eines gegebnen Kreiſes, oder auf deſſen Verlängerung, zu entgegengeſetzten Seiten des Mittelpunkts, in gleicher Entfernung von demſelben, zwey Punkte B, C; ſo iſt die Summe der Quadrate je zweyer Linien BM, CM, die man von dieſen Punkten nach einem Punkte M in der Kreislinie zieht, für jeden ſolchen Punkt von gleicher Gröſse.* Eine artige Eigenſchaft der Kreislinie, welche, wenn man MO zieht, unmittelbar aus unſerm Lehrſatz folgt.

Sie ſtellt uns jedoch nur den einfachſten Fall einer viel allgemeinern und weiter greifenden *Eigenſchaft der Kreislinie* dar, die grade ſo aus der Verallgemeinerung
* 20. unſers Lehrſatzes *, wie die hier entwickelte aus dieſem Lehrſatze ſelbſt flieſst, und von der man gleich nach den Anwendungen des gegenwärtigen Lehrſatzes
*18. u. 19 auf das Parallelogramm und Trapez *, nach dem Beweiſe jenes verallgemeinerten Satzes, einiges finden wird.

Fig. 40. Zuſatz I. *Werden alle Seiten eines Dreyecks ABC durch grade Linien aus den gegenüberſtehenden Winkelpunk-*

ten, AD, BE, CF halbirt, so ist die Summe der Quadrate über diese Linien, gleich $\frac{3}{4}$ von der Summe der Quadrate aus den Seiten des Dreyecks. Denn da das doppelte Quadrat aus der Hälfte einer Linie, z. B. $2\,BD^2$, der Hälfte des Quadrats aus der ganzen Linie, $\frac{1}{2}\,BC^2$, gleich ist, so ist unserm Lehrsatz gemäss

$$AB^2 + AC^2 - \tfrac{1}{2}BC^2 = 2\,AD^2$$

$$AB^2 + BC^2 - \tfrac{1}{2}AC^2 = 2\,BE^2$$

$$AC^2 + BC^2 - \tfrac{1}{2}AB^2 = 2\,CF^2$$

folglich $\frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2) = (AD^2 + BE^2 + CF^2)$

Zusatz II. Ist ABC ein schiefwinkliges Dreyeck, so ist das Quadrat der Seite AB, kleiner oder grösser als die Summe der Quadrate der beyden andern Seiten AC, BC*. Dann muss es folglich auf der Seite AB, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt O geben, der auf ihr zwey Stücke AO, BO abschneidet, deren Quadrate zusammengenommen den Quadraten der beyden andern Seiten AC, BC gleich sind. Diesen Punkt O findet man allemal, wenn man AB über B hinaus, und die Seite AC über C hinaus verlängert, auf dieser Verlängerung CF = CA nimmt, FB zieht, auf der erstern Verlängerung BG = FB anträgt, und dann AG halbirt. Der halbirende Punkt ist der gesuchte Punkt O. Fig. 41.

* 13.

Denn weil dann AG in O gleich und in B ungleich getheilt ist, so ist erstens $AB^2 + BG^2 = 2\,AO^2 + 2\,BO^2$ *; und weil zweitens auch im Dreyeck ABF, die Seite AF halbirt ist, ist $AB^2 + BF^2 = 2\,BC^2 + 2\,AC^2$. Nun aber ist der Construction gemäss BF gleich BG, folglich $AO^2 + BO^2 = BC^2 + AC^2$, mit-

*II. f.

hin O der gesuchte Punkt, der auf der Seite AB oder deren Verlängerung, zwey Stücke abschneidet, deren Quadrate den Quadraten der beyden Seiten AC, CB zusammengenommen gleich sind.

Da in den Dreyecken BCA, BCF, die Schenkel, welche die Winkel bey C einschliessen, untereinander gleich sind, so ist, falls AB einem *spitzen* Winkel gegenübersteht, $AB < FB$, also $< BG$, und mithin fällt alsdann der Punkt O allemal in die Verlängerung der Seite AB. Steht hingegen AB einem *stumpfen* Winkel gegenüber, so ist $AB > FB$, also $> BG$ und der Punkt O liegt dann stets in der Seite AB, wie dieses auch Lehrsatz 13 gemäss seyn muss.

Fig. 42. Zusatz III. *Wenn man von irgend einem Punkte F nach den vier Eckpunkten eines Rechtecks ABCD grade Linien zieht, so ist die Summe der Quadrate je zweyer dieser Linien, die nach den gegenüberstehenden Winkelpunkten gezogen sind, einander gleich, oder* $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$.

Denn zieht man die beyden Diagonalen AC, BD, so halbiren sich diese wechselseitig, so dass $AO = OC = OB$
*1.36. Z. $= OD$ ist *. Zieht man FO, so ist im Dreyeck AFC vermöge unsers Lehrsatzes $FA^2 + FC^2 = 2\,FO^2 + 2\,AO^2$, und im Dreyeck BFD eben so $FB^2 + FD^2 = 2\,FO^2 +$
* Gr. 1. $2\,DO^2$, folglich $FA^2 + FC^2 = FB^2 + FD^2$ *.

Anmerkung. Bey *Le Gendre* findet sich zwar der Lehrsatz, aber sein Beweis ist mangelhaft. Folgerung 2 und Zusatz 3 kommen in *Simpsons* Elementen vor; Zusatz 1 und 2 entlehne ich aus *Gregor von St. Vincenz* I, 42 und 49, und Folgerung 1 macht in *Apollonius* ebnen Oertern II, 5. den ersten Theil des ersten Falls aus.

d. U.

LEHRSATZ 18.

In jedem Parallelogramm ABCD ist die Summe der Quadrate aus allen Seiten, den Quadraten der beyden Diagonalen AC, BD zusammengenommen gleich. Fig. 43.

Da jedes Parallelogramm durch eine der Diagonalen, z. B. durch AC, in zwey Dreyecke ABC, ADC getheilt wird, welche über der Diagonale als Grundlinie stehn, und überdem die beyden Diagonalen sich in ihrem Durchschnittspunkte O wechselseitig halbiren, so daſs $AO = OC$ und $BO = OD$ wird, so ist, erstens im Dreyeck ABC

$$AB^2 + BC^2 = 2\ AO^2 + 2\ BO^2$$

und zweytens im Dreyeck ADC

$$AD^2 + DC^2 = 2\ AO^2 + 2\ OD^2$$

folglich, wenn man Gleiches zu Gleichem hinzufügt, und statt des vierfachen Quadrats der halben Diagonalen ($4\ AO^2$, $4\ BO^2$) die Quadrate der Ganzen setzt *, * 4, Z. 3.

$$AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$$

Folgerung. Da im Parallelogramm die gegenüberstehenden Seiten, folglich auch die Quadrate derselben, gleich sind, so läſst sich dieser Satz auch so ausdrücken: *In jedem Parallelogramm sind die Quadrate der beyden Diagonalen, das Doppelte von den Quadraten aus* *zwey an einander liegenden Seiten*, *oder* $AC^2 + BD^2 = 2\,AB^2 + 2\,AD^2$; ein Satz, der für das Parallelogramm etwas Aehnliches, als Lehrsatz 17 für das Dreyeck ausfagt.]

[LEHRSATZ 19.]

Fig. 44. *In jedem Trapez ABCD übertrifft die Summe der Quadrate aller Seiten, die beyden Quadrate der Diagonalen AC, BD zusammen genommen; und zwar um ein Quadrat, welches man erhält, wenn man über zwey aneinander liegende Seiten des Trapezes ein Parallelogramm ABCE errichtet, den Abstand der beyden Eckpunkte D des Trapezes und E des Parallelogramms, die beyden nicht gemein sind, nimmt, und über diesen Abstand DE als Seite, ein Quadrat beschreibt. Oder es ist* $AB^2 + AD^2 + DC^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Ein Parallelogramm, weches man über zwey an einander liegende Seiten eines Trapezes, z. B. über AB, BC beschreibt, hat mit dem Trapez die drey Eckpunkte A, B, C und die Diagonale AC gemein, hingegen ist der vierte Eckpunkt, D, E, und daher auch die zweyte Diagonale BD, BE in beyden verschieden, weil sonst das erstere Viereck, gegen die Voraussetzung, ein Parallelogramm seyn würde.

Ziehe vom Winkelpunkte C eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite DA des Trapezes, und von B aus eine Parallellinie mit DE, so durchschneiden sich diese Parallellinien in einem Punkte F so, dass sich die

Dreyecke CFB, ADE decken. Denn die Linien AE, BC *, und die Winkel an den Punkten C, A so wie an B, E sind einander gleich *. Folglich ist auch CF = AD und BF = DE. Zieht man also noch die Linien FA, FE, so entstehn zwey Parallelogramme ADCF und BDEF *, von deren Seiten und Diagonalen folglich der so eben bewiesene Satz* gilt. Es ist also im Parallelogramm ADCF

* I.
* I. 34.
* I. 35.
* 18.

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 = AC^2 + DF^2.$$

Eben so ist im Parallelogramm BDEF

$$2 . BD^2 + 2 . DE^2 = BE^2 + DF^2.$$

Zieht man folglich Gleiches von Gleichem ab, so erhält man

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 - 2 BD^2 - 2 . DE^2 = AC^2 - BE^2.$$

Und wenn man beyderseits wieder hinzufügt $2 . BD^2 + 2 . DE^2$,

$$2 . AD^2 + 2 . CD^2 = 2 . BD^2 + 2 . DE^2 + AC^2 - BE^2$$

Nun ist endlich auch im Parallelogramm ABCE

$$2 . AB^2 + 2 . BC^2 = AC^2 + BE^2.$$

Verbindet man wieder diese Gleichung mit der vorigen, so wird

$$2 . AB^2 + 2 . AD^2 + 2 . BC^2 + 2 . CD^2 = 2 . AC^2 + 2 . BD^2 + 2 DE^2;$$ mithin auch, wenn man von beyden gleichen Grössen die Hälfte nimmt,

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2.$$

Folgerung 1. Also ist kein Viereck möglich, worin die beyden Quadrate der Diagonalen *grösser* als die Quadrate aus allen Seiten zusammengenommen wären. Weicht ein Trapez vom Parallelogramm mehr ab, wird folglich DE gröſser, ſo wird auch die Summe aus den Quadraten der Diagonale, gegen die Summe aus den Quadraten aller Seiten immer kleiner.

Folgerung 2. Halbirt man beyde Diagonalen des Trapezes in den Punkten P, Q, ſo wird durch den Punkt P zugleich die Diagonale AC des Parallelogramms ABCE, welche dieſem mit dem Trapez gemein
*I. 37 iſt, mithin auch die andre Diagonale BE halbirt *. Zieht man daher PQ, ſo theilt dieſe Linie ſowohl BD als BE in zwey gleiche Theile, daher auch PQ die Hälfte von
* 7. DE, und mit dieſer Linie parallel iſt *. Iſt aber DE $= 2 . PQ$, ſo wird $DE^2 = 4 . PQ^2$. Setzt man dieſe Gröſse ſtatt der erſtern, ſo iſt alſo auch in jedem Viereck

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 + 4 . PQ^2.$$

Anmerkung. Dieſen Lehrſatz entlehne ich von *Euler*, der ihn zuerſt gefunden, und auf die hier mitgetheilte Art bewieſen hat, in ſeinen *Variis Demonſtrationibus Geometricis*, in den *Novis Comm. Acad. Imp. Petrop. T. 1. p. 409. ſeq.*

d. U.

[LEHRSATZ 20 †.]

Fig. 45. *Wenn man aus einem der Winkelpunkte eines Dreyecks ABC, z. B. aus A, nach irgend einem*

†) Wer mit den bisherigen Sätzen noch nicht ganz im Deutlichen iſt, und ſich noch nicht ſtark genug fühlt, um ſich in das Feinere der Geometrie zu vertiefen, überſchlage fürs erſte dieſen Lehrſatz ſammt allen ſeinen Folgerungen und Zuſätzen, und wende ſich ſogleich zu Lehrſatz 21, wo

Punkte G in der gegenüberstehenden Seite BC, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie AG zieht, so ist allemal

$$\alpha)\ BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$$

oder, was auf eins hinauskömmt,

$$\beta)\ AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

$$= BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG} \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

oder $\gamma)\ AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$

$$= BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

oder, wenn GE irgend eine beliebige Linie ist,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE}$$

$$\pm AG^2 \times \frac{BC}{GE} = \frac{BG}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

oder endlich

$$\delta)\ AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

wo, je nachdem der Punkt G in der Seite BC selbst, oder in deren Verlängerung liegt, die obern oder die untern Zeichen gelten, und zugleich angenommen wird, daſs im zweyten Fall Bg > Cg ist.

er ohne Anstos fortfahren kann. Der gegenwärtige Lehrsatz, und die hinzugefügten Sätze, enthalten vom zweyten Buche der *ebnen Oerter des Apollonius*, so viel als es nur immer der Zweck dieses Werks erlaubte, auf eine, wie mir scheint, leichtere Art als von andern vorgetragen, und wird hinreichen einen deutlichen Begriff von jenem interes-

Fig. 48. *Steht AG 1) auf der Grundlinie BC ſelbſt, oder 2) auf deren Verlängerung ſenkrecht*, ſo bildet dieſe Linie mit den Schenkeln des Dreyecks zwey rechtwinklige Dreyecke, worin $BG^2 = AB^2 - AG^2$ und $CG^2 = AC^2 - AG^2$, mithin auch $BG = \frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ und $CG^2 = \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ iſt. Nun iſt im erſten Fall die Grundlinien $BC = BG + CG$, im zweyten Fall $BC = BG - CG$, vorausgeſetzt daſs $BG > CG$ iſt. Daraus folgt für dieſen Fall die Ausſage α, und mithin die Wahrheit der andern Ausſagen, die, wie wir gleich ſehn werden, unmittelbar aus ihr abgeleitet ſind.

Fig. 45. *Steht* dagegen AG *ſchief auf*, und zwar 1) *auf der Grundlinie BC ſelbſt*, ſo daſs AGB ein ſpitzer, AGC aber ein ſtumpfer Winkel iſt, ſo theilt dieſe Linie das gegebne Dreyeck in zwey kleinere Dreyecke, ein ſpitzwinkliges AGB, und ein ſtumpfwinkliges AGC, denen die Spitze A und das Perpendikel AD auf die gegenüberſtehende Seite gemein iſt, und in denen beyden das Perpendikel, von dieſer Seite oder deren Verlängerung, ein gleiches Stück GD abſchneidet. Die Gröſse dieſes Abſchnitts wird in jedem Dreyeck durch
* 13, f. 3. die Gröſse der drey Seiten beſtimmt *, und zwar iſt

ſanten Theile der Geometrie zu geben, und eine Menge netter und allgemeiner Sätze, beſonders über den Kreis, dem Leſer, der die kleine Mühe des Durchſtudirens nicht ſcheur, bekannt zu machen.

Gilbert.

in dem bey G spitzwinkligen Dreyeck AGB, GD $= \frac{BG^2 + AG^2 - AB^2}{2\,BG}$, hingegen in dem bey G stumpfwinkligen Dreyeck AGC, GD $= \frac{AC^2 - CG^2 - AG^2}{2\,CG}$; Ausdrücke, die wir ihrem geometrischen und ihrem arithmetischen Sinne nach, am angeführten Orte erklärt haben. Folglich sind, da für beyde Dreyecke der Abschnitt GD derselbe ist, diese Ausdrücke gleich; mithin auch ihr Zweyfaches, und da überdem $\frac{BG^2}{BG} = BG$ und $\frac{CG^2}{CG} = CG$ ist, $BG + \frac{AG^2 - AB^2}{BG}$ $= \frac{AC^2 - AG^2}{CG} - CG$. Fügt man beyderseits CG und $\frac{AB^2 - AG^2}{BG}$ hinzu, so bleiben auch diese Grösen gleich, und folglich ist

$$BG + CG \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - BG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG},$$

welches in der Aussage α, der erste Fall ist. Und da hier AB, AC und BG, CG völlig auf einerley Art vorkommen, so hat es auf den Ausdruck von BC weiter keinen Einfluss, welcher von den beyden Schenkeln AB, oder ob AC dem stumpfen Winkel bey G gegenübersteht. Dieser Ausdruck gilt daher unbedingt *für jeden Punkt G in der Grundlinie* (selbst dann, wenn G mit B oder C zusammenfällt).

Steht 2) *Ag auf der Verlängerung der Grundlinie schief auf*, und zwar *zuerst auf der Verlängerung derselben* *über C hinaus, so dass $Bg > Cg$ ist*, so unterscheidet sich dieser Fall von dem vorigen darin, dass nun die Schenkel AB, AC entweder beyde dem spitzen, oder beyde dem stumpfen Winkel bey g gegenüberstehn. Ist das *erstere* der Fall, und die Dreyecke AgB, AgC sind beyde bey g spitzwinklig, so ist

$$gD = \frac{Bg^2 + Ag^2 - AB^2}{2\,Bg} \text{ und zugleich}$$

$$gD = \frac{Cg^2 + Ag^2 - AC^2}{2\,Cg}, \text{ mithin } Bg + \frac{Ag^2 - AB^2}{Bg}$$

$$= Cg + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}.$$ Ist hingegen das *zweyte* der

Fig. 47. Fall, und stehn beyde Schenkel AB, AC dem stumpfen Winkel bey g gegenüber, so ist in diesen stumpfwinkligen Dreyecken $gD = \frac{AB^2 - Bg^2 - Ag^2}{2\,Bg}$ und zugleich $gD = \frac{AC^2 - Cg^2 - Ag^2}{2\,Cg}$, folglich $\frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$

$$- Bg = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - Cg.$$ In beyden Fällen ist der Voraussetzung gemäss $Bg - Cg = BC$. Zieht man daher im erstern Fall beyderseits Cg ab, und fügt zugleich $\frac{AB_2 - Ag^2}{Bg}$ beyderseits hinzu, und verfährt dagegen im zweyten Fall grade umgekehrt, so erhält man *in beyden Fällen gleichmässig*

$$\text{a) } Bg - Cg \text{ d. h. } BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$$

oder, da es einerley ist, ob man den Unterschied

Ag^2

$Ag^2 - AC^2$ hinzufügt, oder umgekehrt den Unterſchied $AC^2 - Ag^2$ abzieht,

b) $Bg - Cg$ d. h. $BC = \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg} - \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg}$

welches oben in der Ausſage α der zweyte Fall iſt, bey welchem es alſo wiederum nicht weiter auf die Beſchaffenheit des Winkels bey g ankömmt, wenn nur g ein Punkt in der Verlängerung der Grundlinie über C hinaus iſt.

Liegt dagegen *g* in der entgegengeſetzten Verlängerung, und ſteht, Ag nicht wie wir hierbey vorausſetzten, auf der Verlängerung der Grundlinie über den Punkt C, ſondern *auf der entgegengeſetzt liegenden Verlängerung über den Punkt B hinaus auf*; ſo iſt $Bg < Cg$, und folglich $Cg - Bg = BC$, daher wir unter dieſen Umſtänden nicht den Werth $Bg - Cg$, ſondern den umgekehrten, $Cg - Bg$, hätten herleiten müſſen, für welchen ſich Fig. 46.

$BC = \frac{AC^2 - Ag^2}{Cg} - \frac{AB^2 - Ag^2}{Bg}$, alſo BC ebenfalls als

der Unterſchied der beyden Theile in b) findet nur daſs in jenem Fall der erſtere, in dieſem der letztere dieſer Theile gröſser iſt. Will man daher die Form in b) auch auf dieſen Fall übertragen, ſo giebt ſie in ihm für BC einen ſubtractiven Zahlwerth, oder etwas *Negatives* *, welches alſo allemal ein Zeichen iſt, daſs die Linie Ag eine entgegengeſetzte Lage hat, als die, für welche die Formel unmittelbar gebildet iſt, und welche wir im Lehrſatz ausdrücklich bemerkt haben; d. h. daſs ſie ſo aufſteht, daſs nicht, wie die Formel vorausſetzt, $Bg > Cg$, ſondern umgekehrt $Bg < Cg$ * 13. a 1.

ist. *Unter dieser Bedingung* gilt auch die Formel *b* allgemein für jeden beliebigen Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie. (Durch die Vorstellung des Negativen läßt sich diese Formel selbst mit unter die Aussage für den ersten Fall ziehn, wenn der Punkt G in der Grundlinie liegt, indem beyde Fälle sich lediglich durch das Entgegengesetzte in der Lage des Abschnitts CG unterscheiden, und daher die erstere, wenn man in ihr CG negativ setzt, in die zweyte übergeht. Doch haben wir es nicht nöthig uns hier bis zu dieser gänzlichen Verallgemeinerung zu erheben.)

Die Aussage unter α läßt sich noch *auf eine andre Art sehr leicht beweisen*, die ich hier wenigstens andeuten will. Man fälle im gegebnen Dreyeck ABC auf die Grundlinie das Perpendikel AD, und es sey D sowohl als G ein Punkt in der Grundlinie selbst, so ist die Grundlinie $BC = BD + GD + CD - GD$. Nun ist das Rechteck aus der Summe und dem Unterschiede zweyer Linien, dem Unterschiede ihrer Quadrate gleich *, folglich $BD + GD = \frac{BD^2 - GD^2}{BD - GD}$ und

* 11.

$CD - GD = \frac{CD^2 - GD^2}{CD + GD}$, und da überdem im Dreyeck ABG, $BD^2 - GD^2 = AB^2 - AG^2$ *, und im Dreyeck AGC, $CD^2 - GD^2 = AC^2 - AG^2$ ist, so muss in diesem Fall $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$ seyn, welches der erste Fall in der Aussage α ist. Eben so leicht lassen sich die übrigen Fälle, je nachdem G und D verschieden liegen, auf diese Art herleiten.

* 16. 1.

Aus diesen Sätzen dafs für Punkte G *in der Grundlinie*, $BC = \frac{AE^2 - AG^2}{BG} + \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$, hingegen für Punkte g *in ihrer Verlängerung*, $BC = \frac{AE^2 - Ag^2}{Bg} + \frac{Ag^2 - AC^2}{Cg}$ ist, (wobey $Bg > Cg$ angenommen wird,) lassen sich *die übrigen Aussagen des Lehrsatzes folgendermafsen* herleiten. Man füge zu den gleichen Gröfsen im ersten Fall beyderseits $\frac{AG^2}{BG} + \frac{AG^2}{CG}$, und im zweyten Fall $\frac{Ag^2}{Bg} - \frac{Ag^2}{Cg}$ hinzu, d. i. Linien, deren Zahlausdruck auf gleiche Benennungen, nach den Regeln der Bruchrechnung, gebracht, im ersten Fall $\frac{AG^2 \times (CG + BG)}{BG \times CG}$, das ist $\frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG}$, im zweyten Fall $\frac{Ag^2 \times (Cg - BG)}{Bg \times Cg}$ das ist $-\frac{AG^2 \times BC}{Bg \times Cg}$ ist (da unsrer Voraussetzung gemäfs $Bg > Cg$ ist); so verwandeln sich durch diese Hinzusetzung jene Aussagen für beyde Fälle in folgende: $BC \pm \frac{AG^2 \times BC}{BG \times CG} = \frac{AB^2}{BG} \pm \frac{AC^2}{CG}$, wo die *oberen Zeichen* für den erstern Fall gelten, wenn G in der Grundlinie BC selbst liegt, die *unteren Zeichen* für den zweyten Fall, wenn g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, (wobey zugleich $Bg > Cg$ angenommen wird). *Und das ist ein für allemal, auch bey allen folgenden Ausdrücken zu merken.*

Ferner ſind auch die Producte dieſer Zahlausdrücke in den Zahlwerth der Linie BG gleich, oder

$$AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm AG^2 \times \frac{BC}{BG}$$

und hier läſst ſich wieder ſtatt $BC \times BG$ ſetzen

$(BG \pm CG) \times BG$ oder, $BG^2 \pm CG^2 \times \frac{BG}{CG}$, welches die Formen des Satzes unter β ſind.

Nimmt man aufs neue die Produkte dieſer Ausdrücke in den Zahlausdruck von CG, ſo erhält man die erſte Form unter γ,

$$AB^2 \times CG \pm AC^2 \times BG$$
$$= BG^2 \times CG \pm CG_2 \times BG \pm AG^2 \times BC$$

und dieſe Gleichheit bleibt, wenn man alle Glieder, zum Behuf der geometriſchen Auslegung derſelben, durch den Zahlausdruck irgend einer willkührlichen Linie GE dividirt, wie in der zweyten Form unter γ. — Da endlich die beyden Theile $BG^2 \times CG \pm CG^2 \times BG$ ſich in das Produkt $BG \times CG \times (BG \pm CG)$, das iſt $BG \times CG \times BC$ zuſammen ziehn laſſen, ſo iſt auch, wie die dritte Formel unter γ ausſagt

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC_2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$

und dieſe Gleichheit bleibt wiederum, wenn man alle Glieder durch den Zahlausdruck $\frac{BC}{GE}$ dividirt, da denn, wie δ ausſagt, iſt

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2$$

Auslegung. *Die geometrischen Sätze*, welche diesen verschiednen Formen, wenn man die Zeichen in ihrem geometrischen Sinne nimmt *, entsprechen, lauten folgendermafsen. *4. Z. 2.

α) *Wenn man von der Spitze A eines Dreyecks ABC nach der gegenüberstehenden Grundlinie BC, oder nach deren Verlängerung eine grade Linie AG zieht, und den Unterschied der Quadrate über AB und AG in ein Rechteck, welches über der Grundlinie BG steht *, und eben so den Unterschied der Quadrate über AC und AG in ein Rechteck über CG verwandelt; so ist die Grundlinie BC des gegebnen Dreyecks, gleich den Höhen dieser beyden Rechtecke zusammen genommen oder von einander abgezogen*, je nachdem G in der Grundlinie selbst, oder in deren Verlängerung über C, oder über B hinaus liegt, und je nachdem AG gröfser oder kleiner als AB oder als AC ist; welches denn jedesmal durch die Formel α diesen Umständen gemäfs bestimmt wird. Diese Formel schliefst daher in der That so viel verschiedne Sätze, als Unterfälle des Hauptsatzes, in sich, als hierin Modificationen möglich sind; und sie alle müfste der Geometer einzeln aufführen, der (wie wohl vor Zeiten geschah) die Vortheile unsrer Bezeichnung verschmähte. *Auf 4.

Bey der Auslegung der andern Formen, mufs man bemerken, dafs ein Ausdruck wie dieser, $AC^2 \times \frac{BG}{CG}$ (den wir der Kürze wegen mit a bezeichnen wollen) in seinem geometrischen Sinne genommen *, *einen Flächenraum* bedeutet, *welcher vom Quadrate über AC* *4. Z. 2.

ein bestimmter Theil $\frac{BG}{CG}$, d. h. der nemliche Theil, als

* BG von CG ist; oder was auf eins heraus kömmt, *einen Raum dessen Verhältniss zum Quadrate über AB bestimmt*, nemlich BG : CG, *ist*; oder *einen Raum, zu dem AB² sich wie CG : BG verhält* (denn dieser Ausdruck lässt sich stets als vierte Proportionalgröfse zu folgenden drey

*V. 2. α CG : BG = AB² : *a* betrachten *;) oder endlich *eine*

* (f. 3.) *der Gattung nach gegebne und über AC beschriebne Figur* *, *deren Verhältniss zum Quadrate über AC eben deshalb gegeben*, nemlich BG : CG, *ist*. Je nachdem man in unsern Formen β, γ, δ, eine dieser Bedeutungen für solche Ausdrücke setzt, verwandelt sich eine jede in mannigfaltig ausgedrückte geometrische Sätze, an deren Ausdruck man sich jedoch nicht stofsen wird, wenn man das hier bemerkte fest hält. — 2) Muss man sich dabey aus der Lehre von den Verhältnissen des Satzes erinnern, worauf unter andern in der Arithmetik die Gesellschaftsrechnung beruht, dass, nemlich, wenn eine Gröfse A aus mehreren Theilen α, β, γ, besteht, und entweder diese Gröfse A selbst, oder einer ihrer Theile α bekannt, und überdem das Verhältniss dieser Theile untereinander (m : n : p) oder zum Ganzen gegeben wird, *dadurch zugleich die Gröfse aller Theile einzeln bestimmt ist*, weil wir nemlich dann auch das Verhältniss des Ganzen zu jedem der Theile (m + n + p : m, und : n, und : p) kennen. Ist also z. B. die Linie BC und das Verhältniss BG : CG gegeben, so ist auch die Gröfse der Linien BG, CG bekannt, und mithin auch das Rechteck BG × CG, wel-

ches alſo in dieſem Fall auch ein gegebner Raum iſt. — Dieſes vorausgeſetzt, laſſen ſich alſo z. B. die andern Formen folgendermaſsen überſetzen:

β) Fall 1: „*Zieht man nach einem Punkt G in der Grundlinie BC eine grade Linie AG, ſo iſt die Summe des Quadrats über AB, und eines Raums zu welchem das Quadrat über AC ein gegebnes Verhältniſs* (CG : BG) *hat*, gleich *der Summe des Rechtecks BC × BG und eines Raums zu welchem das Quadrat über AG ein gegebnes Verhältniſs* (CG : BC) *hat.* — Oder: „Zieht man von zwey gegebnen Punkten B, C aus zwey grade Linien, welche ſich ſo in einem Punkte A durchſchneiden, daſs das Quadrat über AB und ein Raum, deſſen Verhältniſs zum Quadrat über AC gegeben iſt, zuſammengenommen einem gegebnen Flächenraum gleich ſind, ſo iſt auch die Summe eines gegebnen Raums (BC × BG) und eines Raums, deſſen Verhältniſs zu AG^2 gegeben iſt

$(AG^2 \times \frac{BC}{BG})$ bekannt.

γ) Fall 1: „Unter denſelben Umſtänden iſt die Summe einer Figur gegebner Gattung über AB

$(AB^2 \times \frac{CG}{GE})$ und einer Figur gegebner Gattung über AC

$(AC^2 \times \frac{BG}{GE})$, *gleich* der Summe eines gegebnen

Raums $(BG^2 \times \frac{CG}{GE} + CG^2 \times \frac{BG}{GE})$ und einer über AG

beſchriebnen Figur gegebner Gattung $(AG^2 \times \frac{BC}{GE})$ u. ſ. f.;

Auslegungen die Folgerung 1 noch verdeutlichen wird.

Anmerkung. Mein Beweis dieser weitreichenden, für geometrische Untersuchungen ausserordentlich brauchbaren Sätze, von welchen Lehrsatz 17, und eine Menge anderer bekannter Theoreme blos einzelne Fälle aussagen, tritt zwar aus dem eigentlich Constructiven hinaus, und in die arithmetischen Vorstellungen der rechnenden Geometrie über; allein bey geometrischen Sätzen von dieser Art, welche eine so grosse Menge verschieden modificirter Fälle in sich fassen, möchte das eher ein Vorzug als ein Mangel seyn. Ueberdem wäre es nicht schwierig gewesen den zweyten Beweis der Formel α, und die Herleitung der übrigen Formeln aus dieser, ganz in ein geometrisches Gewand zu kleiden, welches aber durch die Beschreibung der geometrischen Constructionen, welche der Division und Multiplication, so wie der geometrischen Begriffe, die den Producten u. s. f. entsprechen, zu weitschweifig geworden wäre. Solche ganz geometrische Beweise für den ersten Fall der Formen β und γ (wenn G in der Grundlinie liegt,) giebt *Robert Simson* in seiner *Wiederherstellung von Apollonius ebnen* Oertern *Buch II Lemma 10*, und *Anhang Lemma 3*, und diese Beweise, welche doch nur Einen Fall betreffen, sind beynahe eben so weitläufig, als mein Beweis für alle Formen in ihrer Allgemeinheit. Einen andern Beweis für die Form β giebt, wie Simson anführt, *Matthias Steward* in seinem Buche *de quibusdam Theorematibus generalibus etc. Edinb.* 1746, und zeigt den Gebrauch derselben beym Beweise mehrerer Theoreme. Die Hauptsätze im zweyten Buche von Apollonius ebnen Oertern (und sie gehören zu den nettesten und allgemeinsten, aber auch zu den schwierigsten in der Geometrie,) gründen sich am Ende auf unserm Hauptsatz, und können durch eine ähnliche Behandlung erleichtert werden.

Die Formen unter α und δ finde ich bey *Simson* nicht. Die beyden andern eignet sich Simson (S. 351) als seine Er-

findung zu, beweiſt ſie aber mittelſt eines Lehnſatzes über dreytheilige Linien, deſſen nach *Pappus* Bericht, ſchon Apollonius ſich in ſeinem Werke bedient hat, und aus dem ſie nicht ſchwer abzuleiten waren, wie denn *dieſer Lehnſatz* rückwärts unmittelbar aus unſerm Hauptſatze ſich ohne die geringſte Schwierigkeit ableiten läſst *Werden nemlich in einer graden Linie vier* Fig. 49.
Punkte B, C, D, G willkührlich angenommen, und man errichtet über D ein Perpendikel, und zieht aus irgend einem Punkte A des Perpendikels, nach den übrigen Punkten B, C, G grade Linien, ſo entſteht ein Dreyeck ABC, worin aus der Spitze nach einem Punkte G in der Grundlinie, oder in deren Verlängerung, eine grade Linie gezogen iſt. Für dieſe Dreyecke iſt nach unſrer Form α unter den oben angegebnen Vorausſetzungen $BC = \frac{AB^2 - AG^2}{BG} \pm \frac{AC^2 - AG^2}{CG}$; und da zugleich das Perpendikel AD die Grundlinie ſo zerſchneidet, daſs $AB^2 - AG^2 = BD^2 - DG^2$ und $AC^2 - AG^2 = CD^2 - DG^2$ iſt *, * 16. I.

$$\alpha)\ BC = \frac{BD^2 - DG^2}{BG} \pm \frac{CD^2 - DG^2}{CG}.$$

Dieſe Formel ſtimmt in ihrer ganzen Zuſammenſetzung mit der vorigen überein, und iſt an denſelben Vorausſetzungen gebunden, daher ſich aus ihr, grade auf dieſelbe Art, wie es in unſerm Lehrſatz geſchehn iſt, *drey* andre *Formen für jede dreytheilige Linie BC herleiten* laſſen, in welchen die obern oder die untern Zeichen zu nehmen ſind, je nachdem G in oder auſserhalb BC liegt, auch im letztern Fall, $Bg > Cg$ geſetzt iſt, die Verſchiedenheit in der Lage von D aber nichts ändert:

$$\beta)\ BD^2 \pm CD^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$$

(In dieſer Form kömmt der Satz bey *Pappus* Buch 7. Satz 125, und als 7tes Lemma zum zweyten Buche von *Apollonius* ebnen Oertern, doch nur, wenn G ein Punkt in der Grundlinie iſt, vor.

Beschreibt man über BC einen Halbkreis, und errichtet auf C und G Perpendikel, so läſst sich der Satz leicht unmittelbar mittelst
* 12.f. 2. unsrer Folgerungen zum Pythagoreischen Lehrsatze * beweisen.) Ist die Grundlinie BC, der Punkt D und das Verhältniſs des Flächenraums $CD2 \times \frac{BG}{CG}$ zum Quadrat über CD, mithin $CG : BG$ gegeben, so ist es auch der Punkt G, und mithin auch
*(Al. 2.) $BC \times BG \pm DG^2 \times \frac{BC}{CG}$ gegeben * (Apollonius II Lemma 8, bey Pappus Buch 7. Satz 126.)

$$\gamma)\ BD^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CD^2 \times \frac{BG}{GE}$$

$$= BG^2 \times \frac{CG}{GE} \pm CG^2 \times \frac{BG}{GE} \pm DG^2 \times \frac{BC}{GE}$$

(Diese Form beweist *Simson* als Lehnsatz 1 im Anhange.) Sind hier wiederum BC, der Punkt D, und die Verhältnisse $GE : CG$ und $GE : BG$ gegeben, so sind auch der Punkt G und die gleichen Flächenräume bestimmt. (Anhang Lemma 2). Wenn überhaupt auf einer graden Linie mehrere Punkte B, G, H, C etc. gegeben sind, so ist allemal auch ein Punkt D gegeben, der auf dieser Linie so liegt, daſs der Inhalt von Figuren gegebner Gattung, die über DB, DC, DG etc. beschrieben sind, einen gegebnen Inhalt haben. (Anh. Lemma 4.)

Folgerung 1. *Figuren, welche der Gattung nach gegeben sind*, und *Figuren, welche unter einander ähnlich sind*, bedeutet nach dem geometrischen Sprachgebrauch dasselbe. Mit diesen Figuren werden wir uns im nächsten Buche beschäftigen, und ich verspare es bis dorthin, diesen Begriff genauer auseinander zu setzen. Hier kömmt es nur auf die Eigenschaft ähnlicher Figuren an, daſs ihr Inhalt sich zum Inhalte des Quadrats über eine ihrer homologen Seiten, in allen auf einerley Art verhält, und dafs folglich, *so wie eine Figur, welche über eine Linie AC beschrieben ist, der Gattung nach gegeben wird, das Verhältnifs dieser Figur zum Quadrate über AB völlig bestimmt, unveränderlich und bekannt ist*; *ein Lehnsatz* aus dem folgenden Buche, den wir dort streng beweisen werden. Mittelst dieses Satzes lassen sich unmittelbar aus der Auslegung unsers Hauptsatzes in seinen verschiedenen Formen, folgende interessante Sätze über das Dreyeck und den Kreis folgern:

A) *Für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen entweder die Summe oder der Unterschied des Quadrats über den einen Schenkel AB, und einer über den andern Schenkel AC beschriebnen Figur (a) von gegebner Gattung, einem gegebnen Flächenraum F gleich ist* ($AB^2 \pm AC^2 \times \frac{m}{q} = F$); *ist der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse.* Fig. 50

Denn ist die Gattung der über AC beschriebnen Figur *a* gegeben, so ist auch, unserm Lehnsatz zu Folge, ihr Verhältnifs zum Quadrat über AC gegeben, und zwar ist dieses Verhältnifs, welches m : q seyn mag, für alle solche Figuren einerley und unveränderlich. *Nimmt man* daher im Fall der *Summe auf der* gegebnen *Grundlinie* BC selbst, hingegen im Fall des *Unterschieds auf der Verlängerung* der Grundlinie *einen Punkt G so, dafs sich verhält BG : CG = m : q*; so ist *erstens* $\frac{BG}{CG} = \frac{m}{q}$, folglich, unsern Voraussetzungen gemäss, $F = AB^2 \pm AC^2 \times \frac{BG}{CG}$, das ist, der Form β gemäss, $= BC \times CG \pm AG^2 \times \frac{BC}{CG}$, und mithin

$$AG^2 \times \frac{BC}{CG} \begin{cases} = F - BC \times CG \text{ im Fall der Summe} \\ = BC \times Cg - F \text{ im Fall des Untersch.} \end{cases}$$

Zweytens sind dann, weil BC gegeben ist, auch die beyden Linien BG, CG, so wie *der Punkt G*, das Recht-
*(AI,2.) eck $BC \times CG$ und der Exponent $\frac{BC}{CG}$ gegeben *; und daher ist dann in beyden Fällen *eine Figur gegebner Gattung, welche über AG beschrieben wird*, (nemlich $u = AG^2 \times \frac{BC}{CG}$,) *auch der Grösse nach gegeben*, indem sie dem Unterschiede gegebner Flächenräume (F und $BC \times CG$) gleich ist. Zu dieser Figur steht das *Quadrat über AG*, weil sie der Gattung nach gegeben ist, in einem gegebnen Verhältnisse ($CG : BC$ oder $q : m \pm q$) daher auch das Quadrat über AG, und mithin *AG selbst*, der Grösse nach gegeben und unveränderlich ist. Da nun zugleich der eine Endpunkt G dieser Linie gegeben und unveränderlich ist; so muss der *geometrische Ort des zweyten Endpunkts A* eine *Kreislinie* seyn, welche um G als Mittelpunkt, mit AG als Halbmesser beschrie-
*II,E.1. ben wird *. Und zwar findet man diesen Halbmesser durch Construction, wenn man, nach den Methoden in den Aufgaben zu diesem Buche, den Unterschied des gegebnen Raums F und des Rechtecks $BC \times CG$ in ein Quadrat verwandelt, und darauf ein Quadrat

bildet, zu welchem sich das gefundene wie BC : CG verhält *. Die Seite dieses Quadrats ist der Halbmesser AG. *12 f. 2 a

* *Apollonius ebne Oerter II. 5. Fall 1 Aussage 2*, auch *II. 3. A*; doch fehlt an beyden Stellen der Fall, wenn der Unterschied gegeben ist. --- Aus der Bestimmung des Punktes G und der Linie AG, sieht man, dass für den Fall der Summe der *Mittelpunkt* G in der Grundlinie, für den Fall des Unterschieds allemal auf ihrer Verlängerung liegt, und dass im ersten Fall der gegebne Raum F nothwendig grösser, im zweyten kleiner als das Rechteck BC × CG seyn muss. Sonst würde AG negativ, und der erste Fall gienge in den zweyten, und umgekehrt über.

B) *Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen, entweder die Summe, oder der Unterschied einer Figur gegebner Gattung (a), welche über den einen Schenkel AB, und einer andern Figur gegebner Gattung (b), welche über den andern Schenkel AC steht, einem gegebnen Flächenraum F gleich ist ($a \pm b = F$); muss der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse seyn.*

Denn da *a* und *b* der Gattung nach gegeben sind, so ist das Verhältniss der erstern Figur zum Quadrat über AB, welches m : q seyn mag, und das Verhältniss der letztern zum Quadrat über AC, welches n : q seyn mag, mithin auch das Verhältniss m : n gegeben, und dieses ist das Verhältniss, worin die beyden der Gattung nach gegebnen Figuren, wenn man sie über dieselbe willkührliche Linie beschreibt, zu einander stehn. *Nimmt man* im Fall der *Summe in der Grundlinie*, im Fall des *Unterschieds auf ihrer Verlängerung einen Punkt*

G, und zugleich eine grade Linie GE, *so dass sich verhält*, $BG : CG : GE = m : n : q$, so sind, da BC gegeben ist, diese Linien, folglich auch das Rechteck $BG \times CG = R$ gegeben. Da nun nach γ,

$a = AB^2 \times \frac{CG}{GE}$ und $b = AC^2 \times \frac{BG}{GE}$ ist, $a \pm b$ das ist

$F = \frac{BC}{GE} \times (R \pm AG^2)$ seyn muss; so ist, falls a und b

Figuren gegebner Gattung, folglich $\frac{m}{q}$, $\frac{n}{q}$ gegeben

sind, und der Raum $F = a \pm b$ gegeben wird, auch eine Figur gegebner Gattung über AG gegeben, und zwar ist

$AG^2 \times \frac{m + n}{q} = F - \frac{m + n}{q} \times R$ im Fall der Summe

$AG^2 \times \frac{m - n}{q} = R \times \frac{m - n}{q} - F$ im Fall des Untersch.

In beyden Fällen ist also, auch unter dieser Voraussetzung, nicht nur der Punkt G, sondern auch das Quadrat über AG, und also auch AG selbst, als Seite dieses Quadrats, gegeben und unveränderlich, daher eine um den Mittelpunkt G, mit AG als Halbmesser beschriebene *Kreislinie* der *geometrische Ort der Spitze A* seyn muss.

Apollonius II. 5. Fall 1. Aussage 3. Wo doch wiederum der Fall, wenn der Unterschied der Figuren gegeben ist, fehlt. — Aus der Bestimmung von AG fällt übrigens in die Augen, dass hier für den Fall der *Summe* $F > \frac{m + n}{q} \times BG \times CG$ und für den Fall des *Unterschieds* $F < \frac{m - n}{q} \times Bg \times Cg$, folglich ein Raum, der sich zum Raum F im ersten Fall wie die Summe, im zweyten wie der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, wenn sie über derselben Linie stehn, zum Quadrat dieser Linie, verhält, im ersten Fall nothwendig grösser, im zweyten nothwendig kleiner als das Rechteck aus den beyden Abschnitten auf der Grundlinie seyn muss; und das ist *die Bestimmung* dieser Aussage.

Für den *zweyten Fall (wenn der Unterschied der Figuren gegebner Gattung a und b gegeben wird)* ist die Aussage unter B noch besonders dahin einzuschränken, dass a und b *nicht ähnliche Figuren* seyn dürfen. Denn dann würden sich a und b zu den Quadraten über AB und AC auf gleiche Art verhalten, folglich m und n, mithin auch Bg und Cg gleich seyn müssen; welches unmöglich ist, da in diesem Fall der Punkt g in der Verlängerung der Grundlinie liegt, und für jeden solchen Punkt die Linien Bg und Cg um BC verschieden sind. In der That ist dann auch $a - b = F = AB^2 \times \frac{m}{q} - AC^2 \times \frac{m}{q}$, folglich $AB^2 - AC^2 = F \times \frac{q}{m}$, mithin der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln gegeben und unveränderlich, daher in diesem Fall der Ort des Punktes A keine Kreislinie, sondern nach Lehrsatz 16 Folgerung 3 *eine grade Linie* seyn muss, und zwar ein *Perpendikel auf der Grundlinie BC*, dessen Abstand vom Mittelpunkt der Grundlinie gegeben ist *. *16. f.3.

C) *Auch für alle Dreyecke, welche über derselben Grundlinie BC stehn, und in welchen das Quadrat, oder eine andere der Gattung nach gegebne Figur a über dem einen Schenkel AB*, gleich ist, *der Summe oder dem Unterschiede eines gegebenen Raumes S und des Quadrats, oder einer andern der Gattung nach gegebner Figur b, über dem zweyten Schenkel AC; muss der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebener Lage und Grösse seyn.*

Denn, ist *erstens* $a = b \pm S$, so ist im Fall *der Summe* $a - b = S$, *im Fall des Unterschieds* $b - a = S$, in beyden Fällen also der Unterschied zweyer der Gattung nach gegebenen Figuren, die über AB und AC beschrieben sind, einem gegebnen Raume S gleich. *Folglich tritt hier der zweyte Fall der Aussage B ein.* Verhalten sich daher die beyden Figuren gegebner Gattung a und b, zu den Quadraten über AB und AC, wie $m : q$ und $n : q$, und man nimmt auf der Verlängerung der Grundlinie BC einen Punkt g, so dass sich verhält $m : n = Bg : Cg$, so ist *eine Kreislinie*, welche um g als Mittelpunkt, und mit der Seite des Quadrats $Ag^2 = Bg \times Cg \times \frac{m - n}{q} - S$ als Halbmesser be-

(B) schrieben wird, der Ort der Spitze A*; es sey denn, dass m und n im Verhältniss der Gleichheit stehn, also *a* und *b* ähnliche Figuren sind, indem alsdann der Ort der Spitze A

*16. f. 3. eine grade Linie wird *. — Ist *zweytens* $a = S - b$, mithin $a + b = S$, oder die *Summe* der beyden Figuren a und b einem gegebnen Raume S gleich, so muss, nach *B Fall* 1, der Ort der Spitze A ebenfalls eine Kreislinie seyn, deren Mittelpunkt nun aber in der Grundline BC selbst liegt, und zwar der Punkt G in der Grundlinie ist, für welchen sich verhält, $BG : CG = m : n$, und deren Halbmesser AG nun als Seite eines Quadrats $AG^2 = S - \frac{m + n}{q} \times BG \times CG$, gefunden wird.

Bey dieser Aussage C) wird vorausgesetzt, dass a und b Figuren gegebner Gattung sind, und zwar dass

a gleia gleich $AB^2 \times \frac{m}{q}$, und zugleich diese Figur $AB^2 \times \frac{m}{q}$ $= b \pm S$, oder umgekehrt $= S - b$ sey; eine Voraussetzung, die mit der auf eins hinausläuft, dafs sich verhalte $b \pm S$ (oder $S - b$) : $AB^2 = m : q$ *, dafs folglich *das Verhältnifs* der Summe oder des Unterschieds der Figur b und eines gegebenen Raums S, zum Quadrat über AB, *gegeben und unveränderlich sey.* Der Satz C) läfst sich daher auch folgendermafsen ausdrücken: *Für Dreyecke über derselben Grundlinie BC, für die das Verhältnifs der Summe oder des Unterschieds einer der Gattung nach gegebnen Figur, welche über dem einen Schenkel AC steht, und eines gegebnen Raums S, zum Quadrat über dem andern Schenkel AB gegeben ist; ist der geometrische Ort der Spitze A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse*, den Fall ausgenommen, wenn beyde Figuren *ähnlich* sind, für welchen dieser Ort eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

* V. 3. γ.

Auf diese Art wird der Satz in *Apollonius ebnen Oertern II, 4* vorgetragen, wiewohl er dort weder in seiner Allgemeinheit (nur für den Fall, wenn b ein Quadrat ist) dargethan, noch auf den vorigen Ort B zurückgeführt wird. (Vielmehr stellt ihn Apollonius vor den Ort B, und scheint daher umgekehrt diesen aus unserm Satze C abgeleitet zu haben, sind anders nicht, wie Simson vermuthet, diese Sätze von spätern Abschreibern fälschlich versetzt worden. *Simson* beweist ihn dagegen, Satz 2 und 3 des Anhangs, allgemein, mit Hülfe unsers Lehrsatzes 20.

D) *Ist das Quadrat über dem einen Schenkel AB, einer Figur gegebner Gattung, welche über den andern Schenkel AC beschrieben wird, selbst gleich,* $AB^2 = AC^2 \times \frac{m}{q}$, mithin das Verhältnifs der beyden Quadrate der Schenkel $AB^2 : AC^2 = m : q$, und folglich auch *das Verhältnifs der beyden Schenkel felbft zu einander gegeben und unveränderlich*; fo ift diefe Vorausfetzung zwar *algebraifch* unter der Bedingung unferer Ausfage C enthalten, als der Fall derfelben, da der gegebne Raum $S = o$ ift, d. h. gar kein folcher Raum gefetzt wird, indem die Arithmetik lehrt, dafs man o mit unter die Reihe aller möglichen Werthe einer Gröfse nicht nur aufnehmen darf, fondern auch aufnehmen mufs. Allein hier ift die Gültigkeit unferer Ausfage für diefen Fall noch befonders darzuthun, und ausdrücklich zu beweifen, dafs auch unter diefen Umftänden der Ort des Durchchnittspunktes A eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröfse fey, wie diefes in Zufatz VI und VII gefchehn foll.

Folgerung 2. *Alle diefe Sätze* find nicht blofs auf die Schenkel von Dreyecken, welche über einer gegebnen Grundlinie BC ftehn eingefchränkt, oder, was daffelbe fagt, gelten nicht blofs von graden Linien, welche von *zwey* gegebnen Punkten *B*, C aus gezogen, fich fo durchfchneiden, wie die Bedingungen der Sätze *A*), *B*), C) ausfagen; fondern fie *gelten auch für grade Linien, welche von* 3, *von* 4, *von* 5 *gegebnen Punkten, u. f. f., kurz von jeder beliebigen Zahl gegebner Punkte aus gezogen, fich insgefammt in einem Punkte A fo durchfchneiden, dafs die Figuren gegebner Gattung, welche man über fie befchreibt, fie mögen Quadrate feyn oder nicht,*

a) entweder *alle zufammengenommen einem gegebnen Raume F gleich;*

b) oder *fo befchaffen find, dafs der Unterfchied zwifchen der Summe einiger diefer Figuren und der Summe andrer einem gegebnen Raume F gleich ift;*

c) oder endlich so, *dass die Summe einiger, gleich ist der Summe der andern, vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum S:*

Immer ist unter diesen Bedingungen der geometrische Ort des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes A aller solcher Linien, eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse, ausgenommen in dem Fall, wenn in b, alle diese Figuren einander *ähnlich* sind, oder wenn in c, der Raum S dem Unterschiede *ähnlicher Figuren* gleich ist, in welchen Fällen der Ort des Durchschnittspunktes eine *grade Linie* von gegebner Lage wird.

a) *Wenn zwey Punkte B und C gegeben* sind, von denen grade Linien so gezogen werden, dass sie sich zwey und zwey in Punkten A durchschneiden, und es werden beliebige Figuren gegebner Gattungen *° (f. 1.)

$a = \frac{m}{q} \times MN^2$ über die ersten BA, und $b = \frac{n}{q} \times MN^2$

über die zweyten AC beschriebn, (wo MN irgend eine willkührliche Linie *bedeutet*,) und man nimmt auf der Linie BC, oder auf deren Verlängerung, einen Punkt G, und überdem eine Linie GE, so, dass sich verhält $BC : BG : CG : GE = m + n : m : n : q$, und zieht AG; *so ist allemal*, wo auch die Spitze A des Dreyecks BAC liegen möge, der Natur des Dreyecks gemäſs,

$$AB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm AC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm AG^2)$$ *, * 20. γ.

mithin stets $a \pm b = \frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2)$, wie in

Folg. 1. B., die beyden Figuren gegebner Gattung a und b mögen zur Summe oder zum Uterschied einen beständigen, oder einen veränderlichen Flächenraum F haben, worauf es hierbey weiter nicht ankömmt. Nur hat im erstern Fall AG^2 einen beständigen und immer einerley, im letztern hingegen einen veränderlichen und ungleichen Werth, weshalb zwar im erstern, nicht aber im letztern Fall, der Ort der Durchschnittspunkte A eine mit dem Halbmesser GA, um

* f. 1. B. den Mittelpunkt G, beschriebne Kreislinie ist *.

Fig. 52. *Wird also noch ein dritter Punkt D gegeben, und der Gattung nach noch eine dritte Figur* $c = \frac{p}{q} \times MN^2$, und durchschneiden sich nun *drey* von den Punkten B, C, D aus gezogne grade Linien in Einem Punkte A so, *daß die Summe oder der Unterschied der drey Figuren gegebner Gattungen a, b, c, über diese Linien beschrieben, einem gegebnen, unveränderlichen Flächenraum F' gleich sind*, $(a \pm b \pm c = F',)$ so muss, wenn man statt $a \pm b$, setzt $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2)$, welches für jede Bedingung erlaubt ist, allemal auch $\frac{m \pm n}{q} \times (R \pm AG^2) \pm c = F'$, folglich

$$AG^2 \times \frac{m + n}{q} \pm c = F' - R \times \frac{m + n}{q} \textit{ im Fall von } a + b$$

$$AG^2 \times \frac{m - n}{q} \pm c = R \times \frac{m - n}{q} - F' \textit{ im Fall von } a - b$$

seyn. Mithin müssen dann in beyden Fällen die Linien BA, CA, DA ſich drey und drey ſo in Punkten A durchſchneiden, daſs wenn man von dem Punkte G aus, (der auf die angezeigte Art, durch die Gattung der Figuren a und b beſtimmt, und alſo gegeben iſt,) GA zieht, entweder die Summe, oder der Unterſchied zweyer Figuren gegebner Gattungen über GA und DA beſchrieben, einem gegebnen Flächenraume gleich iſt, nemlich dem Unterſchiede der gegebnen Räume F′ und $R \times \frac{m \pm n}{q}$. Es tritt dann alſo allemal für die Linien GA, DA der *Fall A, der vorigen Folgerung* ein, und vermöge des dort Bewieſenen muſs *der geometriſche Ort der Durchſchnittspunkte A jener drey Linien*, wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Gröſse ſeyn. Und zwar, wenn man *erſt*, im Fall der Summe a + b auf BC ſelbſt, im Fall des Unterſchieds a — b hingegen auf ihrer Verlängerung einen Punkt G ſo beſtimmt, daſs ſich verhält BG : CG = m : n, und *dann* auf ähnliche Art, je nachdem c additiv oder ſubtractiv iſt, auf GD oder auf deren Verlängerung einen Punkt G′ ſo nimmt, daſs ſich verhält GG′ : DG = m ± n : p, (da denn die Punkte G, G′, die Abſchnitte BG, CG und GG′, DG′, und die Rechtecke aus den erſtern R, und aus den letztern R′ gegeben ſind); *ſo iſt G′ der Mittelpunkt dieſer Kreislinie*, und auf dieſe Beſtimmung des Mittelpunkts hat *lediglich die Gattung*, nicht aber die Gröſse der Figuren a, b, c Einfluſs. *Der Halbmeſſer* der Kreislinie beſtimmt ſich hingegen daraus, daſs dann, *im Fall die Summe aller drey Figuren* gegebner Gattung dem Raume F′ gleich ist, nach Folg. 1. B. seyn muſs

$$G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} = F' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}$$

(und auf eine ähnliche Art, *im Fall der Unterschied* einiger der Figuren gegebner Gattung von den andern, dem Raume F′ gleich ist, nur daſs dann einige der subtractiven Theile dieser Formel additiv, und umgekehrt einige der additiven subtractiv werden, wie man sich das leicht aus Folgerung 1. B. entwickeln wird.) Folglich ist dann sowohl die Gattung, als die Gröſse einer über G′A beschriebnen Figur, mithin G′A selbst, zugleich mit F′ gegeben und unveränderlich, und dieser Halbmesser des Ortes läſst sich nach den Aufgaben zu Ende dieses Buchs ohne Schwierigkeit durch geometrische Construction, so wie dessen Zahlwerth durch Rechnung finden. Ist aber F′ kein unveränderlicher Raum, so ist auch die Figur gegebner Gattung über G′A, und diese Linie selbst, von veränderlicher Gröſse, und dann also der Ort der Punkte A keine um G′ beschriebne Kreislinie.

Ist dann aber noch ein vierter Punkt E gegeben, und der Gattung nach eine vierte Figur $d = \frac{r}{q} \times MN^2$, und durchschneiden sich die aus den vier Punkten B, C, D, E gezogne grade Linien, je vier in Einem Punkte A, so, daſs die *Summe* der vier Figuren gegebner Gattungen a, b, c, d, über diese Linien beschrieben, *einem gegebnen unveränderlichen Flächenraum F″ gleich sind*,

$(a+b+c+d=F'')$; so muss, (wenn man aus der Gattung von drey dieser Figuren, z. B, aus a, b, c, und aus der Lage der Punkte B, C, D, wie im vorigen Fall, den Punkt G′ bestimmt, und nach den Durchschnittspunkten A die grade Linie G′A zieht,) wiederum die vorige Gleichung bestehn. Fügt man folglich, beyderseits die vierte Figur gegebner Gattung d hinzu, und setzt statt $F' + d$ den Raum F'', so erhält man für jeden Durchschnittspunkt A die Gleichung $G'A^2 \times \frac{m+n+p}{q} + d$

$$= F'' - R \times \frac{m+n}{q} - R' \times \frac{m+n+p}{q}.$$

Die Durchschnittspunkte A je vier solcher Linien, sind folglich wiederum so beschaffen, dass wenn man von den beyden gegebnen Punkten G′ und E aus, nach ihnen die graden Linien G′A und EA zieht, Figuren gegebner Gattungen über diese Linien beschrieben, zusammengenommen einem gegebnen und unveränderlichen Flächenraume gleich sind. *Der Ort dieser Durchschnittspunkte* ist also wiederum eine *Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse,* deren Mittelpunkt und Halbmesser man wieder grade so, wie im vorigen Fall, nach Folg. 1. B. findet. Man theile nemlich, nachdem man den Punkt G′ bestimmt hat, die Linie G′E im Punkte G″ nach dem Verhältnisse von $m+n+p:r$ ein, (d. h. nach dem Verhältnisse der beyden Figuren gegebner Gattung über G′A und EA, wenn sie auf derselben Grundlinie stehn); so erhält man den *Mittelpunkt*

* f. 1. B.

und der *Halbmesser* G″A wird wider durch eine ähnliche Formel wie vorhin bestimmt,

$$G''A^2 \times \frac{m+n+p+r}{q} = F'' - R \times \frac{m+n}{q}$$
$$- R' \times \frac{m+n+p}{q} - R'' \times \frac{m+n+p+r}{q}.$$

Wird noch ein fünfter, und dann noch ein *sechster*, ein *siebenter Punkt* u. s. f. unter ähnlichen Bedingungen gegeben, so geht, wie man leicht sieht, die Schlussfolge grade so, wie hier für drey und vier Punkte fort, daher unsere Behauptung auch für 5, für 6, für 7, kurz für jede Zahl von Punkten gilt.

Wenn man folglich aus einer beliebigen Anzahl gegebner Punkte grade Linien so zieht, dass sie sich insgesammt in Einem Punkte, und zwar so durchschneiden, dass Figuren von gegebner Gattung, welche man über diese Linien beschreibt, zusammengenommen einem gegebnen Flächenraum gleich sind; so ist allemal der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes eine der Lage und Grösse nach gegebne Kreislinie, so dass jeder Punkt einer bestimmten Kreislinie, und kein Punkt ausserhalb derselben, mit den gegebnen Punkten grade Linien bestimmt, welche die erwähnte Eigenschaft haben. — Verhalten sich die der Gattung nach gegebnen, über BA, CA, DA, EA, u. s. f. zu beschreibenden Figuren, zu den Quadraten dieser Linien, wie m, n, p, r, u. s. f. zu q; und man theilt die grade Linie BC, im Punkte G nach dem Verhältnisse m : n ein, ferner GD, im Punkte G′ nach dem

Verhältnisse $m+n:p$, und G'E im Punkte G" nach dem Verhältnisse $m+n+p:r$ u. s. f.; so findet man den *Mittelpunkt dieses Kreises*: und der *Halbmesser* desselben wird durch den gegebnen Flächenraum, durch die gegebnen Gattungen der Figuren a, b, c etc., und durch die Rechtecke aus den Abschnitten der Linien BC, G'D, G"E u. s. f., durch Formeln, deren Gesetz leicht zu übersehn ist, bestimmt.

b) *Dass der Satz in dieser Allgemeinheit auch für den Fall gilt, da der Unterschied der Figuren gegebner Gattungen, einem gegebnen unveränderlichen Flächenraum gleich ist*, fällt aus unserer Erörterung für 2 und 3 Punkte in die Augen. Der einzige Unterschied dabey ist, dass für jede subtractive Figur, der durch ihre Gattung bestimmte Punkt G in einer Verlängerung zu nehmen, und die Grösse der Figur gegebner Gattung über GA aus F, R, R' etc. auf andre Art zusammenzusetzen ist.

c) *Ist endlich die Summe einiger der Figuren gegebner Gattung, der Summe der übrigen, sammt einem gegebnen Raume S gleich*; so ist der Unterschied der Figur gegebner Gattungen dem Raume S gleich: also auch der Satz C, in dieser Allgemeinheit wahr *. *(s. 1.C)

Der erstere von diesen Sätzen, welche zu den allgemeinsten und elegantesten in der geometrischen Analysis gehören, wird in *Apollonius ebnen Oertern II. 5. Fall 2 und 3* dargethan. Bloss der Beweis für 3 Punkte und den Fall der Summe, nimmt dort 16 Seiten ein, indem er durch alle Verschiedenheiten, (wenn alle 3 Figuren gegebner Gattung Quadrate sind, oder wenn ihrer 2, oder wenn 1, oder wenn keine ein Quadrate ist,) umständlich durchgeführt wird, und obgleich *Simson* den Fall des Unterschieds ganz übergeht, so füllt doch der ganze Satz über 50 Seiten. Der deutsche Uebersetzer, *Camerer*, hat dort arithmetische und trigonometrische Formeln zur Bestimmung des Halbmessers hinzugefügt, die aber, wie sich schon aus unsern Formeln schliessen läfst, aufserordentlich weitläufig werden. — Dafs im Fall der Summe der gegebne Raum F nothwendig gröfser seyn mufs als die Summe aller subtractiven Räume, fällt aus der Bestimmung des Halbmessers in die Augen.

Stellt man sich alle gegebene Punkte B, C, D etc. als gleich schwer vor, so findet man den Lehren der Statik gemäfs, ihren *Schwerpunkt* grade auf dieselbe Art, wie man hier den Mittelpunkt G der Kreislinie findet, welche der geometrische Ort des Durchschnittspuuktes A für den Fall ist, dafs alle Figuren über BA, CA u. s. f. Quadrate sind. Daher hat umgekehrt jeder Kreis, welcher aus dem Schwerpunkte mehrerer in einer Ebne gegebner, und gleich schwerer Punkte beschrieben wird, die Eigenschaft, dafs wenn man von allen diesen Punkten, nach irgend einem Punkte der Kreislinie, grade Linien zieht, die Quadrate über diese Linien zusammengenommen immer dem nemlichen Flächenraume gleich sind; ein Satz den Simson aus *Hughens Horologium Oscillatorium prop. 12* entlehnt, und unserm Satz *a* gemäfs noch erweitert.

Folgerung 3. Aus diesen Sätzen fliefsen in Verbindung mit unserm Lehrsatz umgekehrt folgende *interessante Eigenschaften der Kreislinie*, wodurch die Eigenschaft, welche wir in Lehrsatz 17, Folgerung 2 kennen gelernt haben, ausnehmend verallgemeinert wird.

Fig. 51. *Nimmt man nemlich auf einem der Durchmesser einer Kreislinie, oder auf deren Verlängerung, willkührlich zwey Punkte B und C, und zieht von beyden nach einem beliebigen*

Punkte M der Kreislinie grade Linien BM, CM; so haben zwey Figuren gegebner Gattung, welche man über diese Linien beschreibt, (nemlich solche Figuren, die über einerley Linie beschrieben, sich wie die Entfernungen CG und BG verhalten,) *für jeden Punkt der Kreislinie, falls B und C zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes G liegen, immer einerley Summe: falls hingegen B und C zu einerley Seite des Mittelpunkts G liegen, immer einerley Unterschied.* Denn ist *erstens* M ein Punkt *ausserhalb* des Durchmessers BC, und man zieht MB, MC, MG, so entsteht ein Dreyeck MBC, von dessen Spitze, im ersten Fall nach der gegenüberstehenden Grundlinie, im zweyten nach ihrer Verlängerung eine grade Linie AG gezogen ist, für welches folglich nach der Form γ unsers Lehrsatzes, $MB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm MC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \pm (BG \times CG \pm MG^2)$ ist. Nun sind B, G, C gegebne Punkte, also BG und CG unveränderliche Linien, wie auch der Halbmesser des Kreises MG, und die beliebig gegebne Linie GE. Mithin sind die Räume rechts vom Gleichheitszeichen, für jeden Punkt M in der Kreislinie, der ausserhalb BC liegt, von einerley Grösse, also auch die Räume links vom Gleichheitszeichen. Folglich haben zwey der Gattung nach gegebne Figuren über MB und MC beschrieben, und zwar zwey Figuren, die über dieselbe Linie beschrieben sich wie CG : BG verhalten, im *ersten* Fall zusammengenommen, im *zweyten* von einander abgezogen, immer einerley Grösse. Dass dieses *zweytens* auch für die bey-

den Punkte N der Kreislinie, welche *in* der Linie BC liegen, und für welche kein Dreyeck MBC vorhanden
*S. 329. ist, gilt, folgt aus *Proklus Lehnsatz* in Anmerk. 1 *, indem nach der Form γ dieses Lehnsatzes, auch für jene beyden Punkte, $NB^2 \times \frac{CG}{GE} \pm NC^2 \times \frac{BG}{GE} = \frac{BC}{GE} \times (BG \times CG \pm MG^2)$ ist.

Fig. 54. *Nimmt man in oder außerhalb der Kreislinie willkührlich drey Punkte, B, C, D, und zieht von ihnen nach Einem Punkte M der Kreislinie grade Linien, so haben auf dieselbe Art drey Figuren bestimmter Gattungen über diese Linien beschrieben, für jeden Punkt M einerley Summe, oder nach Umständen einerley Unterschied.* Und zwar, wenn man BC, und von D nach dem Mittelp. G, DG zieht, und diese beyden Linien sich in einem Punkte H durchschneiden, so wird die Gattung der Figuren über BM, CM, DM, durch das Verhältniß der Abschnitte CH : BH und HG : DG, wie in Folgerung 2. bestimmt. *Und dasselbe gilt für 4, für 5, kurz für jede beliebige Zahl willkührlich angenommener Punkte,* wofür der Beweis nach Anleitung des Beweises in Folgerung 2. sich ohne Schwierigkeit, grade so wie für 2 Punkte führen läßt.

Anmerkung 2. Diese interessanten Folgerungen aus unserm allgemeinen Lehrsatz, habe ich unmittelbar auf die Auslegung der verschiednen Formen desselben folgen lassen, weil sie sich lediglich auf diese gründen. In den folgenden *Zusätzen* füge ich nun noch *die Entwickelung einiger besondrer Sätze* hinzu,
* 20. *die in unserm allgemeinen Lehrsatze* * *liegen*, und aus deren großer Brauchbarkeit in geometrischen Untersuchungen, die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes noch einleuchtender werden wird.

Zusatz I. 1) *Wenn in einem Dreyeck ABC aus* Fig. 45.
der Spitze nach der Verlängerung der Grundlinie BC eine grade Linie Ag so gezogen ist, dass, wenn S einen gegebnen Raum bedeutet, *sich verhält* $AB^2 - S : AC^2 = Bg : Cg$; *so ist allemal das Rechteck aus der Grundlinie und dem grössern Abschnitt BG, grösser als der gegebne Raum S.*

Denn es ist alsdann $AB^2 - S = AC^2 \times \frac{Bg}{Cg}$ *, *V. 3. α.

folglich $S = AB^2 - AC^2 \times \frac{Bg}{Cg} = BC \times Bg - Ag^2 \times \frac{BC}{Cg}$ *, * 20, β.

und mithin $S > BC \times Bg$.

2) *Wird hingegen AG nach einem Punkte in der Grundlinie selbst so gezogen, dass sich verhält* $S - AB^2 : AC^2 = BG : CG$, *so muss dass Rechteck* $BC \times BG$ *kleiner als der gegebne Raum S seyn.* Denn alsdann ist $S = AB^2 +$

$AC^2 \times \frac{BG}{CG} = BC \times BG + AG^2 \times \frac{BC}{CG}$ *, also * 20, β.

$S > BC \times BG$.

Beyde Sätze kommen in *Apollonius* ebnen Oertern II Lemma 4 und 5 vor, und ihr Beweis wird dort weit hergehohlt.

Zusatz II. Nach der Aussage δ unsers Lehrsatzes, ist, wenn man in einem Dreyeck ABC, die Linie AG willkührlich nach einem Punkte der Grundlinie oder deren Verlängerung zieht, immer Fig. 45.

$$AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC} = BG \times CG \pm AG^2,$$

wo die obern Zeichen für den erstern, die untern für den letztern Fall gelten.

Fig. 36. 1) *Zieht man folglich AG nach dem Punkte in der Mitte der Grundlinie,* da dann $BG = CG = \frac{1}{2} BC$ wird, so ist immer $\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} AC^2 = BG^2 + AG^2$; unser Lehrsatz 17, welcher also der einfachste Fall dieses allgemeinen Satzes ist. — Zieht man Ag nach einem Punkte in der verlängerten Grundlinie, so dass $BC = Cg$ wird, so erhält man ebenfalls die Aussage jenes Lehrsatzes.

Fig. 45. 2) *Zieht man AG so, dass $BG = 2 CG$, und mithin $BC = 3 CG$ ist,* so ist $\frac{1}{3} AB^2 + \frac{2}{3} AC^2 = 2 CG^2 + AG^2$ u. s. f.

3) *Ist überhaupt $BG = m . CG$,* folglich, im Fall G in der Grundlinie liegt $BC = (m + 1) CG$, falls aber G in der verlängerten Grundlinie liegt $BC = (m - 1) CG$; so ist

$$\text{im } \textit{ersten Fall } \frac{AB^2 + m . AC^2}{m + 1} = m . CG^2 + AG^2$$

$$\text{im } \textit{zweyten } \frac{AB^2 - m . AC^2}{m - 1} = m . CG^2 - AG^2;$$

Aussagen, welche sich beyde in folgende Formel zusammenziehn lassen,

$$AG^2 = \frac{1}{1 \pm m} . AB^2 \pm \frac{m}{1 \pm m} . AC^2 \mp m . CG^2$$

wo die obern Zeichen für den ersten, die untern Zeichen für den zweyten Fall gelten.

Fig. 48. Zusatz III. 1) *Zieht man AG senkrecht auf die Grundlinie oder deren Verlängerung,* so wird $AG^2 = AB^2 - BG^2$, und setzt man diesen Werth in δ, so

geht die allgemeine Ausſage, je nachdem der Winkel B ſpitz oder ſtumpf (d. i. BC = BG + CG oder BG — CG) iſt, in die beyden Ausſagen des dreyzehnten Lehrſatzes über; eine Ableitung, die ich dem Leſer überlaſſe. Auch dieſer Satz iſt alſo nur ein beſondrer Fall unſers Allgemeinen.

2) *Iſt das Dreyeck ABC gleichſchenklig, und AG von der Spitze nach der Grundlinie oder deren Verlängerung gezogen*, ſo verwandeln ſich in δ die Theile links vom Fig. 48.

Gleichheitszeichen in dieſe $AB^2 \times \left(\frac{CG \pm BG}{BC}\right) = \pm AE^2$,

indem, im Fall G in der Verlängerung der Grundlinie liegt, der Vorausſetzung bey unſern Formeln gemäſs, Bg — Cg = BC iſt. Es iſt alſo im gleichſchenkligen Dreyeck $\pm AB^2 = BG \times CG \pm AG^2$ oder $AB^2 = AG^2 \pm BG \times CG$; ein fruchtbarer Satz, bey dem ich mich hier weiter nicht verweile, weil ich ihn, zum Behuf derer, die unſern allgemeinen Lehrſatz überſchlagen haben, bald als einen beſondern Lehrſatz aufführen und noch auf andre Art beweiſen werde *. * 21)

Zuſatz IV. 1) *Zieht man in einem Dreyeck ABC die grade Linie AG ſo nach der Grundlinie BC oder nach deren Verlängerung, daſs ſich die beyden Abſchnitte BG, CG, wie die Schenkel, an welchen ſie anliegen, verhalten, BG : CG = AB : AC; ſo iſt das Rechteck aus den beyden Schenkeln, gleich, im erſten Fall der Summe, im zweyten dem Unterſchiede des Rechtecks aus den beyden Abſchnitten BG, CG, und des Quadrats der theilenden Linie, oder $AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2$.* Fig. 50.

Denn aus der vorausgesetzten Proportion fliesst auch die Proportionalität folgender Grösen

*V.4.β. $BG \pm CG : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$ *, d. h. da im ersten Fall $BG + CG = BC$, im zweyten aber, der Bedingung unsers Lehrsatzes gemäss, $BG - CG = BC$ ist, $BC : BG : CG = AB \pm AC : AB : AC$. Folglich ist $\frac{BG}{BC} = \frac{AB}{AB \pm AC}$ und $\frac{CG}{BC} = \frac{AC}{AB \pm AC}$

Setzt man diese Werthe in unsrer Form δ, so wird in diesem Fall der Theil links vom Gleichheitszeichen, das ist $AB^2 \times \frac{CG}{BC} \pm AC^2 \times \frac{BG}{BC}$

$$= \frac{AB^2 \times AC}{AB \pm AC} \pm \frac{AC^2 \times AB}{AB \pm AC} = AB \times AC \times \frac{AB \pm AC}{AB \pm AC}$$

$= AB \times AC$; und mithin ist in diesem Fall immer

$$AB \times AC = BG \times CG \pm AG^2.$$

Auch dieser bekannte und brauchbare Satz, der gewöhnlich aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke bewiesen wird, und der auch bey *Le Gendre* und *van Swinden* vorkömmt, ist also ein besonderer Fall unsers allgemeinen Lehrsatzes. Dass er auch für einen Punkt in der Verlängerung der Grundlinie, nur mit der Verschiedenheit gelte, dass dann die Summe in den Unterschied übergeht, scheint man bey dem gewöhnlichen Beweise desselben übersehn zu haben.

2) Es sey $AB = m \cdot AC$, und folglich, da $BG : CG$, dem Verhältnisse $AB : AC$ gleich ist, $BG = m \cdot CG$, so erhält unsere Aussage folgende Gestalt, $m \cdot AC^2 = m \cdot CG^2 \pm AG^2$, so dass also unter der Bedingung dieses Zusatzes für jeden Punkt G *in der*

BG

Grundlinie, $AG^2 = m.(AC^2 - CG^2) = \frac{1}{m}.(AB^2 - BG^2)$, und für jeden Punkt g *in der verlängerten Grundlinie* $Ag^2 = m (Cg^2 - AC^2) = \frac{1}{m} (Bg^2 - AB^2)$ ist.

Zusatz V. 1) *Zieht man endlich von der Spitze eines Dreyecks ABC, die grade Linie Ag so nach der Verlängerung der Grundlinie, daſs die Abſchnitte Bg, Cg ſich wie die Quadrate der Schenkel, an welche ſie anliegen verhalten*, $Bg : Cg = AB^2 : AC^2$; *ſo iſt allemal das Rechteck aus den Abſchnitten, dem Quadrat der theilenden Linie gleich*, $Bg \times Cg = Ag^2$, *oder dieſe Linie iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen den beyden Abſchnitten.*

Denn aus der angenommnen Proportion folgt, daſs $AB^2 \times Cg = AC^2 \times Bg$, folglich $AB^2 \times \frac{Cg}{BC} - AC^2 \times \frac{Bg}{BC} = o$ ſey. Da nun dieſer Unterſchied, nach unſrer Form δ, gleich iſt $Bg \times Cg - Ag^2$, ſo müſſen auch dieſe Räume keinen Unterſchied haben, alſo gleich ſeyn, oder es iſt alsdann immer $Bg \times Cg = Ag^2$, und folglich $Bg : Ag = Ag : Cg$ *. *4. f. 1.

Apollonius ebne Oerter II. Lemma 2, und *Pappus* VII. 119, wo dieſer Hülfsſatz aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke abgeleitet wird.

2) *Für einen Punkt G in der Grundlinie*, der dieſe ſo ſchneidet, daſs die Abſchnitte ſich wie die Quadrate der anliegenden Schenkel verhalten, iſt $2 AB^2 \times \frac{CG}{BC}$

$= BG \times CG + AG^2$; eine Erweiterung dieses Hülfssatzes, die ich nicht erwähnt finde.

Zusatz VI. *Wenn man von zwey gegebnen Punkten B, C aus, grade Linien zieht, die sich in einem Punkte A so durchschneiden, dass je zwey dieser Linien zwar ungleich sind, aber ein gegebnes und unveränderliches Verhältniss zu einander haben; so ist der geometrische Ort ihres Durchschnittspunktes, eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse.*

Denn ist das Verhältniss dieser Linien AB, AC gegeben, so ist auch das Verhältniss ihrer Quadrate bekannt. Nimmt man daher auf der Verlängerung der Linie BC einen Punkt g so, dass Bg, Cg in diesem Verhältniss der Quadrate über AB, AC stehn, und zieht Ag, so ist nach Zusatz V, $Ag^2 = Bg \times Cg$. Nun sind die Punkte B, C, und g gegeben und unveränderlich; also auch Ag^2, und die Seite Ag. Mithin ist *der Ort der Spitze A*, eine mit Ag um g beschriebne *Kreislinie.*

Ist das gegebne Verhältniss der Linien BA : CA, das Verhältniss der Gleichheit, so ist kein Punkt in der Verlängerung der Linie BC möglich, für welchen Bg : Cg in dem gegebnen Verhältnisse stünden, da Bg immer um BC grösser oder kleiner als Cg ist. — Hingegen giebt es einen solchen Punkt G in der Linie BC selbst, für welchen $BG = CG = \frac{1}{2}$ BC ist, und für diesen wird, laut der zweyten Aussage in Zusatz V, $AB^2 = BG^2 + AG^2$, also der Ort der Durchschnittspunkte A für diesen Fall ein Perpendikel auf der Mitte der Linie BC *.

* 14.

Zusatz VII. Umgekehrt hat *jede Kreislinie die Eigenschaft*, daſs *wenn man innerhalb oder auſserhalb des Kreiſes willkührlich einen Punkt, z. B. C nimmt, und auf dem Durchmeſſer durch C, nach derſelben Seite hin, einen zweyten Punkt B ſo, daſs das Rechteck aus den Entfernungen dieſer beyden Punkte vom Mittelpunkte g, dem Quadrat des Halbmeſſers gN gleich iſt*, $gC \times gB = gN^2$, oder, was auf eins hinaus kömmt, *ſo daſs gB die dritte Proportionallinie zu gC und dem Halbmeſſer gN iſt; ſo ſtehn je zwey grade Linien, MB : MC, welche man von dieſen Punkten C, B aus, nach demſelben Punkte M der Kreislinie zieht, insgeſammt in gleichem Verhältniſs, und zwar im Verhältniſs des Halbmeſſers und eines der Abſchnitte*, $gB : gN$, oder *der beyden Linien NB : NC*, oder *BP : CP*.

Denn zieht man nach demſelben Punkte M der Kreislinie BM, CM, gM, ſo entſteht ein Dreyeck BMC, von deſſen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, Mg ſo gezogen iſt, daſs $Bg \times Cg = Ng^2 = Mg^2$ iſt, daher vermöge δ auch $MB^2 \times Cg = MC^2 \times Bg$ ſeyn *, und folglich ſich verhalten muſs $MB^2 : MC^2 = Bg : Cg$. Nun aber iſt der Mittelpunkt g, der Halbmeſſer gN, und einer der Punkte B, C, mithin auch der andre, alſo das Verhältniſs der Linien $Bg : Cg$, folglich das dieſen gleiche Verhältniſs der Quadrate $MB^2 : MC^2$, und alſo auch *das Verhältniſs* der Seiten dieſer Quadrate *MB : MC gegeben und unveränderlich.* * 20. δ.

Da nun die Punkte B und C, der Vorausſetzung nach ſo beſtimmt ſind, daſs ſich verhält gB : gN

$= gN : gC$, oder, wenn man diese gleichen und ste-
*V. 6. tigen Verhältnisse zusammen setzt * $gB : gC = gB^2 : gN^2$ oder auch wie $gN^2 : gC^2$; so verhalten sich die Quadrate $MB^2 : MC^2 = gB^2 : gN^2$, und folglich je zwey Linien $MB : MC = gB : gN$ *oder wie* $gN : gC$, *oder endlich* wie $gB \mp gN : gN \mp gC$ d. i. wie $BN : NC$ oder wie
*V. 4. β. $BP : CP$ *. Mithin *verhält sich die grössere je zwey solcher Linien MB, MC zur kleinern, wie der grössere Abschnitt zum Halbmesser*, oder *wie der Halbmesser zum kleinern Abschnitt*, oder *wie die beyden an diesen Linien anliegenden Abschnitte, in welche BC durch die Kreislinie getheilt wird.*

Da der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen den Entfernungen der beyden Punkte B, C, vom Mittelpunkte g ist; so können die Linien gB, gC, nicht beyde zugleich grösser, oder beyde zugleich kleiner als der Halbmesser seyn, folglich die Punkte B, C nicht beyde zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreises, eben so wenig als zu entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes genommen werden.

Anmerkung. Die Aussagen in Zusatz 6 und 7, welche zu den schönsten Sätzen über den Kreis gehören, machen in *Apollonius ebnen Oertern* den zweyten Ort des zweyten Buchs aus, und lassen sich auch aus Sätzen des nächsten Buchs folgern. In der That sind sie aber nur der einfachste Fall der Aussage C
*f. 1. D. in Folgerung 1 *, und *lassen sich daher noch sehr verallgemeinern.*

Wenn nemlich beliebig viel Punkte z. B. B, C, D in einer Ebne gegeben sind, und grade Linien von diesen Punkten aus gezogen sich (in diesem Fall je drey) so in Punkten A durchschneiden, dass sie zu einander stets in demselben gegebnen Verhältnisse stehn, so ist der Ort der Durchschnittspunkte A stets eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse. Denn da alsdann auch die

Quadrate über diese Linien in einem gegebnen, unveränderlichen Verhältnisse stehn, z. B. $BA^2:CA^2:DA^2 = m:n:p$; so ist $BA^2 +$ $CA^2 : DA^2 = m+n : p$, und mithin $BA^2 + CA^2 = DA^2 \times \frac{m+n}{p}$ oder eine Figur gegebner Gattung über DA beschrieben, gleich der Summe der Quadrate über die anderen Linien. Es ist dann also auch der Unterschied dieser Quadrate und der Figur gegebner Gattung über DA, gleich einem gegebnen Flächenraume, nemlich dem Flächenraume o, und deshalb der Ort der Punkte A eine Kreislinie, deren Mittelpunkt und Halbmesser, wie in Folgerung 2., bestimmt wird.

[LEHRSATZ 21.]

Zieht man aus der Spitze A eines gleichschenkligen Dreyecks ABC nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, oder nach einem Punkte g in deren Verlängerung, eine grade Linie, so ist stets der Unterschied der Quadrate aus dieser Linie und aus einem der gleichen Schenkel, gleich dem Rechteck aus den Abschnitten auf der Grundlinie, BG, CG, oder auf der verlängerten Grundlinie, Bg, Cg. Fig. 38.

Da ein Perpendikel AD, aus der Spitze auf die Grundlinie gefällt, diese im Punkte D halbirt *, so *117.f 2. geht für diesen Punkt das Rechteck aus den beyden Abschnitten in das Quadrat der halben Grundlinie, und also die Aussage des Lehrsatzes in folgende über, $AB^2 - AD^2 = BD^2$, welche vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes wahr ist. * *12. f. 1.

Ieder andre Punkt G *in der Grundlinie* theilt diese überdem in zwey ungleiche Abschnitte, BG, GC, mit-

*II.f.1.α hin so, dass $BG \times GC = BD^2 - DG^2$ ist *, oder, da im Dreyeck BAG der Unterschied dieser Quadrate, dem Unterschiede der Quadrate aus den Schenkeln AB, AG
* 16. 1. gleich ist *, so, dass ist

$$BG \times GC = AB^2 - AG^2.$$

Für jeden Punkt *in der Verlängerung der Grundlinie*, haben wir eine in D gleich getheilte Linie BC, welcher ein Stück Cg angesetzt, für die folglich $Bg \times gC = Dg^2 - DC^2$ ist. Und da wiederum im Dreyeck CAg der Unterschied dieser Quadrate aus den Abschnitten der Grundlinie, dem Unterschiede der Quadrate aus
* 16. 1. den Schenkeln Ag und AC = AB gleich ist *,

$$Bg \times gC = Ag^2 - AB^2.$$

Man nehme also den Punkt G in der Grundlinie selbst, oder in deren Verlängerung, allemal ist *das Rechteck aus dem Abstande dieses Punktes von den beyden Endpunkten B, C der Grundlinie, gleich dem Unterschiede der Quadrate aus der Linie AG und einem der gleichen Schenkel,* nur mit dem Unterschiede, dass im ersten Fall der Schenkel *grösser*, im zweyten *kleiner* als die Linie AG ist; welches sich aus der Natur des gleichschenkligen
* I. 16. Dreyecks von selbst versteht *.

Folgerung. Das Quadrat einer graden Linie AG, welche durch die Spitze des gleichschenkligen Dreyecks gezogen wird, ist folglich, je nachdem sie auf der Grundlinie, oder auf deren Verlängerung aufsteht,

$AG^2 = AB^2 - BG \times GC$ oder $Ag^2 = AB^2 + Bg \times gC$; Aussagen, die man bequem in folgende zusammenfasst

$$AG^2 = AB^2 \mp BG \times GC$$

wo das *obere* oder das *untere* Zeichen gilt, je nachdem der Punkt G *in der Grundlinie* BC felbft, oder *in deren Verlängerung* liegt. Grade fo ift

$$AB^2 = AG^2 \pm BG \times GC;$$

ein Satz, den wir fchon oben gehabt haben *. *20Z3.2

Zufatz. Iede *Sehne eines Kreifes, welche kein Durchmeffer ift, z. B. AB*, bildet mit den beyden Halbmeffern, die nach ihren Endpunkten gezogen werden, *ein gleichfchenkliges Dreyeck ABC*, welches den Mittelpunkt zur Spitze, die Sehne felbft zur Grundlinie, und den Halbmeffer zu Schenkeln hat. Durch unfern Lehrfatz wird mithin folgende artige *Eigenfchaft diefer Sehnen* begründet: Taf. IV. Fig. 55.

1) Iede grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte C eines Kreifes nach irgend einem Punkte O *in einer Sehne wie AB, gezogen ift*, theilt diefe fo in zwey Abfchnitte AO, OB, dafs $AO \times OB = CA^2 - CO^2$ ift. Und auf diefe Art *wird auch der Durchmeffer HI, der durch den Punkt O geht, (folglich jede Sehne durch O)* mitteift diefes Punktes eingetheilt. Denn giebt es gleich, da der Mittelpunkt C in HI liegt, alsdann kein gleichfchenkliges Dreyeck, wie für die übrigen Sehnen, fo ift doch HI im Punkte C gleich, im Punkte O ungleich getheilt, und deshalb gleichfalls das Rechteck $HO \times OI = CI^2 - CO^2$ *. *11.f.1.

2) Eine grade Linie, welche aus dem Mittelpunkte nach einem Punkte o *in der Verlängerung einer Sehne wie AB* gezogen ift, fchneidet dagegen auf ihr zwey Abfchnitte Ao, Bo, fo ab, dafs $Ao \times oB = Co^2 - CA^2$

ist. Und *auch der Durchmesser, der durch den Punkt o geht, (folglich jede Sehne durch o)* wird mittelst des Punktes o auf diese Art eingetheilt, da dem in C gleich getheilten Durchmesser HI, in diesem Fall, ein Stück Io angesetzt, folglich $Ho \times oI = Co^2 - CI^2$ ist *.

* 11f. 1. β

In beyden Fällen, der Punkt O liege in einer Sehne, oder in deren Verlängerung, *ist also immer das Rechteck aus den Abschnitten, die durch diesen Punkt gebildet werden, (oder noch bestimmter das Rechteck aus dem Abstand des Punktes O von den beyden Endpunkten A, B der Sehne), gleich dem Unterschiede der Quadrate aus dem Halbmesser und aus der Linie CO.*

3) Diese Linie CO selbst, und der Halbmesser CA, werden durch folgende Ausdrücke gegeben,

$$CO^2 = CA^2 \mp AO \times OB$$
$$CA^2 = CO^2 \pm AO \times OB$$

wo die obern oder die untern Zeichen gelten, je nachdem der Punkt O in der Sehne, oder in deren Verlängerung liegt.

[LEHRSATZ 22.]

Taf. III. Fig. 55. 1) *Wenn mehrere Sehnen insgesammt durch einen Punkt O im Kreise gehn, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche auf jeder Sehne durch diesen Punkt abgeschnitten werden, sowohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der halben Sehne gleich, welche mit dem Punkte O gleich weit vom Mittelpunkte absteht, z. B.* $AO \times OB = DO \times OE = OF^2$.

2) *Wenn dagegen die Verlängerungen mehrerer Sehnen insgesammt durch einen Punkt o außerhalb des Kreises gehn, so sind die Rechtecke aus der ganzen schneidenden Linie und aus der Verlängerung, so wohl untereinander, als auch mit dem Quadrate der Tangente gleich, welche vom Punkte o nach dem Kreise gezogen wird, z. B.* $Ao \times oB = Do \times oE = oG^2$.

Ist O der Mittelpunkt des Kreises, so sind alle Sehnen, welche durch diesen Punkt gehn, Durchmesser, die sich im Punkte O halbiren, mithin die Aussage 1 richtig. — Ist O nicht der Mittelpunkt, so ziehe man nach demselben die grade Linie OC. Für alle Sehnen, welche sich entweder selbst, oder verlängert in demselben Punkte O durschneiden, ist diese Linie CO, und mithin der Unterschied der Quadrate des Halbmessers und dieser Linie, von gleicher Größe. Da nun dieser Unterschied den Rechtecken $AO \times OB$, $DO \times OE$, $HO \times OI$ etc. dem vorigen Zusatz gemäß* gleich ist, der Punkt O liege im Kreise oder außerhalb des Kreises, so sind auch in beyden Fällen *alle diese Rechtecke unter sich gleich.* * 21. Z.

Im *ersten Fall* wird eine Sehne GF, welche durch den Punkt O geht, und vom Mittelpunkte um CO absteht, vom Durchmesser durch O senkrecht durchschnitten und halbirt *, so daß $GO \times OF = OF^2$ ist. Und da dieses Rechteck jedem der übrigen Rechtecke aus den beyden Abschnitten der Sehnen, die durch den * II. 9.

Punkt O gehn, gleich ist, so muss auch *jedes dieser Rechtecke dem Quadrate über OF gleich seyn.*

Im *zweyten Fall* ist, wenn man vom Punkte o aus eine Tangente oG am Kreise, und nach dem Berührungspunkte den Halbmesser CG zieht, CG auf oG
*II. 12. senkrecht *, daher $oG^2 = oC^2 - CG^2$ *, und folglich
* 12. *das Quadrat der Tangente oG, gleich dem Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder verlängerten Sehne, die durch den Punkt o geht*, indem jedes dieser Rechtecke, dem Unterschiede der Quadrate über Co und über dem Halb-
*21 Z. 2 messer CG, gleich ist *.

Folgerung 1. Da in Rechtecken von gleichem
4. f. 1. Inhalt, die Seiten verkehrt proportional sind, so ergeben sich hieraus unmittelbar folgende Sätze:

α) *Zwey Sehnen, welche einen Punkt O innerhalb der Kreislinie gemein haben, durchschneiden sich in diesem*
* E. 7. *Punkte verkehrt proportional* *, so dass sich verhält $AO : DO = OE : OB$;

β) und *die Hälfte der Sehne FG, welche vom Mittelpunkte um CO absteht* (oder die auf dem Durchmesser im Punkte O senkrecht steht) *ist die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Abschnitten einer jeden solchen Sehne*, so dass sich verhält $AO : OF = OF : OB$.

γ) *Eben so werden zwey Sehnen, die sich verlängert in einem Punkte o ausserhalb des Kreises durchschneiden, durch die Kreislinie verkehrt proportional eingetheilt*, so dass sich verhält $Ao : Do = oE : oB$;

δ) und *die Tangente, welche von diesem Punkte o nach dem Kreise geht, ist zwischen der Verlängerung und* *der ganzen durchſchneidenden Linie die mittlere Proportionallinie*, ſo daſs ſich verhält Ao : oG = oG : oB.

Ueberhaupt werden alſo *zwey grade Linien, welche von Einem Punkte O nach der Kreislinie gehn, von dieſer ſtets ſo geſchnitten*, daſs die Entfernungen des Punktes O von den beyden Durchſchnittspunkten einer jeden dieſer Linien, *verkehrt proportional ſind* *, oder daſs die Rechtecke aus dieſen Entfernungen insgeſammt unter einander gleich ſind. Daſs ſich auf dieſe Eigenſchaften der Sehne und der Tangenten *Methoden* gründen laſſen, *zu drey gegebnen Linien die vierte*, oder *zu zwey die dritte Proportionallinie*, ſo wie *zwiſchen zwey gegebnen die mittlere Proportionallinie zu finden, fällt in die Augen.* * E. 7.

Folgerung 2. Iſt *von einem Punkte einer Sehne AB, eine grade Linie OF nach dem Kreiſe ſo gezogen, daſs* $OF^2 = OB \times OA$ *iſt; ſo iſt OF ein Perpendikel auf dem Durchmeſſer, der durch den Punkt O geht.* Denn verlängert man die Linie FO, bis wo ſie zum zweyten male den Kreis in G durchſchneidet, ſo iſt $OG \times OF = OB \times OA$, folglich $OF^2 = OG \times OF$ und alſo $OF = OG$; d. h. die Sehne GF wird im Punkte O halbirt, und ſteht daher auf dem Durchmeſſer durch O ſenkrecht.

Von allen Sehnen die durch den Punkt O gehn, iſt dieſe Sehne FG (die auf dem Durchmeſſer durch O ſenkrecht ſteht) die kürzeſte. Denn unter allen Rechtecken, welche von gleichem Inhalt ſind, hat das Quadrat den kleinſten Umfang *. *12.Z.1.

Folgerung 3. *α) Iſt von einem Punkte in der Verlängerung einer Sehne AB, eine grade Linie oG nach dem Kreiſe ſo gezogen, daſs $oG^2 = oA \times oB$ iſt; ſo berührt oG den Kreis im Punkte G.* Denn zieht man von o
durch den Mittelpunkt des Kreiſes oH, ſo iſt $oA \times oB$
*22. 2. $= oH \times oI$ * und alſo $oG^2 = oH \times oI = oC^2 - CG^2$,
weil dem in C halbirten Durchmeſſer HI, das Stück
*11f.1.β Io angeſetzt iſt *. Folglich muſs das Dreyeck COG
* 14. bey G rechtwinklig * ſeyn, und daher oG den Kreis
* II. 12. im Punkte G berühren *.

Dieſe berührende Linie iſt ſtets kleiner als die Hälfte der Summe aus den beyden Abſchnitten Ao, Bo jeder Sehne,
*11,Z.1. *die durch den Punkt o geht* *, und je zwey Abſchnitte
Ao, Bo einer Sehne zuſammen genommen, ſind ſtets kleiner als die beyden Abſchnitte Ho, Io auf dem Durchmeſſer.

β) *Sind endlich nach irgend drey Punkten A, B, o einer graden Linie, von einem Punkte K grade Linien ſo gezogen, daſs $Ko^2 = Ao \times Bo$ iſt*, und man beſchreibt durch AKB einen Kreis, ſo berührt oK dieſen Kreis, vermöge α, und folglich *ſind dann allemal die Winkel BKo = KAB,*
* II 24. *AKL = ABK* *, und als die Nebenwinkel der letztern
KBo = AKo, mithin die Dreyecke KBo und AKo gleichwinklig.

Folgerung 4. *α) Liegen vier Punkte A, D, B, E ſo, daſs, wenn man ſie Paarweiſe durch grade Linie wie AB, DE verbindet, dieſe Linien ſich entweder ſelbſt in einem Punkte O, oder verlängert in einem Punkte o durchſchneiden, und das Rechteck aus den Abſchnitten AO, BO der einen, dem Rechteck aus den Abſchnitten DO, EO* *der andern gleich ist*, oder, was auf eins hinauskömmt, so, dafs die Entfernungen des Durchschnittspunkts O von den beyden Punkten, die auf jeder dieser Linien gegeben sind, in verkehrtem Verhältnifs stehn; *so läfst sich durch diese vier Punkte stets eine Kreislinie beschreiben, und ein Kreis, der z. B. durch die drey Punkte A, B, C gezogen wird, mufs nothwendig auch durch den vierten E gehn.* Denn wer dieses leugnen wollte, müfste behaupten dafs ein solcher Kreis die Linie DE nicht in E, sondern in einem andern Punkte F durchschnitte, da denn das Rechteck aus DO, FO dem Rechteck aus AO, BO, mithin, der Voraussetzung gemäfs, dem Rechteck aus DO, EO gleich seyn müfste, welches nur dann möglich ist, wenn FO = EO, und also F und E einerley Punkt sind.

β) *Umgekehrt läfst sich durch vier gegebne Punkte nur dann ein Kreis ziehn, wenn sie entweder auf diese Art liegen, oder wenn sie die Eckpunkte eines Rechtecks sind.* Denn laufen unter den Linien, welche die vier Punkte verbinden, je zwey der gegenüberstehenden parallel; so bilden sie ein Parallelogramm, und um kein Parallelogramm, das Rechteck ausgenommen, läfst sich ein Kreis beschreiben *. Durchschneiden sich hingegen diese Linien, und die vier gegebnen Punkte lägen nicht auf die angezeigte Art, und doch in einem Kreise, so müfste eine grade Linie einem Kreis in drey verschiedenen Punkten D, E, F schneiden können, welches unmöglich ist. *II, 27f.

γ) *Gehn überhaupt mehrere grade Linien durch Einen Punkt O, und es liegen entweder auf allen zu einerley,* *oder auf allen zu entgegengesetzten Seiten desselben zwey Punkte so, dass die Rechtecke aus ihren Entfernungen vom Punkte O gleich sind; so liegen alle diese Punkte in einer Kreislinie,* und ein Kreis durch drey derselben beschrieben, geht auch durch alle übrigen. Und zwar liegt im ersten Fall der Punkt O ausserhalb, im zweyten innerhalb dieses Kreises. — Umgekehrt giebt dieses eine *Bedingung* ab, unter der allein ein Kreis durch gegebne Punkte gehn kann.

Alle drey Aussagen sind für die Theorie des Kreises von Wichtigkeit, und besonders wird uns der Satz α, in Verbindung mit Lehrsatz 23 und 26 im zweyten Buch, gleich im Folgenden sehr nützlich seyn.

Fig. 56. Folgerung 5. *Jedes Perpendikel, welches auf dem Durchmesser eines Kreises aufsteht, und vom Durchmesser bis zur Kreislinie reicht, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken, welche es auf dem Durchmesser abschneidet,* z. B. PM zwischen AP und PB, und *das Quadrat über dem Perpendikel ist dem Rechteck aus den Abschnitten des Durchmessers gleich,* $PM^2 = AP \times PB$; Aussagen, die schon in unserm Lehrsatz und in Folgerung 1. β) liegen, und die auch unmittelbar daraus folgen, dass wenn man von dem Punkte M, wo das Perpendikel den Kreis durchschneidet, nach den Endpunkten des Durchmessers grade Linien MA, MB zieht, stets ein rechtwinkliges Dreyeck entsteht, worin der Durchmesser Hypotenuse, und MP ein Perpendikel aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse ist *.

* 12. f. 2. β. γ.

Die Quadrate zweyer solcher Perpendikel stehn also auch zu einander in demselben Verhältniss, wie die Rechtecke aus den Abschnitten, z. B. $PM^2 : QN^2 = AP \times PB : AQ \times QB$; eine Eigenschat, worin der Kreis, wie wir in der Folge sehn werden, mit den übrigen Kegelschnitten übereinstimmt, nur dass für diese das Quadrat jedes Perpendikels grösser oder kleiner ist, als das Quadrat der beyden Abschnitte.

Durch Perpendikel welche man aus Punkten einer Linie auf eine grade Linie AB fällt, wird die Lage dieser Punkte, und mithin die Lage der ganzen Linie, gegen die grade Linie AB bestimmt *. Folglich dient *diese Eigenschaft der Perpendikel*, welche auf einem Durchmesser errichtet werden, *die Natur der Kreislinie in Beziehung auf ihren Durchmesser völlig zu bestimmen*, und wir können uns ihrer als *eines unterscheidenden Charakters der Kreislinie*, wodurch sie sich von allen andern Arten krummer Linien auszeichnet, bedienen, wie wir dieses besonders in dem Buche von den Kegelschnitten thun werden. — Bezeichnet man den Halbmesser der Kreislinie mit r, folglich den Durchmesser mit 2r, jedes Perpendikel mit y, und den Abschnitt des Durchmessers vom Anfangspunkte desselben A an, bis zum Perpendikel mit x, folglich den zweyten Abschnitt mit $2r - x$, (da denn natürlich die Zeichen y und x keinen festen unveränderlichen Werth haben, sondern einen Werth, der für jedes Perpendikel anders ist); so ist dieser Eigenschaft des Kreises gemäss $y^2 = x \cdot (2r - x)$; und dieser Gleichung bedient man sich in der analytischen Geometrie als Charakter der Kreislinie, so wie umgekehrt mittelst der Natur des Kreises sich für jede solche Gleichung Linien darstellen lassen, welche zu einander das in der algebraischen Gleichung ausgedrückte Verhalten haben. Diese Linien darstellen, nennt man *eine Gleichung construiren*.

* I. 16. f.

Zusatz I. *Jede Sehne AM ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser und dem an ihr lie-*

genden Stücke AP, welches durch ein Perpendikel aus dem einen Endpunkt der Sehne auf dem Durchmesser, der durch den andern Endpunkt geht, abgeschnitten wird. Denn ist AB dieser Durchmesser, und man zieht MB, so ist AMB ein rechtwinkliges Dreyeck, worin AM, BM Katheten, folglich $AM^2 = AB \times AP$ und $BM^2 =$
*12.f.2α $AB \times BP$ *, diese Sehnen also die mittleren Proportionallinien zwischen dem Durchmesser AB und den
*4.f. 1. Abschnitten AP, BP sind *. — In einem der folgenden Lehrsätze wird dieser fruchtbare Satz noch be-
* 24. trächtlich erweitert werden *. Hier einige Folgerungen daraus.

α) Setzt man mit der Proportion

$$AM^2 : BM^2 = AP : BP$$

*V.4.δ. die identische $AM : BM = AM : BM$ zusammen *, so ergiebt sich daraus

$$AM^3 : BM^3 = AM \times AP : BM \times BP.$$

Diese letztern Rechtecke verhalten sich folglich wie die dritten Potenzen aus den Zahlausdrücken der Sehnen AM, BM, oder stehn im dreymal so hohen Ver-
* V. 6. hältniss *.

*12.f.2.ε Grade so ist $AM^2 : PM^2 = AB : PB$ * und mithin $AM^3 : PM^3 = AB \times AM : PB \times PM$. (Gregor. a. St. Vincentio III. 91. 92.)

Auch verhält sich $PM^2 : AB \times PM = AB \times PM : AB^2$ indem die erstern und die letztern Rechtecke von gleicher Höhe sind, und sich daher wie ihre Grundlinien PM : AB verhalten. Nun ist $PM^2 = AP \times PB$ und
*12. f. 3. α. $AB \times PM = AM \times BM$ *. Folglich ist auch $AP \times PB$: AM

$: AM \times BM = AM \times BM : AC^2$, oder das Rechteck aus den beyden Abschnitten, das Rechteck aus den beyden Sehnen, und das Quadrat des Durchmessers sind in stetigem Verhältniss (Greg. III. 81.)

β) *Zieht man von einem Punkt der Kreislinie aus mehrere Sehnen, AM, AN, AR, so verhalten sich die Quadrate derselben untereinander und zum Quadrat des Durchmessers, wie die Abschnitte AP, AQ, AS unter einander und zum Durchmesser AD.* Denn da $AM^2 = AB \times AP$, $AN^2 = AB \times AQ$, $AR^2 = AB \times AS$ ist, so verhält sich $AM^2 : AN^2 : AR^2 : AB^2 = AP : AQ : AS : AB$. Sind also z. B. die letztern Abschnitte stetig proportional, so sind es auch die Quadrate der Sehnen, und mithin die Sehnen selbst (Gregor III. 20).

Folglich verhalten sich auch hier, aus denselben Gründen wie in α, $AM^3 : AN^3 : AR^3 = AP \times AM : AQ \times AN : AR \times AS$, und auch diese Rechtecke stehn in dreymal so hohem Verhältniss als die Sehnen AM, AN, AR. (Gregor III, 92.)

γ) *Berühren sich zwey Kreise im Punkte A*, so sind ihre Durchmesser Stücke derselbe graden Linie, die durch den Punkt A geht *. Fig. 57.

*II. 16, f. 1.

Sind daher DF, GI etc. Perpendikel auf diesem Durchmesser, welche den einen Kreis in E, H etc. den andern in F, I etc. durchschneiden, so verhält sich sowohl $AE^2 : AH^2 = AD : AG$, als auch $AF^2 : AI^2 = AD : AG$, und mithin sind die Quadrate der Sehnen im einen Kreise, mit den Quadraten der beyden Sehnen des andern Kreises, und also diese Sehnen untereinander proportional, oder AE : AH = AF : AI. (Greg. III. 18.)

Auch verhalten sich die Quadrate je zwey solcher Sehnen aus den verschiednen Kreisen $AF^2 : AE^2 : AD^2$ wie die Durchmesser der Kreise AB : AC : AD, weil $AF^2 = AD \times AB$ und $AE^2 = AD \times AC$ ist. Ist daher AD die dritte Proportionallinie zu den beyden Durchmessern, so verhält sich auch $AF^2 : AE^2 = AE^2 : AD^2$ und AF : AE = AE : AD, daher dann auch AE die mittlere proportionallinie zwischen AD und AF ist. (Greg. III, 19.)

Fig. 58. Zusatz II. *Wenn sich mehrere Kreise im Punkte A berühren, und man zieht aus einem Punkte B ihrer gemeinschaftlichen Tangente grade Linien, welche diese Kreise durchschneiden, so sind die Rechtecke aus den beyden Stücken, welche jeder der Kreise auf den durchschneidenden Linien abschneidet, von gleicher Grösse, z. B.* $BD \times BI = BE \times BH = BF \times BG$, *oder* $bf \times bg = bd \times be$. Denn jedes dieser Rechtecke ist dem Quadrat der berührenden Linie, AB^2 oder ab^2, gleich *. (Greg. III. 68.)

* 22. 2.

Beschreibt man daher um irgend einen Punkt B in der gemeinschaftlichen Tangente einen Kreis, der die sich berührenden Kreise in den Punkten F durchschneidet, und zieht durch diese Punkte F grade Linien, welche die Kreise zum zweyten male in Punkten G durchschneiden, so liegen alle diese Punkte G im Umfange eines mit dem erstern concentrischen Kreises. Denn die Rechtecke BF × BG und die Linien BF sind insgesammt gleich, folglich auch die Linien BG. (Greg. III. 56.)

Zusatz III. *Ist die Sehne IG dem Halbmesser des Kreises gleich, und man zieht durch den einen Endpunkt derselben einen Durchmesser, durch den andern eine Tangente, die sich beyde in o schneiden,* so wird GCI ein gleichseitiges Dreyeck, aus dessen Spitze Go nach der verlängerten Grundlinie geht. Folglich muss $Go^2 = Co \times Io + CG^2$, und da zugleich $Go^2 = Ho \times Io$ ist*, $CG^2 = Ho \times Io - Co \times Io = HC \times Io$, folglich, da $HC = CG$ ist, auch $Io = CG$ seyn. *Die Tangente durchschneidet also in diesem Fall den verlängerten Durchmesser so, dass Io dem Halbmesser gleich*, folglich $Co = HI$, und da sich die rechtwinkligen Dreyecke CGI, IGH decken, *auch* $Go = GH$ *ist*, daher $GH^2 = Io \times Ho = IG \times (IG + HI)$ $= 3. CG^2$ *wird.* (Greg. III. 22). Fig. 55. * 21. * 22. 2.

Zusatz IV. α) *Sind von einem Punkte O ausserhalb eines Kreises zwey schneidende Linien OBA, OED so nach dem Kreise gezogen, dass das Quadrat der einen Verlängerung EO, dem Rechteck aus der andern Sehne AB und ihrer Verlängerung BO gleich ist, so ist umgekehrt auch das Quadrat der zweyten Verlängerung BO dem Rechteck aus der erstern Sehne DE und ihrer Verlängerung EO gleich.* Denn ist $EO^2 = AB \times BO$, so ist auch, wenn man beyderseits BO^2 hinzufügt, $EO^2 + BO^2 = AB \times BO + BO^2 = BO \times AO = EO \times DO$ * $= EO^2 + EO \times DE$, und mithin $BO^2 = EO \times DE$. Ist also EO eine mittlere Proportionallinie zwischen AB, BO, so ist umgekehrt auch BO eine mittlere Proportionallinie zwischen DE und EO. * 22. 2.

β) *Sind dagegen die beyden Sehnen so gezogen, daſs die Rechtecke aus den Sehnen, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen gleich sind, AB × DE = BO × EO so sind diese Verlängerungen in verkehrter Ordnung genommen, zwischen den beyden Sehnen AB, DE zwey mittlere Pro-*
* V. 5. *portionallinien**. Denn ist

α) $AB \times DE = BO \times EO$, mithin $\frac{AB}{EO} = \frac{BO}{DE}$, und

man fügt $AB \times BO$ zu den gleichen Rechtecken hinzu, so wird $AB \times DO = AO \times EO$. Nun ist,

$$EO \times DO = AO \times BO\ ^*,$$

* 22. 2.
mithin, wenn man Gleiches durch Gleichem dividirt,

$$\frac{AB}{EO} = \frac{EO}{BO} = \frac{BO}{DE} \text{ vermöge } \alpha).$$

Betrachtet man also diese Brüche als Exponenten von Verhältnissen, so sind alle diese Verhältnisse gleich,

$$AB : EO = EO : BO = BO : DE\ ^*$$

* V. 2.
und folglich sind die Verlängerungen EO, BO *zwey mittlere Proportionallinien zwischen den Sehnen AB,*
* V. 5. *DE**.

Auch folgt aus jenen Gleichheiten, daſs

$$\frac{AB^3}{EO^3} = \frac{AB}{EO} \times \frac{EO}{BO} \times \frac{BO}{DE} = \frac{AB}{DE}$$ ist, daſs mithin sich verhält $AB : DE = AB^3 : EO^3$.

Anmerkung. Wäre es also nur möglich zwey gegebne grade Linien AB, DC so in einen Kreis als Sehnen zu legen, daſs die Rechtecke aus denselben, den Rechtecken aus ihren Verlängerungen bis zu ihrem Durchschnittspunkte gleich wären; so hätte man *die Aufgabe, zu zwey gegebnen Linien AB, DE zwey* *mittlere Proportionallinien zu finden*, und zugleich auch das berühmte *Delische Problem* von der *Verdopplung des Kubus* aufgelöst. Denn man fände auf diese Art eine grade Linie EO, deren Kubus zum Kubus von AB des Verhältnifs zwey beliebiger Linien DE : AB hätte, indem wir in der Streometrie sehn werden, dafs die Würfel zweyer Linien sich wie die dritten Potenzen der Zahlausdrücke dieser Linien verhalten, grade so wie die Quadrate im Verhältnifs der zweyten Potenzen dieser Zahlausdrücke stehn. Auf jene Aufgabe hat *Vieta* (Opera p. 242) dieses berühmte Problem zurückgeführt, doch auf einen langwierigeren und weniger eleganten Wege, als es hier geschehn ist.

Allein *zwey grade Linien auf die geforderte Art einem Kreis einzuschreiben, ist eine Forderung, welche die Kräfte der Elementargeometrie übersteigt.* Dieses läfst sich nicht durch grade Linie und Kreis allein, sondern nur durch Hülfe der Kegelschnitte oder andrer Curven wissenschaftlich bewerkstelligen, und zwar aus ähnlichen Gründen, aus denen wir die Unmöglichkeit auf diesem Wege einen Bogen oder Winkel in drey gleiche Theile zu theilen deducirt haben *. *Mechanische Verfahren* und *Instrumente* dieses zu bewerkstelligen, lassen sich indes mehrere erdenken. * II. 30. a. 2.

Noch einige andre Wege, dieses Problem aufzulösen, findet man in den Bemerkungen zu diesem Werke.

Zusatz V. α) *Ist in einem Dreyeck ABC, aus der Spitze nach irgend einem Punkte G in der Grundlinie, die grade Linie AG gezogen, und man nimmt in einem der Schenkel, z. B. in AB, einen Punkt E so, dafs sich verhält $BE : AE = BG \times CG : AG^2$, und zieht GE; so ist allemal der Winkel AGE, gleich dem Winkel ACG des gegebnen Dreyecks.* Denn zieht man durch B eine Parallellinie mit EG, welche die verlängerte Linie AG im Punkte F durchschneidet, so theilen die beyden Parallellinien Fig. 59

* 7. EG, BF die Schenkel des Winkels A proportional *,
*3. f. 2. ſo daſs ſich verhält BE : AE = FG : AG = FG × AG : AG² *.
Die Verhältniſſe der Rechtecke, BG × CG : AG² und
FG × AG : AG² ſind alſo demſelben Verhältniſs, BE : AE,
mithin untereinander gleich, daher auch die Rechtecke
* V. 2. BG × CG und FG × AG gleich ſeyn müſſen *. Da überdem BC und AF grade Linien ſind, die ſich im Punkte
G ſchneiden, ſo liegen die vier Punkte A, B, F, G in
*(f. 4.) einer Kreislinie *, und da in dieſer die Winkel F und
*II23Z1 C über derſelben Sehne AB ſtehn, ſo ſind ſie gleich *,
*I.25 a1. alſo ∠ F = AGE * = C.

β) *Iſt Ag nach einem Punkt in der verlängerten Grundlinie gezogen, und man nimmt auf der Verlängerung des Schenkels AB einem Punkt e ſo, daſs ſich verhält Be : Ae = Bg × Cg : Ag², und zieht ge, ſo iſt, je nachdem e auf der Verlängerung über A oder über B hinaus liegt, der Winkel Age dem Winkel ACg, oder deſſen Nebenwinkel ACB gleich.* Denn vermöge derſelben Gründe ſind, wenn man die vorige Conſtruction wiederholt, die Rechtecke Bg × Cg und Ag × fg gleich, mithin A, B, C, f Punkte in einer Kreislinie, nur daſs die Winkel ACB und f = Age im erſten Fall einander gegenüber, im zweyten hingegen auf derſelben Sehne AB ſtehn, und daher f im erſten Fall dem Nebenwinkel von
* II. 27. ACB *, d. h. ACg, im zweyten aber dem Winkel ACB ſelbſt gleich iſt. Dieſe Lage des Punktes e richtet ſich aber danach, *ob das Rechtetk Bg × Cg gröſser oder kleiner als Ag² iſt.* Im erſten Fall muſs der Punkt e in der Verlängerung über A, im zweyten in der Verlängerung über B hinaus liegen.

γ)Durch die umgekehrte Schlufsfolge erhellt auch *der umgekehrte Satz, dafs falls man GE oder ge fo zieht, dafs der Winkel AGE = ACG* oder *∠ Age im erften Fall = ACg, im zweyten = ACB ift, fich allemal verhält* $BE : AE = BG \times CG : AG^2$ *oder* $Be : Ae = Bg \times Cg : Ag^2$.

Diefe Ausfagen, eigentlich Zufätze zu Lehrfatz 20, find in *Simfons* Wiederherftellung von *Apollonius* ebnen Oertern, des zweyten Buchs drittes Lemma.

[LEHRSATZ 23.]

Wenn zwey Sehnen fich unter rechten Winkeln durchfchneiden, fo find ftets die Quadrate aus den vier Abfchnitten zufammengenommen dem Quadrat des Durchmeffers gleich. Fig. 60.

Durchfchneiden fich beyde Sehnen *im Mittelpunkte*, fo find fie Durchmeffer, mithin die vier Abfchnitte Halbmeffer. Durchfchneiden fie fich *rechtwinklig in einem Punkte des Umfangs*, fo bilden fie einen Winkel der auf einem Halbkreife fteht*, und folglich mit dem *II. 23 f. Durchmeffer als Hypotenufe ein rechtwinkliges Dreyeck *. In diefen beyden Fällen liegt die Wahrheit des Satzes aus Lehrfatz 4. Zufatz 3. und durch den Pythagoreifchen Lehrfatz * am Tage. * 12.

Durchfchneiden fich hingegen die beyden Sehnen AB, DE *rechtwinklig in einem Punkte F, der* entweder *innerhalb* oder *aufserhalb des Kreifes liegt*, fo verbinde man ihre Endpunkte durch grade Linien AE, DB, und ziehe durch einen derfelben einen Durchmeffer DCG.

Im *ersten Fall*, wenn F im Kreise liegt, hat der Winkel DFB zu seinem Maasse die halbe Summe der
* II. 25. Bogen DB, AE *, welche seine Schenkel umspannen. Da er nun als ein rechter Winkel den vierten Theil der Kreislinie zu seinem Maasse hat, so müssen die Bogen DB + AE dem Halbkreise, folglich dem Bogen DB + BG gleich seyn. Mithin sind die Bogen AE und BG, also auch ihre Sehnen, untereinander gleich. Ueberdem ist, wenn man BG zieht, DBG ein Dreyeck im Halbkreise, folglich rechtwinklig. Es ist also vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes in den drey rechtwinkligen Dreyecken AFE, DFB, DBG, erstens $BG^2 = AE^2 = AF^2 + FE^2$, zweytens $DB^2 = DF^2 + FB^2$, und drittens $DG^2 = BG^2 + DB^2$, folglich $DG^2 = AF^2 + FE^2 + DF^2 + FB^2$. (Greg. III. 77)

Im *zweyten Fall*, wenn F *ausserhalb* des Kreises liegt, hat der Rechte Winkel F zu seinem Maasse den halben Unterschied der beyden Bogen BMD — AE, die
* II. 25. seine Schenkel umspannen *, daher der Unterschied dieser Bogen dem Halbkreise BMD — BG, mithin AE = BG seyn muss. Alles übrige ist wie im vorigen Fall. Auch hier haben wir wieder drey rechtwinklige Dreyecke AFE, BFD, GBD, und aus der Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes auf sie, folgt eben so wie vorhin,

$$DG^2 = AF^2 + BF^2 + DF^2 + EF^2;$$

so dass also in allen Fällen die Quadrate der abgeschnittnen Stücke zusammengenommen dem Quadrat des Durchmessers gleich sind.

Zusatz I. *Zieht man, falls beyde Sehnen sich im Kreise rechtwinklig durchschneiden, noch AD und EB, so sind in dem Viereck ABED die Quadrate von je zwey der gegenüberstehenden Seiten zusammengenommen untereinander, und mit dem Quadrat des Durchmessers von gleicher Gröfse,* $AD^2 + EB^2 = AE^2 + DB^2 = DC^2$, indem sie vermöge des Pythagoreischen Lehrsatzes den Quadraten aus den vier Abschnitten der Sehnen, die sich in F rechtwinklig durchschneiden, gleich sind. Der *Inhalt des Vierecks AEBD ist gleich* $\frac{1}{2}$ *AB × DE* *, oder wie wir im folgenden Buche sehn werden, vermöge des Ptolemäischen Lehrsatzes gleich $\frac{1}{2}$ AD × EB + $\frac{1}{2}$ AE × BD. (Greg. III. 75. 76.)(— *Liegt der Durchschnittspunkt F aufserhalb des Kreises,* so durchschneiden sich zwar die Linien AD, BE, und bilden mit AE, BD kein Viereck, aber dem ungeachtet gilt auch von ihren Quadraten dieser Zusatz. * 5.

Zusatz II. *Eine Sehne FG, welche mehrere parallele Sehnen DE rechtwinklig in den Punkten H, und den mit ihnen parallelen Durchmesser AB im Punkte K durchschneidet, theilt jede derselben so ein, dafs* $DH \times HE + HK^2$ *stets von einerley Gröfse, und zwar dem Rechteck* $AK \times KB$ *gleich ist.* Denn da der Durchmesser AB die Sehne FG, die auf ihn senkrecht steht, im Punkte K halbirt *, und diese von jeder der parallelen Sehnen in einem Punkte H ungleich getheilt wird; so ist stets $GH \times HF = KF^2 - KH^2$ *, und zugleich $GH \times HF = DH \times HE$ *, so wie $KF^2 = AK \times KB$ *, folglich $DH \times HE = AK \times KB - KH^2$ und $DH \times HE + KH^2 = AK \times KB$. (Greg. III. 72). Fig. 61. * II. 9. * IIf. 1. α * 22. 1. * (f. 5.)

[LEHRSATZ 24.]

Fig. 62. *Wenn man auf dem Durchmesser AB eines Kreises, oder auf dessen Verlängerung, in einem willkührlichen Punkte D oder d ein Perpendikel errichtet, und zieht von dem einen Endpunkte des Durchmessers z. B. von A aus, grade Linien, welche die Kreislinie in Punkten F, das Perpendikel in Punkten G oder g durchschneiden, so sind die Rechtecke aus je zwey Abschnitten AF und AG gleich dem Rechtecke aus dem Durchmesser AB und dem Abschnitt AD desselben, der am Punkte A anliegt, und jene Rechtecke sind insgesammt untereinander gleich.*

Man ziehe FB, so ist der Winkel AFB ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter, und so auch sein Nebenwinkel BFg. Ueberdem sind die Winkel bey D und d, der Voraussetzung gemäss rechte.

Für Perpendikel welche *auf dem Durchmesser selbst*, oder auf dessen *Verlängerung über B hinaus* aufstehn, sind daher die beyden Winkel D und F oder d und F, zusammengenommen zwey rechten gleich, daher sich um das Viereck BDGF oder BdgF ein Kreis beschreiben
*II. 27. lässt *, worin FG, BD oder gF, dB Sehnen sind, die sich verlängert im Punkte A durchschneiden, daher stets AF × AG = AB × AD, so wie AF × Ag = AB ×
*22. f. 4. Ad ist *.

Für Perpendikel, welche auf der *Verlängerung des Durchmessers über A hinaus* errichtet sind, stehn die Schenkel der rechten Winkel bey F′ und d′ über derselben Grundlinie Bg′, daher auch in diesem Fall B,

F′, d′, g′ Punkte in einer Kreislinie *, und F′g′, Bd′ * II. 26.
Sehnen sind, die sich jetzt aber innerhalb des Kreises im Punkte A durchschneiden, so daſs auch für diesen Fall stets $AF' \times Ag' = AB \times Ad'$ ist.

Für ein Perpendikel, *welches im Endpunkte des Durchmessers B aufsteht*, und daher zugleich eine *Tangente des Kreises ist*, ist $A\gamma \times \gamma F = \gamma B^2$ *, überdem $A\gamma^2$ * 22. 2.
$= \gamma B^2 + AB^2$, folglich auch, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, $A\gamma \times AF = AB^2$ *. * E. 3.

Wo also auch auf dem Durchmesser oder auf dessen Verlängerung, das Perpendikel aufstehe, und wie man auch aus dem Punkte A grade Linien nach dem Kreise und dem Perpendikel gezogen haben möge, immer ist das Rechteck aus den beyden Abschnitten einer solchen Linie AF, oder Ag, oder F′g, dem Rechteck $AB \times AD$, oder $AB \times Ad$ etc. gleich, daher auch *bey demselben Kreise und für dasselbe Perpendikel* (für die AB und AD von gegebner und unveränderlicher Gröſse sind) *jene Rechtecke $AF \times AG$ etc. insgesammt unter einander gleich seyn müssen.*

Folgerung I. *Steht das Perpendikel auf dem Durchmesser selbst auf*, so durchschneidet es die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und dann ist $AE^2 = AB \times AD$ *. Mithin *ist* in diesem Fall *jedes der Rechtecke $AF \times AG = AE^2$, und folglich die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen je zwey Abschnitten AF und AG*; welches eine artige Verallgemeinerung der Aussage in Lehrsatz 22 Zusatz I ist. *Wenn man folglich durch den einen Endpunkt irgend einer Sehne AE einen* *22.Z.I.

Durchmesser, und durch den andern ein Perpendikel auf diesem Durchmesser zieht, so ist die Sehne AE die mittlere Proportionallinie zwischen jeder andern Sehne, die durch den Punkt A geht, und dem an A anliegenden Stück derselben, das durch den Perpendikel abgeschnitten wird. (Hugenii Horol. Oscillat. p. 49. Edit. 1673.)

Fig. 63. α) Beschreibt man mit AE um A einen Kreis, welcher die Linien AF in Punkten H durchschneidet; so sind folglich auf ihnen allen von A aus, drey stetig proportionale Stücke AG, AH, AF abgeschnitten, da $AE^2 = AH^2 = AG \times AF$ ist. (Greg. III. 39.)

Fig. 62. β) Zieht man FE, so entsteht ein Dreyeck FEG, aus dessen Spitze nach der verlängerten Grundlinie, eine grade Linie EA so gezogen ist, dass $EA^2 = GA \times FA$ ist. Folglich verhält sich stets $GE^2 : FE^2 = GA$
*20. Z. 5 $: FA$ *.

Folgerung 2. Verlängert man eine Sehne AF, bis sie in γ die Tangente durchschneidet, welche den Kreis im entgegengesetzten Endpunkte des Durchmessers durch A berührt; so ist *allemal der Durchmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Sehne AF und der verlängerten Sehne Ag*, weil nach unserm Beweise $AF \times A\gamma = AB^2$ ist. Fällt man von F auf diesen Durchmesser das Perpendikel Fδ, so ist überdem $AF^2 =$
*22. Z. 1. $AB \times A\delta$ *, und es verhält sich daher $A\delta : AF = AF : AB = AB : A\gamma$, oder *AF und AB sind zwey mittlere Proportionallinien zwischen Aδ und Aγ;* ein Satz worauf sich mechanische Vorrichtungen gründen lassen, um zu zwey

gegebnen Linien zwey mittlere Proportionallinien zu finden *. (Greg. III. 17.) *22. Z4.

Folgerung 3. *Wenn man durch einen gegebnen Punkt A willkührlich grade Linien zieht, und auf diesen zwey Punkte F und G so nimmt, dafs ein Rechteck aus den Abschnitten AF, AG stets einerley Flächenraum, z. B. dem gegebnen Raume S gleich ist; so mufs* 1) *falls der geometrische Ort des einen dieser Punkte G eine grade Linie EE' von gegebner Lage ist, der geometrische Ort des zweyten Punktes F eine Kreislinie von gegebner Gröfse und Lage seyn*: und 2) *falls umgekehrt der Ort des Punkts F eine gegebne Kreislinie ist, die durch den gegebnen Punkt A geht, der geometrische Ort des zweyten Punktes G eine grade Linie von gegebner Lage seyn.* Man fälle nemlich *in Fall* 1 von A auf die gegebne Linie EE' ein Perpendikel AD, verwandle den gegebnen Raum S in ein Rechteck über AD, und nehme auf AD oder dessen Verlängerung, AB gleich der Höhe dieses Rechtecks, so dafs AD × AB = S wird, und beschreibe dann um AB als Durchmesser *eine Kreislinie*; so, behaupte ich, ist diese der geometrische Ort der Endpunkte F. Denn erstens wird diese Kreislinie von jeder Linie die durch den Punkt A geht, die einzige Tangente AK ausgenommen, in A und einem zweyten Punkte F durchschnitten *; die Tangente aber *III. 12.
steht auf dem Durchmesser AB senkrecht *, läuft folglich mit der gegebnen Linie EE' parallel *, und jede *II. 12. * I. 21.
andre Linie durch A durchschneidet nothwendig auch EE' in irgend einem Punkte G, weil sonst durch einen Punkt A mit einer gegebnen Linie EE' verschiedne

*I 24. Z 2 Parallellinien möglich wären *. Zweytens ist für jede durchschneidende Linie nach unserm Lehrsatz AF × AG = AD × AB = S weshalb alle Punkte F der so beschriebnen Kreislinie die verlangte Eigenschaft haben, aber kein Punkt ausserhalb derselben. — Verwandelt man umgekehrt *in Fall 2* den gegebnen Raum S in ein Rechteck über dem Durchmesser *AB*, *nimmt AD* der Höhe dieses Rechtecks gleich, und errichtet durch D auf AB ein Perpendikel EE'; so ist dieses der Ort der Punkte G, grade aus denselben Gründen. In diesem Fall darf man jedoch die Bestimmung nicht übersehn, *dass der gegebne Punkt A in der gegebnen Kreislinie liegen soll.* Denn ist dieses nicht der Fall, und liegt er innerhalb des Kreises, so werden wir in der Folge sehn, dass der Ort der Punkte G keine grade Linie, sondern gleichfalls eine Kreislinie ist *.

Cf. 24 f. 1 Anm.

Dieser interessante Satz wird in *Apollonius ebnen Oertern* I. 8 und 9 Fall 1. folgendermassen ausgedrückt: „Wenn aus einem gegebnen Punkte A, auf einer graden Linie zwey Stücke AF, AG abgeschnitten werden, welche ein gegebnes Rechteck enthalten, und der Endpunkt des einen Stücks G eine der Lage nach gegebne grade Linie EE' *berührt*, so berührt der Endpunkt F des andern Stücks einen der Lage nach gegebnen Umkreis"; ein Ausdruck der keine Nacachmung verdient. Die Analysis bey Simson in Fall 1 läuft darauf hinaus, dass wenn G ein Punkt in der gegebnen Linie EE' ist, und es soll AF × AG = S = AD

*22. f. 4 × AB seyn, F, G, D, B Punkte in einer Kreislinie *, folglich wenn man FB zieht, die Winkel bey F und D gleich, und da D ein rechter ist, auch bey F stets rechte Winkel seyn müssen. Jeder solcher Winkel steht aber auf der gegebnen Linie AB; folglich ist der Ort der Punkte F eine Kreislinie über AB als Durch-

meſſer beſchrieben *. Die Analyſis in Fall 2 liegt am Tage. — *II. 26. f. 2.
Mehrere analoge Sätze, findet man im nächſten Buche.

Zuſatz I. α) *Nimmt man dagegen auf jeder Sehne AF, die aus einem gegebnen Punkte A im Umfange eines gegebnen Kreiſes gezogen wird, einen Punkt G ſo, daſs das Rechteck aus den beyden Abſchnitten einem gegebnen unveränderlichen Raum gleich iſt, $AG \times GF = S$; ſo iſt der geometriſche Ort der Punkte G, eine Kreislinie, welche mit der gegebnen concentriſch iſt.* Fig. 64.
Denn iſt G ein Punkt von der bedungenen Beſchaffenheit, und man zieht durch ihn einen Durchmeſſer HI, ſo iſt erſtens $AG \times GF = HG \times GI$ *, und zweytens, * 22. 1.
weil der Durchmeſſer in C gleich und in G ungleich getheilt iſt, $HG \times GI = CI^2 - CG^2$ *. Mithin muſs *11.f.1α
$AG \times GF = S = CI^2 - CG^2$ oder $CG^2 = CI^2 - S$ ſeyn. Nun aber iſt der Kreis, alſo auch das Quadrat über deſſen Halbmeſſer, CI^2, mithin auch CG gegeben und unveränderlich, und daher der Ort der Punkte G eine Kreislinie, die mit der Seite eines Quadrats $= CI^2 - S$ *als Halbmeſſer*, um den Mittelpunkt G beſchrieben wird. Der Ort iſt unmöglich, wenn $S < CI^2$ iſt; da in der That jedes Rechteck aus den beyden Abſchnitten einer Sehne kleiner als das Quadrat des Halbmeſſers ſeyn muſs *. *11.Z.1.

β) *Nimmt man auf den Verlängerungen der Sehnen AF, welche aus dem Punkte A in einer gegebnen Kreislinie gezogen ſind, Punkte g ſo, daſs die Rechtecke $Ag \times gF = S$ ſind*, und zieht von g durch den Mittelpunkt gH'; ſo iſt erſtens $Ag \times gF = H'g \times gI'$ * $= S$, * 22. 2.

*11. f. 1 zweytens $H'g \times gI' = Cg^2 - CI'^2$ *, folglich $Cg^2 = S + CI'^2$, alſo wiederum *der Ort der Punkte g eine mit der gegebnen concentriſche Kreislinie*, deren *Halbmeſſer* in dieſem Fall die Seite eines Quadrats $S + CI^2$ iſt, und die alſo den gegebnen Kreis einſchlieſst.

Dieſe brauchbaren Oerter, werden bey Apollonius nicht ausdrücklich aufgeführt. Man ſieht leicht, daſs der letztere Ort auch für den Fall gilt, wenn g auf der Verlängerung der Sehne über A hinaus liegt, und $Ag' \times g'F = S$ iſt.

Zuſatz II. α) Da für jedes Perpendikel auf dem Durchmeſſer AB oder auf deſſen Verlängerung, erſtens
* 12. nach dem Pythagoreiſchen Lehrſatze $AG^2 = AD^2 + GD^2$*, oder $AG \times AG = AD \times AD + GD^2$ und zweytens nach unſerm jetzigen Lehrſatze $AG \times AF = AD \times AB$ iſt; ſo muſs, wenn man Gleiches von Gleichem abzieht, auch, *falls G im Kreiſe liegt*, alſo $AF > AG$ iſt, $AG \times GF = AD \times DB \times GD^2$ ſeyn, *falls* hingegen *g auſserhalb des Kreiſes liegt*, alſo $AF < Ag$ iſt, $Ag \times gF = gd^2 \pm Ad \times dB$, wo das obere Zeichen gilt, wenn d auſserhalb des Kreiſes liegt, das *untere*, wenn d noch im Kreiſe fällt, indem in dieſem letztern Fall Ad^2 um das Rechteck $Ad \times dB$ kleiner als $Ad \times AB$, folglich dieſes Rechteck noch von gd^2 abzuziehn iſt.

β) Auf eine ähnliche Art iſt im rechtwinkligen Dreyeck AFB, $AF^2 = AB^2 - FB^2$ oder $AF \times AF = AB \times AB - FB^2$ folglich $AF \times FG = AB \times BD - FB^2$, und $AF \times Fg = FB^2 \pm AB \times dB$, wo wieder das *obere* oder

untre

untre Zeichen gilt, je nachdem d *ausserhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt.

γ) Zieht man daher von irgend *einem Punkte g ausserhalb des Kreises* ein Perpendikel gd nach einem beliebigen Durchmesser AB oder nach dessen Verlängerung, und zugleich irgend eine den Kreis in H und I durchschneidende Linie; so ist immer, *falls* das Perpendikel gd auf dem Durhmesser selbst aufsteht, also d im Kreise liegt, $gd^2 - Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$ *, *falls* hingegen das Perpendikel gd auf der Verlängerung des Durchmessers aufsteht, $gd^2 + Ad \times dB = Ag \times gF = Hg \times gI$. (Greg. III. 87.) — Ist *G ein Punkt im Kreise*, so ist $AD \times DB - GD^2 = AG \times GF = Hg \times gI$. (Apollonius ebne Oerter II. 8. 9. Zus.)

[LEHRSATZ 25.]

*Wenn man durch einen beliebigen Punkt M einer Sehne AH, oder durch irgend einen Punkt m in deren Verlängerung, eine grade Linie MD oder md parallel mit der Tangente AK, welche durch den einen Endpunkt A dieser Sehne geht, zieht, so werden auf jeder andern graden Linie, welche durch den Punkt A geht, und daher den Kreis in einem zweyten Punkte F, die Linie MD oder md hingegen in Punkten G oder g durchschneidet *, zwey Stücke AF und AG oder Ag so abgeschnitten, dass die Rechtecke AF × AG insgesammt dem Rechteck AH × AM, und daher auch untereinander gleich sind.* Fig. 62. *24.f.3.

Denn ist AB der Durchmesser, der durch den Endpunkt A der gegebnen Sehne AH geht, so steht die Tangente AK, und also auch jede der Linien MD und md, welche mit ihr parallel laufen, auf dem Durchmes-
*II. 12. ser AB, oder dessen Verlängerung senkrecht *. Die graden Linien, welche durch den Punkt A gezogen werden, durchschneiden folglich ein solches Perpendikel MD, wo es auch auf dem Durchmesser, oder dessen Verlängerung aufsteht, und durch welchen Punkt der Sehne A oder deren Verlängerung es folglich geht, stets so, dass die Rechteck AF × AG insgesammt untereinander, also auch insgesammt dem Rechteck AH ×
* 24. AM gleich sind *, so wie die Rechtecke AF × Ag alle untereinander und mit dem Rechteck AH × Am gleiche Grösse haben.

Diese Verallgemeinerung des vorigen Lehrsatzes, lässt sich auch leicht durch eine ähnliche Schlussfolge, wie jener, oder aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke beweisen. Da der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne macht, die durch den Berührungspunkt geht, den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten, z. B. KAm′ den Winkeln im Abschnitt AEH, und KAH den Winkeln im Abschnitt ABH, gleich ist; so lässt sich die Lage der Linien MD auch dadurch bestimmen, dass sie *die Sehne unter Winkeln durchschneiden, welche den Winkeln in den entgegengesetzt liegenden Kreisabschnitten gleich sind*, und so drückt Greg. a St. Vinc. III. 73 diesen Satz aus.

Folgerung. 1. *Werden von einem gegebnen Punkte A aus, willkührlich grade Linien gezogen, und auf jeder derselben von diesem Punkte an zwey Abschnitte AF und AG, so genommen, dass, (wenn man von den Punkten G mit ei-*

ner gegebnen Linie Q Parallellinien zieht, und diese eine der Grösse und Lage nach gegebne grade Linie AH entweder selbst, oder deren Verlängerung über H hinaus, in Punkten M durchschneiden,) immer das Rechteck $AF \times AG = AH \times AM$ ist; so ist der geometrische Ort der Punkte F, eine der Lage und Grösse nach gegebne Kreislinie.

Denn zieht man durch den gegebnen Punkt A, parallel mit der gegebnen Linie Q, die Linie Kk, und beschreibt zu dieser Linie als Tangente und über AH als Sehne einen Kreis; so hat, unserm Lehrsatz zu Folge, diese Kreislinie die Eigenschaft, dass wenn man aus A irgend eine Sehne AF, und aus irgend einem Punkte G auf ihr, oder auf ihrer Verlängerung, parallel mit der Tangente die Linie GM zieht, $AF \times AG = AH \times AM$ ist. Folglich thut jeder Punkt F dieser Kreislinie unsrer Bedingung genüge. Hingegen kein Punkt P, der nicht in ihr, und doch mit ihr zu einerley Seite der Tangente Kk liegt, weil sonst sowohl $AG \times AP$ als auch $AG \times AF$ gleich $AM \times AH$, und doch AP grösser oder kleiner als AF seyn müsste, welches unmöglich ist.

Verlängert man AH über A hinaus, auf die entgegengesetzte Seite der Tangente Kk, nimmt AH' gleich AH, und auch hier auf die durch A gezognen Linien zwey Abschnitte AF, AG so, dass Parallellinien GM mit der Tangente Kk gezogen, auf AH' Linien AM' so abschneiden, dass $AF \times AG = aH' \times AM'$ ist; so muss der Ort der Punkte F ebenfalls eine über AH' als Sehne zu Kk als Tangente beschriebne Kreislinie seyn; welche folglich mit der erstern gleich ist, sich mit ihr im Punkte

A berührt, und deren Mittelpunkt mit dem der erſtern zu entgegengeſetzten Seiten der Linie HH′ liegt.

Deshalb iſt es einerley ob die Abſchnitte AF und AG *auf einerley*, oder *zu verſchiedner Seite des Punktes A* genommen werden. Immer ſind *zwey gleiche* im Punkte A ſich berührende *Kreislinien*, von der erwähnten Beſchaffenheit, der Ort Punkte F. Auf dieſelbe Art gilt der Ort in Lehrſatz 24 Folg. 3 auch für den Fall, wenn AF und AG Abſchnitte einer graden Linie ſind, *die zu entgegengeſetzten Seiten des Punktes A liegen.*

Uebrigens *bleibt der Ort der Punkte G* unter unſrer gegenwärtigen Vorausſetzung gänzlich unbeſtimmt, da G jeden Punkt in jeder Sehne AF bedeutet. Kömmt aber eine zweyte Bedingung hinzu, ſo wird dadurch auch der Ort der Punkte G beſtimmt. Noch einen andern Beweis für die Ausſage in dieſer Folgerung findet man in Zuſatz. 1.

Folgerung. 2. Durchſchneidet die Linie MD die Kreislinie in irgend einem Punkte E, und man zieht AE, ſo fallen die Punkte F und G beyde in E zuſammen, und es iſt $AE^2 = AM \times AH$. — Zieht man durch H eine Parallellinie mit der Tangente AK, ſo fallen die Punkte M und H zuſammen, und es iſt $AF \times A\gamma = AH^2$. *Man findet alſo zu zwey gegebnen Sehnen AH, AE, oder AF, AH, die von demſelben Punkte A aus gezogen ſind, die dritte Proportionallinie AM oder Aγ′, wenn man durch den zweyten Endpunkt der Sehne*, welche die mittlere Proportionallinie ſeyn ſoll, *eine Parallellinie mit der Tangente durch den Punkt A zieht.*

Fig. 65. *Folgerung* 3. Zieht man von den beyden Endpunkten einer Sehne AH nach irgend einem Punkte im

Kreiſe grade Linien AE, HE, und parallel mit den Tangenten durch die Endpunkte der Sehne die Linien EM, EN, ſo iſt alſo $AE^2 = AH \times AM$ und $HE^2 = AH \times HN$. Daraus folgt

α) daſs ſich verhält $AE^2 : HE^2 = AM : HN$ und, wenn man dieſe gleichen Verhältniſſe beyde mit dem Verhältniſs $AE : HE$ zuſammenſetzt *, $AE^3 : HE^3 = AM \times AE : HN \times HE$. Dieſe Rechtecke ſtehn alſo im dreyfachen Verhältniſſe der Sehnen AE, HE; eine Ausſage, denen in Lehrſatz 22, Zuſatz 1 analog. (Greg. III. 93.) * V. 6.

β) Da im Dreyeck HEM aus der Spitze E nach der verlängerten Grundlinie eine grade Linie EA geht, deren Quadrat gleich iſt dem Rechteck aus den Abſchnitten HA, MA auf der verlängerten Grundlinie, $AE^2 = HA \times MA$; ſo müſſen ſich die Quadrate über den Schenkeln dieſes Dreyecks, wie die Abſchnitte verhalten, oder $HE^2 : ME^2 = HA : MA$ *, und aus denſelben Gründen $AE^2 : NE^2 = AH : NH$. Folglich verhält ſich auch *erſtens* $HE^2 : ME^2 = HA \times LN : MA \times HN$ *. Nun aber iſt dem obigen zu Folge $HE^2 = HA \times HN$, alſo muſs auch $ME^2 = MA \times HN$ ſeyn *, und aus ähnlichen Gründen $NE^2 = NH \times AM$, mithin $ME^2 = NE^2$. *Die beyden mit den Tangenten parallel gezognen Linien EM, EN ſind alſo ſtets von gleicher Länge, und ſchneiden von der Sehne zwey Stücke AM, HN ſo ab, daſs $ME^2 = NE^2 = AM \times HN$ iſt*, (ein Satz den *Clairaut* als zwölfjähriger Knabe gefunden haben ſoll; Krafft Inſtit. geom. ſubl. §. 105.)

* 20, Z. 5.
* 3. f. 1.
* V. 6.

γ) Iſt *zweytens*, zu Folge der erſten Proportion in β, $HE^2 : ME^2 = HA : MA$; ſo verhält ſich auch

*3.f.1. $HE^2 : ME^2 = HA^2 : HA \times MA$ * oder, da Folgerung 2 gemäſs $HA \times MA = AE^2$ ist, $HE^2 : ME^2 = HA^2 : AE^2$. Folglich ſind auch die Seiten dieſer Quadrate propor-
*4.f.3. tional $HE : ME = HA : AE$ *, und mithin iſt $AE \times HE = AH \times EM$. Folglich *muſs in jedem Dreyeck, welches einem Kreiſe eingeſchrieben iſt, wenn man von der Spitze nach der Grundlinie eine Parallellinie EM mit einer der Tangenten durch die Endpunkte der Grundlinie zieht, das Rechteck aus den beyden Schenkeln AE, HE gleich ſeyn dem Rechteck aus der Grundlinie AH in dieſe Parallellinie EM.* (*Greg. III.* 70.)

Fig. 66. *δ) Zieht man hingegen in einem Dreyeck, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, aus der Spitze E, durch den Punkt O, der in der Mitte der Grundlinie AH liegt, eine*
* 17. *Sehne EOF,* ſo iſt $AE^2 + EH^2 = 2 AO^2 + 2 EO^2$ *, oder, da $AO^2 = AO \times OH = EO \times OF$ *, und $EO \times OF + EO^2 = EO \times EF$ iſt, *ſtets* $AE^2 + EH^2 = 2 EO \times EF$.

Fig. 67. *Folgerung 4. Wenn eine grade Linie AH der Gröſse und Lage nach gegeben iſt, und grade Linien MN, welche auf AH oder auf deren Verlängerung über H hinaus in Punkten M aufſtehn, und mit einer gegebnen Linie parallel laufen, werden jede von einer aus dem Punkte A gezognen graden Linie, ſo in einem Punkte E durchſchnitten, daſs das Quadrat über AE, dem Rechteck aus den Linien AH und AM gleich iſt,* $AE^2 = AH \times AM$; *ſo iſt der Ort der Durchſchnittspunkte E ſtets eine Kreislinie von gegebner Lage und Gröſse.* Und zwar eine Kreislinie, die man findet, wenn man mit der gegebnen Linie Q, durch den gegebnen Punkt A eine Parallellinie

Kk zieht, und dann über der gegebnen Linie AH, als Sehne, einen Kreis beſchreibt, den Kk im Punkte A berührt *. Denn nach Folgerung 2, hat jeder Punkt E in dieſer Kreislinie die Eigenſchaft, daſs wenn man AE, und parallel mit der Tangente durch A, EM zieht, $AE^2 = AH \times AM$ iſt: und kein Punkt F, der nicht in der Kreislinie liegt, kann dieſe Eigenſchaft haben, weil ſonſt entweder eine grade Linie den Kreis in drey Punkten E, F, E durchſchneiden, oder es eine Sehne geben müſste, die gröſser als der Durchmeſſer wäre. *II. Afg. 16. 2.

Nimmt man auch auf der Verlängerung der gegebnen Linie AH über A hinaus ſolche Parallellinien, ſo wird für dieſe der Ort der Durchſchnittspunkte E′ eine der vorigen gleiche Kreislinie, welche jene im Punkte A ſo berührt, daſs die Mittelpunkte und die gleichen Abſchnitte zu entgegengeſetzten Seiten der verlängerten Linie AH liegen.

Apollonius ebne Oerter II, 3, Fall 1. Simſons Analyſis führt dort den Beweis dieſes Orts noch auf andre Sätze zurück. Geſetzt nemlich E′ ſey ein ſolcher Punkt, für welchen $AE'^2 = AH' \times AM'$ iſt, ſo muſs, wenn man durch die drey Punkte E′, H′, M′ einen Kreis beſchreibt, AE′ dieſen Kreis im Punkte E′ berühren *; folglich, wenn man E′H′ zieht, der Winkel AE′H′, dem Winkel AM′E′, gleich ſeyn *. Nun ſind für alle Parallellinien M′E′, die äuſsern Winkel AM′E′ zu einerley Seite der Linie AH′, von gleicher gegebner Gröſse, nemlich gleich KAH oder kAH, mithin auch der Winkel AE′H′ von gegebner, unveränderlicher Gröſse. Ieder der Durchſchnittspunkte E′ iſt alſo die Spitze eines Dreyecks AE′H′ welches über der gegebnen, unveränderlichen Grundlinie AH′ ſteht, und deſſen Winkel an der Spitze E′, gleichfalls von gegebner Gröſse iſt, liegt mithin *22 f. 3 α *22 f. 3. β im Bogen, *entweder* des Kreisabſchnitts über AH′, welcher den gegebnen Winkel KAH faſst, oder des *Kreisabſchnitts* unter AH′ der den Nebenwinkel kAH faſst, mithin in einem *Kreiſe*, den man findet, wenn man über AH als Sehne und zu Kk als Tangente, einen Kreis beſchreibt.

Fig. 68. Zuſatz I. *Bleibt alles, wie im vorigen Fall, nur mit dem Unterſchied, daſs die Linien aus dem Punkte A gezogen, die parallelen Linien MN ſo in Punkten E durchſchneiden, daſs entweder* 1) *das Quadrat über AE um einen gegebnen Raum S gröſser oder kleiner als das Rechteck aus den Abſchnitten AH, AM iſt,* $AE^2 = AH \times AM \pm S$; *oder daſs* 2) $AE^2 = S - AH \times AM$ *iſt; ſo iſt ebenfalls der geometriſche Ort der Durchſchnittspunkte E, eine Kreislinie von gegebner Gröſse und Lage.*

1) Geſetzt es ſind ME und AE zwey Linien, von der Beſchaffenheit, daſs $AE^2 = AH \times AM \pm S$ iſt; ſo muſs für den Fall des obern Zeichens AE^2 *gröſser*, im Fall des untern *kleiner* als das Rechteck AH × AM ſeyn, und daher muſs es in jenem Fall auf AE ſelbſt, in dieſem auf der Verlängerung von AE über E hinaus, einen Punkt von der Beſchaffenheit geben, daſs das Rechteck AE × AD = AH × AM iſt; und zugleich muſs in beyden Fälln AE × ED = S ſeyn. Dann liegen aber *erſtens* die vier Punkte E, D, H, M auf derſelben Kreis-
*22. f. 4. linie *, und zieht man DH, ſo ſind die Winkel ADH und AME von gleicher Gsöſse, weil entweder die Nebenwinkel von beyden, Winkel am Umfange ſind, die
* II. 23. auf demſelben Bogen ſtehn *, oder weil der Nebenwinkel von ADH dem Winkel AmE, in einem Vierecke, welches dem Kreiſe eingeſchrieben iſt, gegenüberſteht,

oder umgekehrt*. Nun ist der Voraussetzung gemäss ME der gegebnen Linie AK parallel, also der Winkel AME immer von einerley Grösse; folglich auch ADH; und da überdem AH von gegebner unveränderlicher Grösse ist, so ist *der geometrische Ort der Punkte D eine Kreislinie*, welche über AH als Sehne, und zu AK als Tangente beschrieben wird, die mithin durch den Punkt A geht, und deren *Halbmesser* CA seyn mag. Nun liegen *zweytens* auf den Sehnen AD dieser Kreislinie, die insgesammt aus dem gegebnen Punkte A ausgehn, die Punkte E so, dass im Fall des *obern* Zeichens $AE \times ED = S$, im Fall des *untern* $AE \times Ed = S$ ist. Mithin muss vermöge des Orts in Lehrsatz 24 Zusatz 1, *der geometrische Ort der Punkte E, eine der vorigen concentrische Kreislinie*, und zwar *ihr Halbmesser CE* die Seite eines Quadrats seyn, welches im Fall des *obern* Zeichens gleich $CA^2 + S$*, im Fall des *untern* $CA^2 - S$ ist *. — Nimmt man auch auf der Verlängerung der gegebnen Linie AH über A hinaus Parallellinien M'E', so sind *zwey gleiche Kreise*, die im Fall des *obern* Zeichens sich duchschneiden, im Fall des *untern* aber um den doppelten Unterschied der beyden Halbmesser von einander abstehn, und in denen AH verlängert zwar gleiche, aber entgegengesetzt liegende Abschnitte bildet, *der Ort der Punkte E* *.

* II. 27.

* 24 Z. 1. β

* 24 Z. 1 α

* 24. f. 1.

2) Soll $AE^2 = S - AH \times AM$ seyn, so müssen die Parallellinien MN so von den Linien AE durchschnitten werden, dass $AE^2 + AH \times AM = S$ ist, folglich $AE^2 < S$ seyn. In diesem Fall muss es also auf der Verlängerung jeder Linie AE, über A hinaus, einen Punkt

D' geben, der so liegt, dafs das Rechteck aus AE und ED' dem gegebnen Raume S gleich, oder $AE \times ED' = S$ ist, da denn $AE^2 + AH \times AM = AE \times ED'$, mithin, wenn man beyderseits AE^2 fortnimmt, $AH \times AM = AE \times AD'$ seyn mufs. Nimmt man daher auf der Verlängerung von AH über A hinaus, AH' gleich AH, so ist auch $AH' \times AM = AE \times AD'$, und da $H'M$ und $D'E$ grade Linien sind, die sich im Punkte A schneiden, so liegen die vier Punkte H', D', E, M in einer
* II. 23. Kreislinie, und es ist der Winkel $AD'H = AME$ *, mithin, von gegebner, unveränderlicher Gröfse: und da er über AH' steht, so mufs *der Ort der Punkte* D', für Perpendikel, welche auf AH und deren Verlängerung über H hinaus genommen werden, eine *Kreislinie* seyn, die über AH' als Sehne, und zu Kk als Tangente beschrieben wird. Und da überdem $AE \times ED' = S$ ist, so wird zugleich *der Ort der Punkte E, eine mit jener concentrische Kreislinie*, deren *Halbmesser* $C'E$ die Seite eines Quadrats ist, welches das Quadrat des erstern Halbmessers $C'A$ um den Raum S übertrifft, oder $C'E^2 = C'A^2 + S$. Dieses wird auf dieselbe Art wie in Lehrsatz 24. Z. I. 2. bewiesen. — Für *alle* Parallellinien machen wiederum *zwey gleiche, sich schneidende, um C' und C beschriebne Kreislinien, den Ort der Punkte E aus.*

Apollonius ebne Oerter II. 3. Fall 2, wo jedoch dieser Ort etwas anders ausgedrückt wird. Unmittelbar auf ihn lassen sich mehrere ebne Oerter, die zu den Zusammengesetztesten gehören, mit Leichtigkeit zurückführen, welches ich im Folgenden Zusatze (den der, wer Lehrsatz 20 überschlagen hat, gleichfalls übergehe) wenigstens andeuten will.

Zusatz II. α) *Der Ort der Punkte E ist auch in dem Fall eine gegebne Kreislinie, wenn der Anfang der parallelen Linien MN auf irgend einer andren, der Grösse und Lage nach gegebnen Linie BL genommen wird, die nicht durch den Punkt A geht.* Denn man mache AH gleich und parallel BL, und ziehe durch B, parallel mit AK, die grade Linie BC; so schneidet jede der Linien MN, welche mit AK parallel laufen, auf beyden Linien und deren Verlängerungen, von B und C an gleiche Stücke ab, so dass $BL \times BM = AH \times (AM' \pm AC) = AH \times AM' \pm AH \times AC$, wird, wo das Rechteck $AH \times AC$ ein gegebner Flächenraum P ist. Ist daher $AE^2 = BL \times BM \pm S$; so wird auch $AE^2 = AH \times AM' \pm S \pm P$, mithin dem vorigen Zusatz gemäss, der Ort des Punktes E eine gegebne *Kreislinie* seyn. (Apollonius II. 3. Fall 3.) Fig. 69.

β) *Der Ort der Punkte E ist ferner auch dann eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse, wenn die Linien AE die Parallellinien so durchschneiden, dass eine Figur gegebner Gattung über AE beschrieben, $AE^2 \times \frac{m}{q}$*, entweder gleich ist dem Rechtecke aus irgend einer Linie BI, und dem Stück BM derselben, welches die Parallellinien auf ihr oder ihrer Verlängerung abschneiden, $BI \times BM$: oder gleich diesem Rechtecke vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum, $BI \times BM \pm S$: oder endlich einem gegebnen Raum weniger diesem Rechteck, $S - BI \times BM$.* Denn da die Figur über AE der Gattung nach gegeben ist, so ist ihr Verhältniss zum Quadrat über AE, m : q, gegeben. Man nehme auf der gegebnen Linie BH oder *20. f. 1.

deren Verlängerung, einen Abſchnitt ſo, daſs ſich verhält $BI : BL = m : q$, ſo iſt BL gegeben, und $BI = BL \times \frac{m}{q}$. Setzt man dieſen Werth ſtatt BI, und dividirt dann beyderſeits durch $\frac{m}{q}$; ſo verwandeln ſich unſere Vorausſetzungn in folgende: $AE^2 = BL \times BM$; oder $AE^2 = BL \times BM \pm S$; oder $AE^2 = S - BL \times BM$. Und für alle drey iſt nach α) der Ort der Punkte E ein Kreis von gegebner Lage und Gröſse. (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius* ebnen Oertern.)

γ) *Endlich iſt der Ort der Punkte E auch unter der Vorausſetzung* *eine Kreislinie* *von gegebner Lage und Gröſse, daſs, wenn zwey Punkte A, C und die graden Linien Q und BH der Lage, und die letztere auch der Gröſse nach, in einer Ebne, gegeben ſind; grade Linien von den Punkten A und C aus gezogen, ſich in den Punkten E ſo durchſchneiden, daſs eine mit Q durch E parallel gezogne Linie, auf BH, oder deren Verlängerung, ein Stück BM ſo abſchneide, daſs die Summe oder der Unterſchied zweyer Figuren gegebner Gattung über AE und CE beſchrieben, dem Rechteck aus den Abſchnitten BH und BM gleich iſt,* $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = BH \times BM$. Denn da die Figuren über AE und CE der Gattung nach gegeben ſind, ſo iſt daſs Verhältniſs $m : n : q$ gegeben. Man nehme im Fall der Summe auf AC, im Fall des Unterſchieds auf deren Verlängerung zwey Abſchnitte CG, AG, und überdem eine Linie Ge ſo, daſs ſich verhält $m : n : q =$

$CG : AG : Ge$, so ist $AE^2 \times \frac{m}{q} \pm CE^2 \times \frac{n}{q} = AE^2 \times \frac{CG}{Ge} + CE^2 \times \frac{BG}{Ge}$, und diese Summe ist nach Lehrsatz 20 Form. γ gleich $\frac{AC}{Ge} \times (AG \times CG \pm EG^2)$, also auch dieser Raum der Bedingung unserer Aussage gemäss, gleich $BH \times BM$. Nun sind die Punkte A, C und G, mithin auch AC und das Rechteck $AG \times CG = R$ gegeben, überdem die Linie Ge, also auch der Raum $R \times \frac{AC}{Ge} = S$, und also ist $EG^2 \times \frac{AC}{Ge} = BH \times BM - S$ im Fall der Summe, oder $= S - BH \times BM$ im Fall des Unterschieds. Folglich sind dann vom gegebnen Punkte G aus, die Linien GE so gezogen, dass eine Figur gegebner Gattung über GE beschrieben, gleich ist dem Rechteck $BH \times BM$ vermindert um den gegebnen Raum S, oder umgekehrt, und daher vermöge β, der Ort der Punkte E *eine Kreislinie* von gegebner Lage und Grösse. (*Apollonius* II. 6. wo jedoch der Fall des Unterschieds übersehn ist, und dieser Ort in allen seinen Fällen 10 Seiten einnimmt. Auch ist er dahin einzuschränken, dass wenn im *Fall des Unterschieds die Figuren gegebner Gattung ähnlich sind*, es keinen Punkt G giebt, und der Ort der Punkte E keine Kreislinie, sondern eine der Lage nach gegebne *grade Linie* wird.

Ist die Summe oder der Unterschied der beyden Figuren gegebner Gattung, *vermehrt oder vermindert um einen gegebnen Raum P*, dem Rechteck $BH \times BM$, oder jene Summe oder Unterschied dem Raume P weniger diesem Rechteck gleich; so ändert dieses weiter nichts, als dafs statt des gegebnen Raums S, ein andrer gegebner Raum in die letzte Bestimmung mit eingeht, daher auch für diese Fälle der Ort der Punkte E eine Kreislinie ist, mit der eben erwähnten Einschränkung.

Ueberdem läfst dieser Ort sich grade so, wie der in den Folgerungen zu Lehrsatz 20 vorgetragne, *auch auf drey, vier, und jede beliebige Zahl von Punkten ausdehnen*: „Sind nemlich beliebig viel Punkte A, C, D, etc. in einer Ebne gegeben, und grade Linien aus ihnen gezogen durchschneiden sich insgesammt in einem Punkte E so, dafs die Summe oder der Unterschied von Figuren gegebner Gattung, über diese Linien beschrieben, dem Rechtecke BH × BM ± S gleich ist; so ist der Ort der Punkte E *eine Kreislinie* von gegebner Lage und Gröfse, doch mit der erwähnten Einschränkung." (*Camerers* Bemerkungen zu *Apollonius ebnen Oertern*).

Anmerkung. Die Sätze in Folgerung 4 und in diesem Zusatze betreffen den Ort der Durchschnittspunkte E, worinn grade Linien, von einem gegebnen Punkte A aus gezogen, *Parallellinien* so durchschneiden, dafs das Quadrat über AE entweder allein, oder in Verbindung mit beständigen Gröfsen, durch ein veränderliches Rechteck bestimmt wird, dessen Gröfse zuletzt *von dem veränderlichen Abstande dieser Parallellinien vom gegebnen Punkte A abhängt.* — Der folgende Ort betrifft die Durchschnittspunkte E, worin grade Linien, von einem gegebnen Punkte A aus gezogen, *Sehnen eines gegebnen Kreises* so durchschneiden, dafs das Quadrat über AE *durch das Rechteck aus den beyden Abschnitten jeder Sehne* bestimmt wird. Diesen Ort führe ich im folgenden Lehrsatz auf, um mit demselben nach *Simsons* Beyspiel diesen Haupttheil aus der Lehre der ebnen Oerter zu beschliessen.

[LEHRSATZ 26.]

1) *Wenn ein Kreis, mithin auch dessen Mittelpunkt C, und irgend ein zweyter Punkt A gegeben sind, gleich viel ob A innerhalb, oder ausserhalb, oder auf der Kreislinie liegt, und wenn grade Linien, vom Punkte A aus gezogen, sich mit den Sehnen BD dieses Kreises je zwey und zwey so in Punkten e durchschneiden, 1) dass entweder $Ae^2 = Be \times De$, oder, wenn S einen gegebnen Flächenraum bedeutet, $Ae^2 = Be \times De \mp S$ ist: und irgend einer dieser Punkte e liegt ausserhalb des Kreises, auf der Verlängerung einer Sehne; so ist stets der geometrische Ort aller solcher Punkte e eine grade Linie von gegebner Lage. — 2) Durchschneiden sie sich hingegen, unter übrigens gleichen Umständen, so, dass $Ae^2 = S - Be \times De$ ist; so ist der Ort der Punkte e eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse.* Fig. 71.

2) *Wenn aber von den graden Linien, die vom gegebnen Punkte A aus gezogen werden, irgend eine sich mit einer der Sehnen BD selbst, folglich innerhalb des Kreises, in einem Punkte E so durchschneidet, 1) dass entweder $AE2 = BE \times DE$, oder $AE2 = BE \times DE \mp S$ ist; so ist umgekehrt stets der geometrische Ort aller Punkte E, eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse: und durchschneiden sie sich 2) so, dass $AE^2 = S - BE \times DE$ ist; so ist der Ort aller Punkte E eine grade Linie von gegebner Lage.*

Da diesen Voraussetzungen gemäss der Punkte A und der Mittelpunkt des Kreises, C, gegeben sind, so ist auch die grade Linie AC der Lage und Grösse nach, und überdem der Halbmesser CG oder CM des Kreises der Grösse nach gegeben. Man ziehe von dem Punkte e oder E, welcher den Bedingungen des Satzes genüge thun möge, durch den Mittelpunkt die grade Linie eH, oder EH, von der der Kreis den Durchmesser FG abschneide.

1.) *Liegt dieser Punkt e ausserhalb des Kreises, in der Verlängerung einer der Sehnen BD*, so ist $Be \times De =$
* 22. 2. $Fe \times Ge$* $= Ce^2 - CG^2$, weil in diesem Fall dem in C gleich getheilten Durchmesser CG, das Stück Ge
* II. f. 1. angesetzt ist*. Folglich muss *der ersten Voraussetzung*
β. gemäss, nach welcher $Ae^2 = Be \times De \mp S$ seyn soll, $Ae^2 = Ce^2 - CG^2 \mp S$, und also $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S$ seyn, wo das *obere* oder das *untre* Zeichen gilt, je nachdem Ae^2 um den gegebnen Raum S *kleiner* oder *grösser* als das Rechteck $Be \times De$, gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden folglich die vom Punkte A aus gezognen Linien, die verlängerten Sehnen so in Punkten e, dass in den Dreyecken CAe, die insgesammt über der gegebnen unveränderlichen Linie CA stehn, *der Unterschied der Quadrate aus den beyden Schenkeln* gegeben und unveränderlich ist, nemlich gleich dem Quadrate des gegebnen Halbmessers, vermehrt oder vermindert um den gegebnen Raum S. Deshalb muss *der Ort der Durchschnittspunkte e*, als Spitzen dieser Dryecke, *ein Perpendikel auf der*

gegebnen

gegebnen Linie CA *, und zwar *dasjenige Perpendikel seyn*, welches vom Punkte O, der in der Mitte der Grundlinie CA liegt, nach der Seite des kleinern Schenkels zu, um eine Linie Oh absteht, deren Grösse dadurch bestimmt wird, dass $2\ Oh \times CA = CG^2 \pm S$ oder $4\ CO \times Oh = CG^2 \pm S$ ist. Und daraus findet man Oh durch Construction grade wie in Lehrsatz 16 Folgerung 3. (*Apollonius ebne Oerter II.* 7. 8. 9.)

Ist aber der *zweyten Voraussetzung* gemäss $Ae^2 = S - Be \times De$, so muss $Ae^2 + Be \times De = S$ und folglich $Ae^2 + Ce^2 - CG^2 = S$, oder $Ae^2 + Ce^2 = S + CG^2$ seyn. Unter dieser Voraussetzung durchschneiden sich also die Schenkel der Dreyecke ACe, welche über der gegebnen Linie AC stehn, so, dass *die Summe der Quadrate aus den beyden Schenkeln* einem gegebnen Flächenraum gleich ist, weshalb nun *der Ort der Durchschnittspunkte e* keine grade Linie, sondern *eine Kreislinie von gegebner Lage und Grösse wird* *. Und zwar, wenn man die Linie CA im Punkte O halbirt, so ist *O der Mittelpunkt* dieser Kreislinie, und *ihren Halbmesser Oe* findet man daraus, dass $Oe^2 = \frac{1}{2}(S + CG^2) - CO^2$ seyn muss *. (*Apollonius II.* 14.)

*17. f. 1.
*17. f. 1.

2) *Liegt der Durchschnittspunkt E in der Sehne BD selbst*, und also innerhalb des Kreises, so wird diese Sehne vom Durchmesser FG, der durch den Punkt E geht, so durchschnitten, dass $BE \times DE = FE \times GE$ * $= CG^2 - CE^2$ ist, indem der Durchmesser EG in diesem Fall im Punkte C gleich, und im Punkte E ungleich getheilt ist *.

* 22. 1.
*11. f. 1.

Ist also nach der *ersten Voraussetzung* $AE^2 = BE \times DE \mp S$, so muss in diesem Fall $AE^2 = CG^2 - CE^2 \mp S$, und $AE^2 + CE^2 = CG^2 \mp S$ *seyn*. Also ist dann, nicht wie unter 1) der Unterschied, sondern *die Summe der Quadrate* aus den Linien AE, CE, welche von zwey gegebnen Punkten aus gezogen, sich durchschneiden, einem gegebnen Raume gleich, mithin *der Ort der Punkte E* jetzo *eine Kreislinie*, um einen Punkt *O*, der in der Mitte zwischen A und C liegt, als Mittelpunkt beschrieben, mit einem *Halbmesser OE*, für den $OE^2 =$
17. f. $\frac{1}{2}(CG^2 \mp S) - OC^2$ ist. (*Apollonius* II. 11. 12. 13)

Ist aber *nach der zweyten Voraussetzung*, $AE^2 = S - BE \times DE$, so muss in diesem Fall $AE + BE \times DE = S$, oder $AE^2 + CG^2 - CE^2 = S$, und folglich $AE^2 - CE^2 = S - CG^2$ und umgekehrt $CE_2 - AE^2 = CG^2 - S$ seyn. Da also der *Unterschied der Quadrate* über den Schenkeln AE, CE einem gegebnen Raume gleich ist, so wird *der Ort der Punkte E* in diesem Fall *ein Perpendikel auf AC*, welches, wie in der ersten Voraussetzung unter 1) aus Lehrsatz 16. Folgerung 3. dadurch gegeben wird, dass $4\,CO \times OH = CG^2 - S$ seyn muss. (*Apollonius* II. 10.)

Bestimmung, im Fall der Ort eine grade Linie ist, und zwar 1) für Punkte e ausserhalb des Kreises. Da der Ort dieser Punkte das Perpendikel eh, und für die-
16. 1. ses $Ce^2 - Ae^2 = CG^2 \pm S = 4\,CO \times Oh = Ch^2 - Ah^2$ ist, so muss, wenn *S gleich null* ist, und *im Fall des obern Zeichens*, immer $Ce > Ae$ und $Ch > Ah$ seyn, folglich das Perpendikel zu der Seite von O, auf welcher

A liegt, aufstehn. Folglich, wenn O *außerhalb* des Kreises liegt, oder $CA > 2\,CM$ ist, auch der Punkt h und das ganze Perpendikel eh nothwendig *außerhalb des Kreises* fallen. Dasselbe findet *im Fall des untern Zeichens* statt, wenn $CG^2 > S$ ist, da hingegen, wenn $CG^2 < S$ ist, $Ce < Ae$ wird, unddas Perpendikel eh nach der Seite von C zufällt.

Da ferner der Halbmesser $CG = CM$ ist, muſs auch $4\,CO \times Oh - CM^2 = \pm S$ seyn. *Ist A ein Punkt im Kreise*, so besteht der Halbmesser CM aus zwey gleichen Theilen CO, OA und einem dritten diesen angesetzten Stück AM, $CM = 2\,CO + AM$, und deshalb ist dann $CM^2 = 4\,CO \times OM + AM^2$*, folglich $4\,CO \times$ *11. f. 3.
$(Oh - CM) - AM^2 = \pm S$. Daher muſs, wenn S gleich null ist, und im Fall des *obern* Zeichens, nothwendig $Oh > OM$, also *h ein Punkt außerhalb des Kreises* seyn, welches im Fall des *untern* Zeichens nicht nöthig ist, da für dieses, nach Umständen, Oh kleiner oder gröſser als CM seyn, und h innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen kann. — *Wenn A in der Kreislinie liegt*, ist $CM^2 = 4\,CO \times OA$, mithin $4\,CO \times (Oh - OA) = \pm S$. Ist folglich alsdann *S gleich null*, so muſs Oh gleich OA seyn, also h in A fallen, und eh den Kreis im Punkte A berühren*. Im Fall des *obern* Zeichens liegt * 22. 2.
dagegen h *außerhalb*, im Fall des *untern* innerhalb des Kreises. — *Wenn endlich A außerhalb des Kreises* liegt, ist $CM = 2\,CO - AM$, folglich $CM^2 = 4\,CO^2 - 4\,CO \times AM + AM^2$* $= 4\,CO \times (AO - AM) + AM^2 = \pm 4\,CO$ * 9.
$\times OM + AM^2$, wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem M mit A oder mit C auf einerley Seite

von O liegt, d. h. O ein Punkt innerhalb oder aufserhalb des Kreifes, und CA kleiner oder gröfser als 2 CM ift. Wenn daher *S gleich null* oder *additiv* genommen wird, und O liegt im Kreife, fo mufs $4\ CO \times (Oh - OM) - AM^2 = 0$ oder S feyn, welches nur dann möglich ift, wenn $Oh > OM$, alfo h ein Punkt aufserhalb des Kreifes ift. — *Folglich liegt, wenn S gleich null oder additiv ift, das Perpendikel eh, als Ort der Punkte e, unter allen Umftänden aufserhalb des gegebnen Kreifes*, nur dafs es den Kreis in dem Fall, wenn S gleich null und A ein Punkt der Kreislinie ift, *berührt.*

2) *Für Punkte E innerhalb des Kreifes*, für welche der Ort ein Perpendikel EH auf dem Durchmeffer AE oder deffen Verlängerung ift, mufs der Fufspunkt H
*I.16.1. immer *innerhalb* des Kreifes liegen, weil $CH < CE$ * und E ein Punkt im Kreife ift, und es ift für daffelbe $CE^2 - AE^2 = CH^2 - AH^2 = CM^2 - S = 4 CO \times OH$. Ift alfo der gegebne Raum S dem Quadrate über dem Halbmeffer des gegebnen Kreifes gleich, $S = CM^2$, fo ift $CA = AH$, H fällt in O, und das Perpendikel EH fteht im Punkte O felbft auf. — Ift $S < CM^2$, fo fällt H mit A auf einerley Seite von O, indem dann $CH > AH$ ift, und dann mufs nothwendig O ein Punkt im Kreife, alfo $CA < 2\ CM$ feyn, und, wie wir eben gefehn haben, $CM^2 = 4\ CO \times OM + AM^2$ oder $CM_2 - AM^2 = 4 CO \times OM$ feyn. Da nun $OM > OH$ ift, fo mufs in diefem Fall immer $CM^2 - AM^2 > CM^2 - S$ und daher $S > AM^2$ feyn. Wenn der gegebne Raum kleiner als diefes Quadrat ift, fo giebt es keine Punkte

E welche den Vorausſetzungen, die ſich widerſprechen, genüge thun könnten. — Iſt endlich $S > CM^2$, ſo iſt $AH > AC$ und der Punkt H fällt mit dem Mittelpunkte C zu einerley Seite des Punktes O; und in dieſem Fall können die Punkte A und O auch auſserhalb des Kreiſes liegen.

Beſtimmung im Fall der Ort eine Kreislinie iſt. 1) Für *Punkte e auſserhalb* des Kreiſes, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $Ae^2 + Ce^2 = S + CM^2$ iſt; und dann iſt O der Mittelpunkt, und für den Halbmeſſer $2\,Oe^2 = S + CM^2 - 2\,CO^2$. Iſt O ein Punkt im gegebnen Kreiſe; ſo muſs immer $S > AM^2$ ſeyn, ſonſt iſt der Ort unmöglich. Iſt O ein Punkt auſserhalb des gegebnen Kreiſes, und $S < AM^2$, ſo liegen der Ort und der gegebne Kreis ganz auſserhalb einander; iſt $S > AK^2$, ſo ſchlieſst der Ort den gegebnen Kreis ringsum ein, und iſt $S < AK^2$ aber $> AM^2$, ſo durchſchneidet der Ort den gegebnen Kreis, da denn einige Punkte e auſserhalb, andre innerhalb des gegebnen Kreiſes liegen; daher ſich daraus, daſs ein Punkt e auf der Verlängerung der Sehne BD liegt, keineswegs ſchlieſsen läſst, daſs auch alle andre Punkte e auf Verlängerungen der Sehnen BD liegen müſſen.

2) Für *Punkte E innerhalb des* Kreiſes, wird der Ort eine Kreislinie, wenn $AE^2 + CE^2 = CM^2 \mp S$ iſt, und dann iſt O der Mittelpunkt, und für den Halbmeſſer des Orts $2\,OE^2 = CM^2 - 2\,CO^2 \mp S$. In dieſem Fall muſs, wenn *S gleich null iſt*, der Ort von dem gegebnen Kreiſe ringsum eingeſchloſſen werden. *Im Fall*

des obern additiven Zeichens durchschneiden sich der Ort und der gegebne Kreis, wenn O *ausserhalb* des gegebnen Kreises liegt; ist aber O ein Punkt *in diesem* Kreise, so wird, je nachdem OM grösser, gleich, oder kleiner als ON ist, der Ort ganz innerhalb des gegebnen Kreises fallen, oder ihn innerlich berühren, oder ihn schneiden. *Im Fall des untern subtractiven Zeichens* wird der Ort wiederum vom gegebnen Kreise eingeschlossen.

Anmerkung. Diese Bestimmungen lassen sich mit Hülfe der Aussagen in Lehrsatz 11, Folgerung 2 und Lehrsatz 17 auf eine ähnliche Art, als für den Fall, wenn der Ort eine grade Linie ist, entwickeln, weshalb ich aber auf Simsons Wiederherstellung von Apollonius ebnen Oertern verweisen muss, um mich hier nicht in zu grosse Weitläufigkeit zu verlieren.

Simson macht aus den Theilen dieses Orts acht verschiedne Sätze, und seine Entwicklung derselben nimmt 18 Seiten ein. In *Pappus* Bericht über den Inhalt der Ebnen Oerter des Apollonius, findet sich nur ein eingeschränkter Fall der ersten Voraussetzung unter 1) und selbst dieser ist durch die Abschreiber entstellt worden. Auch stimmt Lemma 33 aus *Euklids Porismen* (Pappus VII, 159) mit dem einfachsten Fall von 1) überein, indem dieser Lehnsatz aussagt, dass falls eh auf dem verlängerten Durchmessr LM so senkrecht steht, dass $Lh \times hM = Ch^2$ ist, auch für jeden Punkt e in diesem Perpendikel, wenn man eL zieht, $Fe \times eG = Ce^2$ seyn muss.

Man sieht leicht, dass man die Aussage dieses Orts nach Art der vorigen Oerter noch erweitern und verallgemeinern kann, welches aber, wie es scheint, schon Simson für überflüssig gehalten hat. Ich endige daher mit diesem Satze nach Simsons Beyspiel diesen Haupttheil der Lehre von den Ebnen Oertern, den ich hier ziemlich ausführlich vorgetragen habe, weil theils meine Absicht, wo möglich, die Geometrie in ihrem ganzen Umfange, wie ſie von Alten und Neuern behandelt worden iſt, im Kurzen darzuſtellen, dieſes erforderte, theils die Sätze an ſich ſo nett und brauchbar ſind, theils ſehr gute Uebungen in der geometriſchn Analyſis, und Beyſpiele von zuſammenhängenderen geometriſchen Unterſuchungen an die Hand geben.

Auf *algebraiſchem Wege*, wo man die Eigenſchaften der Curren lediglich aus ihrer Gleichung *, durch algebraiſche Mittel, *23. ſ. 5. und nicht wie hier durch Darſtellung der Figur und durch geometriſche Conſtructionen erforſcht, läſst ſich indeſs ſchon manches von dem hier Vorgetragnen erleichtern, und überdem der Kreis noch auf allgemeinere Arten als Ort eines beſtimmten Punktes darſtellen, und die Bedingung, unter welcher ein Kreis allein der Ort von Punkten ſeyn kann, allgemein entwickeln, daher man die weitre Ausbildung dieſer Lehre, billig der algebraiſchen Analyſis vorbehält.

Ich wende mich nun zu den Aufgaben, welche zu dieſem Buche gehören, werde hier aber nicht viel mehr als die unentbehrlichſten Conſtructionsarten, auf die ich mich zum Theil ſchon berufen habe, vortragen. Andre Aufgaben, und beſonders den Gebrauch der aufgeſtellten Oerter in Auflöſung geometriſcher Aufgaben, verſpare ich für das Buch des folgenden Theils, welches der geometriſchen Analyſis beſtimmt iſt.

AUFGABEN

welche zum dritten Buche gehören.

AUFGABE I.

Fig. 72. *Ein gegebnes Vieleck in ein Dreyeck von gleichem Inhalt zu verwandlen.*

Man ziehe eine Diagonale, z. B. AF, ſo, daſs dadurch von dem ganzen Vieleck ein Dreyeck AFG abgeſchnitten wird, und duch die Spitze G dieſes Dreyecks eine Parallellinie mit der Diagonale. Darauf verlängere man eine von den Seiten der Figur, welche an das abgeſchnittene Dreyeck anſtoſsen, z. B. AB, bis zu ihrem Durchſchnitt H mit der Parallellinie, und ziehe von dem andern Endpunkte der Diagonale die grade Linie FH, ſo erhält man ein Vieleck mit den Seiten FH, HB, welches eine Seite weniger als das Gegebene, und doch mit demſelben gleichen Inhalt hat.

Denn das ſo gebildete Dreyeck FHA ſteht mit dem abgeſchnittnen FGA über gleicher Grundlinie FA und zwiſchen gleichen Parallelen FA, GH, hat alſo mit
* 2. f. 2. demſelben gleichen Innhalt *, daher es ſich unbeſchadet des Flächenraums ſtatt des abgeſchnittenen Dreyecks ſetzen läſst. Der Conſtruction gemäſs liegen aber

BA und AH in grader Linie, folglich hat das letztere Vieleck *gleichen Inhalt*, aber *eine Seite weniger als das Gegebne.*

Fährt man auf diese Art fort, und schneidet z. B. durch die Diagonale BD wiederum ein Dreyeck BCD ab, für welches, wenn HB bis I verlängert wird, man ein Vieleck FHIDEF erhält, welches *zwey Seiten weniger* und *denselben Inhalt* als das Gegebne hat.

Da man nun dieses Verfahren so lange fortsetzen kann, bis man endlich auf ein *Dreyeck* kömmt, so läſst sich mittelst deſſelben jede gradelinige Figur von beliebig viel Seiten, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandeln.

Bemerkung 1. Oder überhaupt kann man mittelst dieser Methode *zu jeder gegebnen gradelinigen Figur, eine ihr gleiche Figur von einer beliebigen Seitenzahl, die geringer als die Seitenzahl der gegebnen Figur ist, bilden.* Mit gehöriger Vorsicht läſst sich dieses Verfahren selbst auf krummlinige Figuren übertragen *, und ist beym Ausmeſſen von unregelmäſsigen Flächenräumen oft von Nutzen. *5. Z. 2.

Bemerkung 2. *Hohle Winkel*, wie E, ändern bey diesem Verfahren nichts. Sie geben Diagonalen, wie DF, welche auſserhalb der Figur fallen, und schneiden Dreyecke wie DEF ab, welche dem Flächenraume der Figur an dem Raume mangeln den die Diagonale mit den übrigen Seiten umschlieſst. Die Parallele durch die Spitze E mit einer solchen Diagonale, durchschneidet die Seiten der Figur, z. B. die Seite ID der reducir- *I. E. 16

ten Figur in K. Zieht man FK, so sind die Dreyecke DEF, DKF gleich, und mithin hat dann das Vieleck HIKF, mit dem Vieleck HIDEF gleichen Inhalt, aber eine Anzahl von Seiten, die um eins kleiner ist.

Fig. 73. Bemerkung 3. α) Zieht man alle Diagonalen, durch welche man Dreyecke Schrittweise abschneidet, von demselben Winkelpunkt D aus, und schafft aus jedem Dreyeck die Seite weg, welche der Spitze D gegenüber steht, *so erhält das Dreyeck, auf welches man*
Fig. 74. *zuletzt kömmt, den Winkel D als Winkelpunkt.* — β) Zieht man dagegen alle Diagonale von einem Punkt in einer Seite der Figur ABCD aus, *so liegt eine Spitze des entstehenden Dreyecks in diesem Punkte der Seite.* — γ) Und auf dieselbe Art *läſst sich irgend ein anderer Punkt bestimmen, in welchem die Spitze*, und eine Seite der Figur, in welche *die Grundlinie des zu bildenden Dreyecks liegen soll*, dergleichen in practischen Büchern mit groſser Umständlichkeit, und mit weit mehr Wortaufwand als die Sache verdient, gelehrt zu werden pflegt.

AUFGABE 2.

Ein Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel zu bilden, welches mit einem gegebenen Parallelogramm, oder Trapezoid, oder Dreyeck, gleichen Inhalt hat.

Taf. III. Fig. 6. 1) Ziehe von den Endpunkten der Grundlinie des gegebenen Parallelogramms, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien nach der gegenüberstehenden Seite, so entsteht ein Parallelogramm unter dem gegebenen Winkel, welches mit dem erstern gleichen Inhalt hat *. * 1

2) Theile die eine der nicht-parallelen Seiten des *Trapezoids*, z. B. CB, in zwey gleiche Theile im Punkte I, ziehe durch diesen Punkt eine Parallellinie mit der gegenüberstehenden Seite AD, und nach dieser von den Punkten A, D, unter dem gegebenen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm unter dem gegebnen Winkel beschrieben, und hat mit dem Trapezoid gleichen Inhalt *. Fig. 14. * 6.

3) Im *Dreyeck* theile man eine der Seiten, z. B. LB, in zwey gleiche Theile im Punkte A, ziehe durch die gegenüberstehende Spitze mit LB eine Parallellinie, und nach dieser aus den Punkten L, B, unter dem gegebnen Winkel, Parallellinien, so ist das so entstehende Parallelogramm das Gesuchte. Taf. V. Fig. 75.

Folgerung. Da sich jedes Vieleck, der vorigen Aufgabe gemäss, in ein Dreyeck von gleichem Inhalt verwandlen läst, *so kann man* also auch *jedes Vieleck in ein Parallelogramm mit einem gegebnen Winkel verwandlen.* — Also auch in ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel, d. h. *in ein Rechteck.*

AUFGABE 3.

Ueber eine gegebne grade Linie MN ein Parallelogramm zu beschreiben, welches mit einem gegebnen Parallelogramm ABCD gleichen Inhalt hat, und unter gleichem Winkel enthalten ist. Fig. 76.

Man verlängere eine der Seiten des gegebnen Parallelogramms, z. B. AB, schneide auf der Verlängerung BE, gleich der gegebenen Linie MN, ab und ziehe durch E und den Eckpunkt C eine grade Linie. Durchschneidet diese die verlängerte Seite AD des gegebnen Parallelogramms in einem Punkte F; so ist *DF die zweyte Seite des gesuchten Parallelogramms.* Und verlängert man die beyden andern Seiten des Gegebnen über C hinaus, und zieht durch E und F mit ihnen Parallellinien; so ist *die Ergänzung BGHI, welche auf diese Art entsteht, das gesuchte Parallelogramm.*

Denn da vermöge der Construction die Linien AE, DI, FH, und auch die Linien AF, BG, EH, parallel laufen, so sind die Vierecke welche auf diese Art gebildet werden, insgesammt gleichwinklige Parallelo-
*8.(1) gramme *. Ueberdem sind die Ergänzungs-Paral-
*8.(3) lelogramme ABCD und CGHI einander gleich *; so auch die gegenüberstehenden Seiten DF = CH und CI
* I. 34. = BE = MN *. Folglich ist CGHI das gesuchte Parallelogramm, welches über der gegebnen Linie MN = CI steht, und mit dem gegebnen Parallelogramm ABCD gleichwinklig und gleich groſs ist.

Folgerung 1. Auf die Art läſst sich also auch *ein gegebnes Rechteck in ein anderes, von gleicher Gröſse, welches über einer gegebnen Grundlinie steht, verwandeln.* Und zwar, da es mehrentheils nur darauf ankömmt, die Höhe dieses zweyten Rechtecks zu finden, und hierzu der erste Theil der Construction hinreicht; so verdient diese einfache Methode selbst vor der den Vorzug, die wir in den folgenden Aufgaben, mittelst Auffindung einer vierten Proportionallinie, werden kennen lernen.

Folgerung 2. Ferner läſst ſich auf dieſe Art jedes *gegebne Dreyeck LMN, oder jedes Trapezoid in ein Parallelogramm von gleichem Inhalt, welches über eine gegebne Linie MN, und unter einem gegebnen Winkel W beſchrieben iſt*, und zwar insbeſondere, *in ein Rechteck über gegebner Grundlinie verwandeln.* Man verwandle zu dem Ende das gegebne Dreyeck oder Trapezoid in ein gleich groſses Parallelogramm, unter dem gegebnen Winkel *, oder in ein gleich groſses Rechteck, und verfahre dann wie unſere Conſtruction angiebt. Eine andre Methode lehrt Aufgabe 8. * Afg. 2. (2. 3.)

Folgerung 3. Endlich läſst ſich auch durch dieſes Verfahren *jedes gradelinige Vieleck in ein Parallelogramm unter einem gegebnen Winkel*, und zwar insbeſondere *in ein Rechteck, welches über eine gegebne Grundlinie MN ſtehet, verwandeln.* Dazu führen verſchiedne Wege. α) *Entweder* man verwandelt das Vieleck in Ein Dreyeck von gleichem Inhalt *, das Dreyeck in ein Rechteck *, und dieſes nach dem eben gelehrten Verfahren in ein gleich groſses Rechteck, welches über der gegebnen Linie MN ſteht *. — β) *Oder* man zerſchneidet die gegebne vielſeitige Figur, entweder in lauter Dreyecke, oder in Trapezoide *, verwandelt jeden dieſer Theile einzeln in Rechteck *, und dieſe in gleich groſse Rechtecke über der gegebnen Seite MN *, trägt dann die zweyten Seiten aller dieſer Rechtecke in

* Afg. 1. * Afg. 2. * f. 1. * 6. Z. 2. * Afg. 2. * f. 1.

eine grade Linie zusammen, und beschreibt über sie als Grundlinie, und mit MN als Höhe, ein Rechteck;
* E. 5. so erhält man das gesuchte Rechteck *.

Auf dieselbe Art läfst sich *über eine gegebne Linie MN ein Rechteck bilden, welches der Summe oder dem Unterschiede zweyer Vielecke R, S gleich ist*, je nachdem man die Rechtecke über MN, denen beyde Vielecke einzeln gleich sind, zu entgegengesetzter oder zu einerley Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie MN, neben oder auf einander legt.

Anmerkung 1. Die Geometer des Mittelalters hatten für diese Construction ein eignes Kunstwort: *Applicatio.* Doch bezeichnet im weitläufigen Sinn *applicare figuram ad lineam* oder *secundum lineam* überhaupt das Beschreiben einer Figur über eine
* Afg. 12 a. bestimmte Linie *.

Anmerkung 2. Da der Zahlausdruck eines Rechtecks das Produkt aus den Zahlausdrücken der Grundlinie und Höhe ist, z. B. AB × AD, und umgekehrt der Zahlausdruck der Höhe aus dem des Inhalts und der Grundlinie durch Division gefunden
* 6. a. wird, $h = \frac{i}{g}$ *, so ist im Fall der ersten Folgerung, der Zahlausdruck der gesuchten Höhe DF des zweyten Rechtecks,

$$DF = \frac{AB \times AD}{BE}$$

Ein solcher Zahlausdruck läfst sich daher in Linien darstellen, d. h. *construiren*, wenn man das Rechteck, dessen Zahlausdruck AB x AD, d. h. welcher aus den Seiten AB und AD beschrieben
* 4. ist *, in ein gleich grofses Rechteck über die Grundlinie BE verwandelt; und dieses berechtigt uns in geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck durch: *Höhe eines Rechtecks, welches über der Grundlinie BE steht, und mit dem Rechteck*

AB x *AD gleichen Inhalt hat*, zu übersetzen, wie wir das z. B. in der Auslegung des 20sten Lehrsatzes gethan haben.

Anmerkung 3. Da das, was bey den Zahlausdrücken der Linien und Flächen *Division* ist, in der geometrischen Darstellung sich durch diese Construction bewerkstelligen läßt; so übertrugen die ältern Mathematiker das Kunstwort für dieses Verfahren auch auf die Division, und sagten z. B. *numerum applicare ad numerum*, um das Dividiren einer Zahl durch eine andre anzuzeigen *. *4. A. 2.

AUFGABE 4.

1) *Eine gegebne grade Linie AB in beliebig viel gleiche Theile zu theilen.*

2) *Eine gegebne grade Linie AB, entweder mehrerern gegebnen Linien P, Q, R, oder einer gegebnen eingetheilten Linie MN, proportional einzutheilen.*

1) Gesetzt man soll die grade Linie AB in 5 gleiche Theile theilen; so ziehe man durch den Endpunkt A dieser Linie, unter einem beliebigen Winkel gegen dieselbe, und in gehöriger Länge, eine andre grade Linie, trage auf diese eine beliebige Linie AC fünfmal nebeneinander auf, und ziehe vom letzten Endpunkt G dieser Theile, nach dem Endpunkte B eine grade Linie GB. Dann schneidet, behaupte ich, eine Parallellinie mit GB, die durch den ersten Theilpunk C gezogen wird, auf der gegebnen Linie AB den fünften Theil AI ab, und trägt man AI fünfmal nebeneinander, oder zieht man durch alle fernern Theilpunkte D, E, F, mit GB Parallellinien, so wird AB auf Fig. 77.

die verlangte Art, das heiſst in fünf gleiche Theile eingetheilt.

Denn da vermöge dieſer Conſtruction die Parallellinien CI, DK etc. die Schenkel AB, AG des Winkels A durchſchneiden, so theilen ſie dieſe Schenkel einan-
*7. Z. 2. der proportional *. Sind alſo, der Conſtruction gemäſs, die Stücke AC, CD etc. insgeſammt unter einander gleich, und jedes fünfmal in der Linie AG enthalten; ſo müſſen auch die Stücke AI, IK etc, untereinander gleich, und jedes der fünfte Theil der gegebnen Linie AB ſeyn. Mithin iſt dieſe in fünf gleiche Theile getheilt.

Fig. 78. 2) Soll die grade Linie AB den gegebnen Linien P, Q, R, in dieſer angegebnen Folge proportional ge-
* E. 8. theilt werden *, ſo trage man auf eine grade Linie, welche durch den einen Endpunkt A der gegebnen, unbeſtimmt gezogen iſt, die gegebnen Linien P, Q, R in der verlangten Folge nebeneinander, ſo daſs AC = P, CD = Q, DE = R wird, ziehe durch die beyden Endpunkte B, E der gegebnen Linie, und der letzten aufgetragenen, eine grade Linie BE, und mit ihr parallel durch die Punkte C und D Parallellinien, ſo wird durch dieſe Parallelen die Linie AB auf die verlangte Art, das heiſst nach dem Verhältniſs der Linien P, Q, R, in der verlangten Ordnung eingetheilt. Denn wegen des Parallelismus der Linien CI, DK, EB, verhalten ſich die Theile AI, IK, KB des einen Schenkels, wie die übereinſtimmenden Theile AC, CD, DE des andern Schenkels

kels *, und diese Theile sind vermöge der Construction den gegebnen Linien P, Q, R gleich. * 7.

Soll endlich die grade Linie AB einer gegebnen eingetheilten Linien MN proportional getheilt werden, so verfährt man mit den Theilen, welche auf dieser Linie gegeben sind, grade so, wie hier mit den gegebnen Linien P, Q, R.

Noch andre Methoden beyde Aufgaben aufzulösen, werden wir im folgenden Buche kennen lernen.

Bemerkung 1. Man sieht leicht dass diese Construction sich auch auf den Fall ausdehnen läſst, wenn die gegebne Linie nur ein bestimmter Theil der einzutheilenden werden soll, z. B. der erste, der mit dem Theil AC der eingetheilten, gegebnen Linie übereinstimmt *. Denn in diesem Fall ziehe man durch die übereinstimmenden Punkte B und C eine grade Linie, und mit dieser durch die Punkte D und E Parallellinien; so theilen diese, wegen des Parallelismus der Linien durch C, D, E, die verlängerte AB, der gegebnen Linie proportional ein *. *E. 8. α * 7.

Bemerkung 2. Da ferner nicht blos die Schenkel eines Winkels, sondern je zwey grade Linien, welche Parallellinien durchschneiden, von diesen proportional eingetheilt werden *; so sieht man leicht, daſs man *diese Constructionen auch dahin abändern kann*, daſs man durch die Theilpunkte * der eingetheilten Linie AG oder AE, willkührlich Parallellinien zieht, und dann um irgend einen Punkt T in der äuſsersten Pa- Fig. 78 *7. Z. 2. *E. 8. α.

rallellinie, mit der einzutheilenden Linie als Halbmesser, einen Kreisbogen beschreibt, der die andre äusserste Parallellinie im Punkte V durchschneide. Zieht man TV, so ist diese Linie der gegebnen gleich, und auf die verlangte Art (z. B. in 5 gleiche Theile) eingetheilt, und man kann dann ihre Eintheilung durch einen Zirkel unmittelbar auf die gegebne Linie übertragen.

Zu *Theilungen von Linien in gleiche Theile*, mittelst dieser Construction, dient ein besonderes *Instrument*, worauf eine Menge Parallellinien in gleichen Entfernungen von einander eingegraben sind, und welches uns der Mühe überhebt, jedesmal erst gleiche willkührliche Theile aufzutragen, und durch die Theilpunkte Parallellinien zu ziehn.

Auf dieselbe Art findet man auf den Verlängerungen einer gegebnen Linie AB die Punkte, welche mit ihr eine Linie bilden, die einer gegebnen AE so proportional eingetheilt ist, dass AB mit einem der mittlern Theile CD übereinstimmt. Man ziehe nemlich durch alle Theilpunkte willkührlich Parallellinien, trage zwischen die beyden durch C und D die gegebne Linie AB ein, und verlängere sie, bis sie von allen jenen Parallellinien durchschnitten ist. — Dann hat man die verlangte eingetheilte Linie.

Zusatz I. *Um ein gegebnes Dreyeck durch Linien aus der Spitze in eine beliebige Anzahl gleicher Theile*, oder *in Theile, welche zu einander ein gegebnes Ver-*

hältniſs haben einzutheilen, theile man die Grundlinie nach der verlangten Art ein, und ziehe aus der Spitze grade Linien nach allen Theilpunkten.

Denn das gegebne Dreyeck wird dadurch in kleine Dreyecke getheilt, die insgeſammt auf derſelben graden Linien ſtehn, und deren Spitze in einem Punkte liegen, folglich in Dreyecke von gleicher Höhe *. * E. 2.
Solche Dreyecke verhalten ſich aber wie ihre Grundlinien *; daher das gegebne Dreyeck dann auf die verlangte Art eingetheilt iſt. * 5. f. 1.

Zuſatz II. *Um ein gegebnes Parallelogramm durch Parallellinien mit einer der Seiten in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, oder in Theile, welche zu einander ein gegebnes Verhältniſs haben, einzutheilen*, theile man die zweyte, an jener anſtoſsende Seite auf die verlangte Art ein, und ziehe durch die Theilpunkte Parallellinien mit der erſtern Seite.

Denn die kleinen Parallelogramme, welche auf dieſe Art entſtehn *, liegen insgeſammt zwiſchen zwey * 1.34.f.1
Parallellinien; haben alſo gleiche Höhe *, verhalten * E. 3.
ſich folglich wie ihre Grundlinien *, und das gegebne * 5. f. 1.
Parallelogramm iſt daher auf die verlangte Art eingetheilt.

AUFGABE 5.

1) *Eine gegebne grade Linie BC, nach einem gegebnen Zahlverhältniſſe m : n. einzutheilen.*

2) *Auf der Verlängerung einer gegebnen graden Linie BC so einen Punkt g zu bestimmen, daſs die beyden Abschnitte Bg, Cg, in dem gegebnen Zahlverhältnisse m : n stehn.*

Das gegebne Zahlverhältniſs m : n sey welches es wolle, so läſst es sich jedesmal leicht in ein Linearverhältniſs verwandeln. Denn man braucht zu dem Ende nur aus einer willkührlichen Linie zwey Linien P, Q, grade so zusammenzusetzen, wie die beyden Zahlen m und n aus der Einheit zusammengesetzt sind. Alsdann verhält sich m : n = P : Q und P und Q sind bekannte Linien.

1) Nun soll *im ersten Fall der Aufgabe* die gegebne Linie BC selbst nach dem Verhältnisse m : n, folglich den Linien P und Q proportional eingetheilt werden; welches durch das Verfahren der vorigen Aufgabe geleistet wird *.

* Afg. 4. (2).

Fig. 79. 2) *Im zweyten Fall* soll auf der Verlängerung der gegebnen Linie BC ein Punkt g so gefunden werden, daſs sich verhalte Bg : Cg = m : n = P : Q. Die beyden Abschnitte Bg, Cg sind in diesem Fall um die gegebne Linie BC von einander verschieden, können also nicht im Verhältniſs der Gleichheit stehn; und würde dieses gefordert, so wäre die Aufgabe in diesem Fall unmöglich. Ueberdem muſs, je nachdem m gröſser oder kleiner als n ist, auch Bg gröſser oder kleiner als Cg seyn, mithin der gesuchte Punkt g auf der Verlängerung der Linie BC über C oder über B hinaus liegen. Alles dieses zeigt auch die folgende Construction.

Gesetzt nemlich, es sey $m > n$, so verhält sich $Bg : Cg : Bg - Cg = m : n : m - n = P : Q : P - Q$*, oder * V. 4. β.
$P - Q : P = BC : Bg$. Man ziehe daher durch B eine grade Linie unter einem willkührlichen Winkel gegen BC, trage auf sie von B aus, $BE = P$, und vom Endpunkte E dieser Linie, rückwärts $EF = Q$ auf, (so dass $BF = P - Q$ wird) und ziehe FC so schneidet eine Parallellinie mit FC, durch E gezogen, auf der Verlängerung von B über C hinaus den gesuchten Punkt g ab. Denn wegen des Parallelismus dieser Linien verhält sich $BC : Bg : Cg = BF : BE : EF$* $= P - Q : P : Q$,* 7. 2.
folglich $Bg : Cg = m : n$.

Ist dagegen $m < n$, mithin auch $P < Q$ und $BE < EF'$, so fällt der Punkt F' über B hinaus, auf dem Stück der willkührlich gezognen Linie, welche mit dem erstern gegen B auf entgegengesetzte Art liegt, und zieht man nun CF', und mit ihr durch E eine Parallellinie, so durchschneidet auch diese die Linie BC, nur auf der entgegengesetzten Verlängerung, über B hinaus.

Sollte endlich $m = n$, folglich auch $P = Q$ und $BE = EF$ seyn, so müssten die Punkte B und F, mithin auch die Linien FC und BC zusammen fallen. Eine Parallellinie durch E mit FC, wäre also in diesem Fall auch mit BC parallel, durchschnitte folglich BC auf beyden Seiten verlängert, nie, und es ist dann kein Durchschnittspunkt g möglich.

Wollte man sich indess vorstellen, dass zwey Parallellinien sich in einer unendlichen Entfernung (d. h. aber *gar nicht*) durchschneiden, so rückt in diesem Fall der Punkt g ins Unendliche fort. Ein Kreis mit einem Halbmesser Ag beschrieben, gienge dann in einen Kreis, mit einem unendlich grofsen Halbmesser beschrieben, d. h. in eine grade Linie über, und so würden durch diese blos eingebildete Idee in Lehrsatz 20 die Fälle, wo ein Ort, der, falls m und n ungleich sind ein Kreis ist, wenn m und n gleich sind, in eine grade Linie übergeht, auf jenen Hauptfall zurückgebracht; und dieses Verallgemeinern ist überhaupt eine der vorzüglichsten Anwendungen, die der Mathematiker von diesen blofs eingebildeten Ideen des Unendlichen macht. Doch gehört dieses mehr in die algebraische Analysis, als hierher.

Zusatz. Sind in einer graden Linie mehrere Punkte, z. B. B, D, C gegeben, und man sucht auf ihr oder ihrer Verlängerung einen Punkt G, der so liegt, dafs die Entfernung desselben von den gegebnen Punkten zu einander in gegebnem Verhältnifs stehn sollen, z. B. $Bg : Cg : Dg = m : n : p$; so ist dieses nicht für jedes Verhalten, sondern nur unter gewissen Bedingungen möglich. Denn es mufs dann z. B. sich verhalten $Bg - Cg : Cg - Dg$ d. h. $BC : CD = m - n : n - p$, welches eine besondre Bedingung für das gegebne Verhältnifs $m : n : p$ an die Hand giebt.

Anmerkung. Dieses ist die vollständige Auflösung einer Aufgabe, auf die wir uns in den Folgerungen und Zusätzen zu Lehrsatz 20 durchgehends berufen haben. Das dort Vorgetragene, beruht gröfstentheils auf ihr, und besonders wird hieraus die *Auslegung* S. 326. 2, ganz deutlich werden. *Apollonius* ebne Oerter II. Lemma 9.)

Die Aufgabe *von einer gegebnen Linie BC einen bestimmten Theil*, z. B den sechsten *abzuschneiden*, oder *sie um diesen Theil zu verlängern*, ist nur ein besondrer Fall, dieser Allgemeinern.

AUFGABE 6.

Wenn ein Winkel A, und ein Punkt B gegeben sind, durch diesen Punkt eine grade Linie so zu ziehn, daſs durch die Schenkel des Winkels auf ihr zwey Stücke BC, BD abgeschnitten werden, die in einem gegebnen Verhältniſs stehn, sich nemlich wie die gegebnen Linien P:Q verhalten. Fig. 80.

Liegt der gegebne Punkt B *zwischen den beyden Schenkeln des gegebnen Winkels*, so ziehe man durch ihn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel AH, welche den andern im Punkte E durchschneide, nehme auf diesem ein Stück ED so, daſs AE, ED, den gegebnen Linien P, Q proportional sind, und ziehe DB, so ist *Afg. 2.
dieses die verlangte Linie. Denn wegen des Parallelismus der Linie EB, AH, durchschneidet sie auch den zweyten Schenkel in irgend einem Punkte C *, und *I.24Z3.
zwar so, daſs sich verhält AE : ED = CB : BD = P : Q*. * 7.

Liegt der gegebne Punkt B *auſserhalb des Winkels*, so ziehe man durch ihn und einen beliebigen Punkt E des einen Schenkels eine grade Linie, nehme auf ihr ein Stück BF, so daſs BE, BF den gegebnen Linien P, Q, proportional sind *, und ziehe durch F eine *Afg. 2.
Parallellinie mit jenem Schenkel, welche den zweyten Schenkel in irgend einem Punkte D schneiden muſs *; *I24Z3
so ist DB die verlangte Linie. Denn wegen des Parallelismus der Linie FD, AE, durchschneidet sie den ersten Schenkel AE nothwendig in irgend einem Punkte C *, und zwar so, daſs sich verhält BC : BD = BE *I.24Z.3
: BF = P : Q.

(*Gregorius a St. Vinc. I. 28. 29*). Man sieht leicht, dass sich diese Aufgaben noch auf mannigfaltige Art abändern lassen, z. B. wenn eine Parallellinie mit dem einen Schenkel gegeben ist, die Linie durch den Punkt B so zu ziehn, dass die Abschnitte derselben zwischen den beyden parallelen Linien, und zwischen B und dem andern Schenkel, in dem Verhältnisse von P zu Q stehn; eine Aufgabe, die grade so aufgelöst wird (Greg. I. 25.)

Zusatz. *Um durch den Punkt B eine grade Linie so zu ziehn, dass sie auf den Schenkeln des gegebnen Winkels zwey Stücke AC, AD abschneide, die sich wie P zu Q verhalten*, trage man auf den einen Schenkel AE = P, auf den andern AF = Q auf, ziehe EF, und damit parallel durch B, CD. Denn dann verhält sich wegen des
* 7. Parallelismus dieser Linien, AC : AD = AE : AF * = P : Q. (Greg. I. 30.)

AUFGABE 7.

Fig. 82. *Zu drey gegebnen Linien P, Q, R, die vierte Proportionallinie zu finden*

Man bilde einen willkührlichen Winkel K, und trage von der Spitze K aus, auf dem einen Schenkel desselben die erste und zweyte der gegebnen Linien, P = KA, Q = KB, und auf dem andern Schenkel die dritte Linie R = KC auf, verbinde dann die Endpunkte A, C der ersten und dritten durch eine grade Linie, und ziehe mit dieser durch den Endpunkt B der zweyten eine Parallellinie BX. Das Stück KX, welches diese Parallellinie auf dem zweyten Schenkel abschneidet, ist die gesuchte vierte Proportionallinie.

Denn da die Parallellinien die beyden Schenkel einander Proportional eintheilen, so verhält sich KA: KB = KC:KX *, mithin P : Q = R : KX. *7.Z.1.

Bemerkung 1. So wie sich, unbeschadet des vierten Glieds, die mittlern Glieder jeder Proportion vertauschen lassen, so ist es auch für diese Construction ganz gleichgültig, ob man die zweyte oder die dritte der gegebnen Linien, mit der ersten auf demselben Schenkel legt. Nur daſs man immer *durch den Endpunkt der erstern Linie*, und der, welche auf dem andern Schenkel liegt, *die grade Linie ziehn muſs*, durch welche die Lage der Parallellinie bestimmt wird.

Zieht man *durch die Endpunkte der beyden Linien, welche in der Proportion die mittlern Glieder ausmachen*, eine grade Linie BC, und mit dieser durch den Endpunkt der ersten eine Parallellinie AY, so verhält sich KA : KB = KY : KC und *man erhält daher eine vierte Linie KY, welche mit den drey andern*, nicht, wie unsere Aufgabe verlangt, direkt, sondern *verkehrt proportional* ist: und eine solche Linie läſst sich daher auf diese Art immer ganz leicht finden. Eine andre Methode dazu haben wir in Aufgabe 3 kennen gelernt. * *Afg3f1

Bemerkung 2. Ferner ist es nicht nöthig, daſs man die drey gegebnen Linien auf den Schenkeln zu einerley Seite des Punktes K, oder überhaupt von diesem Winkelpunkte an auftrage; vielmehr kann man sie ganz willkührlich legen, wenn nur die übereinstimmenden Endpunkte der Linien P, R in zwey Parallellinien fallen. Denn auch in diesem Fall schneiden

zwey durch die Endpunkte der Linie Q mit jenen pa-
7. Z. 2. rallel gezogne Linien, vermöge Lehrſatz 7, vom gegenüberſtehenden Schenkel ein Stück ab, welches zu den drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie iſt. Allein die oben angegebne Conſtruction iſt von allen die einfachſte.

Bemerkung 3. Auch Lehrſatz 13. Folgerung 2 führt auf ein ganz *bequemes Verfahren, zu drey gegebnen Linien die vierte Proportionallinie zu finden*, welches ich dem Leſer ſelbſt zu entwickeln überlaſſe. Eben ſo unſere Sätze über den Kreis, beſonders Lehrſatz 24 und 25, aus denen leichte und artige Methoden folgen.

Bemerkung 4. Dieſe Conſtruction iſt übrigens für die geometriſche Darſtellung daſſelbe, was die ſogenannte *Regel de Tri* für die Arithmetik iſt, und für ſie nicht weniger wichtig. In ſo fern man einen jeden Ausdruck wie folgenden $\frac{AB \times AD}{DE}$ als vierte Proportio-
V. 3. α nalgröſse zu den Linien DE, AB, AD anſehn kann, dient dieſes Verfahren, ähnliche Ausdrücke noch auf eine andre Art in Lineargröſsen anzugeben, d. i. *zu conſtruiren*, und bey geometriſchen Unterſuchungen noch auf eine andre Art *zu überſetzen*, als wir dieſes im Vo-
Afg. 3. a. 2. rigen gethan haben; nemlich durch *vierte Proportionallinie zu den drey Linien DE, AB, AD*; eine Auslegung, die indeſs vermöge Lehrſatz 4 Folgerung 1. in der That mit der erſtern zuſammen fällt.

AUFGABE 8.

Ein gegebnes Parallelogramm, oder ein gegebnes Dreyeck oder ein gegebnes Trapezoid, in eine Figur von einer dieser drey Gattungen zu verwandeln, welche mit der gegebnen gleichen Inhalt hat, und entweder über einer gegebnen Grundlinie MN steht, oder eine gegebne Höhe hat.

Alle einzelnen Aufgaben, welche in dieser allgemeinen enthalten sind, lassen sich *durch Auffindung einer vierten Proportionallinie* auflösen, und mithin auf die vorige Aufgabe zurückführen, sind aber, wie sie hier ausgedrückt werden, unbestimmt. Denn der Inhalt des Parallelogramms wird durch das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe bestimmt, der Inhalt des Dreyecks durch die Hälfte dieses Produkts *, und der Inhalt des Trapezoids durch das Produkt aus der Höhe in die halbe Summe beyder Grundlinien *. Sollen folglich zwey Figuren dieser Gattungen gleichen Inhalt haben, so müssen zwey solche Produkte gleich seyn, wodurch eine Proportionalität zwischen den Grundlinien und Höhen beyder gegeben wird *. Nun aber sind von der gegebnen Figur, die Grundlinie und die Höhe bekannt, und von der zweyten soll entweder die Grundlinie oder die Höhe gegeben seyn. Folglich kennt man in dieser Proportion drey Glieder, und sucht man aus ihnen, nach der vorigen Aufgabe, die vierte Proportionallinie, so findet man auch der gesuchten Figur Grundlinie oder Höhe, wodurch jedoch diese Figur nicht völlig bestimmt wird.

* 5.

* 6.

* V. 3. γ

Nach diesem Fingerzeig entwickle und löse der Anfänger selbst die einzelnen Aufgaben auf, die in dieser allgemeinen enthalten sind. Hier, zum Beyspiel, nur ein Paar.

Fig. 75. *Das gegebne Parallelogramm ABCD in ein Parallelogramm über die gegebne Grundlinie CI zu verwandeln.* Man suche die Höhe DK des gegebnen Parallelo-
* E. 3. gramms *, und zu CI, CB, DK die vierte Proportionallinie, so ist diese die Höhe des gesuchten Parallelo-
*5. f. 2. gramms *, und errichtet man auf CI ein Perpendikel, trägt darauf IL, dieser Höhe gleich, und zieht durch L eine Parallellinie mit CI, so schneiden je zwey Parallellinien durch C und I ein Parallelogramm ab, welches der Aufgabe genüge thut. Diese Aufgabe ist also *unbestimmt*, weshalb unzählige Parallelogramme ihr genüge leisten. Bestimmt wird sie, so bald noch der Winkel gegeben ist, unter dem dieses Parallelogramm beschrieben werden soll, wie in Aufgabe 3., und dieses ist, wenn nach Rechtecken gefragt wird, immer der Fall.

Hätte *das Parallelogramm ABCD in ein Dreyeck über CI verwandelt werden sollen*, so sey die Höhe des gesuchten Dreyecks h. Dann wird der Inhalt des Parallelogramms ausgedrückt durch $BC \times DK$, des Dreyecks
* 5. durch $\frac{1}{2} CI \times h$ *, und da beyde gleich seyn sollen, muss $BC \times DK = \frac{1}{2} CI \times h$ seyn, folglich sich verhalten
*V. 3. 7 $\frac{1}{2} CI : BC = DK : h$ *. Man suche also die vierte Proportionallinie zu $\frac{1}{2}$ CI, BC, DK, schneide auf dem Perpendikel auf CI, dieser Linie gleich IM ab, und ziehe durch M mit CI eine Parallellinie; so ist die Pa-

rallellinie der Ort der Spitze des gesuchten Dreyecks*, und die Aufgabe ebenfalls unbestimmt, etc. * 2. Z.

AUFGABE 9.

Zu zwey gegebnen Linien P, Q, als äussere Glieder einer Proportion, zwey andre Linien Y, X, deren Unterschied oder deren Summe einer gegebnen Linie N gleich ist, als mittlere Glieder der Proportion zu finden.

Man ziehe willkührlich zwey Linien, welche sich im Punkte F rechtwinklig durchschneiden. Fig. 60.

Im Fall des Unterschieds trage man zu entgegengesetzten Seiten des Punktes F auf die eine dieser Linien FA = P und FB = Q, und auf die zweyte Linie FH = N. Halbire AB und FH, und errichte auf beyden Linien in den halbirenden Punkten Perpendikel. Der Punkt C, wo diese Perpendikel sich durchschneiden, ist der Mittelpunkt eines Kreises, der mit AC als Halbmesser beschrieben, auf der zweyten Linie die beyden gesuchten Linien FD, FE abschneidet.

Denn da dieser Kreis vermöge der Construction durch die Punkte A und B geht, so sind AB, DE Sehnen, die sich im Punkte F durchschneiden, folglich FA : FE = FD : FB *: und da das Perpendikel aus dem Mittelpunkte C die Sehne DE halbirt, auch EF = HD und mithin FD — FE = FH = N. *22.f.1α

Im Fall der Summe trage man FA = P und FB = Q zu einerley Seite des Punktes F auf, und verfahre im

übrigen wie vorhin. Durchſchneidet dann die Kreislinie, die durch A und B geht, die zweyte Linie in den Punkten D, E, ſo ſind jetzt AB, DE Sehnen, die verlängert im Punkte F ſich durchſchneiden, folglich wie-
*22.f.17 derum FA : FE = FD : FB *, jetzt aber FD + FE = FH = N.

In dieſem Fall wird jedoch der Kreis die zweyte Linie nur dann durchſchneiden, wenn die Summe der beyden Abſchnitte FE + FD = N gröſser iſt, als das Zweyfache der Tangente, die aus F am Kreiſe gezo-
*22f.3.α gen wird *; oder, da das Quadrat dieſer Tangente
* 22. 2. gleich iſt dem Rechteck FA × FB *, nur dann, wenn $N^2 > 4 \cdot FA \times FB$ iſt. Iſt N kleiner, ſo wird die Aufgabe unmöglich.

B e m e r k u n g 1. Da das Rechteck aus der mittlern von vier Proportionallinien, ſtets dem Rechteck aus den äuſsern gleich, mithin in dieſem Fall $(N - FE) \times FE = P \times Q$ iſt; ſo läuft dieſe Aufgabe auf eins mit folgender hinaus: „*Ein Rechteck von gegebnem Inhalt, zu beſchreiben, wenn entweder der Unterſchied, oder die Summe zweyer anliegenden Seiten deſſelben gegeben iſt.* Noch eine andre Form und Auflöſung derſelben, findet ſich in Aufgabe 18.

B e m e r k u n g 2. Wo es überhaupt auf Gleichheit von Rechtecken ankömmt, wird dieſe Conſtructionsart vermittelſt des Kreiſes, mehrentheils mit Vortheil gebraucht werden.

Z u ſ a t z. Sind die beyden gegebnen Linien P und Q gleich, ſo geht die geſuchte Proportion, in dieſe $P : X = Y : P$, und daher unſere Aufgabe (da es gleichgültig ist, ob die gesuchten Linien innere oder äussere Glieder in der Proportion ausmachen, in folgende über:

Wenn eine mittlere Proportionallinie P, und von den beyden andern proportionalen Linien, entweder die Summe, oder der Unterschied N gegeben sind, diese Linien selbst zu finden.

Oder: *Ein gegebnes Quadrat P^2 in ein Rechteck zu verwandeln, von dessen beyden anliegenden Seiten die Summe oder der Unterschied N gegeben ist.*

Oder endlich: *Auf einer gegebnen graden Linie N, oder auf deren Verlängerung einen Punkt so zu bestimmen, dass das Rechteck aus den beyden Abschnitten, einem gegebnen Quadrate P^2 gleich sey.*

Diese drey Aufgaben fragen, nur unter verschiedner Gestalt, nach ein und dasselbe, und sind ein einzelner Fall unserer allgemeinern Aufgabe. Dadurch dass für sie die gegebnen Linien $P = FA$, und $Q = FB$ gleich sind, wird die Construction in beyden Fällen beträchtlich vereinfacht.

Im Fall des Unterschieds beschreibe über $FH = N$ Fig. 89. als Durchmesser einen Kreis, welchen $FA = P$ berührt, und ziehe von A durch den Mittelpunkt eine grade Linie, welche den Kreis in D und E durchschneide, so sind AD, AE die gesuchten Linien. Denn es ist $AD \times AE = AF^2 = P^2$ und $AD = AE + N$.

Im Fall der Summe beschreibe über $FH = N$ einen Halbkreis, ziehe mit FH in einer Entfernung gleich P, eine Parallellinie, und fälle vom Punkte, wo sie den Kreis durchschneidet, ein Perpendikel IK auf den Durchmesser, so schneidet dieses auf dem Durchmesser die beyden verlangten Abschnitte FK, KH ab. Denn es ist $FK \times KH = IK^2 = P^2$, und $FK + KH = EH = N$.

AUFGABE 10.

Wenn zwey Rechtecke, aus den Linien A, B und P, Q, gegeben sind, eine Linie zu finden, zu welcher sich eine Seite des einen Rechtecks, wie der Inhalt beyder Rechtecke zu einander verhält.

Gesetzt es sey X die Linie, zu welcher die Seite A in dem Verhältnisse des Inhalts beyder Rechtecke steht, $A \times B : P \times Q = A : X$; so ist das erste Verhält-
*3. f. 2. nifs auch gleich dem Verhältnifs $A \times B : X \times B$ *; folglich, da die Vorderglieder gleich sind, müssen es auch
*V. 3. ε die Hinterglieder seyn, $P \times Q = X \times B$ *, oder es muss
*V. 3. γ sich verhalten $B : P = Q : X$ *.

Man suche also zu der einen Seite des einen, und zu den beyden Seiten des andern Rechtecks die vierte
*Afg. 7. Proportionallinie *, so verhält sich zu dieser die andre Seite des erstern, wie der Inhalt beyder Rechtecke, oder $A : X = A \times B : P \times Q$.

Bemerkung. Auf diese Art findet man *zwey Linien, die im zusammengesetzten Verhältnifs zweyer Paar*
* V. 6. *gegebner Linien stehn*, $A : X = (A : P) + (B : Q)$ *. Sind die gegebnen Verhältnisse gleich, so ist $A : X = 2 (A : P) = A^2 : P^2$ und $A : P = P : X$, da denn diese Auflösung

in

in die übergeht, welche wir in Aufgabe 12 für diesen Fall haben werden. *. *12. f. 2.

AUFGABE 11.

*Zwey Linien darzustellen, deren Verhältniſs aus den gegebnen Verhältnissen dreyer Paar Linien A, B, C und P, Q, R zusammengesetzt ist, oder die sich wie die Produkte dreyer Linien, zu den Produkten dreyer andrer Linien * verhalten.* * E. 6.

Gesetzt Y und X sind die beyden gesuchten Linien, so soll sich verhalten $Y : X = A \times B \times C : P \times Q \times R$ oder $= \frac{B \times C}{P} : \frac{Q \times R}{A}$*. Setzt man folglich $Y = \frac{B \times C}{P}$ *V. 1. β.

und $X = \frac{Q \times R}{A}$, so erhält man gewiſs zwey Linien in dem gesuchten Verhältniſs, und von diesen Linien ist dann die *Eine* die vierte Proportionallinie zu P, B, C, und die *Andre* die vierte Proportionallinie zu A, Q, R *. *Afg. 7. B. 3.

Zusatz I. Soll, wie in der vorigen Aufgabe, eine der gegebnen Linien, z. B. A, das Vorderglied des gesuchten Verhältnisses seyn, sich folglich verhalten $A \times B \times C : P \times Q \times R = A : X = A \times B \times C : X \times B \times C$*; so muſs, wegen Gleichheit der Vorderglieder, $P \times Q \times R = X \times B \times C$, mithin $B \times C : Q \times R = P : X$ seyn. Denkt man sich daher eine Linie Z so, daſs sich verhalte $B : Z = P : X$ mithin auch $B \times C : Z \times C = P : X$, so muſs diese Linie so beschaffen seyn, daſs $Q \times R = Z \times C$ *, folglich $C : Q = R : Z$ ist. — Sucht man daher zu C, * V. 1. β. * V. 3. α

Q, R die vierte Proportionallinie Z, und dann zu B, Z, P abermals die vierte Proportionallinie, so erhält man die gesuchte Linie X, zu welcher A in dem verlangten Verhältnisse steht.

Zusatz II. Ueberhaupt mögen noch so viel Verhältnisse gegeben seyn, und *man sucht ein Verhältniss G : X, welches aus allen diesen gegebnen Verhältnissen zusammengesetzt ist*, so findet man dieses durch fortgesetzte Auffindung vierter Proportionallinien a, b, c etc., z. B.

$$A : P = G : a$$
$$B : Q = a : b$$
$$C : R = a : X$$

so ist, wenn man zusammensetzt $G : X = (A : P) + (B : Q) + (C : R) = A \times B \times C : P \times Q \times R$*.

* V. 4. δ.

AUFGABE 12.

Fig. 82. *Zu zwey gegebnen Linien P, Q die dritte Proportionallinie zu finden.*

Diese Aufgabe fordert eine stetige Proportion zu denken, worin die mittlern Glieder beyde der zweyten gegebnen Linie gleich sind *, und zu dieser die vierte Proportionallinie zu finden. Man wiederhole daher die Construction der siebenten Aufgabe, nur dass man jetzt Q = KB auf beyde Schenkel des Winkels K auftrage, und man ziehe AB′ und damit parallel BC, so ist KC die gesuchte dritte Proportionallinie. Denn es verhält sich KA : KB = KB : KC.

* V. 5.

Fig. 88. *Oder* setze auf dem Endpunkte von P = AD, die zweyte Linie Q = DF senkrecht, ziehe AF, und errichte

darauf im Punkte F ein Perpendikel. Wenn dieses die verlängerte AD im Punkte B durchschneidet, so ist BD die dritte gesuchte Proportionallinie. Denn es ist dann AD : DF = DF : DB *. *12f.2.δ

Oder beschreibe einen Kreis, trage P und Q von Fig. 62. demselben Punkte A aus als Sehnen hinein, und ziehe vom Endpunkt der einen eine Parallellinie mit der Tangente durch A, so ist das Stück AM oder Aγ, welches diese Parallellinie auf der andern, oder auf deren Verlängerung abschneidet, die dritte Proportionallinie zu den beyden Sehnen *. *24. f. 1

Und solcher Auflösungen mehrere, die sich ohne Schwierigkeit aus unsern Sätzen über den Kreis ausheben lassen.

Folgerung 1. Da zu den Zahlausdrücken der Fig. 83. beyden Linien KA, KB die dritte Proportionalzahl $\frac{KB^2}{KA}$ ist *, so muss dieses auch der Zahlausdruck für *V. 3. α. die dritte Proportionallinie KC seyn. Folglich dient diese Construction *einen solchen Ausdruck* in Lineargrössen anzugeben, d. i *zu construiren*: und man ist umgekehrt berechtigt bey geometrischen Untersuchungen einen solchen Ausdruck *durch dritte Proportionallinie zu den Linien KA und KB* zu übersetzen.

Folgerung 2. Setzt man die gleichen Verhältnisse in dieser stetigen Proportion zusammen *, so sieht * V. 9. man, dass sich verhalte KA : KC = 2 (KA : KB) = KA^2 : KB^2, d. h. *dass das Verhältniss der ersten zur dritten Pro-*

portionallinie noch einmal so hoch, als das Verhältniſs der erſten zur zweyten, oder dem Verhältniſſe der zweyten Potenzen aus den Zahlausdrücken dieſer Linien, mithin *dem Verhältniſſe der Quadrate über dieſe Linien, gleich*
*4, Z. 2. *iſt* *.

α) *Um folglich zwey Linien zu bilden, die ſich wie zwey gegebne Quadrate verhalten*, braucht man nur zu den Seiten dieſer Quadrate die *dritte Proportionallinie* zu finden;

β) und umgekehrt *findet man die Seiten zweyer Quadrate, die ſich wie zwey gegebne Linien verhalten*, wenn man zwiſchen dieſen beyden Linien die mittlere Pro-
*Afg. 13 portionallinie bildet *; wichtige Bemerkungen, von denen wir im folgenden Buche häufig Gebrauch machen werden.

Folgerung 3. Fährt man in der angegebnen Conſtruction fort, trägt ferner KC′ auf den zweyten Schenkel auf, und zieht C′D parallel mir B′C, ſo iſt wiederum KD die dritte Proportionallinie zu KB und KC; trägt man weiter KD′ auf den andern Schenkel und zieht D′E parallel mit C′D, eben ſo KE die dritte Proportionallinie zu KC und KD u. ſ. f.

Auf dieſe Art läſst ſich folglich *eine ganze Reihe ſtetig proportionaler Linien KA, KB, KC, KD etc. bilden*, wo jede die dritte Proportionallinie zu den beyden vorhergehenden, und die mittlere Proportionallinie zwiſchen der nächſt vorhergehenden und folgenden iſt, ſo daſs ſich verhält KA : KB = KB : KC = KC : KD = KD : KE etc.

Setzt man diese stetigen Verhältnisse Schrittweise zusammen *, so erhält man * V. 6.

$$KA : KC = 2\,(KA : KB) = KA^2 : KB^2$$
$$KA : KD = 3\,(KA : KB) = KA^3 : KB^3$$
$$KA : KE = 4\,(KA : KB) = KA^4 : KB^4 \text{ etc.}$$

Man wird daher durch diese Construction im Stande gesetzt *Linien zu bilden, welche sie wie irgend zwey Potenzen von gleichem Grade aus den Zahlausdrücken zweyer gegebner Linien KA, KB verhalten.*

Allein wenn zwey Linien, wie KA, KE gegeben sind, die Linie KB zu finden, so dass KA : KE sich z. B. wie $KA^4 : KB^4$ verhielte, dazu erhalten wir durch diese Construction kein Mittel.

Anmerkung 1. Andere Mittel eine ganze Reihe solcher stetig proportionaler Linien zu bilden, giebt Lehrsatz 24. Folgerung 1, und Lehrsatz 25. Folgerung 3 an die Hand, und wer diese Construction interessant findet, wird sie ohne Schwierigkeit daraus entwickeln können. Die leichteste Methode verspare ich für das folgende Buch.

Anmerkung 2. *Um ein gegebnes Quadrat in ein Rechteck, oder in ein Dreyeck etc. über gegebner Grundlinie zu verwandeln*, muss man auf eine ähnliche Art, wie in Aufgabe 8, zur gegebnen Grundlinie und zur Seite des gegebnen Quadrats eine dritte Proportionallinie suchen. Dieses drückt z. B. *Tacquet* folgendermaſsen aus: *ad datam rectam AB, datae rectae M quadratum facile est applicare, inveniendo rectis AB, M tertiam proportionalem CD et rectangulum ABCD construendo. Est enim dato quadrato M2 aequale rectangulum, ad rectam AB applicatum* *. Fig. 83. *Afg. 3. a. 1.

AUFGABE 13.

1) *Zwischen zwey gegebnen graden Linien P und Q eine mittlere Proportionallinie zu finden, und* Fig.

2) *zwischen einer graden Linie AB und einem gegebnen Abschnitt derselben AD, eine mittlere Proportionallinie darzustellen.*

1) Man trage die beyden gegebnen Linien auf eine willkührlich gezogne grade Linie nebeneinander, AD = P und DB = Q, beschreibe um die Summe beyder AB als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte auf AB im Punkte D ein Perpendikel. Durchschneidet dieses den Kreisbogen im Punkte E, *so ist DE die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn es verhält sich dann vermöge der Natur des Kreises AD : DE = DE :
*22.f.1α DB *.

2) Soll zu AB und dem Abschnitt AD dieser Linie, die mittlere Proportionallinie gefunden werden, so beschreibe man wiederum um die ganze Linie AB als Durchmesser einen Kreis, errichte in D das Perpendikel DE, und ziehe von Punkte E, wo dieses die Kreislinie durchschneidet, nach A eine Sehne AE, *so ist diese Sehne die gesuchte mittlere Proportionallinie.* Denn vermöge der Natur des Kreises verhält sich dann AD : AE
*22, Z.1 = AE : AB *.

Oder man beschreibe um AB irgend einen beliebigen Kreisabschnitt, ziehe durch A *eine Tangente* an demselben, da mit durch D eine Parallellinie, und nach dem Punkte F, wo diese den Kreisbogen durchschneidet AF, so ist AF, die gesuchte mittlere Proportio-
*25.f.3. nallinie *.

Oder man beschreibe um den übrigen Theil DB der gegebnen Linie, als Sehne, oder Durchmesser, einen Kreis, und ziehe an diesen vom Punkte A aus *eine Tangente AG*, so ist AG die gesuchte mittlere Proportionallinie *. *22f.1.8

Folgerung. Die mittlere Proportionallinie zwischen zwey Linien, kann nie grösser seyn, als die Hälfte der Summe beyder Linien. Denn kein Perpendikel auf dem Durchmesser, das bis an die Kreislinie reicht, kann grösser seyn als der Halbmesser. Und so folgt auch aus der Construction, dieser aus der Arithmetik bekannte Satz.

Bemerkung 1. Da zu den Zahlausdrücken zweyer Linien P, Q die mittlere Proportionalzahl $\sqrt{(P \times Q)}$ ist *, so muss diese auch der Zahlausdruck * V, 5. für die mittlere Proportionallinie M seyn. *Ein Ausdruck, wie $\sqrt{(P \times Q)}$, d. i. eine Quadratwurzel, läßt sich* daher mittelst des Verfahrens in dieser Aufgabe in Lineargrössen darstellen, und folglich durch Verbindung derselben mit den Verfahren der vorigen Aufgaben, jede *reine Quadratische Gleichung construiren.* Was die *Construction einer unreinen quadratischen Gleichung* betrifft, so verspare ich sie für die Bemerkungen am Ende der Planimetrie.

Bemerkung 2. Ist M die mittlere Proportionallinie zwischen P und Q, so verhält sich $P : M = M : Q$, und $P : Q = P^2 : M^2 = M^2 : Q^2$, wie wir schon in der vorigen Aufgabe bemerkt haben *. *Afg.12 f. 2.

α) *Sind vier Linien proportional, $A : B = C : D$, und man nimmt zwischen den ersten A, B und zwischen den letzten C, D mittlere Proportionallinien M, N, so sind auch*

diese mit den Vordergliedern, und eben so mit den Hinter gliedern der gegebnen Proportion, proportional. Denn es verhält sich $A:B = A^2:M^2 = M^2:B^2$ und $C:D = C^2:N^2 = N^2:D^2$. Wenn also die vordern Verhältnisse gleich sind, so sind es auch die hintern, $A^2:M^2 =$
*4. f. 2. $C^2:N^2$, also auch $A:M = C:N$ *: oder $M:B = N:D$, oder $A:M = N:D$.

β) *Grade so sind in gleichen Verhältnissen $A:B = C:D$ die dritten Proportionallinien P, Q mit den Vordergliedern, und folglich auch mit den Hintergliedern proportional.* Denn es verhält sich $A^2:B^2 = A:P$ und
*Afg. 12 f. 2. $C^2:D^2 = C:Q$ *, mithin $A:P = C:Q$ und $A:C = B:D = P:Q$.

γ) Da *im Kreise* die Tangente die mittlere Proportionallinie zwischen einer verlängerten Sehne und der
*22.f.1 δ Verlängerung ist, $AE:AG = AG:AF$ *, so *verhält sich immer $AE:AF = AE^2:AG^2$*: und auf diese Art lassen sich andere brauchbare Sätze mittelst dieser Bemerkung aus unsern Lehrsätzen ableiten.

Bemerkung 3. Sucht man erst zwischen zwey gegebnen Linien P, Q, die mittlere Proportionallinie M, und fährt dann fort zwischen P, M und zwischen M, Q mittlere Proportionallinien zu suchen, so erhält man zwischen P, Q, 2 + 1, d. i. *drey*, und fährt man mit diesen wieder eben so fort, 4 + 3, d. i. *sieben mittlere Proportionallinien* u. s. f. Aber *auf zwey, vier oder fünf mittlere Proportionallinien kömmt man durch diese Construction nicht.* Jene geben *Constructionen von Wurzeln des vierten, achten, sechzehnten Grades* u. s. f.

Diese würden Constructionen von Wurzeln des dritten, fünften Grads, u. s. f. an die Hand geben; allein zu solchen Constructionen reicht die Elementargeometrie nicht hin. Man lese deshalb Lehrsatz 22 Zusatz 4, Lehrsatz 24. Folgerung 2, und die Bemerkungen am Ende dieses Werkes nach.

AUFGABE 14.

Eine gegebne gradelinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Dieses geschieht durch Auffindung *mittlerer Proportionallinien*, und also durch die Verfahren der vorigen Aufgabe, durch welche man jedesmal die Seite des gesuchten Quadrats, und zwar auf verschiednen Wegen, finden kann.

α) Bey einem gegebnen *Rechteck* ABCD, suche zwischen den beyden anliegenden Seiten AB, BC die mittlere Proportionallinie M, so ist $M^2 = AB \times BC$ *, folglich das gesuchte Quadrat. Fig. 84. *14. f. 3.

β) Bey einem gegebnen *Parallelogramm*, suche eben so zwischen der Grundlinie, g, und Höhe, h; — bey einem gegebnen *Dreyeck* zwischen der Grundlinie, g, und halben Höhe, $\frac{1}{2}$ h; — und bey eine gegebnen *Trapezoid* zwischen der halben Summe beyder Grundlinien, $\frac{1}{2}(G+g)$, und der Höhe, h, die mittlere Proportionallinie M, so ist diese die Seite des gesuchten Quadrats. Denn es ist dann M^2 im ersten Fall gleich gh, im zweyten $\frac{1}{2}$ gh, im dritten $\frac{1}{2}(G+g)h$,

und dieses sind die Zahlausdrücke für den Inhalt der
*5. u. 6. drey gegebnen Figuren *.

γ) *Andere unregelmäſsige Vielecke* verwandle man
*Afg. 1. erst in ein groſses Dreyeck *, so lassen auch sie sich nach β in ein Quadrat von gleichem Inhalt umbilden. Und dieses ist eine von den Constructionen, auf die wir uns in den Folgerungen zu Lehrsatz 20, und bey den fernern geometrischen Oertern, oft bezogen haben.

Folgerung. Iedes gradelinige Vieleck läſst sich also im eigentlichen geometrischen Sinn quadriren.

Anmerkung. Der Ausdruck *eine Figur quadriren* oder *die Quadratur einer Figur* finden, läſst sich im *geometrischen* oder im *arithmetischen* Sinn nehmen. In *jenem*, welcher der eigentliche und ursprüngliche ist, bedeutet er: ein *Quadrat geometrisch darstellen, welches mit der Figur gleichen Inhalt hat*, und das können wir bey jedem gradelinigen Vieleck vermittelst dieser Construction bewerkstelligen. In *diesem, dem arithmetischen Sinn*, bedeutet er, „*einen Zahlausdruck für den Inhalt der Figur*
*4. Z. *in Flacheneinheiten (Quadraten*) finden, wenn man den Zahlausdruck gewisser Linien, in ihr in Lineareinheiten kennt.*" Aus der geometrischen Quadratur folgt daher leicht die arithmetische, nicht aber umgekehrt; denn das bilden eines Quadrats dem gefundnen Zahlausdruck gemäſs, darf man wohl kaum eine geometrische Construction nennen. — Man sieht hieraus, was *die Quadratur des Kreises*, und *die Quadratur der Curven* sagen will. — Die arithmetische Quadratur ist im Grunde nichts anders als *die Berechnung der Figur*, d. h. die Bestimmung des Zahlausdrucks für ihren Inhalt, aus dem Zahlausdruck der Seiten, und da dieses für die Anwendung das eigentlich brauchbare und wichtige ist, so pflegt man, mit seltnen Ausnahmen, diese Bestimmung des Inhalts, oder die arithmetische Quadratur zu verstehn, wenn man von Quadratur des Kreises oder der Curven spricht.

AUFGABE 15.

Ein Quadrat zu bilden, welches der Summe zweyer oder mehrerer gegebner Quadrate gleich ist. Fig. 85.

α) Man beschreibe einen rechten Winkel A, trage auf seine Schenkel die Seiten der beyden gegebnen Quadrate AB = M und AC = N auf, und ziehe BC, so ist diese Linie die Seite des Quadrats, welches den beyden Quadraten über M und über N zusammengenommen gleich ist. Denn BAC ist vermöge der Construction ein rechtwinkliges Dreyeck, folglich dem Pythagoreischen Lehrsatz zu folge $BC^2 = AB^2 + AC^2 = M^2 + N^2$ *. * 124

β) Soll das gesuchte Quadrat *den drey Quadraten* über M, N, P gleich seyn, so errichte man aufs neue im Punkte C auf AC ein Perpendikel, trage auf dieses CD = P auf, und ziehe BD, so ist $BD^2 = BC^2 + CD^2 = M^2 + N^2 + P^2$, also BD die Seite des gesuchten Quadrats.

γ) Grade so fährt man fort, wenn man ein Quadrat sucht, welches vier, oder fünf oder mehreren gegebenen Quadraten zusammengenommen gleich ist, indem man Schrittweise die Seiten der Quadrate sucht, welchem vier, fünf, sechs u. s. f. der gegebnen Quadrate zusammengenommen gleich sind.

Zusatz I. Auf diese Art lassen sich also auch Schrittweise *Seiten von Quadraten finden, welche den doppelten, dreyfachen, vierfachen Inhalt u. s. f. eines gegebnen Quadrats* M^2 *haben*, dergleichen die sogenannte *Flächenseite des Visirstaabs zum Messen cylindrischer Gefässe*, oder Fig. 86.

von Tonnen angiebt. Zu dem Ende trage man auf beyde Schenkel des rechten Winkels, AB und AB′ gleich M, d. i. gleich der Seite des gegebnen Quadrats auf; so wird BB′ die Seite des doppelten Quadrats, $2 M^2$. Mit dieser schneide man von A aus, A2 = BB′ ab, so ist B2 die Seite des dreyfachen Quadratr $3 M^2$. Schneidet man mit dieser wieder A3 = B2 ab, und zieht B3, so erhält man die Seite des vierfachen Quadrats $4 M^2$, mit der man wieder A4 abschneide, u. s. f. Und so erhält man einen Maasstab AE, vermöge dessen man den Inhalt jedes gegebnen Quadrats sogleich, aus dessen Seite, mit dem Inhalt des bekannten Quadrats M^2, vergleichen kann. Man fasse die Seite mit dem Zirkel, und trage sie auf AE von A aus auf. Schneidet sie da z. B. die Länge A5 ab, so ist der Inhalt jenes Quadrats das Fünffache vom Inhalt des Bekannten. Kleinere Abtheilungen in Hälften, Viertel etc., lassen sich mittelst der folgenden Aufgabe finden.

Zusatz II. Wollte man ein Quadrat haben, welches das Zwanzigfache eines gegebnen ist, so suche man erst das doppelte Quadrat, aus diesem das Vierfache, und aus diesem sammt dem Gegebnen, das Fünffache. Aus den Fünffachen findet man das Zehnfache, und aus diesem das Zwanzigfache.

AUFGABE 16.

Fig. 87. *Ein Quadrat zu bilden, welches dem Unterschiede zweyer oder mehrerer gegebnen Quadrate gleich ist.*

α) Man beſchreibe wiederum einen rechten Winkel A, trage auf den einen Schenkel deſſelben die Seite des kleinern Quadrats $N = AC$ auf, und beſchreibe mit der Seite des gröſsern M, als Halbmeſſer, um D als Mittelpunkt, einen Kreisbogen. Schneidet dieſer den andern Schenkel in B, ſo iſt AB die Seite des geſuchten Quadrats. Denn das ſo beſchriebne Dreyeck iſt rechtwinklig, und deshalb $AB^2 = BC^2 - AC^2 =$ * $M^2 - N^2$. *12. f. 1.

β) Soll das geſuchte Quadrat dem Unterſchiede zweyer Quadrate N^2 und P^2 von M^2 gleich ſeyn, ſo ſuche man wieder auf dieſelbe Art den Unterſchied von AB^2 und P^2 u. ſ. f., ſo daſs man alſo auf dieſe Art *beliebig viel Quadrate, von einem Gegebnen, welches gröſser iſt als alle zuſammmengenommen, abziehn kann.*

Zuſatz. Auf dieſelbe Art bildet *man ein rechtwinkliges Dreyeck, wenn die Hypotenuſe M und eine der Katheten N gegeben ſind*; welches ſich auch folgendermaaſsen bewerkſtelligen läſst: beſchreibe über die Hypotenuſe M einen Halbkreis, und um ihren Endpunkt, mit der gegebnen Kathete N einen Kreisbogen. Wo dieſer den Halbkreis durchſchneidet, da iſt die Spitze des geſuchten rechtwinkligen Dreyecks. Denn der Halbkreis iſt der Ort der Spitze *, und der angegebne Punkt der, welcher durch die gegebne Gröſse der Kathete beſtimmt wird. *II. 26. f. 2.

So kann man folglich *rechtwinklige Dreyecke beſchreiben, wovon die eine Kathete die Hälfte, oder das Drittel, oder das Viertel der Hypotenuſe iſt* etc.

Anmerkung. Da sich jedes Vieleck in ein Quadrat ver-
*Afg.14. wandeln läſst *, so findet man mittelst des Verfahrens in dieser und der vorigen Aufgabe ohne Schwierigkeit *ein Quadrat, welches die Summe oder dem Unterschiede gegebner gradeliniger Figuren gleich ist;* Constructionen, auf die wir uns im letzten Theil des dritten Buchs mehreremal bezogen haben.

AUFGABE 17.

Fig. 88. *Ein Quadrat zu beschreiben, zu welchem ein gegebnes Quadrat M^2, in dem Verhältnisse zweyer gegebnen Linien P, Q steht.*

Nimmt zwischen den gegebnen Linien P, Q die mittlere Proportionallinie V, so verhält sich $P : Q =$
*13.B.2. $P^2 : V^2$ *. Folglich stehn die Quadrate über P und V in demselben Verhältniſs als das gegebne und das gesuchte Quadrat, weshalb auch ihre Seiten proportional
*4. f.3. sind *. Mithin ist die Seite des gesuchten Quadrats die vierte Proportionallinie zu P,V und AB.

Diese beyden Operationen lassen sich indeſs ineinander ziehn, und auf solche geschickte Zusammenziehungen beruht die Eleganz geometrischer Auflösungen, wozu häufig, wie auch hier, geometrische Theoreme den Weg zeigen.

Trage z. B. auf eine beliebige Linie AD = P und AB = Q auf, beschreibe über AB einen Halbkreis, errichte in D ein Perpendickel, welches den Kreisbogen in F durchschneide, und ziehe AF, so verhält sich
*12.f.28 $AF^2 : AB^2 = AD : AB$ *. Trägt man daher auf AF von A aus, die Seite M des gegebnen Quadrats auf, AG = M, zieht FB, und damit parallel GH; so ist GH die Seite des gesuchten Quadrats. Denn wegen des

Parallelismus dieser Linien verhält sich AF : AB = AG : AH, d. h. = M : AH, mithin auch $M^2 : AH^2 = AF^2 : AB^2 =$ * P : Q. *4. f. 3.

Noch andre Constructionen lassen sich aus Lehrs 12. Folg. 2. δ, ε; und Lehrsatz 22, Zusatz 1 β, γ; und nicht minder elegante von ganz andrer Art, aus Lehrsatz 25 Folg. 3, Lehrsatz 20. Zusatz 5, und aus dem schönen Ort am Kreise in Lehrsatz 20. Zusatz 7 herleiten, welches ich dem Leser, dem dieses Vergnügen machen wird, selbst überlasse.

AUFGABE 18.

Eine gegebne grade Linie AB so zu verlängern, dass das Rechteck aus der verlängerten Linie AF, und der Verlängerung BF, dem Rechteck aus zwey gegebnen Linien P und Q gleich, oder $AF \times BF = P \times Q$ sey. Fig. 90.

Nimm zwischen P und Q die mittlere Proportionallinie M, so soll $AF \times BF = M^2$ seyn. Beschreibt man folglich über AB einen Halbkreis, so kömmt es darauf an, eine berührende Linie so zu ziehn, dass die verlängerte AB ein Stück von ihr, gleich M, abschneidet. Zu dem Ende ziehe durch B eine Tangente, mache BD = M, und schneide vom Mittelpunkte C aus, auf der verlängerten AB, CF = CD ab, so ist BF die gesuchte Verlängerung.

Denn zieht man CD, welche Linien den Kreis in E durchschneide, und EF, so decken sich die beyden Dreyecke CBD, CEF, daher EF auf dem Halbmesser CE in seinem Endpunkte senkrecht steht, also den Kreis berührt *, und überdem gleich BD, d. i. gleich M, folglich $M^2 = AF \times BF$* ist. * II. 12. * 22. 2.

Fig. 83. Zusatz. *Soll die gegebne grade Linie AB selbst so eingetheilt werden, daſs das Rechteck aus ihren beyden Stücken AD × BD dem gegebnen Rechteck P × Q gleich sey,* so beschreibe man wiederum über AB einen Halbkreis, ziehe mit AB eine Paralellinie, in einer Entfernung, gleich der mittlern Proportionallinie M, und fälle vom Durchschnittspunkt derselben mit der Kreislinie, ein Perpendikel auf dem Durchmesser, so theilt dieser die
* 22. 1. Linie AB * auf die verlangte Art ein; wobey aber erfordert wird, daſs M nicht gröſser als $\frac{1}{2}$ AB sey.

Anmerkung. Beyde Aufgaben werden auf diese Art durch eine leichtere Construction als in Aufg. 9, wo wir sie schon einmal, nur unter einer andern Form gehabt haben, aufgelöst.

AUFGABE 19.

Eine gegebne grade Linie BH, so in zwey Theile BF, FH einzutheilen, daſs das Quadrat des einen Theils, gleich sey dem Rechteck aus dem andern Theile und einer gegeben Linie P, oder $BF^2 = P \times FH$.

Nimm auf die Verlängerung von HB, BA gleich P, so soll $BF^2 = AB \times FH$, und folglich, wenn man beyderseits $AB \times BF$ hinzufügt, $AF \times FB = AB \times BH$ seyn. Nun aber sind AB, BH gegeben; folglich tritt hier der Fall der vorigen Aufgabe ein.

Beschreibe also über AH einen Halbkreis, so ist das Perpendikel BD die mittlere Proportionallinie zwi-
*Afg. 13. schen AB, BH *, und beschreibt man um AB einen Halbkreis, welcher CD in E durchschneidet, und errichtet

richtet in E das Perpendikel EF auf diese Linie, so wird $EF^2 = AF \times FB$, und mithin ist F der gesuchte Punkt, der BH auf die verlangte Art eintheilt.

Anmerkung. Im Fall die gegebne Linie P, gleich der einzutheilenden BH ist, wird $BF^2 = BH \times FH$, oder das Quadrat des einen Theils ist dann gleich dem Rechteck aus dem andern Theil und der ganzen Linie; oder die beyden Theile und die ganze Linie bilden eine stetige Proportion. Von dieser *Eintheilung einer Linie nach stetigem Verhältniſs*, werden wir im folgenden Buche einige interessante Eigenschaften und Anwendungen kennen lernen.

AUFGABE 20.

Eine grade Linie AB, in welcher ein Punkt E gegeben ist, aufs neue so in einem Punkte D einzutheilen, daſs $AD^2 = ED \times DB$ sey. Fig. 91.

Vermöge dieser Fordrung muſs der Punkt D so liegen, daſs, wenn durch B und F ein Kreis beschrieben wird, die Tangente aus D nach der Kreislinie gezogen, gleich AD ist *. * 12. 2.

Man halbire daher EB im Punkte G, errichte in G ein Perpendikel, nehme GK gleich GA, und beschreibe um CKB einen Kreis *. Vom Punkte H, wo AK diese Kreislinie durchschneidet, fälle man auf AB ein Perpendikel HD, so theilt dieses die Linie AB auf die verlangte Art ein. * II. Afg. 12

Denn weil AEK vermöge der Construction ein rechtwinkliges, gleichschenkliches Dreyeck ist, sind die Winkel A, K der Hälfte eines rechten Winkels gleich *. Eben so groſs sind mithin in den rechtwink- * I. 31. f. 2.

ligen Dreyecken ADH, KIH die Winkel bey H, folglich diese Dreyecke beyde gleichschenklig, AD = DH, und HI = IG, weshalb das Perpendikel HI im Mittelpunkte auf FG aufstehn, und ein Halbmesser
* II. 12. seyn muss. Daher ist HD eine Tangente *; folglich $DH^2 = AD^2 = DC \times DB$, folglich AB auf die verlangte Art eingetheilt. (Greg. I. 73.)

Diese und die beyden vorigen, so wie *alle* ähnlichen Aufgaben, lassen sich nach Anleitung des Zusatzes zu Aufgabe 9 noch auf ganz verschiedene Art ausdrücken, welche ich dem Leser überlasse.

AUFGABE 21.

Fig. 92. *Von einem gegebnen Punkte A ausserhalb eines Kreises eine grade Linie so zu ziehn, dass sie von der Kreislinie, zweyen gegebnen Linien P, Q proportional eingetheilt werde.*

Gesetzt es sey AEF die gesuchte Linie, so soll sich verhalten P : Q = AE : EF, folglich auch P : P + Q = AE : AF. Zieht man nun von A die Tangente
*II Afg 14. AG *, so ist AS die mittlere Proportionallinie zwischen
*22. f. 1δ AE und AE *. Man suche daher zwischen P und P + Q
*Afg. 12. die mittlere Proportionallinie M *, so muss sich verhalten P : M = AE : AG. Nun sind P, M und AG gegeben. Man suche daher zu M, P und AG die vierte Proportionallinie, und beschreibe mit ihr um A einen Kreisbogen. Wo dieser den gegebnen Kreis durchschneidet, da ist der Punkt E, durch den AE gezogen, die verlangte Linie giebt.

Denn verhält sich $AG : AE = M : P$, so ist auch $AG^2 : AE^2 = M^2 : P^2$. Und da AG und M mittlere Proportionallinien, erstere zwischen AF, AE, letztere zwischen $P + Q$ und P sind; sich mithin verhält $AF : AE = AG^2 : AE^2$, und $P + Q : P = M^2 : P^2$; so verhält sich auch $AF : AE = P + Q : P$ und $FE : AE = Q : P$.

Bestimmung. Geht ABD durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist AB die kleinste, AD die gröſste von allen Linien, die von A aus nach dem Kreise gezogen werden können *, und daher hat von allen ähnlichen Verhältnissen, das der Abschnitte $AB : BD$ den gröſsten Exponenten *. Folglich darf $\frac{Q}{P}$ nicht gröſser als $\frac{BD}{AB}$ seyn, sonst ist die Aufgabe unmöglich. (Greg. III. 46.)

* II. 15.

* V. 1. 2.

AUFGABE 22.

Das Verhältniſs zwischen der Seite AB und der Diagonale AC eines Quadrats zu finden. Fig. 93.

Beschreibe um C mit der Seite BC als Halbmesser einen Kreis, so berührt die Seite AB diese Kreislinie, denn sie steht auf dem Endpunkte des Halbmessers CB senkrecht *. Daher verhält sich $AD : AB = AB : AE$, und AD ist derselbe Theil von AB, als AB von AE, oder $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$ *. Nun aber ist AE gleich $2\,CD + AD$, folglich auch $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{2\,AB + AD} = \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}$ *. In dem

* II. 12.

* V. 1. 2.

* Afg 19. Z. 2.

letzten Ausdrück läſst ſich für $\frac{AD}{AB}$ dieſer Ausdruck ſelbſt wieder ſetzen, da denn $\frac{AD}{AB} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}}$ wird, und da ſich der Stuffenbruch, der ſo entſteht, immer wieder mit dem Bruch $\frac{AD}{AB}$ endigt, ſo kann man mit dieſer Subſtitution ohne Ende fortfahren, daher der Exponent $\frac{AD}{AB}$ durch einen Stufenbruch von der Form $\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$, der ohne Ende fortläuft, gegeben wird. Es läſst ſich alſo AD nicht in Theilen von AB ausdrücken, *Afg.19 und beyde Linien ſind incommenſurabel *. Mithin auch die Diagonale und die Seite des Quadrats, da die Diagonale AC gleich AB + AD iſt, und alſo, wenn man die Seite AB als Einheit annimmt, der Zahlausdruck der Diagonale AC, $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}$ wird; ein Ausdruck, deſſen Werth ſich nie genau in Zahlen darſtellen läſst, weil er ohne Ende fortgeht, und dem man ſich nur nähern kann, ohne ihn je völlig zu erreichen.

Anmerkung. Auf diesem Wege wird die Incommensurabilität zwischen der Diagonale und der Seite eines jeden Quadrats, die wir übrigens schon oben dargethan haben *, noch evidenter. Zugleich ist dieses ein unterrichtendes Beyspiel der leichtesten Methode, wie sich die Incommensurabilität von Ausdehnungen, in geometrischen Untersuchungen erweisen lässt.

* 12. Z.

Erklärungen der Marginalien.

Die *römischen Zahlen* bezeichnen das Buch, die *arabischen*, die dahinter stehn, den gemeinten Satz in diesem Buche, und *arabische Zieffern vor denen keine römische stehn*, einen Satz in demselben Buche, worin das Citat vorkömmt, z. B.

II. 9. den 9ten Lehrsatz des zweyten Buchs;

18. den 18ten Lehrsatz des gegenwärtigen Buchs, also des zweyten Buchs, wenn das Citat im zweyten Buche steht.

E bedeutet eine *Erklärung*, und diese stehn zu Anfang jedes Buchs, z. B., I. E. 16., die 16te Erklärung an der Spitze des ersten Buchs;

Z. einen *Zusatz*, z. B., I. 16. Z. 2;

f. eine *Folgerung*, z. B., III. 22. f. 1. ε., den Satz ε in der ersten Folgerung zum 22sten Lehrsatz des dritten Buchs;

a. oder A eine *Anmerkung*, z. B., III. 4. a. 1;

B. eine *Bemerkung*;

Afg. oder A. eine *Aufgabe*, die insgesammt am Ende des zweyten und dritten Buchs stehn.

V. bedeutet endlich die aritmetischen Lehrsätze über Verhältnisse und Proportionen, die in der 23sten Erklärung des ersten Buchs stehn.

Sind einige Citate nicht ganz genau, so wird der aufmerksame Leser sie leicht berichtigen.

Einige Druckfehler.

So viel Sorgfalt man auch angewandt hat, um alle Sinnstöhrenden Druckfehler zu vermeiden, so muſs man doch den Leser bitten, folgende vor dem Gebrauch des Werks zu verbessern:

Seite 23. Zeile 4. von unten steht $\frac{b}{a}$ statt $\frac{b}{a}$

S. 64. Z. 2. v. u. keiner der Winel st. *einer der Winkel.*

S. 65, Z. 5. eine st. *ein* Perpendikel

S. 77. fehlt Zusatz III. „Eine grade Linie, welche eine von zwey Parallellinien, (mit denen sie in derselben Ebne liegt) durchschneidet, muſs auch die andre schneiden," weil sonst durch einen Punkt, mit einer graden Linie, zwey verschiedene grade Parallellinien möglich wären.

S. 277. fehlt im Marginal *Tafl. IV.*

S. 279. Z. 7. st. OP2 st. *Op2.*

S. 295. st. das Marginal 17. st. 16.

S. 307. das Marginal Afg. 6. st. *Afg. 3. a. 2.*

S. 317. in der dritten Formel unter γ steht $\frac{BG}{GE}$ st. $\frac{BC}{GE}$

S. 359. im Marginal Taf. IV. st. *Taf. V.*, und

S. 360. Taf. III. st. *Taf. V.*

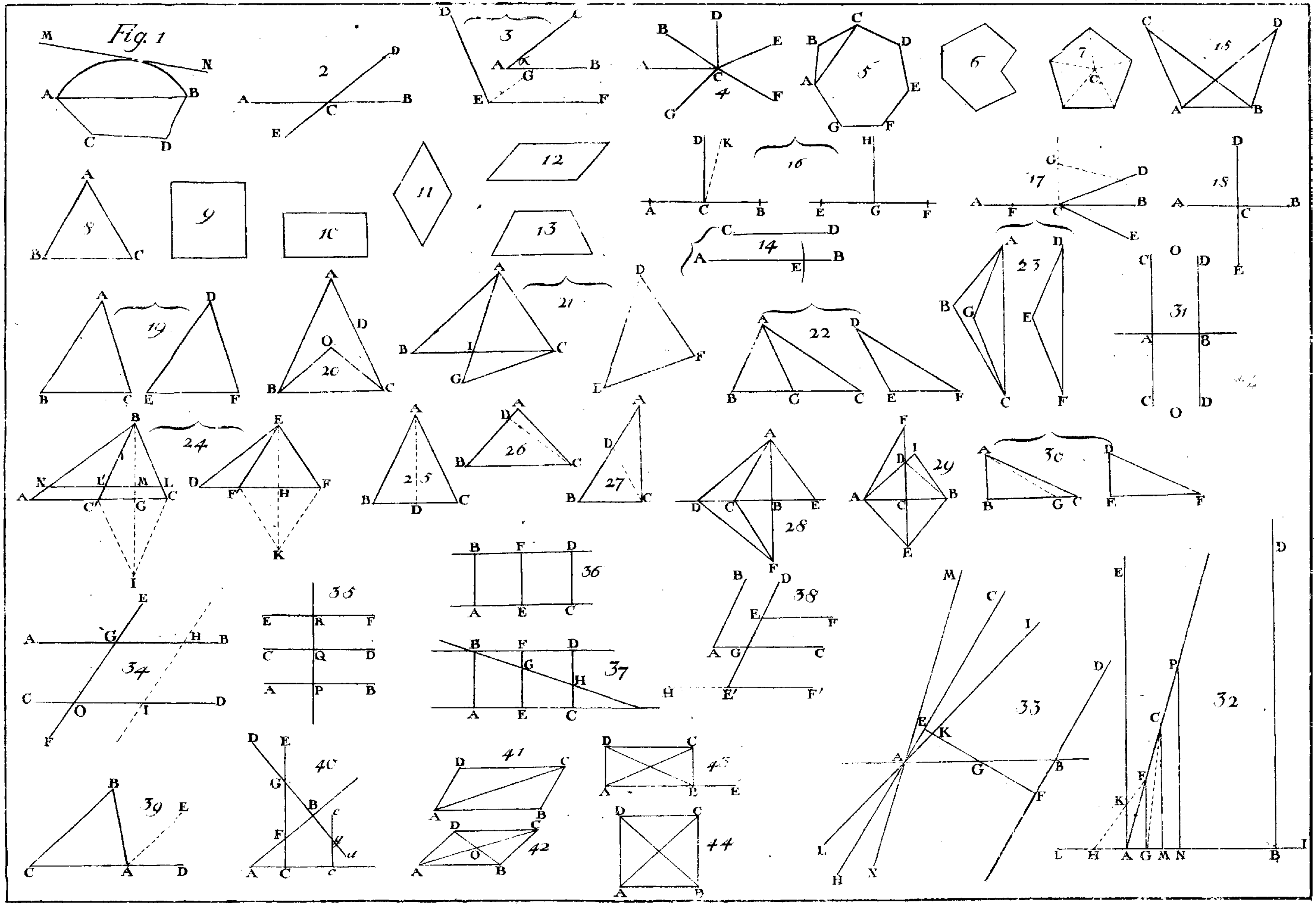
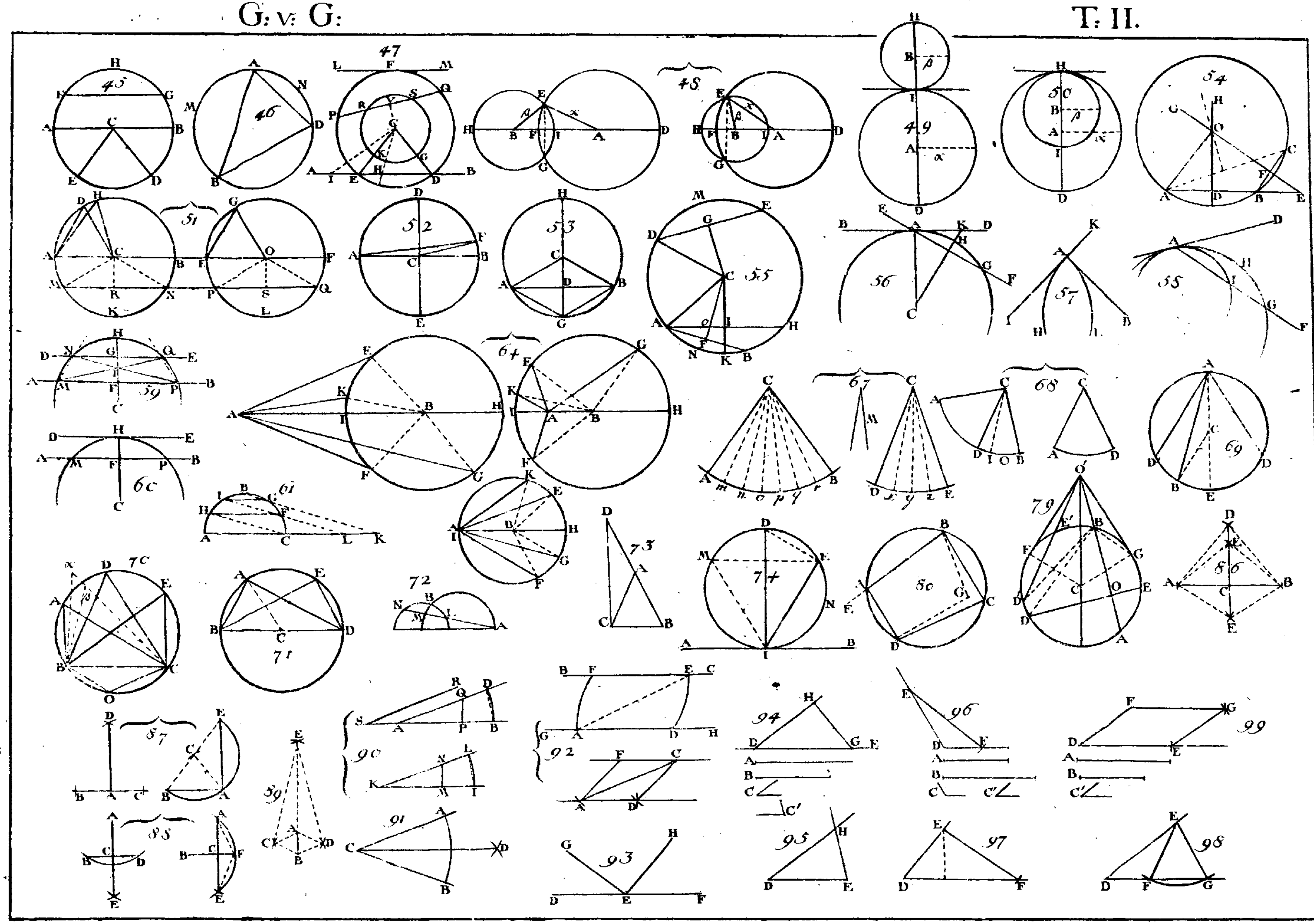
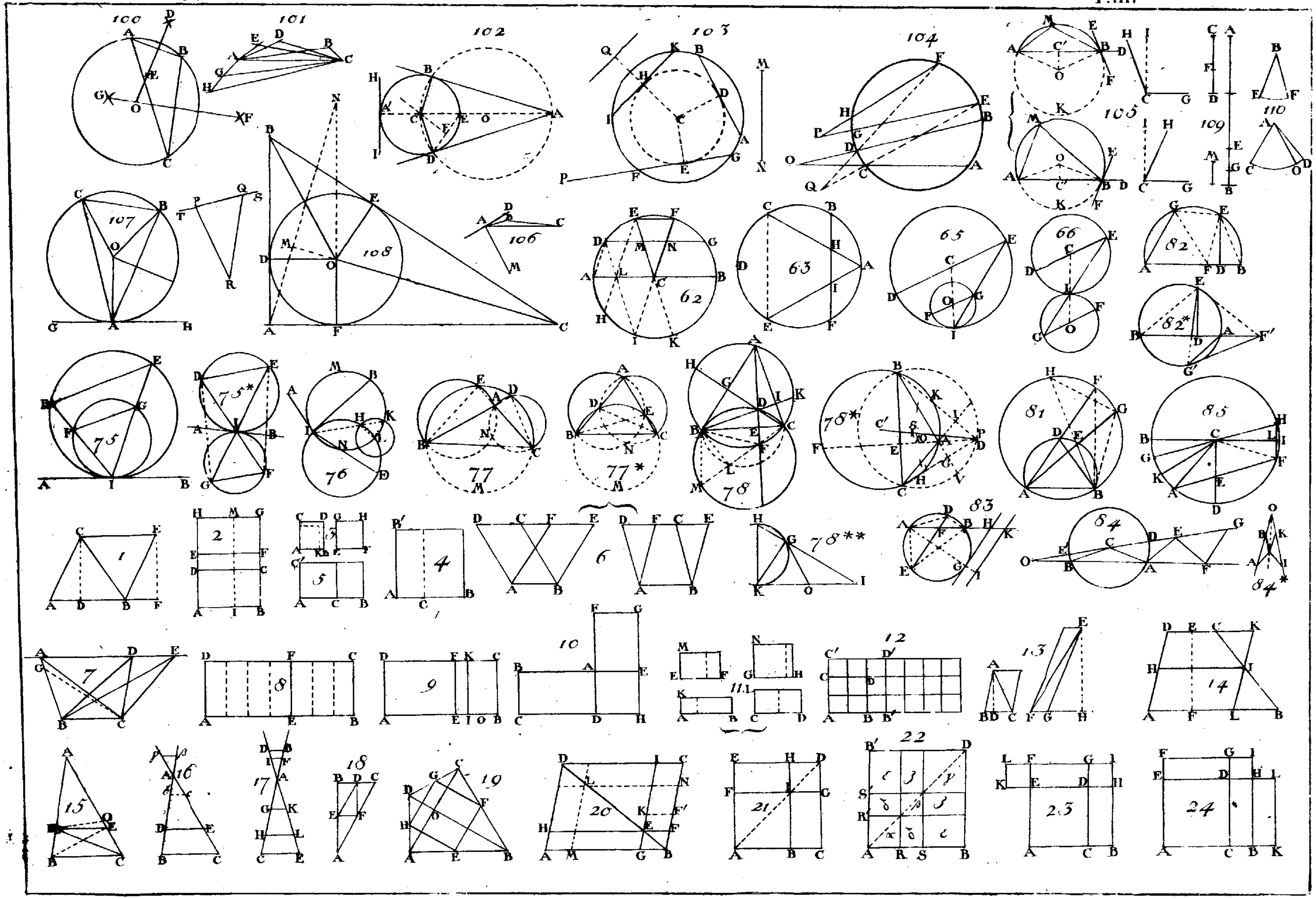
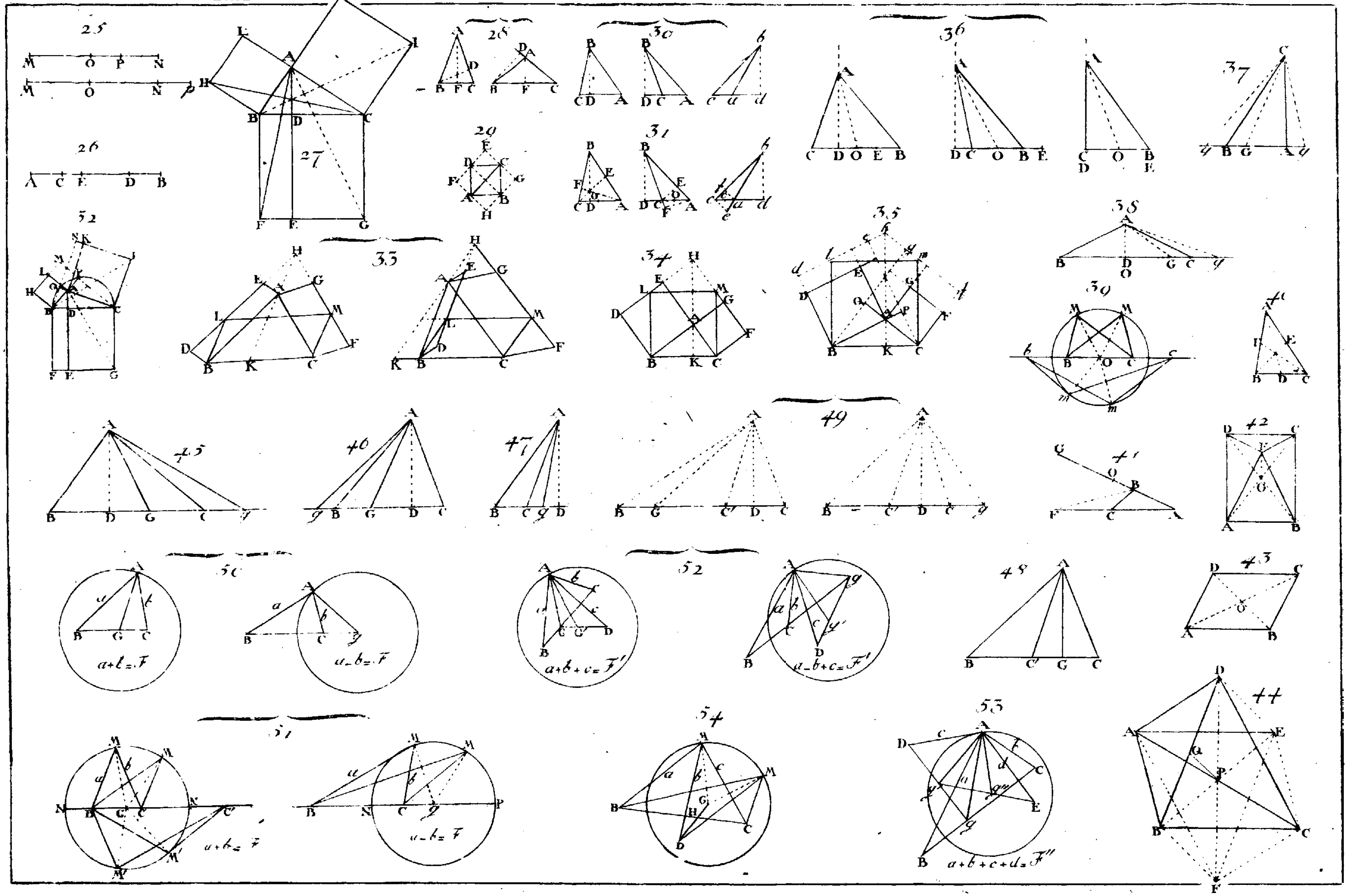


Fig. 1




100
101
102
103
104
105
109
110
107
108
106
62
63
65
66
82
82*
75
75*
76
77
77*
78
78*
81
85
1
2
3
4
5
6
78**
83
84
84*
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24


a+b=F
a-b=F
a+b+c=F'
a-b+c=F'
a+b+c+d=F''