Leonhard Euler's
Vollständige Anleitung
zur
Differenzial-Rechnung.

Aus dem Lateinischen übersetzt

und

mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet

von

Johann Andreas Christian Michelsen,

Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium und Mitglied der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften.

Dritter Theil.

Berlin,
bey Lagarde 1793.

Leonhard Eulers
Vollständige Anleitung
zur
Integralrechnung.

Aus dem Lateinischen übersetzt

und

mit Anmerkungen und [illegible] begleitet

von

J[illegible] Michelsen

Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen
und Cöllnischen Gy[illegible]lied der Königl. Akad.
der W[illegible]schaften.

Dritter Theil.

Berlin,

bey Lagarde 1793.

Vorrede.

Eine anhaltende Unpäßlichkeit ist die Ursache gewesen, daß dieser dritte Theil der Eulerischen Differenzialrechnung, welcher die letzten neun Capitel des zweyten Theils des Originals enthält, später erscheint, als er, meinem Versprechen gemäß, erscheinen sollte. Die noch rückständigen Anmerkungen und Zusätze mit demselben zugleich den Liebhabern der Eulerischen Schriften zu übergeben, würde erwähntes Hinderniß mich nicht abgehalten haben, wenn nicht die für meine Absichten und Wünsche so äusserst vortheilhafte Lage, in welche ich durch des Herrn Curators der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, des Herrn Ministers und Grafen von Herzberg Excellenz, versetzt worden bin, mich in den Stand gesetzt hätte, nach einiger Zeit etwas vollständigeres und nutzbareres zu liefern. Wenn Männer, von denen es ungewiß ist, ob die Staaten oder die Wissenschaften Ihnen mehr verdanken, und deren Nennen, um den Schein der Schmeicheley zu vermeiden, die Zeitgenossen der Nachwelt überlassen, Arbeiten Ihres Beyfalls und Ihrer Belohnung nicht unwerth achten, deren Unternehmer sich keines andern Verdienstes, als des, eines redlichen Strebens, bewußt sind: so wird verdoppelter Eifer unerläßliche, heilige Pflicht. So weit es das geringe Maaß meiner Kräfte nicht hindern wird, werde ich mich bemühen, so bald als möglich durch eine besondere Schrift: **Ueber die Differenzial- und Integral-Rechnung überhaupt, und die Anwendung derselben auf die Geometrie insbesondere**, öffentlich zu zeigen, daß ich die mir ertheilte Ehrenvolle Belohnung stets als den stärksten Bewegungsgrund zu vergrößerter Thätigkeit betrachten werde. Berlin, am 24sten Februar 1793.

Inhalt

des

dritten Theils.

Inhalt des dritten Theils.

Sechszehntes Capitel.

Siebenzehntes Capitel.

Achtzehntes Capitel.

Voll-

Vollständige Anleitung
zur
Differenzial-Rechnung.

Dritter Theil,

oder

des zweyten Theils des Originals

welcher

den Gebrauch der Differenzial-Rechnung in der Analysis des Endlichen, so wie auch in der Lehre von den Reihen enthält

zweyte Abtheilung.

Zehntes Capitel.

Von den größten und kleinsten Werthen der veränderlichen Größen.

§. 250.

Wenn eine Funktion von x so beschaffen ist, daß sie ununterbrochen mit x wächst und abnimmt, so hat diese Funktion keinen größten oder kleinsten Werth. Denn man mag einen Werth dieser Funktion nehmen was für einen man will, so sind die folgenden allemal größer, und die vorhergehenden kleiner. Eine solche Funktion ist z. B. $x^3 + x$; weil der Werth davon allemal, wenn x wächst, größer, und wenn x abnimmt, kleiner wird: weswegen auch diese Funktion nicht anders einen größten Werth bekommen kann, als wenn x der größte, d. h. ein unendlicher Werth beygelegt wird, und kein Kleinstes giebt, außer wenn man $x = -\infty$ setzt. Ist hingegen eine Funktion von der Art, daß sie nicht stets mit x wächst und abnimmt, so muß sie irgendwo einen größten oder kleinsten Werth haben, d. h. einen solchen, der größer oder kleiner ist, als die vorhergehenden. So bekommt die Funktion $xx - 2x + 3$ den kleinsten Werth,

wenn

wenn man $x = 1$ setzt, denn bey jedem andern Werthe von x wird ihr Werth größer.

§. 251.

Um aber die Natur der größten und kleinsten Werthe deutlicher kennen zu lernen, wollen wir annehmen, daß y eine solche Funktion von x sey, daß sie einen größten Werth bekomme, wenn man $x = f$ setzt; wo also in die Augen fällt, daß wenn x größer oder kleiner als f angenommen wird, der daraus entspringende Werth von y kleiner seyn werde, als der, den $x = f$ giebt. Auf eine ähnliche Art muß, wenn die Funktion y einen kleinsten Werth bekommt, wenn man $x = f$ setzt, der Werth von y stets größer wer= wenn man x kleiner oder größer als f annimmt; und dies ist der Begriff, welchen man mit den absoluten größten und kleinsten Werthen zu verbinden hat. Außerdem aber sagt man auch, daß die Funktion y einen größten Werth bekomme, wenn man z. B. $x = f$ setzt, wenn nur dieser Werth größer ist, als die zunächst folgenden oder vorhergehenden, die sich ergeben, wenn man x um etwas geringes größer oder kleiner als f werden läßt; wenn auch gleich die Funktion y bey andern Werthen von x vielleicht einen größern Werth erhält. Eben so legt man der Funktion y bey $x = f$ einen kleinsten Werth bey, wenn derselbe nur kleiner ist, als diejenigen, welche man findet, wenn man für x zunächst größere oder kleinere Werthe als f setzt. In dieser letztern Bedeutung werden wir nun die Benennungen, größter und kleinster Werth, gebrauchen.

§. 252.

Ehe wir aber die Art und Weise erklären, diese größten und kleinsten Werthe zu finden, müssen wir bemerken,

daß

diese Untersuchung eigentlich nur bey den Funktionen von x statt finde, welche wir oben (Einl. in d. Anal. d. Unend. 1. B. 1. Cap.) einförmige Funktionen genennt haben, und welche von der Art sind, daß sie für jeden bestimmten Werth für x nicht mehr als Einen bestimmten Werth bekommen. Zweyförmige und vielförmige Funktionen hingegen haben wir durch solche erklärt, die für jeden bestimmten Werth für x zwey oder mehrere Werthe erhalten, dergleichen die Wurzeln der quadratischen und übrigen höhern Gleichungen sind. Ist daher y eine solche zwey- oder vielförmige Funktion, so läßt sich nicht eigentlich sagen, daß sie, wenn man $x = f$ setzt, einen größten oder kleinsten Werth bekomme. Denn da sie, wenn man $x = f$ setzt, zwey oder mehrere Werthe zugleich erhält, und die vorhergehenden und nachfolgenden Werthe ebenfalls mehrfach sind: so läßt sich der größte oder kleinste Werth nicht so leicht beurtheilen, es müßte denn seyn, daß von allen diesen Werthen nicht mehr als einer reell wäre, in welchem Falle die Funktion als eine einförmige betrachtet werden kann. Wir wollen also zuvörderst die einförmigen Funktionen und diejenigen vielförmigen betrachten, die als einförmige behandelt werden können, und dann zeigen, wie sich das Gefundene auf die übrigen vielförmigen Funktionen anwenden lasse.

§. 253.

Es sey also y eine einförmige Funktion von x, die daher für jeden Werth von x einen reellen Werth bekommen wird; und dabey bedeute x den Werth, wobey die Funktion y einen größten oder kleinsten Werth erhält. Im ersten Falle muß, wenn man $x + \alpha$ oder $x - \alpha$ für x setzt, der Werth von y kleiner, und im letzten Falle größer werden, als wenn $\alpha = 0$ ist. Da also y, wenn man $x + \alpha$ für x setzt, in

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4y}{24dx^4} + \text{etc.}$$

und wenn man $x - \alpha$ für x setzt, in

$$y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

übergeht, (Cap. 3. §. 48. 51.) so muß, wenn der Werth von y ein größter ist,

$$y > y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{etc.}$$

$$y > y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{etc.}$$

und wenn der Werth von y ein kleinster ist,

$$y < y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{etc.}$$

$$y < y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{etc.}$$

seyn.

§. 254.

Da dieses statt finden muß, der Werth von α sey so klein als er wolle, so wollen wir α so klein annehmen, daß die höhern Potestäten davon aus der Acht gelassen werden können, und dann muß, sowohl wenn der Werth von y ein größter als wenn er ein kleinster seyn soll, $\frac{\alpha dx}{dy} = 0$ seyn. Denn wofern nicht $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$ wäre, so könnte auch der Werth von y weder ein größter noch ein kleinster seyn. Hieraus ergiebt sich für die Erfindung sowohl der größten als der kleinsten Werthe die Regel: Man setze das Differenferenzial der Funktion $y = 0$, dann ist der Werth von x, wobey die Funktion ein Größtes oder ein Kleinstes wird, die Wurzel dieser Gleichung. Hierdurch wird indeß noch nicht entschieden, ob der gefundene Werth von y ein größter oder ob er ein kleinster sey, ja es kann sich ereignen, daß y weder ein Größtes noch ein Kleinstes wird. Wir haben nemlich bloß gefunden, daß in beyden Fällen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, aber nicht behauptet, daß allemal, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, ein größter oder ein kleinster Werth für y entstehe.

§. 255.

Um indeß die Fälle, wo y einen größten oder einen kleinsten Werth hat, zu untersuchen, muß man zuvörderst das Differenzial der gegebenen Funktion $= 0$ setzen, und aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ alle Werthe von x aufsuchen. Hat man diese gefunden, so muß man ferner erwägen, ob y dabey ein Größtes oder ein Kleinstes oder keins von beyden werde? denn wir werden zeigen, daß y auch weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn kann, wenn gleich $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Es sey f einer von den Werthen von x, die sich aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ ergeben; und dabey werde, wenn man diesen Werth in die Ausdrücke $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; rc. setzt, $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$; rc. Geht nun die Funktion y, wenn man f für x setzt, in F über, so wird sie, wenn man $f + \alpha$ für x setzt, in

$$F + \tfrac{1}{2}\alpha^2 p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r + \text{rc.}$$

und wenn man $f - \alpha$ für x setzt, in

$$F + \tfrac{1}{2}\alpha^2 p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r - \text{rc.}$$

verwandelt; und hieraus erhellet, wenigstens wenn α eine sehr kleine Größe bedeutet, daß, wenn p positiv ist, beyde Werthe größer seyn werden als F, und daß folglich der Werth von F, den die Funktion y bey $x = f$ erhält, ein kleinster ist. Wenn aber p negativ ist, so ist der Werth von y bey $x = f$ ein größter.

§. 256.

Ist hingegen $p = 0$, so muß man den Werth von q betrachten; und ist derselbe nicht $= 0$, so ist der Werth von y weder ein größter noch ein kleinster. Denn setzt man $x = f + \alpha$, so wird $F + \frac{1}{6}\alpha^3 q > F$, und setzt man $x = f - \alpha$, so wird $F - \frac{1}{6}\alpha^3 q < F$. Ist aber $q = 0$, so muß man r untersuchen, und ist diese Größe positiv, so ist der Werth, den die Funktion F bey $x = f$ bekömmt, ein Kleinstes, und wenn sie negativ ist, ein Größtes. Verschwindet auch r, so muß man den folgenden Buchstaben s betrachten, und dabey auf eine ähnliche Art urtheilen als vorhin bey q. Ist nemlich s nicht $= 0$, so ist die Funktion F weder ein Kleinstes noch ein Größtes; ist aber auch $s = 0$, so zeigt der folgende Buchstabe t, wenn er positiv ist, ein Kleinstes, so wie, wenn er negativ ist, ein Größtes an. Wenn aber auch t verschwindet, so muß man, und zwar auf eben diese Art, noch weiter fortgehen. Nach dieser Methode läßt sich von einer jeden Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ finden, ob dabey die Funktion y ein Größtes oder ein Kleinstes oder keins von beyden gebe, und folglich alle größte und kleinste Werthe, welche die Funktion y haben kann, entdecken.

§. 257.

Wenn also die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zwey gleiche Wurzeln hat, so daß das Quadrat $(x - f)^2$ ein Faktor von ihr ist: so verschwindet, wenn man $x = f$ setzt, auch $\frac{ddy}{dx^2}$, und es wird $p = 0$, nicht aber q. In diesem Falle hat also die Funktion weder einen größten noch einen kleinsten Werth. Wenn aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ drey gleiche Wurzeln hat, oder $(x - f)^3$ ein Faktor von $\frac{dy}{dx}$ ist, so wird, wenn man $x = f$ setzt, $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, und $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, aber nicht $\frac{d^4y}{dx^4}$. Ist daher dieses Glied positiv, so zeigt es ein Kleinstes, ist es aber negativ, ein Größtes an. Ueberhaupt also kommt, wenn $\frac{dy}{dx}$ den Faktor $(x - f)^n$ hat, der Funktion y, bey der Substitution $x = f$, ein größter oder ein kleinster Werth zu, wenn n eine ungerade Zahl ist; wenn aber n eine gerade Zahl ist, so giebt diese Substitution weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

§. 258.

Hiernächst kann man sich die Erfindung der größten und kleinsten Werthe öfters durch folgende Betrachtungen erleichtern. Es muß in allen Fällen, wo die Funktion y ein Größtes oder ein Kleinstes wird, auch jedes Vielfache von ihr ay, wenn a eine positive Zahl ist, desgleichen y^3, y^5, y^7, ꝛc. und überhaupt y^n, wenn n eine ungerade Zahl und positiv ist, gleichfalls ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, weil diese Formeln so beschaffen sind, daß sie mit y wachsen und abnehmen. Ferner muß in allen Fällen, wo y ein Größtes oder ein Kleinstes wird, $-y$, $-ay$, $b-ay$, und überhaupt $b-ay^n$, wenn n eine ungerade positive Zahl ist, in umgekehrter Ordnung ein Kleinstes oder ein Größtes seyn. Auf eine ähnliche Art werden $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y^3}$, $\frac{a}{y^5}$, und überhaupt $\frac{a}{y^n} \pm b$, wenn a eine positive und n eine ungerade positive Zahl bedeutet und y ein Größtes oder ein Kleinstes ist, umgekehrt kleinste oder größte Werthe; wenn aber a eine negative Zahl ist, so sind diese Ausdrücke größte Werthe, wenn y ein Größtes, und kleinste Werthe, wenn y ein Kleinstes ist.

§. 259.

Auf die geraden Potestäten läßt sich aber diese Betrachtung nicht anwenden. Denn da die geraden Potestäten y^2, y^4, ꝛc. positiv werden, wenn y negativ ist: so kann es sich ereignen, daß, wenn y einen kleinsten Werth, nemlich einen negativen, erhält, die geraden Potestäten desselben größte Werthe werden. In Rücksicht hierauf können wir behaupten, daß, wenn y ein Größtes oder ein Kleinstes und sein Werth positiv ist, auch seine geraden Potestäten y^2, y^4, ꝛc. größte oder kleinste Werthe; hingegen, wenn der negative Werth von y ein Größtes ist, das Quadrat yy ein Kleinstes, und umgekehrt, wenn der negative Werth von y ein Kleinstes ist, y^2, y^4, ꝛc. größte Werthe seyn werden. Wenn die Exponenten von y gerade negative Zahlen sind,

so

so findet das Gegentheil statt. Uebrigens gilt das, was wir hier von den geraden und ungeraden Exponenten angemerkt haben, nicht bloß, wenn diese Exponenten ganze Zahlen, sondern auch wenn sie Brüche sind, deren Nenner zu ungeraden Zahlen gehören. Bey der gegenwärtigen Untersuchung kann man nemlich Brüche wie $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, ꝛc. als ungerade, und Brüche wie $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, ꝛc. als gerade Zahlen ansehen.

§. 260.

Wenn aber die Nenner gerade Zahlen sind, so läßt sich, da bey einem negativen Werthe von y die Potestäten $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{4}}$; ꝛc. imaginär sind, bloß das behaupten, daß, wenn der positive Werth von y ein Größtes oder ein Kleinstes ist, auch $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{2}}$; $y^{\frac{1}{4}}$; ꝛc. gleichfalls größte oder kleinste Werthe, hingegen $y^{-\frac{1}{2}}$; $y^{-\frac{3}{2}}$; $y^{-\frac{1}{4}}$; ꝛc. umgekehrt kleinste oder größte Werthe seyn werden. Da überdem diese Irrational-Größen einen doppelten Werth, einen positiven und einen negatiaen, haben, so gilt in Ansehung ihrer negativen Werthe das Gegentheil von dem, was wir in Ansehung ihrer positiven Werthe behauptet haben. Wird aber der negative Werth von y ein Größtes oder ein Kleinstes, so kann man die Potestäten desselben mit gebrochenen Exponenten, deren Nenner gerade Zahlen sind, weil sie imaginäre Größen werden, weder zu den größten noch zu den kleinsten Werthen rechnen. Durch diese Betrachtungen wird öfters die Untersuchung der größten und kleinsten Werthe sehr leicht, wenn dieselbe ohne sie mit vielen Schwierigkeiten verknüpft seyn würde.

§. 261.

§. 261.

Da das Bisherige eigentlich die rationalen Funktionen betrifft, indem diese allein einförmig sind, so wollen wir nun zuvörderst die ganzen Funktionen betrachten, und die größten und kleinsten Werthe, die dabey vorkommen, zu finden suchen. Da nun der allgemeine Ausdruck dieser Funktionen folgender ist:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

so fällt zuerst in die Augen, daß sie keinen größern Werth bekommen können, als wenn $x = \infty$ gesetzt wird. Setzt man $x = -\infty$, so wird der Werth der angeführten Formel $= \infty^n$, wenn n eine gerade Zahl ist, und $= -\infty^n$, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, und dies ist daher unter allen Werthen der kleinste. Es giebt aber außerdem oft andere größte und kleinste Werthe in dem Verstande, den wir §. 251. festgesetzt haben, und davon wollen wir nun einige Exempel anführen.

Erstes Exempel.

Die Werthe von x zu finden, wobey die Funktion $(x-a)^n$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $(x-a)^n = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}$, und setzt man dieses $= 0$, so wird $x = a$. Da nun $\frac{dy}{dx}$ den Faktor $(x-a)^{n-1}$ hat, so erhellet aus §. 257, daß y kein Größtes oder Kleinstes seyn kann, wofern nicht $n-1$ eine ungerade oder n eine gerade Zahl ist. Da aber, indem

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(n-1)(n-2) \ldots \ldots 1$$

wird, dieses eine positive Zahl ist, so folgt, daß der Werth,

den

den y durch die Substitution $x = a$ erhält, ein Kleinstes seyn werde, [§. 255.]. Auch fällt dieses bald in die Augen. Denn setzt man $x = a$, so wird $y = 0$, und wenn man x größer oder kleiner als a annimmt, so bekommt allemal y, weil n eine gerade Zahl ist, einen positiven Werth, der folglich größer als 0 ist. Bedeutet aber n eine ungerade Zahl, so hat die Funktion $y = (x - a)^n$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Eben dieses findet statt, wenn n eine gebrochene, gerade oder ungerade Zahl ist. Es ist nemlich $(x - a)^{\frac{\mu}{\nu}}$, wenn man $x = a$ setzt, ein Kleinstes, wofern μ eine gerade und ν eine ungerade Zahl ist, sind aber beyde Buchstaben ungerade Zahlen, so findet dabey weder ein größter noch ein kleinster Werth statt.

Zweytes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Werth der Formel $xx + 3x + 2$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $xx + 3x + 2 = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$. Macht man also $2x + 3 = 0$, so findet sich $x = -\frac{3}{2}$; und dabey erkennt man aus dem Werthe $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$, ob der Werth von y durch die Substitution $x = -\frac{3}{2}$ ein Größtes oder ein Kleinstes geben werde. Wie nemlich auch x beschaffen ist, so muß y, da $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$ positiv ist, ein Kleinstes werden. Es erhält aber y durch die Substitution $x = -\frac{3}{2}$ den Werth $-\frac{1}{4}$. Auch erkennet man aus der Beschaffenheit der Formel $xx + 3x + 2$ selbst,

daß

daß ihr ein kleinster Werth zukommen müsse; denn da ihr Werth unendlich wird, sowohl wenn man $x = +\infty$ als $= -\infty$ setzt, so muß sie durch irgend einen Werth von x ein Kleinstes werden.

Drittes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Ausdruck $x^3 - axx + bx - c$ einen größten oder kleinsten Werth bekömmt.

Setzt man $y = x^3 - axx + bx - c$, so wird $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b$; $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - a$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$. Man mache also $3xx - 2ax + b = 0$, so wird $x = \frac{a \pm \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$, und hieraus erhellet, daß die gegebene Formel, wofern nicht $aa > 3b$ ist, weder einen kleinsten noch einen größten Werth haben wird. Wenn aber $aa > 3b$ ist, so wird sie in zwey Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes. Es folgt nemlich hieraus $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm\sqrt{(aa - 3b)}$, und daraus sieht man, daß, wofern nicht $aa = 3b$ ist, der Werth $x = \frac{a + \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ die Formel $y = x^3 - axx + bx - c$ einen kleinsten, der andere Werth $x = \frac{a - \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ aber einen größten Werth ertheilen werde. Was aber die Größe dieser Werthe von y betrifft, so ist, da

$$3xx - 2ax + b = 0, \text{ oder } x^3 - \tfrac{2}{3}axx + \tfrac{1}{3}bx = 0,$$

$$y = -\tfrac{1}{3}ax + \tfrac{2}{3}bx - c;$$

und da $\frac{1}{3}axx - \frac{2aa}{9}x + \frac{ab}{9} = 0$ ist, ferner

$y =$

$$y = \frac{2}{9}(3b - aa)x + \frac{ab}{9} - c = - \frac{2a(aa - 3b)}{27}$$
$$\mp \frac{2(aa - 3b)\sqrt{(aa - 3b)}}{27} + \frac{ab}{9} - c = - \frac{2a^3}{27}$$
$$+ \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

wo das das obere Zeichen für den kleinsten und das untere für den größten Werth gilt. Es ist also noch der Fall übrig, wenn $aa = 3b$ ist. Da dabey $\frac{ddy}{2dx^2} = 0$, das folgende Glied aber $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$ nicht $= 0$ ist, so hat die gegebene Formel in diesem Falle weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

Viertes Exempel.

Die Fälle zu finden, wo folgende Funktion von x:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

einen größten oder einen kleinsten Werth bekömmt.

Setzt man $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24,$$
$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22.$$

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$, oder $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, so bekömmt man drey reelle Werthe für x;

I. $x = 1$; II. $x = 2$; III. $x = 3$.

Bey dem ersten Werthe wird $\frac{ddy}{2dx^2} = 4$, und also y bey

$x = 1$

$x = 1$ ein Kleinstes. Bey dem zweyten Werthe wird $\frac{ddy}{2dx^2} = -2$, und folglich y bey $x = 2$ ein Größtes. Bey dem dritten Werthe wird $\frac{ddy}{2dx^2} = +4$, und folglich die gegebene Funktion abermals ein Kleinstes.

Fünftes Exempel.

Es ist die Funktion $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ gegeben; man soll bestimmen, in welchen Fällen sie ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$ ist, so formire man die Gleichung: $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$, deren Wurzeln sind: I und II. $x = 0$; III. $x = 1$; IV. $x = 3$. Da die beyden ersten Wurzeln gleich sind, so geben dieselben weder ein Größtes noch ein Kleinstes, denn es wird $\frac{ddy}{2dx^2} = 0$ aber $\frac{d^3y}{6dx^3}$ verschwindet nicht. Die dritte Wurzel $x = 1$ aber giebt, da $\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 30x^2 + 15x$ ist, $\frac{ddy}{2dx^2} = -5$, und in diesem Falle hat also die Funktion einen größten Werth. Aus der vierten Wurzel fließt $\frac{ddy}{2dx^3} = 15$, und dabey ist also die gegebene Funktion ein Kleinstes.

Sechstes Exempel.

Die Fälle zu finden, wo die Formel:

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{60dx^2} = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Setzt man nun $x^5 - x^4 + x^3 - xx = 0$, so hat diese Gleichung, da sie mit $x^2(x-1)(xx+1) = 0$ einerley ist, zwey gleiche Wurzeln $x = 0$, und außerdem die Wurzel $x = 1$, und zwey aus der Gleichung $xx + 1 = 0$ entspringende imaginäre Wurzeln. Da also die beyden gleichen Wurzeln $x = 0$, weder ein Größtes noch ein Kleinstes geben, so bleibt bloß die dritte Wurzel, $x = 1$, zu betrachten übrig, und da dieselbe $\frac{ddy}{60dx^2} = 2$ giebt, so zeigt dieser positive Werth ein Kleinstes an.

§. 262.

Es hängt also die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe von den Wurzeln der Differenzial-Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ ab, und da die höchste Potestät von x in dieser Gleichung einen Grad niedriger ist, als in der gegebenen Funktion y, vorausgesetzt, daß y eine ganze rationale Funktion bedeute: so ist offenbar, daß überhaupt die größten und kleinsten Werthe der Funktion

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = y$$

durch die Wurzeln folgender Gleichung bestimmt werden:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß die reellen Wurzeln dieser Gleichung, nach ihrer Größe geordnet, α, β, γ, δ, ꝛc. und also α die größte Wurzel, β kleiner als α, γ kleiner als β, ꝛc. sey. Sind nun zuvörderst alle diese Wurzeln unter einander ungleich, so erhält die gegebene Funktion bey einer jeden einen größten oder kleinsten Werth, und es hat demnach die Funktion y so viel größte oder kleinste Werthe, als die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ reelle ungleiche Wurzeln hat. Wenn aber zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich sind, so geben zwey gleiche Wurzeln weder ein Größtes noch ein Kleinstes; drey gleiche Wurzeln gelten hier so viel als eine; und überhaupt entsteht aus jeder geraden Anzahl gleicher Wurzeln weder ein Größtes noch ein Kleinstes, und aus jeder ungeraden Anzahl gleicher Wurzeln Ein Größtes oder Ein Kleinstes.

§. 263.

Was für Wurzeln größte und was für welche kleinste Werthe geben, läßt sich ohne Hülfe der vorher gegebenen Regel auf folgende Art bestimmen. Da die Funktion y, wenn man $x = \infty$ setzt, ebenfalls unendlich wird, und die Werthe von x, die zwischen ∞ und α fallen, weder ein Größtes noch ein Kleinstes geben: so ist klar, daß die Werthe, welche man für die Funktion y findet, wenn man für x nach und nach die vom ∞ bis zu α liegenden Werthe setzt, ununterbrochen abnehmen müssen; und es wird daher der Werth $x = \alpha + \omega$ der Funktion y einen größern Werth ertheilen, als $x = \alpha$. Da also $x = \alpha$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes hervorbringt, so muß in

diesem

diesem Falle die Funktion y nothwendig ein Kleinstes werden. Fährt man daher fort x zu verändern, oder setzt man $x = \alpha - \omega$, so wird der Werth von y wieder wachsen, bis $x = \beta$ wird, und dies ist die zweyte Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, die entweder ein Größtes oder ein Kleinstes giebt. Es wird demnach diese zweyte Wurzel $x = \beta$ ein Größtes geben, und der Werth $x = \beta - \omega$ den Werth der Funktion y kleiner machen als $x = \beta$, bis man zu $x = \gamma$ kommt, wodurch von neuem ein Kleinstes erzeugt werden wird. Man sieht hieraus, daß die erste, dritte, fünfte Wurzel u. s. f. der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ Kleinste, die zweyte, vierte, sechste hingegen u. s. w. Größte geben. Zugleich erhellet, daß das Kleinste und Größte, wenn zwey gleiche Wurzeln da sind, zusammenfallen, und also weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt finde.

§. 264.

Ist daher in einer Funktion

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

der höchste Exponent n eine gerade Zahl, so ist die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

eine Gleichung von einem ungeraden Grade, und hat folglich entweder eine, oder drey, oder fünf oder überhaupt eine ungerade Menge reeller Wurzeln. Ist nur eine Wurzel reell, so giebt dieselbe ein Kleinstes; sind drey Wurzeln reell, so giebt die größte ein Kleinstes, die mittelste ein Größtes, und die kleinste wieder ein Kleinstes; sind fünf Wurzeln reell, so hat die Funktion y drey kleinste und zwey größte Werthe u. s. f. Druckt hingegen der Exponent

ponent n eine ungerade Zahl aus, so ist die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ eine Gleichung von einem geraden Grade, und hat deswegen entweder gar keine, oder zwey, oder vier, oder sechs reelle Wurzeln u. s. f. Im ersten Falle hat die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth: im andern Falle, oder wenn zwey reelle Wurzeln da sind, giebt die größere ein Kleinstes, und die kleinere ein Größtes: und hat die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ vier reelle Wurzeln, so erzeugen die erste (welche die größte ist) und die dritte ein Kleinstes, und die zweyte und vierte ein Größtes. Ueberhaupt wechseln, die Anzahl der reellen Wurzeln mag seyn welche sie will, die kleinsten und größten Werthe mit einander ab.

§. 265.

Nun wollen wir uns zu der andern Gattung der einförmigen Funktionen, oder zu den rationalen gebrochenen Funktionen wenden. Es sey $y = \frac{P}{Q}$, und P und Q Funktionen von x. Legt man hier der Größe x einen solchen Werth bey, daß $Q = 0$ wird, so ist offenbar, daß y in eine unendliche Größe übergeht, wofern nicht auch zugleich P verschwindet, und es scheint daher in diesem Fall ein Größtes zu entstehen. Gleichwohl darf man dieses nicht annehmen. Denn da der umgekehrte Bruch $\frac{Q}{P}$ in eben den Fällen ein Kleinstes wird, in welchen $\frac{P}{Q}$ einen größten Werth hat: so müßte auch $\frac{Q}{P}$ ein Kleinstes werden, wenn

Q

Q verschwände. Allein dieses findet nicht allemal statt, weil es auch noch kleinere oder negative Werthe geben kann. Hierdurch wird zugleich die vorhin gegebene Regel bestätigt, daß man die größten und kleinsten Werthe aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ entwickeln müsse. Man suche also in dem gegebenen Falle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$$

und setze darauf $QdP - PdQ = 0$; so werden die Wurzeln dieser Gleichung der Funktion y entweder einen größten oder einen kleinsten Werth ertheilen. Entsteht ein Zweifel darüber, ob der gefundene Werth ein größter oder ein kleinster sey, so muß man die Gleichung $\frac{ddy}{dx^2}$ zu Hülfe nehmen. Ist der Werth derselben positiv, so ist dies ein Kennzeichen eines kleinsten Werthes, so wie der negative Werth davon ein Größtes anzeigt; und verschwindet der Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$, welches allemal geschiehet, wenn die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zwey oder mehrere gleiche Wurzeln hat, so muß man sich daran erinnern, daß gleiche Wurzeln in gerader Anzahl weder einen größten noch einen kleinsten Werth geben.

Erstes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen die Funktion

$$\frac{x}{1 + xx}$$

einen größten oder kleinsten Werth hat.

Hier fällt sogleich in die Augen, daß die gegebene Funktion in drey Fällen, nemlich, wenn man $x = \infty$,

 $x = 0$,

$x = 0$, $x = -\infty$ setzt, verschwinde, und es muß daher dieselbe zum wenigsten zwey größte oder zwey kleinste Werthe haben. Um diese zu finden setze man $y = \frac{x}{1 + xx}$; so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xx}{(1 + xx)^2}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{6x + 2x^3}{(1 + xx)^3}$$

Ferner setze man $\frac{dy}{dx} = 0$, wodurch man $1 - xx = 0$, also entweder $x = +1$ oder $x = -1$ erhält. Im ersten Falle, wo $x = +1$ ist, wird $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{2^3}$, und daher der größte Werth von $y = +\frac{1}{2}$; im letzten aber, oder wenn $x = -1$ genommen wird, ist $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{4}{2^3}$ und also $y = -\frac{1}{2}$, der kleinste Werth. Dieses findet man noch leichter, wenn man den Bruch umkehrt, oder $y = \frac{1 + xx}{x} = x + \frac{1}{x}$ setzt, und dabey vor Augen behält, daß die alsdann sich ergebenden Werthe die entgegenstehenden Namen bekommen. Es ist nemlich alsdann

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{xx}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

und also, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, $xx - 1 = 0$; folglich $x = +1$ oder $x = -1$, wie vorhin. Ist $x = +1$, so wird $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, und y ein Kleinstes, folglich $\frac{1}{y}$ ein Größtes; ist aber $x = -1$, so findet man $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, und y ist ein Größtes, so wie $\frac{1}{y}$ ein Kleinstes.

Zwey=

Zweytes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen die Formel

$$\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes giebt.

Setzt man $y = \frac{xx - 3x + 2}{xx + 3x + 2}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 12}{(xx + 3x + 2)^2} \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{12x^3 + 72x + 72}{(xx + 3x + 2)^3}$$

und setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$x = + \sqrt{2}, \text{ oder } x = - \sqrt{2}.$$

Im ersten Falle ist $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 + 3\sqrt{2})^3}$ und also positiv, da der Nenner positiv ist. Folglich ist der kleinste Werth von

$$y = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 17 = -0{,}02943725.$$

Im letzten Falle, oder wenn $x = -\sqrt{2}$ ist, wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 - 3\sqrt{2})^3} = \frac{24(3 - 2\sqrt{2})}{(4 - 3\sqrt{2})^3}$$

und also, da der Zähler dieses Bruchs positiv und der Nenner negativ ist, negativ. Folglich ist der größte Werth von

$$y = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = -12\sqrt{2} - 17 = -33{,}97056274.$$

Nun ist zwar dieser Werth kleiner als der vorhergehende kleinste, aber doch in so fern ein größter Werth, weil er größer ist, als die zunächst auf ihn folgenden, welche man bekömmt, wenn man für x Werthe setzt, die nur um sehr wenig größer oder kleiner sind als $-\sqrt{2}$. Da die $\sqrt{2}$ zwischen

zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{2}$ fällt, so kann man sich hiervon leicht durch folgende Rechnung überzeugen.

Wenn	so wird
$x = \frac{4}{3}$	$y = -\frac{2}{70} = -0{,}0285$
$x = \sqrt{2}$	$y = 12\sqrt{2} - 17 = -0{,}0294$ ein Kleinstes
$x = \frac{3}{2}$	$y = -\frac{1}{35} = -0{,}0285$

$x = -\frac{4}{3}$	$y = -35$
$x = -\sqrt{2}$	$y = -33{,}970$, ein Größtes
$x = -\frac{3}{2}$	$y = -35.$

Drittes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen die Formel

$$\frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$$

einen größten oder einen kleinsten Werth hat.

Setzt man $y = \frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xx - 4x}{(xx + x - 1)^2} \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4x^3 + 12xx + 4}{(xx + x - 1)^3}$$

Macht man daher $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird entweder

$$x = 0 \text{ oder } x = 2.$$

Im ersten Falle ist $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{-1}$, und also y ein Größtes und $= -1$; im andern wird $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{20}{5^3}$, und folglich y ein Kleinstes, und $= \frac{3}{5}$. Dies ist der Wahrheit nach der obigen Erklärung der größten und kleinsten Werthe vollkommen gemäß, obgleich $\frac{3}{5}$ größer als -1 ist. Denn

setzt

setzt man	so wird
$x = -\frac{1}{3}$	$y = -\frac{13}{11}$
$x = 0$	$y = -1$, ein Größtes
$x = +\frac{1}{3}$	$y = -\frac{7}{5}$
$x = 2 - \frac{1}{3}$	$y = \frac{19}{31}$
$x = 2$	$y = \frac{3}{5}$ ein Kleinstes
$x = 2 + \frac{1}{3}$	$y = \frac{37}{61}$

Daß $y = 1$ und also > -1 wird, wenn man $x = 1$ setzt, rührt daher, weil zwischen die Werthe von x, 0 und 1 ein Werth fällt, wobey $y = \infty$ wird.

Viertes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Bruch

$$\frac{x^3 + x}{x^4 \quad xx + 1}$$

kleinste oder größte Werthe giebt.

Setzt man $y = \frac{x^3 + x}{x^4 \quad xx + 1}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^6 \quad 4x^4 + 4xx + 1}{(x^4 \quad xx + 1)^2}, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 + 18x^7 - 24x^5 - 16x^3 + 12x}{(x^4 - xx + 1)^3}$$

Auf diese Art hat man die Gleichung

$$x^6 + 4x^4 - 4xx - 1 = 0$$

welche sich in

$$xx - 1 = 0, \text{ und } x^4 + 5x^2 + 1 = 0$$

auflösen läßt. Die Wurzeln von jener sind $x = +1$ und $x = -1$; und aus der Auflösung von dieser findet man $x^2 = -\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, woraus sich keine reelle Wurzel entwickeln läßt. Braucht man also die beyden gefundenen Wurzeln, so giebt $x = + 1$, den Werth von $\frac{ddy}{dx^2} = - 8$, und folglich für y das Größte $= 2$; $x = - 1$ aber $\frac{ddy}{dx^2} = + 8$, und also für y das Kleinste $= - 2$.

Fünftes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Bruch

$$\frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes giebt.

Setzt man $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - xx + 1)^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 - 6x^7 - 18x^5 + 20x^3}{(x^4 - xx + 1)^3}$$

Macht man also $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

und diese Gleichung, durch $xx + 1$ dividirt, giebt die Gleichung

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

welche sich in

$$xx - x - 1 = 0 \text{ und } xx + x - 1 = 0$$

auflösen läßt. Hieraus ergeben sich die reellen Werthe

1. $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; 2. $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

3. $x = - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; 4. $x = - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

Da

Da diese Werthe insgesammt in der Gleichung $x^4 - 3xx + 1 = 0$ enthalten sind, so wird, wenn man $x^4 = 3xx - 1$ setzt, für alle

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x(10 - 20xx)}{8x^6} = \frac{5(1 - 2xx)}{2x^5} = \frac{5(1 - 2xx)}{2x(3xx - 1)}$$

$$\text{und } y = \frac{x^3 - x}{2xx} = \frac{xx - 1}{2x}.$$

Für die beyden ersten Werthe aus der Gleichung $xx = x + 1$ aber ist

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2x + 1)}{2x(3x + 2)} = -\frac{5(2x + 1)}{2(5x + 3)};$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}.$$

Nun giebt die erste Wurzel $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2 + \sqrt{5})}{11 + 5\sqrt{5}}$$

und der Werth von y ist demnach ein größter. Die andere Wurzel $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ giebt

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2 - \sqrt{5})}{11 - 5\sqrt{5}} = -\frac{5(\sqrt{5} - 2)}{5\sqrt{5} - 11}$$

und so ist auch $y = \frac{1}{2}$ ein größter Werth. Die beyden übrigen Wurzeln geben kleinste Werthe für y, und zwar $y = -\frac{1}{2}$.

§. 266.

Bey Exempeln dieser Art giebt es also einen leichtern Weg zur Beantwortung der Frage: Ob ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde? Denn da $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so läßt sich der Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$, indem man auf diese Gleichung Rück-

Rück-

Rücksicht nimmt, einfacher ausdrucken. Es sey der Bruch $y = \frac{P}{Q}$ gegeben. Da

$$dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}, \text{ und } QdP - PdQ = 0$$

so wird

$$ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} - \frac{2dQ(QdP - PdQ)}{Q^3}$$

Allein dieses letzte Glied verschwindet, weil $QdP - PdQ = 0$ ist, und so wird

$$ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} = \frac{QddP - PddQ}{Q^2}$$

Da es also auf die Beschaffenheit dieses Werthes oder darauf ankommt, ob derselbe positiv oder negativ ist, und der Nenner Q^2 allemal positiv wird: so hat man hier bloß auf den Zähler zu sehen, und bekommt allemal ein Kleinstes, wenn $QddP - PddQ$, oder $\frac{d(QdP - PdQ)}{dx^2}$ positiv, und ein Größtes, wenn solches negativ ist. Oder man suche $\frac{dy}{dx}$, welches die Form $\frac{R}{QQ}$ haben wird, und darauf $\frac{dR}{dx}$. Hat man dieses gethan, so wird die Wurzel, wobey dieser Ausdruck positiv wird, ein Kleinstes, und die, wobey er negativ wird, ein Größtes geben.

§. 267.

Wenn der Nenner des gegebenen Bruchs ein Quadrat oder irgend eine höhere Potestät, und also $y = \frac{P}{Q^n}$ ist, so wird

$$dy = \frac{QdP - nPdQ}{Q^{n+1}}$$

und

und wenn man $\frac{QdP - nPdQ}{dx} = R$ setzt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R}{Q^{n+1}}$$

und die größten und kleinsten Werthe hängen von den Wurzeln der Gleichung $R = 0$ ab. Da ferner

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{QdR - (n+1)RdQ}{Q^{n+2}}$$

ist, so wird, wegen $R = 0$

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{dR}{Q^{n+1}}$$

und der positive Werth hievon zeigt ein Kleinstes, so wie der negative ein Größtes an. Da aber, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, Q^{n+1} allemal positiv ist, so hat man in diesem Falle nur nöthig $\frac{dR}{dx}$ zu erwägen, und die Formel $\frac{QdR}{dx}$ zu brauchen, wenn n eine gerade Zahl bedeutet.

Nehmen wir ferner an, daß der gegebene Bruch $\frac{P^m}{Q^n} = y$ sey, so ist

$$dy = \frac{(mQdP - nPdQ)P^{m-1}}{Q^{n+1}}$$

und es zeigen also, wenn man

$$\frac{mQdP - nPdQ}{dx} = R$$

setzt, die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ die Fälle an, in welchen y ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Da also

$\frac{dy}{dx} = \frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}}$ ist, so wird

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{P^{m-2}R[(m-1)QdP - (n+1)PdQ]}{Q^{n+2}} + \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}}$$

und

und, wegen $R = 0$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx}$$

eine Formel, die außerdem noch durch jedes Quadrat $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$ dividirt werden kann. Ueberdies giebt auch die Gleichung $P = 0$ ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn m eine gerade Zahl ist, und auf ähnliche Art wird sich bey der Betrachtung der umgekehrten Formel $\frac{Q^n}{P^m}$ ein Größtes oder Kleinstes bey der Annahme von $Q = 0$ ergeben, wenn n eine gerade Zahl ist [§. 252.]. Hier nehmen wir indeß auf die daher entspringenden größten oder kleinsten Werthe weiter keine Rücksicht, sondern untersuchen nur, der Erklärung der Methode wegen, diejenigen, welche aus der Gleichung $R = 0$ entspringen.

Erstes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{(\alpha + \beta x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$ gegeben. Man soll bestimmen, in welchem Falle derselbe ein Größtes oder ein Kleinstes gebe?

Setzt man $y = \frac{(\alpha + \beta x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$, so fällt zuvörderst in die Augen, daß

seyn werde	wenn ist
$y = 0$	$x = -\frac{\alpha}{\beta}$
$y = \infty$	$x = -\frac{\gamma}{\delta}$

und von diesen beyden Fällen giebt jener ein Kleinstes und

dieser

dieser ein Größtes, wenn m und n gerade Zahlen sind. Ueberdies aber ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha + \beta x)^{m-1}}{(\gamma + \delta x)^{n+1}}[(m-n)\beta\delta x + m\beta\gamma - n\alpha\delta]$$

und also

$$R = (m-n)\beta\delta x + m\beta\gamma - n\alpha\delta,$$

und folglich, wenn man $R = 0$ setzt,

$$x = \frac{n\alpha\delta - m\beta\gamma}{(m-n)\beta\delta}.$$

Da ferner $\frac{dR}{dx} = (m-n)\beta\delta$ ist, so muß man untersuchen, ob

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}\beta^{n+1}}{n^{n+1}\delta^{m-1}}\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{m-n}\right)^{m-n-2}\frac{dR}{dx}$$

eine positive oder negative Größe ist? im ersten Falle ist die gegebene Formel ein Kleinstes, im andern ein Größtes. Ist z. B. $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, so wird $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{9}{8}$, und also die Formel $\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ ein Kleinstes, wenn man $x = 0$ setzt.

Ist aber $y = \frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, so wird

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}}{n^{n+1}}\left(\frac{n-m}{2}\right)^{n-m+2}(m-n)$$

und $x = \frac{n+m}{n-m}$. Da aber m und n als positive Zahlen betrachtet werden, so muß man nach der Formel

$$(n-m)^{n-m+2}(m-n) \text{ oder } (n-m)^{n-m}(m-n)$$

urtheilen. Ist demnach $n > m$, so giebt der Werth $x = \frac{m+m}{n-m}$ allemal ein Größtes; ist aber $n < m$, so fin-

det

det ein Größtes statt, wenn $m - n$ eine ungerade, und ein Kleinstes, wenn $m - n$ eine gerade Zahl ist. So ist $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ ein Größtes, wenn man $x = -5$ setzt, indem $y = -\frac{6^3}{4^2} = -\frac{27}{2}$ wird.

Zweytes Exempel.

Es sey die Formel: $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$ gegeben.

$$\text{Da } \frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(3 - 4x - xx) \text{ und}$$

$$\frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(2x+4)$$

ist, und $(1+x)^2$ und $(1+xx)^3$ allemal einen positiven Werth haben, so braucht man nur den Ausdruck $-x \quad 2$ zu betrachten. Ist derselbe positiv, so findet ein Kleinstes, und ist er negativ, ein Größtes statt. Nun folgt aus der Gleichung $3 - 4x - xx = 0$

$$x = -2 + \sqrt{7} \text{ oder } x = -2 - \sqrt{7}.$$

Im ersten Falle wird $-x - 2 = -\sqrt{7}$, und so ist der gegebene Bruch ein Größtes. Im andern aber wird x $-2 = +\sqrt{7}$, und daher eben dieser Bruch ein Kleinstes. Setzt man aber $x = -2 + \sqrt{7}$, so wird

$$1 + x = -1 + \sqrt{7}, \text{ und } 1 + xx = 12 - 4\sqrt{7}$$

folglich

$$y = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{12-4\sqrt{7}}\right)^2 (\sqrt{7} - 1) = \frac{(2+\sqrt{7})^2(\sqrt{7}-1)}{16}$$

$$= \frac{17 + \sqrt{7}}{16} = 2{,}220$$

und

und dagegen ist, wenn man $x = -2 - \sqrt{7}$ annimmt,

$$y = \frac{17 - 7\sqrt{7}}{16} = -0{,}0950.$$

§. 268.

Es giebt auch irrationale und transcendente Funktionen, welche die Eigenschaft der einförmigen Funktionen an sich haben, und deren größte und kleinste Werthe daher auf ähnliche Art gefunden werden können. Es sind nemlich die Wurzeln der cubischen und aller höhern Gleichungen mit ungeraden Exponenten nichts anders als einförmige Funktionen, da sie nicht mehr als Einen reellen Werth haben; und was die Quadratwurzeln und überhaupt die Wurzeln betrifft, deren Exponenten gerade Zahlen sind, so haben dieselben, wenn sie reell sind, zwar allezeit einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen; allein man kann jeden besonders betrachten und dann ebenfalls die größten und kleinsten Werthe aufsuchen. Ist z. B. y irgend eine Funktion von x, so hat zwar $\sqrt{y}$ einen zwiefachen Werth; allein man kann einen jeden besonders erwägen. Es wird nemlich $+\sqrt{y}$ einen größten oder kleinsten Werth haben, wenn y dergleichen hat und derselbe positiv ist, denn sonst wird $\sqrt{y}$ imaginär. Umgekehrt wird $-\sqrt{y}$ in eben den Fällen ein Kleinstes oder ein Größtes seyn, wo $+\sqrt{y}$ ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Unter eben den Bedingungen ist jede Potestät $y^{\frac{m}{n}}$ ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn n eine ungerade Zahl ist; bedeutet aber n eine gerade Zahl, so gelten bloß die Fälle, wo y einen positiven Werth bekommt, und in denselben entstehen wegen des doppelten Werths auch doppelte Größte oder Kleinste.

§. 269.

Da die Differenzialgleichung, welche man aus der Potestät y^m erhält, $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$ ist, und die Wurzeln dieser Gleichung zugleich die Fälle anzeigen, in welchen die Potestät $y^{\frac{m}{n}}$ ein Größtes oder ein Kleinstes ist: so hat man zur Beurtheilung dieser Beschaffenheit eine doppelte Gleichung, nemlich $y^{m-1} = 0$, und $\frac{dy}{dx} = 0$. Jene läßt sich in $y = 0$ abändern, und giebt dann nur Größte oder Kleinste, wenn $m - 1$ eine ungerade, oder m eine gerade Zahl ist, [§. 257.]. Wenn also n eine ungerade Zahl, und m eine gerade Zahl bedeutet, so wird die Funktion $y^{\frac{m}{n}}$, oder $y^{2\mu : (2\nu - 1)}$, einen größten oder einen kleinsten Werth bekommen, wenn man darin die Werthe von x braucht, die sich aus der Gleichung $y = 0$ oder auch aus dieser $\frac{dy}{dx} = 0$ ergeben. Ist hingegen m eine ungerade Zahl, so ist die Funktion $y^{(2\mu - 1) : (2\nu - 1)}$ oder $y^{(2\mu - 1) : 2\nu}$ nur dann ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn man darin die Werthe von x braucht, die aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ fließen. Auch müssen außerdem im letzten Falle die Werthe von y positiv seyn.

§. 270.

So giebt die Formel $x^{\frac{2}{3}}$ ein Kleinstes, wenn man $x = 0$ setzt, weil in diesem Falle x^2 ein Kleinstes wird. Allein führte man $x^{\frac{2}{3}}$ nicht auf x^2 zurück, so würde die

vorhin

vorhin erklärte Methode solches auf keine Weise anzeigen, weil, wenn $x = 0$ gesetzt wird, die Glieder der Reihe, wornach geurtheilt werden muß,

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

außer dem ersten insgesammt unendlich groß werden. Denn setzt man $y = x^{\frac{2}{3}}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}; \quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \cdot 4}{27x^{\frac{7}{3}}}; \text{ ꝛc.}$$

und es giebt weder die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$ den Werth $x = 0$, noch zeigen die folgenden Glieder die Beschaffenheit des Größten und des Kleinsten an. Da wir aber angenommen haben, daß die Reihe

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

eine convergirende Reihe sey, wenn man ω sehr klein annimmt: so gehören alle die Fälle nicht für die erklärte allgemeine Methode, wo diese Reihe divergirend wird, und dies ist sie bey $y = x^{\frac{2}{3}}$, wenn man $x = 0$ annimmt. In diesen Fällen muß man daher zu der vorhin gebrauchten Reduction seine Zuflucht nehmen, und die gegebene Formel auf eine andere Form bringen, die von der erwähnten Unbequemlichkeit frey ist. Es ereignet sich dieses aber nur in sehr wenigen Fällen, die entweder in der Form $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}}$ enthalten sind, oder leicht darauf zurück geführt werden. Sollen z. B. die größten oder kleinsten Werthe der Formel $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}} z$ gefunden werden, wenn z irgend eine Funktion von x ist: so untersuche man die Form $y^{2\mu}z^{2\nu-1}$, weil diese in eben den Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes ist, in welchen die gegebene Formel solches wird.

§. 271.

Außer diesem übrigens leicht zu behandelnden Falle lassen sich die Funktionen, welche irrationale Größen enthalten, auf eben die Art, wie die rationalen Funktionen behandeln, wenn ihre größten oder kleinsten Werthe gefunden werden sollen. Dies wollen wir nun an einigen Beyspielen zeigen.

Erstes Exempel.

Es ist die Formel $\sqrt{(aa+xx)}-x$ gegeben; man soll die Fälle finden, in welchen sie ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $y=\sqrt{(aa+xx)}-x$, so wird

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}-1, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2}=\frac{aa}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$$

Nimmt man daher $\frac{dy}{dx}=0$, so wird $x=\sqrt{(aa+xx)}$ und also $x=\infty$ und daben $\frac{ddy}{dx^2}=0$. Auf ähnliche Art werden auch die folgenden Glieder $\frac{d^3y}{dx^3}$; $\frac{d^4y}{dx^4}$; 2c. insgesammt $=0$, und es bleibt daher ungewiß, ob jener Werth ein Größtes oder ein Kleinstes sey? Der Grund hiervon liegt darin, weil x eben sowohl $=-\infty$ als $=+\infty$. Setzt man indeß $x=+\infty$, so wird, weil $\sqrt{(aa+xx)}=x+\frac{aa}{2x}$ ist, $y=0$, und dieser Werth ist unter allen der kleinste.

Zwey=

Zweytes Exempel.

Man soll die Fälle finden, in welchen die Formel

$$\sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $y = \sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx$; so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + mx}{\sqrt{(aa + 2bx + mxx)}} - n$$

und setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so bekommt man

$$bb + 2mbx + mmxx = nnaa + 2nnbx + mnnxx$$

oder

$$xx = \frac{2bx(nn - m) + nnaa - bb}{mm - mnn}$$

und folglich

$$x = \frac{(nn - m)b \pm \sqrt{[mnn(m - nn)aa - nn(m - nn)bb]}}{m(m - nn)}$$

oder

$$x = -\frac{b}{m} \pm \frac{n}{m}\sqrt{\frac{maa - bb}{m - nn}}$$

und hierdurch wird

$$\sqrt{(aa + 2bx + mxx)} = \frac{b + mx}{n} = \pm\sqrt{\frac{maa - bb}{m - nn}}.$$

Da also

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa - bb}{(aa + 2bx + mxx)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wird

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{maa - bb}{\pm\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm(m - nn)\sqrt{(m - nn)}}{\sqrt{(maa - bb)}}$$

Wofern also nicht $\frac{m - nn}{maa - bb}$ positiv ist, so giebt es gar kein Größtes oder Kleinstes; ist aber diese Größe eine positive, so giebt das obere Zeichen ein Kleinstes, wenn $m > nn$, und ein Größtes, wenn $m < nn$ ist; das Gegentheil findet statt, wenn das untere Zeichen genommen wird. Ist daher $m = 2$, $n = 1$ und $b = 0$, so wird die Formel $\sqrt{(aa + 2xx)} - x$ ein Kleinstes, wenn man $x = + \frac{1}{2}\sqrt{2aa} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und ein Größtes, wenn man $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ setzt. Jenes ist $= a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, und dieses $= a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Drittes Exempel.

Man soll die Fälle finden, in welchen die Formel

$$\sqrt[4]{(1 + mx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3}{(1 + mx^4)^{\frac{3}{4}}} - \frac{nx^3}{(1 - nx^4)^{\frac{3}{4}}}$$

ist, so wird

$$mx^3(1 - nx^4)^{\frac{3}{4}} = nx^3(1 + mx^4)^{\frac{3}{4}}$$

und also

$$m^4(1 - nx^4)^3 = n^4(1 + mx^4)^3$$

oder

$$n^4 - m^4 + 3mn(n^3 + m^3)x^4 + 3m^2n^2(n^2 - m^2)x^8$$
$$+ m^3n^3(n + m)x^{12} = 0.$$

Wenn also diese Gleichung keine positive Wurzel für x^4 hat, so giebt es gar kein Größtes oder Kleinstes. Da sich diese Gleichung nicht bequem auflösen läßt, indem

$x^4 =$

$$x^4 = \frac{m^{\frac{4}{3}} - n^{\frac{4}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})} \text{ oder } x^4 = \frac{m - \sqrt[3]{m^2 n} + \sqrt[3]{mn^2} - n}{mn}$$

wird, so wollen wir um einen speciellen Fall zu nehmen, $m = 8n$ setzen. Dann wird

$$-4095 + 24 . 513 n x^4 - 3 . 63 . 64 n^2 x^8 + 9 . 512 n^3 x^{12} = 0$$

oder

$$512 n^3 x^{12} - 1344 n^2 x^8 + 1368 n x^4 - 455 = 0.$$

Man setze $8 n x^4 = z$, so ist

$$z^3 - 21 z^2 + 171 z - 455 = 0$$

und diese Gleichung hat den Faktor $z - 5$, und der andere, welchen man durch die Division mit diesem erhält, ist $zz - 16z + 91 = 0$ und enthält lauter imaginäre Wurzeln. Es ist also bloß $z = 8nx^4 - 5$, und also $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$, durch welchen Werth der Ausdruck $\sqrt[4]{(1 + 8nx^4)} + \sqrt{(1 - nx^4)}$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Um zu wissen, welches von beyden statt finden werde, suche man

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{3mxx}{(1 + mx^4)^{\frac{7}{4}}} - \frac{3nxx}{(1 - nx^4)^{\frac{7}{4}}}$$

Da aber $m = 8n$ ist, so wird, wenn man $x^4 = \frac{5}{8n}$ setzt,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}} - \frac{3n}{\left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{7}{4}}}\right)xx = -\frac{360nxx}{6^{\frac{7}{4}}}$$

folglich eine negative Größe, und daher $\sqrt[4]{(1 + 8nx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$ ein Größtes, wenn man $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$ setzt.

Es ist aber dieses Größte $= \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2}$. Setzt man statt nx^4 die Größe u, so erhellet, daß der Ausdruck $\sqrt[4]{(1 + 8u)} + \sqrt[4]{(1 - u)}$ ein Größtes wird, wenn man $u = \frac{5}{8}$ setzt, und dieses Größte ist $= \frac{3\sqrt[4]{6}}{2} = 2,347627$ Man mag also für u außer $\frac{5}{8}$ einen Werth annehmen, welchen man will, so wird dadurch allemal der Ausdruck $\sqrt[4]{(1 + 8u)} + \sqrt[4]{(1 - u)}$ einen kleinern Werth bekommen.

§. 272.

Auf ähnliche Art lassen sich die größten und kleinsten Werthe bestimmen, wenn transcendente Größen in den gegebenen Ausdrücken vorkommen. Denn ist die Funktion keine vielförmige, so zeigen die Wurzeln der Differenzialgleichung größte oder kleinste Werthe an, außer wenn sie gleiche Wurzeln in gerader Anzahl hat. Dieses soll an einigen Beyspielen gezeigt werden.

Erstes Exempel.

Die Zahl zu finden, welche zu ihrem Logarithmen das kleinste Verhältniß hat.

Daß es ein solches kleinstes Verhältniß $\frac{x}{lx}$ gebe, erhellet daher, weil dies Verhältniß sowohl bey $x = 1$ als bey $x = \infty$ unendlich wird. Es wird daher auch der Bruch $\frac{lx}{x}$ irgend einmal einen größten Werth haben, und zwar

in

in eben dem Falle, in dem $\frac{x}{lx}$ einen kleinsten Werth hat. Um diesen Fall zu finden setze man $y = \frac{lx}{x}$, so wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}$. Setzt man diesen Werth $= 0$, so wird $lx = 1$, und da wir hier hyperbolische Logarithmen angenommen haben, so ist $x = e$, wenn man die Zahl, deren hyperbolische Logarithmen $= 1$ ist, $= e$ setzt. Nun haben alle Logarithmen zu den hyperbolischen ein gegebenes Verhältniß, und es ist folglich in jedem logarithmischen Systeme $\frac{e}{le}$ ein Kleinstes, so wie $\frac{le}{e}$ ein Größtes. Da also im Briggischen Systeme $le = 0{,}4342944819$ ist, so ist der Bruch $\frac{lx}{x}$ allemal kleiner als $\frac{4342944819}{27182818284}$, oder näherungsweise $\frac{47}{305}$, und es giebt keine Zahl, welche zu ihrem Logarithmen ein kleineres Verhältniß habe als 305:47. Daß aber $\frac{lx}{x}$ in diesem Falle ein Größtes sey, erhellet daraus, weil $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2(1 - lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$, und also negativ wird, indem $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{xx}$ und $1 - lx = 0$ ist.

Zweytes Exempel.

Eine Zahl x zu finden, wobey die Potestät $x^{1:x}$ ein Größtes ist.

Daß dieser Ausdruck einen größten Werth habe, erhellet daher, weil man bey der Substitution der Zahlen für x findet,

$$1^{1:1} = 1{,}000000$$
$$2^{1:2} = 1{,}414213$$
$$3^{1:3} = 1{,}442250$$
$$4^{1:4} = 1{,}414213.$$

Man setze daher $x^{1:x} = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = x^{1:x}(\frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx})$ und, wenn man dieses $= 0$ macht, $lx = 1$, und $x = e$, vorausgesetzt, daß $e = 2{,}718281828$ sey. Da also $\frac{dy}{dx} = (1 - lx)\frac{x^{1:x}}{xx}$ ist, so wird $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{x^{1:x}}{x^3} + (1-lx)d.\frac{x^{1:x}}{xx} = -\frac{x^{1:x}}{x^3}$, weil $1 - lx = 0$ ist. Folglich ist $\frac{ddy}{dx^2}$ eine negative Größe und $x^{1:x}$ ein Größtes, wenn $x = e$ genommen wird. Da nun $e = 2{,}718281828$, so hat man

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \text{etc.}$$
$$= 1{,}444667861009764.$$

Dieses Exempel läßt sich durch das vorhergehende auflösen, weil, wenn $x^{1:x}$ ein Größtes ist, auch der Logarithme davon $\frac{lx}{x}$ ein Größtes seyn muß, und soll dies statt finden, so muß, wie wir gesehen haben, $x = e$ seyn.

Drittes Exempel.

Einen Bogen x zu finden, dessen Sinus entweder ein Größtes oder ein Kleinstes sey.

Setzt man $x = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = \text{cos.}\, x$ und also $\text{cos.}\, x = 0$. Hierdurch bekommt man für x die Werthe: $\pm \frac{\pi}{2}$

$\pm$

$\pm \frac{3\pi}{2}$; $\pm \frac{5\pi}{2}$; rc. Ferner wird $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin.x$ Da also die gefundenen Werthe, für x gesetzt, den Sinus von x entweder $= + 1$ oder $- 1$ geben, so sind jene Sinus Größte und diese Kleinste Werthe, wie bekannt ist.

Viertes Exempel.

Einen Bogen x zu finden, wobey das Rechteck zwischen x und sin. x ein Größtes werde.

Daß es hier ein Größtes gebe erhellet daraus, weil das verlangte Rechteck sowohl bey $x = 0$ als bey $x = 180^\circ$ verschwindet. Es sey also $y = x.\sin.x$; so ist $\frac{dy}{dx} = \sin.x + x\cos.x$, und daher $\tan g.x = -x$. Es sey $x = 90^\circ + u$ so wird $\tan g.x = -\cot.u$, und also $\cot.u = 90 + u$. Um diese Gleichung nach der oben erklärten Methode zu behandeln, setze man $z = 90 + u - \cot.u$, und dabey sey f der gesuchte Werth des Bogens. Da $dz = du + \frac{du}{\sin.u^2}$ ist, so wird

$$p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin.u^2}{1 + \sin.u^2}; \quad dp = \frac{2du\sin.u\cos.u}{(1 + \sin.u^2)^2}$$

und folglich

$$\frac{dp}{dz} = q = \frac{2\sin.u^3.\cos.u}{(1 + \sin.u^2)^3}$$

$$dq = \frac{6du\sin.u^2\cos.u^2 - 12du.\sin.u^4}{(1 + \sin.u^2)^3}$$

also

$$\frac{dq}{dz} = r = \frac{6\sin.u^4.\cos.u^2 - 2\sin.u^6}{(1 + \sin.u^2)^4} - \frac{12\sin.u^6.\cos.u^2}{(1 + \sin.u^2)^5}$$

$$= \frac{6\sin.u^4 - 14\sin.u^6 + 4\sin.u^8}{(1 + \sin.u^2)^3}$$

Hier-

Hieraus ergiebt sich $f = u - pz + \frac{1}{2}qzz - \frac{1}{6}rz^3 + \text{etc.}$ Man setze, nachdem man durch einige Versuche den nächsten Werth von f entdeckt hat, $u = 26^\circ, 15'$, so wird $90 + u = 116^\circ, 15'$, und der Bogen, der zu der Cotangente u gehört, läßt sich auf folgende Art bestimmen.

$$\begin{array}{rl}
\text{Von } l\cot.u = & 10{,}3070250 \\
\text{ziehe man ab} & 4{,}6855749 \\
\hline
 & 5{,}6214501 \\
\text{so ist } \cot.u = & 418263{,}7'' \\
\text{oder } \cot u = & 116^\circ, 11', 3\tfrac{7}{10}'' \\
\text{also } z = & 3', 56\tfrac{3}{10}'' = 236{,}3''
\end{array}$$

Um den Werth von pz zu finden nehme man

$$\begin{array}{rl}
l\sin.u = & 9{,}6457058 \\
\hline
l\sin.u^2 = & 9{,}2914116 \\
\hline
1 + \sin.u^2 = & 1{,}19561 \\
\hline
l(1 + \sin.u^2) = & 0{,}0775895 \\
\hline
lp = & 9{,}2138221 \\
lz = & 2{,}3734637 \\
\hline
lpz = & 1{,}5872858 \\
\text{Also } pz = & 38{,}6221 \text{ Secunden} \\
\text{oder } pz = & 38'', 39''', 43'''' \\
\text{abgezogen von } u = & 26^\circ, 15' \\
\hline
\text{so wird } f = & 26^\circ, 14', 21'', 20''', 17''''
\end{array}$$

und der gesuchte Bogen $x = 116^\circ, 14', 21'', 20''', 17''''$, doch muß noch das dritte Glied $\frac{1}{2}qzz = \frac{\sin.u^3 \cos.u}{(1+\sin.u^2)^3}zz$ hinzukommen.

Um

Um dieses zu finden, muß man ein z in Theilen des Halbmessers ausdrucken, auf folgende Art.

$$
\begin{array}{rrl}
 & l z'' = & 2,3734637 \\
\text{addirt} & & 4,6855749 \\
\hline
 & & 7,0590386 \\
\text{addirt } l \frac{\sin. u^2}{1 + \sin. u^2} z & = & 1,5872858 \\
\hline
 & & 8,6463244 \\
\text{addirt } l \sin. u & = & 9,6457058 \\
l \cos. u & = & 9,9527308 \\
\hline
 & & 8,2447600 \\
\text{subtr. } l(1 + \sin. u^2)^2 & = & 0,1551790 \\
\hline
l \frac{1}{2} q z z & = & 8,0895810 \\
\text{Also } \frac{1}{2} q z z & = & 0,012291 \\
\text{oder } \frac{1}{2} q z z & = & 44'''', 15'''''.
\end{array}
$$

Setzt man nun dieses hinzu, so wird der gesuchte Bogen

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 21''', 0''''$$

und wenn man größere Logarithmen braucht, so findet man

$$x = 116^\circ, 14', 21'', 20''', 35'''', 47'''''.$$

Eilftes Capitel.

Von den größten und kleinsten Werthen der vielförmigen Funktionen und der Funktionen mehrerer veränderlichen Größen.

§. 273.

Wenn y eine vielförmige Funktion von x ist, und also für jeden Werth von x mehrere reelle Werthe bekommt: so stehen die bey der Veränderung von x entspringende mehrere Werthe von y in einer solchen Verbindung unter einander, daß sie mehrere Reihen successiver Werthe geben. Denn betrachtet man y als die Applicate einer Curve, deren Abscisse durch x bezeichnet wird, so gehören zu einer und derselben Abscisse x so viele Schenkel einer und derselben Curve, als y reelle Werthe hat, und man muß daher die successiven Werthe von y, welche einerley Schenkel geben, als zu einander gehörig, und die, welche verschiedene Schenkel bilden, als von einander getrennt betrachten. Man hat also in diesem Falle so viele Reihen mit einander verbundener Werthe von y, als dasselbe bey jedem Werthe von x reelle Werthe bekommt, und in jeder dieser Reihen werden die Werthe von y, wenn man x größer werden läßt, entweder wachsen oder abnehmen, oder wenn sie eine Zeitlang gewachsen sind, wieder abnehmen und umgekehrt. Hieraus erhellet, daß es in jeder Reihe mit einander verbundener Werthe eben so größte oder kleinste Werthe giebt,

als

als dergleichen bey den einförmigen Funktionen statt fanden.

§. 274.

Zur Bestimmung dieser größten und kleinsten Werthe kann man sich eben der Methode bedienen, welche das vorhergehende Capitel für die Erfindung der größten und kleinsten Werthe der einförmigen Funktionen enthält. Denn da die Funktion y, wenn man x um das Increment ω vergrößert, allemal in

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

übergeht, so muß, wenn ein größter oder ein kleinster Werth statt finden soll, das Glied $\frac{\omega dy}{dx} = 0$ werden. Es zeigen also die Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ diejenigen Werthe von x an, welchen in den Reihen der mit einander verbundenen Werthe von y größte oder kleinste Werthe zugehören. Auch bleibt nicht zweifelhaft, in was für einer Reihe der mit einander verbundenen Werthe der größte oder kleinste Werth statt finde. Denn da die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ beyde veränderliche Größen x und y enthält, so lassen sich die Werthe von x nicht anders bestimmen, als wenn vermittelst einer Gleichung, welche das Verhältniß zwischen y und x enthält, die veränderliche Größe y weggeschaft wird. Ehe dieses aber geschiehet, gelangt man zu einer Gleichung, worin der Werth von y durch eine rationale oder einförmige Funktion von x ausgedruckt wird. Hat man hieraus die Werthe von x gefunden, so giebt ein jeder einen zugehörigen Werth von y, und dieser ist in der

Reihe

Reihe der mit einander verbundenen Werthe, zu welcher er gehört, entweder ein größter oder ein kleinster.

§. 275.

Ob diese Werthe größte oder kleinste Werthe von y sind? läßt sich auf die vorhin beschriebene Art erforschen. Man sucht nemlich den Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$ in endlichen Größen, und setzt darin nach und nach jeden der gefundenen Werthe von x und zugleich für y den Werth, der ihm für jeden Werth von x zukommt. Hat man dieses gethan, so untersucht man, ob $\frac{ddy}{dx^2}$ einen positiven oder einen negativen Werth bekommt. Im ersten Fall hat man daran ein Kennzeichen eines kleinsten, so wie an dem andern ein Merkmal eines größten Werths. Verschwindet aber $\frac{ddy}{dx^2}$ so muß man die Formel $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu Rathe ziehen. Verschwindet diese nicht, so giebt es weder ein Größtes noch ein Kleinstes, verschwindet aber dieselbe ebenfalls, so muß man zu der Formel $\frac{d^4y}{dx^4}$ fortgehen, und dabey eben so verfahren, als bey der Formel $\frac{ddy}{dx^2}$ vorgeschrieben worden ist. Wenn auch $\frac{d^4y}{dx^4}$ verschwände, so müßte man zu dem fünften Differenziale von y fortgehen; man mag aber fortgehen so weit man will, so muß man bey den Differenzialien der ungeraden Ordnungen eben so schließen, als bey der Formel $\frac{d^3y}{dx^3}$ gelehret worden ist. In diesen Fällen muß

man

man nemlich in der Reihe der Formeln $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ꝛc. so weit fortgehen, bis man zu einer gelangt, die nicht verschwindet. Gehört diese zu einer ungeraden Ordnung, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt; gehört sie aber zu einer geraden Ordnung, so zeigt ihr positiver Werth ein Kleinstes, ihr negativer Werth aber ein Größtes an.

§. 276.

Es werde die Funktion y aus x durch irgend eine Gleichung bestimmt. Differenziirt man diese Gleichung, so erhält sie die Form $Pdx + Qdy = 0$, und es wird demnach, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, $\frac{P}{Q} = 0$, folglich entweder $P = 0$, oder $Q = \infty$. Die letzte Gleichung kann nicht statt finden, wenn das Verhältniß zwischen x und y durch eine ganze rationale Gleichung gegeben ist, weil entweder x oder y oder beyde unendlich groß werden müßten. Es bleibt also bloß die Gleichung $P = 0$ übrig, und die Wurzeln dieser Gleichung, oder die Werthe von x, welche sie bekömmt, wenn mittelst der gegebenen Gleichung y weggeschafft ist, zeigen die Fälle an, in welchen die Werthe von y entweder Größte oder Kleinste sind. Um aber zu bestimmen, ob ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde? muß man die Formel $\frac{ddy}{dx^2}$ untersuchen. Nun giebt die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$, wenn man sie von neuem differenziirt und dabey $dP = Rdx + Sdy$, und $dQ = Tdx + Vdy$ setzt, und dx als beständig betrachtet,

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdxdy + Vdy^2 + Qddy = 0.$$

Da aber $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so wird, wenn man die Gleichung durch dx^2 dividirt, $R + \frac{Qddy}{dx^2} = 0$, und also $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}$. Man differenziire also in der Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ bloß die Größe P, und betrachte y als beständig. Hierdurch erhält man Rdx. Dann suche man den Werth des Bruchs $\frac{R}{Q}$. Ist dieser Werth positiv, so zeigt er ein Größtes, ist er negativ, ein Kleinstes an.

§. 277.

Es sey y eine zweyförmige Funktion von x, und durch die Gleichung $yy + py + q = 0$ gegeben, so daß p und q einförmige Funktionen von x bedeuten. Differenziirt man, so wird

$$2ydy + pdy + ydp + dq = 0, \text{ und also}$$
$$Pdx = ydp + dq.$$

Setzt man also $P = 0$, so wird $ydp + dq = 0$, und $y = -\frac{dq}{dp}$. Es wird also y durch eine einförmige Funktion von x ausgedruckt, so daß y für jeden gefundenen Werth von x auch nur einen einzigen bestimmten Werth bekommt. Was die Wegschaffung von y betrifft, so ist dieselbe leicht. Denn wenn man in der Gleichung $yy + py + q = 0$ anstatt y den Werth $-\frac{dq}{dp}$ setzt, so erhält man $dq^2 - pdpdq + qdp^2 = 0$, und diese Gleichung durch dx^2 dividirt, giebt bey der Auflösung alle zu Größten oder Kleinsten gehörige Werthe von x. Dies wird durch folgende Exempel deutlicher werden.

Erstes

Erstes Exempel.

Es ist die Gleichung $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$ gegeben; man soll die größten und kleinsten Werthe von y finden.

Durch die Differenziation bekommt man

$$2ydy + mxdy + mydx + bdx + 2nxdx = 0$$

und hieraus wird

$$P = my + b + 2nx, \text{ und } Q = 2y + mx.$$

Setzt man also $P = 0$, so wird

$$y = -\frac{b - 2nx}{m}$$

und dieser Werth giebt, wenn man ihn in die gegebene Gleichung setzt,

$$\begin{array}{l} \frac{4nn}{mm}xx + \frac{4nb}{mm}x + \frac{bb}{mm} \\ -2nxx - bx + aa = 0 \\ + nxx + bx \end{array}$$

oder

$$xx = \frac{4nbx + bb + mmaa}{mmn - 4nn}.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{2nb \pm \sqrt{(mmnbb + mmn(mm - 4n)aa)}}{mmn - 4nn}$$

oder

$$x = \frac{2nb \pm m\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{n(mm - 4n)}$$

und

$$y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{mm - 4n}$$

Betrachtet man nun bloß x als veränderlich, so wird

$dP = 2ndx$, und folglich $R = 2n$. Es ist aber $Q = 2y + mx = \pm \frac{\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{n}$, also

$$\frac{R}{Q} = \frac{\pm \quad 2nn}{\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}$$

und da der Zähler dieses Bruchs $2nn$ allemal positiv ist, so wird y ein Größtes, wenn das obere, und ein Kleinstes, wenn das untere Zeichen gilt. Man bemerke hierbey noch folgendes.

1. Wenn $m = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung $P = 0$ sogleich $x = -\frac{b}{2n}$, wo also nicht erst y weggeschafft zu werden braucht. Es gehört aber zu diesem Werthe ein doppelter Werth von y, weil $y = \pm \frac{1}{2n}\sqrt{(nbb - 4nnaa)}$ ist, und davon ist der positive ein größter, und der negative ein kleinster.

2. Ist $n = 0$, so wird $y = -\frac{b}{m}$, und x wächst ins Unendliche; aber y behält dabey immer denselben Werth, und es giebt folglich weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

3. Ist $mm = 4n$, so wird $4nbx + bb + mmaa = 0$, oder

$$x = \frac{bb + mmaa}{-mmb}, \text{ und}$$

$$y = -\frac{b - 2nx}{m} = -\frac{2b - mmx}{m}$$

$$= -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mmaa}{mb} = \frac{mmaa - bb}{mb}$$

Es

Es ist demnach dieser Werth von y, der zu $x = -\frac{mmaa - bb}{mmb}$ gehört, entweder ein größter oder ein kleinster. Da aber um jenen Werth von y zu bekommen, in dem Ausdrucke

$$y = -\frac{mb \mp 2\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{mm - 4n}$$

das untere Zeichen genommen werden muß, so ist dieser Werth von y ein kleinster.

Zweytes Exempel.

Es ist die Gleichung $yy - xxy + x - x^3 = 0$ gegeben; man soll die größten oder kleinsten Werthe von y finden.

Durch die Differenziation der Gleichung bekommt man

$$2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3x^2dx = 0$$

und daraus wird

$$P = 1 - 3xx - 2xy, \text{ und } Q = 2y - xx.$$

Setzt man demnach $P = 0$, so wird $y = \frac{1 - 3xx}{2x}$ und folglich durch die Substitution dieses Werthes,

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

oder

$$1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0.$$

Die eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = -1$, und dazu gehört $y = 1$. Nimmt man aber y als beständig an, so wird

$$R = -6x - 2y, \text{ folglich}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - xx}$$

und dieser Ausdruck giebt für $x = -1$ und $y = 1$ den Werth -4. Es ist also $y = 1$ ein Grösstes. Für $x = -1$ aber gehört aus der Gleichung $yy - y = 0$ ein doppelter Werth zu y, wovon der eine $= 0$, also weder ein Grösstes noch ein Kleinstes ist. Dividirt man jene Gleichung des fünften Grades durch $x + 1$, so ergiebt sich eine Gleichung des vierten Grades, deren Wurzeln sich nicht abgesondert angeben lassen.

Drittes Exempel.

Es ist die Gleichung $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$ gegeben; man soll die größten oder kleinsten Werthe von y finden.

Durch die Differenziation bekommt man die Gleichung

$$2ydy + 2xxdy + 4xydx + 4dx = 0.$$

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird $xy + 1 = 0$, und daher $y = -\frac{1}{x}$. Durch die Substitution dieses Werths aber erhält man aus der gegebenen Gleichung:

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind $x = 1$; $x = 1$; $x = -\frac{1}{2}$. Da nun

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 4}{2y + 2xx} = -\frac{2xy - 2}{y + xx}$$

ist, so wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2y}{y + xx}$$

Auf diese Art hat man

x	y	$\frac{ddy}{dx^2}$
1	-1	∞
1	-1	∞
$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{16}{9}$ für ein Größtes.

Da bey den gleichen Wurzeln $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$ wird, so bleibt daraus in diesem Falle unbestimmt, ob ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde. Weil aber zugleich $y + xx = 0$ wird, so ist in diesem Falle nicht einmal $\frac{dy}{dx} = 0$, weil in dem Bruche $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, $P = 0$ und $Q = 0$, und da also das Haupterforderniß fehlt, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt.

§. 278.

Es giebt aber bey den vielförmigen Funktionen noch eine andere Art der größten und kleinsten Werthe, welche sich nach der bisherigen Methode nicht finden lassen, deren Beschaffenheit aber aus der Natur der zweyförmigen Funktionen leicht entwickelt werden kann. Es sey nemlich y eine zweyförmige Funktion von x, so daß y für jeden Werth von x einen zwiefachen Werth bekomme, die entweder beyde reell oder beyde imaginär sind. Wir wollen annehmen, daß die Werthe von y imaginär werden, wenn $x > f$, reell hingegen, wenn $x < f$, und einander gleich und $= g$, wenn $x = f$ gesetzt wird. Da also die Funktion y keinen reellen Werth hat, wenn $x > f$ genommen wird: so muß, wenn bey $x < f$ beyde Werthe von y entweder größer oder kleiner werden als g, der Werth $y = g$ im ersten Falle ein

Kleinstes, im zweyten ein Größtes werden, weil er in jenem kleiner und in diesem größer ist, als beyde vorhergehende. Es läßt sich aber dieses Größte und Kleinste nach der bisherigen Methode nicht finden, weil hier nicht $\frac{dy}{dx} = 0$ wird. Es sind aber auch diese größten und kleinsten Werthe von einer ganz andern Art, wie bey der Vergleichung bald in die Augen fällt.

§. 279.

Es findet aber das Erwähnte statt, wenn man eine Gleichung von der Form

$$y = p \pm (f - x)\sqrt{(f - x)q}$$

hat, wobey p und q Funktionen von x sind, welche sich durch $f - x$ nicht theilen lassen, und q einen positiven Werth bekommt, wenn $x = f$ oder um etwas weniges kleiner oder größer ist. Es sey $p = g$, wenn man $x = f$ setzt: so ist klar, daß in dem Falle $x = f$ beyde Werthe von y in den einen g zusammenfließen; nimmt man aber $x > f$, so werden beyde Werthe imaginär. Nimmt man daher x um etwas weniges kleiner als f, oder $x = f - \omega$, so geht die Funktion

$$p \text{ in } g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} - \text{ꝛc. und}$$

$$q \text{ in } q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \text{ꝛc.}$$

über, woher in diesem Falle

$$y = g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \text{ꝛc.} \pm \omega\sqrt{\omega\left(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \text{ꝛc.}\right)}$$

wird. Ist ω so klein, daß die höhern Potestäten desselben gegen ω verschwinden, so wird

$y =$

[redacted]

$$y = g - \frac{\omega dp}{dx} \pm \omega\sqrt{\omega q}$$

und diese beyden Werthe von y sind kleiner als g, wenn $\frac{dp}{dx}$ positiv, und größer, wenn $\frac{dp}{dx}$ negativ ist. Es ist daher der doppelte Werth $y = g$ in jenem Falle ein größter und in diesem ein kleinster.

§. 280.

Diese größten und kleinsten Werthe rühren also daher, weil, wenn man $x = f$ setzt, beyde Werthe von y einander gleich, hingegen bey der Annahme $x > f$ imaginär, und bey $x < f$ reell werden, und weil außerdem, wenn man $x = f - \omega$ setzt, das zweyte irrationale Glied höhere Potestäten von ω giebt, als das rationale. Dies findet statt, wenn

$$y = p \pm (f - x)^n \sqrt{(f - x)q}$$

wofern nur n eine ganze Zahl und > 0 ist. Da aber nicht bloß die Quadratwurzel, sondern überhaupt jede gerade Wurzel beyde Zeichen zuläßt, so ist solches auch, wenn

$$y = p \pm (f - x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$$

wofern nur $2n + 1 > 2m$, und hieraus fließt

$$(y - p)^{2m} = (f - x)^{2n+1} q^{2m},$$

oder

$$(y - p)^{2m} = (f - x)^{2n+1} Q.$$

So oft daher eine Funktion y durch eine solche Gleichung ausgedruckt wird, und $2n + 1 > 2m$ ist, so ist auch, wenn man $x = f$ setzt, der Werth von y ein größter oder ein kleinster, und zwar das erste, wenn bey $x = f$, $\frac{dp}{dx}$ eine positive, und das letzte, wenn $\frac{dp}{dx}$ eine negative Größe wird.

Ist aber in diesem Falle $\frac{dp}{dx} = 0$, so wird

$$y = g + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2n}} p$$

Wenn also nicht $\frac{2n+1}{2n} > 2$ ist, so findet auch kein größter oder kleinster Werth statt; ist aber $\frac{2n+1}{2n} > 2$, so ist $y = g$ ein Größtes, wenn $\frac{ddp}{dx^2}$ einen negativen, und ein Kleinstes, wenn $\frac{ddp}{dx^2}$ einen positiven Werth hat. Auf diese Art hat man auch ferner zu urtheilen, wenn $\frac{ddp}{dx^2}$ verschwindet.

§. 281.

Wenn also y eine Funktion von x von der beschriebenen Art ist, so kann es sich ereignen, daß es außer den größten und kleinsten Werthen, welche sich nach der vorhergehenden Methode finden lassen, auch Größte und Kleinste dieser andern Art hat. Wie man diese letztern nach den eben erklärten Regeln finden könne, mögen folgende Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion y zu bestimmen, welche durch die Gleichung $yy - 2xy - 2xx - 1 + 3x + x^3 = 0$ gegeben ist.

Um die größten und kleinsten Werthe der ersten Art zu finden differenziire man. Hiedurch wird

$$2ydy - 2xdy - 2ydx - 4xdx + 3dx + 3xxdx = 0$$

und, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ sezt,

$$y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}xx.$$

Bringt man diesen Werth in die erste Gleichung, so bekommt man

$$9x^4 - 32x^3 + 42xx - 24x + 5 = 0$$

und diese Gleichung läßt sich in folgende auflösen,

$$9xx - 14x + 5 = 0, \text{ und } xx - 2x + 1 = 0.$$

Die lezte giebt zweymal $x = 1$, wobey $y = 1$ wird, daher in diesem Falle der Nenner in dem Bruche

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3 - 4x - 3xx}{2y - 2x}$$

verschwindet, und also weder ein Größtes noch ein Kleinstes der ersten Art statt findet. Die erste Gleichung

$$9xx - 14x + 5 = 0$$

giebt $x = 1$ und $x = \frac{5}{9}$, und von diesen Werthen hat der erste eben die Unbequemlichkeit als die vorhergehenden.

Sezt man aber $x = \frac{5}{9}$, so wird

$$y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{54} = \frac{23}{27}$$

und da $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x}$ ist,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x}$$

indem $dy = 0$ und der Zähler $= 0$. Es ist also $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{9}{8}$

und

und so giebt der Werth $x = \frac{5}{9}$ ein Kleinstes der ersten Art. Da ferner $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, so wird

$$y = x \pm (1 - x)\sqrt{(1 - x)}$$

und man erhält also auch, wenn man $x = 1$ setzt, ein Größtes der zweyten Art. Denn setzt man $x = 1 - \omega$, so wird

$$y = 1 - \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$$

und beyde Werthe sind kleiner als 1, weil ω sehr klein angenommen wird.

Zweytes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion

$$y = 2x - xx + (1 - x)^2\sqrt{(1 - x)}$$

zu finden.

Für die größten und kleinsten Werthe der ersten Art differenziire man die Gleichung, wodurch man

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1 - x)\sqrt{(1 - x)}$$

erhält. Setzt man diesen Werth $= 0$, so findet man einmal $x = 1$; und da $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1 - x)}$, so ist y in diesem Falle ein Größtes der ersten Art und $= 1$. Dividirt man aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ durch $1 - x$, so wird

$$4 \mp 5\sqrt{(1 - x)} = 0, \text{ oder } 16 = 25 - 25x$$

und hieraus

$$x = \frac{9}{25} \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3.$$

Wenn daher das obere Zeichen gilt, so wird $y = \frac{2869}{3125}$

ein

ein Kleinstes; nimmt man aber das untere Zeichen, so könnte $y = \frac{821}{3125}$ zwar ein Größtes scheinen, allein man darf bloß das obere Zeichen brauchen, da $4 \mp 5\sqrt{(1-x)}$ nicht $= 0$ seyn kann, wofern nicht $\sqrt{(1-x)} = + \frac{4}{5}$ ist. Von der ersten Art findet man also ein Größtes bey $x = 1$, und ein Kleinstes bey $x = \frac{9}{25}$; bey jenem ist $y = 1$, und bey diesem $= \frac{2869}{3125}$. Von der andern Art aber erhält man ebenfalls ein Größtes, wenn man $x = 1$ nimmt. Denn setzt man $x = 1 - \omega$, so wird

$$y = 1 - \omega\omega \pm \omega^2\sqrt{\omega}$$

in beyden Fällen kleiner als 1. In diesem Falle, wo bey $x = 1$ die beyden Größten der ersten und zweyten Art übereinkommen, hat man gewissermaßen ein vermischtes Größtes.

§. 282.

Aus diesen Beyspielen erhellet nicht nur die Natur dieser größten und kleinsten Werthe der andern Art, sondern es lassen sich darnach auch nach Willkühr dergleichen Funktionen zusammen setzen, welche Größte oder Kleinste dieser zweyten Art enthalten. Wie man aber bey jeder gegebenen Funktion erforschen könne, ob sie Größte oder Kleinste der andern Art habe oder nicht, solches soll in dem folgenden Abschnitte gelehret werden, weil dadurch die Natur der Curven sehr erläutert wird. Uebrigens erkennt man leicht, daß wenn y eine Funktion von x ist, welche ein Größtes oder ein Kleinstes der andern Art zuläßt, auch x eine solche Funktion von y sey. Denn da aus der Gleichung $(y-x)^2 = (1-x)^3$, wenn man $x = 1$ setzt,

für

für y ein größter Werth von der andern Art sich ergiebt; so giebt, wenn man die veränderlichen Größen y und x verwechselt, die Gleichung $(x - y)^2 = (1 - y)^3$ auch eine solche Funktion von x, welche ein Größtes der andern Art hat. Denn setzt man $x = 1$, so wird $(1 - y)^2 = (1 - y)^3$, und daraus zweymal $y = 1$, und einmal $y = 0$. Setzt man aber $x = 1 + \omega$, so wird $(1 + \omega - y)^2 = (1 - y)^3$, und daher, wenn man $y = 1 + \varphi$ setzt, $(\omega - \varphi)^2 = (-\varphi)^3 = -\varphi^3$ und also φ negativ. Nun sey $y = 1 - \varphi$, so wird $(\omega + \varphi)^2 = \varphi^3$, und da, wenn man φ sehr klein annimmt, φ^3 gegen φ^2 nicht in Betrachtung kommt, so muß nothwendig ω negativ seyn, und es entsprechen daher dem Werthe $x = 1 + \omega$ gar keine reelle Werthe von y. Setzt man aber $x = 1 - \omega$ und $y = 1 - \varphi$, so wird, wegen $(\varphi - \omega)^2 = \varphi^3$, $\varphi = \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, und also $y - \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, daher beyde Werthe von y, welche zu $x = 1 - \omega$ gehören, kleiner sind als $y = 1$, welche zu $x = 1$ gehört, und folglich ein größter Werth von y ist.

§. 283.

Bis hieher haben wir bloß zweyförmige Funktionen betrachtet, deren Größte oder Kleinste nicht schwer zu untersuchen sind, weil beyde Werthe durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden werden können. Wenn indeß die Funktion y durch eine höhere Gleichung ausgedruckt wird, so lassen sich die Größten und Kleinsten der ersten Art nach der erklärten Methode mit gleichem Erfolge finden, und was die der zweyten Art betrifft, so bleibt die Untersuchung derselben dem folgenden Abschnitte vorbehalten. Wie die drey- und vielförmigen Funktionen behandelt werden müssen, wollen wir nun an einigen Beyspielen zeigen.

Eilftes

Erstes Exempel.

Die Funktion y, deren größte oder kleinste Werthe verlangt werden, soll durch die Gleichung

$$y^3 + x^3 = 3axy$$

gegeben seyn.

Durch die Differenziation erhält man aus dieser Gleichung

$$3y^2dy + 3x^2dx = 3axdy + 3aydx,$$

und also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}.$$

Es wird daher ein Größtes oder ein Kleinstes geben, wenn $ay = xx$, oder $y = \frac{xx}{a}$ ist, und dieser Werth giebt, wenn man ihn in der Gleichung substituirt,

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3, \text{ oder } x^6 = 2a^3x^3$$

Es ist also dreymal $x = 0$, und in diesem Falle wird der Nenner $yy - ax = 0$, weil $y = \frac{xx}{a} = 0$ ist. Ob also in diesem Falle ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde? erhellet, wenn man x einen von 0 so wenig als möglich verschiedenen Werth beylegt. Es sey also $x = \omega$ und $y = \varphi$, so wird, wegen $\varphi^3 + \omega^3 = 3a\omega\varphi$, entweder $\varphi = \alpha\sqrt{\omega}$, oder $\varphi = \beta\omega^2$. Im ersten Falle wird $\alpha^3\omega\sqrt{\omega} = 3\alpha a\omega\sqrt{\omega}$, und also $\alpha = \sqrt{3a}$, und daher $y = \pm\sqrt{3a\omega}$, wenn man $x = \omega$ setzt. Wenn daher auch gleich ω nicht negativ genommen werden darf, so ist doch der eine von den beyden Werthen von y größer als 0 und der andere kleiner, und es ist daher $y = 0$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Wenn aber $\varphi = \beta\omega^2$ genommen wird, so hat man $\omega^3 = 3a\beta\omega^3$, und also

also $\beta = \frac{1}{3a}$, und $\varphi = \frac{\omega^3}{3a}$. Man mag daher in diesem Falle x entweder $+ \omega$ oder $= - \omega$ nehmen, in beyden Fällen ist $y = \varphi$ größer als o, und folglich $y = o$ in diesem Falle ein Kleinstes. Noch ist der dritte Fall aus der Gleichung $x^3 = 2a^3$ übrig, welcher $x = a\sqrt[3]{2}$, und $y = a\sqrt[3]{4}$ giebt. Um zu bestimmen, ob derselbe ein Größtes oder ein Kleinstes gebe? differenziire man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$$

von neuem, wo man wegen $dy = o$ und $ay - xx = o$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$$

erhält. Der Werth davon ist im gegenwärtigen Falle

$$-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a},$$ und derselbe zeigt an, daß y ein Größtes sey.

Zweytes Exempel.

Es ist die Funktion y durch die Gleichung

$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^3 = b^3x + b^3y$$

gegeben; man soll ihre größten oder kleinsten Werthe finden.

Da die Differenziation die Gleichung

$$4y^3dy + 3ayydy - b^3dy = b^3dx - 3axxdx - 4x^3dx$$

giebt, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}$$

und für $\frac{dy}{dx} = o$, $b^3 = 3axx + 4x^3$. Es kommt also

alles

alles darauf zurück, daß die größten und kleinsten Werthe der einförmigen Funktion $b^3 - ax^3 - x^4$ aufgesucht werden, indem diese zugleich die größten und kleinsten Werthe der Funktion y sind. Es sey $a = 2$ und $b = 3$, oder die Gleichung

$$y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$$

gegeben; so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}, \text{ und}$$

$$4x^3 + 6xx - 27 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $2x - 3 = 0$, so bekömmt man

$$2xx + 6x + 9 = 0$$

und da die Wurzeln dieser letzten Gleichung imaginär sind, so wird

$$x = \frac{3}{2}, \text{ und } y^4 + 2y^3 - 27y = \frac{459}{16}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind entweder Größte oder Kleinste. Da aber $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$, so ist

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x - 12xx}{4y^3 + 6yy - 27}$$

und dieser Werth zeigt ein Kleinstes an, wenn er bey $x = \frac{3}{2}$ positiv, ein Größtes aber, wenn er dabey negativ wird.

Drittes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe von y zu bestimmen, wenn

$$y^m + ax^n = by^p x^q \text{ ist.}$$

Durch die Differenziation erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qby^p x^{q-1} - nax^{n-1}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}.$$

und setzt man dieses $= 0$, so wird einmal $x = 0$, wenn n und q größer als 1 sind, und dann auch $y = 0$. Ob es in diesem Falle ein Größtes oder ein Kleinstes gebe, wird man finden, wenn man die nächsten Werthe untersucht, indem auch der Nenner $= 0$ ist, und bey dieser Untersuchung kommt es vorzüglich auf die Exponenten an. Außerdem giebt aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$y^p = \frac{na}{qb} x^{n-q}$$

und substituirt man diesen Werth in der gegebenen Gleichung, und setzt dabey $\frac{na}{qb} = g$, so wird

$$g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn - mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q} x^n$$

oder

$$g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn - mq - np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q}$$

woraus sich

$$x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn - mq - np)} : g^{m:(mn - mq - np)}$$

ergiebt, und zugleich wird dadurch auch y bekannt. Dann muß man untersuchen, ob das zweyte Differenzial

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{q(q-1)by^p x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$$

einen positiven oder einen negativen Werth bekommt. Im ersten Falle hat man ein Kleinstes, im andern ein Größtes.

Viertes

Viertes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe von y zu bestimmen, wenn

$$y^4 + x^4 = 4xy - 2$$

ist.

Durch die Differenziation erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$$

und hieraus

$$y = x^3.$$

Folglich ist

$$x^{12} = 3x^4 - 2, \text{ oder } x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$$

und diese Gleichung läßt sich in

$$x^4 - 1 = 0, \text{ und } x^8 + x^4 - 2 = 0$$

und die letztere in

$$x^4 - 1 = 0 \text{ und } x^4 + 2 = 0$$

auflösen. Es ist demnach zweymal $x = 1$ oder $x = -1$, und in beyden Fällen verschwindet auch der Nenner des Bruchs $\frac{dy}{dx}$. Um also zu erforschen, ob in diesen Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes statt habe, setze man $x = 1 - \omega$ und $y = 1 - \varphi$: so ist

$$\begin{array}{llll}
1 - 4\varphi & + 1 - 4\omega & = 4 - 4\omega - 4\varphi - 2 \\
+ 6\varphi^2 & + 6\omega^2 & \quad + 4\omega\varphi \\
- 4\varphi^3 & - 4\omega^3 & \\
+ \varphi^4 & + \omega^4 &
\end{array}$$

und also

$$4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2 - 4\varphi^3 - 4\omega^3 + \varphi^4 + \omega^4;$$

und, da ω und φ sehr klein seyn sollen,

$$4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2.$$

Es ist also der Werth von φ imaginär, man mag ω positiv oder negativ annehmen. Mit andern Worten, wenn y und x die Coordinaten einer Curve bedeuten, so hat dieselbe, wenn $x = 1$ und $y = 1$, einen zu ihr gehörigen Punkt, (punctum conjugatum). Es kann aber dieser Werth weder für einen größten noch für einen kleinsten gehalten werden, weil die vorhergehenden und nachfolgenden Werthe, mit welchen er verglichen werden muß, imaginär sind.

§. 284.

Wenn die Gleichung, wodurch das Verhältniß zwischen x und y ausgedruckt wird, so beschaffen ist, daß eine Funktion von y einer Funktion von x, oder $Y = X$ wird, so muß man, um die größten und kleinsten Werthe derselben zu finden, $dX = 0$ setzen, und es wird demnach y in eben den Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes, in welchen X ein solches wird. Auf ähnliche Art wird x, wenn man x als eine Funktion von y betrachtet, ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn $dY = 0$, oder wenn Y ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Es folgt indeß hieraus nicht, daß x und y zugleich Größte oder Kleinste werden. Denn ist $2ay - yy = 2bx - xx$, so ist y ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn $x = b$, und dabey wird $y = a \pm \sqrt{(aa - bb)}$. Hingegen wird x ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn $y = a$, und dabey ist $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$. Es wird also y kein Größtes oder Kleinstes, wenn $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$ ist, und doch ist in diesem Falle x ein Größtes oder Kleinstes. Uebrigens hat in diesem Falle, wenn y größte oder kleinste Werthe zukommen, x dergleichen nicht, denn y kann kein Größtes oder ein Kleinstes werden, wofern nicht $a > b$ ist, aber in diesem Falle wird das Größte oder Kleinste von x imaginär.

§. 285.

Es kann sich aber ferner auch ereignen, daß nicht alle Wurzeln der Gleichung $dX = o$ größte oder kleinste Werthe von y geben. Denn wenn jene Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt, und eben dieses geschieht, wenn es irgend eine gerade Anzahl gleicher Wurzeln giebt. Wäre z. B. die Gleichung

$$b(y - a)^2 = (x - b)^3 + c^3$$

gegeben, wo man durch die Differenziation

$$2bdy(y - a) = 3dx(x - b)^2$$

bekommen würde: so hätte die Funktion y weder ein Größtes noch ein Kleinstes, wenn man $x = b$ nähme, weil hier zwey gleiche Wurzeln vorkommen. Wenn hingegen x als eine Funktion von y betrachtet wird, so wird dasselbe ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn man $y = a$ setzt, und zwar ist $x = b - c$ ein Kleinstes. Da endlich in den Gleichungen von der Form $Y = X$ die veränderlichen Größen x und y nicht mit einander vermischt werden, so sind alle reelle Werthe von y, welche man durch die Werthe von x aus der Gleichung $dX = o$ erhält, Größte oder Kleinste. Sind in einer Gleichung die beyden veränderlichen Größen unter einander vermischt, so findet dieses nicht statt.

§. 286.

Was außerdem noch von der Natur der größten und kleinsten Werthe zu sagen ist, behalten wir dem folgenden Abschnitte vor, weil solches mittelst Figuren leichter dargestellt und erklärt werden kann. Jetzt gehen wir fort zu den Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, und zur Erforschung der Werthe, welche den darin vorkommenden veränderlichen Größen beygelegt werden müssen, damit die Funktion einen größten oder kleinsten Werth bekomme. Zuvörderst fällt dabey in die Augen, daß die Funktion von der Form X + Y, wenn X eine Funktion bloß von x, und Y eine Funktion bloß von y bedeutet, ein Größtes oder ein Kleinstes seyn werde, wenn sowohl X als Y ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Um also den größten Werth von X + Y zu finden, muß man die Werthe von x suchen, wobey X ein Größtes wird, und dann ferner die Werthe von y finden, wobey Y ein Größtes ist. Hat man diese gefunden, so geben beyde, in die Funktion X + Y gebracht, den größten Werth; und ein ähnlicher Weg muß für den kleinsten Werth von X + Y genommen werden. Man muß sich daher hüten, zwey Werthe von entgegengesetzter Beschaffenheit mit einander zu verbinden, so daß der eine für X ein Größtes und für Y ein Kleinstes gebe. In diesem Falle würde die Funktion X + Y weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn. Hingegen wird die Funktion X — Y ein Größtes, wenn X ein Größtes und Y ein Kleinstes ist, und ein Kleinstes, wenn X ein Kleinstes und Y ein Größtes ist. Wenn man aber von beyden Funktionen X und Y zugleich das Größte oder Kleinste nehmen wollte, so würde ihr Unterschied X — Y weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn. Alles dieses ist aus dem, was vorhin über die Natur der größten und kleinsten Werthe gesagt worden ist, leicht einzusehen.

§. 287.

Wenn also die größten oder kleinsten Werthe einer Funktion zweyer veränderlichen Größen gefunden werden sollen, so ist weit mehr Vorsicht nöthig, als wenn in eben der Absicht eine Funktion einer einzigen veränderlichen Größe gegeben ist. Denn man muß dabey nicht bloß die

Fälle

Fälle sorgfältig bestimmen, in welchen ein Größtes oder Kleinstes hervorgebracht wird, sondern außerdem aus diesen je zwey auf die Art mit einander verbinden, daß die gegebene Funktion ein Größtes oder Kleinstes werde. Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern.

Erstes Exempel.

Es ist die Funktion zweyer veränderlichen Größen

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$

gegeben; man soll die Werthe von x und y finden, wobey die Funktion ein Größtes oder Kleinstes wird.

Da sich dieser Ausdruck in zwey Theile $Y + X$ theilen läßt, wovon jener eine Funktion von y, und dieser eine Funktion von x ist: so suche man die Fälle auf, wo jede dieser Funktionen ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Da also

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y$$

so wird

$$\frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$$

und setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so wird, nachdem man durch 4 getheilt hat,

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$y = 2 \text{ und } y = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Da also $\frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$ ist, so giebt $y = 2$ ein Größtes. Was die übrigen beyden Wurzeln $y = 2 \pm \sqrt{3}$ betrifft, welche aus der Gleichung $yy - 4y + 1 = 0$ entspringen: so wird $\frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = 2$, und es geben daher beyde ein Kleinstes. Man hat also

$$\begin{array}{l|l}
y = 2 & Y = 8 \text{ ein Größtes} \\
y = 2 - \sqrt{3} & \left.\begin{array}{l} Y = -1 \\ Y = -1 \end{array}\right\} \text{ein Kleinstes.} \\
y = 2 + \sqrt{3} &
\end{array}$$

Da ferner $X = x^3 - 3xx - 3x$ ist, so wird

$$\frac{dX}{dx} = 3x^2 - 6x - 3$$

und daraus ergiebt sich die Gleichung

$$xx = 2x + 1, \text{ und also } x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Nun ist $\frac{ddX}{6dx^2} = x - 1 = \pm \sqrt{2}$. Folglich giebt die Wurzel $x = 1 + \sqrt{2}$ ein Kleinstes, nemlich $X = -5 - 4\sqrt{2}$, und $x = 1 - \sqrt{2}$ ein Größtes, nemlich $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Es ist demnach die Formel

$$X + Y = y^4 - 8y^3 + 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$

ein Größtes, wenn man $y = 2$ und $x = 1 - \sqrt{2}$ setzt, und wird dabey $= 3 + 4\sqrt{2}$. Eben diese Formel wird ein Kleinstes, wenn man $y = 2 - \sqrt{3}$ oder $y = 2 + \sqrt{3}$ und $x = 1 + \sqrt{2}$ nimmt, und in diesem Falle $= -6 - 4\sqrt{2}$.

Zweytes Exempel.

Es ist die Funktion zweyer veränderlichen Größen

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

gegeben; man soll die Fälle bestimmen, worin sie ein Größtes oder Kleinstes wird.

Braucht man Y und X wie vorhin, so ist

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y, \text{ und}$$
$$X = x^3 - 3xx - 3x$$

und daher die gegebene Funktion $= Y - X$. Aus der

vorher-

vorhergehenden Entwickelung erhellet ferner, daß $Y - X$ einen größten Werth hat, wenn man $y = 2$ und $x = 1 + \sqrt{2}$, und ein Kleinstes wird, wenn man $y = 2 \pm \sqrt{3}$ und $x = 1 - \sqrt{2}$ setzt. In jenem Falle wird sie $= 13 + 4\sqrt{2}$ und in diesem $= 4 - 4\sqrt{2}$. Uebrigens erkennt man bey beyden Exempeln leicht, daß die gefundenen Werthe in Vergleichung mit allen übrigen möglichen weder größte noch kleinste Werthe genennt werden können. Denn setzte man in beyden $y = 100$ und $x = 0$, so bekäme man offenbar einen größern Werth als wir vorhin gefunden haben, und auf ähnliche Art würde sich ein kleinerer ergeben, wenn man $y = 0$ und $x = -100$ annähme. Man muß daher die obige Bestimmung der größten und kleinsten Werthe nicht vergessen, und unter einem größten Werthe allemal den verstehen, der größer ist, als die nächsten vor ihm vorhergehenden und auf ihn folgenden; so wie unter einem kleinsten denjenigen, der kleiner als die zunächst vor ihm vorhergehenden und auf ihn folgenden ist. So ist z. B. der Werth von $Y - X$, welchen man findet, wenn man $y = 2$ und $x = 1 + \sqrt{2}$ setzt, größer als diejenigen, welche man bey $y = 2 \pm \omega$ und $x = 1 + \sqrt{2} \pm \varphi$ erhält, wenn ω und φ hinlänglich kleine Größen bedeuten.

§. 288.

Nach diesen Beyspielen wird es leicht seyn, die Untersuchung ins Allgemeine zu führen. Es bedeute also U irgend eine Funktion zweyer veränderlichen Größen x und y, wofür die Werthe von x und y gesucht werden sollen, wobey U ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Da in dieser Absicht jeder der veränderlichen Größen x und y ein bestimmter Werth beygelegt werden muß: so nehme man an, daß der Werth, welchen y haben muß, wenn U

ein Größtes oder ein Kleinstes werden soll, schon gefunden sey. In diesem Falle braucht nur noch der zugehörige Werth von x gesucht zu werden, und dies geschieht, wenn man die Funktion U so differenziirt, als ob bloß x veränderlich wäre, und das Differenzial = o setzt. Auf ähnliche Art findet man den erforderlichen Werth von y, wenn man den Werth von x als bereits gefunden betrachtet, die Funktion U so differenziirt, als ob bloß y veränderlich wäre, und das Differenzial = o setzt. Ist daher das Differenzial

$$dU = Pdx + Qdy$$

so muß $P = o$ und $Q = o$ seyn, und aus diesen beyden Gleichungen lassen sich dann die gesuchten Werthe von x und y finden.

§. 289.

Da man auf diese Art die Werthe von x und y, wobey die Funktion U ein Größtes oder Kleinstes wird, ohne Unterschied findet: so müssen nun noch die Fälle, in welchen ein größter oder ein kleinster Werth entsteht, von einander unterschieden werden. Soll nemlich die Funktion U ein Größtes werden, so müssen beyde veränderliche Größen die dazu erforderlichen Werthe haben; denn wenn der Werth der einen ein Größtes, und der Werth der andern ein Kleinstes gebe: so würde die Funktion selbst weder ein Größtes noch ein Kleinstes werden. Hat man demnach aus den Gleichungen $P = o$ und $Q = o$ die Werthe von x und y gefunden, so muß man untersuchen, ob beyde einen größten oder kleinsten Werth hervorbringen, und alsdann erst beyde mit einander verbinden. Ist dies geschehen, so läßt sich mit Sicherheit behaupten, aber auch so nur, daß der Werth der Funktion ein größter oder ein kleinster

sey.

sey. Eben das gilt vom Kleinsten; es kann die Funktion U kein Kleinstes werden, wenn nicht zugleich beyde Werthe von x und y ein Kleinstes geben. Es ereignet sich indeß bisweilen auch, daß die Werthe beyder veränderlichen Größen aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes geben; und diese Fälle müssen ebenfalls sogleich als untauglich verworfen werden.

§. 290.

Ob aber die Werthe von x und y ein Größtes oder ein Kleinstes geben, findet man, wenn man jeden besonders untersucht, auf ähnliche Art, als wenn nur eine veränderliche Größe da wäre. Um nemlich x zu beurtheilen, betrachte man y als eine beständige Größe, und da alsdann $dU = Pdx$, oder $\frac{dU}{dx} = P$ ist, so differenziire man P von neuem, ohne auch hier y als veränderlich zu betrachten, um $\frac{ddU}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$ zu erhalten. Nun untersuche man, ob der Werth von $\frac{dP}{dx}$, wenn man für x und y die zuvor gefundenen Werthe setzt, positiv oder negativ sey; im ersten Falle hat man ein Kleinstes, im andern ein Größtes. Auf ähnliche Art ist, wenn x als eine beständige Größe angesehen wird, $dU = Qdy$, oder $\frac{dU}{dy} = Q$. Man differenziire also Q von neuem, indem man bloß y als veränderlich behandelt, und untersuche den Werth von $\frac{dQ}{dy}$ indem man für x und y die aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ gefundenen Werthe setzt. Wird $\frac{dQ}{dy}$ positiv, so ist

dies

dies ein Merkmal eines Kleinsten, wird es aber negativ, ein Zeichen eines Größten. Hieraus erhellet, daß kein Größtes oder Kleinstes statt finde, wenn $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ durch die für x und y gefundene Werthe Werthe von entgegengesetzter Beschaffenheit bekommen, daß aber ein Kleinstes erzeugt werde, wenn beyde Formeln $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ positiv, und ein Größtes, wenn beyde negativ werden.

§. 291.

Wenn aber eine von den Formeln $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ oder auch beyde bey der Substitution der gefundenen Werthe von x und y verschwinden, so muß man zu den folgenden Differenzialien $\frac{ddP}{dx^2}$ und $\frac{ddQ}{dy^2}$ fortgehen. Verschwinden diese nicht, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt; verschwinden sie aber, so muß man nach den Formeln $\frac{d^3P}{dx^3}$ und $\frac{d^3Q}{dy^3}$ urtheilen, und zwar auf ähnliche Art, als solches bey den Formeln $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ geschieht. Um indeß deutlicher zu zeigen, in was für Fällen dieses geschieht, so sey der für x gefundene Werth $= \alpha$, wobey, wenn $\frac{dP}{dx}$ dadurch $= 0$ wird, $\frac{dP}{dx}$ nothwendig einen Faktor $x - \alpha$ haben muß. Ist dieser Faktor nur ein einzelner und kommt kein anderer ihm gleicher darin vor, so ist dies ein Kennzeichen, daß weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt finde. Eben dies

dies geschieht, wenn $\frac{dP}{dx}$ den Faktor $(x-\alpha)^3$, $(x-\alpha)^5$ ꝛc. hat. Ist hingegen $(x-\alpha)^2$ oder $(x-\alpha)^4$ ꝛc. ein Faktor, so wird dadurch zwar ein Größtes oder Kleinstes angezeigt, allein man muß auch erst noch untersuchen, wie es sich mit y verhalte.

§. 292.

Die Art die höhern Differenzialien in diesen Fällen zu finden, läßt sich aber außerordentlich erleichtern. Denn nehmen wir, um die Sache ganz allgemein zu behandeln, an, es sey $\alpha x + \beta = 0$ gefunden, und die Formel $\frac{dP}{dx}$ habe den Faktor $(\alpha x + \beta)^2$, so daß $\frac{dP}{dx} = (\alpha x + \beta)^2 T$ sey: so ist, weil $\alpha x + \beta = 0$, $\frac{d^3 P}{dx^3} = 2\alpha^2 T$, und da $2\alpha^2$ positiv ist, so hat man bey der anzustellenden Beurtheilung lediglich auf T zu sehen. Ist T positiv, so zeigt dies einen kleinsten, ist es aber negativ, einen größten Werth an. Eben dieses Erleichterungsmittel kann man brauchen, wenn nur eine einzige veränderliche Größe da ist, so daß man nie nöthig hat, zu den höhern Differenzialien aufzusteigen. Ja man hat nicht einmal nöthig, zu den zweyten Differenzialien fortzugehen. Denn wenn aus der Gleichung $P = 0$ sich $\alpha x + \beta = 0$ ergiebt, so muß P nothwendig den Faktor $\alpha x + \beta$ habe. Auf diese Art wird $P = (\alpha x + \beta) T$, und da $\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x + \beta)\frac{dT}{dx}$ wird, so hat man, indem $\alpha x + \beta = 0$ ist, $\frac{dP}{dx} = \alpha T$; und es zeigt daher der andere Fak-

tor

tor T, je nachdem der Werth von αT positiv oder negativ ist, ein Kleinstes oder ein Größtes an.

§. 293.

Nach diesen Vorschriften kann es nicht schwer fallen, bey jeder gegebenen Funktion zweyer veränderlicher Größen die Fälle zu bestimmen, wo dieselbe ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Was außerdem noch anzumerken ist, wird sich am leichtesten bey der Entwickelung einzelner Fälle beybringen lassen, daher wir die gegebenen Regeln durch einige Exempel erläutern wollen.

Erstes Exempel.

Es ist die Funktion zweyer veränderlichen Größen:

$$U = xx + xy + yy - ax - by$$

gegeben; man soll die Fälle bestimmen, worin sie ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da

$$dU = 2xdx + ydx + xdy - 2ydy - adx - bdy$$

ist: so wird aus der Vergleichung mit der allgemeinen Form $dU = Pdx + Qdy$,

$$P = 2x + y - a, \text{ und } Q = 2y + x - b.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2x + y - a = 0, \text{ und } 2y + x - b = 0$$

aus denen man durch die Wegschaffung von y

$$x - b = 4x - 2a, \text{ und also}$$

$$x = \frac{2a - b}{3}, \text{ und } y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$$

erhält. Da also $\frac{dP}{dx} = 2$, und $\frac{dQ}{dy} = 2$ wird, so zeigen beyde ein Kleinstes an. Wir schließen hieraus, daß die Formel

$$xx + xy + yy - ax - bx$$

ein Kleinstes werde, wenn man

$$x = \frac{2a - b}{3} \text{ und } y = \frac{2b - a}{3}$$

nimmt, und es wird alsdann

$$U = -\frac{3aa + 3ab - 3bb}{3} = -\frac{aa + ab - bb}{3}$$

und dieser Werth, als ein einziger, unter allen der kleinste. Es kann also nur auf eine Art

$$xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3}$$

werden, und da es nicht kleiner werden kann, so ist die Gleichung

$$xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3} - cc$$

eine unmögliche Gleichung.

Zweytes Exempel.

Die Fälle zu bestimmen, in welchen die Formel:

$$U = x^3 + y^3 - 3axy$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da

$$dU = 3x^2dx + 3y^2dy - 3aydx - 3axdy$$

ist, so wird

$$P = 3xx - 3ay, \text{ und } Q = 3yy - 3ax$$

und daher

$$ay = xx \text{ und } ax = yy.$$

Da also $yy = \frac{x^4}{aa} = ax$ ist, so hat man $x^4 - a^3x = 0$, und also entweder $x = 0$ oder $x = a$. Im ersten Falle ist $y = 0$, im andern $= a$. Da nun $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$,

und

und $\frac{dQ}{dy} = 6y$ und $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$ ist: so entsteht im ersten Falle, wenn $x = 0$ und $y = 0$ ist, weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Im andern Falle aber, wenn $x = a$ und $y = a$ ist entsteht ein Kleinstes, weil a positiv ist, und zwar wird $U = -a^3$, welcher Werth indeß bloß kleiner ist, als die zunächst vorhergehenden und zunächst folgenden; denn es leidet keinen Zweifel, daß U einen weit kleinern Werth bekommen könne, wenn beyde veränderliche Größen x und y negativ genommen werden.

Drittes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion:

$$U = x^3 + ayy - bxy + cx$$

zu finden.

Da

$$dU = 3x^3dx + 2aydy - bydx - bxdy + cdx$$

ist, so wird

$$P = 3xx - by + c \text{ und } Q = 2ay - bx$$

und wenn man beyde Werthe $= 0$ setzt,

$$y = \frac{bx}{2a} \text{ und folglich}$$

$$3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0, \text{ oder } xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a}$$

also

$$x = \frac{bb \pm \sqrt{(b^4 - 48aac)}}{12a}$$

Wofern also nicht $b^4 - 48aac > 0$ ist, so hat weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt. Es sey daher

$$b^4 - 48aac = bbff, \text{ also } c = \frac{bb(bb - ff)}{48aa}$$

so

so wird

$$x = \frac{bb \pm bf}{12a} \text{ und } y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}.$$

Da ferner $\frac{dP}{dx} = 6x$, und $\frac{dQ}{dy} = 2a$ ist, so wird $\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2}$. Wofern also nicht $2a$ und $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ einerley Zeichen haben, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt. Sind aber beyde entweder positiv oder negativ, welches statt finden wird, wenn das Produkt $b(b \pm f)$ positiv ist: so wird die Funktion U ein Kleinstes, wenn a positiv, und ein Größtes, wenn a negativ ist. Ist also $f = 0$ oder $c = \frac{b^4}{48aa}$, so wird, weil bb positiv ist, die Funktion U ein Kleinstes, wenn a eine positive Größe und $x = \frac{b}{12a}$ und $y = \frac{b^3}{24aa}$ ist; ist hingegen a negativ, so geben eben diese Substitutionen ein Größtes. Ist $f < b$, so entsteht in beyden Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes; ist aber $f > b$, so geben bloß $x = \frac{b(b + f)}{12a}$ und $y = \frac{bb(b + f)}{24aa}$ ein Größtes oder ein Kleinstes, je nachdem a negativ oder positiv ist. Es sey $a = 1$, $b = 3$ und $f = 1$, so daß

$$U = x^3 + yy - 3xy + \tfrac{3}{2}x$$

werde: so ist U ein Kleinstes, weil a positiv wird, man mag $x = 1$ und $y = \frac{3}{2}$, oder $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{4}$ setzen. Im ersten Falle wird $U = \frac{1}{4}$, im letzten $= \frac{5}{16}$. Wenn man aber für x negative Zahlen nimmt, so ist leicht einzusehen, daß man für U noch viel kleinere Werthe erhalten kann. Man muß daher $U = \frac{1}{4}$ in dem Verstande als ein Kleinstes betrachten, daß damit gesagt werden soll, U werde einen größern Werth bekommen, wenn man $x = 2 + \omega$ und $y = 3 + \varphi$ setze, und ω und φ kleine positive oder negative Zahlen sind. Es darf aber ω die Grenze $-\frac{15}{4}$ nicht überschreiten; denn wenn $\omega < -\frac{15}{4}$, so kann U kleiner werden als $\frac{1}{4}$.

Viertes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion:
$U = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccyy$
zu finden.

Differenziirt man, so wird

$$P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx, \text{ und}$$
$$Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy;$$

und setzt man diese Werthe $= 0$ und zieht sie von einander ab, so wird

$$4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0.$$

Da diese Gleichung durch $x - y$ theilbar ist, so ist einmal $x = y$, und dann auch $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$. Hieraus fließt $x = 0$, und $4xx = 3ax - 2cc$, oder $x = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$. Nimmt man $x = 0$, so wird auch $y = 0$, und wegen

$$\frac{dP}{dx} = 12x - 2ay + 2cc, \text{ und}$$
$$\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$$

die Funktion U ein Kleinstes $= 0$. Setzt man $x = y = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, so wird, wenn $9aa > 32cc$, wegen $4xx = 3ax - 2cc$

dP

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 12xx - 2ax + 2cc = 7ax - 4cc$$
$$= \frac{21aa - 32cc \pm 7a\sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$$

und da dieser Werth allemal positiv ist, weil $32cc < 9aa$, so wird U in diesem Falle ein Kleinstes und

$$= \frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 \mp \frac{a}{256}(9aa - 32cc)^{\frac{3}{2}}$$

Dividirt man aber die Gleichung

$$4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$$

durch $x - y$, so wird

$$4xx + 4xy + 4yy + ax + ay + 2cc = 0.$$

Aber aus der Gleichung $P = 0$ wird

$$yy = -2xy + \frac{4}{a}x^3 + \frac{2ccx}{a}$$

und durch die Substitution dieses Werths wird

$$y = \frac{16x^3 + 4axx + aax + 8ccx + 2acc}{4ax - ac}$$

Nun giebt aber die Gleichung

$$y = -x \pm \sqrt{\frac{4x^3 + axx + 2ccx}{a}}$$

und es wird demnach

$$16x^3 + 4axx + 4ccx + 2acc =$$
$$(4x - a)\sqrt{(4ax^3 + aaxx + 2accx)}$$

oder nach Wegbringung der Irrationalität

$$256x^6 + 192ax^5 + \left.\begin{matrix}80aa\\+128cc\end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix}4a^3\\+96acc\end{matrix}\right\} x^3 \left.\begin{matrix}-a^4\\+48aacc\\+16c^4\end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix}-2a^3cc\\+16ac^4\end{matrix}\right\} x + 4a^2c^4 = 0$$

Wenn diese Gleichung reelle Wurzeln hat, so zeigen dieselben größte oder kleinste Werthe der Funktion U an, indem $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ Größen mit einerley Zeichen werden.

Fünftes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe des Ausdrucks:
$x^4 + mxxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = U$
zu finden.

Durch die Differenziation findet man

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$
$$Q = 4y^3 + 2mxxy + 2aay + naax = 0.$$

Beyde Gleichungen zu einander addirt und von einander subtrahirt, geben

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x - y) = 0$$
$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x + y) = 0$$

so wie diese auf ähnliche Art nach der Division durch $x - y$ und $x + y$ behandelt

$$4xx + 4yy + 2aa = 0, \text{ und}$$
$$4xy - 2mxy - naa = 0.$$

Aus der letzten ergiebt sich

$$y = \frac{naa}{2(n-m)x}$$

die erste aber läßt keine reelle Werthe zu. Wir haben also drey Fälle.

1. Wenn $y = x$, so ist

$$4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$$

woraus entweder $x = 0$, oder $2(2 + m)xx + (2 + n)aa = 0$ wird. Es sey $x = 0$, so ist auch $y = 0$, und wegen

$$\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa, \text{ und}$$

dQ

$$\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$$

in diesem Falle $U = 0$ ein Kleinstes, indem der Coefficient aa positiv ist. Der andere Fall giebt $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, welche Gleichung nicht reell seyn kann, wofern nicht $\frac{n+2}{m+2}$ negativ ist. Es sey $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$, oder $n = -2kkm - 4kk - 2$, so ist $x = \pm ka$ und $y = \pm ka$; aber $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ und $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$. Da also $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ einander gleich sind, so ist U entweder ein Kleinstes oder ein Größtes, je nachdem jene Größen positiv oder negativ sind.

2. Wenn $y = -x$, so ist $2(m+2)x^3 = (n-2)aax$, also entweder $x = 0$, oder $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Die erste Wurzel 0 führt auf das Vorhergehende; die letzte ist reell, wenn $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ eine positive Größe ist; und wenn $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$, so kommt entweder ein Größtes oder ein Kleinstes.

3. Wenn $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, so ist $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x} + 2aax + \frac{nna^4}{2(2-m)x} = 0$, oder $4x^4 + 2aaxx + \frac{nna^4}{(2-m)^2} = 0$.

$= 0$. Diese Gleichung hat keine reelle Wurzel, wofern nicht aa eine negative Größe ist.

Sechstes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion:

$$U = x^4 + y^4 - xx + xy - yy$$

zu finden.

Da hier $P = 4x^3 - 2x + y = 0$, und

$$Q = 4y^3 - 2y + x = 0$$

so ist aus der ersten Gleichung $y = 2x - 4x^3$, und dieser Werth giebt in die andere Gleichung gebracht,

$$256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = 0$, wodurch auch $y = 0$ wird. Da in diesem Falle $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2$, und $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2$ wird, so wird U ein Größtes $= 0$.

Dividirt man aber die Gleichung durch x, so wird

$$256x^8 - 384x^6 + 192x^4 - 40x^2 + 3 = 0,$$

und diese Gleichung hat den Faktor $4xx - 1$, weswegen $4xx = 1$ und $x = \pm \frac{1}{2}$ und $y = \pm \frac{1}{2}$ wird. Ferner wird $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 1$, und in beyden Fällen entspringt also ein Kleinstes $= -\frac{1}{8}$.

Dividirt man die Gleichung durch $4xx - 1$, so bekommt man

$$64x^6 - 80x^4 + 28xx - 3 = 0$$

welche Gleichung zweymal $4xx - 1 = 0$ enthält, so daß daher der vorhergehende Fall entsteht. Außerdem wird

daraus

daraus $4xx - 3 = 0$, und $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$, und $y = \frac{\mp\sqrt{3}}{2}$. Es ist also auch $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 7$, und U wird ein Kleinstes $= -\frac{9}{8}$, wobey zugleich dieser Werth der kleinste unter allen ist, welche U bekommen kann, so daß $U = -\frac{9}{8} - cc$ allemal unmöglich ist. Aus den Bisherigen läßt sich die Methode, die größten und kleinsten Werthe der Funktionen dreyer und mehrerer veränderlicher Größen zu bestimmen, ableiten.

Zwölftes Capitel.

Von dem Gebrauche der Differenzialien bey der Erforschung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

§. 294.

Die Theorie der größten und kleinsten Werthe hat uns den Weg zur Erforschung der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichungen gebahnt, und setzt uns in den Stand zu bestimmen, ob diese Wurzeln reell oder imaginär sind. Es sey nemlich die allgemeine Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

gegeben, und ihre Wurzeln p, q, r, s, t etc., so daß p die kleinste von allen und q, r, s, t etc. in dieser Ordnung immer größer, also $q > p$, $r > q$, $s > r$, $t > s$ etc. sey. Wir wollen aber annehmen, daß alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind, wo also der höchste Exponent n auch die Anzahl der Wurzeln p, q, r etc. ist, und zugleich aller Wurzeln als ungleich betrachten. Dies schließt indeß die gleichen Wurzeln nicht aus, weil sich diese als ungleiche mit unendlich kleinen Unterschieden ansehen lassen.

§. 295.

Da der Ausdruck $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} -$ etc. nur dann $= 0$ ist, wenn für x einer von den Werthen p, q, r etc. gesetzt

gesetzt wird, in allen übrigen Fällen hingegen nicht verschwindet: so sey überhaupt

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = z$$

wo also z als eine Funktion von x angesehen werden kann. Nehmen wir nun an, daß für x nach und nach bestimmte Werthe gesetzt und dabey von dem kleinsten $x = -\infty$ angefangen und stufenweise fortgegangen werde: so ist offenbar, daß z entweder einen positiven oder einen negativen Werth bekommen, und nicht eher verschwinden wird, als bis $x = p$ geworden. Vermehrt man x über p, so werden die Werthe von z wieder positiv oder negativ werden, bis $x = q$ geworden, wo denn wieder $z = 0$ ist. Es muß folglich z zwischen zweyen von seinen Werthen, die $= 0$ sind, einen größten oder einen kleinsten Werth gehabt haben, und zwar einen größten, wenn die Werthe von z, indem x zwischen p und q fiel, positiv, und einen kleinsten, wenn diese Werthe negativ sind. Auf ähnliche Art wird z einen größten oder kleinsten Werth erreichen, wenn x von q bis r vergrößert wird, und zwar einen größten, wenn es vorhin einen kleinsten hatte, und umgekehrt. Denn wir haben oben gesehen, daß die größten und kleinsten Werthe mit einander abwechseln.

§. 296.

Da also die Funktion z allemal durch einen zwischen zwey auf einander folgende Wurzeln von x fallenden Werth ein Größtes oder ein Kleinstes wird, so ist die Anzahl der größten oder kleinsten Werthe, welche der Funktion z zukommen, um 1 kleiner als die Anzahl der Wurzeln, und dabey wechseln diese größte und kleinste Werthe auf die Art mit einander ab, daß jene positiv und diese negativ sind. Hat umgekehrt die Funktion z einen größten oder wenigstens einen positiven Werth, wenn $x = f$ ist, und einen kleinsten oder wenigstens negativen Werth, wenn $x = g$ ist: so muß auch zwischen g und f eine Wurzel von x fallen, weil die Funktion z bey dem Uebergange der Größe x von f zu g vom Positiven zum Negativen übergeht, und dabey nothwendig $= 0$ werden muß. Fehlt aber die Bedingung, daß die größten und kleinsten Werthe von z wechselsweise positiv und negativ sind: so folgt jene Behauptung nicht. Denn giebt es kleinste Werthe von z, welche ebenfalls positiv sind, so kann der Werth von z vom Größten zum folgenden Kleinsten übergehen, ohne bey diesem Uebergange $= 0$ zu werden. Uebrigens erhellet aus dem Gesagten, daß auch in dem Falle, wenn nicht alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind, zwischen jeden zweyen ein Größtes oder ein Kleinstes liege. Aber umgekehrt läßt sich dieses nicht behaupten, oder daß zwischen jedes Größte und Kleinste eine reelle Wurzel falle. Dies findet nur statt, wenn die Bedingung hinzukommt, daß der eine Werth von z ein positiver und der andere ein negativer ist.

§. 297.

Da nach dem Obigen die Werthe von x, wobey die Funktion

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird, die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

sind: so ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$

ins=

insgesammt reell seyn werden, wenn alle Wurzeln der Gleichung $z = o$, deren Anzahl $= n$ ist, reell sind. Denn da die Funktion z so viel größte oder kleinste Werthe hat, als die Zahl $n - 1$ Einheiten enthält, so muß die Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ nothwendig eben so viel reelle Wurzeln haben. Auch erhellet hieraus zugleich, daß die Funktion z nicht mehr größte oder kleinste Werthe haben könne als $n - 1$, und wir gelangen auf diese Art zu dem allgemeinen Satze: Wenn eine Gleichung $z = o$ lauter reelle Wurzeln hat, so hat die Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ ebenfalls lauter dergleichen Wurzeln. Hieraus ergiebt sich umgekehrt, daß die Wurzeln der Gleichung $z = o$ nicht insgesammt reell seyn werden, wenn die Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx}$ solches nicht insgesammt sind.

§. 298.

Da sich zwischen jeden zweyen reellen Wurzeln der Gleichung $z = o$ ein Werth befindet, wobey die Funktion z ein Größtes oder ein Kleinstes wird: so hat die Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ nothwendig eine reelle Wurzel, wenn die Gleichung $z = o$ zwey dergleichen hat. Auf ähnliche Art ist die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ gewiß zwey, wenn die Anzahl eben dieser Wurzeln in der Gleichung $z = o$ drey ist, und überhaupt ist die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ gewiß, $= m - 1$, wenn die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung

$= m$

$= m$ ist. Hat daher umgekehrt die Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ weniger reelle Wurzeln als $m - 1$, so hat auch umgekehrt die Gleichung $z = o$ gewiß weniger reelle Wurzeln als m. Aber umgekehrt gilt dieser Satz nicht. Denn wenn auch die Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ zum Theil oder insgesammt reell sind, so folgt daraus doch nicht, daß die Gleichung $z = o$ reelle Wurzeln habe. Es können nemlich die Wurzeln der Gleichung $z = o$ insgesammt imaginär seyn, wenn gleich die Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ lauter reelle Wurzeln hat.

§. 299.

Wenn indeß die obige Bedingung hinzukommt, so kann man allerdings aus der Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $z = o$ mit Gewißheit behaupten. Denn es seyen α, β, γ, δ, ꝛc. die reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = o$ und α darunter die größte und β, γ, δ, ꝛc. in eben der Ordnung immer kleiner. Setzt man diese Werthe für x, so bekömmt die Funktion z wechselsweise größte und kleinste Werthe. Da also die Funktion $z = \infty$ wird, wenn man $x = \infty$ annimmt, so müssen die Werthe von z ununterbrochen abnehmen, wenn die Werthe von x von ∞ bis zu α vermindert werden, und also z, wenn $x = \alpha$, ein Kleinstes werden. Wenn also in diesem Falle z einen negativen Werth bekommt, so muß es zuvor irgendwo $= o$ gewesen seyn, und auf diese Art erkennt man, daß die Gleichung $z = o$ eine reelle Wurzel $x > \alpha$ habe. Wenn aber die

Funk-

Funktion z bey $x = \alpha$ den positiven Werth behält, so kann sie vorher nicht kleiner gewesen seyn, weil es sonst, wider die Voraussetzung auch ein Kleinstes geben müßte, ehe x bis zu α verändert worden, und es kann demnach die Gleichung $z = 0$ keine reelle Wurzel haben, welche größer als α wäre. Nehmen wir also an, daß $z = \mathfrak{A}$ werde, wenn man $x = \alpha$ setzt, so kann man auf folgende Art schließen: Wenn $\mathfrak{A}$ positiv ist, so hat die Gleichung $z = 0$ keine reelle reelle Wurzel, die größer als α wäre; ist aber $\mathfrak{A}$ negativ, so hat die Gleichung $z = 0$ allemal eine reelle Wurzel, die größer als α ist und nicht mehr.

§. 300.

Um dieses Urtheil weiter fortzusetzen sey

$$\begin{array}{lcl} z = \mathfrak{A} & & x = \alpha \\ z = \mathfrak{B} & & x = \beta \\ z = \mathfrak{C} & \text{wenn} & x = \gamma \\ z = \mathfrak{D} & & x = \delta \\ z = \mathfrak{E} & & x = \epsilon \\ \text{2c.} & & \text{2c.} \end{array}$$

Da also $\mathfrak{A}$ ein Kleinstes war, so wird $\mathfrak{B}$ ein Größtes, und wenn $\mathfrak{A}$ positiv ist, so wird auch $\mathfrak{B}$ positiv seyn, und zwischen die Grenzen α und β keine reelle Wurzel der Gleichung $z = 0$ fallen. Hat daher diese Gleichung keine reelle Wurzel, die größer als α ist, so wird sie auch keine haben, die größer als β wäre. Wenn aber $\mathfrak{A}$ negativ ist, in welchem Falle die Gleichung eine Wurzel $x > \alpha$ hat: so untersuche man, ob der Werth von $\mathfrak{B}$ positiv oder negativ ist. Im ersten Falle giebt es eine Wurzel $x > \beta$, im letzten aber ist keine zwischen den Grenzen α und β enthalten. Auf ähnliche Art ist $\mathfrak{C}$ ein Kleinstes, wenn $\mathfrak{B}$ ein Größtes ist; und wenn also $\mathfrak{B}$ einen negativen Werth hat, so muß

um

um so mehr $\mathfrak{C}$ negativ sey, und es giebt also in diesem Falle keine reelle Wurzel zwischen den Grenzen β und γ. Ist hingegen $\mathfrak{B}$ positiv, so giebt es eine reelle Wurzel zwischen den Grenzen β und γ, wenn $\mathfrak{C}$ negativ ist; ist aber $\mathfrak{C}$ positiv, so giebt es keine reelle Wurzel zwischen β und γ; und auf ähnliche Art kann man die Beurtheilung weiter fortsetzen.

§. 307.

Die Beurtheilung zu erleichtern, kann folgende Tabelle dienen:

Die Gleichung z hat eine reelle Wurzel, welche enthalten ist zwischen den Grenzen	wenn ist
$x = \infty$ und $x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$
$x = \alpha$ und $x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ und $\mathfrak{B} = +$
$x = \beta$ und $x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ und $\mathfrak{C} = -$
$x = \gamma$ und $x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ und $\mathfrak{D} = +$
$x = \delta$ und $x = \varepsilon$	$\mathfrak{D} = +$ und $\mathfrak{E} = -$
ꝛc.	ꝛc.

Verwandelt man diese Behauptungen durch die Umkehrung in verneinende, so gelten auch diese in völliger Strenge, und es hat demnach

die Gleichung $z = 0$ keine reelle Wurzel, welche enthalten wäre zwischen den Grenzen	wenn nicht ist
$x = \infty$ und $x = \alpha$	$\mathfrak{A} = -$
$x = \alpha$ und $x = \beta$	$\mathfrak{A} = -$ und $\mathfrak{B} = +$
$x = \beta$ und $x = \gamma$	$\mathfrak{B} = +$ und $\mathfrak{C} = -$
$x = \gamma$ und $x = \delta$	$\mathfrak{C} = -$ und $\mathfrak{D} = +$
$x = \delta$ und $x = \varepsilon$	$\mathfrak{D} = +$ und $\mathfrak{E} = -$
ꝛc.	ꝛc.

Ver-

Vermittelst dieser Regeln lassen sich aus den Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$, diese Wurzeln als bekannt vorausgesetzt, nicht bloß die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $z = 0$, sondern auch die Grenzen finden, zwischen welchen jene Wurzeln enthalten sind.

Exempel.

Es ist die Gleichung: $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$ gegeben, man soll bestimmen, ob dieselbe reelle Wurzeln habe und wie viel?

Die Differenzial-Gleichung ist

$4x^3 - 28x + 24 = 0$, oder $x^3 - 7x + 6 = 0$

und die Wurzeln dieser Gleichung 1, 2 und -3, nach ihrer Größe geordnet,

sind	und daher
$\alpha = 2$	$\mathfrak{A} = -4$
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} = -1$
$\gamma = -3$	$\mathfrak{C} = -129$

Da $\mathfrak{A}$ negativ ist, so hat die gegebene Gleichung eine reelle Wurzel, die > 2 ist, aber weil $\mathfrak{B}$ negativ ist, keine zwischen den Grenzen 2 und 1 und 1 und -3. Da aber, wenn man $x = -3$ setzt, $z = \mathfrak{C} = -129$, und wenn man $x = -\infty$ annimmt, $z = +\infty$ wird, so muß nothwendig zwischen den Grenzen -3 und $-\infty$ eine reelle Wurzel liegen. Es hat demnach die gegebene Gleichung zwey reelle Wurzeln, die eine $x > 2$ und die andere $x < -3$, weswegen die beyden übrigen Wurzeln imaginär sind. Es muß daher aus dem letzten Gliede der gegebenen Gleichung eben so geurtheilt werden, als aus dem ersten allein. Gehört nemlich die gegebene Gleichung zu einer geraden Ordnung, so zeigt das letzte Größte oder Kleinste (es ist aber in diesem Falle ein Kleinstes) wenn es negativ ist, eine reelle, und wenn es positiv ist, eine imaginäre Wurzel an. Was die Gleichung der ungeraden Ordnungen betrifft, so zeigt das letzte Größte, weil für $x = -\infty$ auch $z = -\infty$ wird, wenn es positiv ist, eine reelle und dagegen eine imaginäre Wurzel an, wenn es negativ ist.

§. 302.

Diese Regel zur Beurtheilung der reellen und imaginären Wurzeln läßt sich bequem auf folgende Art ausdrukken. Ist eine Gleichung $z = 0$ gegeben, so betrachte man die Differenzialgleichung davon, setze die Wurzeln derselben nach ihrer Größe geordnet, α, β, γ, δ, 2c. und dabey

wenn $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \epsilon,\ \zeta$, 2c.
$z = \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F}$, 2c.

Sind nun die Zeichen $-\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +$
so hat die Gleichung $z = 0$ so viel reelle Wurzeln als man Buchstaben α, β, γ, δ 2c. hat, und eine drüber. Wenn aber einer von den Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, 2c. nicht das unter ihm stehende Zeichen hat, so ist dies ein Merkmal zweyer imaginärer Wurzeln. Wenn also $\mathfrak{A}$ das Zeichen $+$ hätte, so gäbe es keine Wurzel zwischen den Grenzen ∞ und β. Wenn $\mathfrak{B}$ das Zeichen $-$ hätte, so gäbe es keine Wurzel zwischen α und γ, und wenn $\mathfrak{C}$ das Zeichen $+$ hätte, so gäbe es keine Wurzel zwischen den Grenzen β und δ, u. s. f. Ueberhaupt aber hat die Gleichung $z = 0$ außer den auf diese Art angezeigten noch eben so viel imaginäre Wurzeln, als die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$.

§. 303.

§. 303.

Ereignet es sich, daß einer von den Werthen A, B, C, D, ꝛc. verschwindet, so hat daselbst die Gleichung $z = 0$ zwey gleiche Wurzeln. Verschwindet nemlich A, so hat sie zwey α gleiche, und verschwindet B, so hat sie zwey β gleiche Wurzeln. In diesem Falle hat nemlich die Gleichung $z = 0$ mit der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ eine Wurzel gemein, und wir haben oben gezeigt, daß dies ein Kennzeichen zweyer gleicher Wurzeln ist. Wenn aber die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ zwey oder mehr gleiche Wurzeln hat, so hat man an der geraden Anzahl der Wurzeln ein Kennzeichen, daß weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt findet; und man kann daher für die gegenwärtige Absicht die gleichen Wurzeln in gerader Anzahl aus der Acht lassen. Ist hingegen die Anzahl der gleichen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ eine ungerade Zahl, so hat man bey der Beurtheilung bloß auf eine von ihnen zu sehen, es müßte denn die Funktion z in diesem Falle selbst verschwinden. Denn ereignet sich dieses, so hat die Gleichung $z = 0$ ebenfalls gleiche Wurzeln, und zwar noch eine mehr als die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$. Ist z. B. $\frac{dz}{dx} = (x - \zeta)^n R$, so daß diese Gleichung n, ζ gleiche Wurzeln hat, so hat auch, wenn z bey $x = \zeta$ verschwindet, die Gleichung $z = 0$, $n + 1$ einander und ζ gleiche Wurzeln.

§. 304.

Wir wollen diese Regeln auf die einfachern Gleichungen anwenden, und von der quadratischen anfangen. Es sey also

$$z = x^2 - Ax + B = 0$$

wovon die Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 2x - A$$

ist, welche $= 0$ gesetzt,

$$x = \tfrac{1}{2}A, \text{ oder } \alpha = \tfrac{1}{2}A$$

giebt. Setzt man diesen Werth für x, so wird

$$z = -\tfrac{1}{4}AA + B = \mathfrak{A},$$

und hieraus läßt sich schließen, daß die Gleichung $xx - Ax + B = 0$ zwey reelle Wurzeln haben werde, wenn $\mathfrak{A}$ negativ, oder $AA > 4B$ ist, und daß die eine von diesen Wurzeln größer, und die andere kleiner als $\frac{1}{2}A$ sey. Wenn hingegen der Werth von $\mathfrak{A}$ positiv oder $AA < 4B$ ist, so sind beyde Wurzeln der Gleichung imaginär. Ist endlich $\mathfrak{A} = 0$, oder $AA = 4B$, so hat die Gleichung zwey gleiche Wurzeln, jede $= \frac{1}{2}A$. Diese Sätze sind schon aus der Theorie der quadratischen Gleichung bekannt, und dienen daher zur Bestätigung der Richtigkeit und Brauchbarkeit der hier erklärten Methode.

§. 305.

Wir wollen daher die cubischen Gleichungen auf ähnliche Art untersuchen. Es sey die Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = 0$$

gegeben, deren Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 3xx - 2Ax + B$$

ist. Setzt man diese letztere $= 0$, so wird

$$xx = \frac{2Ax - B}{3}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind entweder beyde imaginär,

ginär, oder beyde reell, und in diesem Falle entweder einander gleich oder nicht. Da nun daraus

$$x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 3B)}}{3}$$

wird, so sind beyde Wurzeln imaginär wenn $AA < 3B$ ist. In diesem Falle hat die cubische Gleichung nothwendig eine reelle Wurzel, wovon sich aber weiter keine Grenzen als $+\infty$ und $-\infty$ angeben lassen. Sind beyde Wurzeln einander gleich, oder $A^2 = 3B$, so ist $x = \frac{A}{3}$. Wenn also nicht auch zugleich $z = 0$ wird, so hat man auf diese beyden Wurzeln weiter keine Rücksicht zu nehmen, und es hat daher die Gleichung, wie vorhin, nur eine einzige reelle Wurzel. Wird aber bey $x = \frac{A}{3}$ auch zugleich $z = 0$, und dies ereignet sich, wenn

$$- \tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - C = 0, \text{ oder}$$
$$C = \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{2}{27}A^3, \text{ d. h. wenn entweder}$$
$$B = \tfrac{1}{3}A^2, \text{ oder } C = \tfrac{1}{27}A^3$$

ist: so hat die Gleichung drey gleiche Wurzeln, jede $= \frac{1}{3}A$. Was den dritten Fall betrifft, wo die beyden Wurzeln der Differenzialgleichung reell und ungleich sind: so findet derselbe statt, wenn

$$AA > 3B$$

ist. Es sey daher

$$AA = 3B + ff, \text{ oder } B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff$$

und also jene Wurzeln

$$x = \frac{A \pm f}{3}$$

Hier wird

$$\alpha = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}f, \text{ und } \beta = \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f.$$

Man suche die dazu gehörigen Werthe für z, oder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Da jene beyden Wurzeln in der Gleichung

$$xx = \tfrac{2}{3}Ax - \tfrac{1}{3}B$$

enthalten sind, so wird

$$z = -\tfrac{1}{3}Axx + \tfrac{2}{3}Bx - C = -\tfrac{2}{9}AAx + \tfrac{1}{9}AB + \tfrac{2}{3}Bx - C$$

und folglich, da $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$ ist

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{2}{27}A^2f + \tfrac{2}{9}Bf - C$$
$$= \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 - C$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB + \tfrac{2}{27}A^2f - \tfrac{2}{9}Bf - C$$
$$= \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3 - C$$

Ist demnach $\mathfrak{A}$ eine negative Größe, oder

$$C > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

oder

$$C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 + gg$$

so hat, wie wir gesehen haben, die cubische Gleichung eine reelle Wurzel, welche größer als $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}f$ ist. Wie die übrigen Wurzeln beschaffen seyn werden, muß man aus dem Werthe von $\mathfrak{B}$ beurtheilen. Nun ist $\mathfrak{B} = \frac{4}{27}f^3 - gg$; und ist dieser Werth positiv, so hat die Gleichung außerdem noch zwey reelle Wurzeln, davon die eine zwischen den Grenzen α und β, d. h. zwischen

$$\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}f \text{ und } \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f$$

enthalten, die andere aber kleiner als $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$ ist. Ist hingegen $gg > \frac{4}{27}f^3$ oder $\mathfrak{B}$ negativ, so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln. Ist $\mathfrak{B} = 0$, oder $\frac{4}{27}f^3 = gg$, so werden beyde Wurzeln einander gleich und $= \beta = \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$. Wenn endlich der Werth von $\mathfrak{A}$ positiv oder

$$C < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

ist: so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln, und die dritte ist reell und $< \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$; und ist $\mathfrak{A} = 0$, so hat sie zwey gleiche Wurzeln $= \alpha$ und die dritte ebenfalls kleiner als $\frac{1}{3}A - \frac{1}{3}f$.

§. 306.

§. 306.

Wenn also die cubische Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

drey reelle Wurzeln haben soll, so müssen folgende drey Bedingungen statt finden. Einmal muß

$$B < \tfrac{1}{3}AA, \text{ oder } B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff$$

zum andern

$$C > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

und drittens

$$C < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

Die beyden letzten Bedingungen laufen darauf hinaus, daß C zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{1}{27}f^3$$

oder

$$\tfrac{1}{27}(A+f)^2(A-2f) \text{ und } \tfrac{1}{27}(A-f)^2(A+2f)$$

enthalten sey. Wenn daher eine von diesen Bedingungen fehlt, so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln. Ist z. B. $A = 3$, und $B = 2$, so ist $\tfrac{1}{3}ff = \tfrac{1}{3}AA - B = 1$ und $ff = 3$, und es kann folglich die Gleichung $x^3 - 3xx + 2x - C = 0$ nicht lauter reelle Wurzeln haben, wofern nicht C zwischen den Grenzen $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ und $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$ liegt. Ist demnach $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, oder $C < -0{,}3849$, oder $C > \frac{2\sqrt{3}}{9}$ oder $C > 0{,}3849$, oder $CC > \tfrac{4}{27}$, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel.

§. 307.

Da man aus jeder Gleichung das zweyte Glied wegschaffen kann, so wollen wir $A = 0$ setzen, wodurch wir die cubische Gleichung

$$x^3 + Bx - C = 0$$

bekommen. Wenn diese Gleichung lauter reelle Wurzeln haben soll, so muß zuvörderst $B < 0$ oder B eine negative Größe seyn. Es sey also $B = -kk$, wodurch $ff = 3kk$ wird. Ferner muß C zwischen den Grenzen

$$-\tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } +\tfrac{2}{27}f^3$$

oder

$$-\tfrac{2}{9}kk\sqrt{3kk} \text{ und } +\tfrac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$$

enthalten, und also $C < \frac{4}{27}k^6$ oder

$$CC < -\tfrac{4}{27}B^3$$

seyn. Man kann also alle Bedingungen, welche erfordert werden, damit eine cubische Gleichung lauter reelle Wurzeln habe, auf die einzige zurückführen, daß

$$4B^3 + 27CC$$

eine negative Größe sey; indem hierin enthalten ist, daß B negativ sey, weil sonst $4B^3$ nicht negativ werden könnte. Wir behaupten daher auch allgemein, daß die cubische Gleichung $x^3 + Bx \pm C = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, wenn $4B^3 + 27CC$ eine negative Größe ist. Ist hingegen $4B^3 + 27CC$ eine positive Größe, so kommt jener Gleichung nur eine reelle Wurzel zu, und ist $4B^3 + 27CC = 0$, so sind zwar alle Wurzeln reell, aber auch zwey einander gleich.

§. 308.

Wir gehen zu den biquadratischen Gleichungen fort, und nehmen auch da an, daß das zweyte Glied fehle. Es sey also

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

Setzt man $x = \frac{1}{u}$, so wird

$$1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$$

und

und die Differenzialgleichung hiervon ist

$$2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0.$$

Diese Gleichung hat eine Wurzel $u = 0$, und außerdem ist

$$uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$$

und daher

$$u = \frac{3C \pm \sqrt{(9CC - 32BD)}}{8D}$$

Sollen also alle vier Wurzeln reell seyn, so wird zuvörderst erfordert, daß

$$9CC > 32BD$$

sey. Wir wollen $9CC = 32BD + 9ff$ setzen, wo

$$u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$$

wird. Hier können wir C allezeit positiv annehmen; weil sonst $u = -v$ werden würde. Nun werden wir nachher beweisen, daß nicht alle Wurzeln reell seyn können, wofern nicht B eine negative Größe ist. Es sey also

$$B = -gg$$

so ist

$$9CC = 9ff - 32ggD, \text{ und } u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$$

Hier sind zwey Fälle zu erwägen, nachdem D entweder positiv oder negativ ist.

1. Ist D positiv, so ist $f < C$, und die drey Wurzeln von u sind nach ihrer Größe geordnet

$$u = \frac{3C + 3f}{8D}$$

$$u = 0$$

$$u = \frac{3C - 3f}{8D}$$

Braucht man diese Werthe für u in der Gleichung

$$u^4 - \frac{Cu^3}{D} + \frac{Bu^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$$

so giebt dieselbe folgende Werthe

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C + f)^3(C - 3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C - f)^3(C + 3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

davon der erste und dritte negativ seyn müssen, und beyde sind, weil C positiv und $C < f$ ist, kleiner als $\frac{1}{D}$. Es muß also

$$\frac{1}{D} < \frac{27(C + f)^3(3f - C)}{4096\,D^4}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{D} < \frac{27(f - C)^3(C + 3f)}{4096\,D^4}, \text{ oder}$$

$$4096\,D^3 < 27(f + C)^3(3f - C) \text{ und}$$

$$4096\,D^3 < 27(f - C)^3(C + 3f)$$

seyn. Aber die erste Größe ist allemal weit größer als die andere, und es ist daher genug, wenn

$$D^3 < \frac{27}{4096}(f - C)^3(C + 3f)$$

und daben $B = \frac{9CC - 9ff}{32\,D}$, und $f > C$ und $D > 0$ ist. Wenn also D eine positive Größe, C positiv und B negativ ist, so daß

$$f > C, \text{ und } D^3 < \frac{27}{4096}(f - C)^3(C + 3f)$$

d. h.

D <

$$D < \frac{3}{16}(f - c)\sqrt[3]{(3f + c)}$$

ist: so hat die Gleichung lauter reelle Wurzeln. Wenn aber

$$D > \frac{3}{16}(f - c)\sqrt[3]{(3f + c)}$$

und doch

$$D < \frac{3}{16}(f + c)\sqrt[3]{(3f - c)}$$

ist, so sind zwey Wurzeln reell und zwey imaginär. Ist endlich

$$D > \frac{3}{16}(f + c)\sqrt[3]{(3f - c)}$$

so sind alle vier Wurzeln imaginär.

2. Wenn D eine negative Größe $= -F$ ist, C aber positiv und B negativ bleibt, so ist, wegen

$$B = \frac{9CC - 9ff}{32D} = \frac{9ff - 9CC}{32F}$$

$C > f$. Da also

$$u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = -\frac{3C \mp 3f}{8F}$$

ist: so sind die drey Werthe von u nach ihrer Größe geordnet

$$u = 0$$

$$u = -\frac{3C + 3f}{8F}$$

$$u = -\frac{3C - 3f}{8F}$$

und sie geben folgende Werthe

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C-f)^3(C+3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C+f)^3(C-3f)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

Da also $\mathfrak{A}$ eine negative Größe ist, so hat die Gleichung gewiß eine, und folglich auch zwey reelle Wurzeln. Sollen aber alle Wurzeln reell seyn, so muß $\mathfrak{B}$ eine positive Größe, und folglich

$$27(C-f)^3(C+3f) > 4096F^3$$

seyn. Ferner ist nöthig, daß $\mathfrak{C}$ negativ, oder

$$27(C+f)^3(C-3f) < 4096F^3$$

werde. Sollen daher alle Wurzeln reell seyn, so muß F^3 zwischen die Grenzen

$$\frac{27}{4096}(C+f)^3(C-3f) \text{ und}$$

$$\frac{27}{4096}(C-f)^3(C+3f)$$

oder zwischen

$$\frac{3}{16}(C+f)\sqrt[3]{(C-3f)} \text{ und}$$

$$\frac{3}{16}(C-f)\sqrt[3]{(C+3f)}$$

fallen, und wenn dieses nicht ist, so sind zwey Wurzeln imaginär.

3. Nun sey B eine positive Größe, und auch D positiv, so ist $C > f$, weil $B = \frac{9CC - 9ff}{32D}$. Da ferner

$$u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$$

so

so sind die Wurzeln nach ihrer Größe geordnet

$$u = \frac{3(C + f)}{8D}$$

$$u = \frac{3(C - f)}{8D}$$

$$u = 0$$

und hieraus wird

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C + f)^3(C - 3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C - f)^3(C + 3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{D}$$

wo, da $\mathfrak{C}$ eine positive Größe ist, wenigstens zwey Wurzeln imaginär sind. Ist indeß $\mathfrak{A}$ negativ, welches statt findet, wenn

$$4096\,D^3 < 27(C + f)^3(3f - C)$$

ist, so sind die übrigen beyden Wurzeln reell; ist aber

$$4096\,D^3 > 27(C + f)^3(3f - C)$$

so sind alle vier Wurzeln imaginär.

4. Es bleibe B positiv, D aber sey negativ, und $= -F$. Da $B = \dfrac{9ff - 9CC}{32F}$, so ist $f > C$, und da

$$u = \frac{3C \mp 3f}{8F}$$

ist, so sind die Wurzeln von u nach ihrer Größe geordnet,

$$u = \frac{3(f - C)}{8F}$$

$$u = 0$$

$$u = \frac{3(C + f)}{8F}$$

Diese

Diese Werthe geben

$$\mathfrak{A} = -\frac{27(f - C)^3(C + 3f)}{4069 F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{27(C + f)^3(3f - C)}{4096 F^4} - \frac{1}{F}$$

wo, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ negativ sind, die Gleichung gewiß zwey reelle Wurzeln hat; die übrigen beyden sind, weil $\mathfrak{B}$ negativ ist, imaginär.

§. 309.

Wenn also die Buchstaben B, C, D positive Größen bedeuten, so sind folgende Fälle zu beurtheilen, wobey es, wegen $f = \sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)}$ auf nachstehendes ankommt.

I. Wenn die Gleichung

$$x^4 - Bx^2 \pm Cx + D = 0$$

ist, so sind alle Wurzeln reell, wenn

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)}$$

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)}$$

ist. Hingegen sind zwey Wurzeln reell und zwey imaginär, wenn

$$D > \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)}$$

aber

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)}$$

ist; und insgesammt imaginär, wenn

D <

$$D > \frac{3}{16}\left(\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9}BD)} + C\right)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9}BD)} - C)}$$

ist.

2. Wenn die Gleichung

$$x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$$

ist, so sind allemal zwey Wurzeln reell, und die beyden übrigen sind solches auch, wenn D zwischen die Grenzen

$$\frac{3}{16}\left(\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9}BD)} + C\right)\sqrt[3]{(C - 3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)})}$$

und

$$\frac{3}{16}\left(\sqrt{(C - \sqrt{(CC - \tfrac{32}{9})BD})}\right)\sqrt[3]{(C + 3\sqrt{(CC + \tfrac{32}{9}BD)})}$$

fällt; ist dies nicht, so sind dieselben imaginär.

3. Wenn die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$$

ist, so sind allemal zwey Wurzeln imaginär. Die übrigen beyden sind reell, wenn

$$D < \frac{3}{16}\left(\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} + C\right)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} - C)}$$

und imaginär, wenn

$$D > \frac{3}{16}\left(\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} + C\right)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} - C)}$$

ist.

4. Wenn die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$$

ist, so sind allemal zwey Wurzeln reell und zwey imaginär.

Erstes Exempel.

Es ist die Gleichung $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$, gegeben, man soll finden, ob die Wurzeln derselben reell oder imaginär sind.

Da dies Exempel zu dem ersten Falle gehört, so ist

$$B = 2;\ C = 3 \text{ und } D = 4$$

also

$$CC + \frac{32}{9}BD = 9 + \frac{32 \cdot 8}{9} = \frac{337}{9}$$

und

$$\sqrt{\left(CC + \frac{32}{9}BD\right)} = \frac{\sqrt{337}}{3}.$$

Sollen also alle Wurzeln reell seyn, so muß

$$4 < \frac{3}{16}\left(3 + \frac{\sqrt{337}}{3}\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337} - 3)} = \frac{1}{16}(9 + \sqrt{337})\sqrt[3]{(\sqrt{337} - 3)}$$

$$4 < \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{337}}{3} - 3\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337} + 3)} = \frac{1}{16}(\sqrt{337} - 9)\sqrt[3]{(\sqrt{337} + 3)}$$

seyn. Man muß daher auf dem Wege der Näherung suchen, ob $4 < \frac{69}{16}$ und $4 < \frac{24}{16}$ sey, und da bloß das erste ist, so hat die gegebene Gleichung zwey reelle Wurzeln und zwey imaginäre.

Zweytes Exempel.

Es ist die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0$$

Da diese Gleichung zum zweyten Falle gehört, so hat sie zwey reelle Wurzeln. Was die beyden übrigen betrifft, so ist, wegen

$$B = 9,\ C = 12 \text{ und } D = 4$$

Man

$$\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(144 - 32 \cdot 4)} = 4.$$

Man muß demnach untersuchen, ob

$$4 > \frac{3}{16} \cdot 16 \cdot \sqrt[3]{3}, \text{ d. h. } 4 > 0$$

und

$$4 < \frac{3}{16} \cdot 8\sqrt[3]{24}, \text{ d. h. } 4 < 3\sqrt[3]{3}$$

ist, und da beydes statt findet, so hat die gegebene Gleichung vier reelle Wurzeln.

Drittes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^4 + xx - 2x + 6 = 0.$$

Da diese Gleichung zum dritten Falle gehört, so hat sie gewiß zwey imaginäre Wurzeln. Dann ist

$$B = 1,\ C = 2 \text{ und } D = 6$$

also

$$\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(4 - \frac{64}{3})}$$

und da dieses eine imaginäre Größe ist, so sind auch die beyden übrigen Wurzeln imaginär.

Viertes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0.$$

Schafft man das zweyte Glied weg, indem man $x = y + 1$ setzt, so wird

$$\begin{array}{rcrrrrr}
x^4 & = & y^4 & + 4y^3 & + 6yy & + 4y & + 1 \\
-4x^3 & = & & -4y^3 & -12yy & -12y & -4 \\
+8x^2 & = & & & +8yy & +16y & +8 \\
-16x & = & & & & -16y & -16 \\
+20 & = & & & & & +20 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{also } y^4 + 2yy - 8y + 9 = 0$$

und diese Gleichung hat, da sie zu dem dritten Falle gehört, zwey imaginäre Wurzeln. Da ferner

$$B = 2, \; C = 8, \; D = 9$$

ist, so wird

$$\sqrt{(CC - \tfrac{32}{9}BD)} = \sqrt{(64 - 64)} = 0$$

Man vergleiche also $D = 9$ mit $\frac{3}{16} \cdot 8\sqrt[3]{-8} = -3$.

Da $D = 9 > -3$ ist, so sind auch die beyden übrigen Wurzeln imaginär.

Fünftes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$$

Schafft man das zweyte Glied durch die Substitution $x = y + 1$ weg, so wird

$$y^4 - 13yy + 12y + 0 = 0$$

wo also durch die Vergleichung mit dem zweyten Falle

$$B = 13, \; C = 12 \text{ und } D = 0$$

wird. Es muß demnach, wenn alle Wurzeln reell seyn sollen, $D > \frac{3}{16} \cdot 24 \cdot \sqrt[3]{-24}$, oder $0 > -9\sqrt[3]{3}$ und $D < 0$ seyn. Da also D nicht größer als 0 ist, so ist dies ein Merkmal, daß die Gleichung vier reelle Wurzeln hat.

Denn

Denn wenn $D = 0$ ist, so geht die andere Gleichung in $D < \frac{3}{16}\left(\frac{16 BD}{9C}\right)\sqrt[3]{4C}$, oder $1 < \frac{B}{3C}\sqrt[3]{4C}$, oder $27CC < 4B^3$ über. Es ist aber $27 \cdot 144 < 4 \cdot 13^3$ oder $36 \cdot 27 < 13^3$.

§. 310.

Es würde sehr mühsam und schwer seyn, diese Methode auch auf die höhern Gleichungen auszudehnen, weil dabey die Wurzeln der Differenzial-Gleichungen meistens nicht angegeben werden können; so oft dies möglich ist, läßt sich nach dem Gesagten bestimmen, wie viel reelle und wie viel imaginäre Wurzeln die gegebene Gleichung hat. Wenn also eine Gleichung nur aus drey Gliedern besteht, so läßt sich allemal finden, ob ihre Wurzeln reell oder imaginär sind. Es sey die allgemeine Gleichung

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0 = z$$

gegeben, wovon die Differenzial-Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$$

ist. Setzt man diese $= 0$, so ist zuvörderst $x^{n-1} = 0$, und wenn also n eine ungerade Zahl ist, so findet keine Wurzel statt, welche ein Größtes oder ein Kleinstes gäbe; ist aber n eine gerade Zahl, so hat man eine Wurzel, nemlich $x = 0$, worauf Rücksicht genommen werden muß. Dann ist aber $(m+n)x^m + nA = 0$, und diese Gleichung hat, wenn m eine gerade Zahl und A positiv ist, keine reelle Wurzel, so daß folgende Fälle zu überlegen sind.

1. Ist m eine gerade und n eine ungerade Zahl, so gilt die Wurzel $x = 0$ nicht. Wenn also A eine positive Größe ist, so hat man gar keine Wurzel, welche ein Größtes oder ein Kleinstes gäbe, und es hat daher die gegebene

Gleichung, weil $m + n$ eine ungerade Zahl ist, nur eine einzige reelle Wurzel. Ist aber A eine negative Größe $= - E$, so ist

$$x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}},$$

und daher

$$\alpha = + \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}} \text{ und } \beta = - \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$$

Diese Werthe geben

$$\mathfrak{A} = (x^m - E)x^n + B = - \frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

und

$$\mathfrak{B} = + \frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

Wenn also $\mathfrak{A}$ eine negative Größe oder

$$\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} > B$$

ist, so hat die Gleichung eine reelle Wurzel, die $> \alpha$ ist. Ist überdem

$$B > - \frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}$$

oder, um beyde Bedingungen zusammen zu fassen,

$$(m+n)^{m+n}B^m < m^m n^n E^{m+n}$$

so hat die Gleichung drey reelle Wurzeln, und wenn diese Bedingung nicht statt findet, nicht mehr als eine. Dies gilt von der Gleichung $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ist darin E negativ, so hat dieselbe allemal eine reelle Wurzel.

2. Es seyen beyde Zahlen m und n ungerade, also $m + n$ eine gerade Zahl, und es komme keine Wurzel $x = 0$ in Rechnung. Da

$(m+n)x^m$

$$(m + n)x^m + nA = 0$$

ist, so wird

$$x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m + n}}$$

und setzt man diese einzige Wurzel $= \alpha$, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{mA}{m + n} x^n + B = -\frac{mA}{m + n}\left(\frac{mA}{m + n}\right)^{n:m} + B$$

Ist dieser Werth negativ, so hat die Gleichung zwey reelle Wurzeln, sonst keine. Es hat also die Gleichung

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0$$

zwey reelle Wurzeln, wenn

$$m^m n^n A^{m+n} > (m + n)^{m+n} B^m$$

und keine, wenn

$$m^m n^n A^{m+n} < (m + n)^{m+n} B^m$$

ist.

3. Es seyen beyde Zahlen m und n, also auch $m + n$ gerade; so giebt eine Wurzel $x = 0$ ein Größtes oder ein Kleinstes, und sie ist eine einzige, wenn A eine positive Größe ist, woher, wenn man $\alpha = 0$ setzt, $\mathfrak{A} = B$ wird. Ist also B auch eine positive Größe, so hat die Gleichung keine reelle Wurzel; ist aber B negativ, so finden zwey reelle Wurzeln statt, aber auch nicht mehr, indem A positiv ist. Setzt man aber A negativ $= -E$, so ist

$$x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m + n}}$$

und man hat drey Größte oder Kleinste, nemlich

$$\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m + n}}$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = -\sqrt[m]{\frac{mE}{m + n}}$$

Diese Werthe geben für $z = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B.$$

$$\mathfrak{B} = B$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

Ist also B eine negative Größe, so hat die Gleichung nur zwey reelle Wurzeln, weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ negativ, und auch $\mathfrak{B} = B$ solches ist. Ist hingegen B positiv, so hat die Gleichung vier reelle Wurzeln, wenn

$$(m+n)^{m+n}B^m < m^m n^n E^{m+n}$$

und keine reelle Wurzel, wenn

$$(m+n)^{m+n}B^m > m^m n^n E^{m+n}$$

ist.

4. Ist m eine ungerade und n eine gerade Zahl, so giebt die Gleichung $x = 0$ ein Größtes oder ein Kleinstes, und außerdem ist

$$x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$$

Ist also A eine positive Zahl, so wird

$$\alpha = 0,\ \beta = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$$

und also

$$\mathfrak{A} = B, \text{ und}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

Ist also B eine negative Größe $= -F$, und außerdem

$$m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n}F^m$$

so hat die Gleichung drey reelle Wurzeln, sonst aber nur eine. Ist aber A eine negative Größe $= -E$, so wird

x =

$$x = + \sqrt[m]{\frac{nE}{m + n}}, \text{ und daher}$$

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m + n}} \text{ und } \beta = 0$$

also

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m + n}\left(\frac{nE}{m + n}\right)^{n:m} + B$$

$$\mathfrak{B} = B.$$

Es hat demnach die Gleichung drey reelle Wurzeln, wenn B eine positive Größe, und

$$m^m n^n E^{m+n} > (m + n)^{m+n} B^m$$

ist, und nur eine einzige, wenn diese Bedingung nicht statt findet.

§. 311.

Wenn alle Coefficienten $= 1$ sind, und μ und ν ganze Zahlen bedeuten, so kann man folgende Gleichungen auf nachstehende Art beurtheilen.

$x^{2\mu + 2\nu - 1} + x^{2\nu - 1} \pm 1 = 0$ hat eine einzige reelle Wurzel.

$x^{2\mu + 2\nu - 1} - x^{2\nu - 1} \pm 1 = 0$ hat drey reelle Wurzeln, wenn

$$(2\mu + 2\nu - 1)^{2\mu + 2\nu - 1} < (2\mu)^{2\mu}(2\nu - 1)^{2\nu - 1}$$

ist, und da dies nie statt finden kann, so hat man auch nie mehr als eine reelle Wurzel.

$x^{2\mu + 2\nu} \pm x^{2\nu - 1} - 1 = 0$ hat zwey reelle Wurzeln.

$x^{2\mu + 2\nu} \pm x^{2\nu - 1} + 1 = 0$ hat keine reelle Wurzel.

$x^{2\mu + 2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0$ hat keine reelle Wurzel.

$x^{2\mu + 2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0$ hat zwey reelle Wurzeln.

$x^{2\mu+2\nu+1} + x^{2\nu} \pm 1 = 0$ hat eine reelle Wurzel.

$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0$ hat eine reelle Wurzel.

Da im dritten Falle die Exponenten gerade Zahlen sind, so kann man die Gleichung durch die Substitution $xx = y$ auf eine einfachere Form bringen, und so kann dieser Fall auch weggelassen werden. Wenn also eine Gleichung aus drey Gliedern besteht, so kann dieselbe nicht mehr als drey reelle Wurzeln haben.

Exempel.

Man soll die Fälle bestimmen, in welchen die Gleichung

$$x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$$

drey reelle Wurzeln hat.

Da diese Gleichung zum vierten Falle gehört, so ist klar, daß die Größen A und B entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Findet also dieses nicht statt, so hat die Gleichung auch nicht mehr als eine reelle Wurzel. Hat aber die Gleichung die Form

$$x^5 \pm Ax^2 \mp B = 0$$

so muß, wenn sie drey reelle Wurzeln haben soll, nothwendig

$$3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3 \text{ oder } A^5 > \frac{3125}{108} B^3$$

seyn. Ist also $B = 1$, so muß

$$A^5 > \frac{3125}{108} \text{ oder } A > 1{,}960132$$

seyn. Es sey also $A = 2$, so hat die Gleichung

$$x^5 - 2x^2 + 1 = 0$$

drey reelle Wurzeln, und da die eine dieser Wurzeln $x = 1$ ist, so folgt, daß die biquadratische Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

zwey

zwey reelle Wurzeln habe. Man erkennt dieses theils aus den im gegenwärtigen Capitel gegebenen Vorschriften, theils ist es daraus klar, weil jede Gleichung von einer geraden Ordnung, wenn das absolute Glied negativ ist, allemal zwey reelle Wurzeln hat.

§. 312.

Auch Gleichungen von vier Gliedern lassen sich hiernach beurtheilen, wenn die Exponenten von x in den drey ersten oder den drey letzten Gliedern in einer arithmetischen Progression stehen.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung: $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$ gegeben.

Setzt man $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, so ist

$$\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

und diese Gleichung $= 0$ gesetzt, giebt einmal $x^2 = 0$, worauf man aber, weil es ein doppelter Werth ist, weiter keine Rücksicht zu nehmen hat. Ferner ist

$$7x^4 - 10x^2 + 3 = 0$$

woraus $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$ wird, und vier Werthe von x fließen, welche nach ihrer Größe geordnet, folgende Werthe für z geben:

$\alpha = 1$	$\mathfrak{A} = -a$
$\beta = +\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\gamma = -\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{C} = \frac{-48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\delta = -1$	$\mathfrak{D} = -a$

Ist also a eine positive Zahl, so ist entweder

$$a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ oder } a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Im ersten Falle hat die Gleichung, weil die Größen A, B, C und D insgesammt positiv sind, nur eine einzige reelle Wurzel. Im andern Falle hingegen hat sie drey reelle Wurzeln, die eine > 1, die zweyte zwischen den Grenzen 1 und $\sqrt{\frac{3}{7}}$, und die dritte zwischen den Grenzen $+\sqrt{\frac{3}{7}}$ und $-\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Wenn a eine negative Größe wird, indem man $x = -y$ setzt, so wird die Gleichung auf die vorige Form gebracht. Sollen also drey Wurzeln reell seyn, so muß nothwendig $a < 0{,}0916134$, oder $a < \frac{1}{11}$ seyn.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0.$$

Da hier die Exponenten der drey letzten Glieder in einer arithmetischen Progression stehen, so setze man $x = \frac{1}{y}$. Hierdurch erhält man

$$a - 3y^2 + 20y^5 - 12y^8 = 0$$

Man setze also

$$z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0$$

so ist die Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0$$

und hieraus wird zuvörderst $y = 0$, und dann

y^6

$$y^6 = \frac{50y^2 - 6}{96}, \text{ und } y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}$$

also entweder

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ oder } y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}.$$

Ordnet man diese drey Wurzeln nach ihrer Größe, so sind die zugehörigen Werthe von z

$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a$
$\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$	$\mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a$
$\gamma = 0$	$\mathfrak{C} = -a$

Ist also $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, so hat die gegebene Gleichung zwey reelle Wurzeln, die eine $> \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, und die andere < 0. Außerdem werden ihr noch zwey reelle Wurzeln zukommen, wenn $\mathfrak{B}$ eine positive Größe, d. h. $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ ist. Wenn daher a zwischen den Grenzen $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ und $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ oder zwischen 0,48075... und 0,50674 enthalten ist, so hat die Gleichung vier reelle Wurzeln. Setzt man also $a = \frac{1}{2}$, so hat die Gleichung

$$x^8 - 6x^6 + 20x^3 - 24 = 0$$

vier reelle Wurzeln zwischen den Grenzen ∞; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$, 0; $-\infty$, und es sind also davon drey positiv und eine negativ.

Dreyzehntes Capitel.

Von den Kennzeichen der imaginären Wurzeln.

§. 313.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir die Methode, die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichungen zu bestimmen, erklärt, so daß darnach entschieden werden kann, ob und wie viel eine gegebene Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln habe. Zwar ist der Gebrauch dieser Methode öfters mit sehr großen Schwierigkeiten verknüpft, weil die Differenzialgleichung häufig so beschaffen ist, daß sich ihre Wurzeln nicht angeben lassen. Wenn nun auch gleich in diesen Fällen eben dieselbe Methode auf die Differenzialgleichungen angewandt, und dadurch die Beschaffenheit ihrer Wurzeln bestimmt werden könnte, so würde doch die Arbeit meistens äußerst mühsam werden. Es ist daher hier oft genug, Kennzeichen zu haben, woraus man sicher auf imaginäre Wurzeln in der Gleichung schließen kann, obgleich aus der Abwesenheit dieser Kennzeichen nicht auf die Realität aller Wurzeln geschlossen werden darf. Bey aller Unvollkommenheit hat die Kenntniß dieser Kennzeichen ihren Nutzen, und es sollen daher dieselben den Gegenstand der Untersuchung in dem gegenwärtigen Capitel ausmachen.

§. 314.

§. 314.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, daß die Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

insgesammt reell sind, und zugleich ist gezeigt worden, daß aus der Realität aller Wurzeln der Differenzialgleichung nicht fließt, daß auch die Wurzeln der Hauptgleichung insgesammt reell seyn. Dagegen kann man, wenn die Differenzialgleichung imaginäre Wurzeln hat, behaupten, daß die Gleichung selbst wenigstens eben so viel imaginäre Wurzeln haben werde, ich sage zum wenigsten, denn sie kann dergleichen auch mehrere haben. Auf diese Art läßt sich aus der Differenzialgleichung nichts weiter folgern, als daß die Hauptgleichung, wenn die Differenzialgleichung imaginäre Wurzeln hat, ebenfalls und zum wenigsten auch eben so viel imaginäre Wurzeln haben werde.

§. 315.

Wenn eine gegebene Gleichung durch irgend eine Potestät der unbekannten Größe x^m, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, multiplicirt wird: so hat, weil die neue Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, wenn die Wurzeln der gegebenen insgesammt reell sind, auch die Differenzialgleichung, durch x^{m-1} dividirt, lauter reelle Wurzeln. Wenn daher alle Wurzeln der Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

reell sind: so hat auch die Gleichung

(m + n)

$$(m+n)x^n - (m+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)Bx^{n-2} - \text{rc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln. Auf ähnliche Art hat auch die Gleichung, welche man durch die fernere Multiplication mit x^k und abermalige Differenziation erhält, oder

$$(m+n)(k+n)x^n - (m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1} + (m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2} - \text{rc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln, und zugleich kann man auf diesem Wege so weit fortfahren als man will. Wenn aber eine solche Gleichung imaginäre Wurzeln hat, so kann man bey der Entdeckung dieser Wurzeln sicher behaupten, daß auch die gegebene Gleichung zum wenigsten eben so viel imaginäre Wurzeln haben werde.

§. 316.

Wenn die gegebene Gleichung vor der Differenziation mit keiner Potestät von x multiplicirt wird, so steigt man bey der Beurtheilung von Grad zu Grad ab. Wenn also die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat, so haben auch ihre Differenzialgleichungen von allen Ordnungen lauter reelle Wurzeln. Es sind demnach auch alle Wurzeln folgender Gleichungen reell.

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{rc.} = 0$$

$$n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-2)(n-3)Bx^{n-4} - \text{rc.} = 0$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3} - (n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4} + \text{rc.} = 0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5} + \text{rc.} = 0$$

rc.

und

und diese Gleichungen lassen sich auf folgende Form bringen.

$$x^{n-1} - \frac{(n-1)}{n}Ax^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}Bx^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} + \text{rc.} = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{(n-2)}{n}Ax^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}Bx^{n-4} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} + \text{rc.} = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{(n-3)}{n}Ax^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}Bx^{n-5} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} + \text{rc.} = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{(n-4)}{n}Ax^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}Bx^{n-6} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-7} + \text{rc.} = 0$$

rc.

§. 317.

Auf diese Art läßt sich die Beurtheilung auf Gleichungen, welche um bestimmte Grade niedriger sind, als die gegebene, ausdehnen. Ist z. B. m irgend eine kleinere Zahl als n, so sind, wenn die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, auch alle Wurzeln folgender Gleichung vom Grade m reell,

$$x^{m} - \frac{m}{n}Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)}Bx^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{m-3} + \text{rc.} = 0.$$

Setzt man $m = 2$, so bekommt man die Gleichung

$$x^2 - \frac{2}{n}Ax + \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)}B = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung werden reell seyn, wenn die gegebene Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat. Da aber diese quadratische Gleichung keine reelle Wurzeln haben kann, wofern nicht $\frac{AA}{nn} > \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)}B$ ist, so folgt auch, daß die gegebene Gleichung nicht lauter reelle Wurzeln haben werde, wofern nicht $AA > \frac{2n}{n-1}B$ ist. Wenn also $AA < \frac{2n}{n-1}B$ ist, so ist dies ein sicheres Kennzeichen, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln hat.

§. 318.

Hier haben wir also eine Eigenschaft kennen gelernt, welche den Coefficienten der drey ersten Glieder nothwendig zukommen muß, wenn alle Wurzeln der Gleichung reell seyn sollen; und diese Eigenschaft ist eins von den Kennzeichen, deren wir im Anfange dieses Capitels erwähnten. Denn wenn auch aus der Bestimmung $AA > \frac{2n}{n-1}B$ nichts für die Realität der Wurzeln folgt, so ist doch diese, $AA < \frac{2n}{n-1}B$ ein sicheres Kennzeichen der Anwesenheit zweyer imaginären Wurzeln. So muß, wenn man für n nach und nach 2, 3, 4, 5 ꝛc. setzt, wenn alle Wurzeln reell seyn sollen.

bey	seyn
$x^2 - Ax + B = 0$	$A^2 > 4B$
$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$	$A^2 > \frac{6}{2}B$
$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$	$A^2 > \frac{8}{3}B$
$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$	$A^2 > \frac{10}{4}B$

und wenn also das zweyte Glied fehlt, und der Coefficient des dritten Gliedes oder B positiv, d. h. die Gleichung

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

ist: so können nicht alle Wurzeln reell, sondern es müssen zum wenigsten zwey imaginär seyn.

§. 319.

Dergleichen Kennzeichen lassen sich auch für die Coefficienten der übrigen Glieder finden, wenn man erwägt, daß die Gleichung

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{etc.} = 0$$

eben so viel reelle und imaginäre Wurzeln hat, als die gegebene. Es entsteht nemlich diese Gleichung aus der gegebenen durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$, so daß man durch die Wurzeln dieser Gleichung zugleich die Wurzeln von jener hat. Hat also die gegebene Gleichung und also auch folgende,

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{etc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln, so sind auch die Wurzeln der Differenzialgleichung von dieser,

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - \text{etc.} = 0$$

insgesammt reell. Substituirt man nun wieder x für $\frac{1}{y}$, so bekommt man die Gleichung

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung werden insgesammt reell seyn,

seyn, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung solches sind. Hieraus erhellet schon, daß für $n = 3$ nothwendig $BB > 3AC$ seyn muß.

§. 320.

Differenziirt man aber jene Gleichung weiter, so bekommt man

$$Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3} + \frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4} + \frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5} + \frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} - \text{etc.} = 0$$

etc.

also überhaupt, wenn m eine kleinere Zahl als n ist,

$$Ax^{m} - \frac{2m}{n-1}Bx^{m-1} + \frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2} - \text{etc.} = 0$$

Setzt man nun $m = 2$, so bekommt man die Gleichung

$$Ax^{2} - \frac{4}{n-1}Bx + \frac{6}{(n-1)(n-2)}C = 0$$

wo, wenn die Wurzeln reell seyn sollen,

$$\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$$

seyn muß. Soll also die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln haben, so muß

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

seyn. Ist hingegen

$$BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

so ist dies ein sicheres Kennzeichen, daß die Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln hat. Ist also

$n = 3$ so hat man an $BB > 3AC$

$n = 4$ „ „ „ „ $BB > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2}AC$

$n = 5$ „ „ „ „ $BB > \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3}AC$

u. s. f.

ein Merkmal.

§. 321.

Um diese Kennzeichen auf die folgenden Coefficienten auszudehnen, wollen wir die vorhin gefundene Differenzialgleichung

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \text{etc.} = 0$$

wieder zur Hand nehmen, und sie von neuem differenziiren, wodurch wir

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \text{etc.} = 0$$

bekommen. Setzen wir hierin wieder $\frac{1}{x}$ für y, so wird

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

und durch fernere Differenziation dieser Gleichung bekommen wir

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2}Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)}Dx^{n-5}$$
$$- \text{etc.} = 0$$

und überhaupt

$$Bx^m - \frac{3m}{n-2}Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)}Dx^{m-2} - \text{etc.}$$
$$= 0.$$

Nimmt man $m = 2$, so entsteht die quadratische Gleichung

$$Bx^2 - \frac{2 \cdot 3}{n-2} Cx + \frac{6 \cdot 2}{(n-2)(n-3)} D = 0$$

deren Wurzeln reell seyn werden, wenn

$$\frac{9CC}{(n-2)^2} > \frac{6 \cdot 2BD}{(n-2)(n-3)} \text{ oder } CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$$

ist. Wenn also die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln haben soll, so muß $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)} BD$ seyn, und wenn dies nicht ist, so hat sie zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln.

§. 322.

Wenn wir die Gleichung

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - \text{ꝛc.} = 0$$

von neuem differenziiren, so wird

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \text{ꝛc.} = 0$$

oder

$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \text{ꝛc.} = 0.$$

Setzt man hierin wieder x für $\frac{1}{y}$, so erhält man

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Differenziirt man diese Gleichung von neuem, so wird

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{(n-3)} Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)} Ex^{n-6}$$
$$- \text{ꝛc.} = 0$$

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)}{(n-3)} Dx^{n-6} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)} Ex^{n-6}$$
$$- \text{ꝛc.} = 0$$

und überhaupt

$$Cx^m - \frac{4m}{n-3}Dx^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-2} - \text{ꝛc.}$$
$$= 0.$$

Setzt man $m = 2$, so sind

$$Cx^2 - \frac{2 \cdot 4}{n-3}Dx + \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)}E = 0$$

und wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell seyn sollen, so muß

$$\frac{4 \cdot 4}{(n-3)^2}DD > \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)}CE, \text{ oder}$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

seyn.

§. 323.

Hieraus läßt sich schon das Verhältniß aller Coefficienten hinlänglich beurtheilen. Soll also überhaupt die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5}$$
$$+ \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln haben, so muß

$$AA > \frac{2n}{1(n-1)}B$$

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

$$CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

$$EE > \frac{6(n-4)}{5(n-5)}DG$$

ꝛc.

 seyn.

seyn. Fehlt eine von diesen Bedingungen, so hat die Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln. Wenn ferner diese Kennzeichen nicht von einander abhängen, so ist auch leicht einzusehen, daß die Gleichung eben so viel Paar imaginäre Wurzeln haben werde, als von ihnen nicht statt finden. Dagegen können alle erwähnte Bedingungen bey einer Gleichung angetroffen werden, ohne daß daraus eine gänzliche Abwesenheit der imaginären Wurzeln geschlossen werden dürfte; ja es kann dabey eine Gleichung lauter imaginäre Wurzeln haben. Man muß daher diese Kennzeichen auch nicht weiter ausdehnen, als sie nach den Quellen, woraus sie abgeleitet sind, ausgedehnt werden dürfen.

§. 324.

Man erkennt aber bald, daß nicht ein jedes fehlende Kennzeichen des vorhergehenden §. zwey imaginäre Wurzeln anzeigen könne. Hat nemlich eine Gleichung n Dimensionen, und folglich $n + 1$ Glieder; so giebt jedes davon, das erste und letzte ausgenommen, und also alle $n - 1$ Kennzeichen; aber wenn auch alle fehlen, so kann doch die Gleichung nicht $2n - 2$ imaginäre Wurzeln haben, da sie in allem nur n haben kann. Fehlt eins von diesen Kennzeichen, so ist man gewiß, daß die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln hat; da aber auch die Abwesenheit zweyer ebenfalls nur zwey imaginäre Wurzeln anzeigen kann, so muß man dabey untersuchen, ob sie unmittelbar auf einander folgen oder nicht. Im ersten Falle wird die Anzahl der imaginären Wurzeln nicht größer, im andern Falle aber zeigt jedes zwey imaginäre Wurzeln an. Ist daher z. B. gleich

$$AA < \frac{2n}{n-1}B \text{ und } BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

so folgt doch daraus nicht nothwendig, daß die Gleichung vier imaginäre Wurzeln habe; aber dagegen hat man Recht dieses zu behaupten, wenn

$$AA < \frac{2n}{n-1}B \text{ und } CC < \frac{4(n-1)}{3(n-3)}BD$$

bey $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$ ist.

§. 325.

Aus zweyen unmittelbar auf einander folgenden Kennzeichen der imaginären Wurzeln folgt also nicht mehr als aus einem, aber wenn diese Kennzeichen in unterbrochener Ordnung auf einander folgen, so daß zwischen je zweyen eines oder mehrere fallen, so zeigt jedes die Anwesenheit zweyer imaginären Wurzeln an. Hierdurch gelangt man zu folgender Regel. Man schreibe über die Glieder der gegebenen Gleichung, das erste und letzte ausgenommen, die vorhin gefundenen Coefficienten der Kennzeichen

$$\frac{2n}{n-1} \quad \frac{3(n-1)}{2(n-2)} \quad \frac{4(n-2)}{3(n-3)} \quad \frac{5(n-3)}{4(n-4)} \quad \text{etc.}$$

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

$$+ \quad \cdot\,\cdot \quad \cdot\,\cdot \quad \cdot\,\cdot \quad \cdot\,\cdot \quad \text{etc.}$$

Dann untersuche man die Quadrate der Coefficienten, und überlege, ob sie größer oder kleiner sind, als das Produkt aus dem darüber stehenden Bruche in die angrenzenden Coefficienten, und schreibe im ersten Falle das Zeichen +, im andern aber das Zeichen — unter das Glied, unter das erste und letzte aber allemal +. Ist dies geschehen, so hat die Gleichung wenigstens eben so viel imaginäre Wurzeln

zeln als bey den untergeschriebenen Zeichen Abwechselungen angetroffen werden.

§. 236.

Dies ist die Regel, welche Newton zur Entdeckung der imaginären Wurzeln der Gleichung gegeben hat; man muß aber die Bemerkung dabey nicht aus der Acht lassen, daß eine Gleichung mehr imaginäre Wurzeln haben kann, als man durch sie zu entdecken im Stande ist. Dieses Umstandes wegen hat man sich Mühe gegeben, andere ähnliche aber weiter reichende Regeln zu erfinden. Unter diesen ist vorzüglich die von Campbell merkwürdig, welche man der Ausgabe von Newtons Arithmetica universali angehängt findet, und auf folgenden Lehnsatze beruht:

Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon,$ ꝛc. Größen bedeuten, ihre Anzahl $= m$, und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{ꝛc.} = S, \text{ und}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{ꝛc.} = V$$

ist: so ist offenbar $V > 0$. Da aber auch

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \text{ꝛc.} = \frac{SS - V}{2}$$

ist, so wird

$$(m - 1)V > SS - V, \text{ oder } mV > SS.$$

Denn nimmt man die Quadrate der Differenzen zwischen je zweyen von diesen Größen, so ist ihre Summe

$$= (\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + \text{ꝛc.}$$
$$= (m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{ꝛc.}) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \text{ꝛc.})$$
$$= (m - 1)V - 2\frac{(SS - V)}{2} = mV - SS.$$

Da

Da also die Summe der Quadrate reeller Größen allemal positiv ist, so ist $mV - SS > 0$, und also $mV > SS$.

§. 327.

Diesen Lehnsatz vorausgesetzt, sey die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \text{etc.} = 0$$

gegeben. Sind alle Wurzeln dieser Gleichung reell, so ist die Anzahl derselben $= n$, und wenn man die Wurzeln $a, b, c, d, e,$ nennt, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Natur der Gleichungen

	Zahl der Glieder
$A = a + b + c + d + e + \text{etc.}$	n
$B = ab + ac + ad + bc + bd + \text{etc.}$	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
$C = abc + abd + abe + acd + bcd + \text{etc.}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$D = abcd + abce + dbde + \text{etc.}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
etc.	

Nimmt man nun von den Gliedern dieser Reihe die Quadrate, und setzt dabey

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$
$$Q = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2\ b^2c^2 + \text{etc.}$$
$$R = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + \text{etc.}$$
$$S = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + \text{etc.}$$
etc.

so ist nach der Lehre von den Combinationen

$$P = A^2 - 2B$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D$$
$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H$$
etc.

§. 328.

Nach diesem Lehnsatze haben wir

$$nP > AA$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}Q > BB$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}R > CC$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}S > DD$$

ꝛc.

und setzen wir daher für P, Q, R, ꝛc. die vorhin gefundenen Werthe, so bekommen wir folgende Eigenschaften der reellen Wurzeln

$$nAA - 2nB > AA, \text{ oder } AA > \frac{2n}{n-1}B$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}B - \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}AC + \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}D > BB$$

oder

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}}{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 1}(AC - D)$$

Auf ähnliche Art geben die folgenden Gleichungen

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1}(BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 1}(CE - BF + AG - H)$$

Hier

Hier wird also das Quadrat der Coefficienten nicht bloß mit dem Produkte der angrenzenden Coefficienten verglichen, sondern auch mit dem Produkte derjenigen, die auf beyden Seiten gleich weit abstehen, so doch, daß diese Produkte wechselsweise positiv und negativ genommen werden.

§. 329.

Man muß demnach über die Glieder der Gleichung, das erste und letzte ausgenommen, die Brüche schreiben, deren Zähler die Coefficienten eines Binomius in derselben Dignität, und die Nenner eben diese Coefficienten um eins vermindert sind. Behandelt man auf diese Art die quadratischen, cubischen, biquadratischen Gleichungen rc.: so ist

für die quadratischen Gleichungen

$$x^2 - \overset{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0; \quad A^2 > B$$

für die cubischen Gleichungen

$$x^3 - \overset{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \overset{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

$$A^2 > 3B \text{ und } B > 3AC.$$

für die biquadratischen Gleichungen

$$x^4 - \overset{\frac{8}{3}}{A}x^3 + \overset{\frac{12}{5}}{B}x^2 - \overset{\frac{8}{3}}{C}x + D = 0$$

$$A^2 > \tfrac{8}{3}B; \; B^2 > \tfrac{12}{5}(AC - D); \; C^2 > \tfrac{8}{3}BD,$$

für die Gleichungen des fünften Grades

$$x^5 - \overset{\frac{10}{4}}{A}x^4 + \overset{\frac{20}{9}}{B}x^3 - \overset{\frac{20}{9}}{C}x^2 + \overset{\frac{10}{4}}{D}x - E = 0$$

$$AA > \tfrac{10}{4}B; \; B^2 > \tfrac{20}{9}(AC - D); \; C^2 > \tfrac{20}{9}(BD - AE);$$

$$D^2 > \tfrac{10}{9}CE,$$

für die Gleichungen des sechsten Grades

$$x^6 - \overset{\frac{12}{5}}{A}x^5 + \overset{\frac{30}{14}}{B}x^4 - \overset{\frac{40}{19}}{C}x^3 + \overset{\frac{30}{14}}{D}x^2 - \overset{\frac{12}{9}}{E}x + F = 0$$

$$A^2 > \frac{12}{5}B;\ B^2 > \frac{30}{14}(AC - D);\ C^2 > \frac{40}{19}(BD - AE + F);$$
$$D^2 > \frac{30}{14}(CE - BF);\ E^2 > \frac{12}{5}DF.$$
u. s. w.

§. 330.

Fehlt eins von diesen Kennzeichen, so erkennt man daran, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln hat, fehlen aber mehrere, so muß man, da die Gleichung nicht zweymal so viel imaginäre Wurzeln haben kann als es Kennzeichen giebt, einen ähnlichen Weg einschlagen, als vorhin bey der Newtonianischen Methode. Ist nemlich das Quadrat des Coefficienten eines Gliedes größer als das Produkt aus dem über dem Coefficienten stehenden Bruche in die Produkte der anliegenden und auf beyden Seiten gleichweit abstehenden Coefficienten, so setzt man das Zeichen +, und im entgegenstehenden Falle das Zeichen — darunter. Ist dies geschehen, so zeigt jede Abwechselung der Zeichen eine imaginäre Wurzel an. Wenn daher diese Regel auf mehr imaginäre Wurzeln führt als die Newtonische, so kommt sie der Wahrheit näher; es kann aber die gegebene Gleichung mehr imaginäre Wurzeln haben, als man nach beyden Methoden findet.

§. 331.

Man würde sich demnach irren, wenn man diese Kennzeichen als so vollkommen betrachten wollte, daß dadurch alle reelle und imaginäre Wurzeln entdeckt werden könnten, und die Folgen davon würden mit dem Grade der Gleichung zunehmen. Bey der quadratischen Gleichung sind sie vollkommen zureichend, aber schon die cubische Gleichung kann zwey imaginäre Wurzeln haben, wenn man gleich

gleich durch keine von jenen Methoden darauf geführt wird. Um diese Fälle kennen zu lernen, sey die Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

gegeben, wo die gedachten Methoden, wenn $AA > 3B$ und $BB > 3AC$ ist, keine imaginäre Wurzel anzeigen. Nach §. 306. muß aber auch, wenn keine imaginäre Wurzel statt finden soll, $B < \frac{1}{3}AA$ seyn, und eben dieses heischen jene Methoden. Setzt man also $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, so muß C zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 - Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

enthalten seyn, und die erwähnten Methoden fordern bloß, daß $C < \frac{BB}{3A}$, oder $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$ sey. Diese Bedingung kann statt finden, wenn gleich C nicht zwischen den angezeigten Grenzen liegt.

§. 332.

Ist nemlich $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$, so nimmt man nach jenen Regeln keine imaginäre Wurzeln wahr, und dennoch werden zwey imaginäre Wurzeln statt finden, wenn

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

oder

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \ldots$$

ist. Wenn also entweder $gg > \frac{(ff + Af)^2}{27A}$ o[illegible]

$\frac{(Af - ff)^2}{27A}$ ist, so hat die cubische Gleich[illegible]

näre Wurzeln, wenn auch keine der be[illegible] den dergleichen anzeigen. Wir haben aber A positiv angenommen, weil die Gleichung im entgegenstehenden Falle durch die Substitution $x = -y$ so verwandelt werden kann, daß A positiv wird. Hiernach lassen sich unzählige cubische Gleichungen machen, welche zwey imaginäre Wurzeln haben, die man nach den beschriebenen Methoden nicht entdeckt. Denn setzt man

$$gg = \frac{(ff + Af)^2}{27A} + hh, \text{ so wird}$$

$$C = \frac{(ff - AA)^2}{27A} - gg = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 - hh$$

und

$$A = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff,$$

und setzt man

$$gg = \frac{(Af - ff)^2}{27A} - hh$$

so daß $hh < \frac{(Af - ff)^2}{27A}$ ist, so wird

$$C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3 + hh, \text{ und}$$
$$B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff;$$

in beyden Fällen aber bekommt man eine Gleichung mit zwey imaginären Wurzeln, welche sich durch jene Regeln nicht entdecken lassen. Es sey z. B. $A = 4$, $f = 1$; so wird $B = 5$, und, da hierdurch $gg = \frac{25}{108} + hh$ wird, $C = \frac{225}{108} - \frac{25}{108} - hh = \frac{50}{27} - hh$. Ist daher $C < \frac{50}{27}$, so hat die Gleichung $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ allemal zwey imaginäre Wurzeln. Nimmt man aber $gg = \frac{1}{12} - hh$, so muß $hh < \frac{1}{12}$ seyn, und es wird $C = \frac{25}{12} - \frac{1}{12} + hh = 2 + hh$. Es sey $hh = \frac{1}{16}$, so hat die Gleichung $x^3 -$

4xx

$4xx + 5x - \frac{33}{16} = 0$ zwey imaginäre Wurzeln, obgleich die öfters erwähnten Regeln auf keine führen.

§. 333.

Ja es lassen sich auch allgemeine Gleichungen machen, wobey diese Methoden keine imaginären Wurzeln angeben, ob dieselben gleich öfters zwey und mehrere imaginäre Wurzeln enthalten. Dies findet allemal statt, wenn in der Gleichung stets zwey ähnliche Zeichen auf einander folgen, wie in diesem

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0$$

oder

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \text{ꝛc.} = 0.$$

Daß aber diese Gleichungen imaginäre Wurzeln haben können, erhellet schon aus der cubischen Gleichung

$$x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$$

welche allemal zwey imaginäre Wurzeln hat, wenn $ff = AA + 3B$ gesetzt wird, und $-C$ zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

liegt. Indeß lassen sich diese Fälle aus jenen Regeln ableiten, wenn man die Gleichung durch eine Substitution auf eine andere Form bringt. Denn setzt man

$x = y + k$, so wird

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + 3kyy + 3kky + k^3 \\ \quad - Ayy - 2Aky - Akk \\ \qquad\quad - By - Bk \\ \qquad\qquad\quad + C \end{array}\right\} = 0$$

und diese Gleichung nach den beschriebenen Methoden untersucht, ist zuvörderst, wie sogleich in die Augen fällt,

$$(3k - A)^2 > 3(kk - 2Ak - B)$$

und wenn

(3kk

$$(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^3 - Akk - Bk + C)$$

seyn soll, wie das andere Kennzeichen mit sich bringt, so ist nothwendig, daß

$$BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0$$

sey, was auch k für einen Werth habe. Man nehme demnach k so, daß dieser Ausdruck einen kleinsten Werth erhalte, d. h. man setze $k = \frac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$, wo es, wenn dieser Ausdruck noch > 0 ist, wahrscheinlich wird, daß keine imaginäre Wurzel statt finde. Es wird aber

$$BB + 3AC - \frac{(AB - 9C)^2}{2(AA + 3B)} + \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0$$

oder

$$BB + 3AC > \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)}.$$

Da also $B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA$ ist, so wird

$$4ff(\tfrac{1}{9}f^4 - \tfrac{2}{9}AAff + \tfrac{1}{9}A^4 + 3AC) > (\tfrac{1}{3}Aff - \tfrac{1}{3}A^3 - 9C)^2$$

oder

$$4f^6 - 8A^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff$$

$$>$$

$$A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

oder

$$4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

und wenn man also die Faktoren nimmt, so muß seyn

$$(2f^3 + A^3 - 3Af + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Af - 27C) > 0$$

Es zeigen demnach jene Regeln imaginäre Wurzeln an, wenn

$C > \frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3$, und
$C > \frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3$, oder
$C < \frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af - \frac{2}{27}f^3$, und
$C < \frac{1}{27}A^3 + \frac{1}{9}Af + \frac{2}{27}f^3$

ist,

ist, und dies sind eben die Bedingungen, welche wir oben gefunden haben.

§. 334.

Hierauf läßt sich auch der Beweis des Harriottischen Satzes gründen, daß jede Gleichung so viel reelle positive Wurzeln habe, als in der Gleichung Abwechselungen, und so viel negative, als darin Folgen gleicher Zeichen vorkommen. Angenommen nemlich, daß die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle und positive Wurzeln habe, so werden nicht nur auch alle Wurzeln der Differenzialgleichung

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

reell und positiv, sondern zugleich die Grenzen der Wurzeln von jener Gleichung seyn. Ferner hat alsdann auch die durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ entstehende Gleichung

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle und positive Wurzeln, welche aber die reciproken Größen von den Wurzeln der Grundgleichung und also Größte sind, wenn diese zu den Kleinsten gehören, und umgekehrt. Dies vorausgesetzt differenziire man die gegebene Gleichung, bis man zu der einfachen Gleichung $x - \frac{1}{n} = 0$ gelangt, wo die Wurzel positiv ist, und der Coefficient des zweyten Gliedes negativ, wie wir angenommen haben. Hätte hingegen dieser Coefficient das Zeichen $+$, so würde folgen, daß die Gleichung nicht lauter positive, sondern zum wenigsten eine negative Wurzel hätte.

§. 335.

§. 335.

Wenn die gegebene Gleichung in ihre reciproke Gleichung verwandelt und differenziirt, dann aber x wieder eingeführt, und die Differenziation so lange fortgesetzt wird, bis man nach §. 320. auf die einfache Gleichung $Ax - \frac{2}{n-1}B = 0$ kommt, so wird auch die Wurzel dieser Gleichung positiv seyn, wenn die gegebene Gleichung lauter reelle und positive Wurzeln hat, und das zweyte und dritte Glied dieser Gleichung daher verschiedene Zeichen haben. Haben also diese Glieder einerley Zeichen, so ist solches ein Kennzeichen von wenigstens einer und zwar von der vorigen verschiedenen negativen Wurzel, so daß, wenn die drey ersten Glieder einerley Zeichen haben, dieses ein Kennzeichen von der Anwesenheit zweyer negativen Wurzeln ist.

§. 336.

Setzt man auf ähnliche Art die Verwandlung und Differenziation nach §. 321. fort, bis man auf die einfache Gleichung $Bx - \frac{3}{n-2}C = 0$ kommt, so muß auch die Wurzel dieser Gleichung positiv seyn, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung solches sind; und wenn also das dritte und vierte Glied einerley Zeichen haben, so ist dies wieder ein Kennzeichen einer negativen Wurzel. Ueberhaupt ergiebt sich auf diese Art allemal eine negative Wurzel, wenn zwey auf einander folgende Glieder einerley Zeichen haben, und es müssen daher in jeder Gleichung so viel negative Wurzeln seyn, als sie Folgen gleicher Zeichen enthält. Nähme man an, daß die gegebene Gleichung lauter

ter negative Wurzeln hätte, so würden, weil die Wurzeln aller aus ihr hergeleiteten Differenzialgleichungen ebenfalls negativ wären, alle Glieder einerley Zeichen haben müssen. Wenn also zwey auf einander folgende Glieder verschiedene Zeichen hätten, so wäre dieses ein Merkmal von der Anwesenheit einer positiven Wurzel, und auf ähnliche Art müßte man der Gleichung zum wenigsten so viel positive Wurzeln beylegen, als sie Abwechselungen der Zeichen enthielte. Da nun jede Gleichung gerade so viel Wurzeln hat, als es darin Folgen von zwey unmittelbar neben einander stehenden Zeichen giebt: so folgt auch, daß jede Gleichung, deren Wurzeln insgesammt reell sind, darunter so viel positive haben werde, als sie Abwechselungen, und so viel negative, als sie Folgen gleicher Zeichen enthält.

Vierzehntes Capitel.

Von den Differenzialien für besondere Fälle.

§. 337.

Wenn y irgend eine Funktion von x ist, und diese veränderliche Größe x um den Zuwachs ω vermehrt wird oder x in $x + \omega$ übergeht, so bekommt dadurch y folgenden Werth:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

und also y den Zuwachs

$$\frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

wie aus dem Obigen bekannt ist. Wird also $\omega = dx$, oder x um das Differenzial dx vermehrt, so wird der Zuwachs von y

$$dy + \tfrac{1}{2}ddy + \tfrac{1}{6}d^3y + \tfrac{1}{24}d^4y + \text{ꝛc.}$$

und dieser Zuwachs ist das vollständige Differenzial von y. Da indeß jedes Glied dieser Reihe zu dem folgenden ein unendliches Verhältniß hat, so verschwinden alle folgende Glieder gegen das erste, so daß dy das gewöhnliche erste Differenzial von y wird. Auf ähnliche Art sind die zweyten, dritten und vierten Differenzialien u. s. f. von y folgende

$$dd.y = ddy + \frac{3}{3}d^3y + \frac{7}{3\cdot4}d^4y + \frac{15}{3\cdot4\cdot5}d^5y + \frac{31}{3\cdot4\cdot5\cdot6}d^6y + \text{rc.}$$

$$d^3y = d^3y + \frac{6}{4}d^4y + \frac{25}{4\cdot5}d^5y + \frac{90}{4\cdot5\cdot6}d^6y + \frac{301}{4\cdot5\cdot6\cdot7}d^7y + \text{rc.}$$

$$d4y = d^4y + \frac{10}{5}d^5y + \frac{65}{5\cdot6}d^6y + \frac{350}{5\cdot6\cdot7}d^7y + \text{rc.}$$

$$d^5y = d^5y + \frac{15}{6}d^6y + \frac{140}{6\cdot7}d^7y + \text{rc.}$$

$$d^6y = d^6y + \frac{21}{7}d^7y + \text{rc.}$$

und man erhält diese Differenzialien aus dem 56sten §. durch die Substitution dx für ω. Diese Differenzialien sind die vollständigen Differenzialien von y, weil darin auch die Glieder beybehalten sind, welche gegen das erste verschwinden. Man findet aber diese Glieder einzeln durch eine fortgesetzte Differenziation von y, indem man dx als beständig betrachtet. Ist z. B. $y = ax - xx$, so sind, weil $dy = adx - 2xdx$, und $ddy = -2dx^2$ wird, die vollständigen Differenzialien von y

$$dy = adx - 2xdx - dx^2$$
$$ddy = -2dx^2$$

und die übrigen $= 0$.

§. 338.

Wenn aber gleich überhaupt die folgenden Glieder in diesen Differenzial-Ausdrücken gegen die ersten verschwinden, so fällt doch in besondern Fällen, wenn das erste Glied selbst verschwindet, der Grund davon hinweg, und es dürfen also dann auch die folgenden Glieder nicht aus der Acht gelassen werden. So ist z. B. in dem vorhergehenden Falle, wo $y = ax - xx$ war, das Differenzial im Allgemeinen zwar $= (a - 2x)dx$, und man hat nicht nöthig $-dx^2$ beyzubehalten, weil dieses Glied unendlich kleiner ist als das erste; allein es liegt dabey die Voraussetzung zum Grunde, daß das erste Glied selbst nicht verschwinde. Wenn daher das Differenzial von $y = ax - xx$ für den Fall gesucht wird, wo $x = \frac{1}{2}a$ ist, so muß man sagen, es sey $= -dx^2$, weil die Funktion y in dem Falle $x = \frac{1}{2}a$, wenn x um dx wächst, um dx^2 abnimmt. Diesen einzigen Fall ausgenommen, ist das Differenzial der Funktion y allemal $= (a - 2x)dx$, denn, wenn nicht $x = \frac{1}{2}a$ wird, läßt man $-dx^2$ mit Recht aus der Acht. Auch kann die Vernachläßigung des Gliedes dx^2 selbst in dem Falle, daß $x = \frac{1}{2}a$ ist, zu keinem Irrthume verleiten. Denn da man die ersten Differenzialien unter sich zu vergleichen pflegt, so ist es, weil $dy = -dx^2$ im Falle $x = \frac{1}{2}a$, gegen die ersten Differenziale dx verschwindet, gleichviel, ob man $dy = 0$, oder $dy = -dx^2$ habe.

§. 339.

Es bedeute y irgend eine Funktion von x, und man erhalte dabey durch eine fortgesetzte Differenziation

$$dy = p\,dx;\ dp = q\,dx;\ dq = r\,dx;\ dr = s\,dx;\ \text{ꝛc.}$$

so sind die vollständigen Differenzialien von y, wobey nichts aus der Acht gelassen wird,

$$\begin{aligned}
d.y &= pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \text{ꝛc.}\\
ddy &= qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \tfrac{1}{4}tdx^5 + \text{ꝛc.}\\
d^3y &= rdx^3 + \tfrac{3}{2}sdx^4 + \tfrac{5}{4}tdx^5 + \text{ꝛc.}\\
d^4y &= sdx^4 + 2tdx^5 + \text{ꝛc.}\\
d^5y &= tdx^5 + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Wenn also die ersten Glieder in diesen Ausdrücken nicht verschwinden, so hat man in ihnen allein die Differenzialien von y; wenn aber in irgend einem Falle das erste

Glied

Glied $= 0$ wird, so giebt das folgende das gesuchte Differenzial. Verschwände auch das zweyte Glied, so würde auf ähnliche Art das dritte, und verschwände auch das dritte Glied, so würde das vierte Glied dieses Differenzial geben, u. s. w. Hieraus folgt, daß das erste Differenzial einer Funktion von x eigentlich nie verschwinde. Denn wird auch $p = 0$ in welchem Falle man das Differenzial von y als verschwindend zu betrachten pflegt, so wird dieses Differenzial durch eine höhere Potestät von dx ausgedruckt; z. B. durch $\frac{1}{2} q\, dx^2$, oder wenn auch q verschwindet, durch $\frac{1}{6} r\, dx$ u. s. w.

§. 340.

Ob nun aber gleich in diesen Fällen das Differenzial von y in Vergleichung mit andern ersten Differenzialien mit Recht aus der Acht gelassen wird, so ist es doch gleichwohl öfters nützlich, den Ausdruck desselben zu kennen. So kann man aus dem vollständigen Ausdrucke eines Differenzials sogleich beurtheilen, in welchen Fällen die gegebene Funktion ein Kleinstes oder ein Größtes wird. Ist z. B.

$$d.y = p\,dx + \tfrac{1}{2} q\,dx^2 + \tfrac{1}{6} r\,dx^3 + \text{etc.}$$

so muß, wenn y ein Größtes oder ein Kleinstes werden soll, $p = 0$ seyn. In diesem Falle ist also $dy = \frac{1}{2} q\,dx^2$, und die Funktion y geht dabey, wenn man für x die Größe $x \pm dx$ setzt, in $y + \frac{1}{2} q\,dx^2$ über, und wird daher einen kleinsten Werth haben, wenn q positiv, und einen größten, wenn q negativ ist. Wird aber auch $q = 0$, so ist $dy = \frac{1}{6} r\,dx^3$ und die Funktion y geht durch die Substitution $x \pm dx$ für x in $y \pm \frac{1}{6} r\,dx^3$ über; es findet aber in diesem Falle weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt. Wird hingegen auch $r = 0$, so erhält man, wenn man $x \pm dx$

 für

für x setzt, $y + \frac{1}{24}sdx^4$ für y, und dieser Ausdruck giebt ein Größtes, wenn s eine negative, und ein Kleinstes, wenn s eine positive Größe ist. Andere Beyspiele von der Nutzbarkeit der vollständigen Differenzialien werden unten vorkommen.

§. 341.

Wir wollen annehmen, p verschwinde, wenn $x = a$ wird, und dies geschieht, wenn $p = (x - a)P$ ist. Es entsteht aber ein solcher Werth, wenn $y = (x - a)^2 P + C$ ist, wo C irgend eine beständige Größe bedeutet. Denn da $pdx = (x - a)^2 dP + 2(x - a)Pdx$ ist, so muß nothwendig $p = 0$ werden, wenn man $x = a$ setzt. Alsdenn wird folglich, da $dpdx = qdx^2 = (x - a)^2 ddP + 4(x - a)dPdx + 2Pdx^2$ ist, $d.y = Pdx^2$, es müßte denn P bey $x = a$ verschwinden, welcher Fall nachher betrachtet werden soll. Der gegenwärtige kann allgemeiner auf folgende Art dargestellt werden. Es sey $z = (x - a)^2 P + C$, und y irgend eine Funktion von z, so daß $dy = Zdz$ werde, wenn Z irgend eine Funktion von $z = (x - a)^2 P + C$ bedeutet. Alsdann ist also

$$dz = (x - a)^2 dP + 2(x - a)Pdx, \text{ und}$$
$$pdx = Z(x - a)^2 dP + 2Z(x - a)Pdx.$$

Dieses Glied wird $= 0$, wenn $x = a$ wird, und läßt man in eben diesem Falle die Glieder weg, welche den Faktor $x - a$ enthalten, so wird $qdx^2 = 2PZdx^2$, und also für $x = a$, nachdem man in PZ allenthalben a für x gesetzt hat, $dy = PZdx^2$. Ist daher y irgend eine Funktion von $z = (x - a)^2 P + C$, so daß $dy = Zdx$ ist, so ist für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^2$. Es wird daher diese Funktion y für $x = a$ ein Größtes, wenn in eben diesem Falle die Größe PZ negativ, und ein Kleinstes, wenn PZ positiv ist.

§. 342.

Wenn $p = (x - a)^2 P$, so verschwindet für $x = a$ auch q; man findet aber einen solchen Werth für p, wenn $y = (x - a)^3 P + C$ ist. Es ist also dann

$$pdx = (x - a)^3 dP + 3(x - a)^2 Pdx$$

$$qdx^2 = (x - a)^3 ddP + 6(x - a)^2 dPdx + 6(x - a) Pdx^2$$

und jedes dieser beyden Glieder verschwindet, wenn $x = a$ wird; das folgende aber ist

$$rdx^3 = (x - a)^3 d^3P + 9(x - a)^2 ddPdx + 18(x - a)dPdx^2 + 6Pdx^3 = 6Pdx^3$$

wenn $x = a$ ist. Da also p und q für $x = a$ verschwinden, so wird $dy = \frac{1}{6}rdx^3 = Pdx^3$. Auf ähnliche Art findet man, wenn $z = (x - a)^3 P + C$, und y eine Funktion von z und $dy = Zdx$ ist, weil alsdann $dz = (x - a)^3 dP + 3(x - a)^2 Pdx$ ist, $p = 0$ und $q = 0$, und $rdx^3 = 6PZdx^3$; also $dy = PZdx^3$ für $x = a$. Wenn daher gleich für $x = a$, $p = 0$ wird, so hat dennoch die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

§. 343.

Es giebt aber einen leichtern Weg diese Differenzialien zu finden, welcher sich auf die Natur der Differenzialien selbst gründet. Denn da man das Differenzial von y erhält, wenn man y von seinem nächsten Werthe oder dem welchen es durch die Substitution $x + dx$ für x bekommt, abzieht, so sey, wie im ersten Falle, $y = (x - a)^2 P + C$. Setzt man hier $x + dx$ für x, so wird

$$y' = (x - a + dx)^2 P' + C$$

und folglich

$$dy = (x - a + dx)^2 P' - (x - a)^2 P.$$

Wenn also $x = a$ ist, so wird $dy = P'dx^2$, und, da P' und P im Verhältnisse der Gleichheit stehen, $dy = Pdx^2$.

Ferner sey $z = (x - a)^2 P + C$, so wird $dz = Pdx^2$. Wenn also y irgend eine Funktion von z, und $dy = Zdz$ ist, so wird für $x = a$

$$dy = PZdx^2.$$

Ist nun $z = (x - a)^3 P + C$, so wird

$$z' = (x - a + dx)^3 P' + C,$$

und daher für $x = a$

$$z' - z = dz = Pdx^3.$$

Ist demnach y irgend eine Funktion von z und $dy = Zdz$, so ist auch für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^3$, vorausgesetzt, daß in den Funktionen P und Z allenthalben a für x substituirt werde. Da aber in diesem Falle $z = C$ und Z eine Funktion von z ist, so wird Z eine beständige Größe, nemlich eine solche Funktion von C als es vorhin von z war.

§. 344.

Wenn also überhaupt $y = (x - a)^n P + C$ ist, so wird, weil dann $y' = (x - a + dx)^n P' + C$ wird, für $x = a$ das Differenzial $dy = Pdx^n$; und wenn also $n > 1$, so verschwindet dieses Differenzial in Vergleichung mit andern ersten Differenzialien, welche dx homogen sind. Nun ist aus dem Vorhergehenden klar, daß die Funktion y für $x = a$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird, wenn n eine gerade Zahl, und dabey P für $x = a$ eine positive, und ein Größtes, wenn P eine negative Größe ist. Man findet demnach auf diese Art die größten und kleinsten Werthe viel leichter als nach der oben beschriebenen Methode, weil man dabey nicht nöthig hat, zu den höhern Differenzialien fortzugehen. Wenn aber $z = (x - a)^n P + C$, und y eine Funktion von z, und $dy = Zdz$ ist: so wird für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^n$. Es wird aber hier n für eine positive Zahl, oder eine

eine solche, die größer als o ist, genommen; denn wenn n eine negative Zahl wäre, so würde, wenn man $x = o$ setzte, $(x - a)^n$ nicht verschwinden, sondern selbst unendlich groß werden.

§. 345.

Wir haben gesehen, daß auf diese Art das Differenzial viel leichter gefunden wird, als vermittelst der Reihe, wodurch wir vorhin das vollständige Differenzial ausdruckten; denn ist n eine ganze Zahl, so müssen so viel Glieder jener Reihe durchgegangen werden als n Einheiten hat. Aber wenn n ein Bruch ist, so giebt jene Reihe das wahre Differenzial nicht einmal. Es sey z. B. $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, wo in Rücksicht auf die Reihe

$$dy = p\,dx + \tfrac{1}{2}q\,dx^2 + \tfrac{1}{6}r\,dx^3 + \tfrac{1}{24}s\,dx^4 + \text{etc.}$$

$$p = \tfrac{3}{2}\sqrt{(x - a)};\quad q = \frac{3}{4\sqrt{(x - a)}}$$

$$r = \frac{3}{8(x-a)\sqrt{(x-a)}} \text{ und } s = \frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{(x-a)}} \text{ etc.}$$

Wenn man also $x = a$ setzt, so wird zwar $p = o$; allein alle folgenden Glieder q, r, s, etc. gehen ins Unendliche über, und es kann demnach der Werth des Differenzials in diesem Falle gar nicht angegeben werden. Dagegen läßt die auf die Natur der Differenzialien selbst gegründete Methode gar keinen Zweifel übrig. Denn da $x = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$ ist, so erhält man durch die Substitution $x + dx$ für x

$$y' = (x - a + dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$$

und es ist folglich, wenn $x = a$ gesetzt wird,

$$dy = dx\sqrt{dx}$$

Dieses Differenzial verschwindet gegen dx, aber dagegen verschwinden gegen dasselbe die zweyten Differenzialien, welche dx^2 homogen sind.

§. 346.

Jetzt wollen wir die Fälle etwas genauer betrachten, wo n eine gebrochene Zahl ist, und

$$y = P\sqrt{(x-a)} + C$$

setzen. Hier wird, wegen $y' = P'\sqrt{(x-a+dx)} + C$

$$dy = P\sqrt{dx}$$

für $x = a$, und es hat folglich dieses Differenzial zu dx und allen ihm homogenen Differenzialien ein unendliches Verhältniß. Hieraus erhellet auch, wie in diesem Falle über das Größte und Kleinste zu urtheilen ist. Denn da y, wenn man $x + dx$ für x setzt, in $P\sqrt{(x-a)} + C + P\sqrt{dx}$ übergeht, so hat, da $\sqrt{dx}$ beyde Zeichen zuläßt, die Funktion y einen doppelten Werth, den einen größer als C, und den andern kleiner, so daß sie für $x = a$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes wird. Nimmt man ferner dx negativ, so wird der Werth von y sogar imaginär. Eben dies hat man zu merken, wenn $z = P\sqrt{(x-a)} + C$, und y eine Funktion von z und $dy = Zdz$ ist, indem alsdann $dy = PZ\sqrt{dx}$ für $x = a$ wird.

§. 347.

Wenn die Funktion, deren Differenzial für den Fall $x = a$ gesucht werden soll,

$$y = (x-a)^{\frac{m}{n}}P + C$$

ist, so wird, wie aus dem Vorhergehenden erkannt werden kann,

$$dy = Pdx^{\frac{m}{n}}.$$

Wenn

Wenn daher $m > n$ ist, so verschwindet dieses Differenzial gegen dx, ist aber $m < n$, so wird $\frac{dy}{dx}$ unendlich groß. Ist ferner n eine gerade Zahl, so hat das Differenzial dy einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen; und wenn man daher $a + dx$ für x setzt, so bekommt die Funktion y, die bey $x = a$ den Werth C erhalten haben würde, einen doppelten Werth, einen der größer, und einen, der kleiner ist als C. Setzte man hingegen $x = a - dx$, so würde y imaginär werden, und also in diesem Falle weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn. Nun sey n eine ungerade Zahl, wo denn m entweder gerade oder ungerade seyn wird. Es sey zuvörderst m eine gerade Zahl. Da alsdann dy denselben Werth behält, man mag dx positiv oder negativ nehmen: so erhellet, daß die Funktion y für $x = a$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes seyn werde, je nachdem in diesem Falle P eine negative oder positive Größe ist. Wann aber sowohl m als n ungerade ist, so geht das Differenzial dx in das entgegengesetzte über, wenn man dx negativ nimmt; und es hat daher in diesem Falle die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

§. 348.

Wenn die Funktion y aus mehrern durch $x - a$ theilbaren Gliedern besteht, und z. B.

$$y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$$

ist: so ist ihr Differenzial für den Fall $x = a$

$$dy = P dx^m + Q dx^n.$$

Ist in diesem Ausdrucke $n > m$, so verschwindet das zweyte Glied gegen das erste, und man behält bloß $dy = P dx^m$. Ist aber n ein Bruch mit einem geraden Nenner, so darf

man

man Qdx^n, ob es gleich in Vergleichung mit Pdx^m verschwindet, gleichwohl nicht aus der Acht lassen. Es erhellet nemlich daraus, daß dy negativ wird, wenn man dx negativ nimmt, welches man aus Pdx^m nicht erkennen kann. Da also, wenn n ein Bruch mit einem geraden Nenner ist, dx nicht negativ genommen werden kann, das Glied Qdx^n aber, wenn man dx positiv nimmt, einen doppelten Werth hat: so wird die Funktion

$$y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$$

welche für $x = a$ der beständigen Größe C gleich wird, durch die Substitution $x + dx$ für x

$$y = C + Pdx^m \pm Qdx^n$$

und da diese beyden Werthe entweder größer oder kleiner als C sind, je nachdem P eine positive oder negative Größe ist: so hat die Funktion y im Falle $x = a$ weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

§. 349.

In diesen Fällen lassen sich also die wahren Differenzialien der Funktionen nicht nach den gewöhnlichen Regeln finden, weil diese bloß gelten, wenn die dx homogenen Differenzialien der Funktionen gesucht werden. Wenn hingegen in irgend einem besondern Falle das Differenzial einer Funktion durch die Potestät dx^n ausgedruckt wird, so findet man dafür nach jener Regel 0, wenn n größer als 1, und ∞, wenn n kleiner als 1 ist. Ist z. B. $y = \sqrt{(a - x)}$ und soll das Differenzial von y für den Fall $x = a$ gesucht werden; so erhält man, da $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$ ist, für $x = a$, $dy = -\frac{dx}{0}$. Und wollte man die folgenden Differenzialien zu Hülfe nehmen, so würden auch diese,

weil

weil sie einen o gleichen Nenner hätten, insgesammt unendlich Große seyn. Wir haben aber gesehen, daß $dy = \sqrt{-dx}$, und also sogar imaginär ist. Setzt man hingegen $x - dx$ für x, so wird $dy = \sqrt{dx}$, und also unendlich gegen dx, so daß dx gegen dy verschwindet. Es leitet daher die gewöhnliche Methode auch hier zu keinem Irthume, indem sie den Werth von dy unendlich groß angiebt.

§. 350.

Man muß also die gewöhnliche Methode zu differenziiren verlassen, so oft in der Reihe $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3$ + rc. wodurch das vollständige Differenzial der Funktion y ausgedruckt wird, das erste Glied p entweder $= 0$ oder $= \infty$ wird, und alsdann das Differenzial nach den ersten Grundsätzen der Differenziation suchen. So oft daher das Differenzial der Funktion y für einen gewissen Werth von x gefunden werden soll, wobey p entweder unendlich groß oder unendlich klein wird: so oft muß man zu den ersten Gründen der Differenziation zurückgehen. In allen übrigen Fällen, wo weder $p = 0$ noch $p = \infty$ wird, giebt die gewöhnliche Methode die wahren Werthe des Differenzials. Doch darf der Fall §. 348. nicht aus der Acht gelassen werden, wenn y ein Glied $(x - a)^n Q$ enthält, und n einen Bruch mit einem geraden Nenner bedeutet. Denn wenn es in diesem Falle gleich niedrigere Differenzialien giebt, gegen welche Qdx^n verschwindet: so werden doch, wenn dx negativ und also Qdx^n imaginär ist, durch das Glied Qdx^n alle übrige Glieder imaginär, und dieser Umstand ist bey den Linien wichtig. Dergleichen besondere Fälle, wo das wahre Differenzial nach der gewöhnlichen Methode nicht gefunden werden kann, wollen wir nun durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = a + x - \sqrt{(xx + ax - x)}\sqrt{(2ax - xx)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Daß man das Differenzial dieser Funktion nicht nach der gewöhnlichen Regel finde, erhellet aus der Differenziation. Dadurch bekommt man

$$dy = dx - \frac{xdx - \frac{1}{2}adx + \frac{1}{2}dx\sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}}$$
$$+ \frac{(axdx - xxdx) : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}}$$

und also, wenn man $x = a$ setzt,

$$dy = dx - \frac{adx}{a} = 0.$$

Um also von den ersten Grundsätzen der Differenziation auszugehen, so wird, wenn man $x + dx$ für x schreibt,

$$y' = a + x + dx - \sqrt{(xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx -}$$
$$(x + dx)\sqrt{(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)})$$

und wenn man $x = a$ setzt,

$$y' = 2a + dx - \sqrt{(2aa + 3adx + dx^2 - (a + dx)\sqrt{(aa - dx^2)})}$$

Da also $\sqrt{(aa - dx^2} = a - \frac{dx^2}{2a}$ ist, indem die folgenden Glieder sicher aus der Acht gelassen werden können, so wird

$$y' = 2a + dx - \sqrt{(aa + 2adx + \frac{3}{2}dx^2)}$$

und wenn man die Quadratwurzel auszieht,

$$y' = 2a + dx - (a + dx + \frac{dx^2}{4a} = a - \frac{dx^2}{4a}$$

Nun ist aber, wenn $x = a$ gesetzt wird, $y = a$, also da $y' = y + dy$ ist, $dy = -\frac{dx^2}{4a}$; und hieraus erhellet zu-

gleich,

gleich, daß die Funktion y ein Größtes wird, wenn man $x = a$ nimmt.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = 2ax - xx + a\sqrt{(aa - xx)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Differenziirt man auf die gewöhnliche Art, so wird

$$dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$$

und dieser Ausdruck wird unendlich groß, wenn man $x = a$ annimmt, und ist folglich unbrauchbar. Es werden aber auch die Differenzialien der folgenden Ordnungen unendlich große Größen, so daß man auch aus ihnen nach der Reihe $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ rc. das wahre Differenzial nicht findet. Man setze also $x + dx$ für x, so wird

$$y' = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2$$
$$+ a\sqrt{(aa - xx - 2xdx - dx^2}$$

und wenn man $x = a$ nimmt,

$$y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(- 2adx - dx^2)}$$

Nun wird aber in diesem Falle auch $y = aa$; folglich

$$dy = - dx^2 + a\sqrt{} - 2adx$$

und da dx^2 gegen $\sqrt{- 2adx}$ verschwindet,

$$dy = a\sqrt{- 2adx}.$$

Wenn demnach dx positiv ist, so wird dy imaginär; setzt man aber $x - dx$ für x, so erhält man

$$dy = a\sqrt{2adx},$$

und da dieser Ausdruck einen doppelten Werth hat, einen positiven nemlich und einen negativen: so ist die Funktion in dem Falle $x = a$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

Drit-

Drittes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a - x)^2 \sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Da diese Funktion sich auf die Form bringen läßt:

$$y = a^3 - (a - x)^3 + (a - y)^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$$

so wird, wenn man $x = a + dx$ setzt,

$$y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$$

und in eben diesem Falle ist $y = a^3$. Demnach ist

$$dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}$$

und da dx^3 gegen $dx^{\frac{7}{3}}$ verschwindet, so wird

$$dy = - dx^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{3aa}.$$

Wenn also $x = a$ genommen wird, so hat die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

Viertes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x}) \sqrt{x}$$

für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da $x = 0$ seyn soll, und dabey $y = 0$ wird, so schreibe man bloß dx für x, wodurch man

$$dy = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}} \text{ oder } dy = (1 + \sqrt[4]{dx}) \sqrt{dx}$$

bekömmt; woraus zuvörderst erhellet, daß dx nicht negativ genommen werden darf. Ferner kann auch $\sqrt{dx}$, ob es gleich sonst einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen, hat, weil $\sqrt[4]{dx}$ vorkommt, bloß positiv genommen

men werden. Aber $\sqrt[4]{dx}$ läßt einen doppelten Werth zu, und so wird

$$dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}, \text{ und}$$
$$y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt{dx^3}$$

weil $y = 0$ ist. Da also beyde Werthe von y' größer sind als der von y, so ist y für $x = 0$ ein Kleinstes. Daß aber die Funktion $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ die Funktion $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ nicht in sich begreife, erhellet, wenn man beyde rational macht. Verwandelt man nemlich die erste in $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, und erhebt beyde Seiten zum Quadrate, so wird

$$y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}, \text{ oder } y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$$

und quadrirt man beyde Hälften dieser Gleichung von neuem, so bekommt man

$$y^4 - 2yyx - 4xxy + xx - x^3 = 0.$$

Die andere aber oder $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ giebt quadrirt

$$y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$$

und wenn diese Gleichung von neuem quadrirt wird, so findet man

$$y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$$

eine Gleichung, welche von der vorhergehenden verschieden ist. Aber das andere Glied $\sqrt[4]{x^3}$ behält das doppelte Zeichen. Es ist daher dieser Umstand wohl zu merken, daß, wenn auch gleich die geraden Wurzeln beyde Zeichen + und − zulassen, doch bloß das erste beybehalten werden kann, wenn in eben dem Ausdrucke eben derselben Wurzeln fernere gerade Wurzeln vorkommen, denn diese würden imaginär werden, wenn man jene negativ nähme. Und hieraus lassen sich die größten und kleinsten Werthe der andern Art erkennen, wenn dergleichen nicht statt zu haben scheinen.

Fünftes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = a + \sqrt{(x-f)} + (x-f)\sqrt[4]{(x-f)} + (x-f)^2\sqrt[8]{(x-f)}$$

für den Fall $x = f$. zu finden.

Es sey $x - f = t$. Da alsdann $y = a + \sqrt{t} + t\sqrt[4]{t} + tt\sqrt[8]{t}$ wird, so ist das Differenzial hievon für den Fall $t = 0$ zu finden, und in diesem Falle also $y = a$. Setzt man also $t + dt$ oder $0 + dt$ für t: so wird

$$y' = y + dy = a + \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$$

und folglich

$$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$$

Hier ist zuvörderst klar, daß das Differenzial dt nicht negativ genommen werden kann, wofern nicht dy imaginär werden soll. Ja es kann nicht bloß $\sqrt{dt}$, sondern nicht einmal $\sqrt[4]{dt}$ negativ genommen werden, weil sonst $\sqrt[8]{dt}$ imaginär werden würde, und es hat daher das Differenzial dy bloß einen doppelten Werth, nemlich

$$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt}$$

und da beyde größer sind als 0, so folgt, daß die Funktion y ein Kleinstes der zweyten Art werde, wenn man $t = 0$ oder $x = f$ setzt. Wenn also auch gleich in diesen Fällen die Glieder $dt\sqrt[4]{dt}$ und $dt^2\sqrt[8]{dt}$ gegen das erste $\sqrt{dt}$ verschwinden, so darf man sie doch nicht aus der Acht lassen, wenn die Menge der Werthe bestimmt werden soll, so daß die imaginären Größen nicht in Anschlag kommen.

Sechs-

Sechstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = ax + bxx + (x - f)^n + (x - f)^{m+\frac{1}{2}n}$$

für den Fall $x = f$ zu finden.

Wenn man $x = f$ setzt, so wird $y = af + bff$, und schreibt man $x + dx$ oder $f + dx$ für x, so findet man für den nächsten Werth

$$y' = af + bff + adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^{m+\frac{1}{2}n}$$

und folglich

$$dy = adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^m\sqrt{dx^n}.$$

Wofern also nicht n eine gerade Zahl ist, so kann auch dx nicht negativ genommen werden. Es hat aber das letzte Glied $dx^m\sqrt{dx^n}$ ein doppeltes Zeichen, und es wird daher der Werth von y' doppelt und größer als y, wenn $a + 2bf$ eine positive Größe, und die Exponenten n und $m + \frac{1}{2}n$ größer als 1 sind. Es wird also die Funktion y für den Fall $x = f$ ein Kleinstes, und dies geschieht, n mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, wenn nur der Zähler in diesem und die Zahl in jenem nicht gerade ist.

§. 351.

Vorzüglichen Nutzen hat diese Methode die Differenzialien nach den ersten Gründen der Differenziation zu bestimmen, in den transcendenten Funktionen, wenn in gewissen Fällen das auf die gewöhnliche Art gefundene Differenzial entweder zu verschwinden oder unendlich groß zu werden scheint. Es kommen aber hier Arten von unendlich großen und unendlich kleinen Größen vor, welche bey den algebraischen Funktionen nie angetroffen werden. Bedeutet z. B. i eine unendlich große Zahl, so ist zwar li auch unendlich groß, hat aber doch gegen i, und gegen jede Potestät i^n, so klein man auch den Exponenten n annehmen mag, ein unendlich kleines Verhältniß, und es ist daher der Bruch $\frac{li}{i^n}$ eine unendlich kleine Größe, und kann nicht eher eine endliche Größe werden, bis der Exponent n unendlich klein wird. Es ist daher li homogen i^n, wenn n unendlich klein ist. Nun sey $i = \frac{1}{\omega}$, so daß ω eine unendlich kleine Größe bedeute: so ist $-l\omega$ homogen $\frac{1}{\omega^n}$, wenn n unendlich klein ist, und folglich $-\frac{1}{l\omega}$ homogen ω^n; folglich $-\frac{1}{ldx}$ ein unendlich Kleines, welches mit dx^n verglichen werden kann, wenn n einen unendlich kleinen Bruch bedeutet. Ist daher $y = -\frac{1}{lx}$, so ist das Differenzial von y für den Fall $x = 0$, $= -\frac{1}{ldx} = dx^n$, und es hat folglich dy zu dx und jede Potestät von dx ein unendliches Verhältniß, und es verschwinden gegen $-\frac{1}{ldx}$ alle Potestäten von dx, so klein auch ihre Exponenten seyn mögen.

§. 352.

Auch haben wir gesehen, daß a^i, wenn a eine Zahl, die größer als 1 ist, und i eine unendlich große Zahl bedeutet, ein unendlich großes von einem so hohen Grade ist, daß dagegen nicht nur i, sondern selbst jede Potestät von i verschwindet, und es wird nicht eher i^n homogen a^i, als bis n unendlich geworden ist. Nun sey $i = \frac{1}{\omega}$, so daß

ω eine unendlich kleine Größe bedeute, so ist $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogen $\frac{1}{\omega^n}$, wenn n eine unendlich große Zahl ist; und folglich $a^{\frac{-1}{\omega}}$ oder $\frac{1}{a^{1:\omega}}$ ein unendlich Kleines, welches mit ω^n in Vergleichung zu setzen ist. Hiernach ist $\frac{1}{a^{1:dx}}$ ein unendlich Kleines, welches aber gegen jede Dignität von dx verschwindet, da es dx^n homogen ist, wenn n eine unendlich große Zahl bedeutet. Wird daher das Differenzial von $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ für den Fall $x = 0$ gesucht, so ist, da $y = 0$ wird, $dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$ und also unendlichmal kleiner als jede noch so hohe Potestät von dx.

§. 353.

Ist aber a kleiner als 1, so ist $\frac{1}{a}$ größer als 1, und so wird die Frage auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt. Hat man nemlich den Ausdruck $a^{\frac{1}{\omega}}$, so setze man $a = \frac{1}{b}$ wodurch man $b^{-\frac{1}{\omega}}$ oder $\frac{1}{b^{1:\omega}}$ bekommt, einen Ausdruck, der, da $b > 1$ ist, ω^n homogen wird, wenn n eine unendlich große Zahl bedeutet. Dies vorausgesetzt, können wir uns zu folgenden Exempeln wenden.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = xx - \frac{1}{lx}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so erhalten wir, wenn wir $x + dx$ oder $0 + dx$ für x setzen,

$$y' = dy = dx^2 - \frac{1}{l\,dx}.$$

Da aber $-\frac{1}{l\,dx}$ homogen ist dx^n, wenn n eine unendlich kleine Zahl bedeutet; so verschwindet dagegen dx^2, und es wird

$$dy = -\frac{1}{l\,dx} = dx^n.$$

Da ferner die Logarithmen der negativen Zahlen imaginär sind, so kann dx nicht negativ genommen werden, und es ist demnach y für den Fall $x = 0$ ein Kleinstes, welches aber weder zu der ersten noch zu der andern Art gehört. Zur ersten Art gehört es auch nicht, weil y keine nächste vorhergehende Werthe hat, sondern bloß kleiner ist, als die folgenden, wenn x größer als 0 angenommen wird. Zur andern Art aber gehört es auch nicht, weil die folgenden Werthe, mit welchen es verglichen wird, nicht doppelt sind. Und auf diese Art entsteht eine dritte Gattung der größten und kleinsten Werthe, welche bloß bey den logarithmischen und transcendenten Funktionen statt hat, bey den algebraischen aber nie angetroffen wird, und wovon in der Lehre von den Curven oft die Rede ist.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = (a - x)^n - x^n(la - lx)^n$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Das Differenzial dieser Funktion kann man, wenn n eine ganze Zahl ist, aus der allgemeinen Formel $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ rc. finden. Es wird nemlich

$$pdx = - n(a - x)^{n-1}dx - nx^{n-1}dx(la - lx)^n + nx^{n-1}(la - lx)^{n-1}dx$$

und dieser Werth verschwindet allerdings, wenn man $x = a$ setzt; denn wenn auch $n = 1$ ist, so wird doch $pdx = - dx + dx = 0$. Gehen wir also weiter fort, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}qdx^2 = {} & \frac{n(n-1)}{1.2}(a-x)^{n-2}dx^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^n \\ & + \frac{n^2}{2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} \\ & - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-2}.\end{aligned}$$

Ist daher $n = 1$, so wird $\frac{1}{2}qdx^2 = \frac{dx^2}{2a}$, wenn man $x = a$ setzt. Auf ähnliche Art muß man, wenn $n = 2$ ist, das Glied $\frac{1}{6}rdx^3$ u. s. w. finden. Leichter wird es daher immer seyn, wenn wir zu den ersten Gründen der Differenziation zurückkehren, und da, wenn man $x = a$ setzt, $y = 0$ wird, so bekommt man durch die Substitution $x + dx$ oder $a + dx$ für x

$$y' = (- dx)^n - (a + dx)^n(la - l(a + dx))^n = y + dy = dy$$

weil $y = 0$ ist. Nun ist aber

$$l(a + dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} - \text{etc.}$$

und also

$$dy = (-dx)^n -$$

$$\left(a^n + na^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}dx^2\right)\left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3}\right)^n$$

$$= \frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}.$$

Wenn also $x = a$ ist, so ist das gesuchte Differenzial

wenn	
$n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$, wie vorhin
$n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$
$n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
$n = 4$	$dy = \frac{4dx^5}{2a}$
ꝛc.	ꝛc.

Wenn daher n eine ungerade Zahl ist, so wird die Funktion y in dem Falle $x = a$ ein Kleinstes; ist aber n eine gerade Zahl, so ist sie weder ein Größtes noch ein Kleinstes, und eben dieses findet statt, wenn n einen Bruch mit einem ungeraden Nenner bedeutet. Ist hingegen n ein Bruch mit einem geraden Nenner, so muß dx negativ genommen werden, damit man keine imaginäre Größen bekomme, und wegen der Zweydeutigkeit der Zeichen ist die Funktion weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

Drittes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = x^x$ für den Fall $x = \frac{1}{e}$ zu finden, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist.

Da überhaupt $dy = x^x dx(lx + 1)$ ist, so verschwindet dieses Differenzial in dem Falle $x = \frac{1}{e}$, oder $lx = -1$. Vergleicht man demnach dieses Differenzial mit der allgemeinen Formel $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ rc., so wird

$$p = x^x(lx + 1) \text{ und } q = x^x(lx + 1)^2 + x^{x-1}$$

und wenn man $x = \frac{1}{e}$, oder $lx = -1$ annimmt,

[illegible]

$$q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$$

Hiernach ist das gesuchte Differenzial $dy = \frac{1}{2} e^{(e-1):e} dx^2$ und die Funktion $y = x^x$ wird ein Kleinstes, wenn man $x = \frac{1}{e}$ setzt.

Viertes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = x^n + e^{-1:x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da bey $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so wird, wenn man $0 + dx$ für x setzt, $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Nun haben wir gesehen, daß $\frac{1}{e^{1:dx}}$ der Potestät dx^∞ homogen ist, und folglich gegen dx^n verschwindet. Also ist $dy = dx^n$.

§. 354.

Was bey den ersten Differenzialien in gewissen Fällen sich ereignet, daß sich nemlich dieselben nach der gewöhnlichen Methode nicht finden lassen, das hat auch bey den zweyten und höhern Differenzialien statt, wenn in dem vollständigen Differenzial-Ausdrucke

$$dy = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \text{rc.}$$

von den Größen r, q, s rc. einige entweder $= 0$ oder $= \infty$ werden. Da nemlich

$$dd.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \text{rc.}$$

ist: so wird in dem Falle, wenn $q = 0$ ist, $ddy = rdx^3$, und verschwindet alsdann auch r, so wird $ddy = \tfrac{7}{12}sdx^4$ u. s. f. Wird aber q oder r oder s unendlich, so läßt sich das zweyte Differenzial aus jener Reihe gar nicht finden, sondern man muß zu den ersten Gründen der Differenziation zurückgehen. Man setzt nemlich $x + dx$ für x, und sucht y', dann $x + 2dx$ für x, um y'' zu erhalten. Ist dies geschehen, so ist der wahre Werth des zweyten Differenzials

$$ddy = dy' - dy = y'' - 2y' + y.$$

Auf ähnliche Art findet man den wahren Werth des dritten Differenzials, wenn man noch $x + 3dx$ für x setzt, und dadurch y''' sucht, indem $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$ ist, u. s. f. Auch dieses wollen wir durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = \dfrac{aa - xx}{aa + xx}$ für den Fall $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ zu finden.

Sucht man das vollständige Differenzial von y aus der Formel

dy

$$dy = p\,dx + \tfrac{1}{2}q\,dx^2 + \tfrac{1}{6}r\,dx^3 + \tfrac{1}{24}s\,dx^4 + \text{ꝛc.}$$

so findet man für p, q, r, ꝛc. folgende Werthe:

$$p = -\frac{4aax}{(aa + xx)^2};$$

$$q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa + xx)^3}$$

$$r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa + xx)^4}$$

Da nun $ddy = q\,dx^2 + r\,dx^3 + \frac{7}{12}s\,dx^4 + \text{ꝛc.}$ ist, so wird, da für $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ $q = 0$ und $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$ ist, das gesuchte Differenzial

$$ddy = \frac{27\,dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$$

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Sucht man wie vorhin das vollständige Differenzial so wird, da $d^3y = r\,dx^3 + \frac{3}{2}s\,dx^4$ ist, wegen $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa + xx)^4}$ für den Fall $x = a$, $r = 0$, und man muß daher zu dem Werthe s fortgehen. Dieser ist

$$s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa + xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa + xx)^5}$$

Setzt man demnach $x = a$, so wird $s = -\frac{96a^4}{2^4a^8} = -\frac{6}{a^4}$, und es ist also für diesen Fall $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

Drit=

Drittes Exempel.

Das Differenzial der in Ansehung des Grades unbestimmten Funktion: $y = ax^m + bx^n$, für den Fall $x = 0$ zu finden.

Setzt man nach und nach $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, ꝛc. für x, so erhält man folgende Werthe für y

$$y' = a(x + dx)^m + b(x + dx)^n$$
$$y'' = a(x + 2dx)^m + b(x + 2dx)^n$$
$$y''' = a(x + 3dx)^m + b(x + 3dx)^n$$

ꝛc.

Setzt man daher $x = 0$, so wird $y = 0$, und die Differenzialien werden

$$dy = adx^m + bdx^n$$
$$ddy = (2^m - 2)adx^m + (2^n - 2)bdx^n$$
$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)adx^m + (3^n - 3.2^n + 3)bdx^n$$
$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)adx^m + (4^m - 4.3^n + 6.2^n - 4)bdx^n$$

ꝛc.

Ist also der Exponent n größer als m, so verschwinden die zweyten Glieder in diesen Ausdrücken gegen die ersten. Gleichwohl muß man darauf Rücksicht nehmen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, damit man die Fälle, in welchen diese Differenzialien entweder imaginär werden oder beyde Zeichen haben, bestimmen kann. Die weitere Auseinandersetzung dieser letztern Fälle aber muß der Lehre von den Curven vorbehalten bleiben.

Funfzehntes Capitel.

Von den Werthen der Funktionen, die in gewissen Fällen unbestimmt zu seyn scheinen.

§. 355.

Wenn y irgend eine gebrochene Funktion von x, z. B. $\frac{P}{Q}$ ist, deren Zähler und Nenner, wenn man für x einen gewissen Werth setzt, zugleich verschwinden: so wird in diesem Falle der Bruch $\frac{P}{Q}$, welcher den Werth von y ausdruckt, $= \frac{0}{0}$, und kann alsdann eben sowohl eine endliche als eine unendliche, und in diesem Falle eben sowohl eine unendlich große als unendlich kleine Größe anzeigen. Auf diese Art aber läßt sich daraus der Werth von y in diesem Falle gar nicht erkennen, und scheint also unbestimmt zu seyn. Da indeß y in jedem andern Falle einen bestimmten Werth bekommt, wenn man für x eine bestimmte Größe setzt: so ist leicht einzusehen, daß auch in dem beschriebenen Falle keine Unbestimmtheit statt finden könne. Auch überzeugt man sich davon leicht, wenn man $y = \frac{aa - xx}{a - x}$ setzt. Diese Funktion giebt allerdings auch $y = \frac{0}{0}$, wenn

man

man $x = a$ setzt; allein da man Zähler und Nenner durch $a - x$ dividiren kann, und alsdann $y = a + x$ wird: so ist klar, daß für $x = a$, $y = 2a$ werde, so daß in diesem Falle $\frac{0}{0} = 2a$ gesetzt werden muß.

§. 356.

Da wir oben gesehen haben, daß die Nullen zu einander jegliches Verhältniß haben können: so erfordert das Verhältniß, welches der Zähler und Nenner in diesen Fällen zu einander haben, eine besondere Untersuchung. Gleichwohl zeigen die Nullen an sich nichts verschiedenes an, und man muß daher an ihrer Stelle die unendlich kleinen Größen brauchen. Denn wenn diese Größen in ihrer Bedeutung auch nicht von Null verschieden sind, so läßt sich doch aus ihren Funktionen, welche den Zähler und Nenner ausmachen, der Werth des Bruchs leicht schließen. Hat man z. B. den Bruch $\frac{a\,dx}{b\,dx}$, so ist zwar im Grunde der Zähler sowohl als der Nenner $= 0$: allein gleichwohl fällt in die Augen, daß der Werth dieses Bruchs bestimmt und $= \frac{a}{b}$ sey. Ist hingegen der Bruch $\frac{a\,dx^2}{b\,dx}$ gegeben, so ist sein Werth allerdings Null, so wie der Werth von $\frac{a\,dx}{b\,dx^2}$ unendlich groß. Braucht man daher statt der Nullen, die öfters im Calcul vorkommen, die unendlich kleinen Größen, so genießt man davon den Vortheil, daß man das Verhältniß, welches jene Nullen gegen einander haben, zu erforschen im Stande ist, und allen Zweifel wegen der Bedeutung solcher Ausdrücke verschwinden sieht.

§. 357.

Um dies deutlicher zu machen sey $y = \frac{P}{Q}$, so daß Zähler und Nenner verschwinden, wenn man $x = a$ setzt. Um aber diese Nullen, welche sich unter einander nicht vergleichen lassen würden, zu vergleichen, wollen wir $a + dx$ für x schreiben, und dies ist im Grunde eben so viel, als ob man a für x setzte, weil $dx = 0$ ist. Da also durch die Substitution $x + dx$ für x die Funktionen P und Q in $P + dP$ und $Q + dQ$ übergehen: so wird die Substitution $x + dx$ für x schon verrichtet, wenn man in diesen Ausdrücken allenthalben a für x setzt, und in diesem Falle verschwinden, der Voraussetzung gemäß, P und Q. Auf diese Art erhält man aus dem Bruche $\frac{P}{Q}$ durch die Substitution $a + dx$ für x den Bruch $\frac{dP}{dQ}$, und es druckt folglich dieser Bruch den Werth der Funktion $y = \frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ aus. Es kann aber dieser Ausdruck nicht weiter unbestimmt seyn, wenn man die wahren Differenzialien der Funktionen P und Q nimmt. Denn thut man dieses, so können die Differenzialien dP und dQ nie verschwinden, weil sie durch die Potestäten von dx ausgedrückt werden, wenn solches durch das Differenzial dx selbst nicht geschieht. Findet man demnach $dP = Rdx^m$ und $dQ = Sdx^n$, so ist der Werth der Funktion $y = \frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$, $= \frac{R\,dx^m}{S\,dx^n}$, und also ein endlicher und $= \frac{R}{S}$, wenn $m = n$, hingegen wenn $m > n$ ist, in der That $= 0$, und $= \infty$ wenn $m < n$ ist.

§. 358.

Wenn daher eine gebrochene Funktion $\frac{P}{Q}$ gegeben ist, deren Zähler und Nenner in einem bestimmten Falle, z. B. wenn $x = a$ gesetzt wird, zugleich verschwinden: so findet man den Werth dieses Bruchs für $x = a$ nach folgender Regel:

Man suche die Differenzialien der Größen P und Q für den Fall $x = a$, und setze dieselben statt der Größen P und Q selbst. Ist dies geschehen, so druckt der Bruch $\frac{dP}{dQ}$ den gesuchten Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ aus.

Wenn die Differenzialien dP und dQ, nach der gewöhnlichen Methode gesucht, weder verschwinden noch unendlich werden, wenn man $x = a$ setzt, so kann man diese Methode beybehalten; werden sie aber entweder beyde $= 0$ oder beyde $= \infty$, so muß man die Methode befolgen, welche in dem vorhergehenden Capitel erklärt worden ist. Oft wird der Calcul beträchtlich abgekürzt, wenn man zuvor $x - a = t$ oder $x = a - t$ setzt, damit man einen Bruch $\frac{P}{Q}$ erhalte, dessen Zähler und Nenner für den Fall $t = 0$ verschwinden. Man findet nemlich alsdann die Differenzialien dP und dQ, wenn man allenthalben dt für t setzt.

Erstes Exempel.

Den Werth der Funktion $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ für den Fall $t = 0$ zu finden.

Da in diesem Falle Zähler und Nenner verschwinden, so setze man dt für t, wodurch man für den gesuchten Werth

der

der gegebenen Funktion den Ausdruck $\frac{b - \sqrt{(bb - dt^2)}}{dt^2}$ bekommt. Nun ist $\sqrt{(bb - dt^2)} = b - \frac{dt^2}{2b}$ und dadurch verwandelt sich jener Bruch in $\frac{dt^2}{2bdt^2} = \frac{1}{2b}$. Es hat demnach der Bruch $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$, wenn $t = 0$ wird, den Werth $\frac{1}{2b}$.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{\sqrt{(aa + ax + xx)} - \sqrt{(aa - ax + xx)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}}$$

für den Fall $x = 0$ zu finden.

Hier kann man wieder dx für x setzen, und da

$$\sqrt{(aa + adx + dx^2)} = a + \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

$$\sqrt{(aa - adx + dx^2)} = a - \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

und

$$\sqrt{(a + dx)} = \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{(a - dx)} = \sqrt{a} - \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

ist: so wird der Zähler $= dx$, und der Nenner $\frac{dx}{\sqrt{a}}$. Hiernach ist der gesuchte wahre Werth des gegebenen Bruchs $= \sqrt{a}$.

Drittes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{(2ax - aa)}}{xx - 2ax - aa + 2a\sqrt{(2ax - xx)}}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Wenn man die Differenzialien auf die gewöhnliche Art sucht und an die Stelle des Zählers und Nenners setzt, so bekommt man

$$\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^3 : \sqrt{(2ax - aa)}}{2x - 2a + 2a(a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}$$

und der Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden wieder, wenn man $x = a$ setzt. Man muß daher an ihrer Stelle von neuem die Differenzialien nehmen, wodurch man

$$\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

findet. Da aber auch bey diesem Bruche der Zähler sowohl als der Nenner $= 0$ wird, wenn man $x = a$ setzt: so muß man abermals die Differenzialien für sie setzen, und findet dadurch

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

Aus gleichem Grunde muß man endlich auch hier so verfahren, und gelangt alsdann zu dem Bruche

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

Setzt man nun hier a für x, so bekommt man den bestimmten Bruch $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, und dieses ist der gesuchte Werth des gegebenen Bruchs.

Bedient

Bedient man sich vor dieser Untersuchung der Substitution $x = a + t$, so wird dadurch der gegebene Bruch in folgenden verwandelt:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2at)}}{-2aa + tt + 2a\sqrt{(aa - tt)}}$$

Da derselbe $= \frac{0}{0}$ wird, wenn man $t = 0$ setzt, so schreibe man dt für t. Diese Behandlung giebt

$$\frac{2a^3 + 2a^2dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2adt)}}{-2aa + dt^2 + 2a\sqrt{(aa - dt^2)}}$$

Nun verwandele man die Irrationalgrößen in Reihen, und setze diese Reihen so weit fort, bis die Glieder gegen die rationalen Glieder in dem Bruche verschwinden. Auf diese Art findet man

$$\sqrt{(aa + 2adt)} = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$$

$$\sqrt{(aa - dt^2)} = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$$

und durch den Gebrauch dieser Werthe

$$\frac{5dt^4 : 4a}{-dt^4 : 4aa} = -5a$$

Dieses ist eben der vorhin schon gefundene Werth des gegebenen Bruchs.

Viertes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{a + \sqrt{(2aa - 2ax)} - \sqrt{(2ax - xx)}}{a - x + \sqrt{(aa - xx)}}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Setzt man in die Stelle des Zählers und Nenners dieses Bruchs die Differenzialien derselben, so bekommt

 man

man folgenden für den Fall $x = a$ ihm gleichen Bruch:

$$\frac{-a : \sqrt{(aa - 2ax)} - (a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}{-1 - x : \sqrt{(aa - xx)}}$$

dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ unendlich werden. Multiplicirt man aber beyde mit $-\sqrt{(a - x)}$, so bekommt man

$$\frac{a : \sqrt{2a} + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(a - x)} + x : \sqrt{(a + x)}}$$

welcher Bruch für den Fall $x = a$ den bestimmten Werth $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$ giebt, und dies ist demnach der Werth des gegebenen Bruchs für den Fall $x = a$.

§. 359.

Hat man also einen Bruch $\frac{P}{Q}$, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verschwinden, so läßt sich sein Werth nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation angeben, und man hat nicht nöthig, seine Zuflucht zu den im vorhergehenden Capitel erklärten Differenzialien zu nehmen. Braucht man nemlich die Differenzialien, so wird der Bruch $\frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ dem Bruche $\frac{dP}{dQ}$ gleich, und wenn der Zähler und Nenner dieses Bruchs endliche Werthe haben, so erkennt man daraus sogleich den Werth des gegebenen Bruchs; wird aber einer davon $= 0$, indem der andere endlich bleibt, so ist der gegebene Bruch entweder $= 0$ oder $= \infty$, je nachdem entweder der Zähler oder der Nenner $= 0$ wird. Werden aber Zähler und Nenner zugleich $= \infty$, und dies geschieht, wenn sie durch

durch Größen dividirt werden, die in dem Falle $x = a$ verschwinden: so bringt man diese Unbequemlichkeit dadurch weg, daß man den Zähler und Nenner mit diesen Divisoren multiplicirt, wie z. B. im vorhergehenden Exempel. Verschwinden Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ zugleich, so muß man, wie vorhin, von neuem die Differenzialien nehmen, um den Bruch $\frac{ddP}{ddQ}$ zu erhalten, welcher für $x = a$ dem gegebenen noch gleich seyn wird. Sollte auch dieser Bruch $= \frac{0}{0}$ werden, so muß man dafür $\frac{d^3P}{d^3Q}$ nehmen, u. s. w. bis man zu einem Bruche gelangt, der einen bestimmten Werth giebt, einen endlichen entweder oder einen unendlichen, entweder unendlich großen oder unendlich kleinen. So mußte man im dritten Exempel bis zu $\frac{d^4P}{d^4Q}$ fortgehen, ehe man den Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ bestimmen konnte.

§. 360.

Der Nutzen dieser Untersuchung zeigt sich bey der Bestimmung der Summen der Reihen, welche wir oben im zweyten Capitel §. 22. gefunden haben, für den Fall, wenn $x = 1$ gesetzt wird. Nach dem angeführten Orte ist nemlich

$$x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^3 + x^5 + \ldots\ldots + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots\ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$$

$$x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots + (2n-1)x^{2n-1}$$
$$=$$
$$\frac{x + x^3 - (2n+1)x^{2n+1} + (2n-1)x^{2n+3}}{(1-xx)^2}$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2x$$
$$=$$
$$\frac{x + x^2 - (n+1)^2x^{n+1} + (2nn+2n-1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{1-x^3}$$

2c.

Sollen nun die Summen dieser Reihen für den Fall gefunden werden, wenn $x = 1$ ist, so verschwinden in den Ausdrücken dafür sowohl der Zähler als der Nenner, und es lassen sich daher diese Summen nach der erklärten Methode finden. Da sie schon sonst bekannt sind, so kann man sie als Bestätigungs-Beyspiele der erwähnten Methode betrachten.

Erstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x - x^{n+1}}{1-x}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Es giebt aber dieser Bruch die Summe der Reihe $1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1$, wenn sie aus n Gliedern besteht, und ist daher allemal $= n$.

Da für $x = 1$ Zähler und Nenner verschwinden, so setze man dafür die Differenzialien, wodurch man

$$\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$$

bekommt, welcher Ausdruck für $x = 1$ die Zahl n giebt.

Zwey-

Zweytes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Es ist aber derselbe als die Summe der Reihe $1 + 1 + 1 \ldots + 1$, wenn dieselbe bis zum nten Gliede fortgesetzt wird, $= n$.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man statt des gegebenen Bruchs

$$\frac{1 - (2n + 1)x^{2n}}{- 2n}$$

und der Werth dieses Bruchs ist n, wenn man $x = 1$ nimmt.

Drittes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Da dieser Bruch die Summe der Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ vorstellt, so ist jener Werth bekanntermaßen $= \frac{nn + n}{2}$.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man den Bruch

$$\frac{1 - (n + 1)^2 x^n + n(n + 2)x^{n+1}}{- 2(1 - x)}$$

Da indeß der Zähler und Nenner dieses Bruchs für den Fall $x = 1$ verschwinden, so muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Dadurch bekommt man

$$- \frac{n(n + 1)^2 x^{n-1} + n(n + 1)(n + 2)x^n}{2}$$

also für den Fall $x = 1$, $\frac{n(n + 1)}{2} = \frac{nn + n}{2}$,

Viertes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x + x^3 - (2n + 1)x^{2n+1} + (2n - 1)x^{2n+3}}{1 - xx^2}$$

für den Fall $x = 1$ zu finden. Da dieser Bruch die Summe der Reihe $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ ausdruckt, so ist, wie bekannt, jener Werth $= nn$.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man den Bruch

$$\frac{1 + 3xx - (2n + 1)^2 x^{2n} + (2n - 1)(2n + 3)x^{2n+2}}{-4x(1 - xx)}$$

und da derselbe, wenn man $x = 1$ setzt, $= \frac{0}{0}$ wird, so muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Hierdurch bekommt man

$$\frac{6x - 2n(2n + 1)^2 x^{2n-1} + (2n - 1)(2n + 2)(2n + 3)x^{2n+1}}{-4 + 12xx}$$

und dieser Bruch wird, wenn man $x = 1$ setzt,

$$\frac{6 - 2n(2n + 1)^2 + (2n - 1)(2n + 2)(2n + 3)}{8} = nn.$$

Fünftes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x + x^2 - (n + 1)^2 x^{n+1} + (2nn + 2n - 1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1 - x)^3}$$

für den Fall $x = 1$ zu finden. Da derselbe die Summe der Reihe $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$ ausdruckt, so ist er, wie bekannt, $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Nimmt man die Differenzialien des Zählers und Nenners, so erhält man

$$\left.\begin{array}{c} 1 + 2x - (n+1)^3 x^n \\ + (n+2)(2nn + 2n - 1)x^{n+1} \\ - nn(n+3)x^{n+2} \end{array}\right\} : -3(1-x)^2$$

und da in diesem Bruche Zähler und Nenner $= 0$ werden, wenn man $x = 1$ setzt, so muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Allein der Bruch, welchen man dadurch erhält, nemlich

$$\left.\begin{array}{c} 2 - n(n+1)x^{n-1} \\ + (n+1)(n+2)(2nn + 2n - 1)x^n \\ - n^2(n+2)(n+3)x^{n+1} \end{array}\right\} : 6(1-x)$$

hat eben die Unbequemlichkeit, und man muß daher durch abermalige Substitution der Differenzialien zu dem Bruche

$$\left.\begin{array}{c} - n(n-1)(n+1)^3 x^{n-2} \\ + n(n+1)(n+2)(2nn + 2n - 1)x^{n-1} \\ - n^2(n+1)(n+2)(n+3)x^n \end{array}\right\} : -6$$

zu gelangen suchen, der durch die Substitution $x = 1$ in

$$\frac{-n(n-1)(n+1)^3 + n(n+1)(n+2)(nn - n - 1)}{-6} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

übergeht, welches eben der Werth ist, den man schon auf andern Wegen als den wahren Werth kennen gelernt hat.

Sechstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$ für den Fall $x = 1$ zu finden.

Da dieser Bruch ein Produkt aus den beyden Brüchen $\frac{x^m}{1 + x^p} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x^p}$ ist, und der erste für den Fall $x = 1$ den Werth $\frac{1}{2}$ hat: so braucht man nur den Werth

 des

des andern Bruchs für eben den Fall zu suchen. Da man dafür beym Gebrauch der Differenzialien $\frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$ erhält, so ist der gesuchte Werth des gegebenen Bruchs $= \frac{n}{2p}$. Eben diesen Werth findet man, wenn man unmittelbar von dem gegebenen Bruche die Differenzialien nimmt. Dadurch erhält man nemlich

$$\frac{mx^{m-1} - (m+n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$$

und dieser Bruch giebt, wenn man $x = 1$ setzt, $\frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$ wie vorhin.

§. 361.

Eben dieselbe Methode muß man befolgen, wenn entweder der Zähler oder Nenner des Bruchs $\frac{P}{Q}$, oder beyde transcendente Größen sind. Auch dieses wollen wir an einigen Beyspielen erläutern.

Erstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Durch die Substitution der Differenzialien erhält man sogleich den Bruch $-\frac{nx^{n-1}}{-1 : x} = nx^n$, und der Werth desselben für $x = a$ ist na^n.

Zwey-

Zweytes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für den Fall $x = 1$ zu finden.

Nimmt man die Differenzialien des Zählers und Nenners, so bekommt man $\frac{1 : x}{-1 : 2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$; und da der Werth dieses Bruchs, wenn man $x = 1$ setzt, $= 0$ wird, so folgt, daß der Bruch $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für den Fall $x = 1$ verschwinde.

Drittes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{a - x - ala + alx}{a - \sqrt{(2ax - xx)}}$ für den Fall $x = a$ zu finden, in welchem der Zähler und Nenner $= 0$ werden.

Durch die Substitution der Differenzialien in dem Zähler und Nenner findet man

$$\frac{-1 + a : x}{-(a-x) : \sqrt{(2ax - xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$$

Nun wird zwar auch der Zähler und Nenner dieses Bruchs $= 0$, wenn man $x = a$ setzt; allein da beyde durch $a - x$ theilbar sind, so erhält man dafür durch die Division mit $a - x$

$$-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

und da der Werth dieses Bruchs für $x = a$, $= -1$ wird, so ist auch für eben diesen Fall der Werth des gegebenen Bruchs $= -1$.

Viertes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{e^x - e^{-x}}{l(1 + x)}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man den Bruch $\frac{e^x + e^{-x}}{1 : (1 + x)}$, welcher für $x = 0$ den Werth 2 giebt.

Fünftes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{e^x - 1 - l(1 + x)}{xx}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Setzt man statt des Zählers und Nenners die Differenzialien, so erhält man den Bruch $\frac{e^x - 1 : (1 + x)}{2x}$, welcher aber, wenn man $x = 0$ setzt, $= \frac{0}{0}$ wird. Man muß also durch abermalige Substitution der Differenzialien den Bruch $\frac{e^x + 1 : (1 + x)^2}{2}$ suchen, welcher für $x = 0$ den Bruch $\frac{1 + 1}{2} = 1$ giebt. Eben dieses findet man, wenn man sogleich $0 + dx$ für x setzt. Da nemlich $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 +$ ꝛc. und $l(1 + dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 +$ ꝛc. ist: so erhält man auf diesem Wege

$$\frac{e^{dx} - 1 - l(1 + dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1.$$

Sechs=

Sechstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^n}{lx}$ für den Fall $x = \infty$ zu finden.

Um diesen Bruch auf die Form zu bringen, wobey er in dem angenommenen Falle in $\frac{0}{0}$ übergeht, schreibe man ihn auf diese Art $\frac{1 : lx}{1 : x^n}$. Ferner setze man $x = \frac{1}{y}$, so daß für den Fall $x = \infty$, $y = 0$ werde. Hiedurch bekommt man den Bruch $-\frac{1 : ly}{y^n}$ für den Fall $y = 0$ zu untersuchen. Nimmt man nun die Differenzialien, so findet man $\frac{1 : y(ly)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1 : (ly)^2}{ny^n}$. Allein dieser Bruch wird $= \frac{0}{0}$, wenn man $y = 0$ setzt, und eben dieses findet bey den Brüchen $\frac{-2 : (ly)^3}{n^2 y^n}$ und $\frac{6 : (ly)^4}{n^3 y^n}$ u. s. f. statt, welche man durch fortgesetzte Substitution der Differenzialien erhält. Um also gleichwohl den gesuchten Werth zu finden, sey $s = -\frac{1 : ly}{y^n}$, wenn man $y = 0$ setzt. Da in diesem Falle auch $s = \frac{1 : (ly)^n}{ny^n}$ wird; so erhält man aus jener Gleichung $ss = \frac{1 : (ly)^2}{y^{2n}}$, und diese Gleichung durch die zweyte dividirt giebt $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$. Hieraus erkennt man, daß $s = \infty$ wird, wenn y in 0 übergeht, und es ist daher der Werth des Bruchs $-\frac{1 : ly}{y^n}$ unendlich groß,

wenn

wenn $y = 0$ wird, so daß, wenn man $y = dx$ setzt, $\frac{1}{l\,dx}$ zu dx^n ein unendliches Verhältniß hat, wie bereits oben berührt worden ist.

Siebentes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ für den Fall $x = 0$ zu finden, in welchem sowohl der Zähler als der Nenner verschwindet.

Es sey für den erwähnten Fall $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, so wird, wenn man die Differenzialien nimmt, $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}:xx}$ und da dieser Bruch, so wie auch alle übrige, welche man durch die Substitution der Differenzialien finden kann, für den Fall $x = 0$, $= \frac{0}{0}$ wird: so muß man wieder zu dem vorhin gebrauchten Hülfsmittel seine Zuflucht nehmen. Nun giebt die erste Gleichung

$$x^n = e^{-1:x}s, \text{ und } x^{n(n+1)} = e^{-(n+1):x}s^{n+1}$$

die andere aber

$$x^{n+1} = e^{-1:x}s:n, \text{ also } x^{n(n+1)} = e^{-n:x}s^n:n^n$$

und aus diesen beyden Gleichungen erhält man

$$e^{-1:x}sn^n = 1, \text{ und also } s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}} = \infty$$

wenn $x = 0$ gesetzt wird. Setzt man demnach $x = l\,dx$, so hat dx^n zu $e^{-1:dx}$ ein unendliches Verhältniß, was man auch für n für eine endliche Zahl setzen mag, und es ist daher $e^{-1:dx}$ eine unendlich kleine Größe und dx^m homogen, wenn m eine unendlich große Zahl bedeutet.

Achtes

Achtes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{1 - \sin.x + \cos.x}{\sin.x + \cos.x - 1}$ für den Fall zu finden, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ oder ein Bogen von 90° wird.

Durch die Substitution der Differenzialien erhält man den Bruch $-\frac{\cos.x - \sin.x}{\cos.x - \sin.x}$, welcher für den Fall, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, da alsdenn $\sin.x = 1$, und $\cos.x = 0$, in 1 übergeht, so daß 1 der gesuchte Werth des gegebenen Bruchs ist. Eben dieses erkennet man ohne Differenziation. Denn da $\cos.x = \sqrt{(1 + \sin.x)} + \sqrt{(1 - \sin.x)}$ ist, so erhält man dadurch statt des gegebenen Bruchs $\frac{\sqrt{(1 - \sin.x)} + \sqrt{(1 + \sin.x)}}{\sqrt{(1 + \sin.x)} - \sqrt{(1 - \sin.x)}}$, und dieser Bruch wird offenbar $= 1$, wenn $\sin.x = 1$ wird.

Neuntes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ für den Fall $x = 1$ zu finden.

Setzt man statt des Zählers und Nenners die Differenzialien, so bekommt man den Bruch

$$\frac{x^x(1 + lx) - 1}{-1 + 1 : x} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 1.$$

Dagegen giebt die abermalige Substitution der Differenzialien $\frac{x^x(1 + lx)^2 + x^x : x}{-1 : xx}$, und dieser Bruch wird $= -2$, wenn man $x = 1$ setzt, daher denn auch der

Werth

Werth des gegebenen Bruchs $= -2$ ist, wenn $x = 1$ angenommen wird.

§. 362.

Da es hier unsere Absicht ist, alle Ausdrücke zu betrachten, die in gewissen Fällen unbestimmt zu seyn scheinen: so müssen wir außer den Brüchen $\frac{P}{Q}$, deren Zähler und Nenner in gewissen Fällen verschwinden, auch derer Erwähnung thun, deren Zähler und Nenner in gewissen Fällen unendlich groß werden, weil die Werthe dieser Brüche ebenfalls unbestimmt zu seyn scheinen können. Sind nemlich P und Q solche Funktionen von x, daß sie beyde für einen bestimmten Fall $x = a$ unendlich werden: so bekommt der Bruch $\frac{P}{Q}$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$; und da die unendlichen Größen eben sowohl als die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können, so läßt sich daraus der Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ auf keine Weise erkennen. Indeß läßt sich dieser Fall auf den vorhergehenden zurückführen, wenn man den Bruch $\frac{P}{Q}$ durch $\frac{1:Q}{1:P}$ ausdruckt, wo der Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verschwinden, und also der Werth dieses Bruchs nach der beschriebenen Methode gefunden werden kann. Aber es ist deswegen diese Verwandlung nicht schlechterdings nothwendig. Denn setzt man für x nicht a sondern $a + dx$, so bekommt man die unendlichen Werthe nicht durch ∞ ausgedruckt, sondern in Darstellungen, wie $\frac{1}{dx}$ oder $\frac{A}{dx^n}$; und ob gleich diese Ausdrücke ebenfalls unendliche Größen anzeigen, so lassen

lassen sie sich doch unter einander vergleichen, und also auch aus ihnen der wahre Werth der Funktion $\frac{P}{Q}$ leicht finden.

§. 363.

Eben so gehören hieher die Produkte aus zwey Faktoren, wovon der eine, wenn man $x = a$ setzt, verschwindet, und der andere unendlich wird. Denn da man jede Größe durch das Produkt $0 . \infty$ darstellen kann, so hat man darin allerdings keinen bestimmten Werth. Ist aber PQ ein Produkt, wo, wenn man $x = a$ setzt, $P = 0$ und $Q = \infty$ wird, so findet man den Werth desselben nach den erklärten Regeln, wenn man $Q = \frac{1}{R}$ setzt, weil alsdann das Produkt PQ in den Bruch $\frac{P}{R}$ verwandelt wird, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verschwinden. Sollte z. B. der Werth des Produkts $(1 - x)\,\text{tang.}\frac{\pi x}{2}$ für den Fall $x = 1$, wo $1 - x = 0$, und $\text{tang.}\frac{\pi x}{2} = \infty$, wird, gesucht werden: so verwandele man dieses Produkt in den Bruch $\frac{1 - x}{\cot.\frac{1}{2}\pi x}$, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = 1$ verschwinden. Da das Differenzial des Zählers $= -dx$, und das Differenzial des Nenners $= -\frac{\pi dx : 2}{(\sin.\frac{1}{2}\pi x)^2}$ ist, so wird der Werth des gegebenen Bruchs für den Fall $x = 1$

$$\frac{2}{\pi}\sin.\frac{\pi x}{2}.\sin.\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$$

weil $\sin.\frac{\pi}{2} = 1$ ist.

§. 364.

Insbesondere aber gehören hieher die Ausdrücke, welche bey einem bestimmten Werthe für x die Form $\infty - \infty$ annehmen. Denn da zwey unendliche Größen um jede endliche Größe von einander unterschieden seyn können, so erhellet, daß jene Ausdrücke nicht eher einen bestimmten Werth anzeigen, als bis man diesen Unterschied angeben kann. Es findet aber ein Fall dieser Art statt, wenn eine Funktion $P - Q$ gegeben ist, wo, wenn man $x = a$ setzt, sowohl P als Q unendlich wird, und hier ist es nicht gleich leicht, den gesuchten Werth nach den erklärten Regeln zu finden. Denn nimmt man auch $P - Q = f$, und setzt $e^{P-Q} = e^f$, so daß $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$ wird, wo für $x = a$ sowohl der Zähler e^{-Q} als der Nenner e^{-P} verschwindet: so erhält man nach der erklärten Methode $e^f = \frac{e^{-Q}dQ}{e^{-P}dP}$ und also, da $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$ ist, $1 = \frac{dQ}{dP}$, woraus sich aber der Werth von f nicht finden läßt. Sind P und Q algebraische Größen, so können diese nicht anders unendlich werden, als wenn sie Brüche mit verschwindenden Nennern sind; und findet dieses bey P und Q statt, so lassen sich die Brüche $P - Q$ in einen zusammenziehen, dessen Nenner ebenfalls verschwindet. Wird nun in diesem Falle auch der Zähler $= 0$, so kann man die bereits beschriebene Methode brauchen; verschwindet aber der Zähler nicht, so ist der gesuchte Werth eine unendliche Größe im eigentlichen Verstande. Soll z. B. der Werth des Ausdrucks $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ für den Fall $x = 1$ gesucht werden,

so

so erhält man für diesen Ausdruck $\frac{1 - x}{1 - xx} = \frac{-1}{1 + xx}$, und darnach ist der gesuchte Werth $= -\frac{1}{2}$.

§. 365.

Wenn aber P und Q transcendente Funktionen sind, so ist diese Verwandlung meistens mit sehr beschwerlichen Rechnungen verknüpft. In diesem Falle bedient man sich daher besser der directen Methode, und setzt statt $x = a$, wobey beyde Größen P und Q unendlich werden würden, $x = a + \omega$, so daß ω eine unendlich kleine Größe bedeutet und mit dx verwechselt werden kann. Wird hierdurch $P = \frac{A}{\omega} + B$, und $Q = \frac{A}{\omega} + C$, so ist offenbar, daß $P - Q = B - C$ ist, und diese Differenz ist eine endliche Größe. Diese Art den Werth von dergleichen Funktionen zu finden, mögen folgende Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lx}$ für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ gesezt wird.

Da sowohl $\frac{x}{x-1}$ als $\frac{1}{lx}$ unendlich werden, wenn man $x = 1$ nimmt, so setze man $x = 1 + \omega$, wodurch der gegebene Ausdruck in folgenden verwandelt wird

$$\frac{1+\omega}{\omega} - \frac{1}{l(1+\omega)}$$

Nun ist

$$l(1+\omega) = \omega - \tfrac{1}{2}\omega^2 + \tfrac{1}{3}\omega^3 - \text{ꝛc.} = \omega(1 - \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{3}\omega^2 - \text{ꝛc.})$$

 und

und man hat also

$$\frac{(1+\omega)(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)-1}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.} = \frac{\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{6}\omega^2+\&c.}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\omega+\&c.}{1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\&c.}$$

Nimmt man folglich ω unendlich klein oder $=0$, so wird offenbar der gesuchte Werth $=\frac{1}{2}$.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $\frac{\pi x-1}{2xx}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ für den Fall $x=0$ zu finden, vorausgesetzt, daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolischer Logarithme $=1$ ist und π das Verhältniß des halben Umfangs des Kreises zum Halbmesser desselben ausdrucke.

Der Ausdruck $\frac{\pi x-1}{2xx}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ ist der Ausdruck der Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{4+xx}+\frac{1}{9+xx}+\frac{1}{16+xx}+\frac{1}{25+xx}+\&c.$$

und man muß also, wenn man $x=0$ setzt, die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\&c.$$

finden, welche, wie bekannt $=\frac{\pi\pi}{6}$ ist. Setzt man aber $x=0$, so scheint der Ausdruck $\frac{\pi x-1}{2xx}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ höchst unbestimmt zu seyn, weil beyde Glieder desselben unendlich werden. Man setze daher $x=\omega$, wodurch $\frac{\pi x-1}{2xx}$

in

in $-\frac{1}{2\omega^2}+\frac{\pi}{2\omega}$ übergeht. Da ferner $e^{2\pi\omega}-1=2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+$ rc. ist, so erhält man für das andere Glied $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega+2\pi^2\omega^2+\frac{4}{3}\pi^3\omega^3+\text{rc.}}=\frac{1}{2\omega^2(1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\text{rc.})}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{1+\pi\omega+\frac{2}{3}\pi^2\omega^2+\text{rc.}}=1-\pi\omega+\frac{1}{3}\pi^2\omega^2+\text{rc.}$$

und es wird folglich das letzte Glied $=\frac{1}{2\omega^2}-\frac{\pi}{2\omega}+\frac{1}{6}\pi^2$ — rc. und addirt man hierzu das erste Glied, so bekommt man $\frac{1}{6}\pi^2$, welches der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x=0$ ist.

Eben diesen Werth kann man nach der Methode finden, welche wir bey den Brüchen gebraucht haben, deren Zähler und Nenner in gewissen Fällen verschwinden, indem sich der gegebene Ausdruck in folgenden Bruch verwandeln läßt,

$$\frac{\pi x e^{2\pi x}-e^{2\pi x}+\pi x+1}{2xxe^{2\pi x}-2xx}$$

dessen Zähler und Nenner für $x=0$ ebenfalls $=0$ werden. Nimmt man also die Differenzialien, so bekommt man

$$\frac{\pi e^{2\pi x}+2\pi\pi x e^{2\pi x}-2\pi e^{2\pi x}+\pi}{4xe^{2\pi x}+4\pi xxe^{2\pi x}-4x}$$

oder

$$\frac{\pi-\pi e^{2\pi x}+2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x}+4xxe^{2\pi x}-4x}$$

 wo

wo aber für $x = 0$ Zähler und Nenner wieder verschwinden. Man muß daher nochmals die Differenzialien substituiren, und findet alsdann

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 x x e^{2\pi x} - 4}$$

oder

$$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

oder

$$\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}$$

Da auch hier für $x = 0$ Zähler und Nenner $= 0$ werden, so nehme man nochmals die Differenzialien, wodurch man

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

bekommt, und dieser Bruch geht, wenn man $x = 0$ setzt, in $\frac{\pi}{6}$ über, welches der vorhin gefundene Werth ist.

Drittes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks: $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$ zu finden, wenn $x = 0$ ist, und π und e die vorige Bedeutung behalten.

Der gegebene Ausdruck läßt sich in den Bruch $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4xe^{\pi x} + 4x}$ verwandeln, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = 0$ verschwinden. Man setze daher $x = \omega$, und da

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \text{ꝛc.}$$

ist, so erhält man dadurch für den gegebenen Ausdruck

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \text{ꝛc.}}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \text{ꝛc.}}$$

und dieser Ausdruck wird $= \frac{1}{8}\pi^2$, wenn man $\omega = 0$ nimmt. Auch ist $\frac{1}{8}\pi^2$ der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 0$. Uebrigens stellt die Formel $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$ die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{25+xx} + \frac{1}{49+xx} + \text{ꝛc.}$$

dar, und es ist bekannt, daß diese Reihe, wenn $x = 0$ angenommen wird $= \frac{1}{8}\pi^2$ ist.

Viertes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\text{tang.}\pi x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Die Formel $\frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x\,\text{tang.}\varpi x}$ druckt die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{ꝛc.}$$

aus, und es muß daher, wenn man $x = 0$ setzt, die Summe der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{ꝛc.}$$

sich ergeben, wovon man weiß, daß sie $= \frac{1}{6}\varpi\varpi$ ist. Da nun $\text{tang.}\varpi x = \frac{\text{sin.}\varpi x}{\text{cos.}\varpi x}$ ist, so hat man

$$\frac{1}{2xx} - \frac{\varpi\,\text{cos.}\varpi x}{2x\,\text{sin.}\varpi x} = \frac{\text{sin.}\varpi x - \varpi x\,\text{cos.}\varpi x}{2xx\,\text{sin.}\varpi x}$$

und der Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden, wenn man $x = 0$ setzt. Man nehme also $x = 0$, so geht der gegebene Ausdruck, da

$$\sin.\varpi x = \varpi\omega - \tfrac{1}{6}\varpi^3\omega^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\cos.\varpi x = 1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2\omega^2 + \text{ꝛc.}$$

ist, in folgenden Bruch

$$\frac{\varpi\omega - \frac{1}{6}\varpi^3\omega^3 + \text{ꝛc.} - \varpi\omega + \frac{1}{2}\varpi^3\omega^3 - \text{ꝛc.}}{2\varpi\omega^3 - \frac{1}{3}\varpi^3\omega^5 + \text{ꝛc.}}$$
$$=$$
$$\frac{\frac{1}{3}\varpi^3\omega^3 - \text{ꝛc.}}{2\varpi\omega^3 - \text{ꝛc.}}$$

über, welcher, wenn man ω unendlich klein annimmt, $\frac{1}{6}\varpi^2$ giebt.

Fünftes Exempel.

Da die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x}$$

ist: den Werth dieser Summe für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varpi x = \tfrac{1}{2}\varpi x - \tfrac{1}{48}\varpi^3 x^3 + \text{ꝛc. und}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}\varpi x = 1 - \tfrac{1}{8}\varpi^2 x^2 + \text{ꝛc.}$$

ist: so wird der gegebene Ausdruck =

$$\frac{\frac{1}{2}\varpi^2 x - \frac{1}{48}\varpi^4 x^3 + \text{ꝛc.}}{4x - \frac{1}{2}\varpi^2 x^3 + \text{ꝛc.}} = \frac{\frac{1}{2}\varpi^2 - \frac{1}{48}\varpi^4 x^2 + \text{ꝛc.}}{4 - \frac{1}{2}\varpi^2 x^2 + \text{ꝛc.}}$$

und also offenbar $= \frac{1}{8}\varpi^2$, wenn man $x = 0$ setzt. Es ist aber $\frac{1}{8}\varpi^2$ der Werth der Reihe $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{ꝛc.}$, wie oben auf mehrere Arten gezeigt worden, dagegen die gegebene Reihe allemal $= 0$ wird, wenn man für x irgend eine gerade Zahl setzt.

§. 366.

In diesen Reihen, welche in den beyden letzten Exempeln vorkommen, so wie auch in andern die veränderliche Größe x enthaltenden Reihen, können dieser Größe x auch solche Werthe beygelegt werden, daß einige Glieder, und folglich alsdann auch die Summe der ganzen Reihe unendlich wird. Setzt man z. B. in der Reihe

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{4}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+ \text{ꝛc.}$$

für x irgend eine ganze Zahl: so wird allemal ein Glied derselben, wegen des verschwindenden Nenners, und also auch die Summe der Reihe unendlich. Läßt man aber dieses unendliche Glied aus der Reihe weg, so ist der übrige Theil der Summe eine endliche Größe, und läßt sich durch die Differenz zwischen dem Unendlichen, welches die ganze Summe ausdruckt, und dem gedachten unendlichen Gliede, also durch $\infty - \infty$ ausdrucken. Was für ein bestimmter Werth in dergleichen Fällen statt finde, läßt sich nach der erklärten Methode entdecken, und folgende Beyspiele mögen zur Erläuterung dienen.

Erstes Exempel.

Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{4-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{16-xx}+ \text{ꝛc.}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ genommen, und das erste Glied weggelassen wird, welches bey $x = 1$ ins Unendliche übergeht.

Da überhaupt genommen die Summe dieser Reihe $= \frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x\,\text{tang.}\,\varpi x}$ ist: so ist die gesuchte Summe

 =

$$= \frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x \operatorname{tang.} \varpi x} - \frac{1}{1 - xx}$$

für $x = 1$. Man setze $x = 1 + \omega$, so wird diese Summe

$$= \frac{1}{2(1 + 2\omega + \omega\omega)} - \frac{\varpi}{2(1 + \omega) \operatorname{tang.} (\varpi + \omega\varpi)} + \frac{1}{2\omega + \omega\omega}$$

Nun ist

$$\operatorname{tang.} (\varpi + \omega\varpi) = \operatorname{tang.} \omega\pi = \varpi\omega + \tfrac{1}{3}\varpi^3\omega^3 + \text{etc.}$$

und da das erste Glied $\frac{1}{2xx}$ für $x = 1$ den bestimmten Werth $\frac{1}{2}$ bekommt, so braucht man nur auf die beyden übrigen zu sehen. Diese sind, wenn ω eine unendlich kleine Größe bedeutet,

$$\frac{1}{\omega(2 + \omega)} - \frac{\varpi}{2\omega(1 + \omega)(\varpi + \frac{1}{3}\varpi^3\omega^2)} =$$

$$\frac{1}{\omega(2 + \omega)} - \frac{1}{\omega(2 + 2\omega)(1 + \frac{1}{3}\varpi^2\omega^2)}$$

Aber wenn ω unendlich klein ist, kann man selbst $\frac{1}{3}\varpi^2\omega^2$ aus der Acht lassen, und dadurch bekommt man

$$\frac{\omega}{\omega(2 + \omega)(2 + 2\omega)} = \frac{1}{4}$$

wenn man $\omega = 0$ setzt. Es ist aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ die Summe der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.}$ wie aus andern Gründen bekannt ist.

Zweytes Exempel.

Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1 - xx} + \frac{1}{4 - xx} + \frac{1}{9 - xx} + \frac{1}{16 - xx} + \text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn x irgend einer ganzen Zahl n gleich gesetzt, und das alsdann ins Unendliche übergehende Glied $\frac{1}{nn - xx}$ weggelassen wird.

Die

Die gesuchte Summe läßt sich auf folgende Art ausdrucken:

$$\frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x\,\mathrm{tang.}\,\varpi x} - \frac{1}{nn - xx}$$

vorausgesetzt, daß $x = n$ angenommen werde, wo denn das erste Glied $\frac{1}{2xx} = \frac{1}{2nn}$, die beyden andern aber unendlich werden. Man setze also $x = n + \omega$, so hat man für die gesuchte Summe, da $\mathrm{tang.}(\varpi n + \varpi\omega) = \mathrm{tang.}\,\varpi\omega = \varpi\omega$ ist, wenn man ω unendlich klein annimmt, den Ausdruck

$$\frac{1}{2nn} - \frac{\varpi}{2(n + \omega)\varpi\omega} + \frac{1}{2n\omega + \omega\omega}$$

oder

$$\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n + 2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n + \omega)} =$$

$$\frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n + 2\omega)(2n + \omega)}$$

und wird demnach $\omega = 0$, so bekommt man

$$\frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} = \frac{3}{4nn}.$$

Es ist folglich

$$\frac{3}{4nn} = \frac{1}{1 - nn} + \frac{1}{4 - nn} + \frac{1}{9 - nn} \dots + \frac{1}{(n-1)^2 - nn}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2 - nn} + \frac{1}{(n+2)^2 - nn} + \text{ꝛc. ohne Ende}$$

oder

$$\frac{1}{(n+1)^2 - nn} + \frac{1}{(n+2)^2 - nn} + \frac{1}{(n+3)^2 - nn} + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$\frac{3}{4nn} + \frac{1}{nn - 1} + \frac{1}{nn - 4} + \dots + \frac{1}{nn - (n-1)^2}$$

Drit-

Drittes Exempel.

Den Werth der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn $x=1$ gesetzt, und das alsdann ins Unendliche übergehende Glied $\frac{1}{1-xx}$ weggelassen wird.

Da die Summe dieser Reihe überhaupt genommen $=\frac{\varpi \sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x}$ ist: so wird die gesuchte Summe

$$=\frac{\varpi \sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x}-\frac{1}{1-xx}$$

für den Fall $x=1$. Da beyde Glieder für $x=1$ unendlich werden, so setze man $x=1-\omega$. Hierdurch bekommt man, da

$$\sin.(\tfrac{1}{2}\varpi-\tfrac{1}{2}\varpi\omega)=\cos.\tfrac{1}{2}\varpi\omega=1-\tfrac{1}{8}\varpi^2\omega^2, \text{ und}$$
$$\cos.(\tfrac{1}{2}\varpi-\tfrac{1}{2}\varpi\omega)=\sin.\tfrac{1}{2}\varpi\omega=\tfrac{1}{2}\varpi\omega$$

ist, indem ω eine unendlich kleine Größe bedeutet, den Ausdruck

$$\frac{\varpi(1-\frac{1}{8}\varpi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\varpi\omega}-\frac{1}{2\omega-\omega\omega}=\frac{1}{\omega(2-2\omega)}-\frac{1}{2(2-\omega)}$$

der $=\frac{1}{4}$ wird, wenn man $\omega=0$ annimmt, und es ist demnach

$$\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{80}+\tfrac{1}{120}+\text{etc.}$$

Viertes Exempel.

Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{etc.}$$

zu finden, wenn x irgend einer ungeraden Zahl $2n-1$ gleich

gleich gesetzt, und das Glied $\frac{1}{(2n - 1)^2 - xx}$, welches in diesem Falle ins Unendliche übergeht, weggelassen wird.

Die gesuchte Summe ist $= \frac{4 \sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x \cos.\frac{1}{2}\varpi x} - \frac{1}{(2n-1)^2 - xx}$ wenn $x = 2n - 1$ genommen wird. Man setze demnach $x = 2n - 1 - \omega$, und lasse ω eine unendlich kleine Größe bedeuten. Alsdann wird

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varpi x = \sin.(\tfrac{2n-1}{2}\varpi - \tfrac{1}{2}\varpi\omega) = \pm \cos.\tfrac{1}{2}\varpi\omega$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n eine ungerade, und das untere, wenn n eine gerade Zahl ist. Auf ähnliche Art wird

$$\cos.\tfrac{1}{2}\varpi x = \cos.(\tfrac{2n-1}{2}\varpi - \tfrac{1}{2}\pi\omega) = \pm \sin.\tfrac{1}{2}\varpi\omega,$$

und folglich, n mag eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeuten,

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}\varpi x}{\cos.\frac{1}{2}\varpi\omega} = \frac{1}{\tang.\frac{1}{2}\varpi\omega} = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi\omega}$$

Dies vorausgesetzt läßt sich die gesuchte Summe auf diese Art:

$$\frac{1}{2\omega(2n - 1 - \omega)} - \frac{1}{\omega(2(2(2n-1) - \omega))}$$

ausdrucken, und ist demnach $= \frac{1}{4(2n-1)^2}$. Ist z. B. $n = 2$, so wird

$$\tfrac{1}{36} = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{112} + \text{ꝛc.}$$

und die Richtigkeit dieser Summe ist aus andern Gründen bekannt.

Sechs-

Sechszehntes Capitel.

Von der Differenziation der inexplicablen Funktionen.

§. 367.

Inexplicable Funktionen sollen hier solche Funktionen heißen, welche sich weder durch bestimmte Ausdrücke noch durch die Wurzeln der Gleichungen darstellen lassen, so daß sie weder zu den algebraischen noch mit Gewißheit zu einer von den Arten der transcendenten Funktionen gezählet werden können. Eine solche Funktion ist z. B.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x}$$

welche zwar von x abhängt, aber auf keine Weise entwickelt werden kann, wenn x keine ganze Zahl bedeutet. Auf ähnliche Art ist $1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots x$ eine inexplicable Funktion, weil, wenn x jede Zahl vorstellen soll, der Werth derselben weder algebraisch noch durch irgend eine Art der transcendenten Größen dargestellt werden kann. Den Begriff von dergleichen Funktionen kann man auf die Reihen gründen. Kann nemlich die Summe der Reihe

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \ldots\ldots & x \\ A & + & B & + & C & + & D & + \ldots\ldots + & X \end{array}$$

durch keinen endlichen Ausdruck angegeben werden, so giebt diese Reihe eine inexplicable Funktion von x, nemlich

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

Eben

Eben dergleichen erhält man in den Produkten aus den unmittelbar auf einander folgenden Gliedern der Reihen, z. B.

$$P = ABCD \dots X$$

die aber vermittelst der Logarithmen auf die vorige Form gebracht werden können, indem

$$lP = lA + lB + lC + lD + \dots + lX$$

ist.

§. 368.

In dem gegenwärtigen Capitel wollen wir nun die Art, dergleichen inexplicable Funktionen zu differenziiren untersuchen. Zwar scheint dieser Gegenstand in den ersten Theil zu gehören; er mußte aber bis hieher verschoben werden, weil er eine ausführlichere Kenntniß der Reihen voraussetzt. Da indeß diese Untersuchung noch von Niemand angestellt ist, so werden wir uns bloß auf die ersten Gründe derselben einlassen können, doch wollen wir damit einige andere Untersuchungen verbinden, welche die Differenziation der inexplicablen Funktionen nothwendig macht, und zugleich den Nutzen dieser Theorie zeigen wird.

§. 369.

Um also die inexplicablen Funktionen zu differenziiren muß man vor allen Dingen die Werthe aufsuchen, welche sie durch die Substitution $x + \omega$ für x erhalten. Es sey also

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \dots + \overset{x}{X}$$

Σ der Werth, welchen S durch die Substitution $x + \omega$ für x bekommt, und Z das Glied der Reihe, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört. Ferner mögen die Glieder, deren Anzeiger

Anzeiger $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ ꝛc. sind, durch X', X'', X''', ꝛc. und dasjenige, dessen Anzeiger $x + \infty$ ist, durch $X^{|\infty|}$ angedeutet werden. Auf ähnliche Art sollen Z', Z'', Z''' ꝛc. die Glieder, deren Anzeiger $x + \omega + 1$, $x + \omega + 2$, $x + \omega + 3$ ꝛc. sind, und $Z^{|\infty|}$ das Glied, welchem der Anzeiger $x + \omega + \infty$ zugehört, ausdrucken. Dieses vorausgesetzt ist

$$
\begin{aligned}
S' &= S + X' \\
S'' &= S + X' + X'' \\
S''' &= S + X' + X'' + X''' \\
&\text{ꝛc.} \\
S^{|\infty|} &= S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\infty|}.
\end{aligned}
$$

Auf ähnliche Art ist, wenn Σ nach und nach durch die Glieder Z', Z'', ꝛc. vergrößert wird

$$
\begin{aligned}
\Sigma' &= \Sigma + Z' \\
\Sigma'' &= \Sigma + Z' + Z'' \\
\Sigma''' &= \Sigma + Z' + Z'' + Z''' \\
&\text{ꝛc.} \\
\Sigma^{|\infty|} &= \Sigma + Z' + Z'' + Z''' \ldots + Z^{|\infty|}.
\end{aligned}
$$

§. 370.

Nun muß man die Natur der Reihe S, S', S'', S''', ꝛc. erwägen, wenn sie ohne Ende fortgesetzt wird. Wenn dieselbe im Unendlichen mit einer arithmetischen Reihe zusammenfällt; und dies findet statt, wenn die Glieder X, X', X'', X''', ꝛc. im Unendlichen einander gleich werden, so daß die Reihe S, S', S'', S''', ꝛc. endlich gleiche Differenzen bekommt: so sind in diesem Falle

$$S^{|\infty|},\quad S^{|\infty+1|},\quad S^{|\infty+2|},\quad S^{|\infty+3|},\ \text{ꝛc.}$$

in einer arithmetischen Progression: ob nun

$$\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|}$$

wird,

wird, weil

$$S^{|\infty+\omega|} = S^{|\infty|} + \omega(S^{|\infty+1|} - S^{|\infty|})$$
$$= \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega)S^{|\infty|}$$

ist: so hat man

$$\Sigma^{|\infty|} = \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega)S^{|\infty|}.$$

Nun ist

$$S^{|\infty+1|} = S^{|\infty|} + X^{|\infty+1|}$$

also

$$\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}.$$

Hierdurch bekommt man die Gleichung

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z^{|\infty|} =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}$$

woraus sich der Werth von Σ bestimmen läßt, den die Funktion S bekommt, wenn man darin $x + \omega$ für x setzt. Es ist nemlich

$$\Sigma = S + \omega X^{|\infty+1|} + X' + X'' + X''' + \text{ꝛc. ohne Ende}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \text{ꝛc. ohne Ende.}$$

Wenn daher die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc. verschwinden, so wird $\omega X^{|\infty+1|} = 0$ und kann weggelassen werden.

§. 371.

Es wird also der Werth Σ durch eine neue unendliche Reihe ausgedruckt, welche sich darstellen läßt, wenn das allgemeine Glied der Reihe $A + B + C +$ ꝛc. bekannt ist, um daraus die Werthe der Glieder Z', Z'', Z''', ꝛc. zu bestimmen. Nimmt man demnach ω unendlich klein, so wird, da $\Sigma - S$ das Differenzial von S ist, das Differenzial dS durch eine unendliche Reihe ausgedruckt. Läßt man ferner dabey auch die höhern Potestäten von ω nicht aus der

Acht, so bekommt man das vollständige Differenzial der inexplicablen Funktion S, dessen Beschaffenheit deutlicher darzulegen die Absicht bey folgenden Exempeln seyn soll.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}$$

zu finden.

Da das allgemeine Glied dieser Reihe $X = \frac{1}{x}$, und daher

$$\begin{array}{ll|ll}
X' & = \dfrac{1}{x+1} & Z' & = \dfrac{1}{1+1+\omega} \\[2ex]
X'' & = \dfrac{1}{x+2} & Z'' & = \dfrac{1}{x+1+\omega} \\[2ex]
X''' & = \dfrac{1}{x+3} & Z''' & = \dfrac{1}{x+3+\omega} \\
\text{ꝛc.} & & \text{ꝛc.} &
\end{array}$$

ist, so erhält man, da $X^{|\infty+1|} = \frac{1}{x+\infty+1} = 0$ ist, wenn $x+\omega$ für x gesetzt wird, Σ für S, so daß

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \text{ꝛc.}$$

oder, wenn man die Glieder Paarweise addirt

$$\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)}$$
$$+ \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{ꝛc.}$$

oder,

oder, da

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \text{rc.}$$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \text{rc.}$$

ist, wenn man die Reihen nach den Potestäten von ω ordnet

$$\Sigma = S$$

$$+\omega\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{rc.}\right)$$

$$-\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{rc.}\right)$$

$$+\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{rc.}\right)$$

$$-\omega^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \text{rc.}\right)$$

$$\text{rc.}$$

wird. Schreibt man also dx für ω, so ist das vollständige Differenzial der gegebenen Funktion S

$$dS =$$

$$dx\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{rc.}\right)$$

$$-dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{rc.}\right)$$

$$+dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{rc.}\right)$$

$$-dx^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \text{rc.}\right)$$

$$\text{rc.}$$

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots\ldots + \frac{1}{2x - 1}$$

zu finden.

Da das allgemeine Glied dieser Reihe $X = \frac{1}{2x - 1}$ ist, so wird

$$\begin{array}{ll|ll} X' & = \dfrac{1}{2x+1} & Z' & = \dfrac{1}{2x+1+2\omega} \\ X'' & = \dfrac{1}{2x+3} & Z'' & = \dfrac{1}{2x+3+2\omega} \\ X''' & = \dfrac{1}{2x+5} & Z''' & = \dfrac{1}{2x+5+2\omega} \\ & \text{ꝛc.} & & \text{ꝛc.} \end{array}$$

und da die unendlichsten Glieder dieser Reihe verschwinden und einander gleiche Größen werden, so bekommt man für S, wenn man $x + 1$ für x setzt,

$$\Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{2x+1+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)}$$
$$+ \frac{2\omega}{(2x+5)(2x+5+2\omega)} + \text{ꝛc.}$$

Löset man aber die einzelnen Glieder in Reihen nach den Dignitäten von ω auf, so wird

$$
\begin{aligned}
z = S &+ 2\omega\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \text{ꝛc.}\right)\\
&- 4\omega^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \text{ꝛc.}\right)\\
&+ 8\omega^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \text{ꝛc.}\right)\\
&- 16\omega^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \text{ꝛc.}\right)\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

und setzt man endlich dx für ω, so erhält man das vollständige Differenzial der inexplicablen Funktion S

$$
\begin{aligned}
dS = &\\
&2dx\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \text{ꝛc.}\right)\\
- &4dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \text{ꝛc.}\right)\\
+ &8dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \text{ꝛc.}\right)\\
- &16dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \text{ꝛc.}\right)\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

Drittes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{x^n}$$

zu finden.

Da das allgemeine Glied dieser Reihe $= \frac{1}{x^n}$ ist, so sind die unendlichsten Glieder verschwindende und einander gleiche Größen. Da also

 $X' =$

$$X' = \frac{1}{(x+1)^n} \qquad Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n}$$
$$X'' = \frac{1}{(x+2)^n} \qquad Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n}$$
$$X''' = \frac{1}{(x+3)^n} \qquad Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n}$$
$$\text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.}$$

ist: so wird $X' - Z' =$

$$\frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}} - \text{ꝛc.}$$

$$X'' - Z'' =$$

$$\frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}} - \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

$$\Sigma - S =$$

$$n\omega\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2(^{n+1}} + \frac{+}{(x+3)^{n+1}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$-\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

und setzt man also dx für ω, so bekommt man das gesuchte Differenzial

$$dS =$$

$$n\,dx\left(\frac{1}{(ax+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$-\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

§. 372.

§. 372.

Hieraus lassen sich auch die Summen jener Reihen interpoliren, oder die Werthe der summatorischen Glieder finden, wenn die Zahl der Glieder keine ganze Zahl ist. Denn setzt man $x = 0$, so wird auch $S = 0$, und Σ druckt die Summe so vieler Glieder aus, als ω Einheiten enthält, wenn gleich ω keine ganze Zahl ist. Setzt man z. B. im ersten Exempel

$$\Sigma = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{\omega}$$

so wird

$$\Sigma = \frac{\omega}{(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$\begin{aligned}\Sigma = \ & \omega\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{ꝛc.}\right)\\ & - \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ꝛc.}\right.\\ & + \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ꝛc.}\right.\\ & \text{ꝛc.}\end{aligned}$$

Im dritten Exempel hingegen ist

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{\omega^n}$$

und der Werth von Σ wird, ω mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, durch folgende Reihen ausgedruckt:

$$\begin{aligned}\Sigma = \ & n\omega\left(+\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} + \text{ꝛc.}\right)\\ & - \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\omega^2\left(1 + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \text{ꝛc.}\right)\\ & + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\omega^3\left(1 + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \text{ꝛc.}\right)\\ & \text{ꝛc.}\end{aligned}$$

§. 373.

Eben dieses läßt sich auch auf die allgemeine Reihe anwenden. Denn da

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

ist, und wenn man $x + \omega$ für x setzt, X in Z und S in Σ übergeht: so ist

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \text{2c.}$$

und da auf ähnliche Art Z', Z'', Z''', 2c. durch X', X'', X''', 2c. ausgedruckt werden, so findet man

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & S + \omega X^{|\infty+1|} \\ & - \frac{\omega}{dx} d(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{2c.}) \\ & - \frac{\omega^2}{1.2dx^2} dd(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{2c.}) \\ & - \frac{\omega^3}{1.2.3dx^3} d^3(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{2c.}) \\ & \text{2c.}\end{aligned}$$

Ist nun $X^{|\infty+1|}$ nicht $= 0$, so kann man es, um das Unendliche wegzubringen, auf folgende Art ausdrucken:

$$X^{|\infty+1|} = X' + (X'' - X') + (X''' - X'') + (X^{IV} - X''') + \text{2c.}$$

und es ist also

$$\begin{aligned}\Sigma = {} & S + \omega X' + \omega((X'' - X') + (X''' - X'') + (X^{IV} - X''') + \text{2c.}) \\ & - \frac{\omega}{dx} d(X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \text{2c.}) \\ & - \frac{\omega^2}{2dx^2} dd(X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \text{2c.}) \\ & - \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3(X' + X'' + X''' + X^{IV} + X^{V} + \text{2c.}) \\ & \text{2c.}\end{aligned}$$

Setzt

Setzt man daher dx für ω, so erhält man folgendes vollständige Differenzial von $S = A + B + C + \ldots + X$

$$\begin{aligned} dS = X'dx + dx((X''-X') + (X'''-X'') + (X^{\prime v}-X''') + \text{ꝛc.}) \\ -\; d\,.\,(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{ꝛc.}) \\ -\; \tfrac{1}{2}dd\,.\,(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{ꝛc.}) \\ -\; \tfrac{1}{6}d^3\,.\,(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{ꝛc.}) \\ \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

§. 374.

Setzt man $x = 0$, so wird $X' = A$, $X'' = B$, ꝛc. und also $X' + X'' + X''' +$ ꝛc. eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied $= X$ ist. Formirt man nun Reihen aus diesen allgemeinen Gliedern

$$\frac{dX}{dx};\quad \frac{ddX}{2dx^2};\quad \frac{d^3X}{6dx^3};\quad \frac{d^4X}{24dx^4};\ \text{ꝛc.}$$

welche Reihen, ohne Ende fortgesetzt, folgende Summen haben mögen:

$$\begin{aligned} \int .\; X &= \mathfrak{A} \\ \int .\; \frac{dX}{dx} &= \mathfrak{B} \\ \int .\; \frac{ddX}{2dx^2} &= \mathfrak{C} \\ \int .\; \frac{d^3X}{6dx^3} &= \mathfrak{D} \\ \int .\; \frac{d^4X}{24dx^4} &= \mathfrak{E} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird, weil für $x = 0$ auch $S = 0$ ist, Σ die Summe der Reihe $A + B + C + D + \ldots + Z$, bis zu dem ωten Gliede, weil Z das Glied ist, welches dem Anzeiger ω zugehört, ω mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn. Man hat daher

$$\Sigma = \omega A + \omega((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{rc.}) - \omega\mathfrak{B} - \omega^2\mathfrak{C} - \omega^3\mathfrak{D} - \omega^4\mathfrak{E} - \text{rc.}$$

wo man die erste Reihe weglassen kann, wenn die Glieder der gegebenen Reihe endlich verschwinden.

§. 375.

Schreibt man nun x für ω, so geht Σ in S über, so daß

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \dots\dots + \overset{x}{X}$$

wird, und eben dieser Werth von S läßt sich auf folgende Art durch eine unendliche Reihe ausdrucken:

$$S = Ax + x((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{rc.}) - \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \text{rc.}$$

Da dieser Ausdruck gleich passend ist, x mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, so lassen sich die Differenzialien jeder Ordnung von S darnach sehr leicht darstellen. Es ist nemlich

$$\frac{dS}{dx} = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{rc.} - \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}x - 3\mathfrak{D}x^2 - 4\mathfrak{E}x^3 - \text{rc.}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = -\mathfrak{C} - 3\mathfrak{D}x - 6\mathfrak{E}x^2 - 10\mathfrak{F}x^3 - \text{rc.}$$

$$\frac{d^3S}{6dx^3} = -\mathfrak{D} - 4\mathfrak{E}x - 10\mathfrak{F}x^2 - 20\mathfrak{G}x^3 - \text{rc.}$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = -\mathfrak{E} - 5\mathfrak{F}x - 15\mathfrak{G}x^2 - \text{rc.}$$

rc.

Da also das vollständige Differenzial =

$$dS + \tfrac{1}{2}ddS + \tfrac{1}{6}d^3S + \tfrac{1}{24}d^4S + \text{rc.}$$

ist: so ist das vollständige Differenzial der Funktion S

$$dS = Adx + (B - A)dx + (C - B)dx + (D - C)dx + \text{rc.}$$

$$-\mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$-\mathfrak{E}(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - \text{ꝛc.}$$

§. 376.

Auf diese Art läßt sich also das Differenzial einer jeden inexplicablen Funktion S ausdrucken, wenn die unendlichsten Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ ꝛc. entweder verschwinden oder einander gleich werden. Denn sind die unendlichsten Glieder dieser Reihe nicht $= 0$, so wird die Summe der Reihe $\mathfrak{B}$, welche aus dem allgemeinen Gliede $\frac{dX}{dx}$ formirt wird, unendlich, giebt aber mit der Reihe $A + (B - A) + (C - B) + (D - C) +$ ꝛc. zusammengenommen eine endliche Summe. Es können aber die Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ ꝛc. so ins Unendliche vermehrt werden, daß nicht nur die Summe der Reihe $\mathfrak{B}$, sondern auch die der Reihe $\mathfrak{C}$ unendlich wird, und in diesem Falle ist es nicht genug, die Reihe $A + (B - A) + (C - B) + (D - C)$ $+$ ꝛc. hinzugefügt zu haben, sondern es muß dann auch auf die unendlichsten Glieder,

$$s|\infty|,\quad s|\infty + 1|,\quad s|\infty + 2| \text{ ꝛc.}$$

deren §. 370 Erwähnung geschehen ist, da sie in keiner arithmetischen Progression mehr sind, Rücksicht genommen werden. So wie wir daher die ersten Differenzen dieser Glieder gleich angenommen haben, so müssen wir nun, um die erklärte Methode weiter auszudehnen, erst die zweyten, oder die dritten Differenzen u. s. f. gleich seyn lassen.

§. 377.

Mit Beybehaltung der Schlußart, welcher wir uns §. 369. bedient haben, wollen wir daher jezt annehmen, daß

daß die zweyten Differenzen der angeführten Werthe gleich seyen.

$$S|\infty|, \quad S|\infty+1|, \quad S|\infty+2|;$$

$$\text{Erste Differ.} \quad X|\infty+1|; \quad X|\infty+2|;$$

$$\text{Zweyte Differ.} \quad X|\infty+2| - X|\infty+1|.$$

Hiernach ist

$$\Sigma|\infty| = S|\infty+\omega|$$

$$= S|\infty| + \omega X|\infty+1| + \frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}(X|\infty+2| - X|\infty+1|)$$

$$= S|\infty| - \frac{\omega(\omega-3)}{1\,.\,2}X|\infty+1| + \frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}X|\infty+2|$$

Wir haben demnach folgende Gleichung:

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots + Z|\infty| =$$

$$S + X' + X'' + X''' + \ldots + X|\infty| -$$

$$\frac{\omega(\omega-3)}{1\,.\,2}X|\infty+1| + \frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}X|\infty+2|$$

und daraus findet man

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'^{v} + \text{ꝛc. ohne Ende}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'^{v} - \text{ꝛc. ohne Ende}$$
$$+ \omega X|\infty+1| + \frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}(X|\infty+2| - X|\infty+1|).$$

Diese unendlichsten Glieder lassen sich auf die Art darstellen, daß

$$\Sigma = S + X' + X'' + X''' + X'^{v} + \text{ꝛc.}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'^{v} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \omega X' + \omega\begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - X'^{v} + \text{ꝛc.} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{matrix} + \dfrac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}X'' \\ - \dfrac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}X' \end{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1\,.\,2}\begin{cases} + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.} \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'^{v} - \text{ꝛc.} \\ + X' + X'' + X''' + \text{ꝛc.} \end{cases}$$

wird,

wird, und hieraus erhellet zugleich das Gesetz, nach welchem dieser Ausdruck eingerichtet seyn muß, wenn die dritten, vierten und fernern Differenzen gleich werden.

§. 378.

Da also, wie wir oben bewiesen haben,

$$Z = X + \frac{\omega dX}{2dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \text{ꝛc.}$$

ist: so erhalten wir durch die Substitution der Werthe, welche sich hieraus für Z', Z'', Z''', ꝛc. ergeben, für Z', Z'', Z''', ꝛc. wenn in dem Werthe von S, $x + \omega$ für x gesetzt wird,

$$z = S + \omega X' + \omega \left\{ \begin{matrix} + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - X^{\prime v} - \text{ꝛc.} \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{matrix} + \dfrac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} X'' \\ - \dfrac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} X' \end{matrix} + \frac{\omega(\omega-1)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{matrix} + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + X^{v\prime} + \text{ꝛc.} \\ -2X'' - 2X''' - 2X^{\prime v} - 2X^{v} - \text{ꝛc.} \\ + X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{ꝛc.} \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{-\omega}{dx} d \cdot (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.})$$

$$\frac{-\omega^2}{2dx^2} dd \cdot (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.})$$

$$\frac{-\omega^3}{6dx^3} d^3 \cdot (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.})$$

ꝛc.

Setzt man also dx für ω, so bekommt man folgenden Ausdruck für das vollständige Differenzial von S

$$dS = X'dx + dx \left\{ \begin{matrix} + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - X^{\prime v} - \text{ꝛc.} \end{matrix} \right.$$

$$- X''$$

$$\begin{array}{l} -X''\dfrac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \\ +X'\dfrac{dx(1-dx)}{1\cdot 2} \end{array} - \frac{dx(1-dx)}{1\cdot 2}\left\{\begin{array}{l} +\;X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ꝛc.} \\ -2X''-2X'''-2X^{IV}-\text{ꝛc.} \\ +\;X'+X''+X'''+\text{ꝛc.} \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} +X'''\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ -2X''\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ +X'\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ \text{ꝛc.} \end{array} + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\begin{array}{l} +X^{IV}+X^{V}+\text{ꝛc.} \\ -3X'''-3X^{IV}-\text{ꝛc.} \\ +3X''+3X'''+\text{ꝛc.} \\ -X'-X''-\text{ꝛc.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} -\;d\;.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ꝛc.}) \\ -\tfrac{1}{2}dd\,.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ꝛc.}) \\ -\tfrac{1}{6}d^3.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ꝛc.}) \\ -\tfrac{1}{24}d^4.(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{ꝛc.}) \\ \text{ꝛc.} \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist von dem weitesten Umfange und giebt das gesuchte Differenzial, was für Differenzen auch gleich seyn mögen. Es ist nemlich diese Formel darnach eingerichtet, daß die Differenzen gleich werden, und man erkennt daraus bald das Gesetz ihrer Fortsetzung, wenn diese Fortsetzung etwa nöthig seyn sollte.

§. 379.

Wenn die Reihe $A + B + C + D +$ ꝛc., aus welcher die inexplicable Funktion

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

formirt wird, so beschaffen ist, daß ihre unendlichsten Glieder verschwinden: so ist, wie wir bereit angemerkt haben,

$dS =$

$$\begin{aligned} dS = &- d \,.\, (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \tfrac{1}{2}dd \,.\, (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \tfrac{1}{6}d^3 \,.\, (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \tfrac{1}{24}d^4 \,.\, (X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &\qquad\qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Sind aber diese unendlichsten Glieder nicht $= 0$, sondern ihre Differenzen, so muß man zu jenem Ausdrucke noch

$$dx \left\{ X' \begin{array}{llllll} + X'' & + X''' & + X^{\prime v} & + X^{v} & + \text{ꝛc.} \\ - X' & - X'' & - X''' & - X^{\prime v} & - \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

addiren. Verschwinden erst die zweyten Differenzen der unendlichsten Glieder der Reihe $A + B + C + D + \text{ꝛc.}$, so muß man außerdem noch

$$\frac{dx\,(dx - 1)}{1\,.\,2} \left\{ \begin{array}{ll} + X'' & \\ - X' & \end{array} \begin{array}{lllll} + X''' & + X^{\prime v} & + X^{v} & + \text{ꝛc.} \\ - 2X'' & - 2X''' & - 2X^{\prime v} & - \text{ꝛc.} \\ + X' & + X'' & + X''' & + \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

dazu setzen. Verschwinden erst die dritten Differenzen, so muß man noch hinzufügen

$$\frac{dx(dx - 1)(dx - 2)}{1\,.\,2\,.\,3} \left\{ \begin{array}{l} X''' \\ - 2X'' \\ + X' \end{array} \begin{array}{lllll} + X^{\prime v} & + X^{v} & + X^{v\prime} & + \text{ꝛc.} \\ - 3X''' & - 3X^{\prime v} & - 3X^{v} & - \text{ꝛc.} \\ + 3X'' & + 3X''' & + 3X^{\prime v} & + \text{ꝛc.} \\ - X' & - X'' & - X''' & + \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

und auf eben diese Art ferner verfahren. Haben also die unendlichsten Glieder der Reihe $A + B + C + D + \text{ꝛc.}$ nur endlich verschwindende Differenzen, so läßt sich hiernach allemal das Differenzial der aus der Reihe formirten in- inexplicablen Funktion bestimmen.

§. 380.

Setzt man $x = 0$, so wird $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$ ꝛc. So, wie daher $A + B + C + D + \text{ꝛc.}$ eine Reihe mit dem

dem allgemeinen Gliede X ist, so suche man auch aus den allgemeinen Gliedern

$$\frac{dX}{dx};\quad \frac{ddX}{2dx^2};\quad \frac{d^3X}{6dx^3};\quad \frac{d^4X}{24dx^4};\quad \text{etc.}$$

ähnliche unendliche Reihen, deren Summe durch die Buchstaben $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, etc. angezeigt werden mögen. Alsdann wird die Summe von ω Gliedern der Reihe $A + B + C + D +$ etc. auf die Art ausgedruckt, daß es gleich viel ist, ω mag eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeuten. Setzt man x für ω, so daß

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \dots\dots + \overset{x}{X}$$

wird, so ist, wenn die unendlichsten Glieder verschwinden

$$S = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{etc.}$$

Haben hingegen diese unendlichsten Glieder die ersten Differenzen verschwindend, so muß man noch dazu setzen

$$x\left\{A\begin{array}{l} + B + C + D + E + \text{etc.} \\ - A - B - C - D - \text{etc.} \end{array}\right.$$

Verschwinden erst die zweyten Differenzen, so muß man außerdem dazu nehmen

$$\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\left\{\begin{array}{ll} +B & + C + D + E + F + \text{etc.} \\ & - 2B - 2C - 2D - 2E - \text{etc.} \\ -A & + A + B + C + D + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

so wie man, wenn erst die dritten Differenzen $= 0$ werden, noch dazu setzen muß

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left\{\begin{array}{ll} +C & + D + E + F + G + \text{etc.} \\ & - 3C - 3D - 3E - 3F - \text{etc.} \\ -2B & + 3B + 3C + 3D + 3E + \text{etc.} \\ +A & - A - B - C - D - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

§. 381.

§. 381.

Jetzt wollen wir diese Methode auf die andere Gattung der inexplicablen Funktionen anwenden, welche aus einem Produkte einiger unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe A † B † C † D † ꝛc. bestehen, dabey

$$S = \overset{1}{A} \cdot \overset{2}{B} \cdot \overset{3}{C} \cdot \overset{4}{D} \cdot \overset{\cdots}{\cdots} \cdot \overset{x}{X}$$

setzen, und zuvörderst den Werth Σ suchen, worin S übergeht, wenn man $x + \omega$ für x setzt. Es soll aber auch hier Z, wie vorhin das Glied bedeuten, dessen Anzeiger $x + \omega$ ist, so wie X dem Anzeiger x zugehört. Um diesen Fall auf den vorhergehenden zurückzuführen, muß man die Logarithmen nehmen, wo denn

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

wird. Verschwinden die unendlichsten Glieder dieser Reihe, so findet man, nach der bey der ersten Gattung der inexplicablen Funktion gebrauchten Methode,

$$l\Sigma = lS + lX' + lX'' + lX''' + \text{ꝛc.}$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{ꝛc.}$$

und hat also, wenn man zu den Zahlen zurückgeht,

$$\Sigma = S \cdot \frac{X'}{Z'} \cdot \frac{X''}{Z''} \cdot \frac{X'''}{Z'''} \cdot \frac{X^{\prime v}}{Z^{\prime v}}, \text{ ꝛc.}$$

Verschwinden die Logarithmen der unendlichsten Glieder jener Reihe aber nicht, sondern erst ihre Differenzen, so muß zu der Reihe, welche wir für $l\Sigma$ gefunden haben, noch

$$\omega lX' + \omega\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \text{ꝛc.}\right)$$

hinzugesetzt werden, und dadurch bekommt man, wenn man wieder die Zahlen nimmt,

$$\Sigma =$$

$$SX'^{\omega} \cdot \frac{X''^{\omega} \cdot X'^{(1-\omega)}}{Z'} \cdot \frac{X'''^{\omega} \cdot X''^{(1-\omega)}}{Z''} \cdot \frac{X'^{v\omega} \cdot X'''^{(1-\omega)}}{Z'''}$$

etc.

§. 382.

Setzt man also $x = 0$, in welchem Falle $S = 1$, und $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, etc. wird, so bedeutet Σ ein Produkt aus ω Gliedern der Reihe A, B, C, D, etc. Setzt man also x für ω, damit Σ den Werth erhalte, welchen wir vorhin S beygelegt haben, so daß

$$S = \overset{1}{A} \cdot \overset{2}{B} \cdot \overset{3}{C} \cdot \overset{4}{D} \cdot \ldots \cdot \overset{x}{X}$$

ist, so bekommt man für S, weil nun Z', Z'', Z''', etc. in X', X'', X''', etc. übergehen, für den Fall, daß die Logarithmen der unendlichsten Gliedern jener Reihe verschwinden, den Ausdruck

$$S = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X'^{v}} \cdot \frac{E}{X^{v}} \cdot \text{etc.}$$

Verschwinden aber erst die Differenzen der Logarithmen der unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, etc., so wird

$$S = A^{x} \cdot \frac{B^{x} A^{1-x}}{X'} \cdot \frac{C^{x} B^{1-x}}{X''} \cdot \frac{D^{x} C^{1-x}}{X'''} \cdot \text{etc.}$$

Verschwinden erst die zweyten Differenzen jener Logarithmen, so kann man hieraus ohne Mühe herleiten, was für Faktoren zu den vorhergehenden hinzugesetzt werden müssen; wir verweilen aber hierbey nicht, da dieser Fall schwerlich vorkommen wird. Den Nutzen dieser Ausdrücke werden wir in dem folgenden Capitel bey der Interpolation der Reihen zu zeigen Gelegenheit haben.

§. 383.

§. 383.

Da es uns hier vorzüglich um die Differenziation von dergleichen inexplicablen Funktionen zu thun ist: so sey das Differenzial der Funktion

$$S = A \,.\, B \,.\, C \,.\, D \,.\; .\; .\; .\, X$$

zu finden. Zu diesem Ende wollen wir die vorhin gefundene Gleichung

$$\begin{aligned} l\Sigma = lS &+ lX' + lX'' + lX''' + \text{ꝛc.} \\ &- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

zu Hülfe nehmen. Da lZ aus dem lX entspringt, wenn man $x + \omega$ für x setzt, so ist

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx} d.lX + \frac{\omega^2}{2dx^2} dd.lX + \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.lX + \text{ꝛc.}$$

und braucht man diese Werthe für lZ', lZ'', lZ''', ꝛc., so bekommt man

$$\begin{aligned} l\Sigma = lS &- \frac{\omega}{dx} d \;.(lX' + lX'' + lX''' + lX'^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd \;.(lX' + lX'' + lX''' + lX'^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3 \;.(lX' + lX'' + lX''' + lX'^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &\qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Setzt man nun $\omega = dx$, so wird $l\Sigma = lS + d.lS$, und also

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d} = &- d \;.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX'^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \tfrac{1}{2} dd \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX'^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &- \tfrac{1}{6} d^3 \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX'^{v} + \text{ꝛc.}) \\ &\qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Diese Reihen gelten, wenn die Logarithmen der unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc. verschwinden;

verschwinden diese aber nicht, sondern erst ihre Differenzen, so muß zu dem vorhergehenden Ausdrucke noch

$$dx\,lX' + dx(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X^{IV}}{X'''} + \text{etc.})$$

hinzugefügt werden, um das vollständige Differenzial zu erhalten.

§. 384.

Es giebt hierzu aber noch einen andern Weg. Man setze $x = 0$, in welchem Falle auch $lS = 0$ wird. Dann formire man Reihen, deren allgemeine Glieder

$$lX; \quad \frac{d\,.\,lX}{dx}; \quad \frac{dd\,.\,lX}{2\,dx^2}; \quad \frac{d^3\,.\,lX}{6\,dx^3} \text{ etc.}$$

sind, und setze ihre Summen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. Schreibt man nun x für ω, damit $\Sigma = S$ werde, so ist

$$lS = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{etc.}$$

wenn die Logarithmen der unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, etc. deren allgemeines Glied X ist, verschwinden. Geschieht dies erst bey den Differenzen dieser Logarithmen, so ist

$$lS = x\,lA + x(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.})$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{etc.}$$

Hiernach ist das Differenzial von lS

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}$$
$$- \mathfrak{B}dx - 2\mathfrak{C}xdx - 3\mathfrak{D}x^2dx - 4\mathfrak{E}x^3dx - \text{etc.}$$

und das vollständige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.})$$
$$- \mathfrak{B}xdx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$- \text{etc.}$$

Den

Den Gebrauch dieser Formeln zu zeigen mögen folgende Exempel hier stehen, welche wir auf beyde Arten behandeln wollen.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \;.\;.\;.\;.\; \frac{2x-1}{2x}$$

zu finden.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß die unendlichsten Glieder dieser Faktoren Einheiten werden, und also ihre Logarithmen verschwinden. Da also $X = \frac{2x-1}{2x}$ ist, so ist

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2}; \quad X'' = \frac{2x+3}{2x+4}; \quad X''' = \frac{2x+5}{2x+6}; \text{ ꝛc.}$$

und überhaupt

$$X^{|n|} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n};$$

Folglich

$$lX^{|n|} = l(2x+2n-1) - l(2x+2n)$$

$$d\,.\,lX^{|n|} = \frac{2dx}{(2x+2n-1)} - \frac{2dx}{(2x+2n)}$$

$$dd\,.\,lX^{|n|} = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}$$

$$d^3\,.\,lX^{|n|} = +\frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.4dx^3}{(2x+2x)^3}$$

$$d^4\,.\,lX^{|n|} = -\frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n)^4}$$

ꝛc.

und also das vollständige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = -2dx \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{2x+4} - \frac{1}{2x+6} - \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

$$+ \tfrac{4}{2}dx^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{(2x+2)^2} - \frac{1}{(2x+4)^2} - \frac{1}{(2x+6)^2} - \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

$$- \tfrac{8}{3}dx^3 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{(2x+2)^3} - \frac{1}{(2x+4)^3} - \frac{1}{(2x+6)^3} - \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

ꝛc.

Sucht man bloß das erste Differenzial, so ist solches

$$\frac{dS}{S} = -2dx \times$$

$$\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)} + \frac{1}{(2x+3)(2x+4)} + \frac{1}{(2x+5)(2x+6)} + \text{ꝛc.}\right)$$

welches man nach der andern Methode §. 394. auf folgende Art finden kann. Da $lX = l\frac{2x-1}{2x}$ ist, so ist

$$\frac{d.lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dd.lX}{2dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{2xx}$$

$$\frac{d^3.lX}{6dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3}$$

ꝛc.

und

und folglich

$$\mathfrak{A} = l\frac{1}{2} + l\frac{3}{4} + l\frac{5}{6} + l\frac{7}{8} + \text{rc.}$$

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{array}{l} + \frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \text{rc.} \\ - \frac{2}{2} - \frac{2}{4} - \frac{2}{6} - \frac{2}{8} - \frac{2}{10} - \text{rc.} \end{array}\right\} = 2l2$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{4}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{rc.} \\ - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} - \text{rc.} \end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{8}{3}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \text{rc.} \\ - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} - \text{rc.} \end{array}\right\}$$

rc.

oder

$$\mathfrak{B} = + \frac{2}{1}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{rc.}\right)$$

$$\mathfrak{C} = - \frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{rc.}\right)$$

$$\mathfrak{D} = + \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{rc.}\right)$$

$$\mathfrak{E} = - \frac{16}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \text{rc.}\right)$$

rc.

Durch die Substitution dieser Werthe wird

$$\frac{dS}{S} = - 2dx\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{rc.}\right)$$

$$+ 4xdx\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{rc.}\right)$$

$$- \ 8x^2dx(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{rc.})$$
$$+ \ 16x^3dx(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \text{rc.})$$
rc.

Ist also $x = 0$, in welchem Falle $lS = 0$ und $S = 1$ wird, so ist $dS = - 2dxl2$.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x$$

zu finden.

Die Glieder dieser Reihe 1, 2, 3, 4, rc. wachsen im Unendlichen so, daß die Differenzen der Logarithmen verschwinden, indem

$$l(\infty + 1) - l\infty = l(1 + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ist. Da also $X = x$ und $lX = lx$ ist, so wird

$$X' = x + 1$$
$$X'' = x + 2$$
$$X''' = x + 3$$
rc.

$$d.lX = \frac{dx}{dx}$$
$$dd.lX = -\frac{dx^2}{x^2}$$
$$d^3.lX = \frac{2dx^3}{x^3}$$
$$d^4.lX = -\frac{2.3dx^4}{x^4}$$
rc.

Wenn

Wenn also die Logarithmen verschwänden, so würde

$$\frac{dS}{S} = -\, dx\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{dx^2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- \frac{dx^3}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

seyn. Da aber erst die Differenzen der Logarithmen = 0 werden, so muß dazu noch

$$dx\,l(x+1) + dx\left(l\frac{x+2}{x+1} + l\frac{x+3}{x+2} + l\frac{x+4}{x+3} + \text{ꝛc.}\right)$$

addirt werden. Nun ist

$$l\frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} - \frac{1}{4(x+1)^4} + \text{ꝛc.}$$
$$l\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(2x+2)^2} + \frac{1}{3(x+2)^3} - \frac{1}{4(x+2)^4} + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

also das wahre vollständige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = dx\,l(x+1)$$
$$- \tfrac{1}{2}(dx - dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}(dx - dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}(dx - dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}(dx - dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

Will man aber dieses Differenzial auf die andere Art ausdrucken, so hat man, da

$$lX = lx;\quad \frac{d\,.\,lX}{dx} = 1;\quad \frac{dd\,.\,lX}{2dx^2} = -\frac{1}{2x^3};$$
$$\frac{d^3\,.\,lX^3}{6dx^3} = \frac{1}{3x^3};\quad \frac{d^4\,.\,lX}{24dx^4} = -\frac{1}{4x^4};\ \text{rc.}$$

ist, folgende Reihen:

$$\mathfrak{A} = l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \text{rc.}$$
$$\mathfrak{B} = 1(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{rc.})$$
$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{rc.})$$
$$\mathfrak{D} = \tfrac{1}{3}(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{rc.})$$
$$\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4}(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{rc.})$$
$$\text{rc.}$$

Da also $lA = l1 = 0$ ist, so wird nach §. 384.

$$\begin{aligned} lS = {} & x(l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} + l\frac{5}{4} + \text{rc.}) \\ & - x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{rc.}) \\ & + \tfrac{1}{2}x^2(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{rc.}) \\ & - \tfrac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{rc.}) \\ & + \tfrac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{rc.}) \\ & \text{rc.} \end{aligned}$$

Die beyden ersten Reihen, womit x multiplicirt worden, haben zwar jede für sich genommen eine unendliche Summe, me, allein zusammen geben sie eine endliche Größe. Denn nimmt man von jeder n Glieder, so bekommt man

$$l(n + 1 - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}.$$

Nun haben wir oben §. 142.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = C + ln$$

gefunden, und für C ergiebt sich 0,5772156649015325. Setzt man demnach $n = \infty$, so wird

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty} = C + l\infty$$

und es ist daher der Werth jener beyden Reihen, wenn man sie ohne Ende fortsetzt

$$= l(\infty + 1) - C - l\infty = - C.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} lS = & - x \,.\, 0,5772156649015325 \\ & + \tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right) \\ & - \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right) \\ & + \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

woraus sich ferner die Differenzialien einer jeden Ordnung leicht bestimmen lassen. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = & - dx \,.\, 0,5772156649015325 \\ & + x\,dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right) \\ & - x^2dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right) \\ & + x^3dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Ver-

Vereinigt man aber diese Reihen in eine, so wird

$$\frac{dS}{S} = -dx \,.\, 0{,}5772156649015325$$
$$+ \frac{xdx}{1(1+x)} + \frac{xdx}{2(2+x)} + \frac{xdx}{3(3+x)} + \frac{xdx}{4(4+x)} + \text{rc.}$$

Ist daher $x = 0$, so wird

$$\frac{dS}{S} = -dx \,.\, 0{,}4772156649015325$$

Aus dem ersten Ausdrucke aber ist in diesem Falle

$$\frac{dS}{S} = -\tfrac{1}{2}dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{rc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{rc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{rc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}dx\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{rc.}\right)$$
$$\text{rc.}$$

§. 385.

Da die Differenzialien, welche wir bisher gesucht haben, vollständige Differenzialien sind, so lassen sich daraus auch die Differenzialien in besondern Fällen herleiten. Wenn daher in den gegebenen Ausdrücken solche Funktionen vorkommen, welche unbestimmt zu seyn scheinen, dergleichen im vorhergehenden Capitel untersucht worden sind: so kann man die Werthe derselben nach eben der Methode finden. Wir wollen auch dieses durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks:

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x}}{x(x-1)\ldots\ldots(x-1)(2x-1)}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ gesetzt wird.

Setzt man

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x} = S$$

so ist nach §. 372.

$$\begin{aligned} S = \; & x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right) \\ & - x^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}\right) \\ & + x^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Da aber auch

$$\begin{aligned} S = \; & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.} \\ & - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \frac{1}{5+x} - \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, so erhält man, wenn man jedes Glied der obern Reihe mit dem vorhergehenden der untern verbindet,

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \text{etc.}$$

und dieser Ausdruck ist bequemer, wenn $x = 1$ gesetzt werden soll. Es sey also $x = 1 + \omega$, so wird

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \text{etc.}$$

oder

oder

$$S = 1 + \omega\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right) = 1 + \mathfrak{B}\omega$$
$$-\ \omega^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right) \qquad -\ \mathfrak{C}\omega^2$$
$$+\ \omega^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) \qquad +\ \mathfrak{D}\omega^3$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und es geht also der ganze Ausdruck, wenn man $x = 1 + \omega$ annimmt, in

$$\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{etc.}}{\omega(1+\omega)} - \frac{1}{\omega(1+2\omega)}$$

oder

$$\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2 - \text{etc.}}{\omega(1+\omega)(1+2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \text{etc.}}{(1+\omega)(1+2\omega)}$$

über. Nimmt man daher $\omega = 0$, so wird der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 1$,

$$= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}$$

und folglich da diese Reihe $= \frac{1}{6}\pi^2$ ist, $= \frac{1}{6}\pi^2$.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks:

$$\frac{2x - xx}{(x-1)^2} + \frac{\pi\pi x}{6(x-1)} - \frac{(2x-1)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}\right)}{x(x-1)^2}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ gesezt wird.

Es sey

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = S,\ \text{und}\ x = 1 + \omega$$

so wird, wie wir vorhin gefunden haben,

S =

$$S = 1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{ꝛc.}$$

so daß

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc.} = \tfrac{1}{6}\pi\pi - 1$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{ꝛc.}$$

ist. Setzt man daher $x = 1 + \omega$, so bekommt der gegebene Ausdruck die Form

$$\frac{1 - \omega\omega}{\omega\omega} + \frac{(1 + \mathfrak{B})(1 + \omega)}{\omega} - \frac{(1 + 2\omega)(1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \text{ꝛc.}}{(1 + \omega)\omega^2}$$

und bringt man dieselbe auf einerley Nenner $\omega^2(1 + \omega)$, so erhält man

$$\frac{\begin{matrix} 1 + \omega - \omega^2 - \omega^3 + \omega + 2\omega^2 + \omega^3 + \mathfrak{B}\omega(1 + 2\omega + \omega\omega) \\ - 1 - \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{D}\omega^3 - 2\omega - 2\mathfrak{B}\omega^2 + 2\mathfrak{C}\omega^3 - \text{ꝛc.} \end{matrix}}{\omega^2(1 + \omega)}$$

oder

$$\frac{\omega^2 + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{B}\omega^3 - 2\mathfrak{C}\omega^3 - \mathfrak{D}\omega^3 - \text{ꝛc.}}{\omega^2(1 + \omega)}$$

Wenn also nunmehr $\omega = 0$ angenommen wird, so ergiebt sich $1 + \mathfrak{C}$. Es ist folglich der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 1$, $= 1 + \mathfrak{C}$, oder

$$= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ꝛc.}$$

Da aber die Summe dieser Reihe weder durch die Logarithmen noch durch den Umfang des Kreises dargestellt warden kann, so läßt sich auch der gesuchte Werth bloß auf diese Art durch endliche Größen ausdrucken. Aus diesen beyden Beyspielen erhellet übrigens der Nutzen, welchen

die

die Lehre von den inexplicablen Funktionen in der Theorie der Reihen haben kann, hinlänglich.

§. 386.

Bisher haben wir angenommen, daß die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, E, ꝛc. = 0 seyn, oder doch endlich verschwindende Differenzen haben, und es findet daher die erklärte Methode nicht statt, wenn diese Bedingungen mangeln. Wir wollen daher noch eine andere, von diesen Bedingungen unabhängige, Methode hinzufügen, welche die allgemeine Summirung der Reihen aus dem allgemeinen Gliede, die oben ausführlich erklärt worden ist, in die Hand giebt. Bedeuten demnach 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, ꝛc. die Bernouillischen Zahlen, (§. 112.) und ist die gegebene inexplicable Funktion

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \dots + \overset{x}{X}$$

so läßt sich daraus, daß nach §. 130.

$$S = \int X dx + \tfrac{1}{2} X \frac{\mathfrak{A}\, dX}{1.2 dx^2} - \frac{\mathfrak{B} d^3 X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 X}{1.2\ldots6 dx^5}$$
$$- \text{ꝛc.}$$

ist, das Differenzial der Funktion S leicht darstellen. Es ist nemlich

$$dS = X dx + \frac{\mathfrak{A} ddX}{1.2.dx} - \frac{\mathfrak{B} d^4 X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^6 X}{1.2\ldots6 dx^5}$$
$$- \text{ꝛc.}$$

§. 387.

Ist aber eine arithmetische Progression mit einer geometrischen verbunden, in welchem Falle die unendlichsten Glieder nie beständige Differenzen bekommen, und also die erste Methode gar keine Anwendung zuläßt: so gewährt die

die §. 174. erklärte Methode Vortheil. Ist nemlich die Funktion

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Xp^x$$

gegeben, so suche man die Werthe der Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc., so daß

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{ꝛc.}$$

sey. Hat man dieselben gefunden, wie wir sie §. 170. mitgetheilt haben, so ist

$$S = \frac{p}{p-1}\cdot p^x\left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\pm C$$

oder einer beständigen Größe, welche die Summe $= 0$ giebt, wenn $x = 0$ gesetzt wird, oder irgend einem andern Falle ein Genüge thut. Nimmt man nun das Differenzial, so fällt diese beständige Größe weg, und es wird

$$dS = \frac{p}{p-1}\cdot p^x dx lp\left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \frac{p}{p-1}\cdot p^x\left(dX - \frac{\alpha ddX}{dx} + \frac{\beta d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma d^4X}{dx^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

oder

$$dS =$$
$$\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(Xdxlp - (\alpha lp - 1)dX + (\beta lp - \alpha)\frac{ddX}{dx} - (\gamma lp - \beta)\frac{d^3X}{dx^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

und dieses ist das gesuchte Differenzial der Funktion S.

§. 388.

Ist die gegebene inexplicable Funktion ein Produkt, so kann man das Differenzial derselben, die Logarithmen der unendlichsten Glieder mögen beständige Differenzen haben oder nicht, allemal nach dieser Methode finden. Es sey nemlich

$$S = \overset{1}{A} \,.\, \overset{2}{B} \,.\, \overset{3}{C} \,.\, \overset{4}{D} \,\ldots\ldots\, \overset{x}{X}$$

Da hieraus

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots lX$$

fließt, so wird, wenn man die Bernouillischen Zahlen braucht,

$$lS = \int dx lX + \tfrac{1}{2} lX + \frac{\mathfrak{A} d \,.\, lX}{1 \,.\, 2 dx} - \frac{\mathfrak{B} d^3 . lX}{1.2.3.4 dx^3} + \text{ꝛc.}$$

und dieser Ausdruck giebt, wenn man ihn differenzirt,

$$\frac{dS}{S} = dx lX + \tfrac{1}{2} d . lX + \frac{\mathfrak{A} dd . lX}{1 . 2 dx} - \frac{\mathfrak{B} d^4 . lX}{1 . 2 . 3 . 4 dx^3}$$
$$+ \frac{\mathfrak{C} d^6 . lX}{1.2 \ldots 6 dx^5} - \frac{\mathfrak{D} d^8 . lX}{1.2.3 \ldots 8 dx^7} + \text{ꝛc.}$$

Ist daher $X = x$, oder

$$S = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots x$$

so wird

$$\frac{dS}{S} = dx lx + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A} dx}{2xx} + \frac{\mathfrak{B} dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C} dx}{6x^6} + \text{ꝛc.}$$

und diese Formel wird, wenn x eine sehr große Zahl ist, mit mehrerer Bequemlichkeit gebraucht, als diejenigen, welche wir vorher gefunden haben.

Sieben-

Siebenzehntes Capitel.

Von der Interpolation der Reihen.

§. 389.

Man sagt, eine Reihe werde interpolirt, wenn die Glieder derselben angegeben werden, die zu gebrochenen oder auch selbst zu irrationalen Anzeigern gehören. Ist daher das allgemeine Glied bekannt, so hat die Interpolation keine Schwierigkeit, da dieses allgemeine Glied bey der Substitution jeder Zahl für x das zugehörige Glied giebt. Ist aber eine Reihe so beschaffen, daß sich das allgemeine Glied derselben auf keine Weise darstellen läßt, so ist diese Interpolation meist mit vieler Schwierigkeit verknüpft, und größtentheils lassen sich die Glieder, die zu den nicht ganzen Anzeigern gehören, bloß durch unendliche Reihen angeben. Da wir also in dem vorhergehenden Capitel die Werthe von solchen Ausdrücken, die sich nicht auf die gewöhnliche Art endlich darstellen lassen, für jede zugehörige Anzeiger bestimmt haben: so ist dadurch der Weg zur vollständigen Betrachtung der Interpolation gebahnt.

§. 390.

Es sey

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & . & . & . & . & . & . & & x \\ A & + & B & + & C & + & D & + & . & . & . & . & . & + & X \end{array}$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied x man kenne, das

 sum-

summatorische Glied S aber unbekannt sey. Man formire daraus eine Reihe, die zum allgemeinen Gliede das summatorische Glied jener Reihe habe, so ist diese neue Reihe

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A+B)};\ \overset{3}{(A+B+C)};\ \overset{4}{(A+B+C+D)};\ \overset{5}{(A+B+C+D+E)};$$
$$\text{ꝛc.}$$

und das allgemeine oder dem Anzeiger x zugehörige Glied dieser Reihe ist

$$= A + B + C + D + \;.\;\;.\;\;.\; + X = S.$$

Da dieses allgemeine Glied nicht entwickelt bekannt ist, so ist die Interpolation der neuen Reihe, wozu es gehört, den vorhin erwähnten Schwierigkeiten unterworfen. Man muß also, um dieselbe zu bewerkstelligen, die Werthe von S aufsuchen, welche durch die Substitution irgend einer nicht ganzen Zahl von x entstehen. Denn wäre x eine ganze Zahl, so würde man den erforderlichen Werth von S ohne Mühe, nemlich durch die Addition so vieler Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ ꝛc. finden, als x Einheiten enthielte.

§. 391.

Damit wir also dasjenige, was im vorhergehenden Capitel gelehret worden ist, anwenden können, wollen wir annehmen, x sey eine ganze Zahl, und also der zugehörige Werth $S = A + B + C + D + \ldots + X$ bekannt, und den Werth Σ suchen, in welchen S übergeht, wenn man $x + \omega$ für x setzt, so daß ω jeden Bruch bedeutet. Alsdann ist Σ das Glied der gegebenen zu interpolirenden Reihe, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört, und also die Interpolation der gedachten Reihe leicht. Es sey Z das Glied der Reihe $A, B, C, D, E,$ ꝛc. welches dem Anzeiger $x + \omega$ zugehört, und Z', Z'', Z''', ꝛc. diejenigen, deren Anzeiger

$x +$

$x+\omega+1$; $x+\omega+2$; $x+\omega+3$; ꝛc. sind. Auch wollen wir zuvörderst annehmen, daß die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc. verschwinden. Dies vorausgesetzt, so wird die Reihe

$$\overset{1}{A};\ (A\overset{2}{+}B);\ (A+\overset{3}{B}+C);\ (A+B\overset{4}{+}C+D);\ \text{ꝛc.}$$

deren dem Anzeiger x zugehöriges Glied

$$S = A + B + C + D + \ldots + X$$

ist, interpolirt, wenn man das Glied Σ sucht, dessen Anzeiger $x+\omega$ ist. Nun ist aber nach dem vorhergehenden Capitel

$$\Sigma = S \begin{array}{l} + X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.} \\ - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{ꝛc.} \end{array}$$

und so hat man eine unendliche Reihe, die dem gesuchten Gliede Σ gleich ist, und da

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \text{ꝛc.}$$

auch auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} \Sigma = S &- \frac{\omega}{dx} d.(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}) \\ &- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd.(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}) \\ &- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3.(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}) \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Von diesen beyden Formeln kann man allemal diejenige nehmen, welche die bequemste scheint.

§. 392.

Statt der Reihe A, B, C, D, ꝛc. wollen wir die harmonische Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \text{2c.}$$

nehmen, deren allgemeines oder x zugehörige Glied $\frac{1}{a+(x-1)b} = X$ ist. Hieraus sey die Reihe

$$\overset{1}{\frac{1}{a}};\ \overset{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right)};\ \overset{3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\right)};\ \overset{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}\right)}$$
$$\text{2c.}$$

formirt, deren zu dem Anzeiger x gehörige Glied also

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots + \frac{1}{a+(x-1)b}$$

ist. Bedeutet daher Σ das Glied dieser Reihe, welches zu dem Anzeiger $x+\omega$ gehört, so ist wegen $Z = \frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$

$X' = \frac{1}{a+bx};$	$Z' = \frac{1}{a+bx+b\omega}$
$X'' = \frac{1}{a+b+bx};$	$Z'' = \frac{1}{a+b+bx+b\omega}$
$X''' = \frac{1}{a+2b+bx};$	$Z''' = \frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$
2c.	2c.

und hieraus ergiebt sich

$$\Sigma = S + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a+b+bx} + \frac{1}{a+2b+bx}$$
$$+ \text{2c.}$$
$$- \frac{1}{a+bx+b\omega} - \frac{1}{a+b+bx+b\omega} - \frac{1}{a+3b+bx+b\omega}$$
$$- \text{2c.}$$

Der andere Ausdruck aber hat folgende Form

$\Sigma =$

$$\Sigma = S + b\omega\left(\frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{(a+b+bx)^2} + \frac{1}{(a+2b+bx)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$-b^2\omega^2\left(\frac{1}{(a+bx)^3} + \frac{1}{(a+b+bx)^3} + \frac{1}{(a+2b+bx)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+b^3\omega^3\left(\frac{1}{(a+bx)^4} + \frac{1}{(a+b+bx)^4} + \frac{1}{(a+2b+bx)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

Erstes Exempel.

Es ist die Reihe:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{(1+\tfrac{1}{2})};\ \overset{3}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})};\ \overset{4}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})}\ \text{ꝛc.}$$

gegeben; man soll die Glieder finden, deren Anzeiger Brüche sind.

Hier ist $a = 1$ und $b = 1$. Setzt man demnach das Glied, welches dem Anzeiger x zugehört,

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}$$

und dasjenige, dessen Anzeiger der Bruch $x+\omega$ ist, $= \Sigma$, so ist

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{1+x+\omega} - \frac{1}{2+x+\omega} - \frac{1}{3+x+\omega} - \frac{1}{4+x+\omega} - \text{ꝛc.}$$

Hat man indeß das Glied gefunden, welches dem gebrochenen Anzeiger ω zugehört, und welches wir $= T$ annehmen wollen: so läßt sich daraus das dem Anzeiger $x+\omega$ zugehörige Glied leicht finden. Denn bedeuten T', T'', T''', ꝛc. die Glieder, deren Anzeiger $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, ꝛc. sind: so ist

$$T' = T + \frac{1}{1+\omega}$$

$$T'' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega}$$

$$T''' = T = \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{3+\omega}$$

$$\text{2c.}$$

und man hat also nur nöthig die Glieder zu suchen, welche zu den Anzeigern ω, die kleiner als eins sind, gehören. Zu dem Ende setze man $x = 0$, wo denn zugleich $S = 0$ wird, und das Glied der Reihe T, welches dem gebrochenen Anzeiger ω zugehört, wird sich auf folgende Art ausdrucken lassen:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{2c.}$$
$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \text{2c.}$$

Verwandelt man diese Brüche in unendliche Reihen, so bekommt man den andern Ausdruck:

$$T = + \omega\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{2c.}\right)$$
$$- \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{2c.}\right)$$
$$+ \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{2c.}\right)$$
$$- \omega^4\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{2c.}\right)$$
$$\text{2c.}$$

die sehr bequem ist, um den Werth von T näherungsweise darzustellen.

Man

Man suche demnach das Glied der gegebenen Reihe, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört. Setzt man dasselbe $= T$, so wird

$$T = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9} + \text{etc.}$$

oder

$$T = 2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \text{etc.})$$

Der Werth dieser Reihe ist $= 2 - 2l2$, so daß sich das zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehörige Glied endlich ausdrucken läßt; und es sind folglich die Glieder, welche den Anzeigern $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. zugehören, folgende:

Anzeiger	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Glieder	$2-2l2$;	$2+\frac{2}{3}-2l2$;	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2$;	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-2l2$;

etc.

Zwentes Exempel.

Es ist die Reihe:

$$\overset{1}{1} + (1 \overset{2}{+} \tfrac{1}{3}); (1 + \overset{3}{\tfrac{1}{3}} + \tfrac{1}{5}); (1 + \tfrac{1}{3} \overset{4}{+} \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}); \text{etc.}$$

gegeben; man soll die Glieder finden, deren Anzeiger gebrochene Zahlen sind.

Hier ist $a = 1$; $b = 2$, und setzt man also das dem Anzeiger x zugehörige Glied

$$S = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots + \frac{1}{2x - 1}$$

so wie dasjenige, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört $= \Sigma$: so ist

$$\Sigma = S + \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{3 + 2x} + \frac{1}{5 + 2x} + \text{etc.}$$

$$- \frac{1}{1+2(x+\omega)} - \frac{1}{3+2(x+\omega)} - \frac{1}{5+2(x+\omega)} - \text{etc.}$$

Da man nun bloß die Glieder zu finden braucht, deren Anzeiger kleiner als eins sind, so sey $x = 0$ und $S = 0$.

Alsdann ist, wenn man das dem Anzeiger ω zugehörige Glied T nennt,

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{3+2\omega} - \frac{1}{5+2\omega} - \frac{1}{7+2\omega} - \frac{1}{9+2\omega} - \text{ꝛc.}$$

und wenn ω in der Bedeutung einer jeden Zahl genommen wird, so ist T, als das dem Anzeiger ω zugehörige Glied, das allgemeine Glied der gegebenen Reihe, und läßt sich auch auf folgende Art ausdrucken:

$$T = \frac{2\omega}{1(1+2\omega)} + \frac{2\omega}{3(3+2\omega)} + \frac{2\omega}{5(5+2\omega)} + \frac{2\omega}{7(7+2\omega)}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

oder auch so:

$$\begin{aligned} T = \; & 2\omega\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ꝛc.}\right) \\ - \; & 4\omega^2\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \text{ꝛc.}\right) \\ + \; & 8\omega^3\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ꝛc.}\right) \\ - \; & 16\omega^4\left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \text{ꝛc.}\right) \\ & \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Nimmt man $\omega = \frac{1}{2}$ an, so wird das Glied, welches zu diesem Anzeiger gehört,

$$T = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \text{ꝛc.} = l2$$

und man hat daher

$$\begin{array}{llll} \text{Anzeiger:}\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \text{Glieder:}\ l2; & \frac{1}{2} + l2; & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + l2; & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + l2;\ \text{ꝛc.} \end{array}$$

Ist $\omega = \frac{1}{4}$, so wird

$$T = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{ꝛc.}$$
$$- \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{7} - \tfrac{2}{11} - \tfrac{2}{15} - \text{ꝛc.}$$

oder

oder

$$T = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{ꝛc.} - \tfrac{1}{2}l2 = \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}l2.$$

§. 393.

Wenn daher das Glied der allgemeinen Reihe:

$$\frac{1}{a};\quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right);\quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right);\ \text{ꝛc.}$$

welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, gefunden werden soll, so setze man in den Ausdrücken des vorhergehenden §. $x = 0$ und $\omega = \frac{1}{2}$. Hiedurch wird $S = 0$, und das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied wird

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b} + \text{ꝛc.}$$

oder, wenn man die Glieder auf eine gleichförmige Art darstellen will,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \text{ꝛc.}$$

Da die Glieder dieser Reihe abwechselnde Zeichen haben, so läßt sich der Werth von $\frac{1}{2}\Sigma$ nach der oben erklärten Methode der Differenzen durch eine mehr convergirende Reihe ausdrucken. Es ist nemlich die Reihe der Differenzen:

$$\frac{b}{2a(2a+b)};\quad \frac{b}{(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{b}{(2a+2b)(2a+3b)};\ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{2bb}{2a(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{2bb}{(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \text{ꝛc.}$$

$$\frac{6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \text{ꝛc.}$$

$$\text{ꝛc.}$$

Hieraus läßt sich

$\frac{1}{2}\Sigma =$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4a} + \frac{1 \cdot b}{8a(2a+b)} + \frac{1 \cdot 2bb}{16a(2a+b)(2a+2b)}$$
$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \text{etc.}$$

folgern, und man hat also

$$\Sigma = \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}bb}{2a(2a+b)(2a+2b)}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2}b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \text{etc.}$$

Diese Reihe convergirt sehr stark, und giebt den Werth des Gliedes Σ Näherungsweise ohne viele Mühe.

§. 394.

Verschwinden überhaupt die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, E, etc., und ist das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= Z$: so nenne man die folgenden Glieder, deren Anzeiger $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc. sind, Z', Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, etc. Setzt man alsdann in den §. 391. gefundenen Formeln $x = 0$, so daß $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, etc. wird: so ist, wenn man die Reihe

$$\overset{1}{A},\ (A \overset{2}{+} B),\ (A + \overset{3}{B} + C),\ (A + B \overset{4}{+} C + D),\ \text{etc.}$$

formirt, und das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z''')$$
$$+ \text{etc.}$$

und aus diesem Ausdrucke lassen sich alle Zwischenglieder finden. Es reicht aber zur Interpolation hin, die Glieder zu haben, die den Anzeigern ω, welche kleiner als eins sind, zugehören. Ist nemlich das Glied Σ, welches einem solchen Anzeiger ω zugehört, gefunden, und werden diejeni-

gen,

gen, deren Anzeiger $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, rc. sind, Σ', Σ'', Σ''', rc. genennt, so ist

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
rc.

Erstes Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{1};\ (1 \overset{2}{+} \tfrac{1}{4});\ (1 + \overset{3}{\tfrac{1}{4}} + \tfrac{1}{9});\ (1 + \tfrac{1}{4} \overset{4}{+} \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16});\ \text{rc.}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied dieser Reihe, welches dem Anzeiger ω zugehört: so ist, da die Reihe aus folgender

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} + \text{rc.}$$

durchs Summiren formirt worden, und das ω zugehörige Glied dieser Reihe $= \frac{1}{\omega^2}$ ist,

$$Z = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{rc.}$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^2} - \frac{1}{(2+\omega)^2} - \frac{1}{(3+\omega)^2} - \frac{1}{(4+\omega)^2} - \text{rc.}$$

Soll also das Glied der gegebenen Reihe gesucht werden, dessen Anzeiger $= \frac{1}{2}$ ist, so muß man $\omega = \frac{1}{2}$ nehmen. Dadurch bekommt man

$$\Sigma = 1 - \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{25} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{49} + \text{rc.}$$

oder

$$\Sigma = 4(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{49} + \text{rc.})$$

Da also $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \text{rc.} = \frac{\pi^2}{12}$ ist, so hat man

$$\Sigma = 4(1 - \frac{\pi\pi}{12}) = 4 - \tfrac{1}{3}\pi^2$$

und

und dies ist das Glied, welches zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehört. Es gehören demnach zu den

Anzeigern	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	ꝛc.
die Glieder	$4 - \frac{1}{3}\pi^2$;	$\frac{4}{1} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\pi^2$;	$\frac{4}{1} + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} - \frac{1}{3}\pi^2$;	ꝛc.

Zweytes Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{1};\ (1 \overset{2}{+} \tfrac{1}{9});\ (1 + \tfrac{1}{9} \overset{3}{+} \tfrac{1}{25});\ (1 + \tfrac{1}{9} \overset{4}{+} \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49});\ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied, welches dem allgemeinen Anzeiger x zugehört. Da die Reihe aus folgender

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{81} + \text{ꝛc.}$$

formirt, und das dem Anzeiger x zugehörige Glied $Z = \frac{1}{(2x-1)^2}$ ist: so wird

$$Z' = \frac{1}{(2x+1)^2};\ Z'' = \frac{1}{(2x+3)^2};\ Z''' = \frac{1}{(2x+5)^2};$$

ꝛc.

und man hat daher

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{(1+2x)^2} - \frac{1}{(3+2x)^2} - \frac{1}{(5+2x)^2} - \frac{1}{(7+2x)^2} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{2}$, um das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, zu bekommen, so wird dieses Glied

$$\Sigma = 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{36} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{12}$$

und dadurch lassen sich die zwischen jede zwey Glieder der gegebenen Reihe fallende Mittelglieder auf folgende Art ausdrucken:

Anzeiger $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad \frac{7}{2}$

Glieder $\frac{\pi\pi}{12};\ \frac{1}{4}+\frac{\pi\pi}{12};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{\pi\pi}{12};\ \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{\pi\pi}{12}$ ꝛc.

Drittes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \left(1+\frac{1}{2^n}\right); & \left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right); & \left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right);\ \text{ꝛc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Es sey wie vorhin Σ das dem Anzeiger ω zugehörige Glied, so ist

$$z = \frac{1}{\omega^n};\ z' = \frac{1}{(1+\omega)^n};\ z'' = \frac{1}{(2+\omega)^n};\ z''' = \frac{1}{(3+\omega)^n}$$

ꝛc.

und daher

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{1}{(2+\omega)^n} - \frac{1}{(3+\omega)^n} - \frac{1}{(4+\omega)^n} - \text{ꝛc.}$$

Will man demnach das Glied haben, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, so ist dasselbe

$$= 1 - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{7^n} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$= 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc.}\right)$$

Setzt man demnach

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{5}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.}$$

so

so ist das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied $= 2^n(1 - \mathfrak{R})$, und es gehören also zu den

$$\begin{array}{llll} \text{Anzeigern} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \text{die Glieder} & 2^n - 2^n\mathfrak{R}; & 2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n\mathfrak{R}; & 2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n\mathfrak{R}; \end{array}$$

ꝛc.

Viertes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \left(1 + \frac{1}{3^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}\right); \text{ ꝛc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied, welches dem allgemeinen Anzeiger ω zugehört. Da $Z = \frac{1}{(2\omega - 1)^n}$ ist, so wird

$$Z' = \frac{1}{(2\omega + 1)^n};\ Z'' = \frac{1}{(2\omega + 3)^n};\ Z''' = \frac{1}{(2\omega + 5)^n}; \text{ꝛc.}$$

und

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{(1 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(3 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(5 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(7 + 2\omega)^n} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man $\omega = \frac{1}{2}$, so bekommt man das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört,

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.} = \mathfrak{R}$$

und dadurch werden die zwischen jede zwey Glieder der gegebenen Reihe fallende Mittelglieder folgende:

$$\begin{array}{llll} \text{Anzeiger} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \text{Glieder} & \mathfrak{R}; & \frac{1}{2^n} + \mathfrak{R}; & \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \mathfrak{R}; \text{ ꝛc.} \end{array}$$

§. 395.

Nun wollen wir annehmen, daß die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc., durch deren Summation man die zu interpolirende Reihe findet, nicht verschwinden, sondern so beschaffen seyen, daß ihre Differenzen $= 0$ werden. Dabey soll X das Glied dieser Reihe seyn, welches dem Anzeiger x, so wie Z dasjenige, welches dem Anzeiger $x + \infty$ zugehört, und X', X'', X''', ꝛc. die auf X, so wie Z', Z'', Z''', ꝛc. die auf Z folgenden Glieder bedeuten. Dies vorausgesetzt sey die zu interpolirende Reihe:

$$\overset{1}{A};\ (A \overset{2}{+} B);\ (A + \overset{3}{B} + C);\ (A + B \overset{4}{+} C + D);\ \text{ꝛc.}$$

dabey $S =$ dem zu dem Anzeiger x, und $\Sigma =$ dem zu dem Anzeiger $x + \infty$ gehörigen Gliede; so ist nach dem vorhergehenden Capitel

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + \text{ꝛc.}\\ &- Z' - Z'' - Z''' - \text{ꝛc.}\\ + \infty X' + \infty &\begin{Bmatrix} + X'' + X''' + X^{IV} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - \text{ꝛc.}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Da es indeß hinlänglich ist, die Glieder gefunden zu haben, welche den Anzeigern zugehören, die kleiner als eins sind: so sey $x = 0$, wodurch $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, ꝛc. wird. Alsdann ist das Glied, welches dem Anzeiger ∞ zugehört,

$$\begin{aligned}\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + D - Z^{IV}) + \text{ꝛc.}\\ \infty A + \infty((B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + \text{ꝛc.})\end{aligned}$$

Bezeichnet man die Differenzen auf die bekannte Art, so daß man $\Delta A = B - A$; $\Delta B = C - B$, ꝛc. nimmt: so bekommt man den Werth von Σ in folgendem Ausdrucke:

$$\begin{aligned}\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z^{IV}) + \text{ꝛc.}\\ + \infty(A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \text{ꝛc.})\end{aligned}$$

§. 396.

Findet aber der Fall statt, daß weder die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc., durch deren Summation man die zu interpolirende Reihe erhält, noch auch ihre ersten Differenzen verschwinden: so müssen dem Ausdrucke für Σ noch mehr Reihen zugefügt werden, so viel nemlich, bis man zu verschwindenden Differenzen gelangt. Es sey nemlich wieder wie vorhin das dem Anzeiger x zugehörige Glied $= X$, und die darauf folgenden X', X'', X''', ꝛc. so wie das dem Anzeiger $x + \infty$ zugehörige $= Z$, und die darauf folgenden Z', Z'', Z''', ꝛc. Ferner sey die Reihe

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A + B)};\ \overset{3}{(A + B + C)};\ \overset{4}{(A + B + C + D)};\ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren gegeben; das zu dem Anzeiger x gehörige Glied derselben

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

und dasjenige, welches dem Anzeiger $x + \infty$ gehört, $= \Sigma$, so daß

den Anzeigern	diese Glieder zukommen
$x + \infty + 1$	$\Sigma' = \Sigma + Z'$
$x + \infty + 2$	$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$
$x + \infty + 3$	$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$
ꝛc.	ꝛc.

Druckt man bey diesen Voraussetzungen die Differenzen auf die Art aus, daß man

$$\Delta X' = X'' - X';\ \Delta X'' = X''' - X'';\ \Delta X''' = X^{\prime v} - X''';\ \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 X' = \Delta X'' - \Delta X';\quad \Delta^2 X'' = \Delta X''' - \Delta X'';$$
$$\Delta^2 X''' = \Delta X^{\prime v} - \Delta X''';\ \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 X' = \Delta^2 X'' - \Delta^2 X';\quad \Delta^3 X'' = \Delta^2 X''' - \Delta^2 X'';$$
$$\Delta^3 X''' = \Delta^2 X^{\prime v} - \Delta^2 X''';\ \text{ꝛc.}$$

setzt:

setzt: so läßt sich nach §. 377. das Glied Σ auf folgende Art darstellen:

$$
\begin{aligned}
\Sigma = S \quad . \quad &+ \quad X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}\\
&- \quad Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{ꝛc.}\\
&+ \omega(X' + \Delta X' + \Delta X'' + \Delta X''' + \text{ꝛc.})\\
&+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \Delta^2 X''' + \text{ꝛc.})\\
&+ \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}(\Delta^2 X' + \Delta^3 X' + \Delta^3 X'' + \Delta^3 X''' + \text{ꝛc.})\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

§. 397.

Es ist, wie wir bereits angemerkt haben, genug, wenn man in der Fortsetzung dieser Reihe so weit fortgeht, bis man zu verschwindenden Differenzen gelangt. Wollte man dieselbe ins Unendliche, oder wenigstens so weit fortsetzen, bis die Differenzen der endlichen Glieder verschwinden: so würde sich, da

$$Z' = X' + \omega\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\Delta^2 X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}\Delta^3 X' + \text{ꝛc.}$$

ist, der ganze Ausdruck in folgenden zusammenziehen lassen:

$$\Sigma = S + \omega X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}\Delta^2 X' + \text{ꝛc.}$$

Dieser Ausdruck enthält zugleich das summatorische Glied der Reihe A + B + C + D + ꝛc.; aber wenn dieses bekannt wäre, so hätte die Interpolation keine Schwierigkeit. Man kann indeß auch diese Formel brauchen, die, wenn sie irgendwo abbricht, das einzuschaltende Glied in einem endlichen und algebraischen Ausdrucke giebt; ist dies nicht, so verdient die andere, wobey auf die unendlichsten Glieder der Glieder Rücksicht genommen wurde, den Vorzug.

Setzt man $x = 0$, so daß Σ das Glied bedeutet, welches dem Anzeiger ω zugehört, so wird darnach, da $S = 0$ ist,

$$
\begin{aligned}
\Sigma = \quad & + A + B + C + D + \text{etc.} \\
& - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{etc.} \\
& + \omega(A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \text{etc.}) \\
& + \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2}(\Delta A + \Delta^2 A + \Delta^2 B + \Delta^2 C + \Delta^2 D + \text{etc.}) \\
& + \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(\Delta^2 A + \Delta^3 A + \Delta^3 B + \Delta^3 C + \Delta^3 D + \text{etc.}) \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\omega = \alpha; \quad \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2} = \beta; \quad \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \gamma; \text{ etc.}$$

setzt,

$$
\begin{aligned}
\Sigma = \; & \alpha A + \beta\Delta A + \gamma\Delta^2 A + \delta\Delta^3 A + \text{etc.} \\
& + A + \alpha\Delta A + \beta\Delta^2 A + \gamma\Delta^3 A + \text{etc.} - Z' \text{ etc.} \\
& + B + \alpha\Delta B + \beta\Delta^2 B + \gamma\Delta^3 B + \text{etc.} - Z'' \text{ etc.} \\
& + C + \alpha\Delta C + \beta\Delta^3 C + \gamma\Delta^3 C + \text{etc.} - Z''' \text{ etc.} \\
& \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der horizontal fortlaufenden Reihen ist unendlich, aber eine jede von ihnen besteht aus einer endlichen Menge von Gliedern.

Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{\tfrac{1}{2}}; \quad (\tfrac{1}{2} \overset{2}{+} \tfrac{2}{3}); \quad (\tfrac{1}{2} + \overset{3}{\tfrac{2}{3}} + \tfrac{3}{4}); \quad (\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} \overset{4}{+} \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5}); \text{ etc.}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied dieser Reihe, welches dem Anzeiger ω zugehört. Da die Reihe aus der Summation der Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, etc. entspringt, so ist $Z = \frac{\omega}{\omega + 1}$, und da

die

die unendlichsten Glieder derselben schon verschwindende erste Differenzen haben, so brauchen auch bloß die ersten Differenzen genommen zu werden. Nun ist

$$A = \tfrac{1}{2};\quad B = \tfrac{2}{3};\quad C = \tfrac{3}{4};\quad D = \tfrac{4}{5};\ \text{rc.}$$

und also

$$\Delta A = \frac{1}{2\cdot 3};\quad \Delta B = \frac{1}{3\cdot 4};\quad \Delta C = \frac{1}{4\cdot 5};\ \text{rc.}$$

Folglich hat man

$$\Sigma = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \text{rc.}$$
$$+ \frac{\omega}{2\cdot 3} + \frac{\omega}{3\cdot 4} + \frac{\omega}{4\cdot 5} + \frac{\omega}{5\cdot 6} + \text{rc.}$$
$$- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \text{rc.}$$

oder, da $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2\cdot 3} + \frac{\omega}{3\cdot 4} + \frac{\omega}{4\cdot 5} + \text{rc.} = \omega$ ist,

$$\Sigma = \omega + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \text{rc.}$$
$$- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \text{rc.}$$

Sucht man demnach das Glied, welches dem Anzeiger ½ zugehört, so ist dasselbe

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{11} + \text{rc.}$$

oder

$$\Sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 7} - \frac{1}{4\cdot 9} - \frac{1}{5.11} - \frac{1}{6.13} - \text{rc.}$$

und also

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5} - \frac{1}{6\cdot 7} - \frac{1}{8\cdot 9} - \frac{1}{10.11} - \frac{1}{12.13} - \text{rc.}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ꝛc.}$$

Da also $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ꝛc.} = l2$ ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = l2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \text{ꝛc.} = l2 - \frac{7}{12}$$

und folglich

$$\Sigma = 2l2 - \frac{7}{6}.$$

§. 371.

Um nun zu der Interpolation der Reihen fortzugehen, deren Glieder Produkte aus Faktoren sind, so sey die allgemeine Reihe

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{AB};\ \overset{3}{ABC};\ \overset{4}{ABCD};\ \overset{5}{ABCDE};\ \text{ꝛc.}$$

gegeben, deren dem Anzeiger ω zugehöriges Glied wir wieder $= \Sigma$ setzen wollen. Alsdann ist $l\Sigma$ das dem Anzeiger ω zugehörige Glied in dieser Reihe

$$\overset{1}{lA};\ \overset{2}{(lA + lB)};\ \overset{3}{(lA + lB + lC)};\ \overset{4}{(lA + lB + lC + lD)};\ \text{ꝛc.}$$

Nimmt man also an, daß die unendlichsten Glieder dieser Reihe verschwinden, und setzt man dabey das zu dem Anzeiger ω gehörige Glied Z, so wie die darauf folgenden zu den Anzeigern $\omega + 1$; $\omega + 2$; $\omega + 3$; ꝛc. gehörigen Glieder Z', Z'', Z''', ꝛc. so ist nach dem Obigen

$$l\Sigma = \begin{cases} + lA + lB + lC + lD + \text{ꝛc.} \\ - lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \text{ꝛc.} \end{cases}$$

und

und geht man hiervon zu den Zahlen zurück, so wird

$$\Sigma = \frac{A}{Z} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \text{ꝛc.}$$

§. 399.

Verschwinden aber die Logarithmen der unendlichsten Glieder nicht, sondern erst ihre Differenzen, so ist, wie wir gesehen haben,

$$\begin{aligned} l\Sigma = &+ lA + lB + lC + \text{ꝛc.} \\ &- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{ꝛc.} \\ &+ \omega lA + \omega\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + \text{ꝛc.}\right) \end{aligned}$$

und also, wenn man zu den Zahlen zurückkehrt,

$$\Sigma = A^{\omega} \cdot \frac{A^{1-\omega}B^{\omega}}{Z'} \cdot \frac{B^{1-\omega}C^{\omega}}{Z''} \cdot \frac{C^{1-\omega}D^{\omega}}{Z'''} \cdot \frac{D^{1-\omega}E^{\omega}}{Z''''} \text{ ꝛc.}$$

Verschwinden aber erst die zweyten Differenzen jener Logarithmen, so wird

$$\begin{aligned} l\Sigma = &\quad lA + lB + lC + lD + \text{ꝛc.} \\ &- lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \text{ꝛc.} \\ &+ \omega\left(lA + l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{ꝛc.}\right. \\ &+ \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(l\frac{B}{A} + l\frac{AC}{B^2} + l\frac{BD}{C^2} + l\frac{CE}{D^2} + l\frac{DF}{E^2} + \text{ꝛc.}\right. \end{aligned}$$

und hieraus erhält man

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1}} B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}} \cdot \frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z''}$$

ꝛc.

 wofür

wofür man, wenn $\omega < 1$ ist, den bequemern Ausdruck

$$\Sigma =$$

$$\frac{A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1\cdot 2}}}{B^{\frac{\omega(1-\omega)}{1\cdot 2}}} \cdot \frac{A^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1\cdot 2}}\, B^{\omega(2-\omega)}}{C^{\frac{\omega(1-\omega)}{1,2}}\, Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1\cdot 2}}\, C^{\omega(2-\omega)}}{D^{\frac{\omega(1-\omega)}{1,2}}\, Z''}$$

$$\text{etc.}$$

nehmen kann.

§. 400.

Wir wollen dieses auf die Interpolation der Reihe

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+c)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \overset{4}{\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)}};\ \text{etc.}$$

anwenden, deren Faktoren aus der Reihe

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a+c}{b+c}};\ \overset{3}{\frac{a+2c}{b+2c}};\ \overset{4}{\frac{a+3c}{b+3c}};\ \text{etc.}$$

genommen sind, wovon die Logarithmen der unendlichsten Glieder verschwinden. Es ist also

$$Z = \frac{a - c + c\omega}{b - c + c\omega};\quad Z' = \frac{a + c\omega}{b + c\omega};\ \text{etc.}$$

und wenn das Glied, welches dem Anzeiger ω in jener Reihe zugehört, Σ genannt wird, so ist nach §. 398.

$$\Sigma = \frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)} \cdot \frac{(a+c)}{(b+c)} \cdot \frac{(b+c+c\omega)}{(a+c+c\omega)} \cdot \frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(b+2c+c\omega)} \cdot \text{etc.}$$

Will man demnach das Glied haben, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, so ist, wenn man $\omega = \frac{1}{2}$ annimmt,

$$\Sigma = \frac{a(2b+c)}{b(2a+c)} \cdot \frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)} \cdot \frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)} \cdot \text{etc.}$$

Exem-

Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\quad \overset{2}{\frac{1.3}{2.4}};\quad \overset{3}{\frac{1.3.5}{2.4.6}};\quad \overset{4}{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}};\quad \overset{5}{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}};\ \text{rc.}$$

zu interpoliren.

Da hier $a = 1$, $b = 2$ und $c = 2$ ist, so wird, wenn man das Glied, welches dem allgemeinen Anzeiger ω zugehört, $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)} \cdot \frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)} \cdot \frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)} \cdot \frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)} \cdot \text{rc.}$$

Nennt man demnach die Glieder, welche den Anzeigern $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3$, rc. zugehören, Σ', Σ'', Σ''', rc., so ist

$$\Sigma' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega}\Sigma$$

$$\Sigma'' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega}\Sigma$$

$$\Sigma''' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \frac{5+2\omega}{6+2\omega}\Sigma$$

rc.

Verlangt man demnach das Glied, dessen Anzeiger $\frac{1}{2}$ ist, so erhält man dafür, wenn man $\omega = \frac{1}{2}$ setzt,

$$\Sigma = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \text{rc.}$$

Nun haben wir oben gezeigt, daß, wenn π den halben Umkreis eines Zirkels bedeutet, dessen Halbmesser $= 1$ ist

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \text{rc.}$$

sey, und es lassen sich daher die Zwischenglieder, die zu den Anzeigern $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, rc. gehören, auf folgende Art ausdrucken:

Anzeiger $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

Glieder $\frac{2}{\pi}$; $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi}$; $\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{\pi}$; $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{2}{\pi}$ ꝛc.

Eben diese Interpolation hat Wallis in seiner Arithmetica infinitorum gefunden.

§. 401.

Nun wollen wir die Reihe

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)};\ \text{ꝛc.}$$

betrachten, deren Faktoren die arithmetische Progression

$$a,\ (a+b),\ (a+2b),\ (a+3b),\ (a+4b)$$

bilden, und deren unendlichste Glieder so beschaffen sind, daß die Differenzen ihrer Logarithmen verschwinden. Da also

$$Z = a - b + b\omega, \text{ und}$$

$$Z' = a + b\omega;\ Z'' = a + b + b\omega;\ Z''' = a + 2b + b\omega;\ \text{ꝛc.}$$

ist: so wird, wenn Σ das Glied der gegebenen Reihe bedeutet, dessen Anzeiger $= \omega$ ist,

$$\Sigma =$$

$$a^{\omega} \cdot \frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a + b\omega} \cdot \frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a + b + b\omega} \cdot \frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a + 2b + b\omega}$$

ꝛc.

Hat man diesen Werth für den Fall gefunden, wenn ω eine Zahl bedeutet, die kleiner ist als eins, so lassen sich die Glieder, welche den Anzeigern $1 + \omega$, $2 + \omega$, $3 + \omega$, ꝛc. zugehören, auf folgende Art ausdrucken:

$$\Sigma' = (a + b\omega)\Sigma$$
$$\Sigma'' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)\Sigma$$
$$\Sigma''' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)(a + 2b + b\omega)\Sigma$$

ꝛc.

Verlangt man demnach das Glied, dessen Anzeiger $\frac{1}{2}$ ist, so erhält man, wenn man $\omega = \frac{1}{2}$ setzt

$$\Sigma = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{3}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{5}{2}b} \text{ ꝛc.}$$

und folglich, wenn man die Quadrate nimmt,

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{5}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)} \text{ ꝛc.}$$

§. 402.

Setzt man in der §. 400. untersuchten Reihe

$$\overset{1}{\frac{f}{g}};\ \overset{2}{\frac{f(f+h)}{g(g+h)}};\ \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}};\ \overset{4}{\frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}} \text{ ꝛc.}$$

das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört $= \Theta$: so ist

$$\Theta = \frac{f(g+\frac{1}{2}h)}{g(f+\frac{1}{2}h)} \cdot \frac{(f+h)(g+\frac{3}{2}h)}{(g+h)(f+\frac{3}{2}h)} \cdot \frac{(f+2h)(g+\frac{5}{2}h)}{(g+2h)(f+\frac{5}{2}h)} \text{ ꝛc.}$$

Setzt man nun $f = a$; $g = a + \frac{1}{2}b$, und $h = b$, so wird

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \text{ ꝛc.}$$

folglich $\Sigma^2 = a\Theta$, und $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Wenn daher das Glied der Reihe

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} \text{ ꝛc.}$$

welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, $= \Sigma$, und das Glied der Reihe

$$\overset{1}{\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)}} \text{ ꝛc.}$$

dessen Anzeiger ebenfalls $\frac{1}{2}$ ist, $= \Theta$ gesetzt wird: so ist $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$.

Da

Da also hier das Glied der Reihe der bloßen Zähler, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, $= \Sigma$ ist, so wird, wenn man das zu eben dem Anzeiger in der Reihe der Nenner zugehörige Glied $= \Lambda$ setzt, $\Theta = \frac{\Sigma}{\Lambda}$. Nun ist $\Theta = \frac{\Sigma^2}{a}$

Folglich wird $\Sigma = \frac{a}{\Lambda}$, oder $\Sigma\Lambda = a$; und durch diese Lehrsätze erhält die Interpolation dieser Art Reihen nicht wenig Licht.

Erstes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1, & 1 \cdot 2, & 1 \cdot 2 \cdot 3, & 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, & \text{ꝛc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Da hier $a = 1$ und $b = 1$ ist, so wird, wenn man das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= \Sigma$ setzt

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega} \cdot 2^{\omega}}{1+\omega} \cdot \frac{2^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{2+\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 4^{\omega}}{3+\omega} \cdot \frac{4^{1-\omega} \cdot 5^{\omega}}{4+\omega} \cdot \text{ꝛc.}$$

Man kann aber hier für ω allemal einen Bruch annehmen, der kleiner als eins ist, und gleichwohl die Interpolation durch die ganze Reihe verrichten. Denn bedeuten Σ', Σ'', Σ''', ꝛc. die Glieder, welche den Anzeigern $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, ꝛc. zugehören, so wird

$$\begin{aligned} \Sigma' &= (1+\omega)\Sigma \\ \Sigma'' &= (1+\omega)(2+\omega)\Sigma \\ \Sigma''' &= (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\Sigma \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied der gegebenen Reihe ist demnach

$\Sigma =$

$$\Sigma = \frac{1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}} \cdot \text{ꝛc.}$$

oder

$$\Sigma = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \text{ꝛc.}$$

Da aber $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot$ ꝛc. ist, so wird dadurch

$$\Sigma^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ und } \Sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und es gehören daher zu den

Anzeigern: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

die Glieder: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ꝛc.

Zweytes Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{1}; \quad \overset{2}{1 \cdot 3}; \quad \overset{3}{1 \cdot 3 \cdot 5}; \quad \overset{4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}; \quad \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren.

Da hier $a = 1$ und $b = 2$ ist, so wird, wenn man das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{1 + 2\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 5^{\omega}}{3 + 2\omega} \cdot \frac{5^{1-\omega} \cdot 7^{\omega}}{5 + 2\omega} \cdot \text{ꝛc.}$$

und die auf Σ folgenden Glieder Σ', Σ'', Σ''', ꝛc. sind

$$\Sigma' = (1 + 2\omega)\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)(5 + 2\omega)\Sigma$$

ꝛc.

Verlangt man daher das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, und nennt dasselbe Σ, so ist

$\Sigma =$

$$x = \frac{\sqrt{1.2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3.5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5.7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{7.9}}{8} \cdot \text{ꝛc.}$$

also

$$x^2 = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \text{ꝛc.} = \frac{2}{\pi}$$

Demnach gehören zu den

Anzeigern: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

die Glieder: $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.4\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $2.4.6\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; ꝛc.

Multiplicirt man aber die vorhergehende Reihe durch diese, so daß man die Reihe

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & 2 & & 2 & & 4 & \\ 1^2; & & 1^2.2.3; & & 1^2.2.3^2.5; & & 1^2.2.3^2.4.5.7; & \text{ꝛc.} \end{array}$$

bekommt, so ist das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Richtigkeit hiervon erkennt man bald, wenn man jener Reihe die Form giebt,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \frac{1.2}{2}; & & \frac{1.2.3.4}{2^2}; & & \frac{1.2.3.4.5.6}{2^3}; & & \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4} \text{ ꝛc.} \end{array}$$

denn das zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehörige Glied dieser Reihe ist offenbar $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Drittes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \frac{n}{1}; & & \frac{2(n-1)}{1.2}; & & \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}; & & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \text{ ꝛc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Man betrachte die Zähler und Nenner dieser Reihe besonders. Da die Zähler

n;

$$\overset{1}{n};\ \overset{2}{n(n-1)};\ \overset{3}{n(n-1)(n-2)};\ \overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)};\ \text{ꝛc.}$$

sind, so wird nach dem Vorhergehenden, wenn man $a = n$ und $b = -1$ setzt, das Glied, welches dem Anzeiger ω zugehört, =

$$n^{\omega} \cdot \frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega} \cdot \frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega} \cdot \frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega}$$

ꝛc.

allein dieser Ausdruck führt wegen der negativen Faktoren auf nichts gewisses. Man ändere also die Reihe, indem man der Kürze wegen $1.2.3....n = N$ setzt, in folgende um

$$N\left(\overset{1}{\frac{1}{1.1.2.3...(n-1)}};\ \overset{2}{\frac{1}{1.2.1.2.3...(n-2)}};\ \overset{3}{\frac{1}{1.2.3.1.2.3...(n-3)}}\ \text{ꝛc.}\right)$$

Da die Nenner dieser Reihe aus zwey Faktoren bestehen, so geben die einen die Reihe

$$\overset{1}{1.2.3...(n-1)};\ \overset{2}{1.2.3...(n-2)};\ \overset{3}{1.2.3...(n-3)};\ \text{ꝛc.}$$

und das Glied dieser Reihe, welches dem Anzeiger ω zugehört, kommt mit dem Gliede der Reihe

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{1.2};\ \overset{3}{1.2.3};\ \overset{4}{1.2.3.4};\ \overset{5}{1.2.3.4.5};\ \text{ꝛc.}$$

überein, dessen Anzeiger $n - \omega$ ist, nemlich

$$\frac{1^{1-n+\omega}.2^{n-\omega}}{1+n-\omega} \cdot \frac{2^{1-n+\omega}.3^{n-\omega}}{2+n-\omega} \cdot \frac{3^{1-n+\omega}.4^{n-\omega}}{3+n-\omega} \cdot \text{ꝛc.}$$

Nun sey das Glied dieser Reihe, welches $1 - \omega$ zum Anzeiger hat, $= \Theta$, so ist

$$\Theta = \frac{1^{\omega}.2^{1-\omega}}{2-\omega} \cdot \frac{2^{\omega}.3^{1-\omega}}{3-\omega} \cdot \frac{3^{\omega}.4^{1-\omega}}{4-\omega} \cdot \text{ꝛc.}$$

und

und da zu den

Anzeigern: $1-\omega \quad 2-\omega \quad 3-\omega$

die Glieder: $\Theta; \quad (2-\omega)\Theta; \quad (2-\omega)(3-\omega)\Theta;$ ꝛc.

gehören, so wird das Glied des Anzeigers $n-\omega$ seyn

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ (n-\omega)\Theta.$$

Die andern Faktoren geben die Reihe

$$\overset{1}{1};\quad \overset{2}{1.2};\quad \overset{3}{1.2.3};\quad \overset{4}{1.2.3.4};\quad \overset{5}{1.2.3.4.5};\quad \text{ꝛc.}$$

und wenn das Glied, dessen Anzeiger ω ist, $= A$ gesetzt wird, so ist

$$A = \frac{1^{1-\omega}.2^{\omega}}{1+\omega}.\frac{2^{1-\omega}.3^{\omega}}{2+\omega}.\frac{3^{1-\omega}.4^{\omega}}{3+\omega}.\text{ꝛc.}$$

Hat man dieses gefunden, so wird, wenn man das Glied der Reihe

$$\overset{1}{\frac{n}{1}};\quad \overset{2}{\frac{n(n-1)}{1.2}};\quad \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}};\quad \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}};$$

ꝛc.

welches dem Anzeiger ω zugehört, $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{N}{A.(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ (n-\omega)\Theta}.$$

Nun ist

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ \ldots\ (n-\omega)} =$$

$$\frac{2}{2-\omega}.\frac{3}{3-\omega}.\frac{4}{4-\omega}.\ \ldots\ .\frac{n}{n-\omega}$$

und

$$A\Theta = \frac{1.2}{(1+\omega)(2-\omega)}.\frac{2.3}{(2+\omega)(3-\omega)}.\frac{3.4}{(3+\omega)(4-\omega)}.\text{ꝛc.}$$

Auf diese Art wird das gesuchte dem Anzeiger ω zugehörige Glied

$\Sigma =$

$$\Sigma = \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \cdot \frac{5}{5-\omega} \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n}{n-\omega} \cdot$$

$$\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3 \cdot 4} \cdot$$

rc. ohne Ende.

Zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehört also das Glied:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2n}{2n-1}$$

$$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \text{rc.}$$

welches sich auf folgenden Ausdruck zurückführen läßt:

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cdot \cdot \cdot (2n-1)} \cdot \frac{4}{\pi}$$

oder

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cdot \cdot \cdot (2n-1)}.$$

Ist $n = 2$, so ist die zu interpolirende Reihe

0	1	2	3	4	5	6	rc.
1,	2,	1,	0,	0,	0,	0,	rc.

und das darin dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied ist $= \frac{16}{3\pi}$.

Viertes Exempel.

Das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied der Reihe:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 + \frac{1}{2} & - & \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} + & \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - & \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{rc.} \end{array}$$

zu finden.

Diese Reihe entspringt aus der vorhergehenden, wenn man $n = \frac{1}{2}$ setzt, und es ist daher das gesuchte Glied, wenn man dasselbe $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \;.\;.\;.\;.\;.\; 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \;.\;.\;.\; (2n-1)}$$

wenn man $n = \infty$ nimmt. Man setze für den Fall, daß $n = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \;.\;.\;.\;.\;.\; 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \;.\;.\;.\; (2n-1)} = \Theta$$

so ist Θ das Glied, welches in der Reihe

$$\frac{2}{1};\; \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3};\; \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5};\; \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7};\; \text{rc.}$$

dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, und nach dem Obigen $= \frac{\pi}{2}$. Demnach ist das gesuchte dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied der gegebenen Reihe $= 1$. Da nun in dieser Reihe, vorausgesetzt, daß Σ das dem allgemeinen Anzeiger ω zugehörige Glied bedeute, das folgende Glied $\Sigma' = \frac{1 - 2\omega}{2 + 2\omega}\Sigma$ ist: so ist dieselbe mit ihren Zwischengliedern:

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Anzeiger:} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} \\ \text{Glieder:} & 1; & 1; & \frac{1}{2}; & 0; & \frac{-1 \cdot 1}{2 \cdot 4}; & 0; & \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}; & 0; \;\text{rc.} \end{array}$$

Fünftes Exempel.

Das dem Anzeiger ω zugehörige Glied der Reihe:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \frac{n}{1}; & \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}; & \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; \end{array}$$

zu finden, vorausgesetzt, daß n jede gebrochene Zahl bedeute.

Vergleicht man den Ausdruck

$$\frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \;.\;.\;.\;.\;.\; \frac{n}{n-\omega}$$

mit

mit §. 400.) und setzt $a = 1$, $c = 1$, $b = 1 - \omega$, und daselbst n für ω, so wird

$$\frac{1}{1-\omega} \cdot \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdots \frac{n}{n-\omega} = \frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)} \cdot \frac{2(2-\omega+2)}{(2-\omega)(2+n)} \cdot$$

u. s. w.

und wenn man daher das dem Anzeiger ω zugehörige Glied Σ setzt, so wird

$$\Sigma = \frac{(1-\omega+n)\cdot 2}{(1+n)(2-\omega)} \cdot \frac{(2-\omega+n)}{(2+n)(3-\omega)} \cdot \text{u. s. w.} \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2 \cdot 3}$$

u. s. w.

und also

$$\Sigma = \frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1(1+n)} \cdot \frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2(2+n)} \cdot \frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3(3+n)}$$

u. s. w.

und es kann daher Σ allemal, wenn $n - \omega$ eine ganze Zahl ist, rational ausgedruckt werden.

Ist z. B.	so ist
$n = \omega$	$\Sigma = 1$
$n = 1 + \omega$	$\Sigma = n$
$n = 2 + \omega$	$\Sigma = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
$n = 3 + \omega$	$\Sigma = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$

u. s. w.

Ist aber $\omega - n$ eine ganze positive Zahl, so ist allemal $\Sigma = 0$.

Achtzehntes Capitel.

Von dem Gebrauche der Differenzialrechnung bey der Auflösung der Brüche.

§. 403.

Die Methode, jeden gegebenen Bruch in einfache Brüche aufzulösen, welche in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen erklärt worden ist, ist zwar an sich leicht genug, sie kann aber durch den Gebrauch der Differenzialrechnung noch beträchtlich vervollkommt und leichter gemacht werden. Die meiste Schwierigkeit findet sich bey der Anwendung jener Methode alsdann, wenn der Nenner des aufzulösenden Bruchs eine Potenz von einem unbestimmten Grade ist, und es entspringt dieselbe hauptsächlich aus der erforderlichen Division des Nenners durch den bereits gefundenen Faktor. Bey dem Gebrauche der Differenzialrechnung aber kann man diese Schwierigkeit vermeiden, indem es dabey nicht nöthig ist, den andern Faktor des Nenners, der aus der Division mit dem bereits gefundenen Faktor entspringt, zu kennen. Diesen Vortheil gewährt nemlich die Methode, den Werth eines Bruchs zu bestimmen, dessen Zähler und Nenner in gewissen Fällen verschwinden, und der Gegenstand dieses Capitels, womit wir die Lehre vom Gebrauche der Differenzialrechnung in der Analysis beschließen wollen, soll daher die Art und

Weise

Weise seyn, die oben erklärte Methode von der Auflösung der Brüche bequemer und leichter zu machen.

§. 404.

Ist also irgend ein Bruch $\frac{P}{Q}$ gegeben, dessen Zähler und Nenner rationale und ganze Funktionen von x sind, so kommt es zuvörderst darauf an, ob x im Zähler P eben so viel oder mehr Dimensionen hat als im Nenner. Enthält der Bruch $\frac{P}{Q}$ einen ganzen Theil von der Form $Ax + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ꝛc. welcher sich durch die Division daraus entwickeln läßt: so ist der übrige Theil ein Bruch mit eben dem Nenner Q, dessen Zähler R weniger Dimensionen hat, als der Nenner Q, so daß sich die fernere Auflösung auf den Bruch $\frac{R}{Q}$ einschränkt. Indeß ist es nicht nöthig diesen Zähler R zu kennen, sondern es lassen sich die einfachen Brüche, welche $\frac{R}{Q}$ giebt, auch aus dem gegebenen Bruche $\frac{P}{Q}$ unmittelbar finden. Dieses ist bereits oben gezeigt worden.

§. 405.

Die einfachen Brüche, welche der Bruch $\frac{P}{Q}$, außer dem etwa in ihm enthaltenen Ganzen, in sich faßt, haben entweder zweytheilige Nenner von der Form $f + gx$, oder dreytheilige von der Form $f + 2x\cos.\phi\sqrt{fg} + gxx$, oder es sind ihre Nenner, Quadrate, Würfel, oder überhaupt höhere Potestäten von diesen. Alle diese Nenner sind fer-

 ner

ner Faktoren des Nenners Q, so daß ein jeder Faktor des Nenners Q einen einfachen Bruch giebt. Ist nemlich $f+gx$ ein Faktor des Nenners Q, so entsteht daher ein einfacher Bruch von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, und ist $(f+gx)^2$ ein solcher Faktor, so entspringen daher zwey Brüche $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$. Auf ähnliche Art entspringen aus dem cubischen Faktor $(f+gx)^3$ drey einfache Brüche von der Form: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2}+\frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)}$ u. s. w. Hat hingegen der Nenner Q einen dreytheiligen Faktor von der Form $ff-2fgx\cos.\varphi+ggxx$, so entspringt daraus ein Bruch wie $\frac{\mathfrak{A}+ax}{ff-2fgx\cos.\varphi+ggxx}$, und sind zwey solche Faktoren in dem Nenner einander gleich, so entstehen daher zwey Brüche wie

$$\frac{\mathfrak{A}+ax}{(ff-2fgx\cos.\varphi+ggxx)^2}+\frac{\mathfrak{B}+bx}{ff-2fgx\cos.\varphi+ggxx}$$

Auf ähnliche Art giebt der cubischr Faktor

$$(ff-2fgx\cos.\varphi+ggxx)^3$$

drey Brüche, ein biquadratischer vier u. s. f.

§. 406.

Man verfahre daher bey der Auflösung eines Bruchs $\frac{P}{Q}$ auf folgende Art. Zuvörderst suche man alle, sowohl einfache als zwey und dreytheilige, Faktoren des Nenners Q, und sind darunter einige gleich, so merke man sich dieselben, und betrachte sie als einen einzigen. Dann suche man aus diesen Faktoren des Nenners die einfachen Brüche, welche sie geben, entweder auf die oben erklärte Art, oder auf die, welche jetzt beschrieben werden soll, und welche man nach Gefallen statt jener brauchen kann. Ist dieses geschehen, so addire man alle diese Brüche und setze dazu den in dem Bruche $\frac{P}{Q}$ etwa enthaltenen ganzen Theil, worauf denn die Summe dem Bruche $\frac{P}{Q}$ gleich seyn wird. Die Erfindung der Faktoren des Nenners Q setzen wir hier als etwas Bekanntes voraus, indem dieselbe von der Auflösung der Gleichung $Q = 0$ abhängt, und erklären hier nur die Art und Weise, mittelst der Differenzialrechnung, aus jedem Faktor des Nenners den daraus entspringenden einfachen Bruch zu finden. Da die Nenner dieser einfachen Brüche schon bekannt sind, so kommt es bloß darauf an, die Art zu beschreiben, wie die zugehörigen Zähler gefunden werden.

§. 407.

Es habe also der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den Faktor $f + gx$, so daß $Q = (f + gx)S$ sey, und S den Faktor $f + gx$ nicht weiter enthalte. Ferner sey der aus diesem Faktor entspringende Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, und sein Complement $\frac{V}{S}$, so daß $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx} + \frac{V}{S} = \frac{P}{Q}$ sey. Alsdann ist $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{f + gx} = \frac{P - \mathfrak{A}S}{(f + gx)S}$, und folglich $V = \frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx}$. Da also V eine ganze Funktion von x ist, so muß $P - \mathfrak{A}S$ durch $f + gx$ theilbar seyn, und daher, wenn man $f + gx = 0$ oder

oder $x = \frac{-f}{g}$ setzt, $P - \mathfrak{A}S$ verschwinden. Man setze demnach $x = \frac{-f}{g}$, so wird, da $P - \mathfrak{A}S = 0$ ist, $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$ seyn, wie wir oben gefunden haben. Da aber $S = \frac{Q}{f + gx}$ ist, so wird $\mathfrak{A} = \frac{(f + gx)P}{Q}$, wenn man allenthalben $f + gx = 0$ oder $x = \frac{-f}{g}$ setzt. Da aber in diesem Falle sowohl der Zähler $(f + gx)P$ als der Nenner Q verschwinden, so wird nach dem, was wir über die Erfindung des Werths von solchen Brüchen gesagt haben,

$$\mathfrak{A} = \frac{(f + gx)dP + Pgdx}{dQ}$$

wenn man $x = \frac{-f}{g}$ nimmt. Da nun in diesem Falle $(f + gx)dP = 0$ wird, so ist $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$, und so läßt sich der Werth von $\mathfrak{A}$ durch die Differenziation finden.

§. 408.

Hat demnach der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den einfachen Faktor $f + gx$, so entspringt aus diesem Nenner der einfache Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, wenn $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$ ist, nachdem man hier allenthalben anstatt x den aus der Gleichung $f + gx = 0$ sich ergebenden Werth $x = \frac{-f}{g}$ gesetzt hat. Auf diese Art ist es also nicht nöthig, zuvor den andern Faktor S zu suchen, welchen man durch die Division des Nenners

Q

Q mit $f + gx$ erhält. Wenn daher Q nicht in seinen Faktoren gegeben ist, so kann man diese, häufig und insbesondere, wenn die Exponenten von x in Q unbestimmt sind, sehr lästige Divisionen unterlassen, indem der Werth von A aus der Formel $\frac{gPdx}{dQ}$ gefunden wird. Ist aber Q in seinen Faktoren gegeben, so daß der Werth von S unmittelbar genommen werden kann: so verdient der andere Ausdruck den Vorzug, wobey $A = \frac{P}{S}$ ist, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt. Auf diese Art kann man jedesmal leicht die bequemste Methode wählen; die Anwendung der jetzt gefundenen Formel aber wollen wir an einigen Beyspielen erläutern.

Erstes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^9}{1 + x^{17}}$ gegeben; man soll den einfachen Bruch finden, der aus dem Faktor des Nenners $1 + x$ entspringt.

Da hier $Q = 1 + x^{17}$ ist, und $1 + x$ zum Faktor hat, so würde man, wenn man dividiren wollte,

$$S = 1 - x + xx - x^3 + \ldots + x^{16}$$

finden. Allein es ist weit bequemer, die neue Formel $A = \frac{gPdx}{dQ}$ zu brauchen. Da also $f = 1$; $g = 1$, und $P = x^9$ ist, so wird, wegen $dQ = 17x^{16}dx$,

$$A = \frac{x^9}{17x^{16}} = \frac{1}{17x^7}$$

wenn man $x = -1$ nimmt, und folglich $\mathfrak{A} = \frac{1}{17}$, und der aus dem Faktor $1 + x$ entspringende einfache Bruch

$$\frac{-1}{17(1+x)}$$

Zweytes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{1 - x^{2n}}$ gegeben; man soll den einfachen Bruch finden, der aus dem Faktor des Nenners $1 - x$ entspringt.

Da der gegebene Faktor $1 - x$ ist, so wird $f = 1$ und $g = -1$. Nun giebt $Q = 1 - x^{2n}$, wenn man differenziirt, $dQ = -2nx^{2n-1}dx$, und da $P = x^m$ ist, so wird $\mathfrak{A} = \frac{-x^m}{-2nx^{2n-1}}$. Setzt man nun, wegen $1 - x = 0$, den Werth von $x = 1$, so wird $\mathfrak{A} = \frac{1}{2n}$, und also der gesuchte einfache Bruch $= \frac{1}{2n(1-x)}$.

Drittes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{1 - 4x^k + 3x^n}$ gegeben; man soll den einfachen Bruch finden, der aus dem Faktor des Nenners $1 - x$ entspringt.

Hier wird $f = 1$; $g = -1$; $P = x^m$; $Q = 1 - 4x^k + 3x^n$, und $\frac{dQ}{dx} = -4kx^{k-1} + 3nx^{n-1}$; folglich $\mathfrak{A} = \frac{-x^m}{-4kx^{k-1} + 3nx^{n-1}}$, und, wenn man $x = 1$ setzt,

$\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{A} = \frac{1}{4k - 3n}$. Demnach ist der einfache Bruch, welcher aus dem einfachen Faktor $1 - x$ entspringt $=$

$$\frac{1}{(4k - 3n)(1 - x)}.$$

§. 409.

Nun habe der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den quadratischen Faktor $(f + gx)^2$, und die daraus entspringenden einfachen Brüche seyen $= \frac{\mathfrak{A}}{(f + gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f + gx}$. Ferner sey $Q = (f + gx)^2 S$, und das Complement $= \frac{V}{S}$, so daß

$$\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{(f + gx)^2} - \frac{\mathfrak{B}}{f + gx}, \text{ und}$$

$$V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}(f + gx)S}{(f + gx)^2}$$

werde. Da V eine ganze Funktion ist, so muß $P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f + gx)$ durch $(f + gx)^2$, und da S den Faktor $f + gx$ nicht weiter enthält, auch $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f + gx)$ durch $(f + gx)^2$ theilbar seyn, und es verschwindet daher, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt, nicht bloß dieser letzte Ausdruck selbst, sondern auch sein Differenzial $d.\frac{P}{S} - \mathfrak{B}gdx$. Man setze also $x = \frac{-f}{g}$, so erhält man aus der ersten Gleichung $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, und aus der andern $\mathfrak{B} = \frac{1}{gdx} d.\frac{P}{S}$. Durch diese

Werthe

Werthe aber werden die gesuchten einfachen Brüche: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}$ $+ \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$ selbst erhalten.

Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{1-4x^3+3x^4}$ gegeben, dessen Nenner den Bruch $(1-x)^2$ hat; man soll die einfachen Brüche finden, welche aus diesem Nenner entspringen.

Da hier $f = 1$; $g = -1$; $P = x^m$ und $Q = 1 - 4x^3 + 3x^4$ ist, so wird $S = 1 + 2x + 3xx$;

$$\frac{P}{S} = \frac{x^m}{1+2x+3xx},$$

und

$$d.\frac{P}{S} = \frac{mx^{m-1}dx + 2(m-1)x^m dx + 3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3xx)^2}.$$

Setzt man demnach $x = 1$, so wird

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}, \text{ und } \mathfrak{B} = -1 \cdot \frac{6m-8}{36} = \frac{4-3m}{18};$$

also die gesuchten einfachen Brüche:

$$\frac{1}{6(1-x)^2} + \frac{4-3m}{18(1-x)}.$$

§. 410.

Es habe der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ drey einfache gleiche Faktoren, oder den cubischen Faktor $(f+gx)^3$, und dabey seyen die einfachen Brüche, welche aus diesem Faktor entspringen

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$$

und

und das Complement derselben $= \frac{V}{S}$; so ist

$$V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f + gx) - \mathfrak{C}S(f + gx)^2}{(f + gx)^3}$$

Es muß folglich der Ausdruck

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f + gx) - \mathfrak{C}S(f + gx)^2$$

durch $(f + gx)^3$ theilbar seyn, und also auch, wenn man $f + gx = 0$, oder $x = \frac{-f}{g}$ setzt, nicht bloß dieser Ausdruck selbst, sondern auch sein erstes und zweytes Differenzial $= 0$ werden. Es ist demnach, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt,

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f + gx) - \mathfrak{C}(f + gx)^2 = 0$$

$$d \, . \, \frac{P}{S} - \mathfrak{B}gdx - 2\mathfrak{C}gdx(f + gx) = 0$$

$$dd \, . \, \frac{P}{S} - \mathfrak{C}g^2dx^2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$

" " zweyten " " $\mathfrak{B} = \frac{1}{gdx} d \, . \, \frac{P}{S}$

" " dritten " " $\mathfrak{C} = \frac{1}{2g^2dx^2} dd \, . \, \frac{P}{S}$

§. 411.

Ueberhaupt habe der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den Faktor $(f + gx)^n$, so daß $Q = (f + gx)^n S$ sey, und dabey seyen die einfachen Brüche, welche aus diesem Faktor entspringen,

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^n}+\frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^{n-1}}+\frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)^{n-2}}+\frac{\mathfrak{D}}{(f+gx)^{n-3}}+\text{ꝛc.}$$

bis zu demjenigen, dessen Nenner $f+gx$ ist. Schließt man nun, wie vorhin, so findet man, daß der Ausdruck

$$\frac{P}{S}-\mathfrak{A}-\mathfrak{B}(f+gx)-\mathfrak{C}(f+gx)^2-\mathfrak{D}(f+gx)^3$$
$$-\mathfrak{E}(f+gx)^4-\text{ꝛc.}$$

durch $(f+gx)^n$ theilbar seyn, und daher sowohl selbst als auch alle seine Differenzialien bis zum Grade $n-1$ verschwinden müsse, wenn man $x=\frac{-f}{g}$ setzt. Aus den Gleichungen aber, welche man auf diese Art erhält, folgt für den Fall $x=\frac{-f}{g}$:

$$\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{1gdx}d.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{1.2g^2dx^2}dd.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{1.2.3g^3dx^3}d^3.\frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{1.2.3.4g^4dx^4}d^4.\frac{P}{S}$$

ꝛc.

Man muß indeß hier nicht vergessen, daß die Differenzialien von $\frac{P}{S}$ vor dem Gebrauche der Substitution $x=\frac{-f}{g}$ genommen werden müssen, weil sonst x aufhören würde, eine veränderliche Größe zu seyn.

§. 412.

§. 412.

Es werden also auf diese Art die Zähler $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, rc. leichter ausgedruckt als nach der oben in der Einleitung erklärten Methode, und öfters auch darnach ihre Werthe schneller gefunden. Um die Vergleichung beyder Methoden zu erleichtern, wollen wir die Bestimmung der Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, rc. nach der Methode in der Einleitung hersetzen. Nimmt man

$x = \frac{-f}{g}$	und mit Zurücklassung von x als einer veränderl. Größe
$\mathfrak{A} = \frac{p}{s}$	$\frac{p - \mathfrak{A}s}{f + gx} = \mathfrak{P}$; so wird
$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}}{s}$	$\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{B}s}{f + gx} = \mathfrak{Q}$; so wird
$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}}{s}$	$\frac{\mathfrak{Q} - \mathfrak{C}s}{f + gx} = \mathfrak{R}$; so wird
rc.	rc.

§. 413.

Hat der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ nicht lauter einfache reelle Faktoren, so nehme man je zwey von den imaginären Faktoren, deren Produkt eine reelle Größe ist, zusammen. Es sey also ein Faktor des Nenners $Q = ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$, welcher, $= 0$ gesetzt, den doppelten imaginären Werth giebt:

$$x = \frac{f}{g}\cos.\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\phi\text{, woher denn}$$

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin.n\phi$$

ist. Ferner sey $Q = (ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)S$, und dabey S nicht durch $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ theilbar. Endlich

sey

sey der Bruch, welcher aus dem Faktor $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$ entspringt

$$\frac{\mathfrak{A} + ax}{ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx}$$

und das Complement desselben zu $\frac{P}{Q} = \frac{V}{S}$. Bey diesen Voraussetzungen ist

$$V = \frac{P - (\mathfrak{A} + ax)S}{ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx}$$

und daher $P - (\mathfrak{A} + ax)S$, und außerdem auch $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - ax$ durch $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$ theilbar. Folglich verschwindet $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - ax$, wenn man $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx = 0$, oder

$$x = \frac{f}{g}\cos.\varphi + \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\varphi, \text{ oder}$$

$$x = \frac{f}{g}\cos.\varphi - \frac{f}{g(\sqrt{-1})}\sin.\varphi$$

setzt.

§. 414.

Da P und S ganze Funktionen von x sind, so brauche man in beyden Ausdrücken beyde Substitutionen; und da für jede Potestät von x oder für x^n die Binomie $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin.n\varphi$ gesetzt werden muß; so schreibe man zuvörderst allenthalben $\frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi$ für x^n, und dabey gehe P in $\mathfrak{P}$, und S in $\mathfrak{S}$ über. Dann setze man allenthalben $\frac{f^n}{g^n}\sin.n\varphi$ für x^n, und hierbey gehe P in p, und S

in

in $\mathfrak{s}$ über; man muß aber vor diesen Substitutionen jede der Funktionen P und S ganz entwickeln, und also die Faktoren, welche sie etwa enthalten, zuvor durch die Multiplication wegschaffen. Hat man auf diese Art die Werthe $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$ gefunden, so ist offenbar, daß die Funktion

$$P \text{ in } \mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}, \text{ und } S \text{ in } \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$$

übergehen wird, wenn man

$$x = \frac{f}{g}\cos.\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\varphi$$

annimmt. Da nun in beyden Fällen $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - ax$, oder $P - (\mathfrak{A} + ax)S$ verschwinden muß, so wird

$$\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}} = \left(\mathfrak{A} + \frac{af}{g}\cos.\varphi \pm \frac{af}{g\sqrt{-1}}\sin.\varphi\right)\left(\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}\right)$$

und hieraus entstehen zwey Gleichungen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} + \frac{af\mathfrak{S}}{g}\cos.\varphi - \frac{af\mathfrak{s}}{g}\sin.\varphi$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} + \frac{af\mathfrak{s}}{g}\cos.\varphi + \frac{af\mathfrak{S}}{g}\sin.\varphi$$

aus welchen man, wenn man $\mathfrak{A}$ daraus wegschafft,

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P} = \frac{af(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g}\sin.\varphi$$

und folglich

$$a = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin.\varphi}$$

findet. Bringt man nun $\sin.\varphi$ weg, so wird

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p} = (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\left(\mathfrak{A} + \frac{af}{g}\cos.\varphi\right)$$

und folglich

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})\cos.\varphi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin.\varphi}$$

§. 415.

Da

$$S = \frac{Q}{ff - 2fgx\,cos.\varphi + ggxx}$$

ist, und wenn man $ff - 2fgx\,cos.\varphi + ggxx = 0$ setzt, sowohl Zähler als Nenner verschwinden, so ist in diesem Falle

$$S = \frac{dQ : dx}{2ggx - 2fg\,cos.\varphi}$$

Nun gehe, wenn man allenthalben $x^n = \frac{f^n}{g^n} cos.n\varphi$ setzt, die Funktion $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$, wenn man aber $x^n = \frac{f^n}{g^n} sin.n\varphi$ nimmt, in q über: so ist offenbar, daß bey

$$x = \frac{f}{g} cos.\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}} sin.\varphi$$

die Funktion $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q} + \frac{q}{\sqrt{-1}}$ übergehen wird; und hiedurch geht die Funktion S in $\frac{\mathfrak{Q} \pm q : \sqrt{-1}}{\pm 2fg\,.\,sin.\varphi\sqrt{-1}}$ über. Da also $S = \mathfrak{S} \pm \frac{s}{\sqrt{-1}}$ ist, wenn man eben denselben Werth für x setzt, so hat man

$$\mathfrak{Q} \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}} sin.\varphi - 2fgs\,sin.\varphi$$

Demnach ist

$$s = \frac{-\mathfrak{Q}}{2fg\,sin.\varphi}, \text{ und } \mathfrak{S} = \frac{q}{2fg\,.\,sin.\varphi}$$

Braucht man diese Werthe, so wird

$$a = \frac{2gg(pq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})sin.\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2} - \frac{2fg(pq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})cos.\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}$$

§. 416.

Hiedurch erhält man eine bequeme Art, aus jedem Faktor vom zweyten Grade einen einfachen Bruch zu bilden; und da dabey der Nenner des gegebenen Bruchs selbst in der Rechnung beybehalten wird, so vermeidet man die Division, wodurch der Werth von S bestimmt werden müßte, und welche oft eine sehr mühsame Operation ist. Hat also der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ einen Faktor wie $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$, so findet man den einfachen Bruch, der aus diesem Faktor entspringt, auf folgende Art. Man nimmt $x = \frac{f}{g}\cos.\varphi$, und schreibt für jede Potestät von x oder x^n den Werth $\frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi$. Hiedurch gehe P in $\mathfrak{P}$, und die Funktion $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$ über. Dann setzt man $x = \frac{f}{g}\sin.\varphi$, und $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\varphi$. Dadurch gehe P in p, und $\frac{dQ}{dx}$ in q über. Hat man diese Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, p, q, gefunden, so lassen sich die Größen $\mathfrak{A}$ und a auf folgende Art bestimmen:

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\sin.\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\cos.\varphi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}$$

$$a = \frac{2gg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}$$

Der Bruch aber, welcher aus dem Faktor $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$ des Nenners Q entspringt, ist =

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\sin.\varphi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)(gx - f\cos.\varphi)}{(\mathfrak{Q}^2 + q^2)(ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx)}$$

Erstes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{a + bx^n}$ gegeben, dessen Nenner $a + bx^n$ den Faktor $ff - 2fgx\,\mathrm{cos}.\phi + ggxx$ hat; man soll den einfachen Bruch finden, welcher aus diesem Faktor entspringt.

Da hier $P = x^m$ und $Q = a + bx^n$ ist: so ist $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1}$. Hiedurch wird

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\mathrm{cos}.\,m\phi; \qquad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\mathrm{sin}.\,m\phi$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\mathrm{cos}.(n-1)\phi; \quad q = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\mathrm{sin}.(n-1)\phi$$

Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{Q}^2 + q^2 = \frac{n^2b^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}$$

$$\mathfrak{P}q - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\mathrm{sin}.(n-m-1)\phi$$

und

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}q = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\mathrm{cos}.(n-m-1)\phi$$

Folglich ist der gesuchte einfache Bruch =

$$\left.\begin{array}{l} 2g^{n-m}(f\mathrm{sin}.\phi\,\mathrm{sin}.(n-m-1)\phi) \\ + 2g^{n-m}(gx\,\mathrm{cos}.(n-m-1)\phi) \\ - 2g^{n-m}(f\mathrm{cos}.\phi\,\mathrm{cos}.(n-m-1)\phi) \end{array}\right\} : \begin{array}{c} nbf^{n-m-1} \\ \times \\ ff - 2fgx\,\mathrm{cos}.\phi + ggxx \end{array}$$

oder

$$\frac{2g^{n-m}(gx\,\mathrm{cos}.(n-m-1)\phi - f\mathrm{cos}.(n-m)\phi)}{nbf^{n-m-1}(ff - 2fgx\,\mathrm{cos}.\phi + ggxx)}$$

Zwey=

Zweytes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{1}{x^m(a + bx^n)}$ gegeben, dessen Nenner den Faktor $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ hat; man soll den einfachen Bruch finden, welcher aus diesem Faktor entspringt.

Da $P = 1$, und $Q = ax^m + bx^{m+n}$ ist, so wird $\frac{dQ}{dx}$ $= max^{m-1} + (m+n)bx^{m+n-1}$; und also, wenn man $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$ setzt, wegen $P = x^0$ und $\mathfrak{P} = 1$,

$$\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos.(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi$$

$\mathfrak{p} = 0$, und

$$\mathfrak{q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(m+n-1)\phi.$$

Folglich

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{m^2a^2f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} + \frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}}\cos.n\phi$$
$$+ \frac{(m+n)^2b^2f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}$$

Ist aber $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ der Divisor von $a + bx^n$, so ist $a + \frac{bf^n}{g^n}\cos.n\phi = 0$, und $\frac{bf^n}{g^n}\sin.n\phi = 0$, und also

$$aa = \frac{bbf^{2n}}{g^{2n}}. \text{ Folglich}$$

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{(m+n)^2bbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}} - \frac{m(2n+m)aaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}$$
$$= \frac{nnaaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} = \frac{nnbbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi$$

$$=$$

$$\frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}((m+n)\sin.(m+n-1)\phi - m\cos.n\phi\,.\,\sin.(m-1)\phi)$$

$$=$$

$$\frac{bf^{(m+n-1)}}{g^{m+n-1}}(n\cos.n\phi\sin.(m-1)\phi+(m+n)\sin.n\phi\cos(m-1)\phi)$$

und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq =$

$$\frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}((m+n)\cos.(m+n-1)\phi - m\cos.n\phi\,.\,\cos.(m-1)\phi)$$

Oder da $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ auch ein Divisor von $ax^{m-1} + bx^{m+n-1}$ ist, so wird

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\cos.(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi = 0$$

und

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(m+n-1)\phi = 0$$

Folglich

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi, \text{ und}$$

$$q = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(m+n-1)\phi; \text{ oder}$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos.(m-1)\phi; \text{ und}$$

$$q = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi.$$

Hieraus ergiebt sich der gesuchte Bruch

$$\frac{2g^m(f\cos.m\phi - gx\cos.(m-1)\phi)}{naf^{m-1}(ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)}$$

Diese

Diese Formel folgt aus dem vorhergehenden Exempel, wenn man m negativ nimmt; daher es nicht einmal nöthig gewesen wäre, hieraus einen besondern Fall zu machen.

Drittes Exempel.

Wenn der Nenner des Bruchs $\frac{x^m}{a + bx^n + cx^{2n}}$ den Faktor $ff - 2gfx\cos.\phi + ggxx$ hat, den einfachen Bruch zu finden, der aus diesen Nenner entspringt.

Wenn $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ ein Faktor des Nenners $a + bx^n + cx^{2n}$ ist, so ist, wie wir oben gezeigt haben,

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\cos.n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\cos.2n\phi = 0$$

und

$$\frac{bf^n}{g^n}\sin.n\phi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\sin.2n\phi = 0$$

Da also $P = x^m$ und $Q = a + bx^n + cx^{2n}$ ist, so wird $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}$, und folglich

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos.m\phi; \qquad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin.m\phi;$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos.(n-1)\phi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\cos.(2n-1)\phi$$

$$\mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin.(n-1)\phi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\sin.(2n-1)\phi$$

Hiernach wird

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2 f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}\left(bb + \frac{4bcf^n}{g^n}\cos.n\phi + \frac{4ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

Nun ist aber aus den beyden vorhergehenden Gleichungen

 f^{2n}

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}}\left(bb + \frac{2bcf^n}{g^n}\cos.n\phi + \frac{ccf^{2n}}{g^{2n}}\right) = aa;$$

und also

$$\frac{4bcf^n}{g^n}\cos.n\phi = \frac{2g^{2n}aa}{f^{2n}} - 2bb - \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}$$

Braucht man diesen Werth, so wird

$$\mathfrak{Q}^2 + q^2 = \frac{n^2f^{2n-2}}{g^{2n-2}}\left(\frac{2aag^{2n}}{f^{2n}} - bb + \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

oder

$$\mathfrak{Q}^2 + q^2 = \frac{n^2(2aag^{4n} - bbf^{2n}g^{2n} + 2ccf^{4n})}{ffg^{4n-2}}$$

Ferner ist $\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin.(2n-m-1)\phi$$

$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin.(2n-m-1)\phi$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist der gesuchte einfache Bruch

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\sin.\phi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)(gx - f\cos.\phi)}{(\mathfrak{Q}^2 + q^2)(ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)}$$

§. 417.

Es lassen sich aber diese Brüche auf eine leichtere Art ausdrucken, wenn man die Faktoren des Nenners selbst bestimmt. Es sey also der Nenner des gegebenen Bruchs

$$a + bx^n.$$

Setzt man den dreytheiligen Faktor desselben

$$ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$$

so ist nach dem, was wir darüber in der Einleitung gesagt haben,

a +

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\operatorname{cof.}n\phi = 0, \text{ und } \frac{bf^n}{g^n}\operatorname{fin.}n\phi = 0.$$

Da also $\operatorname{fin.}n\phi = 0$ ist, so ist entweder $n\phi = (2k - 1)\pi$ oder $n\phi = 2k\pi$; im ersten Falle ist $\operatorname{cof.}n\phi = -1$, im letzten aber $\operatorname{cof.}n\phi = +1$. Sind demnach a und b positive Größen, so hat der erste Fall allein statt, wo denn $a = \frac{bf^n}{g^n}$, und daher

$$f = a^{\frac{1}{n}} \text{ und } g = b^{\frac{1}{n}}$$

wird. Statt dieser Irrational-Größen wollen wir indeß die Buchstaben f und g beybehalten, oder vielmehr $a = f^n$ und $b = g^n$ setzen, so daß die Faktoren der Funktion $f^n + g^n x^n$ zu suchen seyen. Da also $\phi = \frac{(2k - 1)\pi}{n}$ ist, wo k jede ganze positive Zahl bedeuten kann, so lange $\frac{2k - 1}{n}$ kleiner als eins bleibt: so sind die Faktoren der Funktion $f^n + g^n x^n$ folgende:

$$ff - 2fgx\operatorname{cof.}\frac{\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\operatorname{cof.}\frac{3\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\operatorname{cof.}\frac{5\pi}{n} + ggxx$$

ꝛc.

Bedeutet aber n eine gerade Zahl, so muß man nicht vergessen, daß der eine Faktor ein zweytheiliger, nemlich $f + gx$ sey, dergleichen hingegen nicht statt findet, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Erstes Exempel.

Den Bruch $\frac{x^m}{f^n + g^n x^n}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Da alle dreytheilige Faktoren des Nenners in der Form

$$ff - 2fgx\cos.\frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx$$

enthalten sind, so ist nach dem Vorhergehenden

$$a = f^n,\ b = g^n \text{ und } \varphi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$$

folglich

$$\sin.(n-m-1)\varphi = \sin.(m+1)\varphi = \sin.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$$

und

$$\cos.(n-m-1)\varphi = -\cos.(m+1)\varphi = -\cos.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$$

und der einfache Bruch, der aus jenem Faktor entspringt,

$$\frac{2f\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} - 2c\sin\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}(gx - f\cos\frac{(2k-1)}{n}\pi}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{(2k-1)}{2}\pi + ggxx)}$$

Demnach läßt sich der gegebene Bruch in folgende einfache Brüche auflösen

$$\frac{2f\sin.\frac{\pi}{n}\sin.\frac{(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{\pi}{n} + ggxx)}$$

$$\frac{2f\sin.\frac{3\pi}{n}\sin.\frac{3(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{3(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{3\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{3\pi}{n} + ggxx)}$$

2ffin.

$$\frac{2f\sin.\frac{5\pi}{n}\sin.\frac{5(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{5(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{5\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^{m}\left(ff - 2fgx\cos.\frac{5\pi}{n} + ggxx\right)}$$

ꝛc.

Ist also n eine gerade Zahl, so erhält man auf diese Art alle einfache Brüche, ist aber n ungerade, so muß man wegen des Faktors $f + gx$ noch dazu den Bruch

$$\frac{\pm 1}{ng^{n-m-1}g^{m}(f+gx)}$$

addiren, wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, und das untere, wenn m eine ungerade Zahl bedeutet. Ist m größer als n, so müssen zu diesen Brüchen auch noch folgende Ganze addirt werden:

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{ꝛc.}$$

so lange die Exponenten positiv bleiben. Dabey ist

$Ag^{n} = 1;$	folglich $A = \frac{1}{g^{n}}$
$Af^{n} + Bg^{n} = 0;$	$B = -\frac{f^{n}}{g^{2n}}$
$Bf^{n} + Cg^{n} = 0;$	$C = +\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$
$Cf^{n} + Dg^{n} = 0;$	$D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$
ꝛc.	ꝛc.

Zweytes Exempel.

Den Bruch $\frac{1}{x^{m}(f^{n}+g^{n}x^{n})}$ in seine einfache Brüche aufzulösen.

Was die Faktoren von $f^{n} + g^{n}x^{n}$ betrifft, so entspringen daraus eben die Brüche, welche wir daraus im vorherhergehenden Exempel hergeleitet haben, wenn man nur m negativ nimmt. Wir haben also nur nöthig, die aus dem andern Faktor x^m entspringenden einfachen Brüche aufzusuchen, und dieses geschieht am bequemsten auf folgende Art. Man setze den gegebenen Bruch =

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{N}x^{n-m}}{f^n + g^n x^n}, \text{ so ist}$$

$$\mathfrak{A}f^n = 1; \qquad \text{folglich } \mathfrak{A}\frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{N} = 0; \qquad \mathfrak{N} = -\frac{g^n}{f^n}$$

Ist n — m noch negativ, so muß man auf ähnliche Art verfahren, so daß, wenn m eine nach Belieben große Zahl bedeutet, folgende einfache Brüche entspringen:

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

so lange die Exponenten von x positiv bleiben. Dabey ist

$$\mathfrak{A}f^n = 1; \qquad \text{folglich } \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{B}f^n = 0; \qquad \mathfrak{B} = -\frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{B}g^n + \mathfrak{C}f^n = 0; \qquad \mathfrak{C} = -\frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{C}g^n + \mathfrak{D}f^n = 0; \qquad \mathfrak{D} = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Die einfachen Brüche, worin sich der gegebene Bruch auflösen läßt, sind demnach

$$\frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n}x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n}x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n}x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

$$\frac{-2fg^m \sin.\frac{\pi}{n}\sin.\frac{(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{\pi}{n})}{nf^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{\pi}{n} + ggxx)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin.\frac{3\pi}{n}\sin.\frac{3(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{3(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{3\pi}{n})}{nf^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{3\pi}{n} + ggxx)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin.\frac{5\pi}{n}\sin.\frac{5(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{5(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{5\pi}{n})}{nf^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{5\pi}{n} + ggxx)}$$

Ist n eine ungerade Zahl, so muß wegen des Faktors $f + gx$ hiezu noch der Bruch

$$\frac{\pm g^m}{nf^{n+m-1}(f + gx)}$$

addirt werden, wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, und das untere, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 418.

Nun wollen wir auch die Formel $a + bx^n$ für den Fall erwägen, wenn b eine negative Größe ist, und die Funktion

$$f^n - g^n x^n$$

als gegeben betrachten, die allemal den Faktor $f - gx$, und wenn n eine gerade Zahl ist, auch den Faktor $f + gx$ hat. Die übrigen Faktoren sind dreytheilige, und setzt man ihre allgemeine Form =

$$ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$$

so wird $f^n - f^n\cos.n\varphi = 0$, und $f^n\sin.n\varphi = 0$ oder $\sin.n\varphi = 0$ und $\cos.n\varphi = 1$. Soll diesen Bedingungen ein Genüge geleistet werden, so muß $n\varphi = 2k\pi$ seyn, wenn k jede

jede ganze Zahl bedeutet, und daher $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ genommen werden. Es ist demnach der allgemeine Faktor

$$ff - 2fgx \,.\, \mathrm{cos.}\frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

und wenn man für 2k alle die gerade Zahlen setzt, die kleiner als n sind, so findet man alle dreytheilige Faktoren. Sie sind

$$ff - 2fgx\,\mathrm{cos.}\frac{2\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\,\mathrm{cos.}\frac{4\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\,\mathrm{cos.}\frac{6\pi}{n} + ggxx$$

rc.

Erstes Exempel.

Den Bruch $\frac{x^m}{f^n - g^n x^n}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Da der Nenner den Faktor $f - gx$ hat, so ergiebt sich daraus ein Bruch von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{f - gx}$, dessen Zähler auf folgende Art gefunden wird. Man setze $x^m = P$ und $f^n - g^n x^n = Q$, so ist $dQ = -ng^n x^{n-1}$, und

$$\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{-ng^n x^{n-1}} = \frac{x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$$

wenn man $x = \frac{f}{g}$ annimmt. Also $\mathfrak{A} = \frac{1}{nf^{n-m-1}g^m}$ und folglich der aus dem Faktor $f - gx$ entspringende Bruch

$$\frac{1}{n f^{n-m-1} g^m (f - gx)}$$

Ist n eine gerade Zahl, so wird auch ein Faktor des Nenners $f + gx$, und setzt man den daher entspringenden Bruch $= \frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{n g^n x^{n-1}} = \frac{-x^m}{n g^{n-1} x^{n-1}}$$

wenn man $x = \frac{-f}{g}$ nimmt. Da nun in diesem Falle $n - 1$ eine ungerade Zahl ist, so wird $g^{n-1} x^{n-1} = - f^{n-1}$; x^m aber $= \frac{\pm f^m}{g^m}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, und das untere, wenn es eine ungerade Zahl ist. Und da $\mathfrak{A} = \frac{\pm 1}{n f^{n-m-1} g^m}$ ist, so wird der aus dem Faktor $f + gx$ entspringende einfache Bruch folgender:

$$\frac{\mp 1}{n f^{n-m-1} g^m (f + gx)}$$

Ferner ist die allgemeine Form der dreytheiligen Faktoren

$$ff - 2fgx \operatorname{cos.} \frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

und aus der Vergleichung mit dem ersten Exempel §. 416. ergiebt sich

$$a = f^n;\ b = -g^n; \text{ und } \varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Hieraus fließt

$$\operatorname{sin.} \varphi = 0;\quad \operatorname{cos.} n\varphi = 1;\ \text{also}$$

$$\operatorname{sin.}(n - m - 1)\varphi = -\operatorname{sin.}(m + 1)\varphi = -\operatorname{sin.} \frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

und

$$\operatorname{cos.}(n - m - 1)\varphi = \operatorname{cos.}(m + 1)\varphi = \operatorname{cos.} \frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

Dem=

Demnach ist der aus dem dreytheiligen Faktor entspringende Bruch

$$\frac{2f\sin.\frac{2k\pi}{n}.\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{2k(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{2k\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^{m}(ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi}{n} + ggxx)}$$

und die gesuchten einfachen Brüche sind:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^{m}(f - gx)}$$

$$+\frac{2f\sin.\frac{2\pi}{n}.\sin.\frac{2(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{2(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{2\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^{m}(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi}{n} + ggxx)}$$

$$+\frac{2f\sin.\frac{4\pi}{n}.\sin.\frac{4(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{4(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{4\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^{m}(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi}{n} + ggxx)}$$

$$+\frac{2f\sin.\frac{6\pi}{n}.\sin.\frac{6(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{6(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{6\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^{m}(ff - 2fgx\cos.\frac{6\pi}{n} + ggxx)}$$

$$\text{etc.}$$

Ist n eine gerade Zahl, so muß man noch den Bruch

$$\frac{\pm 1}{nf^{n-m-1}g^{m}(f + gx)}$$

setzen, und dabey das obere Zeichen nehmen, wenn m eine gerade, und das untere, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ist ferner m nicht kleiner als n, so müssen noch die Ganzen

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{etc.}$$

so lange die Exponenten nicht negativ werden, dazu kommen, und dabey ist

$$-Ag^n = 1; \quad \text{oder} \quad A = -\frac{1}{g^n}$$

$$Af^n - Bg^n = 0; \quad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n - Cg^n = 0; \quad C = -\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n - Dg^n = 0; \quad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

rc. rc.

Zweytes Exempel.

Den Bruch $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Die Brüche, welche aus dem Faktor $f^n - g^n x^n$ entspringen, sind eben die, welche wir vorhin gefunden haben, wenn man darin nur m negativ nimmt. Wir haben daher bloß auf den andern Faktor x^m zu sehen, und nehmen wir an, daß daraus die Brüche

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \text{rc.}$$

bis die Exponenten von x negativ werden, entspringen: so ist

$$\mathfrak{A}f^n = 1; \quad \text{also} \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{B}f^n - \mathfrak{A}g^n = 0; \quad \mathfrak{B} = \frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{C}f^n - \mathfrak{B}g^n = 0; \quad \mathfrak{C} = \frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{D}f^n - \mathfrak{C}g^n = 0; \quad \mathfrak{D} = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

rc. rc.

Die einfachen Brüche, worin der gegebene Bruch sich auflösen läßt, sind demnach

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{g^m}{n f^{n+m-1}(f - gx)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin.\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{2(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{2(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{2\pi}{n}\right)}{n f^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin.\frac{4\pi}{n}.\sin\frac{4(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{4(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{4\pi}{n}\right)}{n f^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin.\frac{6\pi}{n}.\sin\frac{6(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{6(m-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{6\pi}{n}\right)}{n f^{n+m-1}\left(ff - 2fgx\cos.\frac{6\pi}{n} + ggxx\right)}$$

ꝛc.

wozu aber noch

$$\frac{\mp g^m}{n f^{n+m-1}(f + gx)}$$

addirt werden muß, wenn n eine gerade Zahl ist, im entgegenstehenden Falle aber nicht. Von den beyden Zeichen gilt übrigens das obere $-$, wenn m eine gerade, und das untere $+$, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 419.

Auf diese Art lassen sich also alle Brüche, deren Nenner aus zweyen Gliedern wie $a + bx^n$ bestehen, in einfache Brüche auflösen. Hat aber der Nenner drey Glieder, z. B. $a + bx^n + cx^{2n}$, so kommt es zuvörderst darauf an, ob ob er in zwey reelle Faktoren von der vorigen Form zerfällt werden kann oder nicht. Ist dies, so kann man ihn auch nach der beschriebenen Methode in seine einfachen Brüche auflösen. Denn hat man z. B. den Bruch

$$\frac{x^m}{(f^n + g^n x^n)(f^n + h^n x^n)}$$

so läßt sich derselbe zuvörderst in zwey Brüche von der Form

$$\frac{\alpha x^m}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^m}{f^n + h^n x^n}$$

verwandeln, so daß $\alpha f^n + \beta f^n = 1$, und $\alpha h^n + \beta g^n = 0$ ist. Hieraus aber fließt

$$\alpha = \frac{1}{f^n} - \beta = \frac{\beta g^n}{h^n}, \text{ und man hat daher}$$

$$\beta = \frac{h^n}{f^n(h^n - g^n)}, \text{ und } \alpha = \frac{g^n}{f^n(g^n - h^n)}$$

Ist m kleiner als n, so ist die Verwandlung in folgende Brüche

$$\frac{\alpha x^{m-n}}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^{m-n}}{f^n + h^n x^n}$$

bequemer, weil dabey $\alpha + \beta = 0$, und $\alpha h^n + \beta g^n = 1$, und folglich

$$\alpha = \frac{1}{h^n - g^n} \text{ und } \beta = \frac{1}{g^n - h^n}$$

wird. Man mag indeß einen Weg einschlagen, was für einen man will, so läßt sich jeder der gefundenen Brüche nach der beschriebenen Methode behandeln, und die Summe der alsdann gefundenen Partial-Brüche ist allemal dem gegebenen Bruche gleich.

§. 420.

Auf ähnliche Art reicht die erwähnte Methode hin, wenn der Nenner aus mehrern Gliedern besteht, z. B. $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + ex^{4n} +$ ꝛc., wofern nur derselbe in Faktoren von der Form $f^n \pm g^n x^n$ aufgelöset werden kann. Denn sollte z. B. der Bruch

$$\frac{x^m}{(a - x^n)(b - x^n)(c - x^n)(d - x^n)}$$

in seine einfachen Brüche aufgelöset werden, so würde man denselben zuvörderst in die Brüche

$$\frac{Ax^m}{a - x^n} + \frac{Bx^m}{b - x^n} + \frac{Cx^m}{c - x^n} + \frac{Dx^m}{d - x^n} + \text{ꝛc.}$$

verwandeln können, und dabey würde seyn

$$A = \frac{1}{(b - a)(c - a)(d - a)}$$

$$B = \frac{1}{(a - b)(c - b)(d - b)}$$

$$C = \frac{1}{(a - c)(b - c)(d - c)}$$

ꝛc.

Nach dieser Vorbereitung aber ist es leicht, die aus jedem jener Brüche entspringenden Partial-Brüche zu finden, und ihre dem gegebenen Bruche gleiche Summe zusammenzusetzen.

§. 421.

Hat aber ein Nenner, wie $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} +$ ꝛc. nicht lauter reelle Faktoren von der Form $f^n + g^n x^n$, so muß man je zwey imaginäre Faktoren zusammen nehmen. Wir wollen also setzen, das Produkt jeder zweyer imaginärer Faktoren sey

f2n

$$f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos.\omega + g^{2n} x^{2n}$$

und da dieser Ausdruck keine einfache reelle Faktoren enthält, ferner annehmen, daß die trinomischen Faktoren die allgemeine Form haben,

$$ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$$

deren Anzahl daher n seyn wird. Setzt man bey diesen Bedingungen $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi$, so entsteht die Gleichung:

$$1 - 2\cos.\omega\cos.n\varphi + \cos.2n\varphi = 0$$

und nimmt man darauf $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\varphi$, so ist auch

$$-2\cos.\omega.\sin.n\varphi + \sin.2n\varphi = 0.$$

Diese Gleichung durch $\sin.n\varphi$ dividirt giebt $\cos.n\varphi = \cos.\omega$ und thut zugleich der ersten Gleichung ein Genüge. Es ist demnach $n\varphi = 2k\pi \pm \omega$, wenn k jede ganze Zahl bedeutet, und folglich $\varphi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$. Demnach sind alle Faktoren in der Form

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$$

enthalten, und dies giebt folgende Faktoren

$$ff - 2fgx\cos.\frac{\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx$$

ꝛc.

Hiervon muß man jedesmal so viel nehmen, als n Einheiten hat.

§. 422.

Soll also der Bruch

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos.\omega + g^{2n} x^{2n}}$$

in seine einfachen Brüche aufgelöset werden: so betrachte man, da jeder dreytheilige Faktor des Nenners in der Form

$$ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$$

enthalten ist, wenn man $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$ nimmt, den Bruch

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos.\omega + g^{2n}x^{2n+1}}$$

der jenem gleich ist, und setze den Zähler $x^m = P$, und den Nenner $f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos.\omega + g^{2n}x^{2n+1} = Q$, wodurch man

$$\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^n g^n x^n \cos.\omega + (2n+1)g^{2n}x^{2n}$$

bekommt. Setzt man daher

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$$

so wird

$$P = \frac{f^m}{g^m}\cos.m\phi,$$

oder

$$P = \frac{f^m}{g^m}\cos.\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$$

und

und

$$\mathfrak{Q} = f^{2n}(1 - 2(n + 1)\cos.\omega\cos.n\phi + (2n + 1)\cos.2n\phi).$$

Nun ist aber $\cos.n\phi = \cos.\omega$, und also $\cos.2n\phi = 2\cos.\omega^2 - 1$; folglich auch

$$\mathfrak{Q} = f^{2n}(-2n + 2n\cos.\omega^2) = -2nf^{2n}\sin.\omega^2.$$

Setzt man ferner

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\phi,$$

so wird

$$p = \frac{f^m}{g^m}\sin.m\phi = \frac{f^m}{g^m}\sin.\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$$

und

$$q = -f^{2n}(2(n + 1)\cos.\omega.\sin.n\phi - (2n + 1)\sin.2n\phi)$$

Da aber $\sin.2n\phi = 2\sin.n\phi.\cos.n\phi = 2\cos.\omega.\sin.n\phi$ ist, so wird auch

$$q = 2nf^{2n}\cos.\omega.\sin.n\phi,$$

und da $n\phi = 2k\pi \pm \omega$ ist, so ist ferner $\sin.n\phi = \pm\sin.\omega$, und

$$q = \pm 2nf^{2n}\sin.\omega.\cos.\omega$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist ferner

$$\mathfrak{Q}^2 + q^2 = 4n^2f^{4n}\sin.\omega^2$$

$$\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(\pm\mathrm{cs}.m\phi.\sin.\omega.\mathrm{cs}.\omega + \sin.m\phi.\sin.\omega^2)$$

oder

$$\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin.\omega.\cos.(m\phi \mp \omega)$$

oder

$$\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q} = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin.\omega.\cos.\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}$$

$$\mathfrak{PQ} + pq = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(-\text{cf.}m\phi\,\text{fin.}\omega^2 \pm \text{fin.}m\phi\,\text{fn.}\omega.\text{cf}\omega)$$

oder

$$\mathfrak{PQ} + pq = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\text{fin.}\omega\,.\,\text{fin.}(m\phi \mp \omega)$$

oder

$$\mathfrak{PQ} + pq = \pm \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\text{fin.}\,\omega\,.\,\text{fin.}\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}$$

Es entspringt folglich aus dem Faktor $ff - 2fgx\text{cof.}\frac{2k\pi \pm \omega}{n}$ $+ ggxx$ der einfache Bruch:

$$\frac{\pm f\,.\,\text{fin.}\frac{2k\pi \pm \omega}{n}\text{cof.}\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\text{fin.}\,\omega\,(ff - 2fgx\,\text{cof.}\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx)} \pm$$

$$\frac{\text{fin.}\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}(gx - f\text{cof.}\frac{2k\pi \pm \omega}{n})}{nf^{2n-m}g^{m-1}\text{fin.}\omega(ff - 2fgx\,\text{cof.}\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx)}$$

oder

$$\frac{\pm gx\text{fin.}\frac{2km\pi \pm (m-1)\omega}{n} \pm f\text{fin.}\frac{2k(m-n)\pi \pm (m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\text{fin.}\omega(ff - 2fgx\,\text{cof.}\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx)}$$

Exem-

Exempel.

Den Bruch $\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos.\omega + g^{2n} x^{2n}}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Die gesuchten einfachen Brüche sind nach dem Vorhergehenden

$$\frac{+ f\sin.\frac{\omega}{n}\cos.\frac{(m-n)\omega}{n} + \sin.\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-f\,\mathrm{sn.}\frac{2\pi-\omega}{n}\mathrm{cs.}\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n} - \mathrm{sn.}\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\,\mathrm{cs.}\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi-\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\,\mathrm{sn.}\frac{2\pi+\omega}{n}\mathrm{cs.}\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n} + \mathrm{sn.}\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\,\mathrm{cs.}\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi+\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{-f\,\mathrm{sn.}\frac{4\pi-\omega}{n}\mathrm{cs.}\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n} - \mathrm{sn.}\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\,\mathrm{cs.}\frac{4\pi-\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi-\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{+f\,\mathrm{sn.}\frac{4\pi+\omega}{n}\mathrm{cs.}\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n} + \mathrm{sn.}\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\,\mathrm{cs.}\frac{4\pi+\omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi+\omega}{n} + ggxx\right)}$$

rc.

so

so weit nemlich, bis man von diesen Brüchen n hat. Ist m größer als $2n - 1$, oder eine negative Zahl, so muß man im ersten Falle die Ganzen, und im andern noch überdies die Brüche hinzufügen, welche man nach der vorhin erklärten Methode leicht findet.

[illegible]

Inhalt

Inhalt
des
dritten Theils.

Inhalt des zehnten Capitels.

Von den größten und kleinsten Werthen der veränderlichen Größen.

Inhalt des eilften Capitels.

Von den größten und kleinsten Werthen der vielförmigen Funktionen, und der Funktionen mehrerer veränderlichen Größen.

bb. Um=

Inhalt des zwölften Capitels.

Von dem Gebrauche der Differenzialien bey der Erfindung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

Inhalt des dreyzehnten Capitels.

Von den Kennzeichen der imaginären Wurzeln.

Inhalt des vierzehnten Capitels.

Von den Differenzialien der Funktionen in gewissen Fällen.

Inhalt

Inhalt des funfzehnten Capitels.

Von den Werthen der Funktionen, die in gewissen Fällen unbestimmt scheinen.

Inhalt des sechszehnten Capitels.

Von der Differenziation der inexplicablen Funktionen.

Inhalt

Inhalt des siebenzehnten Capitels.

Von der Interpolation der Reihen.

Inhalt des achtzehnten Capitels.

Von dem Gebrauch der Differenzialrechnung bey der Auflösung der Brüche.

β. wenn

2