Supplement

zu

L. Eulers

Differenzialrechnung

worin ausser den Zusätzen und Berichtigungen, auch noch andere nützliche analytische Untersuchungen, welche größtentheils die combinatorische Analysis betreffen, enthalten sind,

von

Johann Philipp Grüson

Königl. Professor der Mathematik am Cadettencorps in Berlin.

Berlin, 1798.

Bey F. T. Lagarde.

Vorrede.

Der Inhalt dieser Schrift, ist zwar keine lectüre für Anfänger, aber doch bei weitem noch nicht das schwerste, das die Analysis geben kann. Ueberdem braucht und soll der Inhalt nur demjenigen durchaus verständlich seyn, der das größere Werk des Herrn Euler zu studiren unternimmt. Indessen werden meine leser doch einzelne Materien finden, die ein Ganzes ausmachen, und andere Sätze mehr, welche man, ohne vorher Eulers Differenzialrechnung ganz studirt zu haben, verstehen kann. Dahin gehören Seite 155 — 216 das System der allgemeinen Differenzen und Seite 216 — 233, einige merkwürdige Sätze und Relationen, ferner Seite 233 bis zu Ende, Hindenburgs Theorie der combinatorischen Analysis. Ich glaube daß ich überall so deutlich bin, als es der Gegenstand erlaubt, und die Kenntnisse, die ich mit Recht voraussetzen darf, erfordern. Herr Fontana hat von Eulers Werke Institutiones calculi differentialis eine neue Ausgabe Ticini 1787 in quarto besorgt, und in dieser Ausgabe findet sich Seite 705 der Aufsatz über Inexplicabeln Funktionen. Die Zusätze von Hrn. Fontana hätten wohl beträchtlicher seyn können, aber es hängt nicht immer von dem Schriftsteller ab, welche Ausdehnung er seinen Arbeiten geben will. Wenn man mehrere in gewisser Hinsicht verschiedene Materien

rien in einem Bande giebt, so darf man hoffen, mehrere Leser zu befriedigen und ihnen nützlich zu werden. Dieses letztere ist wirklich meine Absicht gewesen. Das System der allgemeinen oder endlichen Differenzen ist, soviel ich weiß, noch nirgend so ausführlich und strenge bewiesen worden. Der verehrungswürdige und gelehrte Greis, Herr Hofrath Kästner, und der für die Wissenschaften viel zu früh verstorbene Karsten haben in ihren allgemein bekannten vortreflichen Schriften über die Analysis, nur ein paar einzelne Sätze davon, ohne Differentialien erwiesen, die nach ihren Systemen einen solchen Beweis nöthig hatten. Des Herrn Professors Bussen's Abhandlung über diesen Gegenstand in den von mir oft genannten Beyträgen, war daher gewiß ein sehr angenehmes und willkommenes Geschenk, und was nun noch hierbey in Hinsicht auf die bequemste Bezeichnung und auf Vollendung zu wünschen übrig blieb, denke ich hier geleistet zu haben.

Die Arbeit des Bürger Prony im Journal polytechnique über endliche Differenzen, die ich erst nach Vollendung meiner Arbeit sahe, und also nicht benutzen konnte, steht, wenn ich als competenter Richter sprechen darf, in vieler Hinsicht, vorzüglich in Strenge und Ausführlichkeit der Beweise meiner Arbeit nach. Die Zeit wird lehren was der Herr Professor Kosmann der eine Uebersetzung mit Zusätzen davon versprochen hat, leisten wird.

Da ich die meisten Werke in meiner Wissenschaft nie anders als mit der Feder in der Hand lese, so kann es bey ausdauerndem Fleiße und bey meinem Enthusiasmus

für

für die Wissenschaft, nicht fehlen, daß ich auf einige neue Vorstellungsarten, Beweise und Sätze gekommen bin, — dieses ist die Entstehung der merkwürdigen Sätze und Relationen. — Im 6ten Hefte des Hindenburgischen Archivs der Mathematik 1797, Seite 161 steht ein Aufsatz von Herrn Buzengeiger, der einige Sätze mit dem meinigen gemein hat. — Giebt aber Simplicität und Leichtigkeit den Beweisen Vorzug, so glaube ich, daß mein Beweis vom Herrn Lagrange's Satze ihn verdient. Daß ich nicht mehr solcher Sätze hier mitgetheilt habe, beweißt nicht, daß ich nicht mehrere besitze. — Ich habe wirklich davon noch eine große Anzahl, und hoffe zu ihrer Bekanntmachung andere Gelegenheit zu finden.

Jetzt komme ich zu der über alles Lob erhabenen Hindenbürgischen Erfindung — Was ich hier davon fast wörtlich nach Hindenburg gebe, ist hinlänglich meine Anwendung derselben auf das wichtigste Problem der ganzen Analysis nemlich den polynomischen Lehrsatz, der noch nirgend so weit dargestellt gefunden wird, verständlich zu machen. Wer dieses auf gewöhnlichen Wegen dependent leisten wollte, würde gewiß mit seinem Verstande Gefahr laufen, und doch am Ende nicht vor Rechnungsfehlern sicher seyn — die combinatorische Methode übertrift jede andere, an Allgemeinheit und Leichtigkeit, giebt, was nach andern Methoden nur selten der Fall ist, die verlangten Glieder unabhängig von den vorhergehenden, und giebt bey den verwickelsten Untersuchungen, in die Augen fallende Gesetze. — Sie bietet für eine Vorrede viel zu vielen Stof dar, und ich bin gezwungen ihre Lobrede hier zu endigen, aber einen Jedem ersuche ich sich ja nicht durch die wenigen neuen Zeichen vom Studium derselben abschrecken zulassen, der Nachtheil des unterlassenen Studiums ist unendlichemal größer als die kleine Mühe die es erfordert. Da diese Schrift, als Supplement zu Eulers berühmten Werke, wahrscheinlich manche Käufer findet, die Hindenburgs unschätzbare Schriften nicht besitzen, so hoffe ich dem Wunsch des verehrungswürdigen Erfinders gemäß, hierdurch viel zur Ausbreitung und Bekanntmachung der combinatorischen Analysis beyzutragen, auch werde ich künftig gewiß keine Gelegenheit vorbeylassen sie pflichtmäßig nach Kräften zu verbreiten dieses sind wir als Deutsche, dem gelehrten Erfinder schuldig.

Möchte ich doch meinen Zweck nicht verfehlt haben, und zur Belohnung die Erfüllung meines Wunsches sehen. Berlin, den 1ten September 1797.

Grüson.

Vorerinnerung der Zusätze welche sich bey der von Fontana besorgten neuen lateinischen Ausgabe von Eulers Differenzialrechnung findet.

Der Druck dieses Werks, war beynahe geendet, als der berühmte Joh. Albert Euler, Sohn unsers Verfassers, und geheimer Sekretär der Petersburgischen Akademie uns in Begleitung eines Schreibens, an den Professor der höhern Mathematik, Georg Fontana, der ihm dazu aufgefodert hatte, die noch nicht bekannte aber vollständig ausgearbeitete Abhandlung seines großen Vaters, schickte, deren Titel folgender ist: Beleuchtungen der letztern Capitel, meiner Differenzialrechnung, von den inexplicabeln Funktionen.

C'est avec bien de plaisir (sagt H. Joh. Albert in diesem Briefe, aus Petersburg vom 18ten Dezember, des nächstverflossenen Jahres 1787), que je vous envoie la copie ci-jointe du mémoire de feu mon Père sur les Fonctions inexplicables, que votre ami et eleve souhaite de faire entrer dans lá nouvelle edition qu'il va publier du calcul différentiel. Je vous l'aurois èxpédié plutot sans la grande difficulté &c. Es ist diese aber eine, von den 183 hinterlassenen Dissertationen, welche der unsterbliche Leonhard, der Petersburger Akademie, bey seinem Tode zurückließ, und sie in ihren Commentarien herauszugeben, verordnete.

Nichts konnte sich für uns erwünschteres ereignen, als daß diese neue Ausgabe, des Euler-schen

schen Werks, theils zu so gelegener Zeit, theils mit einem so vortreflichen Zusatz, vermehret ward, und nicht minder zur Ehre Berlins, gereichet. Wir besorgten daher sogleich, den Druck der Dissertation selbst, damit die Anmerkungen, welche derselben folgen, gleich einer geringern Kost, auf die herrlichsten Mahlzeiten, mit Nachsicht aufgenommen werden möchten. Hiermit empfehlen wir dem geneigten Leser, unsere Bemühung die aus der besten Absicht herrührt.

Beleuchtungen
der letztern Kapitel meiner Differenzialrechnung.

Von den inexplicabeln Funktionen.

1.

Da dieses Argument, welches in Ansehung der Analysis, gänzlich neu ist, noch niemals deutlich genung, zergliedert worden ist, so habe ich beschloßen, dasselbe mit größerem Fleiß zu behandeln, und alle Momente, aus denen es entspringt, aus den ersten Prinzipien herzuleiten, wobey es vorzüglich, von großem Nutzen seyn wird, wenn man sich geschikter Zeichen, im Kalkul bedienet. Wäre demnach irgend eine Reihe gegeben, deren Glieder mit den Anzeigern 1, 2, 3, 4 2c. übereinkommen, so werde ich selbige mit diesen Zeichen (1), (2), (3), (4), 2c. darstellen. Es würde daher, das Hauptglied dieser Reihe, welche mit dem unendlichen Anzeiger x, übereintrift, bey mir (x) seyn, und also für jede Reihe, x die Funktion derselben, die ich als gänzlich bekannt annehme, und zwar dergestalt gegen einander gehalten, daß die Werthe derselben, nicht allein für ganze Zahlen, statt x angenommen, sondern auch für gebrochene, und selbst für irrationale gelten können.

2. Ferner bedeutet $\Sigma : x$, ein summatorisches Glied eben dieser Reihe. welches die Summe der Glieder, vom ersten an, bis zum letzten (x) ausgedrückt, so daß $\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots\ldots\ldots + (x)$,

deren sämmtliche Werthe also, so oft x eine ganze positive Zahl wird, aus dieser Reihe, sogleich dargestellt werden können, und zwar wie hier folgt:

$$\Sigma : 1 = (1)$$
$$\Sigma : 2 = (1) + (2)$$
$$\Sigma : 3 = (1) + (2) + (3)$$
$$\Sigma : 4 = (1) + (2) + (3) + (4) \text{ u. s. w.}$$

Daß dergleichen Werthe aber, auch unter der Formel $\Sigma : x$ vorgestellt werden könnten, wenn man statt x gebrochene, oder irrationale Zahlen, sowohl positive, als negative gebrauchet, erhellet dieserhalb keineswegs; daher rechne ich diese Werthe, zu einem besondern Geschlecht von Funktionen, welche ich die inexplicabeln genannt habe. Auf welche Art nun dergleichen, durch analytische Formeln bestimmter Funktionen, ausgedrükt werden können, will ich hier zuförderst darthun.

3. Dieses ganze Geschäft aber, kann am bequemsten, durch stetige Differenzen, aus einer vorgegebenen Reihe hergeleitet, verrichtet werden, wenn nehmlich jedes Glied, vom folgenden abgezogen wird; hieraus entstehet sodann, die Reihe der ersten Differenzen, auf gleiche Weise die der andern, dritten, vierten u. s. f. Alle diese Differenzen, bezeichne ich auf folgende Art.

Ite Differenzen	IIte Differenzen	IIIte Differenzen
$(2) - (1) = \Delta 1$	$\Delta 2 - \Delta 1 = \Delta^2 1$	$\Delta^2 2 - \Delta^2 1 = \Delta^3 1$
$(3) - (2) = \Delta 2$	$\Delta 3 - \Delta 2 = \Delta^2 2$	$\Delta^2 3 - \Delta^2 2 = \Delta^3 2$
$(4) - (3) = \Delta 3$	$\Delta 4 - \Delta 3 = \Delta^2 3$	$\Delta^2 4 - \Delta^2 3 = \Delta^3 3$
$(5) - (4) = \Delta 4$	$\Delta 5 - \Delta 4 = \Delta^2 4$	$\Delta^2 5 - \Delta^2 4 = \Delta^3 4$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

4. Nach=

4. Nachdem diese Bezeichnung festgesetzt worden, konnten die einzelnen Glieder der Reihe aus dem ersten (1) und dessen Differenzen Δ^{1}, $\Delta^2 1$, $\Delta^3 1$, $\Delta^4 1$, ꝛc. ausgedrükt werden. Denn da $(2) = (1) + \Delta 1$, und $\Delta 2 = \Delta 1 + \Delta^2 1$, auch $(3) = (2) + \Delta 2$, so wird $(3) = (1) + 2 \Delta 1 + \Delta^2 1$, daher fließt hieraus schon jene Gleichheit $\Delta 3 = \Delta 1 + 2 \Delta^2 1 + \Delta^3 1$. Weil jetzt $(4) = (3) + \Delta 3$, so wird man haben $(4) = (1) + 3 \Delta 1 + 3 \Delta^2 1 + \Delta^3 1$. Hieraus fließt ferner: $\Delta 4 = \Delta 1 + 3 \Delta^2 1 + 3 \Delta^3 1 + \Delta^4 1$, da auch $(5) = (4) + \Delta 4$, so wird $(5) = (1) + 4 \Delta 1 + 6 \Delta^2 1 + 4 \Delta^3 1 + \Delta^4 1$, und so ferner seyn. Aus der Bildung dieser Formeln selbst erhellet, daß hier eben die Coeffizienten vorkommen, die man in der Binomialpotenz erhält, deren Exponent um die Einheit kleiner, als der Index des vorgegebenen Gliedes ist, folglich wird

$$(n) = (1) + \frac{n-1}{1} \Delta 1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \Delta^2 1 + \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} \Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$$

5. Vermehren wir hier diese Zahl n, um die Einheit, so bekommen wir $(n+1) = (1) + \frac{n}{1} \Delta 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \Delta^2 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$ Da nun bereits dieser letzte Ausdruck, dasjenige Glied ausdrückt, welches von dem ersten, durch n Stuffen x entfernt ist, so wird auf ähnliche Weise, auch das Glied, welches vom zweyten, durch eben so viele Stuffen vorgerückt ist $(n+2)$ aus dem andern, und dessen Differenzen, bestimmt; denn es wird:

$(n+2) = (2) + \frac{n}{1}\Delta 2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 2 +$ ꝛc. seyn. Auf eben diese Art ist es augenscheinlich, daß auch seyn werde $(n+3) = (3) + \frac{n}{1}\Delta 3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 3 +$ ꝛc.

$(n+4) = (4) + \frac{n}{1} \cdot \Delta 4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 4 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 4 +$ ꝛc.

6. Hieraus ist klar, daß wir das allgemeine Glied (x) unserer Reihe, aus dem ersten und dessen Differenzen, auf folgende Art erklären können:

$$(x) = (1) + \frac{x-1}{1}\Delta 1 + \frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-2}{2}\Delta^2 1 + \frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-3}{3}\Delta^3 1 + \text{ꝛc.}$$

daher wird das, dem letzten folgende Glied $(x+1)$, dieses seyn:

$$(x+1) = (1) + \frac{x}{1}\Delta 1 + \frac{x}{1} \cdot \frac{x-2}{1}\Delta^2 1 + \frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-3}{3} \cdot \Delta^3 1 + \text{ꝛc.};$$

Da dieser Ausdruck im folgenden am öftern vorkommt, so wollen wir der Kürze wegen, folgende Bezeichnung einführen:

$$\frac{x}{1} = x$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} = x'$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} = x''$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{x-2}{3} \cdot \frac{x-3}{4} = x''' \text{ u. s. w.}$$

nach deren Anwendung, werden wir folgende Gleichungen haben:

$$(x+1) = (1) + x\,\Delta\,1 + x'\,\Delta^2\,1 + x''\,\Delta^3\,1 + \text{ꝛc.}$$
$$(x+2) = (2) + x\,\Delta\,2 + x'\,\Delta^2\,2 + x''\,\Delta^3\,2 + \text{ꝛc.}$$
$$(x+3) = (3) + x\,\Delta\,3 + x'\,\Delta^2\,3 + x''\,\Delta^3\,3 + \text{ꝛc.}$$
$$(x+4) = (4) + x\,\Delta\,4 + x'\,\Delta^2\,4 + x''\,\Delta^3\,4 + \text{ꝛc.}$$

\- - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - -

$$(x+n) = (n) + x\,\Delta\,n + x'\,\Delta^2\,n + x''\,\Delta^3\,n + \text{ꝛc.}$$

7. Hierauf werden auch die Summen, jeglicher Glieder unserer Reihe, aus dem alleinigen ersten Gliede, und dessen Differenzen, bestimmt werden können, wie folgendes Täfelchen zeigt:

$$\begin{array}{ll}
 & \Sigma : 1 = (1) \\
\text{add:} & \underline{(2) = (1) + \Delta\,1} \\
 & \Sigma : 2 = 2\,(1) + \Delta\,1 \\
 & \underline{(3) = (1) + 2\,\Delta\,1 + \Delta^2\,1} \\
 & \Sigma : 3 = 3\,(1) + 3\,\Delta\,1 + \Delta^2\,1 \\
 & \underline{(4) = (1) + 3\,\Delta\,1 + 3\,\Delta^2\,1 + \Delta^3\,1} \\
 & \Sigma : 4 = 4\,(1) + 6\,\Delta\,1 + 4\,\Delta^2\,1 + \Delta^3\,1 \\
 & \underline{(5) = (1) + 4\,\Delta\,1 + 6\,\Delta^2\,1 + \Delta^3\,1\ \Delta^4\,1} \\
 & \Sigma : 5 = 5\,(1) + 10\,\Delta\,1 + 10\,\Delta^2\,1 + 5\,\Delta^3\,1 + \Delta^4\,1
\end{array}$$

Hier

Hier ist wiederum augenscheinlich, daß die Coeffizienten, eben diejenigen sind, welche in der Binominalpotenz, in eben dieser Ordnung vorkommen.

8. Nach dem wir nun, die vorhin festgesetzten Bezeichnungen in Gebrauch aufgenommen haben, so wollen wir auch dieses summatorische Glied unserer Reihe $\Sigma : x$, im Ausdruk gelten lassen. Es wird daher

$\Sigma : x = x(1) + x' \Delta 1 + x'' \Delta^2 1 + x''' \Delta^3 1 +$ rc. seyn, welche Form schon dergestalt verglichen ist, so daß statt x, nicht nur ganze Zahlen, sondern auch gebrochene, und selbst irrationale, sie mögen positive oder negative seyn, angenommen werden können, in welchen Fällen, dieser Ausdruck sogar, bis ins Unendliche fortgehen würde, wofern nicht die vorgegebene Reihe, endlich bis auf verschwindende Differenzen leitete. Diese Reihen pflegt man algebraische zu nennen, wo man in diesen Fällen, nicht auf inexplicable Funktionen gelangt. Unterdessen gewährt dieser, für das summatorische Glied, erfundene Ausdruk, wenn er ins Unendliche fortgeführet wird, keine Unterstützung, in sofern Differenziationen, oder Summationen anzuordnen sind; weshalb man es hierbey beruhen läßt, gleichwie, wenigstens in gewissen Fällen, das erfundene, summatorische Glied in andere Formen übergehen kann, welche weder der Differenziation, noch Integration widersprechen; auch gehören hieher, alle diejenigen Hülfsmittel, welche ich bey der Differenzialrechnung, weitläuftiger gezeigt habe, deren Erfindung nicht wenig verworren war. Auf folgende Art aber, wird das ganze Verfahren sehr leicht seyn.

9. Zu dem vorhin erfundenen Ausdruck, des summatorischen Gliedes, $\Sigma : x$, addire man mehrere, unter folgender Gestalt enthaltene Formeln.

$$(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + \text{ꝛc.} \ldots - (x+n)$$

obgleich deren Summen gleich Null sind, so drücken dennoch alle, so viel deren auch sind, wenn sie mit $\Sigma : x$, in eins verbunden sind, das summatorische Glied aus. Man summire also für n nach und nach, alle Zahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc. so wird der ganze Ausdruck, nach den Vertikalcolumnen, mit den einzelnen Werthen x, x', x'', ꝛc. übereinstimmend, auf folgende Weise angeordnet werden:

Allgemeiner Ausdruck für das summatorische Glied.

$$
\begin{array}{l}
x(1) + x'\Delta 1 + x''\Delta^2 1 + x'''\Delta^3 1 + \text{ꝛc.} \\
(1) + x\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x''\Delta^3 1 + x'''\Delta^4 1 + \text{ꝛc.} \ldots - (x+1) \\
(2) + x\Delta 2 + x'\Delta^2 2 + x''\Delta^3 2 + x'''\Delta^4 2 + \text{ꝛc.} \ldots - (x+2) \\
(3) + x\Delta 3 + x'\Delta^2 3 + x''\Delta^3 3 + x'''\Delta^4 3 + \text{ꝛc.} \ldots - (x+3) \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\
(n) + x\Delta n + x'\Delta^2 n + x''\Delta^3 n + x'''\Delta^4 n + \text{ꝛc.} \ldots - (x+n)
\end{array}
$$

10. Obschon die Wahrheit dieses Ausdrucks, keinem Zweifel mehr unterworfen ist, so wird es demohngeachtet nicht wenig helfen, denselben aus der Form selbst, bestätiget zu haben. Man sammle nehmlich, unter eine Summe die einzelnen Vertikalcolumnen, so wird die erste folgende seyn:

$$(1) + (2) + (3) + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + (n) = \Sigma : n$$

Die andere Columne giebt:

$$x[(1) + \Delta 1 + \Delta 2 + \Delta 3 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \Delta n]$$

Wenn nun

$$\Delta 1 = (2) - (1);\ \Delta 2 = (3) - (2);\ \Delta 3 = (4) - (3);\ \text{ꝛc.}^{*}$$

so wird diese ganze Summe verkürzt in $x\,(n+1)$.

Auf

* $\Delta n = (n+1) - (n)$.

Auf gleiche Weise, wird auch die Summe der 3ten Columne seyn

$$x' [\Delta 1 + \Delta^2 1 + \Delta^2 2 + \Delta^2 3 + \Delta^2 4 + \ldots\ldots + \Delta^2 n]$$

und weil

$$\Delta^2 1 = \Delta 2 - \Delta 1 ; \Delta^2 2 = \Delta 3 - \Delta 2 \ldots\ldots \Delta^2 n = \Delta (n + 1) - \Delta n.$$

so wird jene Summe zusammengezogen $= x' \Delta (n + 1)$. Auf eben diese Art erhellet, daß die Summe der vierten Columne, seyn wird $x'' \Delta^2 (n + 1)$ die der 5ten $= x''' \Delta^3 (n + 1)$, u. s. f. Die Summe der abzuziehenden letzten Columne ist:

$$(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + \ldots\ldots + (x + n) = \Sigma : (x + n) - \Sigma : x.$$

11. Die Summe aller mittlern Vertikalcolumnen, außer der ersten und letzten, ist also wie wir gesehen haben,

$$x(n + 1) + x' \Delta (n + 1) + x'' \Delta^2 (n + 1) + x''' \Delta^3 (n + 1) + \text{rc.}$$

Da aber $x (1) + x' \Delta 1 + x'' \Delta^2 1 + x''' \Delta^3 1 + \text{rc.} = \Sigma : x$, wenn nun die einzelnen Glieder, um die Zahl n vermehret worden, so wird die Summe unserer Reihe seyn:

$$x (n + 1) + x' \Delta (n + 1) + x'' \Delta^2 (n + 1) + \text{rc.} = \Sigma : (x + n) - \Sigma : n;$$

folglich ist die Summe aller Columnen, außer der letzten $= \Sigma : (x + n)$; wenn daher die Summe der letzten Columne, $\Sigma : (x + n) - \Sigma : x$, abgezogen wird, so bleibt die Summe der ganzen Figur $= \Sigma : x$, übrig, nehmlich das verlangte summatorische Glied.

12. Am wunderbahrsten wird es scheinen, daß wir den Werth der Formel $\Sigma : x$, welche durch eine einfache Reihe, genugsam ausgedrückt werden kann, durch eine Nebenreihe unzählbarer Reihen, dargestellt, und

so

so verdeckt gegeben haben; allein bald wird der Gebrauch, dieser äußerst verwickelten Formel, deutlicher werden, wenn wir die Zahl der Horizontalreihe, sogar bis ins Unendliche fortsetzen, welches geschehen wird, wenn wir für n, eine unendliche Zahl annehmen, wie jetzt deutlicher erkläret werden soll.

13. Bezeichnet man also, durch n eine unendliche große Zahl, so wird die Summe der zweiten Vertikalcolumne, welche x (n + 1) ist, das unendlichste Glied unserer Reihe enthalten, und sollte dasselbe auch verschwinden, so werden um so viel mehr, die Summen der folgenden Vertikalcolumnen, sich verlieren, weshalb es in diesem Fall genung ist, bloß die erste Columne mit der letzten, im Calcul beybehalten zu haben. Verschwinden hingegen die unendlichsten Glieder nicht, sondern wären sie unter sich gleich, alsdenn ist es erlaubt, die dritte Columne, nebst den folgenden wegzuwerfen. Sollten aber die zweiten, unendlichen Differenzen verschwinden, so müssen die drey ersten Vertikalcolumnen, in der Rechnung beybehalten werden, und eben so auch vier, wenn erst die dritten, unendlichen Differenzen verschwinden. Vermöge der Unterscheidung dieser Reihen, wollen wir dieselben, in folgende Arten vertheilen.

Erste Art der Reihen

deren unendlichste Glieder verschwinden.

14. So oft also solche Reihen vorgegeben werden, so ist es genung, für deren summatorisches Glied, die Glieder der ersten und letzten Vertikalcolumne, im Cal-

Calcul beyzubehalten, denn auf diese Weise erhalten wir für das summatorische Glied folgenden Ausdruck:

$$\Sigma : x = (1) + (2) + (3) + (4) + \text{2c.}$$
$$-(x+1)-(x+2)-(x+3)-(x+4)-\text{2c.}$$

welcher unendlich fortgehet, und zwar um so mehr, je kleiner der Index war; verschwindet derselbe aber, so geht die ganze Reihe, in Null über, oder sie wird $\Sigma : 0 = 0$, welche mit der Natur der Sache, vollkommen zutrifft; denn wenn die Zahl der zu addirenden Glieder, Null ist, so muß auch nothwendig, die Summe Null seyn.

15. Wenn aber der Index x, eine sehr große Zahl ist, so nähert sich gewiß diese Reihe auch, nur wenig dahin, weshalb jederzeit dergleichen Fälle, auf einem kleinern Index gebracht werden können; denn da
$\Sigma : (x + 1) = \Sigma : x + (x + 1)$ so wird auf gleiche Art
$\Sigma : (x + 2) = \Sigma : x + (x + 1) + (x + 2)$ seyn, und also überhaupt, wenn i eine ganze Zahl bedeutet

$$\Sigma : (x + i) = \Sigma : x + (x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + i)$$

Wenn man daher die Summe der Glieder $x + i$ begehret, so ist es hinreichend, die Summe x der Glieder, d. i. $\Sigma : x$ erfunden zu haben. Auf diese Art, können dergleichen Fragen alle, auf die Fälle eingeschränkt werden, in welchen der Index x, sogar um die Einheit vermindert ist, in welchem Falle, die für $\Sigma : x$, vorhin gegebene Reihe, sich außerordentlich der Verschwindung nähert.

16. Eine dergleichen Reduktion, ist dann zuförderst nothwendig, wenn der Index x, eine negative Zahl ist; denn, wenn

$$\Sigma : x = \Sigma : (x - 1) + (x), \text{ so wird}$$
$$\Sigma : (x - 1) = \Sigma : x - (x) \text{ seyn, eben so auch}$$
$$\Sigma : (x - 2) = \Sigma : x - (x) - (x - 1), \text{ und}$$
$$\Sigma : (x - 3) = \Sigma : x - (x) - (x - 2) \text{ und über-}$$

haupt

$$\Sigma : (x - i) = \Sigma : x - (x) - (x - 1) \ldots - (x - i + 1)$$

und auf diese Art, als so viel die negative Zahl $x - i$, größer war, kann die Auflösung jederzeit auf $\Sigma : x$, gebracht werden, so daß $x < 1$ sey.

Beyspiel.

17. Es sey folgende Reihe gegeben:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x} = \Sigma : x$$

Es wird die Summe der Glieder x, in dieser harmonischen Reihe verlangt, wofür x jede, ganze positive Zahl, angenommen werden, und zwar hat alsdann für die Fälle, wo x keine ganze positive Zahl ist, die ganze Sache, keine weitern Schwierigkeiten. Es wird daher in diesem Fall, nach vorhin gegebener Form seyn:

$$\Sigma : x = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{etc.} \\ - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+4} \text{ etc.} \end{array} \right.$$

werden diese beyden Reihen, in eine zusammengezogen

$$\Sigma : x = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+2)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{etc.}$$

so ist alsdann, die Summe der Reihe, von selbst klar, so oft nehmlich x, eine ganze positive Zahl war; also auch:

Wenn

$$
\begin{array}{l|l}
x=1 & 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\text{ꝛc.} \\[2ex]
x=2 & 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{4.6}+\text{ꝛc.} \\[2ex]
x=3 & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{1.4}+\frac{3}{2.5}+\frac{3}{3.6}+\frac{3}{4.7}+\text{ꝛc.} \\[2ex]
x=4 & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{1.5}+\frac{4}{2.6}+\frac{4}{3.7}+\frac{4}{4.8}+\text{ꝛc.} \\
\text{u. s. w.} &
\end{array}
$$

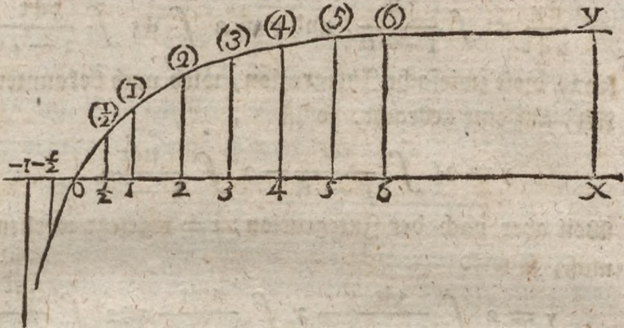
welches die merkwürdigsten Reihen sind.

18. Damit dieses deutlicher verstanden werde, wollen wir eine Curve bilden, deren Absciſſen $o\,x = x$, mit der Applikate $x\,y = y = \Sigma : x$ übereintreffen, so daß nach denen, über der Axe $o\,x$, angenommenen Intervallen, welche um die Einheit gleich, 0, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4, ꝛc. die folgenden Applikaten seyn mögen.

$$
\begin{array}{l}
1 \ldots\ldots (1) = 1 \\
2 \ldots\ldots (2) = 1 + \tfrac{1}{2} \\
3 \ldots\ldots (4) = 1 + \tfrac{2}{2} + \tfrac{1}{3} \\
4 \ldots\ldots (4) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\ \text{ꝛc.}
\end{array}
$$

also wird die Gleichung unter je zween Coordinaten, seyn:

$$y = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{2(x+x)} + \frac{x}{3(x+3)} + \frac{x}{4(x+4)} + \text{ꝛc.}$$



Aus dieser Gleichung können also, alle mittlern Applikaten erkläret werden, und so ist es hinreichend für x, die um die Einheit kleinern Werthe, angenommen zu haben. Daher wenn die Applikate $\frac{1}{2} \,..\, (\frac{1}{2})$ der Abscisse $0 \,..\, \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ verlanget würde, so findet man

$$\tfrac{1}{2} \,..\, (\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.9} + \frac{1}{5.11} + \text{ꝛc}$$

deren Summe auf diese Art, durch Logarithmen bezeichnet werden könnte. Man bilde diese Reihe:

$$y = \frac{t^3}{1.3} + \frac{t^5}{2.5} + \frac{t^7}{3.7} + \frac{t^9}{4.9} + \text{ꝛc.}$$

welche, wenn $t = 1$ angenommen wird, den gesuchten Werth giebt. Durchs Differenziiren aber, bekommt man:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{tt}{1} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} + \frac{t^8}{4} + \text{ꝛc.}$$

und wenn von neuem Different: wird

$$\frac{ddy}{2\,dt^2} = t + t^3 + t^5 + t^7 + \text{ꝛc.} = \frac{t}{1-tt}.$$

Daher wird wechselsweise,

$$\frac{dy}{2dt} = \int \frac{tdt}{1 - tt}, \text{ und } y = 2 \int dt \int \frac{tdt}{1 - tt}$$

seyn, diese zwiefache Integration, wird nach bekannter Art, auf eine gebracht, so ist

$$y = 2t \int \frac{tdt}{1 - tt} - 2 \int \frac{ttdt}{1 - dt}.$$

Weil aber nach der Integration, $t = 1$ gesetzt werden muß, so wird

$$y = 2 \int \frac{tdt}{1 - tt} - 2 \int \frac{ttdt}{1 - tt} = 2 \int \frac{tdt}{1 + t}$$

seyn; deswegen wird durchs Integriren $y = 2t - 2l(t + 1)$ entstehen, in unserem Fall aber $y = 2 - 2l2$, dessen Werth der nächstwahre 0,61370564 ist.

19. Nachdem nun die Applikate der Abscisse, die mit $\frac{1}{2}$ übereinkommt, erfunden worden, nehmlich $\Sigma : \frac{1}{2} = 2 - 2l2$, so können aus derselben, folgende durch die oben gegebenen Formeln, leicht abgeleitet werden, als:

$$\Sigma : (1 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \Sigma : \tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma : (2 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \Sigma : \tfrac{1}{2}$$
$$\Sigma : (3 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{7} + \Sigma : \tfrac{1}{2} \text{ rc.}$$

Damit nun auch die vorhergehenden Applikaten, die in der Figur nicht ausgedrückt sind, aus der Formel $\Sigma : (x - i)$ bestimmt werden können, welche wir fanden $\Sigma : (x - i) = \Sigma : x - (x) - (x - 1) - (x - 2) \ldots - (x - i + 1)$ weil in unserem Fall $x = \frac{1}{2}$, so wird die Applikate $\Sigma : (-\frac{1}{2}) = \Sigma : \frac{1}{2} - 2 = -2l2$, und zwar negativ seyn, welche sogar, wenn $x = -1$ genommen wird, unendlich ist. Die unendliche aber, entspringet auch aus den Fällen $x = -2$, $x = -3$, $x = -4$ rc. innerhalb diesen Intervallen aber, wird

$\Sigma : -$

$$\Sigma : -\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) = \Sigma : \tfrac{1}{2} - 2 + 2$$

$$\Sigma : -\left(2 + \tfrac{1}{2}\right) = \Sigma : \tfrac{1}{2} - 2 + 2 - \tfrac{2}{3}$$

$$\Sigma : -\left(3 + \tfrac{1}{2}\right) = \Sigma : \tfrac{1}{2} - 2 + 2 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5}$$ seyn ꝛc.

20. Differenziiren wir jetzt, die für die Applikate y, erfundene Reihe so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \text{ꝛc.}$$

Daher drückt diese Reihe, die Tangente des Winkels aus, unter welchem das Element der Curve, in y sich zur Axe neiget; woraus erhellet daß diese Neigung, für die unendliche Abcisse, null werde, das ist, der Zug der Curve, gehet in Unendlichen parallel mit der Axe, folglich wenn $x = 0$ angenommen wird, so bekömmt man die Neigung der Curve selbst, bis zum Unendlichen =

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6} = 1,644,$$

daher der Winkel $= 58°, 42'$. Wird aber $x = 1$ angenommen, so ist $\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6} - 1 = 0,644$, wo die Neigung $= 32°, 48'$ seyn wird. Fährt man nun noch weiter fort, so nimmt die Neigung beständig ab.

21. Gehet man aber rückwärts, bis zu den negativen Abcissen, so haben wir bereits oben gesehen, daß unter denen Fällen, unter welchen $x = -1$, oder $x = -2$, oder $x = -3$, die Applikate unendlich groß werden, und eben so viele Curven, Assymptoten machen. Jetzt aber wird es sich zeigen, daß an diesen Orten $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird, und daselbst die Neigung der Curve 90°, oder die Tangenten perpendikular nach der Axe gehen werden.

den. Weil nun überdies, die für $\frac{dy}{dx}$ gefundene Reihe, allezeit eine positive Summe hat, so folgt hieraus, daß alle Theile zur Rechten der Curve, anwachsen, die zur Linken hingegen, abnehmen.

22. Eben so auch werden wir, die Integration anwenden, und die Fläche der Curve, vom Anfang bis zum Applikate xy, bezeichnen können. Denn aus der erstern Form, zu welcher wir geleitet würden, folgt unmittelbar:

$$\int y\,dx = -\,l(1+x)^{x} \overset{+}{-}\, l(2+x)^{\frac{1}{2}x} \overset{+}{-}\, l(3+x)^{\frac{1}{3}x} \overset{+\ \text{2c.}}{-\ \text{2c.}}$$ + der Const. welche immer dergestallt bestimmt werden muß, daß in dem Fall $x = 0$, die ganze Fläche verschwindet, daher sie richtig folgendermaaßen auszudrüken ist:

$$\int y\,dx = -\,l(1+x^{x} \overset{+}{-}\, l(1+\tfrac{1}{2}x)^{\frac{1}{2}x} \overset{+}{-}\, l(1+\tfrac{1}{3}x)^{\frac{1}{3}x} \overset{+\ \text{2c.}}{-\ \text{2c.}}$$

Da nun

$$l\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \text{2c.} - \text{2c.}$$

so kann der obere Ausdruck, durch folgende Reihen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\int y\,dx = {} & \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} - \text{2c.}\\ & + \frac{x^2}{2.4} - \frac{x^3}{3.8} + \frac{x^4}{4.16} - \frac{x^5}{5.32} + \frac{x^6}{6.64} - \text{2c.}\\ & + \frac{x^2}{2.9} - \frac{x^3}{3.27} + \frac{x^4}{4.81} - \frac{x^5}{5.243} + \frac{x^6}{6.729} - \text{2c.}\\ & + \frac{x^2}{2.16} - \frac{x^3}{3.64} + \frac{x^4}{4.256} - \frac{x^5}{5.1224} + \frac{x^6}{6.4896} - \text{2c.}\end{aligned}$$

23. Reh-

23. Nehmen wir nun alle diese Reihen, vertikal zusammen, so bekommen wir:

$$\begin{aligned}\int y\,dx = & \tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{ꝛc.}\right) = + 0{,}822467.x^2 \\ & - \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{243} + \text{ꝛc.}\right) = - 0{,}400685.x^3 \\ & + \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{81} + \tfrac{1}{256} + \tfrac{1}{625} + \text{ꝛc.}\right) = + 0{,}270581.x^4 \\ & - \tfrac{1}{5}x^5\left(1 + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{243} + \tfrac{1}{1224} + \quad + \text{ꝛc.}\right) = - 0{,}207385.x^5\end{aligned}$$

Nun nehme man $x = 1$ an, damit die Fläche o1 (1) herauskomme, und weil die hier gegebenen Dezimalbrüche, sich nur wenig nähern, so bemerke man in jeder Reihe, wo die Zeichen abwechseln, nehmlich:

$$S = a - b + c - d + e - \text{ꝛc.}$$

daß die Summe, sich durch fortgehende Differenzen, so ausdrücken lassen:

$$S = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}\Delta a + \tfrac{1}{8}\Delta^2 a - \tfrac{1}{16}\Delta^3 a + \text{ꝛc.};$$

alsdann kann durch Hülfe der Regel, die Rechnung folgendermaaßen eingerichtet werden:

	$-\Delta$	$+\Delta^2$	$-\Delta^3$
a) 0,822467	0,421782	0,291678	0,224770
b) 0,400685	0,130104	0,066908	0,041540
c) 0,270581	0,063169	0,025368	0,013047
d) 0,207385	0,037828	0,012321	0,005355
e) 0,169557	0,025507	0,006966	0,002600
f) 0,144050	0,018541	0,004366	0,001426
g) 0,125509	0,014175	0,002940	
h) 0,111334	0,011235		
i) 0,100099			

$+\Delta^4$	$-\Delta^5$	$+\Delta^6$	$-\Delta^7$	$+\Delta^8$	
0,183230	0,154737	0,133936	0,118072	0,105564	ꝛc.
0,028493	0,020801	0,015864	0,012508		
0,007692	0,004973	0,003356			
0,002755	0,001581				
0,001174					

24. Von diesen Columnen, deren erste aus der Differenzialrechnung Cap. VI. Theil II. Seite 365 *) erkläret worden ist, geben die obern Zahlen das erste Glied a nebst seinen stetigen Differenzen, die andern aber in absteigender Linie, bringen das Glied b, nebst seinen Differenzen, und die dritten das Glied c, nebst seinen Differenzen. Da nun die obern Glieder, nur wenig convergiren, so nehmen wir die zwey ersten $a - b$ jetzt wirklich zusammen verbunden, und dann wird $a - b = 0,\ 421782$ seyn: Die Summe der folgenden aber $c - d + e - f +$ ꝛc.

$$= \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{4} \Delta c + \tfrac{1}{8} \Delta^2 c - \tfrac{1}{16} \Delta^3 c + \text{ꝛc.}$$

Verfahren wir nun in der Rechnung, nach dem gegebenen Gesetz, so wird

$$\begin{array}{rl}
\tfrac{1}{2} c & = 0,\ 135290 \\
- \tfrac{1}{4} \Delta c & = 0,\ 015799 \\
+ \tfrac{1}{8} \Delta^2 c & = 0,\ 003171 \\
- \tfrac{1}{16} \Delta^3 c & = 0,\ 000815 \\
+ \tfrac{1}{32} \Delta^4 c & = 0,\ 000220 \\
- \tfrac{1}{64} \Delta^5 c & = 0,\ 000077 \\
+ \tfrac{1}{128} \Delta^6 c & = 0,\ 000026 \\
\text{und folgenden} & = \underline{0,\ 000010} \\
\text{Summa} & = 0,\ 155408 \\
a - b & = \underline{0,\ 421782} \\
\text{Fläche} & = 0,\ 577190
\end{array}$$

Ich hoffe, daß eine weitere Entwickelung, dieser so merkwürdigen krummen Linie, niemanden mißfällig ist, besonders da die Gleichung für diese Curve, zu den inexplicabeln Funktionen gehört, und ich glaube, daß eine Ueberschreitung unseres Ziels, um eines besonderen Falls willen, nicht unangenehm seyn wird.

Zweyte

*) Der deutschen Uebersetzung, S. 174.

Zweyte Art der Reihen
deren erste Differenzen im Unendlichen verschwinden.

25, Zu dieser Art, gehören alle Reihen, deren unendlichsten Glieder unter sich, gleich sind. Damit wir also das summatorische Glied dieser Reihen $\Sigma : x$, ausdrücken können, so ist nichts anders nöthig, als daß die Glieder der zweyten Vertikalcolumne der allgemeinen Form, welche § 9. dargestellt, zum Ausdruck der vorhergehenden Reihe, hinzugefügt werden, deren höchstes Glied besonders anzugeben ist; und weil die einzelnen Horizontalcolumnen, schon aus drey Gliedern bestehen, so wird das begehrte, summatorische Glied $\Sigma : x$, in folgender dreyfachen Reihe erörtert:

$$\begin{array}{llllll} & & + & (1) - & (2) + & (3) - (4) \\ \Sigma : x = x\,(1) & + & x & \Delta 1 + x & \Delta 2 + x & \Delta 3 + x\,\Delta 4 \\ & & - & (x+1) - & (x+2) - & (x+3) - (x+4) \end{array} \Bigg\} \text{ ꝛc.}$$

welche Form wegen $\Delta 1 = (2) - (1)$; $\Delta 2 = (3) - (2)$; $\Delta 3 = (4) - (3)$; ꝛc. in diese umgeändert werden kann:

$$\begin{array}{llll} & + \overline{1 - x}\,(1) & + \overline{1 - x}\,(2) & + \overline{1 - x}\,(3) \\ \Sigma : x = x\,(1) & + x \quad (2) & + \quad x \quad (3) & + \quad x \quad (4) \\ & - (x - 1) & - (x + 2) & - (x + 3) \end{array} \Bigg\} \text{ ꝛc.}$$

Diese Reihe convergirt um desto mehr, je kleiner man x annimmt. Oben ist bereits gelehret worden, daß alle Fälle, dahin reduciret werden können, in welchen x ein Bruch sey, der um die Einheit kleiner ist.

26. Nun wollen wir den allereinfachsten Fall, zuerst erwägen, in welchem alle Glieder der Reihe, unter sich gleich sind, nehmlich $(x) = a$; denn es ergiebt sich von selbst, daß deren summatorisches Glied $a\,x$ sey, dessen Werth unser Ausdruck, jetzt darthun wird.

Denn es wird $\Sigma\, x = x\, a$ seyn:

27. Jetzt erwäge man auch den Fall, wo $(x) = \frac{x+1}{x}$, so daß unsere Reihe $\Sigma : x = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \ldots + \frac{x+1}{x}$ sey; davon die unendlichsten Glieder, alle um die Einheit äquiret werden müssen. Folglich wird uns unsere Formel geben

$$\Sigma : x = 2x \left.\begin{array}{llllll} +\, \overline{1-x} & \frac{2}{1} & +\, \overline{1-x} & \frac{3}{2} & +\, \overline{1-x} & \frac{4}{3} \\ +\, x & \frac{3}{2} & +\, x & \frac{4}{3} & +\, x & \frac{5}{4} \\ & \frac{(x+2)}{x+1} & - & \frac{(x+3)}{x+2} & - & \frac{(x+4)}{x+3} \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

Hieraus erhellet, wenn $x = 1$ betrachtet wird, $\Sigma : x = \frac{2}{1}$ sey; nimmt man aber $x = 2$, so wird:

$$\Sigma : x = 4 \left.\begin{array}{llllll} - 1. & \frac{2}{1} & - 1. & \frac{3}{2} & - 1. & \frac{3}{4} \\ + 2. & \frac{3}{2} & + 2. & \frac{4}{3} & + 2. & \frac{5}{4} \\ - & \frac{4}{3} & - & \frac{5}{4} & - & \frac{6}{5} \end{array}\right\} \text{ꝛc.} = 4 - \frac{2}{1} + \frac{1}{2}$$

28. Dieser Fall aber, kann leicht auf vorhergehende Art, reduciret werden; denn da das Hauptglied $(x) = \frac{x+1}{x}$, so wird dasselbe in Theile aufgelöset, geben $(x) = 1 + \frac{1}{x}$; dieserwegen bilde man zwey Reihen, und zwar die erste aus dem allgemeinen Gliede 1, die andere aber aus dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{x}$; werden sodann, diese beyden Reihen vereint genommen, so geben sie die verlangte Summe $\Sigma : x$; es wird nehmlich

$$\Sigma : x = \begin{array}{l} 1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots+x \\ \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{x} \end{array}$$ seyn.

Da nun bereits, der obern Reihe Summe x ist, die

unter

untere hingegen, durch die erste Art, entwickelt werden kann, so bekommt man:

$$\Sigma : x = \begin{array}{l} x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} \\ - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} - \text{etc.} \end{array}$$

obgleich dieser Ausdruck, viel einfacher ist, als der vorherhergehende, so liefert derselbe nichts desto weniger, gleichen Werth, so daß wenn $x = \frac{1}{2}$ genommen wird, so giebt uns der erstere Ausdruk

$$\Sigma : x = 1 \left.\begin{array}{l} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5} \\ - \frac{5}{3} - \frac{7}{5} - \frac{9}{7} - \frac{11}{9} \end{array}\right\} \text{etc.}$$

Werden nun diese Glieder nach der Ordnung verbunden, so wird

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.12} + \frac{1}{7.24} + \frac{1}{9.40} + \frac{1}{11.60} + \text{etc.}$$

dessen Ordnung, aus folgender Form deutlicher seyn wird:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1.3.4} + \frac{1}{2.5.6} + \frac{1}{3.7.8} + \frac{1}{4.9.10} + \frac{1}{5.11.12} + \text{etc.}$$

Der andre Ausdruck aber, giebt folgende Reihen:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} \begin{array}{l} + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.} \\ - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{9} - \text{etc.} \end{array}$$

welche zusammen geben werden:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{4.9} + \text{etc.}$$

29. Aus diesem Beyspiele erhellet, daß die aus der zweiten Art, hergeleitete Reihe, mehr als die letztere aus der erstern, convergire, weshalb es der Mühe werth seyn wird, die Convergenz der erstern Reihe, auf das aufmerksamste zu erwägen. Es entstehet nehmlich,

lich, jedes Glied dieser Reihe, aus diesen drey Theilen:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} - \frac{2n+3}{2n+1},$$

da sich selbige nun zunächst aufheben, so wird die Summe der beyden erstern, am nächsten der dritten gleich seyn, woher diese bemerkenswerthe Formel erfolgt:

$$\frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1} = \frac{2(n+3)}{2n+1},$$

welches um so näher der Wahrheit kommt, je größer die Zahl n war. Ziehet man nun beiderseits 2 ab, so wird zunächst

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{4}{2n+1} \text{ seyn.}$$

30. Eine solche Reduction, kann jederzeit nach der ersten Art statt finden, wenn die vorgegebene Reihe, zuletzt mit einem endlichen Werth convergirt; wenn aber die Glieder der Reihe, zuletzt unendlich zunehmen, so kann diese Reduction nicht weiter statt haben; und man muß sich nothwendig, an die zweite Art halten. Ein solcher Fall ist, wo $(x) = \sqrt{x}$, denn wenn n eine unendliche Zahl bezeichnet, so werden je zwey benachbarte unendliche Glieder, $\sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1}$ seyn, deren Differenz $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist, und also verschwindet. In diesem Fall also, ist unsere Reihe

$$\Sigma : x = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \ldots\ldots + \sqrt{x}$$

folglich erhalten wir nach den gegebenen Vorschriften, diesen Ausdruck:

$$\Sigma : x = x + \left.\begin{array}{llll} + \overline{1-x}\sqrt{1} & + \overline{1-x}\sqrt{2} & + \overline{1-x}\sqrt{3} \\ \quad x\sqrt{2} + & \quad x\sqrt{3} + & \quad x\sqrt{4} \\ -\sqrt{\overline{x+1}} & -\sqrt{\overline{x+2}} & -\sqrt{\overline{x+3}} \end{array}\right\} \text{rc.}$$

wie sehr nun diese Reihe convergirt, sehen wir in dem Falle $x = \frac{1}{2}$, also wird

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} + \left.\begin{array}{llll} + \frac{1}{2}\sqrt{1} & + \frac{1}{2}\sqrt{2} & + \frac{1}{2}\sqrt{3} & + \frac{1}{2}\sqrt{4} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & + \frac{1}{2}\sqrt{3} & + \frac{1}{2}\sqrt{4} & + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{5}{2}} & -\sqrt{\frac{7}{2}} & -\sqrt{\frac{9}{2}} \end{array}\right\} \text{rc. seyn}$$

davon jedes Glied $\frac{1}{2}\sqrt{n} + \frac{1}{2}\sqrt{n+1} - \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$ seyn wird, daß also um so mehr, dem Nichts näher kommen muß, je größer die Zahl n war, weshalb am nächsten $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2(2n+1)}$. Werden hiervon die Quadrate genommen, so erhalten wir

$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} = 2\,(2n+1)$, also auch

$2\sqrt{n(n+1)} = 2n+1$. Nimmt man hiervon, von neuem die Quadrate, so wird $4nn + 4n = 4nn + 4n + 1$, welches Verhältniß also, der Gleichheit am nächsten kommt. Uebrigens verdient hier bemerkt zu werden, daß die wahren Werthe, der statt x angenommenen Brüche, dergestallt transcendent seyn werden, so daß man sie durch keine algebraischen Formeln, auszudrücken, vermögend ist. Also wird auch jeder für x angenommene Werth, zu einem besondern Geschlecht, von Transcendenten gehören.

31. Ehe wir diese Art verlassen, wollen wir noch einen äußerst wichtigen Lehrsatz, die Convergenz der Formeln betreffend, beyfügen, der noch weit allgemeiner ist, als das, was wir kurz vorher angeführet haben.

Lehrsatz.

Folgende Gleichheit:

$$(\beta - \alpha)\sqrt[\mu]{n^\nu} + \alpha\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu} = \beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

nähert sich um so mehr der Wahrheit, je größer die Zahl n genommen, und zugleich je kleiner der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ war, wenn nur der Exponent $\frac{\nu}{\mu}$, um die Einheit kleiner ist. Es kommt aber diese Gleichheit, wenn ν negativ genommen wird

$$\frac{\beta - \alpha}{\sqrt[\mu]{n^\nu}} + \frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} = \frac{\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n+1\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}}$$

der Wahrheit, ohne die letztere Bedingung, um so mehr näher, je größer die Zahl n, und je kleiner der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ war. Dieselbe kann auch, unter eben diesen Bedingungen, auf Logarithmen übergetragen werden, und zwar, daß theils:

$$(\beta - \alpha)\, l\, n + \alpha\, l\,(n+1) = \beta\, l\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

als $\dfrac{\beta-\alpha}{l\, n} + \dfrac{\alpha}{l\,(n+1)} = \dfrac{\beta}{l\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ sey.

Beweis.

32. Dieser Lehrsatz folgt aus der, für diese Art gegebene allgemeine Auflösung, deren jedes Glied, aus diesen Theilen $\overline{1-x}\,(n) + x\,(n+1) - (n+x)$ bestehet, und um so kleiner wird, je größer man die Zahl n nimmt, die aus dem Bruche x, welcher um die Einheit kleiner ist, entstehet. Setzen wir nun $x = \frac{\alpha}{\beta}$ und $(x) = \sqrt[\mu]{x^{\nu}}$, als auch $(n) = \sqrt[\mu]{n^{\nu}}$, so ist nothwendig daß $\frac{\mu}{\nu} < 1$ sey, weil sonst die unendlichsten Glieder, keine verschwindenden Differenzen haben würden. Diese Substitutionen aber, liefern jene erstern Formeln, welche im Lehrsatz gegeben würden. Wenn man hingegen den Bruch $\frac{\mu}{\nu}$, negativ annimmt, so wird die vorgegebene Reihe, alsdann in der ersten Art enthalten seyn, und also werden die unendlichsten Glieder selbst, in Nichts übergehen.

33. Damit nun der Sinn dieses Lehrsatzes, deutlicher verstanden werde, so muß bemerkt werden, daß diese Formeln genau, in vier Fällen mit der Wahrheit übereinkommen; nehmlich 1.) wenn $\alpha = 0$, 2.) wenn $\alpha = \beta$; 3.) wenn $\nu = 0$; 4) wenn für n eine unendliche Zahl gesetzt wird; außerdem aber giebt es noch, einen 5ten Fall, wo in der erstern Form $\mu = \nu$ oder $\sqrt[\mu]{n^{\nu}} = n$ ist.

Dritte

Dritte Art der Reihen,

deren zweyte Differenzen erst im Unendlichen verschwinden.

34. Dies ereignet sich, so oft die unendlichsten Glieder, eine arithmetische Progression machen, daher man die vorhin für $\Sigma : x$, in der erstern Art gefundene Formel, auf diesen Fall anwenden kann, wenn noch überdies, die einzelnen Glieder der dritten Vertikalcolumne, hinzugefüget werden. Auf diese Weise kann das summatorische Glied, folgendermaaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{rl} & x(1) + (1) + (2) + (3) \ldots\ldots + (n) \\ & + x\Delta 1 + x\Delta 2 + x\Delta 3 \ldots\ldots + x\Delta n \\ \Sigma : x = & x'\Delta 1 + x'\Delta^2 1 + x'\Delta^2 2 + x'\Delta^2 3 \ldots\ldots + x'\Delta^2 n \\ & -(x+1) - (x+2) - (x+3) \ldots\ldots - (x+n) \end{array}$$

35. Jetzt wollen wir diesen Ausdruck, in eine zum Gebrauch mehr bequemere Form, verwandeln, und zwar statt x, den Werth desselben $\frac{xx - x}{2}$ schreiben, alsdann aber wegen $\Delta n = (n+1) - (n)$ und $\Delta^2 n = (n+2) - 2(n+1) + (n)$ setzen. Wenn nun diese Werthe substituiret worden, so gehet die letztere Columne, der vorhergehenden Formel, in diese Form über:

$$(n) + x(n+1) + \frac{xx - x}{2}(n+2)$$

$$-x(n) - \overline{xx - x}\,(n+1)$$

$$+ \frac{xx - x}{2}(n)$$ diese Glieder zusammengenommen, geben:

$$\frac{xx - 3x + 2}{2}(n) - \overline{xx - 2x}\,(n+1) + \frac{xx - x}{2}(n+2).$$

Se-

Setzen wir nun der Kürze wegen, $\frac{xx-3x+2}{2}=p$; $xx-2x=q$ und $\frac{xx-x}{2}=r$, so kann das verlangte summatorische Glied, in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\Sigma : x = {} & \frac{3x-xx}{2}l(1) + \frac{xx-x}{2}(2) \\ & + p(1) - q(2) + r(3) - (x+1) \\ & + p(2) - q(3) + r(4) - (x+3) \\ & + p(3) - q(4) + r(5) - (x+3)\end{aligned}$$

daher convergirt diese Reihe außerordentlich.

36. Hieraus können wir nun einen neuen Lehrsatz, der dem vorhergehenden ähnlich, aber weit deutlicher ist, herleiten, indem wir wie vorher $x=\frac{\alpha}{\beta}$, $(n)=\sqrt[\mu]{n^\nu}$ setzen, wo es schon genug ist, wenn der Exponent $\frac{\nu}{\mu}$ zwiefach kleiner; um so mehr aber stehet es frey, diesen Exponenten als negativ zu nehmen. Dieser Lehrsatz lautet:

Diese Gleichheit

$$(\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu}-(2\alpha\alpha-4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}+(\alpha\alpha-\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}=2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}$$

wird der Wahrheit desto näher kommen, je größer die Zahl n, und der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$, nur wenig von der Einheit unterschieden, und $\frac{\nu}{\mu}$

zwie-

zwiefach kleiner ist. Wird aber μ negativ genommen, so ist selbige weit genauer.

$$\frac{\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{n^\nu}}-\frac{2\alpha\alpha-4\alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}}+\frac{\alpha\alpha-\alpha\beta}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}}=\frac{2\beta\beta}{\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}}$$

Auch können statt der Wurzelformeln, Logarithmen angenommen werden.

37. Die Wahrheit dieses Lehrsatzes, wird auch durch folgende vier Fälle bestätiget: I. $\alpha = 0$; II. $\alpha = \beta$; III. $\nu = 0$. IV. $n = \infty$. Welches überdies ebenfalls geschiehet, wenn nach der erstern Form, entweder $\nu = \mu$, oder $\nu = 2\mu$, so daß $\sqrt[\mu]{n^\nu}$ entweder n oder nn. Folglich bekommen wir sechs Fälle, nach denen dieser Lehrsatz, nicht im geringsten von der Wahrheit abweicht, woraus leicht zu verstehen ist, daß unter allen übrigen Fällen, der Irrthum nicht merklich seyn könne.

38. Diesen Lehrsatz können wir noch allgemeiner machen, indem wir statt n, $\frac{n}{c}$ setzen, und allenthalben mit der gehörigen Potenz c, multipliziren, wodurch die Brüche gehoben werden. Auf diese Art wird die erstere Form seyn:

$$(\alpha\alpha-3\alpha\beta+2\beta\beta)\sqrt[\mu]{n^\nu}-(2\alpha\alpha-4\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu}$$
$$+(\alpha\alpha-\alpha\beta)\sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu}=2\beta\beta\sqrt[\mu]{\left(n+\frac{\alpha c}{\beta}\right)^\nu}$$

Die andere Form aber, weicht von dieser nicht ab, als in sofern, daß die Wurzelausdrücke in den Nenner übergehen, welches auch von den Logarithmen zu verstehen ist.

39. Diesen Lehrsatz wollen wir, mit einem Beyspiel erläutern. Es sey also $\alpha = 1$ und $\beta = 2$, so werden die

die in jenem Lehrsatz enthaltenen Gleichheiten, folgende seyn.

$$3\sqrt[\mu]{n^\nu} + 6\sqrt[\mu]{(n+c)^\nu} - \sqrt[\mu]{(n+2c)^\nu} = 8\sqrt[\mu]{(n+\tfrac{1}{2}c)^\nu}$$

$$\frac{3}{\sqrt[x]{n^\nu}} + \frac{6}{\sqrt[\mu]{(n+1)^\nu}} - \frac{1}{\sqrt[\mu]{(n+2)^\nu}} = \frac{8}{\sqrt[\mu]{(n+\tfrac{1}{2})^\nu}}$$

Wenden wir die erstere Form, auf Logarithmen an, so wird $3\,l\,n + 6\,l\,(n+c) - l\,(n+2c) = 8\,l\,(n+\tfrac{1}{2}c)$; nun sey $n = 10$ und $c = 2$, so bekommt man:

$$3\,l\,10 + 6\,l\,12 - l\,14 = 8\,l\,11.$$

Nach geschehener Entwickelung erfolgt:

$$
\begin{aligned}
3\,l\,10 &= 3{,}0000000\\
6\,l\,12 &= \underline{6{,}4750872}\\
&\ 9\ 4750827\\
l\,14 &= 1{,}1461280\\
8\,l\,11 &= \underline{8{,}3311416}\\
&\ 9{,}4772696
\end{aligned}
$$

Also ist die Differenz von $l\,14 + 8\,l\,11$ u. $3\,l\,10 + 6\,l\,12 =$ 0,0021824, die um so kleiner herauskommen würde, wenn man der Zahl n, einen größern Werth beylegen wollte.

40. In Ansehung des summatorischen Gliedes, der vorgegebenen Reihe, verdient zuförderst bemerkt zu werden, daß sowohl die Differenziation, als Integration leicht geschehen könne, wenn ein veränderlicher Index x, angenommen wird, wie dies bereits in der ersten Art, hinlänglich gezeigt worden ist, wo das summatorische Glied $\Sigma : x$, als eine Applikate einer Curve betrachtet ward, indem der Index x, sich auf die Abscisse bezog, weshalb ich in der Differenzialrechnung, vorzüglich die inexplicabeln Funktionen, erforscht habe.

41.

41. Aus der allgemeinen Formel, für das gegebene summatorische Glied $\Sigma : x$, wollen wir hier ebenfalls, den Fall der harmonischen Reihe entwickeln, woselbst

$$\Sigma : x = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x} \text{ ist,}$$

und den Werth derselben, für den Index $x = \frac{1}{2}$ suchen, also wegen

$$(x) = \frac{1}{x};\ p = \tfrac{3}{8};\ q = -\tfrac{3}{4};\ r = -\tfrac{1}{8}$$

erhalten wir:

$$\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{8} - \tfrac{1}{16} \left.\begin{array}{l} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{32} \\ + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{16} + \tfrac{3}{20} \\ \\ - \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{48} \\ - \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{7} - \tfrac{2}{9} \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

$$\text{oder } 8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2} \left.\begin{array}{l} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{3}{3} + \tfrac{3}{4} \\ + \tfrac{6}{2} + \tfrac{6}{3} + \tfrac{6}{4} + \tfrac{6}{5} \\ \\ - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} \\ - \tfrac{16}{3} - \tfrac{16}{5} - \tfrac{16}{7} - \tfrac{16}{9} \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

Ziehen wir die einzelnen Columnen, in eine Summe zusammen, so wird $8\,\Sigma : \frac{1}{2} = \frac{6}{1.2.3.5} + \frac{6}{2.3.4.5} + \frac{6}{3.4.5.7} + \frac{6}{4.5.6.9} +$ seyn und zwar convergirt diese Reihe, weit mehr, als diejenige, welche wir in der zweyten Art fanden.

42. Wenn wir aber die Glieder, nicht zusammen ziehen, sondern nur die verbinden, welche einerley Nenner haben, und zwar mit Weglassung der untersten Reihe, so bekommen wir

8 Σ:

$$8\,\Sigma : \tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{1} + \tfrac{9}{2} \begin{array}{l} + 8\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{ꝛc.}\right. \\ - 16\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{ꝛc.}\right) \end{array}$$

oder schreiben wir, statt der obern Reihe

$$16\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12} + \text{ꝛc.}\right)$$

so haben wir

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma : \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} = - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{11} + \text{ꝛc.}$$

addiren wir beyderseits

$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{ꝛc.}$ so wird

$\tfrac{1}{2}\,\Sigma : \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + l2 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$; folglich

$\Sigma : \tfrac{1}{2} = 2 - 2\,l2$ deren Werth vorzüglich, mit jenem übereinkommt, welcher in der ersten Art gegeben worden ist.

Supplement.

Von den inexplikabeln Funktionen der Form.

$$\pi : x = A\,.\,B\,.\,C\,.\,D\,.\,E\,.\,.\,.\,.\,.\,X.$$

1. Hier sind die Faktoren $A\,.\,B\,.\,C\,.\,D$ ꝛc. Glieder einer gewissen Reihe, mit den Anzeigern 1, 2, 3, 4, ꝛc. übereinstimmend, und X das Glied, welches mit dem Index x übereintrifft; die Faktoren hingegen, welche den folgenden Anzeigern $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; ꝛc. entsprochen, will ich mit X', X'', X''' ꝛc. bezeichnen. Hieraus erhellet sogleich, daß $\pi : (x + 1) = X' \,.\, \pi : x$, und $\pi : (x + 2) = X' \,.\, X'' \,.\, \pi : x$, seyn wird, und so ferner. Die vorhergehenden aber, werden $\pi : (x - 1) = \dfrac{\pi : x}{X'}$ seyn, ꝛc. Hieraus ist zu ersehen, daß es hinreichend sey, wenn man nur diese Formeln, für die um die Einheiten kleineren Werthe, von x, bezeichnet.

2. So oft nun x, eine ganze positive Zahl war, so ergeben sich die Werthe von $\pi : x$ von selbst. Es wird nemlich

$$\pi : 1 = A;\ \pi : 2 = AB;\ \pi : 3 = ABC;\ \text{ꝛc.}$$

Wenn aber x keine ganze, positive Zahl ist, so wird das Produkt, welches wir mit $\pi : x$ bezeichnen, eine inexplikable Funktion von x, wofern nicht etwan die Faktoren A, B, C, D ꝛc. so beschaffen wären, daß die vorhergehende, durch die nachfolgenden aufgehoben würden, so wie sich dies in dieser Form ereignet:

$$\pi : x = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{5} \cdot \ldots \ldots \frac{x}{x+1}$$

Wenn demnach $\pi : x = \frac{1}{x+1}$ bekannt geworden, oder auch in diesem Beyspiel:

$$\pi : x = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{15}{16} \cdot \tfrac{24}{25} \ldots \ldots \frac{xx+2x}{(x+1)^2};$$ so wird

$$\pi : 1 = \frac{3}{2.2};\ \pi : 2 = \tfrac{2}{3} = \frac{4}{2.3};\ \pi : 3 = \tfrac{5}{8} = \frac{5}{2.4}$$
$$\pi : 4 = \tfrac{3}{5} = \frac{6}{2.5};\ \pi : 5 = \frac{4}{2.6}$$

seyn, woraus erhellet, daß überhaupt $\pi : x = \frac{x+2}{2(x+1)}$ seyn werde.

3. Die inexplikabeln Fälle, mit Logarithmen hingegen, gehören zur vorhergehenden Dissertation; denn es wird

$$l\pi : x = lA + lB + lC \ldots . + lX$$ seyn,

also giebt diese Form, wenn sie mit jener abgehandelten verglichen wird, folgende Werthe:

$$\Sigma : x = l\pi : x;\ (1) = lA;\ (2) = lB;\ (3) = lC;\ \text{ꝛc.}$$

und

und $(x) = l\,X$, alsdann aber ist $(x + 1) = l\,X'$; $(x + 2) = l\,X''$; ꝛc., also können wir nach beobachteter Uebereinkunft, die bereits abgehandelten Arten, auf gegenwärtigen Fall anwenden.

Erste Art,

in der die Logarithmen der unendlichsten Faktoren verschwinden, oder diese Faktoren mit der Einheit äquiret worden.

4. Da wir also für diese Art, nach eingeführten Werthen erhalten:

$$l\,\pi : x = lA + lB + lC + lD + \text{ꝛc.}$$
$$- lX' - lX'' - lX''' - lX^{IV} - \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn wir bis auf Zahlen hinaufgehen,

$$\pi : x = \frac{A}{X'} \cdot \frac{B}{X''} \cdot \frac{C}{X'''} \cdot \frac{D}{X^{IV}} \cdot \text{ꝛc. seyn.}$$

weshalb hier keine Beyspiele gegeben werden, weil bereits mehrere in der Differenzialrechnung, sind entwickelt worden.

Zweyte Art,

in der die unendlichsten Faktoren unter sich, gleich sind.

5. Da die Logarithmen derselben, ebenfalls unter sich gleich seyn werden, so verschwinden auch alle ersten Differenzen, folglich wollen wir die §. 25. gefundene Form, hierauf anwenden, so wird:

$$l\pi : x = \left.\begin{array}{llll} & + \overline{1-x}\, lA & + \overline{1-x}\, lB & + \overline{1-x}\, lC \\ x lA + & x lB + & x lC + & x lD \\ - & lX' - & lX'' - & lX''' \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

und wenn man bis auf Zahlen hinaufgehet, so werden wir haben:

$$\pi : x = A^x \,.\, \frac{A^{1-x} B^x}{X'} \,.\, \frac{B^{1-x} C^x}{X''} \,.\, \frac{C^{1-x} D^x}{X'''} \,.\, \text{ꝛc.}$$

Dritte Art,

in der die unendlichsten Glieder, eine geometrische Progreßion ausmachen.

6. Da die Logarithmen dieser Glieder, eine geometrische Progreßion ausmachen, so verschwinden deren zweyte Differenzen. Damit wir nun den §. 35. gefundenen Ausdruck, auf diesen Fall anwenden können, so ist der Kürze wegen zu bemerken, das angesetzt war

$$p = \frac{xx - 3x + 2}{2};\; q = xx - 2x;\; \text{und } r = \frac{xx - x}{2}$$

daher wir erhalten

$$l\pi : x = \left.\begin{array}{l} \qquad\qquad + plA + plB + plC \\ \frac{3x - xx}{2} lA - qlB - qlC - qlD \\ \frac{xx - x}{2} lB + rlC + rlD + rlE \\ \qquad\qquad - lX' - lX'' - lX''' \end{array}\right\} \text{ꝛc.}$$

Setzen wir hier ferner Kürze halber,

$$\frac{xx - 3x}{2} = m, \text{ und } \frac{xx - x}{2} = n,$$

so werden wir, bis auf Zahlen aufsteigend, diesen Ausdruck erhalten:

$$z : x = \frac{B^n}{A^m} \cdot \frac{A^p C^r}{B^q X'} \cdot \frac{B^q D^r}{C^q X''} \cdot \frac{C^q E^r}{D^q X'''} \cdot \text{ꝛc.}$$

7. Auf diese Weise hoffe ich, die Lehre von den inexplikabeln Funktionen, welche in der Differenzialrechnung nicht genau, und deutlich genung auseinandergesetzt worden, fast gänzlich erschöpft zu haben, so daß man nichts weiter verlangen wird; welches um so nöthiger schien, da dies Argument bisher, noch von niemanden abgehandelt worden war, und von äußerster Wichtigkeit, bey Interpolierung der Reihen ist, auch hieraus die Symptome der krummen Linien zu erforschen waren, deren Applikate, durch inexplicable Funktionen, ausgedrückt werden.

Anmerkungen.

Anmerkung nach Cap. II. Theil I.

I.

Es sey die Differenzialgleichung $dy + yXdx = Zdx$ gegeben, in welcher X u. Z jede Funktion, der veränderlichen x ausdrücken, so ist bekannt, daß man die Integration dieser Gleichung, erhalten kann, wenn man $y = uz$ setzt, woraus $udz + zdu + uzXdx = Zdx$ entstehet, und wo durch einen geschickten Werth, der Größe u, oder z, zwey Glieder gleich Null gesetzt werden können. Wir wollen daher $zdu + uzXdx = 0$ annehmen, so wird durch die Division mit z, du

$+ uXdx = 0$ werden, folglich $\frac{du}{u} = -Xdx$; nimmt man hiervon das Integral, so kommt $lu = -\int Xdx$, d. i. $u = e^{-\int Xdx}$, wenn nehmlich e, gleich der Basis der hyperbolischen Logarithmen, angenommen wird. Wenn dies geschehen, so wird die gegebene Gleichung in $udz = Zdx$ umgekehrt, und man erhält $dz = \frac{Zdx}{u}$ und durchs Integriren $z = \int\frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, so wie endlich $y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$

2. Wenn diese Methode, fleißig erwogen wird, so wird daraus deutlich erhellen, daß man dieselbe mit glüklichem Erfolge, auf jene Differenzialgleichungen übertragen könne, welche eben diese Form, als vorhergehende Gleichung haben, vorausgesetzt, daß sie mit endlichen Differenzen, gegeben werden.

Es sey folgende Gleichung $\Delta y + My\Delta x = N\Delta x$, oder $\Delta y + My = N$ (wenn nehmlich Δx für die Einheit genommen wird) in welcher die Größen M und N, die Funktionen jeder veränderlichen x bezeichnen. Es sey zuerst $y = uz$, so wird nach dieser Hypothese endlicher Differenzen, $\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z$ seyn; und daher gehet diese Gleichung über in:

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Muz = N.$$

Gesetzt daß vor zwey Gliedern $z\Delta u + Muz = 0$, so entstehet $\Delta u + Mu = 0$, oder $\frac{\Delta u}{u} = -M$. Für

die

die Integration dieser Gleichung, nach dieser Hypothese der endlichen Differenz Δu, nehme ich $u = e^t$, so erhalte ich $u + \Delta u = e^{t + \Delta t}$, und $\Delta u = e^t (e^{\Delta t} - 1)$, woraus $\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = - M$ oder $e^{\Delta t} = 1 - M$ wird; vermittelst der Logarithmen $\Delta t = l(1 - M)$ und hierauf erfolgter Integration, bekommen wir $t = \Sigma l(1 - M)$. Es ist aber, wie aus der Analysis bekannt, das Aggregat aus den Logarithmen mehrerer Zahlen, gleich dem Logarithmus des Produkts, aller dieser Zahlen; wenn wir also durch $\varpi(1 - M)$ das stetige Produkt, aller in dieser Formel $1 - M$ enthaltenen Größen, ausdrücken, so entstehet $t = l\varpi(1 - M)$ und deshalb $u = e^t = \varpi(1 - M)$. Durch den bereits genannten beyden, in Nichts übergehenden Gliedern, wird die obere Gleichung in $u\Delta z + \Delta u \Delta z = N$ verändert, und man erhält $\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$, so wie durch das Integriren $z = \Sigma \frac{N}{u + \Delta u}$. Da aber bereits $u = \varpi(1 - M)$ und wenn das nach M nächstfolgende Glied, durch M' bezeichnet wird, so kommt $u + \Delta u = \varpi(1 - M')$; also auch $z = \Sigma \frac{N}{\varpi(1 - M')}$, und weil $y = zu$, so wird

$$y = \varpi(1 - M) \Sigma \frac{N}{\varpi(1 - M')},$$

oder wenn irgend eine beständige Größe A, addiret wird, so erhalten wir:

$$y = \pi(1 - M)\left(A + \Sigma \frac{N}{\pi(1 - M')}\right).$$

Beyspiele.

Es sey die Gleichung $y + (x + 1)\Delta y + a(2x + 1) = 0$ gegeben, man soll den besondern Werth von y finden.

Diese Gleichung auf die allgemeine Form $\Delta y + My = N$ reducirt, giebt

$$\Delta y + \frac{1}{x+1} y = - \frac{a(2x+1)}{x+1}$$

folglich bekommen wir

$$M = \frac{1}{x+1}; \; N = -\frac{a(2x+1)}{x+1}; \; 1 - M = \frac{x}{x+1};$$

demnach wird das Produkt aller Werthe der Formel $\frac{x}{x+1}$, die man erhält, wenn in derselben statt x, nach und nach $x - 1, x - 2, \ldots 3, 2, 1$ substituiret werden; nehmlich $\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \ldots \frac{1}{2}$, seyn, also wird das durch $\pi(1-M)$ bezeichnete, $= \frac{1}{x}$; jener hingegen durch $\pi(1 - M')$ ausgedrückte, $= \frac{1}{x+1}$

Folglich bekommt man, durch diese substituirten Werthe, in der Gleichung

$$y = \pi(1 - M)\left(A + \Sigma \frac{N}{\pi(1 - M')}\right)$$

$$y = \frac{1}{x}[A - \Sigma a(2x+1)] = \frac{A}{x} - 2a\frac{\Sigma x}{x} - a\frac{\Sigma 1}{x}.$$

Im §. 60. aber ward gefunden

$$\Sigma x^0 = \Sigma 1 = x, \text{ und } \Sigma x = \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x$$

also wird $y = \frac{A}{x} - ax$ seyn.

3. Nun sey die Gleichung $y' = Ry + T$ gegeben, in welcher y' ein Glied bezeichnet, welches in der Reihe der Größen y zunächst auf y folget: folglich weil $y' = y + \Delta y$, so gehet die Gleichung über in $\Delta y + (1 - R)y = T$. Wird diese Gleichung, mit der vorhergehenden verglichen, so kommt

$$1 - R = M;\ T = N,$$

Man erhält demnach für den Werth der Größe y, folgenden Ausdruck:

$$y = \star R\left(A + \Sigma \frac{T}{\star R'}\right)$$

Wenn R eine beständige Größe ist, so erhellet, daß die Größen $\star R$ und $\star R'$, nichts anders, als die Potenzen von R sind, deren Exponent mit der, in dieser Reihe y, den Ort oder Index bezeichnenden Zahl, der Glieder y und y', äquiret wird. Es sey also m diese Zahl, oder der Index des von y besetzten Orts, so daß y^m eben so viel als y' sey, so erhält man die Gleichung $y^m = R^m \left(A + \Sigma \frac{T}{R^{m+1}}\right)$. Ist T beständig, so wird $\Sigma \frac{T}{R^{m+1}} = T\Sigma \frac{1}{R^{m+1}}$, woselbst die durch $\frac{1}{R^{m+1}}$ dargestellten Glieder, eine geometrische Progression ausmachen, deren Summe sogleich gefun-

gefunden wird; diese Summe von $\frac{1}{R}$ anfangend, wird S genannt; nehmlich

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \ldots + \frac{1}{R^m} = S,$$

multiplizirt man mit R, so erhält man:

$$1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \ldots + \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}$$

Aus dieser Gleichung entstehet

$$S = \frac{R^m - 1}{R^m(R-1)};$$

und alsdann

$$y^m = R^m\left(A + T \cdot \frac{R^m - 1}{R^m(R-1)}\right), \text{ oder}$$

$$y^m = AR^m + T \cdot \frac{R^m - 1}{R - 1}.$$

Damit wir nun auch zeigen, daß durch den gefundenen Werth von y, allen Bedingungen der gegebenen Gleichung $y' = Ry + T$, oder $y^{m+1} = Ry^m + T$ Genüge geleistet wird, so ist nichts weiter nöthig, als die gefundene Formel, durch R zu multipliziren, und die Größe T zu addiren, wodurch man den Ausdruck

$$AR^{m+1} + T \cdot \frac{R^{m+1} - R}{R - 1} + T$$

bekommt, welcher auf

$$AR^{m+1} + T \cdot \frac{R^{m+1} - 1}{R - 1}$$

gebracht wird, und dieser ist in der That der Werth,

wel-

welcher die allgemeine Formel, für das Glied y^{m+1} gewähret.

4. Nach der nunmehr dargestellten Methode jede Differenzialgleichung, die aus endlichen Differenzen bestehet, zu integriren, welche unter der allgemeinen Form $\Delta y + My = N$ begriffen ist, ist bloß noch übrig, daß wir bis zur Integration anderer Gleichungen, die von eben derselben abhängen, fortschreiten. Es hat aber bereits d'Alembert, in den Memoiren der berlinischen Akademie bewiesen, daß alle Differenzialgleichungen, die aus den unendlich kleinen Differenzen dieser Form bestehen:

$$(A) \qquad y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Gd^3y}{dx^3} + \text{ꝛc.} = X.$$

wo A, B, C ꝛc. beständige Größen sind, und X eine jede Funktion von x ist, auf diese einfachere Gleichung,

$$z + \frac{Hdz}{dx} = V,$$

wo H beständig, und V eine Funktion von x ist, gebracht und verwandelt werden können. Diese Gleichung ist in der That, mit jener einerley, welche wir ebenfalls unter vorausgesetzten, endlichen Differenzen, zu integriren gelehret haben. Wenn also die d'Alembertsche Methode auch auf die Gleichungen endlicher Differenzen, angewendet werden kann, so ist es gleichfalls erlaubt, jede Gleichung, unter eben dieser Hypothese endlicher Differenzen, zu integriren, als:

$$y + A\Delta y + B\Delta\Delta y + C\Delta^3 y + \text{ꝛc.} = X,$$

und folglich auch die Gleichung dieser Form:

$$y' + Py'' + Qy''' \ldots + \text{ꝛc.} = X$$

welche

welche mit Recht, für eine allgemeine Formel, der wiederkehrenden Reihen, gehalten werden kann. Diese sinnreiche d'Alembertsche Methode, die man die Methode der unbestimmten Coeffizienten nennt, ist in dieser enthalten: man nimmt nehmlich:

$$\frac{dy}{dx} = p; \frac{dp}{dx} = q; \frac{dq}{dx} = r; \text{ꝛc.}$$

so entstehen die Gleichungen:

$$p - \frac{dy}{dx} = 0; q - \frac{dp}{dx} = 0; r \frac{dq}{dx} = 0; \text{ꝛc.}$$

Alsdann werden diese einzelnen Gleichungen, auf unbestimmte Coeffizienten a, b, c, ꝛc. gebracht, damit daraus entstehe:

$$ap - \frac{ady}{dx} = 0; bq - \frac{bdp}{dx} = 0; cr - \frac{cdq}{dx} = 0; \text{ꝛc.}$$

Diese letztern hingegen, werden zur Gleichung (A) addirt, die, wenn sie nicht über die Differenzen, der Veränderlichen y hinausgehet, nach erfolgten Substitutionen, in folgende verwandelt wird:

$$(B) \ldots y + (A + a)p + (B + b)q - \frac{ady}{dx} - \frac{bdp}{dx} + \frac{Cdq}{dx} = X.$$

Auf der ersten Seite dieser Gleichung, wollen wir jetzt den einen Theil

$$y + (A + a)p + (B + b)q$$

unter a gebracht annehmen, und ihn als ein Multiplum des Integrals, des andern Theils $ady + bdp - Cdq$ betrachten, oder welches eben so viel ist, als

$$dy + (A + a)\,dp + (B + b)\,dq = dy + \frac{bdp}{a} - \frac{Cdq}{a};$$

daher entspringen aus der Vergleichung, der einander entsprechenden Glieder, die Gleichheiten

A + a

$$A + a = \frac{b}{a}; B + b = -\frac{C}{a},$$

hieraus erhalten wir:

$$b = -\frac{C}{a} - B = Aa + a^2, \text{ und } a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung $a^3 + Aa^2 + Ba + C = 0$, geben drey verschiedene Werthe von a, welche den erforderlichen Bedingungen, gleichfalls Genüge leisten. Nun sey

$$y + (A + a)\, p + (B + b)\, q = z,$$

alsdenn verändere man die gefundene Gleichung (B) in

$$z - \frac{a\,dz}{dx} = X, \text{ oder } dz - \frac{z\,dx}{a} = -\frac{X\,dx}{a}$$

so werden wir nach geschehener Vergleichung, der Gleichung §. 1. $dy + yPdx = Zdx$ (wo zur Vermeidung der Weitschweifigkeit, X in P verändert wird), erhalten:

$$y = z;\ P = -\frac{1}{a};\ Z = -\frac{X}{a};\ e^{\int Pdx} =$$

$$e^{\int -\frac{dx}{a}} = e^{-\frac{x}{a}}, \text{ woraus alsdann folgt}$$

$$z = e^{\frac{x}{a}} \int \frac{-X\,dx}{a e^{\frac{x}{a}}}$$

Nun benenne ich a', a'', a''', als drey unterschiedene Werthe von a, und b', b'', b''', als andere Werthe von b, welche mit den erstern gleichnahmig sind; endlich Z', Z'', Z''' die Werthe der veränderlichen Größe z, welche durch die Stellen a', a'', a''' umfasset werden. Hieraus fließen folgende drey Gleichungen:

$$y + (A + a')\,p + (B + b')\,q = Z'$$
$$y + (A + a'')\,p + (B + b'')\,q = Z''$$
$$y + (A + a''')\,p + (B + b''')\,q = Z'''$$

Werden hierauf aus diesen drey Gleichungen, die Größen p und q eliminirt, so findet man den Werth von y, der in folgender Gleichung dargestellt wird:

$$y = FZ' + GZ'' + HZ'''$$

wo F, G, H, beständige Größen sind, die von jenen A, B, a', a'', 2c. abhangen.

5. Aus der bisher erwogenen Methode, erhellet deutlich, daß jede, aus weit mehrern Gliedern erwachsene Gleichung, als gegenwärtige:

$$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \frac{Dd^4y}{dx^4} + \frac{Ed^5y}{dx^5} = X$$

gleichfalls aufgelößt, und daraus erhalten werden können:

$$y = FZ' + GZ'' + HZ''' + JZ'''' + KZ''''',$$

wo die Größen Z', Z'', 2c. solche Funktionen von X u. x sind, so daß

$$Z = e^{\frac{x}{a}} \int \frac{-X\,dx}{ae^{\frac{x}{a}}}$$

wenn für a die fünf Wurzeln a', a'', a''', a'''', a''''', folgender Gleichung substituiret worden:

$$a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0.$$

Allein weit nützlicher und vortheilhafter ist es, wenn diese Methode, auch auf Gleichungen angewendet wird, die aus endlichen Differenzen bestehen.

6. Es

6. Es sey also folgende, eine endliche Differenzialgleichung der fünften Ordnung, als

$$y + A\Delta y + B\Delta^2 y + C\Delta^3 y + D\Delta^4 y + E\Delta^5 y = X$$

man setze

$$\Delta y = p; \ \Delta p = q; \ \Delta q = r; \ \Delta r = s,$$

damit die Gleichheiten

$$p - \Delta y = 0; \ q - \Delta p = 0; \ r - \Delta q = 0; \ s - \Delta r = 0$$

herauskommen.

Diese mit den unbestimmten Coeffizienten a, b, c, d, multiplizirt, giebt

$$ap - a\Delta y = 0; \ bq - b\Delta p = 0; \ cr - c\Delta q = 0; \ ds - d\Delta r = 0.$$

Zu dieser vorgegebenen Gleichung, werden nach Substituirung, der für die Differenzen von y, angenommenen Werthe, die jetzt gefundenen Gleichheiten addiret; wenn dies geschehen, so entstehet die Gleichung:

$$y + (A + a)\,p + (B + b)\,q + (C + c)\,r + (D + d)\,s - a\Delta y - b\Delta p - c\Delta q - d\Delta r + E\Delta s = X$$

diesen Theil der Gleichung

$$y + (A + a)\,p + (B + b)\,q + (C + c)\,r + (D + d)\,s$$

setze man gleich dem andern differenzirt, Theile

$$a\Delta y + b\Delta p + c\Delta q + d\Delta r - E\Delta s$$

wenn man diesen durch $-a$ dividiret, so wird

$$\Delta y + (A + a)\Delta p + (B + b)\Delta q + (C + c)\Delta r + (D + d)\Delta s =$$

$$\Delta y + \frac{b\Delta p}{a} + \frac{c\Delta q}{a} + \frac{d\Delta r}{a} - \frac{E\Delta s}{a}$$

daher kommen durch Vergleichung der homologen Glieder, diese Gleichheiten:

$$A + a = \frac{b}{a}; \ B + b = \frac{c}{a}; \ C + c = \frac{d}{a}; \ D + d = -\frac{E}{a},$$

aus denen, vermöge der gewöhnlichen Eliminirung, die Gleichung des fünften Grads entspringt:

$$a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = o;$$

Diese Wurzeln, geben fünf unterschiedene Werthe von a

$a', a'', a''', a'^{v}, a^{v}$. Nun nehme man

$$y + (A + a) p + (B + b) q + (C + c) r + (D + d) s = z$$

desgleichen

$$\Delta z = \Delta y + (A + a) \Delta p + (B + b) \Delta q + (C + c) \Delta r + (D + d) \Delta s =$$

$$\Delta y + \frac{b}{a} \Delta p + \frac{c}{a} \Delta q + \frac{d}{a} \Delta r - \frac{E}{a} \Delta s$$

woraus die Gleichung:

$z - a \Delta z = X$, das ist $\Delta z - \frac{z}{a} = - \frac{X}{a}$,

und zwar von eben der Form $\Delta y + My = N$ als die vorhergehende entstehet, (§. 2.) wo aus der Vergleichung der homologen Glieder,

$M = - \frac{1}{a}$; $N = - \frac{X}{a}$, und folglich $1 - M = \frac{1 + a}{a}$,

hergeleitet wird. Weshalb $z = \pi \left(\frac{1 + a}{a}\right)$ mal

$$\left(\text{Const.} + \Sigma \frac{- X}{a.\pi \left(\frac{1 + a}{a}\right)} \right) \text{ erfolgt.}$$

Und weil a beständig ist, so wird gefunden

$$z_m = \left(\frac{1 + a}{a}\right)^m \left(\text{Const.} - \Sigma \frac{X a^m}{(1 + a)^{m + 1}} \right)$$

hier bezeichnet m, wie vorher den Index des Orts, welcher von dem Gliede z, in der Reihe der Größen z, besetzt ist. Wenn X eine beständige Größe ist, so erhalten wir durch den Ausdruck der Summe, der geometrischen Progression.

$$\Sigma \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}$$

$$z^m = \left[\frac{1+a}{a}\right]^m \left(\text{Const.} - X \frac{(1+a)^m}{(1+a)^m} \cdot 1 a^{m-1} \right)$$

Da aber a fünf verschiedene Werthe a', a'', a''', $a^{\prime v}$, a^v besitzt, so entstehen, wenn diese Werthe, in der gefundenen Formel, an deren Stelle gesetzt werden, eben so viele Werthe, von Z^m, welche sämmtlich hinreichen: vermöge dieses durch Z', Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, Z^v bezeichneten, erhalten wir folgende fünf Gleichungen:

$$y+(A+a')p+(B+b')q+(C+c')r+(D+d')s=Z'$$
$$y+(A+a'')p+(B+b'')q+(C+c'')r+(D+d'')s=Z''$$
$$y+(A+a''')p+(B+b''')q+(C+c''')r+(D+d''')s=Z'''$$
$$y+(A+a^{\prime v})p+(B+b^{\prime v})q+(C+c^{\prime v})r+(D+d^{\prime v})s=Z^{\prime v}$$
$$y+(A+a^v)p+(B+b^v)q+(C+c^v)r+(D+d^v)s=Z^v$$

Alsdann werden hieraus, nach den bekannten Regeln, die Größen p, q, r, s eliminirt, worauf man zu der Gleichung dieser Form

$$y = FZ' + GZ'' + HZ''' + JZ^{\prime v} + KZ^v$$

gelangt, in welcher F, G, H, J, K beständige Größen sind, welche von den bekannten Größen, dieser Gleichungen abhängen,

7. Es sey folgende Gleichung gegeben:

$$y' + Ay'' + B''' + Cy^{\prime v} \ldots + \text{rc.} = X,$$

bey welcher y', y', y''', rc. Glieder bezeichnen, die auf einander in der Reihe der Größen y, zunächst folgen, so ist klar, daß

$y'' = y' + \Delta y'$

$y''' = y'' + \Delta y'' = y' + \Delta y' + \Delta(y' + \Delta y') = y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y'$

$y^{IV} = y''' + \Delta y''' = y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y' + \Delta(y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y')$

$= y' + 3\Delta y' + 3\Delta^2 y' + \Delta^3 y'$,

und so ferner von den übrigen. Hieraus ergiebt sich, daß man die gegebene Gleichung, auf die Form derer, welche wir vorhin untersucht haben, zurückbringen könne. Um aber desto leichter, und geschwinder, diese Gleichung auf die wiederkehrenden Reihen, anzuwenden, so ist es vortheilhaft, die Glieder y', y'', y''', rc. in verkehrter Ordnung zu betrachten, damit man erhalte $y'' + \Delta y'' = y'$; $y''' + \Delta y''' = y''$; $y^{IV} + \Delta y^{IV} = y'''$, rc. und die Exponenten $'$, $''$, $'''$, rc. die, die Entfernung jedes beliebigen Gliedes, vom letztern y' bezeichnen mögen. Man setze $y'' = p'$, so wird $y''' = p''$ seyn; es sey ferner $p'' = q'$, $p''' = q''$, $q'' = r'$, also auch $q''' = r'' = s'$. Hieraus entstehen die Gleichheiten $y'' = p'$; $y''' = q'$; $y^{IV} = r'$; $y^{V} = s'$; $y^{VI} = s''$. Wenn nun die Werthe, in der vorgegebenen Gleichung, an deren Stelle gesetzt werden, so gehet selbige in diese über:

$$(A) \ldots y' + Ap' + Bq' + Cr' + Ds' + Es'' = X.$$

Wenn nun die Gleichungen

$$p' - y'' = 0;\; q' - p'' = 0;\; r' - q'' = 0;\; s' - r'' = 0$$

mit den unbestimmten Coeffizienten a, b, c, d, einzeln multipliciret, und diese dem Gebrauch nach, zur Gleichung (A) hinzu addiret werden, so findet man folgende;

$$y' + (A + a)p' + (B + b)q' + (C + c)r' + (D + d)s' = X - ay'' - bp'' - cq'' - dr'' + Es''$$

Bey

Bey dem ersten Theil dieser Gleichung

$$y' + (A + a) p' + (B + b) q' + (C + c) r' + (D + d) s',$$

gehen die abwechselnden Glieder, in die nächst vorhergehenden über, so daß

$$y'' + (A + a) p' + (B + b) q'' + (C + c) r'' + (D + d) s''$$

wird; diese Größe setze man, gleich dem andern Theile, durch a dividirt, oder

$$y'' + \frac{b}{a} p'' + \frac{c}{a} q'' + \frac{d}{a} r'' - \frac{E}{a} s'',$$

so erhält man nach äquirten, homologen Coefficienten, die Gleichungen

$$A + a = \frac{b}{a};\ B + b = \frac{c}{a};\ C + c = \frac{d}{a};\ D + d = -\frac{E}{a},$$

aus denen, wie in der vorigen vom fünften Grade, die Gleichung:

$$a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = o$$

herausgebracht wird; deren Wurzeln durch a', a'', a''', a'^{v}, a^{v}, bezeichnet werden. Nimmt man nun

$$z^{I} = y^{I} + (A + a) p^{I} + (B + b) q^{I} + (C + c) r^{I} + (D + d) s^{I},$$

so gehet die vorgegebene Gleichung, in diese über: $z^{I} - az^{II} = X$, welche (wegen $z^{I} = z^{II} + \Delta z^{II}$) $\Delta z^{II} + (1 - a) z^{II} = X$ wird. Vergleicht man nun diese, mit der Gleichung §. 13. so entstehet

$$y = z^{II},\ R = a,\ T = X,$$

folglich wird sie wegen

$$z^m = a^m \left(\text{Const.} + \Sigma \frac{X}{a^{m+1}}\right)$$

wo m den Ort bezeichnet, der von dem Gliede z^m, in der Reihe derselben z eingenommen ward. Da aber anstatt a, durch Stellvertretungen, die einzelnen

Wurzeln a', a'' ꝛc., substituiret werden können, so folgt hieraus, daß fünf verschiedene Werthe der Größe z^m, welche durch Z', Z'', Z''', Z'^v, Z^v ausgedrückt sind, entspringen, und alsdann folgende fünf Gleichungen, hervorgebracht werden:

$$y^m + (A + a')\,p^m + (B + b')\,q^m + (C + c')\,r^m + (D + d')\,s^m = Z'$$

$$y^m + (A + a'')\,p^m + (B + b'')\,q^m + (C + c'')\,r^m + (D + d'')\,s^m = Z''$$

$$y^m + (A + a''')\,p^m + (B + b''')\,q^m + (C + c''')\,r^m + (D + d''')\,s^m = Z'''$$

$$y^m + (A + a'^v)\,p^m + (B + b'^v)\,q^m + (C + c'^v)\,r^m + (D + d'^v)\,s^m = Z'^v$$

$$y^m + (A + a^v)\,p^m + (B + b^v)\,q^m + (C + c^v)\,r^m + (D + d^v)\,s^m = Z^v$$

Wer-

Werden ferner die Größen p^m, q^m, r^m, s^m aus denselben eliminirt, so bekommt man die Formel:
$y^m = FZ' + GZ'' + HZ''' + JZ^{\prime v} + KZ^v$, worinnen F, G, H 2c. beständige sind, welche durch Vergleichung, eben so vieler Glieder der Reihe derselben y, bestimmt werden müssen.

8. Wenn X eine beständige Größe ist, so wird die (§. 7.) durch

$$\Sigma \frac{X}{a^{m+1}}$$

ausgedrückte Summe,

$$= X \frac{a^m - 1}{a^m (a - 1)},$$

und wenn die durch L benannte beständige Größe, der Integration, hinzu gefügt wird, so erlangen wir endlich

$$Z = L\, a^m + X \frac{a^m - 1}{a - 1},$$

woraus sogleich die Werthe Z', Z'', Z''', 2c. erhalten werden, wenn zum wenigsten statt a, die gefundenen Wurzeln a', a'', a''', 2c. substituiret werden.

9. Aus dem bisher gesagten, wird folgender, allgemeiner Lehrsatz abgeleitet:
In der Gleichung
$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} \ldots + 2c. = X$,
wo die Exponenten y derselben, die von y besetzten Oerter bezeichnen, so wie durch die gefundenen Wurzeln, a', a'', a''' 2c. der Gleichung

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + 2c. = 0,$$

erhält man überhaupt:

$$y^m = Fa'^m\left(\ast + \Sigma \frac{X}{a'^{m+1}}\right) + Ga''^m\left(\ast + \Sigma \frac{X}{a''^{m+1}}\right)$$

$$+ Ha'''^m\left(\ast + \Sigma \frac{X}{a'''^{m+1}}\right) + Ja^{\prime v m}\left(\ast + \Sigma \frac{X}{a^{\mathrm{IV}m+1}}\right) +$$

$$\text{rc.}$$

Wenn X eine beständige Größe war, so ergiebt sich die Gleichung:

$$y^m = \ast\,(Fa'^m + Ca''^m + Ha'''^m + Ja^{\prime v m} + Ka^{vm} + \text{rc.})$$

$$+ X\left[F\frac{a'^m - 1}{a' - 1} + G\frac{a''^m - 1}{a'' - 1} + H\frac{a'''^m - 1}{a'''' - 1} + J\frac{a^{\prime v m} - 1}{a^{\prime v} - 1}\right.$$

$$\left. + K\frac{a^{vm} - 1}{a^v - 1} + \text{rc.}\right]$$

War hingegen X = o, so konnte die beständige $\ast$, unterdrückt werden, und wir bekommen die einfachere Gleichung

$$y^m = Fa'^m + Ga''^m + Ha'''^m + Ja^{\prime v m} + Ka^{vm} + \text{rc.}$$

welche das allgemeine Glied der Reihe dererselben y giebt, nehmlich der Reihe

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4}\ \text{rc.} = o,$$

die in der That, nichts anders, als eine wiederkehrende Reihe, deren Beziehungs-Scale

$$-A - B - C - D - E - \text{rc. ist.}$$

10. Dies ist also die Theorie der wiederkehrenden Reihen, in Beziehung auf die Fundamente, der Differenzialrechnung, welche aus den reinsten Grundsätzen, geradezu hergenommen ist, indem sie vorher, auf gänzlich indirekten Methoden, und fremden Notionen, beruhete, die von weitem her abgeleitet waren.

Die=

Diese ganz vortrefliche Lehre, wollen wir wegen ihres großen Nutzens, und Gebrauchs in der gesammten Analysis, durch einige Beyspiele erläutern, und den Fähigkeiten der Anfänger angemessen, darstellen.

Erstes Beyspiel.

Es soll das allgemeine Glied einer wiederkehrenden Reihe, der zweiten Ordnung, $1 + 2u^2 + 2u^3 + 6u^4 + 10u^5 + 22u^6 + 42u^7 + 86u^8 +$ ꝛc. gefunden werden, welche aus der Entwickelung des Rationalbruches

$$\frac{1 - u}{1 - u - 2u}, \text{ entspringt.}$$

Aus der Benennung des allgemeinen Gliedes durch y'', der Zahlenreihe 1, 0, 2, 2, 6, 10 ꝛc. und den zwey Gliedern y', y, welche demselben y'' nächst vorhergehen, erhält man $y'' = y' + 2y$, wenn nemlich $1 + 2$ als Beziehungs-Scale vorhanden ist. Nun wird wegen $y' = y + \Delta y$, und $y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$, die Gleichung $y'' = y' + 2y$, in diese, $y + 2\Delta y + \Delta^2 y = 3y + \Delta y$ umgekehrt, woraus

(A) $\quad y - \frac{1}{2}\Delta y - \frac{1}{2}\Delta^2 y = 0$ entstehet.

Alsdann nehme man $\Delta y = p$, und nach erfolgter Multiplikation, mit dem unbestimmten Coeffizienten a; verbinde man die Gleichheit $ap - a\Delta y = 0$, diese addire man zur Gleichung (A) wenn p statt Δy und Δp statt $\Delta^2 y$ substituiret worden, so bekommt man hieraus, die Gleichung

(B) $\quad y + (a - \frac{1}{2})p - a\Delta y - \frac{1}{2}\Delta p = 0.$

Es

Es sey ferner, der Theil dieser Gleichung $y + (a - \frac{1}{2})p$, gleich dem Integral des andern Theils $- a \Delta y - \frac{1}{2} d p$, durch $- a$ dividirt, das ist, es sey

$$y + (a - \tfrac{1}{2})\, p = y + \frac{p}{2a}$$

daher erfolgt aus der Vergleichung der Glieder

$$a - \tfrac{1}{2} = \frac{1}{2a},$$

nemlich

$$a^2 - \frac{a}{2} - \tfrac{1}{2} = 0, \text{ ferner } a' = 1,\ a'' = \tfrac{1}{2}.$$

Setzt man nun $z = y + (a - \frac{1}{2})\, p$, so gehet die Gleichung (B) in $z - a \Delta z = 0$, oder $\Delta z - \frac{z}{a} = 0$, über, die, wenn sie mit jener (§. 3.) $\Delta y + (1 - R)\, y = T$, verglichen wird,

$T = 0$, $1 - R = - \frac{1}{a}$, oder $R = \frac{a+1}{a}$, $y = z$ giebt.

Folglich ist

$$z^m = R^m \left(A + \Sigma \frac{T}{R^{m+1}}\right) = \left(\frac{a'+1}{a'}\right)^m A = 2^m A,$$

und hinwiederum

$$z^m = \left[\frac{a''+1}{a''}\right]^m B = (-1)^m B.$$

Es ist aber $z^m = y^m + (a' - \frac{1}{2})\, p = y^m + \frac{1}{2} p$; und ferner $z^m = y^m + (a'' - \frac{1}{2})\, p = y^m - p$. Also wenn die zwey gefundenen Werthe, für z^m substituiret werden, so entstehen zwey Gleichungen

$$2^m A = y^m + \tfrac{1}{2} p,\quad (-1)^m B = y^m - p,$$

aus denen, wenn p eliminirt wird, diese erfolgt:

y^m

$$y^m = \frac{2^{m+1} A + (-1)^m B}{3}.$$

Alsdann bestimme man, je zwey willkührlich beständige Größen A, B, und zwar, daß nach der Hypothese $m = 0$, $y = 1$ und der Hypothese $m = 1$, $y = 0$ wird, so erlangen wir zwey Gleichungen

$$1 = \frac{2A+B}{3}; \; 0 = \frac{4A-B}{3};$$

diese geben $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$. Mithin das verlangte allgemeine Glied

$$\frac{2^m + 2(-1)^m}{3} u^m \text{ seyn wird.}$$

Da die Aufgaben, welche zur Analyse der Glücksfälle oder zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, bey Spielen gehören, aus der Theorie dieser endlichen Differenzialgleichungen, fließen und direkte Auflösungen erhalten, so wollen wir nur zwey Beyspiele vortragen, welche aus dem Brettspiele hergenommen sind.

Zweytes Beyspiel.

A spielet mit B, das von den Franzosen sogenannte à Croix ou pile (im deutschen: Münz oder Flach, welches vermittelst einer, in die Höhe geworfenen Münze geschiehet, wovon die eine Seite derselben croix, die andere aber pile heißt.) unter folgenden Bedingungen: daß wenn A beym ersten Wurf, croix hat, derselbe von B zwey Gulden empfängt; fällt aber auf den andern

Wurf

Wurf croix, so bekommt er von B 4 Gulden, beym dritten 8; beym xten aber 2^x Gulden. Es frägt sich also, welche Erwartung A habe, d. i. wie viel A an B, vor dem Spiele geben müsse, wenn beyder Glück gleich sey.

Es bezeichne y_x die Anzahl der Gulden, welche A voraus bezahlen sollte, so wie x die Zahl der Würfe. Wenn x um die Einheit vermehret wird, so daß das von A, vor dem Spiel zu bezahlende Geld, oder die Erwartung von A, durch y_{x+1} ausgedrückt wird, so ist klar, daß das Geld y_x um der Zahl der Gulden 2^{x+1} nach der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{x+1}}$, dasselbe nach dem $(x+1)$ten Wurfe zu gewinnen, vermehrt werden muß. Wir bekommen daher die Gleichung:

$$y_{x+1} = y_x + \frac{2^{x+1}}{2^{x+1}} = y_x + 1;$$

diese zu integriren, nehmen wir die Formel $y' = Ry + T$, so bekommt man durch die Verbindung der Glieder:

$$y' = y_{x+1};\ y = y_x;\ R = 1;\ T = 1.$$

Daher das verlangte Integral, gefunden wird:

$$y = y_x = \pi R \left(A + \Sigma \frac{T}{\pi R}\right) = A + \Sigma.\ 1 = A + x.$$

Die willkührlich beständige Größe A, wird bestimmt, wenn $x = 1$ gesetzt wird, woraus man

augen-

augenscheinlich, die Erwartung $y_x = 1$ erhält und also ist $A + 1 = 1$ oder $A = 0$. Folglich ist $y_x = x$, nemlich die Zahl der von A zu bezahlenden Gulden $= x$. W. Z. E. W. An diesem weit berühmten Problem, haben die größten Mathematiker unseres Zeitalters, ein Daniel Bernoulli, la Fontaine, D'Alembert, La Place, um die Wette gearbeitet welche aus den hieraus abgeleiteten, sinnreichen Spekulationen, die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, bewundernswürdig erläutert haben.

Drittes Beyspiel.

Es greift jemand aus einem Haufen Münzen, oder kleiner Brettsteinchen, deren Anzahl x ist, eine unbekannte Menge derselben; es frägt sich also wie hoch die Wahrscheinlichkeit sey, ob diese gegriffene Menge, gerade oder ungerade war.

Man nenne y die Summe der Fälle, unter welchen die gegriffene Menge gerade, und z die Summe der Fälle, unter denen sie ungerade seyn könne. Gesetzt der Haufen x, werde um die Einheit vermehret, so giebt y', die Summe der geraden Fälle, und das wird $y' = y + z$ seyn, bis daß jeder ungerade Fall, mit einer neuen Zahl verbunden, einen geraden Fall angiebt. Ferner z' bedeute die Summe der ungeraden Fälle, und weil jeder gerade Fall, verbunden mit der hinzugefügten Zahl, ungerade wird, auch die dazu addirte Einheit ungerade ist, so wird

$z' = z + y + 1$ seyn. Die erste Gleichung aber, ist nichts anders, als $\Delta y = z$, die zweite nichts anders, als $\Delta z = y + 1$. Folglich $\Delta^2 y = + 1$ oder $y'' - 2y' + y = y + 1$, also $y'' = 2y' + 1$, oder welches auf eins hinausläuft $y' = 2y + 1$. Aus der Vergleichung dieser Gleichung, mit der allgemeinen $y' = Ry + T$, wird $R = 2$, $T = 1$ gefunden, daher man

$$y = AR^x + T\frac{R^x - 1}{R - 1} = A2^x + 2^x - 1 = (A + 1)2^x - 1$$

erhalten wird.

Da nun $x = 1$ so wird $y = 0$. Also $2A = 1 - 2$, und $A = -\frac{1}{2}$; und daher Itens $y = 2^{x-1} - 1$. IItens $z = \Delta y = y^1 - y = 2^{x-1} - 2^{x-1} + 1 = 2^x (1 - \frac{1}{2}) = 2^{x-1}$. Mithin die Summe aller wahrscheinlichen Fälle, $y + z = 2^{x-1} - 1 + 2^{x-1} = 2^x - 1$, also wird hieraus die wahrscheinlichkeit der geraden Fälle

$$\frac{y}{y + z} = \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1},$$

für die ungraden aber

$$\frac{y}{y + z} = \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$$

gefunden. W. z. E. W.

Die Prüfung dieses Problems, welche Mairau in der Geschichte der Pariser Akademie, vom Jahr 1728 angestellt hat, ist zwar äußerst fein und sinnreich, allein in der genauern Untersuchung desselben, hat dieser sonst gelehrte Mann, nicht sorgfältig genung verfahren.

11. Außer

11. Außer der bisher dargestellten Methode, die Lehre der wiederkehrenden Reihen, auf die Integration der linearischen Gleichungen, die aus endlichen Differenzen bestehen, zurückzuführen, hat der scharfsinnige Geometer, de la Grange in den Memoiren der berlinischen Akademie, für das Jahr 1775, eine weit einfachere und vortreflichere angegeben, welche unter allen Methoden, in der That die bequemste und geschwindeste ist, besonders in den Beyspielen, in welchen die Wurzeln der Gleichung, unbestimmten Coeffizienten, als gleich gefunden werden, die ich kürzlich hier vorzutragen, am gelegentlichsten erachte.

Folgendes sey die wiederkehrende generische Reihe:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots y_{x+t};$$

deren allgemeines Glied y_x ist. Ich nehme an, daß die linearische Beziehungs-Gleichung zwischen den succeßiven Gliedern $t+1$, diese sey:

$$(A)\quad Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots Ky_{x+t-1} + y_{x+t} = 0,$$

und zwar, daß t die Ordnung der wiederkehrenden Reihe, sey, und A, B, C ... K, hingegen, jede beständige Coeffizienten bedeuten. Hiermit ist bereits, die Sache so weit abgemacht, daß diese linearische, endliche Differenzialgleichung, integriret, oder welches eben so viel ist, daß der analytische Werth, des allgemeinen Gliedes y_x, in der gegebenen Reihe gegeben werden kann.

Um dies zu erreichen, sey $y_x = az^x$, wo a, z unbestimmte, beständige Größen sind; folglich wird

$$y_{x+1} = az^{x+1};\quad y_{x+2} = az^{x+2};\ \text{ꝛc.}$$

woraus

woraus alsdenn, nach erfolgten Substitutionen, die Gleichung umgekehret wird in

$$Aaz^{x} + Baz^{x+1} + Caz^{x+2} \ldots + Kaz^{x+t-1} + az^{x+t} = 0,$$

oder (vermittelst der Division durch az^x) in

$$\text{(B)} \quad A + Bz + Cz^2 \ldots\ldots + Kz^{t-1} + z^t = 0.$$

Aus dieser Gleichung ist klar, Itens daß der Coeffizient a, welcher in derselben verlangt wird, willkührlich sey.

IItens daß sie so viele bestimmte Werthe, von z besitze, als Einheiten der Index t hat. Diese Werthe z, oder die Wurzeln der Gleichung, bezeichne ich durch α, β, γ ꝛc.; werden nun auch unterschiedene, willkührliche Coeffizienten a, b, c ꝛc. genommen, so entstehen ebensoviel, unterschiedene Werthe von y_x, nehmlich $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$, ꝛc., welche sowohl einzeln für sich, als alle zusammen, der linearischen Gleichung (A) Genüge leisten. Man erhält also in allem

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \text{ꝛc.}$$

Und weil hier der Werth der Größe y_x, die beständigen willkührlichen a, b, c ꝛc. unter der Zahl t umfaßt, so wird derselbe daher, das vollständige Integral, der endlichen Differenzialgleichung (A) seyn, welche zur Ordnung t gehöret. Die Werthe dieser beständigen Größen a, b, c ꝛc. hingegen, werden gefunden, wenn man der veränderlichen x, die nach und nach folgende Werthe 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. giebt, und sie mit dem angenommenen Ausdruck, des allgemeinen Gliedes y_x, nach den Hypothesen von x, mit den ersten Gliedern der Reihe, die stets bekannt seyn

müssen

müssen, vergleicht. Aus diesen Vergleichungen, entspringen alsdann, eben so viele Gleichungen, als beständige Größen, a, b, c ꝛc. sind, welche auf diese Art, durch die Funktionen y_0, y_1, y_2, ꝛc. und durch die Wurzeln α, β, γ ꝛc. zu finden sind.

12. In der Hypothese $t = 1$, darf nur eine Wurzel der Beziehungs-Gleichung, (B) seyn, so wird das allgemeine Glied, für diese Hypothese $y_x = a\alpha^x$, daher, wenn $x = 0$ genommen wird, $y_0 = a\alpha^0 = a$, und also $y_x = y_0\alpha^x$ herauskommt.

In der Hypothese $t = 2$, wird wegen der beyden Wurzeln der Gleichung α, β $y_x, = a\alpha^x + b\beta^x$. Weshalb wenn $x = 0$, und $x = 1$ genommen wird, zwey Gleichungen $y_0 = a + b$; $y_1 = u\alpha + b\beta$ erfolgen, aus denen die Werthe der unbestimmten Größen a, b, auf folgende Weise gefunden werden:

$$a = \frac{\beta y_0 + y_1}{\alpha - \beta};\ b = \frac{-\alpha y_0 + y_1}{\beta - \alpha}$$

Es sey $t = 3$, dem in der Hypothese das allgemeine Glied $y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$ entspricht. Nimmt man nun successiv $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, so erhält man drey Gleichungen:

$$y_0 = a + b + c;\ y_1 = a\alpha + b\beta + c\gamma;\ y_2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2;$$

aus denen nach den bekannten Regeln der Algebra, endlich

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)\, y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)};\ b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta)\, y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)}$$

hergeleitet wird. Auf gleiche Weise, wenn $t = 4$;

die

δ die vierte Wurzel, der Beziehungs-Gleichung (B) und f eine willkührlich beständige Größe ist, so wird dem allgemeinen Gliede entsprechend.

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x,$$

wird nun successiv

$$x = 0,\ x = 1,\ x = 2,\ x = 3$$

genommen, so erhalten wir 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} y_0 &= a + b + c + f \\ y_1 &= a\alpha + b\beta + c\gamma + f\delta \\ y_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + f\delta^2 \\ y_3 &= a\alpha^3 + b\beta^3 + c\gamma^3 + f\delta^3. \end{aligned}$$

Aus diesen werden ferner die willkührlich, beständigen Größen a, b, c, f, wie folget, gefunden.

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)\, y_1 - (\beta + \gamma + \delta)\, y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)\,(\alpha - \delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)\, y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)\, y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)\,(\beta - \delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta)\, y_1 - (\alpha + \beta + \delta)\, y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)\,(\gamma - \delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\, y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)\, y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)\,(\delta - \beta)\,(\delta - \gamma)}$$

13. Die Rechnung, für die Bestimmung der Werthe, der willkührlich, beständigen Größen a, b, c, f ꝛc. zu vermeiden, dient folgendes: es sey:

(C) $z^t + pz^{t-1} + qz^{t-2} \ldots + fz^2 + gz + K = 0$

die Gleichung der ungleichen Wurzeln: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varphi$ welche deiser andere

$$(z - \alpha)\,(z - \beta)\,(z - \gamma)\,(z - \delta) \ldots (z - \varphi) = 0$$

gleich ist; das letztere Glied K äquire man, mit dem Produkt dieser Wurzeln, negativ genommen.

Ist

Ist $K = (-\alpha)(-\beta)\ldots(-\varphi)$ so wird das Produkt positiv seyn, wenn die Zahl der Wurzeln gerade, negativ, wenn sie ungerade ist. Wird hingegen dies Produkt, durch einen dieser Faktoren $-\alpha$, $-\beta$ ꝛc. es sey welcher es wolle, dividirt, so entsteht ein positiver Quotient, wenn die Zahl der Wurzeln ungerad war, ein negativer, wenn sie gerade ist. Nach erwägung der Coeffizienten des Gliedes y_0, in dem Werth von a, findet man für die verschiedenen Hypothesen, des Index t, die Sache nach folgenden Schema:

Indices,	Coeffizienten des Gliedes y_0,
$t = 1$	1
$t = 2$	$-\beta$
$t = 3$	$\beta\gamma$
$t = 4$	$-\beta\gamma\delta$
ꝛc.	ꝛc.

Deshalb wird der Coeffizient von y_0, nach dem Werth der willkührlich, beständigen Größe a, im Allgemeinen $\frac{k}{-\alpha}$ seyn, und wegen der Aehnlichkeit des Coeffizienten, von y_0, nach dem folgenden Werthe, der übrigen beständigen Größen b, c, f ꝛc. wird der Coeffizient selbst, im Werth von b durch $\frac{k'}{-\beta}$; im Werth von c durch $\frac{k}{-\gamma}$ ausgedrückt. Man äquirt nehmlich demselben, mit dem Produkt aller Wurzeln der Gleichung (C), negativ genommen, mit Weglassung jener, die durch den zu findenden Coeffizienten, multiplizirt wird.

14. Die

14. Die oben angeführten Beyspiele, zeigen die Regel, deren die Coeffizienten der Glieder y_1, y_2, y_3 2c. beständig unterworfen sind. Und zwar treten die Zeichen, wechselsweise hervor, so daß wenn der Coeffizient des Gliedes y_0, positiv, er negativ in y_1 wird; daher der positive in y_2 2c. wieder zurückkehrt; das Gegentheil aber erfolgt, wo der Coeffizient des Gliedes y_0 als negativ existirt. Gesetzt es wäre z. B. der Coeffizient des Gliedes y_0, ein Produkt von drey Faktoren $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ im Werth der beständigen Größe a, so wird der Coeffizient des Gliedes y_1 das Aggregat je zwey und zwey, welche aus diesen drey Faktoren entstehen können, und der Coeffizient des Gliedes y_2, wird das Aggregat der Faktoren $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, und endlich wird die Einheit, der Coeffizienten des letztern Gliedes, y_3 seyn. Auf diese Weise, wird nach die in der Gleichung (C) angenommenen, fünf ungleichen Wurzeln α, β, γ, δ, ε, der Coeffizient des Gliedes $y_0 = \beta\gamma\delta\varepsilon$, der Coeffizient des Gliedes

$$y_1 = -(\beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon)$$

der Coeffizient des Gliedes

$$y_2 = \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon;$$

der Coeffizient des Gliedes

$$y_3 = -(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon);$$

endlich aber der Coeffizient des letztern

$$y_4 = 1$$

seyn. Eben so werden wir, die Coeffizienten der Glieder y_0, y_1, y_2 2c. für die Werthe der übrigen, beständigen Größen b, c, f 2c. bestimmen. Was hingegen die Renner der Werthe a, b, c 2c. betrifft, so

wird

wird alsbald erhellen, daß man den Nenner von a erhalte, wenn in der Gleichung (C) oder

$$(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(y-\delta)\ldots(y-\varphi)=0$$

der Faktor $z-\alpha$ unterdrückt und $z=\alpha$ gesetzt wird, so daß

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\ldots(\alpha-\varphi)$$

hervorkommt, welches der verlangte Nenner seyn wird. Desgleichen für den Nenner von b, muß eben das ganze Produkt, durch $z-\beta$ dividirt, und zum Quotienten $z=\beta$, geschrieben werden, und es wird der Nenner von

$$b=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\ldots(\beta-\varphi)$$

werden. Dieses trifft auch bey den Nennern, der übrigen beständigen Größen c, f, 2c. zu.

15. Diese vortrefliche Methode, soll durch folgende zwey Beyspiele, erläutert werden.

Erstes Beyspiel.

Es sey die Beziehungs-Scale $1 + 2$

Die Indices $0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ldots\ldots x$

die wiederkehrende Reihe $0, u, u^2, 3u^3, 5u^4, 11u^5\ldots\ldots y_x u^x$

die endliche Differenzialgleichung

$$y_x = y_{x-1} - 1 + 2y_{x-2},\text{ oder}$$

$$(A)\qquad y_x - y_{x-1} - 2y_{x-2} = 0$$

man nehme $y_x = az^x$; nach dessen Sustitution in (A) entstehet die Beziehungs-Gleichung

$$1-\frac{1}{z}-\frac{2}{zz}=0 \text{ oder } z^2-z-2=0,$$

deren Wurzeln $\alpha=2$, $\beta=-1$ sind. Es ist also das vollständige Integral, nehmlich das allgemeine Glied

$y_x = a\alpha^x + b\beta^x = a.2^x + b\,(-1)^x$

Ite Hypothese. $x = 0; a + b = 0; a = \frac{1}{3}$

IIte Hypothese. $x = 1; 2a - b = 1; b = -\frac{1}{3}$

Nach deren Erfindung, entspringt

$$y_x = \tfrac{1}{3}\,[2^x - (-1)^x];$$

also ist das allgemeine Glied der Reihe

$$\tfrac{1}{3}\,[2^x - (-1)^x)\,u^x.$$

W. Z. Erfinden war.

Zweytes Beyspiel.

Es sey die Beziehungs-Scale $0 + 7 - 6$

Indices

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \ldots x$

die wiederkehrende Reihe

$0, u, u^2, 7u^3, u^4, 43u^5, -35u^6, 295u^7, -503u^8 \ldots y_x u^x$

die endliche Differenz-Gleichung

$$y_{x+3} + 0.y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 0;$$

es werde $y_x = az^x$, und die vorhergehende Gleichung, verändere man in die Beziehungs-Gleichung $z^3 * - 7.z + 6 = 0$, deren drey Wurzeln

$z = \alpha = 1;\ z = \beta = 2;\ z = \gamma = -3$ sind.

Hierdurch erhält man, das vollständige Integral der Differenzial-Gleichung:

$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x = a + b.\,2^x + c\,(-3)^x.$

1ste Hypothese $x = 0; a + b + c = 0$

2te " " " $x = 1; a + 2b - 3c = 1$

3te " " " $x = 2; a + 4b + 9c = 1$

Aus diesen drey Gleichungen, findet man durch die bekannten, algebraischen Regeln:

$$a = -\tfrac{1}{2};\ b = \tfrac{3}{5};\ c = -\tfrac{1}{10};$$

und

und endlich

$$y_x = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{5}.\, 2^x - \tfrac{1}{10}\,(-3)^x.$$

Mithin wird das allgemeine Glied $y_x\, u^x =$

$(\tfrac{3}{5}.\, 2^x - \tfrac{1}{10}\,(-3)^x - \tfrac{1}{2})\, u^x$. W. z. erf. w.

16. Bisher ward von uns, stillschweigend diejenige Bedingung angenommen, nach welcher alle Wurzeln α, β, γ rc. unter sich ungleich sind. Wenn aber etliche Wurzeln, als gleiche angenommen worden, so werden einige, der willkührlich beständigen Größen a, b, c rc. unendlich. Ist nun wirklich $t = 3$, so finden wir wie oben, §. 12.

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)\, y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)};\; b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)\, y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma}\,;$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta)\, y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)\,\gamma - \beta)}:$$

Deshalb werden, nach angenommenen beyden, gleichen Wurzeln α und β, die Größen a und b unendlich; die dritte c aber bleibt endlich. Eben dies wird auch, in andern Hypothesen von t gezeigt, wo einige Wurzeln unter sich gleich waren.

Bey dieser Unbequemlichkeit, welche sehr oft sich zuträgt, pflegt folgendes Hülfsmittel angewendet zu werden. Es wird nemlich, in dem allgemeinen Gliede, der wiederkehrenden Reihe $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x +$ rc. wenn $\beta = \alpha$, dafür $\beta = \alpha + d\alpha$ gesetzt, so daß die Differenz zwischen beyden Wurzeln, unendlich klein ist. Z. B. in der wiederkehrenden Reihe der dritten Ordnung, deren allgemeines Glied, eine trinomische Größe, $a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$ ist, so geht vermöge der Substitution, der zweytheiligen Größe $\alpha + d\alpha$ statt β, das allgemeine Glied in diesen an-

Glied in diesen andern über, $a\alpha^x + b(\alpha + d\alpha)^x + c\gamma^x$ welcher unendlich wenig vom wahren, unterschieden ist.

Hierauf verwandle man, nach der Neutonschen Formel, das Binomium $(\alpha + d\alpha)^x$ in eine Reihe, so entstehet

$$(\alpha + d\alpha)^x = a^x + x\,d\alpha.\,\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}d\alpha^2.\,\alpha^{x-2} + \text{ꝛc.}$$

Daher ist das allgemeine Glied

$$(D)\quad (a+b)\alpha^x + c\gamma^x + bx\,d\alpha.\,a^{x-1} + \frac{bx(x-1)}{2}\,d\alpha^2.\,\alpha^{x-2} + \text{ꝛc.}$$

Wir fanden oben

$$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)},$$

das ist, wenn $d\alpha$ statt $\beta - \alpha$ substituiret worden, so wird

$$b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{d\alpha(\beta - \gamma)}, \text{ oder } \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{d\alpha(\alpha - \gamma)}$$

folglich

$$b\,d\alpha = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma)y_1 + y_2}{\alpha - \gamma},$$

nunmehr ist, die Größe endlich. Ist hingegen $b\,d\alpha$ eine endliche Größe, so wird, $b\,d\alpha^2$, noch vielmehr aber $b\,d\,\alpha^3$ unendlich klein seyn ꝛc. Daher wird das allgemeine Glied (D) =

$$(E)\qquad (a + b)\alpha^x + bx\,d\alpha.\,\alpha^{x-1} + c\gamma^x.$$

Und weil

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)},$$

so entstehet durch die Substitution von $-d\alpha$, für $\alpha - \beta$,

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma)y_1 + y_2}{-d\alpha(\alpha - \gamma)},$$

welche ebenfalls eine unendliche Größe ist. Wenn aber die zwey Werthe, der unendlichen Größen a und

b,

b, zugleich mit einander verbunden werden, so entspringt nach Anwendung ihrer allgemeinen Ausdrücke, ein endliches Aggregat. Und zwar:

$$a + b = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} - \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$$

werden die Brüche auf einerley Benennung gebracht, so findet man

$$a + b = \frac{(\beta^2\gamma - \beta\gamma^2 - \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2) y_0 + (\alpha^2 - \beta^2) y_1 - (\beta - \alpha) y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$$

und durch die Division mit $\alpha - \beta$, kommt

$$a + b = \frac{(\gamma^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma) y_0 + (\alpha + \beta) y_1 - y_2}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$$

hervor, welcher Ausdruck, von den Unendlichen frey ist. Mithin wenn $\beta = \alpha$ gemacht wird, so bekommen wir endlich

$$a + b = \frac{(\gamma^2 - 2\alpha\gamma) y_0 + 2\alpha y_1 - y_2}{(\alpha - \gamma)^2}.$$

Bey dem allgemeinen Gliede (E) erhält man die Coeffizienten der Größen α^x und $x\alpha^{x-1}$, welche beyde endlich sind, nebst den existirenden Coeffizienten b d α^0, b d α^1, ꝛc. der Glieder

$$\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}, \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\alpha^{x-3} \text{ ꝛc.}$$

welche dieserwegen weggelassen worden. Wenn daher $a + b = a'$; $bd\alpha = b'$ festgesetzt wird so erhält das allgemeine Glied die Form:

$$y_x = a'\alpha^x + b' x\alpha^{x-1} + c\gamma^x$$

17. Ich schreite nun zu jenen wiederkehrenden Reihen, bey denen die Beziehungs = Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, und nehme als allgemeines Glied der Reihe

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x,$$

an, in welchen $\alpha = \beta = \gamma$. Damit aber die Gleichheit dieser Wurzeln, ohne Irrthum aus der Mitte weggenommen werde, so beobachte ich eine unendliche kleine Differenz unter ihnen, indem ich $\beta = \alpha + d\,x$; $\gamma = \alpha + d\,\beta$ setze; so wird das allgemeine Glied

$$y_x = a\alpha^x + b\,(\alpha + d\,\alpha)^x + c\,(\alpha + d\,\beta)^x + f\delta^x:$$

Durch Anwendung der Neutonschen Formel, und durch die Annahme dreyer Glieder für jedes Binonium, erhalten wir

$$(F)\ y_x = (a + b + c)\,\alpha^x + (b\,d\alpha + c\,d\beta)\,x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2)\,\frac{x\,(x-1)}{2}\,\alpha^{x-2} + f\delta^x$$

Im §. 12. haben wir gefunden

$$a = \frac{-\beta\gamma\delta y_0 + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)\,y_1 - (\beta + \gamma + \delta)\,y_2 + y_3}{(\alpha - \beta)\,(\alpha - \gamma)\,(\alpha - \delta)}$$

$$b = \frac{-\alpha\gamma\delta y_0 + (\alpha\delta + \alpha\gamma + \gamma\delta)\,y_1 - (\alpha + \gamma + \delta)\,y_2 + y_3}{(\beta - \alpha)\,(\beta - \gamma)\,(\beta - \delta)}$$

$$c = \frac{-\alpha\beta\delta y_0 + (\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta)\,y_1 - (\alpha + \beta + \delta)\,y_2 + y_3}{(\gamma - \alpha)\,(\gamma - \beta)\,(\gamma - \delta)}$$

$$f = \frac{-\alpha\beta\gamma y_0 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\,y_1 - (\alpha + \beta + \gamma)\,y_2 + y_3}{(\delta - \alpha)\,(\delta - \beta)\,(\delta - \gamma)}$$

Es werden daher wegen $\alpha = \beta = \gamma$, die Werthe der Coeffizienten a, b', c, unendliche, der zweyten Ordnung; nur der Werth des letztern f, ist bloß endlich. Obgleich die einzelnen Werthe a, b', c, eine unendliche Größe, der zweyten Ordnung ausmachen, so wird doch ihr Aggregat, als endlich genommen; denn nach geschehener Reduction der drey Werthe, auf einerley Nenner, und vermittelst der Division durch,

$(\alpha -$

$(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$ wird endlich gefunden

$$a + b + c = \frac{(\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta - \alpha\delta^2 - \beta\delta^2 - \gamma\delta^2 + \delta^3)\,y_0 - (\alpha\gamma + \alpha\beta + \beta\gamma)\,y_1 + (\alpha + \beta + \gamma)\,y_2 - y_3}{(\delta - \alpha)(\delta - \beta)(\delta - \gamma)}$$

die

die augenscheinlich eine endliche Größe ist; substituiret man α, statt β und γ, so entsteht eben dieselbe Summe:

$$a + b + c = \frac{(-3\alpha^2\delta + 3\alpha\delta^2 - \delta^3)\,y_0 + 3\alpha^2 y_1 - 3\alpha y_2 + y_3}{(\alpha - \delta)^3}$$

Desgleichen in den Werthen der Coeffizienten b, c, substituire man $\alpha + d\alpha$ für β, und $\alpha + d\beta$ für γ, sodann multiplizire man b mit $d\alpha$, und c mit $d\beta$; wenn dies geschehen, so findet man

$$bd\alpha = \frac{(-\alpha^2\delta - \alpha\delta d\beta)\,y_0 + [\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha+\delta)\delta\beta]\,y_1 - (2\alpha + \delta + d\beta)\,y_2 + y_3}{(d\alpha + d\beta)\,(\alpha - \delta + d\alpha)}$$

$$cd\beta = \frac{(\alpha^2\delta + \alpha\delta d\alpha)\,y_0 - [\alpha^2 + 2\alpha\delta + (\alpha+\delta)\,d\alpha]\,y_1 + (2\alpha + \delta + d\alpha)\,y_2 - y_3}{(d\alpha - d\beta)\,(\alpha - \delta + d\beta)}$$

Die-

Diese Werthe bringe man, unter gemeinschaftliche Benennung, und nehme deren Summe, welche nach geschehener Division, durch $d\alpha - d\beta$, mit Auslassung der Glieder, die durch die Vergleichung verschwinden, folgende ist:

$$bd\alpha + cd\beta = \frac{(2\alpha^2\delta - \alpha\delta^2)y_0 - (2\alpha^2 + 2\alpha\delta - \delta^2)y_1 + 3\alpha y_2 - y_3}{(\alpha - \delta)^2}$$

welche gleichfalls eine endliche Größe ist.

Zuletzt multiplizire man $bd\alpha$, mit $d\alpha$ und $cd\beta$ mit $d\beta$; die hieraus erfolgenden beyden Werthe, bringe man unter gleiche Benennung, und nehme deren Summe, die nach geschehener Division, mit $(d\alpha - d\beta)$ $(\alpha - \delta)$ und Auslassung der unendlich kleinen Glieder, seyn wird:

$$bd\alpha^2 + cd\beta^2 = \frac{-\alpha^2\delta y_0 + (\alpha^2 + 2\alpha\delta)y_1 - (2\alpha + \delta)y_2 + y_3}{\alpha - \delta}$$

und zwar gleich einer endlichen Größe.

Wenn man also in dem allgemeinen Gliede (F) $a + b + c = a'$; $b\,d\,\alpha + c\,d\,\beta = b'$; $b\,d\,\alpha^2 + c\,d\,\beta^2 = c'$ nimmt, die zwar alle nach dem bisher erwiesenen, endliche Größen sind, so erhalten wir das allgemeine Glied

$$y_x = a'\,\alpha^x + x\,b'\,\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}\,c'\,\alpha^{x-2} + f\,\delta^x.$$

Im vorhergehendem Calcul der Neutonschen Regel, nehmen wir drey Glieder, in jedem Binonium an, so daß die darauf folgenden Glieder, unendlich kleine, oder verschwindende sind, also würde das vierte

$$(b\,d\,\alpha^3 + c\,d\,\beta^3)\,\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\,\alpha^{x-3}$$

seyn;

seyn; wobey wegen b, c, als unendlichen Größen der zweyten Ordnung, der Coeffizient $(b d \alpha^3 + c d \beta^3)$ ein unendlich kleines der ersten Ordnung wird, es kann also das vierte Glied, noch sichrer aber das fünfte und alle übrigen folgenden, wegbleiben.

18. Durch gleiche Art zu schließen, findet man das allgemeine Glied, der wiederkehrenden Reihe

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + f\delta^x + h\varepsilon^x + \text{etc.}$$

woselbst vier Wurzeln gleich sind, als

$$\alpha = \beta = \lambda = \delta;$$

folgendermaaßen ausgedrückt:

$$y_x = (a + b + c + f)\alpha^x + (bd\alpha + cd\beta + fd\gamma)x\alpha^{x-1} + (bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2)\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} + (bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3)\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2 \cdot 3} + h\varepsilon^x + \text{etc.}$$

wo nicht allein der Coeffizient

$$a + b + c + f,$$

als absolut endlich gezeigt wird, sondern auch die übrigen endlichen, Trimonialcoeffizienten, dargethan werden; als

$$bd\alpha + cd\beta + fd\gamma,\ bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2,\ bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3,$$

obgleich die Art der unendlich kleinen Größen, fälschlich angegeben wird.

Bey der Hypothese der vier gleichen Wurzeln, wird nicht über das vierte Glied der Neutonschen Regel fortgeschritten, so daß das 5te, vorzüglich aber das 6te und alle folgenden Glieder, ihrer unendlichen Kleinheit wegen, verschwinden. Es kann daher des Gliedes α^x Coeffizient

a +

$$a + b + c + f = a';$$

des Gliedes $x\alpha^{x-1}$ Coeffizient

$$bd\alpha + cd\beta + fd\gamma = b';$$

des Gliedes

$$\frac{x(x-1)\alpha^{x-2}}{2} \text{ Coeffizient}$$

$$bd\alpha^2 + cd\beta^2 + fd\gamma^2 = c'$$

und endlich des Gliedes

$$\frac{x(x-1)(x-2)\alpha^{x-3}}{2 \cdot 3} \text{ Coeffizient}$$

$$bd\alpha^3 + cd\beta^3 + fd\gamma^3 = f'$$

angenommen werden; hingegen das allgemeine Glied der Reihe y_x, kehre man um in diesen:

$$y_x = a'\alpha^x + xb'\alpha^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}c'\alpha^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}f'\alpha^{x-3} + h\varepsilon^x + \text{etc.}$$

Aus dem bisher gesagten, weiß jeder, was bey allen den Beyspielen geschehen müsse, wo mehr als vier gleiche Wurzeln, der Gleichung vorkommen; denn es verbleibt beständig, bey einerley Gesetz und der ganze Calcul, wird hierdurch sehr erleichtert. Diese besondere Hypothese der gleichen Wurzeln, durch ein Beyspiel zu zeigen, wird hier nicht an unrechtem Orte seyn.

Beyspiel.

Es sey die wiederkehrende Reihe

$$\overset{0}{1} + \overset{1}{8u} + \overset{2}{27u^2} + \overset{3}{64u^3} + \overset{4}{125u^4} + \overset{5}{216u^5} \ldots\ldots \overset{x}{y_x u^x}$$

welche aus dem Rationalbruche

$$\frac{x + 4u + u^2}{(1 - u)^4}$$

entwickelt wird. Hieraus erhellet, daß die Beziehungs-Scale $4 - 6 + 4 - 1$, und folglich das allgemeine Glied

$$y_x = 4y_{x-1} - 6y_{x-2} + 4y_{x-3} - y_{x-4}$$

seyn werde, woraus die endliche Differenzialgleichung

$$y_x - 4y_{x-1} + 6y_{x-2} - 4y_{x-3} + y_{x-4} = 0$$

erfolgt. Es sey $y_x = az^x$, die vorhergehende Gleichung aber verändere man, in die Beziehungs-Gleichung

$$1 - \frac{4}{z} + \frac{6}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{1}{z^4} = 0 \text{ oder}$$

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = 0,$$

welche in der That, nichts anders ist, als $(z-1)^4 = 0$. Folglich hat die Beziehungs-Gleichung, vier gleiche Wurzeln, nehmlich

$$z = \alpha = \beta = \gamma = \delta = 1.$$

Daher ist in der jetzt gefundenen Formel des allgemeinen Gliedes:

$$y_x = a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1} + c'\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2} + f'\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}a^{x-3};$$

substituiret man die Einheit für α, so erhalten wir

$$y_x = a' + b'x + c'\frac{x(x-1)}{2} + f'\frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} =$$

$$a' + \left(b' - \frac{c'}{2} + \frac{f'}{3}\right)x + \left(\frac{c' - f'}{2}\right)x^2 + \frac{f'}{6}x^3;$$

nimmt man hinwiederum

$$b' - \frac{c'}{2} + \frac{f}{3} = b''; \frac{c' - f'}{2} = c''; \frac{f'}{6} = f''$$

so entstehet endlich das allgemeine Glied:

$$y_x = a' + b''x + c''x^2 + f''x^3$$

Es werden ferner vier willkührlich, beständige Größen a', b'', c'', f'' bestimmt, wenn man für x nach und nach, 0, 1, 2, 3 annimmt, woraus die Werthe erfolgen, die dem allgemeinen Gliede y_x entsprechen, als: 1, 8, 27, 64, so wie nachfolgende vier Gleichungen:

$$a' = 1$$
$$a' + b'' + c'' + f'' = 8$$
$$a' + 2b'' + 4c'' + 8f'' = 27$$
$$a' + 3b'' + 9c'' + 27f'' = 64,$$

aus denen

$$a' = 1 : b'' = 3;\ c'' = 3;\ f'' = 1$$

hergeleitet wird. Wenn dies geschehen, so erhält man

$$y_x = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1 + x)^3,$$

und folglich

$y_x u^x = (1 + x)^3 u^x$. W. z. erfinden war.

Uebrigens wird in diesem Beyspiel, eben dasselbe auf eine andere, von unserem Autor angegebene Art, erhalten. Nehmlich wenn das allgemeine Glied der Reihe, Y genennet wird, die vier denselben vorhergehenden Glieder hingegen, ${}'Y$, ${}''Y$, ${}'''Y$, ${}''''Y$, so bekommt man unter besagter Bedingung, $Y = 4\,{}'Y - 6\,{}''Y + 4\,{}'''Y - {}''''Y$, d. i. ${}''''Y - 4\,{}'''Y + 6\,{}''Y - 4\,{}'Y + Y = 0$, oder wenn die einzelnen Glieder, auf jede vier folgende Stellen, übertragen werden, so ergiebt sich die Gleichung

$$Y - 4\,Y' + 6\,Y'' - 4\,Y''' + Y'''' = 0 = \Delta^4 X$$

(§. 22. Cap. I.). Daher die Sache darauf hinausläuft, daß die endliche Differenzialgleichung

$$\Delta^4 Y = 0,$$

nach

nach der Hypothese, integrirt werden müſte, daß Δx beständig, und der Einheit gleich sey. Aus dem vorhergehenden aber, iſt bekannt, daß

$$\Sigma\Delta^4 Y = \Delta^3 Y = a\ \Delta x$$

$$\Sigma\Delta^3 Y = \Delta^2 Y = \Sigma a\ \Delta x\ = ax + b\Delta x$$

$$\Sigma\Delta^2 Y = \Delta Y = \Sigma ax + bx + c\Delta x = \frac{ax^2}{2} - \frac{ax}{2} + bx + c\Delta x$$

$$\Sigma\Delta Y = Y = \Sigma\frac{ax^2}{2} - \Sigma\frac{ax}{2} + \Sigma bx + cx + f =$$

$$\frac{a}{6}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)x + f$$

Nimmt man alſo

$$\frac{a}{6} = f''; \frac{b-a}{2} = c''; \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = b''; f = a',$$

ſo bekommt man wie vorhin, das allgemeine Glied der Reihe

$$Y = a' + b''x + c''x^2 + f''X^3.$$

Wer von der Integration, endlicher Differenzialformeln, mehr zu wiſſen verlangt, der halte ſich an die berühmten Mathematiker La Grange, La Place, Monge, Condorcet ꝛc., welche in den akademiſchen Memoiren von Turin. Berlin, Paris, hiervon ſehr häufig, und bündig gehandelt haben.

Anmerkungen zum III. Capitel des I. Theils.

Um die neue Theorie unſeres Verfaſſers, von der Natur der unendlich kleinen, und unendlichen Größen, als auch deren wechſelſeitigem Verhältniß, gegeneinander, auf einen klaren Sinn zu bringen, und

allen

allen Schwierigkeiten und Streitigkeiten, den Zugang zu verschließen, welche sich gegen dieselbe noch stärker, als sie von unserem Autor, kaum hervorgebracht worden ist, von allen Seiten erhoben; so wird es der der Mühe werth seyn, sie dergestallt zu erklären, als wenn zwischen ihr, und der berühmten Neutonschen Lehre, von den ersten und letzten Verhältnissen oder Gränzen, beynahe ganz und gar, kein Unterschied wäre. Folgende Grundsätze müssen daher, besonders festgesetzt werden.

1) Wenn eine gewisse Größe A, entweder durch Anwuchs oder Abnahme, einer andern gegebenen L, ohne ihr je gleich zu werden, immer mehr und mehr näher kommt, so daß sie von ihr, nur um eine sehr geringe Größe, unterschieden ist, und zwar einer noch kleiner, als jede gegebene, so wird diese Größe L, die Gränze der erstern A genannet.

So ist I. die Tangente jeder Curve, die Gränze aller Sekanten.

II. Der Bruch $\frac{1}{3}$, ist die Gränze dieses Dezimalbuches

$$0{,}333333333 \text{ etc.}$$

III. Die Einheit ist die Gränze der Summe, dieser geometrischen Progression:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} \text{ u. s. w.}$$

bis ins Unendliche.

IV. Die Größe $a + \frac{1}{3}a$, ist die Gränze der Summe der Progression,

$$a + \frac{a}{4} + \frac{a}{16} + \frac{a}{64} + \frac{a}{256} + \text{etc.}$$

bis ins unendliche,

V.

V. Die Quadratwurzel aus 2 ist die Gränze des Verhältnisses, welches die Diogonallinie des Quadrats, zur Seite hat.

VI. Endlich die Summe der abnehmenden, geometrischen Progression

$$a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} + \text{rc.}$$

bis ins Unendliche, hat zur Gränze $\frac{a^2}{a - b}$; nehmlich (wie aus den vorhergehenden Beyspielen zuersehen ist) die Summe der Progression, kommt dergestallt je mehr und mehr, dem Werthe $\frac{a^2}{a - b}$ näher, so daß ob sie gleich ihm niemals gleich wird, dennoch von demselben, um eine sehr geringe, und noch kleiner, als jede gegebene Größe, unterschieden seyn könne; dieß aber fließt daraus, daß wenn die Progression, nicht bis ins Unendliche fortgesetzt wird, und ihr letzteres Glied p ist, dieselbe eine allerdings genaue Summe $\frac{a^2 - bp}{a - b}$ erhält, die jederzeit weniger als $\frac{a^2}{a - b}$ ist, und deren Differenz so klein, als man verlangt werden kann, weil selbst das Glied p, auch bis zur äußersten Fortsetzung der Progression, klein wird. Gleichwie nun p dem Nichts oder o, immer näher kommt, und doch niemals gleich wird, so ist also o selbst, die Gränze des Gliedes p. Eben so ist auch

der

der Bruch $\frac{a^2}{a-b}$, die Gränze des Bruches $\frac{a^2 - bp}{a-b}$, welcher mit dem vorigen, nie vollkommen übereintrifft, wofern nicht $p = 0$ wird d. i. wenn nicht für p, die Gränze derselben gesetzt wird.

2. Es sey y die Funktion der veränderlichen Größe x, welche durch $Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ rc. vorgestellt ist, so daß wenn $x = 0$, $y = 0$ wird; so entspringt aus der Gleichung

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{rc.}$$

mit x dividirt:

$$\frac{y}{x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^2 + \text{rc.}$$

Eben so ist $\frac{y}{x}$ ein veränderliches Verhältniß, weil der Exponent desselben, eine veränderliche Größe ist, d. i. die Funktion dieser veränderlichen x, ist dergestalt beschaffen, daß sie so lange abnimmt, als die veränderliche x vermindert wird. Wenn nun $x = 0$, so ist die Funktion y auch $= 0$, und der Exponent der Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, oder vielmehr das Verhältniß selbst, ist $\frac{y}{x} = A$. Es scheint wiedersprechend zu seyn, wenn hier behauptet wird, daß $\frac{y}{x} = \frac{0}{0} = A$ sey, weil Nullen keine Größen sind, und weder die eine größer, noch kleiner als die andere, genannt werden kann. Allein das Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, ist in der That kein Verhältniß der Nullen, sondern eine Gränze, welcher $\frac{y}{x}$ sich unaufhörlich nähert, indem die veränderlichen x und y stets abnehmen, eine Gränze welche das Verhältniß $\frac{y}{x}$, nicht erreichen wird, so lange x und y wahre Größen sind, sie mögen so klein seyn, als sie wollen. Das Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, ist dasjenige, vermöge welcher die veränderlichen x und y verschwinden, oder aufhören, Größen zu seyn. Hier ist also die Gränze der Gleichung, gewiß und bestimmt. Man kann also die Gränze der Verhältnisse $\frac{y}{x} = A$, das letzte Verhältniß der veränderlichen y und x nennen, und zwar in sofern, wenn y und x verschwinden, oder aufhören Größen zu seyn. Gedenket man sich die veränderliche $x = 0$, als wieder zunehmend, so wird auch die Funktion y, mit derselben zugleich anwachsen, und also das Verhältniß $\frac{y}{x} = A$, hinwiederum diejenige seyn, mit welcher sie zu wachsen anfangen; Also kann die Gränze dieser Verhältnisse $\frac{y}{x}$, welche A ist, deshalb das erste Verhältniß, der veränderlichen Größen y und x, mit welcher sie zu wachsen anfangen, genannt werden. So wird auf diese Art, die Lehre unseres Autors: daß unendlich kleine Dinge, in der That Nichts sind, und daß zwischen

schen zwey, unendlich kleinen Dingen, jede Verhältniß dazwischen treten können, auf einer wahren und deutschen Sinn gebracht. Das Verhältniß der unendlich kleinen Dinge, ist wirklich kein Verhältniß von Nichtsen, sondern das letzte Verhältniß, wodurch zwey veränderliche Größen erzeugt werden, oder anfangen Größen zu seyn. Oder mit andern Worten: das Verhältniß des unendlich Kleinen, ist nichts weiter, als diese Gränze, welcher sich das Verhältniß der veränderlichen Größen, immerfort nähert, die sie niemals erreichen, noch weniger überschreiten kann, sondern der sie, für jede gegebene Differenz, näher kommt. Mit einem Worte: die letzten Verhältnisse verschwindender, und die ersten entstehender Größen, sind keine Verhältnisse derselben, unter sich, sondern bloß allein die Gränze, aller veränderlichen Verhältnisse. In dem paradoxen Ausdruck $\frac{0}{0}$, kann die verborgene Gränze, durch folgenden Vernunftsschluß aufgedeckt werden; es ist nehmlich $\frac{0}{0} = \frac{a - a}{b - b}$, da aber $a : b = x : \frac{bx}{a}$, folglich verhält sich $a + x : b + \frac{bx}{a} = a : b$, und

$$a + x - a : b + \frac{bx}{a} - b = a : b.$$ Deshalb wird

$$\frac{a}{b} = \frac{a - a + x}{b - b + \frac{bx}{a}}.$$

Wenn daher x Null wird, so wird die Gränze der beständigen Verhältnisse, mit $\frac{a-a}{b-b} = \frac{0}{0}$ äquiret.

3. Jede veränderliche Größe, kann nicht nur beständig abnehmen, und zuletzt gänzlich verschwinden, sondern auch beständig, und bis ins Unendliche, vermehret werden. Es sey:

$$y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Hx^{n-1} + Kx^n,$$

so erhellet aus dieser Gleichung, daß wenn x unendlich vermehret wird, y auch bis ins Unendliche zunehmen werde. Daraus aber wird hergeleitet:

$$\frac{y}{x^n} = \frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-1}} + \frac{C}{x^{n-2}} + \ldots + \frac{H}{x} + K;$$

woraus folgt, daß das Verhältniß $\frac{y}{x^n}$, und deren Exponent, veränderlich sey, und zwar, daß wenn die veränderliche Größe x, nebst y unaufhörlich zunimmt, der Exponent derselben ebenfalls, beständig abnehmen werde, und zwar in allen abnehmenden Gliedern, außer dem letzten beständigen Gliede. Gesetzt $x = \infty$, so wird vermöge dieser Hypothese, auch $x = \infty$; der Exponent der Verhältnisse $\frac{y}{x^n}$, wird gleich der beständigen K; die übrigen Glieder gehen wegen $x = \infty$, in Null über. Dem zu Folge, was wir vorhin in Betreff, der unendlich kleinen Größen, erinnert haben, ist das Verhältniß $\frac{y}{x^n} = K$, eigentlich zu reden, kein Verhältniß, der unendlich Großen y und x^n unter sich; weil es nicht möglich ist, daß zwey unangebliche Größen, unter einander verglichen werden können, sondern die Gränze der Verhältnisse, welcher die veränderlichen unendlich zunehmenden Größen y und x^n, sich immerfort nähern, jedoch

doch niemals erreichen, so lange selbige bestimmte, und angebliche Größen sind, folglich ist $\frac{y}{x^n} = K$ das letzte Verhältniß, wodurch die Größen y und x^n aufhören, angebliche zu seyn. Es wird daher der sehr gemeine Satz, des Infinitesimalcalculs, richtig verstanden, daß nehmlich die Größen und ihre Verhältnisse, wenn deren Unterschied gegeben ist, zuletzt gleich werden, wenn sie unaufhörlich fort zunehmen, so daß sie jede gegebene Größe übertreffen. Gesetzt A, B wären unendlich wachsende Größen oder Verhältnisse, deren gegebene Differenz D, jederzeit beständig sey. Man nehme daher eine andere gegebene, und beständige Größe a, und setze die Analogie A : D = a : d, so ist klar, daß wenn A zunimmt, d proportionirlich abnimmt, und zwar dergestalt, daß wenn A, jede gegebene Größe übersteiget, d unter jede gegebene, abnehmen werde. Da nun $A \pm D : D = a \pm d : d$, weil die zwey Größen a und $a \pm d$, wenn d unter jede gegebene herabsinkt, und zuletzt oder bey der Gränze verschwindet, gleich werden; so werden auch die Proportionalgrößen A und $A \pm D$ oder A u. B, die eine gegebene Differenz D haben, zuletzt zur Gleichheit gelangen. Folglich, gleichwie durch beständig abnehmende, gegebene Größen und Verhältnisse, die kleineren letzten Proportionen, bestimmt werden, welche an der Gränze, stets abnehmender Größen statt finden, so werden auch durch unendlich zunehmende, und jede gegebene Größen und Verhältnisse, die letzt größern Proportionen bestimmt, die an der Gränze immerwährend zunehmen=

mender, sich befinden. Zwischen diesen beyden äußersten Gränzen, ist es zwar erlaubt, die Gränze der Abnehmenden zu erreichen und zu entdecken; allein die Gränze der Wachsenden, erlangt man eigentlich niemals, denn obgleich die Größen, jeden gegebenen Terminum, zunehmend überschreiten können, so können sie doch nie, absolut unendlich werden.

4. Es bleibt daher in der Differenzialrechnung, unveränderlich fest, daß diejenigen Größen oder Verhältnisse, niemals angenommen werden, deren obschon kleine Differenz gegeben ist, sondern nur die, deren Differenz, über jeden angeblichen Terminum abnehmen, verschwinden und Null werden könne, so daß man die Gleichheit der Größen, und Verhältnisse, bloß an der äußersten Gränze erlangt, welches sie sich über jegliches Maas nähern, und ohnerachtet es sich öfters zuträgt, daß die Größen, deren Proportion an der Gränze erforscht wird, hinwiederum verschwinden, so bleibt nichts desto weniger, die Proportion der Gränze, die einzig und allein nur gesucht wird, stets unverändert.

5. Durch die Benennung: Differenzen, Fluxionen, Elemente, Incremente, Decremente, Infinitesimalgrößen, und wie sie immer genannt werden mögen, haben wir nichts anders, als die kleinern Differenzen, bezeichnen wollen, welche immerfort abnehmen, und deren sich selbst, die ältesten Mathematiker bedient haben, aus denen wir die Gleichheiten, und letzten Proportionen, die nur an

an der Gränze statt finden, mit Sicherheit herleiten. Um der Kürze willen, eignen wir die Gleichheit der Gränze, nur denen Größen und Verhältnissen zu, welche eine stets abnehmende, und unangebliche Differenz besitzen, jedoch keinesweges, daß wir dieselben als gleich betrachteten, so lange sie noch, die kleinste Differenz behalten; sondern wie bekannt nur dann, wenn ihre letzte Differenz, an der Gränze Null wird, woselbst sie auf das genaueste, gleich werde. Es würde daher für den Differenzialcalcul, von größestem Nachtheil seyn, wenn sich jemand unterstehen wollte, Differenzen, die noch von einiger Bedeutung sind, zu vernachlässigen, und für nichts zu halten. In der Analysis des Unendlichen, wird nichts für gering geachtet; denn wenn wir Größen und Infinitesimalverhältnisse, die noch mit angeblichen Differenzen versehen sind, gleich nennen, so verstehen wir darunter nicht, daß sie gleich sind, so lange selbige noch eine, obschon kleine Differenz haben, sondern daß sie an der Gränze gleich sind, woselbst deren Differenz, Null ist. Wer also unendlich kleine Differenzen, weglassen und für Nichts halten will, hat bloß zur Absicht, die absolutesten Gleichheiten und Proportionen der Gränze, zu untersuchen und zu bestimmen. Hieraus ist folglich völlig einleuchtend, daß der Differenzialcalcul nichts anders sey, als eine analytische Methode, die Gränze der Verhältnisse zu erfinden, welche zwischen der endlichen Differenz, zweyer Größen und deren endlichen Differenz zweyer andern, innen steht, die zu den beyden erstern, eine Analogie und bekannte Beziehung haben.

6. Den

„6. Den Beschluß dieser Anmerkungen, macht das wichtige Zeugniß Neutons, des großen Erfinders der Fluxionen, welcher hiervon so vortreflich handelt, (a) wenn er sagt: „Ich wollte lieber die Beweise, „auf die letzten Summen und Verhältnisse, der verschwindenden Größen, und auf die ersten entstehenden, d. i. auf die Gränzen der Summen, und „Verhältnisse, hinführen, und deshalb die Beweise, „von den Gränzen derselben in möglicher Kurze voraus senden. Allein wenn ich in folgenden, die Größen aus beständigen Partikeln bestehend erwäge, „oder mich statt grader Linien, sehr kleiner krummen „bedienet habe, so war es meine Absicht nicht, die „untheilbaren, sondern die verschwindenden Theilbaren, nicht die Summen und Verhältnisse von bestimmten Theilen, sondern bloß allein, die Gränzen „der Summen und Verhältnisse, darunter zu verstehen.

„Man macht den Einwurf, daß es keine letzte „Proportion verschwinder Größen gebe; denn ehe „sie verschwunden sind, ist sie nicht die letzte, und „wo sie verschwunden sind, giebt es keine. Oder „auch so: Die letzte Geschwindigkeit, mit welcher „ein Körper, an einen gewissen Ort gelangt, wo dessen Bewegung sich endet, sey Nichts; denn ehe der „Körper, diesen Ort erreiche, wäre jene noch nicht „die letzte, und wo er ihn erreicht, sey sie nichts. „Die Antwort hierauf ist leicht: Durch die letzte Ge-

„schwin-

a) Phil. Not. Princ. Math. Lib. I. Sect. I. in fine.

„schwindigkeit, verstehe ich diejenige, mit welcher der „Körper bewegt wird, und zwar weder ehe er, den „letzten Ort erlangt und dessen Bewegung aufhört, „noch dann wenn er ihn erreicht, das ist, diejenige „Geschwindigkeit, mit welcher der Körper, den letz= „ten Ort erreicht, und mit welchem seine Bewegung „aufhört. Eben so kann auch, durch das letzte Ver= „hältniß verschwindender Größen, deren Verhältniß, „weder ehe, noch nachher, sondern mit welcher sie „verschwinden, verstanden werden. Auf gleiche Art, „ist das erste Verhältniß entstehender Größen, dieje= „nige, wodurch sie erzeugt werden. Die erste und „letzte Summe hingegen, ist diejenige, mit welcher „sie (entweder vermehrt oder vermindert zu werden) „anfangen und aufhören. Noch ist die Gränze übrig, „welche die Geschwindigkeit, am Ende der Bewegung „erreichen, aber nicht überschreiten kann. Diese ist „die letzte Geschwindigkeit. Also ist das Verhältniß „der Gränze, aller anfangenden und aufhörenden „Größen, und Proportionen, gleich. Da nun diese „Gränze gewiß und bestimmt ist, so ist das Problem „dieselbe anzugeben, bloß geometrisch. Alle geometri= „sche Aufgaben aber, können zur Bestimmung und „zum Beweise anderer, rechtmäßig angewendet wer= „den.“

„Auch kann man behaupten, daß wenn die letz= „ten Verhältnisse, verschwindender Größen, gegeben „werden zugleich die letzten Größen gegeben werden, „und also wird jede Größe, aus unheilbaren beste= „hen, wie Euklid von den Incommensurabeln, im

„zehn=

„zehnten Buche seiner Elemente, das Gegentheil be-
„wiesen hat. Allein dieser Einwurf, beruhet auf ei-
„ner falschen Hypothese. Jene letzten Verhältnisse,
„mit denen die Größen aufhören, sind in der That
„nicht Verhältnisse der letzten Größen, sondern Grän-
„zen, denen sich die Verhältnisse, abnehmender Grö-
„ßen, beständig nähern, und denen sie näher kom-
„men können, als jede gegebene Differenz, ohne sie
„jemals zu überschreiten, oder früher zu erreichen,
„als die Größen bis ins Unendliche, vermindert wer-
„den. Dies wird aus dem unendlich Großen, deut-
„licher zu verstehen seyn. Wenn zwey, nebst ihrer
„Differenz gegebene Größen, unendlich vermehret wer-
„den, so wird deren letztes Verhältniß, nehmlich jene
„der Gleichheit gegeben, nicht minder auch deren letzte
„oder höchste Größen, welche dieses Verhältniß ist.
„Wenn ich also im folgenden, um des leichtern Be-
„griffs willen, von den kleinsten entweder verschwin-
„denden, oder letzten Größen, reden werde, so hüte
„man sich, Größen als Größe, bestimmt sich vorzu-
„stellen, sondern man gedenke sich darunter stets, ohne
„Einschränkung zu vermindernde Größen."

7. Es findet d'Alembert die neutonsche Art zu re-
den, welche jedoch auch von Andern angenommen wor-
den, anstößig; nehmlich: Ein Verhältniß mit
welches die Größen verschwinden; ein Ver-
hältniß mit welcher sie entstehen: Die Re-
densart tadelt derselbe, als mißtönend und absurd,
mit diesen Worten (a); Quelqucs mathématiciens ont
„défi-

(a) Mel. de Lit. d'Hié. et de Phil. Tom. V. Eclairc. sur les Elém. de Phil. §. XIV.

„défini la quantité infiniment petite celle qui, s'éva„nouit, considérée non pas avant qu'elle s'évanouisse, „non pas après qu'elle est évanouie, mais dans le mo„ment même où elle s'évanouit. Je voudrois bien sa„voir quelle idée nette et precise on peut espérer „de faire naitre dans l' esprit par une semblable défini„tion. Une quantité est quelque chose ou rien. Si „elle est quelque chose, elle n'est pas évanouie; si elle „est rien, elle est évanouie tout-à-fait. C'est une chi„mere que la supposition d'un état moyen entre ces „deux la."

Ich sehe aber nicht ab, weswegen der berühmte d'Alembert, hiermit so unzufrieden ist; denn obgleich diese Redensarten, nicht im strengsten Verstande, genau sind, so sind sie gleichwohl, nicht nur bey Mathematikern, sondern auch bey den Philosophen, im gemeinen Redegebrauch aufgenommen worden, um viele Wortumschweife zu vermeiden. Ja sogar d'Alembert, mißbilliget dieselbe anderwärts selbst nicht, sondern empfiehlt sie vielmehr der Kürze wegen; indem er sagt: (a) „Toutes les parties des mathématiques „font souvent usage d'expression de cette espece, qui „dans le sens metaphysique qu'elles presentent, paroissent d'abord peu exactes; mais qui ne doivent être re„gardées que comme des manieres abrégées de s'expri„mer, que les Mathématiciens ont inventées pour énon„cer une verité, dont le developpement et l'enoncé „exact auroit demandé beaucoup de mots."

(a) Mel. de Lit. d'Hist. &c. § XI. Tom. V.

Anno-

Anm. zum 214 §. I. Theils.

Weil der Beweis unseres Autors, bloß auf Induction beruhet, und demselben diejenige Strenge fehlt, welche Mathematiker, wo es nur immer möglich ist, fordern, so wollen wir den Beweis selbst, aus d'Alembert entlehnen, der im Tom. IV. Opusc. Mathem. pag. 5. denselben folgendermaaßen giebt.

„Si une quantité A contient tant de variables, „x, y, z &c. qu'on voudra, et qu'on la différentie en „faisant varier successivement x, y, z &c. en négligeant „les différences secondes, troisiémes &c. on aura le „même resultat dans quelqu'ordre qu'on différentie, „c'est-à-dire, que par exemple, $\frac{d^n A}{dx\,dy\,dz\,dt \text{ etc.}}$ „$= \frac{d^n A}{dz\,dy\,dt\,dx \text{ etc.}}$ Mr. Euler a démontré cette pro„position dans son Analyse des infinement petits, „mais par une espece d'induction. Pour en donner une „démonstration générale et rigoureuse nous considérons, „I. que $\frac{ddA}{dx\,dy} = \frac{ddA}{dy\,dx}$, comme le savent les Géomé„tres. II. Nous allons démontrer que si en général les „quantités $\frac{d^n A}{dx\,dy\,dz}$, et $\frac{d^n A}{dz\,dx\,dy}$, sont égales, la mê„me égalité subsistera en faisant varier une nouvelle va„riable t; ce qu'il est aisé de voir en considérant I. que „la combinaison dz dy dx donne (hip.) le même résul„tat que la combinaison dz dx dy, la combinaison „dt dx dy dz donne évidemment le même résultat que dt „dz dx dy; II. que dt dx dy dz donne le même résultat

„que

„que dx dt dy dz, puisque dt dx donne le même que dx „dt; III. que dx dt dy dz donne le même résultat que „dx dy dt dz, et par la même raison puisque dt dy donne le même que dy dt &c. Donc, &c. Donc puisque le „théorême a lieu lorsque n = 2, il aura lieu lorsque „n = 3, et ensuite lorsque n = 4, &c. et ainsi de „suite.“

Diesen Beweis wendet d'Alembert, auf die gemeinschaftliche Multiplikation, algebraischer Größen an, und erinnert die Verfasser von Elementen, vorsichtiger zu seyn, mit diesen Worten:

„Cette démonstration pourroit servir à prouver d'une „manière très-simple une proposition que la plus part „des Auteurs élémentaires négligent de prouver, savoir, „qu'en quelqu'ordre qu'on multiplie tant de quantités „a, b, c, d, e &c. qu'on voudra, les unes par les au„tres, le résultat est toujours le même. On le démon„tre bien pour les produits ab, et ba, de deux quanti„tés, mais on néglige souvent de le prouver pour les „produits d'un plus grand nombre de quantités, quoi„que la chose ne soit pas évidente par elle-même. „C'est un avis qu'on donne ici aux Auteurs d'Elémens, „afin qu'ils y fassent attention à l'avenir.“

Anm. zum VIII. Capitel I. Theils.

Der berühmte De la Grange, in seiner italienischen Epistel, an Fagan, welche 1754 gedruckt worden, trägt eine neue Reihe, für die Differenzialien,

und

und Integralien von jedem Grade, vor, welche mit der Neutonschen Reihe, für die Potenzen und Wurzeln analog. ist. Diese Sache, welche ihrer Neuheit und Vortreflichkeit wegen, empfehlenswürdig ist, wollen wir kürzlich hier auseinander setzen: die erste von den zwey Reihen, mag daher von Neuton, die andern von la Grange seyn:

$$\text{I. } (a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} a^{m-3} b^3 + \text{etc.}$$

$$\text{II. } d^m(xy) = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3 + \text{etc.}$$

I. Die erste Reihe, giebt die Evolution jeder Potenz, zu welcher die Summe zweyer Größen erhoben worden, als auch jeder gegebenen Größen, deren Exponent m für den Grad der gegebenen Potenz angenommen ist; also giebt die zweyte Reihe, das Differenzial eines jeden Grades, aus dem Produkte, von zweyen, so wie auch jeden der Veränderlichen, wenn ebenfalls m der Exponent des Grades, oder der Ordnung des vorgegebenen Differenzials ist.

II. Gleich wie die erste Reihe, die Glieder jeder Wurzel giebt, welche aus der Summe zweyer, oder jeder anderer Größen, ausgezogen wird, wofern nur der Exponent m gleich, der gebrochenen Zahl ist, die den Grad der Wurzel anzeigt, so enthält auch die zweyte Reihe, das Integral

tegral jeden Grades, aus dem Produkte von zweyen, sowohl jeder endlichen, als unendlichen Größe, jedoch mit der Bedingung, daß der Exponent m, der ganzen aber negativen Zahl gleich sey, welche den Grad des gegebenen Integrals, andeutet,

III. Endlich gleich wie in der ersten Reihe, der Exponent o, eine Größe anzeigt, die zu keiner Potenz erhoben, und also gleich der Einheit ist, so bedeutet auch eben dieser Exponent o, in der zweyten nichts weiter, als daß in der mit ihm behafteten Größe, keine Differenziation, noch Integration statt finde; daher muß man diese Größe so annehmen, als wenn sie in Beziehung des Exponenten, für Null zu halten sey.

So wie wir uns der Neutonschen Reihe, mit dem glücklichsten Erfolge, bey Erhebungen der Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln, jeden Grades, durch die ganze Analysis bedienen, eben so können wir auch die andere Reihe mit gleichem Vortheil, bey Differenziationen und Integrationen jeden Grades, gebrauchen. Es sey z. E. die Größe xy zu differenziiren. Da nun in diesem Fall, das gesuchte Differenzial, von der ersten Ordnung ist, so wird $m = 1$ seyn, folglich nimmt die zweyte Hauptreihe, diese Form an: $x^1y^0 + x^0y^1$, die, wenn sie auf die gemeinschaftliche Art gebracht worden, wie wir vorhin angezeigt haben, in diese verwandelt wird:

$$ydx + xdy$$

Wenn man das 2te 3te oder 4te Differenzial sucht, so wird $m = 2$ oder $m = 3$, $m = 4$ seyn, und die ver-

verlangten Differenzialien, werden nach gehörigen Substitutionen für m, folgende seyn:

$$d^2.xy = x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 = yddx + 2dxdy + xddy$$

$$d^3.xy = x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + x^0y^3 = yd^3x + 3ddydy + 3dxddy + xd^3y;$$

$$d^4.xy = x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + x^0y^4 = yd^4x + 4d^3xdy + 6ddxddy + 4dxd^3y + xd^4y.$$

Eben so wird auch das Differenzial jeder Ordnung, auf die leichteste Weise erhalten werden, wenn nehmlich dx, als das erste veränderliche Differenzial angesehen

sehen wird, oder auch die Glieder weggestrichen werden, welche die Differenzialien von dx enthalten.

Uebrigens wird die Reihe II, auch auf die Erfindung der Integralien, die Neutonsche aber, auf die Ausziehung der Wurzeln, angewendet werden können z. B. Man soll durch die Integration des Elements ydx, einer krumlinigten Fläche, die unbestimmte Quadratur einer Curve finden. Man nehme also nach der allgemeinen Regel, $dx = x$ an, so wird nach dem, was wir vorhin angemerkt haben, $m = -1$ seyn, worauf wir nach geschehener Substitution der Werthe, nach der 2ten Regel, die besondere Reihe:

$$dx^{-1}y^{0} - dx^{-2}y^{1} + dx^{-3}y^{2} - dx^{-4}y^{3} + dx^{-5}y^{4} \text{ ꝛc.}$$

erhalten werden. Es bedeutet aber dx^{-1}, das Integral von dx; dx^{-2} das Integral des Integrals von dx (d.i. das Integral der Größe x) welches ich das 2te Integral von dx nenne, und es durch das Symbol ${}^{2}\int dx$ bezeichne. Eben so drückt auch dx^{-3}, das dritte Integral von dx, nehmlich ${}^{3}\int dx$; dx^{-4} das vierte Integral oder ${}^{4}\int dx$ ꝛc. aus. Es ist nemlich

$$\int dx = x$$

$$^{2}\int dx = \int x = \int \frac{x\,dx}{dx} = \frac{x^2}{2\,dx};$$

$$^{3}\int dx = \int \frac{x^2}{2\,dx} = \int \frac{x^2\,dx}{2\,dx^2} = \frac{x^3}{2.3\,dx^2}$$

$$^{4}\int dx = \int \frac{x^3}{2.3\,dx^2} = \int \frac{x^3\,dx}{2.3\,dx^3} = \frac{x^4}{2.3.4\,dx^3};$$

und Ueberhaupt

$$^{m}\int dx = \frac{x^m}{2.3.4\,\ldots\,m\,dx^{m-1}}$$

wenn nemlich dx, jederzeit als beständig angenommen wird. Wenn nun die Werthe, in der vorhergehenden Reihe, substituiret, und wie gebräuchlich dy, ddy, d^3y ꝛc. statt y^1, y^2, y^3, ꝛc. gesetzt werden, so erhellet endlich

$$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{2dx} + \frac{x^3ddy}{2.3dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2.3.4\,dx^3} + \frac{x^5d^4y}{2.3.4.5dx^4} - \text{ꝛc.}$$

Diese ist also, die so sehr geschätzte Bernoullische Reihe (a) welche allen Geometern schon längst bekannt ist.

Uebrigens wird diese zweyte Regel, nicht allein auf die Integrirung, der Differenzialien des ersten Grades ausgedehnet, sondern sie leistet auch sehr geschwind, durch eine einzige Operation, die Integration der Differentialien, jedes noch weiter gehenden Grades. Man verlangt z. E. das zweyte Integral des Produkts dydx; wenn nun m = — 2, x = dx, und y = dy gemacht worden, so erhalten wir:

$$^2\int dydx = dx^{-2}dy^0 - 2dx^{-3}dy^1 + 3dx^{-4}dy^2 - 4dx^{-5}dy^3 + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{x^2dy}{2dx} - \frac{2x^3ddy}{2.3\,dx^2} + \frac{3x^4d^3y}{2.3.4\,dx^3} - \frac{4x^5d^4y}{2.3.4.5dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Weil aber dx beständig, so ist $^2\int dydx = \int ydx$ und das vorhin gefundene Integral

$$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{2dx} + \frac{x^3ddy}{2.3dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2.3.4\,dx^2} + \text{ꝛc.};$$

so werden deshalb unter sich, je zwo Reihen äquiret, welche aber von unzählich verschiedener Art sind, d. i.

$$xy - \frac{x^2dy}{2dx} + \frac{x^3ddy}{2.3dx^2}\,\text{ꝛc.} = \frac{x^2dy}{2dx} - \frac{2x^3ddy}{2.3dx^2} + \frac{3x^4d^3y}{2.3.4dx^3}\,\text{ꝛc.}$$

deren Gleichheit ein wenig verborgener ist, die aber auch erhalten wird, wenn auf beyden Seiten, alle Glie=

(a) Jo. Bern. Oper. Tom. I. N. XXI.

Glieder aufgehoben werden, so daß nur eins, auf beyden Seiten übrig bleibt, nemlich $dydx$.

Anm. zum 324. §. I. Theils.

Vermöge der gegebenen Differenzialgleichung, welche drey veränderliche Größen in sich enthält

$$(A) \qquad Pdx + Qdy + Rdz$$

und der daraus hergeleiteten Beziehungs-Gleichung, von der Beschaffenheit

$$(B)\; P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0,$$

setzt unser Autor überhaupt diese Regel fest, daß nehmlich da, wo die endliche Gleichung (B), weder identisch ist, noch diejenige Beziehung der veränderlichen Größen x, y, z, darbietet, welche der Differenzialgleichung (A) Genüge leistete, keine endliche Gleichung gefunden werden könne, die für dieselbe hinreichend wäre. Allein diese Regel, besitzt nicht diejenige Ausdehnung, welche Euler derselben zueignet, sondern sie muß, durch eine Umschreibung dahin gezwungen werde, wie zuerst der berühmte de la Place, scharfsinnig wahrgenommen hat, in seiner vortreflichen Dissertation sur les solutions particulieres des Equations différentielles, et sur les inégalités séculaires des Planetes. In Actis Reg. scint. Paris. Acad. an. 1772. Gesetzt es wäre die Differenzialgleichung:

$$dx = \left\{1+\sqrt[3]{(x-z-y)}\left[z+a\sqrt[4]{(x-z-y)}+b\sqrt[3]{(x-z-y)}\right]\right\}dy+\left[1+y\sqrt[3]{(x-z-y)}\right]dz;$$

diese giebt mit (A) verglichen

$$P = 1,\ Q = 1 + \sqrt[3]{(x-z-y)}\,[z + a\sqrt[4]{(x-z-y)} - b\sqrt[3]{(x-z-y)}],\ R = 1 + y\sqrt[3]{(x-z-y)};$$

Werden nun diese Werthe, in der Bedingungs-Gleichung (B) substituiret, so erhält man nach der beschwerlichsten, und weitläuftigsten Rechnung, die linearische Gleichung

$$y + z - x + \left(\frac{3a}{4b}\right)^{12} = 0,$$

welche weder identisch ist, noch der Differenzialgleichung Genüge thut. Nichts desto weniger giebt es dennoch, zwischen den veränderlichen Größen x, y, z, eine Beziehung, welche eben dieses leistet; so ist nemlich $x = y + z$, auf das augenscheinlichste, für die Differenzialgleichung hinreichend. Hieraus ist vollkommen klar, daß die Eulersche Regel, in kürzern Ausdrücken enthalten sey, als vom Autor gefodert wird.

Anm. zum 11 §. II. Theils.

Unser Autor versichert an diesem Orte, in der Einleitung gezeigt zu haben, daß beyde Reihen

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{und } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2.4} + \tfrac{1}{3.8} + \tfrac{1}{4.16} + \tfrac{1}{5.32} + \tfrac{1}{6.64} + \text{ꝛc.}$$

Den hyperbolischen Logarithmen von zwey, darstellen. Allein ich habe in der angeführten Einleitung, zur Analysis des Unendlichen, alles angewandten Fleißes ohngeachtet, diesen Beweis

nicht

nicht finden können *), daher ich diesen Mangel hier ergänzen will. Aus der Theorie der Logarithmen ist bekannt, daß **)

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{ꝛc.}$$

setzt man daher $x = 1$ so wird

$$l\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc. seyn.}$$

Wird $x = -\frac{1}{2}$ angenommen, so ist

$$l(1+x) = l\,\tfrac{1}{2} = -\frac{1}{1.2^1} - \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{3.2^3} - \frac{1}{4.2^4} - \text{ꝛc.}$$

folglich wird wegen $l\,2 = -l\,\frac{1}{2}$ entstehen, ***)

$$l\,2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{1.2^1} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \frac{1}{5.2^5} + \text{ꝛc.}$$

W. Z. E. W.

Anm. nach §. 45. und folgenden II. Theils.

Obgleich der bewundernswürdige, und vortrefliche Taylorsche Lehrsatz, unzählig in der gesammten Mathematik, angewendet wird, und die herrlichsten Auflösungen der schwersten Aufgaben, als auch die Beweise der erhabensten Lehrsätze darbietet, so muß man dennoch sehr behutsam, im Gebrauch desselben verfahren, um nicht zu Fehlern und Irrthümern, verleitet zu werden. Man würde daher sich sehr betrügen, wenn man allgemein behaupten wollte, daß jeg-

*) Auch Hr. Prof. Michelsen sagt dieses, in seiner vortreflichen Uebersetzung 2ter Th. Seite 10. Note.

**) Einl. Th. 1. §. 123.

***) $l.2 = -l(0-2) = -l(l1 - l2) = -l\frac{1}{2}$.

jede Funktion der binomischen Größe $x + a$ d. i. $\Phi\,(x + a)$ durch den Taylorschen Lehrsatz, jederzeit in der unbestimmten Reihe:

$$\Phi\,(x) + \frac{ad.\Phi\,(x)}{dx} \quad \frac{a^2dd.\Phi\,(x)}{2dx^2} + \frac{a^3d^3.\Phi\,(x)}{2.3dx^3} + \frac{a^4d^4.\Phi(x)}{2.3.4dx^4} + \text{etc.}$$

als gleich angenommen werden könne. Da hingegen dieser Lehrsatz, in der ganz einfachen Hypothese, durch welche $\Phi\,(x + a) = [\text{Sin.}\,(x + a)]^{\frac{1}{3}}$, gesetzt wird, ganz unrichtig und falsch befunden wird, indem die Größe $[\text{Sin.}\,(x + a)]^{\frac{1}{3}}$, welche jederzeit in Beziehung, auf den Taylorschen Lehrsatz, endlich ist, oder im zweyten Gliede einen unendlichen Werth bekommt, wo $x = 0$; es wird nemlich die Reihe =

$$\text{Sin.}\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{ad.\text{sin.}\,x^{\frac{1}{3}}}{dx} + \text{etc.} = \text{Sin.}\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{a\,\text{Cosin.}\,x}{3\,\text{sin.}\,x^{\frac{2}{3}}} + \text{etc.} = \infty$$

in der Hypothese $x = 0$. Durch dies einzige Beyspiel, wird jeder vorsichtige Geometer, bey Anwendung dieses Lehrsatzes, gewarnet, sich desselben mit aller möglichen Behutsamkeit und Scharfsinnigkeit zu bedienen, indem sich oft die berühmtesten Mathematiker, dadurch haben irre führen lassen.

Es ereignet sich auch bisweilen, daß nach dem Taylorschen Lehrsatz, wenn derselbe auch nicht irrig gebraucht wird, die Auflösung eines vorgegebenen Problems, weit weniger offenbar ist, als sie wohl seyn sollte, und daß dieselbe durch eine andere, und sichere Methode, erhalten werden könne, wie aus folgenden Beyspiel deutlich erhellen wird. Es wird aufgegeben eine solche Funktion $\Phi\,(x)$ der veränderli-

chen

chen Größe x zu finden, vermittelst welcher $\Phi\ (x + a) = \Phi\ (x)$ erhalten wird, wenn die existirende Größe a, gegeben worden. Aus der Formel $\Phi\ (x)$ ist offenbar, daß man die Ordinate dieser Curve erhalte, in welcher, wenn die Segmente in der Axe = a, angenommen werden, die Ordinaten vermittelst dieser Größe, in gleicher Weite, gleich seyn werden. Dies geschiehet in der Cykloide, wenn a mit der Peripherie des erzeugenden Kreises, äquiret wird. Hieraus ist klar, daß die Größe $\Phi\ (x)$, mit unendlichen willkührlichen Werthen versehen sey, welche sämtlich dem Problem Genüge leisten, wofern $\Phi\ (x)$ die Ordinate vorbesagter Curve, darbietet. Wir wollen jetzt $\Phi\ (x + a)$ nach dem Taylorschen Satz, in eine Reihe verwandeln, so ist $\Phi\ (x) = \Phi\ (x + a) =$

$$\Phi\ (x) + \frac{ad.\ \Phi\ (x)}{dx} + \frac{a^2dd.\ \Phi(x)}{2dx^2} + \frac{a^3d^3.\ \Phi(x)}{2.3dx^3} + \text{etc.}$$

Hierdurch erhält man die Gleichung:

$$\frac{ad.\ \Phi(x)}{dx} + \frac{a^2dd.\ \Phi\ (x)}{2dx^2} + \frac{a^3d^3.\ \Phi(x)}{2.3dx^3} + \text{etc.} = 0.$$

Es sey e die Basis hyperbolischer Logarithmen, und $\Phi\ (x) = Ae^{hx}$; diesen Werth substituire man in vorhergehender Gleichung, so erfolgt nach geschehener Division, durch Ae^{hx}, die Gleichung

$$a\,h + \frac{a^2h^2}{2} + \frac{a^3h^3}{2.3} + \text{etc.}$$

folglich wird $e^{ah} - 1 = 0$ seyn; gehet man nun von den Zahlen, auf Logarithmen zurück, so entstehet $a\,h = l\,1$. Nach Eulers Erfindung hingegen, ist

l

$l\,1 = \pm m\pi\sqrt{-1}$, wenn m als jeder ganzen Zahl, zugleich mit o vorhanden ist. Also

$ah = \pm m\pi\sqrt{-1}$, und $h = \pm \frac{m\pi\sqrt{-1}}{a}$,

und folglich

$$\Phi(x) = Ae^{\pm\frac{m\pi x}{a}\sqrt{-1}} = A\left(\text{Cos.}\frac{m\pi x}{a} \pm \text{Sin.}\frac{m\pi x}{a}.\sqrt{-1}\right),$$

oder gesetzt $A\sqrt{-1} = B$, so erhält man endlich:

$$\Phi(x) = A\ \text{Cos.}\ \frac{m\pi x}{a} \pm B\ \text{Sin.}\ \frac{m\pi x}{a}$$

Allein es scheint, als wenn die Form dieser Funktion $\Phi(x)$, nicht diejenige Allgemeinheit besäße, die sie haben sollte. Man nehme daher, den Kreisbogen v, und des Diameters Abscisse $1 - \text{Cos.}\ v$; man ziehe die ordinate x, bis zu derselben Curve, in welcher man $x = v - \sin v$ bekommt; es sey ferner die Abscisse der Curve $1 - \text{Cos.}\ v$, gleich der Funktion der Ordinate x, oder $\Phi(x)$, so wird

$$x = v - \text{Sin.}\ v = Cv^3 \dagger Dv^5 \dagger Ev^7 \dagger \text{ꝛc.}$$

seyn, und man findet durch die Umkehrung der Reihen, $v = Fx^{\frac{1}{3}} \dagger \text{ꝛc.}$; folglich $\Phi(x) = 1 - \text{Cos.}\ v = 1 - \text{Cos.}\ (Fx^{\frac{1}{3}} \dagger \text{ꝛc.})$. Wenn nun der oben gefundene Werth

$$\Phi(x) = A\ \text{Cos.}\ \frac{m\pi x}{a} \pm B\,\text{Sin.}\ \frac{m\pi x}{a}$$

mit der gehörigen Allgemeinheit, versehen würde, so enthielte derselbe, den andern Werth

$$1 - \text{Cos.}\ (Fx^{\frac{1}{3}} \dagger \text{ꝛc.})$$

oder welches einerley ist, die Größe

$$1 - \text{Cos.}\ (Fx^{\frac{1}{3}} \dagger \text{ꝛc.}),$$

könnte in die Reihe dieser Form: $A'\ \text{Sin.}\ \pi x \dagger B'$ sin.

$\sin. 2\pi x + C' \sin. 3\pi x +$ rc. . . . $+ H' \operatorname{Cos}. \pi x + J' \operatorname{Cos}. 2\pi x +$ rc. umgekehret werden, so wie auch (durch die bekannten analytischen Lehrsätze der Trigonometrie) in die Reihe

$$A'' + B''\pi x + C''\pi^2 x^2 + D''\pi^3 x^3 + E''\pi^4 x^4 + \text{rc.}$$

in welcher nur ganze Potenzen, der veränderlichen Größe x, vorhanden sind. Dies widerspricht aber der Evolutien der Formel

$$1 - \operatorname{Cos}. (Fx^{\frac{2}{3}} + \text{rc.}),$$

die wie bekannt

$$A''' x^{\frac{2}{3}} + B''' x^{\frac{4}{3}} + \text{rc.}$$

giebt, wo die gebrochenen Potenzen von x, keineswegs vermieden werden können. Hieraus ist also klar, daß von der Funktion $\Phi(x)$, deren Werth

$$A \operatorname{Cos}. \frac{m\pi x}{a} + B \sin. \frac{m\pi x}{a}$$

nicht auf alle Fälle, der vorgegebenen Frage passend ist, und weniger generisch sey, als er seyn sollte.

Wenn jemand einwenden wollte; die Größe

$$A''' x^{\frac{2}{3}} + B''' x^{\frac{4}{3}} + \text{rc.}$$

könne auf die Form

$$\alpha + \beta \operatorname{Cos}. 2x + \gamma \operatorname{Cos}. 4x + \text{rc.}$$

gebracht werden, weil

$$x = \operatorname{Sin}. x + a \operatorname{Sin}.:x^3 + b \operatorname{Sin}.:x^5 + \text{rc.} = \operatorname{Sin}.:x(1 + a \operatorname{Sin}.:x^2 + b \operatorname{Sin}.:x^4 + \text{rc.}) = \operatorname{Sin}.x(a' + b' \operatorname{Cos}. 2x + c' \operatorname{Cos}. 4x + \text{rc.})$$

also

$$x^2 = \frac{1 - \operatorname{Cos}. 2x}{2} (a'' + b'' \operatorname{Cos}. 2x + c'' \operatorname{Cos}. 4x + \text{rc.});$$

und endlich

$$x^{\frac{2}{3}} = a''' + b''' \operatorname{Cos}. 2x + c''' \operatorname{Cos}. 4x + \text{rc.}$$

so

so würde er aus dem Grunde, eine falsche Einwendung machen, weil aus der Gleichung:

$$x^{\frac{2}{3}} = a''' + b''' \text{Cos.}\, 2x + c''' \text{Cos.}\, 4x + \text{etc.}$$

wenn selbige differentiirt, und durch dx dividirt wird, eine andere:

$$\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = -2b''' \text{Sin.}\, 2x - 4c''' \text{Sin.}\, 4x - \text{etc.}$$

entstehet, welche nach der Hypothese $x = 0$, die ungereimteste Gleichheit $\infty = 0$ hervorbringt. Ueberdieß wenn folgender Gegensatz gemacht würde, daß auch der Sinus x, in

$$f + g \text{ Cos.}\, 2x + h \text{ Cos.}\, 4x + \text{etc.}$$

verwandelt werden könne, so würde es nehmlich erlaubt seyn, festzusetzen, daß

$$\text{Sin.}: x = \sqrt{\text{Sin.}\, x^2} = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos.}\, 2x}{2}\right)} = f + g \text{ Cos.}\, 2x + h \text{ Cos.}\, 4x + \text{etc.},$$

aber diese Gleichung hat, einen doppelten Fehler,

I. Weil

$$\frac{d. \text{Sin.}: x}{dx} = 1 \text{ wenn } x = 0.$$

und im Gegentheil

$$\frac{d(f + g \text{ Cos.}\, 2x + h \text{ Cos.}\, 4x + \text{etc.})}{dx} = 0 \text{ wenn } x = 0;$$

II. Weil $y = \text{Sin.}\, x$ eine Curve bezeichnet, die aus entgegengesetzten Aesten gebildet ist, die sowohl ober- als unterhalb der Axe, befindlich sind; wogegen

$$y = f + g \text{ Cos.}\, 2x + h \text{ Cos.}\, 4x + \text{etc.}$$

eine Curve andeutet, deren Aeste den Abscissen, x und

$-x$ entsprechen, welche auf demselben Theil der Axe liegen.

Anm. zum 69. §. Theil II.

Die meisten Anwendungen des Taylorschen Lehrsatzes, auf die Evolution der Funktionen, jeder veränderlichen Größe, wie unser Autor gezeigt hat, gehen bloß auf diejenigen Fälle, in denen die veränderliche Größe selbst, eine gewisse Zu- und Abnahme erhält; er erwägt aber keines weges, die Evolution, in der die veränderliche Größe, unverändert bleibe, obgleich die Taylorsche Formel, auch in diesen Fällen, eine außerordentliche Hülfe leistet. Zu mehrerer Erweiterung dieser bewundernswürdigen Formel wird es glaube ich, nicht überflüssig seyn, dieß hier kürzlich anzuführen. Es sey also z eine Funktion des Binomiums $x + \omega$, und y eine ähnliche Funktion von x, d. i. $z = \varphi(x + \omega)$ und $y = \varphi(x)$; so wird

$$(A) \quad z = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{2.2dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{2.3.4dx^4} + \text{ꝛc.}$$

seyn welche jederzeit, eine wahre Gleichung seyn wird, man mag eine Größe, welche man immer will, für ω annehmen, und die veränderliche x mag seyn, welche es wolle. Folglich bestehet die Gleichung (A) auch alsdann, wenn sie in allen ihren gegebenen Gliedern x und ω, $x = 0$, und sodann $\omega = x$ gesetzt worden. Wenn daher die Werthe, in welche die Glieder übergehen,

$$y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \text{ ꝛc.}$$

durch

durch die Substitution $x = 0$, K, A, B, C, D ꝛc. genennet werden, so erhalten wir die Formel:

$$(B)\quad \varphi(x) = K + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{2.3} + \frac{Dx^4}{2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

Erstes Beyspiel.

Es sey die Exponenzialgröße a^x zu evolviren, vorgegeben.

Nimmt man $x = 0$, so findet man:

$K = 1, C = la, B = (la)^2, C = (la)^3, D = (la)^4$, ꝛc.

Deswegen wird nach gehörigen Substitutionen, in der Gleichung

$$(B)\quad a^x = 1 + xla + \frac{x^2(la)^2}{2} + \frac{x^3(la)^3}{2.3} + \frac{x^4(la)^4}{2.3.4} + \text{ꝛc.}$$

seyn.

Zweytes Beyspiel.

Es soll der Sinus x, durch die Reihe der Potenzen des Bogens x, gesucht werden.

Es wird folglich

$$\text{Sin.}:x = K + Ax + \frac{Bx2}{2} + \frac{Cx3}{2.3} + \frac{Dx4}{2.3.4} + \text{ꝛc. seyn;}$$

da aber

$K = 0, A = 1, B = 0, C = -1, D = 0, E = 1$ ꝛc.

so ist also

$$\text{Sin.}:x = x - \frac{x^3}{2.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{ꝛc.}$$

Anm. nach §. 151. Theil II. *)

In den reciproken Potenzenreihen natürlicher Zahlen, die überhaupt dargestellt werden, durch

$$(A) \quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \text{ꝛc.}$$

bis ins unendliche wird man es in der That, sonderbar finden, daß die Summe aller Glieder in ungeraden Stellen, sich verhält zur Summe der Glieder in geraden Stellen, wie $2^m - 1$ zu 1. Dividirt man nehmlich die Reihe (A) durch 2^m, so entstehet diese

$$(B) \quad \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} + \text{ꝛc.}$$

welche die Glieder der Reihe (A) in geraden Stellen enthält. Es ist aber $\frac{(A)}{2^m} = (B)$, und folgendes

$$(A) : (B) = 2^m : 1. \text{ Also}$$

$$(A) - (B) : (B) = 2^m - 1 : 1, \text{ d. i.}$$

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \text{ꝛc.} : \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \text{ꝛc.} = 2^m - 1 : 1,$$

nehmlich die Summe der Glieder in ungeraden Stellen, hat eben dasselbe Verhältniß, zur Summe der Glieder in geraden, wie $2^m - 1$ zu 1 hat. Nimmt man daher den Exponenten $m = 1$, so findet man die reciproke Reihe der ungeraden, gleich jener der geraden und zwar

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{ꝛc.} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \text{ꝛc.};$$

wird $m = 2$ gesetzt, so findet man

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} \text{ ꝛc.} : \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{64} \text{ ꝛc.} = 3 : 1.$$

nimmt

*) In der deutschen Uebersetzung steht §. 132. statt §. 151.

nimmt man $m = 3$, so bekommt man

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{27} + \tfrac{1}{125} + \tfrac{1}{343} + \tfrac{1}{729} + \text{ꝛc.}:$$
$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{216} + \tfrac{1}{512} + \tfrac{1}{1000} + \text{ꝛc.} = 7 : 1;$$

und überhaupt in Reihen, welche aus reciproken Potenzen, natürlichen Zahlen entstehen, übersteigt die Summe der Glieder, in ungeraden Stellen, um so vielmal die Summe jener in geraden Stellen, als um so vielmal die gleichnahmige Potenz von zweyen, um die Einheit vermindert, die Einheit übertrift.

Allein hier gerathen wir, auf einen unerwarteten, und ganz besondern paradoxen Satz, daß nemlich, so oft der Exponent der Potenz, nicht um die Einheit größer ist, die Summe der Glieder in ungeraden Stellen, dem bewiesenen Lehrsatz zufolge, kleiner seyn müsse, als die Summe der Glieder in geraden Stellen, da doch hingegen, die Glieder der ungeraden, mit jenen der geraden Stellen, einzeln verglichen, jederzeit größer gefunden werden, und zwar nach vorhergehender Analogie:

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \text{ꝛc.}:$$
$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \text{ꝛc.} = 2^m - 1 : 1,$$

ist das Verhältniß der kleinern Ungleichheit, oder ein Verhältniß des Kleinern zum Größern, so oft der Exponent m, um die Einheit kleiner ist; hingegen ist das andere Verhältniß

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \text{ꝛc.}:$$
$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \text{ꝛc.}$$

ein

ein Verhältniß der größern Ungleichheit, oder ein Verhältniß des Größern zum Kleinern, weil jedes Glied, im vorhergehenden offenbar jedes Glied, das demselben im Nachfolgenden entspricht, übertrift.

Dies Paradoxon nun, hebt selbst der scharfsinnige Jakob Bernoulli nicht, welcher in der Abhandlung von den unendlichen Reihen §. XXIV. folgendes sagt: „Es ist bewundernswürdig, daß in der Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \text{ꝛc.}$$

„deren Summe unendlich, oder größer ist, als die „Reihe

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \text{ꝛc.}$$

„der kleinern Nenner wegen, die Glieder der ungeraden Stellen, zu den Gliedern der geraden, der „Regel nach ein Verhältniß wie $\sqrt{2} - 1$ zu 1 „d. i. des Kleinern zum Größern haben, wogegen jene mit diese einzeln verglichen, dennoch größer sind, „deren entgegengesetztscheinende (ἐναντιοφανείας) Verhält„niß, ob sie gleich aus der Natur des Unendlichen, „mit endlichem Verstande, nicht faßlich zu seyn scheint, „dennoch von uns deutlich eingesehen worden. Ein „gleiches ist auch von andern, ähnlichen Reihen zu „verstehen, die eine unendliche Summe haben.“ Da aber Bernouilli, die wahre und verständliche Erläuterung, dieses paradoxen Satzes, niemals öffentlich bekannt gemacht hat, auch dieselbe vergeblich, in der Sammlung seiner Werke gesucht wird; so glaube ich, daß es nicht undienlich seyn wird, selbige hiermit zu erörtern. Wenn also in der Reihe

$$(A)\quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m} + \text{rc.}$$

alle Glieder durch 2^m dividirt werden, so daß daraus die andere Reihe entsteht nehmlich:

$$(B)\quad \frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} + \frac{1}{14^m} + \frac{1}{16^m} + \text{rc.}$$

so ist es sicher, daß die Glieder dieser Reihe (A), in geraden Stellen, gefunden werden, so wie ebenfalls, die Glieder der dritten Reihe *)

$$(C)\quad \frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{1}{11^m} + \text{rc.}$$

in ungraden Stellen; demohngeachtet übertrift die Zahl der Glieder, in der Reihe (B), zweymahl die Zahl der Glieder der Reihe (C), weil die einzelnen Glieder der Reihe (B), aus den einzelnen in (A), durch 2^m dividirt erfolgen, da hingegen die einzelnen Glieder der Reihe (C), bloß den abwechselnden Gliedern der erstern (A) entsprechen, deren Zahl zum wenigsten, die Hälfte der Zahl der Glieder in (A) und daher auch die Hälfte jener in (B) ist. Hieraus folgt, daß in der gegenseitigen Vergleichung der Reihen (C) und (B), nicht einzelne Glieder, mit einzelnen zu vergleichen sind; sondern daß nach geschehener Vergleichung des 1ten Gliedes, mit dem ersten Gliede, jedes Glied der Reihe (C) allezeit zugleich mit zweyen der Reihe (B) verglichen werden müsse; so wird alsdann nach der Hypothese $m < 1$ erhalten, daß jedes Glied der Reihe (C) kleiner sey, als

*) Es ist nehmlich $C = A - B$.

als das Aggregat zweyer in (B) sich entsprechender. Es sey nehmlich $\frac{1}{a^m}$, ein beliebiges Glied der Reihe (C), so werden zwey mit demselben übereinstimmende in (B) $\frac{1}{(2a-2)^m}$, und $\frac{1}{(2a)^m}$ seyn, und das Verhältniß zum Aggregat derselben, ist

$$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a-2)^m} + \frac{1}{(2a)^m}$$

Multiplicirt man ferner, das Vorangehende, und Nachfolgende Glied der Verhältniß, durch $(2a)^m$; so entstehet die Analogie:

$$\frac{1}{a^m} : \frac{1}{(2a)^m} + \frac{1}{(2a-2)^m} = 2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m,$$

in welcher das andere Verhältniß

$$2^m : 1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m,$$

augenscheinlich ein Verhältniß des Kleinern, zum Größern ist; denn wegen $m < 1$, wird $2^m < 2$, und wegen $\frac{a}{a-1} > 1$, wird $\left(\frac{a}{a-1}\right. \quad > 1$

folglich

$$1 + \left(\frac{a}{a-1}\right)^m > 2 > 2^m.$$

Also werden die einzelnen Glieder der Reihe (C) (ausgenommen das erste) zugleich mit zweyen der Reihe (B) verglichen, stets kleiner seyn, so oft nehmlich der Exponent m, kleiner als die Einheit ist; folglich ist die Reihe (C) kleiner als jene (B), wie deren wechselseitige Proportion $2^m - 1 : 1$, darthut.

Hingegen in der harmonischen Reihe:

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \text{ꝛc.}$$

ist dieß bemerkungswerth, daß wenn nehmlich die Glieder ungerader Stellen (ausgenommen das erste) immer von zweyen einander entsprechenden, und zugleich vereinigten Gliedern gerader Stellen, weggenommen werden, daraus eine neue Reihe entspringt, welche eine endliche Summe hat, die sie zwar in andern Reihen, wo eben dies Parodoxon sich ereignet, nicht erhält, indem in denselben, die Summe der Reihe, die auf besagte Art erzeuget wird, unendlich ist. Wird in der harmonischen Reihe, von dem Aggregat zweyer Glieder $\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}$, weggenommen $\tfrac{1}{3}$, so entstehet

$$\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3} = \frac{1}{2.6};$$

desgleichen

$$\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{5} = \frac{1}{4.10}$$

und hinwiederum

$$\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{7} = \frac{1}{6.14};\ \text{u.s.f.}$$

man erhält also die neue Reihe:

$$\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.10} + \frac{1}{6.14} + \frac{1}{8.18} + \frac{1}{10.22} + \text{ꝛc.}$$

bis ins Undendliche deren Summe endlich ist, weil sie die Hälfte dieser

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} + \text{ꝛc.}$$

weit kleinern, als jener andern

$$\frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{8.8} + \frac{1}{10.10} + \text{ꝛc.}$$

deren

deren Summe endlich, obschon klein ist. Hieraus ist begreiflich, warum in der harmonischen Reihe, die Summe der Glieder in ungeragen Stellen, nicht kleiner sey, als jene in geraden, obgleich jedes Glied ungerader Stellen (ausgenommen das erste) kleiner ist, als zwey zugleich genommen entsprechende, von geraden Stellen, welches daher kommt, daß die erstern Summe, bloß um eine endliche Größe, in Ansehung der andern fehlt, ohnerachtet die Summe beyder, unendlich ist.

Auf nicht unähnliche Weise, wird auch der Grund eines andern Paradoxums angegeben, daß nehmlich in der Reihe natürlicher, zu irgend einer Potenz erhobener Zahlen,

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m + 6^m + \text{rc.}$$

bis ins Unendliche die Summe der Glieder in geraden Stellen, zur Summe aller Glieder der Reihe, ein Verhältniß haben, wie 2^m zur doppelten Einheit, in der Reihe natürlicher Zahlen; zur vierfachen, in der Reihe der Quadrate; zur achtfachen, in der Reihe der Würfel hat rc., obschon die Glieder in geraden Stellen, als Theile der ganzen Reihe, deren vielfache Größe, auf keine Weise auszumachen scheinen. Es würde daher äußerst falsch und ungereimt seyn, wenn man in dem Wahn stände, daß die Reihe der Quadrate, der Würfel und anderer höhern Potenzen, aus den natürlichen Zahlen, kleiner seyn müsse, als die Reihe der natürlichen Zahlen selbst, in welcher sie gleichsam, als Theile vom Ganzen enthalten würden.

Anm. zum 159. §. II. Theils.

Aus der vortreflichen Gleichung unseres Autors,

$$l1+l2+l3\ldots+lx=\tfrac{1}{2}l2\pi+(x+\tfrac{1}{2})lx-x+\frac{A}{1.2x}-\frac{B}{3.4x^3}+\frac{C}{5.6x^5}$$
$$-\frac{D}{7.8x^7}+\text{etc.}$$

fließen einige Lehrsätze, die ihres ganz besondern Nustens wegen, sich empfehlen, und hier bewiesen zu werden verdienen.

Erster Lehrsatz.

Man nehme x für unendlich groß an, und e für die Basis der hyperbolischen Logarithmen. So ist

$$1.2.3.4\ldots x=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}.$$

Die Eulersche vorbenannte Gleichung, wenn $x=\infty$ angenommen wird, und $-x=-le^x$ ist, geht in diese über:

(A) $l1+l2+l3\ldots+lx=\tfrac{1}{2}l2\pi+(x+\tfrac{1}{2})lx-le^x$.

Ist dieser Uebergang von Logarithmen, auf Zahlen erfolgt, so wird diese Gleichung ungestaltet in

$$1.2.3.4\ldots x=\frac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^x}.$$ W. Z. E. W.

Zweyter Lehrsatz.

Wenn man x und p, als unendlich groß annimmt, so wird:

x

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+2)(x-p+1)$$
$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}.$$

Man substituire in der Gleichung (A) $x-p$ für x, so bekommt man

$$l1 + l2 + l3 \ldots + l(x-p) = (x-p+\tfrac{1}{2})\,l(x-p)$$
$$- le^{x-p} + \tfrac{1}{2}\,l2\pi.$$

Diese Gleichung ziehe man, von der ersten (A) ab, so findet man:

$$lx + l(x-1) + l(x-2) \ldots + l(x-p+2) +$$
$$l(x-p+1) = (x+\tfrac{1}{2})\,lx - (x-p+\tfrac{1}{2})$$
$$l(x-p) + le^{-p}.$$

Man erhält daher, durch Fortschreitung von Logarithmen auf Zahlen:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+2)(x-p+1)$$
$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-p}}{(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}}.$$

W. Z. E. W.

Dritter Lehrsatz.

Nimmt man x und p, für sehr große Zahlen an (denn würden sie als unendliche genommen, so wäre die Gleichheit absolut) so wird der Coeffizient des $(p+1)$ten infinitesimal-Gliedes, welcher im Binomium zur Potenz x erhoben worden, mit dem nächsten Ausdruck äquiret,

$$x^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x^{x + \frac{1}{2}}}{p^{p + \frac{1}{2}}(x - p)^{x - p + \frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}.$$

Aus der gemeinen Algebra ist bekannt, daß wenn das Binomium zur Potenz x, erhoben wird, der Coeffizient des (p + 1)ten infinitesimimal-Gliedes, nichts anders sey als:

$$\frac{x(x - 1)(x - 2)(x - 3)\ldots(x - p + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot p}.$$

Allein da nach der Hypothese, x und p unendliche, oder auch sehr große Zahlen sind, so ist der Zähler dieses Bruches, vermöge des zweyten Lehrsatzes

$$= \frac{x^{x + \frac{1}{2}}e^{-p}}{(x - p)^{x - p + \frac{1}{2}}},$$

und der Nenner nach den ersten Lehrsatz.

$$= \frac{p^{p + \frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^p}.$$

Also wird vorbenannter Bruch d. i. der Coeffizient des (p + 1)ten infinitesimal-Gliedes im Binomium zur Potenz x erhoben, mit der Größe

$$\frac{x^{x + \frac{1}{2}}}{p^{p + \frac{1}{2}}(x - p)^{x - p + \frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

äquiret, W. Z. E. W.

Zusatz I. Wäre $p = nx$, so entstünde:

$$\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{p^{p+\frac{1}{2}}(x-p)^{x-p+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{(nx)^{nx+\frac{1}{2}}(x-nx)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{x+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{n^{nx+\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{n^{nx}(1-n)^{x-nx+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{1-n}\right)^{nx}(1-n)^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{nx}.\sqrt{2\pi}}.$$

Zusatz II. Daher wird der Werth, der größten oder mittlern Coeffizienten, welcher im Binonium, zu einer unermeßlichen Potenz x erhoben werden, gefunden; gesetzt es sey $p = \frac{1}{2}x$ oder $n = \frac{1}{2}$, und substituirt man dies, im vorhergehenden Ausdruck, so wird jener in diesen verwandelt,

$$\frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}},$$

welcher den Werth des größten Coeffizienten, darstellt.

Zusatz III. Wenn das Binomium, zu einer unendlichen Potenz x erhoben worden, so wird das Verhältniß des größten Coeffizienten, mit der Größe $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ äquirt; denn es ist die Summe aller Coeffizienten $= 2^x$, mithin das obengenannte Verhältniß:

$$= \frac{2^x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}} : 2^x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

Anm.

Anm. zum 185. §. II. Theils.

1) Es wird vielen der Beweis unsers Autors, verdächtig scheinen, welcher bloß auf dem Grundsatze beruhet, den er mit folgenden Worten vorträgt: Wenn also ∞ eine unendlich große Zahl ist, so fällt diese Unterscheidung (Erwägung) weg, weil eine unendlich große Zahl weder gerade noch ungerade genannt werden kann, und es müssen also dabey die zweifelhaften Glieder wegelassen werden. Hieraus folgt, daß die Summe von Reihen dieser Art, wenn sie ohne Ende fortlaufen, bloß in der hinzuzufügenden beständigen Größe bestehe. Jedermann begreift es, wie unzureichend und nachtheilig dieser Satz sey, welcher aus der dunkeln und geheimnißvollen Art, der unendlichen Zahl hergenommen ist. Dieserhalb wird es sich der Mühe lohnen, die Eulerschen Formeln, mit einem neuen, und unumstößlichen Beweise zu versehen. *)

I	$1 - 2 + 3 - 4 +$ ꝛc. $= \frac{1}{4}$
II	$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 +$ ꝛc. $= 0$
III	$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 +$ ꝛc. $= -\frac{2}{16}$
IV	$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 +$ ꝛc. $= 0$
V	$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 +$ ꝛc. $= \frac{16}{64}$
VI	$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 +$ ꝛc. $= 0$
VII	$1^7 - 2^7 + 3^9 - 4^7 +$ ꝛc. $= -\frac{272}{256}$
VIII	$1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 +$ ꝛc. $= 0$
IX	$1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 +$ ꝛc. $= \frac{7936}{1024}$

u. ꝛc.

2)

*) Siehe Greg. Fontana Dissrt. von den Reihen im ersten Bande ersten Theils: Memorie di Matematica e Fisica della societa italiana 1784.

2) Folgende zwey Lehrsätze, müssen deshalb vorausgeschickt werden.

Erster Lehnsatz.

Vermittelst des Bogens x der durch irgend einen Radius 1, des Creises beschrieben worden, bekommt man die Gleichung

$$\text{Cos. } x + \text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 3x + \text{Cos. } 4x + \text{rc.}$$

bis ins Unendliche $= -\frac{1}{2}$. Es sey

$$S = \text{Cos. } x + \text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 3x + \text{Cos. } 4x + \text{rc.}$$

diese multiplizire man durch Cos. x, so bekommt man:

$$S\,\text{Cos. } x = \text{Cos. } x\,\text{Cos. } x + \text{Cos. } x\,\text{Cos. } 2x + \text{Cos. } x\,\text{Cos. } 3x + \text{Cos. } x\,\text{Cos. } 4x + \text{rc.}$$

Aus der Trigonometrie ist bekannt daß das Produkt aus denen Cosinussen zweyer Winkel, mit der halben Summe und der halben Differenz dieser Cosinusse gleich ist. *) Wird daher jedes Produkt besagter Gleichung, in zwey Glieder aufgelößt, so erfolgt:

$$S\,\text{Cos. } x = \tfrac{1}{2}(\text{Cos. } 2x + 1) + \tfrac{1}{2}(\text{Cos. } 3x + \text{Cos. } x) + \tfrac{1}{2}(\text{Cos. } 4x + \text{Cos. } 2x) + \text{rc.} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\text{Cos. } x + \text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 3x + \text{Cos. } 4x + \text{rc.} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\text{Cos. } x + S.$$

Daher wird

$$S(1 - \text{Cos. } x) = \tfrac{1}{2}\text{Cos. } x - \tfrac{1}{2}, \text{ d. i. } S = -\tfrac{1}{2}$$

seyn. W. Z. E. W.

Zweyter

*) Es ist nemlich aus der Trigonometrie bekannt daß $\text{Cos. } x\ \text{Cos. } y = \frac{1}{2}(\text{Cos. } x + y) + \frac{1}{2}(\text{Cos. } x - y)$. Hiernach ist also das erste Glied $\text{Cos. } x^2 = \frac{1}{2}(\text{Cos. } 2x + \text{Cos. } 0) = \frac{1}{2}(\text{Cos. } 2x + 1)$, und so findet sich jedes folgende Glied.

Zweyter Lehnsatz.

Die unendliche Reihe

$$S = \text{Sin. } x + \text{Sin. } 2x + \text{Sin. } 3x + \text{Sin. } 4x + \text{ꝛc.}$$

bis ins Unendliche ist gleich diesem Ausdruck:

$$\frac{\text{Sin. } x}{2(1 - \text{Cos. } x}$$

Wird die vorgegebene Reihe in den Cos. x, multiplizirt, so erhålt man

$$S \text{ Cos. } x = \text{Sin. } x \text{ Cos. } x + \text{Sin. } 2x \text{ Cos. } x + \text{Sin. } 3x \text{ Cos. } x + \text{Sin. } 4x \text{ Cos. } x + \text{ꝛc.}$$

Werden nun zwey Winkel φ, θ gegeben, so wird, wie aus der Theorie der Winkelfunktionen bekannt ist,

$$\text{Sin. } \varphi \text{ Cos. } \theta = \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } (\varphi + \theta) + \tfrac{1}{2} (\varphi - \theta)$$

Deshalb findet man, nach geschehener zerlegung jedes Gliedes in zwey,

$$S \text{ Cos. } x = \tfrac{1}{2} (\text{Sin } 2x + 0) + \tfrac{1}{2} (\text{Sin. } 3x + \text{Sin. } x) + \tfrac{1}{2} (\text{Sin. } 4x + \text{Sin } 2x) + \tfrac{1}{2} (\text{Sin. } 5x + \text{Sin. } 3x) + \text{ꝛc.}$$
$$= \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } x + \text{Sin. } 2x + \text{Sin. } 3x + \text{Sin. } 4x + \text{ꝛc.} = S - \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } x.$$

Daher wird durch die Versetzung

$$S - S \text{ Cos. } x = \tfrac{1}{2} \text{ Sin. } x,$$

und zuletzt

$$S = \frac{\text{Sin. } x}{2(1 - \text{Cos. } x)} \text{ seyn.}$$

W. Z. E. W.

3. Mittelst dieser Pråmissen ergiebt sich der Beweiß der Eulerschen Formeln, von selbst.

I. Man differenziire die Reihe des zweyten Lehnsatzes, und dividire selbige durch $- dx$, so entstehet hieraus

(M) $-\mathrm{Cos.}\,x - 2\,\mathrm{Cos.}\,2x - 3\,\mathrm{Cos.}\,3x - 4\,\mathrm{Cos.}\,4x -$ ꝛc. bis ins Unendliche

$$= \frac{1}{2\,(1-\mathrm{Cos.}\,x)}\ ^{*)} = \frac{1}{4\,\mathrm{Sin.}\,\tfrac{1}{2}\,x^2}.$$

Nimmt man x für die halbe Peripherie, so wird

$\mathrm{Cos.}\,x = -1$, $\mathrm{Cos.}\,2x = 1$, $\mathrm{Cos.}\,3x = -1$, $\mathrm{Cos.}\,4x = 1$, ꝛc, und also geht die gefundene Reihe, in die Ite über:

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ ꝛc. .... $= \tfrac{1}{4}$. W. Z. E. W.

II. Man differenziire die Reihe des ersten Lehrsatzes, zweymal, und dividire selbige durch dx^2, so findet man:

(N) $-\mathrm{Cos.}\,x - 2^2\,\mathrm{Cos.}\,2x - 3^2\,\mathrm{Cos.}\,3x - 4^2\,\mathrm{Cos.}\,4x - 5^2\,\mathrm{Cos.}\,5x -$ ꝛc.

wird daher x, für die halbe Peripherie genommen, so entsteht die IIte Reihe:

$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$ ꝛc. .... $= 0$

III. Man nehme aus der Gleichung (M), das zweyte Differenzial, dividire es durch $-dx^2$, so giebt selbiges die Gleichung:

(O)

*) Es ist nemlich

$$d\left(\frac{\mathrm{Sin.}\,x}{2(1-\mathrm{Cos.}\,x)}\right) = \frac{2(1-\mathrm{Cos}\,x)\,dx\,\mathrm{Cos.}\,x}{4(1-\mathrm{Cos.}\,x)^2}$$

$$- \frac{2dx\,\mathrm{Sin.}\,x^2}{4(1-\mathrm{Cos.}\,x)^2} = \frac{dx\,\mathrm{Cos.}\,x}{2(1-\mathrm{Cos.}\,x)} -$$

$$- \circ\frac{dx(1+\mathrm{Cos.}\,x)}{2(1-\mathrm{Cos.}\,x)} = \frac{-dx}{2(1-\mathrm{Cos.}\,x)};$$

wird nun hierin mit $-dx$ dividirt, so entstehet

$$\frac{1}{2\,(1-\mathrm{Cos.}\,x)}.$$

$$(O)\ -\text{Cos.}\,x - 2^3\,\text{Cos.}\,2x - 3^3\,\text{Cos.}\,3x\ \ldots\ldots - \text{ꝛc.}$$
$$= \frac{-1 - 2\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}x^2}{8\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^4}$$

die vermittelst vorgedachter Annahme von x, in die IIIte Reihe verwandelt wird:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3\text{ꝛc.}\ldots\ldots = -\tfrac{1}{8}$$

IV. Nimmt man auf gleiche Weise, die zweyte Differenz der Gleichung (N), und dividirt selbige durch $-\,dx^2$, so entstehet diese

$$(P)\ -\text{Cos.}\,x - 2^4\,\text{Cos.}\,2x - 3^4\,\text{Cos.}\,3x -$$
$$4^4\,\text{Cos.}\,4x - 5^4\,\text{Cos.}\,5x\ \ldots\ \text{ꝛc.} = 0,$$

welche nach der Hypothese $x = 180°$, in die IVte Formel übergeht

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ꝛc.} = 0.$$

V. Die zweymal differenziirte, und durch $-dx^2$ dividirte Gleichung (O), giebt:

$$(Q)\ -\text{Cos.}\,x - 2^5\,\text{Cos.}\,2x - 3^5\,\text{Cos.}\,3x -$$
$$4^5\,\text{Cos.}\,4x - \text{ꝛc.} = \frac{2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}x^2 + 13\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x^2 + 2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x^4}{8\,\text{Sin.}\,\tfrac{1}{2}x^5}$$

Wird daher wie gebräuchlich $x = 180°$ genommen, so geht gedachte Gleichung, in die Vte Formel über:

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5\ldots\ldots + \text{ꝛc.} = \tfrac{1}{4}.$$

VI. Man nehme die zweyte Differenz der Gleichung (P), dividire selbige durch $-\,dx^2$, so erhält man die Gleichung:

$$-\text{Cos.}\,x - 2^6\,\text{Cos.}\,2x - 3^6\,\text{Cos.}\,3x -$$
$$4^6\,\text{Cos.}\,4x\ \ldots\ldots - \text{ꝛc.} = 0.$$

Deswegen artet selbige, durch die Substitution der halben Peripherie für x in die VIte Formel aus:

$1^6 -$

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 \ldots\ldots + \text{rc.} = 0.$$

W. Z. E. W.

Auf eben diese Art, können alle Eulerschen Lehr-Lehrsätze, der Reihen ganzer positiver Potenzen, aus natürlichen Zahlen, mit abwechselnden Zeichen bestehend, bewiesen werden, und man kann überhaupt festsetzen, daß die Reihen grader Größen, mit einer uneigentlichen genannten Summe, oder vielmehr mit einer erzeugenden Größe, versehen sind, welche stets dem Nichts gleich ist; dahingegen die Reihen ungerader Potenzen, mit einer Summe, oder erzeugenden Größe die allezeit von dem Nichts verschieden ist, versehen werden müssen.

Eben so können auch andere, den Eulerschen ähnlichen Lehrsätzen, von den Reihen der Potenzen ungerader Zahlen, die mit abwechselnden Zeichen versehen sind, bewiesen werden.

$$1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{rc.}$$

Sowohl in diesen Reihen ungerader, als auch in jenen gerader Zahlen, kann man überhaupt festsetzen: daß die ungeraden Potenzen aus einer erzeugenden Größe, die dem Nichts gleich ist, die geraden hingegen aus einer bestimmten Größe, entspringen.

Anm. zum 208. §. II. Thnils.

Durch die Differenzialrechnung, können mit besonderer Kürze, auch auf folgende Art, die Coefficienten der Formel, welche das allgemeine Glied, jeder zurückkehrenden Reihe ausdrückt, gefunden wer-

werden. Es sey also, die aus der zurückkehrenden Reihe, der Ordnung t,

$$y_x,\ y_{x+1},\ y_{x+2}, \ldots y_{x+t-1},\ y_{x+t},$$

entstandene Gleichung,

$$Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} \ldots + My_{x+t} = 0,$$

aus welcher, wenn $y_x = az^x$ gemacht worden, durch die Substitution (nach geschehener Division durch az^x) die Beziehungs-Gleichung hervorgehet

$$(A) \quad A + Bz + Cz^2 \ldots + Mz^{t-1} + z^t = 0.$$

Man gedenke sich α, β, γ, δ als Wurzeln dieser Gleichung; diese Wurzeln seyen $= \alpha$ in der Zahl n, so wird gedachte Gleichung, diese Gestalt annehmen:

$$(B) \quad (z-\alpha)^n(z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots + fz^2 + gz + k) = 0 = P$$

wenn $m + n = t$ angenommen worden. Man bestimme

$$z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots fz^2 + gz + k = Z,$$

so wird

$$(z-\alpha)^n Z = P$$

Es sey ferner:

$$dZ = Z' dz,\ ddZ = Z'' dz,\ d^3 Z = Z''' dz \text{ etc.}$$

Hieraus bekommt man

$$\frac{dP}{dz} = n(z-\alpha)^{n-1} Z + (z-\alpha)^n Z',$$

so erfolgt, wenn

$$n = 1,\ z = \alpha$$

gemacht worden,

$$\frac{dP}{dz} = Z.$$

Die zweyte Differenziirung giebt:

$$\frac{ddP}{dz^2} = n(n-1)(z-\alpha)^{n-2}Z + 2n(z-\alpha)^{n-1}Z' + (z-\alpha)^n Z'';$$

und wenn $n = 2$, $z = \alpha$ gesetzt worden, so erhält man:

$$\frac{ddP}{2d\alpha^2} = Z.$$

Durch gleiche Art zu schließen wird gefunden,

$$\frac{d^nP}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n\, d\alpha^n} = Z,$$

wenn $z = \alpha$, und n, irgend eine Zahl der natürlichen Reihe 1, 2, 3, ꝛc. ist. Da nun

$$Z = (z - \beta)\; z - \gamma)\; z - \delta) \text{ ꝛc.}$$

und α für z gesetzt worden, so wird

$$Z = (\alpha - \beta)\;(\alpha - \gamma)\;(\alpha - \delta) \text{ ꝛc.}$$

Wenn also in der Gleichung (B), die Wurzel α einzig, oder wenn $n = 1$ ist, so erhalten wir

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - \beta)\;(\alpha - \gamma)\;(\alpha - \delta) \text{ ꝛc.};$$

sind aber zwey gleiche Wurzeln α, dergestallt daß $\beta = \alpha$, so ist

$$\frac{d^2P}{2da^2} = (\alpha - \gamma)\;(\alpha - \delta) \text{ ꝛc.};$$

sind drey gleiche Wurzeln d. i. $\alpha = \beta = \gamma$, so erlangen wir:

$$\frac{d^3P}{2 \cdot 3 d\alpha^3} = (\alpha - \delta)\;(\alpha - \varepsilon) \text{ ꝛc. u. s. f.}$$

2) Es sey $B + Cz + Gz^2 \ldots + z^{t-1} = Q$, und wegen

$$A + Bz + Cz^2 \ldots + Mz^{t-1} + z^t = (z - \alpha)^n (z^m + pz^{m-1} + qz^{m-2} \ldots + fz^2 + gz + k),$$

desgleichen $A = k\,(-\alpha)^n$, so ergiebt sich, wenn A weggenommen, und mit z dividirt worden

$$Q = \frac{(z - \alpha)^n Z - k\,(-\alpha)^n}{z};$$

ist

ist aber $n = 1$, und $z = \alpha$ gesetzt worden, so entspringt $Q = k$. Aus der Differenziazion aber, wird weggelassen

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{n(z-\alpha)^{n-1}Z + (z-\alpha)^n Z'}{z} - \frac{(z-\alpha)^n Z + (k-\alpha)^n}{z^2},$$

und da, wo $n = 2$, $z = \alpha$ angenommen worden, erfolgt

$$\frac{dQ}{dz} = k.$$

Differenzirt man nun zum dritten, viertenmal rc., so wird

$$\frac{ddQ}{2d\alpha^2} = k$$

gefunden, wenn $n = 3$, $z = \alpha$, desgleichen auch

$$\frac{d^3Q}{2.3d\alpha^3} = k,$$

wenn $n = 4$, $z = \alpha$ und überhaupt

$$\frac{d^{n-1}Q}{1.2.3\ldots(n-1)\,dx^{n-1}} = k,$$

wenn n irgend eine Zahl der natürlichen Reihe 2, 3, 4, rc. ist, die mit der Zahl zwey anfängt. k hingegen, mit dem Produkt aus $-6X - \gamma X - \delta$ rc. gleich ist müssen mit diesem Produkt, vorbenannte Differenzialien gleich werden.

Man bestimme daß

$$R = C + Dz + Ez^2 \ldots + z^{t-2},$$

so wird weil

$$A = k(-\alpha)^n, \; B = nk(-\alpha)^{n-1} + g(-\alpha)^n$$

nach Weglassung des Gliedes $A + Bz$, aus der Gleichung (A) und geschehener Division durch z^2,

$$R = \frac{(z-\alpha)^n Z - z[nk(-\alpha)^{-1} + g(-\alpha)^n]}{z^2}$$

seyn;

seyn; also geht in der That, der Ausdruck in der Hypothese $n = 1$, $z = \alpha$, in $R = g$ über. Wird das Differenzial genommen u. $n = 2$, $z = \alpha$ gemacht, so findet man $\frac{dR}{d\alpha} = g$; nimmt man hinwiederum $n = 3$, $z = \alpha$ so entdeckt man $\frac{d^2 R}{2 d\alpha^2} = g$, 2c. nach eben der Weise und Ordnung, wie vorhin. Es ist aber g, ein Aggregat der Produkte, aus den Wurzeln $-\beta, -\gamma, -\delta$, 2c. welche Produkte ihre Benennung, von der Zahl $n - 1$ entlehnen, folglich werden mit dem Aggregat der Produkte, alle vorbesagte Differenzialien äquirt.

Gleicherweise, wenn

$$S = E + Cz \ldots + a^{t-1}$$

gesetzt wird, so findet man

$$\frac{d^{n-1} S}{1 . 2 . 3 \ldots (n - 1) d\alpha^{n-1}} = f,$$

d. i. dem Aggregat der Produkte, aus den Wurzeln $-\beta, -\gamma, -\delta$, 2c. Diese Produkte erhalten ihre Benennung, vom Exponenten $n - 2$. Und so jederzeit von den übrigen.

3) Es sey zum Beyspiel, das allgemeine Glied der rückkehrenden Reihe

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x,$$

wo (Anm. nach den IIten Cap.)

$$a = \frac{\beta\gamma y_0 - (\beta + \gamma) y_1 + y_2}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)};\ b = \frac{\alpha\gamma y_0 - (\alpha + \gamma) y_1 + y_2}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)};$$

$$c = \frac{\alpha\beta y_0 - (\alpha + \beta) y_1 + y_2}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Weil aber nach dieser Hypothese, drey ungleiche Wurzeln α, β, γ, herauskommen, so wird

$$\frac{dP}{d\alpha} = (\alpha - \beta)(\alpha - \gamma);\ Q = \beta\gamma;\ R = -\beta - \gamma$$

seyn. Deshalb giebt

$$a = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{dP}{d\alpha}},$$

welcher Werth in b übergeht, indem α in β und β in α verwandelt wird. Eben so gehet er auch in c über, indem α mit γ, und γ mit α vertauschet wird.

4) Man gedenke sich jetzt, nach angeführtem Beyspiel, als wenn die beyden gleichen Wurzeln $\alpha = \beta$, wären, so nimmt nach dieser Hypothese, das allgemeine Glied, diese Form an $a'\alpha^x + b'\alpha^{x-1} + c\gamma^x$, wo (im ange. Ort §. 16.)

$$a' = \frac{-y_2 + 2\alpha y_1 + (\gamma^2 - 2\alpha\gamma)y_0}{(\alpha - \gamma)^2};\ b' = \frac{y_2 - (\alpha + \gamma)y_1 + \alpha\gamma y_0}{\alpha - \gamma};$$

$$c' = \frac{y_2 - 2\alpha\, y_1 - \alpha\alpha y_0}{(\gamma - \alpha)^2}.$$

Den Werth von a', bringe man auf diese Form zurück

$$\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha - \gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha + \gamma)y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha - \gamma)^2}.$$

die von der vorhergehenden, wie hieraus erhellet, nicht verschieden ist.

Vermöge der Hypothese, nach welcher n = 2, wird

$$Q = \frac{-k\alpha^2}{\alpha} = -\alpha k = \alpha\gamma,$$

wegen $k = -\gamma$ gefunden. Macht man gleichfalls n = 2, so ergiebt sich:

$$R = \frac{-\alpha^2 k - g\alpha^3 + 2\alpha^2 k}{\alpha^2} = k - \alpha g = -\gamma - \alpha,$$

weil

weil $k = -\gamma$, $g = 1$. Daher ist

$$b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}.$$

Es ist aber

$$\frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha - \gamma} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha} y_0 + \frac{dR}{d\alpha} y_1}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}},$$

und hinwiederum

$$\frac{-\gamma y_2 + (\alpha + \gamma) y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha - \gamma)^2} = \frac{-b'}{\alpha - \gamma} = -\frac{b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

folglich

$$a' = \frac{-\gamma y_0 + y_1}{\alpha - \gamma} + \frac{-y_2 + (\alpha + \gamma) y_1 - \alpha\gamma y_0}{(\alpha - \gamma)^2} = \frac{\frac{dQ}{d\alpha} y_0 + \frac{dR}{d\alpha} y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}$$

Dieserwegen werden die Werthe, der unbestimmten Coeffizienten, folgendermaaßen ausgedrückt:

$$\text{I. } c = \frac{y_2 - 2\alpha y_1 + \alpha\alpha y_0}{(\gamma - \alpha)^2}; \text{ II. } b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + y_2}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}};$$

$$\text{III. } a' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha} y_0 + \frac{dR}{d\alpha} y_1 - b'}{\frac{ddP}{2d\alpha^2}}.$$

5) Wenn drey gleiche Wurzeln vorhanden, und im allgemeinen Gliede der Reihe c″, b″, a″, unbestimmte Coeffizienten, gleichen Wurzeln vorgesetzt sind (welche von den übrigen Wurzeln, auch immer un-

gleiche seyn mögen) so erhalten wir jederzeit, nach eben dieser Art zu schließen, folgende Formeln:

$$\text{I. } c'' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + Ty \text{ ꝛc.}}{\frac{d^3P}{2\,.\,3d\alpha^3}};$$

$$\text{II. } b'' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 \text{ ꝛc.} - c''}{\frac{d^3P}{2\,.\,3d\alpha^3}};$$

$$\text{III. } a'' = \frac{\frac{ddQ}{2d\alpha^2}y_0 + \frac{ddR}{2d\alpha^2}y_1 + \frac{ddS}{2d\alpha^2}y_2 \text{ ꝛc.} - b''}{\frac{d^3P}{2\,.\,3d\alpha^3}}.$$

Hieraus kann man auf das deutlichste, den Fortgang auf andere Fälle folgern, wo vier, fünf, sechs ꝛc. gleiche Wurzeln, vorhanden sind.

Anm. zum XI. Capitel II. Theils.*)

1. Eine Funktion irgend einer veränderlichen Grösze, wird dann allezeit ein Gröstes oder Kleinstes wenn die verschwindenden Differenzialien der Funktion, auf einander folgender Ordnungen, von ungerader Zahl sind; ein Gröſztes hingegen so oft deren übrig bleibendes Differenzial, nach dem zuletzt verschwindenden, negativ ist; ein Kleinstes aber, wenn es positiv ist. Dies wird sowohl von unserem Autor, als von andern, hin und wieder bewiesen.

2) Nach Erwägung dessen, sey Z eine algebraische Funktion, der veränderlichen Gröſzen t, u, x, y, ꝛc. deren gröſzte und kleinste Werthe, erforscht werden

*) Nach der deutschen Uebersetzung 3ter Theil.

den müssen; aus dem Bewiesenen also ist

$$dZ = pdt + qdu + rdx + sdy + \text{rc},$$

woraus alsdann diese Gliechung fließt:

$$pdt + qdu + rdx + sdy + \text{rc.} = 0.$$

Da ferner die Beziehung, zwischen den veränderlichen Größen t, u, x rc. so wie auch unter ihren Differenzialien dt, du, dx rc noch unbestimmt ist, ihre Beziehung mag seyn welche sie wolle, so folgt augenscheinlich, wenn vorbesagte Gleichung, statt haben soll, daß die einzelnen Glieder pdt, qdu, rdx rc. gleich Null gesetzt werden müssen. Hieraus entstehen nun, so viele Gleichungen, als veränderliche Größen vorhanden sind, nehmlich:

$$\text{I. } p = 0;\ \text{II. } q = 0;\ \text{III. } r = 0;\ \text{rc.}$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen, werden die Werthe der unbekannten Größen t, u, x, rc. gefunden, die wenn sie in der Funktion Z, an deren Stelle gesetzt werden, dieselbe entweder zum Größten oder Kleinsten machen.

3) Nun wollen wir zum zweiten Differenzial schreiten. Wenn, wie es erlaubt ist, als erste beständige Differenzialien dt, du, dy rc. angenommen werden, so erfolgt:

$$d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + dsdy + \text{rc.}$$

Es sey:

$$dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$$
$$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$$
$$dr = Ddt + Edu + Fdx + Jdy$$
$$ds = Gdt + Hdu + Jdx + Ldy.$$

Daraus wird nun gefunden:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2 + 2Ddtdy + 2Hdudy + 2Jdxdy + Ldy^2.$$

Da=

Damit wir aber, unter allen vom einfachsten Fall anfangen, so wollen wir annehmen, daß eine der veränderlichen Größen, t sey, und also $d^2Z = Adt^2$, wobey wegen des allezeit bejahenden Werthes dt^2, das Differenzial d^2Z, stets mit demselben Zeichen, versehen seyn muß, womit die Größe A begabt ist; deshalb wird Z, die kleinste seyn, wenn A positiv; die größeste aber, wenn A negativ ist. Wenn nun $A = 0$ gefunden worden, so kann von den darauf folgenden Differenzialien von Z, das Kennzeichen des Maximum und Minimum, hergeholet werden.

4 Gesetzt nun, es wären in der Funktion Z, zwey veränderliche Größen t und u enthalten; so erfolgt nach dieser Hypothese:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Ddu^2 = A\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2$$
$$+ \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2.$$

Da in dieser Gleichung die Quadrate

$$\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2,$$

und du^2 stets positiv sind, so muß das zweyte Differenzial d^2Z, nothwendig positiv seyn, so oft nehmlich je zwey Coeffizienten A und $C - \frac{B^2}{A}$ bejahend wären; negativ hingegen ist es, wenn dieselben beyde verneinend sind, die wechselseitige Beziehung der Differenzialien dt, und du mag seyn, welche sie wolle. Daher wird für den kleinsten Werth der Funktion Z, gehalten werden

$$A > 0, C - \frac{B^2}{A} > 0,$$

nehm-

nehmlich

$$C > \frac{B^2}{A}, \text{ oder } CA > B^2,$$

weshalb $C > o$. Die vorgegebene Funktion Z, kann dieserwegen, nicht die kleinste, als nur unter folgenden drey Bedingungen seyn:

$$\text{I. } A > o; \quad \text{II. } C > o; \quad \text{III. } AC > B^2$$

Auf eben diese Art zu schließen, finden wir, daß der größte Werth von Z, sey

$$A < o; \; C - \frac{B^2}{A} < o, \text{ oder } C < \frac{B^2}{A};$$

desgleichen $CA > B^2$, weil A negativ, also auch $C < o$; deshalb kann die Funktion Z, nicht das Maximum erlangen, als unter diesen drey Bedingungen:

$$\text{I. } A < o; \quad \text{II. } C < o; \quad \text{III. } CA > B^2.$$

Hieraus erhellet ferner, daß die Bedingungen des Maximums, theils übereintreffen, theils den Bedingungen des Minimum, entgegen sind.

5) Wenn entweder A, oder C, oder beyde zugleich $= o$ sind, oder auch $B = o$, so kann die vorhergehende Bedingung $AC > B^2$, keinesweges statt haben, folglich erlangt die vorgegebene Größe, niemahls den Werth des Maximum oder Minimum. Eben dieses wird sich ereignen, wenn A und C, entgegengesetzte Zeichen haben sollten, weil alsdann wegen des allezeit positiven Werthes B^2 die Bedingung $AC > B^2$ unmöglich wird. Wenn aber B, zugleich mit A oder C verschwindet, so hängt der Werth des zweyten Differenzials d^2Z, blos allein von der veränderlichen Größe ab, welcher diesem zufolge, entweder Maximus,

mus, oder Minimus oder keines von beyden, wäre, und zwar nach denen, vom Autor angegebenen Kennzeichen, für die Funktionen einer veränderlichen Größe. Wenn endlich die ganze Größe $d^2Z = 0$, nehmlich $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, so muß man zum dritten Differenzial d^3Z, seine Zuflucht nehmen; verschwindet dieses nicht, so kann die Funktion Z, weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn; sollte es aber verschwinden, so muß man das vierte Differenzial d^4Z, suchen, wo man alsdann, nach der hier dargestellten Methode, leicht erkennen wird, ob der Werth desselben positiv, oder negativ sey, und hieraus wird sich hinwiederum, der größte oder kleinste Werth, der vorgegebenen Funktion, ergeben.

6) Ist Z eine Funktion, von drey veränderlichen Größen t, u, x, so nimmt das Differenzial d^2Z, diese Form an:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2$$

$$= A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2$$

$$+ 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)dudx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right)dx^2$$

Es werde

$$C - \frac{B^2}{A} = a;\ E - \frac{BD}{A} = b;\ F - \frac{D^2}{A} = c,$$

so geht die Gleichung in diese über:

$$d^2Z = A\left(dt + \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + adu^2 + 2bdudz + cdx^2$$

$$= A\left(dt\ \frac{Bdu}{A} + \frac{Ddx}{A}\right)^2 + a\left(du + \frac{bdx}{a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dx^2$$

Da aber wegen des Werthes der Quadrate,

(dt

$$\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2, \left(du + \frac{b\,dx}{a}\right)^2, \text{ und } dx^2$$

welcher stets positiv ist, so wird auch das Differenzial d^2Z, gleichfalls positiv seyn, wenn die Coeffizienten A, a, und $c - \frac{b^2}{a}$, mit dem Zeichen + versehen worden, folglich finden für den kleinsten Werth der Funktion Z, folgende Bedingung statt

$$A > 0;\ a > 0;\ ca > b^2,$$

oder wenn deren Werthe, a, b, c dafür in die Stelle gesetzt werden:

$$A > 0;\ C - \frac{B^2}{A} > 0;\ \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\left(F - \frac{D^2}{A}\right) > \left(E - \frac{BD}{A}\right)^2,$$

nehmlich

$$A > 0;\ CA > B^2 \text{ und } (CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2;$$

woraus abermals

$$C > 0,\ F > 0,\ \text{und } FA > D^2$$

entstehet. Deshalb wird das Minimum der Funktion Z, unter folgenden fünf Bedingungen, bestimmt werden:

$$\text{I. } A > 0;\ \text{II. } C > 0;\ \text{III. } F > 0;\ \text{IV. } CA > B^2;\ \text{V. } FA > D^2.$$

Gleicherweise wird der größte Werth von Z, unter diesen Bedingungen gefunden werden:

$$A < 0,\ CA > B^2, \text{ und } (CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2;$$

denn I. muß $a < 0$ seyn, nehmlich:

$$C - \frac{B^2}{A} < 0, \text{ oder } C < \frac{B^2}{A};$$

es ist aber A negativ, folglich

$CA > B^2$. II. ist $c - \frac{b^2}{a} < 0$; d. i. $c < \frac{b^2}{a}$;

weshalb, weil a negativ $ca > b^2$, d. i.

(C —

$$\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\left(F-\frac{D^2}{A}\right)>\left(E-\frac{BD}{A}\right)^2 \text{ oder}$$

$$(CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2$$

woraus $FA > D^2$, und $F < 0$ entsteht. Es sind daher die Bedingungen des Maximum folgende:

I. $A < 0$; II. $C < 0$; III. $F < 0$; IV. $CA > B^2$; V. $FA > D^2$.

7. Wenn die Größen A oder C einzeln, oder beyde verschwinden, so wird die IVte Bedingung unmöglich. Verschwindet F, so fällt die Vte Bedingung weg. Hieraus folgt, daß die Funktion Z, weder Maxima, noch Minima seyn könne, wenn die Größen A, C, F sowohl einzeln, als alle verschwinden.

Aus dem Gesagten erhellet deutlich, daß die Theorie auf vier Funktionen, oder auch auf mehrere veränderliche Größen, anzuwenden sey.

8. Da diese neue Theorie, von Eulern nicht berühret worden ist, so wird es nicht unnütz seyn, folgendes zu bemerken.

Von welcher Zahl auch, die veränderlichen Größen seyn mögen, welche in die angegebene Funktion Z eintreten, wenn jede derselben, für sich betrachtet, und das Maximum oder Minimum gesucht wird, welcher derselben zukommt, während die übrigen stets dieselben bleiben, so werden einzeln, die ersten Differenzialien pdt, qdu, rdx, sdy ꝛc. gefunden werden, deren jedes gleich Null gesetzt die §. 2. dargestellten Gleichungen, liefern wird, nehmlich

$$p = 0,\ q = 0,\ r = 0,\ s = 0 \text{ ꝛc.}$$

Auf eben diese Art werden die für sich, bis auf die zweyten Differenzialien, fortgehenden Größen

$$Adt^2,\ Cdu^2,\ Fdx^2,\ Ldy^2 \text{ ꝛc.}$$

ge-

gefunden, wobey, wenn A, C, F, L rc. entweder sämmtlich positiv, oder negativ wären, jeder leicht einsehen wird, daß die Werthe derselben t, u, x rc., die aus den Gleichungen p = o, q = o rc. herausgeworfen worden, nothwendig der vorgegebenen Funktion Z, entweder der größte oder kleinste Werth, beylegen werden. Und so ist in der That ausgemacht, daß diese Funktion Z, wenn sie nur das Verhältniß, einer der vorgedachten veränderlichen Größen hat, entweder Maxima oder Minima seyn müsse. Allein wird wohl jemand mit Sicherheit, das Urtheil fällen können: daß dasjenige, was für irgend eine veränderliche Größe, für sich betrachtet, behauptet werden könne, für alle zugleich genommen, gelten müsse. Dies wollen wir aufs genaueste untersuchen.

9. Es sey also Z, die Funktion zweyer veränderlichen Größen t und u, die zugleich die Ordinate sind, so daß die Coordinate dieser Fläche, drey veränderliche Größen Z, t, und u, derselben. Die Frage wird also darauf ankommen, daß man die größte Ordinate der Fläche, finden müße, deren Gleichung $dZ = pdt + qdu$ sey. Wenn u zu einer beständigen Größe gemacht wird, so geht die Gleichung in $dZ = pdt$ über, und sie drückt alsdann, alle mit der Axe dieser Fläche, parallel gehenden Schnitte, der Größe t aus, je nachdem die Größe u, verschiedene Werthe annimmt. Man setze p = o, und nehme aus dieser Gleichung, den Werth der Größe t, welcher in jeglichen Parallelschnitten, die Ordinate Z entweder wieder Maximam oder Minimam machen wird.

wird. Weil nun u als beständig angenommen wird, so ist das zweyte Differenzial $d^2Z = Adt^2$, folglich kann man billig, aus dem bloßen Werth von A, auf die existenz des Maximum oder Minimum schließen, wofern nur der begehrte Werth t, aus der Gleichung $p = o$, substituirt wird. Wenn also für jeden Werth von u, die Größe A entweder negativ, oder positiv gefunden wird, so bekommen alle vorgedachte Schnitte, entweder Maximum oder Minimum, und wenn für den verschiedentlichen Werth von u, die Größe A mit verschiedenen Zeichen, versehen wird, so erhalten diese Schnitte, unter gewissen festgesetzten Einschränkungen, das Maximum oder Minimum. Wäre $A = o$, es sey der Werth der beständigen Größe, welcher er wolle, dann wird keiner jener Schnitte, weder das Maximum oder Minimum haben. Ist hingegen A allein $= o$, wenn u bestimmte Werthe hat, dann werden diese Schnitte, welche vorgedachten Werthen von u entsprechen, sowohl das Maximum als Minimum, nach dieser Hypothese, beraubt. Der geometrische Ort, aller dieser Ordinaten, ist in der Gleichung $p = o$, in bloßer Erwägung der Veränderlichkeit von u, enthalten; daher bilden die Ordinaten in dieser Fläche, einen Schnitt, der entweder von einfacher, oder doppelter Krümmung ist, und der durch je zwey verbundene Gleichung,

$dZ = pdt + qdu$ und $p = o$ oder $dZ = qdu$ und $p = o$, bestimmt werden wird. Woraus es deutlich ist, daß man bey Erfindung des Maximum oder Minimum, der ganzen Fläche, die größte oder kleinste Ordinate, die diesem Schnitt gemäß ist, suchen müße; dadurch bekommt man wiederum $q = o$, welche

che Gleichung, den Werth der andern veränderlichen Größe u, darbieten wird.

10. Nun wollen wir, zum Differenzial von q, nehmlich zur vorhin gefundenen Gleichung $dq = Bdt + Cdu$, übergehen. Da also aus der Gleichung $p = o$, t durch u bestimmt wird, oder im Differenzial dieser Gleichung $Adt + Bdu = o$ also $dt = -\frac{Bdu}{A}$ wenn man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so ist; $dq = (-\frac{B^2}{A} + C)\, du$ woraus sich ergiebt, daß die Ordinate Minima seyn werde, wenn die Größe $-\frac{B^2}{A} + C$ positiv, d. i. $C > \frac{B^2}{A}$ war; Maxima hingegen, wenn $C < \frac{B^2}{A}$ ist, endlich aber weder Maxima noch Minima, wenn $C = \frac{B^2}{A}$, in sofern die übrigen höhern Differenzialien, unter den oben angezeigten Bedingungen, behauptet werden. Wenn wir nun solchergestalt, das Maximum und Minimum reiflich erwägen, so werden wir finden, daß die Ordinate Z, unter allen übrigen, nicht ein Größtes seyn könne, die in der Durchschneidung, vermöge der Gleichung $dZ = qdu$ enthalten, wofern nicht alle Ordinaten, die diesen Schnitt ausmachen, eben so viele Maxima, in homologen Parallelschnitten sind. Aus gleichem Schluße, kann auch die Größe Z, nicht Minima seyn, wofern sie nicht gleichfalls Minima, in dem Schnitte ist, der alle Minima umfaßt. Hieraus kann man ferner schließen, daß die Werthe von t und u, welche

aus

aus den Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ hergeleitet, und die in den Größen A, und $C - \frac{B^2}{A}$ substituiret worden, den größten Werth der Ordinate Z, annehmen, wo A negativ und $C < \frac{B^2}{A}$, d. i. $CA > B^2$ war, so wie hingegen die Ordinaten Z, durch jene Substitution, den kleinsten Werth bekommen, wenn A bejahend, und $C > \frac{B^2}{A}$, oder $CA > B^2$ ist; welches alles mit der oben erklärten, allgemeinen Theorie, übereinstimmt.

11. Die vorerwähnten Bedingungen finden statt, wenn u zuerst als beständig betrachtet wird, t aber als veränderlich; geschiehet aber das Gegentheil, und man nimmt u als veränderlich, t hingegen als beständig an, so ereignen sich folgende Bedingungen: $C < 0$ und $AC > B^2$, fürs Maximum: $C > 0$ und $AC > B^2$ fürs Minimum; welches in der That auf eins hinausläuft. Uebrigens wird diese andere Methode, die Bedingungen derer Maximum und Minimum, bey Erfindung der Funktionen, zweyer veränderlicher Größen, gleichfalls auf andere, mehr komplexe Funktionen, angewendet. Diese Methode ist mehr direkt, und analytisch, als die erstere, weshalb wir dieselbe, hier überhaupt entwickeln wollen.

12. Gesetzt es wären in der Funktion Z, so viele veränderliche Größen enthalten, als man deren wolle, die übrigen hingegen, würden als beständige betrachtet, so erwäge ich eine derselben, bloß als veränderliche Größe, und leite aus der Differenziation, die Gleichung für das Maximum oder Minimum ab,

wird

wird nun nach dieser Hypothese, das zweyte Differenzial genommen, so können die Bedingungen bestimmt werden, welche der Funktion Z, entweder der größten, oder kleinsten Werth, oder keinen von beyden, beylegen. Vermöge dieser ersten, absoluten Operation, substituire man in der Funktion Z, oder deren Differenzialien, den gefundenen Werth, der ersten veränderlichen Größe. Eben so stelle man auch, die Rechnung bey der andern, veränderlichen Größe an, und substituire deren hervorgebrachten Werth, in der Funktion Z; endlich gehe man zur Untersuchung, der 3ten veränderlichen Größe u. s. w. fort. Betrachtet man t, als die erste veränderliche in Z, so ist $dZ = pdt$, $d^2Z = Adt^2$, woraus sich $p = 0$, und $A > 0$ für das Maximum ergiebt. Wären t und u beyde veränderlich, so würde $dZ = pdt + qdu$ erfolgen, und diese Gleichung, wegen $p = 0$, in $dZ = qdu$ übergehen, woraus folgt, daß $d^2Z = (Bdt + Cdu)\,du$; da nun $p = 0$, so ist auch $dp = 0$, und $Adt + Bdu = 0$, oder $dt = -\frac{Bdu}{A}$; substituirt man diesen Werth, in der vorigen Gleichung, so erhält man

$$d^2Z\left(-\frac{B^2}{A} + C\right)du^2.$$

Folglich wird $q = 0$ und $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ für das Minimum, $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ für das Maximum seyn. Weil nun A positiv beym Minimum, negativ beym Maximum ist, so entspringt für beyde, die Bedingung $AC > B^2$.

Ist

Ist außer den vorhergehenden, zwey veränderliche Größen, auch die dritte x, zu erwägen, so wird der Werth von dZ, in Ansehung der drey veränderlichen t, u, x gesucht, und man erhält

$$dZ = pdt + qdu + rdx,$$

welche Gleichung wegen $p = 0$, $q = 0$ in $dZ = rdx$ übergeht; daher bekommt man das zweyte Differenzial $d^2Z = (Ddt + Edu + Fdx)\, dx$; alsdann suche man aus den Gleichungen $p = 0$, $q = 0$ oder $dp = 0$, $dq = 0$, d. i, $Adt + Bdu + Ddx = 0$, und $Bdt + Cdu + Edx = 0$, die durch dx ausgedrückten Werthe, von dt und du, so findet man:

$$dt = \frac{BE - CD}{AC - B^2}\, dx\,;\; du = \frac{BD - AE}{AC - B^2}\, dx.$$

Nach deren Substituirung, in dem Ausdruck d^2Z, gelangt man auf die Gleichung

$$d^2Z = \left(\frac{BE - CD}{AC - B^2}\, D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\, E + F\right) dx^2.$$

woraus folgt, daß man für das Maximum oder Minimum, zuerst $r = 0$ bekommen werde, sodann aber

$$\frac{BE - CD}{AC - B^2}\, C + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\, E + F > 0$$

für das Minimum, und < 0 für das Maximum. Wenn nun der Nenner $AC - B^2$, der jederzeit positiv ist, weggenommen wird, so erfolgt

$$2BDE - CD^2 - AE^2 - FB^2 + ACF > 0,$$

für das Minimum, und < 0 für das Maximum. Diesen Ausdruck multiplizire man in A, welcher im ersten Fall positiv, und im andern negativ ist, so erhält man:

2ABDE

$2ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0$, sowohl für das Maximum, als Minimum, d. i.

$$(CA - B^2)(FA - D^2) > (AE - BD)^2.$$

Wie groß auch immer die Zahl, der veränderlichen Größen gewesen seyn mag, so wird dennoch immer die Sache, nach eben dieser Methode bewerkstelliget.

Diese neue Theorie, erläutert der berühmte de la Grange, von welchem wir selbige hergenommen haben, durch folgende Beyspiele:

Erstes Beyspiel.

Wenn eine beliebige Anzahl, vollkommen elastischer Kugeln, in gerader Linie, jede von der Andern abgesondert, sich befinden, von denen die erste, mit der gegebenen Geschwindigkeit c, sich zur andern, diese mit der erlangten Geschwindigkeit, sich zur dritten, die dritte zur vierten und so fort, bis zur letzten bewegt; und der ersten und letzten Masse gegeben worden, die Masse aller mittlern zu finden, so daß die letzte Kugel, die größte Geschwindigkeit unter allen, durch den Anstoß erhält.

Es sey der ersten Masse a, der letztern b, und t, u, x, y ꝛc. die mittlern unbekannten Massen, so wird nach den bekannten Gesetzen des Stoßes, die Geschwindigkeit, welche die erste Kugel a, der andern t mittheilt, gefunden $= \frac{2ac}{a + t}$; ferner die Geschwindigkeit, welche die zweyte der 3ten u giebt, ist $= \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$;

jener der 4ten x, durch den Anstoß der 3ten ist

$$= \frac{2actu}{(a+t)(t+u)(u+x)} \text{ u. s. f.}$$

Es kam daher die Geschwindigkeit der letzten b, ausgedrückt werden durch:

$$\frac{2catuxy \ldots\ldots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots\ldots},$$

folglich muß diese Größe, ein Maximum seyn. Man setze diese = Z, und nehme auf beyden Seiten Logarithmen, so erhält man

$$l2ca + lt + lu + lx + ly + \text{etc.} - l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) - \text{etc.} = lZ,$$

hieraus entsteht durch die Differenziation

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \text{etc.} \\ -\frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} - \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{dZ}{Z};$$

werden nun die Glieder, mit eben demselben Differenzial verbunden, und auf einerley Benennung gebracht, so bekommt man:

$$dZ = \frac{Z(au-t^2)dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx-u^2)du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy-x^2)dx}{u(u+x)(x+y)} + \text{etc.}$$

worauf für das Maximum und Minimum, folgende Gleichungen sich ergeben:

$au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$ etc. welche die Analogien $a:t = t:u = u:x = x:y$ etc. darbieten, und zwar

$$\div\!\div\; a : t : u : x : y : \ldots\ldots b;$$

es bilden daher die Massen aller Kugeln, eine geometrische Progression, aus den beyden äußersten Gliedern a und s bestehend. Damit wir aber auch das

Ma-

Maximum, vom Minimum unterscheiden können, so sey der Kürze wegen:

$$\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha; \frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta; \frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma \text{ ꝛc.}$$

folglich, wenn die Gleichung §. 2, hiermit verglichen wird, so ist

$$p = \alpha(au - t^2); q = \beta(tx - u^2); r = \gamma(uy - x^2); \text{ ꝛc.}$$

also

$$dp = (au - t^2)d\alpha + \alpha(adu - 2tdt); dq = (tx - u^2)d\beta + \beta(xdt + tdx - 2udu); dr = (uy - x^2)d\gamma + \gamma(ydu + udy - 2x\,dx); \text{ ꝛc.}$$

Da aber die Glieder a, t, u, x, y ꝛc. stetig proportional sind, in Rücksicht der beständigen Verhältniß $1 : m$, einer jeden vorhergehenden, zu seinem nachfolgenden Gliede, so werden wir

$$t = ma, u = m^2a, x = m^3a, y = m^4a \text{ ꝛc.}$$

finden, desgleichen

$$\beta = \frac{\alpha}{m^3}, \gamma = \frac{\alpha}{m^6} \text{ ꝛc.};$$

diese in den vorigen Ausdrücken, substituirten Werthe, geben:

$$dp = \alpha a(du - 2mdt)$$

$$dq = \alpha a\left(dt - \frac{2du}{m} + \frac{dx}{m^2}\right)$$

$$dr = \alpha a\left(\frac{du}{m^2} - \frac{2dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4}\right); \text{ u. s. f.}$$

folglich wird, wie oben bewiesen worden

$$A = -2m\alpha a; B = \alpha a; C = -\frac{2\alpha a}{m}; D = 0; E = \frac{\alpha a}{m^2};$$

$$F = -\frac{2\alpha a}{m^3}; G = 0; H = 0; J = \frac{\alpha a}{m^4}; \text{ ꝛc.}$$

 seyn.

seyn. Hieraus erhellet sogleich, daß A negativ, und werden die übrigen Bedingungen erfüllt, so ist die Größe

$$\frac{2\,catuxy\ldots\ldots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots\ldots}$$

oder die Geschwindigkeit, welche der letzten Kugel mitgetheilet worden, ein Maximum. Da nun

$$AC = 4\alpha^2a^2,\ \text{u. } B^2 = \alpha^2a^2,$$

so wird deshalb I. $AC > B^2$ gefunden. Es ist ferner

$$AC - B^2 = 3\alpha^2a^2;\ FA - D^2 = \frac{4\alpha^2a^2}{m^2};\ EA - BD = -\frac{2\alpha^2a^2}{m};\ (AC-B^2)(FA-D^2) = \frac{12\alpha^4a^4}{m^2};\ \text{u. } (EA-BD)^2 = \frac{4\alpha^4a^4}{m^2};$$

hieraus erfolgt

$$\text{II. } (AC - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2.$$

Wären blos zwey Kugeln, so ist es genung, wenn man nur die erste, dieser Bedingungen erfüllt, und wenn drey Kugeln dazwischen sind, so ist die zweyte Bedingung hinreichend, folglich vermehrt sich die Vielheit, nach der Zahl der veränderlichen Bedingungen. Wird nun unverdrossen, die Rechnung noch weiter fortgesetzt, so werden alle Bedingungen dieses Problems, erfüllt werden, und man wird behaupten können, daß in jeder Reihe, stetig proportionirlicher Kugeln, die der letztern mitgetheilten Geschwindigkeit, durch die Mitwirkung der dazwischen befindlichen, unter allen möglichen die größte sey.

Diese Aufgabe ward zuerst von Ugenius, hernach aber von andern Geometern behandelt; allein es herr=

herrscheten in derselben, keine zuverlässige Bestimmungen, welche wir hier als nothwendig, für die Existenz und Unterscheidung des Maximum, und Minimum erfunden haben.

Zweytes Beyspiel.

Es sey die Allgemeinegleichung der Flächen, von der zweyten Ordnung:

$$z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy;$$

man soll den Punkt der Fläche finden, wo die Ordinate z, unter allen die Größte oder die Kleinste wird.

Nach genommenem Differenzial der Gleichung, entdeckt man:

$$2zdz = (2ax + 2by - e)dx + (2bx + 2cy - f)dy;$$

hieraus bekommt man folgende zwey Gleichungen:

$$2ax + 2by - e = 0; \; 2cy + 2bx - f = 0,$$

welche

$$x = \frac{ec - bf}{2(ac - b^2)}; \; y = \frac{af - eb}{2(ac - b^2)}$$

geben. Man nehme das zweyte Differenzial, so wird man wegen $dz = 0$,

$$2zd^2z = 2adx^2 + 4bdxdy + 2cdy^2$$

finden. Damit aber die Ordinate z, unter allen die größte sey, so müssen die Größen a und c, beyde negativ seyn, hingegen positiv, damit sie die kleinste sey. Wenn aber unter Voraussetzung dieser Bedingung, die andere $ca > bb$ mangelte, so würden die gefundenen, und in der Gleichung der Fläche substituirten Werthe x und y, die Ordinate z keineswegs ein Größtes oder ein Kleinstes machen. Es hat daher unser Autor, im Anhange der

der Einleitung, zur Analysis des Unendlichen im 2ten Theil, aus andern Grundsätzen, deutlich gezeigt, daß wofern ca nicht $>$ b^2 ist, die gegebene Fläche, ins Unendliche ausgedehnt, und der konischen Assymptote, beygelegt werden könne. Dies aber ist gänzlich, dem Begriff des Maximum und Minimum, zuwider.

13. Hieraus erhellet, daß die gemeine Methode des Maximum und Minimum, sehr oft viele Unbequemlichkeiten, und Irrthümern unterworfen sey, wenn man nicht, in sofern die Rede von mehreren, veränderlichen Größen, einzeln für sich betrachtet, die ungetheilteste Aufmerksamkeit anwendet. Gleich wie im vorhergehenden Beyspiel, wenn wir bloß x, als eine veränderliche Größe, betrachten, so finden wir das erste Differenzial $2(ax + by - \frac{e}{2})dx$, und das zweyte $2adx^2$; desgleichen wenn y, als veränderlich angesehen wird, so bekommt man für das erste Differenzial $2(cy + bx - \frac{f}{2})\,dy$, und für das zweyte $2cdy^2$. Werden diese beyden ersten Differenzialien, gleich Null gesetzt, so geben sie diejenigen Gleichungen, welche wir im vorhergehenden §., gefunden haben. die beyden zweyten Differenzialien hingegen, deuten den größten oder kleinsten Werth, der Ordinate z an, so oft nehmlich beyde a und c, entweder negativ oder positiv waren; allein dies Kennzeichen, in sofern demselben die andere Bedingung ca $>$ bb mangelt, ist wie wir bewiesen haben, unvollständig und fehlerhaft.

Anm.

Anm. zum XVI. Capitel. II. Theils.

In diesem Capitel, welches die Bernouillische Regel, von Erfindung des Werthes des unbestimmten Bruches $\frac{0}{0}$ enthält, geschiehet von unserem Autor, keine Erwägung irgend eines denkwürdigen Falles, in welchem diese Regel zu fehlen schien, wenn man nehmlich, nach unendlicher Wiederholung der Differenziationen, immer wieder auf denselben unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, kommt. Ein Beyspiel hiervon, haben wir in der Formel $\frac{1 + x}{1 : l(1 + x)}$, die, wo $x = -1$ in $0.l0$, oder da $l0 = -\infty = -\frac{1}{0}$ in $-\frac{0}{0}$, oder $\frac{0}{0}$ übergeht. Denn wenn die Differenzialien, des Zählers und Nenners der gedachten Formel $\frac{1 + x}{1 : l(1 + x)}$, genommen werden, so kommt

$$\frac{d(1 + x)}{d[1 : l(1 + x)]} = -(1 + x)[l(1 + x)]^2 = -0 . \infty^2$$

und kehrt man hinwiederum $-(1 + x)[l(1 + x)]^2$, um in

$$\frac{-(1 + x)}{1 : [l(1 + x)]^2},$$

so erhält man

$$\frac{d[-(1 + x)]}{d[1 : (l(1 + x))^2]} = \frac{(1 + x)[l(1 + x)]^3}{2} = -\frac{0 . \infty^3}{2},$$

welches wenn man bis ins Unendliche fortfährt, stets einen unbestimmten Werth hervorbringt.

Wir wollen daher diese Klippe vermeiden, und ich werde zeigen, daß der Ausdruck $0l0$, welcher der Gestalt nach, unbestimmt, in der That aber bestimmt ist,

ist, gleich Null sey, welches folgendermaßen geschiehet. Man setze $0 l 0 = x = x le = le^x$ (wenn man nehmlich e für die Basis, hyperbolischer Logarithmen annimmt) so ist $l0^0 = le^x$; gehet man von Logarithmen auf Zahlen zurück, so wird $0^0 = e^x$ seyn. Es ist aber, wie bekannt

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ꝛc.}$$

Also ist

$$0^0 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ꝛc.}$$

Da nun $0^0 = 1$; denn es ist

$$0^0 = (a - a)^{n-n} = \frac{(a - a)^n}{(a - a)^n} = 1$$

folglich ist

$$1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ꝛc.}$$

welcher Gleichung auf keine Art, genüge geleistet werden kann, wofern nicht $x = 0$. Hieraus folgt, daß die Größe $0 l 0$, gleich Null sey. Eben so kann auch gezeigt werden, daß das Produkt, aus irgend einer Infinitesimalgröße, multiplizirt in den Logarithmum, jeder andern Infinitesimalgröße, nichts anders als unendlich sey. a)

Wem der Beweis von der Größe $0^0 = 1$, nicht anstehen sollte, der könnte folgenden Vernunftschluß, an dessen Stelle setzen. Es sey ω, desgleichen λ eine Infi-

a) Von der bewundernswürdigen Art der Größen, $l0$, $l\infty$ ꝛc. S. des G. Fontana philosophisch. mathematischen Untersuchungen. Die XIII.te Untersuchung von dem logarithmischen Unendlichen.

Infinitesimalgröße, so wird $\omega^\lambda = 1 + z$, wenn z eine unendlich kleine Größe, von einer unbestimmbaren Ordnung ist. Denn es kann nicht $\omega^\lambda = 1$ seyn, sonst wäre $\omega = 1$, welches ungereimt ist. Eben so kann nicht $\omega^\lambda = 1 + a$ seyn (wenn a für eine endliche, positive Größe genommen wird) sonst wäre $\omega = (1 + a)^{\frac{1}{\lambda}}$ = dem Unendlichen der höchsten Ordnung, welches gleich,alls widersprechend ist; ferner kann auch nicht $\omega^\lambda = 1 - a$ seyn (wenn $a < 1$), sonst wäre $\omega = (1 - a)^{\frac{1}{\lambda}}$, nehmlich gleich dem ächten Bruche $\frac{f}{f+g}$, zur unendlichen Potenz erhoben d. i.

$$\omega = \left(\frac{f}{f+g}\right)^n = \frac{f^n}{f^n + \frac{nf^ng}{f} + \frac{n^2f^ng^2}{2f^2} + \frac{n^3f^ng^3}{2.3f^3} + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{ng}{f} + \frac{n^2g^2}{2f^2} + \frac{n^3g^3}{2.3f^3} + \frac{n^4g^4}{2.3.4f^4} + \text{etc.}}$$

Diese Größe ist augenscheinlich, eine unendlich kleine, der höchsten Ordnung, und dividirt man durch ω, so würde man die Einheit, gleich der unendlich kleinen Größe, der höchsten Ordnung, dividirt durch die Infinitesimale der ersten Ordnung, erhalten, d. i. jederzeit gleich dem Infinitesimalquotienten, welches jedoch gegen die Hypothese streitet. Es ist daher $\omega^\lambda = 1 + z$, und z kann nichts anders, als eine unendlich kleine Größe seyn, weshalb ω^λ und folglich 0^0, von der Einheit nur, um eine unendlich klei-

ne,

ne, oder verschwindende Größe, verschieden ist, die für nichts geachtet werden kann.

Wenn jemand aus den Gleichungen $0^0 = 1^0 = a^0$, folgern wollte, daß nach geschehenem Zurückgang, von Zahlen auf Logarithmen, $0l0 = 0l1 = 0la$, und vermittelst der Division durch 0, auch $l0 = l1 = la$ seyn werde, nehmlich daß das unendliche, negative mit dem Endlichen äquiret, und sogar nichts werden könne, der würde sich selbst, in die betrüglichste Spitzfindigkeit verstrikken.

Wer würde wohl zugeben, daß jede gegebene Größe, durch das absolute Nichts, dividirt werden können, besonders wenn das Dividendum selbst, ein absolutes Nichts ist, die eine Größe $\frac{0}{0}$ d. i. eine unbestimmte und schwankende darböte, und keinen Werth gäbe? — Dies sind Hirngespinnste unseres Verstandes, welche die unauflöslichsten Verwirrungen erzeugen.

Ende der Anmerkungen.

System

System
der
allgemeinen Differenzen.

Erklärung einiger Hindenbürgische Zeichen.

§. 1.

${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$, ... ${}^m\mathfrak{N}$, bezeichnen die Binomialcoeffizienten, der mten Potenz eines Binomium vom 2ten Gliede an; unter ${}^m\mathfrak{N}$ wird nicht etwa der 13te Coeffizient, sondern der allgemeine unbestimmte nte Coeffizient verstanden.

Es ist daher

$$ {}^m\mathfrak{A} = \frac{m}{1} $$

$$ {}^m\mathfrak{B} = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} $$

$$ {}^m\mathfrak{C} = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} $$

$$ \vdots $$

$$ {}^m\mathfrak{N} = \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \ldots m - (n - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1)\, n} $$

Den $(n \pm 1)$ten, $(n \pm 2)$ten, $(n \pm r)$, 2nten, $(2n \pm r)$ten zum Exponenten m gehörigen Binomial=

mialcoeffizienten, bezeichnet Herr Professor Hindenburg mittelst seinen Distanzexponenten sehr glücklich folgendergestalt

$\overset{\pm 1}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{\pm 2}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{\pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{n}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, $\overset{n \pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$ .... (Hindenburg. Novi Syst. Perm. 1781. S. XL, 9. ferner S. XXXVII. XXXIX: LXV, LXVI.). $\overset{\pm rn}{{}^{m}\mathfrak{M}}$ $\overset{\pm r}{{}^{m}\mathfrak{P}}$ u. s. w. haben ähnliche Bedeutung.

§. 2.

Formeln wodurch nicht die Werthe der Coeffizienten, oder Glieder irgend einer geordneten Reihe, selbst angegeben, sondern nur ihre Stellen nachgewiesen werden, nennt Hr. Hindenburg, lokalformeln, für Coeffizienten dient der Buchstabe $\varkappa$, für ganze Glieder, $\daleth$ auf folgende Art.

$(a + b)^m \varkappa n = {}^{m}\mathfrak{N}$ oder $= \overset{0}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, ferner

$$(a + b)^m \varkappa (n \pm 1) = \overset{\pm 1}{{}^{m}\mathfrak{N}}$$

$$(a + b)^m \varkappa (n \pm r) = \overset{\pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$$

$$(a + b)^m \varkappa (2n \pm r) = \overset{n \pm r}{{}^{m}\mathfrak{N}}$$

Eben so bedeutet

$(a + b)^m \daleth (n + 1)$ das $(n + 1)$te Glied der mten Potenz von $(a + b)$ z. B.

$(a + b)^3 \varkappa 3$ ist $= 3$ und $(a + b)^3 \daleth 3 = 3ab^2$. Allgemein, wenn p irgend eine geordnete Reihe bedeutet so ist $p \varkappa (r \pm s)$ der $(r \pm s)$te Coeffizient der Reihe p ferner wird, wenn q, auch eine wohlgeordnete Reihe bedeutet $p^m . q^n \varkappa (r \pm s)$ der $(r \pm s)$te

Coef-

Coeffizient des Produkts $p^m q^n$ andeuten. Nach derselben Analogie bedeuten

$$p\urcorner(r \pm s),\ p^m\urcorner(r \pm s),\ p^m . q^n\urcorner(r \pm s)$$

das (r ± ste Glied, von p, von p^m und von $p^m . q^n$ (Nov. Syst. Perm. S. XXXIII, 2.)

Lehnsätze welche vorausgeschickt werden müssen.

§. 3.

I. Lehnsatz.

Es ist $\pm\ {}^{m}\mathfrak{N} . n = \pm\ {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m$

oder welches einerley

$$\pm\ n\,[(a + b)^m \chi^n] = \pm\ m\,[(a + b)^{m-1} \chi (n - 1)]$$

Beweis.

Nach §. 1. ist

$$\pm\ {}^{m}\mathfrak{N} . n = \pm \frac{m . m-1 . m-2 \ldots m-(n-1)}{1 . 2 . 3 \ldots (n-1)n} . n$$

$$\pm\ {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m = \pm \frac{(m-1)\,(m-2) \ldots [m-(n-1)]}{1 . 2 \ldots (n-1)} . m$$

also offenbar

$$\pm\ {}^{m}\mathfrak{N} . n = \pm\ {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m$$

§. 4.

1. Zusatz.

Aus §. 3. folgt unmittelbar daß

$$-{}^{m}\mathfrak{A} . 1 + {}^{m}\mathfrak{B} . 2 - {}^{m}\mathfrak{C} . 3 \ldots \mp {}^{m}\mathfrak{N} . n \ldots = p$$

$$= -m[1 - {}^{m-1}\mathfrak{A} + {}^{m-1}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \ldots] = -m s =$$

$$-m(1-1)^{m-1} = -m . (0)^{m-1}$$

also

also auch

$$\pm\, {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . m = = \mp\, m[(1 - 1)^{m-1} \urcorner (n - 1)].$$

§. 5.

2. Zusatz.

Da aus §. 3. erhellet, daß nicht nur die Summen aus den beyden Reihen des §. 4, sondern auch die gleichvielsten Glieder aus beyden Reihen, einzeln genommen einander gleich sind, d. h. daß nicht allein $p = -mq$ sondern auch $p \urcorner r = -m\beta \urcorner r$, so bleibt auch

$$-{}^{m}\mathfrak{A} . 1 . A + {}^{m}\mathfrak{B} . 2 . B . - {}^{m}\mathfrak{C} . 3 . C + \ldots \mp {}^{m}\mathfrak{N} . n N \ldots$$

$$= -m[1 . A - {}^{m-1}\mathfrak{A} . B + {}^{m-1}\mathfrak{B} . C \ldots \pm {}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} . O \ldots]$$

was für Größen auch A, B, C u. s. w. bedeuten mögen.

§. 6.

II. Lehnsatz.

In §. 4. war

$\beta = (1 - 1)^{m-1} = 0^{m-1}$ also ist

$\beta = 0$ für $m - 1 > 0$ d. i. für $m > 1$.

und $\beta = 1$ nur für $m - 1 = 0$, d. i. für $m = 1$.

Setzt man

$$\alpha = 1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} \ldots \mp {}^{m}\mathfrak{N} \ldots = (1 - 1)^{m}$$

so ist auch $\alpha = 0$ nur für $m > 0$

und $\alpha = 1$ nur für $m = 0$.

Beweis.

Wenn $m - 1 = 0$ ist, so ist $(a - x)^{m-1}$, auch für jeden Werth von $(a - x)$ gleich 1, wie aus der Lehre von den Potenzen bekannt ist, also auch wenn

$x = a$

$x = a$, mithin $a - x = 0$ ist, so daß 0^0 nichts anders als 1 bedeuten kann, nur für jeden andern Werth von $m - 1$ (nur nicht unendlich groß) ist $0^{m-1} = 0$. Das $0^0 = 1$ erhellet auch so

$$0^0 \text{ ist} = (a-a)^{n-n} = \frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1^n = 1$$

§. 7.
III. Lehnsatz.

Es sey

$$\gamma = 1 \,.\, q - {}^m\mathfrak{A}(q-a) + {}^m\mathfrak{B}(q-2a) \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}(q-na) \ldots$$

so ist $\gamma = 0$ nur für $m > 1$

und $\gamma = ma$ nur für $m = 1$

wenn m, q und a jede Größen, nur nichts unendlich Großes bedeuten.

Beweis.

Von der Reihe $q \,.\, \alpha$ (§. 6.) ziehe man die Reihe δ ab; so erhält man die Reihe γ des Lehnsatzes wie folget: von

$$\begin{array}{rl} q \,.\, \alpha = & 1 \,.\, q - {}^m\mathfrak{A} q \quad + {}^m\mathfrak{B} q \ldots\ldots\ldots \mp {}^m\mathfrak{N} \,.\, q \ldots\ldots \\ \delta = & \quad\; - {}^m\mathfrak{A} \,.\, 1 \,.\, a + {}^m\mathfrak{B} \,.\, 2a \ldots\ldots \mp {}^m\mathfrak{N} \,.\, na \ldots\ldots \\ \hline \end{array}$$

mithin

$$q\alpha - \delta = 1 \,.\, q - {}^m\mathfrak{A}(q-a) + {}^m\mathfrak{B}(q-2a) \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}(q-na) \ldots$$

Nun ist (§. 6.) $\delta = - ma\,(1-1)^{m-1}$, folglich muß (§. 6) seyn

$$\delta = - ma \,.\, 0 \text{ nur für } m > 1$$

$$\delta = - ma \,.\, 1 \text{ nur für } m = 1$$

ferner ist $\alpha = 0$ nur für $m > 0$.

Da nun $\gamma = q \,.\, \alpha - \delta$ gefunden ist; so wird

$$\gamma = q \,.\, 0 + ma \,.\, 0 \text{ nur für } m > 1 \text{ und}$$

$$\gamma = q \,.\, 0 + ma \,.\, 1 \text{ nur für } m = 1$$

und diese beyden Gleichungen geben den Lehrsatz mit seiner Einschränkung, daß m, q, a eigentlich nur im ersten Satze, nichts unendlich Großes bedeuten. Der Beweis hätte auch können folgendergestalt geführt werden.

$$q\alpha - \delta = q(1-1)^m + ma(1-1)^{m-1}$$

$$= [q(1-1) + ma]\,[1-1]^{m-1} = + ma(1-1)^{m-1},$$

woraus aus §. 6. sogleich folgt daß

$\gamma = ma\,.\,0$ für $m > 1$ und $\gamma = ma\,.\,1$ für $m = 1$;

§. 8.

IV. Lehnsatz.

Wenn m, a und q, wie vorhin, nichts unendlich Großes bedeuten, π aber eine ganze und positive Zahl ist, die übrigens auch ins Unendliche wachsen kann: so ist die Reihe

$$1.\; q^\pi - {}^m\mathfrak{A}(q-a)^\pi + {}^m\mathfrak{B}(q-2a)^\pi \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}(q-na)^\pi \ldots\ldots = \varepsilon$$

hier ist $\varepsilon = 0$ nur für $m > \pi$ und dagegen

$= a^\pi\,.\,m\,.\,m - 1\,.\,.\,.\,2\,.\,1$ nur für $m = \pi$

Be-

Beweis.

$$q^s = 1 \cdot q^{x+1} - m\mathfrak{A}(q-a)^x \cdot q + m\mathfrak{B}(q-2a)^x \cdot q \ldots \pm m\mathfrak{N}(q-na)^x \cdot q \ldots$$

$$\mathfrak{z} = \qquad - m\mathfrak{A}(q-a)^x\, a + m\mathfrak{B}(q-2a)^x\, 2a \ldots \pm m\mathfrak{N}(q-na)^x \cdot na \ldots$$

$$q^s - \mathfrak{z} = 1 \cdot q^{x+1} - m\mathfrak{A}(q-a)^{x+1} + m\mathfrak{B}(q-2a)^{x+1} \ldots \pm m\mathfrak{N}(q-na)^{x+1} \ldots = x$$

Nach (§. 5.) ist die abgezogene Reihe

$$\xi = -ma[1.(q-a)^{\pi} - {}^{m-1}\mathfrak{A}(q-2a)^{\pi} \ldots \mp {}^{m-1}\mathfrak{N}(q-(n+1)a)^{\pi}]$$

Vorausgesetzt also, der Lehnsatz gelte wirklich für irgend einen bestimmten Werth von π, so hätte man, weil q und m im Lehnsatze jede Größe, folglich auch $q - a$ und $m - 1$ bedeuten können, daß $\zeta = -ma.0$ nur für $m - 1 > \pi$ d. i. nur für $m > \pi + 1$ und

$$= -ma.a^{\pi}.m-1.m-2\ldots2.1 \text{ nur für } m-1=\pi \text{ d. i. nur für } m=\pi+1.$$

Da nun im Anfange dieses Beweises $\eta = q\varepsilon - \xi$ gefunden worden, so wäre unter der gemachten Voraussetzung $\eta = 0.q + ma.0$ nur für $m > \pi + 1$

$$\text{und } = 0.q + ma.a^{\pi}.m-1.m-2\ldots2.1, \text{ nur für } m = \pi + 1 \text{ oder}$$

$$\eta = 0, \text{ nur für } m > \pi + 1$$

$$\text{und } = a^{\pi+1}.m.m-1\ldots2.1, \text{ nur für } m = \pi + 1.$$

Betrachtet man die gleich Anfangs durch η benannte Reihe so sieht man, daß diese beyden letzten Gleichungen nichts anders als den Lehnsatz selbst darstellen, indem man $(\pi + 1)$ statt π darein schreibt. Es ist also erwiesen: wenn der Lehnsatz für irgend einen bestimmten Werth von π gelten sollte, der b heißen mag; so würde er auch für $\pi = b + 1$ gelten Da nun der Lehnsatz, nach (§. 7.) für $b = 1$ wahr ist; so gilt es nach diesem Beweise auch für $\pi = 1 + 1 = 2$. Also kann man $b = 2$ voraussetzen, und es folgt daraus durch wiederholte Anwendung des Be-

Beweises, daß er auch für $n = 2 + 1 = 3$ gelte u. s. w. für jede ganze positive Zahl statt n gesetzt. W. Z. E.

Anm. Diese Lehrsätze finden sich in Herrn Professor Busse, vortrefliche kleine Beyträge zur Mathematik u. s. w 1ster Theil. S. 36 — 40, nur einige unter einer andern Form, für $\overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}}$, steht bey Busse ${}^{m}\mathfrak{N} - 1$. Die hier gebrauchte Hindenburgische Bezeichnung ist offenbar weit bequemer.

Fortsetzung der Hindenburgischen Benennungen.

§. 9.

$\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots \overset{r}{y}$ seyn Glieder einer, nach einem bestimmten Gesetze fortgehenden Haupt- oder Grundreihe (series proposita, primitiua). Es stellt nehmlich hier y jedes unbestimmte Glied der Reihe, und, mit den Distanzexponenten $0, 1, 2, \ldots r$ verbunden, dieser Glieder Folge dar. Auch sey $\overset{0}{y}$ d. i. y das erste, $\overset{1}{y}$ das zweyte, $\overset{2}{y}$ das dritte, u. s. w. $\overset{r}{y}$ das $(r + 1)$te Glied der Hauptreihe.

§. 10.

$\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3 \ldots \Delta^m$, ohne Beyfügung von $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ sollen überhaupt Reihen, der ersten, zweyten, dritten .. mten Differenzen der Hauptreihe (die Differenzen wie in Eulers Differenzialrechnung erster Theil §. 7, oder Kästners Analysis endlicher Größen die 3te Auflage §. 724. S. 505 genommen und verstanden) und $\Delta^1 \rceil 1, \Delta^1 \rceil 2 \ldots \Delta^2 \rceil 3 \ldots \Delta^3 \rceil 4 \ldots \Delta^m \rceil r$ u. s. w. dieser Reihen 1stes, 2tes, 3tes, 4tes...rtes Glied bedeuten. Folglich ist $\Delta^m \rceil (r + 1)$ das $(r + 1)$te Glied in der Reihe der mten Differenzen der Hauptreihe.

§. 11.

$\Delta^1 y, \Delta^1 \overset{1}{y} \ldots \Delta^2 y, \Delta^2 \overset{1}{y} \ldots \Delta^3 y, \Delta^3 \overset{1}{y} \ldots \Delta^m y, \Delta^m \overset{1}{y} \ldots$ bedeutete erste, zweyte, dritte ...mte Differenzen der Glieder $\overset{0}{y}, \overset{1}{y} \ldots$ der Hauptreihe. Also ist $\Delta^m \overset{r}{y}$ die mte Differenz von $\overset{r}{y}$, und $\Delta^{m+n} \overset{r+s}{y}$ die $(m + n)$te Differenz von $\overset{r+s}{y}$, dem $(r + s + 1)$ten Gliede (§. 9.) der Hauptreihe.

Anm. Die Benennungen in §. 9, 10 und 11 giebt Hindenburg im ersten Stücke des Archiv der reinen und angewandten Mathematik S. 93 — 95. Eulers Zeichnung stehet im ersten Theile seiner Differenzialrechnung §. 2. und 23, die von Kästners stehet in seiner Anal. endl. Gr. §. 724. II. Karsten, Busse und andere, zeichnen nach Euler. Folgendes dient zur Vergleichung ner verschiedenen Bezeichnungen.

Nach Hindenburg ...	$\overset{-2}{y}, \overset{-1}{y}, \overset{0}{y}, \overset{+1}{y}, \overset{+2}{y} \ldots \overset{r}{y}$
Taylor	$\overset{\backprime\backprime}{y}, \overset{\backprime}{y}, y, \underset{\prime}{y}, \underset{\prime\prime}{y} \ldots y_{(r)}$ *)
Cousin	$''y, 'y, y, y', y'' \ldots y^{(r)}$ **)
Euler	$y_{II}, y_{I}, y, y^{I}, y^{II} \ldots y^{R}$
Kästner	$y-2, y-1, y, y1, y2 \ldots y^{r}$ ***)

Nach

*) Taylor Meth. Increm. p. 2.

**) Cousin Leçons de Calc. diff. et int. Paris 2 Theile in gr. Oct. 1778. eine neue vermehrte Auflage in 2 Quart-

Nach Hindenburg $\Delta^1 7 1,\ \Delta^1 7 2 \ldots \Delta^2 7 3 \ldots \Delta^3 7 4 \ldots \Delta^m 7 r$

Kästner ... $1\Delta 1,\ 2\Delta 1 \ldots 3\Delta 2 \ldots 4\Delta 3 \ldots r\Delta m$

Nach Hindenb. $\Delta^1 y, \Delta^1 y^1 \ldots \Delta^2 y;\ \Delta^2 y^1 \ldots \Delta^3 y, \Delta^3 y^1 \ldots \Delta^m y, \Delta^m y^1 \ldots \Delta^m y^r$

Euler $\Delta^1 y, \Delta^1 y^1 . \Delta^2 y;\ \Delta^2 y^1 \ldots \Delta^3 y, \Delta^3 y^1 \ldots \Delta^m y, \Delta^m y^1 \ldots \Delta^m y^R$

Kästner $\Delta 1 y, \Delta 1 y 1 \ldots \Delta 2 y;\ \Delta 2 y 1 \ldots \Delta 3 y, \Delta 3 y 1 \ldots \Delta m y, \Delta m y 1 \ldots \Delta m y r$

Euler

Quartbände erschien 1796 unter dem Titel Traité &c. wofür ich in Berlin 10 rthl. bezahlt habe. Eben diese Bezeichnung hat auch La croix Traité du Calc. diff. et int. 1797 2 starke Quartbände, die ich in Berlin mit 12 Thl. bezahlt habe.

***) y — 2, y — 1, habe ich nach der Analogie selbst geformt.

Euler schreibt auch im ersten Theile der Diff. (§. 23.) $y^{(n)}$.*)

Solche willkührliche Bezeichnungen wie bey Taylor und Cousin, hat Hindenburg durch den Gebrauch seiner Distanzexponenten in eine Wissenschaftliche verwandelt. Ueberhaupt ist das Hindenbürgische combinatorische-analytische System von Zeichen durch und durch vortreflich (Nov. Syst. Comb. p. XXXII. — XLIX. — LVI.). Noch muß ich erinnern daß Busse $\overset{t}{y}$, $\Delta^m \overset{t}{y}$, zu (t)ten Gliedern rechnet, welches nicht so bequem, als nach Euler und Kästner sie zu (t + 1)ten zu rechnen, ist. Diese letztere Zählung hätte Herr Busse, in seiner sonst sehr lehrreichen Schrift, manche Zurechtweisung erspart, und überflüssig gemacht.

§. 12.

Uebersicht des folgenden.

Der folgende erste Lehrsatz enthält die Formeln, wonach jedes beliebige (t + 1)te Glied der mten Differenzreihe aus den Gliedern der Hauptreihe ausgedrückt wird. Dieses (t)te Glied der mten Differenzreihe ist zugleich die mte Differenz des Gliedes $\overset{t}{y}$, des (t+1). Gliedes in der Hauptreihe, und wird deshalb durch $\Delta^m \overset{t}{y}$ bezeichnet.

In Eulers Differenzialrechnung erster Theil §. 10. wird die Induction für diese Formel nur bis auf $\Delta^5 y$ fortgeführt.

*) Lagrange, Cousin, Prony, Lacroix u. s. w. haben auch in ihren Schriften $y^{(n)}$

§. 13.

§. 13.

In folgendem Schema

	Hauptreihe	Reihe der 1sten Differenzen	Reihe der 2ten Differenzen	Reihe der 3ten Differenzen.	Reihe der 4ten Differenzen
x	y				
$x+w$	$\overset{1}{y}$	$\Delta^1 y = \overset{1}{y} - y$			
$x+2w$	$\overset{2}{y}$	$\Delta^1 \overset{1}{y} = \overset{2}{y} - \overset{1}{y}$	$\Delta^2 y = \overset{2}{y} - 2\overset{1}{y} + y$		
$x+3w$	$\overset{3}{y}$	$\Delta^1 \overset{2}{y} = \overset{3}{y} - \overset{2}{y}$	$\Delta^2 \overset{1}{y} = \overset{3}{y} - 2\overset{2}{y} + \overset{1}{y}$	$\Delta^3 y = \overset{3}{y} - 3\overset{2}{y} + 3\overset{1}{y} - y$	
$x+4w$	$\overset{4}{y}$	$\Delta^1 \overset{3}{y} = \overset{4}{y} - \overset{3}{y}$	$\Delta^2 \overset{2}{y} = \overset{4}{y} - 2\overset{3}{y} + \overset{2}{y}$	$\Delta^3 \overset{1}{y} = \overset{4}{y} - 3\overset{3}{y} + 3\overset{2}{y} - \overset{1}{y}$	$\Delta^4 y = \overset{4}{y} - 4\overset{3}{y} + 6\overset{2}{y} - 4\overset{1}{y} + y$
.	.	.			
.	.	.			
.	.	.			
.	.	.			
$x+tw$	$\overset{t}{y}$				
$x+(t+1)w$	$\overset{t+1}{y}$	$\Delta^1 \overset{t}{y} = \overset{t+1}{y} - \overset{t}{y}$			

he=

bedeutet y eine beliebige Funktion von x, welches beständig um einerlei Größe wächset; so, daß die Wachsthümer w; $2w$; $3w$ u. s. w. eine arithmetische Reihe ausmachen, übrigens aber jede beliebige endliche und unendliche Größe statt n gedacht werden kann

$\overset{1}{y}$ bedeutet die Funktion von x, welche man aus y erhält, wenn man darin $x + w$ statt eines jeden x schreibt. $\overset{2}{y}$ bedeutet diejenige Funktion, welche eben so aus $\overset{1}{y}$ entsteht, indem man wiederum $x + w$ statt eines jeden x in $\overset{1}{y}$ schreibt. Eben so entstehen $\overset{3}{y}$, $\overset{4}{y}$ u. s. w. (vergl. §. 9.)

Hieraus erhellet sogleich, daß die Funktion $\overset{2}{y}$ auch unmittelbar aus y entstehen muß, wenn man sogleich $x + 2w$ statt eines jeden x in y schreibt. Und so entstehet nun überhaupt $\overset{t+1}{y}$, das $(t + 2)$te Glied der Hauptreihe, entweder aus dem $(t + 1)$ten Gliede $\overset{t}{y}$, indem man darin $x + w$ statt x schreibt, oder unmittelbar aus dem ersten Gliede y, indem man darin sogleich $x + (t + 1)w$, statt eines jeden x schreibt.

§. 14.

Zur Erklärung der Differenzen-Säulen in diesem Schema gehören noch folgende Sätze.

1) Die Gleichung $\Delta'\overset{t}{y} = \overset{t+1}{y} - \overset{t}{y}$ in der Säule d. R. der ersten Differenzen stellt im allgemeinen das Ge-

Gesetzt dar, wonach ein jedts Glied der ersten Differenzenreihe aus zwey Gliedern der Hauptreihe entsteht, welches schon bey den ersten drey Gliedern ganz deutlich in die Augen fällt.

2) die Gleichung $\Delta^{m+1}\overset{t}{y} = \Delta^{m}\overset{t+1}{y} - \Delta^{m}\overset{t}{y}$ d. i.

$$\Delta^{m+1}\mathfrak{y}(t+1) = \Delta^{m}\mathfrak{y}(t+2) - \Delta^{m}\mathfrak{y}(t+1),$$

bedeutet demnach in Vergleichung mit (No. 1.) nichts anders, als daß das nehmliche Gesetz für das ganze Schema gelte, oder das die $(m+1)$ten Differenzen aus den nächst vorhergehenden mten Differenzen eben so entstehen sollen, wie die 1sten Differenzen aus der nächst vorhergehenden Hauptreihe. Daher ist im Schema (hier fortgesetzt bis $\Delta^6 y$) z. B.

$\Delta^2 y$, als $\Delta\overset{1}{y} - \Delta y$, $= \overset{2}{y} - 2\overset{1}{y} + y$

$\Delta^3 y$, als $\Delta^2\overset{1}{y} - \Delta^2 y$, $= \overset{3}{y} - 3\overset{2}{y} + 3\overset{1}{y} - y$

$\Delta^4 y$, als $\Delta^3\overset{1}{y} - \Delta^3 y$, $= \overset{4}{y} - 4\overset{3}{y} + 6\overset{2}{y} - 4\overset{1}{y} + y$

$\Delta^5 y$, als $\Delta^4\overset{1}{y} - \Delta^4 y$, $= \overset{5}{y} - 5\overset{4}{y} + 10\overset{3}{y} - 10\overset{2}{y} + 5\overset{1}{y} - y$

$\Delta^6 y$, als $\Delta^5\overset{1}{y} - \Delta^5 y$, $= \overset{6}{y} - 6\overset{5}{y} + 15\overset{4}{y} - 20\overset{3}{y} + 15\overset{2}{y} - 6\overset{1}{y} + y$

u. s. w. geschrieben.

3) Aus der Gleichung in (No. 2.) folgt unmittelbar

$$\Delta^{m}\overset{t+1}{y} = \Delta^{m+1}\overset{t}{y} + \Delta^{m}\overset{t}{y} \text{ d. i.}$$

$$\Delta^{m}\mathfrak{y}(t+2) = \Delta^{m+1}\mathfrak{y}(t+1) + \Delta^{m}\mathfrak{y}(t+1)$$

diese Gleichung zeigt das Gesetz der Glieder jeder Reihe der Differenzen, aus der Summe der um eins niedrigern Gliedes derselben und der um eins hö-

höhern Differenzreihe. Z. B. Es sey $m = 2$ und $t = 1$; so ist

$$\Delta^2 \overset{2}{y} = \Delta^3 \overset{1}{y} + \Delta^2 \overset{1}{y} \text{ d. i.}$$

$$\Delta^2 73 = \Delta^3 72 + \Delta^3 72$$

Aus dem Schema hat man

$$\Delta^3 \overset{1}{y} = \overset{4}{y} - 3\overset{3}{y} + 3\overset{2}{y} - \overset{1}{y}$$

$$\Delta^2 \overset{1}{y} = \qquad \overset{3}{y} - 2\overset{2}{y} + \overset{1}{y} \text{ addirt, giebt}$$

$$\Delta^2 \overset{2}{y} = \overset{4}{y} - 2\overset{3}{y} + \overset{2}{y},$$

wie es sich gehört.

§. 15.

Zusatz.

Wenn man Δ^0 der Analogie nach bildet, dabey aber überlegt daß dieses Zeichen dem Ausdruck vor dem es stehet, unbeschadet stehen oder wegbleiben kann, so umfaßt die Gleichung unter (§. 14. No.2) wenn man $m = 0$ setzt zugleich auch die (§. 14. No. 1) nehmlich

$$\Delta^{0+1} \overset{t}{y} = \Delta^1 \overset{t+1}{y} - \Delta^0 \overset{t}{y},$$

oder wenn wir Δ^0 gänzlich weglassen

$$\Delta^1 \overset{t}{y} = \overset{t+1}{y} - \overset{t}{y}.$$

§. 16.

Daß m und t, nach dem eben erklärten Entstehungsgesetze des Schematis, keine negative oder gebrochene Zahlen, sondern nur die ganzen Ordnungszahlen

zahlen bedeuten könne, ist daraus klar, weil die angegebene Entstehungsart nur auf 1ste, 2te 3te u. s. w. mte Differenzenreihe, und deren 1ste, 2te, 3te u. s. w. (t + 1)te Gliede führen kann.

Sollte der Werth von m oder t auf negative Zahlen ausgedehnt werden, oder verlangt man für gebrochene Zahlen zu interpoliren; so muß dies erst besonders gerechtfertiget werden. Wir verstehen hier unter m und t alle ganze positive Zahlen und, wie §. 15 angemerkt ist, auch 0.

§. 17.

Im Schema sind die Werthe einiger Differenzen durch Glieder der Hauptreihe ausgedrückt. Frägt man nun, wie man den Werth eines beliebigen (t + 1)ten Gliedes in einer beliebigen mten Differenzenreihe durch Glieder der Hauptreihe ausdrücken könne; so hat man dafür den folgenden Lehrsatz.

§. 18.

Lehrsatz.

Es ist

$$\frac{\Delta^m \overset{t}{y}}{\Delta^m l(t+1)} = \left\{ 1 \cdot \overset{m+t}{y} - {}^m\mathfrak{A} \cdot \overset{m+t-1}{y} + {}^m\mathfrak{B} \cdot \overset{m+t-2}{y} \dots \mp {}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot \overset{m+t-(n-1)}{y} \dots \pm {}^m\overset{n-1}{\mathfrak{N}} \cdot \overset{m+t-(2n-1)}{y} \mp {}^m\overset{n}{\mathfrak{N}} \overset{m+t-2n}{y} \dots \mp 1 \cdot \overset{t}{y}. \right.$$

Diese Reihe hat $(m + 1)$ Glieder, deren Zeichen vor dem 1sten, 2ten ... $(n - 1)$ten $(2n - 1)$ten, 2nten Binomialcoefficienten von Exponenten m, d. i. vor ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$ ... ${}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}}$ ... ${}^m\overset{n-1}{\mathfrak{N}}$, ${}^m\overset{n}{\mathfrak{N}}$. wie hier steht, abwechseln. Das letzte Glied $\mp 1 \cdot y$ hat das obere oder untere Zeichen, nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist. Eben so verhält es sich mit dem $(n - 1)$ten Gliede.

Beweis.

Vorausgesetzt, es gelte der Lehrsatz für irgend einen bestimmten Werth von m; so wird hierdurch, weil t im Lehrsatze jede positive Zahl, also auch $(t + 1)$ bedeutet, zugleich vorausgesetzt, daß auch

$$\Delta^m y^{t+1} = 1 . y^{m+t+1} - {}^m\mathfrak{A}\, y^{m+t} + {}^m\mathfrak{B}\, y^{m+t-1} \ldots \pm {}^m\mathfrak{N}.\, y^{m+t-(n-1)} \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}^{n}\, y^{m+t-(2n-1)} \pm \mathfrak{N}^{n+1}\, y^{m+t-2n} \ldots \mp 1 . y^{t+1}$$

dazu addirt $-\Delta^m y^t = -1 . y^{m+t} + {}^m\mathfrak{A}\, y^{m+t-1} \ldots \pm {}^m\mathfrak{N}^{-1}\, y^{m+t-(n-1)} \ldots \mp {}^m\mathfrak{N}^{n-1}\, y^{m+t-(2n-1)} \pm {}^m\mathfrak{N}^{n}\, y^{m+t-2n} \ldots + {}^m\mathfrak{A}.\, y^{t+1} \pm 1 . y^{t}$

giebt $\Delta^{m+1} y^t = 1 . y^{m+t+1} - {}^{m+1}\mathfrak{A}\, y^{m+t} + {}^{m+1}\mathfrak{B}\, y^{m+t-1} \ldots \pm {}^{m+1}\mathfrak{N}\, y^{m+t-(n-1)} \ldots \mp {}^{m+1}\mathfrak{N}^{n}\, y^{m+t-(2n-1)} \pm {}^{m+1}\mathfrak{N}^{n+1}\, y^{m+t-2n} \ldots \mp {}^{m+1}\mathfrak{A}\, y^{t+1} \pm 1 . y^{t}$

Die zweyte Gleichung ist nehmlich nichts anders als der für einen bestimmten Werth von m vorausgesetzte Lehrsatz mit gerade entgegengesetzten Zeichen geschrieben; und die Richtigkeit der Addition erhellet bey der Linken Seite aus §. 14. No. 2. Bey der rechten Seite überzeugt man sich durch folgende Schlüsse.

In mei-

In meiner Ausgabe von Eulers Algebra, habe ich im ersten Theile §. 361. Zus. 1. bewiesen das

$${}^{m}\mathfrak{N} = {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot \frac{m-(n-1)}{n} \text{ ist}$$

$$\text{also } {}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot \left[\frac{m-(n-1)}{n} + 1\right] = {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cdot \frac{m+1}{n}$$

$$= \frac{m.m-1 \ldots [m-(n-2)]}{1.2 \ldots (n-1)} \cdot \frac{m+1}{n}$$

$$= \frac{(m+1)n.m-1 \ldots [(m+1)-(n-1)]}{1.2.3 \ldots (n-1).n}$$

dieser letzte Ausdruck ist aber der nte Coeffizient von $(a+b)^{m+1}$; also gleich ${}^{m+1}\mathfrak{N}$., mithin auch

$${}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}$$

Ferner ist ${}^{m}\mathfrak{A} = \frac{m}{1}$ daher auch

$${}^{m}\mathfrak{A} + 1 = \frac{m}{1} + 1 = \frac{m+1}{1} = {}^{m+1}\mathfrak{A}.$$

Die erwiesene Gleichung

$${}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}.$$

gilt für jedes Glied der addirten Reihen, denn wenn ${}^{m}\mathfrak{N} = {}^{m}\mathfrak{B}$ gesetzt wird, so ist ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m}\mathfrak{A}$; für ${}^{m}\mathfrak{N}$. $= {}^{m}\mathfrak{C}$ ist ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m}\mathfrak{B}$. u. s. w. — Wollte man ${}^{m}\mathfrak{N} = {}^{m}\mathfrak{A}$ setzen, so würde ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}}$, der vor dem als ersten gezählten Coeffizienten ${}^{m}\mathfrak{A}$, nächst vorhergehenden bedeuten, im binomischen Lehrsatz, hat aber das erste Glied keinen andern Coeffizienten als 1, also in diesem Falle ist ${}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = 1$, mithin erstreckt sich auch die Gleichung

${}^{m}\mathfrak{N}$

$$ {}^{m}\mathfrak{N} + \overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}. \text{ auf dem Fall} $$

$$ {}^{m}\mathfrak{A} + 1 = {}^{m+1}\mathfrak{A}. \text{ den wir vorhin schon} $$

bewiesen haben.

Betrachtet man nun die letzte Gleichung, so sieht man, daß sie gerade zu aus der vorausgesetzten Gleichung für den bestimmten Werth von m entstehen würde, wenn man darein $(m + 1)$ statt m schriebe. Folglich gilt der Lehrsatz für $m = a + 1$, wenn er für $m = a$ kann vorausgesetzt werden. Da nun dies nach §. 14. No. 1. geschehen kann für $a = 1$; so gilt er für $m = 1 + 1 = 2$. Dies vorausgesetzt gilt er demnach für $m = 2 + 1 = 3$ u. s. w., daß m jede ganze positive Zahl bedeuten kann.

Anm. Wenn der Herr Professor Busse in seinen obengenannten Beyträgen. 1ster Theil S. 34. §. 24, behauptet daß die Gleichung ${}^{m}\mathfrak{N} + \overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}$

nicht aber dem Fall ${}^{m}\mathfrak{A} + 1 = {}^{m+1}\mathfrak{A}$

angewendet werden könnte, weil $\mathfrak{N}$ nicht $= 1$ gesetzt werden dürfte, so liegt der Irrthum bey Hrr. Busse offenbar darin, daß er nicht an der richtigen Bedeutung von ${}^{m}\mathfrak{A}$, ${}^{m}\mathfrak{B}$, ${}^{m}\mathfrak{C} \ldots {}^{m}\mathfrak{N}$, denkt. Denn da $\mathfrak{A}$ mit einem oben linker Hand geschriebenen kleinen Buchstaben oder Zahl, als erster Binomialcoeffizient angesehen wird, und $\mathfrak{N}$ mit einer oben linker Hand beygeschriebenen Buchstaben überhaupt ein allgemeines ntes Glied dieser Binomialcoeffizienten vorstellen soll, so kann ja $\mathfrak{N}$, wohl $= \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, u. s. w. gesetzt werden, aber nie $= 1$, da 1 kein Glied der Reihe ist zu der $\mathfrak{N}$ als allgemeines Glied gehört.

Wird $m = 1$ gesetzt, so ist für diesen Fall

$$ (a + b)^{m} = (a + b)^{1} = a + \tfrac{1}{1} . b = 1 . a + {}^{1}\mathfrak{A} b; $$

und ${}^{m}\mathfrak{N}$ ist alsdann $= {}^{1}\mathfrak{N} = {}^{1}\mathfrak{A} = \frac{1}{1} = 1$ ferner

$$ \overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} = \overset{-1}{{}^{1}\mathfrak{N}} = 1. $$

$$ \text{folglich } {}^{1}\mathfrak{N} + \overset{-1}{{}^{1}\mathfrak{N}} = {}^{1}\mathfrak{A} + 1 = 1 + 1 = 2 = {}^{2}\mathfrak{A}. $$

$\mathfrak{N}$ kann

N kann also nur in dem besondern Falle = 1 gesetzt werden, wenn A = 1 wird. Vielleicht ist Herr Busse selbst durch seiner Art dem (n — 1)ten Binomialcoeffizienten darzustellen, zu dieser unrichtigen Behauptung verführt worden, den er so angiebt $^m\mathfrak{N} - 1$, wird hier $\mathfrak{N} = 1$ so ist $\mathfrak{N} - 1 = 0$. Zu diesen falschen Folgerungen verleiten die Hindenbürgischen vortreflichen wissenschaftlichen Bezeichnungen nie, und wer erkennt hier nicht die wesentlichen Vorzüge der Hindenburgischen Distanzexponenten, vor jeder andern willkührlichen Bezeichnung.

§. 19.

Schreibt man die Reihe §. 18 für $\Delta^m \overset{t}{y}$ rückwärts, so kommt:

$$\left.\begin{matrix}\Delta^m \overset{t}{y} \\ \Delta^m ?(t+1)\end{matrix}\right\} = \pm 1 . \overset{t}{y} \pm {}^m\mathfrak{A} . \overset{t+1}{y} \mp {}^m\mathfrak{B} \overset{t+2}{y} \ldots \pm {}^m\overset{n-1}{\mathfrak{N}} \overset{t+2n-1}{y} \pm {}^m\overset{n}{\mathfrak{N}} \overset{t+2n}{y} \ldots + 1 . \overset{t+m}{y}$$

nehmlich die Reihe §. 18. für $\Delta^m \overset{t}{y}$ hat vor und rückwärts geschrieben einerley Binomialcoeffizienten. Das letzte oder (m + 1 te Glied dieser Reihe ist immer positiv. Bey den übrigen Gliedern gelten abwechselnd, die obern oder untern Zeichen, nachdem m eine ungerade oder gerade Zahl ist.

§. 20.

Zusatz.

Für m = n und t = o, erhält man aus §. 18.

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta^n\rceil 1} = \left\{ 1.\overset{n}{y} - {}^n\mathfrak{A}.\overset{n-1}{y} + {}^n\mathfrak{B}\overset{n-2}{y} \ldots \pm {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}\overset{1}{y} \mp 1.y \right.$$

Diese Reihe rückwärts geschrieben, oder in §. 19; m = n und t = o gesetzt, giebt

$$\frac{\Delta^n y}{\Delta^n\rceil 1} = \left\{ \mp 1.y \pm {}^n\mathfrak{A}.\overset{1}{y} \mp {}^n\mathfrak{B}\overset{2}{y} \ldots - {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}\overset{n-1}{y} + 1.\overset{n}{y} \right.$$

diese zwey Reihen stimmen genau, mit denen überein, welche der Herr Hofrath Kästner, in seiner vortreflichen Anal. endl. Gr. §. 724. IV. und in XI. nach seiner Art zu zeichnen für $1\Delta n$ giebt. Die Reihen, welche er noch in IV. für $2\Delta n$ und $1\Delta(n+1)$ giebt, erhält man aus unsere allgemeine Formel §. 18, wenn man einmal m = n und t = 1 setzt, und dann wieder m = n + 1; und t = o. Im ersten Fall erhält man

$$\frac{\Delta^n \overset{1}{y}}{\Delta^n\rceil 2} = \left\{ 1.\overset{n+1}{y} - {}^n\mathfrak{A}.\overset{n}{y} + {}^n\mathfrak{B}.\overset{n-1}{y} \ldots \pm {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}.\overset{2}{y} \mp 1.\overset{1}{y} \right.$$

oder rückwärts gelesen wie man solche aus §. 19, erhält

$$\frac{\Delta^n \overset{1}{y}}{\Delta^n\rceil 2} = \left\{ \mp 1.\overset{1}{y} \pm {}^n\mathfrak{A}\overset{2}{y} \mp {}^n\mathfrak{B}\overset{3}{y} \ldots - {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}\overset{n}{y} + 1.\overset{n+1}{y} \right.$$

Im zweyten Fall ist

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^{n+1} y \\ \\ \Delta^{n+1} 7 1\end{array}\right. = \left\{ 1.\overset{n+1}{y} - {}^{n+1}\mathfrak{A}.\overset{n}{y} + {}^{n+1}\mathfrak{B}.\overset{n-1}{y} \ldots \pm {}^{n+1}\mathfrak{N}\overset{1}{y} \mp 1.y \right.$$

oder rückwärts gelesen wie man solche aus §. 19. erhält

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^{n+1} y \\ \\ \Delta^{n+1} y\end{array}\right. = \left\{ \mp 1.y \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}\overset{1}{y} \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}\overset{2}{y} \ldots - {}^{n+1}\mathfrak{N}\overset{n}{y} + 1.\overset{n+1}{y} \right.$$

Anm. Aus §. 18. und 19. erhellet daß die Reihen für $\Delta^n y$; $\Delta^n \overset{1}{y}$ und für $\Delta^{n+1} y$ vorwärts und rückwärts geschrieben, einerley Binomialcoeffizienten haben und daß also in $\Delta^n y$ und in $\Delta^n \overset{1}{y}$; ${}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{n}\mathfrak{A} = n$ und ${}^{n}\mathfrak{N} = 1$ ist, ferner muß in $\Delta^{n+1} y$; ${}^{n+1}\mathfrak{N} = {}^{n+1}\mathfrak{A} = n + 1$ und ${}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}} = 1$ seyn.

§. 21.
Uebersicht des folgenden.

y, welches im Schema (§. 13.) und im Lehrsatze (§. 18.) eine jede Funktion von x bedeutet, sey nun eine beliebige nte Potenz von x, also $x^n = y$ und $(x + w)^n = \overset{1}{y}$; $(x + 2w)^n = \overset{2}{y}$ und überhaupt $(x + tw)^n = \overset{t}{y}$: so lehrt die Formel im nächsten §. das $(t + 1)$ Glied der mten Differenzenreihe aus Potenzen von x und aus w, dem Wachsthum der x, bestimmen. In Eulers Differenzialrechnung wird dieses im ersten Theile §. 13. durch Induktion bis für

$y = x^2$,

$y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$, und zuletzt auch für $y = x^n$ bis auf $\Delta^4 y$ gezeigt. Aus dieser letzten bis auf $\Delta^4 y$ festgesetzten Induktion wird das allgemeine Gesetz für $\Delta^m y$ bey $y = x^n$ geschlossen und am Ende des 15. Paragragh in einer allgemeinen Formel ausgedrückt.

Diese trift aber mit derjenigen nicht überein, die nach (§. 23.) für $\Delta^m y$ aus der im nächsten §. 22. für $\overset{t}{\Delta}{}^m y$ erwiesenen folgt; welche übrigens auch für alle Werthe von n gelten muß, wofür der Binomialsatz erwiesen ist, ohne daß man um ihre Gültigkeit bey negativen und gebrochenen Werthen von n zu zeigen, solche einzele Beyspiele nöthig hat, wie in Eulers Differenzialrechnung §. 17. gegeben werden.

§. 22.

Lehrsatz II.

Es sey im Schema (§. 13.), $y = x^n$, wobey $\Delta^m \overset{t}{y} = \Delta^m(x + tw)^n$ wird, und n jede mögliche oder unmögliche Größe bedeuten soll; so wird $\Delta^m \overset{t}{y} = \Delta^m \rceil(t + 1)$, als $= \Delta^m(x + tw)^n =$

$$
\begin{array}{llllllll}
+1.[(m+t)^m . {}^n\mathfrak{M} . x^{n-m} . w^m & + (m+t)^{m+1}\ {}^n\overset{+1}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+t)} . w^{m+1} & & & \ldots + (m+t)^{m+s} . {}^n\overset{+s}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+s)} . w^{m+s} & & & \ldots\ldots \\
-{}^m\mathfrak{A} . [(m-1+t)^m\ \text{″ ″ ″} & + (m-1+t)^{m+1} & \text{″} & \text{″ ″} & \ldots + (m-1+t)^{m+s} & \text{″} & \text{″ ″} & \ldots\ldots] \\
+{}^m\mathfrak{B} . [(m-2+t)^m\ \text{″ ″ ″} & + (m-2+t)^{m+1} & \text{″} & \text{″ ″} & \ldots + (m-2+t)^{m+s} & \text{″} & \text{″ ″} & \ldots\ldots] \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
\pm {}^m\mathfrak{R} . [(m-r+t)^m\ \text{″ ″ ″} & + (m-r+t)^{m+1} & \text{″} & \text{″ ″} & \ldots + (m-r+t)^{m+s} & \text{″} & \text{″ ″} & \ldots\ldots] \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

wo $+ {}^m\mathfrak{R}$ wenn r gerade und $- {}^m\mathfrak{R}$ wenn r ungerade ist.

Beweis.

Beweis.

Da nach der Voraussetzung $y = x^n$, also $\overset{t}{y} = (x + tw)^n$; $\overset{m+t}{y} = [x + (m+t)w]^n$ wird, u. s. w., so setze man diese Werthe für $\overset{t}{y}, \overset{m+t}{y}$, u. s. w. in der Reihe für $\Delta^m \overset{t}{y}$ (§. 18.), so erhält man $\Delta \overset{t}{y} = \Delta^m(x + tw)^n =$

$$+1.[x+(m+t)w]^n - {}^m\mathfrak{A}.[x+(m-1+t)w]^n \ldots \pm {}^m\mathfrak{R}[x+(m-r+t)w]^n \ldots$$

Nun entwickele man die einzele Glieder als nte Binomialpotenzen, so erhält man:

$$\begin{array}{rl}
\Delta^m(x+tw)^n = +1.[x+(m+t)w]^n & = +1.[x^n + {}^n\mathfrak{A}x^{n-1}.(m+t).w \ldots + {}^n\mathfrak{P}.x^{n-\pi}.(m+t)^\pi.w^\pi \ldots] \\
-{}^m\mathfrak{A}.[x+(m-1+t)w]^n & = -{}^m\mathfrak{A}[x^n + \text{〃}\;\text{〃}\;.(m-1+t)\;\text{〃}\ldots+\;\text{〃}\;\text{〃}\;.(m-1+t)^\pi\;\text{〃}\;\ldots] \\
+{}^m\mathfrak{B}[x+(m-2+t)w]^n & = +{}^m\mathfrak{B}[x^n + \text{〃}\;\text{〃}\;.(m-2+t)\;\text{〃}\ldots+\;\text{〃}\;\text{〃}\;.(m-2+t)^\pi\;\text{〃}\;\ldots] \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\pm{}^m\mathfrak{R}[x+(m-r+t)w]^n & = \pm{}^m\mathfrak{R}[x^n + \text{〃}\;\text{〃}\;.(m-r+t)\;\text{〃}\ldots+\;\text{〃}\;\text{〃}\;.(m-r+t)^\pi\;\text{〃}\;\ldots] \\
\vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

das Aggregat aller derjenigen Glieder, worin π vorkommt, ist also =

$$[1.(m+t)^\pi - {}^m\mathfrak{A}.(m-1+t)^\pi + {}^m\mathfrak{B}(m-2+t)^\pi \ldots \pm {}^m\mathfrak{R}(m-r+t)^\pi \ldots].\,{}^n\mathfrak{P}.\,x^{n-\pi}.\,w^\pi$$

S

Da man in diesem Aggregat für ${}^n\mathfrak{P}$ setzen darf, ${}^n\mathfrak{A}$, ${}^n\mathfrak{B}$ u. s. w. und $\pi = 1, 2, 3 \ldots m$ u. s. w. seyn kann, so gilt was von diesem Aggregat bewiesen wird, offenbar auch für jedes andere von den hier unter einander stehenden Glieder. Nun ist aber bey dem hier dargestellten $(p + 1)$ten Aggregate, der erste in Klammern geschlossene Faktor nach §. 8. (dort $q = m + t$ und $a = 1$ gesetzt) $= 0$ so lange $m > \pi$ folglich $\pi < m$ ist. Also verschwinden alle Aggregate der entwickelten Reihe welche vor dem $(m+1)$ten Aggregate vorhergehen, (den auch das erste Aggregat $(1 - {}^m\mathfrak{A} + {}^m\mathfrak{B} - {}^m\mathfrak{C} \ldots \mp {}^m\mathfrak{R} \ldots) x^n$ ist nach §. 6. ebenfalls $= 0$), und können deshalb auf die bestimmung des Werthes von $\Delta^m (x + tw)^n$ gar keinen Einfluß haben. Daher ist der Werth im Lehrsatze, die jetzt eben entwickelte Reihe, von dem $(m + 1)$ten Aggregate an. Der erste Theil der Reihe im Lehrsatze wird sogleich erhalten, wenn man in vorstehenden $(p + 1)$ten Aggregate ${}^n\mathfrak{P} = {}^n\mathfrak{M}$ und $\pi = m$ setzt.

§. 23.

§. 23.

Zusatz. 1.

Setzt man im Lehrsatz (§. 22.) $t = 0$, so erhält man $\Delta^m y = \Delta^m 7 1 = \Delta^m x^n =$

$$\begin{array}{llll}
1.[m^m . {}^n\mathfrak{M} . x^{n-m} . w^m & + m^{m+1} . {}^n\overset{+1}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+1)} . w^{m+1} & + \ldots m^{m+1} . {}^n\overset{+s}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+s)} . w^{m+s} & \ldots] \\
-{}^m\mathfrak{A}[(m-1)^m \;''\;''\;'' & + (m-1)^{m+1} . \;''\;''\;'' & + \ldots (m-1)^{m+s} . \;''\;''\;'' & \ldots] \\
+{}^m\mathfrak{B}[(m-2)^m \;''\;''\;'' & + (m-2)^{m+1} . \;''\;''\;'' & + \ldots (m-2)^{m+s} . \;''\;''\;'' & \ldots] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\pm{}^m\mathfrak{R}[(m-r)^m \;''\;''\;'' & + (m-r)^{m+1} . \;''\;''\;'' & \ldots + (m-r)^{m+s} . \;''\;''\;'' & \ldots] \\
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Anm.

Anm. Vergleicht man diese Reihe mit derjenigen, so im im ersten Theile von Eulers Differenzialrechnung zu Ende des 15ten §. gegeben wird

$$\Delta^{m}y = \alpha . I . x^{n-m} . w^{m} + \beta . K . x^{n-(m+1)} . w^{m+1} + \gamma . L x^{n-(m+2)} . w^{m+2} + \ldots .$$

wo I, K, L u. s. w. die binomischen Coeffizienten ${}^{n}\mathfrak{M}$, ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, ${}^{n}\overset{+2}{\mathfrak{M}}$ u. s. w. vorstellen; so siehet man leicht, daß α, β, γ, u. s. w. hier das Aggregat der in ${}^{n}\mathfrak{M} x^{n-m} w^{m}$ in ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+1)} . w^{m+1}$, in ${}^{n}\overset{+2}{\mathfrak{M}} . x^{n-(m+2)} . w^{m+2}$ multiplizirten Theile, vorstellen müssen. Diese α, β, γ u. s. w. hat aber Euler gerade so bestimmt, als sie sich aus dem hier §. 22 erwiesenen Lehrsatze für $\Delta^{m}\overset{1}{y} = \Delta^{m}7_{2}$ ergeben würden.

Die richtigen Werthe von α, β, γ u. s. w. wie sie unsere Formel fur $\Delta^{m}y$ giebt, sind es übrigens, welche bis $\Delta^{7}y$ berechnet, die im Eulerischen Werke, §. 14. abgedruckte Tafel geben.

§. 24.

Zusatz. 2.

Einige Beyspiele mögen zur Erläuterung der §. 23. gefundenen Formel dienen. Man setze $m = 3$ und $n = 4$; so erhält man

$$\Delta^{3}x^{4} = \Delta^{3}y = \Delta^{3}71 =$$

$$\begin{array}{llll}
1 . 3^{3} & . \frac{4.3.2}{1.2.3} . x^{1} . w^{3} + & 1 . 3^{4} & . \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} . x^{0} . w^{4} + 0 \\
- 3 . 2^{3} & & - 3 . 2^{4} & \\
+ 3 . 1^{3} & & + 3 . 1^{4} & \\
- 1 . 0^{3} & & - 1 . 0^{2} & \\
\hline
= 6 . & 4 \quad . x^{1} . w^{3} + & 36 . & 1 \quad . x^{0} . w^{4} + 0
\end{array}$$

§. 25.

§. 25.

Zusatz 3.

Setzt man in §. 23. m = 1; so wird ${}^{n}\mathfrak{M} = {}^{n}\mathfrak{A}$, ${}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = {}^{n}\mathfrak{B}$ u. s. w. Man hat daher $\Delta^{1}y = \Delta^{1}71$, als $= \Delta^{1}x^{n}, = 1 . {}^{n}\mathfrak{A}\, x^{n-1} . w + {}^{n}\mathfrak{B}\, x^{n-2} . w^{2} + {}^{n}\mathfrak{C} . x^{n-3}\, w^{3}$

$$\ldots + {}^{n}\mathfrak{R} . x^{n-r} . w^{r} \ldots .$$

denn wenn m = 1 ist, so verschwinden alle Glieder, die m − 1, oder ${}^{m}\mathfrak{B}$, oder die hierauf folgende Binomialcoeffizienten zu Faktoren haben, weil diese Faktoren jeder für sich = Null ist.

§. 26.

Zusatz. 4.

Es kommt hierbey die wichtige Frage vor, unter welchen Umständen irgend ein (s + 1)ter Theil (ich zähle den zu w^{m} gehörigen Theil, wie immer als erster Theil) der Reihe im Lehrsatze (§. 22.) ein letzter, die Reihe abbrechender Theil sey, und unter welchen Umständen hingegen diese Reihe ins Unendliche fortgehe.

Was wir hier (s + 1)te Theil nennen, ist eigentlich von der Reihe im Beweise wovon der Lehrsatz abgeleitet worden, der (m + s + 1)te Theil, soll dieser Theil verschwinden, so kann es nicht anders geschehen, als es muß wenigstens eines von seinen vier Faktoren = 0 werden. Diese wollen wir deshalb in dieser Hinsicht einzeln betrachten.

§. 27.

§. 27.

Der erste Faktor bestehet aus der Reihe

$$(m+t)^{m+s} - {}^m\mathfrak{A}(m-1+t)^{m+s} + {}^m\mathfrak{B}(m-2+t)^{m+s} \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm {}^m\mathfrak{R}(m-r+t)^{m+s} \pm \ldots$$

also aus der Reihe ε in §. 8., wenn man dort

$q = m + t$, $a = 1$ und $\pi = m + s$ setzt;

kann also nur $= 0$ werden, für $m > m + s$. Dies findet nun nicht Statt; sondern es kann s aufs kleinste nur $= 0$ gesetzt werden, indem alsdann der $(m + s + 1)$te schon dem $(m + 1)$ten Theil der Reihe im Beweise des Lehrsatzes, also im Lehrsatze selbst dem 1sten Theile gleich wird. Wer s negativ setzen wollte, der würde Theile bezeichnen, die vor dem 1sten im Lehrsatze, also vor dem $(m + 1)$ten Theile im Beweise des Lehrsatzes vorhergehen, von diesen ist aber im Lehrsatze nicht mehr die Rede, weil sie alle wie aus dem dortigen Beweise erhellet, verschwinden.

Weder der dritte Faktor $x^{n-(m+s)}$, noch der vierte w^{m+s}, kann jemals $= 0$ werden; da natürlich weder x noch w selbst $= 0$ gesetzt werden soll. Und wenn man übrigens auch z. B. w unendlich klein annimmt; so kann doch w^{m+s} nur in Vergleichung mit niedrigern Potenzen von w verschwinden.

§. 28.

Es bleibt also nur noch der zweyte Faktor ${}^n\mathfrak{M}^{+s}$ zu betrachten übrig. Dieser kann nun niemals $= 0$ werden, wenn n keine ganze und positive Zahl ist, wie ich solches in meiner Ausgabe von Eulers Al-

gebra.

gebra. 1ster Theil. Berlin bey Nauk. 1796. im 1sten Zusatz §, 362, erwiesen habe.

§. 29.

Ist daher n keine ganze positive Zahl, so läuft die nach den Potenzen w geordnete Reihe des Lehrsatzes ins Unendliche fort, und enthält nach und nach alle Potenzen w^m, w^{m+1}, w^{m+2} u. s. w. ohn Ende.

§. 30.

Ist aber n eine ganze und positive Zahl; so wird die Reihe im Lehrsatze niemals unendlich werden, es mag 1) $m > n$; 2) $m = n$ oder 3) $m < n$ werden.

§. 31.

1. Im ersten Falle, für $m > n$, wird schon der erste Theil und eben so jeder folgende Theil $= 0$, weil jeder der Faktoren ${}^{n}\mathfrak{M}$; $\overset{+1}{{}^{n}\mathfrak{M}}$; ... $\overset{+s}{{}^{n}\mathfrak{M}}$ ... $= 0$ wird. (Meine Ausg. v. Eulers Alg. 1ster Theil. §. 374. 1. Zus.). Daher ist $\Delta^m (x+tw)^n = \Delta^m ⅂(t+1)$ $= \Delta^m \overset{t}{y} = 0$ für $m > n$.

§. 32.

2. sey $m = n$. Wenn das ist, so muß $m+1 < n$ seyn, also sogleich der Coeffizient $\overset{+1}{{}^{n}\mathfrak{M}}$ und jeder folgende $\overset{+2}{{}^{n}\mathfrak{M}}$; $\overset{+3}{{}^{n}\mathfrak{M}}$ u. s. w. verschwinden (meine Ausg.

v. Eu-

v. Eulers Alg. 1ster Theil. §. 361. 3. Zus.), und die Reihe bis auf das erste Glied verschwinden, worin dann $^n\mathfrak{M}$ als $= {}^n\mathfrak{N}$ vorkömmt: ist also

$$\Delta^n(x + tw)^n =$$
$$[(n+t)^n - {}^n\mathfrak{A}(n-1+t)^n + {}^n\mathfrak{B}(n-2+t)^n \ldots$$
$$\ldots \pm {}^n\mathfrak{R}(n-r+t)^n \ldots]^n\mathfrak{N} . x^o . w^n;$$

also nach §. 8., indem dort

$$q = n + t,\ a = 1,\ m = n,\ \pi = n$$

gesetzt wird und $^n\mathfrak{N} = 1$ ist (m. A. v. Eulers Alg. 1ster Theil §. 351. Zus.)

$$\Delta^m(x + tw)^n = n . n - 1 . n - 2 \ldots . 2 . 1 . w^n.$$

§. 33.

Daß dieser Werth constant, für alle Glieder in der nten Differenzenreihe einerley sey, erhellet schon daraus, daß t in diesem Werthe gar nicht vorkömmt, und man doch das erste, 2te, 3te u. s. w. Glied erhält, je nachdem man $t = 0, = 1, = 2, = 3$ u. s. w. setzt.

Ueberdieß aber weiß man aus §. 31. daß $\Delta^{n+1}(x + tw)^n = 0$; oder jedes Glied der auf der nten zunächst folgenden $(n + 1)$ten Differenzenreihe $= 0$ werde; weil $n + 1 = m >$ den n ist. Nun giebt aber die $(n + 1)$te Differenzenreihe, nach dem Schema §. 13. die Unterschiede zwischen jeden zwey nächsten Gliedern der nten Differenzenreihe an: und Größen deren Unterschiede $= 0$ sind, müssen ohne Zweifel gleich groß seyn.

§. 34.

Anmerkung.

Man übersieht auch hieraus, daß man etwas übereilt schließt, wenn man behauptet, daß alle Glieder der nten Differenzenreihe einerley Werth haben, sobald man nur erwiesen hat, daß das erste Glied der $(n + 1)$ten Differenzenreihe, $\Delta^{n+1} x^n = 0$ sey. Da dieses erste Glied nur den Unterschied zwischen dem ersten und 2ten der nächst vorhergehenden nten Differenzenreihe angiebt; so folgt aus seiner Verschwindung nur so viel daß die beyden genannten Glieder, das erste und 2te der nten Differenzenreihe gleich groß sind.

§. 35.

3) Ist endlich $m < n$;

so wird etwa $m + 1$ oder $m + 2$ oder überhaupt $m + s = n$ folglich $m + s + r > n$ werden, indem r irgend eine ganze positive Zehl bedeutet. Der Theil der Reihe im Lehrsatze, worin nun w^{m+s+r} vorkommt, d. i. der $(r + s + 1)$te Theil hat auch den Faktor ${}^{n}\mathfrak{M}^{+s+r}$ und wird deshalb $= 0$. (m. A. v. Eulers Alg. 1ster Theil. §. 361. 3 Zus.). Dieser Theil ist für den kleinsten Werth von r, nehmlich $r = 1$, der $(s+2)$te, und dies ist demnach der erste verschwindende Theil der Reihe.

Der letzte von den nicht verschwindenden Theilen ist daher der $(s + 1)$te für $m + s = n$, folglich $s = n - m$: oder es besteht die Reihe für $\Delta^m (x + w)^n$

aus

aus ($n - m + 1$) Theilen, worin nach und nach die Faktoren $x^{n-m}.w^m$; $x^{n-(m+1)}.w^{m+1}$ u. s. w.; bis auf $x^0.w^n$ vorkommen, also die Potenzen des w von w^m bis w^n wachsen, diejenigen des x aber von x^{n-m} bis auf x^0 abnehmen.

§. 36.

Anwendung auf die Differenzialen.

Keiner der bisherigen Schlüsse ist auf einen besondern Werth von w eingeschränkt, sondern es kann dabey w jeden möglichen oder unmöglichen, endlichen oder unendlichen Werth haben. Will man nun z. B. den Lehrsatz §. 22. mit seinen Zusätzen auf den besondern Werth dx für w anwenden; so hat man nur noch auf den Vortheil zu achten, daß jede Potenz dx^{π} gegen die Potenz dx^{ν} verschwindet, sobald $\pi > \nu$ ist.

Diesem nach gibt der Lehrsatz mit allen seinen Zusätzen die folgenden Formeln, welche in den Vten Kapitel der Eulerschen Differenzialrechnung, theils aufs neue erwiesen, theils aber wiederum nur aus unvollständigen Inductionen hergeleitet werden; die aber dennoch, wie jede Eulersche Rechnung, sehr lehrreich und wichtig bleiben.

§. 37.

Setzt man im Lehrsatze $w = dx$ und $t = o$; oder im §. 23. nur $w = dx$ so erhält man daraus,

$d^m. x^n =.$ *).

$+ 1$

*) Der Punkt (.) nach d, d^2, d^3 . . . d^n fordert das Differenzial der ganzen nach dem Punkte folgende Größe, Eu-

ler s

$$
\begin{array}{llllll}
+ 1. & [m^m \;.\; {}^n\mathfrak{M} x^{n-m} dx^m & + & m^{n+1} \;.\; {}^n\mathfrak{M}^{+1} . x^{n-(m+1)} . dx^{m+1} & + & \ldots] \\
- {}^m\mathfrak{A} & [(m-1)^m \;\;〃\;\;〃\;\;〃 & + & (m-1)^{m+1} \;\;〃\;\;〃 \qquad 〃 & + & \ldots] \\
+ {}^m\mathfrak{B} & [(m-2)^m \;\;〃\;\;〃\;\;〃 & + & (m-2)^{m+1} \;\;〃\;\;〃 \qquad 〃 & + & \ldots] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\pm {}^m\mathfrak{R} & [(m-r)^m \;\;〃\;\;〃\;\;〃 & + & (m-r)^{m+1} \;\;〃\;\;〃 \qquad 〃 & + & \ldots] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

n mag seyn was für eine Größe es will, wie im Binominalsatze.

1) In so fern nun jede höhere Potenz dx^{m+1}; dx^{m+2} u. s. w. gegen die niedere Potenz dx^m verschwindet, in so fern besteht jedes mte Differenzial der Potenz x^n, n mag seyn was es will, nur aus einem

lers Diff. 1 Theil. §. 146. also bedeutet $d^m. x^n$ so viel als $d^m. (x^n)$. mithin etwas ganz anders als $d^m x^n = (d^m x)^n$.

nem Theile, dessen Factor dx^m ist, und dessen übrige Factoren alle endlich sind.

Der erste Factor, nemlich die Reihe.

$1 . m^m - {}^m\mathfrak{A}(m-1)^m + {}^m\mathfrak{B}(m-2)^m \ldots \pm {}^m\mathfrak{M}(m-m)^m$. bricht wegen des Factors $(m-m)^m$ noch um ein Glied eher ab, als es wegen der binomischen Coeffizienten geschehen würde, wodurch erst die $(m+1)$ten, $(m+2)$ten, d. i. die Glieder mit ${}^m\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, ${}^m\overset{+2}{\mathfrak{M}}$ u. s. w. verschwinden; und der Werth dieses ersten Factors ist $= m . m-1 \ldots 2 . 1$, (nach §. 8. wenn $\pi = m$; $q = m$ und $a = 1$ gesetzt wird); daher $d^m . x^n = m . m-1 \ldots 2 . 1 . {}^n\mathfrak{M} x^{n-m} dx^m$ also auch $= n . n-1 \ldots [n-(m-1)] . x^{n-m} . dx^m$, weil ${}^n\mathfrak{M} = \dfrac{n . n-1 \ldots n-(m-1)}{1 . 2 \ldots n}$ ist.

2) Wofern man aber auf die Glieder mit den höhern Potenzen von dx Rücksicht nimmt; so ist es ausgemacht, daß die angegebene Reihe für $d^m . x^n$ ins Unendliche fortgeht, wenn n keine ganze und positive Zahl ist §. 29.

3) Ist aber n eine ganze und positive Zahl, so ist

1) wenn $m > n$ ist, jedes $d^m . x^n = 0$. §. 31. folglich z. B. $d^{n+1} . x^n = 0$; $d^{n+2} . x^n = 0$ u. s. w.

2) Wenn $m = n$ ist, so hat man nach §. 32. $d^n . x^n = n . n-1 \ldots 2 . 1 . dx^n$ (Eulers Diff. 1 Th. §. 154.) und dieser Werth ist constant, man sehe §. 33. u. 34.

3) Ist endlich $m < n$, so besteht die Reihe für $d^m . x^n$, aus $(n-m+1)$ Theilen, und diese enthalten nach und nach dx^m; dx^{m+1} u. s. w. endlich dx^n. §. 35.

§. 38.

Setzt man in der Formel

$$d^m . x^n = n . n-1 \ldots . [n-(m-1).] . x^{n-m} . dx^m$$

nach und nach für m; 1, 2, 3, 4 u. s. w. so erhält man sogleich

$$d . x^n = n \; x^{n-1} . dx$$

$$d^2 . x^n = n . n-1 . x^{n-2} . dx^2$$

$$d^3 . x^n = n . n-1 . n-2 . x^{n-3} . dx^3$$

$$d^4 . x^n = n . n-1 . n-2 . n-3 . x^{n-4} . dx^4$$

u. s. w.

wie Euler in seiner Diff. 1 Th. §. 152. aus andern Gründen findet. — Anfänger die sich der deutschen Ausgabe von Euler bedienen, erinnere ich, die übel gedruckten $d . {}^3x^n$, $d . {}^4x^n$; $d . {}^5x^n$ u. s. w. nicht für etwas anderes als $d^3 . x^n$, $d^4 . x^n$; $d^5 . x^n$; u. s. w., zu halten

$n.n-1 \ldots .[n-(m-1)]$ kann ich auch so schreiben $1.n.n-1 \ldots .[n-(m-1)]$ wird die 1 mitgezählt, so sind hier $(m+1)$ Factoren welches die $(m-1)$ anzeigt. $m=0$ gesetzt, kann also wohl nichts anders heißen, als es ist nur ein Factor nemlich 1 vorhanden, mithin ist richtig

$d^0 . x^n = 1 . x^{n-0} . dx^0 = x^n$; und d^0 ist nicht $= 1$ denn 0 ist hier kein Exponent einer Größe sondern es kann nichts anders heißen, als es soll kein Differenzial genommen werden: m negativ nehmen, hat hier keinen Sinn, n darf wie bekannt negativ seyn, auch sonst was es will.

Die Formel

$$d^n \,.\, x^n = n \,.\, \overline{n-1} \ldots 2 \,.\, 1 \,.\, dx^n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \,.\, dx^n$$

giebt wenn man für n, nach u. nach setzt, 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w. folgende Formeln

$$d^0 \,.\, x^0 = d^0 \,.\, 1 = 0 \,.\, dx^0 = 0 \,.\, 1 = 0,$$

Man schließe hieraus ja nicht $d^0 = 0$, denn d^0 ist nur ein Operationszeichen

$$d \,.\, x = dx$$
$$d^2 \,.\, x^2 = 2dx^2$$
$$d^3 \,.\, x^3 = 6dx^3$$
u. s. w.

§. 39.

Noch einige Relationen und Hauptsätze.

Das allgemeine Gesetz in dem folgenden Schema

y	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	.	$\Delta^m y$	$\Delta^{m+1} y$
y_1	$\Delta^1 y_1$	$\Delta^2 y_1$	.	.	$\Delta^m y_1$	.
y_2	$\Delta^1 y_2$	.	.	.	.	.
y_3	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	$\Delta^m y_t$	$\Delta^{m+1} y_t$
y_t	$\Delta^1 y_t$	$\Delta^2 y_t$	.		$\Delta^m y_{t+1}$	
y_{t+1}	$\Delta^1 y_{t+1}$					
y_{t+2}						
.						
.						
.						

wo=

wonach jedes beliebige (t+1)te Glied einer jeden (m+1)ten Differenzenreihe aus dem (t+2)ten Gliede der nächst vorhergehenden mten Differenzenreihe entsteht, wird durch die Gleichung

$$\Delta^{m+1} \overset{t}{y} = \Delta^{m} \overset{t+1}{y} - \Delta^{m} \overset{t}{y}$$

oder

$$\Delta^{m+1}\, \text{⅂}\,(t+1) = \Delta^{m}\, \text{⅂}\,(t+2) - \Delta^{m}\, \text{⅂}\,(t+1)$$

dargestellt. Dies Gesetz umfaßt auch die nemliche Entstehung der ersten Differenzenreihe aus der Hauptreihe, wenn man sich erlaubt, statt m und t auch o zu schreiben, d. i. beyde Größen ganz wegzulassen. Denn wie schon oben erinnert worden, daß Δ^{m} keine Größe, sondern nur ein Operationszeichen bedeutet, daß die mte Differenz bezeichnet, so sagt Δ^{o} oder die ote Differenz nichts anders als es soll gar keine Differenz genommen werden, also ist es ganz gleichgültig ob ich $\Delta^{o} \overset{t}{y}$ oder bloß $\overset{t}{y}$ schreibe. $\overset{t}{y}$ deutet wie bekannt das (t+1)te der Hauptreihe an, hiernach ist also $\overset{o}{y} = y$ nichts anders als das erste Glied der Hauptreihe. Man merke sich also das o bey Δ^{o} und $\overset{o}{y}$ nicht ganz einerley sagt, auch daß beyder Bedeutung von o als Exponent einer Potenz ganz verschieden ist, denn im letztern Fall ist a^{o} allemal $= 1$.

§. 40.

Anmerkung.

Aus diesem Entstehungsgesetze folgt sogleich, daß

z. B. ☿) $\Delta^{m} \overset{1}{y} = \Delta^{m} y + \Delta^{m+1} y$

♀) $\Delta^{m} \overset{2}{y} = \Delta^{m} \overset{1}{y} + \Delta^{m+1} \overset{1}{y}$

überhaupt ♁) $\Delta^{m} \overset{t+1}{y} = \Delta^{m} \overset{t}{y} + \Delta^{m+1} \overset{t}{y}$ ist.

(Vergl. S. 169 .No. 3.)

§. 41.

Betrachtet man die Gleichung ☿); so ist darin der Werth von $\Delta^{m} \overset{1}{y}$ durch lauter erste Glieder der Differenzenreihen ausgedrückt, denn es kommt in ihm nur y und kein $\overset{1}{y}$, $\overset{2}{y}$ u. s. w. vor.

Der Werth von $\Delta^{m} \overset{2}{y}$ hingegen bestehet aus zwey Theilen, wovon jeder schon $\overset{1}{y}$ enthält. Indessen ist der Werth des ersten Theiles schon bey ☿) durch lauter erste Glieder ausgedrückt; und da man in dieser nemlichen Gleichung statt m auch $m+1$ schreiben darf, indem hier m jede positive Zahl bedeuten soll; so giebt sie zugleich $\Delta^{m+1} \overset{1}{y} = \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$, welches auch den zweyten Theil in ♀) durch lauter vorangehende Glieder ausdrücken lehrt; so daß man schreiben kann

Δ^{m}

$$\Delta^m \overset{2}{y} = \Delta^m y + \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2} y$$

oder

$$♂)\ \Delta^m \overset{2}{y} = \Delta^m y + 2\Delta^{m+1} y + \Delta^{m+2}$$

§. 42.

Lehrsatz.

Ueberhaupt ist

$$\Delta^m \overset{t}{y} = 1.\Delta^m y + {}^t\mathfrak{A}.\Delta^{m+1} y + {}^t\mathfrak{B}.\Delta^{m+2} y + \ldots \ldots + {}^t\mathfrak{N}.\Delta^{m+n} y + \ldots + {}^t\mathfrak{T}.\Delta^{m+t} y.$$

$$\text{d.i. } \overline{\Delta}^m \rceil (t+1) = \Delta^m \rceil 1 + {}^t\mathfrak{A}\,\Delta^{m+1} \rceil 1 + {}^t\mathfrak{B}.\Delta^{m+2} \rceil 1 + \ldots \ldots + {}^t\mathfrak{N}\,\Delta^{m+n} \rceil 1 + \ldots + {}^t\mathfrak{T}.\Delta^{m+t} \rceil 1$$

worin m und t jede positive ganze Zahl, und (nach §. 15.) auch = o seyn kann.

Beweis.

Angenommen, es sey für irgend einen bestimmten Werth von t, welcher a heißen mag, der Lehrsatz wahr, also

$$\overset{a}{\Delta}{}^m y = 1.\Delta^m y + {}^a\mathfrak{A}.\Delta^{m+1} y + {}^a\mathfrak{B}.\Delta^{m+2} y + \ldots$$

so wird damit zugleich auch angenommen, daß auch

$$\overset{a}{\Delta}{}^{m+1} y = \quad 1.\Delta^{m+1} y + {}^a\mathfrak{A}.\Delta^{m+2} y + \ldots$$

sey; weil m im Lehrsatze jede ganze positive Zahl, also auch $m+1$ bedeuten soll. Diese beyden Gleichungen zu einander addirt, ihre linken Seiten, (nach §. 40.), ihre rechten, (nach §. 18. Beweis) geben die Gleichung

$$\overset{a+1}{\Delta}{}^m y = 1.\Delta^m y + {}^{a+1}\mathfrak{A}\,\Delta^{m+1} y + {}^{a+1}\mathfrak{B}\,\Delta^{m+2} y + \ldots$$

den zu dem $(n+1)$ten Gliede der obern Reihe das $(n-2)$te der untern addirt giebt.

$${}^a\mathfrak{N}\,\Delta^{m+n} y + {}^a\overset{-1}{\mathfrak{N}}\,\Delta^{m+n} y = ({}^a\mathfrak{N} + {}^a\overset{-1}{\mathfrak{N}})\,\Delta^{m+n} y$$

$$= {}^{a+1}\mathfrak{N}.\Delta^{m+n} y \text{ (§. 18. Beweis).}$$

Vergleicht man nun die Reihe für $\Delta^m y$ mit dem Lehrsatze, so folgt daß der Lehrsatz auch für $t = a+1$ gelten müsse, so bald er für $t = a$ als gültig angenommen werden kann.

Nun gilt aber der Lehrsatz für $t = 1$, nach ♃) §. 40. auch schon für $t = 2$, nach ♂) §. 41. Folglich gilt er nach den eben angeführten Schlüssen auch für $t = 2 + 1 = 3$; folglich durch wiederholte Anwendung dieser Schlüsse auch für $t = 3 + 1 = 4$ u. s. w. für jede positive ganze Zahl.

§. 43.

§. 43.

Zusatz. 1.

Setzt man im Lehrsatze (§. 42.) $t = 0$, so wird $\overset{t}{y}$ zu y oder deutet das erste Glied an, und da für $t = 0$ alle folgende Binomialcoeffizienten ${}^{t}\mathfrak{A}$, ${}^{t}\mathfrak{B}$ u. s. w. $= 0$ werden; (den die 0te Potenz einer zweytheiligen Größe ist $= 1$, hat also gar keine Binomialcoefficienten, eben dies sagen die Darstellungen ${}^{0}\mathfrak{A}$, ${}^{0}\mathfrak{B}$ u. s. w.) so giebt der Lehrsatz bey diesem Werthe von t daß $\Delta^m y = 1 . \Delta^m y + 0$, welches freylich schon von selbst klar ist und nicht anders seyn kann. Der Lehrsatz bestimmt nemlich $\Delta^m \overset{t}{y}$ aus den ersten Gliedern der Reihe Δ^m und der folgenden Reihen der Δ^{m+1}, Δ^{m+2} u. s. w. Wählt man nun zu $\Delta^m \overset{t}{y}$ selbst das erste Glied der Reihe der Δ^m, so kann der Lehrsatz nichts anders angeben, als daß dies Glied durch sich selbst allein bestimmt werde.

§. 44.

Zusatz. 2.

Man setze im Lehrsatze (§. 42.) $m = 2$ so hat man

$$\Delta^2 \overset{t}{y} = 1 . \Delta^2 y + {}^{t}\mathfrak{A}\, \Delta^3 y + {}^{t}\mathfrak{B}\, \Delta^4 y + \ldots + {}^{t}\mathfrak{T} . \Delta^{2+t} y.$$

Man setze $m = 1$; so hat man

$$\Delta^1 \overset{t}{y} = 1 . \Delta\, y + {}^{t}\mathfrak{A}\, \Delta^2 y + {}^{t}\mathfrak{B}\, \Delta^3 y + \ldots + {}^{t}\mathfrak{T} . \Delta^{1+t} y.$$

und

und in dem Sinne des §. 15. $m = 0$ gesetzt, giebt,

$$\Delta^m \overset{t}{y} = \Delta^0 \overset{t}{y} =$$

$$\overset{t}{y} = 1.y + {}^t\mathfrak{A}\Delta y + {}^t\mathfrak{B}\Delta^2 y + \ldots + {}^t\mathfrak{T}.\Delta^t.y.$$

das ist:

$$y\urcorner(t+1) = 1.y + {}^t\mathfrak{A}\Delta\urcorner 1 + {}^t\mathfrak{B}\Delta^2\urcorner 1 + \ldots + {}^t\mathfrak{T}.\Delta^t.\urcorner 1.$$

Anm. Der Lehrsatz (§. 42.); giebt also das allgemeine Glied jeder Reihe der Unterschiede, durch erste Glieder der Differenzreihen ausgedrückt. Die Reihe für y, giebt das allgemeine Glied der Hauptreihe, durch die ersten Glieder, der Hauptreihe und der Differenzreihen, ausgedrückt. In beyden Reihen §. 42 u. 44. sind die $(t - 1)$ten und (t)ten, zum Exponenten t gehörigen Binominalcoeffizianten $\overset{-1}{{}^t\mathfrak{T}} = t = {}^t\mathfrak{A}$, ${}^t\mathfrak{T} = 1$, daß also diese Reihen, vorwärts und rückwärts geschrieben, einerley Binominalcoeffizienten haben.

Setzt man in der Reihe für $\overset{t}{y}$; $t = n$, so kommt die Reihe $\overset{n}{y}$, wie bey Kästner Anal. endl. Gr. §. 725. II.

§. 45.

Reihen der nten Ordnung und ihre Glieder.

Die bewiesenen Sätze gelten, was auch y für eine Funktion einer veränderlichen Größe ist, und nach welchem Gesetze auch die Hauptreihe $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ fortgehen mag. Hierbey schreiten im Allgemeinen die Differenzreihen, wenn die Gliederzahl der Hauptreihe nicht beschränkt ist, ohne Ende fort. Es giebt aber mehrere Reihen (Kästn. Anal. endl. Gr. §. 310.–312. §. 727, u. a.) deren Differenzen irgend einmal abbrechen, d. i. deren 1ste, 2te, 3te .... oder nte Differenzen constant sind. Man nennt sie Reihen

der

der 1sten, 2ten, 3ten .... nten Ordnung (Eulers Diff. 1ster Theil §. 37.) und sollen hier durch
${}_1y,\ {}_2y,\ {}_3y \ldots {}_ny$ bezeichnet werden.

Will man die folgenden Formeln mit denen in Eulers Differenzialrechnung 1ster Theil, 2tes Kap. vergleichen, so hat man nur noch zu merken, daß Euler x geschrieben hat, wo hier t steht.

§. 46.

Aufgabe.

Das allgemeine $(t+1)$te Glied einer Reihe der nten Ordnung, als Grundreihe, durch die ersten Glieder, derselben Reihe und ihrer Differenzreihen, auszudrücken.

Auflösung.

Es ist

$$\overset{t}{{}_ny} = 1.y + {}^t\mathfrak{A}\Delta^1 y + {}^t\mathfrak{B}\Delta^2 y + {}^t\mathfrak{C}\Delta^3 y 1 \ldots + {}^t\mathfrak{N}\Delta^n y.$$

das ist:

$${}_ny\urcorner(t+1) = y\urcorner 1 + {}^t\mathfrak{A}\Delta^1\urcorner 1 + {}^t\mathfrak{B}\Delta^2\urcorner 1 + {}^t\mathfrak{C}\Delta^3\urcorner 1 \ldots + {}^t\mathfrak{N}\Delta^n\urcorner 1.$$

Diese Reihe erhält man, wenn man die Reihe §. 44. bis auf Δ^n oder die nte Differenzreihe, fortsetzt, mit welcher sie abbricht (§. 45.). Für eine Grundreihe der $(n+m)$ten Ordnung, oder für ${}_{n+m}y$, müßte man die Reihe bis auf das Glied ${}^t\overset{+m}{\mathfrak{N}}\ \Delta^{n+m}\ y$ also für ${}_{n+1}y$ bis auf ${}^t\mathfrak{N}\ \Delta^{n+1}\ y$ fortsetzen.

§. 47.

Aufgabe.

Das allgemeine $(t+1)$te Glied einer Reihe der erstern Ordnung, aus lauter Gliedern der Hauptreihe auszudrücken.

Auflösung.

Nach §. 46. ist

$${}_1\overset{t}{y} = {}_1y \urcorner (t+1) = 1 \,.\, y + {}^t\mathfrak{A} \,.\, \Delta^1 y,$$

also weil ${}^t\mathfrak{A} = t$, und nach §. 39. ferner

n $\Delta^1 y = \overset{1}{y} - y$ ist,

auch ${}_1\overset{t}{y} = 1 \,.\, y + {}^t\mathfrak{A}\, \overset{1}{y} - t . y$

oder ${}_1\overset{t}{y} = {}^t\mathfrak{A}\, \overset{1}{y} - (t-1)\, y$. Diese Gleichung, welche übrigens der Aufgabe schon Gnüge leistet, kann offenbar auch folgendermaßen geschrieben werden:

$${}_1\overset{t}{y} = {}^t\mathfrak{A}\, (t-1) \,.\, \left(\frac{\overset{1}{y}}{t-1} - \frac{y}{t}\right).$$

§. 48.

Aufgabe.

Das allgemeine Glied einer Grundreihe der nten Ordnung, aus lauter Gliedern derselben Reihe auszudrücken.

Auflösung.

Es ist

$$ {}^{t}_{n}y = {}^{t}\mathfrak{N}(t-n)\left[\frac{\overset{n}{y}}{t-n} - \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\,\overset{n-1}{y}}{t-n+1} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}\,\overset{n-2}{y}}{t-n+2}\dots \right. $$

$$ \left. \dots \mp \frac{{}^{n}\mathfrak{M}\,\overset{n-m}{y}}{t-n+m}\dots \mp \frac{{}^{n}\mathfrak{N}\,\overset{0}{y}}{t}\right] = E. $$

Beweis.

Nach §. 46. ist

$$ {}^{t}_{n}y = 1.y + {}^{t}\mathfrak{A}\Delta^{1}y + {}^{t}\mathfrak{B}\Delta^{2}y\dots + {}^{t}\mathfrak{N}\Delta^{n}y = F $$

und $ {}^{t}_{n+1}y = F + \overset{+1}{{}^{t}\mathfrak{N}}.\Delta^{n+1}.y \;\;=\!=\!=\!=\; F + G. $

Die Buchstaben E, F, G, sollen nehmlich nur dazu dienen, einige der hergeschriebnen Größen ganz kurz zu bezeichnen.

Schreibt man den Werth, wie ihn §. 18. für $\Delta^{n+1}y$ bestimmt, in G; so hat man G =

$$ \overset{+1}{{}^{t}\mathfrak{N}}[1.\overset{n+1}{y} - {}^{n+1}\mathfrak{A}\,\overset{n}{y}\dots \pm {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}\;\overset{n+1-(m+1)}{y}\;\dots \mp {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{N}}.y.] $$

Angenommen nun, es sey für irgend einen bestimmten Werth a von n die F = E; so hat man wegen der vorletzten Gleichung wonach überhaupt

${}^{t}_{n+1}y = F + G$ ist, daß für n = a sey ${}^{t}_{n+1}y = E + G$ und es kommt darauf an, die Summe der beyden Reihen E und G zu finden.

Weil $\overset{n-m}{y} = \overset{n+1-(m+1)}{y}$ ist; so schmilzt bey ihrer Summirung zusammen jedes (m + 1)te Glied von E,

so

so e heißen soll, mit jedem (m + 2)ten Gliede von G, welches g heißen mag.

Wenn man nun das Glied e durch

$(t-n-1)\,(m+1)\,(n+1)$,

das Glied g aber durch $(t-n-1)\,(t-n+m)$ sowohl multiplizirt als auch dividirt; so hat man

$$e = {}^{t}\mathfrak{R}.\frac{t-n}{n+1}(t-n-1).\left(\mp\frac{m+1}{t-n-1}.\frac{{}^{n}\mathfrak{M}.(n+1)}{m+1}.\frac{y^{n-m}}{t-n+m}\right)$$

$$g = {}^{t}\mathfrak{R}^{+1}(t-n-1).\left(\pm\frac{t-n+m}{t-n-1}.{}^{n+1}\mathfrak{M}^{+1}.\frac{y^{n-m}}{t-n+m}\right),$$

daher

$$e+g = {}^{t}\mathfrak{R}^{+1}.(t-n-1).\left[\begin{array}{l}\mp\dfrac{m+1}{t-n-1}\\ \pm\dfrac{t-n+m}{t-n-1}\end{array}\right].{}^{n+1}\mathfrak{M}^{+1}.\frac{y^{n-m}}{t-n-m}$$

und da

$$\frac{\mp m\mp 1\pm t\mp n\pm m}{t-n-1} = \frac{\pm t\mp n\mp 1}{t-n-1} = \pm 1 \text{ ist, *)}$$

$$e+g = {}^{t}\mathfrak{R}^{+1}.(t-n-1).\left(\pm\,{}^{n+1}\mathfrak{M}^{+1}.\frac{y^{n-m}}{t-n+m}\right)$$

Dieser Werth von e + g giebt nun gerade das (m + 2)te Glied an, so man in der Reihe des Lehrsatzes erhalten würde, wenn man darin n + 1 Statt n schriebe.

Für

*) Wer die Formel nicht so allgemein zu übersehen vermag, der kann erst die obern Zeichen — und + und dann die untern + und — gelten lassen, so findet er für den ersten Fall + 1 und für den 2ten Fall — 1. Man thut aber wohl sich an dergleichen allgemeine Uebersichten zu gewöhnen, da sie die Beweise und Sätze ungemein abkürzen.

Für $m = 0$ wird in e, der Coeffizient $\mp {}^{n}\mathfrak{M} = +1$**) und in g, der Coeffizient $\pm {}^{n+1}\overset{+1}{\mathfrak{M}} = - {}^{n+1}\mathfrak{A}$; und es schmilzt alsdann, nach der eben ausgeführten allgemeinen Reduktion das erste Glied der E mit dem 2ten Gliede der G dergestalt zusammen, daß

$$ {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . (t - n - 1) . \left(- {}^{n+1}\mathfrak{A} . \frac{\overset{n}{y}}{t - n} \right) $$

daraus entsteht. Dies wäre aber ebenfalls das 2te Glied in der Reihe des Lehrsatzes, wenn man darin $n + 1$ Statt n schriebe. Denn $t - (n + 1)$ ist $= t - n - 1$ u. s. w.

Was nun noch das erste Glied der Reihe G betrift, so ist dies ${}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . \overset{n+1}{y}$ folglich auch

$$ = {}^{t}\overset{+1}{\mathfrak{N}} . (t - n - 1) . \left(\frac{\overset{n+1}{y}}{t - n - 1} \right), $$

welches ebenfalls das erste Glied in der Reihe des Lehrsatzes ist, wenn man in demselben $n + 1$ statt n schreibt.

Bedenkt man endlich noch, daß die Reihe G nach meiner Ausgabe von Eulers Algebra §. 361. 3. Zus. gerade mit dem $(n + 2)$ten und E mit dem $(n + 1)$ten Glie-

**) Nemlich, da ${}^{n}\mathfrak{M}$, der mte Binomialcoeffizient der Potenz n andeutet, so bedeutet $m = 0$, nichts anders als der 0te Binomialcoeffizient, d. h. der nächstvorhergehende Coeffizient, der vor den als ersten gezählten stehet, und dieser ist wie bekannt immer $= + 1$. Man überzeugt sich davon auch so: der mte Binomialcoeffizient, gehört zum $(m + 1)$ Gliede, der 0te muß also zum 1sten Gliede gehören, und ist also $= 1$.

Gliede abbricht; so ist man völlig überzeugt, daß $E + G$ gerade diejenige Reihe giebt, so man im Lehrsatze erhalten würde, wenn man darin $n + 1$ statt n schriebe; der Lehrsatz also für $n = a + 1$ gelten müßte, wenn er für $n = a$ als richtig dürfte angenommen werden. Das darf aber nach §. 23. geschehen für $a = 1$. Also gilt der Lehrsatz auch für $n = 1 + 1 = 2$; also auch für $n = 2 + 1 = 0$ u. s. w. für jede Reihe der nten Ordnung, wenn n nur die positiven Ordnungszahlen bedeutet.

Anm. die Zahl n welche bestimmt, zu welcher Ordnung die Reihe gehört, ist in §. 46. und in §. 48. nur dem $\overset{t}{y}$ beygeschrieben worden, weil es sich von selbst versteht, daß die y und ihre Differenzen, die in dem Werthe von ${}_{n}\overset{t}{y}$ vorkommen, zu derselben Reihe derselben Ordnung gehören.

Summatorische Reihe und derselben allgemeines Glied.

§. 49.

Das Abziehen jedes Gliedes vom nächstfolgenden, giebt Differenzreihen: das Addiren des ersten Gliedes zum zweyten, des dritten zur beyder Summe u. s. w. des jedesmal nächstfolgenden zur Summe aller vorhergehenden, summatorische Reihen. Ist also $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots$ wieder die Hauptreihe, und schreibt man eine andere Reihe $\overset{0}{\int}, \overset{1}{\int}, \overset{2}{\int}, \overset{3}{\int} \ldots$ neben ihr zur Seite, so, daß $\overset{0}{\int}$ oder $\int = 0$;

$\overset{1}{\int} =$

$$\overset{1}{\int} = \overset{0}{y} + 0 = \overset{0}{y}$$
$$\overset{2}{\int} = \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$
$$\overset{3}{\int} = \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$
$$\overset{4}{\int} = \overset{3}{y} + \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$
$$\vdots$$
$$\overset{t-1}{\int} = \overset{t-2}{y} + \overset{t-3}{y} + \ldots \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y}$$
$$\overset{t}{\int} = \overset{t-2}{y} + \overset{t-2}{y} + \ldots + \overset{3}{y} + \overset{2}{y} + \overset{1}{y} + \overset{0}{y};$$

so ist $\overset{0}{\int}, \overset{1}{\int}, \overset{2}{\int}, \overset{3}{\int} \ldots \overset{t}{\int}$ die summatorische Reihe (Series summatrix)) der Hauptreihe, und der Werth von $\overset{t}{\int}$ heißt das summatorische Glied (Terminus summatorius) der Hauptreihe (Eulers Diff. 1ster Theil. §. 53. — 56.)

Der summatorischen Reihe allgemeines Glied

$$\overset{t}{\int} = \overset{0}{y} + \overset{1}{y} + \overset{2}{y} \ldots + \overset{t-2}{y} + \overset{t-1}{y}$$

ist also mit dem summatorischen Gliede der Hauptreihe einerley; daher sich die Erfindung des summatorischen Gliedes auf jene eines allgemeinen bringen läßt (Eulers Diff. 1ster Th. §. 53.)

§. 50.

Aufgabe.

Das summatorische Glied der Hauptreihe, durch die ersten Glieder der Hauptreihe und der Differenzreihen, auszudrücken.

Auf-

Auflösung.

Es ist

$$\overset{t}{\int} = {}^t\mathfrak{A} y + {}^t\mathfrak{B} \Delta^1 y + {}^t\mathfrak{C} \Delta^2 y \ldots + {}^t\mathfrak{T} \Delta^{t-1} y$$

d. i.

$$\int 7(t+1) = {}^t\mathfrak{A} y + {}^t\mathfrak{B} \Delta^1 71 + {}^t\mathfrak{C} \Delta^1 71 \ldots + {}^t\mathfrak{T} \Delta^{t-1} 71$$

Beweis.

Aus §. 49. ist deutlich daß

$$\overset{2}{\int} - \overset{1}{\int} = \overset{1}{y}$$

$$\overset{3}{\int} - \overset{2}{\int} = \overset{2}{y}$$

$$\overset{4}{\int} - \overset{3}{\int} = \overset{3}{y}$$

$$\vdots$$

$$\overset{t}{\int} - \overset{t-1}{\int} = \overset{t-1}{y}$$

Man kann nehmlich die Hauptreihe als erste Differenzreihe der summatorischen und diese letztere also als eine gegebene Grundreihe betrachten, (Eulers Diff. 1. Th. §. 55.) hieraus folgt, daß die 1ste, 2te, 3te u. s. w. Differenzreihe der Hauptreihe, als die 2te, 3te, 4te u. s. w. überhaupt die nte Differenzreihe der Hauptreihe, als die (n + 1)te der summatorischen Reihe betrachtet werden kann.

Da nun aus §. 44. bekannt ist, daß:

$$\overset{t}{y} = 1 . y + {}^t\mathfrak{A} . \Delta^1 y + {}^t\mathfrak{B} . \Delta^2 y \ldots + {}^t\overset{-1}{\mathfrak{T}} \Delta^{t-1} y + {}^t\mathfrak{T} \Delta^t y$$

so ist offenbar

$$\overset{t}{\int} = 1 . \overset{0}{\int} + {}^t\mathfrak{A} . y + {}^t\mathfrak{B} . \Delta^1 y \ldots + {}^t\overset{-1}{\mathfrak{T}} \Delta^{t-2} y + {}^t\mathfrak{T} \Delta^{t-1} y$$

denn

denn man schreibt in der Reihe für $\overset{t}{y}$, statt $\overset{o}{y}$, $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y$ u. s. w., nur die entsprechenden Glieder der nächst vorhergehenden Differenzreihen.

Z. B. $\overset{o}{y}$, $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y \ldots\ldots \Delta^t y$, sind die ersten Glieder der Hauptreihe, und deren 1ste, 2te, 3te.... $t$te Differenzreihen, aber auch

$$\overset{o}{\int}, y\ \Delta^1 y, \Delta^2 y \ldots \Delta^{t-1} y,$$

sind die ersten Glieder von Reihen, die jenen nächst vorhergehen.

Da $\overset{o}{\int} = 0$, so fällt solches aus der Reihe für $\int$ ganz weg.

§. 51.

Man kann zu der summatorischen Reihe als einer Grundreihe, eine neue summatorische, und zu dieser wieder eine andere suchen, und dies verfahren so weit verfolgen, als man will. Dies ist der Fall bey den sogenannten figurirten Zahlen, aller Art und Ordnungen: der Triangular-Tetragonal-Pentagonal u. s. w. überhaupt Polygonalzahlen; der drey, vier, fünf und mehrseitigen Pyramidalzahlen. Hierbey kann man die Glieder verschiedentlich zählen. Zählt man sie (wie in §. 50.) so, wie jedes $n$te Glied der summatorischen Reihe aus der Summe von $n-1$ Gliedern der vorhergehenden (als Grundreihe) erwächst: so giebt das eine Schema für figurirte Zahlen, so wie das Kästnerische (Anal. endl. Gr. §. 727. S. 515. d. n. A.). Nimmt man aber die Summe des ersten und zweyten Gliedes der vorangehenden Reihe als das zweyte Glied der summatorischen, die Summe der drey ersten Glieder jener Reihe als das dritte dieser; setzt man überhaupt das nte Glied der summatorischen aus der Summe der n ersten Glieder der nächst vorhergehenden Reihe zusammen: so kommt daraus die verkürzte Darstellung der figurirten Zahlen, wie in (Hind. Infin. Dign. S. 162 – 165.)

Führt die Hauptreihe $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots$ auf beständige Differerzen, so kommen, und zwar eben dieselben, auch bey der summatorischen vor; und wenn die Hauptreihe zur nten Ordnung gehört, so gehört die summatorische zur (n+1)ten (Eul. Diff. 1 Th. §. 55.) Dafür kann man hier das Zeichen $_{n+1}\int$ in ähnlicher Bedeutung, wie $_{n}y$ in §. 45. gebrauchen.

§. 52.
Aufgabe.

Das allgemeine Glied einer summatorischen Reihe der (n+1)ten Ordnung, durch die ersten Glieder, der zugehörigen Grundreihe (von der Ordnung n) und ihrer Differenzreihen, auszudrücken.

Auflösung.

Es ist

$$\overset{t}{\underset{n+1}{\int}} = {}^t\mathfrak{A}\, y + {}^t\mathfrak{B}\Delta^1 y + {}^t\mathfrak{C}\Delta^2 y \ldots + \overset{+1}{{}^t\mathfrak{N}}\Delta^n y$$

das ist:

n+1

$$\underset{n+1}{\int} 1(t+1) = {}^t\mathfrak{A}\, y\, 1\, 1 + {}^t\mathfrak{B}\, \Delta^1 1\, 1 + {}^t\mathfrak{C}\, \Delta^2 1\, 1 \ldots + {}^t\overset{+1}{\mathfrak{N}}\, \Delta^n 1\, 1.$$

Beweis.

Da die Hauptreihe (Grundreihe) zur nten Ordnung gehört, so sind ihre nten Differenzen die letzten. Da nun eben diese nten Differenzen die (n+1)ten der summatorischen Reihe sind, so lasse man die §. 50. für $\overset{t}{\int}$ gegebene Reihe mit dem Gliede ${}^t\overset{+1}{\mathfrak{N}} . \Delta^n y$ abbrechen, alsdann erhält man, (da das erste Glied $1 . \overset{0}{\int} = 0$ ist) die in der Auflösung gegebene Reihe. Diese Reihe für $\underset{n+1}{\overset{t}{\int}}$, kann also nicht über ${}^t\overset{+1}{\mathfrak{N}} . \Delta^n y$ hinausgehen; früher aber kann sie allerdings abbrechen, nemlich wenn $t < n+1$ ist, nach meiner Ausg. von Eulers Alg. 1ster Th. S. 208. 3. Zus.

Formel für die Summe einer geometrischen Reihe.

§. 53.

Nutzanwendungen der bisherigen Lehren mache ich nicht, weil im Eulerschen Werke daran kein Mangel ist, nur sey es mir erlaubt, für Anfänger noch eine Anwendung des summatorischen Gliedes, auf die Summirung der geometrischen Reihe, hinzuzufügen.

In §. 13. sey $y = a . e^x$ und $w = 1$; so wird die dortige Hauptreihe eine geometrische, und $x = 0$ gesetzt, erhält man für die

Hauptreihe $y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots\ldots \overset{n}{y}$

die folgende $ae^0, ae^1, ae^2, ae^3 \ldots\ldots ae^n$,

also die allgemeine Form der geometrischen Reihe, die vom ersten Gliede $ae^0 = a$ anfångt; und man findet dafür

$$\Delta^1 y = a(e-1)^1$$
$$\Delta^2 y = a(e-1)^2$$
$$\Delta^3 y = a(e-1)^3$$

u. s. w.

überhaupt $\Delta^n y = a(e-1)^n$

Aus lauter solchen ersten Gliedern der Differenzreihen wird nach §. 50. das summatorische Glied

$${}^n\!\int = {}^n\mathfrak{A}y + {}^n\mathfrak{B}\Delta^1 y + {}^n\mathfrak{C}\Delta^2 y \ldots\ldots + {}^n\mathfrak{N}\Delta^{n-1} y$$

also für die geometrische Reihe die Summe von n Gliedern

$$= {}^n\mathfrak{A}.a + {}^n\mathfrak{B}.a(e-1)^1 + {}^n\mathfrak{C}.a(e-1)^2 \ldots + {}^n\mathfrak{N}.a(e-1)^{n-1}$$
$$= a[{}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}.(e-1)^1 + {}^n\mathfrak{C}.(e-1)^2 \ldots + {}^n\mathfrak{N}.(e-1)^{n-1}] = F$$

diese Formel F die man für die Summe einer jeden geometrischen Reihe durch Hülfe der allgemeinen Differenzen gefunden hat, bestimmt auch für $e = 1$ sogleich den Werth

$$a{}^n\mathfrak{A} = an$$

da hingegen, die aus den Anfangsgründen der Algebra bekannten Formel

$$S = a . \frac{e^n - 1}{e - 1}$$

(m. A. v. Eulers Algebra, 1ster Theil S. 189. §.514, dort ist $b = e$)

für $e = 1$, $a . \frac{0}{0}$ giebt. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist ein unbestimmter Ausdruck; $a . \frac{0}{0}$ sagt also, daß die Formel für S in diesem Fall nichts bestimmen könne; doch nennt man die Formel allgemein, weil sie die Summe aus einem beliebigen ersten Gliede a, einem beliebigen Exponenten e und der beliebigen Gliederzahl n zu bestimmen scheint.

Daß eine Formel $\frac{0}{0}$ wird, ist eine Erscheinung, die bey algebraischen Formeln nicht selten sind, und der Formel für S sieht man es freilich bey genauer Achtsamkeit bald an, daß sie für $e = 1$ nichts bestimmen könne. Denn in diesem Falle wird $e^n = e^r$ kann also für die Summe von r Gliedern nichts anders angegeben, als für die Summe von n Gliedern. Da nun gleichwohl der Unterschied zwischen diesen beiden Summen, indem man außer r und n auch a beliebig verändern darf, eine jede beliebige Größe erhalten kann; so muß freylich die Formel für $e = 1$ so etwas angeben, was man jeder beliebigen Größe gleich setzen darf, das heißt, sie muß einen Ausdruck geben, der gar nichts bestimmt.

Aus der Formel F kann man auch die für S ableiten:

Es ist nemlich

$$F \text{ auch} = a.\frac{{}^n\mathfrak{A}(e-1) + {}^n\mathfrak{B}(e-1)^2 + {}^n\mathfrak{C}(e-1)^3 \ldots\ldots + {}^n\mathfrak{N}.(e-1)^n}{e-1}$$

$$\text{folglich} = a.\frac{[1 + (e-1)]^n - 1}{e-1} \text{ folglich auch}$$

$$= a.\frac{e^n - 1}{e-1} = S$$

Betrachtet man die eben vorgenommene Umbildung der F in S; so sieht man, daß dabey durch

e—1

$e - 1$ multiplicirt und dividirt würde, in dieser Hinsicht also

$$S = F.\frac{e - 1}{e - 1} \text{ sey.}$$

Dann muß freylich für $e = 1$ die S geben $a.\frac{0}{0}$, wenn gleich F einen ganz bestimmten Werth angiebt. Diese Umbildung belehrt uns aber deutlich, warum die S nichts bestimmen konnte.

Auch die Kunstgriffe, wodurch die S gewöhnlich herausgelockt wird, sind auch so beschaffen, daß sie für den Exponenten $= 1$ schlechterdings nicht zum Zwecke führen können. Denn man setze nur in den Schlüssen (m. A. v. Eulers Alg. 1. Th. S. 289.) sogleich den Exponenten $= 1$: was kann man hoffen dadurch zu finden, daß man S von $1.S$ abzieht?

Freylich ist es hier sehr leicht für den Fall wenn $e = 1$ den Werth von S zu finden, denn alsdann ist jedes Glied der geometrischen Reihe gleich dem ersten Gliede a, dieses ist daher so oft zu sich selbst zu addiren als die Gliederzahl n anzeigt, mithin findet man $S = a.n$.

Sonst pflegen die Algebraisten sich bey solchem Ausfalle einer allgemeinen Formel durch Substitution zu helfen. Setzt man in $S = a.\frac{e^n - 1}{e - 1}$; $e = 1 + z$, so erhält man

$$S = a.\frac{(1+z)^n - 1}{1 + z - 1} = a.\frac{1 + {}^n\mathfrak{A}z + {}^n\mathfrak{B}z^2 \ldots\ldots + {}^n\mathfrak{N}.z^n}{1+z-1} \quad (8$$

also auch

$$S = a.\frac{{}^n\mathfrak{A}z + {}^n\mathfrak{B}z^2 \ldots\ldots + {}^n\mathfrak{N}.z^n}{z} \text{ also}$$

$$S = a.({}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}z \ldots\ldots + {}^n\mathfrak{N}.z^{n-1}). \quad (8$$

Wenn

Wenn nun $e = 1$ ist, so muß da $e = 1 + z$; $z = 0$ seyn. für $z = 0$ findet sich nun aus der eben gefundenen Formel

$S = a.{}^n\mathfrak{A} = a.n.$ und so ist die Summe der geometrischen Reihe für $e = 1$ ganz richtig bestimmt.

Mit Recht aber kann man nun fragen, woher kömmt es, daß die Formel nach solcher Substitution den Werth bestimmen kann? Wenn ich erst $e = 1 + z$ setze, und dann wieder $z = 0$, wie kann das etwas anders geben, als wenn ich gleich $e = 1$ setze?

Man achte genau auf die Art und Ordnung, wie man das z gebraucht und verschwinden läßt, so bemerkt man wohl, daß es die Stelle eines Differenzials vertreten muß, und e dabey als eine veränderliche Größe betrachtet wird, die sich der 1 ohne Ende nähert. Die angegebene Formel bestimmt nemlich die Summe einer jeden geometrischen Reihe, so lange e auch um irgend eine Größe von 1 verschieden ist. Diese Größe heiße z, und es werde nun $1 + z$ in die Formel statt e gesetzt; so ist ihr letzter Ausdruck bey (δ) so beschaffen, daß man daraus das Gesetz abnehmen kann, wornach sich ihr Werth dem Werthe der Summe für $e = 1$ ohne Ende nähert, indem man z ohne Ende kleiner und kleiner werden läßt. Wenn aber das geschiehet, so nähert sich der letzte Ausdruck ohne Ende dem $= an$, oder um kurz zu reden, die unendlich kleinen Größen ${}^n\mathfrak{B}z$ u. s. w. müssen neben der endlichen Größe an verschwinden. In dieser Hinsicht kann man nunmehr $z = 0$ setzen, nachdem man nehmlich, vermittelst des z, den Werth der letzten Verhältniß von $\frac{e^n - 1}{e - 1}$, indem sich e der 1 ohne

Ende

Ende nähert, deutlich erkannt hat. Wer aber auf diesen Sinn nicht achtet, und nachdem er anfangs $e = 1 + z$ gesetzt hatte, dann wieder, wo es ihm zuerst einfiele, $z = 0$ setzen wollte, der würde entweder durch ein bloßes Ohngefähr zu seinem Zwecke gelangen, oder ihn auch wohl ungeachtet dieser Substitution gänzlich verfehlen. Z. B. wenn man etwa in δ wieder $z = 0$ setzen wollte, so hätte man wieder das alte $= a . \frac{0}{0}$. Denn man darf z nicht neben $1 - 1$, welches keine endliche Größe, sondern 0 ist, verschwinden lassen; wenn z nicht bloß wie 0, sondern wie eine dem 0 sich ohn Ende nähernde Größe, wirken soll.

Vergleicht man diese Formel, worin z stehet, mit der aus dem summatorischen Gliede abgeleiteten, so wird man sogleich einsehen daß beyde Formeln vollkommen identisch sind, indem in der abgeleiteten statt z, sein gleiches $e - 1$ stehet.

Einige merkwürdige Sätze und Relationen.

1.

Es ist

$$2^n = \frac{n + 1 \,.\, n + 1 \ldots\ldots 2n - 1 \,.\, 2n}{1 \,.\, 3. \qquad 2n - 1}$$

Beweis.

Beweis.

$$2^1 = \frac{2}{1}$$

$$2^2 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 3}$$

$$2^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$2^4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

diese 4 constuirten Glieder stellen das Gesetz so deutlich vor Augen, daß man ohne Schwierigkeit

$$2^n = \frac{n + 1 \,.\, n + 2 \ldots\ldots 2n - 1 \,.\, 2n}{1 \,.\, 3 \ldots\ldots 2n - 1.}$$

constuirt. Um die Allgemeinheit des Gesetzes darzuthun muß bewiesen werden, daß wenn das beobachtete Gesetz für 2^n richtig ist, daß es auch für 2^{n+1} gilt.

Das beobachtete Gesetz giebt.

$$2^{n+1} = \frac{n + 2 \ldots\ldots 2n - 1 \,.\, 2n \,.\, 2n + 1 \,.\, 2(n + 1)}{1 \,.\, 3 \ldots\ldots 2n - 3 \,.\, 2n - 1 \,.\, 2n + 1}$$

Es ist aber $2^{n+1} = 2^n \,.\, 2$.
Können wir nun beweisen, daß der nach obigem Gesetz gebildete Ausdruck für 2^n, doppelt genommen, den Ausdruck für 2^{n+1} giebt, so ist die Allgemeinheit des beobachteten Gesetzes mit aller Evidenz erwiesen.

Nun ist offenbar

$$2^n \,.\, 2 = \frac{2^n}{n + 1} \,.\, \frac{2n + 1}{2n + 1} \,.\, 2(n + 1)$$

dieses letztere giebt aber gerade den für $2^n \,.\, 2 = 2^{n+1}$ gefundenen Ausdruck, da wir nun gewiß sind daß das Gesetz für $n = 4$ gültig ist, so gilt es nach dem

er=

erwiesenen auch für $n+1=5$, also auch für $5+1=6$ u. s. w., d. h. es gilt allgemein.

2.

Es ist $${}^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.2n}.2^{2n}$$

B e w e i s.

Es ist aus (1) bekannt, daß

$$2^n = \frac{n+1.n+2\ldots.2n}{1\ .\ 3\ \ldots.2n-1}\ .\ \text{ist.}$$

Daher ist auch

$$\frac{1.3\ldots.2n-1}{1.2\ldots.\ n}.2^n = \frac{n+1\ .n+2\ldots.2n}{1\ .\ 2\ \ldots.\ n} = {}^{2n}\mathfrak{N}.$$

(bekanntlich ist $2n-1$ die nte Ungeradezahl, also sind hier im Zähler eben so viele Glieder als im Nenner, d. h. es sind n Glieder sowohl im Zähler als im Nenner).

$$\frac{1.3\ldots.2n-1}{2.4\ldots.\ \ 2n}.2^{2n} = \frac{{}^{2n}\mathfrak{N}}{2^n}.2^n = {}^{2n}\mathfrak{N} \text{ ist}$$

W. Z. E. W.

3.

Es ist

$${}^{n+m}\mathfrak{K} = 1.{}^{m}\mathfrak{K} + {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{K}} + {}^{n}\mathfrak{B}.\overset{-2}{{}^{m}\mathfrak{K}} + {}^{n}\mathfrak{C}\overset{-3}{{}^{m}\mathfrak{K}} + {}^{n}\mathfrak{D}.\overset{-4}{{}^{m}\mathfrak{K}} + \ldots.$$

$$\ldots. + \overset{-2}{{}^{n}\mathfrak{K}}.{}^{m}\mathfrak{B} + \overset{-1}{{}^{n}\mathfrak{K}}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{K}.1$$

Beweis.

$$\begin{array}{llll}
\text{Da } (1+x)^m & = 1 + {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 + \ldots\ldots + \overset{-1}{{}^m\mathfrak{R}}x^{r-1} + & {}^m\mathfrak{R}x^r \\
\text{und } (1+x)^n & = 1 + {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 + \ldots\ldots + \overset{-1}{{}^n\mathfrak{R}}x^{r-1} + & {}^n\mathfrak{R}x_{,1} \\
\hline
\text{so ist } (1+x)^{n+m} & = 1 + 1.{}^m\mathfrak{A}x + 1.{}^m\mathfrak{B}x^2 + 1.{}^m\mathfrak{C}x^3 + \ldots\ldots + & 1.{}^m\mathfrak{R}x^r \\
 & \quad {}^n\mathfrak{A}.1.x + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{A}x^2 + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{B}x^3 + \ldots\ldots & {}^n\mathfrak{A}.\overset{-1}{{}^m\mathfrak{R}}x^r \\
 & \quad {}^n\mathfrak{B}.1x^2 + {}^n\mathfrak{B}.{}^m\mathfrak{A}x^3 + \ldots\ldots & {}^n\mathfrak{B}.\overset{-2}{{}^m\mathfrak{R}}x^r \\
 & \quad + {}^n\mathfrak{C}.1.x^3 + \ldots\ldots & {}^n\mathfrak{C}.\overset{-1}{{}^m\mathfrak{R}}x^r \\
 & & \vdots \\
 & & \overset{-1}{{}^n\mathfrak{R}}.{}^m\mathfrak{A}x^r \\
 & & {}^n\mathfrak{R}.1.x^r,
\end{array}$$

auch ist

$$(1+x)^{n+m} = 1 + {}^{n+m}\mathfrak{A}x + {}^{n+m}\mathfrak{B}x^2 + {}^{n+m}\mathfrak{C}x^3 + \ldots {}^{n+m}\mathfrak{R}x^r$$

Wir entwickeln hier sowohl vom Produkte, als auch von $(1+x)^{n+m}$ nur $r+1$ Glieder (das erste mitgezählt); denn sonst sind hier wenn n und m ganze Zahlen sind, im Produkte sowohl als in $(1+x)^{n+m}$; $n+m+1$ Glieder vorhanden, die aber hier zu entwickeln nicht nöthig sind, indem die obi-

gen

gen schon deutlich das Gesetz des Fortgangs vor Augen legen. Vergleicht man nun das Produkt mit der Reihe für $(1 + x)^{n+m}$, so ergeben sich nach bekannten Lehren, folgende fruchtbare Relationen

$$
\begin{aligned}
{}^{n+m}\mathfrak{A} &= 1.{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{A}.1 \\
{}^{n+m}\mathfrak{B} &= 1.{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{A}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B}.1 \\
{}^{n+m}\mathfrak{C} &= 1.{}^{m}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{A}{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{B}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{C}.1 \\
{}^{n+m}\mathfrak{D} &= 1.{}^{m}\mathfrak{D} + {}^{n}\mathfrak{A}{}^{m}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{B}{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C}{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{D}.1
\end{aligned}
$$

u. s. w.

wo man also für ${}^{n+m}\mathfrak{R}$ den oben angegebenen Werth findet.

Ehe ich weitere Folgerungen mache, will ich folgende nützliche Betrachtung hinzufügen. Wir können manche Untersuchungen und manchen langwierigen Calcul, dadurch ungemein abkürzen, wenn wir überlegen, daß die analytischen Operationen, nur die Form des zu suchenden aus der Form des Gegebenen bestimmen, die Größen aber unbestimmt lassen.

Diese wirklich höchst wichtige philosophische Bemerkung, verdanken wir, wenigstens so bestimmt ausgedrückt unsern gelehrten Hrn. Prof. Kugel. Ich werde gleich zeigen wie wir hier davon eine sehr gute Anwendung machen können.

Das $(r + 1)$te Glied von $(1 + x)^{n+m}$ oder $(1 + x)^{n+m} \urcorner (r + 1)$ ist $= {}^{n+m}\mathfrak{R}x^{r}$; das $(1 + x)^{m}.(1 + x)^{n} \urcorner (r + 1)$, welches mit ${}^{n+m}\mathfrak{R}x^{r}$ identisch seyn soll, muß also aus lauter partial Produkte die x^{r} enthalten bestehen. Diese partial Produkte entstehen nun aus zwey Glieder, deren das eine aus der Reihe $(1 + x)^{m}$, das andere aus der Reihe $(1 + x)^{n}$ ge-

genommen ist; die Exponenten der $x$en worin diese Glieder multiplizirt sind, müssen also zusammen addirt immer die Zahl r geben damit ihr Produkt x^r enthält, da nun in jeder der in einander zu multiplizirende Reihen diese Eponenten von x (den das erste Glied von 0 angerechnet) die Reihe der natürlichen Zahlen ist, so führt diese Betrachtung, auf das wichtige Problem

Jede ganze Zahl r aus zwey Zahlen der gegebenen Progression 0, 1, 2, 3, 4 .... r, nicht allein zusammenzusetzen, sondern was hiernöthig ist, alle diese mögliche Zusammensetzungen selbst darzustellen.

Herr Professor Hindenburg hat dieses Problem in seinem ganzen Umfange, mit bewundrungswürdiger Leichtigkeit aufgelößt, und hierdurch eigentlich eine bisherige Lücke in der Analysis ausgefüllt. Mir sey es erlaubt die Auflösung von diesem hier erwähnten besondern Fall so zu geben, als ich solche zuerst fand ehe ich Hrn. Hindenburgs Verfahren kannte, letzteres werde ich weiter unten mittheilen.

Aus der Lehre von den arithmetischen Progressionen ist bekannt daß, wenn man unter einer arithmetischen Reihe, dieselbe Reihe verkehrt, unterschreibt, so daß das letzte Glied unter dem ersten, das vorletzte unter dem 2ten Gliede vom Anfange u. s. w. zu stehen kömmt, so sind die Summe der übereinander stehenden Glieder unter einander alle gleich, schreibt man also

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots r-1, r \\ r,\ r-1, r-2, r-3\ \ldots\ldots\ldots\ldots 1, 0 \end{array}$$

so

so geben jede der zwey übereinanderstehende Zahlen, zur Summe r, und das Problem ist aufgelößt.

Wir können also das $(1+x)^m.(1+x)^n \rceil (r+1)$ auf folgende leichte Art finden. Man schreibe

$$(1+x)^n = 1 + {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 + \dots + {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^{r-1} + {}^n\mathfrak{R}x^r$$

darunter

$$(1+x)^m = {}^m\mathfrak{R}x^r + {}^m\overset{-1}{\mathfrak{R}}x^{r-1} + {}^m\overset{-2}{\mathfrak{R}}x^{r-2} + \dots + {}^m\mathfrak{A}x + 1$$

und multiplizire jede zwey übereinanderstehende Glieder in einander, so erhält man das gesuchte wie oben, denn die Exponenten von den xen machen, die oben verkehrt unter einander geschriebenen arithm. Progressionen.

Ich sagte aus der Form des Gegebenen ist die Form des Gesuchten bestimmt, das findet hier folgende Anwendung, da $p + (r - p) = r$ geben, so multiplizire man

$$(1+x)^n \rceil (p+1) = {}^n\mathfrak{P}.x^p$$

$$\text{und } (1+x)^m \rceil (r-(p-1)) = {}^m\overset{-p}{\mathfrak{R}}.x^{r-p}$$

in einander, so giebt ${}^n\mathfrak{P}.x^p.{}^m\mathfrak{R}x^{r-p}$ die Form eines jeden partialProdukts, woraus ${}^{n+m}\mathfrak{R}x^r$ bestehet und da es uns bey gegenwärtiger Untersuchung nur um die Binomialcoeffizienten die in diesen partialProdukten vorkommen zu thun ist, so giebt

$${}^n\mathfrak{P}.{}^m\overset{-1}{\mathfrak{R}} \text{ dazu die allgemeine Form.}$$

Setzen wir nemlich p, nach und nach $=0, 1, 2, \dots r-1, r$, so erhalten wir

$$1.{}^m\mathfrak{R} + {}^m\mathfrak{A}.{}^m\overset{-1}{\mathfrak{R}} + \dots . {}^n\overset{-1}{\mathfrak{R}}.{}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{R}.1 = {}^{n+m}\mathfrak{R}.$$

Aus der allgemeinen Form für ${}^{n+m}\mathfrak{R}$, findet sich wenn man $\mathfrak{R}$ nach und nach $=\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ u. s. w., setzt, die

obi-

obigen für ${}^{n+m}\mathfrak{A}$, ${}^{n+m}\mathfrak{B}$, ${}^{n+m}\mathfrak{C}$, ${}^{n+m}\mathfrak{D}$ u. s. w. gefundene Werthe.

Mann wird denke ich schon jetzt den Vortheil den jener Klügelsche Satz, in Abkürzung der hier sonst nöthigen Rechnungen bewirkt hat, einsehen, an andern Orten werden noch weit mehr in die Augen fallende gegeben werden.

4.

Es ist

$$1^2 + {}^{n}\mathfrak{A}^2 + {}^{n}\mathfrak{B}^2 + {}^{n}\mathfrak{C}^2 + \ldots\ldots {}^{n}\mathfrak{R}^2 + \ldots\ldots 1^2$$

$$= {}^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5.7\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots\ldots\ldots 2n}.2^{2n}$$

Beweis.

Da ${}^{n+m}\mathfrak{R} = 1.{}^{n}\mathfrak{R}. + {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{R}} + \ldots\ldots \overset{-1}{{}^{n}\mathfrak{R}}.{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R}.1$ so ist wenn statt $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{N}$ gesetzt wird

$${}^{n+m}\mathfrak{N} = 1.{}^{m}\mathfrak{N} + {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} + \ldots\ldots \overset{-1}{{}^{n}\mathfrak{N}}.{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{N}.1$$

da nun ${}^{n}\mathfrak{N} = 1$; $\overset{-1}{{}^{n}\mathfrak{N}} = {}^{n}\mathfrak{A}$, $\overset{-2}{{}^{n}\mathfrak{N}} = {}^{n}\mathfrak{B}$ u. s. w. ist, so hat man auch

$${}^{n+m}\mathfrak{N} = 1.{}^{m}\mathfrak{N} + {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{-1}{{}^{m}\mathfrak{N}} + \ldots\ldots {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\mathfrak{A} + 1.1$$

setzt man hier m = n, so folgt

$${}^{2n}\mathfrak{N} = 1.{}^{n}\mathfrak{N}. + {}^{n}\mathfrak{A}.\overset{-1}{{}^{n}\mathfrak{N}} + \ldots\ldots + {}^{n}\mathfrak{A} + 1.1$$

folglich

$${}^{2n}\mathfrak{N} = 1^2 + {}^{n}\mathfrak{A}^2 + {}^{n}\mathfrak{B}^2 + \ldots\ldots {}^{n}\mathfrak{R}^2 + \ldots\ldots {}^{n}\mathfrak{A}^2 + 1^2$$

W. Z. E. W.

5.

Anmerkung.

Der merkwürdige Satz in (4) würde, meines Wissens zuerst von Lagrange, und zwar zufälliger Weise, gefunden. Denn in einer Abhandlung die in den Berliner Denkschriften stehet, fand er für eine gewisse Wahrscheinlichkeit zuerst den einen, und für diese nemliche Wahrscheinlichkeit hernach auch den andern Ausdruck und schloß daraus auf ihre Gleichheit. Bemerkt zugleich daß er aber noch keinen analytischen Beweis gefunden hätte, der ihm auch ziemlich versteckt zu seyn schien.

6.

Es ist $\pm\,{}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \mp {}^{m+1}\mathfrak{N} = \mp {}^{m}\mathfrak{N}$.
oder welches einerley

$$\pm\,{}^{m-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \mp {}^{m}\mathfrak{N} = \mp {}^{m-1}\mathfrak{N}.$$

Beweis.

Seite 174 habe ich bewiesen, daß

${}^{m}\mathfrak{N} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = {}^{m+1}\mathfrak{N}$ ist

woraus sogleich obige Gleichung folgt.

7.

Es ist

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} + \dots + {}^{m}\mathfrak{N} = \pm\,{}^{m-1}\mathfrak{N}.$$

Beweis.

Setzt man in der 2ten Gleichung bey (6) nach und nach $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ u. s. w., so bekommt man

$1 - {}^{m}\mathfrak{A}$

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} = - {}^{m-1}\mathfrak{A}\,;\ - {}^{m-1}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} = {}^{m-1}\mathfrak{B}.$$
$${}^{m-1}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} = - {}^{m-1}\mathfrak{C}\,;\ - {}^{m-1}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{D} = {}^{m-1}\mathfrak{D}$$

u. s. w.

folglich auch

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} = {}^{m-1}\mathfrak{B}\,;\ 1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} = - {}^{m-1}\mathfrak{C}$$
$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{D} = {}^{m-1}\mathfrak{D}\,;$$

also überhaupt

$$1 - {}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B} - {}^{m}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{D} \ldots\ldots \pm {}^{m}\mathfrak{N} = \pm {}^{m-1}\mathfrak{N}.$$

W. Z. E. W.

8.

Es muß

$$0^0 = 1 = \pm\, {}^{-1}\mathfrak{N} \text{ seyn.}$$

Beweis.

Wenn in (7) $m = n$ ist, so wird die linke Seite der Gleichung gleich $(1 - 1)^n$ und die rechte Seite geht über in $\pm\, {}^{n-1}\mathfrak{N}$, aber der nte Binom. Coeff. der $(n + 1)$ten Potenz ist $= 0$; auch ist $(1 - 1)^n$ Null für jeden endlichen wirklichen Werth von n, (S. 158. §. 6.); aber für $n = 0$, ist $(1-1)^0 = 0^0 = 1$, folglich muß $1 = \pm\, {}^{-1}\mathfrak{N}$ seyn. Vielleicht wird hier mancher fragen was ${}^{-1}\mathfrak{N}$ eigentlich bedeutet? ${}^{-1}\mathfrak{N}$ bedeutet den allgemeinen nten Bin. Coeff. des $(n+1)$ten Gliedes in $(1+1)^{-1} = \frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$; das $(n + 1)$te Glied dieser Reihe ist aber gewiß $= \pm 1 = 1 \,.\, \pm 1$ folglich ${}^{-1}\mathfrak{N}$ zuverlässig nichts anders als 1. Wodurch ich abermals und zwar wie mich dünkt, sehr strenge bewiesen habe daß $0^0 = 1$

 seyn

seyn muß, und sich also hier auf eine angenehme Art bestätiget.

Anm. Für Anfänger muß ich erinnern daß hier n als Exponent $=0$ nicht mit $\mathfrak{N}$ als nte Bin. Coeff. einerley ist.

9.

Wenn man in der Gleichung

$$1 - {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{n}\mathfrak{R} = \pm {}^{n-1}\mathfrak{R}$$

statt $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$ setzt, so hat man in Hindenbürgische Zeichen vollkommen die Formel, die der Herr Prof. Fischer in seiner Theorie der Dimensionszeichen §.146. noch auf eine andere ihm eigenthümliche Art bewiesen hat. *)

Schreibt man $n - m$ statt n und $\overset{-m}{\mathfrak{R}}$ statt $\mathfrak{R}$, so kömmt

$$1 - {}^{n-m}\mathfrak{A} + {}^{n-m}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{n-m}\overset{-m}{\mathfrak{R}} = + {}^{n-(m+1)}\overset{--m}{\mathfrak{R}}$$

setzt man nun hierin nach und nach $m = 1, 2, 3$ u. s. w., so erhält man sogleich, die Formeln die im 147. §. der Theorie der Dimensionszeichen stehen.

10.

Setzt man in der Formel für $\pm {}^{n-1}\mathfrak{R}$; $-n$ statt n, so entsteht

1—

*) Fischer beweißt diese Gleichung ohne Hülfe des binomischen Lehrsatzes, daher ist der Vorwurf, den Hr. Töpfer (in seiner bekannten Schrift wieder Fischer. S. 169.) ihm dieserwegen macht, offenbar übel angebracht.

$$1 - {}^{-n}\mathfrak{A} + {}^{-n}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{-n}\mathfrak{R} = \pm {}^{-(n+1)}\mathfrak{R}.$$

Da aber

$$\begin{array}{ll} - & {}^{-n}\mathfrak{A} = {}^{n}\mathfrak{A} \\ + & {}^{-n}\mathfrak{B} = {}^{n+1}\mathfrak{B} \\ - & {}^{-n}\mathfrak{C} = {}^{n+2}\mathfrak{C} \\ & \vdots \\ \pm & {}^{-n}\mathfrak{R} = {}^{n+r-1}\mathfrak{R} \end{array}$$

und $\pm {}^{-(n+1)}\mathfrak{R} = {}^{n+r}\mathfrak{R}$

Von diesen Gleichungen wird man sich wohl ohne meine Anweisung zu überzeugen suchen. — Da sie fast von selbst einleuchten.

so ist

$$1 + {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n+1}\mathfrak{B} + {}^{n+2}\mathfrak{C} + {}^{n+3}\mathfrak{D} \ldots + {}^{n+r-1}\mathfrak{R} = {}^{n+r}\mathfrak{R}.$$

Hierin $n + m$ statt n, und $\overset{-m}{\mathfrak{R}}$ statt $\mathfrak{R}$ gesetzt, giebt

$$1 + {}^{n+m}\mathfrak{A} + {}^{n+m+1}\mathfrak{B} + {}^{n+m+2}\mathfrak{C} \ldots + {}^{n+m+r-1}\overset{-m}{\mathfrak{R}} = {}^{n+m+r}\overset{-m}{\mathfrak{R}}$$

hierin nun nach und nach $n = 1, 2, 3$ u. s. w. gesetzt, so erhält man wiederum alle Formeln die bey Fischer in §. 148 stehen. Und wenn man hier in der Formel für ${}^{n+r}\mathfrak{R}$, statt n, $2n$ setzt, so entsteht die Formel, welche Fischer §. 165. giebt.

11.

Die in (9 und 10) enthaltene Formeln ergeben sich auch unmittelbar, aus der allgemeinen Summenformel für Binomialcoeffizienten. Es war nemlich oben

$${}^{n+m}\mathfrak{R} = 1.{}^{m}\mathfrak{R} + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{B}.{}^{m}\overset{-2}{\mathfrak{R}} + \ldots {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}}\,{}^{m}\mathfrak{B} + {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}\,{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R}.1$$

In dieser Formel wird bekanntlich

für $r = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$\mathfrak{R} = 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$

P 2 Setzt

Setzt man nun hier nach und nach

$m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots \pm r$

so geben die negativen Zahlen, die Fischerschen Formeln in (§. 146 — 148), eben so als sie sich aus den in (9 und 10) gegebenen Formeln finden. Setzt man z. B. $m = -1$, so ist

$$ {}^{n-1}\mathfrak{R} = 1.{}^{-1}\mathfrak{R} + {}^{n}\mathfrak{A}.{}^{-1}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\mathfrak{B}.{}^{-1}\overset{-2}{\mathfrak{R}} + \dots $$

$$ \dots {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}}{}^{-1}\mathfrak{B} + {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}}{}^{-1}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{R}.1 $$

Wir haben bereits oben erwiesen, daß alle Glieder eines Bin. vom Exponenten — 1, abwechselnd — 1 und + 1 sind, nachdem die Zahl dieser Glieder nach der sie gezählt werden, ungerade oder gerade ist. Ob nun ein Glied positiv oder negativ ist, ergiebt sich aus der Formel von selbst, die in Nichts von der oben gegebenen unterschieden ist, als das jedes Glied noch in einem Bin. Coeff. der (— 1) ten Potenz, also in Eins multiplizirt, und hier nur beybehalten wird, um dadurch die Zeichen der Glieder in jedem verlangten Fall bestimmen zu können. Da das Glied ${}^{n}\mathfrak{R}.1$ in keinen Bin. Coeff. der (— 1)ten Potenz multiplizirt ist, so hat es immer das Zeichen +, schreibt man nun die letzt gefundene Reihe umgekehrt, so erhält man eine bestimmte Norm, deren Zeichen durch den Fortgang sich ebenfalls von selbst ergiebt, nachdem nemlich die 1 in eine ungerade oder gerade Stelle fällt:

Nemlich;

$$ {}^{n-1}\mathfrak{R} = {}^{n}\mathfrak{R} - {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}} + {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}} - {}^{n}\overset{-3}{\mathfrak{R}} + \dots \pm 1 $$

multiplizirt man diese Gleichung mit ± 1 so erhält

$$ \pm {}^{n-1}\mathfrak{R} = \pm {}^{n}\mathfrak{R} \mp {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{R}} \pm {}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{R}} \mp {}^{n}\overset{-3}{\mathfrak{R}} \dots + 1 $$

die

die Glieder dieser letzteren Formel haben in derselben Folge die nemlichen Zeichen, als die Formel in (9), und ist auch wesentlich dieselbe, den ${}^n\mathfrak{A}$; ${}^n\mathfrak{B}$; ${}^n\mathfrak{C}$.... sind in der Ordnung wie sie hier stehen identisch mit

$$\overset{-(r-1)}{\mathfrak{R}},\quad \overset{-(r-2)}{\mathfrak{R}},\quad \overset{-(r-3)}{\mathfrak{R}},\quad \text{u. s. w.}$$

12.

Wenn man in den Formeln (3) setzt,

$m=0$ wird ${}^n\mathfrak{A} = {}^n\mathfrak{A}$

$m=1$ " ${}^{n+1}\mathfrak{B} = {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}$

$m=2$ " ${}^{n+2}\mathfrak{C} = {}^n\mathfrak{A} + 2.{}^n\mathfrak{B} + {}^n\mathfrak{C}$

$m=3$ " ${}^{n+3}\mathfrak{D} = {}^n\mathfrak{A} + 3.{}^n\mathfrak{B} + 3.{}^n\mathfrak{C} + {}^n\mathfrak{D}$

$m=4$ " ${}^{n+4}\mathfrak{E} = {}^n\mathfrak{A} + 4.{}^n\mathfrak{B} + 6.{}^n\mathfrak{C} + 4.{}^n\mathfrak{D} + {}^n\mathfrak{E}$.

. . . .

. . . .

diese Formeln, findet Fischer §. 367. zwar nicht auf eine so äußerst leichte Art, aber sein Verfahren ist ihm gewiß eigen, und nirgends entlehnt so wie überhaupt sein ganzes Werk, Theorie der Dimensionszeichen. 2 Theile in 4to. Halle 1792., überall Spuren eines geübten mathematischen Scharfsinns und Genie zeigt, und wenn man frey von alle Parthеylichkeit, also nicht etwa vorher wieder den Verfasser eingenommen ist, so ist unverkennbar daß die ganze Theorie der Dimensionszeichen sein Eigenthum ist. — Nicht nur im äußern Bau der Zeichen weicht er von Hindenburg ab. — Nein was wesentlicher ist — die Gründe, der ganze Gang — Vortrag den er zum Theil hat nehmen müssen, paßt nicht für die ich gestehe es gerne weit vollkommenere

und

und sich ungleich weit verbreitender Hindenbürgische Combinatorische Analytik — Ein Kopf wie Fischer hätte wenn er die Hindenbürgische Comb. Analytik gekannt hätte, nie etwas unvollkommeneres liefern können*) — Seine Schrift hat gleichwohl einen entschiedenen Werth, die Analysis endlicher Größen ist nicht allein dadurch erweitert, sondern es möchte die beste Vorbereitung zum Studiren der bis jetzt heraus gekommenen combinatorischen Schriften seyn, weil man sich nun zur nöthigen Uebung die Fischersche Formeln, alle in Combinatorische übersetzen kann — diesen Dienst hat es wie ich gerne dankbar gestehe mir selbst geleistet. — Aber eben diese so leichte Umsetzung der Dimensionszeichen in Combinatorische, und umgekehrt, hat die meisten Beurtheiler und namentlich Hrn. Töpfer zu übereilten, ungerechten und bittern Vorwürfen verführt. — Um den wesentlichen Unterschied und das Eigenthümliche jeder Methode, gehörig zu würdigen, wähle man ein schwieriges Problem, löse es nach beyder Methode auf, so wird sich zeigen daß der Gang der Auflösung bey beyden durchaus verschieden ist — das aber das Resultat fast selbst der äußern Form (nur nicht in Zeichen) einerley ist — kann entweder als zufällig angesehen werden, oder kann der Natur der mathematischen Untersuchung gemäß nicht anders ausfallen.

12.

*) Sein vortreflicher moralischer Caracter, den freylich nur die beurtheilen können, die das Glück haben, diesen verehrungswürdigen Mann näher und genau zu kennen — bürgt für jede Anmassung fremden Eigenthums.

13.

Es ist

$$1 - \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\,.\,{}^{m}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}\,.\,{}^{m}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} - \frac{{}^{n}\mathfrak{C}\,.\,{}^{m}\mathfrak{C}}{{}^{r}\mathfrak{C}} \ldots \pm \frac{1\,.\,{}^{m}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}$$

$$= \pm \frac{{}^{n+m-(r+1)}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}.$$

Beweis.

Man setze in der Hauptreihe (S. 167. §. 13); statt $y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y} \ldots \overset{n}{y}$; die Werthe

$$1, \frac{{}^{m}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}}, \frac{{}^{m}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{A}} \ldots \frac{{}^{m}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}};$$

so ist

$$\Delta y = \frac{{}^{m-r}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}}; \qquad = \frac{{}^{1+m-(r+1)}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}}$$

$$\Delta^2 y = \frac{{}^{m-(r-1)}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} \qquad = \frac{{}^{2+m-(r+1)}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}}$$

$$\Delta^3 y = \frac{{}^{m-(r-2)}\mathfrak{C}}{{}^{r}\mathfrak{C}} \qquad = \frac{{}^{3+m-(r+1)}\mathfrak{C}}{{}^{r}\mathfrak{C}}$$

$$\Delta^4 y = \frac{{}^{m-(r-3)}\mathfrak{D}}{{}^{r}\mathfrak{D}} \qquad = \frac{{}^{4+m-(r+1)}\mathfrak{D}}{{}^{r}\mathfrak{D}}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n y = \frac{{}^{m-(r-(n-1))}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}} = \frac{{}^{n+m-(r+1)}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}};$$

Substituirt man diese Werthe in der Formel

$$\Delta^n y = \mp 1\,.\,y \pm {}^{n}\mathfrak{A}\,.\,\overset{1}{y} \mp {}^{n}\mathfrak{B}\overset{2}{y} \ldots \pm {}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{N}}\;\overset{n-1}{y} + 1\,.\,\overset{n}{y}$$

(S. 177. §. 20.)

oder

oder welches einerley

$$\pm\Delta^{n}y = y - {}^{n}\mathfrak{A}\overset{1}{y} + {}^{n}\mathfrak{B}\overset{2}{y} \dots \mp {}^{n}\mathfrak{N}^{-1}\overset{n-1}{y} \pm 1.\overset{n}{y}$$

so erhält man den oben angegebenen Ausdruck.

14.

Es ist

$$1 + \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\cdot{}^{m-r}\mathfrak{A}}{{}^{r}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{n}\mathfrak{B}\cdot{}^{m-r+1}\mathfrak{B}}{{}^{r}\mathfrak{B}} \dots + \frac{1\cdot{}^{n+m-r-1}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}$$

$$= \frac{{}^{m}\mathfrak{N}}{{}^{r}\mathfrak{N}}.$$

Beweis.

Man substituire in der Formel.

$$\overset{n}{y} = 1\cdot y + {}^{n}\mathfrak{A}\Delta y + {}^{n}\mathfrak{B}\Delta^{2}y + \dots {}^{n}\mathfrak{N}\cdot\Delta^{n}y.$$ (S. 200.)

die für y, Δy, $\Delta^{2}y$ u. s. w. in (13) gefundenen Werthe, so ergiebt sich obige Gleichung.

15.

Setzt man in (13), $r = -1$, so ist

${}^{r}\mathfrak{A} = -1$; ${}^{r}\mathfrak{B} = +1$; ${}^{r}\mathfrak{C} = -1$; ${}^{r}\mathfrak{D} = +1$ u. s. w.
wodurch man erhält:

$$1 + {}^{n}\mathfrak{A}\cdot{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B}\cdot{}^{m}\mathfrak{B} \dots + 1\cdot{}^{m}\mathfrak{N} = {}^{n+m}\mathfrak{N},$$

wie wir bereits (S. 223. 4. Bew.) auf andern Wegen gefunden haben.

16.

Es ist

$$1 - \frac{m}{m-1}\cdot{}^{n}\mathfrak{A} + \frac{m}{m-2}\cdot{}^{n}\mathfrak{B} - \frac{m}{m-3}\cdot{}^{n}\mathfrak{C} \dots \pm \frac{m}{m-n}\cdot 1$$

$$= + \frac{1}{{}^{m-1}\mathfrak{N}}$$

Be-

Beweis.

Man setze in (13), $r = m - 1$, weil nun auch $^{m}\mathfrak{R} = \frac{m}{m-r} \cdot {}^{m-1}\mathfrak{R}$, so ist $\frac{^{m}\mathfrak{R}}{^{m-1}\mathfrak{R}} = \frac{m}{m-r}$, und $^{n}\mathfrak{N}$ ist $= 1$; folglich die obige Gleichung richtig.

17.

Es ist

$$1 + \frac{^{n}\mathfrak{A}}{^{r}\mathfrak{A}} + \frac{^{n}\mathfrak{B}}{^{r}\mathfrak{B}} \ldots\ldots + \frac{1}{^{r}\mathfrak{N}} = \frac{r+1}{r+1-n}.$$

Beweis.

Setzt man in (13); $m = -1$, so entstehet hier die erste Hälfte der Gleichung, und aus der 2ten Hälfte in (13) wird $\pm \frac{^{n-r-2}\mathfrak{N}}{^{r}\mathfrak{N}}$ und dieses ist nach (16. Bew.) $= \frac{r+1}{r-1-n}$.

Hindenburgs Theorie der combinatorischen Analytik.

1.

Wer sich überwinden wird, daß folgende mit einiger Aufmerksamkeit durchzugehen, dem wird die darauf verwendete Zeit, gewiß nie gereuen können — er wird, (wenn er der Mann ist der entscheiden darf alsdann sicherlicher die Hindenbürgische Erfin-

dung

dung, eine der ersten Stellen, unter den Merkwürdigen Erfindungen unsers Zeitalters einräumen. Mit Herrn Töpfer darf man dreist behaupten, daß durch diese wichtige Erfindung, das Grundgebiete der Analysis beträchtlich erweitert, die Priorität derselben höher gestellt, die Allgemeinheit der Aufgaben, selbst in den verwickelsten Fällen, aufs höchste getrieben, und die Formeln für ihre auch noch so sehr zusammengesetzten Resultate, mit der möglichsten simplizität, in Absicht auf Ausdruck und Anordnung, Darstellung und Entwickelung, vereinbart — eine Erfindung, welche in der Folge nicht weniger interressant und weiter aussehende Stoffe ihrer Art zum Nachdenken in Umlauf bringen wird, als das Kantische Meisterwerk des Tiefsinns.

2.

Ich werde hier die Theorie der comb. Analytik, nicht in ihrem ganzen Umfange, vortragen — dazu ist mir der Raum hier viel zu beschränkt — aber auch das wenige was ich hier mittheilen will, und was ich nach meine Art gebe, ist gewiß für ieden Mathematikverständigen höchst wichtig — Mein Urtheil über den Werth der comb. Analytik, ist um so unpartheiischer, da ich selbst ehe ich die weit vortreflichere Methode des Hrn. Prof. Hind. kannte z. B. bey dem allgemeinen Productenproblem auf manche kurze und leichte Darstellung gerathen war, die in besondern Fällen an Leichtigkeit und geschwinder Darstellung, gefoderter Glieder außer der Ordnung und independent, der Hindenbürgischen Metho-

de

de nichts nachzugeben schienen. Aber sehr gerne gestehe ich daß mein Algorithmus, wie ich jetzt mit völliger Ueberzeugung einsehe durchaus nicht wissenschaftlich war, und daher dem Hindenburgischen weit nachstehet. Ich werde ihm also gewiß nie beschreiben da ich selbst jetzt überall bey meinen mathematischen Untersuchungen mich ganz der Hindenbürgischen Zeichen bediene.

Rein-combinatorische Darstellungen von Permutationen, Combinationen und Variationen gegebener Dinge.

3.

Die Bedeutung der Wörter: Permutationen, Combinationen mit und ohne Wiederholung, Variationen, habe ich in m. Ausg. von Eul. Alg. 1 Th. S. 198. rc. gegeben, und ich ersuche dem Leser sich das dort Gesagte vorher gehörig bekannt zu machen. Folgende Erklärungen füge ich hinzu.

4.

Die zum Variiren, Permutiren oder Combiniren gegebenen Dinge werden, wie sonst schon gebräuchlich, nach der Folge

der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

oder der Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, ...

dargestellt. Das erste geschieht nach Leibnitzens Beyspiele, und ist in gewissen Rücksichten sehr vortheilhaft, dennoch aber, bey Combinationen und Variationen,

tionen, die sich nicht auf bestimmte Zahlen oder Summen beziehen, nicht schlechterdings nothwendig. Zahlen und Buchstaben, wie hier steht, mit einander verbunden, werden immer als Zeiger (index) zu den Formeln gesetzt, in denen combinatorische Zeichen vorkommen, um nachzuweisen, worauf die Zahlen, dieser Zeichen sich beziehen. Nicht selten ist der Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \ldots. \\ b, & c, & d, & e, & f, & g, \ldots. \end{pmatrix}$$

oder anders.

5.

Die einzelnen Species oder Formen von Combinationen oder Variationen gegebener Dinge, werden mit einem gemeinschaftlichen Namen Complexionen genannt. Z. B. alle mögliche Amben der drey Dinge b, c und d, wenn Wiederholungen verstattet werden sind:

bb, bc, bd, cc, cd, dd,

jede dieser einzelne Verbindung zu zwey oder Ambe heißt nun eine Complexion, da man die zu combinirende Dinge entweder durch Buchstaben oder Zahlen vorstellt, so hat man Buchstaben- und Zahlen-Complexionen. Die hier den Buchstaben-Complexionen nach dem 2ten Zeiger in (4) entsprechenden Zahlen-Complexionen sind in eben der Ordnung folgende, 11, 12, 13, 22, 23, 33;

Wären keine Wiederholungen verstattet, so sind nur 3 Complex. möglich, nemlich

bc,

bc, bd, cd, Buchst. Complex.
12, 13, 23, Zahlen = = =

Unter jenen Zahlen=Complex. mit Wiederholungen, sind welche deren Ziffersumme gleich groß ist, als: 13, 22; deren Ziffersumme 4 beträgt. In der comb. Analytik, ist es öfters nöthig Complexionen zu bestimmten Zahlen oder Summen (numeri. dati. s. propositi.) darzustellen; sieht man nicht auf der Ziffersumme, so hat man Complex. schlechthin (simpliciter).

Man wird hieraus schon abnehmen, was man unter; Combinationen oder Variationen an sich, (simpliciter), oder nach bestimmten Summen, zu verstehen hat.

6.

Gutgeordnete Complexionen (rite ordinatae) sind, in denen Buchst. oder Zahlen, so auf einander folgen, daß nie ein früherer Buchstabe auf einen spätern, eine kleinere Zahl auf eine größere folgt. Sie sind die Repräsentanten und Stellvertreter aller übrigen Complex., die mit ihnen einerley und gleichviel Buchstaben oder Ziffern haben. Dergleichen können nur durchaus bey Comb. vorkommen, nicht aber bey Variationen, bey denen man alle mögliche Verbindungen zugleich mit allen möglichen Versetzungen der gegebenen Dinge verlangt.

7.

Diese Complexionen werden nach Classen geordnet. Die erste Classe machen die gegebene Dinge

selbst,

selbst als Unionen; aus; zur zweyten Classe werden die zweybuchstäbigen oder zweyzahligen Complex., als Binionen, zur dritten die dreybuchstäbigen oder dreyzahligen Complex., als Ternionen; u. s. w. die 4, 5, 6, u. s. w. buchstäbigen oder zahligen Complexionen, für die folgenden Classen nach der Ordnung, gerechnet.

8.

Alle Classen müssen gut geordnet seyn, (rite ordinatae) d. h. ihre Complex. (wenn man die darinnen vorkommende Zahlen, als Grundzeichen oder bloße Ziffern, u. so die ganze Complex. als eine aus diesen Ziffern bestehende Zahl ansieht) müssen so auf einander folgen, wie Zahlen wachsen; es muß nie eine kleinere Complexion, als Zahl, auf eine größere folgen. Bey den Comb. müssen also beyde, sowohl Complex. als die Classen gut geordnet seyn; bey den Variationen kann das nur bey den Classen statt finden, und die Folge ihrer Complex. dadurch bestimmt werden.

9.

Alle Complex. einer Classe werden zu einer Ordnung gerechnet, wenn sie mit einem und demselben Elemente anfangen. So gehören aaa, aab, aac, abb, abc zu einer Ordnung, und eben so bbbb, bbbc, bbcd, bcde; jene zur Ordnung a der dritten, diese zur Ordnung b der vierten Combinationsklasse. (Nov. Syst. Perm. p. VIII, 20).

10.

Oft ist es bey Comb. nöthig, zu wissen, wie viel verschiedene Complex. derselben, nur aber versetzten Buchst. oder Zahlen, es giebt, wie sie eine gutgeordnete Complex., als Stellvertreterinn aller übrigen, enthält. Das zeigt die Versetzungszahl (numerus permutationum) oder der Polynomial-coeffizient an; welche Zahl man also auf den Fall der Complexion versetzen muß. (Eul. Alg. 1 Th. S. 209).

11.

Rein-combinatorisch heißt nach Herr Hindenburg das Verfahren, wenn die dabey vorkommende Veränderungen, 1) durch bloßes Ansetzen oder Beyfügen 2) durch bloßes Wegnehmen oder Absondern. 3) durch bloße Aus- oder Umtauschung gewisser, so wie durch bloßer bestimmter Anordnung der übrigen Elemente, gemacht werden. Sie unterscheidet sich von der gemischten, bey der öfters, (wenn gleich leichte) Rechnungen vorkommen.

12.

Trift man bey der wirklichen Darstellung der zu machenden Comb. Arbeit, eine solche geschickte Anordnung, daß man durch gerade, horizontale und vertikale, Linien, leicht jede niedere Classe absondern kann, so wie folgende Classen durch bloßes Zusetzen an die vorhergehenden, sogleich darzu-

stellen

stellen vermag, so nennt man dieses Verfahren Combinatorische Involutionen (Involutiones combinatoriae). Die durch solches Verfahren bewirkten Darstellungen selbst, werden häufig, Involutionen oder Evolutionen (besondere Involutionen) genannt.

13.

Zur Erläuterung von (12) will ich folgendes Beyspiel deutlich auseinander setzen.

In Eulers Einl. zur Anal. des Unendlichen 1ster Th. §. 360., werden von den continuirlichen Bruche.

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

folgende Werthe angegeben.

$$\frac{ab + \alpha}{b};\quad \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta};\quad \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

Ohne den Werth dieser 3 Brüche im geringsten zu schaden, setze ich die im Zähler und Nenner vorkommende Produkte, und auch die Buchstaben dieser Produkte in folgender Ordnung

$$\frac{ab + \alpha}{b};\quad \frac{abc + \alpha c + a\beta}{bc + \beta};\quad \frac{abcd + \alpha cd + a\beta d + ab\gamma + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + b\gamma}$$

ich füge hiezu den auf diesen 3 Brüchen, unmittelbar folgenden 4ten Bruch, ordne aber die Buchstaben und Produkte gleich so wie sie meiner gegenwärtigen Absicht dienlich sind.

abcde

$$\frac{abcde + \alpha cde + a\beta de + ab\gamma e + a\gamma e + abc\delta + \alpha c\delta + \alpha\beta\delta}{bcde + \beta de + b\gamma e + bc\delta + \beta\delta}$$

Ob Produkte neben oder unter einander stehen, ändert ihren Werth nicht, man schreibe also die partial Produkte, des Zählers und Nenners des 4ten Bruchs jeden besonders in ihrer Ordnung unter einander so, daß ihre Endbuchstaben in einer geraden Linie zu stehen kommen, so erhält man

Zähler des 4ten Bruchs

$$\begin{array}{cccccc}
a & b & c & d & e & \cdot\cdot \\
 & \alpha & c & d & e & \cdot\cdot \\
 & a & \beta & d & e & \cdot\cdot \\
 & a & b & \gamma & e & \cdot\cdot \\
 & & a & \gamma & e & \cdot\cdot \\
 & a & b & c & \delta & \cdot\cdot \\
 & & \alpha & c & \delta & \cdot\cdot \\
 & & \alpha & \beta & \delta & \cdot\cdot \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

Nenner des 4ten Bruchs

$$\begin{array}{ccccc}
b & c & d & e & \cdot\cdot \\
 & \beta & d & e & \cdot\cdot \\
 & b & \gamma & e & \cdot\cdot \\
 & b & c & \delta & \cdot\cdot \\
 & & \beta & \delta & \cdot\cdot \\
 & & & \cdot\cdot & \\
 & & & \cdot\cdot &
\end{array}$$

Die hier durch die eingeschriebenen Winkel abgeschnittenen Theile, (Evolutionen) geben sogleich die Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche, auf eine so leichte Art, daß eine solche involutorische Darstellung gewiß jeden, der Sinn für dergleichen Untersuchungen hat, ganz in Begeisterung setzen muß —zumal wenn er erst die Folgen übersieht, die diese Involutionen im ganzen Gebiet der Analysis haben

Ferner übersieht man schon aus dem hier mitgetheilten, daß bey der aufgestellten Involution, nicht mehr Buchstaben geschrieben werden, als gerade nur zu dem größten unter den darzustellenden Brüchen nöthig sind, alle kleinere Brüche, sind mit diesem zu-

Q gleich

gleich dargestellt. Man denke sich die Arbeit, wenn man nach Euler, Lambert oder Lagrange, nur den 20sten Bruch in seiner Ordnung, wozu jene die 4 ersten sind, darstellen soll — Nach ihnen kann es nicht anders geschehen, als man muß alle vorhergehende wissen — aber nach der hier gezeigten Darstellung kann solches independent geschehen, dabey wird wie schon erinnert nicht ein Jota mehr geschrieben, als durchaus nöthig ist nur den gefoderten 20sten Bruch darzustellen, daß die vorhergehenden 19 Brüche zugleich mit construirt sind, ist eine Vollkommenheit dieser Methode mehr — Es würde an diesem Orte noch unverständlich seyn, mehr hier davon beyzubringen — Ich begnüge mich also an diesem Beyspiele gezeigt zu haben, daß die combinatorische Analytik hier bey den continuirlichen Brüchen etwas leistet, was die feinsten Kunstgriffe der Analysis, bey aller Bemühung eines Eulers und Lagrange bisher nicht zu leisten vermochte. Wie nahe waren Bernouilli und Lambert und Euler dieser Erfindung? es bedurfte, wie man siehet nur einer zweckmäßigen Anordnung der Produkte und Buchstaben, und die ganze Involution liegt vor Augen. — Eben diese erstaunliche Leichtigkeit erhöhet den Werth der Hindenburgischen Erfindung ungemein.

14.

Die Zeichen die Herr Hindenburg bey seiner Theorie eingeführt hat, sind Lokalzeichen, combinatorische und andere. Von den Lokalzeichen sind in unsern vorhergehenden Abhandlungen bereits ei-

einige erklärt, und wie ich hoffe zeigen diese Abhandlungen genugsam, wie vortheilhaft der Gebrauch dieser Zeichen überall in der Analysis ist. Daher sollten billig alle Analysten sich künftig dieser Zeichen bedienen, so würde doch wenigstens der Anfang zur Einführung einer unveränderlichen und zweckmäßigen Bezeichnung gemacht — Sind wir Deutsche dieses nicht selbst, dem verehrungswürdigen Erfinder schuldig? — —

Einige der combinatorischen Zeichen, will ich hier vorläufig mittheilen, andere werden besser, wenn sie vorkommen erklärt.

I. die Zeichen für die Classen nach der Ordnung, sind für die Combinationen an sich (simpliciter)

$$'A, 'B, 'C, 'D, 'E \ldots \, 'N$$

wo 'N nicht etwa die so vielste Classe bedeutet, als der so vielste Buchstabe sie im Alphabeth ist — sondern, unter der hier gezeichneten Figur zeigt sie überhaupt die nte Classe an. *) Noch erinnere ich daß jede Complexion in einer Classe aus so viel Elementen bestehen muß, als die Zahl der Classe, mithin der dieser Classe bezeichnende Buchstabe anzeigt.

II. Die Zeichen für die Classen nach der Ordnung, sind für Variationen an sich:

$$'\mathcal{A}; '\mathcal{B}; '\mathcal{C}; '\mathcal{D}; '\mathcal{E} \ldots \, '\mathcal{N}$$

wo 'N wiederum die allgemeine nte Classe anzeigt.

*) Eigentlich sollte hier nach Hindenbung eine Art geschriebener Buchstaben stehn, allein da er in der Druckerey fehlt so hat man das N beybehalten, dieses gilt auch bey den Variationen.

III. Für Classen zu bestimmten Zahlen n, m, oder Summen

Für Combinationen:

^nA, ^nB, ^nC, ^nD . . . . ^nM

^nM, bedeutet die allgemeine mte Classe zur Summe n; d. h. wenn die in der mten Classe stehenden Dinge mit dem im Zeiger ihnen correspondirenden Zahlen, bezeichnet werden, so sollen die Summen dieser Zahlen in jeder Complexion der mten Classe, alle einander gleich seyn, und n Einheiten betragen.

Für Variationen zu bestimmten Summen m

$^m\mathfrak{A}$, $^m\mathfrak{B}$, $^m\mathfrak{C}$, $^m\mathfrak{D}$ . . . . $^m\mathfrak{N}$.

IV. Zahlen, neben den Classenbuchstaben, rechter Hand, zeigen einzelne Complexionen der Classen nach ihrer Ordnung an:

$^\prime A3$; $^\prime B5$; $^\prime C r$ . . . . $^nF10$; ^rHn . . .

und so auch bey den Variationsclassen.

V. Nemlich ^rHn, bedeutet die nte Complexion der 8ten Combinationsclasse zur Summe r.

Werden die zu combinirenden Dinge aus mehreren Reihen r, p, q, s u. s. w. genommen, so werden die combinatorischen Darstellungen, so gemacht, daß immer die Elemente jeder Reihe gegebener Dinge in eine bestimmte Verticalreihe zu stehen kommen.

Z. B. die Elemente von p in die erste,

— — — — — q — zweyte

— — — — — r — dritte

— — — — — s — vierte

u. s. w. von der Rechten nach der Linken.

Da-

Damit man nun gleich sieht, auf welche Reihe sich jedes Classenzeichen bezieht und in welcher Ordnung: so setzt man die Reihenexponenten, p, q, r, s . . . . in bestimmter Ordnung gleich über die Classenbuchstaben.

$$\text{Z. B. } {}^{n}\overset{p}{A},\ {}^{n}\overset{qp}{B},\ {}^{n}\overset{rqp}{C},\ {}^{n}\overset{srqp}{D} \ldots\ldots {}^{n}\overset{\ldots srqp}{M}$$

Hier bedeutet der letzte Buchstabe die mte Variationsclasse zu Summe n, aus den Elementen, der Reihenexponenten p, q, r, s . . . . und zwar die Elemente neben einander in vertikal Reihen so gestellt, wie kurz vorher gesagt ist.

VI. Die einzelnen Complexionen der Classen, mit ihren Versetzungszahlen, oder Polynomialcoeffizienten, anzudeuten, werden den großen lateinischen Classenbuchstaben die kleinen gleichnamigen deutschen Buchstaben vorgesetzt:

$$a'A,\ b'B,\ c'C,\ d'D \ldots \text{ oder } a^{n}A,\ b^{n}B,\ c^{n}C,\ d^{n}D \ldots n^{r}N$$

Es bedeutet nemlich, $n^{r}N$, so viel als die nte Combinationsclasse zur Summe r, mit der zu jeder ihrer Complexion gehörigen Versetzungszahl.

VII. Oft kommen die in I bis VI beschriebenen Zeichen, zusammen, wie

$$^{m}\mathfrak{A}\,.\,a'A + {}^{m}\mathfrak{B}\,.\,b'B + {}^{m}\mathfrak{C}\,.\,c'C \ldots + {}^{m}\mathfrak{N}\,.\,n'N$$

$$\text{oder } {}^{m}\mathfrak{A}\,.\,a^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}\,.\,b^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}\,.\,c^{n}C \ldots + {}^{m}\mathfrak{N}\,.\,n^{n}N$$

Deren Werthe durch die beygefügten Zeiger $\binom{1\ 2\ 3\ \ldots}{a\ b\ c\ \ldots}$ oder $\binom{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots}{b\ \ c\ \ d\ldots\ldots}$ nach erwiesenen Regeln und constuirten Tafeln sogleich entwickelt und dargestellt, auch in Lokalausdrücke $p^{m}ln \ldots qplm$ (durch welche man statt der Glieder selbst nur ihre Stellen angiebt) und umgekehrt

kehrt verwandelt werden können. Von solchen Lokalausdrücken und ihren Werthen (Nov. Syst. Comb. p. LI. LIII.). Es bestehet nemlich ein Glied jener Reihen wie ${}^{m}\mathfrak{N}n\,{}^{n}N$, aus dem ${}^{m}\mathfrak{N}$ oder nten Binomialcoeffizient der mten Potenz, aus n oder der Versetzungszahl jeder einzelnen Complexion der nten Classe und endlich aus ${}^{n}N$, oder die nte Combinationsclasse zur Summe n.

$$\text{Z. B. } {}^{m}\mathfrak{A}\,.\,a\,{}^{3}A + {}^{m}\mathfrak{B}\,.\,b\,{}^{3}B + {}^{m}\mathfrak{C}\,.\,c\,{}^{3}C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

hier ist ${}^{3}A = 3$ oder c;
${}^{3}B = 12$ oder ab
${}^{3}C = 111$ oder aaa

demnach ${}^{m}\mathfrak{A}\,.\,a\,{}^{3}A = {}^{m}\mathfrak{A}\,.\,c$
${}^{m}\mathfrak{B}\,.\,b\,{}^{3}B = {}^{m}\mathfrak{B}\,.\,2ab$
${}^{m}\mathfrak{C}\,.\,c\,{}^{3}C = {}^{m}\mathfrak{C}\,.\,a^{3}$

a ist, da ein einzelnes Ding keine Versetzungen zuläßt, immer 1. Da ab oder 12, die Versetzung ba oder 21 zulassen, so ist hier b=2; bey ${}^{3}C$ findet, da alle Elemente gleich sind keine Versetzung statt, also ist hier c = 1.

VIII. Die Distanzexponenten, die als Zahlen über die Buchstaben geschrieben werden, dienen dazu, um durch ihre Beyhülfe gleichnamige Zeichen, wie sie I bis VII vorkommen, durch einander auszudrücken, vorhergehende durch folgende und umgekehrt, bestimmte durch unbestimmte und wechselsweise.

IX. Werden bey den Involutionen die Elemente so gestellt, daß sie wie Wörter in alphabethischer Ord-

Ordnung, vor oder rückwärts gelesen, auf einander folgen, so heißt dieses die lexikographische oder alphabethische Fortschreitung — Der Gebrauch dieser lexikographischen Anordnungen, ist in der Analysis sehr wichtig. Das Verfahren, nach welchem hierbey die gesuchten Complexionen, durch Zusammensetzung oder Absonderung ihrer Elemente, in horizontaler, vertikaler oder aus beyden gemischter Richtung, sich ergeben verstattet immer, ein solches Verbindungsgesetz auszuwählen, welches das gesuchte Resultat leichter und geschwinder herbeyführt, als auf keinem andern Wege durch kein anderes Verfahren, möglich ist.

Involutarische Darstellungen, werden von andern combinatorischen durch J, *J* unterschieschieden; jenes für Combinationen dieses für Variationen — die lexikographischen Darstellungen, erhalten zu ihrer und zur Bezeichnung der Classen

für Combinationen J, A, B, C . . .

für Variationen *J*, *A*, *B*, *C* . . . *)

Wem hier noch nicht alles bis zum höchsten Grad, verständlich ist, der wird im folgenden völbefriediget werden.

Ver-

*) *J*, J deuten nemlich lexikographische Involutionen an.

Versetzungen. (Permutationes).

15.

Aufgabe.

Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\ldots \\ a, b, c, d, e, f, g, \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

auf alle mögliche Arten zu versetzen.

Erste Auflösung. Aus der Anfangscomplexion abcde... oder 12345... für n Dinge, suche man die nächst folgende höhere *) und aus dieser wieder die nächsthöhere (immer aus demselben und gleichvielen Elementen bestehende) Complexion, u. s. fort, nach folgender Regel.

I. Man suche von der Rechten nach der Linken zu, das erste Element, das als ein niedrigeres oder kleineres, auf ein höheres oder größeres folgt;

II. Zu diesem niedrigern suche man, aus denen die ihm zur Rechten stehen, das nächst höhere;

III. Man setze dieses höhere Element (II) in die Stelle des niedrigern (I) behalte die Elemente zur Linken (wenn dergleichen vorhanden sind) unverändert bey, und schreibe das niedrigere mit den übrigen, gutgeordnet, von der Linken nach der Rechten zu;

IV. Die Complexion, auf welche man die Vorschriften (I, II, III) nicht weiter anwenden kann, ist alsdann die letzte.

16.

*) Höhere oder niedrigere Complexionen sind hier mit größern oder kleinern Zahlen gleichgültig.

16.

Beyspiel. Auf	123456	ferner	124563
folgt	123465	=	124635
und darauf	123546	=	124653
und dann	123564	=	125346
ferner	123645	=	125364
=	123654	=	125436
=	124356	=	125463
=	124365	=	125634
=	124536	=	125643

u. s. w.

bis man auf die letzte Complexion 654321 verfällt, wo kein niedrigeres Element auf ein höheres folgt. Die punctirten Buchstaben sind hier die beyden Elemente der Auflösung (15. I. II.) Da hier 6 verschiedene Elemente zu versetzen sind, so geben diese 1.2.3....6 = 520 verschiedene Versetzungen. Denkt man sich unter jenen Zahlen die Augen von 6 Würfeln, so beträgt die Summe der Augen in jeder Complexion 21; diese Summe kann daher mit 6 Würfeln auf 520 verschiedene Arten geworfen werden.

Wäre statt der Zahlen-Complexion 123456; die Buchstaben-Complexion, abcdef gegeben, so stehen die aufeinander folgende Versetzungen nach obiger Regel so:

abcdef

a b c d e f

a b c d f e

a b c e d f

a b c e f d

a b c f d e

a b c f e d

u. s. w.

Obgleich die Buchstaben-Complexionen, ganz wie die Zahlen-Complexionen behandelt werden, so wird doch fast ein jeder die Behandlung der Zahlen leichter finden, weil man das kleinere und nächst größere, überhaupt die ihrer Größe nach auf einander folgende Elemente, bey Zahlen weit geschwinder als bey Buchstaben übersieht. Ich würde also hier, immer lieber gleich Anfangs, statt der vorgegebenen Buchstaben-Complexion, die nach dem Zeiger ihr entsprechende Zahlen-Complexion wählen, daraus die gesuchten Complexionen schaffen, und nachher wenn es nöthig ist, alles in Buchstaben übersetzen. — Wenigstens ist dieses bey Complexionen welche aus viele Elemente bestehen nöthig.

2tes Beyspiel. Nach jener Regel (15) findet man auch die Versetzungen von 11222 worin nicht alle Elemente verschieden sind nach der Ordnung.

11222	12212	21121	21221	22121
12122	12221	21212	22112	22211

An=

Anmerkung.

Die Auflösung (15) hat Hr. Hindenburg zuerst 1784 in seiner Vorrede zu Rudig. Specim. anal. de lin. curv. sec. ord. p. XLVI, XLVII, beschrieben. Hier werden immer Complexionen aus Complexionen abgeleitet, jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden, und umgekehrt, kann man auch z. B. aus der Complexion 22211, sogleich die nächstfolgende niedere 22121 herleiten; aus dieses wiederdie nächst niedere u. s. f. (zum Unterschiede punctire ich hier unterwärts). — Das Verfahren ist hier also dependent, aber ganz allgemein und hat etwas Absolutes. Es ist um so mehr zu empfehlen, da es die wenigsten Data erfordert, und man von jeder gegebenen Complexion, außer der Ordnung, sogleich weiter fortgehen kann.

Bey den Versetzungen ist dieses Verfahren rein combinatorisch. Das ist aber nicht immer der Fall bey andern Operationen, wo man dadurch zuweilen auf arithmetische Summen oder Ergänzungen geführt wird, die für Buchstaben-Complexionen nicht immer (wenigstens nicht so unmittelbar) die Bequemlichkeit haben, wie für Zahlencomplexionen.

Es soll daher hier eine 2te Auflösung gegeben werden, bey welcher Ordnungen aus Ordnungen, nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden, gefolgert werden; ein Verfahren, das sich durchgängig, auch bey den übrigen hier aufzuführenden Operationen, rein combinatorisch beweisen wird, eben so leicht ist als jede andere Vorschrift zu

per-

permutiren, aber in der Anwendung und in ihren Folgen nützlicher als alle übrigen.

17.

Zweite Auflösung. Der Gang des Verfahrens bey folgenden bestimmten Fall ist wie man sogleich wahrnimmt allgemein (Inf. Dignit. p. 78. not.) In der Auflösung, werden hier immer nur die Buchstaben genannt werden, weil man sich die entsprechenden Zahlen leicht denken kann.

Gegebene Elemente

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, \\ a, & b, & c, & d, \end{pmatrix}$$

1234	abcd	2134	bacd	3124	cabd	4 1 2 3	d a b c
1243	abdc	2143	badc	3142	cadb	4 1 3 2	d a c b
1324	acbd	2314	bcad	3214	cbad	4 2 1 3	d b a c
1342	acdb	2341	bcda	3241	cbda	4 2 3 1	d b c a
1423	adbc	2413	bdac	3412	cdab	4 3 1 2	d c a b
1432	adcb	2431	bdca	3421	cdba	4 3 2 1	d c b a

I. Man setze, wie hier zur Seite, das Element d als einzelnes Ding

1 2 3 4	a b c d
1 2 4 3	a b d c
1 3 2 4	a c b d
1 3 4 2	a c d b
1 4 2 3	a d b c
1 4 3 2	a d c b

II. Dem d setze man das nächst vorhergehende Element c vor; das giebt cd, die Ordnung c aus zwey Dingen c, d. Aus der Ordnung c findet man die fol-

folgende Ordnung d, wenn man c und d gegen einander umtauscht. Das giebt zusammen cd und dc, die beyden Versetzungen zweyer Dinge, c, d.

III. Den einzelnen Complexionen cd und dc in II setze man b vor. Das giebt die Ordnung b, aus welcher man die Ordnung c, und aus dieser wieder die Ordnung d findet, wenn man, im ersten Fall b,c mit c,b, im zweyten c,d mit d,c verwechselt, und die so abgeleiteten Complexionen unter einander schreibt. Das giebt zusammen bcd, bdc, cdb, dbc, dcb, die sechs Versetzungen von drey Dingen b,c,d.

IV. Den einzelnen Complexionen in III setze man a vor. Das giebt die Ordnung a von vier Dingen a,b,c,d. Aus der Ordnung a findet man die Ordnung b, und aus dieser die Ordnung c, und aus dieser die Ordnung d, durch successive Vertauschung der Buchstaben a,b mit b,a und b,c mit c,b und c,d mit d,c und dadurch alle 24 Versetzungen von 4 Dingen a,b,c,d wie oben stehen, wo aber die Ordnungen (nach IV) nicht unter, sondern neben einander gesetzt worden sind.

Eben so verfährt man bey mehr gegebenen Dingen und mehreren Ordnungen derselben. Zugleich erhellet, daß soviel verschiedene Ordnungen statt finden als Elemente gegeben sind, und daß jede Ordnung, gleich viel Complexionen hat, vorausgesetzt, daß alle Elemente verschieden sind, denn sonst hat die Ordnung desjenigen Elements, welches am öftersten in der Reihe der gegebenen vorkömmt, die meisten Complexionen.

18.

Das oben in 17 und neben II beygefügte Schema der Ordnung 4 und 1 oder d und a, zeigt durch die eingezogenen Winkel, daß diese Auflösung zu den involutorischen gehöre. Diese Involution für vier Dinge enthält nemlich zugleich folgende Evolutionen (besondere, niedrigere Involutionen) für ein Ding d oder a; für zwey Dinge c, d oder a, b; für drey Dinge b, c, d oder a, b, c.. Die Complexionen gehen hier unter sich wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikographisch; daher kann man auch folgende Regel der Versetzung von n Dingen geben.

„Man setze für n Dinge a, b, c, d, e, f... die Ziffern oder Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6... Schreibe die „niedrigste nzifrige Complexion 1 2 3 4 5 6...n und „alle gleichvielziffrigte successive höhere Complexionen, „nach der Ordnung, bis zur höchsten n...654321, „die sich aus den gegebenen Elementen (ohne eins „mehr als einmal zu setzen) schreiben lassen: so hat „man alle mögliche Versetzungen der gegebenen n Dingen in Ziffern, und dadurch auch in Buchstaben „(Nov. Syst. Perm. p. XVII. XVIII.)".

Daraus fließt, theils unmittelbar, theils durch eine leichte Folge:

α) Die Regel, folgende Complexionen aus unmittelbar vorhergehenden abzuleiten, wie dazu die erste Auflösung (15) Anweisung giebt.

β) Die Formel 1 . 2 . 3 . 4 .... n für die Anzahl der Versetzungen von verschiedenen Dingen,

γ) Die

γ) Die Beantwortung der Fragen: die wievielste eine gegebene Complexion. Z. B. 3412 oder cdab in dieser Ordnung sey, und wie eine durch ihre Ordnungszahl angegebene, z. B. die 19te Complexion aussehe?

Das alles läßt sich auf dem Wege der Involution leichter, als auf andern Wegen, finden und beantworten.

19.
Anmerkung.

Andere Regeln zu permutiren hat ehemals selbst Hr. Hindenburg in seinen Schriften gegeben. Herr Professor Klügel, giebt in der 1796 von Hindenburg herausgegebene Schrift der polynomische Lehrsatz, S. 53. ein anderes gleichfalls involutorisches Verfahren. — Herr Professor Burja giebt in seinen Algebraisten 1ster Theil Seite 6, 7, 8, u. 9, zweyerley Auflösungen, davon die erste die Complexionen gerade so wie unsere 2te Auflösung giebt — In Rosenthals Math. Encyklopädie, ist das Burjasche Verfahren abgeschrieben, ohne Herrn Burja zu erwähnen. — Mehrere Stellen der Burjaschen Werke und auch Werke von andern Mathematikern sind auf solche Art von Hr. Rosenthal benutzt worden. Herr Burja nennt die Permutationen, auch vollständige Verwechslungen, (combinaisons totales) die Anordnung die Michelsen im 2ten Theile seiner politischen Rechenkunst Seite 19. aufgestellt, giebt die Complexionen, auch wie hier, und so findet man dieses bey mehrere Schriftsteller, aber

keiner

keiner hat die Involutionen wahrgenommen — keiner hat so leichte zu befolgende Vorschriften gegeben — keiner hat so glückliche Anwendungen gemacht als Hindenburg.

Variationen überhaupt mit Wiederholungen.
(Variationes simpliciter, admissis repetitionibus)

20.

Aufgabe. Gegebene Dinge oder Element

$$\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g & \ldots\end{matrix}\right)$$

zu variiren, oder auf alle mögliche Arten zu zwey, drey, vier u. s. w. in gut geordnete Classen zusammenzustellen:

(α)

'A	a	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
'B	ba	bb	bc	bd
	ca	cb	cc	cd
	da	db	dc	dd
	aaa	aab	aac	aad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	ada	adb	adc	add
	baa	bab	bac	bad
	⸗	⸗	⸗	⸗
'C	bda	bdb	bdc	bdd
	caa	cab	cac	cad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	cda	cdb	cdc	cdd
	daa	dab	dac	dad
	⸗	⸗	⸗	⸗
	dda	ddb	ddc	ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
'D		u. s. w.		

(β)

	a	a	a	a
	a	a	a	b
	a	a	a	c
	a	a	b	a
u.	a	a	b	b
	a	a	b	c
	a	a	c	a
	a	a	c	b
	a	a	c	c
s.	a	b	a	a
	a	b	a	b
	a	b	a	c
	⸗		⸗	
	a	b	c	c
	a	c	a	a
	a	c	a	b
	⸗		⸗	
	a	c	c	c
w.	b	a	a	a
	b	a	a	b
	b	a	a	c
		u. s. w.		

Erste Auflösung. I. Die gegebenen Elemente a, b, c, d setze man, als einzelne Dinge (Uniones), in die erste Classe 'A.

II. Den einzelnen Unionen in 'A setze man erst a, dann b, dann c, dann d vor. Das giebt zusammen alle Binionen der zweyten Classe 'B.

III. Den einzelnen Binionen in 'B setze man wieder erst a, dann b, dann c, dann d vor. Das giebt zusammen alle Ternionen der dritten Classe 'C.

IV. Eben so erhält man, durch successives Vorsetzen der einzelnen Elemente a, b, c, d, vor alle Ternionen in *'C*, die Quaternionen der vierten Classe *'D*, vor alle Quaternionen in *'D*, die Quinionen der fünften Classe *'E*, u. s. w. alle übrige Variationscomplexionen der folgenden, aus den unmittelbar vorhergehenden, Classen.

Zweyte Auflösung. I. Die gegebenen einzelnen Elemente a, b, c, d (gleichsam als so viel einzelne Ordnungen) setze man in die erste Classe *'A*.

II. Den Unionen in *'A* setze man sämmtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a; aus welcher man durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b, die Ordnung c; und daraus weiter, durch Umtauschung des vorgesetzten b mit c, die Ordnung c; und daraus weiter durch Umtauschung der vorgesetzten c mit d, die Ordnung d der Binionen der zweyten Classe *'B* findet.

III. Den Binionen in *'B* setze man sämmtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen, u. s. w. alle übrige Ordnungen derselben in der dritten Classe *'C*, wenn man (wie in II.) statt der successive vorgesetzten a, b, c nun b, c, d setzt.

IV. Eben so erhält man, durch successives Vorsetzen und Austauschen der Anfangsbuchstaben a, b, c mit b, c, d der vierten, fünften und folgenden Classen, *'D* *'E* u. s. w. sämmtliche Ordnungen a, b, c, d jede nächstfolgende aus der unmittelbar vorhergehenden.

21.

Nach der ersten Auflösung (hier 20. und Nov. Syst. Perm. p. XXI.) werden Classen aus Classen,

nach

nach der zweyten, Ordnungen von Ordnungen (und so mittelbar auch Classen) abgeleitet. beyde Verfahren sind hier rein-combinatorisch, auch gehen ihre Complexionen wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikographisch geordnet. In der Darstellung (20, β) ist ein Element (d) weniger als bey a genommen worden, um nicht die Colonne zu lang zu machen, des Fortgangsgesetz (für noch so viel Elemente) liegt dennoch klar und deutlich vor Augen.

22.

Die Auflösungen (20) der Aufgabe passen beyde auf die hier (20, α, β,) vorgelegten Schemata. Indessen sind beyde Darstellungen sehr von einander verschieden. In der ersten werden für jede einzelne Complexion die vorzusetzenden Elemente mit den übrigen immer ganz in die folgenden Classen hingeschrieben; in der andern werden, für die Complexionen der ersten Ordnung a, diese a den zugehörigen Complexionen der vorhergehenden Classe nur vor: die übrigen Ordnungen aber, ganz ausgeschrieben, darunter gesetzt. Das giebt eine große Verkürzung und zugleich eine Involution in aller Form. Sie stellt, eben so wie jene, Summen von Classen, aber auch einzelne Classen, außer der Ordnung dar, und zeigt beyder Zusammenhang durch die figurliche Anordnung mit eingezeichneten Winkeln.

23.

Die Variationscomplexionen in (20, α, und β) beziehen sich sämmtlich auf die einzige Reihe der gegegebenen Dinge a, b, c, d.... von denen also in jeder Classe alle Combinationen mit allen Versetzungen zugleich vorkommen. Das wird durch

$$'A \dagger 'B \dagger 'C \dagger 'D \dagger 'E \ldots \dagger 'N$$

$$\binom{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6 \ldots}{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f, \ldots}$$

angegeben; durch Setzung nemlich der Classen, mit Beyfügung der einzelnen durch Variation zu verbindenden Elemente im Zeiger. Oder mit andern Worten. Jene symbolische Darstellung ist nichts anders als die Aufgabe in 20.

24.

Man kann aber auch, wenn mehrere Reihen von Elementen

$$\left\{\begin{array}{llllllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \ldots & \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g \ldots & = p \\ A, & B, & C, & D, & E, & F, & G \ldots & = q \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d}, & \mathfrak{e}, & \mathfrak{f}, & \mathfrak{g} \ldots & = r \\ \mathfrak{A}, & \mathfrak{B}, & \mathfrak{C}, & \mathfrak{D}, & \mathfrak{E}, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{G} \ldots & = s \end{array}\right\}$$

u. s. w. &c.

gegeben sind (wie hier zeigerförmig beysammenstehen) die Auflösungen (20) ohne alle Schwierigkeit sogleich dahin modificiren, daß jede einzelne Complexion ein Ding dieser Reihen enthält: die Unionen aus p, die Binionen aus q,p, die Ternionen aus r,q,p, die Quaternionen aus s,r,q,p u. s. w. für Variationscomplexionen folgender Classen und mehrerer Elementenreihen. Man darf nur den Elementen a,b,c... die letzte Stelle in den Complexionen die sie (in 20. α,β) schon haben, lassen, in die zweyte Stelle aber A,B,C... und

und in die dritte a,b,c... und in die vierte 𝔄,𝔅,ℭ... u. s. w. bey Complexionen von mehrern Stellen, setzen, oder, während der Auflösung und Darstellung selbst, zum Vorsetzen und Umtauschen, unmittelbar gebrauchen. Das ändert, wie man sieht, nichts in den Vorschriften der Auflösungen (20) weil man eben so leicht A,B,C... und a,b,c... und 𝔄,𝔅,ℭ... u. s. w. als a,b,c... vorsetzen und umtauschen kann.

25.

Auf diese Art erhält man

(α)

$\overset{p}{'A}$	a	b	c	d
	Aa	Ab	Ac	Ad
$\overset{qp}{'B}$	Ba	Bb	Bc	Bd
	Ca	Cb	Cc	Cd
	Da	Db	Dc	Dd
	aAa	aAb	aAc	aAd
	⸗	⸗	⸗	⸗
	aDa	aDb	aDc	aDd
	bAa	bAb	bAc	bAd
	⸗	⸗	⸗	⸗
	bDa	bDb	bDc	bDd
	cAa	cAb	cAc	cAd
	⸗	⸗	⸗	⸗
$\overset{rqp}{'C}$	cDa	cDb	cDc	cDd
	dAa	dAb	dAc	dAd
	⸗	⸗	⸗	⸗
	dDa	dDb	dDc	dDd
$\overset{srqp}{'D}$	𝔄aAa	𝔄aAb	𝔄aAc	𝔄aAd
	u. s. w.			

(β)

	𝔄	a	A	a
	𝔄	a	A	b
u.	𝔄	a	A	c
	𝔄	a	B	a
	𝔄	a	B	b
	𝔄	a	B	c
	𝔄	a	C	a
s.	𝔄	a	C	b
	𝔄	a	C	c
	𝔄	b	A	a
	𝔄	b	A	b
	𝔄	b	A	c
	⸗		⸗	
w.	𝔄	b	C	c
	𝔄	c	A	a
	𝔄	c	A	b
	⸗		⸗	
	𝔄	c	C	c
	𝔅.	a	A	a
	𝔅.	a	A	b
		u. s. w.		

und

und so kommen hier immer die Elemente jeder Reihe gegebener Dinge in eine bestimmte Verticalreihe zu stehen; die Elemente von p in die erste, die von q in die zweyte, die von r in die dritte, die von s in die vierte u. s. w. von der Rechten nach der Linken. Damit man nun gleich sieht, auf welche Reihen sich jedes Classenzeichen beziehet und in welcher Ordnung: so findet man hier die Reihenexponenten p, q, r, s ... (24) in bestimmter Ordnung gleich über die Classenbuchstaben gesetzt.

26.

Herr Hindenburg hat von diesen so angeordneten Complexionen aus den Elementen mehrerer Reihen, sehr häufigen Gebrauch in der Anwendung gemacht. Dahin gehören die Tafeln (Infi. Dign. p 172. 177 seq. und Nov. Syst. Perm. LX. und LXI. seq.) Die Zahlen in den dortigen Zahlencomplexionen sind wirklich variirt, d. i. auf alle mögliche Art combinirt und permutirt. Die Anwendung aber auf mehrere Buchstabenreihen wie hier in (24, 25) giebt bloß Combinationen der Elemente dieser Reihen.

27.

Variationen sind unter allen combinatorischen Arbeiten die leichtesten; in meiner Ausg. von Eulers Alg. 1 Th. S. 201. findet man von mir eine andere Methode gegebene Dinge zu variiren. Herr Burja nennt die Variationen, weitläuftige Verwechselungen (combinaisons vagues); (Algebraisten 1 Th. S. 136).

Eine

Eine sehr sinnreiche Bemerkung des Herrn Professor Hindenburg, ist auch diese, daß die Regeln zum Variiren, und daher auch zum Combiniren und Permutiren, keine anderen sind, als die allgemeinen Gesetze, nach denen der Verstand z ä h l t. Denn wenn man z. B. in der Dekadik von 0 bis 9 zählt, so braucht man dazu zehn e i n z e l n e Ziffern. Zählt man nochmals von vorne aber zweyzifrig, nemlich 00,01,02,... 09,10,11..99, so hat man alle Variationsamben von zehn Ziffern gemacht. Zählt man nochmals von vorne aber dreizifrig, nemlich 000,001, 002,... 009,010,011,012... 099,100,101,102...999 so hat man alle Variationsternen von jenen zehn Zifern formiret, u. s. f. Hierher gehören auch die nützlichen Bemerkungen von

Zahlensysteme in und umeinander; Fortschreitungsgesetz für Zahlen.

28.

Dyadische System.

	0	1
0	00	01
	10	11
1	00	01
	10	11
10	00	01
	10	11
11	00	01
	10	11
100	00	01
	10	11
	ꝛc.	ꝛc.

Triadische System.

	0	1	2
0	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
1	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
2	00	01	02
	10	11	12
	20	21	22
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Tetradische System.

	0	1	2	3
0	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
1	00	01	02	03
	10	11	12	13
	20	21	22	23
	30	31	32	33
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Dodekadisches System.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z	e	
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	0z	0e	&c.
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1z	1e	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	2z	2e	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	3z	3e	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	4z	4e	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	5z	5e	&c.
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	6z	6e	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	7z	7e	
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	8z	8e	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	9z	9e	
z0	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9	zz	ze	
e0	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	ez	ee	&c.

&c. &c. &c.

Diese figürlichen sämmtlichen combinatorischen Anordnungen zeigen zweyzifrige Gesetze, für das dyadische System im ersten, für das triadische im zweyten, für das tetradische im dritten und für das Duodecimalsystem im vierten Parallelogramme, mit den überschriebenen Zifern 0, 1, 3, 4, 5, 6.... als einfachen Grundzeichen. Durch die bey den 3 ersten Parallelogrammen, zur Seite beygeschriebenen 0, 1, 2, 3.... wird die Fortschreitung der Zahlen in jedem System nach der Ordnung, deutlich nachgewiesen.

Insbesondere gehört hieher das vierte Parallelogram, in Form eines Quadrats, mit den überschriebenen Grundzeichen 0, 1, 2, 3....9, z, e (z und e, sind angenommen 11te und 12te Grundzeichen) des zwölftheiligen Zahlengebäudes, in welchem

zugleich

zugleich alle kleinere, von weniger als 12 Grundzeichen, enthalten sind und deutlich vor Augen liegen, so wie alle größere, von mehr als 12 Grundzeichen, daraus sogleich hergestellt werden können. Das zweyzifrige Gesetz von zwey Grundzeichen $\begin{array}{cc} 10 & 11 \\ 00 & 01 \end{array}$ liegt oben linker Hand; daraus entsteht, durch Anlegung des Winkels oder Gnomons $\begin{array}{ccc} & & 02 \\ & & : \\ 20 & : & 22 \end{array}$ das zweyzifrige Gesetz von drey Grundzeichen $\begin{array}{ccc} 00 & : & 02 \\ : & & : \\ 20 & : & 22 \end{array}$ und daraus, durch Anlegung des Winkels oder Gnomons $\begin{array}{ccc} & & 03 \\ & & : \\ 30 & : & 33 \end{array}$ das zweyzifrige Gesetz von vier Grundzeichen $\begin{array}{ccc} 00 & : & 03 \\ : & & : \\ 30 & : & 33 \end{array}$ u. s. w. Die Gesetze von 5, 6.... bis auf 12 Grundzeichen, für das dodekadische System, welches hier vollständig dargestellt ist. Aus dem dodekadischen, findet man, durch Abnehmung eines Winkels $\begin{array}{ccc} & & 0e \\ & & : \\ e0 & : & ee \end{array}$, das zweyzifrige Gesetz für das hendekadische (11zifrige) Zahlengebäude. Aber durch Anlegung eines neuen Winkels oder Gnomons, würde man, für ein angenommenes 13tes Grundzeichen, das zweyziffrige Gesetz für das dreyzehntheilige Zahlengebäude erhalten u. s. w. für mehrere Grundzeichen und Zahlensysteme.

29.

Diese figürliche Darstellung der Zahlensysteme in und umeinander, zeigt also eine wahre Involution. Auch hat Herr Hindenburg diese Erscheinung zuerst bey den Untersuchungen über die Zahlengebäude wahrgenommen; diese und ähnliche Anordnungen (in quadratischen, rectangulären, triangulären, polygonischen, regulären und irregulären, Formen), hat er bey seinen Untersuchungen über die mechanische Fortschreitung der Zahlen, bey verlangter Zahlen-Aufsuchung durch Abzählen nach Fächern oder deren Abmessung nach vorgeschriebenen Distanzen *) vielfältig benutzt; den Vortheil, den sie auch in der Combinationslehre gewähren können, erkannt, und solchen über die gesammte Wissenschaft erstreckt. um so mehr, da aus dergleichen Darstellungen, die Gesetze der Fortschreitung der Zahlen, nach jedem Systeme, in der Ordnung und sprungweise, sogleich in die Augen fallen, die er dann zum Grunde seiner neuen Combinationslehre gelegt hat, bey welcher gut geordnete Complexionen und Classen wie Zahlen wachsen oder abnehmen. Nov. Syst. Perm. IX. 25. 26.

30.

Der Erfolg davon war in der That außerordentlich. Denn nun erschien die Combinationslehre auf

*) Hindenburgs Beschreibung einer neuen Art Zahlen durch Abzählen oder Abmessen zu finden. Leipz. bey Crusius 1776 mit Kupf. und Beylagen. gr. 8.

auf einmal in der ursprünglichen Simplicität, die ihr als selbständiger Grundwissenschaft zukommt, aus welcher die Arithmetik und Analysis hervorgehen. Die Regeln der so einfachen combinatorischen Operationen ließen sich nun sehr kurz abfassen, und waren äußerst leicht, leichter als die schon zusammengesetztern arithmetischen Operationen, die nur bedingte combinatorische sind. Bey jenen nemlich beruht alles auf bloßer Zusammenstellung, Ordnung und Versetzung der Elemente zu Complexionen; bey diesen hingegen muß zugleich mit auf derselben besondere Werthe, Lagen und Beziehungen, wie sie als Zahlen auf und in einander wirken sollen, Rücksicht genommen werden. Was endlich über alles wichtig ist, die ausgedehnteste Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis war nun eine natürliche und nothwendige Folge einer solchen Umänderung, und zog die Erfindung bequemer combinatorischer und anderer harmonirender Zeichen (Nov Syst. Perm. p. XXXII, — XLIX.) herbey, die gleich geschickt sind, die, größtentheils neuen, combinatorischen, einfachen und zusammengesetzten, Begriffe (Ebend. p. IV.—XV.) kurz und deutlich darzustellen, und zu Lokal- und combinatorisch-analytischen Formeln sich anordnen zu lassen.

Hierbey ward die Einführung
des Zeigers (index, indiculus)

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ a, & b, & c, & d \ldots \end{pmatrix}; \text{ oder } \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \ldots \\ b, & c, & d, & e \ldots \end{pmatrix}; \text{ ꝛc.}$$

unent-

unentbehrlich; die simpelste Nachweisung, die man sich denken kann.

Die von Hindenburg (Inf. Dign. und Nov. Syst. Perm.) angewiesenen und mannigfaltig benutzten Vorschriften gegebene Dinge

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ a, & b, & c, & d\ldots \end{pmatrix}$$

zu permutiren, combiniren und variiren, führen auf dergleichen Involutionen, wovon oben schon Proben gegeben sind, und weiter hin etwas näher erwogen werden sollen.

31.

Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.

(Combinationes simpliciter, admissis repetitionibus).

Aufgabe.

Gegebene Dinge oder Elemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ldots \\ a & b & c & d & e & f & g\ldots \end{pmatrix}$$

zu combiniren, oder, nach zwey, drey, vier u. s. w. verbunden, in gut geordneten Complexionen und Classen darzustellen.

(α)

'A	b	b	c	d
	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
'B			cc	cd;
				dd
	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
'C		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
	aaaa	aaab	aaac	aaad
'D		u. s. w.		

(β)

	a	a	a	a	a
	a	a	a	a	b
u.	a	a	a	a	c
	a	a	a	b	b
	a	a	a	b	c
	a	a	a	c	c
	a	a	b	b	b
	a	a	b	b	c
s.	a	a	b	c	c
	a	a	c	c	c
	a	b	b	b	b
	a	b	b	b	c
	a	b	b	c	c
	a	b	c	c	c
	a	c	c	c	c
w.	b	b	b	b	b
	b	b	b	b	c
	b	b	b	c	c
			u. s. w.		

32.

Erste Auflösung. I. Die gegebenen Elemente setze man als einzelne Dinge (Uniones) in die erste Classe 'A.

II. Der Union a (in 'A) und allen folgenden, setze man a; dann der Union b und allen folgenden, c; u. s. w. vor. Das giebt zusammen die Binionen der zweyten Combinationsclasse 'B;

III. Den Binionen in 'B der Ordnung a und aller folgenden, setze man a; denen der Ordnung b und aller

aller folgenden, setze man b; denen der Ordnung c und aller folgenden, setze man c; u. s. w. vor. Das giebt zusammen die Ternionen der dritten Combinationsclasse 'C.

IV. Eben so findet man, durch successives Vorsetzen der einzelnen Elemente a,b,c.... (immer von den Complexionen der Ordnung anfangend, die mit dem vorzuschreibenden Buchstaben gleichnamig ist) die Combinationsclassen 'D, 'E u. s. w. jede folgende aus der nächst vorhergehenden, also die nte Classe aus der (n — 1)ten.

33.

Zweyte Auflösung. I. Die gegebenen einzelnen Elemente (gleichsam als so viel einzelne Ordnungen) setze man in die erste Classe 'A.

II. Den Unionen in 'A setze man sämmtlich das Element a vor. Das giebt die Ordnung a; aus welcher man, durch Umtauschung des vorgesetzten a mit b (von der Binion an, wo zuerst zwey verschiedene Elemente vorkommen) die Ordnung b; und aus dieser, durch Umtauschung des vorgesetzten b mit c (von der Binion an, wo zuerst zwey verschiedene Elemente vorkommen) die Ordnung c; und daraus eben so die Ordnung d; u. s. w. der Binionen der zweyten Classe 'B findet.

III. Eben so findet man:

1) Die Ordnung a der dritten, vierten.... überhaupt der nten Classe, wenn man den sämmtlichen Complexionen der (n — 1)ten Classe, a vorsetzt;

2) Die

2) Die Ordnungen b,c,d... der nten Classe, aus den Ordnungen a,b,c... derselben Classe, wenn man in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnungen (von da an, wo zuerst die beyden Anfangsbuchstaben nicht einerley sondern verschieden sind) in die Stelle des ersten dieser beyden Anfangsbuchstaben den nächstfolgenden Ordnungsbuchstaben setzt.

34.

Die Auflösung (32) für die Combinationen ist von der ersten Aufl. für die Variationen (20) bloß darin unterschieden, daß die Buchstaben b,c,d... hier nicht (wie dort) allen Complexionen der vorhergehenden Classen für die folgenden vorgesetzt werden. Die Auflösung (33) ist mit der zweyten Aufl. (in 20) was die Bestimmung der Ordnung a in jeder Classe anbetrift, vollkommen einerley, und weicht nur bey den übrigen Ordnungen ab, bey denen nicht alle Complexionen der vorhergehenden gebraucht werden. Beyde Auflö- nachdem man die figürliche Anordnung bey ihnen so oder anders (22) trift, führen auf die Darstellungen (31, α,β)

35.

Die Auflösung (32) hat Hindenburg (Nov. Syst. Perm. p. XIX. 10.) aus einer noch allgemeinern ausgedrückten (Ebend. 8.) abgeleitet. Die Darstellungen (31, α, β) gehen übrigens wie jene der Variationen (20) wie wachsende Zahlen fort, und sind zugleich lexikoxikographisch geordnet (Arch. der Math. H. II. S. 178. Note).

36.

Das Gesetz der Combination, und die Fortschreitung bey mehrerern Dingen und mehreren Classen, fällt, so wie die Involution selbst bey β und wie sie (in 31 bey α hier nicht gezogene) vertikale Linien, neben den Endelementen a,b,c,d.... sich zeigt deutlich in die Augen. Diese Darstellungen, geben Veranlassung zu mannigfaltigen Beobachtungen und Folgerungen, in Beziehung auf Anfangs- und Endzifern, horizontal und vertikal fortschreitende Complexionen, Entwickelung folgender Classen aus vorhergehenden, folgender Complexionen aus vorhergehenden, in horizontaler und vertikaler Lage, Anzahl der Complexionen überhaupt und für jede Classe ins besondere, für jede beliebige Menge gegebener Dinge u. s. w. (Infin. Dign. p. 19 — 22). Herr Burja findet nach seiner Regel (Alg. 1 Thl. S. 137. §. 23.) alles vollkommen so wie hier (31, α) bey ihm heißen diese Art von Combinationen, **mittlere Verwechselungen** (combinaisons neutres).

Variationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

(Variationes numeri propositi, admissis repetitionibus)

37.

Aufgabe.

Die Variationen zu bestimmten Summen, aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

in gut geordneten Classen darzustellen.

Classen Complex. für ^5J

^5A	e
^5B	ad bc cb da
^5C	aac abb aca bab bba caa
^5D	aaab aaba abaa baaa
^5E	aaaaa

Lexikogr. Complex. für ^5J

	a	a	a	a	a
	a	a	a	b	
^5A u.	a	a	b	a	
	a	a	c		
	a	b	a	a	
	a	b	b		
	a	c	a		
ſ.	a	d			
	b	a	a	a	
	b	a	b		
^5B	b	b	a		
	b	c			
^5C	c	a	a		
	c	b			
^5D w.	d	a			
^5E	e				

38.

Auflösung für $^5J = {}^5A + {}^5B + {}^5C + {}^5D + {}^5E$

I. Das 5te Element e setze man, als einzelnes Ding, in die erste Classe ^5A.

II. Die Complexionen der zweyten und aller folgenden Classen bestimme man nach ihren Ordnungen:

1) Die Ordnung a der nten Classe zu finden, setze man jeder Complexion der (n — 1)ten Classe a vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächst vorhergehenden des Zeigers, mit Uebergehung derer, die sich mit a endigen. *)

2) Die so gefundene Ordnung a giebt die Ordnung b, diese die Ordnung c, u. s. w. derselben nten Classe, wenn man successive in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnung, mit Uebergehung derer, die sich mit a endigen, den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden des Zeigers, den letzten hingegen mit dem nächst vorhergehenden vertauscht.

III. So findet man aus e in ^5A (nach II, 1) ad, und daraus (II, 2) bc, und daraus cb, und daraus da, die Ordnungen der zweyten Classe, deren jede hier nur aus einer Complexion besteht. Eben so ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexionen der dritten, und übrigen Classen.

39.

*) Ich habe hinzugesetzt mit Uebergehung derer, die sich mit a endigen. Hindenburg hat dieses wahrscheinlich ausgelassen, weil bey einer solchen Complexion es für den letzten Buchstaben kein nächstvorhergehender zu vertauschen giebt. (Der polynomische Lehrsatz. S. 177. 34).

39.

Die Auflösung (38) ist einerlei mit der (S.258.) nur daß hier noch die letzten Buchstaben der Complexion verändert werden, welches dort nicht nöthig war; (auch werden dort keine übergangen) *). Man hätte auch die Elemente a, b, c... den Complexionen nach (S.257.) vorsetzen, und die zugehörige Umtauschung des letzten Elements vornehmen können. Dadurch aber würde die Auflösung an Simplicität und Leichtigkeit etwas verlohren haben, dieselbe auch nicht rein combinatorisch, wie die hier (38) aufgeführte, geblieben seyn.

40.

Auflösung für

$$ {}^5\mathfrak{J} = {}^5\mathfrak{A} + {}^5\mathfrak{B} + {}^5\mathfrak{C} + {}^5\mathfrak{D} + {}^5\mathfrak{E} $$

Die Complexionen zur Summe n werden hier aus denen zur Summe (n — 1) auf folgende Art abgeleitet.

I. Man setze allen einzelnen Complexionen der Summe (n—1), das erste Element derselben mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ord-

*) Bey einer Wissenschaft die so neu als diese ist, muß jeder der nicht Erfinder davon ist, sich mit aller Behutsamkeit ausdrücken — ich habe mich daher immer genau an die Worte und Ausdrücke des Erfinders gehalten, der die Sache gewiß besser als jeder andere übersieht — ich halte es daher für Pflicht hier anzuzeigen, daß ich was in Clammern steht zugesetzt habe, da es mir noch einen charakteristischen Unterschied dünkte.

nung, unter die Complexionen die I schon vorhergegeben hat.

41.

Da bey den Buchstabencomplexionen zu bestimmten Summen, diese Summen sich auf die Ordnungszahlen beziehen, wie sie im Index oder Zeiger, (37) über den Buchstaben stehen: so erhellet deutlich, daß wenn man das Element a (oder 1) im ersten Winkel (37) setzt, man, nach dem obigen Verfahren (I, II) von da auf die Summe 2, und von dieser auf die Summe 3, u. s. w. auf die Summen 4, 5...n successive fortschreitet. Diese involutorische Succession, nach welcher man vorhergehende und folgende Werthe in und um einander schreibt, ist gleichwohl mit einer absoluten Independenz vollkommen gleichgültig (Arch. der Math. H. III. S. 324, c.) und so schreibt man nach ihr Summen von Classen eben so leicht als einzelne Classen, und umgekehrt, oder vielmehr, eins ist mit dem andern zugleich gegeben und innigst verbunden.

42.

Damit man den Unterschied zwischen rein und nicht rein combinatorisches Verfahren deutlich einsehen mag, so will ich hier noch folgende Auflösung von der Aufgabe (38) mittheilen.

Aufgabe I). Aus einer gegebenen Variationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben.

Auflösung 1). Ist die letzte oder niedrigste Ziffer der gegebenen Complexion größer als 1, so

ziehe

ziehe man 1 von ihr ab und addire 1 zur folgenden Ziffer. Die beyden so veränderten Ziffern in ihren Stellen, mit den übrigen, sämmtlich unveränderten, geben zusammen die verlangte nächst höhere Complexion.

So folgen $11\dot{1}\dot{4}$

$11\dot{2}\dot{3}$

$11\dot{3}\dot{2}$

1141 auf einander

2) Ist die letzte Ziffer der gegebenen Complexion 1, oder sind mehrere Ziffern derselben nebst der letzten, hintereinander 1, daß also die Complexion sich mit 1 oder 11 oder 111 oder 1111 u. s. w. endiget: so erhöhe man die nächste zweyte Ziffer von der 1 in der höchsten Stelle, vorwärts, lasse die Ziffern neben der erhöheten linker Hand (wenn es noch dergleichen giebt) unverändert, in die Stellen aber rechter Hand derselben setze man durchgehends 1, bis in die letzte Stelle, in die man das Complement zur gegebenen Summe setzt, das auch 1 seyn kann.

Auf 1141; auf 12311; auf 512111

folgt 1213; folgt 13112; folgt 521111

u. daraus 611111

3) Giebt es aber keine nächste zweyte Ziffer vorwärts von der 1, (wie sie 2 bestimmt) so ist die gegebene Complexion die letzte ihrer Classe.

So ist in 611111 die Ziffer 6, die erste nach 1, zugleich die in der höchsten Stelle, nach welcher es

also

also keine höhere, und folglich auch keine zweyte Ziffer vorwärts von 1 geben kann. Die gegebene Complexion 611111 ist also die höchste und letzte ihrer Classe.

Zusatz. Die erste und niedrigste Complexion einer Classe, z. B. der Classe k zur Summe n, findet man, wenn man $(k - 1)$ Einheiten neben einander schreibt und in die letzte oder niedrigste Stelle das Complement $n - (k - 1) = n + 1 - k$ zur Summe n setzt. Für $k = n$ ist dies Complement selbst 1, und es giebt nur eine, aus lauter Einsen bestehende Complexion dieser Classe, die zugleich die letzte Classe von allen ist.

Daraus fließt unmittelbar folgende

Aufgabe II. Alle Complexionen zur Summe n einer verlangten Variationsclasse k, gutgeordnet zu schreiben.

Auflösung 1). Man schreibe (nach vorigem Zusatze) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die höheren Complexionen folgere man durch Anwendung (von 1 und 2) der Auflösung der vorigen Aufgabe I. bis man (nach 3) auf die höchste und letzte Complexion derselben Classe verfällt.

Anmerkung. Jede der beyden Vorschriften 1 und 2 der Aufgabe I. läßt sich für die Aufgabe II. oft mehrmal hintereinander anwenden, so lange nämlich die in 1 und 2 festgesetzten Bedingungen vorhanden sind. Auch dadurch wird die an sich leichte Darstellung noch mehr erleichtert, welches bey großen Zahlen, wo der Fall häufiger vorkommt, um so angenehmer ist.

Bey=

Beyspiel. Für $n = 7$ und $k = 5$. Oder: die Variationscomplexionen für

$$\overset{\prime}{E}\,(1\ 2\ 3\ 4\ .\ .\ .)$$ zu schreiben.

Diese sind, nach obigem Verfahren

$111\dot{1}\dot{3}$	$1\dot{1}3\dot{1}1$	$211\dot{1}\dot{2}$
$111\dot{2}\dot{2}$	$121\dot{1}\dot{2}$	$21\dot{1}2\dot{1}$
$11\dot{1}3\dot{1}$	$12\dot{1}2\dot{1}$	$2\dot{1}2\dot{1}1$
$112\dot{1}\dot{2}$	$1\dot{2}2\dot{1}1$	$\dot{2}2\dot{1}11$
$11\dot{2}2\dot{1}$	$\dot{1}3\dot{1}11$	$3\dot{1}111$

Anmerkung. Hier ist $3\dot{1}111$ die letzte und höchste Complexion der 5ten Classe zur Summe weil es hier keine zweyte Ziffer nach der (hier punktirten) höchsten $\dot{1}$ giebt. (Aufg. I. 3.) Würde man aber statt $3\dot{1}111$ schreiben $03\dot{1}111$, so könnte man die Regel (2) wieder anwenden, und fände so 111112, die erste und niedrigste Complexion der folgenden 6ten Classe, aus der letzten und höchsten Complexion der unmittelbar vorhergehenden 5ten Classe; aus welcher man, wie vorher, die folgenden derselben Classe weiter ableiten kann.

Einen solchen Uebergang nennt Herr Hindenburg deductionem ex Classe in Classem. Er findet auch, in seiner Art, bey der in natürlicher Ordnung, nach welchem Zahlensystem man will, geschriebenen Zahlenreihe statt, wenn man von mziffrigen Zahlen zu den (m+1)ziffrigen fortschreitet.

So

So giebt z. B. im dekadischen System die höchste mziffrige Zahl $\overset{m-1}{9\,99}\ldots$ wenn man dafür schreibt $\overset{m}{0}999\ldots$ die kleinste (m+1)ziffrige Zahl $\overset{m}{1}000\ldots$

43.

Von diesem Variationsproblem zu bestimmten Summen (37) stehet Hindenburgs erste Auflösung (Infinit. Dign. p. 129 — 135.) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Die zweyte Auflösung von Hindenburg habe ich hier nach Herrn Mag. Töpfer (Comb. Anal. S. 77 — 80) in (42) mitgetheilt. Beyde sind leicht und ganz allgemein, aber nicht rein combinatorisch, wie die hier (38,40) beschriebenen von denen Hindenburg die letztere zuerst in seinem Programm Terminorum ab infinitinomii dignitatibus Coefficientes Moivraeanos sequi ordinem lexicographicum, ostenditur. p. IV, 2. und im Arch. der Math. (H. IV. S. 393, A) in Zahlencomplexionen aufgeführt hat. Von diesen vier ganz verschiedenen Verfahren geben, das erste Classen aus Classen, das zweyte Complexionen aus Complexionen, das dritte Ordnungen aus Ordnungen, das vierte Summenwerthe aus Summenwerthen; durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden. Die nähere Betrachtung der combinatorischen Operationen besonders der Involutionen, führt diese Unterschiede von selbst herbey. Man vergleiche Arch. der Math. H. II. S. 183, 18, I.

44.

Die Variationen zu bestimmten Summen, die ich bisher nur auf eine Reihe a,b,c,d... (37) bezogen habe, können eben so, wie jene (an sich oder überhaupt, simpliciter) auf mehrere Reihen (24,26) bezogen werden; auch hat Hindenburg davon (Infin. Dign. §. XXVII. p. 127 — 145 und Nov. Syst, Perm. p. LXX. seq.) häufig Gebrauch gemacht, und solches bey den Classenzeichen sowohl, als bey der darstellenden Entwickelung nachgewiesen. Wählt man für die mehrern Reihen p,q,r,s den Zeiger, wie in (24), wozu ich itzt nicht die Reihe $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\ldots = t$ fügen will: so stehen, für die Summe 5 oder ${}^5\mathfrak{J}$ (37) die Zahlen- und Buchstabencomplexionen nebst ihren Classenzeichen und den überschriebenen Reihenexponenten p, q, r, s, t, wie folget:

p	p	p
q 5	^5A	q e
14		Ad
23	qp	Bc
32	^5B	Cb
r 41		r Da
113		aAc
122	rqp	aBb
131	^5C	aCa
212		bAb
221		bBa
s 311		s cAa
1112	srqp	𝔄aAb
1121	^5D	𝔄aBa
1211		𝔄bAa
t 2111	tsrqp	t 𝔅aAa
11111	^5E	α𝔄aAa

Zuweilen sind auch einige der Reihen p,q,r,s,t..... Glied für Glied einander gleich. Wäre z. B. p=q; s = t;.... so käme hier:

$$^5\mathfrak{J} = {}^5\overset{p}{A} + {}^5\overset{p^2}{B} + {}^5\overset{rp^2}{C} + {}^5\overset{srp^2}{D} + {}^5\overset{srp^2}{E}$$

45.

Für eben die Reihen p,q,r,s,t (44), eben so gebraucht, aber auf $^5\mathfrak{J}$ (in 37) angewendet, fände man die Zahlen- und Buchstabencomplexionen, wie folget:

1	1	1	1	1	α	$\mathfrak{A}$	a	A	a
1	1	1	2		α	$\mathfrak{A}$	a	b	
1	1	2	1		α	$\mathfrak{A}$	B	a	
1	1	3			α	$\mathfrak{A}$	c		
1	2	1	1		α	b	A	a	
1	2	2			α	$\mathfrak{B}$	b		
1	3	1			α	C	a		
1	4				α	d			
2	1	1	1		$\mathfrak{B}$	a	A	a	
2	1	2			$\mathfrak{B}$	a	b		
2	2	1			$\mathfrak{B}$	B	a		
2	3				B	c			
3	1	1			c	A	a		
4	1				c	b			
5					D	a			
					e				

Hier stehen nemlich in der ersten Buchstabencomplexion die Anfangsbuchstaben der Alphabete für die Reihen ... t,s.r,q,p, in ihrer Ordnung; jeder (nach 40,I) vorzuschreibende erste Buchstabe, wird aus dem nächstfolgenden, noch nicht gebrauchten, Alphabete genommen, jeder (nach 40, II) durch Umtauschung zuzusetzende hingegen, aus dem Alphabete, wohin der auszutauschende gehört. Das nennt Hindenburg, die Reihen p,q,r,s,t .... hier eben so gebrauchen, wie in (37). Die Buchstabencomplexionen kommen hier gleichwohl mit den dortigen nicht in dem Umstande überein, daß in einerley Stellen Buchstaben desselben Alphabets durchgängig vorkämen. Mit einem Worte, die Zahlencomplexionen in (44,45) sind bloß der Form, die Buchstabencomplexionen (Ebendas.) hingegen,

gen, der Form und Materie nach verschieden. Von beyder Gebrauch und Anwendung, in der Folge.

Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

(Combinationes numeri propositi, admissis repetitionibus)

46.

Aufgabe.

Die Combinationen zu bestimmten Summen, aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

in gutgeordneten Complexionen und Folgen derselben darzustellen.

Clas=

Classen-Complex. für 'J

'A	g
	af
'B	be
	cd
'C	aae
	abd
	acc
	bbc
'D	aaad
	aabc
	abbb
'E	aaaac
	aaabb
'F	aaaaab
'G	aaaaaaa

Lexikographische Complexion für 'J

'A	a	a	a	a	a	a	a
	a	a	a	a	a	b	
	a	a	a	a	c		
	a	a	a	b	b		
	a	a	a	d			
	a	a	b	c			
	a	a	e				
	a	b	b	b			
	a	b	d				
	a	c	c				
	a	f					
'B	b	b	c				
	b	e					
'C	c	d					
'G	g						

'A	aaaaaaa
	baaaaa
'B	bbaaa
	bbba
	caaaa
'C	cbaa
	cbb
	cca
'D	daaa
	dba
	dc
'E	eaa
	eb
'F	fa
'G	g

47.

Auflösung für

$^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F + {}^7G.$

I. Das 7te Element g setze man, als einzelnes Ding, in die erste Classe ^7A

II. Die Complexionen der zweyten und aller folgenden Classen bestimme man nach ihren Ordnungen:

1) Die Ordnung a der nten Classe zu finden, setze man jeder Complexion der (n — 1)ten Classe (mit Uebergehung derer, die am Ende zwey oder mehr gleiche Elemente haben) a vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers.

2) Die so gefundene Ordnung a giebt die Ordunng b, diese die Ordnung c u. s. w. derselben nten Classe wenn man successive in den Complexionen der nächstvorhergehenden Ordnung (mit Uebergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwey oder mehr gleiche Anfangs- oder zwey oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beydes zusammen, haben) den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden (in beyden Fällen, des Zeigers nicht der Complexion) vertauscht.

III. So findet man aus g in ^7A (nach II. 1) af, und daraus (II. 2.) be, und daraus cd (weiter darf man hier nicht gehen, weil die Binionen dc, eb, fa nicht gutgeordnet wären, und auch schon durch die vorhergehenden dargestellt sind) die Ordnungen der

zwey-

zweyten Classe, deren jede hier nur aus einer Complexion besteht. Eben so ergeben sich die Ordnungen mit ihren Complexionen der dritten und übrigen Classen.

48.

Auflösung für

$${}^{7}\mathfrak{J} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{G}$$

die Complexionen zur Summe n werden hier aus denen zur Summe (n — 1), auf folgende Art abgeleitet:

II. Man setze allen einzelnen Complexionen der Summe (n — 1) das Elemənt a vor.

II. Man vertausche in den Complexionen der Summe n — 1, (mit Uebergehung derer, welche zwey oder mehr gleiche Anfangselemente haben) das erste Element mit dem nächstfolgenden höhern Elemente des Zeigers, und schreibe jede Complexion, die diese Vertauschung giebt, in ihrer Ordnung, unter die Complexionen die I schon vorher gegeben hat.

49.

Auflösung für

$${}^{7}\mathfrak{J} = {}^{7}\mathfrak{A} + {}^{7}\mathfrak{B} + {}^{7}\mathfrak{C} + {}^{7}\mathfrak{D} + {}^{7}\mathfrak{E} + {}^{7}\mathfrak{F} + {}^{7}\mathfrak{G}$$

II. Man setze allen einzelnen Complexionen der nächstvorhergehenden Summe (n — 1), das Element a vor.

II. Man vertausche (aber nur in denjenigen Complexionen der Summe (n — 1), bey denen die beyden ersten Elemente nicht einerlei, sondern verschieden sind) das erste Element solcher Complexionen, mit

mit dem nächstfolgenden des Zeigers, und füge solchem die übrigen Elemente der Complexion unverändert bey.

III. Die Complexionen (die I und II geben) mische man so unter einander, daß man zu jeder Complexion aus I die aus II setzt, wenn es dergleichen giebt. Giebt es keine in II (wenn nemlich der Complexion zur Summe (n — 1) erste beyde Elemente nicht verschieden sind) so setzt man bloß die aus I, und geht gleich zur folgenden Complexion der Summe (n — 1) fort.

50.

Das Combinationsproblem zu bestimmten Summen nach Classen (47), war das erste auf welches Hindenburg verfiel, und das ihm Gelegenheit gab, in der Folge weiter zu gehen. Seine erste Auflösung davon (Infin. Dign. §. XII. p. 73 — 91.) für Summen von Classen, so wie für einzelne Classen. Seine 2te Auflösung ist folgende (Töpf. comb. Anal. S. 80 — 90).

Combinatorische Zusammensetzung für Zahlencomplexionen zu bestimmten Summen, aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5....

Aufgabe I. Aus einer gegebenen Combinationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben.

Auflösung. 1) Ist die letzte oder niedrigste Ziffer der gegebenen Complexion um mehr als 1 größer als die nächstfolgende, so ziehe man 1 von der letzten Ziffer ab, und addire 1 zur vorletzten Ziffer. Die beydDn so veränderten Ziffern in ihren

ren Stellen mit den übrigen, sämmtlich unveränderten, geben zusammen die verlangte nächsthöhere Complexion.

So folgen 11137; imgleichen 11227
und 11146; und 11236
und 11155; und 11245

aufeinander; aus jeder vorhergehenden Complexion, die nächstfolgende höhere.

2) Ist die letzte Ziffer der gegebenen Complexion gleich groß oder nur um 1 größer, als die vorletzte, so gehe man weiter zu den nächstfolgen= Ziffern fort, und suche die erste Ziffer unter ihnen, die um mehr als 1 kleiner ist als die letzte. Diese kleinere Ziffer erhöhe man um 1 in ihrer Stelle, lasse die Ziffern neben der erhöheten linker Hand (wenn es auch dergleichen giebt) unverändert, in die Stelle aber rechter Hand der Erhöheten, setze man lauter (wie sie die Erhöhung gegeben) gleiche Ziffern, bis auf die letzte oder niedrigste Stelle, in die man das Complement zur gegebenen Summe setzt, das größer oder gleich groß mit der vorletzten Ziffer seyn, nie aber kleiner werden kann.

Auf 12244
folgt 12334 auf 22234
darauf 13333 folgt 22333
und darauf 22225;

3) Hat die gegebene Complexion keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist als die letzte, so ist sie die letzte und höchste Complexion ihrer Classe.

Dies ist der Fall bey der vorigen letzten Complexion 22333, nach welcher also keine weiter in der Classe zu welcher sie gehört, folgen kann.

Zusatz. Die erste und niedrigste Complexion einer Classe, z. B. der Classe k zur Summe n, ist mit der ersten Complexion für Variationen für einerley n und k, vollkommen gleich, und wird also eben so (wie in dem obigen Zusatze) bestimmt. Für k=n giebt es auch hier nur eine einzige aus lauter Einsen bestehende Complexion der letzten Classe.

Daraus fließt unmittelbar folgende.

Aufgabe II. Alle Complexionen zur Summe n einer angegebenen Combinationsclasse k, gutgeordnet, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach vorhergehendem Zusatze) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die folgenden höhern Complexionen folgere man durch Anwendung (von 1 und 2) der Auflösung der vorstehenden Aufgabe I. bis man (nach 3) auf die höchste und letzte Complexion der gegebenen Classe verfällt.

Anmerkung. Jede der beyden Vorschriften 1 und 2 der Aufgabe I. läßt sich für die Aufgabe II. oft mehrmal hintereinander anwenden, so lange nemlich die in 1 und 2 festgesetzten Bedingungen vorhanden sind. Auch dadurch wird die an sich leichte Darstellung noch mehr erleichtert, welches bey großen Zahlen, wo der Fall häufiger vorkommt, um so angenehmer ist.

Bey-

Beyspiel. Für $n = 13$ und $k = 5$; oder die Complexion für $\left({}^{13}E \atop 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots \right)$ zu schreiben.

Diese sind nach obiger Vorschrift:

11119	11236	12244
11128	11245	12334
11137	11335	13333
11146	11344	22225
11155	12226	22234
11227	12235	22333

Anmerkung 1. Hier ist 22333 die letzte und höchste Complexion der 5ten Classe zur Summe 13, weil es in ihr keine Ziffer giebt, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte Ziffer 3. Würde man aber statt 22333 schreiben 022333, so könnte man die Regel (2) wieder anwenden, und fände so 111118 die erste und niedrigste Complexion der folgenden 6ten Classe, aus der letzten und höchsten Complexion der unmittelbar vorhergehenden 5ten Classe. Eine deductio ex Classe in Classem, (wie die obige S. 279).

Würde vorgeschrieben, daß die Zahl 13 in 5 Theile zertheilt werden sollte, die sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, und nur diesen allein, (keinen größern) schreiben lassen. So übersieht man leicht, daß von obigen 18 dargestellten Complexionen, nur 6 brauchbar sind, die übrigen sind für diese Aufgabe umsonst gesucht. Hindenburg unterscheidet in solchen Fällen

Complexiones utiles und inutiles (Nov. Syst. Comb. p X. 27).

Wie dergleichen Complexionen, unabhängig von den übrigen, die man nicht braucht, sich finden lassen, wird folgendes zeigen.

51.

Entwickelung der Zahlencomplexion in 50, wenn statt der dortigen unbestimmten Elementenreihe 1, 2, 3, 4, 5 ... eine bestimmte 1, 2, 3 ... r ... m — 1, m gegeben ist; wo r jedes Element < m — 1 bedeutet, und das höchste Element m < n + 1 — k seyn soll*)

Aufgabe 1. Die erste Complexion zur Summe n für die Combinationsclasse k, aus den Elementen 1, 2, 3 ... r ... m — 1, m zu finden; wenn m < n + 1 — k.

Auflösung. Man nehme n — k = R, so ist entweder

1) Der Rest R = r eine kleinere Zahl als m—1
2) oder es ist R = q (m — 1), ein vielfaches von m — 1,
3) oder es ist R = q (m — 1) + r, ein Vielfaches von m — 1, und eine kleinere Zahl.

Für

*) Man muß hier und in der Folge die Reihe 1, 2, 3, 4, 5 ... von der 1, 2, 3, 4 ... m wohl unterscheiden, weil die letztere auf ein bestimmtes Zahlensystem sich bezieht, dessen höchste Ziffer m ist. Da

m < n + 1 — k,
m — 1 < n — k

also auch m — 1 < R; daher scheint es, als wenn R nicht gleich r kleiner als m — 1 gesetzt werden darf. Die Aufl. zählt die möglichen Fälle auch für m > oder < oder = n + 1 — k. Seite 298 wird man aber sehen, daß die Annahme m < n + 1 — k gnügt.

Für 1 setze man in die letzte und niedrigste Stelle der zu bestimmenden Complexion die Zahl $1 + r$, und in die übrigen $(k - 1)$ Stellen, lauter Einsen.

Für 2 setze man das höchste Element m von der letzten Stelle an so oft nebeneinander, als q Einheiten hat. Werden dadurch noch nicht alle Stellen besetzt, so fülle man die übrigen mit Einsen aus.

Für 3 setze man eben so das Element m von der letzten Stelle an qmal hintereinander, schreibe dann die Zahl $1 + r$ daneben, und fülle wenn noch leere Stellen vorhanden sind, die übrigen mit Einsen aus.

Zusatz. Soll die Aufgabe möglich seyn: so darf n nicht kleiner als k, aber auch nicht größer als mk seyn. Denn für $n = k$ bestände die Complexion aus lauter Einsen, als kleinsten, für $n = mk$ aus lauter men, als größten Elementen. Dieß gäbe also die kleinste und größte Complexion von allen, die sich aus k Zahlen der Reihe $1, 2, 3 \ldots m$ schreiben lassen, als Grenzen der übrigen dazwischen fallenden.

Exempel. Für 1,2,3,4,5,6, (wo also $m = 6$) soll man die erste Complexion in der Classe $k = 8$ suchen; und zwar

1) zur Summe $n = 11$.

Hier wäre $11 - 8 = R = 3$. Da nun $3 < 5$, so ist die gesuchte Complexion 11111114.

2) Zur Summe $n = 28$.

Hier wäre $28 - 8 = R = 20$. Da nun $m - 1 = 5$, so ist 20. d. i. $q(m-1) = 4 . 5$. also $q = 4$. und die erste Complexion ist 11116666.

3) Zur Summe $n = 40$.

Hier

Hier wäre $40 - 8 = R = 32$. Da nun $m - 1 = 5$, so ist 32 d. i. $q(m-1) + r = 6 . 5 + 2$, also $q = 6$ und $r = 2$. Also ist $1 + r = 3$; und die erste Complexion 13666666.

4) Die möglichst kleinste Complexion wäre 11111111 für $n = k = 8$.

Die möglichst größte Complexion wäre 66666666 für $n = mk = 48$.

Dieß wären also die Grenzen der möglichen Complexionen von beyden Seiten.

Aufgabe II. Aus einer gegebenen Combinationscomplexion die nächstfolgende höhere zu schreiben. Die Reihe sey wieder 1,2,3,...m, wie sie Aufgabe I. bestimmt.

Auflösung. 1) Man suche von der letzten oder niedrigsten Stelle der gegebenen Complexion vorwärtsgehend die erste Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte. Diese kleinere Ziffer erhöhe man um 1 in ihrer Stelle, lasse die Ziffern neben der Erhöhten linker Hand, wenn es noch dergleichen giebt, unverändert, in den übrigen Stellen aber rechter Hand der Erhöhten setze man (wie sie die Erhöhung gegeben hat) lauter gleiche Ziffern.

2) Betragen die Ziffern der so (nach 1) bestimmten Complexion in ihrer Summe so viel als die Summe n der gegebenen Complexion, so hat man die verlangte nächstfolgende Complexion gefunden.

$\dot{1}\dot{2}224$ giebt 12233; und $\dot{2}3\dot{3}4$ giebt 3333.

3) Ge-

3) Geben die Ziffern (nach 1) in ihrer Summe weniger als n so vertheile man den Rest auf die letzte und folgenden Ziffern vorwärts, so weit er zureicht, dergestalt, daß die niedrigern Stellen zuerst mit den höhern Ziffern versehen werden; welches geschieht, wenn man von dem Reste zu den Ziffern der niedrigsten und successive höhern Stellen nach und nach so viel addirt, als nur immer geschehen kann, um die höchsten Ziffern der Reihe zu erreichen, ohne die Summe n zu übersteigen.

So gäbe die Complexion 155556 nach den verschiedenen Werthen für m folgende nächst höhere Complexionen.

222222	222222	222222	ꝛc.
3444	555	366	ꝛc.
225666	222777	222588	
für $m = 6$	für $m = 7$	für $m = 8$	ꝛc.

4) Hat die gegebene Complexion mehrere größte Ziffern der Reihe von der letzten Stelle an hintereinander, so kann man als eine Abkürzung (denn sonst gelten auch hier die gegebenen Vorschriften 1, 2, 3, wie in anderen Fällen) hier die erste Ziffer die um mehr als 1 kleiner ist, als die höchste der größten Ziffern, suchen, und die durch die Erhöhung der gefundenen kleinern bestimmten gleichen Ziffern nur bis in diese höchste Stelle schreiben, und weiter mit diesen nach 1 bis 3 verfahren; wobey also die übrigen nach der höchsten größten weiter folgenden Ziffern, bis in die letzte Stelle, unverändert bleiben, eben

so

so wie die über der Erhöheten vorwärts liegenden Ziffern.

So giebt die Complexion 225666

(nach No. 4)	(nach No. 3)
233366	233333
13	1333
234666	234666.

für einerley Werth von m=6, wie sich von selbst versteht, dieselbe nächstfolgende Complexion.

5) Hat die gegebene Complexion keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist als die letzte, so ist sie die letzte und höchste Complexion ihrer Classe: wie 233; 3344; 44455; u. s. w:

Aus I. und II. fließt sogleich die

III. Aufgabe. Alle Complexionen zur Summe n für die Combinationsclasse k gutgeordnet, aus den Elementen 1.2.3....m, wenn m < n + 1 − k, zu schreiben.

Auflösung. 1) Man schreibe (nach der Aufgabe I.) die erste Complexion der verlangten Classe.

2) Die folgenden höheren Complexionen folgere man durch Anwendung von (1 bis 4) der Auflösung der Aufgabe II. bis man (nach 5.) auf die höchste und letzte Complexion derselben Classe verfällt.

Anmerkung. Man kann wenn n keine große Zahl ist, was man (nach 3 und 4 der Auflösung in Aufgabe II.) zu addiren hat, leicht übersehen, ohne erst die Zahlen unter die zugehörigen Ziffern untersetzen, welches das Verfahren abkürzt und erleichtert.

Bey-

Beyspiel. Man soll die Complexionen für

$$\overset{13}{E}$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)$$

suchen; wo also $n = 13$; $k = 5$, und $m = 4$. Diese sind nach obigen Vorschriften, folgende sechs:

$$1\dot{1}3\dot{4}4$$

$$12\dot{2}\dot{4}4$$

$$1\dot{2}33\dot{4}$$

$$\dot{1}333\dot{3}$$

$$22\dot{2}3\dot{4}$$

$$22333$$

Die Punktirung für die erste und zweyte Complexion, die mehr als eine größte Ziffer, nemlich 4, am Ende haben, ist nach Auflösung für Aufgabe II. 4. die Punktirung der übrigen vier Complexionen aber, nach Auflösung für Aufgabe II. 3. geschehen.

Die Complexionen im vorhergehenden Beyspiel sind auf dem kürzesten Wege und unabhängig von den oben (50) gesuchten gefunden worden, welches ungleich kürzer und bequemer ist, als wenn man die Complexionen wie sie die unbestimmte Reihe 1.2.3.4.... giebt (50 Aufg. II.) entwickelt, und daraus die zur bestimmten Reihe 1.2.3.4 gehörigen auslesen wollte. Die Menge beyder ist um so mehr von einander verschieden, je größer n und je kleiner m ist. Für $n = 15$, $k = 5$, und $m = 4$, müßte man schon 30 Complexionen darstellen, um daraus die 5 brauchbaren: 12444; 13344; 22344; 23334; 33333; auszulesen, und so ungleich mehrere für größere Unterschiede von n und m.

Hier

Hier zeigt sich zugleich der Unterschied beyder Ausdrücke.

$$\overset{13}{E}(1, 2, 3, 4\ldots) \quad \text{und} \quad \overset{13}{E}(1, 2, 3, 4)$$

sehr deutlich, und wie sie von

$$c\,\overset{13}{E}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots\\ a & b & c & d\ldots\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c\,\overset{13}{E}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & b & c & d\end{pmatrix}$$

verschieden sind.

Daß die Aufgabe über die Complexionen zu bestimmten Summen aus der Reihe der Zahlen in natürlicher Ordnung von 1 an, in (50) und (51) vollständig gelößt sey, erhellet folgendergestalt. Die höchste Zahl die in den Complexionen der Classe k vorkommen kann, ist $n + 1 - k$. Reihen also die auch größern Zahlen enthalten, wie die unbestimmt fortgehende 1,2,3... oder jede andere deren Endzahl $m > n + 1 - k$ wäre, sind mit der, deren Endzahl $n + 1 - k$ ist, in so fern gleichgültig, weil von den größern Zahlen jener Reihen in den Complexionen der Classe k keine vorkommt. Dahin gehn die Vorschriften in (50). Ist aber die bestimmte Reihe 1, 2, 3...m, und $m < n + 1 - k$ gegeben; so kommen immer weniger und weniger Complexionen in die Classe k, je kleiner m ist. Da hingehen die Vorschriften in (51).

Auch erhellet zugleich, warum Herr Hindenburg für die Auflösung der Aufgabe, wo er alle mögliche Complexionen aller Classen zu finden anweiset, die Reihe 1,2,3,4...n annimmt. Denn in der ersten Classe kommt n selbst, in der zweyten $n - 1$, in der dritten $n - 2$ u. s. w. als höchstes Element vor, und die nte oder letzte Classe besteht aus lauter Einsen.

Eben

Eben so hat Herr Hindenburg auch die Variationscomplexionen in (42) auf eine bestimmte Reihe 1,2,3,4...m bezogen. Von dergleichen beschränkten Variationscomplexionen und den Regeln ihrer Darstellung, so wie überhaupt die Anwendung auf die allgemeine Progression a, a + d, a + 2d, a + 3d &c. wo das Verfahren dafür dieselben, nur allgemeiner ausgedrückten Vorschriften befolgt, werde ich an einem andern Orte handeln.

Wenn auch schon die Regeln, der hier in (42,50,u.51) vorgetragenen Aufgaben, in der Anwendung nicht schwer zu befolgen sind, so muß man sie doch, um sie sicher und ohne Gefahr zu fehlen, anwenden zu können, nach ihrem ganzen Umfange und mit der nöthigen Präcision dem Leser vorlegen.

Man wird diese Vorschriften überall mit Nutzen befolgen, wo man die Complexionen einzelner Classen braucht. Da aber, wo man alle Classen haben muß, sind jene andern Hindenbürgischen Regeln, nach denen man Complexionen folgender Classen aus Complexionen nächstvorhergehender bestimmt, doch noch leichter. Denn diese setzen bloß die successive Zerfällung einer gegebenen Zahl in zwey Theile voraus; wobey also alle vorgängige Vergleichung der Ziffern oder Zahlen, einzelner Complexionen, alles Aufmerken auf ein Complement aus mehrern Ziffern oder einen Rest, ganz wegfällt; wie bey den hier vorgetragenen Auflösungen der Aufgaben (in 42, 50, 51), zuweilen nöthig ist.

Dieses, und ähnliche combinatorische Verfahren, die nach den Hindenbürgischen Vorschriften, die gemeimeinen arithmetischen Operationen an Leichtigkeit noch übertreffen, sind in der combinatorischen Analytik Hülfsmittel geworden, die größten Schwierigkeiten zu übersteigen, und den Erfolg der verwickelsten Substitutionen zu übersehen, die auf keinem andern Wege zu bewältigen waren, und welche auch der entschlossenste Rechner aufzugeben sich oft genöthiget sahe.

52.

Beyde Auflösungen (nemlich in Infin. Dign. §. XII. p. 73 — 91. und die hier in 51 mitgetheilten) sind leicht und ganz allgemein, aber nicht rein-combinatorisch, wie die in (47, 48, 49). Die Auflösung (48) hat Hindenburg zuerst in dem (S. 280) genannten Programm, und nachher im Arch. d. Math. (H. IV. S. 392, 93.) vorgelegt; die (in 49) ist die Boscovichische (Ebendas. S. 405.) Auch hier werden, wie bey den ähnlichen Verfahren für die Aufgabe (37) verschiedentlich, Classen aus Classen, oder Complexionen aus Complexionen, oder Ordnungen aus Ordnungen, oder endlich Summenwerthe aus Summenwerthen, durchgängig nächstfolgende aus unmittelbar vorhergehenden, abgeleitet und rein-combinatorisch entwickelt.

53.

Gewöhnlich hat man bey Entwickelung und Darstellung der Combinationsclassen nur auf eine Reihe a, b, c, d .... = p zu sehen, und diese wird im Zeiger angegeben, so, daß es keiner weitern Nachweisung bey den Classen selbst bedarf.

Für

Für die Fälle hingegen, wo die Combinations-classen in der Formel, die das Resultat einer Aufgabe enthält, sich auf mehrere Reihen p,q,r,s... (24) beziehen, müssen diese Zeichen, als Reihenexponenten, über die Classenzeichen gesetzt werden:

${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{p}{B}$....${}^{m}\overset{q}{A}$, ${}^{m}\overset{q}{B}$.... u. s. w. bey den übrigen (Nov. Syst. Perm. p. XLV. 21). Zuweilen kommen auch ${}^{n}\overset{p}{A}$, ${}^{n}\overset{qp}{B}$, ${}^{n}\overset{rqp}{C}$... vor.

Classen außer der Ordnung, für Variationen und Combinationen zu bestimmten Summen, mit Wiederholungen.

54.

Classen zu bestimmten Summen lassen sich eben so leicht außer der Ordnung geben, wie bey Variationen und Combinationen an sich, und ihre figürliche Anordnung zeigt gleichfalls eine combinatorische Involution, die hier durch Winkel bemerklich gemacht werden soll.

55.

Aufgabe.

Die Elemente seyn, wie vorher,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \ldots \\ a & b & c & d & e & f & g & h \ldots \end{pmatrix}$$

Man soll die vierte Variationsclasse zur Summe 7 aus a,b,c,d und die fünfte Combinationsclasse zur Summe 12 aus a,b,c,d,e,f,g,h darstellen.

	a	a	a	d	1	1	1	4
	a	a	b	c	1	1	2	3
	a	a	c	b	1	1	3	2
	a	a	d	a	1	1	4	1
	a	b	a	c	1	2	1	3
	a	b	b	b	1	2	2	2
	a	b	c	a	1	2	3	1
	a	c	a	b	1	3	1	2
	a	c	b	a	1	3	2	1
	a	d	a	a	1	4	1	1
^{7}D	b	a	a	c	2	1	1	3
	b	a	b	b	2	1	2	2
	b	a	c	a	2	1	3	1
	b	b	a	b	2	2	1	2
	b	b	b	a	2	2	2	1
	b	c	a	a	2	3	1	1
	c	a	a	b	3	1	1	2
	c	a	b	a	3	1	2	1
	c	b	a	a	3	2	1	1
	d	a	a	a	4	1	1	1

	a	a	a	a	h	1	1	1	1	8
	a	a	a	b	g	1	1	1	2	7
	a	a	a	c	f	1	1	1	3	6
	a	a	a	d	e	1	1	1	4	5
	a	a	b	b	f	1	1	2	2	6
	a	a	b	c	e	1	1	2	3	5
	a	a	b	d	d	1	1	2	4	4
^{12}E	a	a	c	c	d	1	1	3	3	4
	a	b	b	b	e	1	2	2	2	5
	a	b	b	c	d	1	2	2	3	4
	a	b	c	c	c	1	2	3	3	3
	b	b	b	b	d	2	2	2	2	4
	b	b	b	c	c	2	2	2	3	3

56.

Auflösung für die Combinationsclasse ^{7}D

I. Man setze d, das höchste der gegebenen Elemente als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ad, die Ordnung a der Dinge a, d. Aus der Ordnung a findet man (38. II, 2) die Ordnung b, und daraus die Ordnung c, und daraus die Ordnung d der Binionen ab, bc, cb, da.

III.

III. Den einzelnen Binionen in II. setze man a vor. Das giebt die Ordnung a der Ternionen, und daraus findet man weiter (nach 38, II. 2) Die Ordnung b und daraus die Ordnung c und daraus die Ordnung d der zugehörigen Ternionen.

IV. Eben so geht man zu den Quaternionen für ^{7}D fort, und so auch zu den Verbindungen von mehr als vier Dingen, für spätere Classen; alles wie in (38), nur mit dem einzigen Unterschiede, daß man bey der Vorsetzung von a (bey Bestimmung der Ordnung a) das letzte Element der Complexion hier nicht (wie dort) mit den nächstvorhergehenden Zeigerelement vertauscht; wohl aber in den folgenden Ordnungen b.c...

57.

Auflösung für die Combinationsclasse ^{12}E.

I. Man setze h, das höchste der gegebenen Elemente, als ein einzelnes Ding, im Winkel.

II. Daneben setze man das erste Ding a. Das giebt ah, die Ordnung a der Dinge a,h. Aus der Ordnung a findet man (47, II. 2)
die Ordnung b, und daraus
— — — c,
— — — d der Binionen ah,bg,cf,de.

III. und IV. Das Verfahren für den Fortgang ist hier eben so, wie in (III. IV.); nur daß hier (47) statt des dortigen (38) zu citiren. Auch wird bey der Versetzung von a das letzte Element nicht mit dem nächstvorhergehenden vertauscht, wohl aber

in

in den folgenden Ordnungen b, c... Die Darstellung für ^7D und ^{12}E (in 55) involutorisch zu machen, beobachtet man, beym Schreiben der Ordnungen a, b, c... die Vorschrift (22).

58.

Von der großen Mannigfaltigkeit und leichten Umwandlung combinatorischer Formen, findet man viele Beyspiele im Arch. der Math. wovon ich hier nur (H. I. S. 31 — 43 und H. II. S. 183 — 192) anführen will. Hier sind noch ein Paar andere für ^{10}D

(α)		(β)		(γ)		(δ)	
111	7	a^3	7	000	6	a^3	6
11	26	a^2	26	00	15	a^2	15
11	35		35	00	24		24
11	44		44	00	33		33
1	225	a^1	225	0	114	a^1	114
1	234		234	0	123		123
1	333		333	0	222		222
	2224	a^0	2224		1113	a^0	1113
	2233		2233		1122		1122.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

59.

Bey den hier gebrauchten Zahlencomplexionen fallen die in Winkeln ein zeschloßenen Summen sogleich deutlich ins Auge. Die a^3 a^3 a^1 deuten hier bloße Nebeneinanderstellungen von a an, nach der beygefügten Zahl (diese Zahlen sind nemlich hier keine

keine Potenz- sondern Wiederholungsexponenten) und a^0 zeigt, daß kein a weiter in der Verbindung vorkömmt. Man erhält γ aus α wenn man von jeder Zahl in α Eins abzieht, wodurch also der Zeiger $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots \\ a, & b, & c \ldots \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2 \ldots \\ a, & b, & c \ldots \end{pmatrix}$ abgeändert wird. Hier hat man nun die Zerlegung einer gegebenen Classe in Summen von Classen (das Umgekehrte von 31 β mit dem Unterschiede daß

$$^{10}D = a^3\, {}^7A + a^2\, {}^8B + a^1\, {}^9C + a^0\, {}^{10}D$$
$$\begin{bmatrix} 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ b, & c, & d, & e, & f, & g \end{bmatrix}$$

und $$^{10}D = a^3\, {}^6A + a^2\, {}^6B + a^1\, {}^6C + {}^0\, {}^6D$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

jenes bey α, β dieses bei γ, δ. Die steigenden Summen 7, 8, 9, 10 der Classen nach dem ersten Zeiger, werden also auf eine und dieselbe (kleinere) Summe 6, durch den zweiten Zeiger reducirt, und so alles in das gewöhnliche Gleis eingeleitet.

Das wird zugleich das (Infin. Dignit. p. 141, 142, in der Note und (Nov. Syst. Perm. p, XXII, 18) von Variationen Beigebrachte weiter aufklären. Von Umänderung der Formen durch Zusetzen oder Abziehen gewißer Zahlen (wie hier der Eins) Arch. der Math. Heft I. S. 41, 42. Von der Zerfällung einzelner höherer Combinationsklassen in Summen aus niedrigern, mit Veränderung des Zeigers, Nov. Syst. Perm. p. LV. LVI. Das dortige n ist hier 6.

60.

Bey Classen von vielen Complexionen kann man um die Colonne nicht zu lang zu machen, die einzelnen Ordnungen derselben neben einander setzen, auch zur Verkürzung, wenn man will, sich der Wiederholungsexponenten bei b, c, d... (eben so, wie in 85, 59 bei a) bedienen, die sich bei der Ableitung der Ordnungen aus einander (47, II. 2) von selbst ergeben.

Die erste Complexionn ist ${}^{15}E$ ist IIII II (nach 58, α) und 000010 (nach 58, γ). Das giebt

$$ {}^{15}E = a^4\,{}^{10}A + a^3\,{}^{10}B + a^2\,{}^{10}C + a^1\,{}^{10}D + a^0\,{}^{10}E $$

$$ \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots 9, & 10, & 11 \\ a, & b, & c \ldots i, & k, & l \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \ldots 8, & 9, & 10 \\ b, & c, & d \ldots i, & k, & l \end{bmatrix} $$

und daraus folgt (der erste Zeiger gilt für ${}^{15}E$)

$$ {}^{15}E = \begin{array}{r|l} a^4 & l \\ & \overline{} \\ a^3 & bk \\ & ci \\ & dh \\ & eg \\ & f^2 \\ & \overline{} \end{array} + a^2 \left| \begin{array}{l} b^2i \\ bch \\ bdg \\ bef \\ c^2g \\ cdf \\ ce^2 \\ d^2e \\ \hline \end{array} \right. + a^1 \left| \begin{array}{l} b^3h \\ b^2cg \\ b^2df \\ b^2e^2 \\ bc^2f \\ bcde \\ bd^3 \\ c^3e \\ c^2d^2 \\ \hline \end{array} \right. + a^0 \left| \begin{array}{l} b^4g \\ b^3cf \\ b^3de \\ b^2c^2e \\ b^2cd^2 \\ bc^3d \\ c^5 \\ \hline \end{array} \right. $$

Die Zahlencomplexionen von ${}^{43}E$ nach dem ersten Zeiger, findet man (Infi. Dig. p. 80, 81).

Weil hier die Wiederholungen von a (als Ergänzung der Dimensionen in den einzelnen Ordnungen) im Voraus vorgeschrieben werden, so kann a, und mithin anch sein Zahlenwerth 0, im zweiten Zeiger ganz übergegangen werden. Ein Beyspiel ähnlicher Wiederholungen eines Buchstabens (b wie hier a) findet man (Infin. Dign. p. 41.) bei Combinationen an sich (simpiiciter). Man vergleiche die erste Tafel (Ebend. p. 157).

61.

Man kann auch nach dem (Infin. Dign. p. 26.) gegebenen Beyspiele, außer den Wiederholungen von a noch die Verbindungen von b, c, d, e... von den übrigen absondern. Die Ableitung der Ordnungen auseinander (47, II.) führt auch hier unmittelbar darauf; und so kommt:

a^4	l	$+ a^2$	b	bi	$+ a^1$	bb	bh	$+ a^0$	bbb	bg
a^3	bk			ch			cg			cf
	ci			dg			df			de
	dh			ef			ee		bbc	ce
	eg		c	cg		bc	cf			dd
	ff			df			de		bcc	cd
				ee		bd	dd		ccc	cc
			d	de		cc	ce			
							dd			

62.

Man kann also bey solchen Darstellungen der einzelnen Classen (wie hier in 60, 61) durch die Absonderung von a, mehrere a (ihre Wiederholungen) auf einmahl, wie vorher (57) einzelne a vorschreiben. Die Darstellung für jede zu entwickelnde Classe lehrt jedesmahl, wie weit man mit den Wiederholungen von a fortgehen muß, die für andere Classen und andere Summen, nicht immer bis auf a^0 herunterfallen. Die zunächst auf die Wiederholungen von a folgenden Verbindungen von b, c, d.... von bb, bc... von bbb, bbc... u. s. w. befolgen das combinatorische Gesetz in 31 (S. 269, α) nur daß man hier b,c,d... für die dortigen a,b,c... schreiben, oder den Zeiger $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \ldots \\ b & c & d \ldots\end{pmatrix}$ für den dortigen $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots\end{pmatrix}$ nehmen muß. Von diesen Verbindungen, hängen die unmittelbar auf sie folgenden Binionen im Winkel ab; und so gewährt hier die Combinationslehre einen Ueberblick des Ganzen, aus seinen einzelnen Theilen, den man auf keinem andern Wege in der Kürze und Vollkommenheit so deutlich und anschaulich, haben kann.

63.

Ein Beyspiel einer gemischten (nicht ganz reincombinatorischen) Darstellung hier zu geben, mag die Bestimmung der Complexionen dienen, die Herr Prof. Klügel in der Schrift der polyn. Lehrsatz S. 61 aufgestellt hat.

Aufgabe. Die Complexionen der lexikographischen Ordnungen 2, 3, 4, 5 u. s. w. für ${}^{2n}\mathfrak{J}^{r}$ und ${}^{2n+1}\mathfrak{J}$, von der Ordnung, 1 unabhängig, zu entwickeln.

Complexionen für

$^{2n}\mathfrak{J}$

(2, 3, 4, 5, 6 ...)

2 2 2 2 2 2
u. 2 2 2 2 4
2 2 2 3 3
2 2 2 6
2 2 3 5
2 2 4 4
2 2 8
s. 2 3 3 4
2 3 7
2 4
2 5 5
2 10
3 3 3 3
3 3 6
3 4 5
3 9
4 8
5 7
w. 6 6
12
u. s. w.

Complexionen für

$^{2n+1}\mathfrak{J}$

(2, 3, 4, 5, 6 ...)

2 2 2 2 2 3
u. 2 2 2 2 5
2 2 2 3 4
2 2 2 7
2 2 3 3 3
2 2 3 6
2 2 4 5
2 2 9
2 3 3 5
2 3 4 4
2 3 8
s. 2 4 7
2 5 6
2 11
3 3 3 4
3 3 7
3 4 6
3 5 5
3 10
4 4 5
w. 4 9
5 8
6 7
13
u. s. w.

6)

64.

Auflösung. Die Complexionen der niedrigsten Summen sind, für gerade zahlen $\left|\begin{array}{l|l}2&2\\ \underline{4}&-\end{array}\right.$, für ungerade Zahlen $\left|\begin{array}{l|l}2&3\\ 5&-\end{array}\right.$. Daraus lassen sich die Complexionen höherer Summen für beyde, folgender gestallt herleiten:

I. Man setze alle Complexionen der vorhergehenden niedrigern Summen, 2 vor. Das giebt die Ordnung der folgenden höheren Summen.

II. In den so gefundenen Complexionen, vertausche man (mit Uebergehung aller derer, wo die beyden ersten oder letzten Zahlen, eins oder beydes, nicht verschieden sind) die erste Zahl mit der nächstfolgenden, die letzte mit der nächstvorhergehenden des Zeigers, das giebt die Ordnung 3 derselben Summe.

III. Dasselbe Verfahren auf die (nach II.) gefundenen Complexionen angewendet, giebt die Complexionen der Ordnung 4 aus denen der Ordnung 3 u. s. w. alle folgende Ordnungen aus den nächstvorhergehenden.

IV. Sobald man, bey Anwendung von II. und III. auf eine Complexion verfällt, die nur aus zwey, gleichen oder um eins verschiedenen, Zahlen besteht, so nimmt man beyder Summe, und setzt sie als letzte Complexion dieser Summe darunter.

Auf ähnliche Art kann man von der Ordnung 3 oder 4... oder m anfangen, und auf die Ordnungen $m+1$, $m+2$ u. s. w. fortgehen.

65.

65.

Wegen des Umstandes (64 IV.) gehört das Verfahren zu den gemischten, und hat für Zahlencomplexionen keinen Anstoß. Um es auf Buchstabencomplexionen anzuwenden, darf man nur, auf diesen einzigen Fall, den Index vor Augen haben; alles Uebrige geht sonst rein=combinatorisch fort, wo der Buchstaben gleiche Bequemlichkeit mit dem der Zahlen hat (S. 251.) Man hätte die Auflösung der Aufgabe (63) auch so geben können, daß man jede nächstfolgenden Complexion aus der unmittelbar vorhergehenden abgeleitet hätte; aber hierbey würden sich zu jenen arithmetischen Summen (64 IV.) auch noch arithmetische Ergänzungen eingefunden haben, und so das combinatorische Verfahren, bey aller Leichtigkeit an sich, doch minder rein, als das in (64) geworden seyn. Die Darstellungen in (63) enthalten alle (von Klügel im polyn. Lehrsatz S. 61) vorkommende Complexionen der Summen 8, 9, 10 und noch mehrere, in einer lexikographischen Involution.

66.

Ein Beyspiel, wie schnell die combinatorischen Formen (was für die Analysis so wichtig ist) sich in einander umwandeln lassen, mögen die hier folgende drey Anwendungen zur Summe 7 abgeben.

Nach Boscowich.	Nach Hindenburg I.	Nach Hindenburg II.
1111111	7	1 1 1 1 1 1 1
211111	16	1 1 1 1 1 2
22111	25	1 1 1 1 3
2221	34	1 1 1 2 2
31111	115	1 1 1 4
3211	124	1 1 2 3
322	133	1 1 5
331	223	1 2 2 2
4111	1114	1 2 4
421	1123	1 3 3
43	1222	1 6
511	11113	2 2 3
52	11122	2 5
61	1 [illegible] 2	3 4
7	111111	7

Diese 3 Darstellungen sind dieselben in Zahlen, die S. 285. in Buchstaben aufgeführt sind, nur daß die dortige erste, 2te und dritte, hier die 2te, 3te und 1ste ist. Die Darstellungen der Zerfällungen nach Boscowich ist zu dem Gebrauch bey den Combinationen überhaupt nicht so bequem, als die beyden von Hindenburg gefundenen, und die Abtheilung nach jener kann sehr leicht aus diesen hergeleitet werden. Die erste Hindenbürgische Zerfällungsart dient vorzüglich, wenn mit der Zerfällung zugleich die Abtheilung nach der Anzahl der Theile (nach Classen) verlangt wird. Die zweyte Hindenbürgische Zerlegungsart, giebt mit den Zerfällungen einer Zahl

zu-

zugleich die durch Winkelhaken von einander gesonderten Zerfällungen aller kleinern, und hat in Ansehung der etwas größern Leichtigkeit in der Darstellung, wegen des einfachern Gesetzes der Zusammensetzung, Vorzug vor der ersten Art. Dagegen ist, in Beziehung auf die Analysis überhaupt die Hindenbürgische erste Art von Zerlegung (nach Classen von gleichvielen Theilen) von weit ausgedehnterm Umfange in der Anwendung als die zweyte; weil es unzählig viele Fälle giebt, wo man nur die Complexionen einzelner Classen (der einzeln Abtheilungen zwischen den horizontalen Linien) nicht aber aller Classen zusammen nöthig hat. Auch enthält die erste Art zweyerley Involutionen 1) der niedrigern Summen durch alle Classen 2) der niedrigern Classen zu verschiedenen Summen in den einzelnen Classen; und man kann jede der beyden übrigen, hier angeführten Anordnungen, augenblicklich aus ihr darstellen. Das Letzte gilt auch von den beyden andern Anordnungen, und ist eine natürliche Folge davon, daß man bey den Combinationsverfahren immer alle Elemente in der Zusammensetzung vor sich hat. Von diesen ist die dritte Darstellung die leichteste in der Entwickelung. Aus ihr formt man die zweyte, wenn man von oben heruntergehend erst die einzifrige (hier 7) dann die zweyzifrigen (1,6 und 2, 5 und 3, 4) dann die drey- dann die vier- u. s. w. zifrigen Complexionen zusammenliest, die gleichvielzifrigen jedesmal in eine Classe zusammensetzt, und die letzte mit 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, (der einzigen siebenzifrigen Complexionen) beschließt. Aus dieser zweyten Anordnung schaft man sogleich die

erste

erste, wenn man in der zweiten, von unten her=auf steigend und rückwärts lesend, alle diejenigen Complexionen in eine Ordnung zusammensetzt, (die in dieser zweyten) mit 1, oder 2, oder 3 u. s. w., mit 7, sich enden, und folglich mit diesen Elementen in der ersten anfangen. Auf ähnliche Art wird (Arch. der Math. H. II. S. 188) eine andere lexikographische Darstellung in eine Classenanordnung umgestaltet, oder, wie man sagen könnte umgelesen.

67.

Ich habe von den combinatorischen Operationen hier nur das Unentbehrlichste vorgetragen, das, was theils des Zusammenhangs, theils des Folgenden wegen, da seyn mußte. Die Operationen, wo Wiederholungen der Elemente verstattet sind, sind für die Analysis bey weitem die wichtigsten. Aus den Vorschriften für diese folgen zugleich die, wo keine Wiederholungen vorkommen dürfen; daher ich mich dabey gegenwärtig so wenig aufhalte, als bei der Verschiedenheit der Zeiger, in Absicht auf die Folge oder Menge ihrer Elemente. Von der lexikographischen oder alphabetischen Darstellung, habe ich nur die zu bestimmten Summen hier (37, 46) aufgeführt. Ueberall sind hierbey Involutionen vorzüglich bequem, die hier nicht durchgängig durch eingezeichnete Winkel bemerklich gemacht worden sind: dahin z. B. die (31, α) aufgeführte gehört, eine der wichtigsten, die (Infin. Dign. p. 17, 18) etwas weiter ausgeführt ist, und sehr mannigfaltige Abschnitte durch einzuzeichnende de Linien und Winkel verstattet, und so verschiedene Untersuchungen veranlaßt (Ebendas. S. 19 u. f.) woben zu merken, daß die dort vorkommenden Zeichen, keine combinatorischen, sondern bloß willkührlich gewählte, sind.

68.

Beyden Involutionen wird gewöhnlich ein Theil der Complexionen (die Ordnung 1 oder a, S. 238, 9 durch bloßes vorschreiben des ersten Elements erhalten. Man sieht hier ein Schreiben der Elemente in die Tiefe (Arch. der Math. H. I. S. 15.) oder in vertikalen Colonnen, wovon die Zahlenreihe gleichfalls ein sehr einfaches und belehrendes Beyspiel aufstellt. Ich will hier nur den Anfang des dyadischen Zahlensystems aus den beyden Grundzahlen 0, 1 beyfügen, wo die überschriebenen Potenzen der 2 anzeigen, wie vielmal jedes der beyden Elemente in jeder Vertikalreihe abwechselnd untereinander zu schreiben sey. Die hier eingezeichneten Parallelogramme (statt den sonstigen Winkel) zeigen jedesmal den Perioden der zusammengehörigen Ziffern in den Vertikalreihen der ohne Aufhören in

rc	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1
u.	0	0	0	1	0
	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	0
	0	0	1	0	1
	0	0	1	1	0
	0	0	1	1	1
	0	1	0	0	0
s.	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0
	0	1	0	1	1
	0	1	1	0	0
	0	1	1	0	1
	0	1	1	1	0
	0	1	1	1	1
	1	:	:	:	:
	:	:	:	:	:
w.	1	1	1	1	1

u. s. w.

in die Tiefe hinab wiederholt werden muß. Bey Systemen von 3, 4, 5 oder mehreren Grundzeichen, würden die Wiederholungen der einzelnen Grundzeichen in den vertikalen Reihen eben so durch Potenzen der Zahlen 3,4,5 u. s. w. nachgewiesen werden. Bey dem dekadischen System können hier die Potenzen 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 n. s. w. vor.

69.

Die unmittelbarste Anwendung zeigt die Variationsaufgabe (20), wo man die Vorschrift für die dortige Darstellung (β) nach (68) für ein triadisches System aus a, b, c hätte geben, und so nicht bloß wie dort die a sondern auch die übrigen Elemente b, c nach senkrechter Fortschreitung in die Tiefe hätte schreiben können. Eine zweyte aber nicht so unmittelbare, Anwendung zeigt (31, β), denn hier könnte man die Wiederholungen der a,b,c in den einzelnen vertikalen Colonnen nicht durch Potenzen der 3, sondern müßte selbige durch Zahlen aus der Tafel der figürlichen nachweisen, wie Herr Prof. Rothe in einem andern Falle, durch Zahlen einer andern Tafel gethan hat (Arch. der Math. H. II. S. 171—174) Eine interressante Anwendung solcher Fortschreitung gegebener Elemente in die Tiefe, geben die cyklischen Perioden. Hindenburgs Abhandlung davon im Magazine für reine und angewandte Mathematik (1786 St. III. 281 — 324).

All=

Allgemeine Glieder für Classen und Ordnungen, erste und einfachste Relationen in combinatorischen Zeichen.

70.

Ich habe den Vertrag der Vorschriften über die beygebrachten combinatorischen Operationen durch dergleichen Glieder und Formeln nicht unterbrechen wollen. Sie sind aber wichtig und müssen daher nachgeholet werden.

71.

Allgemeine nte Classe der Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen (31).

$$a^n + a^{n-1}\,{}'A + a^{n-2}\,{}'B + a^{n-3}\,{}'C \ldots + a^0\,{}'N = {}'N$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ a & b & c & d & \ldots \end{pmatrix}$$

Da hier die Wiederholungen von a nach der Ordnung vorgeschrieben werden, so beziehen sich die Combinationsclassen 'A 'B 'C... hier eben so auf b, c, d wie in (31) auf a, b, c... und können auch die Werthe derselben unmittelbar (aus 31) abgeleitet werden, wenn man für die dortigen a, b, c... hier b, c, d... setzen. Obige Formel giebt der Dinge a, b, c, d . . .

für $n = 1$, Unionen $a^1 + a^0\,{}'A = {}'A$

= $n = 2$, Binionen $a^2 + a^1\,{}'A + a^0\,{}'B = {}'B$

= $n = 3$, Ternionen $a^3 + a^2\,{}'A + a^1\,{}'B + a^0\,{}'C = {}'C$

&c. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ b & c & d & e & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ a & b & c & \ldots \end{pmatrix}$

Man

Man darf also nur der Dinge b, c, d... Combinationsclassen nach der Ordnung suchen (31, α) und ihnen die zugehörigen Wiederholungen von a vorschreiben.

Diese Formel für die allgemeine nte Classe der Combinationen überhaupt, hat Hindenburg bereits (Infin. Dign. p. 159 und Nov. Syst. Perm. p. XY,II.) gegeben. Aber die hier gebrauchten combinatorischen Zeichen ′A, ′B, ′C... welche Hindenburg jetzt eingeführt hat sind deutlicher und verständlicher als die dortigen willkührlichen Zeichen $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, $\overset{3}{B}$...

Allgemeine Darstellung der Combinationen zur unbestimmten Summe n, mit Wiederholungen.

72.

Für den Zeiger $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots\end{matrix}\right)$ giebt die Auflösung (48) die Buchstabeninvolution für jede verlangte Summe.

$\mathfrak{J}^{r\;n}$ und daraus für $^{7}\mathfrak{J}^{r}$

&c.	b	b	b	b	b	b	b	b^6	b
	b	b	b	b	b	c		b^5	c
	b	b	b	b	d			b^4	d
	b	b	b	c	c			b^3	cc
	b	b	b	e					e
	b	b	c	d				b^2	cd
	b	b	f						f
&c.	b	c	c	c				b^1	ccc
	b	c	e						ce
	b	d	d						dd
	b	g							g
	c	c	d					b^0	ccd
	c	f							cf
&c.	d	e							de
	h								h
	&c.								

Eben das giebt die zweyte Darstellung (in 46) wenn man darin b, c, d... statt a, b, c... setzt.

II. Die erste Darstellung in I. zeigt nur den Anfang für das unbestimmte $^{n}\mathfrak{J}$. Dieser bleibt wegen der Involutorischen Fortschreitung bey jedem höhern Werthe n derselbe; auch fällt der Fortgang nach demselben Gesetze (48) klar in die Augen, und hat nicht die geringste Schwierigkeit.

III. Die Complexionen zwischen jedem Paare horizontaler Linien haben immer eine gleiche Anzahl von b vorgeschrieben, die niederwärts successive um eins abnimmt. Drükt man diese Mengen durch Wiederholungsexponenten (59) aus, so recht-

fer-

fertigt das die Darstellung von J*) in I wo die Wiederholungen von b^{c} bis auf b^{0} herunter fallen. Auch hier deutet b^{0} an, daß b in den übrigen Verbindungen nicht weiter vorkomme.

IV. Die Complexionen neben den Wiederholungen von b, die hier in Winkeln stehen, haben (die erste ausgenommen) weiter kein b, und beziehen sich auf den Zeiger $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ c & d & e & f \ldots \end{smallmatrix}\right)$, nach welchem die Complexionen in einem und demselben Winkel auch einerley Summe geben, die nach der Reihe der natürlichen Zahlen fortgehend, nach ${}^{2}\mathfrak{J}$, ${}^{3}\mathfrak{J}$, ${}^{4}\mathfrak{J}$ u.s.w. steigt.

V. das führt auf der Gleichung:

$$ {}^{n}J = b^{n-1}\, b + b^{n-2}\, {}^{2}J + b^{n-3}\, {}^{3}J + b^{n-4}\, {}^{4}J \ldots + b^{0}\, {}^{n}J $$
$$ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix} $$

Der Zeiger linker Hand gehört zu ${}^{n}J$ linker Hand des Gleichheitszeichens, der Zeiger rechter Hand zu den obigen Involutionen. Die Entwickelung ihrer Glieder giebt nachstehende lexikographische Involution.

*) die J bedeuten hier dasselbe als $\mathfrak{J}$

$^{n}\mathfrak{J}$ $\left(\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ b & c & d & e\ldots\end{matrix}\right)$ =	Combinationen zu bestimmten Summen in direkter lexikographischer Ordnung.
$b^{n-1}\,b$ =	$b^{n-1}b$
$+\ b^{n-2}\ {}^{2}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-2}c$
$+\ b^{n-3}\ {}^{3}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-3}d$
$+\ b^{n-4}\ {}^{4}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-4}[c^2, e]$
$+\ b^{n-5}\ {}^{5}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-5}\,[cd, f]$
$+\ b^{n-6}\ {}^{6}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-6}\,[c^3, ce, d^2, g]$
$+\ b^{n-7}\ {}^{7}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-7}\,[c^2 d, cf, de, h]$
$+\ b^{n-8}\ {}^{8}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-8}\,[c^4, c^2e, cd^2, cg, df, e^2, i]$
$+\ b^{n-9}\ {}^{9}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-9}\,[c^3d, c^2f, cde, cb, d^3, dg, ef, k]$
$+\ b^{n-10}\ {}^{10}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-10}\,[c^5, c^3e, c^2d^2, c^2g, cdf, ce^2, ci,$ $d^2e, dh, eg, f^2, l]$
$+\ b^{n-11}\ {}^{11}\mathfrak{J}$ =	$b^{n-11}\,[c^4d, c^3f, c^2de, c^2h, cd^3, cdg,$ $cef, ck, d^2f, de^2, di, eh, fg, m]$
&c. &c. $\left(\begin{matrix}2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ c & d & e & f\ldots\end{matrix}\right)$	u. s. w. f.

Das ist das allgemeine Schema, deren die Anfänge in dem oben (S. 280. erwähnten Hindenbürgischen Programm und im Archiv der Math. H. IV. S. 390, 393, 395) vorkommen. Die Complexionen in den Klammern (deren Summen immer mit der von n an b abgezogenen Zahl übereinkommen) sind hier zur Ersparung des Raums neben einander, nicht wie dies (und hier in 72, I.) unter einander geschrieben.

73.

Diese Darstellung gehört zu den Involutionen der vollkommensten Art, und gewinnt durch den all=

gemeinen Ausdruck, beydes an Kürze und Bequemquemlichkeit zugleich. Eine *niedrigere* Involution zu bestimmten Summen, z. B. die für ^{7}J (in 72 I) aus ihr *abzusondern*, darf man nur $n = 7$ setzen, und einen *Horizontalstrich* unter $b^{n-7}\,{}^{7}J$ d. i. $b^{0}\,{}^{7}J$ und dessen (rechter Hand des Gleichheitszeichens befindlichen) Werth *ziehen*: so giebt das, was *über* diesen Strich stehet, *zusammen* die gefoderte Involution für ^{7}J, auf den in (72 I) befindlichen Zeiger bezogen.

Jede nächsthöhere Involution entsteht durch An- *fügung* eines neuen Gliedes zu den schon gegebenen, folgendergestalt: Es seyen $b^{n-m+2}\,{}^{m-2}J$, und $b^{n-m+1}\,{}^{m-1}J$ das vorletzte und letzte Glied der gegebenen Involution, so findet man daraus das *neuanzufügende* $b^{n-m}\,{}^{m}J$, wenn man 1) allen Complexionen für ^{m-2}J (die im *vorletzten* Gliede in der Klammer stehen) den Buchstaben c vorsetzt 2) in denjenigen Complexionen für ^{m-1}J (die im letzten Gliede in der Klammer stehen) welche zwey ungleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertauscht 3) die Complexionen, wie man sie (nach 1 und 2) gefunden hat, in ihrer Ordnung, neben b^{n-m} in die Klammer setzt. So sieht man, wie man z. B. für $m = 11$, das Glied $b^{n-11}\,{}^{11}J$ aus den beyden vorhergehenden $b^{n-9}\,{}^{9}J$ und $b^{n-10}\,{}^{10}J$ hat finden können, Auf die-

sem

sem so leichten Wege ist die obige Darstellung, aus den Anfangsgliedern $b^{n-1}b$, $b^{n-2}c$, $b^{n-3}d$ construirt worden; und daraus erhellet, daß man die Wiederholungsexponenten (59) hier eben so leicht bey c, d, e, f... als bey b anbringen kann, zu nicht geringer Verkürzung im Vortrage, und ohne dadurch die Vortheile der Involution aufzuheben oder zu vernichtrn.

74.

Setzt man die (S. 321) in Klammern eingeschloßenen Complexionen so neben die b^{n-1}, b^{n-2}, b^{n-3}, u. s. w. daß zuerst die einbuchstabigen, dann die zwei- dann drei- vier und mehrbuchstabigen Complexionen, in verticalen Reihen, wie in nachstehender figürlicher Anordnung, neben einander folgen, so wird dadurch jene lexikographische in eine Classendarstellung augenblicklich umgewandelt (66).

Combinationen zu unbestimmten Summen n, nach gutgeordneten Complexionen und Classen

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	c				
b^{n-3}	d				
b^{n-4}	e	c^2			
b^{n-5}	f	cd			
b^{n-6}	g	ce d^2	c^3		
b^{n-7}	h	cf de	c^2d		
b^{n-8}	i	cg df e^2	c^2e cd^2	c^4	
b^{n-9}	k	ch dg ef	c^2f cde d^3	c^3d	
b^{n-10}	l	ci dh eg f^2	c^2g cdf ce^2 d^2e	c^3e c^2d^2	c^5
b^{n-11}	m	ck di eh fg	c^2h cdg cef d^2f de^2	c^3f c^2de cd^3	c^4d
0	1	2	3	4	5

75.

Die Darstellung (74) bricht hier, wie die, von der sie abgeleitet worden, mit den zu b^{n-11} gehörigen Complexionen ab. Die Vergleichung derselben mit der Involution (72, I S. 319.) zeigt folgendes:

1) Die Wiederholungen von b linker Hand des Doppelstrichs in (74) sind die b längst der Senkstriche des Winkels (S. 319).

2) Die Complexionen in den Fächern rechter Hand des Doppelstrichs (74) sind dieselben, die zwischen den horizontalen Schenkeln zweier nächster Winkel (S. 319) liegen.

3. Die Wiederholungen der b (1) nur die danebenstehenden Complexionen (2) gehören so zusammen, daß die erstern jeder einzelnen Complexion vorgesetzt (oder damit verbunden gedacht) werden müssen.

4) Die Zahlenwerthe der Buchstaben in der Darstellung (74) giebt der Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ b & c & d & e & f & g \ldots \end{pmatrix}$$

Dieser bringt durchgängig die Glieder (in 3) auf einerley Summe n. Die Summe in den einzelnen Complexionen (2) ist nehmlich immer so groß, als die Zahl, die von n an b abgezogen wird.

5) Das Absondern niedrigerer Involutionen aus höhern geschieht hier durch Ziehung eines Horizontalstriches, auf eben die Art, wie in (S. 73). Eben so auch der Fortgang für höhere Involutionen durch Anfügung neuer Glieder an die gegebenen.

6) Die Vertical-Reihen oder Colonnen der Complexionen in den Fächern sind unten, nach der Ordnung mit 0, 1, 2, 3, 4 ... bezeichnet. Zählt man nun die Glieder oder Fächer der einzeln Verticalkolonnen von oben herunter 1_1, 1_2, 1_3, ... 1_6,

so

so kann man die Complexionen jedes bestimmten Fachs bestimmt nachweisen, und selbige bequem untereinander vergleichen.

76.

Die Darstellung (74) kann auch von jener andern (72 S. 321) unabhängig, folgendergestalt gefunden werden:

I. Man schreibe die Wiederholungen b^{n-1}, b^{n-2}, b^{n-3}, b^{n-4},... in eine Verticalreihe unter einander, und gleich daneben die einzeln Elemente b, c, d, e... in die erste Verticalreihe (75, 6) rechter Hand des Doppelstrichs.

II. Die übrigen Colonnen und Fächer mit ihren Complexionen, z. B. Col. n 7 m, findet man, wenn man allen um zwey Fächer höher liegenden Complexionen in der nächstvorhergehenden Colonne [allen Complexionen in Col. (n — 1) 7 m] den Buchstaben c vorsetzt; 2) in den Complexionen, die unmittelbar über dem Fache liegen, dessen Complexion man sucht [in den Complexionen in Col. n 7 (m — 1)] mit Uebergehung derer, die zwey gleiche Anfangsbuchstaben haben, den ersten Buchstaben mit dem nächstfolgenden des Zeigers vertauscht, und 3) die (nach 1 und 2) gefundenen Complexionen, in Col. n 7 m nach ihrer Ordnung setzt.

Für m = 1 wird 7 (m — 1) = 0. Es giebt nehmlich nirgends ein Fach über den ersten, also auch für Col. n 7 o nichts umzutauschen.

77.

Für jeden bestimmten Werth von n in (74) z. B. für n = 10, sind b^{n-10} mit den zugehörigen, rechter Hand daneben stehenden Complexionen die letzten, mit denen die Darstellung abbricht, so, daß b^{n-11} mit allem was daneben und darunter steht, für den Werth von n = 10 nicht weiter in Betrachtung kommt. Was über dem Horizontalstrich unter b^{n-10} (d. h. hier b°) neben den Wiederholungen von b liegt, enthält zusammen die Combinationsclassen.

$$^{10}A.\ ^{10}B,\ ^{10}C,\ ^{10}D,\ ^{10}E,\ ^{10}F,\ ^{10}G,\ ^{10}H,\ ^{10}J,\ ^{10}K$$

$$\begin{pmatrix} 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \ldots \\ c\ d\ e\ f\ g \ldots \end{pmatrix}$$

Der Zeiger für die Classen fängt hier von c oder 2 an, weil die Wiederholungen von b schon ein, für allemal in (74) abgesondert sind. Die Complexionen der einzeln Classen ^{10}A, ^{10}B... liegen hier in den Diagonalfächern niederwärts rechter Hand, der erstern ^{10}A durch l; der zweyten ^{10}B durch k; der 3ten ^{10}C durch i; der 4ten ^{10}D durch h; u. s. w. aber nur bis an den Horizontalstrich unter b^{n-10}, weil unter diesem Strich nichts weiter (für n = 10) vorkommt.

78.

Exempel. Die Complexionen für

$$^{10}E \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ b\ c\ d\ e\ f\ g \end{pmatrix}$$ aus 74 anzugeben

Für

Für n = 10 findet man nach (77) aus (74)

$$ {}^{10}E = b^4|g + b^3\left|\begin{array}{l} cf \\ de \end{array}\right. + b^2\left|\begin{array}{l} c^2e \\ cd^2 \end{array}\right. + b^1|c^3d + b^0|c^5 $$

Die Complexionen sind hier nach (60) neben einander geordnet. Eine von (74) unabhängige involutorische Darstellung derselben unter einander gäbe (58), wenn man mit ${}^{10}E$ eben so verführe, wie dort mit ${}^{10}D$, und für die dortigen a, b, c... hier b, c, d... setzte. Diese Anordnung wäre einerley mit der, wenn man die hier gefundenen Complexionen ganz ausgeschrieben (ohne Wiederholungsexponenten) unter einander setzte.

79.

Zöge man (wie in 58, 59) von jeder Zahl des Zeigers (75, 4) Eins ab, d. i. nehme man anstatt des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\ldots \\ b & c & d\ldots \end{pmatrix}$ für (74) nun $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ c & d & e & \ldots l \end{pmatrix}$ so würde das einen Einfluß auf die Summen der einzelnen Complexionen in den Fächern der einzeln Verticalreihen haben. Sie würden sämmtlich niedrigere Summen darstellen als jene. Die Complexionen in der ersten Verticalcolonne um 1; die in der zweyten um 2; die in der dritten um 3; u. s. w.

80.

Diesen Unterschied anschaulich darzustellen, darf man nur, statt der einzeln Complexionen, das zugehörige Classenzeichen in die Fächer setzen. Das giebt (α) für 74

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	^{2}A				
b^{n-3}	^{3}A				
b^{n-4}	^{4}A	^{4}B			
b^{n-5}	^{5}A	^{5}B			
b^{n-6}	^{6}A	^{6}B	^{6}C		
b^{n-7}	^{7}A	^{7}B	^{7}C		
b^{n-8}	^{8}A	^{8}B	^{8}C	^{8}D	
b^{n-9}	^{9}A	^{9}B	^{9}C	^{9}D	
b^{n-10}	^{10}A	^{10}B	^{10}C	^{10}D	^{10}E
b^{n-11}	^{11}A	^{11}B	^{11}C	^{11}D	^{11}E

u. s. w. f.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m \end{pmatrix}$$

(β) nach 79

b^{n-1}	b				
b^{n-2}	^{1}A				
b^{n-3}	^{2}A				
b^{n-4}	^{3}A	^{2}B			
b^{n-5}	^{4}A	^{3}B			
b^{n-6}	^{5}A	^{4}B	^{3}C		
b^{n-7}	^{6}A	^{5}B	^{4}C		
b^{n-8}	^{7}A	^{6}B	^{5}C	^{4}D	
b^{n-9}	^{8}A	^{7}B	^{6}C	^{5}D	
b^{n-10}	^{9}A	^{8}B	^{7}C	^{6}D	^{5}E
b^{n-11}	^{10}A	^{9}B	^{8}C	^{7}D	^{6}E

u. s. w. f.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \ldots \\ c & d & e & f & g & h & i & k & l & m \ldots \end{pmatrix}$$

Beyde, dem äussern Ansehen nach ganz verschiedene, Schemata α und β geben, jedes auf den unten beygefügten Zeiger bezogen, die Complexionen der Darstellung (74).

81.

Um $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ b & c & d & \ldots \end{bmatrix}^{10}D$ durch 80 α oder β zu bestimmen, darf man nur $n = 10$ setzen (77) so findet man

nach α; ${}^{10}D = b^3\,{}^7A + b^2\,{}^8B + b^1\,{}^9C + b^0\,{}^{10}D$

nach β; ${}^{10}D = b^3\,{}^6A + b^2\,{}^6B + b^1\,{}^6C + b^0\,{}^6D$

wo bloß der Zeiger in (80, α, β) den Unterschied macht. Diese Classe ${}^{10}D$ wird nehmlich hier in Summen von Classen zerlegt, wie in (58, 59); nur daß hier b, c, d.., statt der dortigen a, b, c... zu setzen.

82.

Die Vortrefflichkeit der involutorischen Darstellung (74) wird folgendes in der Kürze zeigen:

1) Die rein-combinatorische Entwickelung (76, I, II.) und Anordnung (74) ist, bey ihrer Allgemeinheit, dennoch äußerst leicht, und verstattet, die Wiederholungsexponenten, bey den Elementen der Complexionen unmittelbar anzubringen, ohne die Involution zu zerstören.

2) Die Wiederholungen von b, so wie die ein- zwey- drey- vier... buchstabigen Complexionen aus c, d, e, f... sind in einzelne Vertikalreihen, nach der Ordnung, classenweise (nach gleichnamigen Classen

Classen, aber zu verschiedenen Summen) gesondert, jene nach fallenden, diese nach steigenden Summenexponenten (80).

3) Die Complexionen in den einzelnen Horizontalreihen oder Fächern hinter dem Doppelstrich stellen einzelne Classen für sich, nach dem beygefügten Zeiger dar. Auf die nebenstehenden b zugleich mit bezogen, sind es diejenigen Complexionen, die immer eine gleiche Anzahl vorgesetzter b enthalten.

4) Die zusammengehörigen Elemente der lexikographischen Ordnung aus b, c, d... findet man in den Horizontalreihen (72, IV); der Classendarstellung in den Diagonalreihen (77). Die hier getroffene figürliche Anordnung stellt nehmlich beyder Zusammenhang anschaulich dar.

5) Das Absondern niedrigerer Involutionen (bestimmter und unbestimmter Summen) aus höhern, so wie der Fortgang für höhere Involutionen aus den gegebenen, geschieht mit größter Leichtigkeit (75, 5).

6) Die wenigen Complexionen in (74) vertreten, wenn man nach einander $n = 1, 2, 3, 4 \ldots 11$ setzt, vollkommen die Stelle der Tafel (Infin. Dignit. p. 166. und Nov. Syst. Perm. p. LVIII) und noch weiter, denn der Werth $n = 11$ giebt auch die sämmtlichen Classen zur Summe 11, davon in jener Tafel nichts vorhanden ist. Die Buchstabencomplexion der Tab. V. (Infin. Dign. p. 167) aus (74) zu schreiben, darf man nur

statt b, c, d, e, f, g, h, i, k, l (in 68)
hier α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ, ι, κ setzen

γ) Obschon hier nach der Vorschrift (76, I. II. folgende Complexionen und Fächer aus vorhergehenden abgeleitet werden, so kann man gleichwohl jede einzelne Vertical- Horizontal- und Diagonalreihen und Fächer ganz independent von andern, außer der Ordnung, schaffen. Das giebt insonderheit (80, β) klar und deutlich zu erkennen, weil man die Complexionen jeder Classe und Summe unmittelbar darstellen kann (55, 57, 58).

83.

Das zusammen zeigt die Güte und Vortrefflichkeit sowohl der combinatorischen Methode überhaupt, als der Darstellung (74) insbesondere. Simplicität und Allgemeinheit bey der Entwickelung Kürze und Deutlichkeit bey der Anordnung, Mannigfaltigkeit und Leichtigkeit bey der Anwendung, sind hier aufs innigste mit einander verbunden. Das ist die von Hindenburg (im polynomischen Lehrsatz. S. 54. Note c) versprochene endliche Vollendung. Was Herr Professor Klügel in der dortigen Note von den Vorzügen der combinatorischen Involutionen überhaupt sagt, das gilt in einem eminenten Grade, vornehmlich von dieser letzten, noch mehr als von jeder andern in (71) nach welcher die in (74) im Ganznn geformt, und, mutatis mutandis, eingerichtet ist. Die allgemeine Formel, deren nähere Entwickelung die Darstellung (74) giebt, wird in Folgendem vorkommen.

84.

So viel schien mir nöthig, von den combinatorischen Operationen, vorzüglich den Involutionen, im Zusamenhange hier beyzubringen. Die Aufführung bestimmter Vorschriften für die Entwickelung und Darstellung dieser Operationen ist unumgänglich nothwendig. Sie betrift die unmittelbare Anwendung der allerersten Gründe der Sache, und darf der Willkühr des Lesers nicht überlassen bleiben. Auch würde dieser nicht (selbst nicht einmal der geübte Analyst, sogleich und auf der Stelle) immer die kürzesten, und für gewisse Absichten zunächst passenden Regeln und Vorschriften auffinden. Auf solche muß man sich also beziehen können, und darum müssen sie auch irgendwo deutlich verfaßt und beschrieben vorhanden seyn. Die Sache (deren Nothwendigkeit gleichwohl einmal ist bezweifelt worden), so angesehen, spricht für sich selbst, und Herr Professor Klügel ist derselben Meinung, (Siehe die in 83 genannter Schrift S. 89). Hinterher kann jedem freystehen und es wird auch keine Schwierigkeit haben, die Vorschriften nach Gefallen für sich abzuändern, nach Umständen zu erweitern und durch neue zu vermehren.

85.

Ich hoffe, die Leichtigkeit der hier angewiesenen Verfahren wird dem Leser von selbst einleuchten. Sollte aber diese combinatorische Theorie, so einfach sie an sich ist, dem Anfänger gleichwohl verwickelt schei-

scheinen, weil man sie, bey der Ausdehnung, die sie in der Anwendung hat, nicht mit zwey Worten abthun kann: so kann ich einen solchen nichts Passenderes und Wahreres entgegensetzen, als die Antwort, die Herr Hofrath Lichtenberg, in einem ähnlichen Falle, bey einer gleichfalls sehr einfachen nur dem Scheine nach verwickelten, physischen Theorie gegeben hat. — „Man muß viel Worte machen, nicht, „weil die Theorie selbst verwickelt ist, sondern weil „der Anwendungen die daraus erklärt werden können „so viele sind, Man sagt nichts anders, man wen„det es nur auf etwas anders an." (Erxleb. Anfangsg. der Naturl. §. 549. l. S. 525). Alles fließt auch hier (wie dort) aus einer einzigen sehr einfachen Voraussetzung: Die Veränderungen bey rein„combinatorischen Verrichtungen, lassen sich auf blo„ßes Ansetzen oder Beyfügen, Wegnehmen oder Ab„sondern, Aus- oder Umtauschen, der vorgegebe„nen Elemente, zurückführen (S. 239. II.)."

Vergleichung der Zeichen für combinatorische Operationen; einfachste Relationen derselben in diesen Zeichen.

86.

Die Zeichen selbst, so viel deren hier aufzuführen nöthig schien sind schon im Vorhergehenden erklärt. Hier kommt es nur auf ihre Vergleichung gegen einander an, und wie sich combinatorische (und in der Folge auch analytische) Sätze bequem durch sie ausdrücken lassen.

(a) Va-

(α) Variationen überhaupt, mit Wiederholungen.

Var (a b c d) simpl.

87.

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + 'N$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots)$$

Die einzelnen Classen *'A*, *'B*, *'C*... beziehen sich auf (20, α), die Involutionen *'J* auf (20, β) in sofern diese Darstellung Summen von Classen involutorisch enthält. Die Elemente a. b, c, d, werden jederzeit, als der zu bearbeitende Stoff, den Zeichen *'J* und *'A 'B*... unten beygefügt.

88.

Die Variationen gegebener Elemente enthalten alle Combinationen derselben, mit allen Permutationen. Für jede einzelne Complexion einer Variationsclasse, müssen in derselben Classe auch alle ihre Versetzungen vorkommen. Man kann also wegen der Versetzungen gegebener Elemente auf die Variationsclassen verweisen, in denen sie enthalten sind, und die besondern Complexionen welche diese Versetzungen zusammen ausmachen durch den beygefügten Zeiger nachweisen. So ist z. B.

$$\text{Perm.}(a^4b^3) = \text{Perm}\begin{pmatrix}1111222\\ aa\,aabbb\end{pmatrix} = \overset{10}{G}(aaaabbb)$$

$$\text{Perm.}(a^3b^2c^4) = \text{Perm.}\begin{pmatrix}111223333\\ aaa\,bb\,cccc\end{pmatrix} = \overset{10}{J}(aaabbcccc)$$

Die Auflösung giebt (15) wie bey dem dortigen Exempel (16). Sie ist nemlich eine bequeme Auflösung für den Fall, Permutationen als (beschränkte

Varia-

Variationsclassen zu betrachten, in welchen bestimmte Elemente, aber jedes nur nach einer bestimmten Anzahl, vorkommen. Das kann man sehr bequem (wie hier) durch wirkliche Wiederholung der Elemente ausdrücken, welche zusammen die erste Permutationscomplexion (als die Repräsentantinn allerübrigen) darstellen. Ferner

$$\text{Perm. (abcd)} = \text{Perm.} \binom{1234}{abcd} \overset{{}^{\text{I}\circ}D'}{=} \text{(abcd)}$$

Die Auflösung giebt (15) und steht vollendet in (17) auch hier hat man bequeme Auflösungen für Variationen, aus bestimmten Elementen zu bestimmten Summen, aber ohne Wiederholungen, von welchen im Vorhergehenden nichts ist beygebracht worden.

Die Complexionen von $\overset{{}^{\text{I}\circ}D'}{(1234)}$ sind mit unter denen von $\overset{{}^{\text{I}\circ}D}{(1234567)}$ enthalten, die (Infi. Dign. p. 177) stehen; daß sich also jene (ohne Wiederholungen aus diesen (mit Wiederholungen) auslesen ließen. Die angeführten Auflösungen zeigen, wie man sie leichter gradezu finden kann.*)

(β) Com=

*) Man könnte auch die Combinationen (wie hier die Permutationen) als beschränkte Variationen ansehen, deren Complexionen gut geordnet wären, und in dieser Rücksicht, nur eine einzige combinatorische Operation die Variation, annehmen. So wahr daß an sich ist, und so sehr das Ganze dadurch an Simplicität gewinnt, so ist es dennoch besser bey dem Vortrage der ersten Gründe der Wissenschaft von dieser Allgemeinheit nicht auszugehen, und drey combinatorischen Operatio-

(β) Combinationen überhaupt, mit Wiederholungen.
Comb. (a b c d) simpl.

89.

$$'J = 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + 'N.$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots)$$

Die einzelnen Classen $'A, 'B, 'C \ldots$ stehen in (31, α) die Involution $'J$ in (31, β). Auch hier sind den Zeichen $'J$ und $'A$, $'B \ldots$ die Elemente (a b c d . . .) unten beygefügt (86).

Einzelne Classen durch Summen von Classen (71).

90.

$$'N = a^n + a^{n-1}\,'A + a^{n-2}\,'B + a^{n-3}\,'C \ldots + a^0\,'N$$
$$(a\ b\ c \ldots) \qquad\qquad (b\ c\ d\ e \ldots)$$

Die Classen $'A, 'B, 'C \ldots$ giebt (31, α) nur daß man hier b c d... statt der dortigen a b c... brauchen, oder die erstern für die letztern setzen, muß. Die Beschaffenheit, die Zahl, der Ort der unten beygefügten Elemente zeigt nehmlich jederzeit, was für Elemente die Entwickelung und Darstellung der darüberstehenden Classen zu gebrauchen.

Fol-

tionen als besondere ihrer Art anzusehen, und um so mehr, da diese Unterschiede beim Gebrauche häufig vorkommen. Beym Vortrage der Regeln hingegen, kann man auf diese Dependenz Rücksicht nehmen; daher ich auch im Vorhergehenden die Verfahren für Variationen, denen für Combinationen vorgesetzt, der letztern Abhängigkeit von den erstern gezeigt, auch hier, wegen der Permutationen, auf Variationen verwiesen habe.

Folgende Classen aus unmittelbar vorhergehenden (31, 32)

91.

$$'N = a\overset{-1}{'N} + b\overset{-1}{'N} + c\overset{-1}{'N} \ldots + \psi\overset{-1}{'N} + \omega\overset{-1}{'N}$$
$$(ab..\psi\omega)\ (ab..\omega)\ (bc.\omega)\ (cd.\omega)\ (\psi\omega)\ \omega$$

Diese Formel enthält die Auflösung (32), symbolisch dargestellt. Bei dieser werden nehmlich die Ordnungen jeder folgenden Classe $'N$, aus den Ordnungen der unmittelbar vorhergehenden $\overset{-1}{'N}$ durch successives Vorschreiben der Buchstaben a, b, c ... gefunden

Complexionen mit einerley Endbuchstaben.

92.

$$(1 + 'A + 'B + 'C + 'D + 'E \ldots + \overset{-1}{'N})\, q$$
$$(a\ b\ c\ d\ e \ldots q)$$

Nämlich für den Endbuchstaben q, durch alle Classen, von der ersten bis der nten; und so auch für andere Endbuchstaben und Classen.

Complexionen der Endbuchstaben a, b, c, d ... nach der Reihe.

93.

$$'N = a^n + \overset{-1}{'N}b + \overset{-1}{'N}c + \overset{-1}{'N}d + \text{etc.} \ldots$$
$$(a\ b\ c) \ldots (a\ b)\ (a\ b\ c)\ (a\ b\ c\ d)$$

Für die Complexionen jedtr einzelnen Classe $'N$ aus den Compiexionen der unmittelber vorhergehenden Classe $\overset{-1}{'N}$ mit Beziehung auf die untergesetzten Ele-

Elemente (ab) oder (abc) u. s. w. (90) In der Anwerdung kommen (92, 93) weit seltener vor, als (90 91). Hier sollen sie bloß zeigen, wie außerordentlich leicht solche Forderungen combinatorisch sich abthun lassen. Die Formeln (90, 92) geben Beispiele von Veränderung der Elemente, in Absicht auf Menge und Beschaffenheit, wo man zugleich mit auf den Ort sehen muß (90) wo sie stehen. Verschiedene Elemente (auch Zeiger) kommen nicht selten bei einer und derselben Formel vor, und werden mit großem Nutzen gebraucht. Die oben beygefügten Buchstabenelemente beziehen sich auch hier zunächst, wie die Zahlenelemente bey der Aufgabe (S. 309), auf die durch sie zu bezeichnenden Ordnungen.

γ) Variationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen.

$$\mathrm{Var}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots\\ a & b & c & d & e\ldots\end{pmatrix}\ \mathrm{num}\ n\,^{*)}$$

94.

Classen-Complexionen (37, 38).

$${}^{n}J = {}^{n}A \dagger {}^{n}B \text{ ſſ } {}^{n}C \dagger {}^{n}D \dagger {}^{n}E \ldots \dagger {}^{n}N$$

*) Bey den Operationen zu den bestimmten Summen, wenn man sie auch schon von Zahlen unabhängig (37, 40, 46, 49, 55, 57) darstellen kann, muß man doch Zahlen und Buchstaben, wie sie zusammengehören im Zeiger angeben, weil die Summenexponenten der Classen von den Zahlenwerthen abhangen, und bey andern Zahlen anders werden (79, 80); und so muß man den Zeiger (wie hier in 94) von den einzelnen Elementen; Buchstaben (90, 91, 92, 93) oder Zahlen (65, S 309) unterscheiden. Zuweilen setzt man den Zeiger wo einzelne Elemente zureichten (15, 17, 20, 31 anzudeuten, die Regeln der Operationen erstrecken sich gleich leicht auf beyderley Elemente.

$$\binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ldots}{a\ b\ c\ d\ e\ldots}$$

Lexikographische Complexionen (37, 40)

95.

$${}^{n}\mathfrak{J} = {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{D} + {}^{n}\mathfrak{E} \ldots + {}^{n}N$$

(Der Zeiger, wie vorher).

Für mehrere Reihen p, q, r, s, t... nach Classen (44)

96.

$$\overset{tsrqp}{{}^{n}\mathcal{J}} = \overset{p}{{}^{n}A} + \overset{qp}{{}^{n}B} + \overset{rqp}{{}^{n}C} + \overset{srqp}{{}^{n}D} + \overset{tsrqp}{{}^{n}E} \text{ etc.}$$

(Der Zeiger wie in 24)

Wegen der lexikographischen Anwendung für $\overset{\ldots tsrqp}{{}^{n}\mathfrak{J}}$ suche man die Darstellung in (45).

(δ) Combinationen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen.

$$\text{Comb.} \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ldots}{a\ b\ c\ d\ e\ldots} \text{ num. n.}$$

Classen = Complexionen (46, 47,)

97.

$${}^{n}\text{J} = {}^{n}\text{A} + {}^{n}\text{B} + {}^{n}\text{C} + {}^{n}\text{D} + {}^{n}\text{E} \ldots + {}^{n}\text{N}.$$

Lexikographische Complexionen (46, 48, 49,)

98.

$${}^{n}\mathbf{J} = {}^{n}\mathbf{A} + {}^{n}\mathbf{B} + {}^{n}\mathbf{C} + {}^{n}\mathbf{D} + {}^{n}\mathbf{E} \ldots + {}^{n}\mathbf{N}$$

(Der Zeiger wie vorher).

Wegen der beyderley (48, 49) aufgeführten lexikographischen Formen, kann man auch das Arch. der Math. (H. IV. S. 397. und 409, 414) nachsehen.

Wegen

Wegen der gebrauchten Zeichnung für lexikographischen Ordnungen überhaupt (Ebendas. S. 396 Note) für Fälle wo die Combinationsclasse noch mit Reihenexponenten zu versehen sind, hier (53).

Höhere Involutionen, aus nächst vorhergehenden niedrigern *)

99.

$$
{}^{n}\mathfrak{J}^{r} = 1\;\underset{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ a & b & c & d & e\ldots \end{bmatrix}}{{}^{n-1}\mathfrak{J}^{r}} + \underset{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ b & c & d & e\ldots \end{bmatrix}}{{}^{n}\mathfrak{J}^{r}}.
$$

Wegen der beyden ersten Involutionen sehe man (46, 58), wegen der dritten, deren Zeiger von b (d. i. hier 2) anfängt (65. S. 309). Hieher gehören die drey vom Professor Klügel (Der polyn. Lehrsatz S. 61.) aufgeführten Beyspiele.

Höhere

*) Von einer andern Zusammensetzung höherer Involutionen aus niedrigern, wo der Zeiger mehrmals verändert wird (Arch. der Math. H. IV. S. 418, d). Statt des dortigen [JL] muß das hiesige $\mathfrak{J}$ gesetzt werden, welches damals bey dem Drucke nicht zur Hand war. Dieser Umstand hat veranlaßt; daß der Analogie wegen (Ebend.) auch [Js] gesetzt werden mußte, wo das hiesige J allein hinreichend gewesen wäre. Eben so ist in Herrn von Prassens Abhandlung (usus Log. in Theoria Equationum Lipsia 1793) aus Mangel der zugehörigen Typen überall J und $\mathcal{J}$ statt $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{F}$ gesetzt werden. Dieses zu erinnern ist nöthig theils um Anstoß zu vermeiden, theils aber auch, weil die Beibehaltung derselben Zeichen nirgends so unerlaßlich, nothwendig und wichtig ist, als bei der combinatorischen Analysis

Höhere Involutionen aus Summen der niedrigern (S. 320, V).

100.

$$ {}^{n}J = a^{n-1}\,a + a^{n-2}\,{}^{2}J + a^{n-3}\,{}^{3}J + a^{n-4}\,{}^{4}J \ldots + a^{0}\,{}^{n}J $$
$$ \binom{1\;2\;3\;4\ldots}{a\;b\;c\;d\ldots} \qquad\qquad \binom{2\;3\;4\;5\;6\ldots}{b\;c\;d\;e\;f\ldots}, $$

Lexikographische Darstellung der vorigen Formel.

101.

$a^{n-1}a$
$a^{n-2}b$
$a^{n-3}c$
$a^{n-4}[b, {}^{2}d]$
$a^{n-5}[bc, e]$
u. s. w. S. 321.

Sie ordnet die Glieder so, daß die Complexionen aus b, c, d ... die gleichviel a vor sich haben, in eine horizontale Reihe fallen. Für den Zeiger $\binom{1\,2\,3\ldots}{a\,b\,c\ldots}$ gehen die Complexionen, neben den Wiederholungen von a, in steigender Summe 1, 2, 3, 4, ... fort; mit den Wiederholungen von a verbunden, geben sie durchaus die Summe n. Die b, c, d ... der Darstellung (S. 321) sind hier mit a, b, c ... verwechselt. Für $n = 5$ wären hier schon alle Complexionen für J vorhanden.

Einzelne Klassen durch Summen von Klassen. (Nov. Syst. p. LV. 9.)

102.

$$ {}^{v+n}N = a^{n-1}\,{}^{v}A + a^{n-2}\,{}^{v}B + a^{n-3}\,{}^{v}C \ldots + a^{n-m}\,{}^{v}M $$
$$ \binom{1\;2\;3\;4\ldots}{a\;b\;c\;d\ldots} \qquad \binom{1\;2\;3\;4\ldots}{b\;c\;d\;e\ldots} $$

Diese Formel (mit Binomial- und Polynomial-Coeffizienten versehen wie sie für die Dignitäten des Polynomiums paßt) steht in der oben angezeigten Stelle

Hindenbürgischen Schrift. Hier habe ich bloß n und v verwechselt, um n und N auf einerley Zahlenwerth zu setzen. Das allgemeine mte Glied ist hier $a^{n-m}\ {}^{v}M$. Sobald n oder v (oder beydes zugleich) = m werden, bricht die Formel mit diesem Gliede ab.

Für ^{10}D $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{pmatrix}$ wäre N = D, also n = 4, und $v + 4 = 10$ folglich $v = 6$

also $^{10}D = a^3\ {}^{6}A + a^2\ {}^{6}B + \ddot{a}^4\ {}^{6}C + a^0\ {}^{6}D$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

vollkommen so, wie S. 305.

Eben so fände man den Werth für ^{15}E, wie S. 306.

Involutorische Classendarstellung der vorigen Formel.

103.

a^{n-1} a	a^{n-1} a
a^{n-2} b	a^{n-2} ^{1}A
a^{n-3} c	a^{n-3} ^{2}A
a^{n-4} [d,b^2]	a^{n-4} [^{3}A, ^{2}B]
a^{n-5} [e,bc]	a^{n-5} [^{4}A, ^{3}B]
u. s. w. S. 324.	u. s. w. S. 329, β

Der Zeiger für die Klassen ^{1}A, $^{2}A \ldots {}^{2}B$, $^{3}B \ldots$ u. s. w. ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ b & c & d \ldots \end{pmatrix}$ Auch hier sind die b, c, d... (in 74 und 80 β) mit a, b, c... verwechselt worden. Die einzelnen Classen liegen in den Diagonalen niederwärts (77) und so kommt hier die Bedeutung von n mit der in (102) nicht überein.

(ε) Ver-

(ε) Verschiedene Relationen der Variationen und Combinationen, mit und ohne Summenexponenten.

Variat. ohne und mit Summenexponenten.	Combin. ohne und mit Summenexponenten.
104.	105.
${}'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A \ldots$	${}'\mathrm{A} = {}^1\mathrm{A} + {}^2\mathrm{A} + {}^3\mathrm{A}$
${}'B = {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots$	${}'\mathrm{B} = {}^2\mathrm{B} + {}^3\mathrm{B} + {}^4\mathrm{B}$
${}'C = {}^3C + {}^4C + {}^5C \ldots$	${}'\mathrm{C} = {}^3\mathrm{C} + {}^4\mathrm{C} + {}^5\mathrm{C}$
${}'D = {}^4D + {}^5D + {}^6D \ldots$	${}'\mathrm{D} = {}^4\mathrm{D} + {}^5\mathrm{D} + {}^6\mathrm{D}$

106.

Die Summe in (104) giebt

$$\left\{\begin{array}{l} {}'A \\ + {}'B \\ + {}'C \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^1A + {}^2A + {}^3A \ldots \\ + {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots \\ + {}^3C + {}^4C + {}^5C \ldots \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^1A \\ + ({}^2A + {}^2B) \\ + ({}^3A + {}^3B + {}^3C) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\}$$

Die Summe in (105) giebt

107.

$$\left\{\begin{array}{l} {}'\mathrm{A} \\ + {}'\mathrm{B} \\ + {}'\mathrm{C} \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathrm{A} + {}^2\mathrm{A} + {}^3\mathrm{A} \\ + {}^2\mathrm{B} + {}^3\mathrm{B} + {}^4\mathrm{B} \\ + {}^3\mathrm{C} + {}^4\mathrm{C} + {}^5\mathrm{C} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} {}^1\mathrm{A} \\ + ({}^2\mathrm{A} + {}^2\mathrm{B}) \\ + ({}^3\mathrm{A} + {}^3\mathrm{B} + {}^3\mathrm{C}) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right\}$$

Eben so ist, bey mehreren Reihen p, q, r, s . . . (24, 25)

108.

$$\begin{array}{l} {}'\overset{p}{A} = {}^1\overset{p}{A} + {}^2\overset{p}{A} + {}^3\overset{p}{A} + {}^4\overset{p}{A} + \text{etc.} \\ {}'\overset{qp}{B} = \qquad {}^2\overset{qp}{B} + {}^3\overset{qp}{B} + {}^4\overset{qp}{B} + \text{etc.} \\ {}'\overset{rqp}{C} = \qquad\qquad {}^3\overset{rqp}{C} + {}^4\overset{rqp}{C} + \text{etc.} \end{array}$$

Die Summe aus (321) giebt.

109.

$$ {}'\overset{p}{A} \dagger {}'\overset{qp}{B} \dagger {}'\overset{rqp}{C} \dagger \text{etc.} = {}^{1}\overset{p}{A} \dagger ({}^{2}\overset{qp}{A} \dagger {}^{2}\overset{rqp}{B}) $$
$$ \dagger ({}^{3}\overset{p}{A} \dagger {}^{3}\overset{qp}{B} \dagger {}^{3}\overset{rqp}{C}) \dagger \text{etc.} $$

Variatioen an sich und Combinationen.

110.

Für $'A = a\,'\mathrm{A}$ ist $'A \dagger 'B \dagger '\mathrm{C} \dagger \ldots$
$'B = b\,'\mathrm{B}$ $==$
$'\mathrm{C} = c\,'\mathrm{C}$ $a\,'\mathrm{A} \dagger b\,'\mathrm{B} \dagger c\,'\mathrm{C} \dagger \ldots$

Die Variationen sind nemlich nichts anders als Combinationen, mit allen Versetzungen der Elemente in den einzelnen Complexionen. Wo also die Versetzungen, (wie bey die Faktoren der Produkte) nichts verschiedenes geben, darf man sie nur überhaupt zählen, und ihre Zahl den zugehörigen Combinations-Complexionen, welche die übrigen repräsentiren, beyfügen. Das geschieht durch die Versetzungszahlen a, b, c... (Nov. Syst. Perm. p. IX. 24 und XL, 10) deren Werth für jede Complexion gegeben ist. (Ebend. p. YXIV. 23. und hier S. 321; 1, 2)

Combinationen mit und ohne Summenexponenten.

111.

$$
\begin{aligned}
a\,'\mathrm{A} &= a\,{}^{1}\mathrm{A} \dagger a\,{}^{2}\mathrm{A} \dagger a\,{}^{3}\mathrm{A} \dagger a\,{}^{4}\mathrm{A} \ldots \\
b\,'\mathrm{B} &= \phantom{a\,{}^{1}\mathrm{A} \dagger{}} b\,{}^{2}\mathrm{B} \dagger b\,{}^{3}\mathrm{B} \dagger b\,{}^{4}\mathrm{B} \ldots \\
c\,'\mathrm{C} &= \phantom{a\,{}^{1}\mathrm{A} \dagger a\,{}^{2}\mathrm{A} \dagger{}} c\,{}^{3}\mathrm{C} \dagger c\,{}^{4}\mathrm{C} \ldots \\
d\,'\mathrm{D} &= \phantom{a\,{}^{1}\mathrm{A} \dagger a\,{}^{2}\mathrm{A} \dagger a\,{}^{3}\mathrm{A} \dagger{}} d\,{}^{4}\mathrm{D} \ldots \\
&\cdots \qquad\qquad \cdots
\end{aligned}
$$

Die Summe (aus 111) giebt

112.

$$a'A + 'B + c'C + \ldots = a^1A + (a^2A + b^2B)$$
$$+ (a^3A + b^3B + c^3C) + \ldots$$

Für die Fälle wo $'A = a'A$, $'B = b'B$ u. s. w. (110) ist auch

113.

$$'A + 'B + 'C + \ldots = a^1A + (a^2A + b^2B)$$
$$+ (a^3A + b^3B + c^3C) + \ldots$$

114.

Diese Formeln und Vergleichungen, wenn man einmal die Bedeutung der dabey vorkommenden combinatorischen Zeichen gut inne hat, sind so leicht, daß man sie nur zu sehen braucht, um sie sogleich durchzusehen.

Da hier überall keine andern Complexionen als solche vorkommen, bey denen Wiederholungen verstattet sind, so war es nicht nöthig, solches hier mit anzumerken. In andern Fällen darf man nur die Buchstaben a. r. (admissis repetitionibus oder o. r. (omissis repetitionibus) beyfügen und z. B. schreiben.

Var. (a b c d...) simpl. a. r.

Var, (a b c d...) simpl. o. r.

II. Die unmittelbarste Anwendung der Combinationslehre zeigt sich bey dem allgemeinen Produkten- und Potenzenprobleme der Reihen.

115.

Die Combinationslehre deutet überhaupt die in bestimmter Ordnung gegebenen Dinge oder Elemente durch

durch die Folge der Zahlen 1 2 3 4... oder der Buchstaben a b c d... an. Bey der Verbindung dieser Elemente zu einer zusammengesetzten Ganzen, abstrahirt sie von aller Bedeutung und betrachtet z. B. die Complexionen ab und ba als bloße Nebeneinanderstellungen der beyden Dinge a, b noch mit dem Unterschiede, daß in ab das Element a die erste und b die zweyte Stelle einnimmt, welches bei ba umgekehrt sich verhält.

116.

Bey dem Gebrauche der Combinationslehre ausserhalb ihren Grenzen hingegen, muß man wissen, was für Dinge die a,b,c,d... bezeichnen, muß die Beschaffenheit dieser Dinge und welche Beziehung sie auf einander haben, genauer kennen. In der Hindenbürgischen Schrift (Nov. Syst. Perm. p. XXV. XXVI.) sind mehrere Anwendungen der Combinationslehre auf verschiedene Künste und Wissenschaften in der Kürze und nur überhaupt angegeben. Hier genügt es bey derjenigen Wissenschaft stehn zu bleiben, welche an der wohlthätigen Einwirkung der Combinationslehre den uumittelbarsten Antheil nimmt, den größten Vortheil davon zieht und gleichwohl bisher von dieser Seite fast ganz übersehen worden ist — der Analysis.

117.

Läßt man die Buchstaben a, b, c... allgemein ausgedrückte Größen oder Zahlen bedeuten, so darf nur noch angegeben werden, wie man ihre Verbindungen ab, abc u. d. gl. zu nehmen habe. An sich nem-

nemlich kann ab in arithmetischer Bedeutung eben so wohl a + b als a — b und a.b und a : b und a^b und $\sqrt[a]{b}$ u. s. w. ausdrücken. Schränkt man aber so lange nichts anders erinnert wird — die Bedeutung der (für sich oder in Beziehung auf Zahlen im Zeiger) gegebenen Elemente a, b, c, d... auf a + b + c + d,.. u. ihre Verbindungen ab, abc, a^2b... auf a.b, a.b.c, a.a.b (d. i. a^2b)... ein, so entstehen dadurch Produkte aus einzelnen Faktoren, die Wiederholungsexponenten (59) verwandeln sich in Potenzexponenten, und die im vorhergehenden angeführten bloß combinatorischen Formeln uud Relationen zusammengehöriger Dinge oder Elemente überhaupt, erhalten dadurch sogleich bestimmte arithmetische oder algebraische Bedeutung.

118.

Für die Anwendung dieser und anderer combinatorischen Formeln und Relationen auf die Analysis, ist also nur noch übrig nachzuweisen, bey was für analytischen Problemen sie vorkommen; überhaupt — wo und wie sie zu gebrauchen, und im Calkul einzuführen sind. Das nennt Hindenburg, statt der algebraischen und transzendentischen (oft sehr verwickelten und schweren) Operationen, die gleichgültigen (einfachern und leichtern) combinatorischen setzen, und benutzen. Das von Hindenburg hieber eingeführte Verfahren, ist sowohl in Absicht auf Entwickelung als Darstellung, von dem gewöhnlichen wesentlich unterschieden; daher auch die Einführung jener Operationen, statt dieser

ser, in der Erklärung namentlich vorkommt, die Hindenburg ohnlängst von der combinatorischen Analysis gegeben hat. (Arch. der Math. H. IV. S. 423).

119.

Die Hindenbürgischen Combinationszeichen sind übrigens so geformt, ihre Zusammensetzung so eingerichtet, daß sie das, wofür sie gebraucht werden, nicht nur aufs deutlichste anzeigen, sondern auch alle andere nicht combinatorische Veränderungen sich bei ihnen anbringen, und durch sie nachweisen lassen. Sie können daher auch andere, von ihnen ganz verschiedene Methoden leichter angepaßt werden, als man dem ersten Ansehen nach vermuthen sollte. Daß man dabey etwas neues lernen müsse, was man bisher noch nicht gewußt und in Ausübung gebracht hat, ist freilich eine nothwendige Bedingung, die man sich aber gerne wird gefallen lassen, wenn man eines theils sieht, wie leicht dieser combinatorische Kalkul ist, anderntheils, welche Schwierigkeiten anderer Methoden hierbei umgegangen werden. Nach einer von Herrn Hofrath Kästner bey ganz anderer Gelegenheit *) gethanen Aeußerung zu urtheilen, gehört die Hindenbürgischen Combinationsmethode offenbar zu den leichtesten; wenn man mit diesem vortreflichen Mathematiker, diejenigen Verfahren überhaupt leicht nennt, wodurch man das Gesuchte leicht findet, sollte man auch zuvor einiges, was nicht ganz leicht

*) Bei einigen von Herrn Professor Buck bekannt gemachten neuen Auflösungen einiger schweren trigonometrischen Aufgaben. (Kästn. Eb. Trigon. Satz 15.)

leicht war, haben erlernen müssen. Das, was man hier zu lernen hat, hat aber auch nicht einmal den Anstrich von Schwierigkeit: es ist leichter als alles, was man sich nur immer leichtes denken mag. Das kann und wird vielleicht jedem Leser, der noch gar nichts von der Sache weiß, und von ungefähr auf diese Stelle trift, unglaublich scheinen — es ist dennoch buchstäblich wahr.

120.

Wie sich Hindenburg bey dieser Anwendung der Combinationslehre, insbesondere bey den allgemeinen Potenzen und Produktenprobleme, von denen vornemlich hier die Rede ist anfänglich verhalten hat, erhellet aus Infin. Dign. (§. XXI — XXIII, XXV und XXVII). Bekanntlich geräth man nicht gleich zuerst auf den kürzesten natürlichsten Weg, und so hat freilich die Sache nachher ein ganz anderes Ansehen gewonnen. Alles ist nachher (wie Hindenburg bereits im Archiv der Math. H. I. S. 14. in der Note erinnert hat) aufs möglichste simplifizirt, alles auf rein-combinatorische Begriffe gegründet, und sowohl die Hülfs- als andere daraus abgeleiteten Sätze in den strengsten systematischen Zusammenhang gebracht worden. Ein Beispiel davon mag die, auf dem Titel der Schrift der polyn. Lehrsatz angegebene, neue Bearbeitung der obgenannten allgemeinen Potenzen- und Produktenprobleme darstellen. Beyde Aufgaben werden, wie man finden wird, aus dem combinatorischen Boden in den analytischen gleichsam nur verpflanzt, und lassen sich aus dem Gebiete der einen

Wissenschaft unmittelbar in das andere herüberbringen.

121.

Aufgabe. Es sind mehrere Reihen

$$a + b + c + d + e \ldots = p$$
$$A + B + C + D + E \ldots = q$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} + \mathfrak{d} + \mathfrak{e} \ldots = r$$
u. s. w. f.

gegeben, man verlangt die Produkte von zwey, drey, vier ... m dieser Reihen, von den vorhergehenden niedrigen Produkten unabhängig.

122.

Auflösung. Diese geben die Variationsklassen (25). Nach ihnen ist

$$qp = \overset{qp}{'B} \qquad rqp = \overset{rqp}{'G}$$
$$srqp = \overset{srqp}{D} \qquad \ldots tsrqp = \overset{tsrqp}{M}$$

Der Zeiger ist hier wie in (121)

Die Entwickelung dieser Classen nach (25, α) giebt ein Produkt nach dem andern, jedes folgende aus dem nächstvorhergehenden; die Anordnung nach (25, β) giebt jedes verlangte Produkt für sich, und man hat, wegen der Involution, nicht nöthig, die vorhergehenden für die folgenden erst besonders abzusetzen (22)

123.

Beweis. Man findet das Produkt qp, wenn man die einzelnen Glieder der Reihe q den einzelnen Glie-

Glieder von p nach und nach vorschreibt, und die so entstehenden Produkte zusammen addirt. Daraus findet man weiter rqp, wenn man mit den einzelnen Gliedern von r und qp eben so verfährt, wie vorher mit den Gliedern von q und p u. s. w. Das ist, wenn man die einzelnen Dinge der Reihen p, q, r, s... als Faktoren betrachtet, und die Produkte aus ihnen auf eben die Art classenweise sucht, wie in (25, α, β) die Variationen der gegebenen Elemente der einzelnen Reihen.

124.

Aufgabe. Es sind mehrere Reihen

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\dots \\ a + bz & + cz^2 & + dz^3 & + ez^4 \dots & = p \\ A + Bz & + Cz^2 & + Dz^3 & + Ez^4 \dots & = q \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}z & + \mathfrak{c}z^2 & + \mathfrak{d}z^3 & + \mathfrak{e}z^4 \dots & = r \end{array}$$

u. s. w. f.

gegeben: man verlangt das allgemeine (n + 1)te Glied der Produkte von zwey, drey, vier.... m dieser Reihen von den vorhergehenden niedrigern Produkten und Gliedern unabhängig.

125.

Auflösung. Diese geben die Variationsclassen (44, 55), nach ihnen ist

$$(qp)\urcorner(n+1) = {}^{n-2}\overset{qp}{B}z^n;\quad (rqp)\urcorner(n+1) = {}^{n-3}\overset{rqp}{C}z^n$$

$$(srqp)\urcorner(n+1) = {}^{n-4}\overset{srqp}{D}z^n;\quad (\dots tsrqp)\urcorner(n+1) = {}^{n-m}\overset{\dots tsrqp}{M}z^n$$

(Der Zeiger ist hier, wie in 124)

Hier

Hier giebt (44) eine Classe nach der andern, (55) jede für sich außer der Ordnung; nur muß man bey (55) in die letzte Vertikalreihe die Buchstaben aus p (wie auch hier schon stehen), in die vorletzten Buchstaben aus q in die darauf folgende die Buchstaben aus r u. s. w., das ist, eben dieselben Buchstaben dem Nahmen nach, als in (55) bereits stehen, nur aus andern Alphabeten setzen (24). So wie in (55) ${}^{10}D$ gefunden worden, so kann man auch jede andere Classe sogleich finden.

126.

Beweis. Daß für die (n + 1)ten Glieder der Produkte aus zwei, drei, vier... m Reihen immer z^n kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coeffizienten, bei zwei Reihen qp von $\overset{qp}{{}^2B}$ bei drei Reihen rqp von $\overset{rqp}{{}^3C}$, bei vier Reihen srqp von $\overset{srqp}{{}^4D}$ an, und gehen bei ihnen die Summenexponenten nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort, (108). Folglich gehören für die (n + 1 ten Glieder der Produkte der Reihen, die Variationsklassen für die Coeffizienten und die Potenzen z^n so zusammen, wie in (115) ist angegeben worden.

127.

Setzt man in die allgemeinen (n + 1)ten Glieder nach und nach n = 0, 1, 2, 3, 4... so findet man dieser Produkte einzelne Glieder nach der Ordnung

$$qp = {}^{2}\overset{qp}{B} + {}^{3}\overset{qp}{B}z + {}^{4}\overset{qp}{B}z^{2} + {}^{5}\overset{qp}{B}z^{3} + \ldots$$

$$rqp = {}^{3}\overset{rqp}{C} + {}^{4}\overset{rqp}{C}z + {}^{5}\overset{rqp}{C}z^{2} + {}^{6}\overset{rqp}{C}z^{3} + \ldots$$

$$srqp = {}^{4}\overset{srqp}{D} + {}^{5}\overset{srqp}{D}z + {}^{6}\overset{srqp}{D}z^{2} + {}^{7}\overset{srqp}{D}z^{3} + \ldots$$

$$\ldots tsrqp = {}^{m}\overset{\ldots tsrqp}{M} + {}^{m+1}\overset{\ldots tsrqp}{M}z + {}^{m+2}\overset{\ldots tsrq}{M}z + {}^{m+3}\overset{\ldots tsrpq}{M}z + \ldots$$

128.

Die Entwickelung von Produkten der Reihen solcher combinatorischen Formeln (122, 125, 129) ist leicht. Die einzelnen Glieder derselben weit fortgesetzt, findet man in Hindenburgs Tafel (Nov. Syst. Perm, p. LXIX. sep.) Ich habe hier für die Reihen (124) die einfachsten in Absicht auf die Exponenten gewählt, weil das für jede andern Exponenten hinreichend ist (139, 140). In der Hindenbürgischen eben angeführten Tafel sind für die Exponenten der z in den Reihen die allgemeinen Progressionen $\mu, \mu+\delta$ $\mu+2\delta \ldots$; ν, $\nu+\delta$, $\nu+2\delta \ldots$ u. s. w. gesetzt worden. Die Ursache, und von den Vortheilen einer solchen Annahme, sehe man Toepf. comb. Anal. Vorr. S. XI. — XIII. u. S. 162, 189.

129.

Aufgabe. Es ist die Reihe

$$a + bz + cz^{2} + dz^{3} + ez^{4} + \ldots = p$$

und die ganze positive Zahl m gegeben: man verlangt das allgemeine (n + 1)te Glied der Potenz p^{m} von den vorhergehenden Gliedern unabhängig.

130

Auflösung. Sie ist in der Formel:

$$p^m \urcorner (n + 1) = m \; {}^{m+n}Mz^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3, \ldots \\ a & b & c \ldots \end{pmatrix}$$

enthalten. Hier ist die Combinationsklasse m aus (46, 55) mit der Versetzungszahl m verbunden (110).

131.

Beweis. Die Reihe p (129) m mal gesetzt und in sich multiplizirt würde nach und nach alle Potenzen von p, bis mit der gesuchten mten geben. Wären nun die m Faktoren nicht (wie hier) einerley, sondern alle verschieden, wie p, q, r... in (124) so wäre das (n+1)te Glied ihres Produkts, das ist

$$(\ldots tsrqp) \urcorner (n + 1) = {}^{n+m}\mathcal{M}z^n \quad {}^{\ldots tsrqp}$$

Da aber hier $p = q = r = s = t = \ldots$ so kommen in ihrem Produkte unter den Complexionen (Binionen, Ternionen, Quaternionen... mtionen) der Coeffizienten der gegebenen Reihe, mehrere vor, die, der Zahl und Art nach eben dieselben, nur verschiedentlich versetzte Buchstaben enthalten, folglich (als Produkte derselben Faktoren, nur in verschiedner Ordnung und Lage) nicht verschieden sind. Diese dürfen also nur überhaupt gezählt, und ihre Zahl (die Versetzungszahl) den zugehörigen Combinationscomplexionen, welche die übrigen repräsentiren, nach der Erinnerung (110) beygefügt werden, dadurch verwandelt sich das obige ${}^{m+n}\mathcal{M}$ in m ${}^{m+n}M$ (wo m die Versetzungszahl oder der polynomialcoeffizient der

einzelnen Complexionen der Combinationsklasse M ist,)
und so kommt,

$$p^m \rceil (n + 1) = m\ {}^{m+n}M_{z^n}$$

mit dem Zeiger wie in (130).

132.

Die einzelnen Glieder für p^m nach der Reihe zu finden, darf man nur $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ nach einander setzen. Das giebt:

$$p^m = m\ {}^mM + m\ {}^{m+1}Mz + m\ {}^{m+2}Mz^2 + \ldots.$$

Daraus folgt $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ also $M = A, B, C, D \ldots$
und $m = a, b, c, d \ldots$ nach und nach gesetzt:

$$p^1 = a^1A + a^2Az + a^3Az^2 + a^4Az^3 + \ldots$$

$$p^2 = b^2B + b^3Bz + b^4Bz^2 + b^5Bz^3 + \ldots$$

$$p^3 = c^3C + c^4Cz + c^5Cz^2 + c^6Cz^3 + \ldots$$

= = = = =

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots \end{pmatrix}$$

133.

Ich habe von den Combinationen in (46) hier (131, 132) nur die Classeninvolutionen ausgehoben, und die Versetzungszahlen a, b, c... zu den einzelnen Classen gesetzt. In (46) werden die Classen, eine aus der andern hergeleitet. Wie jede Classe unabhängig (wie hier vornemlich verlangt wird) gefunden werden könne, zeigt (55) an dem Beyspiele von ${}^{10}D$ ganz allgemein.

134.

Aufgabe. Die Reihe (129).

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \ldots = p$$

auf

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben, die Zahl m mag eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn.

135.

Auflösung. Das erste Glied von p^m ist a^m und das $n+1)$te oder

$$p^m \urcorner (n + 1) = ({}^m\mathfrak{A}a^{m-1}\ \mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}\ \mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}\ \mathfrak{c}^n C \ldots + {}^m\mathfrak{N}a^{m-n}\ \mathfrak{n}^n N)z^n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

Die hier gebrauchten Zeichen sind aus dem Vorhergehenden schon bekannt.

136.

Beweis. Man setze die Reihe (134) $p = a + Z$. Der binomische Lehrsatz giebt sodann für jedes m,

$$p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\,a^{m-1}Z^1 + {}^m\mathfrak{B}a^{m-2}Z^2 + {}^m\mathfrak{C}a^{m-3}Z^3 \ldots$$

Die Potenzen z^1, z^2, $z^3 \ldots$ giebt (132); darnach ist

$$\begin{aligned} Z^1 &= \mathfrak{a}^1Az^1 + \mathfrak{a}^2Az^2 + \mathfrak{a}^3Az^3 \ldots + \mathfrak{a}^nAz^n \ldots \\ Z^2 &= \phantom{\mathfrak{a}^1Az^1 + {}} \mathfrak{b}^2Bz^2 + \mathfrak{b}^3Bz^3 \ldots + \mathfrak{b}^nBz^n \ldots \\ Z^3 &= \phantom{\mathfrak{a}^1Az^1 + \mathfrak{b}^2Bz^2 + {}} \mathfrak{c}^3Cz^3 \ldots + \mathfrak{c}^nCz^n \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ b & c & d & e \ldots \end{pmatrix}$$

(Man bekommt nemlich hier gleich in die ersten Glieder Potenzen von Z die Potenzen z^1, z^2, $z^3 \ldots$ weil hier $Z = bz + cz^2 \ldots$ gleich im ersten Gliede z hat, welches sich bey $p = a + bz \ldots$ in (132) anders verhält). Nimmt man nun alle Glieder in denen z^n vorkommt mit den zugehörigen Binomialcoeffizienten und Potenzen von a (nach dem obigen vermittelst der Binomialformel ausgedrückten Werthe von p^m) zusammen; denn diese machen mit einander

das

das gesuchte $(n+1)$te Glied aus, a^m als das erste gezählt: so erhält man die Formel wie sie in (135) steht.

137.

Die einzelnen Glieder für p^m (134) nach dem ersten a^m zu finden, darf man nur in dem allgemeinen Gliede (135) nach und nach $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ setzen. Das giebt $p^m = a^m$

$$+ {}^m\mathfrak{A} a^{m-1}\; a^1 A z^1$$
$$+ ({}^m\mathfrak{A} a^{m-1}\, a^2 A + {}^m\mathfrak{B} a^{m-2}\; b^2 B) z^2$$
$$+ ({}^m\mathfrak{A} a^{m-1}\, a^3 A + {}^m\mathfrak{B} a^{m-2}\; b^3 B + {}^m\mathfrak{C} a^{m-3} c^3 C) z^3$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\ldots \\ b & c & d & e\ldots \end{pmatrix}$$

138.

Aufgabe. Die Reihe

$$a + b + c + d + e + f + \ldots = p$$

auf die Potenz des Exponenten m zu erheben.

139.

Auflösung. 1) wenn m eine ganze positive Zahl ist. Dann ist $p^m \rceil (n+1) = m\; {}^{m+n}M$

$$\text{also } p^m = m\; {}^mM + m\; {}^{m+1}M$$
$$+ m\; {}^{m+2}M \ldots = m\; {}'M$$
$$\text{und } p^1 = a^1A + a^2A + a^3A + a^4A \ldots\ldots = a'A$$
$$p^2 = b^2B + b^3B + b^4B + b^5B \ldots\ldots = b'B$$
$$p^3 = c^3C + c^4C + c^5C + c^6C \ldots\ldots = c'C$$
" " " " " " "

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ a & b & c & d & e\ldots \end{pmatrix}$$

2) wenn

2) wenn m eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl ist, so ist

$$p^m\, ?\, (n + 1) = {}^m\mathfrak{N}\, a^{m-n}\ n'N$$

$$\text{und } p^m = a^m + {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\ a'A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\ b'B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\ cC + \ldots .$$

(b c d e f...)

140.

Beweis. So wie die Reihe (129) sich in die gegebene (138) verwandelt, wenn man in jener $z = 1$ setzt, eben so findet man durch diese Substitution in den Formeln (130, 132) mit Zuziehung von (110) die Formeln für (138, 1) und gleichergestalt die, in (339, 2) wenn man $z = 1$ in die Formel für p^m (137) setzt, und die Glieder, wie sie nach dem dortigen Ausdrucke senkrecht untereinander kommen, nach (111) summirt, und durch a'A, b'B, c'C...n'N ausdrückt.

141.

Hier (140) ist die Potenz m der Reihe $a + b + c + d + \ldots$ aus jener der Reihe $a + bz + cz^2 + dz^4 + \ldots$ abgeleitet worden. Man hätte jene, eben so wie diese ganz independent behandeln können, ich habe aber den eingeschlagenen Weg, der Kürze wegen, vorgezogen habe auch bei den Potenzen wie bey den Produkten (228) die am einfachsten ausgedrückte Reihe $a + bz + cz^2 \ldots$ zum Grunde gelegt. Hindenburgs Formeln für Potenzen (Nov, Syst. Perm. p. LIV, 7, 8) beziehen sich auf die am allgemeinste ausgedrückte Reihe (128)

142.

Es ist nützlich die Vergleichung der Lokalzeichen für Potenzen mit den combinatorischen, etwas näher nachzuweisen, welches am füglichsten durch die Formeln (130, 135) geschehen kann, bey denen, wenn man bloß die Koeffizienten ohne den Faktor z^n betrachtet, der Lokalausdruck $p^m \rceil (n+1)$ in $p^m \varkappa (n+1)$ sich verwandelt.

143.

Daraus und aus (130) folgt für ganze positive Zahlen m

$$\begin{array}{l|l}
p^1 \varkappa (n+1) = \mathfrak{a}^{n+1}A & p^5 \varkappa (n+1) = \mathfrak{e}^{n+5}E \\
p^2 \varkappa (n+1) = \mathfrak{b}^{n+2}B & \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \\
p^3 \varkappa (n+1) = \mathfrak{c}^{n+3}C & p^m \varkappa (n+1) = \mathfrak{m}^{n+m}M \\
p^4 \varkappa (n+1) = \mathfrak{d}^{n+4}D & p^m \varkappa (n-m+1) = \mathfrak{m}^{n}M
\end{array}$$

$$p \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

144.

Eben so folgt aus (142 und 135) für jeden Werth von m

$$p^m \varkappa 1 = a^m$$

$$p^m \varkappa 2 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^1 A$$

$$p^m \varkappa 3 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^2 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^2 B$$

$$p^m \varkappa 4 = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^3 A + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^3 B + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^3 C$$

$$\text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \text{〃}$$

$$p^m \varkappa (n+1) = (\text{dem Coeffizienten von } z^n \text{ in } 135)$$

$$p \begin{pmatrix} \text{〃} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ a & b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

Die

Die in (143 und 144) unter den Formeln beygefügten Nachweisungen zeigen 1) die Coeffizienten a,b,c... der Reihe p, und 2) was für Zahlenwerthe denselben Classencomplexionen zukommen.

145.

Solche Vergleichungen der beyderley (lokal- und combinatorischen) Zeichen und Formeln sind wichtig, weil jene, als Stellvertreter der letztern wegen ihrer signifikanten Kürze, während des Calculs, und selbst in den Formeln für die Endresultate häufig gebraucht werden. Sie knüpfen gleichsam das Band zwischen der gewöhnlichen und der combinatorischen Analysis, und man kann, wenn die Relation zwischen beyden gegeben ist, sogleich aus den Lokalausdrücken in die combinatorischen, und aus diesen in die der gewöhnlichen algebraischen Sprache übergehn. Von solchen Relationen für Potenzen, wie hier (Nov. Syst. Perm. p. LI. und die dortigen Exempel p. LI. und LII.) für Produkte (Ebendas. p. LII. LII).

146.

Nun sey auch m in (144) eine ganz positive Zahl: so geben die beyden Werthe von $p^m \times (n+1)$ in (143, 144 oder 135) einander gleich gesetzt, folgende Relation:

$$\mathfrak{m}\;{}^{n+m}M = {}^{m}\mathfrak{A}\, a^{m-1}\, \mathfrak{a}^{n}A + {}^{m}\mathfrak{B}\, a^{m-2}\, \mathfrak{b}^{n}B + {}^{m}\mathfrak{C}\, a^{m-3}\, \mathfrak{c}^{n}C + \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \dots \\ a & b & c & d \dots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots \\ b & c & d & e & f \dots \end{pmatrix}$$

Die-

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen ab, wo zuerst die Zahl des Binomialcoeffizienten so groß, wie m oder die Klasse so groß wie n ist. Diese Formel giebt einzelne höhere Classen der Potenzen, durch Summen von niedrigern Classen. Auf ähnliche Art hat sie Hindenburg bereits (Nov. Syst. Perm. p. LV. 9) hergeleitet. Man vergleiche hier (102).

147.

Die Buchstaben m, m, M bestimmen einander dergestalt, daß ein Werth des einen die ähnlichen Werthe der beyden andern festgesetzt. Hier mögen Zahlenwerthe für m angenommen, die Werthe der m und M bestimmen.

Für $m=1$ wird $\mathfrak{a}^{n+1}A = {}^1\mathfrak{A}a^0\mathfrak{a}^nA$

" $m=2$ " $\mathfrak{b}^{n+2}B = {}^2\mathfrak{A}a^1\mathfrak{a}^nA + {}^2\mathfrak{B}a^0\mathfrak{b}^nB$

" $m=3$ " $\mathfrak{c}^{n+3}C = {}^3\mathfrak{A}a^2\mathfrak{a}^nA + {}^3\mathfrak{B}a^1\mathfrak{b}^nB + {}^3\mathfrak{C}a^0\mathfrak{c}^nC$

" $m=4$ " $\mathfrak{d}^{n+4}D = {}^4\mathfrak{A}a^3\mathfrak{a}^nA + {}^4\mathfrak{B}a^2\mathfrak{b}^nB + {}^4\mathfrak{D}a^0\mathfrak{d}^nD$

" $m=5$ " $\mathfrak{e}^{n+5}E = {}^5\mathfrak{A}a^4\mathfrak{a}^nA + {}^5\mathfrak{B}a^3\mathfrak{b}^nB + {}^5\mathfrak{E}a^0\mathfrak{e}^nE$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ a & b & c & d \ldots \end{bmatrix}$$

Eben so lassen sich Werthe für n bestimmen (Nov. Syst. Perm. p. LV. 10.)

Für $n^{15}E$ wäre $n = 10$, also käme

$$\mathfrak{e}^{15}E = {}^5\mathfrak{A}a^4\mathfrak{a}^{10}A + {}^5\mathfrak{B}a^3\mathfrak{b}^{10}B + {}^5\mathfrak{C}a^2\mathfrak{c}^{10}C + {}^5\mathfrak{D}a^1\mathfrak{d}^{10}D + {}^5\mathfrak{E}a^0\mathfrak{e}^{10}E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots \\ a & b & c \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \\ b & c & d & e & f \ldots \end{pmatrix}$$

Man vergleiche (60. S. 306) und das Exempel (Nov. Syst. Perm. p. LVI. 11.

148.

Lehrsatz. Aus den Reihen $p, q, r, s\ldots$ (122).

Potenzen, nach der Ordnung.

$$p^a = p^{a}\varkappa 1 + p^{a}\varkappa 2\,z^1 + p^{a}\varkappa 3\,z^2 + p^{a}\varkappa 4\,z^3 \ldots$$
$$q^b = q^{b}\varkappa 1 + q^{b}\varkappa 2\,z^1 + q^{b}\varkappa 3\,z^2 + q^{b}\varkappa 4\,z^3 \ldots$$
$$r^c = r^{c}\varkappa 1 + r^{c}\varkappa 2\,z^1 + r^{c}\varkappa 3\,z^2 + r^{c}\varkappa 4\,z^3 \ldots$$
$$s^d = s^{d}\varkappa 1 + s^{d}\varkappa 2\,z^1 + s^{d}\varkappa 3\,z^2 + s^{d}\varkappa 4\,z^3 \ldots$$

folgt das allgemeine $(n+1)$te Glied,

I. Für das Produkt aus zwey Potenzen.

$$(q^bp^a)\urcorner(n+1) = \overset{q^bp^a}{{}^{n+2}B}z^n$$

$$\text{also } q^bp^a = \overset{q^bp^a}{{}^{2}B} + \overset{q^bp^a}{{}^{3}B} + \overset{q^bp^a}{{}^{4}B}z^2 + \overset{q^bq^a}{{}^{5}B}z^3 + \ldots$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} p^a\varkappa 1 & p^a\varkappa 2 & p^a\varkappa 3 & p^a\varkappa 4\ldots \\ q^b\varkappa 1 & q^b\varkappa 2 & q^b\varkappa 3 & q^b\varkappa 4\ldots \end{pmatrix}} \end{array}$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede, 0, 1, 2, 3... nach und nach für n setzt.

II. Für das Produkt aus drey Potenzen.

$$(r^cq^bp^a)\urcorner(n+1) = \overset{r^cq^bp^a}{{}^{n+3}C}z^n$$

$$\text{also } r^cq^bp^a = \overset{r^cq^bp^a}{{}^{3}C} + \overset{r^cq^bp^a}{{}^{4}C}z + \overset{r^cq^bp^a}{{}^{5}C}z^2 + \overset{r^cq^bp^a}{{}^{6}C}z^3 + \ldots$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{bmatrix} p^a\varkappa 1 & p^a\varkappa 2 & p^a\varkappa 3 & p^a\varkappa 4\ldots \\ q^b\varkappa 1 & q^b\varkappa 2 & q^b\varkappa 3 & q^b\varkappa 4\ldots \\ r^c\varkappa 1 & r^c\varkappa 2 & r^c\varkappa 3 & r^c\varkappa 4\ldots \end{bmatrix}} \end{array}$$

wenn man in dem allgemeinen Gliede 0, 1, 2, 3 nach und nach für n setzt.

III.

III. Für das Produkt aus m Potenzen.

$$(\ldots s^d r^c q^b p^a) \urcorner (n + 1) = {}^{n+m}\overset{s^d r^c q^b p^a}{M} z^n.$$

$$\ldots s^d r^c q^b p^a = {}^{m}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{M} + {}^{m+1}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{M} z + {}^{m+2}\overset{\ldots s^d r^c q^b p^a}{M} z^2 + \ldots$$

(Der Zeiger enthält die Coeffizienten nach der Ordnung aller m Potenzreihen, wie sie in (148) stehen)

Auch hier kommt der Ausdruck für die einzelnen Glieder aus dem allgemeinen, wenn man 0, 1, 2, 3... nach und nach für n setzt.

149.

Beweis. So vielfach, und zusammengesetzt der Lehrsatz (148) auch an sich ist, so leicht ist gleichwohl der combinatorischen Beweis desselben hier an dieser Stelle.

Daß die Variationsklassen *B*, *C*... *M* kommen müssen, erhellet daraus, daß zwey, drei... m Reihen (wie hier in 148) in einander multiplizirt, alle Binionen, Ternionen,... mtionen ihrer Coeffizienten geben (126, 131) und weil diese (nach dem Zeiger) alle von 1 an nach der Ordnung gezählt werden, so fängt *B* mit dem Summenexponen 2 und C mit 3... und *M* mit m an, und gehen dieselben nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort. Daher für die (n + 1)ten Glieder oder Coeffizienten nothwendig ${}^{n+2}B$, ${}^{n+3}C$... ${}^{n+m}M$ kommen müssen. Der Fortgang für die Potenzexponenten 0, 1, 3..., von z ist für sich klar, und so kommt überall z^n für die (n + 1)ten Glieder. Die beygefügten Zeiger anlangend, so darf man darinnen p^{a*1}, p^{a*2}...

q^{b*1},

q^{b}ϰ1, q^{b}ϰ2... u. s. w. als bekannt voraussetzen, weil die Reihen p, q, r, s gegeben sind und nach Hindenburgs (lokal = und combinatorischen) Potenzformeln die p^{a}ϰ$(n + 1)$, q^{b}ϰ$(n + 1)$ u. s. w. durch pϰ$(n + 1)$, qϰ$(n + 1)$ u. s. w. sich ausdrücken lassen. Die Construktion der Variationsklassen mittelst der beygefügten Zeichen, hängt von Tab. IV. (Nov. Syst. Perm. p. LX) ab, in so fern man sich die Complexionen nach (20, 25) nicht selbst machen will.

Auf dieser und ähnlichen Voraussetzungen beruhen die so nützlichen Reduktionen der Probleme auf einander, der zusammengesetztern, auf die einfachern, davon Herr Prof. Pfaff in seinen beyden Abhandlungen (Der polyn. Lehrs. IV. V.) eine Menge interessanter Beyspiele gegeben hat, die ohne dem Gebrauch der Lokalausdrücke zum Theil auf ausserordentliche Verwickelungen geführt haben würden.

150.

Die Ausdrücke (148, I. — III. für ganze Glieder $7(n + 1)$ verwandeln sich sogleich in solche für einzelne Coeffizienten ϰ$(n + 1)$; wenn man dort $z = 1$ setzt, wo also z und alle Potenzen von z ganz wegfallen, und nur die Variationsklassen allein, mit ihrer Summen = und Reihenexponenten übrig bleiben.

151.

Aufgabe. Den Werth, von $(r^{c} q^{b} p^{a})$ϰ3 in Coeffizienten, der einzelnen Potenzen p^{a}, q^{b}, r^{c} auszudrücken. Die Reihen p, q, r stehen (124).

Auflösung. In (148. II.) setze man $n = 2$, $z = 1$ und (150) $\varkappa$ statt l, so findet man

$$(r^c q^b p^a) \varkappa (z + 1) = \overset{r^c q^b p^a}{{}^5C}$$

das giebt nach dem Zeiger (148, II.). Die Complexionen selbst gemacht, oder nach Tab. IV. (Nov. Syst. Perm. p. LX) und den dort überschriebenen Reihenexponenten r, q, p, angeordnet

$$\begin{array}{ll} r^c \varkappa 1\, q^b \varkappa 1\, p^a \varkappa 3 & r^c \varkappa 2\, q^b \varkappa 1\, p^a \varkappa 2 \\ r^c \varkappa 1\, q^b \varkappa 2\, p^a \varkappa 2 & r^c \varkappa 2\, q^b \varkappa 2\, p^a \varkappa 1 \\ r^c \varkappa 1\, q^h \varkappa 3\, p^a \varkappa 1 & r^c \varkappa 3\, q^b \varkappa 1\, p^a \varkappa 1 \end{array}$$

wo man $r^c \varkappa 1$ und $r^c \varkappa 2$ als factores communes in die zugehörigen Nebenfaktoren nehmen, oder jede andere aus den übrigen dazu wählen kann, diejenigen nemlich, die am meisten zusammengesetzt sind. Ein anderes Beyspiel für den nächstfolgenden Coeffizienten $(r^c q^h p^a) \varkappa 4$, steht im Archiv der Mathem. (H. II. S. 2̇27.) Der hiesige Lehrsatz (148) mit seinem Beweise (149) ist nemlich bereits dort, etwas ausführlicher, zugleich mit Anwendung auf gebrochene Funktionen, vorgetragen worden.

152.

Auf der diesem Werke beygefügten Tafel, habe ich die am allgemeinsten ausgedrückte Reihe

$p = az^m + bz^{m+d} + cz^{m+2d} + \ldots$ zur rten Potenz erhoben, und vollständig bis auf 12 Glieder entwickelt. m, d und r können hier jede positive, negative ganze und gebrochene, irrationale oder unmögliche Zahlen seyn. Daß aber die dafür auf der Tafel angegebene combinatorisch-analytische Formel richtig sey, erhellet so:

153.

Man setze in der Formel für p (152), $z^d = y$; so verwandelt sich p in $(a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots).z^m$ mithin

$$p^r = (a + by + cy^2 + dy^3 + \ldots)^r . z^{rm}$$

also ist die Potenzierung von p^r (in 152) auf jener (in 137) zurückgeführt. Setzt man daher nach der Entwickelung $y = z^d$, so hat man vollkommen die Formel so, wie sie auf der Tafel angegeben ist.

154.

Da ich die höchste Allgemeinheit des Binomischen Lehrsatzes, hier voraussetze, so bedarf es weiter keine Rechtfertigung, für negative, irrationale, veränderliche, und unmögliche Exponenten. Ich will daher um die Allmacht der combinatorischen Analysis recht ins Licht zu setzen, im folgenden § nach das 21ste Glied von p^r (152) vollständig entwickeln. Jedes andere nicht combinatorisches Verfahren, würde die vollständige Entwickelung der 20 vorhergehenden Gliedern voraussetzen. Auch des Herrn Etatsrath Tetens Substitutions-Verfahren, ist noch so weitläuftig, daß es auf diesen Wegen so gut wie unausführbar ist. Es giebt leider in diesen Zeiten genug Menschen, welche bey einigen geringen unverdauten mathematischen elementar Kenntnissen, ihre Unverschämtheit so weit treiben, über Sachen abzusprechen von der sie doch nichts weiter als den Nahmen wissen. — Für diese habe ich zum Theil die Entwickelung des 21ten Gliedes unternommen. — Sie mögen ihre gerühmte Stärke in der Analysis daran versuchen — leisten sie auf andern Wegen eben so viel, so will ich der erste seyn, der ihre mathematischen Kenntnissen Gerechtigkeit wiederfahren läßt, von denen sonst ihre compilirten Schriften keinen vortheilhaften Begriff giebt.

$$p^r \times 21\, z^{rm+20d} = p^r \daleth 21$$

$$\left.\begin{array}{l} +\, {}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\ a^{20}A \\ +\, {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\ b^{20}B \\ +\, {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\ c^{20}C \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ +\, {}^r\mathfrak{U}a^{r-20}u^{20}U \end{array}\right| z^{rm+20d}$$

$$\left(\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots\ 20 \\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \ldots\ v \end{array}\right)$$

daraus folgt nun daß

$p^r \times 21 = \dfrac{p^r \daleth 21}{z^{rm+20d}}$ die ganze Summe aller folgenden Theile gleich ist.

$+\, {}^r\mathfrak{A}a^{r-1}$ v

$+\, {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}$: 2bu, 2ct, 2ds, 2er, 2fq, 2gp, 2ho, 2in, 2km, $2l^2$

$+\, {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}$: b^2t, 6bcs, 6bdr, 6beq, 6bfp, 6bgo, 6bhn, 6bim, 6bkl, $3c^2r$, 6cdq, 6cep, 6cfo, 6cgn, 6chm, 6cil, $3ck^2$

$+\, {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}$: $3d^2p$, 6deo, 6dfn, 6dgm, 6dhl, 6dik, $3e^2n$, 6efm, 6egl, 6ehk, $3ei^2$, $3f^2l$, 6fgk, 6fhi, $3g^2i$, $3gh^2$

$+\, {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}$: $4b^3s$, $12b^2cr$, $12b^2dq$, $12b^2ep$, $12b^2fo$, $12b^2gn$, $12b^2hm$, $12b^2il$, $6b^2k^2$, $12bc^2q$, 24bcdp, 24bceo, 24bcfn, 24bcgm, 24bchl, 24bci

$+\, {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}$: $12bd^2o$, 24bden, 24bdfm, 24bdgl, 24bdhk, $12bdi^2$, $12be^2m$, 24befl, 24begk, 24behi, $12bf^2k$, 24bfgi, $12bfh^2$, $12bg^2h$, $4c^3p$, $12c^2do$, $12c^2en$, $12c^2fm$, $12c^2gl$, $12c^2hk$, $6c^2i^2$, $12cd^2n$, 24cdem, 24cdfl, 24cdgk, 24cdhi, $12ce^2l$, 24cefk, 24cegi, $12ceh^2$, $12cf^2i$, 24cfgh, $4cg^3$, $4d^3m$, $12d^2el$, $12d^2fk$, $12d^2gi$, $6d^2h^2$, $12de^2k$, 24defi, 24degh, $12df^2h$, $12dfg^2$, $4e^3i$, $12e^2fh$, $6e^2g^2$, $12ef^2g$, f^4

$+{}^{r}\mathfrak{E}a^{r-5}$

$5b^4r$
$20b^3cq$
$20b^3dp$
$20b^3eo$
$20b^3fn$
$20b^3gm$
$20b^3hl$
$20b^3ik$
$30b^2c^2p$
$60b^2cdo$
$60b^2cen$
$60b^2cfm$
$60b^2cgl$
$60b^2chk$
$30b^2ci^2$
$30b^2d^2n$
$60b^2dem$
$60b^2dfl$
$60b^2dgk$
$60b^2dhi$
$30b^2e^2l$
$60b^2efk$
$60b^2egi$
$30b^2eh^2$
$30b^2f^2i$
$60b^2fgh$
$10b^2g^3$
$20bc^3o$
$60bc^2dn$
$60bc^2em$
$60bc^2fl$
$60bc^2gk$
$60bc^2hi$
$60bcd^2m$
$120bcdel$
$120bcdfk$
$120bcdgi$
$60bcdh^2$
$60bce^2k$
$120bcefi$
$120bdgeh$
$60bcf^2h$
$60bcfg^2$
$20bd^3l$
$60bd^2ek$
$60bd^2fi$
$60bd^2gh$

$+{}^{r}\mathfrak{E}a^{r-5}$

$60bde^2i$
$120bdefh$
$60bdeg^2$
$60bdf^2g$
$20be^3h$
$60be^2fg$
$20bef^3$
$5c^4n$
$20c^3dm$
$20c^3el$
$20c^3fk$
$20c^3gi$
$10c^3h^2$
$30c^2d^2e$
$60c^2dek$
$60c^2dfi$
$60c^2dgh$
$30c^2e^2i$
$60c^2efh$
$30c^2eg^2$
$30c^2f^2g$
$20cd^3k$
$60cd^2ei$
$60cd^2fh$
$30cd^2g^2$
$60cde^2h$
$120cdefg$
$20cdf^3$
$20ce^3g$
$20ce^2f$
$5d^4i$
$20d^3eh$
$20d^3fg$
$30d^2e^2g$
$30d^2ef^2$
$20de^3f$
e^5

$+{}^{r}\mathfrak{F}a^{r-6}$

$6b^5q$
$30b^4cp$
$30b^4do$
$30b^4en$
$30b^4fm$
$30b^4gl$
$30b^4hk$
$15b^4i^2$
$60b^3c^2o$
$120b^3cdn$

$+r\mathfrak{Z}a^{r-6}$

$120b^3cem$
$120b^3cfl$
$120b^3cgk$
$120b^3chi$
$60b^3d^2m$
$120b^3del$
$120b^3dfk$
$120b^3dgi$
$60b^3dh^2$
$60b^3e^2k$
$120b^3efi$
$120b^3egh$
$60b^3f^2h$
$60b^3fg^2$
$60b^2c^3n$
$180b^2c^2dm$
$180b^2c^2el$
$180b^2c^2fk$
$180b^2c^2gi$
$90b^2c^2h^2$
$180b^2cd^2l$
$360b^2cdek$
$360b^2cdfi$
$360b^2cdgh$
$180b^2ce^2i$
$360b^2cefh$
$180b^2ceg^2$
$180b^2cf^2g$
$60b^2d^3k$
$180b^2d^2ei$
$180b^2d^2fh$
$90b^2d^2g^2$
$180b^2de^2h$
$360b^2defg$
$60b^2df^3$
$60b^2e^3g$
$90b^2e^2f^2$
$30bc^4m$
$120bc^3dl$
$120bc^3ek$
$120bc^3fi$
$120bc^3gh$
$180bc^2d^2k$
$360bc^2dei$
$360bc^2dfh$
$180bc^2dg^2$
$180bc^2e^2h$

$+r\mathfrak{Z}a^{r-6}$

$360bc^2efg$
$60bc^2e^3$
$120bcd^3i$
$360bcd^2eh$
$360bcd^2fg$
$360bcde^2g$
$360bcdef^2$
$120bce^3f$
$30bd^4h$
$120bd^3eg$
$60bd^3f^2$
$180bd^2e^2f$
$30bde^4$
$6c^5l$
$30c^4dk$
$30c^4ei$
$30c^4fh$
$15c^4g^2$
$60c^3d^2i$
$120c^3deh$
$120c^3dfg$
$60c^3e^2g$
$60c^3ef^2$
$60c^2d^3h$
$180c^2d^2eg$
$90c^2d^2f^2$
$180c^2de^2f$
$15c^2e^4$
$30cd^4g$
$120cd^3ef$
$60cd^2e^3$
$6d^5f$
$15d^4e^2$

$+r\mathfrak{S}a^{r-7}$

$7b^6p$
$42b^5eo$
$42b^5dn$
$42b^5em$
$42b^5fl$
$42b^5gk$
$42b^5hi$
$105b^4c^2n$
$210b^4cdm$
$210b^4cel$
$210b^4cfk$
$210b^4cgi$
$105b^4ch^2$
$105b^4d^2l$

$+{}^{r}\mathfrak{G}a^{r-7}$
$210b^4dek$
$210b^4dfi$
$210b^4dgh$
$105b^4e^2i$
$210b^4efh$
$105b^4eg^2$
$105b^4f^2g$
$140b^3c^3m$
$420b^3c^2dl$
$420b^3c^2ek$
$420b^3c^2fi$
$420b^3c^2gh$
$420b^3cd^2k$
$840b^3cdei$
$840b^3cdfh$
$420b^3cdg^2$
$420b^3ce^2h$
$840b^3cefg$
$140b^3cf^3$
$140b^3d^3i$
$420b^3d^2eh$
$420b^3d^2fg$
$420b^3de^2g$
$420b^3def^2$
$140b^3e^3f$
$105b^2c^4l$
$420b^2c^3dk$
$420c^2c^3ei$
$420b^2c^3fh$
$210b^2c^3g^2$
$420b^2c^3di$
$1260b^2c^2deh$
$1260b^2c^2dfg$
$630b^2c^2e^2g$
$630b^2c^2ef^2$
$420b^2cd^3h$
$1260b^2cd^2eg$
$630b^2cd^2f^2$
$1260b^2cde^2f$
$105b^2ce^4$
$105b^2d^4g$
$420b^2d^3ef$
$210b^2d^2e^3$
$42bc^5k$
$210bc^4di$
$210bc^4eh$
$210bc^4fg$

$+{}^{r}\mathfrak{G}a^{r-7}$
$420bc^3d^2h$
$840bc^3deg$
$420bc^3df^2$
$420bc^3e^2f$
$420bc^2d^3g$
$1260bc^2d^2ef$
$420bc^2de^3$
$210bcd^4f$
$420bcd^3e^2$
$42bd^5e$
$7c^6i$
$42c^5dh$
$42c^5eg$
$21c^5f^2$
$105c^4d^2g$
$210c^4def$
$35c^4e^3$
$140c^3d^3f$
$210c^3d^2e^2$
$105c^2d^4e$
$7cd^6$

$+{}^{r}\mathfrak{H}a^{r-8}$
$8b^7o$
$56b^6cn$
$56b^6dm$
$56b^6el$
$56b^6fk$
$56b^6gi$
$28b^6h^2$
$168b^5c^2m$
$336b^5cdl$
$336b^5cek$
$336b^5cfi$
$336b^5cgh$
$168b^5d^2k$
$336b^5dei$
$336b^5dfh$
$168b^5dg^2$
$168b^5e^2h$
$336b^5efg$
$56b^5f^3$
$280b^4c^3l$
$840b^4c^2dk$
$840b^4c^2ei$
$840b^4c^2fh$
$420b^4c^2g^2$
$840b^4cd^2i$
$1680b^4cdeh$

$+ r\mathfrak{H}a^{r-8}$

$1680b^4cdfg$
$840b^4ce^2g$
$840b^4cef^2$
$280b^4d^3h$
$840b^4d^2eg$
$840b^4de^2f$
$70b^4e^4$
$280b^3c^4k$
$1120b^3c^3di$
$1120b^3c^3eh$
$1120b^3c^3fg$
$1680b^3c^2d^2h$
$3360b^3c^2deg$
$1680b^3c^2df^2$
$1680b^3c^2dg^2$
$1680b^3c^2e^2f$
$1120b^3cd^3g$
$3360b^3cd^2ef$
$1120b^3cde^3$
$280b^3d^4f$
$560b^3d^3e^2$
$168b^2c^5i$
$840b^2c^4dh$
$840b^2c^4eg$
$420b^2c^4f^2$
$1680b^2c^3d^2g$
$3360b^2c^3def$
$560b^2c^3e^3$
$1680b^2c^2d^3f$
$2520b^2c^2d^2e^2$
$840b^2cd^4e$
$28b^2d^6$
$56bc^6h$
$336bc^5dg$
$336bc^5ef$
$840bc^4d^2f$
$840bc^4de^2$
$1120bc^3d^3e$
$168bc^2d^5$
$8c^7g$
$56c^6df$
$28c^6e^2$
$168c^5d^2e$
$70c^4d^4$

$+ r\mathfrak{J}a^{r-9}$

$9b^8n$
$72b^7cm$
$72b^7dl$
$72b^7ek$
$72b^7fi$
$72b^7gh$
$252b^6c^2l$
$504b^6cdk$
$504b^6cei$
$504b^6cfh$
$252b^6cg^2$
$252b^6d^2i$
$504b^6deh$
$504b^6dfg$
$252b^6e^2g$
$252b^6ef^2$
$504b^5c^3k$
$1512b^5c^2di$
$1512b^5c^2eh$
$1512b^5c^2fg$
$1512b^5cd^2h$
$3024b^5cdeg$
$1512b^5cdf^2$
$1512b^5ce^2f$
$504b^5d^3g$
$1512b^5d^2ef$
$504b^5de^3$
$630b^4c^4i$
$2520b^4c^3dh$
$2520b^4c^3eg$
$1260b^4c^3f^2$
$3780b^4c^2d^2g$
$7560b^4c^2def$
$315b^4c^2e^4$
$2520b^4cd^3f$
$3780b^4cd^2e^2$
$630b^4d^4e$
$504b^3c^5h$
$2520b^4c^4dg$
$2520b^3c^4ef$
$5040b^3c^3d^2f$
$5040b^3c^3de^2$
$5040b^3c^2d^3e$
$504b^3cd^5$
$252b^2c^6g$
$1512b^2c^5df$
$756b^2c^5e^2$

$+{}^{r}\mathfrak{J}a^{r-9}$
$3780b^2c^3d^2e$
$1260b^2c^3d^4$
$72bc^7f$
$504bc^6de$
$504bc^5d^3$
$9c^8e$
$36c^7d^2$

$+{}^{r}\mathfrak{K}a^{r-10}$
$10b^9m$
$90b^8cl$
$90b^8dk$
$90b^8ei$
$90b^8fh$
$45b^8g^2$
$260b^7c^2k$
$720b^7cdi$
$720b^7ceh$
$720b^7cfg$
$360b^7d^2h$
$720b^7deg$
$360b^7df^2$
$360b^7e^2f$
$840b^6c^3i$
$2520b^6c^2dh$
$2520b^6c^2eg$
$1260b^6c^2f^2$
$2520b^6cd^2g$
$5040b^6cdef$
$840b^6ce^3$
$840b^6d^3f$
$1260b^6d^2e^2$
$1260b^5c^4h$
$5040b^5c^3dg$
$5040b^5c^3ef$
$7560b^5c^2d^2f$
$7560b^5c^2de^2$
$5040b^5cd^3e$
$252b^5d^5$
$1260b^4c^5g$
$6300b^4c^4df$
$3150b^4c^4e^2$
$12600b^4c^3d^2e$
$3150b^4c^2d^4$

$+{}^{r}\mathfrak{K}a^{r-10}$
$840b^3c^6f$
$5040b^3c^5de$
$4200b^3c^4d^3$
$360b^2c^7e$
$1260b^2c^6d^2$
$90bc^8d$
c^{10}

$+{}^{r}\mathfrak{L}a^{r-11}$
$11b^{10}l$
$110b^9ck$
$110b^9di$
$110b^9eh$
$110b^9fg$
$495b^8c^2i$
$990b^8cdh$
$990b^8ceg$
$495b^8cf^2$
$495b^8d^2g$
$990b^8def$
$165b^8e^3$
$1320b^7c^3h$
$430b^7c^2dg$
$430b^7c^2ef$
$430b^7cd^2f$
$430b^7cde^2$
$1320b^7d^3e$
$330b^6c^4g$
$1320b^6c^3df$
$660b^6c^3e^2$
$1980b^6c^2d^2e$
$330b^6cd^4$
$2772b^5c^5f$
$13860b^5c^4de$
$4620b^5c^3d^3$
$330b^4c^6e$
$6930b^4c^5d^2$
$495b^2c^8d$
$55b^2c^9$

$+{}^{r}\mathfrak{M}a^{r-12}$ $\begin{cases} 12b^{11}k \\ 132b^{10}ci \\ 132b^{10}dh \\ 132b^{10}eg \\ 66b^{10}f^{2} \\ 660b^{9}c^{2}h \\ 1320b^{9}cdg \\ 1320b^{9}cef \\ 660b^{9}d^{2}f \\ 660b^{9}de^{2} \\ 1980b^{8}c^{3}g \\ 5940b^{8}c^{2}df \\ 2970b^{8}c^{2}e^{2} \\ 5940b^{8}cd^{2}e \\ 495b^{8}d^{4} \\ 3960b^{7}c^{4}f \\ 15840b^{7}c^{3}de \\ 7920b^{7}c^{2}d^{3} \\ 5544b^{6}c^{5}e \\ 13860b^{6}c^{4}d^{2} \\ 5544b^{5}c^{6}d \\ 66b^{2}c^{10} \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{N}a^{r-13}$ $\begin{cases} 13b^{12}i \\ 156b^{11}ch \\ 156b^{11}dg \\ 156b^{11}ef \\ 858b^{10}c^{2}g \\ 1716b^{10}cdf \\ 858b^{10}ce^{2} \\ 858b^{10}d^{2}e \\ 2860b^{9}c^{3}f \\ 8580b^{9}c^{2}de \\ 2860b^{9}cd^{3} \\ 6435b^{8}c^{4}e \\ 12870b^{8}c^{3}d^{2} \\ 10296b^{7}c^{5}d \\ 1716b^{6}c^{7} \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{O}a^{r-14}$ $\begin{cases} 14b^{13}h \\ 182b^{12}cg \\ 182b^{12}df \\ 91b^{12}e^{2} \\ 1092b^{11}c^{2}f \\ 2184b^{11}cde \\ 464b^{11}d^{3} \\ 4004b^{10}c^{3}e \\ 6006b^{10}c^{2}d^{2} \\ 10010b^{9}c^{4}d \\ 3003b^{8}c^{6} \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{P}a^{r-15}$ $\begin{cases} 15b^{14}g \\ 210b^{13}cf \\ 220b^{13}de \\ 1365b^{12}c^{2}e \\ 1365b^{12}cd^{2} \\ 5460b^{11}c^{3}d \\ 3003b^{10}c^{5} \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{Q}a^{r-16}$ $\begin{cases} 16b^{15}f \\ 240b^{14}ce \\ 120b^{14}d^{2} \\ 1680b^{13}c^{3} \\ 1820b^{12}c^{4} \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{R}a^{r-17}$ $\begin{cases} 17b^{16}e \\ 272b^{15}cd \\ 1360b^{14}c^{3} \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{S}a^{r-18}$ $\begin{cases} 18b^{17}d \\ 306b^{16}c \end{cases}$

$+{}^{r}\mathfrak{T}a^{r-19}$ $(\ 19b^{18}c$

$+{}^{r}\mathfrak{U}a^{r-20}$ $(\ b^{20}$

Druckfehler.

In der Tabelle, muß im $p^{r}7\,8$, $3b^2f$ statt $2b^2f$ stehen

$p^{r}7\,12$, $3d^2f$ = $3d^2g$

= = $3de^2$ = $6def$

= = $10b^2d^3$ = $10b^2c^3$

Im Buche

Seite 12 Z. 5 v. u. lies $\frac{1}{2}$ statt $\frac{2}{2}$

= 99 Z. 5 u. 4 v. u. lies mémoires de l'Academie des Sciences. Paris 1772.

= 156 §. 2 u. 3 muß überall x statt $\varkappa$

= 178 §. 21. lies Folgenden

= 213 ist in der Formel für F bey ^{n}A die linke Klammer vergessen

= 216 §. 1 lies $2^n = \frac{n+1 \,.\, n+2 \ldots 2n-1 \,.\, 2n}{1 \,.\, 3 \ldots 2n-1.}$

Seite 220 lies Klügel.

Diese wenigen Fehler habe ich bey einer flüchtigen Durchsicht gefunden, sollten, wie es leider bey einer Schrift mit so vielen Zeichen nicht zu vermeiden ist, noch welche von Erheblichkeit stehen geblieben sind, so werde ich solche bey nächster Gelegenheit bekannt machen.

Allgemeine Potenzirungsformel.

Wenn $p = az^m + bz^{m+d} + cz^{m+2d} + dz^{m+3d} + \dots\dots$

Lokalformel $p^r = p^r{\varkappa}1z^{rm} + p^r{\varkappa}2z^{rm+d} + p^r{\varkappa}3z^{rm+2d} + p^r{\varkappa}4z^{rm+3d} + p^r{\varkappa}5z^{rm+4d} + p^r{\varkappa}6z^{rm+5d} + p^r{\varkappa}7z^{rm+6d} + p^r{\varkappa}8z^{rm+7d} + \dots\dots\dots\dots + p^r{\varkappa}(n+1)z^{rm+nd} + \dots\dots$

$p\,[\,a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, \dots\,]$

combinatorisch-analytische Formel

$$p^r = a^r z^{rm} + {}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^1Az^{rm+d} + \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^2A\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^2B\end{matrix}\right| z^{rm+2d} + \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^3A\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^3B\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}c^3C\end{matrix}\right| z^{rm+3d} + \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^4A\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^4B\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}c^4C\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}d^4D\end{matrix}\right| z^{rm+4d} + \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^5A\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^5B\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}c^5C\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}d^5D\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}e^5E\end{matrix}\right| z^{rm+5d}$$

$$+ \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^6A\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^6B\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}c^6C\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}d^6D\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}e^6E\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}f^6F\end{matrix}\right| z^{rm+6d} + \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^7A\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^7B\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}c^7C\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}d^7D\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}e^7E\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}f^7F\\ + {}^r\mathfrak{G}a^{r-7}g^7G\end{matrix}\right| z^{rm+7d} + \dots\dots + \left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}a^nA\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}b^nB\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}c^nC\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}d^nD\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}e^nE\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}f^nF\\ \vdots\\ + {}^r\mathfrak{M}a^{r-m}m^nM\\ \vdots\\ + {}^r\mathfrak{N}a^{r-n}n^nN\end{matrix}\right| z^{rm+nd} + \dots\dots$$

Zeiger

$$\begin{pmatrix}1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & \dots\\ b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & i, & k, & l, & m, & \dots\end{pmatrix}$$

Vollständige Entwickelung der 12 ersten Glieder von p^r

$$p^r = \underbrace{a^r}_{p^r⁊1 =} z^{rm} + \underbrace{{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}b}_{p^r⁊2 =}\, z^{rm+d} + \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;c\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\;b^2\end{matrix}\right|}_{p^r⁊3 =} z^{rm+2d} + \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;d\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\;2bc\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\;b^3\end{matrix}\right|}_{p^r⁊4 =} z^{rm+3d}$$

$$+ \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;e\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bd\\ c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\;3b^2c\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\;b^4\end{matrix}\right|}_{p^r⁊5 =} z^{rm+4d} + \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;f\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2be\\ 2cd\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2d\\ 3bc^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\;4b^3c\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\;b^5\end{matrix}\right|}_{p^r⁊6 =} z^{rm+5d}$$

$$+ \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;g\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bf\\ 2ce\\ d^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2e\\ 6bcd\\ c^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\left\{\begin{matrix}4b^3d\\ 6b^2c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\;5b^4c\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}\;b^6\end{matrix}\right|}_{p^r⁊7 =} z^{rm+6d} + \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;h\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bg\\ 2cf\\ 2de\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2f\\ 6bce\\ 3bd^2\\ 3c^2d\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\left\{\begin{matrix}4b^3e\\ 12b^2cd\\ 4bc^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\left\{\begin{matrix}5b^4d\\ 10b^3c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}\;6b^5c\\ + {}^r\mathfrak{G}a^{r-7}\;b^7\end{matrix}\right|}_{p^r⁊8 =} z^{rm+7d}$$

$$+ \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;i\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bh\\ 2cg\\ 2df\\ e^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2g\\ 6bcf\\ 6bde\\ 3c^2e\\ 3cd^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\left\{\begin{matrix}4b^3f\\ 12b^2ce\\ 6b^2d^2\\ 12bc^2d\\ c^4\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\left\{\begin{matrix}5b^4e\\ 20b^3cd\\ 10b^2c^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}\left\{\begin{matrix}6b^5d\\ 15b^4c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{G}a^{r-7}\;7b^6c\\ + {}^r\mathfrak{H}a^{r-8}\;b^8\end{matrix}\right|}_{p^r⁊9 =} z^{rm+8d} + \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;k\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bi\\ 2ch\\ 2dg\\ 2ef\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2h\\ 6bcg\\ 6bdf\\ 3be^2\\ 3c^2f\\ 6cde\\ d^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\left\{\begin{matrix}4b^3g\\ 12b^2cf\\ 12b^2de\\ 12bc^2e\\ 12bcd^2\\ 4c^3d\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\left\{\begin{matrix}5b^4f\\ 20b^3ce\\ 10b^3d^2\\ 30b^2c^2d\\ 5bc^4\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}\left\{\begin{matrix}6b^5e\\ 30b^4cd\\ 20b^3c^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{G}a^{r-7}\left\{\begin{matrix}7b^6d\\ 21b^5c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{H}a^{r-8}\;8b^7c\\ + {}^r\mathfrak{I}a^{r-9}\;b^9\end{matrix}\right|}_{p^r⁊10 =} z^{rm+9d}$$

$$+ \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;l\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bk\\ 2ci\\ 2dh\\ 2eg\\ f^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2i\\ 6bch\\ 6bdg\\ 6bef\\ 3c^2g\\ 6cdf\\ 3ce^2\\ 3d^2e\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\left\{\begin{matrix}4b^3h\\ 12b^2cg\\ 12b^2df\\ 6b^2e^2\\ 12bc^2f\\ 24bcde\\ 4bd^3\\ 4c^3e\\ 6c^2d^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\left\{\begin{matrix}5b^4g\\ 20b^3cf\\ 20b^3de\\ 30b^2c^2e\\ 30b^2cd^2\\ 20bc^3d\\ c^5\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}\left\{\begin{matrix}6b^5f\\ 30b^4ce\\ 15b^4d^2\\ 60b^3c^2d\\ 15b^2c^4\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{G}a^{r-7}\left\{\begin{matrix}7b^6e\\ 42b^5cd\\ 35b^4c^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{H}a^{r-8}\left\{\begin{matrix}8b^7d\\ 28b^6c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{I}a^{r-9}\;9b^8c\\ + {}^r\mathfrak{K}a^{r-10}\;b^{10}\end{matrix}\right|}_{p^r⁊11 =} z^{rm+10d} \dots \left| + \underbrace{\left.\begin{matrix}{}^r\mathfrak{A}a^{r-1}\;m\\ + {}^r\mathfrak{B}a^{r-2}\left\{\begin{matrix}2bl\\ 2ck\\ 2di\\ 2eh\\ 2fg\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{C}a^{r-3}\left\{\begin{matrix}3b^2k\\ 6bci\\ 6bdh\\ 6beg\\ 3bf^2\\ 3c^2h\\ 6cdg\\ 6cef\\ 3d^2g\\ 6def\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{D}a^{r-4}\left\{\begin{matrix}4b^3i\\ 12b^2ch\\ 12b^2dg\\ 12b^2ef\\ 12bc^2g\\ 24bcdf\\ 12bce^2\\ 12bd^2e\\ 4c^3f\\ 12c^2de\\ 4cd^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{E}a^{r-5}\left\{\begin{matrix}5b^4h\\ 20b^3cg\\ 20b^3df\\ 10b^3e^2\\ 30b^2c^2f\\ 60b^2cde\\ 10b^2c^3\\ 20bc^3e\\ 30bc^2d^2\\ 5c^4d\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{F}a^{r-6}\left\{\begin{matrix}6b^5g\\ 30b^4cf\\ 30b^4de\\ 60b^3c^2e\\ 60b^3cd^2\\ 60b^2c^3d\\ 6bc^5\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{G}a^{r-7}\left\{\begin{matrix}7b^6f\\ 42b^5ce\\ 21b^5d^2\\ 105b^4c^2d\\ 35b^3c^4\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{H}a^{r-8}\left\{\begin{matrix}8b^7e\\ 56b^6cd\\ 56b^5c^3\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{I}a^{r-9}\left\{\begin{matrix}9b^8d\\ 36b^7c^2\end{matrix}\right.\\ + {}^r\mathfrak{K}a^{r-10}\;10b^9c\\ + {}^r\mathfrak{L}a^{r-11}\;b^{11}\end{matrix}\right|}_{p^r⁊12 =} \right. z^{rm+11d} + \dots$$

Erklärung einiger Zeichen.

$1, {}^r\mathfrak{A}, {}^r\mathfrak{B}, {}^r\mathfrak{C}, \dots {}^r\mathfrak{M} \dots {}^r\mathfrak{N} \dots$ sind hier zum Potenzexponenten r gehörige Binomial-Coeffizienten, und zwar nach der Ordnung wie sie hier stehen, der 0te, 1ste, 2te, 3te ... mte ... nte; wo also ${}^r\mathfrak{N} = \dfrac{r \,.\, r-1 \,.\, r-2 \dots [r-(n-1)]}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots\dots n}$.

$\varkappa$ und ⁊, sind bloße Zeichen wie $\sqrt{\ }$, log. das erstere dient die Stellen der Coeffizienten, das andere die Stellen der Glieder nachzuweisen; so heißt $p^r{\varkappa}(n+1)z^{rm+nd}$; der $(n+1)$te Coeffizient von p^r multiplizirt in z^{rm+nd}. Dieser $(n+1)$te Coeffizient kann selbst wieder aus einer Menge Partialproducte bestehen, wie man aus dem $(n+1)$ten Gliede, der combinatorisch-analytischen Formel für p^r deutlich siehet; dieses $(n+1)$te Glied giebt man nun in Lokalzeichen so an: $p^r⁊(n+1)$ und ist $= p^r{\varkappa}(n+1)z^{rm+nd}$. Der Zeiger zeigt an, was man für Dinge oder Elemente, zu 1, zu 2, zu 3 ... zu n combiniren soll, die Combinationen zu 1 werden überhaupt durch 'A, die zu 2 durch 'B, die zu 3 durch 'C .... die zu n durch 'N angedeutet, und heißen 1ste, 2te, 3te ... nte Classe. ${}^nN$ aber bedeutet nicht bloß die nte Combinationsklasse, sondern verlangt überdies, daß wenn man in dieser Classe, für jedes Element die im Zeiger ihm entsprechende Zahl setzt, daß alsdenn die Summe jeder einzelnen Verbindung (Complexion) zu n Elementen, gerade n betrage; bey ${}^5C$ zeigt demnach der Summenexponent 5 an, daß die Summe jeder Complexion der dritten Classe 5 betragen soll. der vor diesen Classenzeichen Links stehende gleichnahmige kleine deutsche Buchstabe zeigt an, daß man vor jeder Complexion der zu ihm gehörigen Classe ihre Versetzungszahl (Polynomialzahl) schreiben soll. Ein Ausdruck in combinatorischen Zeichen wie dieser ${}^nN$, zeigt an daß man die nte Combinationsclasse zur Summe n entwickeln und vor jeder einzelnen Complexion die Versetzungszahl vorschreiben soll.