Johann Andr. Christ. Michelsen's

Professors der Mathematic und Physic am vereinigten Berlinischen
und Cöllnischen Gymnasium

Anleitung
zur
juristischen, politischen
und
öconomischen
Rechenkunst.

Erster Theil.

Halle
im Verlage des Waysenhauses
1782.

Sr. Hochwohlgebornen

Herrn

Johann Albrecht Philippi

Königl. Preußischen geheimen Kriegesrathe und Präsidenten der königlichen Residenzien

etc.

Sr. Hochwohlgebornen

Herrn

Carl Friedrich Ransleben

Königl. Preußischen geheimen Rathe und Bürgermeister der königlichen Residenzien

etc.

wie auch

6

Sr. Wohlgebornen

Herrn

Christian Benjamin Wackenroder

Königl. Preuß. Kriegesrathe und Bürgermeister der königlichen Residenzien

und

Sr. Wohlgebornen

Herrn

Christian Albrecht Friedrich Buchholz

Königl. Preuß. Kriegesrathe und Bürgermeister der königlichen Residenzien.

Hochwohlgeborne Wohlgeborne
Hochzuverehrende Herrn!

Ich habe von Ew. Hochwohl- und Wohlgebornen während der Führung meines jetzigen Amts so viele und so starke Beweise von Deroselben

Gewogenheit gegen mich erhalten, daß mein dadurch innigst gerührtes Herz längst den Wunsch hegen mußte, meine Dankbarkeit dagegen öffentlich an den Tag legen zu können. Wie schmeichelhaft war für mich die Art, mit welcher **Ew. Hochwohl- und Wohlgebornen** mir vor drey und einem halben Jahre das Amt, das ich bekleide, übertrugen!

gen! Wie reizend nachmals Deroselben Gewogenheitsvolles Verhalten gegen mich! Wie ermunternd, daß Dieselben kürzlich die äussern Vortheile meines Postens ohne die geringste Bitte von meiner Seite so gütig vergrössert haben! Innigste Dankbarkeit, verbunden mit der größten Verehrung und vollkommensten Hochachtung erfüllt gegen

Ew. Hochwohl- und Wohlgebor-
nen mein ganzes Herz, und ich habe keine
angelegentlichere Bitte, als so wie über-
haupt um die Fortsetzung Deroselben mir
unschätzbaren Gewogenheit, also insbe-
sondere jetzt um gütige Verzeihung, daß
ich die Gelegenheit ergriffen habe, welche
mir die gegenwärtige Anleitung zur ju-
ristischen, politischen und öconomischen
Rechen-

Rechenkunst darbot, öffentlich zu sagen, daß mir das Glück höchst schätzbar ist, unter den Vätern Berlins, den thätigsten und verdienstvollsten Beförderern des Flors der Ihrer Vorsorge sich rühmenden Gymnasien und Schulen an der Ausbildung der Jugend zu arbeiten. Ich verharre mit der ehrerbietigsten Hochachtung und unter den aufrichtigsten Wünschen für die Verlängerung

Ein,

Ew. Hochwohl- und Wohlgebornen durch so viele und grosse Verdienste ausgezeichneten Lebens

Ew. Hochwohl-

und

Wohlgebornen

Berlin
den 4ten April
1782.

gehorsamster
J. A. C. Michelsen.

Vorrede.

Ich weiß nicht, ob mein Vorsatz, die juristische, politische und öconomische Rechenkunst ausführlich und ohne die höhere Arithmetic zu bearbeiten, allgemein gebilliget werden wird, und ich gestehe selbst, daß eine solche Behandlungsart nicht ohne alle Unbequemlichkeiten ist. Um dieselben mit ein Paar Worten zu berühren, so ist man ohnstreitig, wenn man die höhere Arithmetic zu Hülfe nimmt, oft im Stande weiter zu gehen, als man ohne dieselbe thun könnte, wenn gleich das Gebiet der gemeinen Rechenkunst nicht in so enge Grenzen eingeschlossen werden darf, als es Unger in seinen Beyträgen zur Mathesi forensi und andere thun. Ausserdem erfordert so wohl der Ausdruck als der Beweis der jedesmal zu befolgenden Regeln, wenn man sich dabey des Gebrauchs der Buchstaben enthält, meistentheils eine grössere Weitläuftigkeit, und endlich ist bey der Befolgung wörtlich ausgedruckter Regeln mehr Nachdenken nöthig, als wenn man nach Vorschriften rechnet, die in Buchstaben ausgedruckt sind. Ohnerachtet ich indeß

diese

diese Schwierigkeiten, ehe ich den gedachten Vorsatz vest faßte, in ihrer ganzen Grösse und Wichtigkeit überdacht habe, so sind sie gleichwohl nicht im Stande gewesen, mich von der Ausführung desselben zurückzuhalten, und die Gründe davon sind folgende. Einmal betrachtet man jetzt zwar nicht mehr so wie sonst die höhere Arithmetic als eine Wissenschaft, deren Erlernung ganz besondere Anlagen verlange, und noch weniger sieht man sie als blosse müßige Speculation an; indeß giebt es doch, so sehr man auch den Zugang zu ihr erleichtert hat, und so sehr man ihr in Ansehung ihrer Nutzbarkeit, so bald man einigen wahren Begriff von ihr hat, Gerechtigkeit wiederfahren läßt, unter denen, die sich der Mathematic nicht vorzüglich widmen, noch immer nur sehr wenige, die es der Mühe werth halten, sich frühzeitig in derselben eine solche Fertigkeit zu erwerben, daß sie ohne Schwierigkeit Regeln im algebraischen Gewande als Vorschriften gebrauchen könnten. Genau erwogen ist auch diese Fertigkeit so leicht nicht erworben; sie verlangt häufige und mannigfaltige Uebung, und ohne diese Uebung reicht dazu selbst der beste Unterricht nicht hin. Wo ist dazu stets die Gelegenheit? Wo,

wenn

wenn diese da ist, die erforderliche Zeit? Schon aus diesem Grunde glaubte ich, bey der Gemeinnützigkeit der juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst, manchen Personen keinen unangenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich dieselbe auf eine vollständige und allgemein faßliche Art bearbeitete. Diese Meinung bestätigte auch das Urtheil, welches verschiedene meiner Freunde über die vortreflichen Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, fällten, welche Hr. Carl Chassot de Florencourt mit einer Vorrede des Herrn Hofr. Kästners vor einem Jahre zu Altona im Richterischen Verlage herausgegeben hat. Je mehr sich in diesem Fache von einem Schüler Kästners, dieser Name bedarf keinen Zusatz, hoffen ließ, desto mehr bedaurten sie, daß diese Abhandlungen nur für solche nutzbar wären, welche mit besonderm Fleisse sich auf die Mathematic gelegt hätten, und munterten dabey mich zu der Arbeit auf, von welcher ich hier den ersten Theil liefere. Unter andern that dies der berühmte Verfasser der öconomischen Encyclopädie, der dies Unternehmen zwar als mit vielen Schwierigkeiten verknüpft, aber doch auch als möglich und gemeinnützig betrachtete. Es schienen mir auch die anfänglich erwähnten Schwierigkeiten, je mehr ich sie überlegte, desto geringer. Reicht die gemeine Arithmetic oft so weit nicht als die höhere Rechenkunst, so ist sie doch zu den im Leben brauchbaren juristischen, politischen und öconomischen Rechnungen nicht unzureichend. Kann man, wenn man Buchstaben gebraucht, die Regeln der Rechenkunst kürzer ausdrucken und beweisen, so wird die Kenntniß derselben bey einem Vortrage, der sich der Buchstaben enthält, anschaulicher, man lernt dabey mehr die Anwendung der gegebenen Regeln, und genau betrachtet, so kann man als gemeiner Arithmetiker auch oft kürzere Wege einschlagen, als die Algebra an die Hand giebt. Was endlich das nöthige stärkere Nachdenken beym Rechnen ohne Buchstaben betrifft, so ist solches doch nur bey der so genannten Aufsetzung der Exempel nöthig, und vielleicht ist es da mehr ein Vortheil als ein Schade, indem es Gelegenheit werden kann, daß man sich um so weniger irret. Auf diese Art mußte ich insbesondere in Ansehung jener Unbequemlichkeiten denken, wenn ich mir den Vortrag der gemeinen theoretischen Arithmetic etwas anders als gewöhnlich eingerichtet dachte. Da ich in der folgenden Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst in Ansehung der Grundregeln mich bisweilen von den gewöhnlichen Vorstellungen entfernt habe, so ist es unstreitig meine Pflicht, hier das wichtigste davon zu berühren, und dies wird mir Gelegenheit geben, über die beste Art, die gemeine theoretische Arithmetic vorzutragen, meine Gedanken zu eröffnen.

Es ist mir oft auffallend gewesen, daß diejenigen, die ich in der gemeinen theoretischen Arithmetic unterrichtete, bey so manchen Dingen Schwierigkeiten fanden, wobey sie gleichwohl keine andere als schon betretene Wege zu gehen hatten, oder welche, genau erwogen, doch bey weitem so schwer nicht waren, als andere mit grosser Leichtigkeit von ihnen begriffene Dinge. Ueberhaupt bin ich bey dem Unterrichte in der Geometrie immer weit eher im Stande gewesen, ohne Anstoß fortzuschreiten, als in der gemeinen theoretischen Arithmetic, selbst, wenn ich den Unterricht in der gesammten reinen Mathematic von der Geometrie angefangen hatte. Die Decimalrechnung, die Rechnung mit Dignitäten, die Logarithmen wurden gewöhnlich schwer begriffen, und eine gründliche Ueberzeugung von der Richtigkeit der Regeln der gemeinen Rechenkunst erforderte wiederholte oft wiederholte Arbeit. Ueberzeugt, daß der Grund davon in der Methode liege, bemühte ich mich denselben aufzufinden, und glaubte ihn endlich in der Unvollständigkeit der ersten und eben deswegen Hauptbegriffe in der Arithmetic und darin wahrzunehmen, daß so manche Gegenstände in dieser Wissenschaft zu spät berührt werden. Ich dachte also vor allen Dingen über den Begriff der Zahl und ihre Arten nach, und da die Zahlen nichts anders sind als Begriffe oder Zeichen der Entstehungsart der Grössen aus andern gleichartigen, so mußte ich nothwendig so viel Arten der Zahlen annehmen, als es Entstehungsarten der Grössen aus andern gleichartigen giebt. Man betrachtet nun, wenn man die Entstehungsart der Grössen aus andern gleichartigen untersucht, die Grössen entweder an und für sich, oder in Rücksicht auf etwas. Im leztern Falle theilen sich die Grössen in positive und negative ein, wovon jene mit den absoluten Grössen übereinkommen. Ferner entsteht eine Grösse aus einer andern gleichartigen

1. durch die Wiederholung, wobey entweder
   A stets dieselbe Grösse oder stets ihr gleiches Gegentheil wiederholt wird. Geschieht dies, so ist die Wiederholung
      a eintheilig,
      b vieltheilig; oder es wird
   B nicht stets dieselbe Grösse oder ihr gleiches Gegentheil, sondern auch andere daraus entstandene Grössen wiederholt. Geschieht dies, so ist die Wiederholung
      a einfach,
      b zusammengesetzt, und diese
         A ungleichförmig,
         B gleichförmig.
2. durch die Theilung
   A einfache,
   B zusammengesetzte,
      a ungleichförmige,
      b gleichförmige.
3. durch die Wiederholung und Theilung nach einander angewandt
   A einfache Wiederholung und einfache Theilung.
   B einfache Wiederholung und zusammengesetzte, ungleichförmige oder gleichförmige, Theilung.

C zusammengesetzte, ungleichförmige oder gleichförmige, Wiederholung, und einfache Theilung.

D zusammengesetzte Wiederholung und Theilung,

a beyde ungleichförmig,

b die eine gleichförmig, und die andere ungleichförmig,

c beyde gleichförmig,

A ungleichartig, ungleichnamig oder gleichnamig

B gleichartig, und ungleichnamig.

Nach dieser Tabelle theilte und ordnete ich nun die Zahlen in folgende Classen.

1. Multiplicatoren,

A auf einerley Einheiten sich beziehende,

a eintheilige,

b vieltheilige.

B auf verschiedene Einheiten sich beziehende

a einfache,

b zusammengesetzte

A Producte,

B Dignitäten.

2. Di-

2. Divisoren
   A einfache } eintheilige oder vieltheilige
   B zusammengesetzte }
      a Producte
      b Dignitäten
3. Brüche
   A einfache
   B und C theils einfache, theils zusammengesetzte
   D durchaus zusammengesetzte
      a Zähler und Nenner Producte
      b der eine ein Product und der andere eine Dignität
      c beyde Dignitäten
         A ungleichartige, ungleichnamige oder gleichnamige
         B gleichartige und ungleichnamige.

Hiezu kommt noch die Unterscheidung der Zahlen in positive und negative. Der Wurzeln wird bey den Dignitäten erwähnt, und eben daselbst auch der Logarithmen.

Nachdem ich mir auf diese Art die verschiedenen Arten der Zahlen geordnet hatte, glaubte ich im Stande zu seyn, die gesammte gemeine theoretische Arithmetic auf eine solche Art in Abschnitte zu theilen, daß man in derselben eben so als in der Geometrie von dem einen Abschnitte zum andern ohne Anstoß fortschreiten könnte, theilte sie daher in zwey Haupttheile, und setzte zu den Abschnitten des ersten folgende vest.

1. Begriff der Zahl und ihre Arten. Art und Weise, dieselben so wohl durch Worte als durch Zeichen auszudrucken. Positive und negative Zahlen, Multiplicatoren und Divisoren, eintheilige so wohl als vieltheilige, Producte, Dignitäten, Wurzeln, Logarithmen, Brüche, insbesondere Decimalbrüche. Die Zeichen +, —, ×, : nebst dem gleichbedeutenden —, welches zwischen Zähler und Nenner zu stehen kommt, √ mit seinen Arten.
2. Die Addition der absoluten Grössen und Zahlen, der gleichnamigen so wohl als der ungleichnamigen.
3. Die Subtraction absoluter Grössen und Zahlen, gleichnamiger so wohl als ungleichnamiger.
4. Die Vereinigung entgegengesetzter Grössen und Zahlen.
5. Die Bestimmung des Unterschiedes entgegengesetzter Grössen und Zahlen.

6. Die

6. Die Multiplication der Grössen und Zahlen nach positiven so wohl als negativen Multiplicatoren,

a allgemeine Regeln der Multiplication

b besondere Regeln

1. für die Multiplication derjenigen Factoren, die Producte sind

2. für die Multiplication der Dignitäten nach Dignitäten, und hiebey die Addition der Logarithmen.

7. Die Division der Grössen und Zahlen nach positiven so wohl als negativen Divisoren

a allgemeine Regeln der Division

b besondere Regeln

1. für die Division zusammengesetzter Grössen und Zahlen nach Producten

2. für die Division der Dignitäten nach Dignitäten, und hiebey die Subtraction der Logarithmen

8. Genauere Betrachtung der Brüche, in so fern sie in den vorhergehenden Abschnitten nicht haben mitgenommen werden können.

a Verwandelung der Brüche in andere gleich bedeutende, insbesondere Decimalbrüche b Verwandelung mehrerer Brüche in gleich bedeutende und mit einem gemeinschaftlichen Nenner ausgedruckte

c Addition der Brüche

d Subtraction der Brüche

e Vereinigung entgegengesetzter Brüche

f Bestimmung des Unterschieds entgegengesetzter Brüche.

9. Die Veränderung der Grössen und Zahlen nach Brüchen, oder die Multiplication und Division der Grössen und Zahlen nach Brüchen.

10. Die Erhebung aller Arten von Zahlen zu Dignitäten, und dabey die Multiplication der Logarithmen

11. Die Extraction der Wurzeln aus allen Arten der Zahlen, und dabey die Division der Logarithmen.

12. Von den logarithmischen Systemen, ihrer Beschaffenheit, Verfertigungsart und Gebrauch. Hiebey das ausserdem im vorhergehenden berührten von den Logarithmen ferner wissenswürdige.

Dem 2ten Haupttheile der Arithmetic ordnete ich ferner folgende Abschnitte unter.

1. Von

1. Von den Verhältnissen überhaupt, und den einfachen Verhältnissen insbesondere
   a Begriff des Verhältnisses und Arten desselben
   b Verwandelung der Verhältnisse, insbesondere in andere gleiche Verhältnisse
   c Verwandelung der Verhältnisse in Zahlen.
2. Von den zusammengesetzten Verhältnissen
   a überhaupt
   b von den mehrmal so hohen oder so niedrigen Verhältnissen insbesondere, und dabey
      1. von der Verwandelung der zusammengesetzten Verhältnisse in gleiche einfache
      2. von der Verwandelung der zusammengesetzten Verhältnisse in Zahlen.
3. Von den Logarithmen der Verhältnisse
4. Von der Veränderung der Grössen und Zahlen nach Verhältnissen
5. Von den Proportionen.
6. Von den Progreßionen
   a den arithmetischen
   b den geometrischen.

Ich kann, wenn ich nicht unzweckmäßig weitläuftig werden will, diesen tabellarischen Entwurf nicht weiter ins besondere fortsetzen, und bin daher auch nicht im Stande, jetzt ganz den Gedanken aus dem Wege zu räumen, ob nicht auf diese Art der Vortrag der Arithmetic mehr erschwert als erleichtert werde, und ob derselbe systematisch genug sey? Mein Urtheil darüber gründet sich auf einen bereits damit gemachten Versuch, und ich behalte es mir vor, in Unterredungen eines Lehrers mit seinen Schülern über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetic, die, eben so als meine Versuche in socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der ebenen Geometrie, nicht erdichtete Unterhaltungen seyn sollen, nach diesem Plane die Arithmetic behandelt zu liefern. Daß übrigens die Art zu rechnen, da man die jedesmal vorzunehmenden Operationen nicht selbst vollbringt, sondern nur bezeichnet, allenthalben gelehret und geübt werden müsse, versteht sich von selbst, weil darauf die Möglichkeit der Erfindung und der Beweise der Regeln der Arithmetic beruht. Jetzt will ich nun das, was wegen der in der folgenden Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst eingeschlagenen Wege hier angeführt werden muß, nach den vorhergehenden berühren.

Das

Das erste betrift die Multiplication und Division entgegengesetzter Factoren. Die Zeichen + und — werden so wie in der Mathematic überhaupt also auch in der Arithmetic in mancherley Bedeutung gebraucht, zeigen aber immer an, daß man die Grössen oder Zahlen, vor welchen sie stehen, mit Rücksicht betrachten müsse, so daß man daher zwey einander entgegenstehende Arten erhält. Dies ist ihre allgemeine Bedeutung; die jedesmalige besondere Bedeutung derselben ergiebt sich aus den statt findenden Umständen. Blosse Zahlen mit + oder — bezeichnet, sind nichts anders als zu summirende oder abzuziehende Zahlen. Eine Zahl an und für sich zeigt eine Einheit, oder einen oder mehrere Theile derselben als daseyend an. Versteht sich dies Daseyn nicht von selbst, so setzt man + vor die Zahl, um solches anzuzeigen. Das Zeichen — zeigt das Gegentheil an, und folglich, daß die Zahl, vor welcher es steht, als weggenommen oder als wegzunehmen gedacht werden solle. Werden aber Zahlen zu Einheiten, z. E. zu Rℓ, oder auch zu andern Zahlen als Factoren gesetzt, so zeigen sie an, daß man diese Einheit oder Zahl entweder ganz oder einem oder einigen Theilen nach nehmen müsse. Versteht

steht sich, daß man diese Einheit oder Zahl u. s. w. selbst, so wie es die beygesetzte Zahl anzeigt, nehmen soll, nicht von selbst, so setzt man davor +; das Zeichen —, das das entgegenstehende anzeigen soll, bedeutet also, daß man das gleiche Gegentheil der Einheit oder eines oder mehrerer Theile derselben nehmen solle. Dies vorausgesetzt, so sey

der Multiplicandus	der Multiplicator
1. +	+
2. +	—
3. —	+
4. —	—.

Im ersten und dritten Falle muß man also den Multiplicandum selbst nehmen, und das Product erhält also im ersten + und im 3ten —; im 2ten und 4ten Falle aber muß das gleiche Gegentheil des Multiplicandus genommen werden, und das Product erhält im 2ten — und im 4ten +. Einerley Zeichen der Factoren geben also im Producte +, und verschiedene —. Wenn Zahlen Divisoren sind, so zeigen sie an, in wie viel Theile der Dividendus selbst getheilt werden soll. Ist Zweydeutigkeit zu befürchten, so setzt man das Zeichen + davor. Ein negativer Divisor

visor zeigt also an, daß das gleiche Gegentheil des Dividendus getheilt werden solle. Nun sey

der Dividendus		der Divisor
1.	+	+
2.	+	—
3.	—	+
4.	—	— ; so muß

man auch hier im 1ten und 3ten Falle den Dividendus selbst, und im 2ten und 4ten sein gleiches Gegentheil theilen. Der Quotient ist daher im 1ten und 4ten Falle +, im 2ten und 3ten aber —. Mit andern Worten: Auch in der Division geben einerley Zeichen im Quotienten +, und verschiedene —.

Ich ziehe diese Vorstellungsart allen andern vor, weil man dabey den simpelsten Begriff von der Multiplication und Division beybehalten kann, und sie demohnerachtet gar nicht schwankend ist, so wie man solches von derjenigen, die sich in Eulers vollständigen Anleitung zur Algebra S. 14 u. f. findet, behaupten muß.

Das zweyte betrift die Logarithmen, und zwar

a den Begriff derselben.

Neper

Neper wurde durch die Betrachtung der Eigenschaften der arithmetischen und geometrischen Progreßionen auf die Erfindung der Logarithmen geleitet, und natürlich war es, daß dieser Umstand auf die Vorstellung, die er von den Logarithmen machte, Einfluß hatte. Brigg ging auf Nepers Rath bey der Berechnung der Logarithmen von Nepern ab, allein die arithmetischen und geometrischen Progreßionen wurden doch dabey vorausgesetzt. Auch nachher ist man größtentheils bey dieser Vorstellungsart geblieben; sie hat aber mehrere Unbequemlichkeiten. Denn einmal kann auf diese Art der Logarithmen erst spät gedacht werden, und das schadet der Fertigkeit im Gebrauche derselben. Zweytens werden die Logarithmen dadurch schwerer zu fassen, indem die Lehre von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse vorausgesetzt wird. Und endlich drittens gehen vor der Lehre von den Logarithmen, wenn man sie nach der Lehre von den Progreßionen erst vorträgt, in der Lehre von den Progreßionen wenigstens, viele Fälle vorher, wo der Gebrauch der Logarithmen von der größten Wichtigkeit ist. Von diesen Unbequemlichkeiten ist folgende Vorstellungsart frey.

Die

Die Zahlen, welche aus der Einheit durch eine gleichförmige Wiederholung oder Theilung entstehen, heissen Dignitäten. Um davon jedesmal einen deutlichen Begriff zu haben, muß man wissen, einmal die Grösse der Wiederholung oder Theilung, und zweytens, wie vielmal die gleichförmige Wiederholung oder Theilung angestellt sey. Die Zahl, welche die Grösse der Wiederholung oder Theilung anzeigt, wird die Wurzel, und die Zahl, welche die Menge der gleichförmigen Wiederholungen oder Theilungen anzeigt, der Exponent oder der Logarithme der Dignität genannt. Da die gleichförmigen Wiederholungen und Theilungen einander entgegengesetzt sind, so theilen sich die Dignitäten in positive und negative ein, und beyde Arten erhalten von der Anzahl der in ihnen befindlichen Wiederholungen oder Theilungen die Beynamen erste, zweyte, dritte, vierte u. s. w. positive oder negative Dignität. Die erste Dignität ist mit der Wurzel einerley, die zweyte Dignität heißt auch Quadratzahl, und die dritte Cubiczahl. Bey den positiven Dignitäten ist der Logarithme positiv, und bey den negativen negativ. Es zeigt nemlich der Logarithme ohne oder mit dem Zeichen + eine gleichförmige Wieder-

holung

holung an, und da der negative Logarithme eine entgegenstehende Bedeutung haben muß, so bleibt für ihn nichts als die gleichförmige Theilung anzuzeigen übrig. Die Wurzeln werden in Rücksicht auf die Dignität, zu welcher sie gerechnet werden, auch die zweyte, dritte, vierte Wurzel u. s. w. genennt, und die erste Wurzel heißt auch Quadratwurzel, und die dritte Cubicwurzel. Was die Art eine Dignität zu schreiben betrift, so setzt man oberhalb der Wurzel etwas zur Rechten den Logarithmen, gebraucht aber dazu eine kleiner geschriebene Zahl als zu der Wurzel.

Folgende Reihe

$$\frac{1}{1\times4\times4\times4\times4},\ \frac{1}{1\times4\times4\times4},\ \frac{1}{1\times4\times4},\ \frac{1}{1\times4},\ \frac{1}{1},\ 1\times4,$$
$$1\times4\times4,\ 1\times4\times4\times4,\ 1\times4\times4\times4\times4$$

stellt verschiedene gleichförmige Wiederholungen und Theilungen der Einheit durch 4 vor. Man braucht, um jedes Glied derselben sich deutlich vorstellen zu können, nichts weiter zu wissen, als einmal, daß durch 4, und zweytens, wie vielmal gleichförmig wiederholt oder getheilt worden ist. Daß das Geschäft der gleichförmigen Wiederholung oder Theilung jedesmal von der Einheit anfange, muß ein für allemal vorausgesetzt werden. Weit besser als

die

die Ausdrücke in den vorhergehenden Reihen sind nach dem angeführten

4^{-4} anstatt $\frac{1}{1\times4\times4\times4\times4}$

4^{-3} — $\frac{1}{1\times4\times4\times4}$

4^{-2} — $\frac{1}{1\times4\times4}$

4^{-1} — $\frac{1}{1\times4}$

4^{0} — 1

4^{1} — 1×4

4^{2} — $1\times4\times4$

4^{3} — $1\times4\times4\times4$

4^{4} — $1\times4\times4\times4\times4$.

Eine jede Zahl in der Dignität 0 ist gleich 1, denn da bey der gleichförmigen Wiederholung und Theilung, wovon hier die Rede ist, der Anfang immer von 1 gemacht wird, so bleibt 1, wenn man weder wiederholt noch theilt, und das will eben der Logarithme 0 sagen. Anstatt 4^{1} schreibt man blos 4, und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Folgende Reihe

$\frac{1}{1\times6\times6\times6\times6\times6}$, $\frac{1}{1\times6\times6\times6\times6}$, $\frac{1}{1\times6\times6\times6}$, $\frac{1}{1\times6\times6}$, $\frac{1}{1\times6}$, $\frac{1}{1}$, 1×6, $1\times6\times6$, $1\times6\times6\times6$, $1\times6\times6\times6\times6$, $1\times6\times6\times6\times6\times6$, ist also auch mit folgender gleichbedeutend 6^{-5}, 6^{-4}, 6^{-3}, 6^{-2}, 6^{-1}, 6^{-0},

$6, 6^2, 6^3, 6^4, 6^5$; und es sind nunmehr schon folgende Folgen verständlich.

Die positiven Dignitäten (es ist hier nur von solchen Fällen die Rede, wenn die Wurzel eine ganze Zahl ist) sind jederzeit Multiplicatoren, und die negativen Dignitäten dagegen Divisoren. Aus dieser Ursach kann man auch statt $4^{-4}, 4^{-3}, 4^{-2}, 4^{-1}$ setzen, $\frac{1}{4^4}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4}$, und anstatt $6^{-5}, 6^{-4}, 6^{-3}, 6^{-2}, 6^{-1}$ folgendes $\frac{1}{6^5}, \frac{1}{6^4}, \frac{1}{6^3}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{6}$.

Dignitäten von einer Wurzel kann man gleichartige, und Dignitäten von verschiedenen Wurzeln ungleichartige nennen, so wie die, die einerley Logarithmen haben, gleichnamige, und die, deren Logarithmen ungleich sind, ungleichnamige heissen können. Diese Benennungen vorausgesetzt, so sind die gleichartigen und gleichnamigen Dignitäten stets einander gleich, die gleichartigen und ungleichnamigen hingegen, so wie auch die ungleichartigen und gleichnamigen unter einander ungleich, und gleichartige und gleichnamige entgegengesetzte Dignitäten nach einander gedacht, führen stets zu 1.

Einer=

Einerley Logarithmen können zu ganz verschiedenen Zahlen gehören, aber nicht zu verschiedenen Mengen gleichförmiger Wiederholungen oder Theilungen. Blos der Logarithme 0 hat seine bestimmte Zahl, nemlich 1. Man kann im eigentlichsten Verstande sagen, Ein Logarithme kann zu allen nur möglichen, und also zu unendlich vielen Zahlen gerechnet werden.

Vielleicht wäre es manchem nicht unangenehm, diese ersten Begriffe und Grundsätze von den Logarithmen, welche bereits in dem 1ten Abschnitte des 1ten Hauptttheils der Arithmetic ihren Platz finden können und müssen, und in dem 6ten und 7ten Abschnitte nur noch weiter zu erläutern und geläufig zu machen sind, hier etwas weitläuftiger entwickelt zu lesen. Ich muß mich aber desselben enthalten, um nicht gar zu weitläuftig zu werden.

b Muß ich von dem Gebrauche der Logarithmen reden.

Der Gebrauch der Logarithmen setzt verschiedene Sätze voraus, welche ich hier anführen, und sogleich mit den daraus fliessenden Regeln zum Gebrauche der Logarithmen verbinden will.

Der erste Satz: Wenn man gleichartige Dignitäten, die einander nicht entgegengesetzt sind, mit einander multiplicirt, so ist das Product eine Dignität von derselben Art, und ihr Logarithme die Summe der Logarithmen der Factoren. Eben das gilt, wenn man noch mehr gleichartige und einander nicht entgegengesetzte Dignitäten als zwey mit einander multiplicirt. Wenn man also zwey oder mehrere gleichartige und einander nicht entgegengesetzte Dignitäten mit einander multipliciren will, so darf man nur die Wurzel unverändert lassen, und daran als Logarithmen die Summe der Logarithmen der Factoren setzen. So ist z. B.

$$4^3 \times 4^2 = 4^5$$
$$8^5 \times 8^3 = 8^8$$
$$3^{-4} \times 3^{-6} = 3^{-10}$$
$$10^{-2} \times 10^{-4} = 10^{-6}$$

Der zweyte Satz: Wenn man gleichartige Dignitäten, die einander nicht entgegengesetzt sind, mit einander dividirt, so ist der Quotient eine Dignität von eben der Art, nur daß der Logarithme derselben die Differenz zwischen dem Logarithmen des Dividendus und des Divisors ist. Wenn man also eine Dignität durch eine andere gleichartige dividiren soll,

soll, so darf man nur der unveränderten Wurzel den Logarithmen geben, welcher die Differenz zwischen den Logarithmen des Dividendus und des Divisors ist. So ist z. B.

$$\frac{4^5}{4^2} = 4^3$$

$$\frac{8^8}{8^3} = 8^5$$

$$\frac{3^{-10}}{3^{-6}} = 3^{-4}$$

$$\frac{10^{-6}}{10^{-2}} = 10^{-4}.$$

Der erste Satz nebst seiner Folge gehört in den 6ten Abschnitt, und der andere in den 7ten. Von beyden muß man die stärkste Ueberzeugung erhalten, so bald man den Sinn der Bezeichnungen der Dignitäten, und der Redensart, eine Dignität durch eine andere gleichartige multipliciren oder dividiren, sich richtig und deutlich denkt. Auch überzeugt man sich nun leicht von der Richtigkeit folgender Ausdrücke, und der dabey zum Grunde liegenden Regeln

$$\frac{4^8}{4^2 \times 4^3} = 4^3,$$ denn es ist

$$\frac{4^8}{4^2 \times 4^3} = \frac{4^8}{4^5} = 4^3.$$

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{-2}, \text{ denn es ist}$$

$$\frac{7^3}{7^5} = \frac{7^3}{7^3 \times 7^2} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}.$$

Der dritte Satz: Entgegengesetzte gleichartige Dignitäten mit einander multipliciren, oder mit den negativen Dignitäten, indem man sie als positive betrachtet, die übrigen dividiren ist eins. Man hat also, wenn man entgegengesetzte gleichartige Dignitäten mit einander multipliciren soll, nur nöthig, die Logarithmen der Factoren nach den Regeln der Vereinigung entgegengesetzter Zahlen zu vereinigen. So ist z. B.

$$4^3 \times 4^{-6} \times 4^8 = \frac{4^3 \times 4^8}{4^6} = \frac{4^{11}}{4^6} = 4^5, \text{ oder}$$

$$4^3 \times 4^{-6} \times 4^8 = 4^{3-6+8} = 4^5.$$

Der vierte Satz: Dignitäten durch gleichartige entgegengesetzte dividiren, heißt den Dividendum mit dem entgegenstehenden Divisor multipliciren. Man darf also nur, um solches zu thun, zwischen dem Logarithmen des Dividendus und dem Logarithmen des Divisors nach den Regeln von der Bestimmung des Unterschiedes entgegengesetzter Zahlen den Unterschied suchen. So ist z. B.

9^7

$$\frac{9^7}{9^{-3}} = 9^{10}, \text{ denn}$$

$$\frac{9^7}{9^{-3}} = 9^7 \times 9^3 = 9^{10}, \text{ oder}$$

$$\frac{9^7}{9^{-3}} = 9^{7+3} = 9^{10}. \quad \text{Ferner ist}$$

$$\frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-7}, \text{ denn}$$

$$\frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-4} \times 10^{-3} = 10^{-7}, \text{ oder}$$

$$\frac{10^{-4}}{10^3} = 10^{-4-3} = 10^{-7}.$$

Dieser dritte und vierte Satz gehören in den 9ten Abschnitt des 1ten Haupttheils der Arithmetic, und sind auf dem vorhin angezeigten Wege nicht schwer zu begreifen. Auch kann man nach dem bisherigen sich sehr bald von der Richtigkeit folgender mehr zusammengesetzter Ausdrücke und der Regeln, worauf ihre Veränderung beruht, überzeugen.

$$\frac{5^3 \times 5^{-7}}{5^2 \times 5^{-4}} = 5^{-2}, \text{ denn}$$

$$\frac{5^3 \times 5^{-7}}{5^2 \times 5^{-4}} = \frac{5^3 \times 5^4}{5^2 \times 5^7} = \frac{5^{3+4}}{5^{2+7}} = \frac{5^7}{5^9} = 5^{-2}.$$

$$\frac{7^3 \times 7^{-4} \times 7^5}{7^2 \times 7^{-3}} = 7^5, \text{ denn}$$

$$\frac{7^3 \times 7^{-4} \times 7^5}{7^2 \times 7^{-3}} = \frac{7^3 \times 7^5 \times 7^3}{7^2 \times 7^4} = \frac{7^{3+5+3}}{7^{2+4}} = \frac{7^{11}}{7^6} = 7^5.$$

Der fünfte Satz: Eine Dignität zur Quadratzahl erhoben, giebt eine gleichartige Dignität mit zweymal so grossen Logarithmen; zur Cubiczahl erhoben, eine gleichartige Dignität mit dreymal so grossen Logarithmen, zur vierten Dignität erhoben, eine gleichartige Dignität mit viermal so grossen Logarithmen u. s. w. So ist z. B.

$(4^4)^2 = 4^8$

$(4^4)^3 = 4^{12}$

$(4^4)^4 = 4^{16}$

$(4^4)^5 = 4^{20}$ u. s. w. Desgleichen

$(7^{-2})^2 = 7^{-4}$

$(7^{-2})^3 = 7^{-6}$

$(7^{-2})^4 = 7^{-8}$

$(7^{-2})^5 = 7^{-10}$

$(7^{-2})^6 = 7^{-12}$ u. s. w. Wenn man also eine Dignität als Wurzel betrachten, und dieselbe von neuem zu irgend einer Dignität erheben will; so hat man nur nöthig, den Logarithmen jener Dignität mit dem Logarithmen von dieser zu multipliciren.

ren. Sucht man z. B. die Quadratzahl, so multiplicirt man mit 2, sucht man die Cubiczahl, so multiplicirt man mit 3 u. s. f.

Der sechste Satz: Die Quadratwurzel einer Dignität ist eine gleichartige Dignität mit halb so grossen Logarithmen, die Cubicwurzel einer Dignität ist eine gleichartige Dignität mit dem Drittheil des Logarithmen, die vierte Wurzel einer Dignität ist eine gleichartige Dignität mit dem Viertheile des Logarithmen u. s. w. So ist z. B.

$$\sqrt{6^4} = 6^2$$

$$\sqrt[3]{6^4} = 6^{\frac{4}{3}}$$

$$\sqrt[4]{6^4} = 6$$

$$\sqrt[5]{6^4} = 6^{\frac{4}{5}}$$ u. s. w. Desgleichen

$$\sqrt{8^{-12}} = 8^{-6}$$

$$\sqrt[3]{8^{-12}} = 8^{-4}$$

$$\sqrt[4]{8^{-12}} = 8^{-3}$$

$$\sqrt[5]{8^{-12}} = 8^{-\frac{12}{5}}$$

$$\sqrt[6]{8^{-12}} = 8^{-2}$$

$$\sqrt[7]{8^{-12}} = 8^{-}$$ u. s. w.

Will man also aus einer Dignität die Quadratwurzel ziehen, so hat man nur nöthig, ihren Logarithmen mit 2 zu dividiren; will man die Cubicwurzel haben, so dividirt man diesen Logarithmen mit 3, will man die vierte Wurzel finden, so dividirt man mit 4, u. s. w.

Dieser fünfte und sechste Satz gehören in den 10ten und 11ten Abschnitt des 1ten Haupttheils der Arithmetic. Die gebrochenen Logarithmen werden darin auch in Decimalzahlen verwandelt, und anstatt $6^{\frac{4}{3}}$ z. B. gesetzt $6^{1,33333\ldots}$, anstatt $6^{\frac{4}{5}}$ aber $6^{0,8}$ u. s. w.

Vermittelst der bisher angeführten Sätze ist die Beschäftigung mit gleichartigen Dignitäten in Ansehung der Multiplication, Division, Erhebung zu Dignitäten, und Extraction der Wurzeln leicht, so lange dabey nur verlangt wird, daß die gleichartige Dignität, die dadurch hervorgebracht wird, überhaupt angegeben werden soll; und auch folgendes kann darnach verständlich seyn.

$$\left(\frac{4^3}{4^2}\right)^6 = \frac{4^{18}}{4^{12}} = 4^6$$

$$\left(\frac{7^3}{4^2}\right)^5 = \frac{7^{15}}{4^{10}}$$

$$\left(\frac{3^{-4}}{5^2}\right)^3 = \frac{3^{-12}}{5^6}$$

$$\sqrt{\left(\frac{6^4}{3^2}\right)} = \frac{6^2}{3}$$

$$\sqrt{\left(\frac{5^8}{9^6}\right)} = \frac{5^4}{9^3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{7^{-9}}{5^6}} = \frac{7^{-3}}{5^2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{7^6}{5^3}} = \frac{7^{\frac{6}{5}}}{5^{\frac{3}{5}}} = \frac{7^{1,2}}{5^{0,6}} \text{ u. s. w.}$$

Noch weit grösser aber ist der Vortheil, wenn man sich Reihen von entwickelten Dignitäten derjenigen Wurzel gemacht hat, deren Dignitäten man unter einander multipliciren, dividiren, zu Dignitäten erheben, oder aus ihnen irgend eine Wurzel ziehen soll, und zwar so, daß darunter oder darneben der Logarithme steht. Nimmt man zur Wurzel 2 an, so erhält man folgende Reihe.

Log.	Dign.		Log.	Dign.
0	1	—	0	1
1	2	—	1	$\frac{1}{2}$
2	4	—	2	$\frac{1}{4}$
3	8	—	3	$\frac{1}{8}$
4	16	—	4	$\frac{1}{16}$
5	32	—	5	$\frac{1}{32}$
6	64	—	6	$\frac{1}{64}$
7	128	—	7	$\frac{1}{128}$
8	256	—	8	$\frac{1}{256}$
9	512	—	9	$\frac{1}{512}$
10	1024	—	10	$\frac{1}{1024}$
11	2048	—	11	$\frac{1}{2048}$
12	4096	—	12	$\frac{1}{4096}$
13	8192	—	13	$\frac{1}{8192}$
14	16384	—	14	$\frac{1}{16384}$
15	32768	—	15	$\frac{1}{32768}$
16	65536	—	16	$\frac{1}{65536}$
17	131072	—	17	$\frac{1}{131072}$
18	262144	—	18	$\frac{1}{262144}$
19	524288	—	19	$\frac{1}{524288}$
20	1048576	—	20	$\frac{1}{1048576}$
21	2097152	—	21	$\frac{1}{2097152}$
22	4194304	—	22	$\frac{1}{4194304}$
23	8388608	—	23	$\frac{1}{8388608}$
24	16777216.	—	24	$\frac{1}{16777216}$.

Nimmt man hingegen zur Wurzel 5 an, so erhält man folgende.

Log.	Dign.	Log.	Dign.
0	1	— 0	1
1	5	— 1	$\frac{1}{5}$
2	25	— 2	$\frac{1}{25}$
3	125	— 3	$\frac{1}{125}$
4	625	— 4	$\frac{1}{625}$
5	3125	— 5	$\frac{1}{3125}$
6	15625	— 6	$\frac{1}{15625}$
7	78125	— 7	$\frac{1}{78125}$
8	390625	— 8	$\frac{1}{390625}$
9	1953125	— 9	$\frac{1}{1953125}$
10	9765625	— 10	$\frac{1}{9765625}$
11	48828125	— 11	$\frac{1}{48828125}$
12	244140625	— 12	$\frac{1}{244140625}$
13	1220703125	— 13	$\frac{1}{1220703125}$
14	6103515625	— 14	$\frac{1}{6103515625}$
15	30517578125	— 15	$\frac{1}{30517578125}$
16	152587890625.	— 16	$\frac{1}{152587890625}$.

Wenn nemlich

a die Dignitäten, die man mit einander multipliciren will, in dergleichen Reihen stehen, so kann man das Geschäft der Multiplication durch eine

Addi-

Addition der Logarithmen der Factoren verrichten. Gesetzt z. B. man sollte 4096 mit 512 multipliciren, so zeiget die Reihe der Wurzel 2, daß 4096 die 12te, und 512 die 9te Dignität von 2 ist. Man weiß aber nach dem 1ten der obigen Sätze, daß das Product zweyer gleichartigen Dignitäten eine Dignität von eben der Art ist, deren Logarithme der Summe der Logarithmen der Factoren gleicht, und also in dem gegebenen Falle, daß das Product aus 4096 in 512 die 21te Dignität von 2 sey. Aber auch diese enthält die genannte Reihe, und das Product ist also 2097152. Will man zum Ueberflusse sich hievon durch eine Probe überzeugen, so darf man nur rechnen

4096
512
8192
4096
20480
2097152

Sollte man 78125 mit 3125 multipliciren, so ist nach der Reihe der Wurzel 5

78125

$$78125 = 5^7, \text{ und}$$
$$3125 = 5^5; \text{ also ist}$$
$$78125 \times 3125 = 5^7 \times 5^5 = 5^{12} \text{ und}$$
$$5^{12} = 244140625. \text{ Folglich ist}$$
$78125 \times 3125 = 244140625$. Multiplicirt man

$$\begin{array}{lr} & 78125 \\ \text{mit} & 3125 \\ \hline & 390625 \\ & 156250 \\ & 78125 \\ & 234375 \\ \hline \text{so erhält man} & 244140625. \end{array}$$

Eben so ist

$$\tfrac{1}{1024} \times \tfrac{1}{128} = 2^{-10} \times 2^{-7} = 2^{-17} = \tfrac{1}{131072}, \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{125} \times \tfrac{1}{3125} = 5^{-3} \times 5^{-5} = 5^{-8} = \tfrac{1}{390625}.$$

Soll man ferner

b eine Dignität durch eine andere gleichartige dividiren, so hat man, die Dignitätenreihe der Wurzel der gegebenen Dignitäten vorausgesetzt, zur Findung des Quotienten nichts als eine Subtraction nöthig. Soll z. B. 16777216 durch 16384 dividirt werden, so zeigt die Reihe der Wurzel 2, daß

16777216

$16777216 = 2^{24}$, und

$16384 = 2^{14}$ Durch den 2ten der obigen Sätze aber weiß man, daß

$\frac{2^{24}}{2^{14}} = 2^{10}$, und die gedachte Reihe zeigt an, daß

$2^{10} = 1024$.

Will man zum Ueberflusse auch wirklich dividiren, so sieht man die Richtigkeit des behaupteten an der Uebereinstimmung beyder Resultate.

16384 | $\cancel{1}\cancel{6}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{6}$ | 1024.
$\cancel{4}\cancel{9}\cancel{3}\cancel{6}\cancel{3}$
$\cancel{3}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{1}$
$\cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{3}$
$\cancel{2}\cancel{1}$

Sollte ferner 152587890625 durch 9765625 dividirt werden, so sieht man aus der Reihe der Wurzel 5, daß

$152587890625 = 5^{16}$ und

$9765625 = 5^{10}$. Durch den gedachten Satz aber weiß man, daß

$\frac{5^{16}}{5^{10}} = 5^{6}$, und die gedachte Reihe zeigt, daß

$5^{6} = 15625$.

Eben

Eben dies giebt die wirkliche Division

9765625	152587890625	15625
	659316452	
	544065131	
	9183150	
	6747948	
	264823	
	503	
	48	
	3	

So ist nun auch $\frac{1}{65536} : \frac{1}{2048} = \frac{2^{-16}}{2^{-11}} = 2^{-5} = \frac{1}{32}$;

und $\frac{1}{9765625} : \frac{1}{244140625} = \frac{5^{-10}}{5^{-12}} = 5^{2} = 25$;

u. s. w.

Wer das bisherige genau erwogen hat, der wird die weitern Anwendungen des erläuterten Vortheils aus folgenden kennen zu lernen im Stande seyn.

1. $256 \times 64 \times 1024 = 2^{8} \times 2^{6} \times 2^{10} = 2^{24}$
$= 16777216$.

2. $1048576 \times \frac{1}{4096} \times 8192 \times \frac{1}{32} = 2^{20} \times 2^{-12}$
$\times 2^{13} \times 2^{-5} = 2^{16} = 65536$.

3. $\frac{1}{9765625} \times 390625 \times \frac{1}{625} = 5^{-10} \times 5^{8} \times {}^{-4}$
$= 5^{-6} = \frac{1}{15625}$.

4. $78125 \times \frac{1}{30517578125} \times 3125 = 5^7 \times 5^{-15} \times 5^5 = 5^{-3} = \frac{1}{125}$.

5. $\dfrac{\frac{1}{4096}}{512} = \dfrac{2^{-12}}{2^9} = 2^{-21} = \frac{1}{2097152}$.

6. $\dfrac{2048}{\frac{1}{256}} = \dfrac{2^{11}}{2^{-8}} = 2^{19} = 524288$.

7. $\dfrac{\frac{1}{78125}}{\frac{1}{625}} = \dfrac{5^{-7}}{5^{-4}}\ 5^{-3} = \frac{1}{125}$.

8. $\dfrac{15625 \times \frac{1}{3125} \times 78125}{\frac{1}{25} \times 1953125 \times 625} = \dfrac{5^6 \times 5^{-5} \times 5^7}{5^{-2} \times 5^9 \times 5^4}$
$= \dfrac{5^8}{5^{11}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$ u. s. w.

Will man

c. eine Dignität von neuem zu einer Dignität erheben, so wird man durch die angeführten Reihen in den Stand gesetzt, das verlangte durch eine sehr leichte Multiplication zu finden. Soll z. B. 512 zur Quadratzahl erhoben werden, so lehrt die Reihe der Wurzel 2, daß $512 = 2^9$, und nach dem 5ten der oben berührten Sätze ist $(2^9)^2 = 2^{18}$, und nach der eben gedachten Reihe $2^{18} = 262144 = (512)^2$.

Ferner

Ferner sey zu suchen $(3125)^3$.

$$\begin{aligned} &\text{Da} && 3125 = 5^5 \\ &\text{und} && (5^5)^3 = 5^{15} \\ &\text{ferner} && 5^{15} = 30517578125; \\ &\text{so ist} && (3125)^3 = 30517578125. \end{aligned}$$

Soll gesucht werden $\left(\frac{1}{256}\right)^3$; so ist

$$\frac{1}{256} = 2^{-8},$$

$$\text{und} \quad (2^{-8})^3 = 2^{-24}$$

$$\text{und} \quad 2^{-24} = \frac{1}{16777216} = \left(\frac{1}{256}\right)^3$$

Soll man endlich finden $\left(\frac{128}{625}\right)^3 = \frac{128^3}{625^3}$; so

$$\begin{aligned} &\text{ist} && 128 = 2^7 \\ &\text{und} && 625 = 5^4 \\ &\text{also} && \frac{128}{625} = \frac{2^7}{5^4} \\ &\text{und} && \left(\frac{128}{625}\right)^3 = \frac{2^{21}}{5^{12}} \\ &\text{und} && \frac{2^{21}}{5^{12}} = \frac{2097152}{244140625} = \left(\frac{128}{625}\right)^3. \end{aligned}$$

Will man endlich

d. aus einer Dignität irgend eine Wurzel ziehen; so ist man vermittelst jener Reihen im Stande, das gesuchte durch eine blosse Division zu finden. Gesetzt zum Beyspiel, daß $\sqrt{65536}$ zu suchen wäre; so ist

$$65536 = 2^{16}$$
und $$\sqrt{2^{16}} = 2^{8}$$
und $$2^{8} = 256$$
also $$\sqrt{65536} = 256.$$

Sollte $\sqrt[3]{1953125}$ gesucht werden, so ist

$$1953125 = 5^{9}$$
und $$\sqrt[3]{5^{9}} = 5^{3}$$
und $$5^{3} = 125$$
also $$\sqrt[3]{1953125} = 125.$$

Wird $\sqrt[4]{\frac{1}{1048576}}$ verlangt; so ist

$$\frac{1}{1048576} = 2^{-20}$$
und $$\sqrt[4]{2^{-20}} = 2^{-5}$$
und $$2^{-5} = \frac{1}{32}$$
also $$\sqrt[4]{\frac{1}{1048576}} = \frac{1}{32}.$$

Ist endlich $\sqrt[5]{\frac{32768}{9765625}}$ zu suchen; so ist

$$32768 = 2^{15}$$
und $$9765625 = 5^{10}$$
also $$\frac{32768}{9765625} = \frac{2^{15}}{5^{10}}$$

und

und $\sqrt[5]{\left(\frac{2^{15}}{5^{10}}\right)} = \frac{2^3}{5^2}$

und $\frac{2^3}{5^2} = \frac{8}{25}$

also $\sqrt[5]{\frac{32768}{9765625}} = \frac{8}{25}$

Ausdrücke wie folgende $\frac{2^6}{2^3}$, $\frac{5^8}{5^2}$, $\frac{2^{-6}}{2^3}$ können nach dem obigen, wenn sie zu Dignitäten erhoben oder aus ihnen eine Wurzel gezogen werden soll, zuvor in diese 2^2, 5^4, 2^{-9} verwandelt werden, und ist dies geschehen. so ist das weiter erforderliche bekannt.

c. (s. S. XXXV) von den logarithmischen Systemen.

Unter logarithmischen Systemen versteht man entwickelte Dignitätenreihen mit ihren Logarithmen. Man kann derselben eine unendliche Menge verfertigen, hat aber zum Gebrauche nur ein vollständiges nöthig. Zur Vollständigkeit eines logarithmischen Systems gehört, daß es unter seinen Dignitäten die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung, und zwar je weiter desto besser, enthalte, indeß brauchen solches nur die Multiplicatoren zu seyn, indem die Logarithmen der gleichen Divisoren nur negativ sind, und ausserdem ist es genug, wenn es nur die ganzen Zahlen enthält. Unter allen möglichen logarithmischen Systemen ist bey dem üblichen Zahlengebäude keins bequemer, als dasjenige, dessen Wurzel 10 ist. Was man nemlich auch für ein System annimmt, so können nicht alle Logarithmen ganze Zahlen seyn, sondern es bestehen die mehresten aus einer ganzen Zahl (Characteristic, Kennzifer) und aus einem zehntheiligen Bruche (Mantisse). Wenn man zur Wurzel 2 nimmt, so sind bloß die Logarithmen von 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 u. s. w. ganze Zahlen, die Logarithmen aller der Zahlen aber, die zwischen die genannten fallen, ganze Zahlen und zehntheilige Brüche. Verfertiget man nun ein logarithmisches System der Wurzel 10, so kann man einmal die Characteristic einer jeden Zahl sehr leicht finden, indem sie stets aus so viel Einheiten besteht, als die gegebene Zahl Zifern der höhern Ordnungen hat. Von 1 bis 9 ist daher die Kennzifer der Logarithmen der Zahlen 0, von 10 bis 99 ist sie 1, von 100 bis 999 ist sie 2, von 1000 bis 9999 ist sie 3 u. s. w.; ferner ist die Kennzifer der Logarithmen

rithmen der Zehntheile —1, der Hunderttheile—2, der Tausendtheile — 3 u. s. w. Zweytens unterscheiden sich die Logarithmen der Zahlen, die zu verschiedenen Ordnungen gehören, aber durch einerley Zifern ausgedruckt sind, bloß durch die Kennzifer, in Ansehung der Mantisse hingegen ganz und gar nicht. Ist z. B. der Logarithme der Zahl 36579 = 4,5632318, so ist

von der Zahl		der Logarithme	
365790	=	5,5632318	
3657900	=	6,5632318	
36579000	=	7,5632318	u. s. w.
3657,9	=	3,5632318	
365,79	=	2,5632318	
36,579	=	1,5632318	
3,6579	=	0,5632318	
0,36579	=	— 1,5632318	
0,036579	=	— 2,5632318	
0,0036579	=	— 3,5632318	u. s. w.

wo bey den 3 letzten Logarithmen blos die Kennzifer, nicht aber die Mantisse negativ ist. Drittens können bey diesem System die logarithmischen Tafeln viel mehr zusammengezogen werden, als bey irgend einem andern. Aus diesen Gründen ist daher das zum gewöhnlichsten Gebrauche verfertigte logarithmische System für die Wurzel 10 berechnet worden, und die darin befindlichen Logarithmen heissen die Briggischen oder künstlichen Logarithmen. Eine vollständige und sehr gründliche Beschreibung dieser Logarithmen, und insbesondere der Verfertigung und des Gebrauchs eines Systems derselben findet man in dem 2ten Theile des vortreflichen Lehrbegriffs der gesammten Mathematic des Herrn Hofrath Karsten im 7ten Abschnitte, worauf ich diejenigen verweise, die das bisher gesagte, verbunden mit der kurzen Einleitung zum 1ten Bande der Schulzischen Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln, für sich noch unzureichend finden; denn mehr von den Logarithmen hier anzuführen, würde für diesen Ort zu weitläuftig seyn, und ich finde es auch nicht nöthig, da ich dasjenige, was in der gedachten kurzen Einleitung enthalten ist, voraussetzen darf, weil man bey logarithmischen Rechnungen die Schulzischen Tafeln haben muß.

Das dritte (s. S. XXIX) wovon ich hier mit wenigen reden muß, betrifft die Verwandelung der Verhältnisse in Zahlen, und die Veränderung der Grössen und Zahlen nach Verhältnissen.

Zuerst von der Verwandelung der Verhältnisse in Zahlen. Zahlen und Grössen stehen im Verhältnisse, wenn man dieselben unter einander vergleicht, so daß man auf die Entstehungsart der einen aus der andern sieht. Diejenige Zahl oder Grösse, aus welcher man in Gedanken eine andere entstehen läßt, heißt das nachfolgende Glied, und die andere das vorhergehende Glied. Das nachfolgende Glied setzt man nach (:) und das vorhergehende Glied vor (:). In 6 : 3 ist also 3 das nachfolgende, und 6 das vorhergehende, in 3 : 6 aber 6 das nachfolgende, und 3 das vorhergehende Glied. Im ersten Falle läßt man die 6 aus der 3, und im 2ten die 3 aus der 6 entstehen. Offenbar ist also $6 : 3 = \frac{6}{3} = 2$, und $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Hieraus läßt sich erkennen, daß die Verwandelung eines Verhältnisses in Zahlen überhaupt durch die Division des vorhergehenden Gliedes durch das nachfolgende geschehe. Sind die Zahlen der Glieder nicht so einfach, so lassen sie sich durch die Multiplication, ohne dem Verhältnisse selbst zu schaden, in andere verwandeln. So ist z. B. $3 : 4\frac{2}{5} = 15 : 22 = \frac{15}{22}$. $6\frac{3}{4} : 5\frac{2}{3} = 27 : 22\frac{2}{3} = 81 : 68 = \frac{81}{68} = 1\frac{13}{68}$. Sind die Glieder der Verhältnisse nicht blosse Zahlen, sondern Grössen,

z. B. 6 Rthl. : 3 Rthl., 3 Rthl. : 2 Rthl. 18 gr., 4 Rthl. : 8 Rthl., 2 𝔚 : 1 Rthl. 12 gr.; so beziehen sich entweder beyde auf gleichartige und nicht entgegengesetzte Einheiten von einer und derselben Ordnung, wie in 6 Rthl. : 3 Rthl., und dann hat man blos auf die Zahlen zu sehen. So ist z. B. 6 Rthl. : 3 Rthl. $= 6 : 3 = 2$, und 3 Rthl. : 6 Rthl. $= 3 : 6 = \frac{1}{2}$. Oder es beziehen sich die Glieder zwar auf gleichartige und nicht entgegengesetzte Einheiten, aber doch auf Einheiten von verschiedenen Ordnungen, wie 3 Rthl. : 2 Rthl. 18 gr.; in diesem Falle kann man durch eine leichte Reduction die vorhergehende Beschaffenheit erhalten. So ist z. B. 3 Rthl. : 2 Rthl. 18 gr. = 3 Rthl. : $2\frac{3}{4}$ Rthl. $= 3 : 2\frac{3}{4} = 12 : 11 = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$, so wie 2 Rthl. 18 gr. : 3 Rthl. $=$ $2\frac{3}{4}$ Rthl. : 3 Rthl. $= 2\frac{3}{4} : 3 = 11 : 12 = \frac{11}{12}$. Oder die Einheiten der Glieder sind einander entgegengesetzt, wodurch die erhaltene Zahl negativ wird. So ist 4 Rthl. : $-$ 8 Rthl. $= 4 : -8 = \frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$, und 2 𝔚 : 1 Rthl. 12 gr. $=$ 2 𝔚 : $1\frac{1}{2}$ Rthl. $= 2 : -1\frac{1}{2} = 4 : -3 = {}^{-}\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$. Sind endlich mehrere Verhältnisse zusammen zu setzen, so thut man, es mögen die Glieder derselben Zahlen oder Grössen seyn, am besten, wenn man die einfachen Verhältnisse insgesammt in Zahlen verwandelt, und wenn

es

es nöthig ist, darauf das Product der gefundenen Zahlen sucht. So ist z. B. $6 : 3 = 2$, $2 : 5 = \frac{2}{5}$, $2\frac{1}{2} : 7 = 5 : 14 = \frac{5}{14}$, und $6 \times 2 \times 2\frac{1}{2} : 3 \times 5 \times 7 = 2 \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{14}$. Nach der Verwandelung eines Verhältnisses in Zahlen ist es nun leicht zu bestimmen, wie viel so wohl das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden, als auch, wie viel das nachfolgende von dem vorhergehenden sey. Jenes giebt die erhaltene Zahl selbst, dieses aber eben diese Zahl, wenn man ihren Multiplicator als Divisor, und ihren Divisor als Multiplicator betrachtet, an. In dem Verhältnisse $6 : 3$, oder 6 Rthl. : 3 Rthl., ist das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden 2, und das nachfolgende von dem vorhergehenden $\frac{1}{2}$; in dem Verhältnisse 2 ℔ : 1 Rthl. 12 gr. $= - \frac{4}{3}$ ist das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden $- \frac{4}{3}$, und das nachfolgende von dem vorhergehenden $- \frac{3}{4}$. In dem zusammengesetzten Verhältnisse $6 \times 2 \times 2\frac{1}{2} : 3 \times 5 \times 7 = \frac{1}{14}$ ist das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden $\frac{1}{14}$, und das nachfolgende von dem vorhergehenden 14, u. s. w. Weiß man nun, was für eine Grösse das vorhergehende Glied von dem nachfolgenden, und das nachfolgende von

dem

dem vorhergehenden ist, so ist es leicht, aus dem einen der beyden Glieder das andere zu finden, und zwar nicht nur Eines Verhältnisses, sondern auch aller ihm gleichen Verhältnisse. Hierauf nun gründet sich

Zweytens, die Veränderung der Zahlen und Grössen nach Verhältnissen. Wenn eine Zahl oder Grösse nach einem Verhältnisse verändert werden soll, so ist sie selbst ein Glied eines Verhältnisses, das dem gegebenen gleich ist, und es soll das andere Glied gefunden, oder dieses Verhältniß ergänzt werden. Ob das Glied, welches gefunden werden soll, das vorhergehende oder das nachfolgende Glied ist, läßt sich aus den jedesmaligen Umständen leicht entscheiden, und ist dieses erst bekannt, so ist alles übrige nach dem vorhergehenden leicht. Man verwandelt nemlich überhaupt das Verhältniß oder die Verhältnisse, nach welchen eine Zahl oder Grösse verändert werden soll, vor allen Dingen in Zahlen, welche ich der Bequemlichkeit Anzeiger nenne, und bestimmt darnach, was für eine Grösse das vorhergehende Glied des gegebenen Verhältnisses von dem nachfolgenden, und auch, was für eine Grösse das nachfolgende Glied gegen das vorhergehende gehalten ist; und darauf verändert man die übrige Zahl oder Grösse auf die erforderliche Art, welche von selbst in die Augen fällt, so bald man weiß, ob das zu suchende das vorhergehende oder das nachfolgende Glied des gleichen zu ergänzenden Verhältnisses seyn soll. Wird z. B. gefragt: Was kosten 74 Ell., wenn 3 Ell. 4 Rthl. kosten? so ist die Grösse 74 Ell. nach dem Verhältnisse 3 Ell. : 4 Rthl. zu verändern. Da nun 3 Ell. : 4 Rthl. $= 3 : -4 = -\frac{3}{4}$ ist, so ist der Anzeiger der Veränderung der 74 Ell. zur Findung des Preises derselben, indem 74 Ell. das vorhergehende Glied des zu ergänzenden Verhältnisses ist, $-\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$, und der Aufsatz dieses Exempels ist

$$74 \text{ Ell.} \times -1\tfrac{1}{3};$$

die Ausrechnung desselben aber

$$\begin{array}{l} 74 \text{ Ell.} \times -1\tfrac{1}{3} \\ \underline{24\tfrac{2}{3} \text{ Ell.}} \\ 98\tfrac{2}{3} \text{ Rthl.} \end{array}$$

In dieser Aufgabe sind die Rthl. und Ell. einander entgegengesetzt, und das Zeichen — zeigt also Rthl. an. Wenn die Einheit, auf welche sich die Zahl des endlichen Resultats bezieht, bekannt ist, so hat man

bey

bey der ganzen Rechnung blos nöthig, auf die Zahlen zu sehen. Dann wird die vorhergehende Rechnung folgende:

$$74 \text{ Ell.} \times 1\tfrac{1}{3}$$
$$24\tfrac{2}{3}$$
$$\overline{98\tfrac{2}{3}} \text{ Rthl.}$$

Würde gefragt: Wie viel kosten 1 Ct. 50 ℔, wenn 1 Lt. 6 ₰ kostet, so ist die zu verändernde Grösse 160 ℔, und die Verhältnisse, nach welchen sie verändert werden soll, 1 : 32, 1 : 6, 12 : 1, und 24 : 1, indem 1 ℔ 32 Loth faßt, 1 Loth 6 ₰ kosten soll, 12 ₰ 1 gr und 24 gr 1 Rthl. machen, und man doch eigentlich wissen will, wie viel Rthl. der 1 Ct. 50 ℔ kosten? Da nun

$$1 : 32 = \tfrac{1}{32}$$
$$1 : 6 = \tfrac{1}{6}$$
$$12 : 1 = 12$$
$$24 : 1 = 24,$$

so ist der Anzeiger der Veränderung der 160 ℔ zur Findung des Preises, indem 160 ℔ ebenfalls das vorhergehende Glied ist $32 \times 6 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{24} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Der Aufsatz des Exempels ist also

$$160 \text{ ℔} \times \tfrac{2}{3}$$
$$\overline{53\tfrac{1}{3}}$$
$$\overline{106\tfrac{2}{3}} \text{ Rthl.}$$

Es hätte dieses Exempel zwar auf eine andere Art noch kürzer gerechnet werden können, ich habe aber diese Art gewählt, um von der Veränderung der Zahlen oder Grössen nach zusammengesetzten Verhältnissen ein leicht zu übersehendes Beyspiel zu geben.

Die Practik erfordert Uebung, und wer an eine andere Art des Rechnens gewöhnt ist, wird daher die auf das gesagte sich gründenden Arten den ihm bekannten und geläufigen nicht als vorzuziehen ansehen. Einen gänzlichen Anfänger hingegen genommen, so wird derselbe das gegenwärtige leichter begreifen und sich eher geläufig machen als das gewöhnliche, und es ist vielleicht aus diesem Grunde nicht aller Aufmerksamkeit unwerth. Es hat aber dasselbe einige eigene Vortheile. Denn einmal schließt sich das darnach nöthige Verfahren genau an das Verfahren des sich selbst überlassenen und durch passende Lagen blos gebildeten Verstandes, so daß dasselbe allgemein begreiflich ist; und zweytens rechnet man dabey nicht nur mit den möglich größten Vortheilen, sondern es erfordert auch die Erfindung dieser Vortheile keine vorzügliche Anstrengung. Schmid gedenkt in der Vorrede zu seiner

in

in zwey Theilen herausgegebenen Rechenkunst eines von ihm erfundenen Vortheils in der Kettenregel, und beschreibt denselben in dem 6ten Abschnitte des 8ten Capitels des 1ten Theils ausführlich. Wie leicht kommt man auf die von ihm gegebenen Regeln, wenn man auf die gedachte Art Zahlen und Grössen nach gegebenen Verhältnissen zu verändern gelernt hat! ja wie einseitig ist die Schmidsche Regel gegen diejenige, worauf man durch das vorgetragene geleitet wird. Mehr darf ich hier von der Verwandelung der Verhältnisse in Zahlen, und von der Veränderung der Zahlen und Grössen nach Verhältnissen überhaupt nicht sagen; in den S. XXVI gedachten Unterredungen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetic werde ich diese ganze Lehre ausführlich vortragen, und hoffe dann die Aufnahme derselben in die Arithmetic als ein besonderes Capitel auch hinlänglich zu rechtfertigen. Jetzt geht meine Absicht blos dahin, dasjenige zu berühren, was zum Verständniß in der folgenden Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst hier angeführt werden muß.

Jetzt noch ein Paar Worte zur Characterisirung der Grössen, die in einem geometrischen Verhältnisse stehen. Zwey Grössen stehen in einem geometrischen Verhältnisse, wenn unter ihnen eine solche Verbindung statt findet, daß in eben dem Maasse, als die eine wächst oder abnimmt, die andere entweder ebenfalls wächst oder abnimmt. So steht z. B. das Geld, welches man für Waaren giebt, mit den Waaren selbst in einem geometrischen Verhältnisse, denn je mehr Geld gegeben wird, desto mehr Waare erhält man, und je weniger Geld man giebt, desto weniger Waaren bekommt man, so daß man für 2mal, 3mal, 4mal so viel Geld auch 2mal, 3mal, 4mal so viel Waaren, für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ des Geldes aber auch nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ der Waaren bekömmt. Verhältnisse dieser Art nennt man ordentliche geometrische Verhältnisse. Auch steht die Zahl der Arbeiter mit der Zeit, welche sie zur Verfertigung der Arbeit gebrauchen, in einem geometrischen Verhältnisse, aber auf eine andere Art. Je grösser nemlich die Anzahl der Arbeiter genommen wird, desto kleiner ist die ihnen nöthige Zeit, und je kleiner die Anzahl der Arbeiter ist, desto länger ist die Zeit, welche man ihnen geben muß. Diese Verhältnisse nennt man verkehrte geometrische Verhältnisse.

hältnisse. Wie man nach einem ordentlichen geometrischen Verhältnisse eine Zahl oder Grösse verändern müsse, ist aus dem vorhergehenden hinlänglich zu ersehen; soll aber eine Zahl oder Grösse nach einem verkehrten geometrischen Verhältnisse verändert werden, so ist der leichteste Weg der, daß man das bekannte Glied des zu ergänzenden Verhältnisses mit dem gleichnamigen Gliede des gegebenen Verhältnisses verwechselt, und darauf wie bey den ordentlichen Verhältnissen verfährt. Wird z. B. gefragt: Wie viel Zeit brauchen 36 Arbeiter zu einem bestimmten Werke, wenn 4 Arbeiter dasselbe in 18 Tagen zu Stande bringen? so ist nach dem gesagten die zu verändernde Zahl nach der gedachten Verwechselung 4 Arbeiter, und das Verhältniß, nach welchem dieselbe verändert werden soll, 36 Arbeiter : 18 Tagen $= 36 : -18 = -2$, und der Veränderungsanzeiger der 4 ist also, da 4 das vorhergehende Glied des zu ergänzenden Verhältnisses ist, $- \frac{1}{2}$, und die gesuchte Zeit also 2 Tage. Wenn eine Zahl oder Grösse nach einem zusammengesetzten Verhältnisse verändert werden soll, so kommen unter den einfachen Verhältnissen, woraus dieses zusammengesetzte Verhältniß besteht, bisweilen auch verkehrte Verhältnisse vor. Mit diesen

ver-

verfährt man daher auf die eben angezeigte Art, so wie mit den ordentlichen nach dem aus dem vorhergehenden bekannten.

Von der Veränderung der Zahlen, insbesondere der Brüche in andere gleichbedeutende, der vorgesetzten Absicht aber gemässere, welche Verwandelung durch die Zertheilung, die Vereinigung, die Multiplication und Division u. s. w. geschieht, und in der practischen Arithmetic von der grösten Wichtigkeit ist, rede ich hier nicht. Es gehört dahin unter andern auch die oft so vortheilhafte Verwandelung der Brüche in Decimalzahlen. Freylich könnte auch hierüber noch manches nützliche gesagt werden; allein ich würde zu sehr die Grenzen einer Vorrede übertreten, und ich gedenke daher nur

viertens noch der arithmetischen und geometrischen Progreßionen mit wenigen Worten.

Unter arithmetischen Progreßionen versteht man Zahlen- oder Grössenreihen, in welchen zwischen jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern einerley Differenz statt findet. Z. E.

1. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36
2. 48, 44, 40, 36, 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8.

In der ersten Progreßion ist jedes folgende Glied um 3 grösser als das vorhergehende, und in der andern um 4 kleiner. Was von dergleichen Progreßsionen um einiger willen hier gesagt werden muß, betrifft drey Stücke: erstlich die Art, die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progreßion zu finden, wenn das 1te Glied, das letzte Glied und die Zahl aller Glieder bekannt ist; zweytens die Bestimmung der Differenz zwischen zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern, wenn irgend zwey Glieder der Progreßion und die Zahl der zwischen ihnen liegenden Glieder bekannt ist; und endlich drittens, die Findung eines jeden Gliedes, dessen Zahl man weiß, wenn ausserdem irgend ein anderes Glied mit seiner Zahl und die Differenz jeder zwey unmittelbar auf einander folgenden Glieder bekannt ist.

Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progreßion findet man, wenn man das erste und letzte Glied derselben addirt, und diese Summe durch die halbe Anzahl aller Glieder multiplicirt. In der ersten Reihe, welche aus 12 Gliedern besteht, ist z. B.

$$\text{die Summe aller Glieder} = (3 + 36) \times 6 = 234;$$ in

der zweyten Reihe hingegen, welche aus 11 Gliedern besteht, ist

die

$$\text{die Summe aller Glieder} = (48 + 8) \times 5\tfrac{1}{2} = 308.$$

Es beruhet diese Regel auf dem Satze: In einer arithmetischen Progreßion ist die Summe des ersten und lezten Gliedes gleich der Summe jeder zwey andern von den beyden äussersten gleich weit abstehenden Glieder, und das mittelste Glied, wenn die Anzahl aller Glieder ungerade ist, die Hälfte dieser Summe.

Die Differenz einer arithmetischen Progreßion jeder zwey unmittelbar auf einander folgenden Glieder findet man aus jeden zwey andern Gliedern, von welchen man die Zahl der zwischen liegenden Glieder weiß, wenn man das kleinere Glied von dem grössern abzieht, und diese Differenz durch die um 1 vermehrte Zahl der zwischen liegenden Glieder dividirt. Z. B. Ist 3 das 1te und 30 das 10te Glied, so daß also 8 Glieder zwischen beyden gegebenen liegen, so ist

$$\text{die gesuchte Differenz} = \frac{30 - 3}{8 + 1} = \frac{27}{9} = 3.$$ Ist hingegen 40 das 3te Glied, und 16 das 9te Glied, so daß 5 Glieder zwischen beyden gegebenen Gliedern liegen, so ist

$$\text{die gesuchte Differenz} = \frac{40 - 16}{5 + 1} = \frac{24}{6} = 4.$$

Ist irgend ein Glied einer arithmetischen Progreßion und die Differenz jeder zwey unmittelbar auf einander folgenden Glieder gegeben; so findet man jedes andere Glied, dessen Zahl bekannt ist, wenn man die Differenz der Progreßion so vielmal genommen, als die Zahl der Entfernung des gesuchten Gliedes von dem gegebenen anzeigt, zu dem gegebenen Gliede entweder addirt, oder davon subtrahirt. Es sey z. B. 6 das 2te Glied einer arithmetischen Progreßion, deren folgende Glieder immer grösser werden, (einer steigenden), die Differenz jeder zwey unmittelbar auf einander folgenden Glieder 3, und es sey das 8te Glied zu finden. Da die Zahl der Entfernung des 8ten Gliedes von dem 2ten 6 ist, so ist

das 8te Glied $= 6 + 3 \times 6 = 24$. Ist hingegen das 1te Glied 48, und die Differenz der Progression 4, die Progreßion ferner eine fallende, und das 8te Glied zu suchen; so ist, da die Zahl der Entfernung des 8ten Gliedes von dem 1ten $= 8 - 1 = 7$ ist,

das 8te Glied $= 48 - 4 \times 7 = 20$.

Die zweyte und dritte Regel beruhen auf dem Satze: Die Differenz zwischen jeden zwey Gliedern einer arithmetischen Progreßion ist allezeit die Differenz jeder zwey unmittelbar auf einander folgenden Glie-

Glieder einmal mehr genommen, als die Zahl der zwischen liegenden Glieder anzeigt. In der Remißionsrechnung kommen von dem 2ten und 3ten Falle Exempel mit Brüchen vor.

Unter geometrischen Progreßionen versteht man Zahlen- oder Grössenreihen, in welchen jedes Glied von dem unmittelbar vorhergehenden stets dasselbe Product ist. Z. B.

1. 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768.

2. 8748, 2916, 972, 324, 108, 36, 12, 4.

In der ersten Progreßion ist jedes folgende Glied ein Product aus dem vorhergehenden Gliede in 2, und in der andern stets ein Product aus dem vorhergehenden Gliede in $\frac{1}{3}$. Was von diesen Progreßionen hier gesagt werden muß, betrifft zwey Stücke: erstlich die Findung eines jeden Gliedes derselben aus dem 1ten Gliede und dem Exponenten, d. h. derjenigen Zahl, womit jedes vorhergehende Glied multiplicirt werden muß, wenn man das unmittelbar darauf folgende haben will; und zweytens die Erforschung der Summe aller Glieder einer geometrischen Progreßion.

Soll aus dem 1ten Gliede einer geometrischen Progreßion und dem Exponenten derselben irgend ein anderes Glied gefunden werden; so darf man nur zuvörderst die Zahl der Entfernung dieses Gliedes von dem 1ten sich merken, dann den Exponenten zu der Dignität erheben, deren Logarithme diese Zahl ist, und diese Dignität mit dem 1ten Gliede multipliciren. Es sey z. B. das 8te Glied einer geometrischen Progreßion zu finden, deren 1tes Glied 6, und deren Exponent 2 ist; so ist die Zahl der Entfernung des 8ten Gliedes vom 1ten Gliede $= 7$. Man suche also

$$2^7 = 128, \text{ und}$$

das gef. 8te Glied ist $= 6 \times 2^7 = 6 \times 128 = 768$. Sollte das 8te Glied einer geometrischen Progreßion gesucht werden, deren 1tes Glied 8748, und deren Exponent $\frac{1}{3}$ ist, so wäre auch hier die Zahl der Entfernung des 8ten Gliedes vom 1ten $= 7$, und da

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}, \text{ so ist}$$

das gef. 8te Glied $= 8748 \times \frac{1}{2187} = \frac{8748}{2187} = 4$.

Diese Regel beruhet auf dem Satze: Ein jedes Glied einer geometrischen Progreßion ist ein Product aus dem 1ten Gliede und dem Exponenten in der Dignität, deren Logarithme um 1 kleiner ist als die Zahl des gesuchten Gliedes, oder deren Logarithme die Zahl der Entfernung dieses Gliedes vom 1ten Gliede ist.

Um

Um die bey diesem Geschäfte jedesmal nöthige Dignität des Exponenten auf die bequemste Art zu finden, darf man sich nur der Logarithmen bedienen, und die dadurch erhaltene Erleichterung wird vorzüglich groß, wenn der Exponent ein Bruch ist. Wie man dabey verfahren muß? davon sind die Regeln in dem, was von den Logarithmen gesagt worden ist, angeführt worden, und Beyspiele kommen in der folgenden Anleitung vor. Uebrigens ist die Aufgabe: Aus dem 1ten Gliede einer geometrischen Progreßion, wovon man die Anzahl aller Glieder weiß, und ihrem Exponenten das letzte Glied zu finden; von der betrachteten nicht verschieden.

Soll die Summe aller Glieder einer geometrischen Progreßion gefunden werden, so müssen dazu das 1te Glied, das letzte Glied und der Exponent der Progreßion bekannt seyn. Ist dies, so findet man die Summe aller Glieder einer geometrischen Progreßion, wenn man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplicirt, von diesem Producte das 1te Glied abzieht, und die gefundene Differenz durch den Exponenten weniger 1 dividirt. So ist z. B.

die Summe der 1ten Reihe S. LXXI $= \frac{768 \times 2 - 6}{2 - 1} = \frac{1536 - 6}{2 - 1} = 1530;$

und

die Summe der
2ten Reihe ebend. $\frac{4 \times \frac{1}{3} - 8748}{-\frac{2}{3}} = (4 \times \frac{1}{3} - 8748) \times -\frac{3}{2}$

$$= \frac{4 - 26244}{-2} = \frac{26244 - 4}{2} = 13120.$$

Diese Regel gründet sich auf folgendes. Wenn man alle Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten der Progreßion multiplicirt, so erhält man eine andere geometrische Reihe, welche von der vorhergehenden alle Glieder bis auf das erste, so wie die vorhergehende von ihr alle Glieder bis auf das letzte enthält. Aus

6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768 wird
12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, und
aus 8748, 2916, 972, 324, 108, 36, 12, 4 wird
2916, 972, 324, 108, 36, 12, 4, $1\frac{1}{3}$.

Alle Glieder der erhaltenen Progreßionen nun sind zusammengenommen offenbar so groß, als die Summe der Progreßionen, woraus sie entstanden sind, mit dem Exponenten der Progreßion multiplicirt. Zieht man ferner die erste Progreßion von der zweyten aus ihr gemachten ab, so erhält man zur Differenz die Differenz zwischen dem letzten Gliede der zweyten Progreßion und dem 1ten Gliede der ersten Progreßion, im ersten Falle nemlich 1536 — 6, und im zweyten $1\frac{1}{3}$ — 8748; und diese Differenz ist daher

her gleich der Summe aller Glieder der ersten Progreßion einmal weniger genommen, als der Exponent Eins faßt; so daß man also, wenn man dieselbe durch den Exponenten weniger 1 dividirt, die Summe aller Glieder der ersten Progreßion erhalten muß. Hier ist nun noch folgendes zu merken. Einmal, wenn der Exponent der Progreßion 2 ist, so hat man, um die Summe aller Glieder zu finden, blos nöthig, von dem Zwiefachen des letzten Gliedes das 1te Glied abzuziehen. Zweytens, eine jede fallende Progreßion kann auch als eine steigende Progreßion betrachtet und behandelt werden, wenn man das erste Glied derselben als das letzte, das letzte als das erste betrachtet, und in dem Exponenten den Multiplicator zum Divisor und den Divisor zum Multiplicator macht. Die 2te Reihe S. LXXI auf diese Art behandelt,

so ist ihre Summe $= \frac{3 \times 8748 - 4}{3 - 1} = \frac{26244 - 4}{2}$ $= 13120$. Man sieht nach einer kurzen Vergleichung bald, daß die Findung der Summe bey fallenden Progreßionen hiedurch sehr erleichtert werde. Wenn übrigens die Summe einer geometrischen Progreßion gesucht werden soll, und nur das 1te Glied derselben, ihr Exponent und die Anzahl aller Glieder bekannt ist; so braucht es kaum berührt zu werden, daß man alsdann vor allen Dingen nach dem vorhin gesagten das letzte Glied suchen müsse.

Ich enthalte mich hier mehr aus der gemeinen theoretischen Arithmetic zu berühren, indem ich hoffe, daß derjenige, der das bisherige mit Aufmerksamkeit betrachtet hat, alle in der Folge betretenen Wege zu verstehen im Stande seyn werde. Jetzt also wieder zu der folgenden Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst. Ich habe mich dadurch, daß ich das aus der gemeinen theoretischen Arithmetic bisher berührte vorausgesetzt, und ausserdem die anzuwendenden einfachen Rechnungsoperationen öfters nur durch die dazu erfundenen bekannten Zeichen angezeigt habe, in den Stand gesetzt gesehen, die vorgetragenen Regeln nicht nur jedesmal durch Worte auszudrucken, sondern auch den Grund derselben ohne Buchstaben zu gebrauchen, zu entwickeln. Habe ich daher keine wichtige Fälle ausgelassen, so hoffe ich hinlänglich gerechtfertiget zu seyn, daß ich mich durch die im Anfange gedachten Schwierigkeiten nicht habe abschrecken lassen. Ob ich die bearbeiteten Rechnungen vollständig genug abgehandelt habe? Ob die gegebenen Regeln nicht nur richtig, sondern auch kurz und deut-

deutlich genug ausgedruckt worden sind? Ob der jedesmal geführte Beweis einleuchtend genug ist? Ob die empfohlnen Vortheile jedesmal wahre Vortheile sind? Die Beantwortung dieser und anderer ähnlichen Fragen überlasse ich dem Urtheile der Kenner. Um nicht unvollständig zu seyn, habe ich Polacks, Ungers, Wiedeburgs, Florencourts hieher gehörige Schriften nebst mehrern andern sorgfältig gelesen und mit Auswahl benutzt, werde aber demohnerachtet gern das mangelhafte künftig ergänzen, wenn es mir entweder gezeigt wird, oder eine eigene Prüfung mich darauf führen sollte. Auf den Vortrag der Regeln hat die Absicht, auch den Beweis jedesmal hinzuzufügen, wie natürlich, Einfluß gehabt, und er ist daher bisweilen weitläuftiger, als vielleicht der, dem es blos um die Anwendung der Regeln zu thun ist, wünschen wird. Da indeß die Kenntniß der Gründe der Dinge den Gebrauch derselben erleichtert und vor Fehltritten sichert, indem diese Einsicht die Kenntniß der Beschaffenheiten befördert, erweitert und gewisser macht; so habe ich die daher entstandene Weitläuftigkeit nicht gescheuet. Die Regeln selbst habe ich auf das sorgfältigste geprüft, und falsche Regeln anderer widerlegt. Dem Irrthum ist jeder Mensch unterworfen, und ich versichere hier

feyer=

feyerlich, daß wenn ich hie und da Fehler gefunden habe, solches meine durch das Gute ja Vortrefliche in andern Fällen erzeugte Hochachtung nicht im geringsten vermindert hat, und daß daher auch nicht Begierde zu tadeln die Ursache der davon gethanen Anzeige ist. Auch ich werde gefehlt haben; danken werde ich dem, der mir meine Fehler anzeigt und dadurch in den Stand setzt, dieselben zu verbessern. Bey den zu erklärenden Rechnungsvortheilen habe ich mich bemüht, nicht nur die nöthigen, jedesmal anzuzeigen, sondern auch die Umstände zu bestimmen, unter welchen diese Vortheile wahre Vortheile sind, denn nichts hängt so sehr von den Umständen ab als diese Vortheile. Was die zur Verkürzung und Erleichterung der Rechnungen dienliche Tabellen betrift, so durfte ich in dieser Anleitung dieselben nicht vollständig liefern; die Beschaffenheit derselben, ihre Verfertigungsart, ihr Gebrauch und ihr Werth war alles, was in meinen Plan gehörte. Ich bin aber nicht abgeneigt, künftig eine Sammlung von Tabellen herauszugeben, die alle diejenigen enthalte, von deren Gebrauch wahrer Vortheil zu hoffen ist, und zwar in der nöthigen Vollständigkeit und möglichsten Kürze. Diese Sammlung soll ein für sich bestehendes Ganze seyn, und ihr Gebrauch dadurch,

daß

daß man in derselben die gedachten Tabellen allein findet, bequemer werden, als wenn sie in dieser Anleitung zerstreut angetroffen würden. Nach diesen Bemerkungen empfehle ich diesen ersten Theil meiner Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst einer gütigen Beurtheilung, und ersuche die Kenner und Liebhaber dieser Wissenschaft, mich durch öffentliche so wohl als Privatmittheilung ihrer ausgebreitetern Kenntnisse darin in den Stand zu setzen, das mangelhafte dieses Werks immer mehr und mehr wegzuschaffen, und es der Vollkommenheit näher zu bringen, mit der Versicherung, daß ich solches nicht nur mit dem aufrichtigsten Dank erkennen, sondern auch mit der größten Treue benutzen werde. Was den künftig zu liefernden 2ten Theil anlangt, so wird derselbe die Lehre von den Combinationen und die Berechnung der Wahrscheinlichkeit nebst ihrer Anwendung auf die Bevölkerung, die Sterblichkeitsordnung u. s. w. die Berechnung der Jahrrenten, Leibrenten und Tontinen, die Berechnung der Wittwenkassen, der Sterbekassen u. d. gl. die Assecuranzrechnung, und dann die eigentlichen öconomischen Rechnungen enthalten, und in der Leipziger Ostermesse des Jahrs 1783 herauskommen. Ich

werde

werde mich bemühen, bey diesen wichtigen Gegenständen alles das zu nutzen, was meine Vorgänger darüber geschrieben haben, dennoch aber eben so wenig, oder vielmehr noch weniger als in dem 1ten Theile blos Sammler seyn, indem bey diesen Gegenständen, aller bisherigen Bearbeitung ohnerachtet, weit mehr Gelegenheit zu Erweiterungen und Berichtigungen übrig gelassen worden ist. Findet meine Arbeit Beyfall, so habe ich nach der Vollendung dieses Werks, wenn Gott mir Leben und Gesundheit verleihet, und meine anderweitige zahlreiche Geschäfte es erlauben werden, beschlossen, auch das, was man Rechnungswissenschaft nennt, zu bearbeiten, und so alles, was juristische, politische und öconomische Rechner gebrauchen, mit der Zeit zu umfassen. Schlüßlich zeige ich noch an, daß ich am Ende des gegenwärtigen 1ten Theils um derer willen, die mit den mathematischen Zeichen in der Arithmetic nicht bekannt seyn mögten, Erklärungen verschiedener gebrauchten Zeichen und Bezeichnungen hinzugefügt habe, so wie daselbst auch ein Verzeichniß der in diesem Theile abgehandelten Materien befindlich ist. Am Ende des 2ten Theils soll ein vollständiges Register über beyde Theile erfolgen.

Erster Abschnitt
Zinsrechnung.

Einleitung.

§. 1.

Man braucht das Wort Zinsrechnung bald im weitläuftigern, bald im eingeschränktern Verstande. Wenn man von der Zinsrechnung im weitläuftigen Verstande redet, so begreift man darunter nicht nur die eigentlich so genannte Zinsrechnung, die gemeine so wohl als die Zinseszinsrechnung, sondern auch die gemeine und zusammengesetzte Rabattrechnung, die Zeitrechnung und die Rechnungen beym antichretischen Vertrage. In dieser weitläuftigen Bedeutung also das Wort Zinsrechnung im Titel genommen, ist der Gegenstand des jetzt zu bearbeitenden ersten Abschnitts

a die gemeine Zinsrechnung,

b die Zinseszinsrechnung,

c die gemeine Rabattrechnung,

d die zusammengesetzte Rabattrechnung,

e die Zeitrechnung,

f die Rechnungen beym antichretischen Vertrage. Eine jede dieser Rechnungen soll zuerst an und für sich abgehandelt, und dann in einem Anhange theils verschiedene in mehrere derselben einschlagende Fälle betrachtet, theils von der Berechnung des Agio oder Aufgeldes und andern mit der Zinsrechnung auf einerley Gründen beruhenden Rechnungen geredet werden.

§. 2.

Die Art, wie solches geschehen soll, ist, daß

a von einer jeden Rechnung ein deutlicher Begriff gegeben,

b aus demselben auf eine leichte Weise allgemeine Regeln hergeleitet,

c diese allgemeine Regeln weiter entwickelt, und die kürzeste Befolgungsart derselben in Exempeln gezeigt,

d eine Anleitung zu hieher gehörigen nützlichen Tabellen ertheilt; und

e verschiedene theils historische, theils prüfende Anmerkungen bald in das vorhergehende eingewebt, bald am Ende angehängt werden. So viel als möglich, soll auch bey den folgenden Abschnitten diese Behandlungsart befolgt werden.

Eigent-

Eigentliche Zinsrechnung.

§. 3.

Es ist üblich, so wie es auch die Billigkeit erfordert und mit den Gesetzen übereinstimmt, daß derjenige, der von einem andern ein Capital zu seinem Gebrauche aufnimmt, demselben für diesen Gebrauch, so lange er das Capital nutzt, etwas gewisses bezahlt. Man giebt z. B. 5 Rthl. für den einjährigen Gebrauch einer Summe von 100 Rthl., oder 50 Rthl. für eine gleich lange Benutzung von 1000 Rthl., und zwar in der Münzsorte, in welcher man das Capital selbst empfangen hat. Dieses Geld nun nennt man **Zins** oder **Interessen**, und hat aus der Berechnung desselben ein besonderes Capitel der Rechenkunst gemacht, und demselben den Namen der **eigentlichen Zins- oder Interessenrechnung** gegeben. Wie Zins und Agio sich unterscheiden, kann die Vergleichung der von dem letztern im Anhange zur Zinsrechnung gegebenen Erklärung mit der gegenwärtigen vom Zinse lehren.

Von verschiedenen andern Bedeutungen des Worts Zins und von dem Unterschiede, den man bisweilen zwischen Zins und Interesse macht, wird am Ende der Zinsrechnung im eigentlichen Verstande geredet werden. Die angeführte Bedeutung des Worts Zins liegt in dieser Anleitung durchgehends zum Grunde. Im Oberdeutschen nennt man den Zins **Uebernutzen**, im Niedersächsischen **Ingeld**, und beym Bergbaue **Umschlag**. Siehe Adelungs Lex. Art. Interessen. Ich werde mich in dem folgenden vorzüglich der Benennung Zins bedienen.

§. 4.

Es giebt aber eine doppelte Art des Zinses, **einfachen Zins** nemlich und **Zinseszins**, welchen letztern man auch Zins auf Zins u. s. w. zu nennen pflegt. **Der einfache Zins** wird einzig und allein von dem anfänglich ausgeliehenen Capitale, selbst wenn es mehrere Zinstermine aussteht, und der fällige Zins nicht jedesmal bezahlt wird, gerechnet. **Bey dem Zinseszins** steht ein Capital mehrere Zinstermine aus, der in jedem Termine fällige Zins aber wird nicht abgetragen, sondern von seiner Zahlungszeit an als Capital betrachtet, und neben dem anfänglich ausgeliehenen Capitale verzinset.

Wenn z. B. jemand 10000 Rthl. aufnimmt, und zwar zu 5 vor hundert jedes Jahr, und nun entweder alle Jahr 500 Rthl. Zins entrichtet, oder nach einem Zeitraume, z. B. von 4 Jahren, indem er von der jährlichen Abtragung der Zinsen verhindert worden, mit einem Male 2000 Rthl. abträgt; so giebt er einfachen Zins, denn er verzinset auf diese Art die an sich behaltenen Zinsen nicht. Wenn er aber den nach jedem Jahre fälligen Zins zwar nicht zur gehörigen Zeit abtrüge, dagegen aber denselben

in

in dem ersten Jahre von 10000 Rthl., in dem zweyten von 10500 Rthl., in dem dritten von 11025 Rthl., in dem vierten von 11576 Rthl. 6 gr rechnete, und also nach 4 Jahren 2155 Rthl. 1 gr 6 pf. Zins bezahlte; so gäbe er Zinseszins.

§. 5.

Wegen dieser doppelten Art des Zinses theilt sich die Zinsrechnung im eigentlichen Verstande in zwey Theile, wovon der eine, der den einfachen Zins zum Gegenstande hat, **die gemeine Zinsrechnung**, derjenige aber, welcher sich mit dem Zinseszinse beschäftiget, die **Zinseszinsrechnung** genennt wird.

Daß nach den Gesetzen keinem Gläubiger erlaubt ist, von seinem Schuldner Zinseszins zu fordern, macht die Zinseszinsrechnung auf keine Art und Weise überflüssig. Unten wird dies mit mehrern gezeigt werden.

Gemeine Zinsrechnung.

§. 6.

Da in dem vorhergehenden nicht nur §. 3 der Zins und die Zinsrechnung überhaupt, sondern auch §. 4 der einfache Zins, und §. 5 die gemeine Zinsrechnung insbesondere schon erklärt worden sind; so kommt es hier zunächst und zuvörderst darauf an, **daß die zu der gemeinen Zinsrechnung gehörigen Fälle kenntlich gemacht und vestgesetzt werden.**

§. 7.

Man kann dieselben in **einfache** und **zusammengesetzte** eintheilen. Bey jenen verlangt man die Zinsen Eines Capitals, bey diesen aber die Summe der Zinsen mehrerer Capitale zu wissen. Es gehört also zu einem einfachen Falle nicht nothwendig, daß zu seiner Auflösung bloß die einfache Regel de Tri erforderlich sey, denn es giebt Fälle, zu deren Auflösung die zusammengesetzte Regel de Tri, so genannte Regel Quinque z. B. nöthig ist, und die deswegen doch nicht zu den zusammengesetzten Fällen gerechnet werden. Selbst wenn Zinsen mehrerer Capitale, die aber vor der Berechnung der Zinsen bequem in eins verwandelt werden können, zu suchen sind, so gehöret auch dieser Fall zu den einfachen.

Es ist z. B. der Fall einfach, wenn man frägt: Wie viel Zins geben 2356 Rthl. 12 gr, 5 Rthl. für 100 Rthl. gerechnet, in einem Jahre? oder: Wie viel Zins erhält man von 3640 Rthl. 18 gr 6 pf in $3\frac{1}{4}$ Jahre? Zur Beantwortung dieser letztern Frage ist die Regel Quinque nöthig. **Ein zusammengesetzter Fall** hingegen findet statt, wenn gefragt wird: Wie viel Zins erhält man zusammen von 600 Rthl. zu 5 für 100 in einem Jahre, von 300 Rthl. zu $4\frac{1}{2}$ für 100 in 8 Monaten, und von 750 Rthl. zu 4 für 100 in $1\frac{1}{2}$ Jahre? Würde gefragt: Wie viel Zins erhält man von 600 Rthl. und 300 Rthl. und 750 Rthl. in einem Jahre, überall 5 für 100 gerechnet; so wäre diese

Frage

Frage gleichbedeutend mit der: Wie viel Zins erhält man von 1650 Rthl. in einem Jahre? und warum sollte man dergleichen Fälle zu den zusammengesetzten rechnen?

Der Zins, der für 100, z. B. für 100 Rthl. oder 100 fl. gegeben wird, nennt man das **Procent**, und schreibt solches abgekürzt pr. C. Findet man dabey für nöthig hinzuzusetzen, daß die Zeit von einem Jahre gedacht werden solle, so thut man solches durch pr. A. (pro anno). Zu 5 pr. C. pr. A. heißt daher, für jedes Hundert alle Jahr 5 z. B. 5 Rthl. o. d. gl. gerechnet.

§. 8.

Ohnerachtet es einigen Schein hat, wenn man sagt, daß derjenige, der im Stande ist, einfache Rechnungsfragen zu beantworten, auch vermögend sey, die aus ihnen zusammengesetzten Aufgaben aufzulösen, indem diese zusammengesetzten Fälle in bekannte einfache zerlegt, und das verlangte theilweise gefunden werden kann; so bleibt dennoch die besondere Betrachtung der zusammengesetzten Fälle nach den einfachen wichtig und nothwendig, zumal in einer Anleitung, die vollständig und in Geschäften brauchbar seyn soll. Denn ausserdem daß gezeigt werden muß, wie das zusammengesetzte jedesmal in das bekannte einfache aufgelöset und zerlegt werden müsse, giebt es auch manche Vortheile, die sonst nicht bekannt gemacht werden könnten, und Geschwindigkeit ist doch immer eine vorzügliche Eigenschaft eines Rechners. Aus diesem Grunde sollen daher weder bey der gemeinen Zinsrechnung noch in der Folge bey andern Rechnungen bloß die einfachen Fälle, sondern nach ihnen auch die zusammengesetzten betrachtet werden. Bey der gegenwärtigen Bestsetzung der zur gemeinen Zinsrechnung gehörigen Fälle ist indeß hier nur von den einfachen die Rede.

§. 9.

Von Clausberg nimmt im 4ten Theile seiner **demonstrativen Rechenkunst** S. 1156 u. f. der 4ten Auflage, welche zu Leipzig 1772 erschienen ist, 24 Fälle an, von deren jeden er von S. 1158 bis 1165 ein Beyspiel giebt, so wie darauf von S. 1166 bis 1168 der Grund dieser Anzahl angegeben ist. Wer die Regeln der Combination versteht, und auf die Stücke, die bey den Fragen der gemeinen Zinsrechnung in Anschlag kommen, anwendet, wie solches im 3ten Abschnitte dieser Anleitung geschehen ist; der wird jene Anzahl und diesen Grund bald finden, und sich wundern, wie von Clausberg S. 1168 §. 1157 von Mühe, die ihm dieses verursacht, reden könne. Will man indeß bey der Bestsetzung der zur gemeinen Zinsrechnung gehörigen Fälle genau verfahren; so gehören von den gedachten 24 Fällen alle diejenigen nicht hieher, sondern in die Zeitrechnung, bey welchen aus gewissen gegebenen Bestimmungen eine Zeit gesucht werden soll, und es bleiben auf diese Art

für

für die gemeine Zinsrechnung ohngefehr zwey Drittheile übrig; ja man könnte, wenn man wollte, die Einschränkung noch weiter treiben. Man vergleiche hiermit, was hierüber in der Lehre von den Combinationen im angeführten Abschnitte gesagt worden ist.

§. 10.

Unter allen nun genauer zu betrachtenden Fällen ist keiner häufiger und wichtiger als der, da nach einem gegebenen pr. C. pr. A. der Zins eines Capitals, das eine Zeitlang ausgestanden, berechnet wird; und wo man, um sich von der Richtigkeit der Rechnung zu überzeugen, hinterher aus dem gefundenen Zinse, dem pr. C. und der Zeit das Capital wieder sucht. Von dieser Art sind die bey dem 7ten §. stehenden Fragen, und für sie fliessen unmittelbar aus der Erklärung des Zinses folgende Sätze.

a Je grösser bey einerley Zeit und pr. C. ein Capital angenommen wird, desto grösser ist auch der Zins, und je kleiner bey einerley Zeit und pr. C. das Capital ist, desto kleiner ist auch der Zins; und umgekehrt: Je grösser bey einerley Zeit und pr. C. der Zins seyn soll, desto grösser muß auch das Capital seyn, und je kleiner bey gleicher Zeit und gleichem pr. C. der Zins angesetzt wird, desto kleiner ist auch das dazu nöthige Capital.

b Je grösser bey einerley Capital und pr. C. die Zeit ist, welche das Capital aussteht, desto grösser ist auch der Zins, und je kleiner bey einerley Capital und pr. C. diese Zeit ist, desto kleiner ist auch der Zins; und umgekehrt: Je grösser bey einerley Capital und pr. C. der Zins seyn soll, desto grösser ist die dazu erforderliche Zeit, und je kleiner der Zins ist, der verlangt wird, desto kleiner kann diese Zeit seyn.

Diese beyden Sätze sind im strengsten Verstande zu nehmen, so wie solches in der Vorrede bey der Betrachtung der Grössen, die in einem ordentlichen geometrischen Verhältnisse stehen, gezeigt worden ist. Ueberhaupt wird das in der Vorrede gesagte Allgemeine von nun an vorausgesetzt; daher man dasselbe entweder zuvor sich bekannt machen, oder bey vorkommenden Dunkelheiten daraus Raths erholen muß.

§. 11.

Jetzt also so gleich zur Beantwortung einiger besonderer Fragen.

a (§. 7.) Wie viel Zins geben 2356 Rthl. 12 gr. a 5 pr. C. in einem Jahre? — Die Rechnuug ist

$$2356 \text{ Rthl. } 12 \text{ gr.} \times \tfrac{5}{100} = \tfrac{1}{20} = \tfrac{1}{4 \times 5}$$

589 Rthl. 3 gr.

117 Rthl. 19 gr. $9\frac{3}{5}$ pf.

b (§. 7.)

b (§. 7.) Wie viel Zins erhält man von 3640 Rthl. 18 gr. 6 pf. a 5 pr. C. in $3\frac{1}{4}$ Jahre? — Die Rechnung ist

3640 Rthl. 18 gr. 6 pf. $\times \frac{5}{100} \times 3\frac{1}{4} = \frac{1}{20} \times 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4 \times 5} \times 3\frac{1}{4}$

910 Rthl.	4 gr.	$7\frac{1}{2}$ pf.
182 Rthl.	—	$11\frac{1}{10}$ pf.
546 Rthl.	2 gr.	$9\frac{3}{10}$ pf.
45 Rthl.	12 gr.	$2\frac{21}{40}$ pf.
591 Rthl.	15 gr.	$\frac{3}{40}$ pf.

c Wie viel Capital braucht man, um in einem Jahre 117 Rthl. 19 gr. $9\frac{3}{5}$ pf. zu erhalten, wenn 5 pr. C. gerechnet werden? — Die Rechnung ist

117 Rthl. 19 gr. $9\frac{3}{5}$ pf. $\times \frac{100}{5} = 20 = 5 \times 4$

589 Rthl.	3 gr.	—
2356 Rthl.	12 gr.	

d Wie viel Capital braucht man, um a 5 pr. C. in $3\frac{1}{4}$ Jahre 591 Rthl. 15 gr. $\frac{3}{40}$ pf. Zins zu erhalten? — Die Rechnung ist

591 Rthl. 15 gr. $\frac{3}{40}$ pf. $\times \frac{100}{5} : 3\frac{1}{4} = \frac{20}{3\frac{1}{4}} = \frac{5 \times 4 \times 4}{13}$

2958 Rthl.	3 gr.	$\frac{3}{8}$ pf.
11832 Rthl.	12 gr.	$1\frac{1}{2}$ pf.
13 -- 47330 Rthl.	—	6 pf.

1881	
21	3640 Rthl.
240	
116	
3	18 gr.
78	
1	6 pf.

Diese

Diese beyden letzten Fragen bey c und d sind die bey a und b umgekehrt, so daß a und c, ferner b und d einander wechselsweise zur Probe dienen.

§ 12.

Ich kann nicht umhin, ehe ich weiter gehe, von einem Buche zu reden, welches lediglich in der Absicht geschrieben ist, Berechnungen des Zinses, wie im vorhergehenden §. enthalten sind, so viel als irgend möglich, zu erleichtern. Der Titel dieses Buchs ist: Paul Friedrich Hessens vollständige Intereß-Tabellen, worin von 1000 Millionen Thaler bis zu 1 Pfennig Capital, jährlich, wöchentlich und täglich, bis zu 20 Jahr, alle vorfallende Interessen, wie die Erklärung deutlich besagt, geschwind und accurat zu finden seyn; nebst Capital-Tabellen, welche jährlich, wöchentlich und täglich die einzunehmenden oder auszugebenden Interessen nachweisen; ingleichen hiesige (Berliner) Banco-Tabellen, in welchen die Banco-Pfund zu Friedrichsd'or und Courant in drey unterschiedlichen Sätzen berechnet werden. Sämmtliche Tabellen sind mit doppelten Proben bewiesen und auf das accurateste ausgearbeitet. Berlin 1771. Wer sollte sich wohl von einem Buche mit dergleichen Titel nicht recht sehr viele Vortheile versprechen? wer bey der anschei-

anscheinenden Weitläuftigkeit und Schwierigkeit des Unternehmens sich nicht wundern, daß der Verfasser für jeden Fehler, der innerhalb Jahresfrist nach der Herausgabe entdeckt werden würde, 10 Ducaten hat versprechen können? Man urtheilt indeß anders, wenn man dieses Buch, so wohl in Ansehung seiner Einrichtung und der Art seiner Verfertigung, als in Ansehung des davon zu machenden Gebrauchs näher betrachtet.

§. 13.

Um zuerst von den Interesstabellen zu reden, so ist ihre Einrichtung folgende. Es sind auf 141 Seiten die Interessen von 1000, 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 und 1 Million, ferner von 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 und 1 Tausend, desgleichen von 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 und 1 Hundert und von 99, 98, 97, 96 u. s. w. bis 1 Thaler; nach diesen von 23, 22, 21 u. s. w. bis 1 Groschen, und endlich von 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 Pfennig, a 1, 4, 5 und 6 pr. C. auf $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 und 20 Jahr, so wie auch auf 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 Wochen und 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Tage berechnet worden.

§. 14.

Was ferner die Verfertigung dieser Intereßtabellen betrifft, so besteht der größte Theil der Arbeit im Addiren und leichten Multipliciren; und sie ist daher zwar mühsam und zeitraubend, aber auf keine Art und Weise schwer. Weiß man z. B. wie viel Zins eine Million Thaler a 1, 4, 5 und 6 pr. C. auf $\frac{1}{4}$ Jahr giebt, und dies ist nicht schwer zu finden; so kann man auf die gedachte Art, durch Addiren und leichtes Multipliciren nemlich, bald berechnen, wie viel Interessen, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 und 1000 Millionen a 1, 4, 5 und 6 pr. C. in eben derselben Zeit geben. Ist man so weit gekommen, so läßt sich ferner auf eben die Art berechnen, wie viel Interessen alle gedachte Summen bey den erwähnten pr. C. in $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 und 20 Jahren tragen. Eben so hat man nur nöthig, von Einer Million die Interessen a 1, 4, 5 und 6 pr. C. für eine Woche zu wissen, um mit nicht mehrerer Schwierigkeit die Interessen aller angeführten Summen erst für eben die Zeit, und dann auch für 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40

und

und 50 Wochen zu finden; und nicht anders verhält es sich mit den Interessen der gedachten Summen für einzele Tage. Ja man darf in Ansehung der pr. C. nur wissen, wie viel bey 1 pr. C. gegeben werde, um daraus das nöthige für 4, 5 und 6 pr. C. mit der größten Bequemlichkeit durch eine Multiplication desselben mit 4, 5 oder 6 herzuleiten. Auf eine ähnliche Art nun, als es hier von den Millionen gezeigt worden, kann man auch mit 1000 Rthl., 100 Rthl., 1 Rthl., 1 gr und 1 pf verfahren. Es ist selbst bey dergleichen Tabellen eine ausserordentlich leichte Sache zu erfahren, ob man sich bey ihrer Verfertigung geirret habe oder nicht; doch dies zu zeigen, kann bey der Ueberflüssigkeit der Tabellen selbst von keinem Nutzen seyn.

§. 15.

Wie wenig Vortheil diese Tabellen in der That gewähren, wird aus dem, was ich nun von ihrem Gebrauche sagen will, hinlänglich erhellen. Es sind dieselben eben nicht zu verwerfen, wenn einmal die Interessen a 1, 4, 5 und 6 pr. C. berechnet werden sollen, und dann das Capital, wovon die Interessen zu berechnen sind, ganz und nicht bloß theilweise in denselben enthalten ist. Wird z. B. gefragt, wie viel Interessen 55 Rthl. in 7 Wochen a 5 pr. C. geben; so findet man S. 84 unten 8 gr $10\frac{590}{1825}$ pf: und dies Aufsuchen ist, wenn die Tabellen

zur

zur Hand sind, bequemer und eher geschehen, als anderweitiges Ausrechnen. Allein oft findet ein anderes pr. C. statt, z. B. $2\frac{1}{2}$, 3, wie jetzt bey der Berlinischen Banque; und der Geldsummen, welche in den Tabellen nur theilweise enthalten sind, ist bey weitem der größte Theil. Es lassen sich daher viele Fälle gedenken, wo man vermittelst dieser Tabellen auf eine weitläuftigere Art und mit mehrerm Zeitverluste das verlangte suchen muß, als es ohne dieselbe geschehen kann. So werde z. B. gefragt wie oben §. 11.

a Wie viel Zins geben 2356 Rthl. 12 gr. a 5 pr. C. in einem Jahre? Man findet in den Tabellen

Seite.		vom Capital.		den Zins zu 5 pr. C.
47	—	2000 Rthl.	—	100 Rthl.
53	—	300 Rthl.	—	15 Rthl.
87	—	50 Rthl.	—	2 Rthl. 12 gr.
117	—	6 Rthl.	—	— 7 gr. $2\frac{2}{5}$ pf.
128	—	— 12 gr.	—	— — $7\frac{4}{20}$ pf.

also bet. der Zins von 2356 Rthl. 12 gr. — 117 Rthl. 19 gr. $9\frac{3}{5}$ pf.

b Wie viel Zins erhält man von 3640 Rthl. 18 gr. 6 pf. a 5 pr. C. in $3\frac{1}{4}$ Jahre? Man findet in den Tabellen

Seite.

Seite.	vom Capital.	für die Zeit von.	den Zins zu 5 pr. C.
47 —	3000 Rl —	3 Jahren —	450 Rl
—	—	— ¼ Jahr —	37 Rl 12 ggl
51 —	600 Rl —	3 Jahren —	90 Rl
—	—	— ¼ Jahr —	7 Rl 12 ggl
94 —	40 Rl —	3 Jahren —	6 Rl
—	—	— ¼ Jahr —	— 12 ggl
124 —	18 ggl —	3 Jahren —	— 2 ggl $8\frac{8}{20}$ Pf
—	—	— ¼ Jahr —	— — $2\frac{14}{20}$ Pf
139 —	— 6 Pf	3 Jahren —	— — $\frac{72}{80}$ Pf
—	—	— ¼ Jahr —	— — $\frac{6}{80}$ Pf

also aller Zins von 3640 Rl 18 ggl 6 Pf in $3\frac{1}{4}$ J. 591 Rl 15 ggl $\frac{3}{40}$ Pf.

Man vergleiche hiermit die Ausrechnung eben derselben Exempel §. 11.

§. 16.

Noch umständlicher wird der Gebrauch dieser Tabellen, wenn ausserdem ein in ihnen nicht berechnetes pr. C. statt findet. Wäre z. B. in den eben beantworteten Fragen das pr. C. $2\frac{1}{2}$; so müßte das gefundene noch mit 2 dividirt werden. Doch dies wäre gerade einer von den leichtesten Fällen. Wie aber, wenn z. B. der Zins von 546 Rl 8 ggl 6 Pf a $4\frac{3}{4}$ pr. C. auf 1 Jahr und 3 Monat und 5 Tage berechnet werden sollte? So viel Zeit, als zur Beantwortung dieser und anderer ähnlichen Fragen vermittelst der Hessischen Tabellen erfordert wird, ist nicht immer in der Gewalt dessen, dem dergleichen Fragen vorgelegt werden, und dessen Pflicht ihre Beantwortung ist. Auch darf man nicht denken, daß man sich bey dem Gebrauche solcher Tabellen leichter vor Fehlern hüten könne. Hesse selbst muß Proben des nach den Tabellen gefundenen empfehlen, und wer es versuchen will, wird auch in diesem Stück den angeblichen Vortheil verschwinden sehen.

§. 17.

Was nun ferner die Capitaltabellen anbetrifft, so hat es damit die Bewandniß, daß man darin die Capitalien findet, die erfordert werden, um a 1, 4, 5 und 6 pr. C. so wohl jährlich, als wöchentlich und täglich, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 und 11 ₰, ferner 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. bis 23 gr, desgleichen 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 100 Rthl, wie auch 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000 Rthl u. s. w. Interessen zu geniessen. Es würde eine unnütze und überflüssige Arbeit seyn, die wenige Brauchbarkeit dieser Tabellen zu zeigen, zumal da man sich derselben höchst selten bedienen kann, um in den vorkommenden Fällen von dem Zinse auf das Capital zurück zu schliessen. Es stehen dieselben von Seite 144 bis 155.

§. 18.

Es ist Zeit die Hessischen Tabellen zu verlassen, da nach dem davon gesagten hoffentlich Niemand ihrem Gebrauche

brauche einen Werth beylegen wird, zumal da es immer eine Art von Schande ist, bloß um der Bequemlichkeit willen, ohne Zeit zu ersparen und ohne sich dadurch vor Fehltritten zu sichern, zu Tabellen seine Zuflucht zu nehmen. Dahingegen aber hoffe ich denen, welche häufig mit der Berechnung der Zinsen zu thun haben, keinen unangenehmen Dienst zu erweisen, wenn ich den §. 10 und 11 bereits betrachteten und mit Beyspielen belegten Fall, jetzt in der Absicht noch genauer durchnehme, um wo möglich noch mehrere Vortheile zur geschwinden Ausrechnung an die Hand zu geben.

§. 19.

Ich theile zu dem Ende alle hieher gehörige Aufgaben in leichtere und schwerere ein. Jene enthalten ein Capital, dessen Theile sich entweder durch eine blosse Multiplication oder durch eine blosse Division aus 100 zusammensetzen lassen, und wovon der Zins für eine nicht sehr zusammengesetzte Zeit berechnet werden soll. Diese enthalten ein Capital, wobey entweder die gedachte Eigenschaft nicht statt findet, oder wovon der Zins für eine sehr zusammengesetzte Zeit berechnet werden soll, oder es sind beyde Umstände vereiniget. So ist z. B. der Fall leicht, wenn gefragt wird: Wie viel Zins geben 2550 Rl. a 5 pr. C. in 1, 2 oder 3 Jahren? u. d. gl. schwer hingegen der: Wie viel Zins geben 3576 Rl. in $1\frac{3}{4}$

Jahren? Die leichtern Fälle muß derjenige, der oft Zins zu berechnen hat, wie man sagt, im Kopfe ausrechnen; bey den schwerern ist das Aufschreiben erlaubt und nothwendig: zu Tabellen kann ich nicht rathen, wofern es nicht etwa solche sind, als nachher beschrieben werden sollen.

§. 20.

Um die schwereren Fälle zuerst zu betrachten, so kann aus dem 10ten und 11ten § vorausgesetzt werden,

a daß man, um von einem Capitale nach einem gewissen pr. C., und zwar nach diesem allein, den Zins zu berechnen, nichts weiter nöthig habe, als das Capital mit oder nach einem Bruche, dessen Zähler das gegebene pr. C. und der Nenner 100 ist, oder mit irgend einem andern ihm gleichen Bruche zu multipliciren. Z. E. Wie viel Zins geben 5695 Rthl. 18 gr. 9 pf. a 5 pr. C. in einem Jahre? Die Rechnung ist entweder

1\. 5695 Rthl. 18 gr. 9 pf. × $\frac{5}{100}$

Rthl. 284|78 Rthl. 21 gr. 9 pf.

312

gr. 18|93

195

pf. 11|25/100 oder $\frac{1}{4}$; oder

2\. 5695

2. $\quad$ 5695 Rthl. 18 gr. 9 pf. $\times \frac{1}{4 \times 5}$

1423 Rthl. 22 gr. $8\frac{1}{4}$ pf.

284 Rthl. 18 gr. $11\frac{1}{4}$ pf.; oder

3. $\quad$ 5695 Rthl. 18 gr. 9 pf. $\times \frac{1}{20}$

284 Rthl. 18 gr. $11\frac{1}{4}$ pf.

Wenn man nemlich 5695 Rthl. durch 20 dividirt, so erhält man 284 Rthl. und $\frac{15}{20}$ Rthl., d. h. $\frac{3}{4}$ Rthl. oder 18 gr. Die übrigen 18 gr. und 9 pf. durch 20 dividirt, geben $\frac{18}{20}$ gr. $= \frac{9}{10}$ gr. $= 10\frac{8}{10}$ pf.; dazu $\frac{9}{20}$, so bekommt man $11\frac{1}{4}$ pf.

§. 21.

Betrachtet man die vorhergehende dreyfache Ausrechnung genau, so findet man, daß selbst die erste eben nicht viel Zeit erfordert, weil man, um mit 100 zu dividiren, nur jedesmal nöthig hat, zwey Ziffern zur Rechten abzuschneiden; und es kann daher diese Art von denen, die sich daran gewöhnt haben, füglich beybehalten werden. Die zweyte Art indeß, wobey man das Capital bloß durch die Zahl zu dividiren hat, welche angiebt, wie vielmal das Capital grösser ist als der Zins, und wo man diese Division nach und nach verrichtet, ist vortheilhafter. Die dritte Art, bey der man mit der ganzen eben beschriebenen Zahl dividirt, scheint noch vorzüglicher zu seyn, sie ist es aber in der That nur in einigen Fällen.

Wenn man den Divisor 20 in die beyden Divisoren 4 und 5 zerfällt, um mit diesem die nöthige Division nach und nach zu verrichten; so ist es freylich in Rücksicht auf den Quotienten selbst einerley, in welcher Ordnung man diese Divisoren gebrauche. Wenn aber die zu dividirende Grösse in Thalern, Groschen und Pfennigen besteht, wie hier; so ist es vortheilhafter mit der 4 den Anfang zu machen, weil man dabey den Rest der Thaler bequemer in Groschen, und den Rest der Groschen in Pfennigen angeben kann, als bey der 5. Aus gleichem Grunde müßte man bey ähnlichen Umständen, wenn man den Divisor 21 in 3 und 7 zerfällte, mit der 3 den Anfang machen, u. s. w. Ausserdem ist es auch vortheilhafter, anfänglich mit den kleinen Divisoren zu dividiren, und allmählich zu dem größten fortzugehen.

Gesetzt, daß eine Summe sich auf 0 oder 5 endigt, so ist es leicht, dieselbe auf einmal mit 20 zu dividiren. Wer übersieht z. B. im Exempel nicht gleich, daß 5695 mit 20 dividirt $284\frac{3}{4}$, und 3640 mit 20 dividirt 182 gebe? Dies sind daher ein Paar Fälle, wo die Unterlassung der Zerfällung eines zusammengesetzten Divisors vortheilhafter ist.

§. 22.

Ist also der Zins eines Capitals bloß nach dem pr. C. zu berechnen, so dividire man das Capital bey .

pr. C.

pr. C.	durch
1	100
$1\frac{1}{4}$	$80 = 2 \times 8 \times 5$
2	$50 = 2 \times 5 \times 5$
$2\frac{1}{2}$	$40 = 8 \times 5$
5	$20 = 4 \times 5$.

Bey einem andern pr. C. kan man nicht durch die Division allein seinen Endzweck erreichen, sondern man muß da entweder das Capital bey

pr. C.	multipliciren mit	und das Product dividiren durch
$1\frac{1}{2}$	3	200
$1\frac{3}{4}$	7	400
$2\frac{1}{4}$	9	400
$2\frac{3}{4}$	11	400
3	3	100
$3\frac{1}{4}$	13	400
$3\frac{1}{2}$	7	200
$3\frac{3}{4}$	3	80
4	4	100
$4\frac{1}{4}$	17	400
$4\frac{1}{2}$	9	200
$4\frac{3}{4}$	19	400
$5\frac{1}{4}$	21	400
$5\frac{1}{2}$	11	200
$5\frac{3}{4}$	23	400
6	6	100

An statt 200 kann man, wenn man will, jedesmal 2×100, an statt 400 ferner 4×100, und 8×10 an statt 80 nehmen; bisweilen ist der Vortheil, den man dadurch erhält, nicht ganz unbeträchtlich.

oder man multiplicirt, welches oft noch besser ist, jedesmal das gegebene Capital mit dem pr. C. selbst, und dividirt das Product durch 100. Wenn man nach der Tabelle verfahren will, so ist es bekannter Maassen gleich viel, ob man zuerst multiplicirt oder dividirt, wenn man nur den gehörigen Multiplicator und Divisor beybehält; man kann hier verfahren, wie es einem am vortheilhaftesten scheint.

§. 23.

Um das gesagte wenigstens noch mit einem Beyspiele zu belegen, so werde gefragt, wie viel Zins 7286 Rthl. 14 ßl a $2\frac{1}{4}$ pr. C. in einem Jahre tragen? — Die Rechnung ist entweder

7286 Rthl. 14 ßl $\times$ $\frac{9}{400}$

$\cancel{6}\cancel{5}\cancel{5}79$	Rthl. 6 ßl
$\cancel{2}\cancel{1}3$	
1516	163 Rthl.
$\cancel{9}\cancel{1}02$	
$\cancel{1}3$	22 ßl
604	
$\cancel{3}\cancel{6}24$	$9\frac{3}{50}$ ₰,

oder

oder

$$\frac{7286 \text{ Rthl. } 14 \text{ Gr.}}{14573 \text{ Rthl. } 4 \text{ Gr.}} \times \frac{2\frac{1}{4}}{100}$$

$$\begin{array}{rl}
 & 14573 \text{ Rthl. } 4 \text{ Gr.} \\
 & 1821 - 15 - 6 \text{ Pf.} \\
\hline
\text{Rthl.} & 163|94 \text{ Rthl. } 19 \text{ Gr. } 6 \text{ Pf.} \\
 & 376 \\
\hline
\text{Gr.} & 22|75 \\
 & 156 \\
\hline
\text{Pf.} & 9|06 \\
\end{array}$$

$\frac{\text{Pf. } 9|06}{100}$ oder $\frac{3}{50}$.

§. 24.

Ist der Zins eines Capitals für eine andere Zeit als ein Jahr zu berechnen, so giebt es dazu verschiedene Wege. Denn

a kann man zuerst nach dem bisherigen den Zins eines Jahres suchen und daraus das verlangte nach den bekannten Regeln entwickeln; oder

b das pr. C. pr. A. in das pr. C. der gegebenen Zeit verwandeln, und dann wie §. 20 verfahren; oder endlich

c das Capital mit der gegebenen Zeit in Jahren bestimmt multipliciren, und mit dem Producte wie mit dem Capitale §. 20 handeln.

Welcher von den beschriebenen Wegen den Vorzug habe, läßt sich nicht allgemein bestimmen; je nachdem die Umstände sind, ist bald dieser bald jener der beste. Die folgenden Exempel werden dies zeigen.

§. 25.

Es werde z. B. gefragt, wie viel Zins 7286 Rthl. 14 gr. a $2\frac{1}{4}$ pr. C. in 4 Jahren tragen? — Die Ausrechnung ist entweder

a daß man zuvörderst den Zins eines Jahres, so wie solches im vorhergehenden 23ten §. geschehen, nemlich

163 Rthl. 22 gr. $9\frac{3}{50}$ pf. suche, und diese
mit 4 multiplicire. Auf diese Art erhält
man 655 Rthl. 19 gr. $\frac{6}{25}$ pf.; oder

b 7286 Rthl. 14 gr. $\times \frac{2\frac{1}{4} \times 4}{100} = \frac{9}{100}$

Rthl. 655|79 Rthl. 6 gr.

316

gr. 19|02

4

pf. $\frac{24}{100}$ oder $\frac{6}{25}$; oder

c 7286

c $\quad 7286$ Rthl. 14 gr. $\times 4 \times \frac{2\frac{1}{4}}{100}$

29146 Rthl. 8 gr.

58292 Rthl. 16 gr.
 7286 Rthl. 14 gr.

Rthl. 655|79 Rthl. 6 gr.

316

gr. 19|02
4

pf. $\frac{24}{100}$ oder $\frac{6}{25}$.

Wie vortheilhaft vor allen hier die Art b sey, fällt von selbst in die Augen.

§. 26.

1. Wie viel Zins geben 6340 Rthl. 15 gr. à 5 pr. C. in $1\frac{1}{4}$ Jahre?

6340 Rthl. 15 gr. $\times \frac{1}{20} \times 1\frac{1}{4}$

317 Rthl. — 9 pf.
 79 — 6 gr. $2\frac{1}{4}$ —

396 Rthl. 6 gr. $11\frac{1}{4}$ pf.

2. Wie viel Zins geben 3224 Rthl. 12 gr. a 3 pr. C. in $2\frac{2}{3}$ Jahren?

$$3224 \text{ Rthl. } 12 \text{ gr. } \times \tfrac{8}{3} \times \tfrac{3}{100} = \tfrac{8}{100}$$

Rthl. 257|96 Rthl.

384

gr. 23|04

pf. $\frac{48}{100}$ oder $\frac{12}{25}$.

3. Wie viel Zins geben 3224 Rthl. 12 gr. a 3 pr. C. in $1\frac{1}{4}$ Jahre?

$$3224 \text{ Rthl. } 12 \text{ gr. } \times 1\tfrac{1}{4} \times \tfrac{3}{100}$$

806 — 3 —

4030 Rthl. 15 gr.

Rthl. 120|91 Rthl. 21 gr.

364

gr. 22|05

pf. $\frac{60}{100}$ oder $\frac{3}{5}$.

Versucht man es, diese Exempel auf eine andere Art auszurechnen, so findet man alle diese andern Arten weitläuftiger, als die hier gebrauchten. Um jedesmal beym ersten Anblick so gleich bestimmen zu können, welcher Weg der kürzeste seyn werde; muß man öfters Aufgaben auf alle mög-

mögliche Arten auflösen, und die Rechnungen alsdann unter einander vergleichen.

§. 27.

Gesetzt, daß jemand nach diesem allen doch noch Tabellen sich wünschte, um sich derselben in Fällen, die den §. 23 u. f. behandelten, ähnlich sind, bedienen zu können; so würde ich zu solchen rathen, als §. 22 für die wenig zusammengesetzten Fälle da gewesen, jedoch mit einer doppelten Veränderung. Einmal müßten darin, um den Raum zu ersparen, die Zahlen, nach welchen das gegebene Capital entweder multipliciret, oder dividiret, oder zugleich multipliciret und dividiret werden sollte, anzeigermäßig (dieser Ausdruck ist in der Vorrede erklärt) gesetzt, und dann jeder aus grossen Zahlen bestehende Anzeiger in einen gleichen aus kleinern Zahlen bestehenden verwandelt werden, so daß die beste Ordnung und die bequemste Art des Verfahrens ohne langes Suchen in die Augen fiele. Eine solche Tabelle leistete zwar nicht den Dienst, daß man bey ihrem Gebrauche bloß zu addiren hätte, man müßte dabey multipliciren und dividiren; allein sie wäre mit einem Blicke zu übersehen und zu der jedesmal nöthigen Multiplication und Division würde bey einer leicht zu erhaltenden Fertigkeit bey weitem so viel Zeit nicht gehören, als zu der erforderlichen Addition bey dem Gebrauche der Hessischen Tabellen.

§. 28.

§. 28.

Um so wohl von dieser Art Tabellen eine Probe zu geben, als ihre Verfertigung zu zeigen; so sey das pr. C. pr. A. 5. Hier ist, um aus dem Capital den Zins zu finden,

für die Zeit von		der Anzeiger zur Veränderung des Capitals.				
Mon. 1 Tage	—	$\frac{1}{7200}$	=	$\frac{1}{100\times8\times9}$	=	$\frac{1}{800\times9}$
— 2 Tagen	—	$\frac{1}{3600}$	=	$\frac{1}{100\times4\times9}$	=	$\frac{1}{400\times9}$
$\frac{1}{10}$ od. 3 —	—	$\frac{1}{2400}$	=	$\frac{1}{4\times6\times100}$	=	$\frac{1}{6\times400}$
— 4 —	—	$\frac{1}{1800}$	=	$\frac{1}{100\times2\times9}$	=	$\frac{1}{200\times9}$
$\frac{1}{6}$ oder 5 —	—	$\frac{1}{1440}$	=	$\frac{1}{2\times12\times12\times5}$	=	$\frac{1}{12\times12\times10}$
$\frac{1}{5}$ oder 6 —	—	$\frac{1}{1200}$	=	$\frac{1}{12\times100}$	=	$\frac{1}{1200}$
— 7 —	—	$\frac{7}{7200}$	=	$\frac{7}{100\times8\times9}$	=	$\frac{7}{800\times9}$
— 8 —	—	$\frac{1}{900}$	=	$\frac{1}{100\times9}$	=	$\frac{1}{900}$
$\frac{3}{10}$ od. 9 —	—	$\frac{1}{800}$	=	$\frac{1}{100\times8}$	=	$\frac{1}{800}$
$\frac{1}{3}$ od. 10 —	—	$\frac{1}{720}$	=	$\frac{1}{4\times6\times6\times5}$	=	$\frac{1}{8\times9\times10}$
— 11 —	—	$\frac{11}{7200}$	=	$\frac{11}{100\times8\times9}$	=	$\frac{11}{800\times9}$
$\frac{2}{5}$ od. 12 —	—	$\frac{1}{600}$	=	$\frac{1}{6\times100}$	=	$\frac{1}{600}$
— 13 —	—	$\frac{13}{7200}$	=	$\frac{13}{100\times8\times9}$	=	$\frac{13}{800\times9}$
— 14 —	—	$\frac{7}{3600}$	=	$\frac{7}{100\times4\times9}$	=	$\frac{7}{400\times9}$
$\frac{3}{6}$ od. $\frac{1}{2}$ M. od. 15	—	$\frac{1}{480}$	=	$\frac{1}{8\times12\times5}$	=	$\frac{1}{6\times8\times10}$
— 16 —	—	$\frac{1}{450}$	=	$\frac{1}{2\times5\times5\times9}$	=	$\frac{1}{5\times9\times10}$
— 17 —	—	$\frac{17}{7200}$	=	$\frac{17}{100\times8\times9}$	=	$\frac{17}{800\times9}$
$\frac{3}{5}$ od. 18 —	—	$\frac{1}{400}$	=	$\frac{1}{4\times100}$	=	$\frac{1}{400}$

für

Für die Zeit von	der Anzeiger zur Veränderung des Capitals.				
Mon. 19 Tage —	$\frac{19}{7200}$	=	$\frac{19}{100\times8\times9}$	=	$\frac{19}{800\times9}$
$\frac{2}{3}$ od. 20 — —	$\frac{1}{360}$	=	$\frac{1}{6\times12\times5}$	=	$\frac{1}{12\times30}$
$\frac{7}{10}$ od. 21 — —	$\frac{7}{2400}$	=	$\frac{7}{4\times6\times100}$	=	$\frac{1}{6\times400}$
— 22 — —	$\frac{11}{3600}$	=	$\frac{11}{100\times4\times9}$	=	$\frac{11}{400\times9}$
— 23 — —	$\frac{23}{7200}$	=	$\frac{23}{100\times8\times9}$	=	$\frac{23}{800\times9}$
$\frac{4}{5}$ od. 24 — —	$\frac{1}{300}$	=	$\frac{1}{3\times100}$	=	$\frac{1}{300}$
$\frac{5}{6}$ od. 25 — —	$\frac{1}{288}$	=	$\frac{1}{6\times6\times8}$	=	$\frac{1}{6\times6\times8}$
— 26 — —	$\frac{13}{3600}$	=	$\frac{13}{100\times4\times9}$	=	$\frac{13}{400\times9}$
$\frac{9}{10}$ od. 27 — —	$\frac{3}{800}$	=	$\frac{3}{8\times100}$	=	$\frac{3}{800}$
— 28 — —	$\frac{7}{1800}$	=	$\frac{7}{100\times2\times9}$	=	$\frac{7}{200\times9}$
— 29 — —	$\frac{29}{7200}$	=	$\frac{29}{100\times8\times9}$	=	$\frac{29}{800\times9}$
1 M. oder 30 —	$\frac{1}{240}$	=	$\frac{1}{4\times12\times5}$	=	$\frac{1}{6\times8\times5}$
1 und 1 — —	$\frac{31}{7200}$	=	$\frac{31}{100\times8\times9}$	=	$\frac{31}{800\times9}$
1 — 2 — —	$\frac{1}{225}$	=	$\frac{1}{5\times5\times9}$		
1 — 3 — —	$\frac{11}{2400}$	=	$\frac{11}{4\times6\times100}$	=	$\frac{11}{6\times400}$
1 — 4 — —	$\frac{17}{3600}$	=	$\frac{17}{100\times4\times9}$	=	$\frac{17}{400\times9}$
1 — 5 — —	$\frac{7}{1440}$	=	$\frac{7}{2\times12\times12\times5}$	=	$\frac{7}{12\times12\times10}$
1 — 6 — —	$\frac{1}{200}$	=	$\frac{1}{2\times100}$	=	$\frac{1}{200}$
1 — 7 — —	$\frac{37}{7200}$	=	$\frac{37}{100\times8\times9}$	=	$\frac{37}{800\times9}$
1 — 8 — —	$\frac{19}{3600}$	=	$\frac{19}{100\times4\times9}$	=	$\frac{1}{6\times600}$
1 — 9 — —	$\frac{13}{2400}$	=	$\frac{13}{4\times6\times100}$	=	$\frac{13}{6\times400}$
1 — 10 — —	$\frac{1}{180}$	=	$\frac{1}{6\times6\times5}$	=	$\frac{1}{3\times6\times10}$
1 — 11 — —	$\frac{41}{7200}$	=	$\frac{41}{100\times8\times9}$	=	$\frac{41}{800\times9}$

für

für die Zeit von	der Anzeiger zur Veränderung des Capitals.		
1 Mon. 12 Tage —	$\frac{7}{1200}$	$= \frac{7}{12\times100}$	$= \frac{7}{1200}$
1 — 13 — —	$\frac{43}{7200}$	$= \frac{43}{100\times8\times9}$	$= \frac{43}{800\times9}$
1 — 14 — —	$\frac{11}{1800}$	$= \frac{11}{100\times2\times9}$	$= \frac{11}{200\times9}$
1 — 15 — —	$\frac{1}{160}$	$= \frac{1}{4\times8\times5}$	$= \frac{1}{4\times4\times10}$
1 — 16 — —	$\frac{23}{3600}$	$= \frac{23}{100\times4\times9}$	$= \frac{23}{400\times9}$
1 — 17 — —	$\frac{47}{7200}$	$= \frac{47}{100\times8\times9}$	$= \frac{47}{800\times9}$
1 — 18 — —	$\frac{1}{150}$	$= \frac{1}{6\times5\times5}$	$= \frac{1}{3\times5\times10}$
1 — 19 — —	$\frac{49}{7200}$	$= \frac{49}{100\times8\times9}$	$= \frac{49}{800\times9}$
1 — 20 — —	$\frac{1}{144}$	$= \frac{1}{12\times12}$	
1 — 21 — —	$\frac{17}{2400}$	$= \frac{17}{100\times4\times6}$	$= \frac{17}{6\times400}$
1 — 22 — —	$\frac{13}{1800}$	$= \frac{13}{100\times2\times9}$	$= \frac{13}{200\times9}$
1 — 23 — —	$\frac{53}{7200}$	$= \frac{53}{100\times8\times9}$	$= \frac{53}{800\times9}$
1 — 24 — —	$\frac{3}{400}$	$= \frac{3}{4\times100}$	$= \frac{3}{400}$
1 — 25 — —	$\frac{11}{1440}$	$= \frac{11}{2\times12\times12\times5}$	$= \frac{11}{12\times12\times10}$
1 — 26 — —	$\frac{7}{900}$	$= \frac{7}{100\times9}$	$= \frac{7}{900}$
1 — 27 — —	$\frac{57}{7200}$	$= \frac{57}{100\times8\times9}$	$= \frac{57}{800\times9}$
1 — 28 — —	$\frac{29}{3600}$	$= \frac{29}{100\times4\times9}$	$= \frac{29}{400\times9}$
1 — 29 — —	$\frac{59}{7200}$	$= \frac{59}{100\times8\times9}$	$= \frac{59}{800\times9}$
2 — — — —	$\frac{1}{120}$	$= \frac{1}{4\times6\times5}$	$= \frac{1}{12\times10}$
2 — 1 — —	$\frac{61}{7200}$	$= \frac{61}{100\times8\times9}$	$= \frac{61}{800\times9}$
2 — 2 — —	$\frac{31}{3600}$	$= \frac{31}{100\times4\times9}$	$= \frac{31}{400\times9}$
2 — 3 — —	$\frac{7}{800}$	$= \frac{7}{8\times100}$	$= \frac{7}{800}$

u. s. w.

§. 25.

§. 29.

Ich habe in der vorhergehenden Tabelle nicht nur den Hauptanzeiger, sondern auch zwey andere aus ihm hergeleitete angeführt. Soll eine Tabelle bloß zum Gebrauch bey der Ausrechnung des Zinses seyn, so ist einer von den letzten Anzeigern hinlänglich, wodurch eine Menge Raum ersparet wird. Der zweyte Anzeiger scheint dazu der bequemste zu seyn, denn der dritte erfordert schon eine grössere Fertigkeit im Rechnen, als gewöhnlicher Weise vorausgesetzt werden kann. Um auch von einer solchen Tabelle eine Probe zu geben, so sey das pr. C. wieder 5, und es ist, um aus dem Capital den Zins zu finden,

für die Zeit von					der Anzeiger zur Veränderung des Capitals.	
1 Jahre	—			—	$\frac{1}{4\times5}$	—
1 Jahre und		1 Tage		—	$\frac{361}{100\times8\times9}$	—
1	—	2	—	—	$\frac{181}{100\times4\times9}$	—
1	—	3	—	—	$\frac{121}{4\times6\times100}$	—
1	—	4	—	—	$\frac{91}{100\times2\times9}$	—
1	—	5	—	—	$\frac{73}{2\times12\times12\times5}$	—
1	—	6	—	—	$\frac{61}{12\times100}$	—
1	—	7	—	—	$\frac{367}{100\times8\times9}$	—
1	—	8	—	—	$\frac{23}{2\times5\times5\times9}$	—
1	—	9	—	—	$\frac{41}{8\times100}$	—
1	—	10	—	—	$\frac{37}{4\times6\times6\times5}$	—
1	—	11	—	—	$\frac{371}{100\times8\times9}$	—

für die Zeit von							der Anzeiger zur Veränderung des Capitals.	
1	Jahre und	12	Tagen			—	$\frac{31}{6\times100}$	—
1	—	13	—			—	$\frac{373}{100\times8\times9}$	—
1	—	14	—			—	$\frac{187}{100\times4\times9}$	—
1	—	15	—			—	$\frac{5}{8\times12}$	—
1	—	16	—			—	$\frac{47}{100\times9}$	—
1	—	17	—			—	$\frac{377}{100\times8\times9}$	—
1	—	18	—			—	$\frac{21}{4\times100}$	—
1	—	19	—			—	$\frac{379}{100\times8\times9}$	—
1	—	20	—			—	$\frac{19}{6\times12\times5}$	—
1	—	21	—			—	$\frac{127}{4\times6\times100}$	—
1	—	22	—			—	$\frac{191}{100\times4\times9}$	—
1	—	23	—			—	$\frac{383}{100\times8\times9}$	—
1	—	24	—			—	$\frac{4}{3\times5\times5}$	—
1	—	25	—			—	$\frac{77}{2\times12\times12\times5}$	—
1	—	26	—			—	$\frac{193}{100\times4\times9}$	—
1	—	27	—			—	$\frac{43}{8\times100}$	—
1	—	28	—			—	$\frac{199}{100\times4\times9}$	—
1	—	29	—			—	$\frac{389}{100\times8\times9}$	—
1	Jahr	1	Monat			—	$\frac{13}{4\times12\times5}$	—
1	—	1	—	1	Tag		$\frac{391}{100\times8\times9}$	—
1	—	1	—	2	—		$\frac{49}{100\times9}$	—
1	—	1	—	3	—		$\frac{131}{4\times6\times100}$	—
1	—	1	—	4	—		$\frac{197}{100\times4\times9}$	—
1	—	1	—	5	—		$\frac{79}{2\times12\times12\times5}$	u. s. w.

§. 30.

§. 30.

Wollte man die Tabelle §. 28 auf die angefangene Art bis zu einem Jahre, und die §. 29 enthaltene, auch so wie sie angefangen ist, bis zu zwey Jahren, und dann von einem Viertheiljahr zum andern bis zu 20 Jahren fortsetzen; so erhielte man noch nicht voll 800 Anzeiger, welche auf 4 Seiten in groß Quart Platz haben und also sehr leicht zu übersehen seyn würden. Würde nun aber auch der Vortheil von dem Gebrauche einer solchen Tabelle wichtig genug seyn? Es kann nicht schaden, in Hinsicht auf die Beantwortung dieser Frage ein Paar Exempel durchzunehmen.

§. 31.

1. Wie viel Zins geben 5937 Rthlr. 16 gr. a 5 pr. C. in 1 Jahre 1 Monate und 3 Tagen? — Nach der Tabelle a ist die Rechnung hier folgende:

5937 Rthlr. 16 gr. $\times \frac{131}{4 \times 6 \times 100}$
17811
5937
65 — 12
21 — 20
777834 Rthlr. 8 gr.
194458 Rthlr. 14 gr.
Rthlr. $324|09$ Rthlr. 18 gr. 4 pf.
36
gr. $2|34$
72
pf. $4|12$ / 100 oder $\frac{3}{25}$.

b Ohne Tabelle steht das Exempel

5937 Rthl. 16 gr. $\times \frac{1}{20} \times (1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}) = \frac{1}{4 \times 5} \times (1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{120})$

1484 Rthl. 10 gr.

296 Rthl. 21 gr. $2\frac{2}{5}$ pf.
24 — 17 — $9\frac{1}{5}$ pf.
2 — 11 — $4\frac{26}{50}$ pf.

324 Rthl. 2 gr. $4\frac{3}{25}$ pf.

2. Wie viel Zins geben 786 Rthl. 15 gr. a 5 pr. C. in 1 Jahre und 29 Tagen? — Die Rechnung ist

a nach der Tabelle

786 Rthl. 15 gr. $\times \frac{389}{100 \times 8 \times 9}$

```
       7074
      6288
     2358
        194 — 12
         48 — 15
Rthl. 3059|97 Rthl. 3 gr.
         388
gr.     23|31
          62
pf.     3|72   oder 18/25
         100
```

382 Rthl. 11 gr. $10\frac{123}{200}$

42 Rthl. 11 gr. $11\frac{1593}{1800}$ oder $\frac{177}{200}$ pf.

b ohne

b ohne Tabelle:

786 Rthl 15 gr $\times \frac{1}{4 \times 5} \times 1\frac{29}{300}$

196 Rthl 15 gr 9 pf

39 Rthl 7 gr $11\frac{2}{5}$ pf
3 — 4 — $\frac{291}{600}$

42 Rthl 11 gr $11\frac{531}{600}$ oder $\frac{177}{200}$ pf.

Die addirten 3 Rthl 4 gr $\frac{291}{600}$ pf erhält man aus

39 Rthl 7 gr $11\frac{2}{5}$ pf $\times \frac{29}{300} = \frac{29}{6 \times 5 \times 10}$

351
78
8 — 11
1 — 2 — 7
$11\frac{2}{5}$

1140 Rthl 14 gr $6\frac{3}{5}$ pf

190 Rthl 2 gr $5\frac{1}{10}$

31 Rthl 16 gr $4\frac{51}{60}$

3 Rthl 4 gr $\frac{291}{600}$ pf.

Bey dem ersten Exempel ist es ziemlich gleich, ob man mit Hülfe der Tabelle oder ohne dieselbe rechnet: bey dem zweyten Exempel hingegen wird man mit Hülfe der Tabelle ehe zu seinem Zwecke gelangen. Der größte Vortheil der Tabelle ist, daß man durch sie der Mühe des Aufsuchens der Multiplicatoren und Divisoren überhoben wird, und bey ihrem Gebrauche, wenn man die Fertigkeit im Multipliciren und Dividiren sich erworben hat, welche in der Vorrede von Rechnern gefordert wird und mit Recht gefordert werden kann, nicht leicht einem Irrthum ausgesetzt ist.

§. 32.

Es ist übrigens die Verfertigung einer solchen Tabelle gar nicht schwer. Denn wenn man den Anzeiger zur Veränderung des Capitals für *einen* Tag gefunden hat, so darf man nur anfänglich seinen Nenner unverändert lassen, und den Zähler immer um 1 vermehren. Wenn man auf die Art bis zu 360 im Zähler gekommen ist, so hat man alle Anzeiger für jede Zeit, die ein Jahr nicht übersteigt; und auf gleiche Art kann man nachher auch die Fortsetzung machen. Ist man hierin so weit gekommen, als man es für nöthig erachtet; so nimmt man den Anzeiger für $\frac{1}{4}$ Jahr, und macht daraus, so weit als man will, auf eine ähnliche Art die Anzeiger für $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ u. s. w. Jahr. Ist auch dies geschehen, so muß man die Anzeiger auf die möglich kleinsten Zahlen bringen und zerfällen, wozu die Regeln in der Vorrede bewährt sind, und dann endlich neben einem jeden die gehörige Zeit setzen. Bey diesem letzten ist zu merken, daß jeder Monat 30 Tage, und das Jahr 360 gerechnet werden müsse.

§. 33.

Was nun die oben §. 19 gedachten leichten Fälle betrifft, so muß man dabey nicht nur zu keiner Tabelle seine Zuflucht nehmen, sondern nicht einmal nöthig haben, dieselben aufzuschreiben; und es hält auch in der That nicht schwer, sich diese Fertigkeit zu verschaffen. Das erste, was man in dieser Absicht zu thun hat, ist, daß man sich den Zins von 100 und den Theilen von 100, z. B. 50, 10, 5, $2\frac{1}{2}$ und 1, recht geläufig bekannt mache; und das zweyte, daß man den Zins von 100, oder das pr. C. nicht bloß für 1 Jahr, sondern auch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ Jahr, und allenfalls auch für einen Tag eben so merke. Zerlegt man nach diesem das Capital, dessen Zins man berechnen soll, in Gedanken in Theile von 100, 50, 10, 5, $2\frac{1}{2}$ und 1; so findet man nach einiger Uebung in den hieher gehörigen Fällen sehr leicht und bald den gesammten Zins im Kopfe,

Es ist bewundernswürdig, wie weit es bisweilen Personen in der Fertigkeit im Kopfe zu rechnen bringen, und diejenigen besitzen dieselbe oft im höchsten Grade, die ohne Anweisung in der Rechenkunst gehabt zu haben, oft gezwungen gewesen sind, Rechnungsfragen zu beantworten, und sich also selbst einen Weg zu erfinden. Wenn jemand vom Anfang seiner Unterweisung an sorgfältig zu dieser Fertigkeit gebildet würde; so müßte er es darin natürlicher Weise noch weiter als sich selbst überlassen bringen. Das gewöhnlichste Hülfsmittel zum Ausrechnen im Kopfe ist ein dem beschriebenen ähnliches Verfahren, wovon ich aus mehrern Erfahrungen überzeugt bin.

§. 34.

Gesetzt z. B. es werde gefragt:

a Wie viel Zins geben 3675 Rthlr a 5 pr. C. in einem Jahre? — — Hat man sich das im vorhergehenden §. angeführte bekannt gemacht, so denkt man hier: 3000 Rthlr geben 150 Rthlr, 600 Rthlr geben 30 Rthlr, also 150 Rthlr und 30 Rthlr, sind 180 Rthlr, dazu den Zins von 50 Rthlr oder $2\frac{1}{2}$ Rthlr, und von 25 Rthlr, oder 1 Rthlr 6 gr, macht 183 Rthlr 18 gr.

b Wie viel Zins geben 225 Rthlr in 3 Monaten? Man findet ausserordentlich leicht 11 Rthlr 6 gr für ein Jahr, und also 2 Rthlr 19 gr 6 pf für 3 Monat oder $\frac{1}{4}$ Jahr.

§. 35.

Je nachdem das pr. C. beschaffen ist, ist es gut, sich bald von diesen bald von jenen Theilen von 100 den Zins eines Jahres bekannt zu machen. Bey 4 und 8 pr. C. z. B. wären diese Theile 75, 50, 25, 5, 1, bey $2\frac{1}{2}$ aber 80, 50, 40, 20, 10, 5, 1 u. s. w. Sorgfältige Betrachtung einzeler Fälle und Vergleichung mehrerer möglicher Arten ist auch bey dieser Sache einem jeden anzurathen.

§. 36.

Ausser dem bisher betrachteten wichtigsten Falle der gemeinen Zinsrechnung giebt es nun noch auch andere, die zwar nicht ganz übergangen werden dürfen, aber doch keine so weitläuftige Behandlung erfordern, indem sie seltner vorkommen. Es gehören dahin folgende:

a Wenn man aus dem Zinse, den ein Capital in einer gewissen Zeit und bey einem gegebenen pr. C. trägt, den Zins finden soll, den es bey einem andern pr. C. tragen würde; z. B. Wie viel Zins erhält man von einem Capitale a $6\frac{1}{4}$ pr. C. wenn es in eben der Zeit a 5 pr. C. 324 Rthl. 6 Gr. Zins trägt?

b Wenn man aus dem pr. C., zu welchem ein Capital aussteht, und dem Zinse, welchen dasselbe in einer gewissen Zeit trägt, ein anderes pr. C. finden soll, bey welchem es einen andern gegebenen Zins in eben der Zeit tragen könnte; z. B. Wie groß muß das pr. C. seyn, um von einem Capitale, davon man a $6\frac{1}{4}$ pr. C. 405 Rthl. 7 Gr. 6 Pf. Zins erhält, in eben der Zeit nur 324 Rthl. 6 Gr. zu erhalten?

Dieser zweyte Fall ist der vorhergehende erste umgekehrt, und beyde muß man wissen, um jedesmal die Probe zu machen.

§. 37.

Der zur Ausrechnung der hieher gehörigen Exempel nöthige Satz ist:

Je grösser bey einerley Capital und Zeit das pr. C. ist, desto grösser ist auch der Zins, und je kleiner bey einerley Capital und Zeit das pr. C. ist, desto kleiner ist auch der Zins; und umgekehrt: Je grösser bey einerley Capital und Zeit der Zins seyn soll, desto grösser muß auch das pr. C. seyn, und je kleiner bey einerley Capital und Zeit der Zins ist, desto kleiner kann auch das pr. C. seyn.

Die Anmerkung bey §. 10 gehört auch hieher.

§. 38.

Die Ausrechnung der §. 36 angeführten Fragen ist also

a

$$324 \text{ Rthlr } 6 \text{ gr } \times \frac{6\frac{1}{4}}{5} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

81 Rthlr 1 gr 6 pf

405 Rthlr 7 gr 6 pf.

b

$$6\tfrac{1}{4} \times \frac{324 \text{ Rthlr } 6 \text{ gr}}{405 \text{ Rthlr } 7\frac{1}{2} \text{ gr}}$$

1945 Rthlr 12 gr — $9727\frac{1}{2}$

81 — $1\frac{1}{2}$

2026 Rthlr $13\frac{1}{2}$ gr

8104

48637

19455) $\cancel{97278}$ | 5 pr. C.

$\cancel{42}$ $\cancel{2}$

§. 39.

c §. 36. Wenn man aus der Zeit des Ausstehens eines Capitals und seinem pr. C. die Zeit finden soll, welche das Capital, um gleichen Zins zu tragen, bey einem andern pr. C. würde ausstehen müssen; und umgekehrt.

d Wenn man aus einem Capitale und seinem pr. C. ein anderes Capital finden soll, welches bey einem andern pr. C. in gleicher Zeit eben denselben Zins trage; und umgekehrt.

§. 40.

Die für diese Fälle nöthigen Sätze sind

zu c. Je grösser bey einerley Capital und Zins die Zeit gesetzt wird, desto kleiner muß das pr. C. angenommen werden, und je kleiner bey einerley Capital und Zins die Zeit gesetzt wird, desto grösser muß das pr. C. seyn; und umgekehrt: Je grösser bey einerley Capital und Zinse das pr. C., desto kleiner die Zeit, und je kleiner das pr. C., desto grösser die Zeit.

zu d. Je grösser bey einerley Zeit und Zins das Capital ist, desto kleiner kann das pr. C. seyn, und je kleiner bey einerley Zeit und Zins das Capital ist, desto grösser muß das pr. C. seyn; und umgekehrt; Je grösser bey einerley Zeit und Zins das pr. C., desto kleiner das Capital, und je kleiner das pr. C. desto grösser das Capital.

Diese

Diese Sätze sind im strengsten Verstande zu nehmen, und ich setze auch hier voraus, was in der Vorrede bey der Betrachtung der Grössen, die in einem verkehrten geometrischen Verhältnisse stehen, gesagt worden ist.

§. 41.

Beyspiele zu dem Falle c sind:

Wie lange muß ein Capital a 6 pr. C. stehen, um eben so viel Zins zu tragen, als es a 5 pr. C. in $1\frac{1}{2}$ Jahre bringen würde? — Die Rechnung ist hier

$$\frac{\frac{1\frac{1}{2} \text{ Jahr} \times \frac{5}{6}}{7\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{4} \text{ Jahr.}}$$

Zu wie viel pr. C. muß ein Capital ausgeliehen werden, um in $1\frac{1}{4}$ Jahre eben so viel Zins zu geben, als 5 pr. C. in $1\frac{1}{2}$ Jahre? — Die Rechnung ist

$$\frac{5 \text{ pr. C.} \times \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = \frac{6}{5}}{6 \text{ pr. C.}}$$

Beyspiele aber zu dem Falle d:

Wie groß muß ein Capital seyn, um a 5 pr. C. eben so viel Zins zu tragen, als 3425 Rthlr a 6 pr. C. — Die Rechnung ist

$$\frac{\frac{3425 \text{ Rthlr } \frac{5}{6}}{570\frac{5}{6} \text{ Rthlr}}}{2854\frac{1}{6} \text{ Rthlr.}}$$

Wie

Wie groß muß das pr. C. seyn, um von 3425 Rthlr eben so viel Zins zu erhalten, als $2854\frac{1}{6}$ Rthlr a 6 pr. C. tragen? — Die Rechnung ist

$$\begin{array}{r|l} & 6 \text{ pr. C.} \\ \hline \cancel{1}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{5} & 5 \text{ pr. C.} \\ \cancel{2} & \end{array} \qquad \frac{2854\frac{1}{6}}{3425}$$

§. 42.

Bisweilen sind die Fragen von der Art, daß man zu ihrer Beantwortung zwey von den angeführten Sätzen zum Grunde legen muß. Z. E. Zu wie viel pr. C. müssen 1000 Rthlr ausgethan werden, um davon in $4\frac{1}{2}$ Jahre eben so viel Zins zu erhalten, als man von 400 Rthlr a 5 pr. C. in $13\frac{1}{2}$ Jahre empfangen kann? — Die Rechnung ist

$$\begin{array}{l} \underline{5}\text{ pr. C.} \times \frac{2}{5} \times \frac{13\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = \frac{2}{5} \times 3 \\ \underline{2} \\ 6 \text{ pr. C.} \end{array}$$

Es liegen bey diesem Exempel die Sätze c und d §. 39 zum Grunde. Ueber die Verfahrungsart in Fällen dieser Gattung ist allgemein in der Vorrede geredet worden.

§. 43.

Es sind nunmehr die zusammengesetzten Fälle der gemeinen Zinsrechnung, welche oben §. 7 kenntlich gemacht worden sind, zu betrachten. Nöthig ist es

dabey

dabey nicht, daß zuvörderst die Classen derselben vestgesetzt werden, zumal da man derselben sehr leicht eine sehr grosse Menge machen könnte; sondern es kommt einzig und allein darauf an, daß an einigen Beyspielen die leichteste Verfahrungsart gezeiget werde. Um dies zu können, muß ich einige Sätze vorausschicken.

§. 44.

1. Es ist in Ansehung des Zinses völlig einerley, ob man, vorausgesetzt, daß das pr. C. nicht geändert werde, und wenn keine Zeit besonders bestimmt ist, allezeit ein Jahr zu verstehen sey, ob man, sage ich, den Zins von dem gegebenen Capitale und der vestgesetzten Zeit, oder von dem Producte aus dem Capitale und der Zahl der Zeit nach Jahren bestimmt, berechne. So findet z. B. kein Unterschied statt zwischen dem Zinse von 4000 Rthlr in 3 Jahren und zwischen dem Zinse von 12000 Rthlr in einem Jahre; er ist bey 5 pr. C. 600 Rthlr in dem einen so wohl als in dem andern Falle.

2. Ist es auch in Ansehung des Zinses einerley, wenn auf die Zeit nicht gesehen wird, ob man den Zins eines Capitals nach dem angegebenen pr. C., oder den Zins des Products aus dem gedachten Capitale und pr. C., als eines Capitals, das a 1 pr. C. steht, berechne. Es ist z. B. gleich, ob man den Zins von 600 Rthlr a 5 pr. C., oder von 3000 Rthlr a 1 pr. C. nimmt, denn in beyden Fällen ist der Zins 30 Rthlr.

3. End=

3. Endlich ist es in Ansehung des Zinses gleich, ob man denselben von einem gegebenen Capitale nach dem bestimmten pr. C. und der vestgesetzten Zeit, oder von dem Producte aus dem Capitale und dem pr. C. und der Zeit in Jahren ausgedruckt, als von einem Capitale a 1 pr. C. und auf 1 Jahr, berechne. Es findet z. B. kein Unterschied statt, man mag den Zins von 800 Rthl. a 4 pr. C. in 3 Jahren, oder den Zins von 9600 Rthl. a 1 pr. C. in 1 Jahre rechnen, in beyden Fällen ist er 96 Rthl.

Es kann nicht schwer fallen, sich von der Richtigkeit dieser Sätze allgemein zu überzeugen, da aus dem vorhergehenden und aus der Natur der Sache selbst bekannt ist, daß der Zins mit dem Capitale, mit dem pr. C. und mit der Zeit genau ab und zunehme. Es muß also gleich viel seyn, ob man ein einfaches Capital und eine zwiefache Zeit, oder das zwiefache Capital und die einfache Zeit: ein einfaches Capital und eine dreyfache Zeit, oder das dreyfache Capital und die einfache Zeit u. s. w. nehme. Auf gleiche Art verhält es sich mit den übrigen Fällen.

§. 45.

Vermittelst dieser Sätze ist man im Stande, jeden zusammengesetzten Fall der gemeinen Zinsrechnung in einen einfachen zu verwandeln. Es werde z. B. gefragt: wie viel Zins man in allem von 3500 Rthl. a 5 pr. C. in $\frac{3}{4}$ Jahren, von 2600 Rthl. a 4 pr. C. in $1\frac{1}{2}$ Jahre, von 1500 Rthl. a $3\frac{1}{2}$ pr. C. in einem Jahre, und von 753 Rthl. a $2\frac{1}{2}$ pr. C. in 2 Jahren erhalte? Man kann die Rechnung folgender Gestalt machen. Es sind

3500

3500 Rthl. a 5 pr. C.	auf $\frac{3}{4}$ Jahr	so viel als	13125 Rthl.			a 1 pr. C. auf 1 Jahr
2600 Rthl. a 4	—	— $1\frac{1}{2}$	—	—	15600 Rthl.	
1500 Rthl. a $3\frac{1}{2}$	—	— 1	—	—	5250 Rthl.	
753 Rthl. a $2\frac{1}{2}$	—	— 2	—	—	3765 Rthl.	

Also alle genannte Capitalien so viel als 37740 Rthl. a 1 pr. C. auf ein Jahr.

Hievon ist nun weiter leicht auszurechnen, daß der Zins 377 Rthl. 9 gl. $7\frac{1}{5}$ pf. betrage, und dies ist der gesammte verlangte Zins. Denn es geben

Capital				an Zins
3500 Rthl. a 5 pr.C.	in $\frac{3}{4}$	Jahren		$131\frac{1}{4}$ Rthl.
2600 Rthl. a 4	—	$1\frac{1}{2}$	—	156 Rthl.
1500 Rthl. a $3\frac{1}{2}$	—	1	—	$52\frac{1}{2}$ Rthl.
753 Rthl. a $2\frac{1}{2}$	—	2	—	$37\frac{13}{20}$ Rthl.

und also alle Capitalien zusammen $377\frac{2}{5}$ Rthl.

§. 46.

Wenn bey dergleichen zusammengesetzten Fragen die Zeit, welche die Capitalien ausstehen, nicht in Jahren, sondern in Monaten oder Tagen gegeben ist; so ist die Reduction aller Capitalien auf eins nicht weniger möglich, und die §. 44 angeführten Sätze können auch hier ganz zum Grunde gelegt werden, wenn man zuvor die Monate und Tage in Brüchen nach Jahren ausdruckt. Das Jahr wird hiebey zu 360 Tagen, und der Monat zu 30

gerech-

gerechnet. Schlägt man diesen Weg mit gehöriger Klugheit ein; so hat man zugleich den Vortheil, mit den möglich kleinsten Zahlen zu rechnen, und am Ende bloß die einfache Regel de Tri nöthig zu haben. Man nehme z. B. die zweyte Frage des 1175 §. der gemeinen Interessenrechnung in von Clausbergs demonstrativen Rechenkunst: Wie viel ist der sämmtliche Zins von 1500 fl auf 3 Monate, von 1800 fl auf 5 Monate, von 1000 fl auf 9 Monate, von 2000 fl auf 1 Jahr, und von 3000 fl auf 2 Jahr, allenthalben 6 pr. C. gerechnet? Rechnet man hier

1500 fl	auf $\frac{1}{4}$ Jahr ist so viel als			375 fl	auf 1 Jahr
1800 fl	— $\frac{5}{12}$	—	—	750 fl	
1000 fl	— $\frac{3}{4}$	—	—	750 fl	
2000 fl	— 1	—	—	2000 fl	
3000 fl	— 2	—	—	6000 fl	

und alles in allem also so viel als 9875 fl auf 1 Jahr; und suchet nun ferner den Zins

$$\frac{9875 \text{ fl} \times \frac{6}{100}}{\text{fl } 592\frac{50}{100}}$$

oder $\frac{1}{2}$: so wird die Vergleichung dieser Rechnung mit der von Clausbergischen, so gleich folgenden, das gesagte hinlänglich bestätigen.

§. 47.

Will man die Monate und Tage nicht nach Jahren ausdrucken, so kann man auch, nachdem man zuvor, wenn Zeiten von verschiedenen Benennungen da sind, dieselben auf gleiche Benennung gebracht hat, die gegebenen Capitalien auf eins zurückbringen, dessen Zeit 1 Monat oder ein Tag ist, und dann hievon den Zins nach den bekannten Regeln suchen. So kann man z. B. das Exempel §. 46 auf folgende Art rechnen:

$$\left.\begin{array}{rlrl} 1500\ \text{fl} & \text{auf } 3\ \text{Mon.} & = & 4500\ \text{fl} \\ 1800\ \text{fl} & -\ 5\ — & = & 9000\ \text{fl} \\ 1000\ \text{fl} & -\ 9\ — & = & 9000\ \text{fl} \\ 2000\ \text{fl} & -\ 12\ — & = & 24000\ \text{fl} \\ 3000\ \text{fl} & -\ 24\ — & = & 72000\ \text{fl} \end{array}\right\}\ \text{auf 1 Monat}$$

alles zusammen also $=$ 118500 fl auf 1 Monat; wovon der Zins a 6 pr. C. ist

$$118500\ \text{fl} \times \frac{6}{100 \times 12} = \frac{1}{100 \times 2}$$

$$592\tfrac{1}{2}\ \text{fl}.$$

Wie man verfahre, wenn Zeiten in Tagen vorkommen, braucht hoffentlich nicht durch Exempel gezeigt zu werden.

§. 48.

Auf die beschriebene Art nun, doch so daß man dabey sorgfältig die Bestimmungen der Zeit in Brüchen vermeidet, wird man gewöhnlicher Weise gelehret, die zusam=

zusammengesetzten Fälle der gemeinen Zinsrechnung zu berechnen. Man lese z. B. von Clausbergs demonstr. Rechenkunst 4ten Theil §. 1175 bis 1179, Joh. Gust. Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2ten Theils 13ten Abschn. Fr. Chr. Lor. Karstens Rechenkunst (Bützow und Wismar 1775) S. 338 f. u. a. Man gelangt auf diesem Wege allerdings zum wahren Ziele; allein ist dieser Weg auch allezeit der bequemste und kürzeste? Gesetzt es würde gefragt: Wie viel Zins erhält man in allem von 600 Rthl in 6 Monaten, von 359 Rthl 12 gr in 3 Monaten, von 750 Rthl 18 gr in 1 Jahre 4 Monaten und 3 Tagen, von 250 Rthl in 2 Monaten und 2 Tagen, und von 1075 Rthl in 1 Jahre, allenthalben 5 pr. C. pr. A. gerechnet? so würde die beschriebene Art doch ohnstreitig mit einer sehr grossen Weitläuftigkeit verbunden seyn; und dergleichen zusammengesetzte Fragen kommen gleichwol häufig vor.

§. 49.

Mir scheint es daher nicht gut, alle nur mögliche zusammengesetzte Fragen der gemeinen Zinsrechnung auf einerley Art behandeln zu wollen; sondern ich halte es für besser, diese Fragen,

a bisweilen durchaus theilweise zu beantworten, und die einzeln Resultate am Ende zu vereinigen;

b andere hingegen auf verschiedene einfachere, aber doch an sich noch immer zusammengesetzte, Fragen zuvor zu reduciren, diese einzeln nach dem bisherigen zu beantworten, und die Resultate dann zu vereinigen;

c die übrigen auf die beschriebene Art zu behandeln.

Bey der §. 46 und 47 betrachteten Frage z. B. ist diese letzte gewöhnliche Art gut, ohnerachtet die bey a vorgeschlagene nicht viel nachsteht. Bey der §. 48 gedachten hingegen ist die Art, der bey a Erwähnung geschehen, ohnstreitig besser; man könnte hier aber auch 600 Rthl auf 6 Monate, 359 Rthl 12 gl auf 3 Monate, und 1075 Rthl auf 1 Jahr, und nach diesem 750 Rthl 18 gl auf 1 Jahr 4 Monate und 3 Tage, und 250 Rthl auf 2 Monate und 2 Tage, und zwar jene Capitalien auf eins auf 1 Monat, und diese auf ein Capital auf 1 Tag reduciren, und nach B. b verfahren.

Welche Art nun jedesmal die beste sey? dies stets richtig und schnell zu beurtheilen wird Uebung erfordert, und insbesondere Ausrechnung einzeler Fälle auf alle mögliche Arten und sorgfältige Vergleichung der betretenen Wege unter einander.

Wider die Bestimmungen der Zeit in Brüchen, die bereits §. 45 gebraucht und §. 46 mit einer Einschränkung empfohlen sind, läßt sich wohl mit Grunde nichts vorbringen. Ich weiß zwar, daß viele die Vermeidung der Brüche für vortheilhaft halten; allein welches sind, alles genau erwogen, diese Vortheile? In der Vorrede habe ich mich hierüber weitläuftiger erklärt.

§. 50.

§. 50.

Wenn ein Capital, das eine Zeitlang ausgestanden, wiedergegeben werden soll; so entsteht die Frage: Wie hoch in dieser Zeit das Capital gewachsen, und wie viel also der Schuldner in allem zu bezahlen habe? Man sieht bald, daß hier nach der Summe des Capitals und der Zinsen gefragt werde, und daß man, dergleichen Fragen zu beantworten, von dem bekannten Capitale nur den Zins zu suchen und denselben zu dem Capitale selbst zu addiren habe. Es werde z. B. gefragt: Wie viel erhält man statt 3450 Rthl., welche $1\frac{3}{4}$ Jahr a 5 pr. C. ausgestanden? — Die Rechnung ist. Der Zins von 3450 Rthl. a 5 pr. C. auf $1\frac{3}{4}$ Jahr ist

$$3450 \text{ Rthl.} \times \tfrac{1}{20} \times 1\tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{80}$$

$$\underline{\qquad\qquad}$$

$$43\tfrac{1}{8} \text{ Rthl.}$$

$$\underline{\qquad\qquad}$$

$301\frac{7}{8}$ Rthl. Zu diesem Zinse addirt das Capital der 3450 Rthl.

so erhält man $3751\frac{7}{8}$ Rthl.

So wie sich diese Art gleichsam von selbst darbietet, so ist sie auch in den allermeisten Fällen die bequemste und beste.

§. 51.

Freylich kann man auch nach der Voraussetzung, daß ein Capital in einer gewissen Zeit durch den

Zins sich in eben dem Verhältnisse vermehren müsse, als es 100 Rthlr. in eben der Zeit durch das pr. C. thun, die ganze Summe mit einem Male finden. Z. B. 4560 Rthlr. sollen mit 5 pr. C. pr. A. nach einem Jahre wiedergegeben werden, und es wird gefragt, wie viel in allem zu bezahlen sey? — Die Rechnung kann seyn

4560 Rthlr. $\times \frac{21}{20}$

9120

95760

4788 Rthlr.

Allein man muß dabey die angeführte Voraussetzung, deren Wahrheit aus der Natur der Sache erhellet, ja nicht aus den Augen verlieren. Denn wollte man *z. B.* die Frage §. 50 nach der Regel Quinque beantworten und rechnen

3450 Rthlr. $\times \frac{21}{20} \times 1\frac{3}{4} = \frac{21 \times 7}{80}$

6900

72450

507150

$6339\frac{3}{8}$ Rthlr.

so müßte man nothwendiger Weise auf ein falsches Facit kommen, indem man so der Zeit, die bloß auf den Zins ein=

einfließt, auch auf das Capital selbst einen Einfluß verstattet hätte. Will man daher diesen Weg einschlagen, so muß man, wo es nöthig ist, vor allen Dingen das pr. C. für die gegebene Zeit suchen, und dann nach der einfachen Regel de Tri rechnen. Die wahre Berechnung des angeführten Falls wäre also

$$
\begin{array}{l}
3450 \text{ Rthl.} \quad \times \frac{87}{80} \\
\hline
\quad 43\frac{1}{8} \text{ Rthl.} \\
\hline
\quad 301\frac{7}{8} \\
345 \\
\hline
3751\frac{7}{8} \text{ Rthl.}
\end{array}
$$

Ich hätte dieses nicht angeführt, wenn ich nicht aus Erfahrung wüßte, wie leicht ungeübte Rechner es übersehen.

§ 52.

Es kommen bisweilen Berechnungen des Zinses vor, bey welchen kein pr. C., sondern an dessen statt der Zins einer gewissen Summe gegeben ist; z. B. wenn man wissen wollte, wie viel der Zins eines Jahres von 1000 Rthl. seyn würde, im Fall dieselben auf den wucherhaften Zins zu 1 g wöchentlich von 1 Rthl. ausgethan würden? Nimmt man in dergleichen Fällen statt des pr. C. den gegebenen Zins, und statt 100 die Zahl des gleichfals gegebenen Capitals, so lassen sie sich durchaus nach obigen Regeln behandeln. Die Rechnung des angeführten Exempels z. B. ist

$$1000 \text{ Rthlr.} \times \tfrac{1}{288} \times 50$$

5 0 0 0 0	
3 2 2 4(6	173 Rthlr. 14 gr. 8 pf.
2 1 6 0	
7 0(7	
1 4	
2	
(1	

§. 53.

Wenn man besseres Geld gegen schlechteres, Gold z. B. gegen Courant, vertauscht, so erhält man über die Summe, welche man giebt, noch etwas gewisses, und diesen Ueberschuß nennt man Agio oder Aufgeld. Die Grösse des Aufgeldes bestimmt man, wie die Grösse des Zinses, entweder nach pr. C., oder so daß man das Aufgeld auf irgend eine Summe angiebt. Man sagt z. B. Gold giebt gegen Courant $6\frac{2}{3}$ pr. C., oder der Louisd'or thut 8 gr. Nach diesem sieht man sehr leicht, daß die Berechnung des Aufgeldes mit der Berechnung des einfachen Zinses auf einerley Gründen ruhe, und also nach der gemeinen Zinsrechnung eben keiner besondern Auseinandersetzung bedürfe.

§. 54.

Man unterscheidet auch, und mit Recht, zwischen Interesse und Zins, so daß man dem Worte Interesse eine weitläuftigere Bedeutung giebt, und darunter sodann allen Gewinn versteht, der aus der Nutzung einer Sache entspringt; die Interessen in der mehrern Zahl aber sind mit dem Zinse einerley. Ausser der oben angeführten Bedeutung hat nun aber auch das Wort Zins noch verschiedene andere. Man gebraucht es z. B. von jährlichen Abgaben und von Renten, und oft sind es Sachen und nicht Geld, welche abgegeben werden müssen. Man erinnere sich hier des Erbzinses, des Getreydezinses, des Viehzinses u. s. w. Da indeß von diesen Arten des Zinses theils in einer andern Rücksicht als von den Zinsen im eigentlichsten Verstande bisher geschehen, wenn davon vollständig geredet werden soll, gehandelt werden muß, theils die an diesem Orte etwa zu zeigende Berechnung derselben keine besondere Regeln erfordert; so ist hier davon weiter zu reden nicht nöthig.

§. 55.

Was die jedesmalige Grösse des pr. C. bey dem Zinse im eigentlichsten Verstande anbetrifft, so kommt es dabey auf die Verabredung zwischen dem Gläubiger und dem Schuldner, auf die im Umlaufe sich befindende Menge des Geldes, auf den Gebrauch den man davon machen, und den Nutzen, den man davon ziehen kann, an, und es ist daher die Grösse des pr. C. an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten verschieden. 5 pr. C. sind allgemein und nach den Gesetzen erlaubt, über 6 pr. C. zu nehmen ist wuchermässig. Man nennt das pr. C. übrigens auch das Zinsmaaß, und bestimmt seine Grösse auch so, daß man angiebt, was für ein Theil vom Capitale gegeben werde. Zum 40ten Pfennig also und a $2\frac{1}{2}$ pr. C., zum 32ten Pfennig und a $3\frac{1}{8}$ pr. C., zum 24ten Pfennig und a $4\frac{1}{6}$ pr. C., zum 20ten Pfennig und a 5 pr. C. sind gleichbedeutende Ausdrücke.

Noch einige auch hieher gehörige Anmerkungen findet man am Ende der Zinseszinsrechnung.

Zinses-

Zinseszinsrechnung.

§. 56.

Zinseszins und Zinseszinsrechnung sind oben §. 4 und 5 erklärt worden, und es ist daher auch hier das erste, daß die zur Zinseszinsrechnung gehörigen Fälle vestgesetzt und kenntlich gemacht werden.

Anstatt der Benennung Zinseszinsrechnung gebraucht man auch folgende: zusammengesetzte Zins- oder Interessenrechnung, Berechnung des Zinses auf Zins, Anatocismus.

§. 57.

Aber wozu die Zinseszinsrechnung, da die Gesetze dem Gläubiger verbieten, von seinem Schuldner Zins auf Zins zu fordern? Es haben diese Frage unter andern Unger in seinen Beyträgen zur Mathesi forensi, 1tes Stück, Abhandl. V. §. 3 (Göttingen 1746) und Florencourt in den Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst (Altenburg 1781) S. 8. beantwortet, und das vornehmste daraus ist folgendes.

a Die Absicht des Verbots des Zinseszinses ist, den Untergang des Schuldners oder einen zu grossen Druck desselben zu verhindern. So bald also diese

Absicht

Absicht aufhört, so fällt auch das Verbot weg, und dergleichen Fälle giebt es.

b Die Gesetze gebieten in gewissen Fällen selbst, die einkommenden Zinsen als ein neues Capital auf Interessen auszuthun, wie bey Tutelen und Curatelen.

c Soll jemand, der Zinseszins genommen, verurtheilt werden, so ist vor allen Dingen auszumachen, wie viel er durch Rechnung des Zinseszinses zu viel genommen, und dazu ist diese Rechnung nöthig.

d Bey den Jahrrenten, Leibrenten u. s. w. bezahlen Staaten Zinseszins. Dazu kann man nun noch setzen.

e Daß die Regeln der Zinseszinsrechnung bey vielen andern Rechnungen zum Grunde liegen, und in der Zinseszinsrechnung gleichwohl am leichtesten eingesehen werden können.

§. 58.

Die Nutzbarkeit und Nothwendigkeit der Zinseszinsrechnung also als ausgemacht vorausgesetzt, so sind die zu ihr gehörigen Fälle folgende.

a Kann gefragt werden: Wie hoch ein Capital bey einem gegebenen pr. C. in einer bestimmten Zeit durch den Zinseszins wachse? Man will z. B. wissen, um wie viel 2000 Rthlr in 5 Jahren durch den Zinseszins a 5 pr. C. vermehret werden.

b Kann

b Kann zu bestimmen seyn: Was für ein Capital erfordert werde, um aus demselben bey einem gegebenen pr. C. durch den Zinseszins in einer gewissen Zeit ein bestimmtes grösseres Capital zu erhalten? Man will z. B. wissen, wie viel Geld man a 5 pr. C. auf Zinseszins anzulegen habe, um in 10 Jahren dafür 5000 Rk zu bekommen.

c Kann zu wissen verlangt werden: Wie groß das pr. C. seyn müsse, bey welchem ein gegebenes Capital in einer bestimmten Zeit eine ebenfalls bestimmte Grösse erreichen könne? Man fragt z. B. Zu wie viel pr. C. muß ich 1000 Rk austhun, um durch Zinseszins dieselben in 7 Jahren bis auf 1500 Rk zu vermehren?

§. 59.

Was für einer von den angeführten Fällen auch statt finden mag, so muß dabey vor allen Dingen ausgemacht seyn, wie weit die Zinstermine von einander entfernt seyn sollen. Oft wird der Zins nur alle Jahr abgetragen, oft wird er alle halbe Jahr, und oft in vierteljährigen Terminen entrichtet. Bey der gemeinen Zinsrechnung kommt darauf nichts an; wie sehr man aber in der Zinseszinsrechnung darauf zu sehen Ursache habe, kann die Vergleichung derer von den folgenden Fragen lehren, welche nach verschiedenen Zinsterminen beantwortet worden.

§. 60.

§. 60.

Um nun die §. 58 angeführten Fälle genauer zu betrachten und von dem bey a erwähnten anzufangen, so bedarf es kaum einer Anzeige, daß man diesen Fall auch, allein meistentheils auf eine sehr mühsame und dem Irrthume sehr ausgesetzte Art, durch öftere Wiederholung der einfachen Regel de Tri auflösen könne. Ein Beyspiel stehe indessen hier, damit das unbequeme dieses Weges ganz sichtbar werde. Es werde also gefragt: Wie viel Zinseszins erhält man von 1000 Rthl. a 5 pr. C. in 4 Jahren? Es wird hier, so wie auch stets in der Folge, wenn nicht ausdrücklich etwas anders bestimmt worden, vorausgesetzt, daß der Zins alle Jahr bezahlt werden soll. — Die Rechnung ist entweder:

Man erhält	von		an Zins
im 1ten Jahre	1000 Rthl.	— —	50 Rthl.
- 2 — —	1050 Rthl.	— —	52 Rthl. 12 gr.
- 3 — —	1102 Rthl. 12 gr.	—	55 Rthl. 3 gr.
- 4 — —	1157 Rthl. 15 gr.	—	57 Rthl. 21 gr. $1\frac{4}{5}$ pf.
		Summa	215 Rthl. 12 gr. $1\frac{4}{5}$ pf.

oder:

Es werden		Rthl.		durch den Zins
nach dem 1ten Jahre	—	1000 Rthl.	—	1050 Rthl.
— 2 diese	—	1050	— —	$1102\frac{1}{2}$ Rthl.
— 3 diese	—	$1102\frac{1}{2}$	— —	$1157\frac{5}{8}$ Rthl.
— 4 diese	—	$1157\frac{5}{8}$	— —	$1215\frac{81}{160}$ Rthl.

und von dieser letzten Summe abgezogen 1000 Rthl.

so bleiben an Zins $215\frac{81}{160}$ Rthl.

Es

Es ist hier ein sehr leichter Fall gewählt worden, und doch wird ein jeder, der die Ausrechnung desselben recht überdenkt, das von dem betretenen Wege gesagte dadurch hinlänglich bestätiget finden. Wie nun vollends, wenn die Anzahl der Jahre grösser genommen und z. B. auf 10 Jahre gesetzt worden wäre? Wie wenn man statt 1000 Rthlr eine andere Summe, z. B. 1216 Rthlr 8 gr 6 ₰ hätte berechnen sollen? Genug also hievon und zu bessern Wegen.

§. 61.

Es ist daher nothwendig, daß man zur Beantwortung der häufig vorkommenden Frage: Wie hoch wächst ein Capital bey einem gegebenen pr. C. in einer bestimmten Zeit durch den Zinseszins? einen bequemern Weg aufsuche. Man hat dergleichen mehrere. Einige sind allgemein faßlich und betretbar, andere aber nur für den, der die Logarithmen zu brauchen gelernt, und logarithmische Tafeln bey der Hand hat. Da ich von den Logarithmen und ihrem Gebrauche in der Vorrede gesprochen habe, so werde ich das nöthige von der Auflösung des angeführten Falls vermittelst der Logarithmen ebenfalls berühren.

§. 62.

Bey einer genauen Betrachtung der jetzt abzuhandelnden Fragen findet man bald, daß man sich dabey der zusammengesetzten Regel de Tri mit grossem Vortheile bedienen könne. So sehr nemlich jede 100 Rthlr des

Haupt-

Hauptstuhls in dem 1ten Jahre durch den Zins wachsen, eben so wachsen auch in dem 2ten Jahre jede 100 Rthl. der Summe dieses Hauptstuhls und des ersten Zinses, in dem 3ten Jahre jede 100 Rthl. der Summe des Hauptstuhls des ersten und des zweyten Zinses, in dem 4ten jede 100 Rthl. der Summe des Hauptstuhls des ersten, zweyten und des dritten Zinses u. s. w. Nach dem in der Vorrede über die zusammengesetzte Regel de Tri gesagten, wäre die Rechnung der §. 60 da gewesenen Frage

$$1000 \text{ Rthl.} \times \frac{21^4}{20^4} = \frac{194481}{160000}$$

~~1~~9~~44~~81000 |
~~1~~~~2~~8 | 1215 Rthl.

324

~~1~~9~~4~~4 |
~~3~~2 |
48 | 12 ggr.

~~2~~88 |
12 | $1\frac{4}{5}$ pf. und also der Zins 215 Rthl. 12 ggr. $1\frac{4}{5}$ pf.

Die Vortheile, welche man bey dieser Art in Vergleichung gegen die vorhergehende hat, sind, daß man

a viel geschwinder und mit weit weniger Mühe zu seinem Endzwecke gelangt, und

b der Gefahr zu irren so sehr bey weitem nicht ausgesetzt ist.

Bis-

Bisweilen kann diese Art so leicht seyn, daß sie unter allen die beste ist. Wie leicht erhebt man nicht z. B. 21 und 20 auf jede verlangte Dignität, da alle Arbeit in einer Multiplication mit 2 und einer leichten Addition bestehen kann? Ist daher das pr. C. 5, so kann man sich ihrer ohne Bedenken bedienen, oder es müßte die Anzahl der Jahre sehr groß seyn. Wenn hingegen 4 pr. C. gerechnet werden, so daß statt $\frac{21}{20}$ der Anzeiger $\frac{26}{25}$ genommen werden muß, so wird allerdings, so wie auch meistentheils bey einem andern pr. C. als 5, die nöthige Erhebung zu Dignitäten beschwerlicher.

§. 63.

Man muß aber, wenn man sich **hier** der zusammengesetzten Regel de Tri bedienen will, **jederzeit erst das durch den Zinseszins vermehrte Capital, und dann durch Abzug des Hauptstuhls, wenn man denselben besonders verlangt, den Zinseszins suchen.** Der Grund hievon liegt in dem §. 62 angeführten Satze von der Vergrösserung eines Capitals durch den Zinseszins. Thut man dies nicht, sondern sucht man so gleich den Zins, so erhält man **den ersten Zins**, oder den Zins des Capitals selbst in dem ersten Jahre oder Termine, **den zweyten Zins**, oder den Zins des gedachten ersten Zinses in dem zweyten Jahre oder Termine, ferner **den dritten, vierten, fünften Zins u. s. w.** je nachdem man den Anzeiger in der ersten, oder zweyten, oder dritten, oder vierten, oder fünften Dignität u. s. w. genommen hat. Es sollen z. B. 1000 Rthl. a 5 pr. C. auf Zinseszins ausgethan seyn, und der Zins von Jahr zu Jahr gerechnet werden; so erhält man durch folgende Rechnungen

1. $\underline{1000 \text{ Rthl.}} \times \frac{1}{20}$

50 Rthl., den ersten Zins.

2. $\underline{1000 \text{ Rthl.}} \times \frac{1}{20^2} = \frac{1}{400}$

$2\frac{1}{2}$ Rthl., den zweyten Zins.

3. $\underline{1000 \text{ Rthl.}} \times \frac{1}{20^3} = \frac{1}{8000}$

$\frac{1}{8}$ Rthl., den dritten Zins.

4. $\underline{1000 \text{ Rthl.}} \times \frac{1}{20^4} = \frac{1}{160000}$

$\frac{1}{160}$ Rthl., den vierten Zins.

5. $\underline{1000 \text{ Rthl.}} \times \frac{1}{20^5} = \frac{1}{3200000}$

$\frac{1}{3200}$ Rthl., den fünften Zins u. s. w.

§. 64.

Ohnerachtet aber die Findung des zweyten, dritten, vierten Zinses u. s. w. selten allein das vorgesetzte Ziel ist und seyn kann, so kann dieselbe doch mittelba=

telbarer Weise sehr vortheilhaft werden. Denn einmal ist es gewöhnlicher Weise eine leichte Arbeit, von einem gegebenen Capitale nach und nach den ersten, zweyten, dritten, vierten Zins u. s. w. zu suchen. Bey 5 pr. C. z. B. dividirt man das Capital selbst durch 20, um den ersten Zins zu finden; die Division dieses ersten Zinses durch 20 giebt den zweyten Zins, die Division des zweyten Zinses durch 20 den dritten Zins, die Division des dritten Zinses durch 20 den vierten Zins u. s. w. Bey $2\frac{1}{2}$ pr. C. erhält man den ersten, zweyten, dritten, vierten Zins u. s. w. durch eine ähnliche Division mit 40, und auf eine ähnliche Art in vielen andern Fällen. Zweytens besteht der gesammte Zinseszins eines Capitals auf eine leicht zu bestimmende Art aus dem ersten, zweyten, dritten Zinse desselben u. s. w. jeden nach der Zahl der Zinstermine eine bestimmte Anzahl Male genommen. Weiß man also die gedachten verschiedenen Zinse eines Capitals, und wie vielmal ein jeder in dem gesammten Zinseszinse enthalten ist, so kann man diesen letztern durch die Multiplication und Addition finden. Allezeit ist zwar dieser Weg nicht zu empfehlen; oft aber hat er vortheilhaftes genug, um einer weitern Auseinandersetzung werth zu seyn.

§. 65.

Zuerst also die Frage: **Wie vielmal ist der erste, zweyte, dritte, vierte Zins u. s. w. jedesmal in**

 dem

dem gesammten Zinseszinse enthalten? Folgende Tabelle zeigt die Theile des Zinseszinses von 1000 Rthl. a 5 pr. C. in zwey, drey, vier, fünf und sechs Jahren.

Jahre,	1tes,	2tes,	3tes,	4tes,	5tes,	6tes
Zins,	50 Rthl.,	50 Rthl.,	50 Rthl.,	50 Rthl.,	50 Rthl.,	50 Rthl.,
		$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,
			$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,
			$\frac{1}{8}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,
				$\frac{1}{8}$,	$2\frac{1}{2}$,	$2\frac{1}{2}$,
				$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,	$2\frac{1}{2}$,
				$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,
				$\frac{1}{160}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{160}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{160}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{160}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{160}$,	$\frac{1}{8}$,
					$\frac{1}{3200}$,	$\frac{1}{8}$,
						$\frac{1}{160}$, zehnmal
						$\frac{1}{3200}$, fünfmal
						$\frac{1}{64000}$.

Die

Die Theile des 1ten und 2ten Jahres zusammen genommen machen den Zinseszins von 1000 Rthl. a 5 pr. C. in zwey Jahren aus. Die Theile des 1ten, 2ten und 3ten Jahres zusammen genommen geben diesen Zinseszins in drey Jahren. Die Theile des 1ten, 2ten, 3ten und 4ten Jahres zusammen genommen geben denselben in vier Jahren u. s. w. Ferner ist hier der erste Zins, 50 Rthl., der zweyte, $2\frac{1}{2}$ Rthl., der dritte $\frac{1}{8}$ Rthl., der vierte $\frac{1}{160}$ Rthl., der fünfte $\frac{1}{3200}$ Rthl., und der sechste $\frac{1}{64000}$ Rthl. Es enthält also

a. der Zinseszins zweyer Jahre 2 erste und 1 zweyten Zins.

b. der Zinseszins dreyer Jahre 3 erste, 3 zweyte und 1 dritten Zins.

c. der Zinseszins von vier Jahren 4 erste, 6 zweyte, 4 dritte und 1 vierten Zins.

d. der Zinseszins von fünf Jahren 5 erste, 10 zweyte, 10 dritte, 5 vierte und 1 fünften Zins.

e. der Zinseszins von 6 Jahren 6 erste, 15 zweyte, 20 dritte, 15 vierte, 6 fünfte und 1 sechsten Zins.

§. 66.

Um dies noch weiter bestimmen zu lernen, betrachte man folgende Reihen.

0)	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,
1)	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
2)	—	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,
3)	—	—	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,
4)	—	—	—	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120,	165,
5)	—	—	—	—	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330,
6)	—	—	—	—	—	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,
7)	—	—	—	—	—	—	1,	7,	28,	84,	210,	462,
8)	—	—	—	—	—	—	—	1,	8,	36,	120,	330,
9)	—	—	—	—	—	—	—	—	1,	9,	45,	165,
10)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,	10,	55,
11)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,	15,
12)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,

In dieser Tabelle enthält die Reihe, welche mit 0 bezeichnet ist, Zahlen, welche die Termine anzeigen sollen; die 1te, 2te, 3te, 4te Reihe u. s. w. aber Zahlen, aus welchen man erkennen kann, wie vielmal der 1te, 2te, 3te, 4te Zins u. s. w. in jedem Termine gerechnet werden müsse. Die Richtigkeit der Tabelle vorausgesetzt, so erhellet daraus:

a daß der erste Zins für jeden Termin einfach gerechnet werden müsse, und also in dem Zinseszinse allezeit so vielmal enthalten sey, als Zinstermine gegeben sind.

b daß der zweyte Zins erst in dem zweyten Termine, der

dritte

dritte Zins erst im dritten Termine, der vierte Zins, erst im vierten Termine u. s. w. anfange, und also die Zahl der Termine für den zweyten Zins um eins, die Zahl der Termine für den dritten Zins um zwey, die Zahl der Termine für den vierten Zins um drey kleiner sey als die Zahl aller Termine, u. s. w.

c daß der zweyte, dritte, vierte Zins u. s. w. nur in ihrem ersten Termine einfach, in allen übrigen aber vielfach, und zwar ein jeder dieser Zinse in einem andern Grade vielfach als jeder andere sey.

§. 67.

Von der Richtigkeit der §. 66 angeführten Tabelle überzeugt man sich durch eine genaue Betrachtung der Natur der Sache bald. Denn

a das Capital selbst, von welchem man die ersten Zinse erhält, bleibt einfach, und man kann also für jeden Termin den ersten Zins auch nur einfach rechnen.

b der erste Zins aber, von welchem man, nachdem er zum Capitale geschlagen worden, die zweyten Zinse erhält, bleibt nicht einfach, sondern vergrössert sich mit jedem Termine um sich selbst. Folglich muß man den zweyten Zins für seinen ersten Termin einfach, für den zweyten zweyfach, für den dritten dreyfach u. s. w. rechnen.

c der zweyte Zins, von welchem man, nachdem er zum Capitale geschlagen worden, die dritten Zinse erhält, bleibt also noch weniger einfach, sondern wird in seinem zweyten Termine um sein zweyfaches, in dem dritten Termine um sein dreyfaches, in dem vierten Termine um sein vierfaches u. s. w. vermehrt. Folglich muß man den dritten Zins in seinem zweyten Termine dreyfach, in dem dritten sechsfach, in dem vierten zehnfach u. s. w. rechnen.

d auf eine ähnliche Art fortgegangen ergiebt sich, was nach der Tabelle von dem vierten, fünften, sechsten Zinse u. s. w. zu behaupten ist.

§. 68.

Die leichteste Art, eine Tabelle, wie §. 66, zu verfertigen, ist folgende. Man schreibt, wie 2) §. 66, so weit als man es für nöthig erachtet, eine Reihe Zahlen, die von 1 anfängt, und in der natürlichen Ordnung der Zahlen aufsteigt. Unter dem zweyten Gliede dieser Reihe fängt man eine andere Reihe ebenfalls von 1 an, und macht das zweyte Glied derselben durch die Addition ihres ersten Gliedes und des zweyten Gliedes der ersten Reihe, das dritte Glied derselben durch die Addition ihres zweyten Gliedes und des dritten Gliedes der ersten Reihe, das vierte Glied derselben durch die Addition ihres dritten Gliedes und des vierten Gliedes der ersten

Reihe u. s. w. Ferner fängt man unter dem zweyten Gliede der zweyten Reihe eine dritte Reihe von 1 an, und macht das zweyte Glied derselben durch die Addition ihres ersten Gliedes und des zweyten Gliedes der zweyten Reihe, das dritte Glied derselben durch die Addition ihres zweyten Gliedes und des dritten Gliedes der zweyten Reihe, das vierte Glied derselben durch die Addition ihres dritten Gliedes und des vierten Gliedes der zweyten Reihe u. s. w. Dann fängt man unter dem zweyten Gliede der dritten Reihe eine vierte Reihe von 1 an, macht auf eine ähnliche Art die übrigen Glieder derselben, und sucht nachher auf ähnliche Weise die übrigen nöthigen fünfte, sechste u. s. w. Reihen zu erhalten. Die erste von den auf diese Art entstandenen Reihen enthält die Zahlen, welche anzeigen, wie vielfach jedesmal der zweyte Zins zu rechnen sey, die zweyte Reihe enthält die ähnlichen Zahlen für den dritten Zins, die dritte Reihe für den vierten Zins u. s. w. Die Zahl des jedesmal zu denkenden Termins ist immer um 1 grösser als die Zahl in der ersten Reihe, welche anzeigt, wie vielmal der zweyte Zins zu rechnen sey.

§. 69.

Wie findet man nun aber auf eine leichte Art, wie vielmal bey jeder gegebenen Anzahl von Terminen der erste, zweyte, dritte Zins u. s. w. in dem gesammten Zinseszinse enthalten sey? Eine Tabelle, wie die §. 66, vorausgesetzt, so könnte man sich, wenn man keinen bessern Weg kennte, durch die Addition helfen. Wollte man z. B. wissen, wie vielmal der Zinseszins von 9 Terminen den ersten, zweyten, dritten Zins u. s. w. enthielte; so gäbe die Summe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 das vielfache des zweyten Zinses, die Summe der Zahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 das vielfache des dritten Zinses, die Summe der Zahlen 1, 4, 10, 20, 35, 56 das vielfache des vierten Zinses, die Summe der Zahlen 1, 5, 15, 35, 70 das vielfache des fünften Zinses, die Summe der Zahlen 1, 6, 21, 56 das vielfache des sechsten Zinses, die Summe der Zahlen 1, 7, 28 das vielfache des siebenten Zinses, und die Summe der Zahlen 1, 8 das vielfache des achten Zinses an. Der erste Zins wird nach dem §. 66 a berührten so vielmal gerechnet, als Zinstermine gegeben sind, und der letzte Zins ist in dem gesammten Zinseszinse, welches leicht einzusehen, jederzeit nur einmal enthalten. Es enthält also der Zinseszins von 9 Terminen

a	den ersten Zins	9	mal
b	— zweyten —	36	—
c	— dritten —	84	—
d	— vierten —	126	—
e	— fünften —	126	—
f	— sechsten —	84	—
g	— siebenten —	36	—
h	— achten —	9	—
i	— neunten —	1	—

Allein

Allein man hat nicht nöthig, diese Summen so mühsam zu suchen, wenn man die Tabelle vollständig genug hat, man findet sie unter einander in einer Reihe. Der Grund, warum sie sich auf diese Art in der Tabelle finden, ist aus dem §. 67 gesagten leicht herzuleiten.

§. 70.

Ohne die gedachte Tabelle findet man das verlangte auf folgende Art.

a Man setzt eine Reihe Zahlen auf, die von der Zahl der Termine anfängt, und in der natürlichen Ordnung bis 1 fällt; und schreibt darunter eine andere, die von 1 anfängt, und in der natürlichen Ordnung der Zahlen bis zur Zahl der Termine aufsteigt. Wäre z. B. die Zahl der Termine 9; so wären diese beyden Reihen

9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9

b Dividirt man nach und nach die erste Zahl der obersten Reihe durch die erste Zahl der untersten Reihe; das Product der beyden ersten Zahlen der obersten Reihe durch das Product der beyden ersten Zahlen der untersten Reihe; das Product der drey ersten Zahlen der obersten Reihe durch das Product der drey ersten Zahlen der untersten Reihe; das Product der vier ersten Zahlen der obersten Reihe durch das

das Product der vier ersten Zahlen der untersten Reihe u. s. w. bis zu Ende. Die erhaltenen Quotienten zeigen in der Ordnung, in welcher man sie erhält, an, wie vielmal der erste, zweyte, dritte, vierte Zins u. s. w. in dem gesammten Zinseszinse enthalten sind. In dem angeführten Falle z. B. erhält man

für den 1ten Zins	$\frac{9}{1}$	=	9.
— 2ten —	$\frac{9.\ 8}{1.\ 2}$	=	36.
— 3ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3}$	=	84.
— 4ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$	=	126.
— 5ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$	=	126.
— 6ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$	=	84.
— 7ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}$	=	36.
— 8ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}$	=	9.
— 9ten —	$\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}$	=	1.

§. 71.

Es lassen sich hierbey einige Vortheile anbringen, die ich nicht übergehen darf. Einmal kann man oft die gedachten Quotienten durch eine theilweise in die Factoren des zu dividirenden Products angestellte Division finden, und ausserdem jeden zunächst vorhergehenden schon gefundenen Quotienten bey der Findung des unmittelbar folgenden benutzen. Es ist z. B. gleich, ob ich $\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, oder $\frac{9.\ 8.\ 7.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, oder $\frac{9.\ 8.\ 7.\ 2}{1.\ 2.\ 4}$, oder $\frac{9.\ 2.\ 7.\ 2}{1.\ \ 2}$ oder 9. 2. 7. nehme. Hier ist nach und nach auf die vorhin beschriebene Art durch 5, 3, 4, 2 dividiret worden, welches ohnstreitig vortheilhafter ist, als wenn erst das Product aus 9, 8, 7, 6 und 5 gesucht, und solches entweder nach und nach durch 2, 3, 4 und 5, oder mit einem Male durch das zuvor gesuchte Product aller dieser Zahlen dividirt worden wäre. Hat man ferner z. B. $\frac{9.\ 8}{1.\ 2}$ schon in 36 verwandelt; so kann man statt $\frac{9.\ 8.\ 7}{1.\ 2.\ 3}$ natürlicher Weise $36 \times \frac{7}{3}$ oder 12.7, d. h. 84, und nun statt $\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}$ folgendes $84 \times \frac{6}{4}$, oder 21.6, d. h. 126 nehmen, und so in den meisten Fällen ohne Mühe, geschwinde und sicher seinen Endzweck erreichen.

Ausser

Ausser diesem ergiebt sich aus der Betrachtung der im vorhergehenden § unter a stehenden und aller ihnen ähnlichen Reihen, daß die aus ihnen, nach dem bey b gesagten, entstehenden Quotienten anfänglich nur und bis auf einen gewissen Grad wachsen, dann aber auf eben dieselbe Art wieder abnehmen, und der letzte allezeit gleich 1 ist. Ist die Anzahl der Glieder der gedachten Reihen ungerade, so kommt unter den Quotienten auch der größte derselben zweymal vor; ist aber diese Anzahl gerade, so erhält man den größten Quotienten nur einmal. Folgende Reihen z. B.

8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8

geben folgende Quotienten:

8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.

Weiß man daher die erste Hälfte der hier zu suchenden Quotienten, so hat man durch die Umkehrung der Ordnung derselben und Hinzufügung einer 1 am Ende auch die andere Hälfte, vorausgesetzt, daß man nach dem gesagten den größten Quotienten entweder einmal oder zweymal nehme.

§. 72.

Nun sey die Frage zu beantworten: Wie viel Zinseszins geben 10000 Rthl. a 5 pr. C. in 4 Jahren? die Zinstermine von Jahr zu Jahr angenommen. Es giebt hier 4 Zinse.

Der

Der	1te ist	500 Rthlr	
—	2te —	25	—
—	3te —	$1\frac{1}{4}$	—
—	4te —	$\frac{1}{16}$	—

Diese verschiedene Zinse sind in dem gesammten Zinseszinse enthalten,

der 1te	$\frac{4}{1}$ mal,	d. h.	4 mal
— 2te	$\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ —	—	6 —
— 3te also	—	—	4 —
— 4te —	—	—	1 —

Folglich besteht der gesammte Zinseszins von 10000 Rthlr a 5 pr. C. in 4 Jahren und 4 Zinsterminen

1 aus	4 ×	500 Rthlr	=	2000 Rthlr	
2 —	6 ×	25 —	=	150 —	
3 —	4 ×	$1\frac{1}{4}$ —	=	5 —	
4 —	1 ×	$\frac{1}{16}$ —	=	—	— 1 gr. 6 pf.
			oder	2155 Rthlr 1 gr. 6 pf.	

Da es hier darauf ankam, den gegangenen Weg deutlich zu beschreiben, so hat bey diesem Exempel manches mit hingesetzt werden müssen, was sonst entweder gar nicht, oder doch nicht so weitläuftig aufgeschrieben zu werden braucht. Bedenkt man dies, so wird es nicht schwer halten, sich davon zu überzeugen, daß die befolgte Art, wenigstens bey dem ausgerechneten Exempel, keiner andern nachzusetzen sey.

Oft

Oft hat sie indeß beträchtliche Vortheile, welche zu zeigen zuvor die Beantwortung einer andern Frage nöthig ist.

§. 73.

Wie viel Zinseszins geben 16000 Rthl. a 5 pr. C. in 10 Jahren? die Zinstermine ebenfalls von Jahr zu Jahr angenommen. Es finden hier 10 Zinse statt.

Der	1te	ist	—	800	Rthl.
—	2te	—	—	40	—
—	3te	—	—	2	—
—	4te	—	—	$\frac{1}{10}$	—
—	5te	—	—	$\frac{1}{200}$	—
—	6te	—	—	$\frac{1}{4000}$	—
—	7te	—	—	$\frac{1}{80000}$	—
—	8te	—	—	$\frac{1}{1600000}$	—
—	9te	—	—	$\frac{1}{32000000}$	—
—	10te	—	—	$\frac{1}{640000000}$	—

Diese verschiedene Zinse sind in dem gesammten Zinseszinse enthalten

der	1te		$\frac{10}{1}$ mal,	d. h.	10	mal
—	2te	$10.\frac{9}{2}$	—	—	45	—
—	3te	$45.\frac{8}{3}$	—	—	120	—
—	4te	$120.\frac{7}{4}$	—	—	210	—
—	5te	$210.\frac{6}{5}$	—	—	252	—
—	6te also	—	—	—	210	—
—	7te	— —	—	—	120	—
—	8te	— —	—	—	45	—
—	9te	— —	—	—	10	—
—	10te	— —	—	—	1	—

Der

Der gesammte Zinseszins von 16000 Rthlr a 5 pr. C. in 10 Jahren und 10 Terminen besteht also

1 aus	10	$\times$ 800 Rthlr	=	8000 Rthlr	
2 —	45	$\times$ 40 —	=	1800 —	
3 —	120	$\times$ 2 —	=	240 —	
4 —	210	$\times \frac{1}{10}$ —	=	21 —	
5 —	252	$\times \frac{1}{200}$ —	=	$1\frac{52}{200}$	
6 —	210	$\times \frac{1}{4000}$ —	=	$\frac{210}{4000}$	
7 —	120	$\times \frac{1}{80000}$ —	=	$\frac{120}{80000}$	
8 —	45	$\times \frac{1}{1600000}$	=	$\frac{45}{1600000}$	
9 —	10	$\times \frac{1}{32000000}$	=	$\frac{10}{32000000}$	
10 —	1	$\times \frac{1}{640000000}$	=	$\frac{1}{640000000}$	

oder — — — $10062\frac{200978201}{640000000}$ Rthlr, oder ohngefähr $10062\frac{1}{3}$ Rthlr.

Wenn man dieses Exempel nach folgendem Aufsatze: 16000 Rthlr $\times \frac{21^{10}}{20^{10}}$, rechnen will, so hat man, um 21^{10} zu entwickeln und seinen Werth 16679880978201 zu finden, wie man es auch immer anfangen mag, eine weitläuftige Multiplication nöthig. Das übrige nöthige aber ist freylich eben nicht sehr zusammengesetzt.

§. 74.

Einer der wichtigsten Vortheile bey dieser Art zu rechnen ist, daß man da, wo nicht die allergrößte Schärfe verlangt wird, dieselbe noch sehr verkürzen kann.

Von dem 6ten Zinse an beträgt z. B. §. 73 die ganze Summe der Zinse so wenig, daß eine ohngefähre Schäzung derselben sehr leicht und hinlänglich ist. Ist eine solche ohngefähre Schäzung derjenigen Zinse, deren Summe unbedeutend ist, erlaubt, so ist es vortheilhaft, vor der Bestimmung des ersten, zweyten, dritten Zinses u. s. w. die Zahlen zu suchen, welche anzeigen, wie vielmal jede Art der Zinse in dem gesammten Zinseszinse enthalten ist. Ist dies geschehen, so kann man bey der Bestimmung der verschiedenen einzeln Zinse leicht beurtheilen, welche von denselben zusammengenommen nur ohngefähr geschäzt zu werden brauchen, und man hat alsdann nicht nöthig, diese Zinse alle wirklich zu suchen. In den §. 73 berechneten Exempel hätte der 6te, 7te, 8te, 9te und 10te Zins ungesucht bleiben können.

Ist das zu berechnende Capital so wohl als das gegebene pr. C. so beschaffen, daß man die einzeln Zinsen leicht finden kann; so hat die betrachtete Art der Berechnung des Zinseszinses vorzüglich einen Werth.

§. 75.

Es ist hier auch noch ein anderer Vortheil möglich, den von Clausberg Dem. Rechenk. S. 1251 §. 1249 eine ganz besondere Art der Auflösung der Aufgabe nennt, der aber eigentlich nichts anders als eine blosse Abkürzung der eben beschriebenen Art der Rechnung ist. Die Wahrheit dieser Behauptung ist daraus klar, weil man dabey eben-

falls

falls die verschiedenen Zinse, welche zusammengenommen den gesuchten Zinseszins ausmachen, findet, und daraus den gesammten Zinseszins zusammensetzt; und der statt findende Unterschied ist, daß man nicht, wie vorhin, erst jede Art der Zinse einfach und dann ihr vielfaches sucht, sondern das vielfache derselben so gleich findet. Es ist dieser Vortheil allerdings einer genauern Betrachtung werth, zumal da er nach dem bisherigen nicht mehr schwer seyn kann.

§. 76.

Betrachtet man das §. 70 gesagte genau, so überzeugt man sich leicht davon,

a daß der gesammte erste Zins eines Capitals, das auf Zinseszins ausgethan ist, jedesmal dem bey gleichem pr. C. von eben demselben Capitale zu erhaltenden einfachen Zinse eines Jahres oder eines Termines, so vielmal genommen als Zinstermine sind, gleich sey. Man vergleiche die Exempel §. 72 und 73.

b daß der gesammte zweyte Zins eines Capitals, das auf Zinseszins aussteht, jedesmal dem bey halb so grossem pr. C. von dem gesammten ersten Zinse zu erhaltenden einfachen Zinse eines Jahres oder eines Termins, einmal weniger genommen als Zinstermine sind, gleich sey.

Steht z. B. ein Capital zu 5 pr. C. und 4 Jahre; so ist der einfache Zins eines Jahres, welcher dem einfachen ersten Zinse gleich ist, $\frac{1}{20}$ des Capitals, und der in dem Zinseszinse enthaltene gesammte erste Zins $\frac{4}{20}$ desselben. Der zweyte einfache Zins ist $\frac{1}{20\times20}$ des Capitals, oder $\frac{1}{20}$ des gesammten ersten Zinses, und der in dem Zinseszinse enthaltene gesammte zweyte Zins $\frac{4\times3}{2\times20\times20}$ des Capitals, oder $\frac{3}{2\times20}$ des gesammten ersten Zinses. Steht ein Capital zu 5 pr. C. und 10 Jahre; so ist der in dem Zinseszinse enthaltene gesammte erste Zins $\frac{10}{20}$ des Capitals, der gesammte zweyte Zins aber $\frac{10\times9}{2\times20\times20}$ des Capitals, oder $\frac{9}{2\times20}$ des gesammten ersten Zinses. Steht endlich ein Capital zu 6 pr. C. und 5 Jahre; so ist der einfache erste oder einjährige Zins $\frac{3}{50}$ des Capitals, und der in dem Zinseszinse enthaltene gesammte erste Zins $\frac{3\times5}{50}$ desselben. Der einfache zweyte Zins ist $\frac{3\times3}{50\times50}$ des Capitals, oder $\frac{3}{50}$ von dem gesammten ersten Zinse, und der in dem Zinseszinse enthaltene gesammte zweyte Zins $\frac{3\times3}{50\times50}\times\frac{5\times4}{2}$ des Capitals, oder $\frac{3\times4}{2\times50}$ des gesammten ersten Zinses.

c daß der gesammte dritte Zins eines Capitals, das auf Zinseszins aussteht, jedesmal dem bey $\frac{1}{3}$ des gegebenen pr. C. von dem gesammten zweyten Zinse zu erhaltenden einfachen Zinse eines Jahrs oder eines Termines, zweymal weniger genommen als Zinstermine sind, gleich sey.

Alle unter b angeführte Beyspiele und in eben der Ordnung genommen; so ist

1. im ersten Falle, der einfache dritte Zins $\frac{1}{20\times20\times20}$ des Capitals, oder $\frac{1}{20}$ des gesammten zweyten Zinses, und de in dem Zinseszinse enthaltene gesammte dritte Zins $\frac{4\times3\times2}{2\times3\times20\times20\times20}$ des Capitals, oder $\frac{2}{3\times20}$ des gesammten zweyten Zinses.

2. im andern Falle, der gesammte dritte Zins $\frac{10\times9\times8}{2\times3\times20\times20\times20}$ des Capitals, oder $\frac{8}{3\times20}$ des gesammten zweyten Zinses.

3. im dritten Falle, der einfache dritte Zins $\frac{3\times3\times3}{50\times50\times50}$ des Capitals, oder $\frac{3}{50}$ des gesammten zweyten Zinses, und der in dem Zinseszinse enthaltene gesammte dritte Zins $\frac{3\times3\times3}{50\times50\times50} \times \frac{5\times4\times3}{2\times3}$ des Capitals, oder $\frac{3\times3}{3\times50}$ des gesammten zweyten Zinses.

Auf eine ähnliche Art kann man nun fortfahren, um für den gesammten in dem jedesmaligen Zinseszinse enthaltenen vierten, fünften, sechsten Zins u. s. w. das nöthige zu bestimmen.

§. 77.

Hat man also bey einer Aufgabe den Anzeiger der Veränderung des Capitals zur Findung des einfachen Zinses eines Jahres oder eines Termins gesucht, und multiplicirt darauf seinen Zähler nach und nach mit der Zahl der Termine und allen auf dieselbe in absteigender natürlicher Ordnung bis 1 folgenden Zahlen, den Nenner hingegen auch nach und nach mit eben diesen Zahlen, aber in umgekehrter Reihe dieselben genommen; so erhält man dadurch a den Anzeiger der Veränderung des Capitals zur Findung des in dem Zinseszinse enthaltenen gesammten ersten Zinses.

b den Anzeiger der Veränderung des gefundenen gesammten ersten Zinses zur Findung des in dem Zinseszinse enthaltenen gesammten zweyten Zinses.

c den Anzeiger der Veränderung des gefundenen gesammten zweyten Zinses zur Findung des in dem Zinseszinse enthaltenen gesammten dritten Zinses, u. s. w. Bey 5 pr. C. z. B. und 4 Jahren sind diese Anzeiger in der gedachten Ordnung: $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{2}{60}$, $\frac{1}{80}$, oder $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{80}$; bey 5 pr. C. und 10 Jahren folgende: $\frac{10}{20}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{8}{60}$, $\frac{7}{80}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{5}{120}$, $\frac{4}{140}$, $\frac{3}{160}$, $\frac{2}{180}$, $\frac{1}{200}$ ꝛc. welche man ebenfalls, wo es nützlich ist, auf kleinere Zahlen bringen kann, z. B. $\frac{10}{20}$ auf $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{60}$ auf $\frac{2}{15}$ u. s. w.; bey 6 pr. C. und 5 Jahren endlich sind diese Anzeiger $\frac{15}{50}$, $\frac{12}{100}$, $\frac{9}{150}$, $\frac{6}{200}$, $\frac{3}{250}$.

§. 78.

Nach diesen Voraussetzungen nun die §. 72 und 73 enthaltenen Fragen zu beantworten; so ergiebt sich

a in Ansehung der Frage §. 72

für

für den ges. 1ten Zins	$\frac{1}{5} \times 10000$ Rthl.	=	2000 Rthl.
— — 2ten	— $\frac{3}{40} \times 2000$	— =	150 —
— — 3ten	— $\frac{1}{30} \times 150$	— =	5 —
— — 4ten	— $\frac{1}{80} \times 5$	— =	— 1 Gr. 6 Pf.

also der ges. Zinseszins von 10000 Rthl. = 2155 Rthl. 1 Gr. 6 Pf.
a 5 pr. C. in 4 Jahren.

b in Ansehung der Frage §. 73.

für den ges. 1ten Zins	$\frac{1}{2} \times 16000$	=	8000 Rthl.
— — 2ten	— $\frac{9}{40} \times 8000$	=	1800 —
— — 3ten	— $\frac{8}{60} \times 1800$	=	240 —
— — 4ten	— $\frac{7}{80} \times 240$	=	21 —
— — 5ten	— $\frac{6}{100} \times 21$	=	$1\frac{26}{100}$
— — 6ten	— $\frac{1}{24} \times \frac{126}{100}$	=	$\frac{126}{2400}$ od $\frac{21}{400}$
— — 7ten	— $\frac{1}{35} \times \frac{21}{400}$	=	$\frac{21}{14000}$ - $\frac{3}{2000}$
— — 8ten	— $\frac{3}{160} \times \frac{3}{2000}$	=	$\frac{1}{320000}$
— — 9ten	— $\frac{1}{90} \times \frac{9}{320000}$	=	$\frac{1}{3200000}$
— — 10ten	— $\frac{1}{200} \times \frac{1}{3200000}$	=	$\frac{1}{6400000000}$

also der ges. Zinseszins von 16000 Rthl. = $10062\frac{200879201}{6400000000}$
Rthl. a 5 pr. C. in 10 Jahren.

§. 79.

Hiezu mag nun noch die Beantwortung der Frage kommen: Wie viel Zinseszins geben 10000 Rthl. a 6 pr. C. in 5 Jahren? die Zinstermine von Jahr zu Jahr angenommen. In Ansehung dieser Frage ergiebt sich nach dem bisherigen

für den ges.	1ten Zins	$\frac{3}{10}$	$\times$	10000 Rthl.	=	3000 Rthl.
— —	2ten	— $\frac{6}{50}$	$\times$	3000	— =	360
— —	3ten	— $\frac{3}{50}$	$\times$	360	— =	$21\frac{3}{5}$
— —	4ten	— $\frac{3}{100}$	$\times$	$\frac{108}{5}$	— =	$\frac{324}{500}$
— —	5ten	— $\frac{3}{250}$	$\times$	$\frac{324}{500}$	— =	$\frac{972}{125000}$

also der gesammte Zins von 10000 Rthl. = $3382\frac{7993}{31250}$ Rthl. a 6 pr. C. in 5 Jahren.

§. 80.

Aus einer sorgfältigen Erwägung des bisher gesagten, und insbesondere aus einer aufmerksamen Betrachtung der in den beyden vorhergehenden §§. beantworteten Fragen ergiebt sich, daß die so eben beschriebene Art der Rechnung allerdings eine wahre und brauchbare Abkürzung des vor ihr beschriebenen Weges enthalte. Man hat dabey statt zweyer Arten von Zahlen, einmal nemlich derer, welche die verschiedenen in dem gesammten Zinseszinse enthaltenen Zinse selbst angeben, und zweytens derer, welche anzeigen, wie vielmal jeder dieser Zinse in dem gesammten Zinseszinse begriffen sey, nur eine Art, nemlich die §. 77 beschriebenen Anzeiger zu suchen, und die Findung dieser Anzeiger ist ausserdem ausserordentlich leicht. Uebrigens kann man auch hier, wenn nicht die größte Schärfe verlangt wird, die bey der unabgekürzten Art mögliche, erlaubte und beschriebene ohngefähre Schätzung der letztern unbedeutenden Zinse anwenden.

§. 81.

Nun muß ich (s. §. 61) von der Art, die erste Gattung der Fragen der Zinseszinsrechnung (s. §. 58) zu beantworten, reden, wobey man sich der Logarithmen bedient. Ich setze dabey alles das voraus, was von der Beschaffenheit und dem Gebrauche der Logarithmen in der Vorrede angeführt worden ist, und merke ausserdem noch vorläufig folgendes an.

So groß der Vortheil ist, den man in der Zinseszinsrechnung von dem Gebrauche der Logarithmen in solchen Fällen zu erwarten hat, wo die Zahl der Zinstermine eine beträchtliche Grösse hat; so unbedeutend wird derselbe, wenn wenig Zinstermine, z. B. 3 oder 4 da sind, ja es verwandelt sich oft der gesuchte Vortheil in zeitraubende Unbequemlichkeit. Wollte man daher in diesem Falle sich der Logarithmen bedienen, so würde man der Absicht, um welcher willen sie berechnet und in Tafeln gebracht sind, der Absicht nemlich der Erleichterung und Verkürzung der Rechnungen, gerade zuwider handeln. Es kann also das folgende auch nur bey der Beantwortung solcher Fragen nützlich seyn, in welchen eine beträchtliche Zahl der Termine 8 oder 10 u. s. w. z. B. vorkommen; da aber diese Fragen häufig sind, so bleibt dasselbe gleichwohl wichtig.

Marcus Martini zeigt in seinem arithmetischen Wegweiser, oder vollständigen practischen Anweisung zur Rechenkunst, Berlin 1776. in der gemeinen Zinsrechnung S. 234 f. daß man selbst viele Aufgaben der gemeinen Zinsrechnung, sehr leicht nebst allen Exempeln der Regel de Tri durch die logarithmische Tabellen verfertigen könne. Man findet daselbst auch folgende Aufgaben: Einer lehnet 900 Rthlr zu 5 *pr.* C. auf 1 Jahr aus, wie viel wird er mit Capital und Zins wieder empfangen? Einer lehnet dem andern zu 6 *pr.* C. auf 8 Monat 4000 Rthlr, was betragen die Zinsen? vermittelst der Logarithmen aufgelöset. So weit kann man kommen, wenn man Vortheile, die nur unter gewissen Umständen Vortheile sind, als allgemeine Vortheile betrachtet, so weit, sage ich, kann man durch diesen Fehltritt verleitet werden, daß man zur Ausrechnung solcher Fälle, die sich im Kopfe berechnen lassen, logarithmische Tabellen vorschlägt oder verlangt. Bey den Aufgaben, die Martini in der Zinseszinsrechnung vermittelst der Logarithmen auflöset, steht ein Capital 20 Jahre aus, und da ist allerdings der Gebrauch der Logarithmen vortheilhaft.

Ich bediene mich bey logarithmischen Rechnungen des vortreflichen Recueil de Tables logarithmiques, trigonometriques et autres necessaires dans les Mathematiques pratiques, von J. C. Schulzen, Mitgliede der Königl. preußl. Academie der Wissenschaften, welcher zu Berlin 1778 in 2 Octavbänden herausgekommen ist.

§. 82.

Gesetzt also, daß man die §. 78 b. und §. 73 bereits auf eine zwiefache Art beantwortete Frage: Wie viel

viel Zinseszins geben 16000 Rthl. à 5 pr. C. in 10 Jahren? die Zinstermine von Jahr zu Jahr angenommen; nun auch vermittelst der Logarithmen beantworten wollte; so würde, da man die Summe des Capitals und des Zinseszinses bey der gesetzten Zeit nach dieser Formel

16000 Rthl. $\times \frac{21^{10}}{20^{10}}$, und den Zinseszins durch Abziehung des Capitals von dem erhaltenen findet, die Rechnung seyn:

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. } 21 & = 1,3222193 \\
\text{davon subtr. L. } 20 & = 1,3010300 \\
\hline
\text{so kommt L. } \tfrac{21}{20} & = 0,0211893, \text{ wovon} \\
\text{der L. } \frac{21^{10}}{20^{10}} \text{ das 10fache, also} & = 0,2118930 \\
\text{dazu addirt, L. } 16000 & = 4,2041200 \\
\hline
\text{so erhält man} & 4,4160130
\end{array}
$$

den Logarithmen von 26062,31 u. w.
hievon abgezogen 16000

bleiben 10062,31 Rthl. Zinseszins.

Ganz genau wird freylich der Zinseszins hier selten gefunden, allein in den im Leben vorkommenden Fällen sind die Umstände mehrentheils von der Art, daß der statt findende Fehler nur die Tausendtheile treffen darf,

und

und diese sind z. B. bey Thalern eben nicht oft in Anschlag zu bringen.

§. 83.

Mehrere Exempel halte ich nicht für nöthig, den Gebrauch der Logarithmen bey der Auflösung der bisher betrachteten Aufgaben der Zinseszinsrechnung zu erläutern. Was solche Fälle betrifft, als Leonh. Euler im ersten Theile seiner lesenswürdigen vollständigen Anleitung zur Algebra, Petersburg, 1771, im 3ten Abschn. im 13ten Capitel §. 549 abhandelt: Ein Capital von 1 Rl. zu 5 pr. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen werden: es frägt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde? was dergleichen Fälle anbetrifft, so wird sich weiter unten eine bequeme Gelegenheit finden, das dazu erforderliche beyzubringen. Es wird Zeit, von den zur Zinseszinsrechnung, und zwar zu den bereits betrachteten Fragen derselben, gehörigen Tabellen zu reden.

§. 84.

Es giebt deren verschiedene Arten. In dem 1ten Stücke der Ungerischen oben genannten Beyträge findet sich eine nach S. 182. Sie ist auf 5 pr. C. und 50, jährige

jährige Termine eingerichtet, und enthält auf zwey Seiten, die man mit einem Blicke übersehen kann, das Capital, welches man durch den Zinseszins nach 1, 2, 3, 4 u. s. w. bis 50 Jahren von 1 Rthl. erhält, und zwar in Rthl., Mgr. und Pf. Diese Tabelle ist derjenigen ähnlich, welche **Süßmilch** vom **Deparcieux** entlehnt hat. Es ist dieselbe in der Sammlung der Tabellen, die dem 2ten Theile **seiner göttlichen Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, Berlin** 1778 angehängt ist, die 27te, und zeigt: **wie sich** 100 **Livres nach einer gewissen Anzahl von Jahren vermehrt haben, wenn man den Zins und den Zins vom Zins darin mit einbegreift. Der Zins ist** ebenfalls **zu 5 pr. C. gerechnet**, und die Termine ein Jahr von einander entfernt angenommen worden, auch geht diese Tabelle, wie jene, bis 50 Jahr.

§. 85.

Um dasjenige, was ich von der Verfertigung und dem Gebrauche dieser Tabellen zu sagen habe, gehörig deutlich machen zu können, will ich von jeder den Anfang hersetzen. Der Anfang der Ungerischen Tabelle ist

1 Thaler verinteressiret sich Zinsen auf Zinsen gerechnet zu 5 pr. C.			
In Jahren	Rt.	Mgr.	₰
I	1	1	$6\frac{2}{5}$
II	1	3	$5\frac{13}{25}$
III	1	5	$5\frac{99}{230}$
IV	1	7	$6\frac{21}{32}$
V	1	9	$7\frac{91}{100}$
VI	1	12	$1\frac{149}{160}$

Der Anfang der Deparcieusischen Tabelle bey Süßmilch aber

Jahre	Livres	Sous	Deniers
1	105	0	0
2	110	5	0
3	115	15	1
4	121	11	0
5	127	12	0
6	134	0	3

§. 86.

§. 86.

Die Verfertigung beyder Tabellen und aller ihnen ähnlichen ist mühsam, und für jedes Jahr wird eine besondere Rechnung erfordert. Man kann sich hier nicht, nachdem man den Zins für eine kleine Zeit gefunden hat, so wie bey den ähnlichen Tabellen der gemeinen Zinsrechnung, durch eine blosse Addition oder Multiplication helfen, um daraus den Zins für grössere Zeiten herzuleiten; es lehret dies die Natur der Sache und eine genaue Betrachtung der vorstehenden Tabellen. Uebrigens sind die Regeln, welche man jedesmal zu befolgen hat, bereits hinlänglich erklärt worden, und es ist also nur noch zu bemerken, daß man sich hier auch, ohne merklichen Nachtheil, der öftern Anwendung der einfachen Regel de Tri bedienen könne.

§. 87.

Der Gebrauch dieser Tabellen besteht darin, daß man, wenn dieselben zur Hand sind, daraus das nöthige nimmt, um den verlangten Zinseszins eines Capitals, das zu 5 pr. C. aussteht, und wovon die Zinsen von Jahr zu Jahr gerechnet werden, durch einmalige Anwendung der Regel de Tri zu finden. Der Anzeiger der Veränderung des Capitals zur Findung des Zinseszinses hat nemlich zum Nenner, in der Ungerischen Tabelle stets 1, und in der Deparcieusischen stets 100, und

zum

zum Zähler in beyden die Zahl, welche neben der gegebenen Anzahl der Jahre steht. Würde z. B. gefragt, wie viel 2000 Rthlr a 5 pr. C. in 5 Jahren Zins geben; so wäre der Aufsatz

1. nach der Ungerischen Tabelle.

$$2000 \text{ Rthlr} \times \frac{1 \text{ Rthlr } 9 \text{ Mgr } \frac{91}{100} \text{ Pf}}{1 \text{ Rthlr}}$$

2. nach der Deparcieusischen Tabelle

$$2000 \text{ Rthlr} \times \frac{127 \text{ Liv. } 12 \text{ So.}}{100 \text{ Liv}}.$$

Auf die aus diesen Aufsätzen erhellende Art kann man aber allerdings verfahren, denn es ist auch bey dem Zinseszinse, wenn Zeit und pr. C. nicht geändert werden, der Zinseszins so vielmal grösser, als das Capital vielfach genommen wird, und desto kleiner, je kleiner man das Capital voraussetzt.

§. 88.

Es fällt aus den im vorhergehenden §. befindlichen Aufsätzen schon in die Augen, daß zur völligen Beantwortung der zugehörenden Frage gleichwohl oft noch weitläuftige Rechnungen nöthig sind; und dies wird die Ausrechnung selbst noch deutlicher zeigen. Wenn nun vollends dazu kommt, wie bey dem gegenwärtigen Falle, daß die Tabellen fehlerhaft sind? — Es ist die Rechnung nach der Ungerischen Tabelle

$$2000\ \text{Rthl} \times \frac{1\ \text{Rthl}\ 9\ \text{Mgr}\ 7\tfrac{21}{100}\ \text{₰}}{1\ \text{Rthl}}$$

73582000

183955

$30659\frac{1}{6}$

$2554\frac{67}{72}$ Rthl

$\frac{1\ \text{Rthl}}{45\ \text{Mgr}}$ $\frac{1\ \text{Rthl}}{36\ \text{Mgr}}$

$\frac{367\ \text{₰}}{36791}$ $\frac{288\ \text{₰}}{28800 = 100 \times 6 \times 12.}$

Oder nach der Deparcieusischen Tabelle:

$$2000\ \text{Rthl} \times \frac{127\ \text{L.}\ 12\ \text{S.}}{100\ \text{L.}}$$

$\frac{1}{2552\ \text{Rthl}}$ $\frac{127\ \text{L.}}{2552\ \text{S.}}$ $\frac{100\ \text{L.}}{2000\ \text{S.}}$

Wie weitläuftig ist die nach den Tabellen noch nöthige Rechnung! und welch ein Unterschied zwischen beyden gefundenen Zinseszinsen! Nach der zusammengesetzten Regel de Tri gerechnet, wird das Exempel folgendes:

$$2000\ \text{Rthl} \times \frac{21^5}{20^5} = \frac{4084101}{3200000}$$

$\cancel{8}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{2}02000$ | $2552\frac{9}{16}$ Rthl.
$\cancel{2}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{2}8$
$\cancel{1}\cancel{1}\ 1$
$\cancel{1}$

Der gedachte Unterschied rühret daher, daß in der Ungerischen Tabelle bey 5 Jahren 1 Rthl 9 Mgr $7\frac{56}{100}$ ₰, und in der Süßmilchschen 127 L. 12 S. 6 D. stehen sollte.

§. 89.

Das bisherige vorausgesetzt, so ist eine vollständige Beurtheilung der beschriebenen Tabellen, die wegen des Gebrauchs nothwendig ist, den man von ihnen zu machen Gelegenheit haben kann, leicht. Bey dem am Ende des vorhergehenden §. angezeigten Fehler verweile ich nicht, er ist zufällig, und trifft das Wesen der Tabellen nicht; aber folgendes verdient erwogen zu werden. Es sind in der Ungerischen Tabelle die Brüche der ₰ nicht ganz gesetzt, und in der Süßmilchschen Tabelle fehlen die Brüche der Den. durchaus. Fände daher auch der angezeigte Fehler nicht statt; stünde in der Ungerischen auch bey 5 Jahren 1 Rthlr. 9 Mgr. 7 $\frac{56}{100}$ ₰, und in der Süßmilchschen 127 L. 12 S. 6 Den.: so fehlten doch in jener 0,00909 ₰ und in dieser $\frac{303}{400}$ Den. Nun bedeuten zwar diese Fehler bey den Summen, wobey sie ausgelassen sind, nicht so viel, daß sie da nicht ausgelassen werden könnten; allein man schließt von diesen Summen oft auf andere, die von ihnen das vielfache sind, und dann vermehrt sich der Fehler der Tabellen in der Rechnung in eben dem Grade. $\frac{3}{4}$ Den. $\times$ 20 z. B. 1 S. 3 Den.; so viel und drüber betrüge beym Gebrauche der Süßmilchschen Tabellen der Fehler bey 2000 Liv., und um so viel sich zu versehen, muß wenigstens zu vermeiden seyn. Wenn man

man sich also dieser oder ähnlicher Tabellen bedienen wollte, so müßten darin ausserdem, daß sie durchaus ohne Druck- und Uebereilungsfehler seyn müßten, auch die Brüche bey den niedrigsten Münzsorten vollständig hinzugefügt worden seyn. Wäre dies geschehen, so könnte man bey dem Gebrauche die Brüche entweder ganz weglassen, oder einen Theil derselben, oder die ganzen Brüche nehmen, je nachdem die Umstände es erforderten.

§. 90.

Besser als die bisher betrachtete Art sind solche Tabellen, als von Clausberg in der schon öfters berührten demonstrativen Rechenkunst S. 1244 bis zu 20 Jahren für 5 pr. C. gegeben hat, ob sie sich gleich in Ansehung des Gebrauchs, den man davon zu machen hat, von den vorhergehenden nicht unterscheiden. Die Clausbergische Tabelle ist folgende.

Ein Capital von 100000000 giebt

mit Zinseszins a 5 pr. C. nach	1 Jahre	105000000
—	2 —	110250000
—	3 —	115762500
—	4 —	121550625
—	5 —	127628156
—	6 —	134009564
—	7 —	140710042
—	8 —	147745544

—	9	—	155132822
—	10	—	162889463
—	11	—	171033936
—	12	—	179585633
—	13	—	188564916
—	14	—	197993162
—	15	—	207892820
—	16	—	218287461
—	17	—	229201834
—	18	—	240661926
—	19	—	252695022
—	20	—	265329773

Von der Verfertigung dieser Art Tabellen ist nach §. 86 nicht weiter nöthig zu reden.

§. 91.

Den Gebrauch der zehntheiligen Brüche vorausgesetzt, so läßt sich diese Tabelle leicht in folgende verwandeln. Wenn ein Capital a 5 pr. C. auf Zinseszins aussteht; so ist für

den Zinseszins und das Capital	der Anzeiger der Veränderung des Capitals
von 1 Jahr	1,05
— 2 —	1,1025
— 3 —	1,157625
— 4 —	1,21550625

—	5	—	1,27628156
—	6	—	1,34009564
—	7	—	1,40710042
—	8	—	1,47745544
—	9	—	1,55132822
—	10	—	1,62889463 u. s. w.

Man könnte auch diese Anzeiger durch die Verwandelung der Ausdrücke $\frac{21}{20}$, $\frac{21^2}{20^2}$, $\frac{21^3}{20^3}$, $\frac{21^4}{20^4}$, u. s. w. in zehntheilige Brüche, und, wenn man wollte, noch weiter als hier geschehen finden; zu einer grössern Genauigkeit führet wenigstens dieser Weg, denn es kann dabey das ausgelassene bey dem einen Anzeiger nie auf den andern einfliessen. Je nachdem in den vorkommenden Aufgaben ein grosses oder kleines Capital statt findet, je nachdem muß man von den Anzeigern viel Zahlen nehmen, oder kann mit wenigen auskommen. Das §. 87 und 88 stehende Exempel wäre, wenn man diese Tabelle gebrauchte,

$$\begin{array}{r} 2000\ \text{Rthl.} \times 1{,}27628156 \\ \hline 2552{,}56312\ \text{Rthl.} \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} 2000\ \text{Rthl.} \times 1{,}276281 \\ \hline 2552{,}562\ \text{Rthl.} \end{array}$$

Der Fehler bey der 2ten Ausrechnung kann nicht 0,002 eines Rthl. betreffen, und kommt also nicht in Anschlag. Bey dieser Einrichtung der Tabelle hat man den Nenner des Anzeigers nicht zu schreiben, und dieser Vortheil ist nicht zu verachten.

§. 92.

Man kann sich aber auch **einer logarithmischen Tabelle** bedienen, die den Vorzug vor allen übrigen hat, daß sie sich *leicht und geschwind* verfertigen läßt. Um zuvörderst die **Beschaffenheit und Verfertigung** *einer* solchen Tabelle zu beschreiben, so sey das pr. C., zu welchem sie gehören soll, 5. Die Tabelle muß die Logarithmen der Anzeiger der Veränderung des Capitals zur Findung des *Capitals nebst dem Zinse und Zinseszinse* enthalten. Fängt man von 1 Jahre an, so sind alle folgende Logarithmen, und zwar nach der Zahl der Jahre, zu welchen sie gehören, das vielfache von dem ersten, und wie man den ersten finde, ist bekannt. *Man thut aber wohl*, wenn man sich hier solcher Logarithmen bedient, die auf mehr als 7 Decimalstellen berechnet worden sind. Da also

$$\text{L. } 21 = 1{,}3222192947339 19$$
$$\text{und L. } 20 = 1{,}3010299956639 81$$

so ist $\text{L. } \frac{21}{20} = 0{,}0211892990699 38$, und es ergiebt sich daher für den Zinseszins zu 5 pr. C. folgende Tabelle.

Zahl

Zahl der Jahre			Logarithmen des Anzeigers der Veränderung des Capitals
1	—	—	0,021189299069938
2	—	—	0,042378598139876
3	—	—	0,063567897209814
4	—	—	0,084757196279752
5	—	—	0,105946495349690
6	—	—	0,127135794419628
7	—	—	0,148325093489566
8	—	—	0,169514392559504
9	—	—	0,190703691629442
10	—	—	0,211892990699380
11	—	—	0,233082289769318
12	—	—	0,254271588839256
13	—	—	0,275460887909194
14	—	—	0,296650186979132
15	—	—	0,317839486049070
16	—	—	0,339028785119008
17	—	—	0,360218084188946
18	—	—	0,381407383258884
19	—	—	0,402596682328822
20	—	—	0,423785981398760
21	—	—	0,444975280468698
22	—	—	0,466164579538636
23	—	—	0,487353878608574
24	—	—	0,508543177678512

25	—	—	0,529732476748456
26	—	—	0,550921775818388
27	—	—	0,572111074888326
28	—	—	0,593300373958264
29	—	—	0,614489673028202
30	—	—	0,635678972098140 u. s. w.

§. 93.

Der Gebrauch dieser Tabelle besteht darin, daß man daraus den jedesmal nöthigen Logarithmen des Anzeigers nimmt. Die Summe dieses Logarithmen und des Logarithmen des Capitals ist der Logarithme der Zahl, welche die Grösse des Capitals anzeigt, zu welcher das gegebene in der bestimmten Zeit durch den Zinseszins zu 5 *pr. C.* gewachsen ist. Man hat aber bey diesem Gebrauche nur dann nöthig, die Logarithmen in mehr als 7 Decimalstellen zu nehmen, wenn die Anzahl der Termine sehr groß angenommen wird.

In den Schulzischen logarithmischen Tabellen ist der Logarithme von 20 gleich 1,3010300, und mußte daselbst auch so groß gesetzt werden, und aus eben dem Grunde ist der Logarithme von 21 gleich 1,3222193 angenommen worden. Hätte man indeß bey der Tabelle §. 92 diese Logarithmen zum Grunde gelegt, so hätten daraus in der Folge beträchtliche Fehler entstehen können, wovon sich ein jeder leicht überzeugen kann.

§. 94.

§. 94.

Was man auch für einer Tabelle sich bediene, es ist aber der Gebrauch derselben, insbesondere der beyden letztern, jedem der oft Zinseszinse zu berechnen hat, anzurathen; so findet man jederzeit die Summe des Capitals und des Zinseszinses. Will man daher den Zinseszins allein wissen, so muß noch von dem gefundenen das gegebene Capital abgezogen werden.

§. 95.

Wenn der Zinseszins zu einem andern pr. C. berechnet werden soll, so werden dazu auch andere Tabellen erfordert. Es ist aber nicht nöthig von diesen Tabellen mehr zu sagen, als daß man sie durchaus auf eine ähnliche Art verfertigen könne, und daß alle dabey nöthige Veränderung blos den zu nehmenden Anzeiger treffe. Auch kann man, die logarithmische Tabelle ausgenommen, dieselben aus jeder schon verfertigten durch blosse Multiplication und Division erhalten. Aus der Tabelle §. 91 z. B. erhält man die nöthige für 6 pr. C., wenn man alle Anzeiger derselben mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt. Auf eine ähnliche Art verfährt man in den übrigen Fällen.

§. 96.

Was nun den Fall betrifft, wenn die Zinstermine nicht von Jahr zu Jahr, sondern von einem halben oder Viertheiljahr zum andern vestgesetzt werden; so macht derselbe zwar einige, aber keine grosse Veränderung der bisher erklärten Regeln nothwendig. So vielmal kleiner nemlich der Zeitraum zwischen zwey Zinsterminen angenommen wird, eben so vielmal kleiner wird auch das für jeden Zinstermin zu rechnende pr. C., und dagegen die Zahl der Termine, wenn die Zeit des Ausstehens des Capitals dieselbe bleibt, eben so vielmal grösser. Stehen z. B. 1000 Rthlr, wie §. 60, a 5 pr. C. 4 Jahr, und soll der Zins alle halbe Jahr berechnet und zum Capitale geschlagen werden; so ist das pr. C. für jeden Termin $\frac{5}{2}$, oder $2\frac{1}{2}$, und die Zahl aller Zinstermine in 4 Jahren 2×4, oder 8. Man hat also in dem gedachten Falle nur nöthig, jedesmal erst nach den statt findenden Angaben die Zahl der Zinstermine, und das für jeden Termin zu rechnende pr. C. vest zu setzen, und alsdann nach den bisherigen Regeln zu verfahren. Das angeführte Exempel z. B. giebt nach der beschriebenen Bestimmung die Frage: Wie viel Zinseszins geben 1000 Rthlr a $2\frac{1}{2}$ pr. C. in 8 Terminen? zu deren Beantwortung bereits alles erforderliche gesagt worden ist.

§. 97.

Die Beantwortung kann nemlich durch folgende Rechnungen erhalten werden.

a Mit Hülfe der zusammengesetzten Regel de Tri

1000 Rthlr

$$1000 \text{ Rthl} \times \frac{41^8}{40^8} = \frac{7984925229121}{6553600000000}$$

7984925229121000	1218 Rthl
14313094	
2207778	
1656660	
57714	
3096	
26	

10561716484

63370298904	$9\frac{4387808904}{6553600000000}$ gr
98238	
44497	
38	

Der Zinseszins allein ist also 218 Rthl 9 gr und ohngefehr 8 pf.

b Auf die ferner erklärte Art

1. ohne die hinterher gezeigte Verkürzung

Von 1000 Rthl a $2\frac{1}{2}$ pr. C. beträgt

der 1te Zins 25 Rthl
— 2te - - $\frac{5}{8}$
— 3te - - $\frac{1}{64}$
— 4te - - $\frac{1}{2560}$
— 5te - - $\frac{1}{102400}$
— 6te - - $\frac{1}{4096000}$
— 7te - - $\frac{1}{163840000}$
— 8te - - $\frac{1}{6553600000}$

Ferner

Ferner ist in dem gesammten Zinseszinse von 1000 Rthl a $2\frac{1}{2}$ pr. C. in 8 Terminen enthalten

der 1te Zins	8mal	=	200 Rthl	
— 2te	— 28	— =	$17\frac{1}{2}$	
— 3te	— 56	— =	$\frac{7}{8}$	
— 4te	— 70	— =	$\frac{7}{256}$	
— 5te	— 56	— =	$\frac{7}{12800}$	
— 6te	— 28	— =	$\frac{7}{1024000}$	
— 7te	— 8	— =	$\frac{1}{20480000}$	
— 8te	— 1	— =	$\frac{1}{655360000}$.	

und der ges. Zinseszins von 1000 Rthl a $2\frac{1}{2}$ pr. C. in 8 Term. 218 Rthl $9\frac{4387808704}{6553600000}$ H

Man kann hier, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, $\frac{7}{12800}$, $\frac{7}{1024000}$, $\frac{1}{20480000}$ und $\frac{1}{655360000}$ vom Anfang an weglassen.

2. mit dieser Verkürzung

Für 1000 Rthl a $2\frac{1}{2}$ pr. C. in 8 Terminen sind die nöthigen Anzeiger der Veränderung so wohl des Capitals als der nach und nach zu erhaltenden gesammten verschiedenen Zinse in der bekannten Ordnung $\frac{8}{40}$, $\frac{7}{80}$, $\frac{6}{120}$, $\frac{5}{160}$, $\frac{4}{200}$, $\frac{3}{240}$, $\frac{2}{280}$, $\frac{1}{320}$, oder $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{80}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{140}$, $\frac{1}{320}$; und die in dem verlangten Zinseszinse enthaltene gesammte verschiedene Zinse

1. $\frac{1}{5}$	$\times$ 1000 Rthlr	$=$	200 Rthlr	
2. $\frac{7}{80}$	$\times$ 200 —	$=$	$17\frac{1}{2}$	
3. $\frac{1}{20}$	$\times$ $17\frac{1}{2}$	$=$	$\frac{7}{8}$	
4. $\frac{1}{32}$	$\times$ $\frac{7}{8}$	$=$	$\frac{7}{256}$	

also der ges. Zinseszins von 1000 Rthlr a $2\frac{1}{2}$ pr.C. in 8 Term. $=$ 218 Rthlr 9 Gr u. ohngef. 8 Pf.

Der 5te gesammte Zins wäre $\frac{1}{50} \times \frac{7}{256}$ Rthlr $=$ $\frac{7}{12800}$ Rthlr, welches zu wenig ist, als daß es in Anschlag kommen könnte. Noch mehr findet dies bey den übrigen ausgelassenen Zinsen statt.

c Mit Hülfe logarithmischer Tafeln.

Es ist L. 41 $=$ 1,6127839
und L. 40 $=$ 1,6020600

also L. $\frac{41}{40}$ $=$ 0,0107239, wovon

das 8fache $=$ L. $\frac{41^8}{40^8}$ $=$ 0,0857912, und

dazu den L. 1000 $=$ 3,0000000

so kommt der L. der ges. Zahl $=$ 3,0857912.

Zu diesen Logarithmen findet man in den Tafeln 1218,4 Rthlr, welches bis auf einige Pfennige mit dem obigen übereinstimmet. Man könnte aber auch noch die Hunderttheile der gefundenen Zahl suchen, wodurch

durch in dem gegenwärtigen Falle alle erforderliche Genauigkeit erhalten würde.

§. 98.

Endlich ist auch der Fall zu berühren, wenn der Zinseszins eines Capitals bey einer gebrochenen Zahl der Termine zu berechnen gegeben wird. Es gehöret dahin die Frage: Wie viel Zinseszins erhält man von 10000 Rthl a 5 pr. C. in $3\frac{3}{4}$ Jahren? die Zinstermine von Jahr zu Jahr angenommen. Alle dergleichen Aufgaben lassen sich vorzüglich auf eine dreyfache Art auflösen. Denn

a kann man vermittelst der zusammengesetzten Regel de Tri seinen Endzweck erreichen. In diesem Falle ist die zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage nöthige Rechnung:

$$10000 \text{ Rthl} \times \frac{21^3}{20^3} \times \frac{83}{80} = \frac{768663}{640000}$$

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{7}\cancel{6}8\cancel{6}\cancel{6}30000 & \\
\cancel{1}\cancel{1}\quad 2 & 12010 \text{ Rthl} \\
\hline
92 & \\
\hline
\cancel{5}\cancel{5}\cancel{2} & \\
\cancel{7}0 & 8 \text{ Gr} \\
4 & \\
\hline
\cancel{4}8\cancel{0} & \\
\cancel{6}2 & 7\frac{1}{2} \text{ Pf.} \\
3 &
\end{array}$$

Wegen

Wegen des letzten Factors des Anzeigers, $\frac{83}{80}$, sehe man §. 51 nach. Der Zinseszins übrigens allein kann aus dem gefundenen leicht hergeleitet werden.

b Kann man stückweise zuvörderst die Summe suchen, zu welcher das gegebene Capital in den ganzen Terminen steigt, und dann aus dieser Summe das eigentlich verlangte finden. Bey der vorhergehenden Frage stehen zu bleiben, so ist

$$10000 \text{ Rthlr} \times \frac{21^3}{20^3} \; (= \tfrac{9261}{8000}) = 11576\tfrac{1}{4} \text{ Rthlr}$$

Nun findet man aus $11576\frac{1}{4}$ Rthlr das obige also:

$$11576\tfrac{1}{4} \text{ Rthlr} \times \tfrac{83}{80}$$

$$\begin{array}{l|l}
\hline
34728\tfrac{3}{4} & \\
92610 & \\
\hline
\cancel{9}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{8}28\tfrac{3}{4} & \\
\cancel{1} \quad \overline{112} & 12010 \text{ Rthlr} \\
\hline
\cancel{6}\cancel{9}0 & \\
5 & 8 \text{ Gr } 7\tfrac{1}{2} \text{ Pf.}
\end{array}$$

c Kann man sich der Logarithmen bedienen, und zwar in dem schon berechneten Exempel auf folgende Art.

Es

Es ist L. 21 = 1,3222193

und L. 20 = 1,3010300

---

also L. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893

und L. $\frac{21^3}{20^3}$ = 0,0635679

Ferner ist L. 83 = 1,9190781

und L. 80 = 1,9030900

---

also L. $\frac{83}{80}$ = 0,0159881

und L. $\frac{21^3}{20^3}$ + L. $\frac{83}{80}$ = 0,0795560

dazu L. 10000 = 4,

---

so kommt = 4,0795560; wozu man aus den Tafeln bey Anwendung der Regeln von der Findung der zu gegebenen Logarithmen gehörigen Zahlen, wenn die Logarithmen nicht genau in den Tafeln stehen, die Zahl 12010,36 findet.

Man kann auch, wenn die Umstände es rathen, einen Theil der Ausrechnung mit Hülfe der Logarithmen, und den andern Theil ohne dieselben vollenden. Man könnte sich z. B. die Rechnung bey b sehr erleichtern, wenn man $11576\frac{1}{4}$ Rt. vermittelst der logarithmischen Tafeln suchte. Uebrigens durften der Vollständigkeit wegen die gebrochenen Zinstermine zwar nicht völlig übergangen werden; allein weitläuftiger davon zu reden

reden, wäre überflüßig, da die Fälle, wo sie statt finden, außerordentlich selten sind.

§. 99.

Ich komme zu der zweyten Hauptfrage der Zinseszinsrechnung, zur Bestimmung des Capitals, das erfordert wird, um aus demselben bey einem gegebenen pr. C. durch den Zinseszins in einer gewissen Zeit ein bestimmtes grösseres Capital zu erhalten. Auch diese Bestimmung ist wichtig, da die Frage: Wie viel Geld muß man anlegen, um durch den Zinseszins zu einem gewissen pr. C. dasselbe in einer bestimmten Zeit zu einer verlangten und gegebenen Summe zu erhöhen; unter gewissen Umständen oft vorkommen kann: und es ist daher auch hier nöthig, die Art der Beantwortung dieser Frage vollständig zu beschreiben.

§. 100.

Um von dem Falle anzufangen, wenn die Zahl der Termine eine ganze Zahl, und das pr. C. für jeden einzeln Termin gegeben ist; so muß, da die anzulegende Summe, multiplicirt mit derjenigen Dignität des Anzeigers der Veränderung des Capitals zur Findung des Zinses, deren Exponent der Zahl der Termine gleich ist, die verlangte und gegebene Summe geben muß, umgekehrt diese bekannte Summe, multiplicirt mit dem umgekehrten Anzeiger eben derselben Dignität jene anzulegende Summe geben. So werden z. B. aus 16000 Rthlr. a 5 pr. C. in 10 Jahren, bey jährigen Terminen und Zinseszins $26062\frac{200978201}{640000000}$ Rthlr., und diese Summe erhält man durch Entwickelung des Ausdrucks,

$$16000 \text{ Rthlr.} \times \frac{21^{10}}{20^{10}};$$

umgekehrt muß man also aus $26062\frac{200978201}{640000000}$ Rthlr. jene 16000 Rthlr. wieder finden, wenn man diesen Ausdruck entwickelt,

$$26062\frac{200978201}{640000000} \text{ Rthlr.} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}.$$

Der Grund hievon liegt in den Sätzen: Ein Product, durch den einen seiner Factoren dividirt, ist dem andern Factor gleich; und: Ein Quotient, mit dem Divisor multiplicirt, giebt den Dividend; und die angeführte Behauptung ist also hinlänglich bewiesen.

§. 101.

Bey der Aehnlichkeit, welche der zweyte Hauptfall der Zinseszinsrechnung mit dem ersten Hauptfalle hat, kann es nicht anders seyn, es müssen die Aufgaben desselben auf eben dieselbe und auf eben so verschiedene Art aufgelöset werden können, als die zu dem ersten Hauptfalle gehörigen und bisher betrachteten Aufgaben. Die Art also, wegen ihrer Weitläuftigkeit, bey Seite gesetzt, welche die

ein-

einfache Regel de Tri mehrere Male anwendet; so bleiben folgende übrig.

a Die Auflösung vermittelst der zusammengesetzten Regel de Tri. Die Ausrechnung des §. 100 stehenden Exempels ist dabey

$$26062\tfrac{200978201}{640000000}\ \text{Rthl.} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}.$$ Da nun

20^{10} so viel ist als 10240000000000, und

21^{10} so viel ist als 16679880978201; so erhält man aus $26062\tfrac{200978201}{640000000}$ Rthl. $\times$ 10240000000000 die Summe von 266878095651216000 Rthl., und

aus $\dfrac{266878095651216000}{16679880978201}$ Rthl. endlich

16000 Rthl., die nöthige Summe, um durch Anlegung derselben auf Zinseszins zu 5 pr. C. in 10 Jahren und bey jährigen Terminen $26062\tfrac{200978201}{640000000}$ Rthl. zu erhalten.

Kürzer ist zwar diese Art als die gänzlich ausgelassene; allein wie weitläuftig nicht doch noch? Man überlege nur die nöthigen Multiplicationen und Division, die, den Raum zu ersparen, nicht hingesetzt sind. Ist indeß die Zahl der Termine nicht so groß, so ist auch die nöthige Arbeit so vielfach nicht, und man kann sich daher dieser Art bey einer geringen Anzahl von Terminen schon bedienen.

§. 102.

b Kann man auch auf folgende Art zu seinem Zwecke gelangen. Man rechnet: Wenn ein Capital 10 Jahre zu 5 pr. C. und bey jährigen Terminen auf Zinseszins aussteht; so besteht der gesammte Zinseszins aus zehn verschiedenen Arten Zinsen, und es ist

				vom Capital
der	1te Zins	— — — —		$\frac{1}{2}$
—	2te	— vom 1ten Zinse	$\frac{9}{40}$	$\frac{9}{80}$
—	3te	— — 2 - —	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{200}$
—	4te	— — 3 - —	$\frac{7}{80}$	$\frac{21}{16000}$
—	5te	— — 4 - —	$\frac{3}{50}$	$\frac{63}{800000}$
—	6te	— — 5 - —	$\frac{1}{24}$	$\frac{21}{6400000}$
—	7te	— — 6 - —	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{32000000}$
—	8te	— — 7 - —	$\frac{3}{160}$	$\frac{9}{5120000000}$
—	9te	— — 8 - —	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{51200000000}$
—	10te	— — 9 - —	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{10240000000000}$

Bringt man nun alle für die in dem gesammten Zinseszinse enthaltene einzele Zinse gefundene Theile des Capitals auf einerley Nenner; so erhält man

$$\begin{array}{r} 5120000000000 \\ 1152000000000 \\ 153600000000 \\ 13440000000 \\ 806400000 \\ 33600000 \\ 960000 \\ 18000 \\ 200 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

und also zur Summe $\frac{6439880978201}{10240000000000}$.

Dieser Bruch zeigt den Theil der anzulegenden Summe an, welcher dem in dem Capitale enthaltenen Zinseszinse gleich ist. Das anzulegende Capital ist also das Ganze, nach welchem die Bestimmung des gedachten Zinseszinses beurtheilt werden muß; und da dasselbe ausser dem Zinseszinse in dem gegebenen Capitale enthalten ist, so wird dadurch das gegebene Capital gleich $1 + \frac{6439880978201}{10240000000000}$, oder $\frac{16679880978201}{10240000000000}$ des anzulegenden Capitals, und folglich das anzulegende Capital umgekehrt $\frac{10240000000000}{16679880978201}$ von dem gegebenen, im betrachteten Falle von $26062\frac{200978201}{640000000}$ Rt.

Ich habe diese Auflösung nur für 10 Termine und 5 pr. C. eingerichtet. Wie man bey einer andern Zahl der Termine und einem andern pr. C. sich zu verhalten habe, kann aus diesem einzeln Falle leicht abgeleitet werden.

§. 103.

Am Ende erhält man bey dieser Art eben den Anzeiger der Veränderung des gegebenen Capitals zur Findung der anzulegenden Summe, welcher bey a §. 101 aus der Entwickelung des Ausdrucks $\frac{20^{10}}{21^{10}}$ sich ergiebt, und auch da der endliche Anzeiger war. Da dies in der Natur der Sache selbst gegründet ist, und daher beständig statt finden muß; so unterscheidet sich bis jetzt die Auflösung nach §. 102 von der im 101ten §. beschriebenen in nichts weiter, als in der Art diesen endlichen Anzeiger zu finden. Ich gebe gern zu, daß es leichter ist, $\frac{20^{10}}{21^{10}}$ zu entwickeln, als die §. 102 angestellte Rechnung zu machen, indem man zur Entwickelung des Ausdrucks $\frac{20^{10}}{21^{10}}$ nichts als eine leichte, wenn gleich öftere, Multiplication nöthig hat; allein es bleibt nichts desto weniger auch diese zweyte Art wichtig.

§. 104.

Es ist nemlich selten nöthig, zu allen in dem gesammten Zinseszinse enthaltenen einzeln Zinsen die ihnen glei-

chen

chen Theile des Capitals zu suchen; sondern man kann, so bald man auf weniger als ein Tausendtheil kommt, aufhören, und den auf diese Art statt findenden Fehler am Ende der Rechnung verbessern. Würde z. B. gefragt: Wie viel Geld muß man auf Zinseszins zu 5 pr. C. austhun, um bey jährigen Terminen nach 10 Jahren 26062$\frac{1}{3}$ Rthlr zu erhalten? so dürfte man nur rechnen: Es ist

			vom Capital
der 1te Zins	— — —	— —	$\frac{1}{2}$
— 2 —	vom 1ten Zinse	$\frac{9}{40}$ —	$\frac{9}{80}$
— 3 —	— 2 —	$\frac{4}{30}$ —	$\frac{3}{200}$
— 4 —	— 3 —	$\frac{7}{80}$ —	$\frac{21}{16000}$

und also die Summe aller dieser Zinse $\frac{10061}{16000}$.

Dazu nun 1 oder $\frac{16000}{16000}$, so erhält man $\frac{26061}{16000}$, und zum Anzeiger von 26062$\frac{1}{3}$ Rthlr für den gegenwärtigen Fall also, $\frac{16000}{26061}$. Es giebt aber, eine Kleinigkeit nicht geachtet, 26062$\frac{1}{3}$ Rthlr $\times$ $\frac{16000}{26061}$ die Summe von 16000 Rthlr als das zu 5 pr. C. auf Zinseszins anzulegende Capital.

§. 105.

In dem 58ten §. ist die Frage angeführt: Wie viel Geld muß man a 5 pr. C. auf Zinseszins austhun, um bey jährigen Terminen nach 10 Jahren 5000 Rthlr wieder zu erhalten? Die Antwort auf diese Frage findet man durch folgende Rechnung.

$$5000 \text{ Rt.} \times \frac{16000}{26061}$$

800000000	
118274441	
161330	$3069\frac{23}{32}$ Rt.
15989	
787	
1	

Rechnet man nun wieder zurück, so ist die Rechnung, wenn man die Logarithmen gebraucht, diese

$$\text{L.}\ \frac{21^{10}}{20^{10}} = 0{,}2118929$$

$$\text{L.}\ 3069{,}7 = 3{,}4870959, \text{ folglich}$$

$$\text{L.}\ 3069{,}7 \times \frac{21^{10}}{20^{10}} = 3{,}6989888.$$

Sucht man diesen Logarithmen in den Tafeln auf; so findet man dazu die Zahl 5000 und etwas darüber. Es vermehren sich also $3069\frac{23}{32}$ Rt. durch den Zinseszins a 5 pr. C. in 10 Jahren zu 5000 Rt., und sind daher die gesuchte anzulegende Summe.

§. 106.

Wenn man so, wie §. 104 gelehret worden, verfährt, so dividiret man mit einem kleinern Divisor, als man eigentlich gebrauchen sollte, und daher ist der Quotient grösser, als man ihn bey einer strengen Rechnung findet.

findet. So wie aber das oben im Divisor fehlende sehr wenig beträgt, so ist auch der Ueberschuß bey dem Quotienten nicht sehr beträchtlich; und man erreicht daher einen in den meisten Fällen hinlänglichen Grad der Richtigkeit, wenn man den Quotienten um etwas, aber nicht sehr beträchtliches, vermindert. So sind §. 104 etwa $\frac{3}{4}$, §. 105 aber noch weniger in dem Quotienten aus der Acht gelassen worden, eigentlich aber ist dagegen auch die Summe $3069\frac{2}{3}\frac{1}{2}$ Rthl noch um etwas zu groß.

§. 107.

c (s. §. 102) ist die Auflösung vermittelst der Logarithmen übrig, wobey es hinreichend seyn wird, die Art und Weise derselben an dem §. 104 und 105 beantworteten Fragen gezeigt zu haben. Es ist also

1. in Ansehung der Frage §. 104

$$L.\ 20 = 1{,}3010300$$
$$L.\ 21 = 1{,}3222193$$

also $L.\ \frac{20}{21} = -\ 1{,}9788107$. Ferner

ist $L.\ \frac{20^{10}}{21^{10}} = -\ 1{,}7881070$

und $L.\ 26062\frac{1}{3} = 4{,}4160127$, also

$L.\ 26062\frac{1}{3} \times \frac{20^{10}}{21^{10}} = 4{,}2041197$; welcher um 0,0000003 kleiner ist, als der Logarithme von 16000, der Zahl, welche gefunden werden muß.

2. in Ansehung der Frage §. 105.

$$L.\ \frac{20^{10}}{21^{10}} = -\ 1,7881070$$

$$\text{und } L.\ 5000 = \quad 3,6989700$$

$$\text{also } L.\ 5000 \times \frac{20^{10}}{21^{10}} = \quad 3,4870770,$$

welches der Logarithme von mehr als 3069,5, aber weniger als 3069,6 ist; wodurch also das §. 106 am Ende gesagte bestätiget wird.

Bey den gebrauchten negativen Logarithmen bezieht sich das Zeichen (—) allein auf die Einheit. Anstatt dieser negativen Logarithmen könnte man auch solche brauchen, die durchaus negativ wären. So wie der Logarithme von $\frac{21}{20}$ gleich 0,0211892 ist, so wäre dann der Logarithme von $\frac{20}{21}$ gleich 0,0211892, und der Logarithme von $\frac{20^{10}}{21^{10}}$ gleich $-$ 0,2118929. Da $-$ 0,2118929 + 4,4160127 = 4,2041198 und $-$ 0,2118929 + 3,6989700 = 3,4870771; so fällt in die Augen, daß der Gebrauch

brauch der Logarithmen, die durchaus negativ sind, keine Aenderung in dem gefundenen hervorbringen könne.

§. 108.

Da auch der zweyte Hauptfall der Zinseszinsrechnung, so weit als derselbe bis jetzt betrachtet worden ist, unter gewissen Umständen häufig vorkommen kann, §. 99; so ist es gut, auch für ihn **Tabellen** zu haben, durch deren Gebrauch man sich die Beantwortung der zu demselben gehörenden Fragen erleichtern, und die dazu nöthige Arbeit abkürzen könne. Man hat **drey Arten** solcher Tabellen, welche also nunmehr zu beschreiben und zu beurtheilen sind.

§. 109.

Von der ersten Art findet sich ein Beyspiel in der schon einmal gedachten Süßmilchschen Sammlung von Tabellen. Süßmilch hat auch diese Tabelle vom Deparcieux entlehnt, und sie zur acht und zwanzigsten gemacht. Man findet darin eine **Nachweisung des Capitals, so man geben muß, um nach dem Verlauf einer gegebenen Zahl von Jahren, die nicht über 100 steigt, 100 Livres zu empfangen.** Es wird dabey vorausgesetzt, daß das gegebene Capital mit Zinseszins a 5 pr. C. zurückgegeben werden solle. Der Anfang der Tabelle ist folgender.

Jahre.

Jahre.	Livres.	Sous.	Den.
1	95	4	9
2	90	14	1
3	86	7	8
4	82	5	5
5	78	7	1

Die Art der Verfertigung von dergleichen Tabellen ergiebt sich aus dem bisher von dem zweyten Hauptfalle der Zinseszinsrechnung gesagten, verbunden mit dem, was oben von der Verfertigung ähnlicher Tabellen für den ersten Hauptfall berührt worden ist. **Was den davon zu machenden Gebrauch** anbetrifft, so nimmt man daraus den Zähler des nöthigen Anzeigers, um aus dem gegebenen Capitale die anzulegende Summe zu finden, nach der Zahl der vestgesetzten Jahre, und der zugehörige Nenner ist allemal 100 Liv. Es gilt übrigens von dieser Tabelle, und allen Tabellen gleicher Art, das auch, was von den ähnlichen Tabellen für den ersten Hauptfall der Zinseszinsrechnung gesagt worden ist.

§. 110.

Die zweyte Art der jetzt zu betrachtenden Tabellen, welche auf eine ähnliche Art, als die berührte Deparcieusische verfertiget und gebraucht wird, enthält in

ganzen

ganzen Zahlen und Decimaltheilen die Summe, welche man jetzt zahlen muß, um nach dem Verlauf einer gegebenen Zahl von Jahren, die nicht über 100 steigt, 100, z. B. 100 Rthlr zu empfangen. Man findet dergleichen in Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, S. 271 bis 273, für 5, 4 und 3 pr. C. Diese Art der Tabellen hat vor der vorhergehenden viel Vorzüge, und werden noch bequemer zum Gebrauch, wenn man sie, wie leicht geschehen kann, anstatt für 100, für 1 einrichtet.

§. 111.

Die dritte Art der Tabellen gehört zu der Auflösung der hieher gehörenden Aufgaben vermittelst der Logarithmen. **Man erhält dergleichen**

entweder dadurch, daß man den logarithm. $\frac{20}{21} =$ 1,30102999566398 weniger 1,32221929473392 $= -$ 1,97881070093006, wobey sich das Zeichen (—) allein auf die Kennzifer bezieht, nach und nach mit den natürlichen Zahlen bis 100 multipliciret, wo dann stets die Kennzifer allein als negativ zu betrachten ist;

oder dadurch, daß man ein gleiches mit dem log. — 0,02118929906993 thut, und dann den ganzen Logarithmen als negativ betrachtet und behandelt;

oder

oder endlich, wenn man bereits die ähnliche Tabelle für den ersten Hauptfall verfertiget hat, dadurch, daß man entweder jeden der darin enthaltenen Logarithmen von 1 abzieht, und bey den Resten die Kennzifer nur negativ seyn läßt; oder allen und jeden Logarithmen das Zeichen (—) vorsetzt, und sie ganz als negativ betrachtet. Der Gebrauch dieser Tabellen aber bedarf übrigens keiner weiteren Erläuterung.

§ 112.

Wenn nun (s. §. 100) die Zahl der Termine zwar eine ganze Zahl ist, das pr. C. aber nicht für einen einzeln Termin, sondern für einen Zeitraum von mehrern Terminen gegeben wird; so kann man, nach dem §. 96 gesagten, diesen Fall auf den betrachteten zurückführen, und es ist also auch hievon nicht nöthig, weitläuftig und besonders zu reden. Wird z. B. gefragt: Wie viel Geld muß man a 5 pr. C. auf Zinseszins austhun, um dadurch nach 4 Jahren, und zwar bey halbjährigen Zinsterminen, $1218\frac{2}{7}$ Rthl zu erhalten; so läßt sich diese Frage in folgende verwandeln: Wie viel Geld muß man a $2\frac{1}{2}$ pr. C. auf Zinseszins austhun, um dadurch nach 8 Terminen $1218\frac{2}{7}$ Rthl zu erhalten? und nun ist diese Frage von den vorhergehenden nicht weiter unterschieden.

§. 113.

Ist endlich die Zahl der Zinstermine eine gebrochene Zahl; so kehrt man das Product der Anzeiger, nach welchen man aus der anzulegenden Summe das gegebene Capital finden würde, um, und verfährt übrigens nach diesem umgekehrten Anzeiger mit dem gegebenen Capitale auf eine der §. 98 erklärten Arten. Es werde z. B. gefragt: Wie viel Geld muß man anlegen, um durch den Zinseszins a 5 pr. C. bey jährigen Terminen in $3\frac{3}{4}$ Jahren 12010 Rthlr $8\frac{5}{8}$ gr zu erhalten? so giebt der §. 98 da gewesene Anzeiger $\frac{21^3}{20^3} \times \frac{83}{80}$ umgekehrt $\frac{20^3}{21^3} \times \frac{80}{83}$, und dies ist der Anzeiger der Veränderung der 12010 Rthlr $8\frac{5}{8}$ gr, um daraus das gesuchte anzulegende Capital 10000 Rthlr zu finden.

§. 114.

Endlich (s. §. 58) folgt die dritte Hauptfrage der Zinseszinsrechnung: Wie groß muß das pr. C. seyn, bey welchem ein gegebenes Capital in einer bestimmten Zeit, eine ebenfalls bestimmte Grösse erhalten kann? z. B. Zu wie viel pr. C. muß man 1000 Rthlr austhun, um mit dem Zinseszinse nach 7 Jahren 1500 Rthlr wieder zu bekommen? Diese Frage kommt bey weitem so häufig nicht vor, als die beyden ersten Hauptfragen der Zinses-

Zinseszinsrechnung, und es ist daher auch keine so weitläuftige Betrachtung derselben nöthig.

§. 115.

Ohne Hülfe der Logarithmen wären die hieher gehörenden Aufgaben zwar auf keine Art und Weise unauflösbar, allein der Weg, den man betreten müßte, wäre doch ausserordentlich lang und mühsam, und ohne Tabellen, welche die Anzeiger der Veränderung des Capitals, um aus demselben den Zins zu finden, in einer beträchtlichen Anzahl und in Decimalzahlen enthielten, würde man seinen Endzweck vollends nur nach einer sehr langwierigen Arbeit erhalten. Mit Uebergehung aller andern möglichen Arten will ich also nur von der Beantwortung der angeführten Frage vermittelst der Logarithmen reden.

§. 116.

Wenn man das auf Zinseszins ausgethane Capital mit dem Anzeiger der damit vorzunehmenden nöthigen Veränderung in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Termine gleich ist, multiplicirt, so erhält man dadurch das Capital, zu welchem das angelegte durch den Zinseszins in den angenommenen Terminen wächset. Dividirt man also das durch den Zinseszins vermehrte Capital mit der Summe, woraus es entstanden ist, so erhält man zum Quotienten den gedachten Anzeiger in derjenigen Dignität, deren Exponent der Zahl der Termine

gleich

gleich ist. Gesetzt also, daß man von dem Logarithmen des durch den Zinseszins vermehrten Capitals den Logarithmen des Capitals, woraus jenes erwachsen ist, abzieht, und diese Differenz mit der Zahl der Termine dividirt; so erhält man den Logarithmen des einfachen Anzeigers. Um dies zuvörderst an einem Beyspiele zu erläutern, so diene dazu die §. 114 wieder berührte Frage, doch so, daß dabey die Zinstermine jährig gedacht werden. Es ist also

L. 1500 = 3,1760913
L. 1000 = 3,0000000, und ihre Differenz

oder L. $\frac{1500}{1000}$ = 0,1760913. Diese nun dividirt

durch 7, so kommt 0,0251559.

Eigentlich ist nun zwar dieser Logarithme der Logarithme des ganzen einfachen Anzeigers, oder einer ihm gleichen Zahl. Allein da man ihn aus dem Logarithmen des Zählers und dem Logarithmen des Nenners, wenn der Anzeiger bekannt wäre, finden würde, wenn man den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abzöge; und es jetzt um einen Anzeiger zu thun ist, der zum Nenner 100 hat: so darf man nur die zu dem gefundenen Logarithmen und der Kennzifer 2 gehörende Zahl aufsuchen, und von derselben 100 abziehen. Der Rest zeigt das pr. C., welches man sucht, an. Der Logarithme 0,0251559 z. B. gehört bey der Kennziffer 2 zu der Zahl, 105,963, aus welcher man nach Abzug der 100 für das gesuchte pr. C. 5,963 erhält.

§. 117.

Alle bisher betrachtete Fälle sind einfache Fälle der Zinseszinsrechnung gewesen. Ausser ihnen giebt es **verschiedene zusammengesetzte Fragen**, deren Beantwortungsart ebenfalls nicht übergangen werden darf. Ueberhaupt unterscheiden sich die zusammengesetzte Fragen der Zinseszinsrechnung von den einfachen eben so, als die zusammengesetzte Fälle der gemeinen Zinsrechnung §. 7 von den einfachen Aufgaben eben dieser Rechnung sich unterscheiden; und es ist also eine Frage der Zinseszinsrechnung zusammengesetzt, wenn sie die Summe der Zinseszinse mehrere Capitalien zu suchen befiehlt. Diejenigen von diesen Fragen, welche zwar verschiedene Capitalien enthalten, aber einerley Zeit und einerley pr. C. vestsetzen, lassen sich auch hier sehr leicht auf eine einfache Frage zurückführen, und erfordern daher keine besondere Untersuchung. Wer sieht z. B. nicht, daß die Frage: Wie viel Zinseszins erhält man von 1000 Rthlr, 350 Rthlr und 1475 Rthlr, wenn alle drey Capitalien auf 5 pr. C. und 6 Jahr ausstehen? mit dieser gleich sey: Wie viel Zinseszins erhält man von 2825 Rthlr a 5 pr. C. in 6 Jahren. Es ist daher hier nur von solchen Fällen die Rede, wo der Zinseszins mehrerer Capitalien, die auf verschiedene Zeiten und auf verschiedene pr. C. ausgethan sind, zu wissen verlangt wird.

§. 118.

Gesetzt, daß gefragt würde: Wie viel Zinseszins erhält man von 1000 Rth a 5 pr. C. und bey jährigen Terminen in 4 Jahren, von 350 Rth a $3\frac{1}{4}$ pr. C. und bey halbjährigen Terminen in 5 Jahren, und von 1475 Rth a $4\frac{1}{2}$ pr. C. und bey jährigen Terminen in 3 Jahren? so fällt bey einer genauern Betrachtung dieser zusammengesetzten Frage bald in die Augen, daß man nicht anders als durch theilweise Beantwortung der darin enthaltenen einfachen Fragen, und Addition der auf diese Art gefundenen Zinseszinse seinen Endzweck erreichen könne. Eben das gilt von allen andern Fragen, die auf eine ähnliche Art zusammengesetzt sind.

§. 119.

Käme ein Fall vor, wie folgender: Es thut Jemand 1000 Rth a 5 pr. C. pr. A. 5 Jahr auf Zinseszins aus, legt aber dazu nach dem 1ten Jahre, 57 Rth 12 Gr, nach dem 2ten, 92 Rth 3 Gr, und nach dem 3ten, 47 Rth 18 Gr, und zwar so, daß dieses zugelegte Geld auf gleiche Art als die 1000 Rth verzinset werden sollen; und man sollte nun bestimmen, wie groß sein Capital nach 5 Jahren geworden wäre? käme, sage ich, ein solcher Fall vor, so würde man am leichtesten auf folgendem natürlichen Wege das gesuchte finden.

Die anfänglich angelegten

1000 Rthlr geben
nach dem 1ten Jahre 50 Rthlr Zins, und ausserdem
werden dazu 57 Rthlr 12 gr gelegt, so daß

also nach dem 1ten J. 1107 Rthlr 12 gr da sind. Diese geben
nach dem 2ten Jahre 55 Rthlr 9 gr Zins, und ausserdem
werden dazu 92 Rthlr 3 gr gelegt, so daß

nun 1255 Rthlr da sind. Diese geben
nach dem 3ten Jahre 62 Rthlr 18 gr Zins, und ausserdem
werden dazu 47 Rthlr 18 gr gelegt, so daß

nun 1365 Rthlr 12 gr da sind. Diese geben
nach dem 4ten Jahre 68 Rthlr 6 gr $7\frac{1}{5}$ pf, und es sind also

nun 1433 Rthlr 18 gr $7\frac{1}{5}$ pf da. Diese geben
nach dem 5ten Jahre 71 Rthlr 16 gr $6\frac{9}{25}$ pf, u. es sind also

nun 1505 Rthlr 11 gr $1\frac{14}{25}$ pf da.

Dieses Beyspiel kann hinreichen zu zeigen, wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten habe.

§. 120.

Eben so wird folgende Aufgabe aufgelöset. Es werden 10000 Rthlr auf Zinseszins a 5 pr. C. pr. A. auf

4 Jahr

4 Jahr ausgethan, und davon genommen, nach dem 1ten Jahre, 420 Rthlr., nach dem 2ten Jahre, 311 Rthlr. 12 Gr., und nach dem 3ten Jahre, 395 Rthlr. 15 Gr., und gefragt, wie viel nach 4 Jahren da seyn werde.

Die anfänglich angelegten

10000 Rthlr. geben
nach dem 1ten Jahre 500 Rthlr. Zins, und es sind
also nun 10500 Rthlr. da; es werden
aber davon 420 Rthlr. genommen, und
es bleiben also 10080 Rthlr. Diese geben
nach dem 2ten Jahre 504 Rthlr., und es sind
also nun 10584 Rthlr. da. Hievon
werden 311 Rthlr. 12 Gr. genommen, und
es bleiben 10272 Rthlr. 12 Gr. Diese geben
nach dem 3ten Jahre 513 Rthlr. 15 Gr. Zins, und es sind
also wieder 10786 Rthlr. 3 Gr. da. Hievon
werden 395 Rthlr. 15 Gr. genommen, und
es bleiben 10390 Rthlr. 12 Gr. Diese geben
nach dem 4ten Jahre 519 Rthlr. 12 Gr. 7 1/5 Pf., und
es sind also 10910 Rthlr. 0 Gr. 7 1/5 Pf. nach dem 4ten Jahre da.

§. 121.

Wenn aber das zu einem auf Zinseszins ausgethanen Capitale hinzugelegte oder davon weggenommene Geld stets eine und dieselbe Grösse behält, und überdem dabey kein Termin ausfällt; so läßt sich die Rechnung abkürzen. Beyspiele hievon sind: Es hat jemand 10000 Rthl. a 5 pr. C. auf Zins ausgethan, er legt zu diesem Capitale alle Jahr nicht nur den Zins, sondern noch ausserdem 100 Rthl., und fährt damit 6 Jahr fort; wie groß wird sein Capital nach 6 Jahren seyn? und: Es hat jemand 10000 Rthl. a 5 pr. C. auf Zins ausgethan, er nimmt aber alle Jahr 100 Rthl. von dem fälligen Zinse, schlägt das übrige zum Capitale, und fährt auf diese Art 6 Jahr fort; wie groß ist sein Capital am Ende dieser 6 Jahre? Um die Regeln der gedachten Abkürzung gehörig einzusehen, ist eine vorläufige Betrachtung dieser Fälle nöthig.

§. 122.

Wenn man zu einem auf Zinseszins a 5 pr. C. angelegten und 6 Jahr stehenden Capitale alle Jahr 100 Rthl. hinzuthut; so erhält man nach 6 Jahren

1. das

1. das Capital selbst multiplicirt mit — — $\frac{21^6}{20^6}$

2. die 1ten hinzugeth. 100 Rthl. multiplicirt mit $\frac{21^5}{20^5}$

3. — 2 — — 100 — — — $\frac{21^4}{20^4}$

4. — 3 — — 100 — — — $\frac{21^3}{20^3}$

5. — 4 — — 100 — — — $\frac{21^2}{20^2}$

6. — 5 — — 100 — — — $\frac{21}{20}$

7. — 6 — — 100 — — — 1

Wenn man hingegen von eben demselben Capitale alle Jahr 100 Rthl. wegnimmt; so hat man am Ende der 6 Jahre nicht das ausgeliehene Capital mit $\frac{21^6}{20^6}$ multiplicirt ganz, sondern es fehlen daran

1. die 1ten weggen. 100 Rthl. multipl. mit $\frac{21^5}{20^5}$

2. — 2 — — 100 — — — $\frac{21^4}{20^4}$

3. — 3 — — 100 — — — $\frac{21^3}{20^3}$

4. — 4 — — 100 — — — $\frac{21^2}{20^2}$

5. — 5 — — 100 — — — $\frac{21}{20}$

6. — 6 — — 100 — — — 1.

Hieraus ergiebt sich

a für den Fall, wo zu dem anfänglich ausgeliehenen Capitale jährlich noch eine und dieselbe Summe gelegt wird, daß das sämmtliche angelegte und durch den Zinseszins in einer gewissen Zeit vermehrte Capital bestehe

1. aus dem anfänglich ausgethanen Capitale multiplicirt mit dem Anzeiger in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist.

2. aus der jährlich hinzugefügten Summe multiplicirt nach und nach mit dem Anzeiger in allen den Dignitäten, welche auf die gedachte in absteigender natürlicher Ordnung bis auf die Dignität o folgen.

b für den Fall, wo von dem anfänglich ausgeliehenen Capitale jährlich eine und dieselbe Summe weggenommen wird, daß das am Ende der vestgesetzten Zeit vorhandene Capital gefunden werde, wenn man von der Summe a. 1. die Summe a. 2. abzieht.

§. 123.

Die Reihe, $\frac{21^5}{20^5}, \frac{21^4}{20^4}, \frac{21^3}{20^3}, \frac{21^2}{20^2}, \frac{21}{20}, 1,$

ist eine geometrische Reihe, und ihre Summe also $\frac{\frac{21^6}{20^6} - 1}{\frac{1}{20}}$, oder $20 \cdot \frac{21^6}{20^6} - 20$. Da es nun gleich viel

viel ist, ob man eine Grösse nach und nach mit allen Gliedern einer geometrischen Reihe multiplicirt und die erhaltenen Producte summirt, oder ob man dieselbe Grösse mit der Summe der geometrischen Reihe multiplicirt; so kann man das §. 122. a. 2. gesagte für den Fall, wenn das pr. C. 5 ist, auch auf folgende Art ausdrucken: aus der Differenz zwischen der jährlich hinzugelegten Summe zwanzigmal genommen und mit dem Anzeiger in der Dignität multiplicirt, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, und der zwanzigmal genommenen jährlichen Summe selbst.

§. 124.

Wenn also ein Capital auf Zinseszins a 5 pr. C. und jährige Termine ausgethan ist, und dazu alle Jahr eine und dieselbe Summe auf gleiche Bedingungen gelegt wird; so findet man das Capital, welches auf diese Art in einer bestimmten Zeit entsteht, wenn man das anfänglich angelegte Capital nebst der jährlich hinzugefügten Summe mit dem Anzeiger $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, multipliciret, und darauf das zwanzigfache der jährlich hinzugefügten Summe abzieht. Die Ausrechnung des §. 121 stehenden Falls geschieht daher nach

$$(10000\,\text{Rth} + 20 \times 100\,\text{Rth}) \times \frac{21^6}{20^6} - 20 \times 100\,\text{Rth},$$

oder 12000 Rthl $\times \frac{21^6}{20^6}$ — 2000 Rthl

Da nun L. $\frac{21^6}{20^6} = 0,1271358$

und L. 12000 $= 4,0791812$

so ist L. 12000 $\times \frac{21^6}{20^6} = 4,2063170$

u. also 12000 Rthl $\times \frac{21^6}{20^6}$ = zwischen 16081 u. 16082 Rthl

Hievon abgezogen 20 $\times$ 100 Rthl = 2000 Rthl

so kommt als das verlangte 14081 bis 14081 Rthl.

§. 125.

Wird hingegen von einem Capitale, das auf Zinseszins a 5 pr. C. und jährige Termine aussteht, alle Jahr eine und dieselbe Summe weggenommen; so findet man das Capital, welches unter diesen Bedingungen nach einer gewissen Anzahl von Jahren da ist, wenn man die Differenz zwischen dem anfänglich angelegten Capitale und der jährlich davon genommenen Summe zwanzigmal genommen mit dem Anzeiger $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, multipliciret, und zu dem kommenden Producte die jährlich weggenommene Summe zwanzigmal genommen addirt. Die Ausrechnung des aus §. 121 hieher gehörigen Falls geschieht daher nach

(10000

$$(10000 \text{ Rk} - 20 \times 100 \text{ Rk}) \times \frac{21^6}{20^6} + 20 \times 100 \text{ Rk},$$

$$\text{oder } 8000 \text{ Rk} \times \frac{21^6}{20^6} + 2000 \text{ Rk}.$$

$$\text{Da nun L. } \frac{21^6}{20^6} = 0{,}1271358$$

$$\text{und L. } 8000 = 3{,}9030900$$

$$\text{so ist L. } 8000 \times \frac{21^6}{20^6} = 4{,}0302258$$

$$\text{also } 8000 \text{ Rk} \times \frac{21^6}{20^6} = \text{zwischen } 10720 \text{ und } 10721 \text{ Rk}$$

Hiezu addirt 20 × 100 =	2000
so kommt als das verlangte	12720 bis 12721 Rk.

§. 126.

Findet ein anderes pr. C. als 5 statt, und wird in den übrigen Umständen nichts geändert; so darf man, um die zu befolgenden Regeln zu finden, nur statt des Anzeigers $\frac{21}{20}$ den bey dem angenommenen pr. C. sich ergebenden Anzeiger, und statt 20, des Multiplicators der jährlich zugelegten oder weggenommenen Summe, die Differenz zwischen diesem letzten Anzeiger und 1, als einen Divisor betrachtet, setzen. Stünden z. B. 10000 Rk bey jährigen Terminen a 6 pr. C. auf Zinseszins, so wäre der Anzeiger $\frac{53}{50}$, und die Differenz zwischen diesem Anzeiger und 1 selbst $\frac{3}{50}$, als Divisor aber betrachtet, $\frac{50}{3}$.

Würde

Würde also die Zeit des Ausstehens des Capitals 6 Jahr gesetzt, und jährlich 100 Rthlr zugelegt; so müßte man nach folgendem rechnen

$$(10000 \text{ Rthlr} + \tfrac{50}{3} \times 100 \text{ Rthlr}) \times \frac{53^6}{50^6} - \tfrac{50}{3} \times 100 \text{ Rthlr},$$

$$\text{oder } 11666\tfrac{2}{3} \text{ Rthlr} \times \frac{53^6}{50^6} - 1666\tfrac{2}{3} \text{ Rthlr}.$$

Würden aber jährlich 100 Rthlr weggenommen, so müßte die Rechnung nach folgendem Satze angestellet werden.

$$(10000 \text{ Rthlr} - \tfrac{50}{3} \times 100 \text{ Rthlr}) \times \frac{21^6}{20^6} + \tfrac{50}{3} \times 100 \text{ Rthlr},$$

$$\text{oder } 8333\tfrac{1}{3} \text{ Rthlr} \times \frac{21^6}{20^6} + 1666\tfrac{2}{3} \text{ Rthlr}$$

Würden ausser dem pr. C. auch die übrigen Umstände verändert, anstatt der jährigen Termine z. B. halbjährige genommen, oder das jährlich zu dem anfänglich angelegten Capitale hinzugefügte oder davon hinweggenommene Geld zu einem andern pr. C. verzinset, als das Capital selbst; so müßten natürlicher Weise die §. 124 und 125 gegebene Regeln auch noch mehr abgeändert werden. Da indeß dergleichen Fälle selten vorkommen, so ist nicht nöthig, dabey zu verweilen.

§. 127.

Thomas Mortimer führt in seinen Grundsätzen der Handlungs- Staats- und Finanzwissenschaften (Leip-

(Leipzig 1781) S. 607. die Behauptung des Dr. Price's an, daß ein Pfennig Sterling, der zu Christi Geburt zu 5 pr. C. auf Zinseszins ausgeliehen worden, im Jahr 1770 schon auf eine grössere Summe angewachsen wäre, als 150000000 Erden von gediegenem Golde enthielten; wenn er aber auf einfachen Zins ausgeliehen wäre, so würde er (der Zins) nicht höher als auf 7 Schilling $4\frac{1}{2}$ Pfennig angewachsen seyn. So auffallend diese Behauptung beym ersten Anblicke seyn kann; so weicht sie doch von der Wahrheit bey weitem so nicht ab, als man es anfänglich glaubt. Bey 5 pr. C. und einfachem Zinse wird in 20 Jahren der Zins dem Capitale gleich, und in 1770 Jahren also $88\frac{1}{2}$ mal so groß als das Capital. Ein Pfennig Sterling trägt also bey 5 pr. C. und einfachem Zinse in 1770 Jahren genau 7 Schilling und $4\frac{1}{2}$ Pfennig Sterling Zins, den Schilling zu 12 Pfennigen gerechnet. Um zu finden, wie hoch ein Pfennig Sterling in 1770 Jahren durch Zinseszins a 5 pr. C. anwachse; nehme man

$$\begin{array}{rl} \text{L. } \frac{21}{20} = & 0{,}0211892990699 38, \text{ und} \\ \text{multiplicirt denselben mit} & 1770 \\ \hline \text{so erhält man} & 37{,}5050593537 90260. \end{array}$$

Dieser Logarithme gehört zu einer Zahl, die aus 38 Zifern besteht, und wovon die ersten Zifern 3199 sind. Ein Pfennig Sterling kann also in 1770 Jahren durch

5 pr.

5 pr. C. Zinseszins fast 32 Sextillionen Pfennig Sterling, oder nach unserm Gelde fast 230 Sextillionen Pfennige werden. Welch eine ungeheure Summe? Rechnet man nun ferner den Durchmesser der Erde 1720 Meilen und die Meile 23630 rheinländische Schuh, so erhält man 2662560000 Cubicmeilen für den körperlichen Inhalt einer Erde, und 150000000 Erden enthalten, also 399384000000000000 Cubicmeilen, oder, da eine jede Cubicmeile 13194446147000 Cubicfuß enthält 5269650679973448000000000000000 Cubicfuß; und diese Zahl noch mit 1728 multiplicirt, so kommen für den Inhalt von 150000000 Millionen Erden in Cubiczollen 9105956374994118144000000000000000 Cubiczoll. Diese Zahl nun gegen die obige 32 Sextillionen Pfennig Esterling gehalten, so ergiebt sich, daß, die Richtigkeit der Priceischen Behauptung vorausgesetzt, der Werth eines Cubiczoll Goldes etwa 3500 Pfennig Sterling sey. Es ist also die Zahl von 150000000 Erden allerdings zu groß, aber eine Null abgeschnitten, oder 15000000 Erden von gediegenem Golde angenommen, so ist die angeführte Priceische Behauptung durchaus wahr. Was für ein Unterschied zwischen dem einfachen Zinse und dem Zinseszinse in einer Zeit von 1770 Jahren?

§. 128.

Ohneracht der Unterschied zwischen dem einfachen Zinse und dem Zinseszinse bey einer geringen Anzahl von

Zinsterminen keine so auffallende Grösse hat, denn man erhält z. B. von 10000 Rthl. a 5 pr. C. in 4 Jahren 2000 Rthl. einfachen Zins, und $2155\frac{1}{16}$ Rthl. Zinseszins; so bleibt derselbe doch allemal wichtig, da bey 5 pr. C. und einfachem Zinse ein Capital in 20 Jahren noch einmal so groß, in 40 Jahren dreymal so groß, in 60 Jahren viermal so groß wird, u. s. w., beym Zinseszinse hingegen dasselbe in 15 Jahren zu mehr als einer noch einmal so grossen Summe, in 30 Jahren zu mehr als einer viermal so grossen Summe, in 45 Jahren zu mehr als einer achtmal so grossen Summe, in 60 Jahren zu mehr als einer sechzehnmal so grossen Summe u. s. w. anwächst. Man nennt daher den Zinseszins nicht ohne Grund einen wucherhaften Zins, und die Gesetze haben Recht, ihn für unerlaubt und unzulässig zu erklären. Denn gesetzt, daß er erlaubt wäre, und es liehe jemand auf ein Landgut 10000 Rthl. a 5 pr. C. auf Zinseszins, der Schuldner aber liesse vor der Abtragung des Zinses 30 Jahr verstreichen; so wäre die Schuld auf 43219 Rthl. 10 gr. angewachsen, und das Gut vielleicht für den Schuldner verlohren. Bedenkt man nun dabey noch, wie gern mancher Capitalist wenigstens einen Theil seines Geldes, so lange er sicher wäre, ausstehen lassen würde, und wie gern manche Schuldner ihre Schuld grösser werden lassen, wenn sie nur vor dem Mahnen gesichert sind, und die Bezahlung weiter hinausgesetzt sehen; so wird man vollends die Rechtmässigkeit des Gesetzes, welches den Zinseszins für unerlaubt erklärt, nicht leugnen.

§. 129.

Soll man aber auch wie Polack in seiner Mathesi forensi S. 99 der vierten Auflage (Leipzig 1770) die Erhebung des Zinseszinses für hypothetisch unmöglich halten, weil dabey der in jedem Termine fällige Zins keinen Augenblick ungenutzt bleiben dürfe, und man doch den Zins schwerlich in eben dem Augenblicke, da man ihn hübe, als ein neues Capital austhun könnte? Florencourt antwortet darauf S. 9 seiner bereits gedachten Abhandlungen: Bey kleinen Capitalien wird der Zinseszins nicht in Betracht gezogen; bey Banken, Landescassen rc. ist das Geld immer im Handel, folglich trifft hier Polacks Einwurf nicht. Da die Gesetze den Zinseszins verbieten, und ein Gläubiger dahero, wenn er den von einem ausgeliehenen Capitale erhaltenen Zins ebenfalls auf Zins austhun will, gezwungen ist, denselben erst zu heben und darauf als ein von dem vorhin genannten Capitale unabhängiges Capital auszuthun; so wird er freylich nie, und um so viel weniger, je grösser die Zeit angenommen wird, die Summe erhalten, welche die Zinseszinsrechnung angiebt. Denn den günstigsten Fall zuerst zu berühren, wenn er nemlich sein Geld in einer Bank oder Landescasse stehen hat, wo der Zins zur gesetzten Zeit gehoben, und

in

in der ersten auch am geschwindesten wieder angelegt werden kann; so wird doch gewöhnlicher Weise der Tag, an welchem das Geld eingelegt wird, so wie auch derjenige, an welchem das Capital zurückgenommen wird, nicht gerechnet; ferner werden, wie sich das von selbst versteht, die Brüche bey der kleinsten Scheidemünze, und auch wohl noch beträchtlichere Kleinigkeiten bisweilen, z. B. was unter 6 ₰ ist, wenn nach Rthl, gr und ₰ gerechnet wird, nicht bezahlt; und endlich kann man nicht jede auch noch so kleine Summe daselbst auf Zins anlegen. Steht aber ein Capital bey Privatpersonen aus, so erhält man einmal die Zinsen nicht allezeit auf den Tag, an welchem sie fällig sind, und selbst das Wechselrecht sieht 14 Tage nach; und dann, wo in diesem Falle so gleich die Gelegenheit, den erhaltenen Zins wieder unter zu bringen? Aus diesem allen aber fließt gleichwohl nichts, was die Zinseszinsrechnung verwerflich machen könnte. Diese Rechnung ist, wenn ich auf die Art unterscheiden darf, nicht so wohl eine öconomische und juristische, als vielmehr politische Rechnung. Der Politiker gebraucht sie, da Staaten in gewissen Fällen Zinseszins bezahlen, so als sie, arithmetisch betrachtet, abgehandelt werden muß; der Juriste hat ihrer so oft nicht nöthig, und der Oeconom kann sich ihrer in vielen Fällen bedienen, aber er muß sie anwenden, so wie überhaupt jede Theorie angewandt werden muß. Man muß bey der Anwendung einer jeden Theorie vor allen Dingen untersuchen, ob der wirkliche Gegenstand, auf welchen man die Anwendung machen will, genau diejenigen, und nicht mehr und nicht weniger Eigenschaften habe, als man dem in der Theorie gedachten beygelegt hat. Ist dies, so kann man sicher der Theorie in allen folgen; hat aber der wirkliche Gegenstand entweder mehr, oder weniger, oder theils mehr theils weniger Eigenschaften, als der in der Theorie gedachte, so ist natürlicher Weise die Theorie entweder zu weit oder zu enge, oder hat beyde Fehler zugleich, und muß zuvor, nicht gänzlich umgeschmolzen, sondern nur abgeändert, modificirt werden, ehe man sie durchaus anwendet. Ist das ein Einwurf wider die Zinseszinsrechnung, eine Theorie, daß sie die Eigenschaften aller, auch der besten, Theorien hat? Ein Capitalist kann nach ihren Regeln die Summe berechnen, zu welcher sein angelegtes Capital, wenn die vorhin erwähnten Umstände nicht statt hätten, anwachsen würde. Vergißt er hinterher nicht, dasjenige abzuziehen, was darin diese Umstände zernichten, so wird die Erfahrung mit seiner Rechnung übereinstimmen, und er auf die kürzeste Art das, was er von der Rechnung verlangte, gefunden haben.

§. 130.

Gottfr. Aug. Hoffmann sagt in seinen Demonstrationen von richtiger Berechnung des Interusurii, (in Polacks Mathesi forensi von S. 154 bis 168)

§. 14:

§. 14: Wenn man in der Berechnung, wie ein Capital durch den Zins wächst, den Zins von seiner Fallzeit an jedesmal als ein neues Capital betrachten und den Zins davon ebenfalls in Anschlag bringen kann; so muß man dabey auch zum Grunde setzen können, daß die Interessen alle halbe oder Vierteljahre, oder gar alle Monate eingefodert, und je und je wieder zum Capital gemacht werden können. — An und für sich kann hierwider nichts eingewandt werden, und es ist daher auch oben auf diese Fälle Rücksicht genommen worden. Finden aber halbjährige, oder vierteljährige, oder gar monatliche Zinstermine statt, so ist natürlicher Weise ihre Zahl grösser als bey jährigen Terminen, und das im vorhergehenden §. gesagte muß daher, wenn von wirklichen Fällen die Rede ist, hier noch in einem höhern Grade sich äussern. In der Rabattrechnung wird hievon noch mit mehrern gesprochen werden.

§. 131.

Unnütz wäre es indeß wohl, wenn man aus dem Grunde, weil doch der Zins stündlich ja augenblicklich wächst, auch für stündliche ja augenblickliche Zinstermine die Berechnung des Zinseszinses einrichten wollte. Die kleinsten Zeittheile, worauf man bey der Berechnung des Zinses überhaupt sieht, sind Tage; aber wo sind tägige Zinstermine üblich? Folgenden Fall:

100000 Rthlr stehen a 5 pr. C. aus; wie groß wird der Zins nach 8 Tagen seyn? würde ich daher nach der einfachen Zinsrechnung auflösen. Euler nimmt in seiner vollständigen Anleitung zur Algebra

$$\text{L. } \tfrac{21}{20} = 0{,}0211892, \text{ und multipl.}$$

$$\text{denselben mit } \tfrac{8}{365}, \text{ woraus sich}$$

$$\text{der L. } \left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} = 0{,}0004644 \text{ ergiebt.}$$

$$\text{Hiezu L. } 100000 = 5 \text{ genommen,}$$

so kommt 5,0004644, der Logarithme von 100107 Rthlr, so daß also der Zins nach 8 Tagen 107 Rthlr gesetzt wird. Soll diese Rechnung richtig seyn, so müssen tägige Zinstermine vorausgesetzt werden.

§. 132.

Unger erklärt, in seinen Beyträgen rc. §. 15 der Berechnung der Zinsen auf Zinsen, die Beantwortung der zweyten und dritten Hauptfrage der Zinseszinsrechnung ohne Hülfe der Algebra für unmöglich. Ob dies gegründet sey oder nicht? ist aus dem bisherigen leicht zu entscheiden.

Florencourt, in dessen schon öfters berührten Abhandlungen rc. S. 268 bis 270 sich noch 3 zur Zinseszinsrechnung gehörige Tabellen befinden, hat S. 6 und 7. die Logarithmen der Anzeiger so wohl der Capitalsveränderung, um daraus bey einem gegebenen pr. C. das durch

den

den einfachen Zins vermehrte Capital zu finden, als auch der Veränderung des durch den einfachen Zins vermehrten Capitals, um daraus das anfängliche Capital zu finden, für verschiedene pr. C. und in 15 Decimalstellen mitgetheilt. Diese Logarithmen gehören auch hieher, und sind folgende.

L. $\frac{21}{20}$ = 0,021189299069938 für 5 pr. C.

L. $\frac{209}{200}$ = 0,019116290447072 für $4\frac{1}{2}$ pr. C.

L. $\frac{26}{25}$ = 0,017033339298780 für 4 pr. C.

L. $\frac{207}{200}$ = 0,014940349792936 für $3\frac{1}{2}$ pr. C.

L. $\frac{103}{100}$ = 0,012837224705172 für 3 pr. C.

L. $\frac{41}{40}$ = 0,010723865391773 für $2\frac{1}{2}$ pr. C.

L. $\frac{51}{50}$ = 0,008600171761918 für 2 pr. C.

L. $\frac{20}{21}$ = 0,978810700930062 — 1 für 5 pr. C.

L. $\frac{200}{209}$ = 0,980883709552928 — 1 für $4\frac{1}{2}$ pr. C.

L. $\frac{25}{26}$ = 0,982966660701220 — 1 für 4 pr. C.

L. $\frac{200}{207}$ = 0,985059650207064 — 1 für $3\frac{1}{2}$ pr. C.

L. $\frac{100}{103}$ = 0,987162774294818 — 1 für 3 pr. C.

L. $\frac{40}{41}$ = 0,989276134608227 — 1 für $2\frac{1}{2}$ pr. C.

L. $\frac{50}{51}$ = 0,991399828238082 — 1 für 2 pr. C.

Die gedachten Tabellen enthalten die Capitalien, zu welchen 100000000 Rth durch den Zinseszins à 5, 4 und 3 pr. C. in 1, 2, 3 u. s. w. bis 50, Jahren anwachsen, in ganzen Zahlen und Decimaltheilen. Man kann diese Tabellen nach dem obigen leicht durch Einrichtung derselben für 1 noch bequemer zum Gebrauche machen. Auch findet derjenige, dem daran gelegen S. 6 noch einige von mir nicht genannte Schriftsteller, welche dergleichen Tabellen geliefert haben.

§. 133.

Bey der Berechnung wirklicher Fälle, so wohl der gemeinen Zinsrechnung als der Berechnung des Zinseszinses, erhält man nicht immer die Zeit des Ausstehens so gleich in Jahren, Monaten und Tagen, sondern es wird oft die Zeit der Anlegung des Capitals und die Zeit der Zurücknehmung desselben gegeben, und man muß daraus das nöthige suchen. Diese Arbeit ist sehr leicht, und bedarf keiner Anweisung, man kann sie auch allezeit im Kopfe verrichten. Der Tag der Anlegung und der Tag der Zurücknehmung des Capitals wird dabey, wie schon einmal erinnert, gemeiniglich nicht mit gerechnet. Erhält man Tage, und will dieselben nach Monaten bestimmen, so muß man nicht vergessen, daß der Monat 30 Tage gerechnet zu werden pflege. Martini giebt in seinem vermehrten richtigen Capitalisten und fertigen

Wechseler (Berlin 1776) S. 19. 20 gleichwohl eine Anweisung, wie man sich in diesem Falle zu verhalten habe, und setzet dabey das Aufschreiben aller gegebenen Dinge voraus. Dieser vermehrte richtige Capitalist und fertige Wechsler enthält Tabellen von der Art und dem Gebrauche, als die oben gedachten Hessischen Tabellen sind. Er ist bekannt, und man bezeichnet ihn oft mit dem Namen des **Knechts**.

Von dem Zinsfusse und Anatocismus bey den Alten, insbesondere bey den Griechen und Römern, findet man unter andern in Paucton's Mêtrologie ou traité des Mesures, poids et monnoies des anciens peuples et des modernes (Paris 1780) und zwar im 7ten Capitel, eine weitläuftige Abhandlung.

Rabattrechnung.

Einleitung.

§. 134.

Es ereignet sich öfters der Fall, daß Gelder, ohne bis dahin Zins zu tragen, erst nach einiger Zeit zu bezahlen sind, Gläubiger und Schuldner aber dahin übereinkommen, daß die Schuld vor der Fallzeit abgetragen werden solle. Es kauft z. B. jemand ein Haus für 15000 Rthlr unter der Bedingung, daß er zum Angelde sogleich 10000 Rthlr erlege, die übrigen 5000 Rthlr aber nach einem Jahre, oder auch in mehrern Terminen, ohne unterdessen von dem nicht bezahlten Zins zu geben, abtrage. Er hat diese Bedingung gemacht, weil es ihm zu der Zeit des Kaufs an Gelde fehlte. Unvermuthet fällt ihm dergleichen durch eine Erbschaft zu, und er wünscht nunmehr, sich mit einem Male mit dem Verkäufer aus einander zu setzen, und der Verkäufer ist es zufrieden. Wenn sich ein solcher Fall ereignet, so ist es billig und mit den Gesetzen übereinstimmend, daß der früher bezahlende Schuldner für den Nichtbrauch eines Capitals, das er zu seinem Vortheile hätte nutzen können, eine Entschädigung erhalte. Es pflegt daher auch der Gläubiger alsdann etwas

was von der Schuld zu erlassen, und der Schuldner also etwas weniger zu bezahlen. Anstatt 1000 Rthlr. z. B. giebt man, wenn man 1 Jahr früher bezahlt, 952 Rthlr. 9 gr. $1\frac{5}{7}$ pf., oder zieht davon 47 Rthlr. 14 gr. $10\frac{2}{7}$ pf. ab. Auch diesem Abzuge hat man einen besondern Namen gegeben, man nennt ihn **Rabatt** oder **Interusurium**; und aus seiner Berechnung ebenfalls ein besonderes Capitel der Rechenkunst gemacht, und dieselbe **Rabattrechnung** oder **Interusurienrechnung** genannt. Rabatt und Zins haben eine grosse Aehnlichkeit mit einander; denn beyde sind Geld, welches man für den Gebrauch eines Capitals bezahlt: nur giebt den Zins der Schuldner, und den Rabatt hingegen der Gläubiger. Man hat also Recht, die Rabattrechnung als einen Theil der Zinsrechnung im weitläuftigen Verstande anzusehen.

§. 135.

Eben diese Aehnlichkeit aber giebt auch an die Hand, daß sich eine **doppelte Art des Rabatts** gedenken lassen müsse, **der einfache Rabatt** nemlich, und **der doppelte**. So wie der Zinseszins grösser ist als der einfache, so übertrift auch der doppelte Rabatt den einfachen an Grösse. Diese Bestimmung reicht jetzt zu, in der Folge wird der doppelte Rabatt genauer beschrieben werden. Natürlicher Weise zerfällt also die Rabattrechnung überhaupt, so wie die eigentliche Zinsrechnung in zwey Theile. Den einen davon nennt man die gemeine Rabattrechnung, und den andern die doppelte Rabattrechnung, und beyde sollen nun in der eben befolgten Ordnung abgehandelt werden.

Gemeine Rabattrechnung.

§. 136.

Um zuvörderst von der Rechtmässigkeit des so eben erklärten Rabatts, ausser dem §. 133 berührten, ein Paar Worte zu sagen, so fällt in die Augen, daß der Gläubiger dadurch, daß er sein Geld früher empfängt, in den Stand gesetzt wird, durch Anlegung desselben, z. B. auf Zins, einen sonst nicht gehabten Nutzen zu ziehen; der Schuldner hingegen sich durch die frühere Bezahlung eines rechtmässigen Vortheils, den ihm der Gebrauch der bezahlten Summe verschafft haben könnte, begiebt. Sollte also der Schuldner, wenn er früher, als er nöthig hatte, bezahlt, gleichwohl die ganze Summe erlegen, so erhielte dadurch der Gläubiger einen Vortheil, zu dem er kein Recht hat, und der Schuldner litte einen Schaden, den er zu übernehmen nicht verbunden ist. Bezahlte z. B. jemand 1000 Rthlr ein Jahr früher, so hätte, wenn nichts rabattirt würde und 5 pr. C. Zins gerechnet werden könnte, der Gläubiger zu der Zeit, da er die 1000 Rthlr eigentlich hätte erhalten sollen, in der

Thal

That 50 Rf mehr, und eben so viel hätte **zu eben der Zeit** der Schuldner Schaden, denn er hätte ja diese 50 Rf ebenfalls gewinnen können. Der Schuldner muß also bey einer frühern Bezahlung Rabatt erhalten; der Gläubiger wäre ungerecht, wenn er ihm denselben nicht bewilligen wollte.

§. 137.

Allein, wie viel soll jedesmal von der zu bezahlenden Summe rabattirt oder abgezogen werden? Diese Frage muß hier vor allen andern, und selbst vor der Vestsetzung und Kenntlichmachung der zur gemeinen Rabattrechnung gehörigen Fälle, allgemein beantwortet werden, und diese Beantwortung erfordert eine ausführliche Untersuchung. Zuvörderst also muß dabey bemerkt werden, daß in den Fällen, wovon hier die Rede ist, kein Zwang statt findet, sondern daß, **so oft eine Schuld mit Rabatt früher bezahlt werden soll, freywillige Entschliessung und Einwilligung des Gläubigers und des Schuldners vorausgesetzt wird, so, daß ohne dieselbe die anfängliche Verbindung zwischen dem Gläubiger und Schuldner bleibet.** Es wäre überflüssig, wenn man die Wahrheit dieser Behauptung weitläuftig beweisen wollte; den Gesetzen nicht widerstreitende Verträge können nicht anders als mit Be-

willigung

willigung beyder interessirten Theile abgeändert oder zernichtet werden. Hieraus ergiebt sich aber so gleich die **allgemeine Antwort auf die Frage: Wie viel soll jedesmal bey einer frühern Bezahlung einer Schuld von derselben abgezogen werden? So viel, daß weder der Gläubiger zum Vortheil des Schuldners, noch der Schuldner zum Vortheil des Gläubigers vervortheilt wird.** Unter diesen Umständen allein können Gläubiger und Schuldner in eine frühere Bezahlung mit Rabatt willigen.

Gesetzt, daß sich der Fall ereignete, daß ein Gläubiger von jemand 2000 Rthl. nach zwey Jahren zu fordern hätte, der Schuldner aber banquerot würde, ein Concurs entstände, und nach $\frac{3}{4}$ Jahren der gedachte Gläubiger so wohl als die übrigen so viel als möglich bezahlt werden sollte; so hätte dieser Gläubiger seine 2000 Rthl. doch erst nach $\frac{5}{4}$ Jahren zu fordern, und sollte er also gleichwohl jetzt abgefunden werden, so müßte seine Schuld vor allen Dingen einen Rabatt leiden. In dergleichen Fällen bleibt es nun freylich nicht ganz der Willkühr des Gläubigers überlassen, ob er die frühere Bezahlung mit Rabatt annehmen wolle, oder nicht. Indessen streitet doch auch ein solcher Fall nicht wider die angenommene Voraussetzung, da selbst alsdann der Rabatt so bestimmt wird, als geschehen würde, wenn freywillige Entschliessung von beyden interessirten Theilen da wäre.

§. 138.

Worauf soll nun aber gesehen werden, um zu beurtheilen, ob Vervortheilung entweder des Gläubigers oder des Schuldners statt finde, oder nicht? Auf den Nutzen natürlicher Weise, den man von einem Capitale ziehen kann; aber nicht auf einen solchen Nutzen, der entweder blos in der Gewalt des Gläubigers, oder allein in der Gewalt des Schuldners ist, sondern auf einen für beyde gleich möglichen Nutzen. Auf den besondern Vortheil, den so wohl der Gläubiger als der Schuldner, jeder in seiner Lage, von einem Capitale durch die Anwendung und Gebrauch desselben erhalten kann, kann und muß ein jeder von ihnen bey der Entschliessung zur Annahme oder Verwerfung der frühern Bezahlung sehen; aber auf die Bestimmung des Rabatts hat blos der beyden mögliche Vortheil Einfluß, wenigstens sieht man darauf allein bey einer gerichtlichen Bestimmung desselben. Da nun allein die Erhebung landüblicher Zinse jederzeit dem Gläubiger so wohl als dem Schuldner möglich ist, oder doch als möglich betrachtet werden kann; so ergiebt sich aus dem bisherigen die Regel: **daß der Rabatt stets so beschaffen seyn müsse, daß so wohl das nach dem Rabatte zu zahlende Capital, von der Zeit der wirklichen Zahlung an bis zu der Zeit der anfänglich vestgesetzten, durch den landüblichen Zins die**

Grösse wieder erhalten könne, die sie vor der Rabattirung hatte; als auch daß der Rabatt, den der Bezahler erhält, durch gleichen Zins in eben der Zeit sich so zu vermehren im Stande sey, daß er den Interessen gleich komme, welche der Schuldner bis zur Zeit der zuerst vestgesetzten Zahlung von der ganzen Summe hätte erhalten können.

Der landübliche Zins sind 5 pr. C. Gesetzt also, daß jemand statt 1000 Rthlr., die er nach einem Jahre zu bezahlen schuldig ist, ohne inzwischen zum Zinse verpflichtet zu seyn, so gleich 952 Rthlr. 9 Gr. $1\frac{5}{7}$ Pf. bezahlt, und also 47 Rthlr. 14 Gr. $10\frac{2}{7}$ Pf. rabattirt, so ist dabey, nach dem landüblichen Zinse zu urtheilen, niemand vervortheilt. Der Gläubiger erhält nemlich, wenn er die empfangenen 952 Rthlr. 9 Gr. $1\frac{5}{7}$ Pf. a 5 pr. C. auf Zins austhut, nach einem Jahre 1000 Rthlr., und der Schuldner durch gleiche Anlegung für 47 Rthlr. 14 Gr. $10\frac{2}{7}$ Pf., 50 Rthlr., und gerade so viel hätte der letztere von den an sich behaltenen 1000 Rthlr. in einem Jahre ziehen können. Angenommen, daß der Schuldner seine Schuld früher zu bezahlen, und der Gläubiger das Geld zu brauchen im Stande sey, und ferner, daß jener damit höchstens 4 pr. C., dieser aber 8 pr. C. gewinnen könne; so ist einmal die frühere Bezahlung mit Rabatt a 5 pr. C. beyden vortheilhaft, und sie werden sich gern dazu entschliessen; allein der Gläubiger kann nicht verlangen, daß der Schuldner mit 4 pr. C. zufrieden seyn, und der Schuldner nicht, daß der Gläubiger ihm 8 pr. C. bewilligen solle. Auf diese Art fände keine Gleichheit statt,

statt, und was für Untersuchungen würden dabey bisweilen zur Bestimmung des Rabatts erfordert werden? wie viel Betrug könnte dabey vorgehen? — Könnte man von einem Capitale keinen Vortheil ziehen, wäre z. B. Zins zu nehmen unerlaubt, so könnte auch kein Rabatt statt finden.

§. 139.

Nun kann noch gefragt werden: **ob man bey der Berechnung des Nutzens, der von einem Capitale gezogen werden kann, einfachen Zins oder Zinseszins annehmen müsse?** Nachdem die Umstände sind, ist die Antwort darauf. Wo nur einfacher Zins erlaubt ist, da muß man auch nach einfachem Zinse den Rabatt vestsetzen; wo aber der Zinseszins statt findet, da muß auch auf Zinseszins beym Rabatte gesehen werden. Die doppelte oder zusammengesetzte Rabattrechnung, worin das letzte geschieht, ist daher eben so wichtig, als die gemeine Rabattrechnung, und diejenigen irren, die ausschliessungsweise entweder die eine oder die andere angewandt wissen wollen. Am Ende der doppelten Rabattrechnung wird und muß hierüber mehr gesagt werden.

§. 140.

Nunmehr können die Fälle vestgesetzt werden, **welche zur gemeinen Rabattrechnung gehören.** Da hier von der juristischen und politischen Rabattrechnung die Rede ist, so sind davon alle kaufmännische und wechs=

wechslerische Berechnungen des Rabatts ausgeschlossen: Von diesen Berechnungen kann also hier auch nur gelegentlich geredet werden, so aber, nicht ohne Nutzen. Es bleiben also als eigentlich hieher gehörig, um zuerst von den einfachen Fällen zu reden, folgende übrig.

a Die Bestimmung entweder des jetzigen Werths eines Capitals, das nach einer bestimmten Zeit bezahlt werden soll, und inzwischen keinen Zins trägt, oder des Rabatts, den dieses Capital bey baarer Zahlung desselben erfahren muß; wenn ausser der Zeit der frühern Zahlung auch das pr. C. bekannt ist.

b Die Bestimmung entweder des anticipirten Capitals vor dem Rabatte, oder des statt gefundenen Rabatts, aus dem wirklich bezahlten Capitale, der Zeit der frühern Zahlung und dem pr. C. des Rabatts.

c Die Bestimmung des pr. C. des Rabatts aus dem nach einiger Zeit zu bezahlenden Capitale, der dafür früher entrichteten Summe, und der Zeit der frühern Zahlung.

Zu dem Falle a gehört z. B. die Frage: Wie viel muß man anstatt 3000 Rthl., die über 3 Jahr fällig sind, wenn man sie jetzt abtragen will, bey 5 pr. C. pr. A. Rabatt, entrichten? oder: Wie viel Rabatt genießt

man,

man, wenn man 3000 Rthlr, die über 3 Jahr fällig sind, jetzt bezahlt, und 5 pr. C. pr. A. Rabatt rechnet? Zu dem Falle b ferner die Frage: Wie groß ist das Capital, wofür man bey 5 pr. C. pr. A. Rabatt und zweyjähriger früherer Zahlung 2500 Rthlr entrichten muß? oder: Wie viel Rabatt wird gegeben, wenn man bey 5 pr. C. pr. A. und zweyjähriger früherer Zahlung 2500 Rthlr entrichtet? Eine Frage des dritten Falls endlich ist folgende: Zu wie viel pr. C. pr. A. ist der Rabatt gerechnet worden, indem bey fünfjähriger früherer Zahlung anstatt 600 Rthlr nur 480 Rthlr gegeben worden sind? Ueberall aber ist bey diesen Fragen vorausgesetzt worden, daß die nach einiger Zeit erst fällige Capitalien bis dahin keinen Zins tragen.

§. 141.

Nicht allezeit tragen die Gelder, welche nach einiger Zeit erst fällig sind, gar keine Interessen, sondern es ist der Schuldner oft verbunden, dafür Zins zu geben. Das ungeachtet kann der Fall entstehen, daß der Gläubiger und Schuldner wegen einer frühern Bezahlung der Schuld mit Rabatt zu einem andern pr. C., als der Schuldner den Zins entrichten muß, übereinkommen. Auch diesen Fall muß daher die Rabattrechnung betrachten, und er gehört zu den einfachen Fällen derselben, ob er gleich verwickelter als der vorhin gedachte ist. Wenn man will, so kann man diesem Falle ebenfalls die bey a, b und c im vorhergehenden § angeführten Fälle unterordnen.

Ein Exempel anzuführen, so kann zwischen einem Gläubiger und Schuldner leicht der Vertrag statt finden, daß dieser jenem eine Summe z. B. 1500 Rthl. nach zwey Jahren zu zahlen, und unterdessen dieselbe mit 2 pr. C. zu verzinsen sich anheischig gemacht hat. Dabey kann aber auch ferner eine frühere Bezahlung mit 5 pr. C. pr. A. Rabatt dem Schuldner und Gläubiger unter gewissen Ereignissen vortheilhaft werden, und es wäre also eine Unvollkommenheit der Rabattrechnung, wenn sie nicht auch für diesen Fall entweder das früher zu bezahlende Capital, oder den zu gebenden Rabatt, u. s. w. bestimmen lehrte. Von den zusammengesetzten Fällen der gemeinen Rabattrechnung wird weiter unten geredet.

§. 142.

Um nun mit ein Paar Worten **von der Rabattrechnung der Kaufleute** zu reden, so ist es unter denselben üblich, daß gewisse Waaren mit Rabatt verkauft werden. Was für welche dahin gehören, findet man z. B. für Hamburg und Amsterdam, in **Ludovicis vollständigem Kaufmannslexico** (Leipzig 1768, 2te Aufl.) unter den Artikeln, Hamburg und Amsterdam, desgleichen in **Ju. El. Krusens allgemeinen und besonders hamburgischen Contoristen** (Hamburg 1781 4te Aufl.) im 1ten Theile, ebenfalls unter den Artikeln, Hamburg und Amsterdam. Hier ist nicht nöthig davon ein Verzeichniß anzuführen. Man sagt von diesen Waaren auch,

daß

daß sie auf Zeit verkauft werden; indeß würde man sich irren, wenn man glauben wollte, daß ein jeder die Bezahlung für dergleichen Waaren verschieben könnte. Dies findet auf keine Art und Weise statt, sondern es müßen auch diese Waaren, wofern nicht anderweitige Verbindungen da sind, baar bezahlet werden, und der Käufer rabattirt oder discontirt nur von der schuldigen Summe so viel, als ein für allemal vestgesetzt worden. In Hamburg und Amsterdam werden 8 pr. C. pr. A. gerechnet, und die Waaren an jenem Orte auf 7 oder 13 oder 16 Monate, und also mit $4\frac{2}{3}$ oder $8\frac{2}{3}$ oder $10\frac{2}{3}$ pr. C. Rabatt, an diesem aber auf 15, 18, 21, 30 und 33 Monate, oder mit 10, 12, 14, 20 und 22 pr. C. Rabatt verkauft. An andern Orten finden auch andere Bestimmungen statt.

§. 143.

Kauft also ein Kaufmann Waaren, die auf Zeit oder mit Rabatt verkauft werden, so muß er bey der Berechnung des Betrags erst den vestgesetzten Preis zum Grunde legen, und darauf aus der gefundenen Summe die baare Bezahlung oder den Rabatt suchen; dies letztere aber geschieht nicht immer auf einerley Art. Bisweilen wird der Rabatt z. B. in Hamburg und Amsterdam, auf 100 gerechnet, d. h. man zieht von jedem 100 und dem pr. C. zusammengenommen das pr. C. ab, von $104\frac{2}{3}$ z. B. $4\frac{2}{3}$, bey den Waaren, die auf 7 Monat verkauft

 werden;

werden; bisweilen aber rechnet man ihn in 100, wie in Leipzig und Italien, d. h. man zieht von jedem 100 das vestgesetzte pr. C. ab, und rechnet z. B. 95 statt 100, wenn das pr. C. 5 ist. Gesetzt also, daß ein Kaufmann in Hamburg von den Waaren, die auf 13 Monat verkauft werden, für 14507 ℳ kaufte, und die baare Bezahlung wissen wollte, so wäre die nöthige Rechnung

$$14507 \text{ ℳ} \times \frac{100}{108\frac{2}{3}}$$

```
326) 4351100 | 13350 ℳ.
     11943   |
      038    |
      116    |
       21
       1
```

Wollte er hingegen den Rabatt wissen, so müßte er rechnen

$$14507 \times \frac{8\frac{2}{3}}{108\frac{2}{3}} = \frac{26}{326} = \frac{13}{163}$$

```
 14507
 43521
 188591 | 1157 ℳ.
  2524  |
  1912  |
   44
   1
```

Kaufte hingegen jemand in Leipzig von den Waaren, die 8 pr. C. Rabatt geniessen für 1564 Rthl., so gäbe folgende Rechnung die baare Zahlung

1564

1564 Rthl. × $\frac{92}{100}$

3128
14076

Rthl. 1438|88

352

Gr. 21|12

24

Pf. 1|44

100

folgende Rechnung hingegen den Rabatt

1564 Rthl. × $\frac{8}{100}$

Rthl. 125|12

Gr. 2|88

Pf. 10|56

100

Oft ist der Rabatt, den Kaufleute einander geben, nicht zum voraus bestimmt, sondern wird jedesmal verabredet; bisweilen wird ein doppelter Rabatt gegeben, wie in Amsterdam bey prompter Zahlung noch 1 pr. C., welches überdem in 100 gerechnet zu werden pflegt. Dies letztere rühret daher, weil der Käufer nach Abzug des gewöhnlichen Rabatts doch erst nach 6 Wochen zu bezahlen braucht. Auch der Ra-

batt,

batt, den die Buchhändler einander geben, gehört hieher; es kömmt aber bey diesen die Bestimmung des Rabatts vorzüglich dem Verkäufer zu, und dieser Rabatt ist daher sehr verschieden.

§. 144.

Was den Rabatt betrifft, der beym Verkaufe der Wechsel gegeben wird, so verhält es sich damit auf folgende Art. Wenn jemand einen Wechsel nicht auslaufen lassen will oder kann, und daher denselben vor der Zahlzeit einem andern gegen baare Zahlung überläßt, so genießt der Käufer $\frac{1}{2}$ pr. C. für jeden Monat, oder auch wohl etwas mehr Rabatt, und es kommt dabey auf die Verabredung des Verkäufers und Käufers an, ob der Rabatt in oder auf 100 gerechnet werden soll.

Daß der Rabatt, den Kaufleute einander geben, 8 pr. C. und drüber ist, kann dem nicht auffallen, der bedenkt, daß dieselben ihr Geld höher auszubringen im Stande sind, als diejenigen, die es blos auf Zins austhun können; und aus eben dem Grunde läßt sich einsehen, wie Kaufleute den Rabatt in 100 ohne ihren Schaden zu geben im Stande sind. Da ferner so wohl im Handel als beym Verkaufe der Wechsel die Zeit der frühern Zahlung mehrentheils nur einige Monate ist, so kann auch bey dem Rabatte in 100 der Rabatt für eine doppelte Zeit zweymal so groß seyn, als der für die einfache Zeit, u. s. w., ohne daß daraus beträchtlicher Nachtheil entstehen kann. Zur Erleichterung der Ausrechnung des Rabatts beym Waarenhandel sind nach Ludovici in dem angeführten Kaufmannslexico, Art. Rabatt, in Hamburg und

Amster-

Amsterdam in einiger Kaufleute Comtoiren Tabellen im Gebrauche, in welchen der Rabatt von 1 bis 100000 Mark oder Gulden nach gewissen Monaten und pr. C. ausgerechnet ist. Ganz richtig urtheilt aber Ludovici am angeführten Orte von dergleichen Tabellen, daß ihr Gebrauch keinen Vortheil gewähre. Sie gleichen nemlich in ihrer Einrichtung und Gebrauch den in der Zinsrechnung berührten Hessischen und Martinischen Zinstabellen.

§. 145.

Um nun zu den §. 140 angeführten und eigentlich hierher gehörigen Fällen zu kommen; so fällt bey einer aufmerksamen Betrachtung derselben bald in die Augen, daß sie sich von den zur gemeinen Zinsrechnung gehörenden Fällen mehr den Worten nach als wirklich unterscheiden. Es ist nemlich

a gleich viel, ob man bey gegebenem pr. C. nach dem jetzigen Werthe eines Capitals frägt, das erst nach einer gewissen Zeit, ohne indessen Zins zu tragen, fällig ist, oder ob man ein Capital zu wissen verlangt, welches bey demselben pr. C. in gleicher Zeit durch den Zins zu dem zuerst gedachten Capitale anwachsen kann. Die Frage: Wie viel Capital wird erfordert, um dafür bey 5 pr. C. nach 3 Jahren 3000 Rthlr zu erhalten? ist daher mit der §. 140 zu a gehörigen ersten Frage einerley. Ferner ist es gleich, ob man frägt: Wie viel Rabatt genießt man z. B. bey 5 pr. C. und früherer Bezahlung von einer bestimmten Zeit von einem gegebenen Capitale? oder ob man wissen will, wie viel Zins, wenn man ebenfalls 5 pr. C. rechnet, in einer Summe, die man nach gleicher Zeit für ein ungenanntes angelegtes Capital erhalten hat, enthalten sey? Wie viel Zins hat man erhalten, wenn man für ein auf Zins a 5 pr. C. angelegtes Capital nach 3 Jahren 3000 Rthlr erhält? Diese Frage ist mit der §. 140 zu a gehörigen zweyten Frage vollkommen einerley.

b Ist es einerley, ob man aus dem wirklich bezahlten Capitale, der Zeit der frühern Zahlung und dem pr. C. des Rabatts die Grösse des anticipirten Capitals vor dem Rabatte sucht, oder ob man bestimmt, wie hoch jenes wirklich bezahlte Capital in gleicher Zeit und bey gleichem pr. C. durch den Zins wächst; desgleichen, ob man aus den genannten Dingen den gesammten Rabatt sucht, oder ob man den gesammten Zins des wirklich bezahlten Capitals in der angenommenen Zeit und pr. C. bestimmt. Wie hoch wachsen 2500 Rthlr in 2 Jahren durch den Zins a 5 pr. C.? und: Wie viel Zins geben 2500 Rthlr a 5 pr. C. in 2 Jahren? sind daher mit dem §. 140 zu b gehörigen gleichbedeutende Fragen.

c Ist

c Ist es gar nicht verschieden, ob man frägt: Zu wie viel pr. C. ist ein gegebenes Capital, das nach einer gewissen Zeit erst fällig war, rabattirt worden, wenn dafür baar so oder so viel entrichtet ist? oder ob man zu wissen verlangt, zu wie viel pr. C. dies baar gezahlte Capital angelegt werden müsse, um in der gedachten Zeit durch den Zins jenem Capitale gleich werden zu können? Die Frage: Zu wie viel pr. C. muß man 480 Rthl. austhun, um dafür nach 5 Jahren 600 Rthl. zu erhalten, ist z. B. mit der §. 140 zu c gehörigen Frage vollkommen einerley.

§. 146.

Von den bey a gedachten Fällen ist nun vorzüglich zu reden, theils weil dieselben unter allen am häufigsten vorkommen, theils auch, weil sie als in die gemeine Rabattrechnung besonders gehörig in der gemeinen Zinsrechnung eben nicht berührt worden sind. Zur Beantwortung der *ihnen untergeordneten* Fragen sind folgende Sätze nothwendig.

a So wie Geld, das man jetzt auf Zins austhut, nach einiger Zeit so viel werth ist, als die Summe eben dieses Geldes und des für diese Zeit fälligen Zinses; so ist Geld, welches ohne Zins erst nach einiger Zeit fällig ist, jetzt seinem Werthe nach von ihm selbst nur ein solcher Theil, als 100 von der Summe

 me

me von 100 und den für die gedachte Zeit gehörenden pr. C. ist. Den Zins zu 5 pr. C. gerechnet, so sind 1000 Rk, die baar gezahlt werden, so viel werth, als 1050 Rk, die nach einem Jahre, oder 1100 Rk, die nach zwey Jahren und ohne Zins gezahlet werden sollen; und 1000 Rk, die ohne Zins über ein Jahr fällig sind, haben jetzt den Werth von 1000 Rk $\times \frac{20}{21}$, so wie 1000 Rk, die über zwey Jahr ohne Zins fällig sind, den Werth von 1000 Rk $\times \frac{10}{11}$.

b Der Zins ist von dem Capitale jederzeit der Theil, welcher das pr. C. von 100 ist; der Rabatt aber ist von dem Capitale ein solcher Theil, als das pr. C. von 100 und dem pr. C. zusammengenommen ist. Der Zins ist daher auch bey vielfacher Zeit das eben so vielfache des einfachen Zinses; der Rabatt hingegen nicht, wenn er gleich bey einer grössern Zeit grösser ist, als bey einer kleinern. Bey 5 pr. C. ist der Zins eines Jahrs $\frac{1}{20}$ des Capitals, der Zins zweyer Jahre $\frac{1}{10}$, der Zins dreyer Jahre $\frac{3}{20}$, u. s. w.; der Rabatt hingegen ist für ein Jahr $\frac{1}{21}$, für zwey Jahr $\frac{1}{11}$, für drey Jahr $\frac{3}{23}$, des Capitals u. s. w.

Wenn bey vorfallender früherer Auszahlung eines Capitals, das ohne Zins zu tragen erst nach einiger Zeit fällig ist, der Rabatt richtig berechnet werden soll, so muß der-

selbe

selbe auf 100, und nicht in 100, gerechnet werden, weil in dem letztern Falle der Gläubiger allezeit Schaden hätte, wie unten mit mehrern noch wird gezeiget werden.

§. 147.

Nunmehr ist die Auflösung der besondern hieher gehörenden Aufgaben sehr leicht, und arithmetisch betrachtet weiter keinen Zweifeln unterworfen. Es werde also gefragt:

1. Wie viel muß man anstatt 3456 Rthl. 12 gr, die ohne Zins nach einem Jahre fällig sind, wenn der Rabatt nach 5 pr. C. Zins bestimmt werden soll, so gleich bezahlen? Die Rechnung ist folgende.

3456 Rthl. 12 gr $\times \frac{20}{21} = \frac{20}{3 \times 7}$

69130 Rthl.

23043 Rthl. 8 gr

3291 Rthl. 21 gr $8\frac{4}{7}$ Pf.

2. Wie viel Rabatt geben 3456 Rthl. 12 gr, wenn man ein Jahr früher bezahlt, und nach 5 pr. C. Zins gerechnet wird? Die Rechnung ist

3456 Rthl. 12 gr $\times \frac{1}{21} = \frac{1}{3 \times 7}$

1152 Rthl. 4 gr

164 Rthl. 14 gr $3\frac{1}{7}$ Pf.

Aus

Aus dem gegebenen	3456 Rℓ 12 ℋ und
den gefundenen	3291 Rℓ 21 ℋ $8\frac{4}{7}$ ₰
erhält man auch durch Abz.	164 Rℓ 14 ℋ $3\frac{3}{7}$ ₰;
so wie auch aus	3456 Rℓ 12 ℋ
durch Abzug der	164 Rℓ 14 ℋ $3\frac{3}{7}$ ₰
sich ergeben	3291 Rℓ 21 ℋ $8\frac{4}{7}$ ₰.

Hat man daher aus dem gegebenen Capitale bereits entweder die baare Zahlung oder den Rabatt gefunden, so kann man durch die Subtraction des einen von dem gegebenen Capitale jedesmal das andere finden. Die Probe auf Exempel wie die berechneten macht man nach der gemeinen Zinsrechnung §. 10 f. Es ist nemlich

3291 Rℓ 21 ℋ $8\frac{4}{7}$ ₰ $\times \frac{21}{20} =$ 3456 Rℓ 12 ℋ, und
164 Rℓ 14 ℋ $3\frac{3}{7}$ ₰ $\times \frac{21}{20} =$ 172 Rℓ 19 ℋ $9\frac{3}{7}$ ₰;

und so viel als diese letztere Summe beträgt, tragen 3456 Rℓ 12 ℋ a 5 pr. C. in 1 Jahre Zins. Gemeine Rabattrechnung und gemeine Zinsrechnung dienen sich also wechselseitig zur Probe, und auch hieraus erhellt die im Anfange des 145 §. vorgebrachte Behauptung.

§ 148.

Wenn ferner die frühere Bezahlung nicht einjährig seyn soll, so seyen zur Zeigung des hier nöthigen Verfahrens

3. die §. 140 zu a gehörigen Fragen zur Beantwortung aufgegeben; wo die Ausrechnung des ersten Exempels ist

3000 Rthl. $\times \frac{20}{23}$

60000 24246 11 1	2608 Rthl.
384 156 3 1	16 gr.
192 38	$8\frac{9}{23}$ Pf.

die Ausrechnung des zweyten aber

3000 Rthl. $\times \frac{3}{23}$

9000 3137 231	391 Rthl.
168 17	7 gr.
84 15 1	$3\frac{15}{23}$ Pf.

4. Werde gefragt, wie viel anstatt 2000 Rthl. bey $2\frac{1}{4}$ jähriger Vorausbezahlung gegeben werden müsse, wenn der Rabatt nach 4 pr. C. bestimmt werden soll? Die Rechnung ist

2000 Rthlr × $\frac{100}{111}$

200000 |
199199 | 1801 Rthlr
8118 |

356

2136 |
1027 | 19 gr
13 |
2

54

324 | 2 $\frac{34}{37}$ Pf.
102 |

Wollte man den Rabatt suchen, so müßte man rechnen

2000 Rthlr × $\frac{11}{111}$

22000 |
11912 | 198 Rthlr
003 |
192
1

528 | 4 gr
184 |
168

1008 | 9 $\frac{3}{37}$ Pf.
119 |

§. 149.

Es kann nicht schädlich seyn, zum Schlusse der Betrachtung dieses Falls noch mit ein Paar Worten der

Tabel-

Tabellen zu gedenken, welcher derjenige, der sich häufig mit Berechnungen des Rabatts beschäftigen müßte, mit Vortheile sich bedienen könnte. Es sey also der Rabatt nach 5 pr. C. Zins zu bestimmen, oder, denn auch so druckt man sich hier, um eben dasselbe anzuzeigen, aus, es sey das pr. C. des Rabatts 5; so ist

bey einer frühern Zahlung von	der Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung der baaren Zahlung	zur Findung des Rabatts
$\frac{1}{4}$ Monat — —	$\frac{960}{961}$ — — —	$\frac{1}{961}$
$\frac{1}{2}$ — — —	$\frac{480}{481}$ — — —	$\frac{1}{481}$
$\frac{3}{4}$ — — —	$\frac{320}{321}$ — — —	$\frac{1}{321}$
1 — — —	$\frac{240}{241}$ — — —	$\frac{1}{241}$
$1\frac{1}{4}$ — — —	$\frac{192}{193}$ — — —	$\frac{1}{193}$
$1\frac{1}{2}$ — — —	$\frac{160}{161}$ — — —	$\frac{1}{161}$
$1\frac{3}{4}$ — — —	$\frac{960}{967}$ — — —	$\frac{7}{967}$
2 — — —	$\frac{120}{121}$ — — —	$\frac{1}{12}$
$2\frac{1}{4}$ — — —	$\frac{320}{323}$ — — —	$\frac{3}{323}$
$2\frac{1}{2}$ — — —	$\frac{96}{97}$ — — —	$\frac{1}{97}$
$2\frac{3}{4}$ — — —	$\frac{960}{971}$ — — —	$\frac{11}{971}$
3 — — —	$\frac{80}{81}$ — — —	$\frac{1}{81}$
$3\frac{1}{4}$ — — —	$\frac{960}{973}$ — — —	$\frac{13}{973}$
$3\frac{1}{2}$ — — —	$\frac{480}{487}$ — — —	$\frac{7}{487}$
$3\frac{3}{4}$ — — —	$\frac{64}{65}$ — — —	$\frac{1}{65}$
4 — — —	$\frac{60}{61}$ — — —	$\frac{1}{61}$ u. s. w.

$\frac{1}{4}$ Jahr

$\frac{1}{4}$ Jahr	$\frac{80}{81}$	$\frac{1}{81}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{40}{41}$	$\frac{1}{41}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{80}{83}$	$\frac{3}{83}$
1	$\frac{20}{21}$	$\frac{1}{21}$
$1\frac{1}{4}$	$\frac{16}{17}$	$\frac{1}{17}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{40}{43}$	$\frac{3}{43}$
$1\frac{3}{4}$	$\frac{80}{87}$	$\frac{7}{87}$
2	$\frac{10}{11}$	$\frac{1}{11}$
$2\frac{1}{4}$	$\frac{80}{89}$	$\frac{9}{89}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{1}{9}$
$2\frac{3}{4}$	$\frac{80}{91}$	$\frac{11}{91}$
3	$\frac{20}{23}$	$\frac{3}{23}$
$3\frac{1}{4}$	$\frac{80}{93}$	$\frac{13}{93}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{40}{47}$	$\frac{7}{47}$
$3\frac{3}{4}$	$\frac{16}{19}$	$\frac{3}{19}$
4	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
$4\frac{1}{4}$	$\frac{80}{97}$	$\frac{17}{97}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{40}{49}$	$\frac{9}{49}$
$4\frac{3}{4}$	$\frac{80}{99}$	$\frac{19}{99}$
5	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$ u. s. w.

§. 150.

Was die Verfertigung dieser Tabelle betrifft, so ist aus der Natur der Sache selbst leicht einzusehen, daß der Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung der baaren Zahlung jedesmal mit dem zu ihm gehörigen Anzeiger derselben Veränderung zur Findung des Rabatts ein Ganzes ausmache, und daß man also, nachdem man den einen oder den andern Anzeiger gefunden, den andern durch eine leichte Subtraction zu finden im Stande sey. Will man nun zu einem gegebenen pr. C. z. B. 5, für verschiedene Zeiten, z. B. von Viertheil Monat zu Viertheil Monat, die Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung der baaren Zahlung suchen; so rechne man zuvörderst für einen solchen Theil der Zeit, woraus alle übrige Zeiten zusammengesetzt werden können, im angenommenen Falle für $\frac{1}{4}$ Monat, den Anzeiger, jetzt $\frac{4800}{4805}$ oder $\frac{260}{961}$, aus. Läßt man von diesem Anzeiger den Zähler unverändert, addirt aber zu seinem Nenner nach und nach den Unterschied zwischen demselben und dem Zähler einmal, zweymal, dreymal u. s. w. genommen; so erhält man dadurch die Anzeiger für das zweifache, dreyfache, vierfache u. s. w. der vorher angenommenen Zeit, und es ist nichts weiter übrig, als dieselben auf die möglich kleinsten Zahlen zu bringen. Den angenommenen Fall beyzubehalten, so erhält man auf diesem Wege nach und nach $\frac{4800}{4810}$, $\frac{4800}{4815}$, $\frac{4800}{4820}$, $\frac{4800}{4825}$, $\frac{4800}{4830}$, $\frac{4800}{4835}$ u. s. w., oder $\frac{960}{962}$, $\frac{960}{963}$, $\frac{960}{964}$, $\frac{960}{965}$, $\frac{960}{966}$, $\frac{960}{967}$ u. s. w. woraus mit leichter Mühe $\frac{480}{481}$, $\frac{320}{321}$, $\frac{240}{241}$, $\frac{192}{193}$, $\frac{160}{161}$, $\frac{960}{967}$ u. s. w. die Anzeiger für $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ Monat, so wie sie die Tabelle enthält, gefunden werden. Höchst vortheilhaft ist es bey dieser Arbeit, wenn man sogleich den Anzeiger für die kleinste Zeit in den möglich kleinsten Zahlen ausdruckt. Will man aber die Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Ausrechnung des Rabatts finden; so suche man zuvörderst auch diesen Anzeiger für eine solche Zeit, woraus sich die übrigen zusammensetzen lassen; für den vorhin angenommenen Fall wäre derselbe $\frac{5}{4805}$ oder $\frac{1}{961}$: ferner vergrössere man nach und nach den Zähler so wohl als den Nenner um das einfache, zweyfache, dreyfache u. s. w. des Zählers, und bringe endlich das erhaltene auf die möglich kleinsten Zahlen. Für den so eben wieder berührten Fall erhält man auf diese Art $\frac{10}{4810}$, $\frac{15}{4815}$, $\frac{20}{4820}$, $\frac{25}{4825}$, $\frac{30}{4830}$, $\frac{35}{4835}$ u. s. w., oder $\frac{1}{481}$, $\frac{1}{321}$, $\frac{1}{241}$, $\frac{1}{193}$, $\frac{1}{161}$, $\frac{7}{967}$ u. s. w. die Anzeiger für $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ u. s. w. Monat.

Der Grund von dem gesagten liegt im 146ten §, und es ist nicht nöthig, die Richtigkeit der vorgeschriebenen Regeln weitläuftiger darzuthun. Ein jeder kann sich selbst davon bey einer sorgfältigen Ueberlegung und Anwendung des angeführten

ten §. überzeugen. Man kann sich aber die Verfertigung der Tabelle noch dadurch erleichtern, daß man nach und nach mehrere Anzeiger, und insbesondere von den zur Findung der baaren Zahlung gehörigen die, deren Nenner und Zähler nur um 1 unterschieden sind, und von den zur Findung des Rabatts erforderlichen die, deren Zähler 1 ist, zu Grundanzeigern macht, und daraus die Anzeiger der vielfachen Zeit entwickelt. So kann man auf dem vorhin beschriebenen Wege aus dem Anzeiger für 1 Monat bequem die Anzeiger für 2, 4, 6, 8, 10 und 12 Monat, aus dem Anzeiger für 1 Jahr bequem die Anzeiger für 2, 3, 4, 5 u. s. w. Jahr erhalten. Nöthig ist es übrigens wohl nicht, von dem Falle, wenn eine Tabelle für ein anderes pr. C. verfertiget werden soll, noch besonders zu reden.

§. 151.

Die bisher beschriebene Art den Rabatt zu berechnen, wird öfters die Hoffmannische Berechnung des Rabatts genannt, weil sie Gottfr. Aug. Hoffmann theils in seiner prudentia oeconomica, theils in seinen dem Polackischen schon angeführten Werke einverleibten Demonstrationen von richtiger Berechnung des Interusuriums vorzüglich bearbeitet und wider die gemachten Einwürfe vertheidiget hat. Polack hat auch die obige Tabelle für alle aus $\frac{1}{2}$ Jahre bis 30 Jahren zusammengesetzte Zeiten unter dem Titel: Tabelle des Herrn Hoffmanns, Verhältniß des Interusuriums zu dem scheinbaren d. i. bekannten

kannten Capitale, von welchem das Interusurium abgezogen werden soll, nebst einem zugleich beygefügten Exempel auf 30 Jahre. Wider die Rechnung selbst läßt sich nichts einwenden; ob und wenn und wie weit sie auf wirkliche Fälle im Leben passe, ist eine andere Frage, deren Beantwortung aber nicht hier, sondern erst am Ende der doppelten Rabattrechnung gegeben werden kann.

§. 152.

Die Carpzovische Art hingegen streitet wider die §. 138 angeführte und bewiesene Behauptung, und wird daher mit Recht verworfen. Nach derselben ist der Rabatt jedesmal so groß, als der Zins, und der Rabatt für eine doppelte, dreyfache, vierfache Zeit u. s. w. auch genau das doppelte, dreyfache, vierfache u. s. w. des einfachen Rabatts. Werden z. B. 5 pr. C. gerechnet, so ist der Rabatt von 1000 Rthl. für 1 Jahr 50 Rthl., für 2 Jahr 100 Rthl., für 3 Jahr 150 Rthl. u. s. w. So wie aber der Zins endlich dem Capitale gleich werden kann, so muß es nach dieser Art auch der Rabatt werden können, und alsdann hätte also ein Schuldner, der so lange, als dazu nöthig wäre, früher bezahlte, gar nichts zu entrichten. Wie ungereimt! Ja, da der Zins mit der Zeit selbst grösser als das Capital werden kann, so müßte auch dies bey dem Rabatte statt finden, und in einem solchen Falle müßte der Gläubiger dem Schuldner noch herausgeben.

Was

Was für Folgen! Gesetzt man verspräche jemand 50000 Rthlr in 30 Jahren zu schenken, und vergliche sich kurz darauf mit ihm, ihm die versprochene Summe mit 5 pr. C. pr. A. Rabatt so gleich auszuzahlen; so würde nach der Carpzovschen Methode der, dem die 50000 Rthlr versprochen wären, anstatt etwas zu erhalten, dem andern noch 25000 Rthlr bezahlen müssen. Ohne Nachtheil des Gläubigers kann nach dieser Art niemals gerechnet werden, und der Schaden wird immer grösser, je grösser die Zeit der Vorausbezahlung angenommen wird.

§. 153.

Ohnerachtet die bisher beschriebene Art den Rabatt zu berechnen so natürlich und leicht ist, daß sie sich nach einiger Ueberlegung gleichsam von selbst darbietet, und ohnerachtet dieselbe in der ihr ähnlichen kaufmännischen Berechnung des Rabatts längst üblich gewesen ist; so urtheilt gleichwohl Unger, daß die gemeine Arithmetic dazu ganz unzulänglich sey, und hält mit verschiedenen andern die Betrachtung gewisser unendlichen Reihen zur Findung der obigen Regel für nothwendig. Wenn jemand glaubt, daß man den Rabatt in 100 rechnen könne, so kann man ihn sehr gut von seinem Irrthume überzeugen, wenn man sagt: Gesetzt, es zöge jemand von 100 Rthlr, die er über ein Jahr zu bezahlen schuldig ist, bey einer jetzigen Zahlung 5 Rthlr ab, so anticipirte er diese 5 Rthlr ein Jahr, und sein Creditor müßte also von diesen 5 Rthl. wieder $\frac{1}{20}$ oder 6 Gr. abziehen. Diese 6 Gr. würden aber ebenfalls anticipirt, und müßten daher auch $\frac{1}{20}$ Rabatt leiden, u. s. w. Allein zur Findung der zur Berechnung des gemeinen Rabatts nöthigen Regel ist eine solche Betrachtung auf keine Art und Weise nothwendig, ja man kann die berührte Absicht auf andern Wegen vielleicht noch bequemer und sicherer erreichen.

§. 154.

Wenn besseres Geld gegen schlechteres, Gold z. B. gegen Courant umgesetzt werden soll, so muß man natürlicher Weise der Zahl nach etwas verlieren. Die Grösse dieses Verlustes bestimmt man ebenfalls nach pr. C., und sagt z. B. Courant verliere gegen Gold $6\frac{2}{3}$ pr. C. Man sieht nach einiger Ueberlegung bald, daß dies pr. C. auf 100 und nicht in 100 zu rechnen sey, und daß also die bey der gedachten Umsetzung vorfallende Berechnungen mit den bisher betrachteten Rabattberechnungen von einerley Art sind. Manchen Personen werden jene Berechnungen schwer, ohnerachtet sie sich in der Berechnung des Agios gut zu finden wissen. Dies rührt ohnstreitig daher, weil sie den Ausdruck pr. C. eigentlich und nicht in dem Verstande nehmen, als §. 149 angezeigt worden ist. Bey allen Arten des Rabatts auf 100 heißt pr. C. nicht von 100, sondern von 100 und dem pr. C. zusammengenommen.

§. 155.

Was nun die bey b und c §. 140 und 145 gedachten Fälle anbetrifft, so verweise ich in Ansehung derselben um so viel mehr auf die Betrachtung der ihnen ähnlichen Fälle in der gemeinen Zinsrechnung, da sie in der Practik so oft eben nicht vorkommen. Insbesondere gehöret hieher und zu dem zweyten Falle der 50te §. Was den letzten Fall anlangt, so findet man aus dem früher bezahlten Capitale und derjenigen Summe, für welche man es bezahlt hat, durch die Subtraction leicht den sämmtlichen Rabatt. Dieser Rabatt ist dem Zinse gleich, den das wirklich bezahlte Capital bis zu seiner eigentlichen Fallzeit tragen muß; und ihn also mit der Zahl der Termine dividirt, so erhält man den Zins des wirklich bezahlten Capitals für einen Termin. Aus diesem Zinse aber erhält man das pr. C. desselben, welches mit dem pr. C. des Rabatts einerley ist, so leicht, daß daher dieser Fall in der gemeinen Zinsrechnung nicht einmal angeführt worden ist.

Bezahlt man z. B. anstatt 600 Rthl., die ohne Zins nach 5 Jahren zu bezahlen waren, so gleich 480 Rthl.; so rabattirt man 120 Rthl., und so viel Zins müssen 480 Rthl., wenn richtig rabattirt seyn soll, in 5 Jahren tragen. Geben nun 480 Rthl. in 5 Jahren 120 Rthl., so ist der Zins eines Jahres 24 Rthl., und das pr. C. $100 \times \frac{24}{480}$, d. h. $\frac{2400}{480}$ oder 5. Es sind also auch die gedachten 600 Rthl. mit 5 pr. C. rabattirt worden.

§. 156.

Es folgt nun (s. §. 141) der Fall, wenn das nach einiger Zeit fällige, mit Einwilligung des Gläubigers und Schuldners aber früher zu bezahlende Capital bis zu seiner Fallzeit einen verabredeten Zins trägt, und wovon oben bereits ein Beyspiel angeführt worden ist. Ueberhaupt überzeugt man sich bey diesem Falle leicht davon, daß der Zins, welchen der Schuldner zu entrichten hat, den Rabatt, welchen er sonst hätte geniessen können, vermindere, und es kommt also vorzüglich darauf an zu bestimmen, wie groß diese Verminderung in jedem hier möglichen Falle sey. Da, wenn dieser Fall statt findet, nicht nur das Capital, sondern auch der zur Zahlungszeit desselben fällige Zins mit Rabatt bezahlt wird; so kann derjenige Rabatt, welchen das Capital, wenn der Schuldner zu keinem Zinse verpflichtet wäre, durch den von ihm zu gebenden Zins nicht um diesen Zins selbst, sondern nur um den jetzigen Werth desselben verringert werden. Gesetzt daß 1500 Rthl., die über 2 Jahr bezahlt und unterdessen mit 2 pr. C. verzinset werden sollten, sogleich mit 5 pr. C. Rabatt zu entrichten wären: so rabattirte der Schuldner $1500 \times \frac{1}{11}$, oder 136 Rthl. 8 gr. $8\frac{8}{11}$ pf. von dem Capitale selbst; er hätte aber ausserdem 1500 Rthl. $\times \frac{1}{25}$, oder 60 Rthl. Zins zu entrichten, und müßte also dafür jetzt 60 Rthl. $\times \frac{10}{11}$ oder 54 Rthl. 13 gr. $1\frac{1}{11}$ pf.

$1\frac{1}{11}$ ₰ bezahlen. Er zöge also von den gedachten 1500 Rthl. nur 136 Rthl. 8 gr. $8\frac{8}{11}$ ₰ weniger 54 Rthl. 13 gr. $1\frac{1}{11}$ ₰, oder 81 Rthl. 19 gr. $7\frac{7}{11}$ ₰ ab. Hieraus ergiebt sich, einmal, daß zwar, wenn das pr. C. des Zinses mit dem pr. C. des Rabatts einerley ist, Rabatt und Zins sich heben, und also das ganze Capital bezahlt werden muß; ein Fall indeß, der schwerlich sich ereignen dürfte: daß aber zweytens, wenn das pr. C. des Rabatts und das pr. C. des Zinses ungleich sind, auf keine Art und Weise das kleinere pr. C. von dem grössern gerade so viel zernichte, als es selbst beträgt, so daß z. B. in dem berührten Falle das Capital der 1500 Rthl. mit 3 pr. C. Rabatt bezahlt werden müßte. Da der Rabatt, den diese 1500 Rthl. wirklich leiden $81\frac{9}{11}$ Rthl. ist, und anstatt derselben also $1418\frac{2}{11}$ Rthl. entrichtet werden müssen; so wäre, nach dem am Ende des vorhergehenden §. gesagten, das pr. C. des wirklichen Rabatts den 1500 Rthl. gleich

$$100 \times \frac{40\frac{10}{11}}{1418\frac{2}{11}},\text{ oder } \frac{450}{156} \text{ d. h. } 2\frac{23}{26},\text{ und nicht } 3.$$

§. 157.

Um also aus einem Capitale, das zwar nach einiger Zeit erst fällig ist, aber unterdessen zu einem gewissen pr. C. verzinset werden muß, bey gegebenem pr. C. des Rabatts und der Zeit der frühern Zahlung entweder die Summe, welche dafür bezahlt werden muß, oder den

Rabatt, den das schuldige Capital erfährt, zu finden, muß man das Product aus diesem Capitale und dem Anzeiger seiner Veränderung zur Findung der Summe, zu welcher es bey dem gegebenen pr. C. und Zeit durch den Zins wächst, in jenem Falle mit dem Anzeiger der Veränderung eines Capitals zur Findung der baar zu bezahlenden Summe multipliciren, in diesem aber mit dem Anzeiger der Veränderung eines Capitals zur Findung des Rabatts für das bestimmte pr. C. und die gegebene Zeit multipliciren, und darauf von dem gefundenen den an dem Schuldener zu entrichtenden Zins abziehen. Wie viel anstatt 1500 Rthl., die nach 2 Jahren fällig sind, und unterdessen mit 2 pr. C. verzinset werden sollen, mit 5 pr. C. Rabatt so gleich bezahlet werden müsse, findet man z. B. durch folgende Rechnung.

$$1500\ \text{Rthl.} \times \tfrac{26}{25} \times \tfrac{10}{11} = \tfrac{52}{55}$$

$$\begin{array}{r|l}
3000 & \\
7500 & \\
\hline
\cancel{7}8\cancel{0}\cancel{0}0 & \\
\cancel{1}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} & 1418\ \text{Rthl.} \\
\cancel{1}\cancel{4}1 & \\
\hline
\cancel{1}\cancel{4}0 & 4\ \text{gr.} \\
2 & \\
\hline
\cancel{1}\cancel{4}0 & 4\tfrac{4}{11}\ \text{pf.} \\
2 &
\end{array}$$

Den

Den Rabatt hingegen, wenn man ihn unmittelbar sucht, giebt folgende Rechnung.

$$1500\ \text{Rthl} \times \frac{26}{25} \times \frac{1}{11} = \frac{26}{1 \times 5 \times 11}$$

9000
30

39000

7800

~~1560~~ | 141 Rthl
~~42~~9

~~216~~ | 19 ggr
~~10~~7
~~1~~

84 | $7\frac{7}{11}$ ₰.
7

Von diesen 141 Rthl 19 ggr $7\frac{7}{11}$ ₰ die 60 Rthl Zins, welche 1500 Rthl bey 2 pr. C. in zwey Jahren tragen, abgezogen, so bleibt für den wirklichen Rabatt der 1500 Rthl übrig 81 Rthl 19 ggr $7\frac{7}{11}$ ₰.

Meistentheils ist es hier vortheilhafter die baar zu bezahlende Summe zu suchen.

§. 158.

Nunmehr muß ich von den zusammengesetzten Fällen der gemeinen Rabattrechnung reden, deren

es

es vorzüglich eine doppelte Art giebt. Es kann sich nemlich ereignen, **entweder**, daß **mehrere Capitalien**, die entweder zu verschiedenen Zeiten fällig sind, oder mit verschiedenem Rabatte früher bezahlt werden sollen, oder bey denen beyde Umstände sich finden, **auf einmal und in einer Summe** abgetragen werden sollen, **oder** daß **Ein Capital zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Summen** zu bezahlen verabredet worden. In jenem Falle können die früher zu bezahlende Capitalien bis zu ihrer Fallzeit einen verabredeten Zins tragen, oder ohne Zins so lange von dem Schuldner behalten werden; in diesem aber findet stets der Zins statt. Ein jeder dieser Fälle kann übrigens öfters sich ereignen, und ist also wichtig, und ein jeder muß daher auch besonders betrachtet werden.

§. 159.

Gesetzt, daß mehrere Capitalien, ohne indessen Zins zu tragen, zu verschiedenen Zeiten fällig sind, und zu gleichem pr. C. mit Rabatt früher bezahlt werden sollen; z. B. es ist jemand 4000 Rthlr in 2 einjährigen Terminen und gleichen Summen zu bezahlen schuldig, verabredet aber nach 3 Monaten mit seinem Gläubiger, daß er jetzt mit 4 pr. C. Rabatt sich mit ihm aus einander setzen dürfe: so bleibt, ohne Tabellen, zur Findung so wohl der baaren Zahlung als des Rabatts kein anderer Weg übrig,

übrig, als die öftere Anwendung der bisher vorgetragenen Regeln, und Ausrechnung also der genannten Dinge für die einzeln Capitalien, und darauf die Summirung der verschiedenen gefundenen Summen. In dem angenommenen Falle hat der Schuldner zur Bezahlung der ersten 2000 Rthlr. noch $\frac{3}{4}$, und zur Bezahlung der andern 2000 noch $\frac{7}{4}$ Jahr Zeit. Es muß also der Schuldner jetzt bezahlen

für die 1ten 2000 Rthlr. - 2000 Rthlr. $\times \frac{100}{103} = 1941\frac{77}{103}$
— 2 — — - 2000 Rthlr. $\times \frac{100}{107} = 1869\frac{17}{107}$
also überhaupt 2000 Rthlr. $\times \left(\frac{100}{103} + \frac{100}{107}\right) = 3810\frac{9990}{11021}$

und genießt an Rabatt

für die 1ten 2000 Rthlr. — 2000 Rthlr. $\times \frac{3}{103} = 58\frac{26}{103}$
— 2 — — — 2000 Rthlr. $\times \frac{7}{107} = 130\frac{90}{107}$
also überhaupt 2000 Rthlr. $\times \left(\frac{3}{103} + \frac{7}{107}\right) = 189\frac{1031}{11021}$

Freylich könnte man, wenn die früher zu bezahlende Summen, wie vorhin, gleich sind, auch die Anzeiger zusammen addiren, und mit ihrer Summe das eine Capital multipliciren.

So ist z. B. 2000 Rthlr. $\times \frac{21000}{11021}$ auch gleich $3810\frac{9990}{11021}$
und 2000 Rthlr. $\times \frac{1042}{11021}$ gleich $189\frac{1031}{11021}$

Allein vortheilhaft ist diese Art, wenn die nöthigen Summen der Anzeiger nicht schon zuvor berechnet sind, eben nicht, und also auch nicht zu empfehlen; doch verhält es

sich

sich anders, wenn man die gedachten Summen der Anzeiger in einer Tabelle zur Hand hat.

§. 160.

Eben so wenig ist auch eine Verkürzung der Rechnung möglich, wenn mehrere Capitalien, die, ohne indessen Zins zu tragen, nach einer und derselben Zeit fällig sind, zu verschiedenen pr. C. mit Rabatt früher bezahlt werden sollen. Angenommen, daß jemand 3500 Rthlr über $1\frac{1}{2}$ Jahr schuldig wäre, und 2500 Rthlr mit 5 pr. C. und 1000 Rthlr mit 4 pr. C. Rabatt sogleich bezahlen wollte, so müßte man auch hier theilweise rechnen. Es bezahlte nemlich der Schuldner

für die 2500 Rthlr — 2500 Rthlr $\times \frac{40}{43}$ oder $2325\frac{25}{43}$
für die 1000 Rthlr — 1000 Rthlr $\times \frac{50}{53}$ oder $943\frac{21}{53}$
also überhaupt für die 3500 Rthlr — — $3268\frac{2228}{2279}$,

und erhielte folglich an Rabatt

für die 2500 Rthlr — 2500 Rthlr $\times \frac{3}{43}$ oder $174\frac{18}{43}$ Rthlr
für die 1000 Rthlr — 1000 Rthlr $\times \frac{3}{53}$ oder $56\frac{32}{53}$ Rthlr
und also überhaupt für die 3500 Rthlr $231\frac{51}{2279}$ Rthlr

Noch mehr muß diese theilweise angestellte Art der Rechnung nothwendig seyn, wenn nicht nur die früher zu bezahlenden Capitalien in Ansehung ihrer eigentlichen Fallzeit, sondern auch in Ansehung des pr. C. des Rabatts verschieden sind. Besondere Fälle von dieser Gattung durchzugehen, scheint überflüssig zu seyn.

§. 161.

Ehe ich weiter gehe, muß ich noch einen Fall von der §. 159 betrachteten Gattung berühren; er ist aus Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst §. 38 und 52 des 1ten Capitels genommen, und folgender: Es will jemand 1000 Rthl, die in 10 einjährigen Terminen ohne Interessen und in jedem Termine mit 100 Rthl abgetragen werden sollten, sogleich auf einmal und mit 5 pr. C. Rabatt entrichten. Es wird gefragt, wie viel er zu bezahlen habe? Florencourt giebt zur baar zu bezahlenden Summe $816\frac{2}{3}$ Rthl an, und rechnet dabey nach folgender Regel. Man addire zu der ganzen, terminweise zu bezahlenden Summe den Zins, welchen dieselbe bey einem dem pr. C. des Rabatts gleichem pr. C. in der Hälfte der statt findenden Termine weniger 1 tragen würde, und suche dann von dieser Summe die baar zu zahlende Summe oder den Rabatt nach dem gegebenen pr. C. und *als* ob sie in dem letzten Termine fällig gewesen. Zu dem *Capitale* der 1000 Rthl also den Zins desselben in der Hälfte von 10 weniger 1, d. h. $4\frac{1}{2}$, Jahren, oder 225 Rthl addirt, und von den kommenden 1225 Rthl die bey zehnjähriger früherer Zahlung mit 5 pr. C. Rabatt zu gebende Summe gesucht, oder $\frac{1}{3}$ davon abgezogen; so kommen $816\frac{2}{3}$ Rthl, wie vorher angegeben wurde. Wenn aber diese Regel richtig seyn soll, so muß es einerley seyn, ob man ein Capital, z. B. 1000 Rthl,

das

das nach einer gewissen Zeit, z. E. nach einem Jahre, ohne unterdessen Zins zu tragen, fällig ist, und mit Rabatt, z. B. a 5 pr. C. sogleich bezahlet werden soll; ob man, sage ich, dies Capital selbst nimmt, und nach den angeführten Umständen die baare Zahlung für dasselbe, oder seinen Rabatt berechnet; oder ob man statt desselben ein anderes Capital nimmt, zu welchem das genannte durch den Zins zu einem dem pr. C. des Rabatts gleichem pr. C. in einer gewissen Zeit wachsen kann, und von diesem die baare Zahlung oder den Rabatt nach eben dem pr. C. aber bey einer Zeit suchet, die aus der bey jenem Capitale statt findenden und derjenigen besteht, in welchem dasselbe durch den Zins dem angenommenen Capitale gleich werden kann. Es müßte, um einige Beyspiele anzuführen, gleich seyn, ob man bey 5 pr. C. Rabatt 1000 Rthl. ein Jahr, oder 1050 Rthl. zwey, oder 1100 Rthl. drey Jahr u. s. w. früher bezahlte. Ist dies? Ein Jahr früher bezahlt, giebt man bey 5 pr. C. Rabatt statt 1000 Rthl. $952\frac{8}{21}$ Rthl., 1050 Rthl. aber geben bey zweyjähriger früherer Zahlung $954\frac{6}{11}$ Rthl., 1100 Rthl. bey dreyjähriger früherer Zahlung $956\frac{12}{23}$ Rthl., 1150 Rthl. bey vierjähriger früherer Zahlung $958\frac{1}{3}$ Rthl., 1200 Rthl. bey fünfjähriger früherer Zahlung 960 Rthl. u. s. f. So oft dahero nach der angeführten Voraussetzung gehandelt wird, ist Vervortheilung da, und diese streitet wider die Grundregel des Rabatts. Ich kann daher auch die Flo-

ren-

rencourtsche Regel nicht unterschreiben, sondern muß vielmehr die Befolgung der §. 159 gegebenen Vorschriften empfehlen.

Um den vom Florencourt begangenen Fehler ganz sichtbar zu machen, will ich hier noch die von ihm gewählte Aufgabe nach der §. 159 gegebenen Regel auflösen, und dann noch einige Anmerkungen hinzufügen. Es müßte also der Schuldner baar bezahlen

$\frac{20}{21} \times 100$ Rth $= 95\frac{5}{21}$ Rth	für die 100 Rth	nach dem	1ten	Jahre
$\frac{10}{11} \times 100$ Rth $= 90\frac{10}{11}$ Rth	— 100 Rth	—	2	—
$\frac{20}{23} \times 100$ Rth $= 86\frac{22}{23}$ Rth	— 100 Rth	—	3	—
$\frac{5}{6} \times 100$ Rth $= 83\frac{1}{3}$ Rth	— 100 Rth	—	4	—
$\frac{4}{5} \times 100$ Rth $= 80$ Rth	— 100 Rth	—	5	—
$\frac{10}{13} \times 100$ Rth $= 76\frac{12}{13}$ Rth	— 100 Rth	—	6	—
$\frac{20}{27} \times 100$ Rth $= 74\frac{2}{27}$ Rth	— 100 Rth	—	7	—
$\frac{5}{7} \times 100$ Rth $= 71\frac{3}{7}$ Rth	— 100 Rth	—	8	—
$\frac{20}{29} \times 100$ Rth $= 68\frac{28}{29}$ Rth	— 100 Rth	—	9	—
$\frac{2}{3} \times 100$ Rth $= 66\frac{2}{3}$ Rth	— 100 Rth	—	10	—

also in allem $794\frac{8922424}{18027009}$ Rth. Eben diese Summe findet man, wenn man die Anzeiger $\frac{20}{21}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{20}{23}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{10}{13}$, $\frac{20}{27}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{20}{29}$, $\frac{2}{3}$ summiert, und mit dem Aggregate $\frac{1432236757}{180270090}$ die in jedem Termine zu bezahlende 100 Rth multiplicirt, denn es ist 100 Rth $\times \frac{1432236757}{180270090}$ gleich $794\frac{8922424}{18027009}$ Rth, und Florencourt hat also über 22 Rth zu viel herausgebracht. Will man sich auf eine allgemeinere Art von der Unrichtigkeit der Florencourtschen Regel

 über=

überzeugen, so kann es auf folgendem Wege geschehen. Wenn ein Capital mit 5 pr. C. Rabatt früher bezahlt werden soll, so bezahlt man bey einjähriger früherer Zahlung statt des Ganzen $\frac{20}{21}$. Gesetzt, daß man anstatt des Capitals $1\frac{1}{20}$ oder $\frac{21}{20}$ desselben, d. h. das durch den einjährigen Zins vermehrte Capital nimmt, und die bey zweyjähriger früherer Zahlung baar dafür zu gebende Summe finden will, so muß man davon $\frac{10}{11}$, also von dem ursprünglichen Capitale $\frac{21}{20} \times \frac{10}{11}$ d. h. $\frac{21}{22}$ suchen, und erhält folglich $\frac{1}{462}$ mehr. Bezahlt man ferner statt $\frac{20}{21}$ eines Ganzen $\frac{20}{23}$ von $\frac{22}{20}$ desselben, so giebt man statt $\frac{20}{21}$ schon $\frac{22}{23}$, und also $\frac{2}{483}$ mehr, u. s. w. Endlich kann man auch, um die Aufgabe selbst noch einmal zu berühren, schliessen: Die Summe $794\frac{89222424}{180227009}$ Rthlr besteht aus den Summen $95\frac{5}{21}$ Rthlr, $90\frac{10}{11}$ Rthlr, $86\frac{22}{23}$ Rthlr, $83\frac{1}{3}$ Rthlr 80 Rthlr, $76\frac{12}{13}$ Rthlr, $74\frac{2}{27}$ Rthlr, $71\frac{3}{7}$ Rthlr, $68\frac{28}{29}$ und $66\frac{2}{3}$ Rthlr, und alle diese Summen wachsen von der Zeit der baaren Zahlung an bis zur Fallzeit derjenigen 100 Rthlr, für welche sie bezahlt werden, durch den Zins zu 5 pr. C. zu 100 Rthlr, und sind also die wahren zu bezahlenden Summen, und alle andere als sie müssen falsch seyn.

§. 162.

Da die Florencourtsche Regel, welche, wenn sie richtig wäre, allerdings die Berechnung des Falls, zu welchem sie gehört, sehr erleichtern und verkürzen würde, nicht statt haben kann, so muß ich hier noch von den

im

im 159ten §. gedachten Tabellen reden, theils um der Erleichterung willen, welche man bey öfterer Berechnung solcher Fälle, wenn Geld, das ohne Zins zu tragen in gleichen Summen und gleich weit von einander entfernten Terminen fällig ist, auf einmal mit Rabatt bezahlt werden soll, davon haben kann, theils aber auch des Gebrauchs wegen, der davon in den folgenden gemacht werden soll. Man erhält dergleichen Tabellen durch Summirung der Anzeiger der Veränderung eines Capitals zur Findung der baaren Zahlung, so daß man nach und nach 1, 2, 3, 4 Anzeiger u. s. w. vom Anfang an zusammen nimmt. Wenn von jährigen Terminen die Rede ist, und der Rabatt zu 5 pr. C. gerechnet wird, so sind die gedachten Anzeiger

für	1	Jahr	—	$\frac{20}{21}$	
—	2	—	—	$\frac{10}{11}$	
—	3	—	—	$\frac{20}{23}$	
—	4	—	—	$\frac{5}{6}$	
—	5	—	—	$\frac{4}{5}$	
—	6	—	—	$\frac{10}{13}$	
—	7	—	—	$\frac{20}{27}$	
—	8	—	—	$\frac{5}{7}$	
—	9	—	—	$\frac{20}{29}$	
—	10	—	—	$\frac{2}{3}$	u. s. w.

Hieraus erhält man leicht die Summen der Anzeiger

1 Jahres	—	$\frac{20}{21}$
2 Jahre	—	$\frac{410}{231}$
3 —	—	$\frac{14510}{5313}$
4 —	—	$\frac{12625}{3542}$
5 —	—	$\frac{77293}{17710}$
6 —	—	$\frac{1181909}{230230}$
7 —	—	$\frac{36516143}{6216210}$
8 —	—	$\frac{40956293}{6216210}$
9 —	—	$\frac{187436671}{25752870}$
10 —	—	$\frac{204605251}{25752870}$

§. 163.

Was nun den Gebrauch dieser Tabellen anlangt, so ist derselbe §. 159 und §. 161 in der Anmerkung für den bisher betrachteten Fall schon angezeigt worden; indeß mag folgende Frage zu mehrerer Erläuterung noch hier stehen. Es will jemand 4750 Rthl., die er ohne Zins in 5 einjährigen Terminen in gleichen Summen abtragen sollte, baar mit 5 pr. C. Rabatt entrichten; was wird er zu bezahlen haben? — Die in jedem Termine abzutragende Summe ist 950 Rthl., und der Anzeiger ihrer Veränderung zur Findung der baaren Zahlung steht in der Tabelle bey 5 Jahren. Die Rechnung geschieht also nach diesem Ausdrucke

$$950 \text{ Rthl.} \times \frac{77293}{17710}, \text{ und ist}$$

```
          77293
            950
        -------
        3864650
       695637
        -------
17710  73428350 | 4146 Rthl.
       3568799  |
        25197   |
        28386
         406
         142
       -------
         1076
       -------
         6456 | 3 gr.
         3343 |
         11
          2286
       -------
        137716 |
          6829 | 7 1319/1771 pf.
           131
```

Nach der von Florencourt gegebenen Regel müßte man rechnen:

die ganze zu bezahlende Summe ist	4750 Rthl.
dazu 237½ Rthl. × 2 oder	475 Rthl. Zins,
so erhält man	5225, wovon

4/5, um die baare Zahlung 4180 zu finden, zu nehmen sind. Viel leichter und bequemer ist dieser Weg; aber welch ein Unterschied zwischen dieser und der vorhergehenden richtigen Summe?

§. 164.

Da die Anzeiger in der §. 162 gegebenen Tabelle, so wie auch in allen ihnen ähnlichen, sehr bald aus vielen Zahlen bestehen, und daher die nach ihnen nöthige Division schwer und unsicher wird; so ist es gut, wenn man an ihrer Stelle ihre Quotienten in Decimalzahlen hat, wodurch zugleich der Raum erspart wird. Für $\frac{77293}{17710}$ z. B. 4,36437 genommen; so wird die Berechnung des Falls §. 163

950 Rthlr ×	4,36437
	2182185
	3927933
Rthlr	4146|1515
	6060
gr	3|6360
	1272
pf	7|632

Man vergleiche diese Rechnung mit der vorhergehenden.

§. 165.

Bis jetzt sind nur lauter zusammengesetzte Fälle von der Art betrachtet worden, wo die nach einiger Zeit fälligen Capitalien bis dahin keinen Zins tragen. Ist ein Zins verabredet worden, so thut man am besten, daß man denselben vor allen andern berechnet, zu den zugehörigen Capitalen addirt, und dann nach den gegebenen Regeln verfährt. Gesetzt z. B. daß jemand 1000 Rthlr, die in zwey einjährigen Terminen jedesmal mit 500 Rthlr abgetragen und bis zu ihrer Fallzeit mit 2 pr. C. verzinset werden müssen, so gleich mit 5 pr. C. Rabatt bezahlt werden sollten; so kann man auf folgende Art rechnen. Da die nach einiger Zeit fälligen Capitalien mit 2 pr. C. verzinset werden sollen, und 500 Rthlr a 2 pr. C. in einem Jahre 10 Rthlr Zins geben; so sind hier 510 Rthlr ein Jahr und 520 Rthlr zwey Jahr mit 5 pr. C. Rabatt früher zu bezahlen. Es sind also die baar zu bezahlende Summen

$$510 \text{ Rthlr} \times \tfrac{20}{21} = 485\tfrac{5}{7} \text{ Rthlr}$$

$$\text{und } 520 \text{ Rthlr} \times \tfrac{10}{11} = 472\tfrac{8}{11} \text{ Rthlr}$$

$$\text{also in allem } 958\tfrac{34}{77} \text{ Rthlr}.$$

§. 166.

Um endlich zu dem Falle zu kommen, wenn Ein Capital sammt dem Zinse von einem Schuldner in verschiedenen Terminen so zu bezahlen ist, daß so

 wohl

wohl die jedesmal zu gebende Summen gleich, als die Termine gleich weit von einander entfernt sind, denn dies ist der gewöhnlichste Fall, und berechnet werden soll, wie viel in jedem Termine abzutragen sey; so sieht man bey einiger Aufmerksamkeit bald, daß dieser Fall der in dem 161ten und 163ten §. statt findende umgekehrt genommen ist. Die hier nöthige Rechnung ist daher auch die der §. 161 und 163 gebrauchten entgegen stehend, und bedarf also keiner sehr weitläuftigen Auseinandersetzung. Es gebe z. B. jemand einem andern $794\frac{8922424}{18027009}$ Rthl. unter der Bedingung, daß er ihm dieselben mit 5 pr. C. Zins und in 10 einjährigen Terminen in gleichen Summen wiedergeben soll, und es werde gefragt, wie viel jedesmal zu geben sey? Die einzele Summen, welche in diesem Falle der Gläubiger erhält, müssen von der Art seyn, daß sie zu 5 pr. C. rabattirt, zusammengenommen $794\frac{8922424}{18027009}$ Rthl. ausmachen. Da man nun diese $794\frac{8922424}{18027009}$ Rthl. durch die Multiplication der Summe eines Termins mit $\frac{204605251}{25752870}$ erhält, so muß man umgekehrt durch die Multiplication der $794\frac{8922424}{18027009}$ Rthl. mit $\frac{25752870}{204605251}$ die in jedem Termine zu bezahlende Summe erhalten. Nun giebt die Multiplication der $\frac{8922424}{18027009}$ Rthl. mit 25752870, 12746320 Rthl. und 794 Rthl. $\times$ 25752870 ist 20447778780 Rthl., also erhält man aus $794\frac{8922424}{18027009}$ Rthl. $\times$ 25752870 diese

Summe

Summe 20460525100 Rthlr, welche durch 20460525100 dividirt 100 Rthlr für jeden Termin giebt.

Bey der Beantwortung der hieher gehörigen Fragen sind solche Tabellen, als §. 162 und 163 beschrieben worden sind, von der größten Wichtigkeit, und wer daher öfters dergleichen Fragen zu beantworten hätte, müßte vor allen Dingen sich solche Tabellen verfertigen.

Wenn von wirklichen Fällen die Rede ist, so versteht es sich, daß die unbedeutenden Brüche nicht geachtet werden. Alsdann aber muß man auch jede Endsumme bis auf ihre Theile in der kleinsten Münzsorte entwickeln.

§. 167.

Bey Licitationen ereignet sich bisweilen der Fall, daß ausser einem Gebote in baaren Gelde ein anderes gethan wird, wovon nur ein Theil baar, der andere aber nach einiger Zeit, und oft in verschiedenen Terminen, entweder ohne oder mit Zins, bezahlet werden soll. Geschieht dies, so ist zur Vergleichung dieser Gebote unter einander nothwendig, daß die nach einiger Zeit erst fälligen Summen auf ihren wahren und jetzigen Werth zurückgeführt werden. Es kann also da auch, wenn solches nach dem einfachen Rabatte geschehen soll, das bisher gesagte nützlich seyn. Uebrigens wäre es ohnstreitig überflüssig, die Art des hier nöthigen Verfahrens in Beyspielen zu zeigen.

§. 168.

Florencourt äussert §. 43 des 1ten Capitels seiner Abhandlungen folgende Meinung. Da bey Concursen die massa bonorum kleiner, als die Summe der Schulden ist, so ist es offenbar, daß die Gläubiger keine Zinsen bekommen. Die Schulden werden nach der Priorität getilget, so daß die letzten Gläubiger oft nichts bekommen. Könnte man dieses Recht nicht am bequemsten und billigsten so ausüben, daß man die Masse der Güter, als den jetzigen Werth einer verschiedene Jahre hinter einander in gleichen Theilen auszuzahlenden Summe ansieht, so daß die alten Gläubiger zuerst, die jüngern zuletzt, alle aber mit der Zeit ihr Capital erhalten? — Sollte dies geschehen, so müßte vor allen Dingen die Zeit bestimmt werden, welche hindurch die jährliche Zahlung dauern sollte. Es gehört also die dazu erforderliche Rechnung nicht so wohl in die Rabatt als vielmehr in die Zeitrechnung, und soll daselbst auch berühret werden.

Es ist ausser den Anwendungen, die von der gemeinen Rabattrechnung gemacht werden können, auch sonst noch manches von derselben übrig. Da indeß zur vollständigen und gründlichen Beurtheilung desselben die doppelte Rabattrechnung vorausgesetzt werden muß, so wird dasselbe auch bis nach dieser Rechnung verschoben; so wie die gedachten Anwendungen theils in den vermischten Rechnungen, theils in dem Anhange zur Zinsrechnung im weitläuftigen Verstande ihren Ort finden werden.

Doppel-

Doppelte Rabattrechnung.

§. 169.

Es ist bereits in der Einleitung in die Rabattrechnung §. 134 und 135, und ausserdem auch 139, von dem Begriffe des doppelten Rabatts und der doppelten Rabattrechnung das nöthige beygebracht worden. Da die doppelte Rabattrechnung den Zinseszins voraussetzt, so läßt sich wegen ihrer Nothwendigkeit und Nutzbarkeit eben so wie bey der Zinseszinsrechnung fragen, und mit gehöriger Veränderung auch eben so antworten. Ohne mich aber jetzt dabey aufzuhalten, gehe ich zur Bestsetzung der zur doppelten Rabattrechnung gehörigen Fälle fort.

§. 170.

Der *einfachen Fälle* der doppelten Rabattrechnung giebt es eben so, als der einfachen Fälle der gemeinen Rabattrechnung vorzüglich drey Arten. Denn es kann entweder

a gefragt werden, wie viel man statt eines Capitals, das nach einer gewissen Zeit fällig ist, bey einem bestimmten pr. C. und doppelten Rabatte baar zu bezahlen habe; oder wie groß der sämmtliche Rabatt davon sey? oder man kann

b zu

b zu wissen verlangen, statt was für eines Capitals man eine bekannte baare Summe Geldes, vorausgesetzt, daß das pr. C. des doppelten Rabatts und die Zeit der frühern Zahlung bekannt ist, bezahlet habe? und endlich

c kann auch, wenn man das rabattirte Capital und die dafür bezahlte baare Summe und die Zeit der frühern Zahlung weiß, die Frage entstehen, zu was für einem pr. C. der Rabatt gerechnet sey?

Beyspiele von jedem dieser Fälle werden nachher vorkommen. Hier muß noch bemerkt werden, daß das Capital, welches nach einer gewissen Zeit erst fällig ist, und mit doppelten Rabatte früher bezahlt werden soll, bis zu seiner Fallzeit entweder keinen Zins trage, oder auf Zins ausstehe, so wie solches auch in der gemeinen Rabattrechnung statt fand.

Was die zusammengesetzten Fälle betrifft, so sind dieselben den zusammengesetzten Fällen der gemeinen Rabattrechnung ebenfalls ähnlich.

§. 171.

Die allgemeine Regel der doppelten Rabattrechnung ist der Grundregel der gemeinen Rabattrechnung, welche §. 137 und 138 entwickelt und angeführt worden, ähnlich und folgende: **Der doppelte Rabatt** muß

muß stets so beschaffen seyn, daß so wohl das rabattirte Capital, von der Zeit der wirklichen Zahlung an bis zu der Zeit der anfänglich vestgesetzten, durch den Zinseszins zu dem angenommenen pr. C. die Grösse wieder erhalten könne, die es vor der Rabattirung hatte, als auch, daß der Rabatt, den der Bezahler erhält, durch gleichen Zinseszins in der genannten Zeit sich so zu vermehren im Stande sey, daß er mit diesem Zinseszinse zusammengenommen dem Zinseszinse gleiche, welchen der Schuldner bis zur Zeit der zuerst vestgesetzten Zahlung von der ganzen Summe hätte erhalten können. Gesetzt, daß man statt 1215 Rthl. 12 gr. 1$\frac{4}{5}$ pf. die über 4 Jahr, ohne indeß Zins zu tragen, sogleich 1000 Rthl. bezahlt, und also 215 Rthl. 12 gr. 1$\frac{4}{5}$ pf. Rabatt nimmt; so ist zu 5 pr. C. doppelten Rabatt richtig rabattirt worden. Denn *einmal* wachsen 1000 Rthl. durch den Zinseszins a 5 pr. C. in 4 Jahren zu 1215 Rthl. 12 gr. 1$\frac{4}{5}$ pf. an (s. §. 62), und der Gläubiger leidet also keinen Schaden; zweytens könnte der Schuldner, wenn er die gedachten 1215 Rthl. 12 gr. 1$\frac{4}{5}$ pf. an sich behielte, nach 4 Jahren (1215 Rthl. 12 gr. 1$\frac{4}{5}$ pf.) $\times \frac{21^4}{20^4}$ — 1000 Rthl. Zinseszins rechnen, und eben so hoch wachsen 215 Rthl. 12 gr. 1$\frac{4}{5}$ pf. in 4 Jah-

Jahren durch den Zinseszins a 5 pr. C. an, und es wird also auch der Schuldner nicht vervortheilt

§. 172.

Auch hier ist die Bestimmung nöthig, wie weit von einander entfernt die Zinstermine bey der Rechnung angenommen werden sollen. In dem vorhin angeführten Beyspiele sind jährige Termine vorausgesetzt worden. Eben dies soll in den folgenden, wenn nichts besonderes bestimmt wird, jedesmal geschehen, zumal, da dieser Fall der gewöhnliche ist, und die übrigen leicht auf denselben zurückgeführt werden können. Würden halbjährige Zinstermine und 5 pr. C. angenommen, so bezahlte man bey doppeltem Rabatte und vierjähriger früherer Zahlung nicht für 1215 Rthlr 12 gr 1 4/5 pf, sondern für 1218 Rthlr 9 gr und etwa 8 pf sogleich 1000 Rthlr. Dieser Unterschied beweiset die Richtigkeit der obigen Behauptung.

§. 173.

Was nun zuvörderst den Fall betrifft, wenn bey gegebenen pr. C. des doppelten Rabatts und der Zeit der frühern Zahlung entweder die sogleich zu bezahlende Summe, oder der zu gebende Rabatt berechnet werden soll; so zeigt eine genaue Vergleichung desselben mit dem §. 58 bey b angeführten zweyten Falle der Zinseszinsrechnung, daß beyde nur den Worten nach von einander unterschieden sind. Es ist z. B. in Ansehung

hung der Rechnung einerley, ob man frägt: Wie viel Geld muß man a 5 pr. C. auf Zinseszins anlegen, um in 10 Jahren dafür 5000 Rthlr zu bekommen? oder: Wie viel bezahlt man für 5000 Rthlr, die ohne indeß Zins zu tragen, nach 10 Jahren fällig sind, bey 5 pr. C. doppelten Rabatt sogleich? Es ist daher nicht schwer, die hieher gehörigen Fragen der doppelten Rabattrechnung in gleich bedeutende Fragen der Zinseszinsrechnung zu verwandeln, und es wäre überflüssig, von dem gegenwärtigen Falle weiter noch zu reden.

§. 174.

Auch der Fall, wenn aus dem wirklich bezahlten Capitale, dem pr. C. des doppelten Rabatts und der Zeit der frühern Zahlung das Capital gesucht werden soll, welches mit doppelten Rabatte früher abgetragen worden ist, ist mit dem §. 58 bey a angeführten ersten Falle der Zinseszinsrechnung in Ansehung der erforderlichen Rechnung gleich. Ob man z. B. frägt: Wie groß ist das Capital, für welches man bey fünfjähriger früherer Zahlung und 5 pr. C. doppelten Rabatt 2000 Rthlr bezahlt hat? oder: Wie hoch wachsen 2000 Rthlr durch den Zinseszins a 5 pr. C. in 5 Jahren an? ändert in der Rechnung nichts, und ich kann daher auch bey den hieher gehörigen Fragen auf die Zinseszinsrechnung verweisen.

§. 175.

§. 175.

Endlich bedarf auch der Fall, wenn aus dem Capitale, das nach einiger Zeit erst, ohne indessen Zins zu tragen, fällig ist, der dafür sogleich mit doppelten Rabatte bezahlten Summe und der Zeit der frühern Zahlung das pr. C. des doppelten Rabatts bestimmt werden soll, keiner weitläuftigen Erörterung, indem sich derselbe sehr leicht in den §. 58 bey c angeführten dritten Fall der Zinseszinsrechnung verwandeln läßt. Sind z. B. statt 1500 Rthl, die ohne Zins nach 7 Jahren fällig waren, sogleich 1000 Rthl bezahlt, und doppelter Rabatt genommen worden; so ist es in Ansehung der Rechnung gleich, ob gefragt wird, zu was für einem pr. C. doppelten Rabatts die 1500 Rthl rabattirt worden, daß 1000 Rthl dafür gegeben werden mußten, oder ob man zu wissen verlangt, zu was für einem pr. C. 1000 Rthl auf Zinseszins angelegt werden müssen, um in 7 Jahren zu 1500 Rthl anzuwachsen.

§. 176.

Der doppelte Rabatt wird eben so als der einfache auf und nicht in 100 gerechnet; ein Umstand, der nach dem, was in der gemeinen Rabattrechnung in dieser Rücksicht gesagt worden, nur berührt zu werden braucht. Wenn bey dem einfachen Rabatte in 100 Vervortheilung des Gläubigers entsteht, so kann der doppelte Rabatt in

100,

100, man rechne übrigens wie man wolle, ebenfalls nicht ohne Vervortheilung des Gläubigers statt finden.

§. 177.

Es folgt also nunmehr der Fall, wenn das nach einiger Zeit fällige, nach Verabredung des Gläubigers und Schuldners aber mit doppeltem Rabatte sogleich zu bezahlende Capital bis zu seiner Fallzeit Zinseszins trägt. Ein Beyspiel davon ist folgendes. Es hat jemand von einem andern 10000 Rthl. nach 5 Jahren zu fordern, und muß derselbe ihm diese 10000 Rthl. bis dahin mit 3 pr. C. verzinsen. Nach einem Jahre trägt der Schuldner den fälligen Zins ab, und verabredet mit seinem Gläubiger, jetzt die ganze übrige Schuldsache auf die Art abzumachen, daß er mit 5 pr. C. und doppelten Rabatte bezahle. Es wird gefragt, wie viel der Schuldner zu entrichten habe?

§. 178.

Man sieht bey einer aufmerksamen Betrachtung dieses Falls bald, daß derselbe theils in die Zinseszinsrechnung, theils in die doppelte Rabattrechnung gehöre. Der Schuldner hat nemlich jedesmal, nicht das schuldige Capital selbst, sondern das durch den Zinseszins zu dem verabredeten pr. C. und in der vestgesetzten Zeit vermehrte Capital, früher zu bezahlen. In dem im vorhergehenden §. angeführten Exempel, wo die Zeit der frühern Zahlung 4 Jahr ist, muß der Schuldner nicht 10000 Rthlr., sondern 11255 Rthlr. und ohngefähr 2 Gr. mit doppelten Rabatte a 5 pr. C. sogleich abtragen. Man muß also das früher zu bezahlende Capital, wenn man die sogleich zu entrichtende Summe finden will, mit den aus den gegebenen Dingen entstehenden Anzeigern der Veränderung eines Capitals zur Findung theils derjenigen Summe, wozu es durch den Zinseszins anwächst, theils derjenigen, welche man bey doppeltem Rabatte sogleich dafür bezahlen muß, multipliciren. In dem angeführten Exempel geschieht die Rechnung nach folgendem:

$$10000 \text{ Rthlr.} \times \frac{103^4}{100^4} \times \frac{20^4}{21^4}$$

Wollte man den Rabatt wissen, so wäre der bequemste Weg ihn zu finden die Subtraction des sogleich zu bezahlenden Capitals von der Summe, für welche dasselbe erlegt werden muß. Es ist indeß der Fall selten, daß man diesen Rabatt selbst zu wissen verlangt.

§. 179.

Vor allen Arten der Entwickelung solcher Ausdrücke als $10000 \text{ Rthlr.} \times \frac{103^4}{100^4} \times \frac{20^4}{21^4}$, ist diejenige zu empfehlen, welche vermittelst der Logarithmen geschieht. Wollte man z. B. den angeführten Ausdruck so entwickeln, daß man $\frac{103^4}{100^4}$ in $\frac{112550881}{100000000}$, und $\frac{20^4}{21^4}$ in $\frac{160000}{194481}$

ver-

verwandelte, ferner 112550881 mit 160000, und 100000000 mit 194481 multiplicirte, dann mit jenem Producte 10000 Rthlr vervielfältigte, und endlich das kommende mit dem Producte aus 100000000 in 194481 dividirte, so wäre das ein sehr weitläuftiger und beschwerlicher Weg, auf welchem man sich ausserdem leicht irren könnte. Wie viel kürzer und bequemer ist folgende Entwickelung. Es ist

$$\text{L.}\ \frac{103}{100} = 0{,}01283722,\ \text{und}$$

$$\text{also L.}\ \frac{103^4}{100^4} = 0{,}05134888.\ \text{Ferner}$$

$$\text{ist L.}\ \frac{20}{21} = -\ 1{,}97881070\ \text{und}$$

$$\text{daher L.}\ \frac{20^4}{21^4} = -\ 1{,}91524280;\ \text{folglich}$$

$$\text{L.}\ \frac{103^4}{100^4} \times \frac{20^4}{21^4} = -\ 1{,}96659168.\ \text{Dazu}$$

$$\text{L.}\ 10000 = 4{,}00000000;\ \text{so}$$

kommt 3,96659168, der Logarithme der gesuchten Summe, oder der Logarithme von 9259,58, und die sogleich zu bezahlende Summe ist also 9259 Rthlr und ohngefähr 14 Gr.

Die Logarithmen von $\frac{103}{100}$ und $\frac{20}{21}$ werden als bekannt vorausgesetzt, weil sie in der Zinseszinsrechnung §. 132 ange-

 führt

führt worden. Schreibt man diese Logarithmen bey der Rechnung nicht ab, und addirt man den Logarithmen von 10000 ebenfalls, ohne ihn erst hinzuschreiben, zu den Logarithmen von $\frac{103^4}{100^4} \times \frac{20^4}{21^4}$; so wird die ganze Rechnung folgende. Es ist

$$L.\ \frac{103^4}{100^4} = 0{,}05134888$$

$$\text{und } L.\ \frac{20^4}{21^4} = -1{,}91524280;\ \text{also}$$

$$L.\ \frac{103^4}{100^4} \times \frac{20^4}{21^4} + 10000 = 3{,}96659168.\ \text{u. s. w.}$$

§. 180.

Ich komme zu den zusammengesetzten Fällen der doppelten Rabattrechnung, unter welchen derjenige vorzüglich einer sorgfältigen Betrachtung werth ist, wenn eine Schuld, die der Schuldner terminweise abzutragen sich anheischig gemacht hat, mit einem Male bezahlt werden soll. Es will z. B. jemand 4000 Rthlr, die er in 4 einjährigen Terminen, jeden Termin mit 1000 Rthlr zu bezahlen versprach, sogleich mit doppelten Rabatt a 5 pr. C. entrichten. Es wird gefragt, wie viel er zu geben schuldig sey? — Auch hier muß der Fall, wenn die abzutragende Schuld bis zu ihrer Fallzeit keinen Zins trägt, von demjenigen unterschieden werden, wenn der Schuldner Zins zu geben verbunden ist. Jener Fall soll zuerst betrachtet werden.

§. 181.

Wenn ein Schuldner 4000 Rthlr, die er in 4 einjährigen Terminen und in gleichen Summen, doch ohne Zins, abtragen sollte, auf einmal und sogleich mit doppelten Rabatte a 5 pr. C. bezahlen will, so muß er geben

für die 1ten 1000 Rthlr, 1000 Rthlr $\times \frac{20}{21}$

— 2 - 1000 — 1000 Rthlr $\times \frac{20^2}{21^2}$

— 3 - 1000 — 1000 Rthlr $\times \frac{20^3}{21^3}$

— 4 - 1000 — 1000 Rthlr $\times \frac{20^4}{21^4}$, oder

überhaupt 1000 Rthlr $\times \left(\frac{20}{21} + \frac{20^2}{21^2} + \frac{20^3}{21^3} + \frac{20^4}{21^4}\right)$.

Es ist aber die Reihe $\frac{20}{21} + \frac{20^2}{21^2} + \frac{20^3}{21^3} + \frac{20^4}{21^4}$ eine geometrische Reihe, und ihre Summe $\frac{\frac{20^5}{21^5} - \frac{20}{21}}{-\frac{1}{21}}$, d. h. $\left(\frac{20^5}{21^5} - \frac{20}{21}\right) \times -21$, oder $-21 \times \frac{20^5}{21^5} + 20$, oder $20 - 21 \times \frac{20^5}{21^5}$. Folglich muß anstatt der gedachten 4000 Rthlr sogleich bezahlt werden 20×1000 Rthlr

$= 21 \times \frac{20^5}{21^5} \times 1000$ Rthlr. Sollte irgend eine andere Summe unter gleichen Bedingungen in 10 Terminen abgetragen werden; so würde zu bezahlen seyn

für	den	1ten	Termin	$\frac{20}{21}$
—	—	2 —	—	$\frac{20^2}{21^2}$
—	—	3 —	—	$\frac{20^3}{21^3}$
—	—	4 —	—	$\frac{20^4}{21^4}$
—	—	5 —	—	$\frac{20^5}{21^5}$
—	—	6 —	—	$\frac{20^6}{21^6}$
—	—	7 —	—	$\frac{20^7}{21^7}$
—	—	8 —	—	$\frac{20^8}{21^8}$
—	—	9 —	—	$\frac{20^9}{21^9}$
—	—	10 —	—	$\frac{20^{10}}{21^{10}}$

derjenigen Summe, welche in jedem Termine entrichtet werden sollte.

Also betrüge die ganze sogleich zu bezahlende Summe

20^{11}

$$\frac{\frac{20^{11}}{21^{11}} - \frac{20}{21}}{-\frac{1}{21}}, \text{ oder } -21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} + 20, \text{ oder}$$

$20 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$ derjenigen Summe, die für jeden Termin vestgesetzt ist.

§. 182.

Wenn also eine Schuld, die terminweise in gleichen Summen und ohne Zins zu bezahlen ist, auf einmal und sogleich mit doppelten Rabatte a 5 pr. C. abgetragen werden soll, und gefragt wird, wie viel sogleich zu bezahlen sey? so suche man das zwanzigfache der für jeden Termin fälligen Summe, und ziehe davon eben dieselbe Summe mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität, deren Exponent um 1 grösser ist als die Zahl der Termine, und mit 21 multiplicirt ab. Die vortheilhafteste Art dies zu thun, mögen folgende Beyspiele zeigen.

Wenn die im Anfange des vorhergehenden §. angeführte Aufgabe aufzulösen ist; so ist

$$20 \times 1000 = 20000 \text{ Rthl.}$$

$$\text{L. } \frac{20^5}{21^5} = -1{,}8940535$$

$$\text{L. } 21 = 1{,}3222193, \text{ und}$$

$$\text{L. } 1000 = 3{,}0000000; \text{ also}$$

$\text{L.}\ \frac{20^5}{21^5} \times 21 \times 1000 = 4{,}2162728$, welcher zu der Zahl 16454,05 gehört, die von 20000 Rthlr abgezogen 3545,95 Rthlr zur sogleich zu bezahlenden Summe giebt.

Wenn 1000 Rthlr, die in 10 einjährigen Terminen jedesmal mit 100 Rthlr bezahlt werden sollen, mit doppelten Rabatte a 5 pr. C. auf einmal und sogleich abzutragen sind, und gefragt wird, wie viel zu geben sey; so ist die Rechnung folgende.

$$\text{Es ist } 20 \times 100 = 2000, \text{ und}$$

$$\text{L.}\ 21 = 1{,}3222193$$

$$\text{L.}\ \frac{20^{11}}{21^{11}} = -\ 1{,}7669177$$

$$\text{L.}\ 100 = 2{,}0000000, \text{ also}$$

$$\text{L.}\ 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} \times 100 = 3{,}0891370, \text{ und}$$

dieser Logarithme gehört zur Zahl 1227,826. Es ist also die sogleich zu bezahlende Summe 2000 Rthlr — 1227,826 Rthlr, d. h. 772,174 Rthlr.

§. 183.

Findet ein anderes pr. C. als 5 statt, so leidet natürlicher Weise die vorhergehende Regel die Veränderung, daß allenthalben anstatt des Anzeigers $\frac{20}{21}$ der aus dem vestgesetzten pr. C. sich ergebende Anzeiger genommen

men werden muß. Es wolle z. B. jemand 1000 Rthlr., die er in 10 einjährigen Terminen jedesmal mit 100 Rthlr., aber ohne Zins, abtragen sollte, mit doppelten Rabatte à 3 pr. C. mit einem Male und sogleich entrichten, und es werde gefragt, wie viel er zu bezahlen habe; so muß er geben

für den 1ten Termin	$\frac{100}{103}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 2 — —	$\frac{100^2}{103^2}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 3 — —	$\frac{100^3}{103^3}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 4 — —	$\frac{100^4}{103^4}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 5 — —	$\frac{100^5}{103^5}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 6 — —	$\frac{100^6}{103^6}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 7 — —	$\frac{100^7}{103^7}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 8 — —	$\frac{100^8}{103^8}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 9 — —	$\frac{100^9}{103^9}$	$\times$	100 Rthlr.
— — 10 — —	$\frac{100^{10}}{103^{10}}$	$\times$	100 Rthlr.

In

allem also giebt er 100 Rthlr $\times \left(\frac{100}{103}+\frac{100^2}{103^2}+\frac{100^3}{103^3}\right.$

$+\frac{100^4}{103^4}+\frac{100^5}{103^5}+\frac{100^6}{103^6}+\frac{100^7}{103^7}+\frac{100^8}{103^8}+\frac{100^9}{103^9}$

$\left.+\frac{100^{10}}{103^{10}}\right)$, d. h. 100 Rthlr $\times \dfrac{\frac{100^{11}}{103^{11}}-\frac{100}{103}}{-\frac{3}{103}}$, oder

100 Rthlr $\times \frac{100}{3} - 100$ Rthlr $\times \frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}}$.

Man rechne also: Es ist

100 Rthlr $\times \frac{100}{3} = 3333,333$, und

L. $\frac{103}{3} = 1,5357159$, denn es ist L. 103 $= 2,0128372$, und L. 3 $= 0,4771213$. Ferner

L. $\frac{100^{11}}{103^{11}} = -1,8587897$, und

L. $100 = 2,0000000$; also

L. $\frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}} \times 100 = 3,3945056$. Hiezu findet man aus den Tafeln die Zahl 2480,308. Man ziehe also von 3333,333 Rthlr

2480,308 Rthlr ab, so

erhält man zur sogleich zu bez. S. 853,025 Rthlr.

§. 184.

§. 184.

Der bisher betrachtete Fall ist von demjenigen nicht unterschieden, wenn zu bestimmen gegeben wird, wie viel man auf Zinseszins anlegen müsse, um am Ende eines jeden Jahres, so lange als man will, eine verlangte Summe zu empfangen. Es ist z. B. in Ansehung drr Rechnung völlig gleich, ob man frägt: Wie viel muß man, wenn man ohne Zins 10 Jahre nach einander am Ende eines jeden Jahres 100 Rthlr. bezahlen sollte, und diese Schuldsache mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. sogleich abmachen will, dafür bezahlen? oder, ob zu wissen verlangt wird, wie viel man jetzt geben müsse, um 10 Jahre nach einander am Ende eines jeden Jahres für das angelegte Capital und den Zinseszins a 5 pr. C. 100 Rthlr. empfangen zu können? Es ist daher auch dieser Fall mit Recht ein vorzüglich wichtiger Fall genannt worden, und man hat die bisherigen Rechnungen bey der Berechnung der Jahrrenten nöthig. Er verdiente daher auch, daß man ihn durch Tabellen zu erleichtern suchte, und von diesen ist also nunmehr noch zu reden.

§. 185.

Es gehört hieher die 29te Tabelle der schon öfters angeführten Süßmilchschen Tabellensammlung. Sie ist, so wie die schon daraus berührten, auch aus dem

Depar-

Departieux genommen, und hat zur Ueberschrift: Capital, so man geben oder leihen muß, um am Ende eines jeden Jahres, so lange als man will, jährlich 100 Livres zu empfangen. Die Zinsen sind zu 5 vom 100 gerechnet worden. Ihr Anfang ist.

Jahre	Livres	Sous	Deniers
1	95	4	9
2	185	18	10
3	272	6	6
4	354	11	11
5	432	19	0
6	507	11	5
7	578	12	9
8	646	6	5
9	710	15	8
10	772	3	5

Auf diese Art ist die Tabelle bis 100 Jahr fortgesetzt worden. Die Verfertigungsart einer solchen Tabelle ist aus dem 181 und 182ten § leicht herzuleiten, und ihr Gebrauch besteht darin, daß man aus derselben den Zähler des Anzeigers der Veränderung der Summe, welche man am Ende eines jeden Jahres empfangen will, nimmt. Es dient dazu jedesmal die Zahl, welche bey den Jahren steht, welche hindurch man jene Summe verlangt, und der zugehörige Nenner ist allezeit 100 Livres. Nur wenn mit Livres, Sous und Deniers gerechnet wird, die verlangte Summe sich leicht aus 100 Livres zusammensetzen läßt, und nicht sehr groß ist, ist diese Tabelle zum Gebrauche bequem. Man vergleiche hiemit, was oben über ähnliche Tabellen gesagt worden ist.

§. 186.

Von einem allgemeinern Gebrauche und besser sind diejenigen, welche in Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst S. 273 bis 275 stehen. Sie sind ebenfalls bis auf 100 Jahre und für 5, 4 und 3 pr. C. eingerichtet worden. Der Anfang davon ist.

Um Jahre hindurch jedes Jahr 100 Rk zu bekommen, muß man jetzt zahlen

Jahre	5 pr. C.	4 pr. C.	3 pr. C.
1	95,23809	96,15384	97,08737
2	185,94099	188,60948	191,34691
3	272,32474	277,50927	282,86109
4	354,59504	362,98953	371,70981
5	432,94764	445,18229	457,97071
6	507,56914	524,21379	541,71937
7	578,63726	600,20561	623,02857
8	646,32119	673,27469	701,96955

Auch von diesen Tabellen ergiebt sich die Art der Verfertigung derselben aus dem 181 und 182ten §. Was ihren Gebrauch anbetrift, so ist er dem Gebrauche der Deparcieusischen Tabelle gleich; es wird aber derselbe noch bequemer, wenn man dieselben statt für 100 für 1 eintrichtet. Mit dieser Veränderung wäre der Anfang derselben folgender.

Um

Um Jahre hindurch jedes Jahr 1 zu bekommen muß man jetzt zahlen

Jahre	5 pr. C.	4 pr. C.	3 pr. C.
1	0,9523809	0,9615384	0,9708731
2	1,8594099	1,8860948	1,9134691
3	2,7232474	2,7750927	2,8286109
4	3,5459504	3,6298953	3,7170981
5	4,3294764	4,4518229	4,5797071
6	5,0756914	5,2421379	5,4171937
7	5,7863726	6,0020561	6,2302857
8	6,4632119	6,7327469	7,0196955

§. 187.

Gesetzt, daß gefragt würde: Wie viel muß man anstatt 800 Rthlr, die ohne Zins in 8 Jahren hinter einander jedesmal mit 100 Rthlr zu bezahlen sind, geben, wenn man dieselben mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. sogleich bezahlen will? oder: Wie viel muß man auf Zinseszins zu 5 pr. C. anlegen, um dadurch, daß man 8 Jahre hinter einander am Ende eines jeden Jahres 100 Rthlr bekommt, Capital und Zins wieder zu erhalten? so geben die Florencourtschen Tabellen 646,321 Rthlr an, und dies ist die verlangte Summe. Gebrauchte man die Süß-

milch-

milchschen Tabellen, so müßte man erst nach folgendem Ausdrucke rechnen:

$$100 \text{ Rthl.} \times \frac{646 \text{ Liv. } 6 \text{ Sous } 5 \text{ Den.}}{100 \text{ Liv.}}$$

und es fällt der Vorzug der Florencourtschen Tabellen in die Augen. Wenn das zu verändernde Capital sich auf eine leichte Art aus 100, oder den Factoren von 100 zusammensetzen läßt, so ist es sogar besser, die vorhin erwähnte Veränderung nicht mit den Tabellen vorzunehmen; für Fälle aber, wie wenn 718 Rthl. 12 ggr. in jedem Termine gegeben werden sollen, bleibt diese Veränderung immer gut, und es muß auf dergleichen, wenn sie gleich seltner vorkommen, doch auch Rücksicht genommen werden.

§. 188.

Wenn die Zahlung bey Geldern, die in gleichen Summen terminweise abgetragen werden sollen, sogleich anfängt, z. B. 10 Jahre hinter einander alle Jahr 100 Rthl. gegeben werden sollen, und die Zahlungszeit der ersten 100 Rthl. jetzt ist; so kann man, den Werth einer solchen Schuld zu finden, die §. 181 und 182 gegebene Regel befolgen, wenn man einen Termin weniger annimmt, und dagegen am Ende der Rechnung die in jedem Termine zu bezahlende

Summe

Summe zu dem herausgebrachten addirt. In dem angeführten Falle findet man den Werth der ganzen Schuld aus

$$20 \times 100 \text{ Rthlr} - 21 \times \frac{20^{10}}{21^{10}} \times 100 \text{ Rthlr} + 100 \text{ Rthlr}.$$

Da aber diese Formel gleichbedeutend mit folgender ist

$$21 \times 100 \text{ Rthlr} - 21 \times \frac{20^{10}}{21^{10}} \times 100 \text{ Rthlr};$$

so kann man auch nach dieser rechnen.

§. 189.

Bisweilen ist der erste Termin von der Zeit, wo die frühere Zahlung geschehen soll, um eine andere Zeit entfernt, als ein jeder der übrigen Termine von dem zunächst vorhergehenden oder zunächst folgenden. Es kauft z. B. jemand ein Gut für 9000 Rthlr, und das Kaufpretium soll in 4 Terminen bezahlt werden, wovon in 5 Jahren der erste, und die 3 darauf folgenden Jahre die drey letzten seyn sollen. Es will aber der Käufer mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. jetzt gleich bezahlen. Wie groß ist die Summe, die er entrichten muß?

Die in jedem Termine zu bezahlende Summe ist $\frac{9000}{4}$ Rthlr oder 2250 Rthlr, und der erste Termin fällt nach

5 Jahren, der andere nach 6 Jahren, der dritte nach 7 Jahren und der vierte endlich nach 8 Jahren. Es muß also der Käufer geben

für den 1ten Termin 2250 Rthlr $\times \frac{20^5}{21^5}$

— — 2 — — 2250 Rthlr $\times \frac{20^6}{21^6}$

— — 3 — — 2250 Rthlr $\times \frac{20^7}{21^7}$

— — 4 — — 2250 Rthlr $\times \frac{20^8}{21^8}$; also überhaupt

2250 Rthlr $\times \left(\frac{20^5}{21^5} + \frac{20^6}{21^6} + \frac{20^7}{21^7} + \frac{20^8}{21^8}\right)$ oder

2250 Rthlr $\times \frac{\left(\frac{20^9}{21^9} - \frac{20^5}{21^5}\right)}{-\frac{1}{21}}$ d. h. 2250 Rthlr $\times 21 \times \frac{20^5}{21^5}$ — 2250 Rthlr $\times 21 \times \frac{20^9}{21^9}$. Nun ist

$$l.\ 2250 = 3{,}3521825$$
$$l.\ 21 = 1{,}3222193$$
$$l.\ \frac{20^5}{21^5} = -\ 1{,}8940535, \text{ also}$$

$l.\ 2250 \times 21 \times \frac{20^5}{21^5} = 4{,}5684553$, und folglich

I. 2250 Rthlr $\times 21 \times \frac{20^5}{21^5} = 37021{,}6$ Rthlr.

Ferner

Ferner ist $l.\ 2250 = 3{,}3521825$

$l.\ 21 = 1{,}3222193$

$l.\ \frac{20^9}{21^9} = -.\ 1{,}8092963$, also

$l.\ 2250 \times 21 \times \frac{20^9}{21^9} = 4{,}4836981$, und folglich

2. 2250 Rt. $\times\, 21 \times \frac{20^9}{21^9} = 30457{,}8$ Rt.

Die baar zu bezahlende Summe also ist 6563,8 Rt.

Will man diese Aufgabe vermittelst der hieher gehörigen Tabellen auflösen, so ist die Rechnung folgende. Man bezahlt für 1000 Rt., die fällig sind

	sogleich		also für 2250 Rt.
nach 5 Jahren	783,52 Rt.	—	1762,92 Rt.
— 6 —	746,21 Rt.	—	1678,97 Rt.
— 7 —	710,68 Rt.	—	1599,03 Rt.
— 8 —	676,83 Rt.	—	1522,86 Rt.
	und also überhaupt	—	6563,78 Rt.

Es ist übrigens die betrachtete Aufgabe aus **Carl Christ. Langsdorf's Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Grössen** (Manheim 1776 und 1777) und zwar aus der Fortsetzung S. 288 genommen. Langsdorf bringt zur baar zu bezahlenden Summe 5757,7 Rt., und folglich 806,1 Rt. weniger heraus. Der Fehler ist darin zu suchen, daß Langsdorf S. 287 den Werth des gegenwärtig zu zahlenden Capitals $= mp - a$ setzt, da er nach der S. 285 gegebenen Bestimmung von $m = (m + 1)p - a$ seyn muß. Die Regel

$$p\left(\frac{e^{m+1} - 1}{(e-1) \cdot e^{q+m}} - 1\right)$$

muß daher in diese abgeändert werden

$$p\left(\frac{e^{m+1} - 1}{(e-1) \cdot e^{q+m}}\right);$$

und die Ausrechnung des angeführten Exempels geschieht nicht nach

$$2250 \text{ Rth} \times \left(\frac{\frac{21^5}{20^5} - 1}{\frac{1}{20} \cdot \frac{21^9}{20^9}} - 1\right)$$

sondern nach

$$2250 \text{ Rth} \times \left(\frac{\frac{21^4}{20^4} - 1}{\frac{1}{20} \cdot \frac{21^8}{20^8}}\right).$$

Ueberhaupt aber ist die Langsdorfsche Regel zusammengesetzter, und ihre Anwendung, wenn sie nicht weiter entwickelt wird, beschwerlicher, als der Gebrauch derjenigen Regel, die bey der obigen Auflösung zum Grunde liegt, und nachher allgemein ausgedruckt werden wird. Der Ausdruck

$$\frac{\frac{21^4}{20^4} - 1}{\frac{1}{20} \cdot \frac{21^8}{20^8}}$$

kann

kann indeß in folgenden verwandelt werden

$$20 \times \frac{20^4}{21^4} - 20 \times \frac{20^8}{21^8};$$

denn er ist $= \left(\frac{21^4}{20^4} - 1\right) \times 20 \times \frac{20^8}{21^8} =$
$20 \times \frac{21^4}{20^4} \times \frac{20^8}{21^8} - 20 \times \frac{20^8}{21^8} = 20 \times \frac{20^4}{21^4}$
$- 20 \times \frac{20^8}{21^8}$, und hiermit stimmt der Ausdruck
$21 \times \frac{20^5}{21^5} - 21 \times \frac{20^9}{21^9}$ vollkommen überein, Multiplicirt man nemlich wirklich mit 21, so erhält man
$\frac{20^5}{21^4} - \frac{20^9}{21^8}$, wovon $20 \times \frac{20^4}{21^4} - 20 \times \frac{20^8}{21^8}$,
wie in die Augen fällt, nicht verschieden ist.

§. 190.

Ist also ein Capital auf die Art in einjährigen Terminen und gleichen Summen, doch ohne Zins, fällig, daß der erste Termin erst nach einigen Jahren ist; so multiplicirt man, um die bey 5 pr. C. und doppelten Rabatte sogleich dafür zu bezahlende Summe zu finden, entweder das 21fache der in jedem Termine abzutragenden Summe einmal mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre des ersten Termins gleich ist, und dann mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität, welche zum

Exponenten die um 1 vermehrte Zahl der Jahre des letzten Termins hat, und ziehe dies zweyte Product von jenem erstern ab; oder das 20fache eben derselben Summe einmal mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität, deren Exponent der um 1 verminderten Zahl der Jahre des ersten Termins gleich ist, und dann mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität, welche zum Exponenten die Zahl der Jahre des letzten Termins hat, und zieht dies zweyte Product ebenfalls von jenem ersten ab.

Um noch ein Beyspiel anzuführen, so ist die bey doppeltem Rabatte a 5 pr. C. für 6000 Rthl, die in 6 auf einander folgenden Jahren in gleichen Summen bezahlt werden sollten, sogleich zu bezahlende Summe, wenn der erste Termin nach 4 Jahren angesetzt ist, entweder

$$21 \times 1000 \text{ Rthl} \times \frac{20^4}{21^4} - 21 \times 1000 \text{ Rthl} \times \frac{20^{10}}{21^{10}},$$

oder

$$20 \times 1000 \text{ Rthl} \times \frac{20^3}{21^3} - 20 \times 1000 \text{ Rthl} \times \frac{20^9}{21^9}.$$

Daß man die in der gegebenen Regel gedachte Multiplicationen hier durch den Gebrauch der Logarithmen bequem in eine Addition verwandeln könne, ist aus der im vorhergehenden §. befindlichen Rechnung klar, und braucht also nur berührt zu werden.

§. 191.

Fände ein anderes pr. C., z. B. $2\frac{1}{2}$, statt, so litte die gegebene Regel die Veränderung, daß anstatt $\frac{20}{21}$ der Anzei=

Anzeiger $\frac{40}{41}$, anstatt 21 aber 41, und anstatt 20 endlich 40 gesetzt werden müßte. Um das §. 189 angeführte Exempel beyzubehalten, so müßte, wenn der Rabatt $2\frac{1}{2}$ pr. C. seyn sollte, bezahlt werden

für den 1ten Termin 2250 Rthlr $\times \frac{40^5}{41^5}$

— — 2 — — 2250 Rthlr $\times \frac{40^6}{41^6}$

— — 3 — — 2250 Rthlr $\times \frac{40^7}{41^7}$

— — 4 — — 2250 Rthlr $\times \frac{40^8}{41^8}$, also

überhaupt 2250 Rthlr $\times \left(\frac{40^5}{41^5} + \frac{40^6}{41^6} + \frac{40^7}{41^7} + \frac{40^8}{41^8}\right)$

$$= 2250 \text{ Rthlr} \times \left(\frac{\frac{40^9}{41^9} - \frac{40^5}{41^5}}{-\frac{1}{41}}\right) = 2250 \text{ Rthlr}$$

$$\times \left(41 \times \frac{40^5}{41^5} - 41\,\frac{40^9}{41^9}\right) = 2250 \text{ Rthlr} \times$$

$$\left(40 \times \frac{40^4}{41^4} - 40 \times \frac{40^8}{41^8}\right).$$

Allgemein also die Regel für den Fall zu geben, wenn das pr. C. von der Art ist, daß der daraus entstehende Anzeiger der Veränderung des Capitals zur

Findung der bey einjähriger früherer Zahlung sogleich zu bezahlenden Summe aus einem Zähler und einem Nenner besteht, die um 1 verschieden sind; so nimmt man jedesmal anstatt $\frac{20}{21}$ den eben gedachten Anzeiger, anstatt 21 seinen Nenner, und anstatt 20 seinen Zähler. Es wird aber hiebey, so wie solches in den Exempeln §. 189 und 190 statt findet, vorausgesetzt, daß die Zeit der Termine, nach Jahren bestimmt, durch eine ganze Zahl ausgedruckt werde.

§. 192.

Wäre das pr. C. 3, so wäre der Anzeiger der Veränderung des Capitals zur Findung der bey einjähriger früherer Zahlung sogleich zu bezahlenden Summe $\frac{100}{103}$ und die Rechnung des Exempels §. 189 wäre folgende.

Es muß bezahlt werden

für den 1ten Termin 2250 Rthlr $\times \frac{100^5}{103^5}$

— — 2 — — 2250 Rthlr $\times \frac{100^6}{103^6}$

— — 3 — — 2250 Rthlr $\times \frac{100^7}{103^7}$

— — 4 — — 2250 Rthlr $\times \frac{100^8}{103^8}$ also

überhaupt 2250 Rthlr $\times \left(\frac{100^5}{103^5} + \frac{100^6}{103^6} + \frac{100^7}{103^7} + \frac{100^8}{103^8}\right)$

= 2250

$$= 2250 \text{ Rthl} \times \frac{\frac{100^9}{103^9} - \frac{100^5}{103^5}}{-\frac{3}{103}} = 2250 \text{ Rthl} \times$$

$$\left(\frac{103}{3} \times \frac{100^5}{103^5} - \frac{103}{3} \times \frac{100^9}{103^9}\right) = 2250 \text{ Rthl} \times$$

$$\left(\frac{100}{3} \times \frac{100^4}{103^4} - \frac{100}{3} \times \frac{100^8}{103^8}\right).$$

Man ändert also für dergleichen Fälle die §. 190 gegebene Regel auf die Art ab, daß man statt $\frac{20}{21}$ den aus dem bestimmten pr. C. sich ergebenden Anzeiger zur Findung der baar zu bezahlenden Summe, anstatt 21 einen Bruch, dessen Zähler der Nenner dieses Anzeigers und dessen Nenner die Differenz zwischen dem Zähler und Nenner desselben Anzeigers ist, anstatt 20 aber einen Bruch, dessen Zähler der Zähler des gedachten Anzeigers und dessen Nenner die eben erwähnte Differenz ist, setzt.

§. 193.

Gesetzt, daß die Frage entstünde: Es kauft jemand ein Haus für 6000 Rthl, erlegt 3000 Rthl zum Angelde, und verspricht die übrigen 3000 Rthl in drey einjährigen Terminen, jedesmal mit 1000 Rthl, aber ohne Zins, abzutragen. Nach einem halben Jahre verabredet er mit seinem Gläubiger, die gedachten 3000 Rthl mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. sogleich zu bezahlen. Wie viel hat er zu entrichten? so müßte in diesem Falle bezahlt werden

für den 1ten Termin $1000\ \text{Rthl.} \times \frac{40}{41}$

— — 2 — — $1000\ \text{Rthl.} \times \frac{20}{21} \times \frac{40}{41}$

— — 3 — — $1000\ \text{Rthl.} \times \frac{20^2}{21^2} \times \frac{40}{41}$, also

überhaupt $1000\ \text{Rthl.} \times \frac{40}{41} \times \left(1 + \frac{20}{21} + \frac{20^2}{21^2}\right)$

$$= 1000\ \text{Rthl.} \times \frac{40}{41} \times \left(\frac{\frac{20^3}{21^3} - 1}{-\frac{1}{21}}\right) =$$

$$1000\ \text{Rthl.} \times \frac{40}{41} \times \left(21 - 21\,\frac{20^3}{21^3}\right) = 21 \times 1000\ \text{Rthl.}$$

$$\times \frac{40}{41} - 21 \times 1000\ \text{Rthl.} \times \frac{40}{41} \times \frac{20^3}{21^3}.$$

Nun ist

$$\text{L. } 21 = 1{,}3222193$$

$$\text{L. } 1000 = 3{,}0000000$$

$$\text{L. } \frac{40}{41} = -1{,}9892761, \text{ also}$$

$\text{L. } 21 \times 1000 \times \frac{40}{41} = 4{,}3114954$, und folglich

I. 21 ×

$$1.\quad 21 \times 1000 \text{ Rthl} \times \frac{40}{41} = 20487{,}8 \text{ Rthl}$$

Ferner ist

$$l.\ 21 = 1{,}3222193$$

$$l.\ 1000 = 3{,}0000000$$

$$l.\ \frac{40}{41} = -\ 1{,}9892761$$

$$l.\ \frac{20^3}{21^3} = -\ 1{,}9364321, \text{ also}$$

$$l.\ 21 \times 1000 \times \frac{40}{41} \times \frac{20^3}{23^3} = 4{,}2479275, \text{ und}$$

$$2.\quad 21 \times 1000 \text{ Rthl} \times \frac{40}{41} \times \frac{20^3}{21^3} = 17698{,}13 \text{ Rthl}$$

Folglich die gleich zu bezahlende Summe 2789,6 Rthl.

Man thut daher, wenn die Zeit der frühern Zahlung durch Brüche ausgedruckt wird, am besten, wenn man sich vorstellt, daß die ganze Schuld in dem ersten Termine zu bezahlen sey, die so baar zu bezahlende Summe nach §. 188 sucht, und von dieser Summe die für eine frühere Bezahlung von der Zeit des ersten Termins sogleich zu erlegende Summe berechnet. Bedient man sich dabey der Logarithmen, so kann man beyde Arbeiten, auf die oben befolgte Art, mit einem Male verrichten.

§. 194.

§. 194.

Wäre bey dem Falle, der §. 189 u. f. betrachtet worden, zwischen dem Gläubiger und Schuldner die Verabredung getroffen, daß die terminweise zu bezahlende Schuld bis zu ihrer Fallzeit zu einem geringen pr. C., z. E. 2, verzinset werden sollte; so müste die eben daselbst befindliche Aufgabe, wenn sonst kein Umstand verändert würde, auf folgende Art berechnet werden.

Nach Jahren	erhält der Gläubiger	oder dafür jetzt
5	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^5}{50^5}$	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5}$
6	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^6}{50^6}$	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^6}{50^6} \times \frac{20^6}{21^6}$
7	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^7}{50^7}$	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^7}{50^7} \times \frac{20^7}{21^7}$
8	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^8}{50^8}$	— 2250 Rthlr $\times \frac{51^8}{50^8} \times \frac{20^8}{21^8}$

also in allem jetzt 2250 Rthlr $\times \left(\frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} + \frac{51^6}{50^6} \times \frac{20^6}{21^6} + \frac{51^7}{50^7} \times \frac{20^7}{21^7} + \frac{51^8}{50^8} \times \frac{20^8}{21^8}\right)$.

Da aber die Reihe $\frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} + \frac{51^6}{50^6} \times \frac{20^6}{21^6}$

$+ 51^7$

$+ \frac{51^7}{50^7} \times \frac{20^7}{21^7} + \frac{51^8}{50^8} \times \frac{20^8}{21^8}$ eine geometrische Reihe ist, die zum Exponenten $\frac{51}{50} \times \frac{20}{21}$ hat; so ist ihre Summe $\frac{\frac{51^9}{50^9} \times \frac{20^9}{21^9} - \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5}}{\frac{51}{50} \times \frac{20}{21} - 1}$

$= \frac{\frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} - \frac{51^9}{50^9} \times \frac{20^9}{21^9}}{1 - \frac{51}{50} \times \frac{20}{21}}$; und es ist also sogleich zu bezahlen

$$\frac{2250 \text{ Rthlr} \times \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} - 2250 \text{ Rthlr} \times \frac{51^9}{50^9} \times \frac{20^9}{21^9}}{1 - \frac{51}{50} \times \frac{20}{21}}.$$

Nun ist

$$\text{L. } 2250 = 3{,}3521825$$

$$\text{L. } \frac{51^5}{50^5} = 0{,}0430005$$

$$\text{L. } \frac{20^5}{21^5} = -1{,}8940535, \text{ also}$$

$$\text{L. } 2250 \times \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} = 3{,}2892365, \text{ und}$$

$$2250 \text{ Rthlr} \times \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} = 1946{,}42 \text{ Rthlr.}$$

Ferner

$$\text{Ferner ist L. } 2250 = 3{,}3521825$$

$$\text{L. } \frac{51^9}{50^9} = 0{,}0774009$$

$$\text{L. } \frac{20^9}{21^9} = -\,1{,}8092963\text{, also}$$

$$\text{L. } 2250 \times \frac{51^9}{50^9} \times \frac{20^9}{21^9} = 3{,}2388797\text{, und}$$

$$2250 \text{ Rthl.} \times \frac{51^9}{50^9} \times \frac{20^5}{21^5} = \underline{1733{,}32 \text{ Rthl.}}$$

$$\text{Folglich ist } 213{,}1 \text{ Rthl. gleich}$$

$$2250 \text{ Rthl.} \times \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5} - 2250 \text{ Rthl.} \times \frac{51^9}{50^9} \times \frac{20^9}{21^9}.$$

Da nun $\frac{51}{50} \times \frac{20}{21} = \frac{1020}{1050}$, und also $1 - \frac{51}{50} \times \frac{20}{21}$ $= \frac{3}{105} = \frac{1}{35}$; und $\dfrac{213{,}1 \text{ Rthl.}}{\frac{1}{35}} = 213{,}1 \text{ Rthl.} \times 35$ $= 7458{,}5$ Rthl.; so müssen in dem betrachteten Falle 7458,5 Rthl. sogleich bezahlt werden.

Aus dem gegenwärtigen Falle läßt sich herleiten, wie die Rechnung anzustellen sey, wenn der erste Termin von der Zeit der wirklichen Zahlung eben so weit entfernt ist, als jede zwey unmittelbar auf einander folgende Termine von einander, und die terminweise zu bezahlende Schuld bis zu ihrer Fallzeit einen verabredeten Zins trägt. Wären z. B. die 9000 Rthl. in der so eben aufgelösten Aufgabe von jetzt an in 4 einjährigen Terminen zu bezahlen; so würde man, würde übrigens nichts geändert, die dafür

sogleich

sogleich zu bezahlende Summe durch die Entwickelung dieses Ausdrucks finden:

$$\frac{2250\,\text{Rthlr} \times \frac{51}{50} \times \frac{20}{21} - 2250\,\text{Rthlr} \times \frac{51^5}{50^5} \times \frac{20^5}{21^5}}{1 - \frac{51}{50} \times \frac{20}{21}}$$

Mehrere Beyspiele von dieser Art, so wie auch eine allgemeine Regel für die gegenwärtige Fälle, sind für den, der das bisherige aufmerksam betrachtet, nicht nöthig.

§. 195.

Wenn auf eine Sache, z. B. beym öffentlichen Verkaufe auf ein Landgut, verschiedentlich geboten wird, und ein oder mehrere Gebote von der Art sind, daß entweder die ganze Kaufsumme oder ein Theil derselben terminweise abgetragen werden soll; so gebraucht man die Rabattrechnung, um diese verschiedene Gebote gehörig gegen einander würdigen zu können. Von dem Gebrauche der gemeinen Rabattrechnung in dieser Rücksicht ist bereits oben geredet worden; es kann aber, überhaupt zu urtheilen, auch die doppelte Rabattrechnung dabey angewandt werden, und die jedesmal statt findenden Umstände müssen entscheiden, ob man von jener oder von dieser Gebrauch zu machen habe.

§. 196.

Die Regel der doppelten Rabattrechnung entwickelt von Leibnitz in act. erud. Lips. 1683. Octob. S. 425 f.

auf

auf folgende Art. Gesetzt ein Schuldner wollte bey 5 pr. C. Rabatt und einjähriger früherer Zahlung $\frac{1}{20}$ des Capitals abziehen, so anticipirte er dieses $\frac{1}{20}$ ebenfalls ein Jahr, denn nach einem Jahre kömmt ihm dies $\frac{1}{20}$ erst zu, und sein Gläubiger müßte also zuvor davon $\frac{1}{20}$ oder $\frac{1}{400}$ des Capitals rabattiren. Nun anticipirte aber der Gläubiger wieder dies $\frac{1}{400}$, und der Schuldner müßte daher $\frac{1}{20}$ davon, oder $\frac{1}{8000}$ des Capitals, abziehen u. s. w. Es kann also der Schuldner bey einjähriger früherer Zahlung mit 5 pr. C. Rabatt nicht $\frac{1}{20}$ des Capitals, sondern $\frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} - \frac{1}{160000} + \frac{1}{3200000}$ u. s. w. d. h. $\frac{1}{21}$ des Capitals rabattiren; und auf eine ähnliche Art wird bey mehrjähriger früherer Zahlung geschlossen. Von Leibnitz erwählte diesen Beweis, um dadurch unmittelbar die Carpzovsche Art den Rabatt zu berechnen zu widerlegen, und man geht daher, wenn diese besondere Absicht nicht statt findet, mit Recht von dieser Beweisart ab. Den oben eingeschlagenen Weg geht auch von Segner in der Vorrede zu Ungers öfters schon angeführten Beyträgen.

§. 197.

Nun entsteht die Frage: **Was für eine Rabattrechnung, die gemeine oder die doppelte, muß bey wirklichen Vorfällen gebraucht werden?** Es ist schon §. 139 behauptet worden, daß diejenigen irren, welche ausschliessungsweise entweder die eine oder die andere angewandt

gewandt wissen wollen, und es läßt sich die angeführte Frage, allgemein genommen, auf keine Art und Weise bestimmt beantworten. Es ist dies gleichwohl geschehen. **Bilfinger z. B. in dem Anhange zu Polacks juristischen Mathematic**, und mehrere andere sind für die doppelte Rabattrechnung, welche auch **die Leibnitzische Berechnung des Interusuriums** genannt wird. **Hoffmann** hingegen streitet für seine Art als für die einzige richtige. Bilfinger sagt unter andern: **Nach Hoffmanns Art wird der Schuldner vervortheilt, und seine Regel führt zu verschiedenen Bezahlungen; die Leibnitzische Regel hebt alle Vervortheilung auf, und widerspricht sich nie:** und **Hoffmann dagegen, daß die Leibnitzische Berechnung des Interusuriums mit den Landsgesetzen streite, welche Zinseszins zu nehmen verbieten.** Es wird nicht undienlich seyn, die Gründe der Bilfingerischen Behauptung herzusetzen. Seine eigenen Worte sind folgende.

§. 15. Anjetzo halten wir uns unmittelbar an den Grundsatz: durch die anticipirte Bezahlung muß kein Theil nichts verlieren. Es muß folglich dieselbige so bestimmt werden, daß, wenn ich mein jetzo empfangenes Geld landläufig nutze, oder wenn es der andere behält, und selbst nutzet, es auf bestimmte Zeit die ganze Summe betrage. Man setze, es ist mir einer nach 2 Jahren schuldig zu bezahlen 4410 Fl. davor weiset mir anjetzo der Herr von Leibnitz 4000 Fl. an. Ich nehme sie, und lege sie in Capital, über ein Jahr erhebe ich davon 200 Fl. Zins. Ich habe also 4200 Fl. die erste 4000 lasse ich stehen, und lege die 200 Fl. baares Geld anderswo auch an. Nach verflossenem Jahre habe ich von jenem wieder 200 Fl. von diesen aber 10 Fl. Zins vom neuen Capital: in Summa 4410 Fl. baar Geld auf die oben bestimmte Zeit.

§. 16. Gegen diese Rechnung ist nichts einzuwenden: denn hätte mein Schuldner gleich im Anfange seine 4000 Fl. an ein richtiges Capital (dergleichen man in diesen Rechnungen voraussetzet) geleget, und die im ersten Jahre eingekommenen 200 Fl. auch also; so hätten sie ihm die verlangte 4410 Fl. in 2 Jahren getragen. Wenn er also im Anfange hätte mehr geben sollen, so wäre er; hätte er mir weniger gegeben, so wäre ich vervortheilt worden. Zum Exempel, nach Hoffmännischer Rechnung wäre das Interusurium auf 2 Jahr $\frac{1}{11}$ des scheinbaren Capitals: folglich das wahre Capital anjetzo $\frac{10}{11}$. Also anstatt 4410 Fl. hiesse es:

Wie 11 zu 10 also 4410 . . . .

Dieses giebt $4009\frac{1}{11}$ Fl. Nun laßt uns rechnen; die Zinse auf das erste Jahr sind $200\frac{5}{11}$ Fl. damit besitze ich $4209\frac{6}{11}$ Fl. Ein guter Haushalter thut wenigstens die 209 Fl. wieder aus, damit bekömmt er im andern Jahre, erstlich von dem Hauptcapital wieder $200\frac{5}{11}$ Fl. hernach von den 209 Fl. erhält er $10\frac{9}{20}$ Fl. Nun zähle man zusammen:

Er

Er hat Hauptguth	$4009\frac{1}{11}$	Zusammen
Neu angelegt von den ersten Jahrszinsen	$209\frac{5}{11}$	$4437\frac{219}{220}$ oder
Zinse des andern Jahres	$219\frac{9}{20}$	4438 Fl.

Damit ist derjenige, so mir nach Hoffmännischer Rechnung bezahlet hätte, in 2 Jahren um 28 Fl. betrogen; denn so viel hätte er als ein guter Haushalter aus seinem Gelde gewinnen können, wenn er es behalten hätte.

§. 17. Wir wollen zum Ueberfluß noch einen Fall berechnen, um zu sehen, daß sich die Hoffmännische Rechnung selbst aufhebe. Zum Exempel, es ist mir einer nach 5 Jahren schuldig 40841 Fl. und er will die Schuld sogleich jetzo abtragen: da setzet Leibnitz, er soll 32000 Fl. geben; Hoffmann aber fordert ihm ab $32672\frac{4}{5}$ Fl. Dieses ist schon in der Angabe ein Unterschied von 672 Fl. 48 Kr. Wie wird es erst ergehen mit den Zinsen? Ich will aber anjetzo nicht so wohl auf die Uebersetzung des Schuldners rechnen, als auf den Widerspruch der Rechnung. Nach Herrn Hoffmanns Summe heißt es so: von 32673 Fl. fallen Zinse im ersten Jahre $1633\frac{13}{20}$; dieses Capital lasse ich stehen, und empfange also in 5 Jahren 8168 Fl. folglich mit obigen 32673 Fl. Angabe ist die ganze Summe von 40841 Fl. abgetragen.

§. 18. Aber was thun denn die 1633 Fl. die ich vier Jahre zu früh empfangen habe; und die andern 1633 Fl. die ich drey Jahre zu früh empfangen habe; und die dritten 1633 Fl. die ich zwey Jahre zu früh empfangen habe; und die vierten 1633 Fl. die ich ein Jahr zu früh empfangen habe. Sind diese nicht auch Geld, das Geld bringt? Der Mann ist sie erst in 5 Jahren schuldig, und er soll sie doch vier Jahre vorher, und zwar ganz bezahlen. Vor was redet man denn vom Interusurio, wenn man mir vier Jahre zuvor ganze 1633 Fl. geben muß, vor diejenigen 1633 Fl. die man mir erst nach vier Jahren schuldig ist? denn das wird doch einerley seyn, ob man mir diese 1633 Fl. in natura giebt, oder als Zinse von einem Capitale einnehmen läßt.

§. 19. Und weil sich hier der Ungrund der Hoffmännischen Rechnung greifen läßt: so wollen wir die Sache noch auf eine andere Art vorstellen. Titius ist nach fünf Jahren 40841 Fl. schuldig, davon bezahlt er mit einem Capital 32673 Fl. unter der Bedingung, die ersten 5 Jahre wolle er selbst die Zinsen einnehmen. Folglich ist dieses Capital erst in fünf Jahren seine 32673 Fl. werth, so wie es die Schuld mit sich bringt. Ich nehme das Capital an, und frage, was ist er mir denn noch mehr schuldig? Er ist mir nach 5 Jahren noch 8168 Fl. oder er ist mir nach 5 Jahren fünfmal $1633\frac{12}{20}$ Fl. schuldig. Nun frage ich ferner: die ersten $1633\frac{12}{20}$ Fl. will er mir vier Jahr zuvor, die andern drey, die dritten zwey, die vierten ein Jahr zuvor, und die fünften im Termine selbst bezahlen; was muß er mir für eine Summe geben? Ist es möglich zu sagen, er solle jedesmal 1633 Fl. 36 Kr. geben? Vor was ist denn die Rechnung des Interusuriums?

§. 198.

Vielleicht antwortet man auf die aufgeworfene Frage theilweise am richtigsten auf folgende Art.

a. in

a. **in Ansehung des von den Rabattrechnungen im Gerichte zu machenden Gebrauchs.** Da die Gesetze den Zinseszins verbieten, so kann bey gerichtlichen Vorfällen nicht nach der doppelten Rabattrechnung gerechnet werden, weil sonst bey jeder mehr als einjährigen frühern Zahlung eines nach einer gewissen Zeit fälligen Capitals der Gläubiger seinem Schuldner für die früher bezahlte Summe Zinseszins entrichten müßte. Folgt hieraus sogleich, daß man nach der gemeinen Rabattrechnung rechnen müsse? Wenn dabey, wie **Bilfinger** behauptet, wirkliche Uebersetzung des Schuldners statt findet, so ist auch diese nicht erlaubt. Alsdann bliebe kein anderer Weg übrig, als zwischen den Resultaten der gemeinen und doppelten Rabattrechnung, da jene dem Schuldner und diese dem Gläubiger zu nahe tritt, das Mittel zu suchen, und dies als die baar zu bezahlende Summe anzunehmen. Für 1000 Rthlr z. B. die ohne Zins über 5 Jahr fällig sind, bezahlt man mit einfachem Rabatte zu 5 pr. C. 800 Rthlr, mit doppeltem Rabatte zu gleichem pr. C. aber 783,5 Rthlr. Der Unterschied dieser beyden Summen ist 16,5 Rthlr, und die Hälfte davon oder 8,25 Rthlr entweder von 800 Rthlr abgezogen, oder zu 783,5 Rthlr hinzugethan, könnten 791,75 Rthlr als die sogleich zu bezahlende Summe betrachtet werden. Allgemein zu urtheilen, so wäre diese Art der Rechnung ohnstreitig der Billigkeit am gemässesten; denn wegen der Unmöglichkeit ein Capital zu Zinseszins zu nutzen (s. §. 129) kann der Schuldner mit keinem Schein des Rechts von seinem Gläubiger verlangen, daß er ihm doppelten Rabatt bewilligen, und statt der erwähnten 1000 Rthl. mit 783,5 Rthl. zufrieden seyn solle. Auf der andern Seite hat der Gläubiger kein Recht, von seinem Schuldner zu verlangen, daß er bey der Berechnung des Nutzens, den er von dem schuldigen Capitale bis zur eigentlichen Fallzeit haben kann, blos auf die Summe der von diesem Capitale bis dahin möglichen Zinse, und nicht auch darauf sehen solle, daß er einen oder mehrere Theile des gesammten Zinses vor der gedachten Fallzeit haben, und sie also zu seinem Vortheile eine Zeitlang brauchen kann. Der Schuldner sollte also über die Summe, welche die doppelte Rabattrechnung angiebt, und unter der Summe, welche die gemeine Rabattrechnung herausbringt, bezahlen, und das geschähe auf die angezeigte Art. Finden sich daher sonst keine Umstände, auf welche hiebey Rücksicht zu nehmen; so würde ich kein Bedenken tragen, diesen Weg als den einzigen wahren und mit keinem Gesetze streitenden zu betrachten.

§. 199.

§. 199.

Brauchbare Gesetze aber sind nicht für das allgemeine, sondern für Fälle, so wie sie sich wirklich ereignen, eingerichtet; und zu beurtheilen, ob die Hoffmännische Art, den Rabatt zu berechnen, in der That den Gesetzen zuwider sey, müssen alle Umstände und alle Gründe der dahin gehörigen Gesetze auf das sorgfältigste erwogen werden. Gesetzt nun, daß eine nach einer gewissen Zeit erst fällige Schuld sogleich mit Rabatt bezahlt werden soll, so geschieht dasselbe nach vorhergegangener Verabredung zwischen dem Gläubiger und Schuldner. Wäre der Schuldner im Stande, seine Schuld bis zu ihrer Fallzeit zu dem pr. C. zu benutzen, zu welchem rabattirt werden soll, und überdem vor allem Ausfall und Verlust so wohl am Zinse als am Capitale gesichert; so hätte er keinen Grund sich zur frühern Bezahlung mit Rabatte zu entschliessen, oder dieselbe zu begehren. Eben das fände auf der andern Seite bey dem Gläubiger statt, wenn derselbe das früher bezahlte Capital nicht höher als zu dem pr. C., zu welchem rabattirt werden soll, ausbringen könnte, und sein Geld bey dem Schuldner sicher stände. Man kann daher, so oft zwischen einem Gläubiger und Schuldner eine frühere Bezahlung mit Rabatt verabredet worden, annehmen, einmal, daß der Schuldner in seiner Lage seine Schuld bis zu ihrer Fallzeit nicht zu dem pr. C. des Rabatts benutzen könne, oder wegen der richtigen und prompten Zahlung des Zinses davon, wenn er sie anlegte, oder auch wohl wegen des Capitals selbst nicht ganz sicher sey; und zweytens, daß der Gläubiger, wenn er sein Capital sogleich mit Rabatt erhält, dasselbe höher als zu dem pr. C. des Rabatts auszubringen im Stande sey. Geht nun unter diesen Umständen die frühere Bezahlung wirklich vor sich, so hat einmal der Schuldner den doppelten Vortheil, daß er zu einem grössern pr. C. rabattirt, als er den Zins rechnen kann, und, daß er von aller Sorge, das früher bezahlte Capital anzulegen, frey, und vor allem Ausfall gesichert ist, und kann also dagegen sich wohl gefallen lassen, daß bey dem grössern pr. C. nur die Summe der Zinse, nicht aber die Zeit, da sie eigentlich gegeben werden müssen, in Anschlag gebracht wird. Zum andern übernimmt der Gläubiger die Sorge für die Anlegung des früher erhaltenen Capitals, und die Gefahr, an dem Zinse oder gar an dem Capitale einen Verlust zu leiden, und unmöglich ist es bey dem Verbot des Zinseszinses für ihn, sein Capital durch den Zins so zu vermehren, als es die Zinseszinsrechnung angiebt.

giebt. Doppelt ungerecht wäre es also, wenn er seinem Schuldner doppelten Rabatt geben sollte.

Um das gesagte mit einem Beyspiele zu erläutern, so sey jemand einem andern 1000 Rthlr ohne Zins nach 5 Jahren zu bezahlen schuldig. Vorausgesetzt nun, daß er das zu einer fünfjährigen frühern Zahlung mit einfachem Rabatte zu 5 pr. C. nöthige Geld, 800 Rthlr nemlich, hätte, und solches nicht höher als zu $4\frac{1}{2}$ pr. C. auszuthun im Stande wäre; so wäre aller Vortheil, den er, wenn er nicht sogleich bezahlte, von diesen 800 Rthlr in 5 Jahren erhalten könnte, wenn man Zinseszins rechnete 196,4 Rthlr, und also in der That noch etwas weniger, als 196,4 Rthlr. Es werden ihm aber 200 Rthlr zu gute gerechnet, und wenn daher auf die angeführten Umstände zugleich Rücksicht genommen wird, so ist er eigentlich nicht vervortheilt. Wollte er 5 pr. C. Zins rechnen, so erhielte er von diesen 800 Rthlr in 5 Jahren, da der Zinseszins 220,9 Rthlr beträgt, gewiß keine 20 Rthlr mehr, als wenn er rabattirte, und dafür müßte er die 800 Rthlr versichern, und den fälligen Zins zur rechten Zeit erhalten, und sogleich wieder anlegen können. Es streitet also die Hoffmannische Art den Rabatt zu berechnen, auf diese Art betrachtet, nicht wider den Grundsatz, daß durch den Rabatt weder der Schuldner noch der Gläubiger vervortheilt werden solle; die Leibnitzische Art hingegen thut solches, weil der Gläubiger, ohne Zinseszins, den er doch nicht wirklich erhalten kann, zu nehmen, stets Schaden leidet, und überdem noch für die Unterbringung des Capitals sorgen, und alle dabey mögliche Unbequemlichkeiten und Gefahren übernehmen muß.

§. 200.

Wenn also ein Schuldner sich ohne Zwang, freywillig entweder, oder auf Vorstellung seines Gläubigers, zur frühern Bezahlung der nach einer gewissen Zeit erst fälligen Schuld entschließt, so kann die sogleich zu bezahlende Summe ohne Verstoß wider das Recht und die Billigkeit nach der einfachen Rabattrechnung bestimmt werden; wollte man ihn aber zu einer frühern Bezahlung zwingen, und dann die baar zu bezahlende Summe nach der einfachen Rabattrechnung vestsetzen; so könnte er sich allerdings über Ungerechtigkeit beschweren. In Fällen also, als oben, §. 137 in der Anmerkung, einer angeführt worden, wäre ohnstreitig der §. 198 gedachte Weg allen andern vorzuziehen. Uebrigens gehört es nicht in eine juristische Rechenkunst, diesen Gegenstand ausführlicher, als geschehen ist, abzuhandeln.

§. 201.

b. (s. §. 198) Was den Gebrauch betrifft, den man sonst noch von den Rabattrechnungen

zu

zu machen hat; so ist die doppelte Rabattrechnung, so wie die doppelte Zinsrechnung, bey der Berechnung der verschiedenen Arten der Renten, wovon in der Folge geredet werden wird, der Wittwencassen u. d. gl. eine unentbehrliche Rechnung, und die einfache Rabattrechnung dazu auf keine Art und Weise hinlänglich. Bey der Würdigung verschiedener auf eine Sache geschehenen Gebote, davon einige terminweise bezahlen wollen, sollte man billig nach den Mittelsummen urtheilen, wovon §. 198 gesprochen worden ist, und eben darnach überhaupt für sich jede nach einer gewissen Zeit erst fällige Summe schätzen.

Zeitrechnung.

Einleitung.

§. 202.

Wenn ein Capital bey einem bestimmten pr. C. durch den Zins eine gegebene Grösse erreichen, oder einen genannten Zins tragen, desgleichen wenn ein Capital bey einem bestimmten pr. C. eine vestgesetzte Summe Rabatt geben soll; so wird dazu eine Zeit erfordert, die sich aus den genannten Stücken durch Rechnung finden läßt. Hat sich ein Schuldner anheischig gemacht, eine Schuld in mehrern auf einander folgenden Terminen zu bezahlen, so kann er, ist es sein Gläubiger zufrieden, gleichwohl die ganze Schuld ohne Abzug und ohne seinen und seines Gläubigers Schaden auf einmal in einem mittlern Termin, der ebenfalls ein Gegenstand der Rechnung ist, abtragen; und umgekehrt kann man, wenn ein Capital in einem Termine bezahlt werden soll, durch die Rechnung mehrere Termine finden, in welchen solches theilweise, doch ohne Abzug und ohne Schaden beyder interessirten Theile geschehen kann. Endlich lassen sich, wenn ein Capital terminweise zu bezahlen ist, anstatt der anfänglich vestgesetzten Termine andere ausrechnen, in wel-

welchen dasselbe Capital, nur in andern Theilen, bezahlet werden kann. Die Regeln, welche man, jede der genannten Zeiten aus den erforderlichen gegebenen Dingen zu finden, zu befolgen hat, trägt die **Zeitrechnung** vor, welche also von einem sehr grossen Umfange ist.

§. 203.

Man kann die Zeitrechnung auf eine ähnliche Art, als die Zinsrechnung im eigentlichen Verstande, und die Rabattrechnung, nemlich in die **gemeine und zusammengesetzte Zeitrechnung** eintheilen, und einer jeden nach dem im vorhergehenden §. gesagten verschiedene Abtheilungen geben. Die gemeine Zeitrechnung begreift dann alle zur Zeitrechnung überhaupt gehörige Fragen, worin einfacher Zins und Rabatt, die zusammengesetzte oder doppelte Zeitrechnung aber diejenigen, worin Zinseszins oder doppelter Rabatt vorausgesetzt wird. In den folgenden wird indeß diese Eintheilung nur als Unterabtheilung statt finden, und die Zeitrechnung überhaupt in die **Zeitrechnung im engern Verstande**, in die **Berechnungen, des mitlern Zahlungstermins, der veränderten Zahlungstermine**, und **des getheilten Zahlungstermins** abgetheilt werden. Die nähere Bestimmung eines jeden dieser Theile kommt im Anfange der Abhandlung desselben vor.

Zeitrechnung.

§. 204.

Unter der Zeitrechnung im engern Verstande wird hier der Inbegriff der Regeln verstanden, nach welchen man bey einem bestimmten pr. C. die Zeit findet, in welcher ein gegebenes Capital entweder durch den Zins eine bestimmte Grösse erreicht, oder einen gewissen Zins trägt, oder einen genannten Rabatt erfährt. Es ist also ein Theil der dazu gehörigen Aufgaben mit der Zinsrechnung, und der andere mit der Rabattrechnung verbunden, und da eine jede dieser Rechnungen zwey Abtheilungen hat, so entstehen vier Arten der Aufgaben der Zeitrechnung im engern Verstande, die nun nach einander betrachtet werden sollen.

§. 205.

Die Sätze, aus welchen die Regeln fliessen, nach welchen diejenigen Aufgaben der Zeitrechnung im engern Verstande, welche mit der gemeinen Zinsrechnung in Verbindung stehen, aufgelöset werden, sind bereits in der gemeinen Zinsrechnung §. 40 angeführt worden, und es ist also hier nur übrig, die Anwendung der aus den erwähnten Sätzen fliessenden Regeln in einigen Beyspielen zu zeigen. Es werde also gefragt:

a. Wie

a. Wie lange müssen 3640 Rthl. 18 Gr. 6 Pf., wenn sie durch einfachen Zins a 5 pr. C. zu 4232 Rthl. 9 Gr. $6\frac{3}{40}$ Pf. anwachsen sollen? — Diese Frage ist gleichbedeutend mit folgender: Wie lange müssen 3640 Rthl. 18 Gr. 6 Pf. a 5 pr. C. stehen, um 591 Rthl. 15 Gr. $\frac{3}{40}$ Pf. Zins zu tragen? — Die Rechnung ist für diese letzte Frage

$$1 \text{ Jahr} \times \frac{(591 \text{ Rthl. } 15 \text{ Gr. } \tfrac{3}{40} \text{ Pf.}) \times 20}{3640 \text{ Rthl. } 18 \text{ Gr. } 6 \text{ Pf.}}$$

3640 Rthl. 18 Gr. 6 Pf.	11832 Rthl. 12 Gr. $1\frac{1}{2}$ Pf.
14563 Rthl. 2 Gr.	47330 Rthl. $\frac{1}{2}$ Gr.
87378	283980
699028	~~2271841~~
	~~40~~4787 | $3\frac{1}{4}$ Jahr
	~~2~~7 5
	1

Wenn man hier nach dieser Frage rechnen wollte: Wie viel Zeit gehört dazu, daß 3640 Rthl. 18 Gr. 6 Pf. zu 4232 Rthl. 9 Gr. $6\frac{3}{40}$ Pf. anwachsen, vorausgesetzt daß sie so wie 100 Rthl. sich vermehren sollen, wenn dieselben in einem Jahre 105 Rthl. werden? also nach diesem Ausdrucke

$$1 \text{ Jahr} \; \frac{(4232 \text{ Rthl. } 9 \text{ Gr. } 6\tfrac{3}{40} \text{ Pf.}) \times 100}{3640 \text{ Rthl. } 18 \text{ Gr. } 6 \text{ Pf.} \times 105};$$

so würde man auf ein ganz falsches Resultat kommen, und das nothwendig, weil bey einer vielfachen Zeit nicht das

durch

durch den Zins vermehrte Capital das eben so vielfache von dem einfachen, sondern der Zins das gleich vielfache des einfachen Zinses ist. 100 Rthlr. z. B. a 5 pr. C. tragen in 2 Jahren 2 × 5 Rthlr., in 3 Jahren 3 × 5 Rthlr. u. s. w. Zins; allein sie werden nicht, indem sie in einem Jahre zu 105 Rthlr. anwachsen, in 2 Jahren 2 × 105 Rthlr. oder 210 Rthlr., in 3 Jahren 3 × 105 Rthlr. oder 315 Rthlr. u. s. w. Man muß daher bey Aufgaben dieser Art vor allen Dingen den Zins suchen, welchen das anzulegende Capital in der gesuchten Zeit tragen soll, und dann die aufgeworfene Frage auf die befolgte Art in eine andere gleichbedeutende verwandeln.

§. 206.

Ausserdem kann man noch auf eine doppelte Art verfahren. Man macht nemlich einen Bruch, dessen Nenner das angelegte Capital, der Zähler aber entweder das durch den Zins vermehrte Capital oder dieser Zins allein ist, und verwandelt denselben in einen Bruch von gleichem Werthe, dessen Nenner 100 ist. Dies geschieht am bequemsten durch die Division durch den Nenner, nachdem man von demselben zur Rechten 2 Zahlen für die Decimalstellen abgeschnitten hat. Ist nun diese Verwandlung geschehen, so werden so viel Jahre erfodert, als das gegebene pr. C. im ersten Fall in der Differenz des Zählers und Nenners, und im andern im Zähler selbst enthalten ist. Es werde also gefragt: Wie lange müssen 800 Rthlr. zu 5 pr. C. stehen, um durch einfachen Zins 1000 Rthlr. zu werden? — Die Rechnung ist entweder

$\frac{1000}{800} =$

$$\frac{1000}{800} = \frac{125}{100}, \text{ und}$$

$$\frac{25}{5} = 5 \text{ Jahre;}$$

oder

$$\frac{200}{800} = \frac{25}{100}, \text{ und}$$

$$\frac{25}{5} = 5 \text{ Jahre.}$$

Der Grund dieser Regel ist übrigens aus der gemeinen Zinsrechnung leicht herzuleiten.

§. 207.

b. Wie lange müssen 1000 Rthlr. a 6 pr. C. stehen, um eben so viel Zins zu tragen, als 400 Rthlr. a 5 pr. C. in $13\frac{1}{2}$ Jahre? — Die Rechnung ist

$$\underline{13\tfrac{1}{2} \text{ Jahr}} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$$

$$4\tfrac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

c. Wie lange muß ein Capital ausstehen, um zu 4 pr. C. 200 Rthlr. zu tragen, wenn es a 5 pr. C. in 6 Jahren 240 Rthlr. tragen würde? — Die Rechnung ist

$$\underline{6 \text{ Jahr}} \times \frac{6}{4} \times \frac{20}{24} = \frac{5}{4}$$

$$7\tfrac{1}{2} \text{ Jahr.}$$

Es liessen sich diese Aufgaben leicht noch mit andern, insbesondere einfachen, vermehren; sie sind aber so leicht, daß es überflüssig wäre, Exempel davon herzusetzen.

§. 208.

Ich gehe daher fort zu den Aufgaben der Zeitrechnung im engern Verstande, welche mit der gemeinen Rabattrechnung in Verbindung stehen. Die wichtigsten davon sind folgende:

a wenn aus dem früher zu bezahlenden Capitale, welches bis zu seiner eigentlichen Fallzeit keinen Zins trägt, und der dafür wirklich entrichteten Summe, nebst dem pr. C. des Rabatts, die Zeit der frühern Zahlung gesucht werden soll. — Aus dem, was §. 150 über die Natur der Anzeiger der Veränderung eines früher zu bezahlenden Capitals zur Findung der baaren Zahlung gesagt worden ist, läßt sich der Grund dieser Regel herleiten. — Man mache die baar bezahlte Summe zum Zähler und das früher zu bezahlende Capital zum Nenner eines Bruchs, verwandele denselben in einen andern von gleichem Werthe, dessen Zähler 100 ist, suche die Differenz des Zählers und Nenners dieses Bruchs, und dividire dieselbe durch das gegebene pr. C. Der erhaltene Quotient giebt die Zeit der frühern Zahlung in Jahren an. Es werde z. B. gefragt: Wie viel Jahre muß man 1000 Rthlr mit 5 pr. C. Rabatt früher bezahlen, um dafür nicht mehr als 800 Rthlr zu geben. — Die Rechnung ist

$\frac{800}{1000} =$

$$\frac{800}{1000} = \frac{100}{125}$$

$$125 - 100 = 25,$$

$$\frac{25}{5} = 5 \text{ Jahre.}$$

Wird anstatt der baar bezahlten Summe der Rabatt gegeben, so findet man durch Abziehung desselben von der unrabattirten Schuld die Summe, welche früher gegeben werden soll oder gegeben worden ist, leicht, und kann also diesen Fall auf den betrachteten zurückführen.

§. 209.

b Wenn aus dem pr. C. des Rabatts und der Zeit der frühern Zahlung bey demselben diejenige Zeit gefunden werden soll, in welcher dasselbe Capital bey einem andern gegebenen pr. C. eben denselben Rabatt giebt. Es wird z. B. gefragt: Wie viel Jahre muß man eine Schuld, die bis zu ihrer Fallzeit keinen Zins trägt, mit 8 pr. C. Rabatt früher bezahlen, um eben so viel Rabatt zu geniessen, als man bey 5 pr. C. in 4 Jahren erhalten würde? — Man sucht hier den Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung des Rabatts für die gegebene Zeit und das dazu gehörende pr. C., so daß der Zähler desselben 100 ist, zieht diesen Zähler von seinem Nenner ab, und dividirt die Differenz durch das pr. C., zu welchem man die Zeit der frühern Zahlung bestimmen soll. Der Quotient zeigt diese Zeit in Jahren bestimmt an. — Die Ausrechnung der angeführten Frage ist: Es ist der Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals für 5 pr. C. und 4 Jahre

$$\frac{100}{120}; \text{ und}$$

$$120 - 100 = 20, \text{ und}$$

$$\frac{20}{8} = 2\tfrac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

§. 210.

c Wenn die nach einer gewissen Zeit erst fällige und mit Rabatte zu einem angegebenen pr. C. früher bezahlte Schuld bis zu ihrer Fallzeit zu einem bekannten pr. C. verzinset, und aus ähnlichen Stücken als §. 208 die Zeit der frühern Zahlung gesucht werden soll. Man frägt z. B. Wie viel Jahre müssen 1500 Rthlr, die bis zu ihrer Fallzeit mit 2 pr. C. verzinset werden sollten, mit einfachem Rabatte a 5 pr. C. früher bezahlt werden, wenn dafür $1418\frac{2}{11}$ Rthlr gegeben werden sollen? Es ist hier weiter nichts nöthig zu suchen, als den Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung entweder der Summe, zu welcher es bis zu seiner Fallzeit durch das verabredete pr. C. wächst, oder der dafür ohne Zins sogleich zu erlegenden Summe. Aus dem einen oder dem andern dieser

dieser Anzeiger und den gegebenen pr. C. findet man nach §. 206 und 208 sehr leicht das eigentlich verlangte. Man findet aber beyde Anzeiger, wenn man das nach einer Zeit erst fällige Capital zum Nenner, und das dafür früher bezahlte Capital zum Zähler eines Bruchs macht, ferner den Zähler dieses Bruchs durch das gegebene pr. C. des Zinses, und den Nenner durch das gegebene pr. C. des Rabatts dividirt, und jenen Quotienten zum Zähler eines neuen Bruchs, und diesen zum Nenner eines andern Bruchs annimmt, wozu man den fehlenden Nenner und Zähler auf folgende Art findet. Man nimmt von dem gegebenen pr. C. des Zinses und dem ebenfalls gegebenen pr. C. des Rabatts ein solches gleich vielfache, daß der zuletzt gedachte Zähler um eben so viel grösser ist als das vielfache des gegebenen pr. C. des Rabatts, wie das vielfache des gegebenen pr. C. des Zinses kleiner ist als der zuletzt gedachte Nenner. Das auf diese Art beschaffene vielfache des gegebenen pr. C. des Rabatts ist der gesuchte Nenner, und das gleich vielfache des gegebenen pr. C. des Zinses der fehlende Zähler. Die aufgeworfene Frage z. B. beantwortet man auf folgende Art. Es ist

$$\frac{1418\frac{2}{11}}{1500} = \frac{15600}{16500} = \frac{156}{165} = \frac{52}{55},$$

ferner $\frac{52}{2} = 26$; und

$\frac{55}{5} = 11$. Da nun $25 = 5 \times 5$, und $10 = 5 \times 2$ und $26 - 25 = 11 - 10$; so ist

$\frac{26}{25}$ der Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung der Summe, zu welcher es bis zu seiner Fallzeit durch das verabredete pr. C. wächst, und

$\frac{10}{11}$ der Anzeiger der Veränderung des früher zu bezahlenden Capitals zur Findung der dafür ohne Zins sogleich zu erlegenden Summe. Da nun ferner

$\frac{26}{25} = \frac{104}{100}$, und

$\frac{4}{2} = 2$; auch

$\frac{10}{11} = \frac{100}{110}$ und

$\frac{10}{5} = 2$; so ist die verlangte Zeit 2 Jahre.

§. 211.

Es folgen nunmehr die Aufgaben der Zeitrechnung im engern Verstande, welche sich auf die Zinseszinsrechnung beziehen. Die erste und wichtigste Art ist diejenige, wenn aus dem auf Zinseszins angelegten Capitale, der Summe, zu welcher es durch den Zinseszins

seszins angewachsen, und dem pr. C., zu welchem es ausgethan worden, die Zeit bestimmt werden soll, welche es ausgestanden, oder ausstehen muß. Es wird z. B. gefragt: Wie lange müssen 10000 Rthl. a 5 pr. C. auf Zinseszins ausstehen, um zu $12155\frac{1}{16}$ Rthl. anzuwachsen? Wenn man sich hier an die Regeln der Zinseszinsrechnung zurückerinnert, so sieht man bald, daß es zur Auflösung dergleichen Aufgaben keinen bequemern Weg gebe, als den Logarithmen des durch den Zinseszins vermehrten Capitals zu suchen, von demselben den Logarithmen des auf Zinseszins angelegten Capitals abzuziehen, und diese Differenz mit dem Logarithmen des Anzeigers der Veränderung eines Capitals zur Findung der Summe, zu welcher es bey dem gegebenen pr. C. in einem Jahre wächst, zu dividiren. Der Quotient zeigt die verlangte Zeit, in Jahren bestimmt, an. — Die aufgeworfene Frage z. E. wird auf folgende Art beantwortet.

Es ist L. 12155,0625 = 4,0847572, und
davon abgez. L. 10000 = 4,0000000
so bleibt der Logarithme 0,0847572, welcher
mit L. $\frac{21}{20}$ = 0,0211893, dividirt,

den Quotienten 4 giebt. Es müssen also die gedachten 10000 Rthl. 4 Jahre ausstehen.

§. 212.

Wie lange müssen 16000 Rthlr a 5 pr. C. auf Zinseszins stehen, um zu $26062\frac{1}{3}$ Rthlr anzuwachsen? — Die Rechnung ist hier

Es ist L. 26062,33 = 4,4160132

und L. 16000 = 4,2041200;

nach Abzug des letztern bleibt 0,2118932 und

$\frac{0,2118932}{0,0211893} = 10$. Es wird also eine Zeit von 10 Jahren erfordert.

Gesetzt man hätte anstatt $26062\frac{1}{3}$ nur 26062 Rthlr gesetzt, so hätte man anstatt des Logarithmen 4,4160132 den Logarithmen 4,4160077 erhalten. Von diesem nun den Logarithmen von 16000 oder 4,2041200 abgezogen, so kommt der Logarithme 0,2118877, welcher mit dem L. $\frac{21}{20}$ oder 0,0211893 dividirt, nicht vollkommen 10 giebt. Da indeß der Unterschied nicht viel beträgt, so hat man nicht nöthig genauer zu rechnen, oder es müßte ausdrücklich verlangt werden. In den mehresten Fällen ist es hinlänglich zu sagen, wie jetzt, es werden fast 10 Jahre, eine Kleinigkeit weniger, erfordert.

§. 213.

Wenn anstatt der Summe, zu welcher ein auf Zinseszins angelegtes Capital in der gesuchten Zeit durch den Zinseszins angewachsen, der gesammte Zinseszins dieser Zeit gegeben wird; so findet man durch die Addition desselben

selben zu dem auf Zinseszins angelegten Capitale das durch den Zinseszins vermehrte Capital, und kann darauf dergleichen Aufgaben auf die angezeigte Art auflösen. Käme eine Frage vor, wie diese: Wie lange müssen 4000 Rthlr a 5 pr. C. auf Zinseszins stehen, um eben so viel Zinseszins zu tragen, oder eben so hoch anzuwachsen als 5000 Rthlr a 4 pr. C. in 6 Jahren? so läßt sich in jenem Falle der Zinseszins der 5000 Rthlr, und in diesem die Summe, zu welcher sie in den 6 Jahren anwachsen, nach bekannten Regeln finden, und ist dies geschehen, so sind dergleichen Aufgaben dadurch auf die §. 211 und 212 betrachteten zurückgebracht. Endlich können auch Fragen vorkommen, wie folgende: Wie lange müssen 4000 Rthlr a 5 pr. C. auf Zinseszins stehen, um eben so viel Zins zu tragen, als dieselben oder ein anderes Capital zu eben dem pr. C. einfachen Zins in einer bestimmten Zeit, z. B. 4 Jahre, tragen würden? Man sieht hier sehr bald, daß man durch die Ausrechnung des gesammten einfachen Zinses auch diese Art Aufgaben in die §. 211 und 212 betrachtete Gattung verwandeln könne.

Wenn man will, so kann man ausser diesen noch verschiedene andere hieher gehörige Aufgaben erfinden. Ich lasse es indeß bey den bisherigen bewenden, da dieselben diejenigen sind, welche vorzüglich in der Practik vorkommen.

§. 214.

Endlich sind noch diejenigen Aufgaben der Zeitrechnung im engern Verstande übrig, welche sich auf die doppelte Rabattrechnung beziehen. Es gehören dahin theils solche, wo das früher zu bezahlende Capital bis zu seiner Fallzeit keinen Zins trägt, theils solche, wo dasselbe bis dahin zu einem gewissen pr. C. Zinseszins verzinset werden muß. Von der ersten Art sind diejenigen die wichtigsten, wenn aus dem früher zu bezahlenden Capitale, der dafür bey doppelten Rabatte sogleich bezahlten Summe und dem pr. C. des Rabatts die Zeit der frühern Zahlung zu finden gegeben wird. Man frägt z. B. Wie viel Jahre muß man früher bezahlen, wenn man anstatt 12155 Rthl. 1 ggr. 6 pf. nur 10000 Rthl. geben, und doppelten Rabatt a 5 pr. C. geniessen will? Es lassen sich aber diese Aufgaben leicht auf die §. 211 betrachteten zurückführen, indem es z. B. einerley ist, ob man frägt: Wie lange müssen 10000 Rthl. auf Zinseszins zu 5 pr. C. stehen, um zu 12155 Rthl. 1 ggr. 6 pf. anzuwachsen? oder ob die vorher angeführte Frage aufgeworfen wird; und es ist daher nicht nöthig, länger bey denselben zu verweilen.

§. 215.

Wird auf die Art gefragt, als folgende Beyspiele zeigen: Wie lange zuvor müssen 1000 Rthl. mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. früher bezahlt werden, um eben

so

so viel Rabatt zu geniessen, als man von 1500 Rthl. a 4 pr. C. und bey dreyjähriger früherer Zahlung erhält? oder: Wie lange zuvor muß die frühere Bezahlung eines Capitals von 1000 Rthl. mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. geschehen, um eben den Rabatt zu geniessen, den man bey einer fünfjährigen frühern Zahlung zu $4\frac{1}{2}$ pr. C. von demselben erhalten würde? so kann man nach den bekannten Regeln aus den gegebenen Dingen den verlangten Rabatt entwickeln, und durch Abziehung desselben von der früher zu bezahlenden Summe den jetzigen Werth derselben finden, und dann dergleichen Fragen leicht in die im vorhergehenden §. betrachteten verwandeln.

§. 216.

Was aber diejenigen Aufgaben betrifft, in welchen das mit doppeltem Rabatte früher zu bezahlende Capital bis zu seiner Fallzeit auf Zinseszins stehend angenommen wird, so erfordern dieselben eine genauere Betrachtung. Es gehört hieher die Frage: Wie lange muß man bey doppeltem Rabatte a 5 pr. C. früher bezahlen, wenn man an statt 10000 Rthl., die man bis zu ihrer Fallzeit mit 3 pr. C. Zinseszins verzinsen muß, 9259,58 Rthl. geben will? — Ueberlegt man dasjenige genau, was in der doppelten Rabattrechnung §. 177 bis §. 179 gesagt worden ist, so wird es nicht schwer fallen, sich von der Richtigkeit folgender Regel zu überzeugen. — Wenn man

von

von dem Logarithmen des mit doppelten Rabatte zu bezahlenden und bis zu seiner Fallzeit Zinseszins tragenden Capitals den Logarithmen desjenigen Capitals, welches man dafür sogleich erlegen will, abzieht, so erhält man den Logarithmen des Products der Anzeiger, nach welchen man das früher zu bezahlende Capital verändern muß, um die baar dafür zu erlegende Summe zu finden. Wenn man diesen Logarithmen gefunden hat, so suche man die einfachen Anzeiger der Capitalsveränderung für die in der Aufgabe vorkommende pr. C., und nehme von ihren Logarithmen das gleich vielfache so, daß beyder gleich vielfachen Summe dem gefundenen Logarithmen gleich ist. So vielfach hier die Logarithmen der gedachten einfachen Anzeiger genommen werden mußten, so viel Jahre muß auch früher bezahlt werden. Zum Beyspiele diene die angeführte Frage. Es ist also

$$\text{L. } 10000 = 4{,}0000000, \text{ und}$$
$$\text{L. } 9259{,}58 = 3{,}9665913, \text{ also}$$
$$\text{L. } 10000 - \text{L. } 9259{,}58 = 0{,}0334087,$$
$$\text{oder} = -1{,}9665913.$$
$$\text{Ferner ist L. } \tfrac{103}{100} = 0{,}0128372$$
$$\text{und L. } \tfrac{20}{21} = -1{,}9788107. \text{ Da nun}$$
$$0{,}0128372 \times 4 = 0{,}0513488, \text{ und}$$
$$-1{,}9788107 \times 4 = -1{,}9152428, \text{ und}$$
$$\text{beyder Summe also } -1{,}9665916; \text{ so ist}$$

die Zeit der frühern Zahlung 4 Jahr.

Der

Der geringe Unterschied, der zwischen — 1,9665913 und — 1,9665916 ist, wird weiter nicht in Betrachtung gezogen. Es rührt daher, daß die statt der 10000 Rℓ zu erlegende Summe nur in Hunderttheilen angegeben ist.

Die erwähnten gleich vielfachen findet man in der gedachten Beschaffenheit bald, wenn man bey dem Suchen derselben nur einige wenige Zahlen der Logarithmen, aus welchen sie zusammengesetzt werden müssen, nimmt, z. B. in dem angeführten Falle 0,012 und — 1,978.

Es kann sich leicht ereignen, daß die Zeit der frühern Zahlung durch keine ganze Zahl ausgedruckt werden kann. In diesem Falle findet man auf dem empfohlnen Wege die beyden Termine wenigstens leicht, zwischen welchen sie fällt, und das ist in solchen Fällen meistentheils hinreichend.

Ohne die Logarithmen zu gebrauchen, würde man diese Aufgaben entweder gar nicht, oder doch nicht anders als auf eine sehr beschwerliche und weitläuftige Art aufzulösen im Stande seyn.

§. 217.

Es wäre eine sehr leichte Sache gewesen, die bisher betrachteten Aufgaben der Zeitrechnung im engern Verstande auch auf die Art abzuändern und durch Beyspiele zu erläutern, daß von ganz andern Dingen, als von Capitalien, pr. C., Zinse und Rabatte geredet worden wäre. Es ist ebenfalls eine Zeitrechnung, wenn man zu bestimmen sucht, wie viel Zeit 15 Arbeiter zur Verfertigung einer Arbeit nöthig haben, wenn 21 Arbeiter dazu 6 Wochen gebrauchen? oder wie viel Jahre erfordert werden, daß die Volksmenge eines Landes, wenn das Gesetz der Vermehrung bekannt ist, eine gewisse Grösse erreiche? Indeß gehörte das eigentlich nicht hieher, und ich berühre es nur, damit man den in dieser Rechnung abgehandelten Aufgaben, indem sie so, als sie betrachtet worden sind, vielleicht nicht häufig vorkommen, nicht sogleich allen Nutzen abspreche. Ich werde in der Folge oft bey sehr wichtigen Fällen Gelegenheit haben, die anderweitige Anwendung der Regeln der Zeitrechnung im engern Verstande zu zeigen.

Mitlerer Zahlungstermin.

§. 218.

Wenn eine Schuld, die theilweise in gleichen oder ungleichen Summen, und in verschiedenen Terminen, welche entweder alle von einander gleich oder ungleich weit entfernt seyn können, bezahlt werden sollte, ohne allen Abzug in einem Termine oder auf einmal abgetragen wird; so heißt dieser Termin **der mitlere Zahlungstermin.** Ein Beyspiel anzuführen, so ist der mitlere Zahlungstermin einer Schuld von 1000 Rthl, die ohne Zins zu tragen 10 Jahre nach einander am Ende eines jeden Jahres mit 100 Rthl bezahlt werden sollten, $5\frac{1}{2}$ Jahr, wenn man denselben nach einfachem Zinse vestsetzt. Der Zeitrechnung im weitläuftigen Verstande kommt es zu, auch diese Zeit aus den

dazu

dazu erforderlichen Dingen durch die Rechnung finden zu lehren, und die Art und Weise davon soll jetzt erklärt werden.

§. 219.

Die allgemeine Regel zur Bestimmung des mitlern Zahlungstermins ist: Der mitlere Zahlungstermin muß so angesetzt werden, daß dadurch weder der Gläubiger zum Vortheile des Schuldners, noch der Schuldner zum Vortheile des Gläubigers vervortheilt wird. Es beruhet also die Ausrechnung des mitlern Zahlungstermins mit der Rabattrechnung am Ende auf einerley Gründen, und ausserdem wird dabey, ob der Gläubiger oder Schuldner vervortheilt werde oder nicht, ebenfalls nach dem Zinse bestimmt, welchen bey dem mitlern Zahlungstermin beyde erheben können. Ist der Zins, welchen einmal der Schuldner von der ganzen Schuld bis zu dem mitlern Zahlungstermine, und zweytens der Gläubiger ebenfalls von der ganzen Schuld, aber von dem mitlern Zahlungstermine an bis zu dem letzten der anfänglich vestgesetzten Termine, rechnen kann, dem Zinse gleich, welchen jener von allen Theilen der Schuld bis zu ihrer Fallzeit, und dieser von eben denselben Summen von ihrer Fallzeit an bis zu dem gedachten letzten Termine rechnen kann; so ist der mitlere Zahlungstermin richtig

tig angesetzt worden. Da es eine doppelte Art des Zinses giebt, so fällt in die Augen, daß es deswegen auch eine zwiefache Art der Bestimmung des mitlern Zahlungstermins gebe, und ausserdem entsteht auch daher noch eine Verschiedenheit unter den hieher gehörigen Fällen, daß die gedachte Schuld bis zu ihrer Fallzeit entweder Zins trägt, oder nicht. In dem im vorhergehenden §. angeführten Falle ist der mitlere Zahlungstermin richtig bestimmt worden; denn der Schuldner hätte, wenn er, auf die zuerst vestgesetzte Art bezahlet hätte, in allen 275 Rthlr, und der Gläubiger dagegen 225 Rthlr rechnen können. Es tragen aber auch 1000 Rthlr in $5\frac{1}{2}$ Jahre zu 5 pr. C. einfachen Zinses 275 Rthlr, und in $4\frac{1}{2}$ Jahre 225 Rthlr.

§. 220.

Die Benennung mitlerer Zahlungstermin zeigt, an und für sich genommen, überhaupt einen Termin an, der zwischen zwey andere fällt, und im strengsten Verstande einen solchen, der von dem einen äussern Termine eben so weit entfernt ist als von dem andern. Die beyden äussern oder äusserste Termine sind in den Fällen, wovon hier die Rede ist, einmal der Augenblick, in welchem jemand eines andern Schuldner wird, und zweytens der Zeitpunkt, in welchem er solches zu seyn aufhört. In dem §. 218 angeführten Exempel sind diese beyden äussersten Termine 10 Jahre von einander entfernt, und der mitlere Termin

Termin im eigentlichen oder Wortverstande wäre daher 5 Jahre. Es fällt also in die Augen, daß in der gegenwärtigen Rechnung die Benennung mitlerer Zahlungstermin nicht in diesem Wortverstande genommen werden dürfe, und zwar deswegen, weil der Schuldner stets mehr Zins in Anschlag bringen kann als der Gläubiger. Nach Maasgabe dieses Ueberschusses aber läßt sich der Unterschied des wahren mitlern Zahlungstermins von demjenigen, worauf der Wortverstand führt, oft sehr leicht bestimmen, und alsdann giebt es zur Findung jenes Termins einen leichtern Weg als der gewöhnliche.

§. 221.

Nun zur Betrachtung

a des Falls, wenn eine Schuld, die terminweise, ohne Zins, in gleichen Summen und gleich weit von einander entfernten Terminen bezahlt werden sollte, nach vorhergegangener Verabredung zwischen dem Gläubiger und Schuldner in einem mitlern Termine abzutragen ist, bey dessen Bestimmung auf einfachen Zins gesehen wird. Es ist jemand einem andern 1000 Rthl. ohne Zins, in zehn auf einander folgenden Jahren und jedesmal mit 100 Rthl., zu bezahlen schuldig. Er verabredet aber mit seinem Gläubiger, die ganze Schuld in einem mitlern Zahlungstermine, der nach einfachem Zinse bestimmt werden soll, abzutragen. Wenn fällt dieser mitlere Zahlungstermin? — Der Schuldner könnte, wenn er auf die zuerst verabredete Art bezahlte,

			Zins rechnen
von den	1ten	100 Rthlr.	1×5 Rthlr. $= 5$ Rthlr.
— —	2 —	100 Rthlr.	2×5 Rthlr. $= 10$ Rthlr.
— —	3 —	100 Rthlr.	3×5 Rthlr. $= 15$ Rthlr.
— —	4 —	100 Rthlr.	4×5 Rthlr. $= 20$ Rthlr.
— —	5 —	100 Rthlr.	5×5 Rthlr. $= 25$ Rthlr.
— —	6 —	100 Rthlr.	6×5 Rthlr. $= 30$ Rthlr.
— —	7 —	100 Rthlr.	7×5 Rthlr. $= 35$ Rthlr.
— —	8 —	100 Rthlr.	8×5 Rthlr. $= 40$ Rthlr.
— —	9 —	100 Rthlr.	9×5 Rthlr. $= 45$ Rthlr.
— —	10 —	100 Rthlr.	10×5 Rthlr. $= 50$ Rthlr.,

also in allem von 55×100 Rthlr. auf 1 Jahr 55×5 Rthlr. $= 275$ Rthlr.

Um diese Summe von 1000 Rthlr., als der ganzen Schuld zu erhalten, muß er dieselben, da zu 50 Rthlr. 1 Jahr erfordert wird, $\frac{275}{50}$ Jahr, d. h. $5\frac{1}{2}$ Jahr nutzen können. Es fällt also der mitlere Zahlungstermin nach $5\frac{1}{2}$ Jahre, von dem Augenblicke an, wo die Schuld gemacht worden, gerechnet. Der Gläubiger, der nun die ganze Summe der 1000 Rthlr. erhält, kann dieselbe bis zu dem letzten Termine $4\frac{1}{2}$ Jahr nutzen, und also in allem

225 Rthlr.

225 Rthl. Zins rechnen. Wäre die Schuld nicht in einem mitlern Termine abgetragen worden, so hätte er erhalten können

				Zins
von den	1ten	100 Rthl.	9 × 5 Rthl.	= 45 Rthl.
— —	2 —	100 Rthl.	8 × 5 Rthl.	= 40 Rthl.
— —	3 —	100 Rthl.	7 × 5 Rthl.	= 35 Rthl.
— —	4 —	100 Rthl.	6 × 5 Rthl.	= 30 Rthl.
— —	5 —	100 Rthl.	5 × 5 Rthl.	= 25 Rthl.
— —	6 —	100 Rthl.	4 × 5 Rthl.	= 20 Rthl.
— —	7 —	100 Rthl.	3 × 5 Rthl.	= 15 Rthl.
— —	8 —	100 Rthl.	2 × 5 Rthl.	= 10 Rthl.
— —	9 —	100 Rthl.	1 × 5 Rthl.	= 5 Rthl.
— —	10 —	100 Rthl.	0 Rthl.	= 0 Rthl.,

also in allem von 45 × 100 Rthl. auf 1 Jahr 45 × 5 Rthl. = 225 Rthl. Es ist also in Ansehung der Menge des Zinses weder der Gläubiger noch der Schuldner vervortheilt.

Man hätte hier auch auf die Art rechnen können, daß man den Zins, welcher dem Gläubiger zu gute kommt, gesucht, und dann daraus die Zeit bestimmt hätte, welche er das ganze Capital geniessen muß. Diese Zeit von der Zeit des letzten Termins abgezogen, giebt die Zeit des mitlern Zahlungstermins von dem Augenblick an gerechnet, in welchem die Schuld gemacht worden ist.

Daß es hinlänglich sey, auf die eine oder die andere Art allein den mitlern Zahlungstermin gefunden zu haben, davon kann man sich auf folgende Art überzeugen. Von dem sämtlichen Zinse, welchen die ganze Schuld bis zum letzten Termine trägt, gehört ein Theil dem Schuldner, und der andere dem Gläubiger. Ist daher die Zeit richtig bestimmt, in welcher der Schuldner seinen Antheil von der ganzen Schuld erhalten soll, so muß die Differenz zwischen derselben und der ganzen hier in Betrachtung zu ziehenden Zeit, diejenige Zeit seyn, in welcher der Gläubiger seinen Antheil erhalten kann, und umgekehrt.

§. 221.

Es ist bey der bis jetzt nur an einem Beyspiele gezeigten Art des Verfahrens übrigens einerley, was für ein pr. C. angenommen wird, wenn man nur durchaus dasselbe pr. C. beybehält. Wollte man z. B. 1 pr. C. annehmen, und rechnen: Der Schuldner könnte, wenn er terminweise bezahlte,

	an Zins rechnen
von den 1ten 100 Rthlr	1 × 1 Rthlr = 1 Rthlr
— — 2 — 100 Rthlr	2 × 1 Rthlr = 2 Rthlr
— — 3 — 100 Rthlr	3 × 1 Rthlr = 3 Rthlr
— — 4 — 100 Rthlr	4 × 1 Rthlr = 4 Rthlr
— — 5 — 100 Rthlr	5 × 1 Rthlr = 5 Rthlr
— — 6 — 100 Rthlr	6 × 1 Rthlr = 6 Rthlr
— — 7 — 100 Rthlr	7 × 1 Rthlr = 7 Rthlr
— — 8 — 100 Rthlr	8 × 1 Rthlr = 8 Rthlr
— — 9 — 100 Rthlr	9 × 1 Rthlr = 9 Rthlr
— — 10 — 100 Rthlr	10 × 1 Rthlr = 10 Rthlr,

also

also in allem von 55×100 Rthlr auf 1 Jahr 55×1 Rthlr = 55 Rthlr, und er muß also, wenn er die ganze Schuld auf einmal abtragen will, dieselbe $\frac{55}{10}$ Jahr, d. h., $5\frac{1}{2}$ Jahr behalten; so zeigt so wohl dies Beyspiel als eine geringe Aufmerksamkeit auf die Natur der Sache, daß dadurch in der gefundenen Zeit keine Veränderung entstehen könnte. Man kann daher jedesmal das pr. C. nehmen, wodurch die Rechnung am einfachsten wird.

§. 222.

Die §. 219 gegebene allgemeine Regel zur Findung des mitlern Zahlungstermins läßt sich daher nun in folgende verwandeln. **Man suche den Zins, welchen entweder der Schuldner oder der Gläubiger, wenn die Schuld terminweise abgetragen würde, rechnen könnte, (das pr. C. ist willkührlich) und bestimme aus diesem Zinse die Zeit, welche entweder jener oder dieser nöthig hat, um von der ganzen Schuld eben dieselbe Summe Zinses zu erhalten. Im ersten Falle erhält man die Zeit des mitlern Zahlungstermins vom Anfang der Verbindung zwischen dem Gläubiger und Schuldner, im letzten aber von der Zeit des letzten Termins an gerechnet.** Uebrigens kann man bey der Findung der gedachten Zinse sich die dazu nöthige Arbeit durch die Anwendung des Lehrsatzes von der Findung der Summe einer arithmetischen Progression sehr erleichtern, und vieles Schreiben ersparen.

Nach §. 44 nemlich ist es in Ansehung des Zinses gleich, ob man, vorausgesetzt, daß das pr. C. nicht geändert werde, den Zins von einem gegebenen Capitale und der vestgesetzten Zeit, oder von dem Producte aus dem Capitale und der Zahl der Zeit nach Jahren bestimmt, berechne. Es hat also der Schuldner, wenn er terminweise bezahlt, an Zins zu rechnen,

1.	von	100 Rthl.	auf	1	Jahr	d. h.	1×100 Rthl.
2.	—	100 Rthl.	—	2	—	—	2×100 Rthl.
3.	—	100 Rthl.	—	3	—	—	3×100 Rthl.
4.	—	100 Rthl.	—	4	—	—	4×100 Rthl.
5.	—	100 Rthl.	—	5	—	—	5×100 Rthl.
6.	—	100 Rthl.	—	6	—	—	6×100 Rthl.
7.	—	100 Rthl.	—	7	—	—	7×100 Rthl.
8.	—	100 Rthl.	—	8	—	—	8×100 Rthl.
9.	—	100 Rthl.	—	9	—	—	9×100 Rthl.
10.	—	100 Rthl.	—	10	—	—	10×100 Rthl., also

in allem von ($(10+1) \times \frac{10}{2} \times 100$ Rthl., d. h. 55×100 Rthl., welches man so gar, ohne etwas aufzuschreiben, leicht übersehen kann.

Ausserdem aber giebt es für den §. 221 beschriebenen Fall noch folgenden Weg. Man sucht die Zahl der Jahre, welche die in jedem Termine zu bezahlende Summe stehen mußte, um den Zins zu tragen, welchen

welchen der Schuldner oder der Gläubiger rechnen kann, und sucht dann die Zahl der Jahre, in welchen die ganze Schuld denselben Zins trägt. Der Zeitpunkt, von welchem an darauf der mitlere Zahlungstermin gerechnet werden muß, wird wie vorhin bestimmt. In dem betrachteten Exempel müßte der Schuldner 100 Rthlr 55 Jahr, der Gläubiger aber 45 Jahr benutzen können. Man rechnet also entweder

$$55 \text{ Jahr} \times \tfrac{100}{1000},$$
$$\text{d. h. } 55 \text{ Jahr} \times \tfrac{1}{10}$$
$$\text{oder } 5\tfrac{1}{2} \text{ Jahr};$$

oder

$$45 \text{ Jahr} \times \tfrac{100}{1000}$$
$$\text{d. h. } 45 \text{ Jahr} \times \tfrac{1}{10}$$
$$\text{oder } 4\tfrac{1}{2} \text{ Jahr}.$$

Diese Art ist offenbar viel bequemer, als die vorhergehende; indeß mußte diese ebenfalls berührt werden, weil sie diejenige ist, auf welche die obige allgemeine Regel zur Findung des mitlern Zahlungstermins unmittelbar führt, und außerdem erfordert die unten folgende Beurtheilung der Art, den mitlern Zahlungstermin nach einfachem Zinse vestzusetzen, dieselbe.

§. 223.

Um endlich noch eine Art der Auflösung zu berühren, so suche man den Zins, welchen der Schuldner mehr als der Gläubiger erhält, (in dem bisher betrachteten Falle ist solches leicht, es hat nemlich jedesmal der Schuldner vor dem Gläubiger den Zins voraus, welchen die in dem letzten Termine zu bezahlende Summe bis zu ihrer Fallzeit trägt) und addire entweder die Hälfte der Zeit, in welcher die ganze Schuld diesen Zins trägt, zu der Hälfte der Zeit, in welcher der Schuldner die ganze Schuld abtragen will, oder subtrahire sie von derselben. Im ersten Falle erhält man die Zeit des mitlern Zahlungstermins vom Anfang, und im andern vom Ende an gerechnet.

Der Schuldner hat z. B. in der auf mehrere Arten bereits beantworteten Frage vor dem Gläubiger den Zins von 100 Rthlr in 10 Jahren voraus; die Zeit, in welcher er seine Schuld abtragen will, ist 10 Jahre, und 1000 Rthlr, die ganze Schuld, trägt in einem Jahre so viel Zins, als 100 Rthlr in 10 Jahren. Hieraus ergeben sich sogleich $5\frac{1}{2}$ und $4\frac{1}{2}$ Jahr, als die Zeiten des mitlern Zahlungstermins auf die gedachte Art verschiedentlich bestimmt, und es hat daher diese Art hier vor allen andern einen Vorzug. Sollten 5000 Rthlr auf eine ähnliche Art in 5 einjährigen Terminen bezahlt werden, so hätte der Schuldner den Zins von 1000 Rthlr auf 5 Jahre oder von 5000 Rthlr auf 1 Jahr voraus, und er müßte also nach 3 Jahren die ganze Schuld entrichten.

Ueber-

Ueberlegt man hier alles recht genau, so findet man, daß der mitlere Zahlungstermin vom Anfang gerechnet, um die Hälfte eines Termins grösser sey, als die Zeit, in welcher die ganze Schuld abgetragen werden soll, und vom Ende an gerechnet, um eben so viel kleiner.

§. 224.

Wenn alle Umstände so bleiben, als sie im 221ten §. vestgesetzt worden sind, der mitlere Zahlungstermin aber nach Zinseszinse bestimmt werden soll; so ist ein sehr leichter Weg, die Zeit desselben zu finden, dieser, daß man den Nutzen berechnet, welchen der Gläubiger, wenn terminweise bezahlt würde, von den in den vestgesetzten Terminen zu bezahlenden Summen von ihrer Fallzeit an bis zu dem letzten Termine durch den Zinseszins ziehen könnte, dann die Zeit sucht, in welcher er denselben Nutzen von der ganzen Schuld erhalten kann, und diese Zeit endlich, wenn man die Entfernung des mitlern Zahlungstermins vom Anfang der Entstehung der Schuld an angeben will, von der Zahl der Jahre aller Termine abzieht.

Der mitlere Zahlungstermin muß hier auf die Art bestimmt werden, daß einmal der Schuldner den Nutzen, welchen er bey demselben von der ganzen Schuld bis zu dem mitlern Zahlungstermine durch den Zinseszins erhält, nebst dem Vortheile, welchen er von diesem Nutzen durch den Zinseszins vom mitlern Zahlungstermine an bis zu dem letzten Termine rechnen kann, so hoch bringen könne, als er, wenn er terminweise bezahlt hätte, den Zinseszins aller abzutragenden Summen bis zu ihrer Fallzeit, nebst dem Zinseszinse aller dieser Interessen bis zu dem letzten Termine anschlagen kann; und zweytens, daß der Gläubiger im Stande sey, von dem mitlern Zahlungstermine an bis zu dem letzten Termine von der ganzen Schuld so viel Zinseszins zu ziehen, als die terminweise abzutragenden Summen von ihrer Fallzeit an bis zu dem letzten Termine gegeben haben würden. Gesetzt, daß jemand 1000 Rthl., die er in 10 einjährigen Terminen, jedesmal mit 100 Rthl. bezahlen sollte, in einem nach Zinseszinse vestgesetzten mitlern Zahlungstermine abtragen wollte; so würde er, wenn er terminweise bezahlte, rechnen können

von den in den Term. zu bezahl. Sum.	den Zinseszins für Jahre	den Zinseszins dieser Sum. für J.
der 1ten	— — 1	— — 9
— 2 —	— — 2	— — 8
— 3 —	— — 3	— — 7
— 4 —	— — 4	— — 6
— 5 —	— — 5	— — 5
— 6 —	— — 6	— — 4
— 7 —	— — 7	— — 3
— 8 —	— — 8	— — 2
— 9 —	— — 9	— — 1
— 10 —	— — 10	— — 0 und so

viel als dies insgesammt beträgt, muß er bey einem mitlern Zahlungstermine auf die gedachte Art ebenfalls erhalten können.

nen. Der Gläubiger hingegen könnte, wenn terminweise bezahlt würde, rechnen

von den in den Term. zu bezahl. Sum.	den Zinseszins für Jahre
der 1ten — — —	9
— 2 — — — —	8
— 3 — — — —	7
— 4 — — — —	6
— 5 — — — —	5
— 6 — — — —	4
— 7 — — — —	3
— 8 — — — —	2
— 9 — — — —	1
— 10 — — — —	0

und eben so viel muß er bey einem mitlern Zahlungstermine von demselben an bis zu dem letzten Termine durch den Zinseszins erhalten können. Man überzeugt sich hier bald davon, daß der Nutzen des Gläubigers und der Nutzen des Schuldners zusammengenommen dem Zinseszinse gleich sey, welchen die ganze Schuld vom Anfang an bis zu dem letzten Termine trägt, und daß daher, wenn die Zeit richtig bestimmt ist, welche der Gläubiger gebraucht, um von der ganzen Schuld den ihm zukommenden Nutzen durch den Zinseszins zu erhalten, die dem Schuldner zu gestattende Zeit durch den Abzug jener von der Zeit aller Termine sich ergeben müsse.

§. 225.

§. 225.

Der Nutzen, welchen der Gläubiger, wenn terminweise bezahlt würde, von den in den vestgesetzten Terminen zu bezahlenden Summen von ihrer Fallzeit an bis zu dem letzten Termine rechnen könnte, läßt sich für den bisher betrachteten Fall nach §. 124 leicht berechnen. In dem im vorhergehenden §. angeführten Exempel wäre er zu entwickeln aus

$$(100\ \text{Rthl.} + 20 \times 100\ \text{Rthl.}) \times \frac{21^9}{20^9} - 20 \times 100\ \text{Rthl.}$$

oder $2100\ \text{Rthl.} \times \frac{21^9}{20^9} - 2000\ \text{Rthl.}$ Da nun $L.\ 2100 = 3,3222193$, und

$$L.\ \frac{21^9}{20^9} = 0,1907037;$$ so

ist $L.\ 2100 \times \frac{21^9}{20^9} = 3,5129230.$ Da nun hiezu die Zahl 3257,78 gehört, so sind 3257,78 Rthl. — 2000 Rthl., oder 1257,78 Rthl., das durch den Zinseszins vermehrte Capital, und 1257,78 Rthl. — 1000 Rthl., oder 257,78 Rthl. der Nutzen, welchen der Gläubiger in Anschlag bringen kann. Nunmehr findet man nach dem aus der Zeitrechnung hieher gehörigen leicht die Zeit, welche der Gläubiger haben muß, um eben denselben Vortheil durch den Zinseszins von 1000 Rthl. zu erhalten. Es ist nemlich

L. 1257,78 = 3,0996075 und
L. 1000 = 3,0000000, folglich
L. 1257,78 — L. 1000 = 0,0996075. Nun dividire man, wie in der Zeitrechnung gelehret worden

211893   9960750000 | 4,7008
1528139686
48500185
18474
2893
178
1

Es muß also der Gläubiger die ganze Schuld vor dem letzten Termine 4,7008 Jahre nutzen können, und der Schuldner also dieselbe 10 Jahre weniger 4,7008 Jahre, oder 5,299 Jahre behalten.

Es ist in dem vorhergehenden der Zinseszins zu 5 pr. C. gerechnet worden; man kann aber auch hier, so wie bey der Berechnung des mitlern Zahlungstermins nach einfachem Zinse ein anderes pr. C. und zwar was für eins man will annehmen, wofern man nur das einmal angenommene bis ans Ende beybehält.

§. 226.

Will man die Zeit, welche der Schuldner die ganze Schuld behalten muß, unmittelbar finden, so ist der bequemste Weg dazu folgender. Man sucht nach den Regeln

geln der doppelten Rabattrechnung die Summe, welche für die terminweise zu bezahlende Schuld bey doppeltem Rabatte sogleich bezahlt werden müßte, und wenn das geschehen ist, so sucht man ferner die Zeit, welche diese Summe gebraucht, um durch den Zinseszins zu der Grösse der ganzen Schuld zu wachsen. Diese Zeit ist die verlangte. Uebrigens kann man auch hier ein pr. C. nach Willkühr annehmen.

Das vorhergehende Exempel beyzubehalten, so findet man die für 1000 Rthlr, die in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen bezahlt werden sollen, mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. sogleich zu erlegende Summe aus

$$20 \times 100 \text{ Rthlr} - 21 \times 100 \text{ Rthlr} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$$

$$\text{oder } 2000 \text{ Rthlr} - 2100 \text{ Rthlr} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}. \text{ (s. §. 181 f.)}$$

$$\text{Da nun L. } \frac{20^{11}}{21^{11}} = -1{,}7669177, \text{ und}$$

$$\text{L. } 2100 = 3{,}3222193, \text{ also}$$

$$\text{L. } 2100 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} = 3{,}0891370, \text{ und dieser Lo-}$$

garithme zu 1227,826 gehört; so ist die sogleich zu erlegende Summe gleich 2000 Rthlr weniger 1227,826 Rthlr, oder 772,174 Rthlr. Die Zeit zu finden, in welcher 772,174 Rthlr durch den Zinseszins zu 5 pr. C. 1000 Rthlr werden, lehret die Zeitrechnung. Es ist

$$\text{L. } 1000 = 3{,}0000000, \text{ und}$$

$$\text{L. } 772{,}174 = 2{,}8877146, \text{ also}$$

$$\text{L. } 1000 - \text{L. } 772{,}174 = 0{,}1122854. \text{ Nun wird dividirt}$$

211893

```
211893      1122854ØØØØ | 5,2991
             774Ø94337  |
             63381324
             21120093
              301881
              212000
              10419
               9538
               142
                31
                 1
```

Der Schuldner muß also 5,2991 Jahr zur Benutzung der ganzen Schuld erhalten.

In Ansehung der Rechnung ist diese Art nicht schwerer als die vorhergehende; der Grund der Richtigkeit des Verfahrens aber fällt bey der vorhergehenden Art eher in die Augen. Auch kann man bey solchen Fällen, wie der bisher betrachtete zur Findung der baar zu erlegenden Summe die §. 186 gedachten Tabellen gebrauchen und sich dadurch die Rechnung noch mehr erleichtern.

§. 227.

Die bisher betrachteten beyden Arten den mitlern Zahlungstermin zu bestimmen, findet man in den hieher gehörigen Schriften gewöhnlicher Weise allein, und sie sind auch die beyden einzigen, auf welche die §. 219 angeführte allgemeine Regel leitet. Es läßt sich indeß noch eine dritte

dritte Art gedenken, diejenige nemlich, welche den mitlern Zahlungstermin nach dem einfachen Rabatte angiebt, und es kann nicht schädlich seyn, auch hievon mit wenigem zu reden. Die allgemeine Regel hiebey ist: Es muß der mitlere Zahlungstermin so vestgesetzt werden, daß die für die ganze Schuld, bey einer frühern Zahlung derselben von der Zeit des mitlern Zahlungstermins, mit einfachem Rabatte sogleich zu bezahlende Summe gleich sey dem Capitale, welches die einfache Rabattrechnung als die für die terminweise abzutragende Schuld sogleich zu bezahlende Summe angiebt. Soll also der mitlere Zahlungstermin nach einfachem Rabatte vestgesetzt werden, so suchet man zuvörderst die Summe, welche für die terminweise abzutragende Schuld bey einfachem Rabatte sogleich bezahlt werden müßte, und bestimmt dann die Zeit, in welcher diese Summe durch den einfachen Zins zu der Grösse der ganzen Schuld anwächst. Diese Zeit ist die gesuchte Zeit des mitlern Zahlungstermins. Das pr. C. des Rabatts und des Zinses kann seyn, welches es will, doch muß durch die ganze Rechnung ein und dasselbe pr. C. beybehalten werden.

§. 228.

Gesetzt, daß der mitlere Zahlungstermin für 1000 Rt, die ohne Zins in 10 einjährigen Terminen und gleichen

chen Summen abzutragen sind, nach einfachem Rabatte zu 5 pr. C. vestgesetzt werden sollte; so ist zuvörderst die für die gedachte 1000 Rthl. sogleich zu bezahlende Summe $794\frac{1}{2}$ Rthl., (s. §. 161) und die Zeit, in welcher diese $794\frac{1}{2}$ Rthl. durch den einfachen Zins a 5 pr. C. zu 1000 Rthl. anwachsen, gleich $\frac{205,5}{5 \times 7,945}$ Jahre. Rechnet man nun

```
7945     41100000 | 5,173
         66755555 |
          148173
           39031
           6276
           5 45
             3
```

so findet man 5,173 Jahre, oder 5 Jahre und 9 Wochen. Nur so lange dürfte also bey dieser Bestimmung des mitlern Zahlungstermins der Schuldner die ganze Schuld nutzen.

§. 229.

Auf was für eine Art soll und muß nun aber bey wirklichen Vorfällen der mitlere Zahlungstermin vestgesetzt werden? nach dem einfachen Zinse, oder nach dem Zinseszinse, oder nach dem einfachen Rabatte? **Nach dem einfachen Zinse kann solches ohne Vervortheilung des Gläubigers nicht geschehen.** Man betrachte nur, um sich hievon zu überzeugen, nach der

§. 221 bis 223 befindlichen weitläuftigen Auseinandersetzung der Bestimmung des mitlern Zahlungstermins nach einfachem Zinse, genau den Zins, welchen der Schuldner und Gläubiger in Anschlag zu bringen haben, insbesondere aber die Zeit, wo sie ihn erhalten sollten, und die Art, wie man bey der Bestimmung des mitlern Zahlungstermins darauf Rücksicht nimmt. Wenn der Zins zu 5 pr. C. gerechnet wird, so erhält in dem zum Grunde liegenden Falle der Schuldner an Zins

nach Jahren	ohne mitlern Zahlungstermin	bey einem mitlern Zahlungstermine
— 1 —	— 50 Rthlr	— — 50 Rthlr
— 2 —	— 45 Rthlr	— — 50 Rthlr
— 3 —	— 40 Rthlr	— — 50 Rthlr
— 4 —	— 35 Rthlr	— — 50 Rthlr
— 5 —	— 30 Rthlr	— — 50 Rthlr
— $5\frac{1}{2}$ —	— 0	— — 25 Rthlr
— 6 —	— 25 Rthlr	— — 0 —
— 7 —	— 20 Rthlr	— — 0 —
— 8 —	— 15 Rthlr	— — 0 —
— 9 —	— 10 Rthlr	— — 0 —
— 10 —	— 5 Rthlr	— — 0 —.

Es erhält also der Schuldner bey einem mitlern Zahlungstermine verschiedene Zinsposten eher, als er, wenn er terminweise bezahlte, dieselben rechnen könnte; nemlich 5 Rthlr anstatt nach 10 Jahren nach 2 Jahren, 10 Rthlr. anstatt

nach

nach 9 Jahren nach 3 Jahren, 15 Rthlr anstatt nach 8 Jahren nach 4 Jahren, 20 Rthlr anstatt nach 7 Jahren nach 5 Jahren, und 25 Jahren anstatt nach 6 Jahren nach $5\frac{1}{2}$ Jahre. Der Gläubiger hingegen erhält an Zins

nach Jahren	ohne mitlern Zahlungstermin	bey einem mitlern Zahlungstermine
— 1 —	— 0 —	— 0 —
— 2 —	— 5 Rthlr —	— 0 —
— 3 —	— 10 Rthlr —	— 0 —
— 4 —	— 15 Rthlr —	— 0 —
— 5 —	— 20 Rthlr —	— 0 —
— 6 —	— 25 Rthlr —	— 25 Rthlr
— 7 —	— 30 Rthlr —	— 50 Rthlr
— 8 —	— 35 Rthlr —	— 50 Rthlr
— 9 —	— 40 Rthlr —	— 50 Rthlr
— 10 —	— 45 Rthlr —	— 50 Rthlr.

Der Gläubiger bekommt also bey einem mitlern Zahlungstermine verschiedene Zinsposten später, als er, wenn terminweise bezahlt worden wäre, dieselben hätte rechnen können; nemlich 5 Rthlr anstatt nach 2 Jahren nach 10 Jahren, 10 Rthlr anstatt nach 3 Jahren nach 9 Jahren, 15 Rthlr anstatt nach 4 Jahren nach 8 Jahren, und 20 Rthlr anstatt nach 5 Jahren nach 7 Jahren. Ist daher nicht offenbar der mitlere Zahlungstermin, wenn er nach einfachem Zinse bestimmt wird, zum Schaden des Gläubigers und zum Vortheile des Schuldners? Wenn ein

Schuldner eine nach einer gewissen Zeit erst fällige Schuld mit einfachem Rabatte früher bezahlen will, so wird dabey auf die Zeit der daselbst in Anschlag zu bringenden Zinse nicht gesehen, weil (s. §. 199) der daher mögliche Nachtheil dem Schuldner durch anderweitige Umstände ersetzt wird. Aber was soll hier der Gläubiger für anderweitige Vortheile in Anschlag bringen, um den Nachtheil nicht zu achten, der daher für ihn entspringt, daß man nicht auf die Zeit der ihm zukommenden Zinse Rücksicht nimmt? Wie, wenn in den meisten Fällen der mitlere Zahlungstermin mehr von dem Schuldner als von dem Gläubiger verlangt würde?

§. 230.

Wie verhält es sich also mit der Bestimmung des mitlern Zahlungstermins nach Zinseszinse? Sollte man bey der Vestsetzung des mitlern Zahlungstermins die Rechnung nach Zinseszinse empfehlen müssen, da man sonst dieselbe verwirft? Kann hier durch die Rechnung nach Zinseszinse Vervortheilung verhütet werden, da sie sonst dadurch befördert wird? Es sind diese Fragen allerdings zu bejahen, und der anscheinende Widerspruch fällt weg, wenn man bedenkt, daß bey der Vestsetzung eines mitlern Zahlungstermins nach Zinseszinse nicht blos der Nutzen des Schuldners, sondern auch der Nutzen des Gläubigers nach Zinseszinse berechnet wird, und daß der Schuldner auch den Zins rechnen muß, welchen der

von

von der ganzen Schuld bis zu dem mitlern Zahlungstermine erhaltene Zins von diesem Zeitpunkte an bis zu dem letzten Termine trägt. Wird daher der mitlere Zahlungstermin nach Zinseszinse bestimmt, so ist die Vervortheilung des Gläubigers wenigstens so groß nicht, als wenn derselbe nach einfachem Zinse bestimmt worden wäre; allein es bleibt gleichwohl in so fern noch eine Vervortheilung des Gläubigers möglich, weil der Schuldner die Benutzung der Summe des letzten Termins vor dem Gläubiger voraus hat, und ihm also davon doch Zinseszins zu ziehen erlaubt wird.

§. 231.

Gesetzt der Gläubiger sagte: Wenn mir ein Schuldner 1000 Rthlr in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen ohne Zins zu bezahlen verspricht, so tritt er mit mir in eben die Verbindung, als wenn er mir $794\frac{1}{2}$ Rthlr sogleich zu geben verpflichtet wäre (s. §. 161); will er also seine Schuld *in einem mitlern Zahlungstermine* abtragen, so ist es so viel, als ob er jetzt von mir $794\frac{1}{2}$ Rthlr unter der Bedingung aufnähme, daß er mir dafür 1000 Rthlr, wenn der einfache Zins a 5 pr. C. $205\frac{1}{2}$ Rthlr ausmachen würde, wiedergeben wolle, und ich brauche ihm also auch jene 1000 Rthlr nicht länger zu lassen, als bis die $794\frac{1}{2}$ Rthlr durch den einfachen Zins a 5 pr. C. zu 1000 Rthlr angewachsen sind, und dazu werden 5,173 Jahre erfordert; gesetzt ein Gläubiger sagte so, so hätte er ohnstreitig nichts weiter wider sich, als daß die gedachten 1000 Rthlr nur, wenn sie wirklich mit einfachem Rabatte a 5 pr. C. bezahlt werden, 794½ Rthlr am Werthe gleich sind. Wäre also ein Fall von der Art da, daß nicht so wohl dem Gläubiger als dem Schuldner an einem mitlern Zahlungstermine gelegen wäre, so könnte derselbe allerdings nach dem einfachen Rabatte bestimmt werden. Alles genau erwogen, so erhält alsdann der Gläubiger einen Vortheil, den er ohne einen mitlern Zahlungstermin nicht gehabt haben würde; allein einmal kann der Schuldner eigentlich nicht sagen, daß er dadurch vervortheilt werde, zweytens hat der Schuldner dagegen den Vortheil, daß er eine Zeitlang gar nicht an die Abtragung seiner Schuld denken darf, drittens erhält der Gläubiger bey einem mitlern Zahlungstermine verschiedene Zinsposten später, als bey der Zahlung in Terminen, und endlich hat der Gläubiger bey einem mitlern Zahlungstermine mehr Sorge in Ansehung der Unterbringung des Capitals, als ohne denselben. Soll aber auf dieses alles nicht gesehen werden, so wird freylich der mitlere Zahlungstermin am besten nach dem doppelten Zinse oder Rabatte bestimmt. Eine weitläuftigere Untersuchung dieses Gegenstandes gehöret nicht hieher.

§. 232.

Wenn die terminweise abzutragende Schuld bis zu ihrer Fallzeit einen verabredeten Zins trägt, in dem

dem bisher betrachteten Exempel z. B. der Schuldner seine Schuld mit 2 pr. C. verzinsen wollte; **so sind die mehresten der bisher gegebenen Regeln ebenfalls, doch mit einiger Veränderung oder Zusätzen, brauchbar.** Nun ist z. B. das pr. C., nach welchem man den Nutzen des Schuldners und Gläubigers berechnen will, nicht mehr willkührlich, welches nach einiger Ueberlegung der Natur dieses Falls keines weitern Beweises bedarf, sondern es muß dazu das landübliche, oder 5 pr. C., genommen werden. Ferner bleiben die bisher möglichen und empfohlnen Verkürzungen in der Berechnung des Nutzens des Schuldners und des Gläubigers von der terminweise zu bezahlenden Schuld nicht dieselben, u. d. gl. Man überdenke, sich davon zu überzeugen, die folgenden Fälle genau.

§. 233.

Angenommen also, daß jemand einem andern 1000 Rthlr in 10 einjährigen Terminen, jedesmal mit 100 Rthlr abzutragen, und dieselben bis zu ihrer Bezahlung mit 2 pr. C. zu verzinsen versprochen hätte, hinterher aber wünschte, die ganze Schuld in einem mitlern Zahlungstermine zu bezahlen; so wäre, **wenn der mitlere Zahlungstermin nach einfachem Zinse vestgesetzt werden sollte,** dieser Fall nicht verschieden von dem, wenn der Schuldner sich verpflichtete, den von dem terminweise zu bezahlenden Summen ihm zukommenden Vortheil nur zu 3 pr. C. zu rechnen, und dagegen den bey einem mitlern Zahlungstermine von der ganzen Schuld zu erhaltenden Nutzen zu 5 pr. C. sich anschlagen zu lassen. Stellt man es sich auf diese Art vor, so ist das übrige leicht. Der Schuldner erhält nemlich, wenn terminweise bezahlt wird

$$55 \times 100 \text{ Rt} \times \tfrac{3}{100} \text{ oder } 165 \text{ Rt},$$

und die Zeit, welche er, um diese Summe durch den Zins a 5 pr. C. von der ganzen Schuld zu erhalten braucht, oder die Zeit des mitlern Zahlungstermins ist

$$\tfrac{165}{5 \times 10} \text{ oder } 3{,}3 \text{ Jahre.}$$

Der Gläubiger hingegen kann, wenn terminweise bezahlt wird, an Zins rechnen

1. $45 \times 100 \text{ Rt} \times \tfrac{1}{20}$ oder 225 Rt
2. $55 \times 100 \text{ Rt} \times \tfrac{1}{50}$ oder 110 Rt, also
überhaupt — 335 Rt.

Um dieselbe Summe durch den Zins a 5 pr. C. von der ganzen Schuld oder 1000 Rt zu erhalten, wird an Zeit erfordert,

$$\tfrac{335}{5 \times 10} \text{ oder } 6{,}7 \text{ Jahre.}$$

§. 234.

Soll der mitlere Zahlungstermin nach Zinseszinse vestgesetzt werden, so ist der bequemste Weg dazu, daß man nach §. 194 diejenige Summe sucht, welche der

Schuld-

Schuldner, wenn er mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. sogleich bezahlen wollte, baar zu entrichten hätte, und dann die Zeit bestimmt, welche diese Summe gebraucht, um durch den Zinseszins a 5 pr. C. zu der Grösse der ganzen Schuld anzuwachsen. Die in dem betrachteten Exempel baar zu bezahlende Summe findet man aus

$$\frac{100 \text{ Rthlr} \times \frac{51}{50} \times \frac{20}{21} - 100 \text{ Rthlr} \times \frac{51^{11}}{50^{11}} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}}{1 - \frac{51}{50} \times \frac{20}{21}},$$

und wie aus der baar zu bezahlenden Summe die gedachte verlangte Zeit gefunden werde, ist bereits öfters gezeigt worden. Alle andere Wege sind zu weitläuftig, als daß sie verdienen sollten, beschrieben zu werden.

§. 235.

Soll endlich der mitlere Zahlungstermin nach einfachem Rabatte vestgesetzt werden, so lehret der 157te und 165te §, wie man die von dem Schuldner, wenn er mit einfachem Rabatte sogleich bezahlen wollte, baar zu entrichtende Summe findet, und weiß man erst diese Summe, so ist das übrige leicht und aus dem bisherigen klar.

Wenn man die §. 229 bis 231 angestellte Untersuchung auf den §. 232 f. betrachteten Fall anwendet, so wird man die daselbst angeführten Behauptungen ebenfalls bestätiget finden.

§. 236.

Gesetzt, daß die Termine, in welchen der Schuldner seine Schuld bezahlen sollte, selbst zwar in gleichen Zwischenräumen auf einander folgen, die Zeit des ersten Termins aber von der Zwischenzeit jeder zweyer auf einander folgenden Termine verschieden ist; so berechnet man, was auch übrigens für Bedingungen vestgesetzt seyn mögen, jedesmal, nach den statt findenden Umständen und den dafür in der Zinsrechnung und Rabattrechnung gegebenen Regeln, entweder den Nutzen, welchen der Schuldner oder der Gläubiger, wenn terminweise bezahlt würde, rechnen könnte, oder die für die ganze Schuld, wenn sie mit Rabatte sogleich bezahlt werden sollte, baar zu entrichtende Summe, und suchet dann aus dem gefundenen auf den bisher betretenen Wegen die Zeit des mitlern Zahlungstermins. Wer die bisherigen Exempel genau überdacht und gefaßt hat, der wird hiernach leicht im Stande seyn, die vorkommenden Aufgaben dieses Falls aufzulösen.

§. 237.

Sind b (s. §. 221) entweder die Summen der Schuld, welche terminweise bezahlt werden sollte, und für welche man einen mitlern Zahlungstermin finden will, ungleich, oder die Termine von einander nicht

gleich

gleich weit entfernt, oder finden sich beyde Umstände zusammen; so muß man, was auch übrigens noch für Bedingungen vestgesetzt seyn mögen, theilweise entweder den Nutzen des Gläubigers oder Schuldners, wenn terminweise bezahlt würde, berechnen, oder eben so die, wenn mit Rabatte sogleich bezahlt werden sollte, für die ganze Schuld baar zu entrichtende Summe finden, und dann endlich aus dem gefundenen die Zeit des mitlern Zahlungstermins suchen. Sollte z. B. für 5000 Rthl, die ohne Zins in ungleichen Summen zu 2000 Rthl, 1750 Rthl und 1250 Rthl in drey Terminen abgetragen werden sollten, davon der erste nach 3, der andere nach 4 und der dritte nach $5\frac{1}{2}$ Jahre fiele, ein mitlerer Zahlungstermin gefunden werden; so müßte man,

wenn der mitlere Zahlungstermin nach einfachem Zinse bestimmt werden sollte,

1. den Nutzen, welchen der Schuldner durch den einfachen Zins von 2000 Rthl in 3 Jahren,
2. den Nutzen, welchen er von 1750 Rthl in 4 Jahren und
3. den Nutzen, den er von 1250 Rthl in $5\frac{1}{2}$ Jahre erhalten könnte, berechnen, und dann die Zeit suchen, in welcher er denselben Nutzen durch gleichen einfachen Zins von 5000 Rthl erhalten könnte;

wenn

wenn aber der mitlere Zahlungstermin nach Zinseszinse vestgesetzt werden sollte,

1. den Nutzen, welchen der Gläubiger durch den Zinseszins von 2000 Rthlr in $2\frac{1}{2}$ Jahre, und
2. den Nutzen, welchen er auf eben die Art von 1750 Rthlr in $1\frac{1}{2}$ Jahre erhalten könnte, suchen, dann die Zeit bestimmen, in welcher er denselben Nutzen durch den Zinseszins von 5000 Rthlr gewinnen könnte, und diese von $5\frac{1}{2}$ Jahre abziehen; und endlich,

wenn der mitlere Zahlungstermin nach einfachem Rabatte bestimmt werden sollte,

1. die für 2000 Rthlr, so nach 3 Jahren,
2. die für 1750 Rthlr, die nach 4 Jahren, und
3. die für 1250 Rthlr, die nach $5\frac{1}{2}$ Jahren fällig sind, bey einfachem Rabatte sogleich zu entrichtende Summe suchen, und daraus nachher die verlangte Zeit finden.

Da die zur gänzlichen Ausrechnung der hieher gehörigen Exempel nöthige Regeln bereits in der Zinsrechnung, Rabattrechnung und Zeitrechnung angeführt und durch Beyspiele hinlänglich erläutert worden sind, so wäre es ohnstreitig überflüssig, bey diesen Fällen länger zu verweilen.

Ver-

Veränderte und getheilte Zahlungstermine.

§. 238.

Was unter den veränderten Zahlungsterminen überhaupt zu verstehen sey, bedarf keiner Anzeige; aber dagegen muß bemerkt werden, daß hier unter diesem Titel nicht solche Fälle abgehandelt werden sollen, in welchen Geld das *in einem* Termine fällig ist, früher oder später aber doch in **einem** Termine, und also mit Zinse oder mit Rabatte bezahlt werden soll. Die dabey nöthigen Rechnungen sind schon in der Zinsrechnung, Rabattrechnung und Zeitrechnung da gewesen. **Veränderte Zahlungstermine**, im engern Verstande nemlich genommen, **finden statt, wenn Geld, das in verschiedenen Terminen bezahlt werden sollte, nach einem anderweitigen Vertrage nun in andern, aber auch mehrern, Terminen abgetragen werden muß.** Es redet z. B. ein Schuldner mit seinem Gläubiger, dem er 1000 Rthl. in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen zu bezahlen versprochen, hinterher ab, daß er diese Schuldsache in 5 zweyjährigen Terminen abmachen darf. Hier sind verschiedene Termine in verschiedene andere verwandelt worden, und es kann dabey, wenn die Termine bestimmt sind, die Frage entstehen, wie viel in jedem Termine bezahlt werden müsse, oder es können auch die Termine selbst

zu

zu suchen seyn. Was man in beyden Fällen für Regeln zu befolgen habe, muß und soll daher jetzt gezeigt werden.

§. 239.

Man überzeugt sich bey einiger Betrachtung der hieher gehörigen Aufgaben sehr bald von der Wahrheit folgender allgemeinen Regel: **Wenn Zahlungstermine verändert werden, so muß solches ohne Vervortheilung so wohl des Gläubigers als des Schuldners geschehen;** und eben so leicht entdeckt man die verschiedenen möglichen Arten der Beurtheilung, ob dies geschehen sey oder nicht. Man kann nemlich untersuchen, ob der Gläubiger und Schuldner bey den veränderten Terminen noch eben so viel *einfachen* Zins entweder oder Zinseszins auf ihre Rechnung setzen können, als wenn die Termine nicht verändert wären; oder ob die in den veränderten Terminen bezahlte Schuld, nach dem einfachen Rabatte auf ihren jetzigen Werth zurückgebracht, eben die Summe gebe, welche man erhält, wenn man die in den unveränderten Terminen zu bezahlende Schuld auf gleiche Art reducirt. Uebrigens entsteht auch daher eine Verschiedenheit in der Veränderung der Zahlungstermine, daß die terminweise zu bezahlende Schuld bisweilen bis zu ihrer Fallzeit verzinset werden muß, und bisweilen nicht.

§. 240.

§. 240.

Was die getheilten Zahlungstermine betrifft, so finden dieselben statt, wenn Geld, das auf einmal bezahlt werden sollte, nach getroffener Verabredung nun in mehrern Terminen bezahlt wird. Auch hier muß weder der Gläubiger noch der Schuldner leiden, und es kann, ob dies statt finde oder nicht, auf eben die Arten, als bey den veränderten Zahlungsterminen, beurtheilt werden. Das Geld, welches anstatt auf einmal in verschiedenen Terminen bezahlt werden soll, trägt ebenfalls bis zu seiner Fallzeit entweder keinen Zins, oder es steht bis dahin auf Zins. Endlich giebt es, so wohl bey den veränderten Zahlungsterminen als bey den getheilten, noch mehrere Umstände, welche in den dazu gehörigen Fällen Mannigfaltigkeit verursachen; es wird aber besser seyn, darauf erst in der Folge zu sehen. Mit der Betrachtung der getheilten Zahlungstermine wird am füglichsten der Anfang gemacht.

§. 241.

Wenn eine Summe Geldes in verschiedenen Terminen bezahlt werden soll, so ist dieselbe entweder sogleich oder erst nach einiger Zeit fällig. Ein Fall von der ersten Gattung fände statt, wenn jemand einem andern 3546 Rthl. gäbe, und derselbe sie ihm mit dem Zinse, z. B. in 4 einjährigen Terminen und in glei-

chen

chen Summen, von jetzt an gerechnet, wiedergeben sollte; oder wenn jemand nach 10 Jahren von einem andern 3546 Rthl. ohne Zins zu fordern hätte, und nach Verlauf dieser 10 Jahre mit demselben verabredete, daß er ihm, von nun an gerechnet, diese 1000 Rthl. unter eben den Bedingungen abtragen sollte. Zur andern Gattung aber gehört: Es hat jemand 1000 Rthl. ohne Zins nach 10 Jahren zu fordern, verabredet aber nach 2 Jahren mit seinem Schuldner, daß er ihm diese Schuld in drey zweyjährigen Terminen und gleichen Summen, doch ohne seinen (des Schuldners) Nachtheil, bezahle. Ausser der Summe, die in getheilten Terminen bezahlt werden soll, ist entweder die Zahl der Termine und ihre Entfernung von einander gegeben, und dann ist diejenige Summe, die in jedem Termine bezahlt werden muß, zu bestimmen; oder es ist diese Summe und die Zahl der Termine bekannt, und dann sucht man die Grösse der Termine; oder man weiß endlich ausser der ganzen Summe aller Terminzahlungen auch die Grösse der Termine, und dann bleibt die Zahl der Termine und die in jedem zu gebende Summe zu finden übrig.

§. 242.

Gesetzt also, daß eine Summe, die baar gegeben wird, oder jetzt fällig ist, in mehrern Terminen

und

und gleichen Summen, aber zugleich mit dem Zinse, den sie trägt, wiedergegeben werden soll, und Zinseszins gerechnet wird; so ist für den Fall, wenn die Zahl der Termine und ihre Grösse gegeben ist, und daher die Grösse der jedesmal zu entrichtenden Summe gefunden werden soll, das nöthige leicht aus §. 180 u. f. herzuleiten. Genau nemlich die gegenwärtigen Aufgaben betrachtet, so stehen sie den §. 180 u. f. erklärten entgegen, und man hat also zu ihrer Auflösung auch einen entgegenstehenden Weg einzuschlagen. So wird oben §. 181 gefragt: Wie viel muß mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. für 4000 Rthl, die in 4 einjährigen Terminen ohne Zins abgetragen werden sollen, sogleich bezahlt werden? und die Antwort war §. 182: 3545,95 Rthl, oder 3546 Rthl. Hier wird gefragt: Wie viel erhält man jedesmal, wenn man 3546 Rthl mit dem Zinseszinse a 5 pr. C. in gleichen Summen und 4 einjährigen Terminen wieder bekömmt? und die Antwort hierauf muß daher auf die dem §. 181 und 182 betretenen Wege entgegenstehende Art gesucht werden.

§. 243.

Da also die bey doppelten Rabatte a 5 pr. C. für ein Capital, das in 4 einjährigen Terminen und gleichen Summen bezahlt werden soll, baar zu entrichtende Summe aus der Summe eines Termins gefunden wird, wenn man dieselbe mit $\frac{20}{21} + \frac{20^2}{21^2} + \frac{20^3}{21^3} + \frac{20^4}{21^4}$, oder $20 - 21 \times \frac{20^5}{21^5}$ (s. §. 181 und 182) multiplicirt; so muß umgekehrt aus der baar zu gebenden oder gegebenen Summe, wenn man dieselbe mit $\frac{20}{21} + \frac{20^2}{21^2} + \frac{20^3}{21^3} + \frac{20^4}{21^4}$, oder mit $20 - 21 \times \frac{20^5}{21^5}$ dividirt, die in jedem Termine fällige Summe gefunden werden. Da also

$$L.\ 3546 = 3{,}5497387, \text{ und}$$

$$L.\ \frac{20^5}{21^5} = -\ 1{,}8940535, \text{ und}$$

$$L.\ 21 = 1{,}3222193, \text{ also}$$

$$L.\ 21 \times \frac{20^5}{21^5} = 1{,}2162728,$$ und dieser letzte Logarithme zu der Zahl 16,454 gehört, welche von 20 abgezogen 3,546 giebt; so ist der L. 3,546 = 0,5497387, und daher $L.\ 3546 - L.\left(20 - 21 \times \frac{20^5}{21^5}\right) = 3{,}0000000$, und die in jedem Termine abzutragende Summe 1000 Rthl.

Wollte man die Frage beantworten: Wie viel muß jedesmal gegeben werden, wenn man 772,173 Rthl. mit Zinseszinse a 5 pr. C. in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen wiedergeben will? so würde solches nach folgendem Ausdrucke geschehen müssen.

772,

$$\frac{772,173}{20 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}}}.$$

Nun ist L. $772,173 = 2,8877146$, ferner

L. $\frac{20^{11}}{21^{11}} = - 1,7669177$, und

L. $21 = 1,3222193$, also

L. $21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} = 1,0891370$, und daher

$21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} = 12,2783$ folglich

$20 - 12,2783 = 7,7217$. Da

nun L. $7,7217 = 0,8877129$, so ist

L. $772,173$ — L. $\left(20 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}}\right) = 2,0000000$, und

also die in jedem Termine zu bezahlende Summe 100 Rthlr.

§. 244.

Die zu dem betrachteten Falle gehörige Regel ist daher in Worten ausgedruckt: Man suche den Anzeiger, mit welchem man multipliciren müßte, wenn man die für ein Capital, das ohne Zins in den gegebenen Terminen in gleichen Summen bezahlt werden sollte, mit doppeltem Rabatte zu dem vestgesetzten pr. C. sogleich zu erlegende Summe finden wollte, und dividire damit dasjenige Capital, welches mit Zinseszinse in gleich weit von einander entfernten Terminen und in gleichen Summen zurück bezahlt werden soll. Daß man bey der Rechnung selbst die Logarithmen mit Vortheile gebrauche, versteht sich von selbst.

§. 245.

Wenn die Termine einjährig sind, und so als in den betrachteten Exempeln angehen, so kann man sich auch der §. 186 und 187 beschriebenen Tabellen bedienen, um zu seinem Zwecke zu gelangen. Gebraucht man diejenigen, welche für 100 eingerichtet sind, (s. S. 222) so multiplicirt man jedesmal das gegebene Capital mit 100, und dividirt das Product durch die in der Tabelle neben der Zahl der Jahre aller Termine stehende Zahl; nimmt man aber diejenigen, die für 1 gemacht sind, so hat man bloß diese Division nöthig. Die Ausrechnung der Exempel §. 243 wäre auf diese Art.

354,59504	~~354600~~,	1000 Rthl.
	~~11~~5	
7,7217389	~~772,174~~	100 Rthl.
	1	

§. 246.

So bequem der Gebrauch dieser Tabellen in solchen Fällen ist, wenn die in jedem Termine zu gebende Summe durch eine eintheilige, obgleich zu irgend einer Ord-

nung

nung gehörende, Zahl ausgedruckt wird; so unbequem wird derselbe, wenn diese Zahl aus mehrern Theilen besteht. Für dergleichen Fälle wären Tabellen gut, die entweder anstatt der jetzigen Divisoren gleiches hervorbringende Multiplicatoren, oder die Logarithmen aller darin befindlichen Zahlen enthielten. Die gedachten Multiplicatoren erhält man unter andern durch Findung der dritten Proportionalzahl zu den in der Tabelle S. 223 befindlichen Zahlen und 1; von den erwähnten Logarithmen ist nicht nöthig weiter etwas zu sagen.

§. 247.

Soll die baar gegebene oder jetzt fällige Summe mit Zinseszins in gleich weit von einander entfernten Terminen und gleichen Summen zurück gegeben werden, der erste Termin aber von der Zeit des Vertrags anders entfernt seyn als ein jeder anderer Termin von dem nächst vorhergehenden oder nachfolgenden; so läßt sich die §. 244 gegebene Regel nichts desto weniger anwenden. Gesetzt z. B. daß 6563,78 Rthlr jetzt gegeben würden oder fällig wären, und in 4 Terminen, davon der erste nach 5 Jahren, und die drey übrigen in den drey darauf folgenden Jahren sind, mit Zinseszins a 5 pr. C. und in gleichen Summen wieder gegeben werden sollten; so wäre, wenn ein Capital, das in 4 Terminen, nach 5, 6, 7 und 8 Jahren in gleichen

Summen aber ohne Zins zu bezahlen wäre, mit doppeltem Rabatte a 5 pr. C. sogleich bezahlt werden sollte, der Anzeiger der Veränderung der Summe eines Termins zur Findung der baaren Zahlung $21 \times \frac{20^5}{21^5} - 21 \times \frac{20^9}{21^9}$, oder $20 \times \frac{20^4}{21^4} - 20 \times \frac{20^8}{21^8}$, (s. §. 189. 190), und 6563,78 Rthlr. also mit dem einen dieser Anzeiger dividirt geben die in jedem Termine abzutragende Summe, 2250 Rthlr. Es ist nemlich

$$\mathrm{L.}\ 6563{,}78 = 3{,}8171540;\ \text{ferner}$$

$$\mathrm{L.}\ \frac{20^5}{21^5} = -1{,}8940535,\ \text{und}$$

$$\mathrm{L.}\ 21 = 1{,}3222193,\ \text{also}$$

$$\mathrm{L.}\ 21 \times \frac{20^5}{12^5} = 1{,}2162728,\ \text{folglich}$$

$$21 \times \frac{20^5}{21^5} = 16{,}454;\ \text{ferner}$$

$$\mathrm{L.}\ \frac{20^9}{21^9} = 1{,}8092963,\ \text{und}$$

$$\mathrm{L.}\ 21 = 1{,}3222193,\ \text{also}$$

$$\mathrm{L.}\ 21 \times \frac{20^9}{21^9} = 1{,}1315156,\ \text{folglich}$$

$$21 \times \frac{20^9}{21^9} = 13{,}53678,\ \text{und}$$

21 ×

$21 \times \frac{20^5}{21^5} - 21 \times \frac{20^9}{21^9} = 2,91722$. Da nun

$L.\ 2,91722 = 0,4649692$, so ist

$L.\ 6563,78 - L.\ (21 \times \frac{20^5}{21^5} - 21 \times \frac{20^9}{21^9}) = 3,3521848$,

und also die in jedem Termine zu bezahlende Summe 2250 Rthlr., indem 3,3521848 der Logarithme von 2250, eine Kleinigkeit nicht gerechnet, ist.

§. 248.

Wenn in jedem Termine zwar gleich viel bezahlet werden soll, die Termine aber ungleich weit von einander entfernt sind, so reicht die §. 244 gegebene Regel auch zur Auflösung dieser Fälle hin, es läßt sich aber alsdann der Divisor der angelegten Summe nur nicht so leicht als bisher finden. Gesetzt z. B. daß jemand 3500 Rthlr. auf Zinseszins zu 5 pr. C. anlegte, und dieselbe mit dem Zinseszins in gleichen Summen nach 3, 5, 8 und 9 Jahren wieder verlangte, so müßte man, um die Summe eines jeden Termins zu finden, die gedachten 3500 Rthlr. durch $\frac{20^3}{21^3} + \frac{20^5}{21^5} + \frac{20^8}{21^8} + \frac{20^9}{21^9}$ dividiren. Da sich aber die Reihe $\frac{20^3}{21^3} + \frac{20^5}{21^5} + \frac{20^8}{21^8} + \frac{20^9}{21^9}$ nicht addiren läßt, so bleibt zur fernern Rechnung kein anderer Weg übrig, als von allen einzeln Gliedern derselben die Logarithmen, und zu jeden einzeln dieser Logarithmen die zugehörende Zahl zu suchen, alle diese Zahlen zu addiren, und den Logarithmen ihrer Summe von dem Logarithmen von 3500 abzuziehen, wo dann die zu dieser Differenz gehörige Zahl die in jedem Termine zu bezahlende Summe giebt. Es sind aber dergleichen Aufgaben viel seltner, als die in den vorhergehenden §§. betrachteten, so wie eben dies von den Aufgaben der doppelten Rabattrechnung gilt, womit sie in Verbindung stehen, daher auch von denselben in der doppelten Rabattrechnung nicht einmal besonders geredet worden ist.

§. 249.

Ist nun aber (s. §. 241) das Capital, das terminweise in gleichen Summen und mit Zinseszinse abgetragen werden soll, erst nach einiger Zeit fällig, so muß man vor allen Dingen den jetzigen Werth dieses Capitals nach den Regeln der doppelten Rabattrechnung suchen. Das pr. C., welches man hierbey zu nehmen hat, ist entweder eben dasjenige, wornach darauf der Zinseszins gerechnet wird, oder ein anderes; was für ein Fall aber auch statt finde, so ist der einzuschlagende Weg bekannt. Hat man nun das gedachte Capital auf seinen jetzigen Werth reducirt, so darf man nur diesen Werth anstatt des gegebenen Capitals nehmen, und ferner nach den bisher §. 241 bis 248 vorgetragenen Regeln handeln.

Gesetzt

Gesetzt z. B. daß ein Gläubiger von einem Schuldner $1215\frac{1}{2}$ Rthlr nach 4 Jahren zu fordern hätte, und beyde verabredeten, daß diese Schuldsache terminweise und zwar in gleichen Summen abgemacht werden sollte; so wäre, wenn weiter keine Bestimmungen hinzukämen, dieser Fall gleich dem, wenn 1000 Rthlr, denn dies ist der gegenwärtige Werth der gedachten $1215\frac{1}{2}$ Rthlr, in eben den Terminen und in gleichen Summen bezahlt werden sollten. Es bedarf also dieser Fall keiner weitläuftigern Auseinandersetzung.

§. 250.

Sollte der erste Termin sogleich seyn, so wäre der Anzeiger der Veränderung des in demselben zu bezahlenden Theils zur Findung seines jetzigen Werths 1. Bedenkt man dies, so kann der gedachte Umstand keine Schwierigkeit verursachen, denn man rechnet am Ende doch nach der Regel §. 244. Sollte z. B. in dem 2ten Exempel des 243ten §. der erste Termin sogleich seyn, so müßte man 772,173 dividiren durch $1 + \frac{20}{21} + \frac{20^2}{21^2}$

$$+ \frac{20^3}{21^3} + \frac{20^4}{21^4} + \frac{20^5}{21^5} + \frac{20^6}{21^6} + \frac{20^7}{21^7} + \frac{20^8}{21^8} + \frac{20^9}{21^9},$$

d. h. durch $\dfrac{\frac{20^{10}}{21^{10}} - 1}{-\frac{1}{21}}$ oder $21 - 21 \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$.

 Man

Man betrachte hiebey den entgegenstehenden Fall in der doppelten Rabattrechnung §. 188.

§. 251.

Ehe ich weiter gehe, wird es gut seyn, die von §. 241 an betrachteten Fälle unter der Bedingung zu erwägen, daß der Zins, welcher in Anschlag gebracht wird, einfacher Zins sey. Nach der bisher allgemein befolgten Ordnung hätte ich hievon zuerst reden sollen; ich habe indeß diesmal die umgekehrte Ordnung erwählt, weil so die zu gebende Regeln leichter gefaßt werden können.

§. 252.

Es sey also zuvörderst das Capital, das in gleichen Summen und in gleich weit von einander entfernten Terminen mit einfachem Zinse abgetragen werden soll, jetzt fällig, oder werde dazu einem Schuldner von einem Gläubiger gegeben. Was auch übrigens für Verschiedenheiten in Ansehung der Termine statt finden mögen, so hat man jedesmal nur nöthig, den Anzeiger zu suchen, mit welchem man multipliciren müßte, wenn man die für ein Capital, das ohne Zins in den gegebenen Terminen in gleichen Summen bezahlt werden sollte, mit einfachem Rabatte zu dem gegebenen pr. C. sogleich zu erlegende Summe finden wollte,

und

und damit dasjenige Capital, welches mit einfachem Zinse terminweise und in gleichen Summen bezahlt werden soll, zu dividiren. Von der Richtigkeit dieser Regel kann man sich leicht auf eine ähnliche Art, als von der §. 244 im 242ten §. geschehen, überzeugen.

§. 253.

Viel weitläuftiger und mühsamer aber, als wenn Zinseszins gerechnet wird, ist hier die Findung des nöthigen Anzeigers, der immer eine Summe mehrerer anderer einfachen Anzeiger ist. Wofern man nicht denselben aus Tafeln, wie §. 162 bis 164 da gewesen, nehmen kann, so ist der beste Weg der, wenn man alle einfache Anzeiger mit Hülfe der logarithmischen Tafeln in Decimalzahlen verwandelt, und nach dieser Verwandlung erst die nöthige Addition vornimmt. So als §. 162 verschiedene einfache Anzeiger addirt sind, auch hier jedesmal addiren zu wollen, würde ausserordentlich weitläuftig und mühsam werden, obgleich die dabey zu befolgenden Regeln leicht sind; und es ist das hier empfohlne auch oben §. 164 bereits angepriesen worden.

§. 254.

Hat man in einer Tabelle die einfachen Anzeiger der Veränderung eines Capitals zur Findung der dafür bey einer frühern Zahlung desselben mit einfachem Rabatte

baar

baar zu gebenden Summe in Decimalzahlen, so läßt sich daraus leicht durch die Addition derselben vom Anfang an und nach und nach bis zu allen folgenden Gliedern eine Tabelle verfertigen, die der §. 186 und 187 beschriebenen ähnlich ist, und sich hier eben so gebrauchen läßt, als die genannte nach dem 245ten §. in den daselbst betrachteten Fällen. Ich will hier für 5 pr. C. beyde Tabellen dem Anfange nach hersetzen, und den darin vorkommenden Zahlen zugleich die Logarithmen beyfügen. Wenn man also mit einfachem Rabatte a 5 pr. C. früher bezahlt, so giebt man,

wenn man früher bezahlt	für 1	und der Logarithme davon ist
1 Jahr	0,9523809	— 1,9788107
2 Jahre	0,9090909	— 1,9586073
3 —	0,8695652	— 1,9393022
4 —	0,8333333	— 1,9208188
5 —	0,8000000	— 1,9030900
6 —	0,7692307	— 1,8860566
7 —	0,7407407	— 1,8696662
8 —	0,7142857	— 1,8558720
9 —	0,6896551	— 1,8386320
10 —	0,6666666	— 1,8339087
11 —	0,6451612	— 1,8090863
12 —	0,6250000	— 1,7958800

wenn

wenn man früher bezahlt	für 1	und der Logarithme davon ist
13 Jahre	0,6060606	— 1,7825161
14 —	0,5882352	— 1,7695511
15 —	0,5714285	— 1,7569620
16 —	0,5555555	— 1,7447275
17 —	0,5405404	— 1,7328283
18 —	0,5263157	— 1,7202464
19 —	0,5128205	— 1,7109654
20 —	0,5000000	— 1,6989700
21 —	0,4878048	— 1,6882461
22 —	0,4761904	— 1,6777807
23 —	0,4651162	— 1,6675615
24 —	0,4545454	— 1,6575773
25 —	0,4444444	— 1,6478175
26 —	0,4347826	— 1,6382722
27 —	0'4255319	— 1,6289321
28 —	0,4166666	— 1,6197888
29 —	0,4081632	— 1,6108339
30 —	0,4000000	— 1,6020600, u.s.w.

Wenn man nun zu 0,9523809 die folgenden 0,9090909 addirt, zu dieser Summe darauf die 0,8695652 fügt, und so immer weiter fortgeht; so erhält man folgende Tabelle.

Um

Um Jahre hindurch jedes Jahr 1 zu bekommen, muß man jetzt zahlen

Jahre	zu zahlende Summe	Logarithme davon
1 —	0,9523809	— 1,9788107
2 —	1,8614718	0,2698563
3 —	2,7310370	0,4363276
4 —	3,5643703	0,5519827
5 —	4,3643703	0,6399215
6 —	5,1336010	0,7104221
7 —	5,8743417	0,7689592
8 —	6,5886274	0,8187948
9 —	7,2782825	0,8620289
10 —	7,9449491	0,9000910
11 —	8,5901103	0,9339987
12 —	9,2151103	0,9645006
13 —	9,8211709	0,9921636
14 —	10,4094061	
15 —	10,9808346	u.
16 —	11,5363901	
17 —	12,0769306	f.
18 —	12,6032463	
19 —	13,1160668	w.
20 —	13,6160668	

Je weiter man diese letzte Tabelle fortsetzen will, desto nöthiger ist es, die einfachen Anzeiger in vielen Decimalstellen entwickelt zu haben. Der Anzeiger für 6 Jahre ist um um 0,0000001, der Anzeiger für 10 Jahre um 0,0000003, der Anzeiger für 15 Jahre um 0,0000005, und der Anzeiger für 20 Jahre um 0,0000007 kleiner, als er seyn würde, wenn man alle einfache Anzeiger noch eine Stelle weiter entwickelt hätte.

§. 255.

Nun werde gefragt, wie viel jedesmal gegeben werden müsse, wenn $794\frac{1}{2}$ Rk mit 5 pr. C. einfachen Zinses in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen bezahlt werden sollen? Die letzte Tabelle des vorhergehenden §. giebt zum Divisor dieser 794,5 Rk die Zahl 7,9449491, und die in jedem Termine zu gebende Summe ist daher 100 Rk. Eben das findet man, wie sehr bald in die Augen fällt, wenn man mit den Logarithmen rechnet.

Würde gefragt, wie viel jedesmal gegeben werden müsse, wenn 3546 Rk mit einfachem Zinse a 5 pr. C. in gleichen Summen und 4 einjährigen Terminen bezahlt werden sollten; so wäre die Rechnung anzustellen nach

$$\frac{3546 \text{ Rk}}{3,564370}. \text{ Da nun}$$

$$\text{l. } 3546 = 3,5497387, \text{ und}$$

$$\text{l. } 3,564370 = 0,5519821, \text{ so ist}$$

$$\text{l. } \frac{3546}{3,564370} = 2,9977566, \text{ und also die}$$

jedem Termine zu gebende Summe 994,848 Rk.

Die

Die Probe auf dies letzte Exempel macht man auf folgende Art. Man sucht

$\frac{20}{21} \times 994,848$ Rℓ $= 947,474$ Rℓ

$\frac{10}{11} \times 994,848$ Rℓ $= 904,407$ Rℓ

$\frac{20}{23} \times 994,848$ Rℓ $= 865,085$ Rℓ

$\frac{5}{6} \times 994,848$ Rℓ $= 829,040$ Rℓ, und

wenn die Summe davon 3546,006 Rℓ der terminweise mit einfachem Zinse zu bezahlenden Summe gleich ist, so ist richtig gerechnet worden. Man sehe hiebey §. 161 nach, wo zugleich die Probe auf das erste Exempel befindlich ist. Der geringe Ueberschuß von 0,006 Rℓ, der sich in der gefundenen Summe findet, rührt daher, weil der Divisor 3,564370 nur bis auf die Milliontheile genommen worden ist.

§. 256.

Ist der erste Termin von der Zeit des Vertrags anders entfernt, als ein jeder der übrigen Termine von dem nächst vorhergehenden oder nachfolgenden, oder soll derselbe sogleich seyn, oder sind endlich die Termine ungleich weit von einander entfernt; so sind die zu befolgenden Regeln nach dem bisherigen und den 247, 248, und 250ten §§. leicht zu finden, so daß es überflüssig wäre, dabey zu verweilen.

§. 257.

Wenn die Schuld, die mit einfachem Zinse terminweise in gleichen Summen wieder gegeben werden

den soll, erst nach einiger Zeit fällig ist; so reducirt man auch hier dieselbe, aber nach der einfachen Rabattrechnung, auf ihren wahren Werth, und verfährt alsdann, wie gelehrt worden ist. Es sey z. B. jemand 1000 Rthlr nach 5 Jahren und 9 Wochen ohne Zins zu bezahlen schuldig, und verabrede mit seinem Gläubiger die Abtragung dieser Schuld mit dem einfachen Zinse in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen. Man findet hier die in jedem Termine zu bezahlende Summe, nemlich 100 Rthlr, wenn man zuvörderst die gedachten 1000 Rthlr auf ihren jetzigen Werth zurückbringt. Da derselbe $794\frac{1}{2}$ Rthlr ist, so ist nach dieser Reduction das angeführte Exempel dem 1ten in §. 255 gleich.

Wenn man auf diese Art verfährt, und die Reduction eines nach einiger Zeit erst fälligen Capitals auf den Werth, den es nach der gemeinen Rabattrechnung hat, nach den in dieser Rechnung gegebenen Regeln vornimmt, und auch den mittlern Zahlungstermin nicht nach einfachem Zinse, sondern nach einfachem Rabatte vestsetzt, so wird man, wie das sonst häufig statt findet, durch die Betrachtung eines und desselben Falls von verschiedenen Seiten, die in der Rechnung nichts ändern sollten, nie auf Widersprüche oder verschiedene Resultate geleitet werden.

§. 258.

Hieher gehört nun auch noch die Betrachtung der halbjährigen und viertheiljährigen Zahlungstermine, wenn die in solchen Terminen zu bezahlende Summe eine einzele Summe ist. Um von dem Falle anzufangen, wenn bey der Bestimmung dieser Termine auf einfachen Zins gesehen wird, so verlange ein Gläubiger von seinem Schuldner, daß er ihm 50 Rthlr, die er ihm nach einem Jahre zu geben schuldig ist, in 2 halbjährigen Terminen und gleichen Summen, doch ohne seinen Schaden, geben solle, und es werde gefragt, wie viel jedesmal zu geben sey? Diese Frage ist einerley mit der: Wie viel muß jedesmal gegeben werden, wenn $\frac{20}{21} \times 50$ Rthlr mit einfachem Zinse a 5 pr. C. in zwey halbjährigen Terminen und gleichen Summen bezahlt werden sollen? Aus §. 252 und §. 146 u. f. erhellet, daß die Rechnung zu führen sey nach

$$\frac{\frac{20}{21} \times 50 \text{ Rthlr}}{\frac{40}{41} + \frac{20}{21}}$$

oder nach $\frac{0,9523809 \times 50 \text{ Rthlr}}{1,9279906}$, woraus man 24,68 Rthlr erhält. Sollten hingegen die Termine viertheiljährige Termine seyn, so wäre die Rechnung anzustellen nach dem Ausdrucke

$\frac{\frac{20}{21} \times 50 \text{ Rthlr}}{\frac{80}{81} + \frac{40}{41} + \frac{80}{83} + \frac{20}{21}}$, dessen Entwickelungsart aus dem vorhergehenden Beyspiele bekannt ist.

§. 259.

§. 259.

Sollte auf Zinseszins gesehen werden, so würde die Rechnung des Exempels des vorhergehenden §. bey halbjährigen Terminen gesucht nach

$$\frac{\frac{40^2}{41^2} \times 50 \text{ Rthl.}}{40 - 41 \times \frac{40^3}{41^3}}$$. Nun ist

$$\text{L. } 50 = 1{,}6989700$$

$$\text{L. } \frac{40^2}{41^2} = -1{,}9785522, \text{ also}$$

$$\text{L. } \left(\frac{40^2}{41^2} \times 50\right) = 1{,}6775222. \text{ Ferner ist}$$

$$\text{L. } \frac{40^3}{41^3} = -1{,}9678283$$

$$\text{L. } 41 = 1{,}6127839, \text{ also}$$

$$\text{L. } \left(41 \times \frac{40^3}{41^3}\right) = 1{,}5806122 \text{ und}$$

$$41 \times \frac{40^3}{41^3} = 38{,}0725. \text{ Da nun}$$

$$40 - 38{,}0725 = 1{,}9275, \text{ und}$$

$$\text{L. } 1{,}9275 = 0{,}2849944; \text{ so ist}$$

$$\text{L. } \left(\frac{40^2}{41^2} \times 50\right) - \text{L. } \left(40 - 41 \times \frac{40^3}{41^3}\right) = 1{,}3925278,$$

und die in jedem Termine zu bezahlende Summe ist daher 24,69 Rthl.

Sollen die Termine viertheiljährig seyn, so muß gerechnet werden nach

$$\frac{\frac{80^4}{81^4} \times 50 \text{ Rt}}{80 - 81 \times \frac{80^5}{81^5}}.$$

§. 260.

Was den Fall betrifft, **wenn das terminweise mit dem Zinse abzutragende Capital nach einiger Zeit** ***erst fällig ist, und bis zu seiner Fallzeit einen*** **verabredeten Zins trägt;** so erfordert derselbe eben keine weitläuftige Betrachtung. Wie nemlich auch der Zins, den das gedachte Capital bis zu seiner Fallzeit tragen soll, beschaffen ist, *es mag einfacher Zins*, oder Zinseszins seyn, so ist die Art der Reduction des *Capitals auf einen* jetzigen Werth aus der gemeinen und doppelten Rabattrechnung bekannt, und hat man diesen Werth erst gefunden, so führt die Befolgung der bisher betrachteten Regeln zu dem vorgesetzten Ziele, so daß also nach diesem nichts weiter davon zu sagen nöthig ist. Wie viel muß jedesmal bezahlt werden, wenn man 1000 Rt, die über 4 Jahre fällig sind, und unterdeß mit 3 pr. C. verzinset werden sollen, in 5jährigen Terminen und gleichen Summen abtragen will? Diese Frage ist, wenn einfacher Zins gerechnet wird, einerley mit folgender: Wie viel muß jedesmal

mal bezahlt werden, wenn man 1000 Rthl. $\times \frac{28}{25} \times \frac{5}{6}$, oder 1000 Rthl. $\times \frac{14}{15}$, die jetzt fällig sind, mit einfachem Zinse a 5 pr. C. in 5 einjährigen Terminen und gleichen Summen abtragen will? und wird Zinseszins gerechnet, so ist sie gleichbedeutend mit dieser: Wie viel muß man jedesmal bezahlen, wenn man 1000 Rthl. $\times \frac{103^4}{100^4} \times \frac{20^4}{21^4}$, die jetzt fällig sind, mit Zinseszinse a 5 pr. C. in 5 einjährigen Terminen und gleichen Summen abtragen will? Man nehme also bey den Aufgaben dieser Art jedesmal zuvörderst die gedachte Reduction vor, und verfahre alsdann nach den bekannten Regeln.

§. 261.

Um auch eine Art der Probe auf diejenigen Exempel, welche die getheilten Zahlungstermine nach der Zinseszinsrechnung oder doppelten Rabattrechnung bestsetzen, zu berühren; so diene dazu das 1te der Exempel §. 242. Man kann unter andern rechnen: Es tragen zu 5 pr. C. gerechnet

3546 Rthl. in einem Jahre
177,3 Rthl. Zins, und man hat also
nach dem 1ten Jahre 3723,3 Rthl. Davon bezahlt man
nun 1000 Rthl., und behält daher
2723,3 Rthl. Diese geben in 1 Jahre
136,165 Rthl. Zins, und man hat

 nach

nach dem 2ten Jahre 2859,465 Rthl. Davon bezahlt man
wieder 1000 Rthl., und behält nunmehr
1859,465 Rthl. Nun rechnet man
jährigen Zins 92,97325 Rthl., und hat also
nach dem 3ten Jahre 1952,43825 Rthl. Davon bezahlt man
wieder 1000 Rthl., und behält
952,43825 Rthl. Diese geben
jährigen Zins 47,6219125 Rthl., und man hat also
nach dem 4ten Jahre 1000,0601625 Rthl.

Hier zeigt sich ein Ueberschuß von 0,0601625 Rthl. oder von etwas über $\frac{1}{16}$ Rthl. Es rührt daher, daß anstatt der obigen 3545,95 . . . Rthl. (s. §. 182) 3546 Rthl. angenommen worden sind. Auf solche Kleinigkeiten, als man §. 242 mehr denn 1000 Rthl. erhalten haben würde, wenn man genauer hätte rechnen wollen, pflegt man bey Berechnung wirklicher Fälle dieser Gattung nicht zu sehen, sonst hätte man die Rechnung leicht so genau führen können, daß der Fehler in der Probe kein Tausendtheil betrüge.

§. 262.

Es folgt nunmehr (s. §. 241) der Fall, wenn aus dem Capitale, das mit seinem Zinse terminweise und in gleichen Summen abgetragen werden soll, ferner der in jedem Termine zu bezahlenden Summe und der Zahl der Termine, die Grösse der Termine, oder die Zeit, welche zwischen jeden zwey auf einander

ander folgenden ist, bestimmt werden soll. Es sollen z. B. 794½ Rthl mit ihrem einfachen Zinse zu 5 pr. C. in 10 gleichen Terminen und jedesmal mit 100 Rthl abgetragen werden; es wird gefragt, wie weit jede zwey auf einander folgende Termine von einander entfernt seyn müssen? oder: Es sollen 773 Rthl mit ihrem Zinseszinse zu 5 pr. C. auf gleiche Art bezahlt werden, und man verlangt ebenfalls die Zeit zwischen jeden zwey auf einander folgenden Terminen zu wissen. Dieser Fall ist ohnstreitig unter allen der schwierigste, und es ist, wenn gleich nicht unmöglich, doch hier viel zu weitläuftig, dazu Regeln zu geben, nach welchen das verlangte mit einem Male ganz genau bestimmt werden könnte. Glücklicher Weise ist derselbe zugleich von der Art, daß man dabey schon mit der möglichen ohngefähren Bestimmung des gesuchten zufrieden seyn kann, indem er einmal nicht häufig vorkommt, und zweytens, wenn er vorkommt, jene ohngefähre Bestimmung durch Versuche genauer gemacht werden kann.

§. 263.

Unger berührt den gegenwärtigen Fall, wenn einfacher Zins gerechnet wird, im 2ten Stücke seiner Beyträge S. 182 u. f., setzt aber zur Auflösung desselben eine Regel vest, deren Anwendung grosse Vervortheilung veranlassen kann. Man urtheile darüber selbst nach dem von ihm zur Erläuterung gebrauchten Exempel. Er wirft die

Frage auf, wie lange jeder Termin dauren werde, wenn 5200 Rthl. mit ihrem Zinse zu 5 pr. C. in 5 Terminen und jedesmal mit 1600 Rthl. abgetragen werden, der erste Termin aber nach 8 Jahren seyn solle? und die Antwort darauf ist: 3 Jahre, so daß also 20 Jahre verfliessen müssen, ehe der lezte Termin herankömmt. Gesezt aber, daß 8000 Rthl., die in 5 dreyjährigen Terminen, woron der erste nach 8 Jahren fällt, jedesmal mit 1600 Rthl. abzutragen sind, sogleich mit einfachem Rabatte a 5 pr. C. bezahlt werden sollten; so wäre sogleich zu entrichten für den

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{1ten Term.} & \frac{5}{7} \times 1600 \text{ Rthl.} & \text{oder} & 0{,}714285 \\ 2 & \text{— } \frac{20}{31} \times 1600 \text{ Rthl.} & \text{—} & 0{,}645161 \\ 3 & \text{— } \frac{10}{17} \times 1600 \text{ Rthl.} & \text{—} & 0{,}588235 \\ 4 & \text{— } \frac{20}{37} \times 1600 \text{ Rthl.} & \text{—} & 0{,}540540 \\ 5 & \text{— } \frac{1}{2} \times 1600 \text{ Rthl.} & \text{—} & 0{,}500000 \end{array}\right\} \times 1600 \text{ Rthl.};$$

also in allem 2,988221 × 1600 Rthl., d. h. 4781,1536 Rthl. Umgekehrt braucht man also auch nur 4781,1536 Rthl., um in 5 dreyjährigen Terminen, wenn der erste nach 8 Jahren seyn soll, jedesmal 1600 Rthl. geben zu können. Unger rechnet also dem Schuldner über 418 Rthl. zum Vortheile, welches hier um so weniger geschehen darf, da schon ohnehin eher der Gläubiger als der Schuldner verliert.

Unger beweiset die Richtigkeit seiner Ausrechnung durch folgende Probe.

Jahre	Capital	Zins davon	Termin	Zins davon
— 1 —	5200 Rk —	—	— — —	—
— 2 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 3 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 4 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 5 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 6 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 7 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 8 —	— — —	260 Rk —	— —	—
— 9 —	— — —	260 Rk —	1500 Rk —	—
— 10 —	— — —	260 Rk —	— —	80 Rk
— 11 —	— — —	260 Rk —	— —	80 Rk
— 12 —	— — —	260 Rk —	1600 Rk —	80 Rk
— 13 —	— — —	260 Rk —	— —	160 Rk
— 14 —	— — —	260 Rk —	— —	160 Rk
— 15 —	— — —	260 Rk —	1600 Rk —	160 Rk
— 16 —	— — —	260 Rk —	— —	240 Rk
— 17 —	— — —	260 Rk —	— —	240 Rk
— 18 —	— — —	260 Rk —	1600 Rk —	240 Rk
— 19 —	— — —	260 Rk —	— —	320 Rk
— 20 —	— — —	260 Rk —	— —	320 Rk
— 21 —	— — —	260 Rk —	1600 Rk —	320 Rk

Summe 5200 Rk + 5200 Rk = 8000 Rk + 2400 Rk.

Allein welch ein Unterschied zwischen der Zeit, in welcher der Gläubiger, wenn terminweise bezahlt wird, den zu rechnen-den Zins erhält, und derjenigen, in welcher er ihn ohne Termine hätte erhalten können! Und ist wohl irgend ein Grund da, diesen Unterschied so ganz und gar nicht zu achten?

§. 264.

Wenn ausser dem Capitale, das mit seinem Zinse terminweise und in gleichen Summen abgetragen werden soll, auch die in jedem Termine zu bezahlende Summe und die Anzahl der Termine gegeben ist, und die Zeit, welche zwischen jeden zwey auf einander folgenden Terminen ist, daraus gefunden werden soll; so ist nothwendig, daß die Zeit zwischen **jeden** zwey auf einander folgenden Terminen gleich sey. Wäre dies nicht, so hätte man an den genannten Stücken nicht genug, um das verlangte zu finden. Bis zum ersten Termine ist nun entweder eben so lange, als von einem jeden Termine bis zu dem nächst folgenden, oder nicht. Dies letztere findet z. B. in dem vorhin aus Ungers Beyträgen angeführten Exempel statt. Es ist hinlänglich, bloß den vorhergehenden Fall zu betrachten, weil dieser wirklich sich ereignen kann, der andere hingegen nicht leicht zu entstehen pflegt.

§. 265.

Da die Anzahl der Termine gegeben ist, und alle Termine gleich groß sind, so läßt sich, wenn man die Zahl der Jahre aller Termine weiß, die Grösse eines jeden einzeln Termins leicht bestimmen, und es kommt also nur darauf an, die Zeit aller Termine zu finden. Man weiß nun die Summe, aus welcher das terminweise zu bezahlende Capital erwachsen soll, und auch, wie viel in

allen

allen Terminen überhaupt gegeben werden muß. Es ist daher leicht, den mitlern Zahlungstermin zu finden, und weiß man ihn, so ist derselbe noch nicht um die Hälfte eines Termins grösser als die Hälfte der Zeit aller Termine, und es läßt sich also diese daraus ziemlich genau bestimmen. Einige Exempel mögen dies weiter erläutern.

§. 266.

Sollen $794\frac{1}{2}$ Rthlr mit ihrem einfachen Zinse a 5 pr. C. in 10 gleichen Terminen und jedesmal mit 100 Rthlr abgetragen werden, so ist der mitlere Zahlungstermin der auf diese Art ohne Zins terminweise abzutragenden 1000 Rthlr alsdann, wenn $794\frac{1}{2}$ Rthlr durch den einfachen Zins a 5 pr. C. 1000 Rthlr geworden sind, und also nach 5,173 Jahren. Die Zahl der Jahre aller Termine ist also weniger als $2 \times 5,173$ Jahre, also etwa 10 Jahre, und die Termine selbst einjährige Termine, wovon die Richtigkeit aus dem obigen bekannt ist.

Da der mitlere Zahlungstermin noch nicht um die Hälfte eines Termins grösser ist, als die Hälfte der Zeit aller Termine, so läßt sich daraus beurtheilen, daß man, nachdem man die Zeit desselben doppelt genommen, auch weniger aus der Acht zu lassen habe, als nach der erforderlichen Division auf einen Termin kommt. Wird auf Zinseszins gesehen, so beträgt dies mehr, als wenn einfacher Zins gerechnet wird; ein Umstand, der auch bisweilen nützlich seyn kann, und aus der Berechnung des mitlern Zahlungstermins bekannt ist. Je

grösser

grösser endlich die Termine werden, desto grösser ist auch der Ueberschuß der Zeit des mitlern Zahlungstermins über die Hälfte der Zeit aller Termine, so daß derselbe bey doppelt so grossen Terminen mehr denn noch einmal so groß ist, als bey den anfänglichen Terminen.

§. 267.

Sollen 773 Rthl. mit ihrem Zinseszinse a 5 pr. C. auf die im vorhergehenden §. gedachte Art bezahlt werden, so ist der zu suchende mitlere Zahlungstermin 5,299 Jahre, die Zahl der Jahre aller Termine also weniger denn 2 × 5,299 Jahre, und folglich 10 Jahre, woher auch hier die Termine einjährige werden.

Gesetzt, daß in den beyden betrachteten Exempeln die Anzahl der Termine und die in jedem zu bezahlende Summe abgeändert würden, in 5 Terminen z. B. in jedem 200 Rthl. abgetragen werden sollten, so könnte nach der Anmerkung des vorhergehenden §. am Ende die Zahl der Jahre aller Termine nicht mehr 10, und also die Termine nicht zweyjährige Termine, sondern sie müßten um etwas kleiner seyn. Um sehr vieles kann es hier nicht seyn, das fällt in die Augen; indeß kann doch die Frage entstehen, wie findet man auch diesen Unterschied? Hiezu sind Versuche nöthig, die, je weiter man sie fortsetzt, auf etwas desto genauers führen. Man überlegt nemlich, ob bey den angenommenen Terminen die gegebene Summe nicht etwa zu groß oder zu klein sey. Ist das erstere, so nimmt man die Termine kleiner, ist aber das letztere, grösser an, stellt darauf dieselbe Ueberlegung von neuem an, und fährt damit so lange fort, bis man die wahre Dauer der Termine gefunden hat.

§. 268.

§. 268.

Wichtiger als der vorhergehende ist der Fall, wenn ausser dem Capitale, das in gleichen Terminen und in gleichen Summen mit seinem Zinse abgetragen werden soll und der Summe aller in den Terminen zu entrichtenden Theile noch die Dauer eines jeden Termins gegeben ist, und die Anzahl der Termine und die in jedem zu gebende Summe gefunden werden sollen. Wenn die Termine einjährige sind, wie sie bey wirklichen Aufgaben dieser Art es gewöhnlicher Weise sind, so erreicht man mit Hülfe solcher Tabellen, als §. 186 und §. 253 beschrieben worden sind, auf folgendem Wege bald seinen Endzweck. Man sucht, wie in dem vorhergehenden Falle, den mitlern Zahlungstermin, dividirt mit der Zahl der Jahre, die sich daraus für alle Termine ergiebt, die Summe aller in den Terminen zu entrichtenden Theile, und vergrössert oder verkleinert diese Quotienten so wohl als die angenommene Zahl der Termine mit Hülfe der gedachten Tabellen auf die Art, welche in den folgenden Exempeln angewandt ist.

§. 269.

Es gehören hieher die Aufgaben, deren §. 168 gedacht worden ist, und wovon Florencourt dies Exempel giebt. A macht Concurs; die Masse der Güter ist 773 Rt., die Summe der Schulden 1000 Rt. Hievon hat

hat zu fordern B 200 Rthl., C 250 Rthl., D 350 Rthl., E 200 Rthl., und geniessen auch nach dieser Ordnung das Prioritätsrecht. Die Schuldner sollen so befriediget werden, daß die ältern Gläubiger zuerst, die jüngern zuletzt, alle aber mit der Zeit ihr Capital erhalten. Wird hiebey

a einfacher Zins zu 5 pr. C. gerechnet, so ist die Rechnung folgende.

Man sucht zuvörderst den mitlern Zahlungstermin.

```
773    1000000 | 129,36
        337431 |
        22312
         8281
         797
          35
          2
```

$$\frac{29,36}{5} = 5,87 \text{ Jahre.}$$

Multiplicirt man nun mit 2, so erhält man 11,74 Jahre, und es sind also fürs erste $11\frac{1}{2}$ Termine anzunehmen. Da nun 1000 Rthl. zu bezahlen sind, so kommt auf jeden ganzen Termin $\frac{1000 \text{ Rthl.}}{11\frac{1}{2}} = \frac{2000 \text{ Rthl.}}{23} =$ 86,95 Rthl., und auf den einen halben 43,475 Rthl. Nach der Tabelle §. 253 muß man, um 11 Jahre hinter einander 1 zu erhalten, sogleich geben 8,5901102, und da man, um

nach

nach $11\frac{1}{2}$ Jahre $\frac{1}{2}$ zu bekommen, 5 pr. C. gerechnet, 0,3174603 anlegen muß, so ist um 11 Jahr hinter einander 1, und nach $11\frac{1}{2}$ Jahre $\frac{1}{2}$ zu erhalten jetzt überhaupt zu geben 8,9075705. Um nun an statt 1 jedesmal 86,95 Rthlr zu bekommen, müßte man geben $8{,}90757 \times 86{,}95$ Rthlr, d. h.

$$
\begin{array}{r}
8{,}90757 \\
86{,}95 \\
\hline
4453785 \\
8016813 \\
5344542 \\
7126056 \\
\hline
774{,}5132115 \text{ Rthlr}
\end{array}
$$

So viel ist aber nicht da, und daraus erhellet, daß noch nicht Termine genug angenommen worden sind. Man nehme also $11\frac{3}{5}$ Termine an. Die auf jeden Termin fallende Summe ist nun $\frac{1000 \text{ Rthlr}}{11\frac{3}{5}} = \frac{5000 \text{ Rthlr}}{58}$ $= 86{,}2$. Um 11 Jahre hinter einander aber jedesmal 86,2 Rthlr, und nach $11\frac{3}{5}$ Jahren $\frac{3}{5} \times 86{,}2$ Rthlr oder 51,72 Rthlr zu erhalten, muß man jetzt geben $(8{,}59011 + 0{,}37974) \times 86{,}2$, also

8,96985

8,96985
86,2
―――――――
1793970
5381910
7175880
―――――――
773,2010570 Rk.

Da diese Summe noch zu groß ist, so kann man auf dem betretenen Wege noch weiter fortfahren. Man nehme also $11\frac{3}{4}$ Termine an. Nun wird die auf jeden Termin fallende Summe $\frac{1000\ \text{Rk}}{11\frac{3}{4}} = \frac{4000\ \text{Rk}}{47} = 85{,}106$ Rk. Um 11 Jahre hinter einander am Ende eines jeden Jahres 85,106 Rk und nach $11\frac{3}{4}$ Jahren $\frac{3}{4} \times 85{,}106$ Rk oder 63,829 Rk zu erhalten, muß man jetzt geben $(8{,}59011 + 0{,}47244) \times 85{,}106$ Rk, oder

9,06255
85,106
―――――――
5437530
906255
4531275
7250040
―――――――
771,27738030 Rk.

Hier hätte man eine kleinere Summe, als wirklich da ist, und wenn die Umstände es rathen, so kann man diese letzten Resultate zum Grunde legen, und darnach die Vertheilung einrichten. Soll aber genauer gerechnet werden, so

thut

thut man besser, wenn man, nachdem man der wahren Bestimmung sich bis auf eine Kleinigkeit genähert hat, das noch fehlende durch die Verrückung des letzten Termins, ohne gleichwohl immer die in denselben zu bezahlende Summe zu verändern, ergänzt. Die Art davon soll sogleich gezeigt werden.

§. 270.

Nach der zweyten Bestimmung können

nach Jahren	die Gläubiger	bekommen	solches ist jetzt werth	könnten also jetzt erhalten
1	— B	— 86,2 Rthl.	— 82,095 Rthl.	
2	— B	— 86,2 Rthl.	— 78,363 Rthl.	B 184,458 Rthl.
3	— B	— 27,6 Rthl.	— 24, Rthl.	
	— C	— 58,6 Rthl.	— 50,956 Rthl.	
4	— C	— 86,2 Rthl.	— 71,833 Rthl.	
5	— C	— 86,2 Rthl.	— 68,96 Rthl.	C 206,364 Rthl.
6	— C	— 19 Rthl.	— 14,615 Rthl.	
	— D	— 67,2 Rthl.	— 51,538 Rthl.	
7	— D	— 86,2 Rthl.	— 63,852 Rthl.	
8	— D	— 86,2 Rthl.	— 61,571 Rthl.	D 252,542 Rthl.
9	— D	— 86,2 Rthl.	— 59,448 Rthl.	
10	— D	— 24,2 Rthl.	— 16,133 Rthl.	
	— E	— 62, Rthl.	— 41,333 Rthl.	
11	— E	— 86,2 Rthl.	— 55,603 Rthl.	E 129,636 Rthl.
$11\frac{7}{10}$	— E	— 51,8 Rthl.	— 32,700 Rthl.	
Summe		1000 Rthl.	— 773 Rthl.	

Es ist hier die letzte Summe 51,8 Rthl. angenommen worden, weil vorher die Tausendtheile nicht mitgerechnet worden sind,

 und

und sonst nicht wirklich 1000 Rthlr. vertheilt worden wären. Leicht ist übrigens, wenn es nöthig ist, vom Anfang an die in jedem Termine zu bezahlenden Summen, auf so viel Decimalstellen, als man will, zu rechnen.

Die Zeit des letzten Termins findet man auf folgende Art. Wenn man den jetzigen Werth aller vorhergehenden Termine bestimmt hat, so ist es durch Abziehung der Summe derselben von dem vorhandenen Capitale leicht, den jetzigen Werth des letzten Termins zu finden. In dem betrachteten Exempel ist die gedachte Summe 740,3 Rthlr., und der jetzige Werth des *letzten Termins also* 773 Rthlr. weniger 740,3 Rthlr., d. h. 32,7 Rthlr. Hat man nun den jetzigen Werth des letzten Termins, und zugleich die darin zu bezahlende Summe, so findet man leicht die Zeit, in welcher jener zu dieser durch den Zins anwachsen kann, und dies ist die Zeit des letzten Termins. Im *Exempel sollen* in dem letzten Termin 51,8 Rthlr. gegeben werden. Man dividirt also

$0{,}327 \qquad \cancel{5}\,\cancel{1}{,}8 \mid 1\;5\;8{,}4$

$\cancel{2}\,\cancel{9}\,\cancel{1} \mid \cancel{5}\,\cancel{4}\,2$

$\cancel{1}\,\cancel{4}\,\cancel{7}\,\cancel{9}\,\cancel{6}$

$\cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{3}\,3$

$\cancel{2}\,\cancel{1}\,\cancel{1}$

und der letzte Termin fällt also nach $\frac{58{,}4}{5} = 11{,}7$ Jahren.

Die Rechnungen im vorhergehenden §. brauchen nicht immer mit so vielen Zahlen angestellt zu werden, als es daselbst wirklich geschehen ist.

§. 271.

§. 271.

Wird aber

b. (s. §. 269) Zinseszins gerechnet, so findet man auf demselben Wege, nur daß man allenthalben Zinseszins voraussetzen muß, 10 einjährige Termine, und eine der §. 269 angestellten ähnliche Probe rechtfertiget dies gefundene als das wahre. Es sind indeß nicht alle Aufgaben so leicht, und ich will daher von dem Falle, wenn Zinseszins gerechnet wird, noch das Exempel berechnen, welches Florencourt berührt, aber auf eine andere Art zu berechnen gelehrt hat. Es sollen 4000 Rthl. mit ihrem Zinseszinse a 5 pr. C. in jährigen Terminen und so bezahlt werden, daß die Summe aller in den Terminen abgetragenen Theile 6000 Rthl. ist; es wird gefragt wie viel Termine statt finden? Man sucht zuvörderst den mitlern Zahlungstermin. Es ist

$$\text{l. } 6000 = 3{,}7781512 \text{ und}$$
$$\text{l. } 4000 = 3{,}6020600, \text{ also}$$
$$\text{l. } 6000 - \text{l. } 4000 = 0{,}1760912, \text{ und}$$
$$\frac{\text{l. } 6000 - \text{l. } 4000}{\text{l. } \frac{21}{20}} = \frac{1760912}{211893} = 8{,}3 \ldots$$

Der mitlere Zahlungstermin ist also nach 8,3 Jahren und die Zahl aller Termine über 16. Nimmt man 16 an, so ist die in jedem Termine abzutragende Summe $\frac{6000 \text{ Rthl.}}{16}$

= 375

= 375 Rthlr. Um aber 375 Rthlr 16 Jahre nach einander zu erhalten, muß man jetzt geben

$$
\begin{array}{r}
375 \text{ Rthlr} \times 10{,}83776 \\
\hline
5418880 \\
7586432 \\
3251328 \\
\hline
4064{,}16000
\end{array}
$$

4064,16000 Rthlr, und 16 Termine sind also zu wenig. Nimmt man 17 an, so ist die in jedem Termine abzutragende Summe $\frac{6000 \text{ Rthlr}}{17}$ = 353 Rthlr. Um nun 16 Jahre hinter einander am Ende eines jeden Jahres 353 Rthlr zu bekommen, muß man jetzt geben

$$
\begin{array}{r}
353 \text{ Rthlr} \times 10{,}83776 \\
\hline
3251328 \\
5418880 \\
3251328 \\
\hline
3825{,}72928
\end{array}
$$

3825,72928 Rthlr, und es bleibt also für den jetzigen Werth des letzten Termins 4000 Rthlr — 3825,72 Rthlr oder 174,28 Rthlr. Diese 174,28 Rthlr aber brauchen noch keine 16 Jahre, um zu 353 Rthlr durch den Zinseszins anzuwachsen, und es kann also auch bey dieser Annahme noch nicht bleiben. Da also die Summe, die für den letzten Termin gerechnet worden, zu groß

ist,

ist, so rechne man für jeden der 16 ersten Termine etwas mehr z. B. 358 Rthl. Um diese 16 Jahre hinter einander am Ende eines jeden Jahres zu erhalten, muß man jetzt geben 358 Rthl $\times$ 10,83776 $=$ 3879,9 oder 3880 Rthl, und es bleiben also für den jetzigen Werth des letzten Termins 120 Rthl übrig. In dem letzten Termine aber müssen noch bezahlt werden 6000 Rthl weniger 16 $\times$ 358 Rthl oder 272 Rthl, und der letzte Termin ist also, wenn 120 Rthl durch den Zinseszins zu 5 pr. C. zu 272 Rthl angewachsen sind. Da nun

$$
\begin{aligned}
\text{L. } 272 &= 2{,}4345689, \text{ und} \\
\text{L. } 120 &= 2{,}0791812, \text{ also} \\
\text{L. } 272 - \text{L. } 120 &= 0{,}3553877, \text{ und}
\end{aligned}
$$

$$\frac{3553877}{211893} = 16\tfrac{2}{3};$$ so ist die Zeit des letzten Termins nach $16\frac{2}{3}$ Jahren.

Der Vortheil des betretenen Weges vor dem, den Florencourt vorschlägt, besteht darin, daß man einmal die Zahl der Termine leichter findet, und zweytens so genau rechnen kann, als man will. Daß übrigens der letzte Termin den vorhergehenden so wohl in Ansehung der Zeit als der darin zu bezahlenden Summe, wenn genau gerechnet werden soll, nicht immer gleich seyn könne, fällt nach einer kurzen Betrachtung der Natur der Sache in die Augen.

§. 272.

Endlich ist noch der Fall übrig, wenn ein Capital mit seinem Zinseszinse, (denn auch einfachen Zins hier anzunehmen wäre überflüssig, da durch denselben in diesem Falle zu grosse Vervortheilung entsteht) in gleichen Summen und einjährigen Terminen wieder gegeben werden soll, die jährlich abzutragende Summe bestimmt ist, und gefragt wird, nach wie viel Jahren das Capital verzehrt seyn werde? Z. B. Einer hat 100000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen; braucht aber alle Jahr zu seinem Unterhalte 6000 Rthl., welches mehr ist, als der Zins von 100000 Rthl., so nur 5000 Rthl. beträgt, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe verschwinden werde? Die Grösse, die ein Capital, das auf Zinseszins zu 5 pr. C. aussteht, und wovon alle Jahr eine gewisse Summe weggenommen wird, nach einer bestimmten Anzahl von Jahren noch hat, findet man, wenn man die Differenz zwischen dem anfänglich angelegten Capitale und der jährlich davon weggenommenen Summe zwanzigmal genommen mit dem Anzeiger $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, multiplicirt, und zu dem kommenden Producte die jährlich weggenommene Summe zwanzigmal genommen addirt. Wollte man z. B. wissen, wie groß in dem Exempel das Capital nach 10 Jahren seyn werde, so müßte man diesen Ausdruck entwickeln

(100000

$$(100000\ \text{Rh} - 20 \times 6000\ \text{Rh}) \times \frac{21^{10}}{20^{10}} + 20 \times 6000\ \text{Rh},$$

$$\text{oder } -20000\ \text{Rh} \times \frac{21^{10}}{20^{10}} + 20 \times 6000\ \text{Rh},$$

$$\text{oder } 120000\ \text{Rh} - 20000\ \text{Rh} \times \frac{21^{10}}{20^{10}}\ (\text{s. §. 125}).$$

Dividirt man also das jährlich weggenommene Capital zwanzigmal genommen mit der Differenz zwischen dem anfänglich angelegten Capitale und der jährlich davon weggenommenen Summe zwanzigmal genommen, so erhält man den Anzeiger $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, nach welchen das Capital gänzlich verschwindet; denn es ist in diesem Fall das zwanzigfache des jährlich weggenommenen Capitals der Differenz hiezwischen und dem anfänglich angelegten Capitale, wenn man selbige mit dem Anzeiger $\frac{21}{20}$ in der erforderlichen Dignität multiplicirt hat, gleich. In dem Exempel ist also 6 gleich $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent die Zahl der Jahre ist, nach welchen das Capital verschwindet. Da man also, wenn man diesen Exponenten weiß, auch die gesuchte Zahl der Jahre kennt, so darf man auch ihn nur suchen. Man findet ihn, wie bekannt, auf folgende Art. Es ist

$$\text{L. } 6 = 0{,}7781513, \text{ und also}$$

$$\frac{\text{L. } 6}{\text{L. } \frac{21}{20}} = \frac{7781513}{211893} = 36\tfrac{2}{3} \text{ fast } 36\tfrac{3}{4}.$$

Nach $36\frac{2}{5}$ bis $36\frac{3}{4}$ Jahren ist also das ganze Capital verzehret.

Dieses Exempel ist aus Eulers Anleitung zur Algebra S. 253 genommen.

Wird das Capital zu einem andern pr. C. verzinset, so kann man nach dem 126ten §. leicht finden, wie die vorhergehende Auflösung abgeändert werden müsse, um das verlangte zu entwickeln.

§. 273.

Es wird Zeit, **von der Veränderung der Zahlungstermine**, in dem §. 238 angenommenen Verstande zu reden. Es kann aber dieses nach dem bisherigen mit wenigem geschehen, indem alle zu gebende Regeln darauf hinauslaufen, daß man jedesmal zuvörderst den jetzigen Werth der in veränderten Zahlungsterminen zu entrichtenden Summe aus den gegebenen Stücken entwickeln, und dann nach den erklärten Regeln das verlangte suchen müsse. Gesetzt, daß jemand einem andern 1000 Rthl. in 10 einjährigen Terminen und gleichen Summen doch ohne Zins zu bezahlen versprochen hätte, und hinterher die Erlaubniß erhielte, dieselben in 10 zweyjährigen Terminen und ebenfalls in gleichen Summen abtragen zu dürfen; so müßte man zuvörderst den jetzigen Werth der in 10 einjährigen Terminen zu bezahlenden 1000 Rthl. suchen, und dann nach §. 242 u. f. verfahren. Sollte nach einfachem Zinse gerechnet werden, so wäre der gedachte

jetzige

jetzige Werth $794\frac{1}{2}$ Rthl. Dividirt man denselben mit 6,6877, als der Summe von $\frac{10}{11} + \frac{5}{6} + \frac{10}{13} + \frac{5}{7} + \frac{2}{3} + \frac{5}{8} + \frac{10}{17} + \frac{5}{9} + \frac{10}{19} + \frac{1}{2}$; so erhält man 118,8 Rthl, welche in jedem Termine zu geben sind. Sollte hingegen nach Zinseszinse gerechnet werden, so wäre der jetzige Werth 772,173 Rthl, und diesen müßte man, um daraus die in jedem der veränderten Terminen zu bezahlende Summe zu finden, mit $\dfrac{\frac{20^{22}}{21^{22}} - \frac{20^{2}}{21^{2}}}{\frac{20^{2}}{21^{2}} - 1}$ dividiren. Da nun

$$l.\frac{20^{22}}{21^{22}} = -\ 1{,}5338354, \text{ und also}$$

$$\frac{20^{22}}{21^{22}} = 0{,}34185; \text{ ferner}$$

$$l.\frac{20^{2}}{21^{2}} = -\ 1{,}9576214, \text{ und also}$$

$$\frac{20^{2}}{21^{2}} = 0{,}90703; \text{ so ist}$$

$$\frac{20^{22}}{21^{22}} - \frac{20^{2}}{21^{2}} = -\ 0{,}56518, \text{ und}$$

$$\frac{20^{2}}{21^{2}} - 1 = -\ 0{,}09297.$$ Man hat also

noch zu rechnen nach

$\frac{9297}{56518} \times 772,173$ Rt. Da nun

L. $772,173 = 2,8877146$, und

L. $9297 = 3,9683428$, also

L. $772,173 +$ L. $9297 = 6,8560574$, und ferner

L. $56518 = 4,7521868$; so ist

L. $772,173 +$ L. $9297 -$ L. $56518 = 2,1038706$, und die in jedem Termine zu bezahlende Summe also 127,019 Rt.

Diese letzte Summe hat auch Florencourt; anstatt der Summe 118,8 Rt aber, S. 345 bringt er 112,643 Rt heraus, denn 112,6403 Rt ist ein Druckfehler. Dieser Unterschied rührt daher, weil Florencourt auch hier die §. 161 berührte Voraussetzung annimmt und anwendet.

§. 274.

Der einzige Fall, der besonders zu berühren seyn könnte, wäre der, wenn zu dem Gelde, das bereits da ist, noch eine neue Summe gelegt wird, oder gelegt werden soll. Es entsteht dabey entweder die Frage, wie viel nach dem Zuschusse einer gewissen Summe in den vestgesetzten Terminen gegeben werden müsse? oder, wie viel man zuschiessen müsse, um in jedem Termine eine bestimmte Summe zu erhalten? Von der ersten Art ist die Frage: Wie viel muß jedesmal gegeben werden, wenn 2000 Rt, die über 3 Jahr fällig sind,

sind, und unterdeß mit 2 pr. C. verzinset werden, und 500 Rthl., die nach einem Jahre dazu gelegt worden, in 10 zweyjährigen Terminen mit ihrem Zinse und in gleichen Summen abgetragen werden sollen? Es muß indeß auch hier, es mag nach einfachem Zinse oder nach Zinseszinse gerechnet werden, der jetzige Werth beyder Summen bestimmt, und dann nach dem bisherigen weiter gerechnet werden, und es bedarf also dieser Fall nun keiner weitläuftigen Erörterung. Eine Frage der 2ten Art ist: Es genießt jemand nach 5 Jahren 20 Jahre hindurch jährlich 60 Rthl. Einkünfte; er will aber jetzt so viel Capital anlegen, daß er mit diesen Einkünften jährlich 150 Rthl. Einkommens habe. Wie viel hat er zuzuschiessen? Man sieht bald, daß es hier nur auf die Bestimmung des jetzigen Werthes eines Capitals ankomme, das nach 5 Jahren 20 Jahre hindurch jedesmal mit 90 Rthl. abgetragen werden soll. Da die dazu zu befolgenden Regeln bereits vorgetragen worden sind, so wäre es daher überflüßig, bey diesem Falle zu verweilen.

§. 275.

Mehrere von den in der Betrachtung der getheilten und veränderten Zahlungstermine aufgeworfenen Fragen betreffen nicht so wohl eine gewisse Zeit, als gewisse Summen Geldes, und hätten also eben so gut

in

in der Zinsrechnung im eigentlichen Verstande und in der Rabattrechnung abgehandelt werden können, und der einen ist daher auch in der gemeinen Rabattrechnung §. 166 Erwähnung gethan worden. Gut ist es indeß immer, daß die getheilten und veränderten Zahlungstermine besonders betrachtet werden, und es ist daher auch hier solches geschehen. Uebrigens hat der eingeschlagene Weg, bey der Vestsetzung der veränderten und getheilten Zahlungstermine jedesmal vor allen Dingen das vorkommende *Capital* auf seinen jetzigen oder wahren Werth zu reduciren, den Vortheil, daß dadurch eine Menge von Abtheilungen der möglichen Fälle, dergleichen man in Ungers Beyträgen finden kann, ganz und gar *nicht* gemacht zu werden brauchen.

Rechnungen
beym
antichretischen Vertrage.

§. 276.

Es geschieht bisweilen, daß ein Schuldner seinem Gläubiger eine nutzbare Sache übergiebt, theils um denselben wegen des ihm geliehenen Capitals zu sichern, theils den dafür schuldigen Zins durch Ueberlassung des Ertrags jener Sache abzutragen. Besitzer von Landgütern z. B. nehmen ein Capital auf, und treten dagegen auf eine Zeitlang eins ihrer Güter an ihren Gläubiger ab. Ein solcher Vertrag heißt ein **antichretischer Vertrag**, und weil der Ertrag der verpfändeten nutzbaren Sache nicht immer dem Zinse gleich seyn kann, den das aufgenommene Capital trägt; so muß der Gläubiger, **wenn der gedachte Ertrag sich höher beläuft, als der zu fordernde Zins**, vorausgesetzt, daß gesetzwidrige Vervortheilung verhütet werden soll, sich den Ueberschuß vom Capitale selbst abrechnen lassen. Der antichretische Vertrag macht daher verschiedene Berechnungen nothwendig, und wie dieselben anzustellen seyn, soll nunmehr gezeigt werden.

Es lassen sich bey einem antichretischen Vertrage drey Fälle gedenken; der Ertrag der verpfändeten nutzbaren Sache ist entweder dem Zinse des dagegen geliehenen Capitals gleich, oder grösser oder kleiner als derselbe. Wenn der Ertrag der verpfändeten nutzbaren Sache dem Zinse des dagegen geliehenen Capitals gleich ist, so fällt in die Augen, daß keine Rechnung nöthig sey, und daß, es daure der Vertrag so lange als er wolle, der Gläubiger sein volles Recht an dem geliehenen Capitale, und der Schuldner gleiches Recht an der dafür verpfändeten Sache behalte. Wenn der Ertrag des Gutes geringer ist, als der Zins des dafür aufgenommenen Capitals, so wird die Schuld von Zeit zu Zeit grösser und grösser, und es kann nach einiger Zeit der Schuldner das aufgenommene Capital ganz schuldig seyn, und sein Recht an der übertragenen nutzbaren Sache ebenfalls verlohren haben. Wenn endlich der Ertrag der verpfändeten nutzbaren Sache grösser ist als der Zins des dafür geliehenen Capitals, so tritt der im § gedachte Fall ein, und auf diesen ist hier allein zu sehen, theils, weil der zweyte selten statt findet, und, wenn er sich ereignete, die dabey nöthigen Berechnungen auf eine ähnliche Art als bey dem dritten Falle geführt werden müßten.

§. 277.

Hat ein Gläubiger von seinem Schuldner für das ihm geliehene Capital eine nutzbare Sache zu seinem Gebrauche erhalten, von welcher er mehr Vortheil ziehen kann, als der Zins dieses Capitals beträgt; so entstehen dabey vorzüglich zwey Fragen: Wie viel muß nach

einer

einer bestimmten Zeit von dem geliehenen Capitale wegen des genossenen Ueberschusses abgezogen werden? ist die eine, und die andere: Wie lange kann der Gläubiger die nutzbare Sache behalten, wenn er dem Schuldner die ganze geliehene Schuld lassen will? Andere weniger wichtige Fragen sollen unten berührt werden. Hiebey ist nun vor allen Dingen nöthig, daß der jährliche Ertrag der verpfändeten nutzbaren Sache ausgemacht sey; indeß sieht ein jeder von selbst ein, daß die Art, denselben auszumitteln hieher nicht gehöre, sondern hier jedesmal als bekannt vorausgesetzt werden müsse. In der Folge erst kann von dieser Art Rechnungen geredet werden.

§. 278.

Nun finde der Fall statt, den auch **Unger** in seinen Beyträgen in der Abhandlung von der Liquidationsrechnung, denn unter diesem Titel hat er die Rechnungen beym antichretischen Vertrage abgehandelt, und **Langsdorf** in der Fortsetzung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis endlicher Grössen berühren: Es nehme jemand 1000 Rthlr a 5 pr. C. auf, und gebe dagegen ein Pfand, das jährlich 80 Rthlr erträgt. Wird hier **erstlich** gefragt, wie viel z. B. nach 5 Jahren der Schuldner wieder zu bezahlen, oder der Gläubiger zu fordern habe; so kann man **entweder** sagen, der Gläubiger habe jedes Jahr 30 Rthlr mehr erhalten, als er zu fordern gehabt,

und

und der Schuldner habe ihm daher 150 Rthl. abzuziehen, oder in allem 850 Rthl. wieder zu geben; oder man kann, um den am ersten sich darbietenden Weg zu wählen, rechnen: Der Schuldner nimmt auf zu 5 pr. C.

1000 Rthl. Nach einem Jahre
kommen dazu 50 Rthl. Zins, und
gehen ab 80 Rthl. jährlicher Ertr. des Pfandes

und es bleiben also 970 Rthl. Nach 2 Jahren
kommen dazu 48,5 Rthl. Zins, und
gehen ab 80 Rthl. jährl. Ertrag des Pfandes.

Es bleiben also 938,5 Rthl. Nach 3 Jahren.
kommen dazu 46,925 Rthl. Zins, und
gehen ab 80 Rthl. jährl. Ertrag des Pfandes.

Es bleiben also 905,425 Rthl. Nach 4 Jahren
kommen dazu 45,27125 Rthl. Zins, und
gehen ab 80 Rthl. jährl. Ertrag des Pfandes.

Es bleiben also 870,69625 Rthl. Nach 5 Jahren
kommen dazu 43,5348125 Rthl. Zins, und
gehen ab 80 Rthl. jährl. Ertrag des Pfandes.

Es bleiben also 834,2310625 Rthl., und so viel und nicht mehr muß der Schuldner nach dieser Rechnung herausgeben, um wieder zu dem völligen Besitz seines Pfandes zu gelangen. Es findet sich also hier ein Unterschied von beynahe 16 Rthl., und es wird derselbe immer grösser, je grösser die Anzahl der Jahre angenommen wird, wie man bald sieht, wenn man nur das gegenwärtige Exempel mit Aufmerksamkeit betrachtet.

Es ist der Bequemlichkeit wegen mit zehntheiligen Brüchen gerechnet worden. Man kann solches, so oft man es bequem findet, thun, und am Ende leicht den Decimalbruch in ℋ und ß verwandeln.

§. 279.

Wird aber **zweytens** gefragt, wie lange der Gläubiger das Pfand behalten könne, um durch den jährlichen Ueberschuß des Ertrags desselben über den Zins des dagegen geliehenen Capitals nach und nach sein ganzes Capital zu erhalten? so kann man **entweder** sagen: so viel Jahre als vielmal 30 Rℓ in 1000 Rℓ enthalten sind, das heißt $33\frac{1}{3}$ Jahr; **oder** man betrachtet diesen Fall als gleich mit folgendem: Es giebt jemand einem andern jährlich 30 Rℓ, bis diese jährliche Summen, ihren Zinseszins zu 5 pr. C. mitgerechnet, 1000 Rℓ ausmachen; es wird gefragt, wie lange solches geschehe? In diesem Falle müssen 1000 Rℓ gleich seyn 20×30 Rℓ multiplicirt mit $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, weniger 20×30 Rℓ, oder 1600 Rℓ müssen gleich seyn 600 Rℓ multiplicirt mit $\frac{21}{20}$ in der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist. Daraus fließt, daß $\frac{1600}{600}$ gleich sey $\frac{21}{20}$ in der gedachten Dignität, und also $\frac{l.\,1600 - l.\,600}{l.\,\frac{21}{20}}$ gleich der Zahl der gesuchten Jahre. Nun ist

$$l.\,1600 = 3{,}2041200,\ \text{und}$$
$$l.\,600 = 2{,}7781512,\ \text{also}$$
$$l.\,1600 - l.\,600 = 0{,}4259688,\ \text{und}$$
$$\frac{l.\,1600 - l.\,600}{l.\,\frac{21}{20}} = \frac{4259688}{211893} = 20{,}103\,..,$$

und es giebt also diese Rechnung nicht mehr als 20 Jahr und etwas über 5 Wochen an. Welch ein Unterschied zwischen diesem und dem vorhergehenden Resultate!

§. 280.

Betrachtet man nun die Fälle §. 278 und 279 genauer, so sieht man bald, daß sich die davon gegebene zwiefache Auflösung durch nichts anders unterscheidet, als daß entweder von dem Ueberschusse des jährlichen Ertrags über den Zins des dafür geliehenen Capitals weiter kein Zins in Anschlag gebracht wird, oder daß solches geschiehet. Wenn jenes ist, so findet man das verlangte, indem man nach der gemeinen Zinsrechnung oder der gemeinen Rabattrechnung rechnet; ist aber dies, so findet man es, wenn man die Zinseszinsrechnung oder die doppelte Rabattrechnung anwendet. **Die wichtigste Frage ist daher hier: Wie sind die Rechnungen beym antichretischen Vertrage zu führen, nach der gemeinen**

Zins-

Zins- und Rabattrechnung, oder nach der Zinseszinsrechnung und doppelten Rabattrechnung? denn das übrige nöthige ist fast nichts weiter als eine Zurückweisung auf die eben genannten Rechnungen.

§. 281.

Polack vertheidigt in dem schon öfters angeführten Werke in der Abhandlung vom Pacto antichretico die Art, wobey man bloß den jährlichen Ueberschuß des Ertrags des Pfandes über den Zins des dagegen geliehenen Capitals in Anschlag bringt, oder wobey man nach der gemeinen Zinsrechnung rechnet; und führt dabey die gleiche Meinung behauptende Inauguraldissertation des Herrn D. Moser an, welche den Titel führt: Rationem computationis fructuum ex pacto antichretico perceptorum in foro receptam nec juri nec æquitati convenire, und zu Helmstädt unter dem Vorsitze des Herrn Prof. Eisenhardts gehalten worden ist. Seine Meinung ist: Es exercire bey der andern Art zu rechnen der Schuldner gegen seinen Gläubiger im höchsten Grade usurariam pravitatem, wo Zins auf Zins gehäuft, und dem Gläubiger sein auf einmal gezahltes Capital und noch dazu per partialissimam solutionem zu Wasser gemacht werde u. s. w. und wenn man bey dieser Rechnung bleiben wolle, so würde sich gewiß künftig kein so einfältiger antichretischer Gläubiger mehr finden, und das ganze antichretische pactum aus der Welt proscribiret werden. Unger hingegen, Langsdorf und Florencourt empfehlen diese andere Art, und ohnstreitig mit Recht. Ich will ihre Gründe, wiewohl mit einigen Veränderungen und Zusätzen, anführen.

§. 282.

Die Gesetze verbieten den Zinseszins, und es kann daher in Gerichten keine Rechnung anwendbar seyn, welche in der That voraussetzt, daß der Gläubiger Zinseszins erhalte; auch ist die Unterscheidung in erlaubten und unerlaubten Zinseszins in solchen Fällen gar nicht zu gebrauchen. Geben aber auf diese Art die Gesetze dem Schuldner das Recht, seinem Gläubiger Zinseszins zu versagen, so hat dieser dagegen das Recht, von seinem Schuldner den fälligen Zins zur rechten Zeit zu verlangen, und insbesondere, wenn Abrechnung gehalten wird, wie beym antichretischen Vertrage. Würde dabey zwischen dem Gläubiger und Schuldner verabredet, daß der jährliche Ueberschuß des Ertrags des Pfandes über den Zins des dagegen geliehenen Capitals nicht von Jahr zu Jahr, sondern erst nach einer bestimmten Zeit von diesem Capitale abgezogen werden sollte, so wäre aller Streit gehoben; so lange das aber nicht ist, so kann allerdings den Gesetzen

gemäß

gemäß der Schuldner verlangen, daß der jährliche Ueberschuß des Ertrags seines Pfandes auch jährlich, oder sobald derselbe wirklich da ist, von dem geliehenen Capitale abgezogen werde. Oder sollte etwa der Umstand eine Aenderung verursachen, daß der Gläubiger auf diese Art sein auf einmal gegebenes Capital in kleinen Summen nach und nach wieder erhält? Dies ist allerdings eine Unbequemlichkeit für den Gläubiger; allein wird er sich wohl zu einem antichretischen Vertrage entschliessen, wenn daraus für ihn beträchtlicher Nachtheil entstehen kann? und ist er im Stande die nutzbare ihm verpfändete Sache höher auszubringen, als sie ihm angeschlagen ist, wie das oft der Fall seyn kann, so muß man diesen Vortheil doch dagegen auch in Anschlag bringen. Streitet also das nicht mit den Gesetzen, sondern stimmt es vielmehr mit denselben überein, daß der Ueberschuß des jährlichen Ertrags des Pfandes über den Zins des dagegen geliehenen Capitals, so oft er da ist, d. h. jährlich, von dem Capitale abgezogen werde, und findet dabey keine usuraria pravitas statt; so kann man, ohne dem Gläubiger zu nahe zu treten, die Rechnungen beym antichretischen Vertrage nach den Regeln der Zinseszinsrechnung führen, indem dieselben, nur auf eine kürzere Art, zu eben dem Resultate führen, wozu der weitläuftige §. 278 eingeschlagene Weg, der durch das bisherige gerechtfertiget wird, leitet.

§. 283.

Um diese letzte Behauptung noch mit wenigen zu erläutern, so betrachte man den §. 278 durchgenommenen Fall. Der Schuldner rechnet daselbst seinem Gläubiger von dem aufgenommenen 1000 Rthlr. ab

das	1te	Jahr	—	30 Rthlr.
—	2te	—	—	31,5 Rthlr.
—	3te	—	—	33,075 Rthlr.
—	4te	—	—	34,72875 Rthlr.
—	5te	—	—	36,4651875 Rthlr., und in

allem also 165,7689375 Rthlr., so daß er ihm nach 5 Jahren wiedergiebt 834,2310625 Rthlr. Der Gläubiger erhält also von seinen 1000 Rthlr. eigentlich an Zins

das	1te	Jahr	—	50 Rthlr.
—	2te	—	—	48,5 Rthlr.
—	3te	—	—	46,925 Rthlr.
—	4te	—	—	45,27125 Rthlr.
—	5te	—	—	43,5348125 Rthlr.

Dies heißt aber im Grunde eben so viel, als: Der Schuldner rechnet seinem Gläubiger, als wenn er ihm den Ueberschuß des Ertrags des Pfandes auf Zinseszins liehe; eigentlich giebt er ihm nur von Jahr zu Jahr weniger Interessen, weil sich das Capital immer mehr und mehr vermindert, und der Ueberschuß des jährlichen Ertrags des

Pfandes

Pfandes wird immer grösser und grösser, weil der Ertrag des Pfandes selbst unverändert bleibt.

§. 284.

Will man sich hievon auf eine allgemeinere Art überzeugen; so überdenke man folgende Tabelle. Der Schuldner hat

Jahre,	von dem gelieh. Capitale,	giebt davon Zins	zieht also von dem gel. Capitale ab
1.	das ganze Capital	$\frac{1}{20}$ —	den ganzen Uebersch.
2.	das Cap. — 1 Ueberschuß	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21}{20}$ des Ueberschusses
3.	das Cap. — $\frac{21}{20}$ d. Uebersch.	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21^2}{20^2}$ des Ueberschusses
4.	das Cap. — $\frac{21^2}{20^2}$ d. Uebersch.	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21^3}{20^3}$ des Ueberschusses
5.	das Cap. — $\frac{21^3}{20^3}$ d. Uebersch.	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21^4}{20^4}$ des Ueberschusses
6.	das Cap. — $\frac{21^4}{20^4}$ d. Uebersch.	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21^5}{20^5}$ des Ueberschusses
7.	das Cap. — $\frac{21^5}{20^5}$ d. Uebersch.	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21^6}{21^6}$ des Ueberschusses
8.	das Cap. — $\frac{21^6}{20^6}$ d. Uebersch.	$\frac{1}{20}$ —	$\frac{21^7}{20^7}$ des Ueberschusses

u. s. w.

§. 285.

Gesetzt, daß man nach einfachem Zinse rechnen wollte, so würde dem Schuldner bloß der Ueberschuß zu gute gerechnet, auf die Zeit aber, wo er denselben jedesmal eigentlich hätte erhalten sollen, ganz und gar nicht Rücksicht genommen. Hier ist also die Vervortheilung offenbar, und sie ist um so viel grösser, je grösser einmal der Ueberschuß des jährlichen Ertrags des Pfandes über den Zins des dafür geliehenen Capitals ist, und zweytens, je länger der antichretische Vertrag dauert. In dem Exempel §. 278 wird also der Schuldner fast um 16 Rthlr, und in dem §. 279 um 13 Jahre, d. h. 13 × 80 Rthlr oder 1040 Rthlr vervortheilt.

Aus dem bisherigen erhellet auch, warum oben bey der Berechnung der Zeit, in welcher ein Capital, wovon jährlich mehr, als der Zins beträgt, genommen wird, gänzlich verschwindet, behauptet worden ist, daß man dabey ganz und gar nicht nach einfachem Zinse oder Rabatte rechnen müsse.

§. 286.

Nunmehr ist es leicht, für die wichtigsten Fälle der Rechnungen beym antichretischen Vertrage Regeln vestzusetzen, indem dieselben keine andere sind, als die Regeln der Zinsesrechnung und doppelten Rabattrechnung, höchstens mit einigen geringen Veränderungen. Ist

a der jährliche Ertrag des nutzbaren Pfandes

stets

stets derselbe, und soll bestimmt werden, wie viel der Gläubiger nach einer gegebenen Anzahl von Jahren von dem geliehenen Capitale wieder erhalten könne; so hat man nur nöthig zu berechnen, wie viel der jährliche Ueberschuß des Ertrags des Pfandes über den Zins des geliehenen Capitals bis zu dieser Zeit mit dem Zinseszinse betrage, und diese Summe von dem geliehenen Capitale abzuziehen. Das Exempel §. 278 beyzubehalten, so beträgt der jährliche Ueberschuß des Ertrags des Pfandes bis nach dem 5ten Jahre mit dem Zinseszinse zu 5 pr. C.

$$30 \text{ Rth.} \times \left(\frac{21^4}{20^4} + \frac{21^3}{20^3} + \frac{21^2}{20^2}\ \frac{21}{20} + 1\right),$$ oder

$$30 \text{ Rth.} \times \left(20 \times \frac{21^5}{20^5} - 20\right),$$ oder

$$20 \times \frac{21^5}{20^5} \times 30 \text{ Rth.} - 20 \times 30 \text{ Rth.}$$ (s. §. 122 u. f.)

Da nun

$$\text{L. } 20 = 1,3010300,$$

$$\text{L. } \frac{21^5}{20^5} = 0,1059465,$$ und

$$\text{L. } 30 = 1,4771212,$$ also

$$\text{L. } 20 \times \frac{21^5}{20^5} \times 30 = 2,8840977,$$ und

$$20 \times \frac{21^5}{20^5} \times 30 = 765,7689.$$ Hievon

20×30 oder 600, abgezogen, so kommen 165,7689 Rth., und der

 Schuld-

Schuldner muß also seinem Gläubiger 1000 Rthl — 165,7689 Rthl, d. h. 834,2311 Rthl herausgeben.

§. 287.

Soll hingegen die Zeit bestimmt werden, nach deren Verlauf der Gläubiger das Pfand wieder herausgeben muß, ohne etwas von seinem Capitale wieder zu erhalten; so reducire man das Pfand auf Capital, d. h. setze dafür ein Capital, das so viel Zins trägt, als der Ertrag des Pfandes ist, und suche den Logarithmen davon auf. Ferner ziehe man das geliehene Capital von dem reducirten Pfande ab, suche davon ebenfalls den Logarithmen, und ziehe denselben von dem zuvor gedachten Logarithmen ab. Endlich dividire man den gefundenen Rest durch den Logarithmen des Anzeigers der Capitalsveränderung zur Findung der durch den einfachen Zins vermehrten Summe. Der Quotient zeigt die Zahl der Jahre an, nach welchen der Gläubiger das Pfand herauszugeben verbunden ist. Da bereits §. 279 nach dieser Regel gehandelt worden ist, so wäre es überflüssig, noch ein anderes Exempel herzusetzen.

§. 288.

Ist aber

b (s. §. 286) der jährliche Ertrag des Pfandes nicht gleich; so giebt es auch keinen verkürzten Weg zu dem Ziele, das man alsdann sich vorsetzen kann, sondern man muß da den weitläuftigen Weg betreten,

ten, der §. 278 und §. 120 eingeschlagen worden ist. Dieser Fall ist indeß so häufig nicht, und es ist also um so viel weniger nöthig, dabey zu verweilen.

§. 289.

Um nun auch noch einige der übrigen hier möglichen Fälle zu berühren, so kann die Frage entstehen: Wie groß muß das Capital seyn, das für ein gegebenes und seinem Werthe nach bekanntes Pfand auf eine bestimmte Zahl von Jahren gegeben werden muß? Z. B. Wie groß muß das Capital seyn, das man geben muß, um ein Pfand, dessen Werth jährlich 80 Rthlr ist, 20 Jahr und 5 Wochen zu geniessen? Es fällt indeß bald in die Augen, daß diese Fragen durch eine geringe Abänderung zu Fragen der doppelten Rabattrechnung gemacht werden können, und sie dürfen daher hier nur berührt werden. Es ist nemlich gleich, ob man auf die angezeigte Art frägt; oder: wie groß ist der jetzige Werth einer jährlichen Einnahme von 80 Rthlr, die man 20 Jahr und 5 Wochen zu geniessen hat, nach doppeltem Rabatte gerechnet.

§. 290.

Wird gefragt, wie groß der jährliche Ertrag eines Pfandes seyn müsse, wenn man ein gewisses Capital, um jenes Pfand eine gewisse Anzahl Jahre hindurch zu benutzen, geben will; so ist auch von diesem Falle da schon geredet worden, wo die Beantwortung der Fragen untersucht

sucht wurde, wie viel man eine bestimmte Anzahl von Jahren hindurch erhalten könne, wenn man baar eine Summe Geldes auf Zinseszins anlege; und überhaupt sind in den vorhergehenden Rechnungen von allen Fragen, die sonst hier noch vorfallen können, bereits ähnliche da gewesen.

Anhang zur Zinsrechnung
im weitläuftigen Verstande.

---

§. 291.

Ich war anfänglich willens, mehr in diesen Anhang zu bringen, als, da der erste Abschnitt viel länger geworden, als ich es vermuthet habe, wirklich geschehen kann. Es sollten darin insbesondere verschiedene vermischte Fälle zu stehen kommen, damit auch dabey die nöthige und kürzeste Verfahrungsart gezeigt würde. Aus dem angeführten Grunde aber, und weil sich zu dergleichen vermischten Fällen auch in der Folge Gelegenheit finden wird, bleiben dieselben für jetzo weg, und ich werde daher nur noch verschiedene Gegenstände berühren, die mit der Zinsrechnung in Verbindung stehen, und bis jetzt entweder noch gar nicht, oder doch nicht ausführlich genug haben betrachtet werden können.

§. 292.

§. 292.

Es ist oben §. 53 bemerkt worden, daß die Berechnung des Agios mit der gemeinen Zinsrechnung, und §. 154, daß die Berechnung des Verlustes, wenn man schlechteres Geld gegen bessers vertauscht, mit der gemeinen Rabattrechnung auf einerley Gründen beruhe. Mehr braucht daher auch von diesen beyden Rechnungen überhaupt nicht gesagt zu werden, als in dem angeführten §. von denselben steht. So wie es aber in der gemeinen Zinsrechnung so wohl als in der gemeinen Rabattrechnung sehr vortheilhaft ist, sich die Verhältnisse, nach welchen man aus einer gegebenen Grösse eine andere, aus einem Capitale z. B. seinen Zins oder Rabatt zu entwickeln hat, nicht nur in den möglich kleinsten Zahlen, und Anzeigermässig bekannt und geläufig zu machen, so hat dasselbe auch hier seinen grossen Nutzen, und es kann daher nicht schädlich seyn, die Art und Weise davon in ein Paar Beyspielen zu zeigen.

§. 293.

Gesetzt also z. B. daß das Gold gegen Courant $6\frac{2}{3}$ pr. C. stehe; wie berechnet man nun am kürzesten und geschwindesten das Agio einer jeden Summe Goldes? Der Anzeiger der Veränderung derselben zur Findung des Agios ist $\frac{6\frac{2}{3}}{100} = \frac{20}{300} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$.

Man

Man nimmt also in diesem Falle von der gegebenen Summe Goldes erstlich $\frac{1}{3}$, und dann von diesem $\frac{1}{3}$ wieder $\frac{1}{5}$, und hat so das Agio gefunden. Z. B.

Wie viel Agio tragen 3645 Rthl. Gold a $6\frac{2}{3}$ pr. C.?

$$\begin{array}{r} 3645 \text{ Rthl.} \\ \hline 1215 \\ \hline 243 \text{ Rthl.} \end{array}$$

Wie viel Agio tragen $8462\frac{1}{2}$ Rthl. Gold a $6\frac{2}{3}$ pr. C.?

$$\begin{array}{r} 8462\tfrac{1}{2} \text{ Rthl.} \\ \hline 2820 \text{ Rthl. } 20 \text{ ßl.} \\ \hline 564 \text{ Rthl. } 4 \text{ ßl.} \end{array}$$

Ist das pr. C. $6\frac{2}{3}$; so trägt ein Louisd'or $\frac{1}{3}$ Rthl. Dividirte man daher die gegebene Summe Goldes anfänglich mit 5; so erhielte man die darin enthaltene Louisd'or, und eben so viel $\frac{1}{3}$ Rthl. betrüge das Agio. Man müßte also noch mit 3 dividiren, um das Agio in Thalern zu erhalten. Ob man zuerst mit 3 oder mit 5 dividirt, ist in Ansehung des endlichen Resultats gleich.

§. 294.

Soll rückwärts berechnet werden, wie viel Gold man für eine bestimmte Summe Courant erhalte, so wird der Anzeiger wie die Anzeiger in der Rabattrechnung formirt.

mirt. Soll also das pr. C. ebenfalls $6\frac{2}{3}$ seyn, so ist der Anzeiger der Veränderung einer Summe Courant, um den Verlust desselben gegen Gold zu finden, $\frac{6\frac{2}{3}}{106\frac{2}{3}} = \frac{20}{320} = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$. Man dividire also die gegebene Summe Courant durch 4, und das kommende Viertheil derselben nochmals mit 4, so erhält man das von der gegebenen Summe Courant abzuziehende, um die dafür zu erhaltende Summe Goldes zu bekommen. Z. B.

Wie viel Gold erhält man für 3888 Rthlr Courant a $6\frac{2}{3}$ pr. C.?

$$\frac{\frac{3888 \text{ Rthlr}}{972}}{243 \text{ Rthlr.}}$$

3888 Rthlr — 243 Rthlr = 3645 Rthlr Gold.

Wie viel Gold erhält man für $9026\frac{2}{3}$ Rthlr Courant a $6\frac{2}{3}$ pr. C.?

$$\frac{\frac{9026\frac{2}{3} \text{ Rthlr}}{2256\frac{2}{3} \text{ Rthlr}}}{564\frac{1}{6} \text{ Rthlr.}}$$

$9026\frac{2}{3}$ Rthlr — $564\frac{1}{6}$ Rthlr = $8462\frac{1}{2}$ Rthlr Gold.

§. 295.

Aehnlicher Vortheile kann man sich bey der Berechnung der Bancogelder bedienen. 100 ℔ Bancogeld sind

sind bey der Berliner Banque 125 Rthl. Friedrichsd'or und 131¼ Rthl. Courant Will man daher

a Berliner Bancogeld auf Gold reduciren, so ist der Anzeiger der Veränderung der gegebenen Bancosumme zur Findung der dafür zu setzenden Summe Goldes $\frac{125}{100} = 1\frac{1}{4}$. Man addirt also zu der gedachten gegebenen Summe nur $\frac{1}{4}$ derselben. Z. B.

Wie viel machen 568 Pfund Berliner Bancogeld in Friedrichsd'or?

5 6 8	Pfund
1 4 2	—
7 1 0	Rthl. in Friedrichsd'or.

Will man hingegen

b eine gegebene Summe Friedrichsd'or in Bancogeld verwandeln, so ist der Anzeiger der Veränderung der gegebenen Summe in Friedrichsd'or zur Findung der dafür zu setzenden Summe in Bancogeld $\frac{100}{125} = \frac{4}{5}$, und man hat also nur nöthig, von der gegebenen Summe in Friedrichsd'or $\frac{1}{5}$ abzuziehen. Z. B.

Wie viel machen 710 Rthl. in Friedrichsd'or Berliner Bancogeld?

7 1 0	Rthl.
1 4 2	Rthl.
5 6 8	Pfund Berliner Bancogeld.

Soll man ferner

c Berliner Bancogeld auf Courant reduciren, so ist der

der Anzeiger der Veränderung des Bancogeldes zur Findung der dafür zu setzenden Summe in Courant $\frac{131\frac{1}{4}}{100}$ $= \frac{525}{400} = \frac{105}{80} = \frac{21}{16} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$. Da nun $\frac{1}{16}$ der vierte Theil von $\frac{1}{4}$ ist, so hat man nur nöthig, von der gegebenen Summe $\frac{1}{4}$, und von diesem $\frac{1}{4}$ abermals $\frac{1}{4}$ zu suchen, und beyde gefundene Stücke zu der gegebenen Summe zu addiren. Z. B.

Wie viel Courant machen 368 Rthl. 12 Gr. Berliner Bancogeld?

368 Rthl.	12 Gr.	
92 —	3 —	
23 —	— —	9 Pf.
483 Rthl.	15 Gr.	9 Pf. Courant.

Will man endlich

d Berliner Courant auf Berliner Bancogeld reduciren, so ist der Anzeiger der Veränderung der gegebenen Summe Courant zur Findung der dafür zu setzenden Bancosumme $\frac{100}{131\frac{1}{4}} = \frac{400}{525} = \frac{16}{21} = \frac{2}{3} + \frac{2}{21}$.

Da nun $\frac{2}{21}$ eben so viel als $\frac{1}{7}$ aus $\frac{2}{3}$ ist, so sucht man aus der gegebenen Summe erst $\frac{2}{3}$, und aus diesen $\frac{2}{3}$ noch $\frac{1}{7}$, und addirt diese beyden gefundenen Stücke zu einander. Dieses kann auf folgende Arten geschehen, entweder nach $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{21}$, oder nach $2\,(\frac{1}{3} + \frac{1}{7})$, oder nach $(\frac{1}{3} + \frac{1}{7})\,2$. Z. B.

Wie viel machen 483 Rthl. 15 gr. 9 pf. Berliner Courant in Berliner Bancogeld? Man rechnet entweder

483 Rthl.	15 gr.	9 pf.	
161 Bthl.	5 gr.	3 pf.	
161 —	5 —	3 pf.	
23 —	— —	9 —	
23 —	— —	9 —	
368 Bthl.	12 gr.	—	Bancogeld; oder

483 Rthl.	15 gr.	9 pf.	
967 Rthl.	7 gr.	6 pf.	
322 Bthl.	10 gr.	6 pf.	
46 —	1 —	6 —	
368 Bthl.	12 gr.	—	Bancogeld; oder endlich

483 Rthl.	15 gr.	9 pf.	
161 Bthl.	5 gr.	3 pf.	
23 —	— —	9 —	
184 Bthl.	6 gr.	- —	
368 Bthl.	12 gr.	—	Bancogeld.

§. 297.

Mit der Berechnung des einfachen Zinses hat die Berechnung des Portos, welches man den Geldern, die man

man postfrey übersenden sollte, aber unbefreyt übersenden, und dagegen das Postgeld, das der Empfänger geben muß, beylegen will, vieles gemein, und es ist daher hier der Ort, dieser Berechnung mit ein Paar Worten zu gedenken. So bald man weiß, wie viel für eine gewisse Summe gegeben werden muß, und dies ist jedesmal bekannt, so kommt es nur darauf an, den gehörigen Anzeiger der Veränderung der zu überschickenden Summe zur Findung des beyzulegenden Portos vestzusetzen. Bedenkt man nun, daß, wenn z. B. das Porto für 100 Rthlr. 1 Rthlr. oder $\frac{1}{100}$ der überschickten Summe ist, der Empfänger statt jeder 100 Rthlr., die ihm unbefreyt übersandt werden, nur 99 erhält, so sieht man leicht, daß in diesem Falle das beyzulegende Porto $\frac{1}{99}$ derjenigen Summe seyn muß, welche der Empfänger wirklich erhalten soll, und daß man überhaupt den hier nöthigen Veränderungsanzeiger finde, wenn man einen Bruch macht, dessen Zähler der für eine bestimmte Summe zu gebende Theil, und dessen Nenner diese bestimmte Summe weniger das dafür zu gebende Porto ist. Um diese Regel an einigen Beyspielen zu erläutern, so werde gefragt:

a Wie viel Porto muß man zu 198 Rthlr., die man befreyt übersenden sollte, legen, wenn 100 Rthlr. 1 Rthlr. geben?

$$\frac{198 \text{ Rthlr.} \times \frac{1}{99}}{}$$

2 Rthlr., und man muß also 200 Rthlr. übermachen.

 b Wie

b Wie viel Porto muß man zu 1495 Rthlr. legen, die man postfrey übersenden sollte, wenn jede 100 Rthlr. 8 gr. geben?

$$\begin{array}{r|l} \cancel{1495} & \text{Rthlr.} \times \dfrac{\frac{1}{3}}{99\frac{2}{3}} = \frac{1}{299} \\ \cancel{4} & \\ & 5 \text{ Rthlr., und man muß also } 1500 \text{ Rthlr.} \end{array}$$

übersenden.

§. 298.

Will man sogleich die wirklich zu übersendende Summe finden, so ist der Anzeiger der Veränderung derjenigen Summe, welche der Empfänger wirklich erhalten muß, dem Zähler nach diejenige Summe, für welche man das Porto weiß, und dem Nenner nach eben diese Summe weniger das dafür zu gebende Porto. Z. B.

a Wie viel muß man anstatt 198 Rthlr., die man postfrey übersenden sollte, abschicken, wenn das Porto 1 Rthlr. von 100 Rthlr. ist?

$$\frac{198 \text{ Rthlr.} \times \frac{100}{99}}{200 \text{ Rthlr.}}$$

b Wie viel muß man anstatt 1495 Rthlr., die postfrey übersandt werden sollten, übermachen, wenn das Porto $\frac{1}{3}$ Rthlr. von 100 Rthlr. ist?

$$\begin{array}{r|l} 1495 \text{ Rthlr.} \times \dfrac{100}{99\frac{2}{3}} = \frac{300}{299} & \\ \hline \cancel{448500} & \\ \cancel{299} & 1500 \text{ Rthlr.} \\ \cancel{144} & \end{array}$$

Die

Die hier gebrauchten Exempel sind aus Ungers Beyträgen genommen. Unger betrachtet von den angeführten Fällen blos den Fall, der im vorhergehenden §. abgehandelt worden ist. Die Regel, welche er befolgt, ist mit der hier gegebenen einerley, in der Art der Findung dieser Regel aber schlägt er einen andern Weg ein.

§. 299.

So wie der betrachtete Fall mit der gemeinen Zinsrechnung in Verbindung steht, so ist der umgekehrte Fall mit der gemeinen Rabattrechnung verwandt, und nach dieser Bemerkung kann es daher keine Schwierigkeit haben, das Porto zu berechnen, welches man abziehen kann, wenn man Gelder, die unbefreyt überschickt werden sollten, postfrey absenden will. Will man die nach Abzug des Porto zu übermachende Summe finden, so nimmt man den §. 298 gedachten Anzeiger umgekehrt; will man aber das abzuziehende Porto haben, so nimmt man den §. 297 beschriebenen Anzeiger, doch so, daß sein Nenner die Zahl der Summe ist, für welche man das Porto weiß. Z. B.

a Wie viel muß man anstatt 200 Rthl., die unbefreyt übersandt werden sollten, senden, wenn man sie postfrey überschicken will? das Porto soll seyn 1 pr. C.

$$\frac{200 \text{ Rthl.} \times \frac{99}{100}}{198 \text{ Rthl.}}$$

b Wie viel muß man anstatt 1500 Rthlr, die unbefreyt abgeschickt werden sollten, postfrey senden, wenn das Porto $\frac{1}{3}$ pr. C. ist?

$$1500 \text{ Rthlr} \times \frac{99\frac{2}{3}}{100} = \frac{299}{300}$$

$$\overline{5 \text{ Rthlr}}$$

$$\overline{1495 \text{ Rthlr.}}$$

c Wie viel Porto muß bey a gerechnet werden?

$$200 \text{ Rthlr} \times \frac{1}{100}$$

$$\overline{2 \text{ Rthlr.}}$$

d Wie viel Porto findet bey c statt?

$$1500 \text{ Rthlr} \times \frac{\frac{1}{3}}{100} = \frac{1}{300}$$

$$\overline{5 \text{ Rthlr.}}$$

§. 300.

Um zum Schlusse noch einer Anwendung der Regeln der gemeinen Zinsrechnung und Rabattrechnung zu gedenken, so gebraucht man dieselbe sehr nothwendig bey gewissen Fällen der Remissionsrechnung, die nebst andern Rechnungen in dem folgenden zweyten Abschnitte abgehandelt werden wird. Es kann sich nemlich ereignen, daß ein Pächter die Pacht mehrerer Jahre auf einmal entweder zu Anfange oder zu Ende der Pacht entrichtet. Gesetzt,

daß

daß alsdann für irgend ein Jahr eine Remission bewilliget werden soll, und das Verhältniß der Remission zu der Pacht bestimmt ist, so kommt es dann darauf an, daß die Grösse der Pacht eines Jahres bestimmt werde, und hiezu gebraucht man die Regeln entweder der gemeinen Zinsrechnung oder der gemeinen Rabattrechnung.

§. 301.

Es bezahle also jemand an einen Gutsbesitzer 4000 Rthl. unter der Bedingung, daß er dafür ein Gut 6 Jahre lang besitze, und es entstehe wegen einer zu ertheilenden Remission die Frage, wie hoch eigentlich die Pacht eines Jahres zu rechnen sey? Es enthalten, den Zins zu 5 pr. C. gerechnet, die zu Anfange der Pacht gegebenen 4000 Rthl. von der jährlichen Pachtsumme

$$\frac{20}{21} = 0{,}9523809$$
$$\frac{10}{11} = 0{,}9090909$$
$$\frac{20}{23} = 0{,}8695652$$
$$\frac{5}{6} = 0{,}8333333$$
$$\frac{4}{5} = 0{,}8000000$$
$$\frac{10}{13} = 0{,}7692307$$

und sind

also gleich $\frac{1181909}{230230} = 5{,}1336010$ der gedachten jährlichen Pachtsumme. Will man also diese Pachtsumme finden, so dividirt man

```
5,1336   4000,0000000 | 779,18 Rthl.
          5399886 42
           4064713 0
            593252 5
            471528
             22346
             19215
               41
```

§. 302.

Gesetzt, daß jemand mit einem Gutsbesitzer den Vertrag errichtet hätte, daß er ihm für ein Gut nach 6 Jahren 4000 Rthl. für die gesammte Pacht aller 6 Jahre entrichten wolle, und ebenfalls wegen einer zu ertheilenden Remission die Frage entstünde, wie hoch die Pachtsumme eines Jahres eigentlich anzusetzen sey? so enthielten die gedachten 4000 Rthl., den Zins wieder zu 5 pr. C. gerechnet, ausser der jährlichen Pachtsumme 6 mahl genommen, noch den

5fachen Zins der Pacht des 1ten Jahres oder $\frac{5}{20}$ der jährl. P.
4 — — — — 2 — — $\frac{4}{20}$ — —
3 — — — — 3 — — $\frac{3}{20}$ — —
2 — — — — 4 — — $\frac{2}{20}$ — —
1 — — — — 5 — — $\frac{1}{20}$ — —

also $6\frac{3}{4}$ der jährlichen Pachtsumme. Um daher diese zu finden, darf man nur 4000 Rthl. mit $6\frac{3}{4}$ dividiren.

Nun

Nun ist

$\frac{4000}{6\frac{3}{4}} = \frac{16000}{27}$, und man erhält also

$27 \qquad \cancel{1}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0},\cancel{0} \;\Big|\; 592,59$ Rthlr. für die
$\qquad\qquad \cancel{2}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{6}5$
$\qquad\qquad \cancel{7}\cancel{3}2$
$\qquad\qquad \cancel{1}$

jährliche Pacht.

§. 303.

Wollte man die Exempel des 301ten und 302ten §. nach der doppelten Rabattrechnung und der Zinseszinsrechnung rechnen, so würde solches leicht seyn; es wird aber hier gewöhnlicher Weise einfacher Zins und Rabatt in Anschlag gebracht.

Zweyter Abschnitt
Verschiedene Rechnungen.

Einleitung.

§. 1.

Unter dem Titel, verschiedene Rechnungen, will ich mehrere Rechnungen abhandeln, die wegen ihres häufigen Gebrauchs allerdings verdienen besonders durchgenommen zu werden, dabey aber, weil sie nicht schwer sind, keine weitläuftige Betrachtung erfordern. Sie sind die **Gesellschaftsrechnung nebst ihren Anwendungen, die Alligationsrechnung, die Remissionsrechnung, die Berechnung der Legitimä, der Quartä Falcidiä und der Verletzung über die Hälfte.**

Gesellschaftsrechnung
im weitläuftigen Verstande.

§. 2.

Die Gesellschaftsrechnung erklären **von Clausberg,** demonstr. Rechenk. 4. Th. S. 1312. und **Lempe** in den

Erläu-

Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetic, Geometrie und Trigonometrie (Altenburg 1781) 1. Th. S. 285. durch diejenige Rechnung, welche ein gegebenes Ganze in eine verlangte Anzahl Theile so zu theilen lehrt, daß sich diese Theile eben so verhalten, als wie die Theile eines andern Ganzen, das in eben so viele Theile getheilt ist. In Polacks Mathesi forensi S. 77 und der bekannten vortreflichen öconomischen Encyclopädie des Hrn. D. Krünitz Th. 8. S. 279. wird sie die Regel der Rechenkunst genannt, durch deren Operation man den Antheil am Gewinn oder Verlust entdecket und vestsetzet, welchen Compagnons oder Gesellschafter nach Proportion ihrer zu gewissen Handlungsgeschäften oder andern Unternehmungen eingelegten oder zusammengeschossenen Capitalien, haben sollen. In dem letztern Werke findet sich überdem der Zusatz: Man brauchet sie auch, wenn man sehen will, was etwa ein Compagnon noch ferner in die unter ihnen errichtete gemeine Casse pro rata, oder nach Beschaffenheit seines daran genommenen Antheils, einzulegen hat. Wiedeburg in seiner kurzgefaßten practischen Mathematic für diejenigen, welche sich auf die Rechtsgelahrheit, Cameralwissenschaft und Oeconomie legen, (Jena 1761) Fr. Chr. Lorenz Karsten in seiner Rechenkunst und Florencourt in den öfters angeführten Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechen-

kunst

kunst fangen, ohne sich bey der Erklärung aufzuhalten, sogleich mit der Hauptregel derselben oder mit Exempeln an.

§. 3.

Ohnstreitig thut man wohl, wenn man **Gesellschaftsrechnung im weitläuftigen Verstande** und **Gesellschaftsrechnung in engerer Bedeutung** von einander unterscheidet, und diese als einen Theil von jener betrachtet. Man erhält dadurch den Vortheil, daß man mehrere Rechnungen, die sich nicht in der Hauptsache, sondern nur in einigen Nebendingen unterscheiden, der Hauptregel nach mit einem Male abhandeln kann, so daß man nachher nur noch auf die wenigen Besonderheiten einer jeden zu sehen hat, um jede ganz zu kennen. Gesellschaftsrechnung im weitläuftigern Verstande ist nun die Rechnung, welche die Theile eines Ganzen nach den gegebenen Theilen eines andern Ganzen bestimmen lehrt, und Gesellschaftsrechnung im engern Verstande, die in der zweyten Erklärung des vorhergehenden §. beschriebene Rechnung, welche daher auch **Gewinn- und Verlustrechnung** genennet werden kann.

Der Unterschied, den man im Gebrauche zwischen Compagnie und Gesellschaft bisweilen macht, so daß man unter Gesellschaften zwey oder drey, überhaupt wenige, unter Compagnien aber mehrere Personen versteht, wovon jene überdem bloß von sich abhängen, diese aber landesherrliche Bewilli-

gung

gung nöthig haben, (s. öconomische Encyclopädie Th. 8. S. 259. 260,) kommt hier nicht in Betrachtung.

Die hier gegebene Erklärung der Gesellschaftsrechnung im weitläuftigern Verstande ist von der 1ten Erklärung im 2ten §. nur darin unterschieden, daß sie weiter ist.

§. 4.

Zur Gesellschaftsrechnung im weitläuftigen Verstande gehören nun

a die Gesellschaftsrechnung in engerer Bedeutung oder die Gewinn- und Verlustrechnung, nebst der Berechnung der Vertheilung der Masse und der Unkosten bey Concursen,
b die Erbtheilsrechnung,
c die Repartitions- und Contributionsrechnung,
d die Haverenrechnung,
e die Vermischungsrechnung u. d. gl.

§. 5.

Da bey allen diesen Rechnungen die Theile eines gewissen Ganzen nach den Theilen eines andern Ganzen vestzusetzen sind; so kommt es dabey vor allen Dingen darauf an, daß man dies letztere Ganze nebst seinen Theilen genau kenne. Oft sind davon blos die Theile gegeben, und dann ist es nothwendig, daß man zuvörderst das Ganze, welches sie ausmachen, suche. Was ausserdem nöthig ist, wird sich am besten an Beyspielen zeigen lassen.

Gesellschaftsrechnung
im engern Verstande
oder
Gewinn- und Verlustrechnung.

§. 6.

Wenn mehrere Personen Capitalien zusammenschiessen und anlegen, und der Antheil am Gewinn und Verlust, den eine jede nach ihrer Einlage von dem nach einiger Zeit entstandenen sämmtlichen Gewinne und Verluste erhalten muß, bestimmt werden soll; so sind entweder so wohl die zusammengeschossenen Capitalien als auch die Zeiten des Gebrauchs derselben gleich, oder es sind solches zwar die Zeiten, aber nicht die Capitalien, oder die Capitalien sind gleich, und die Zeiten ungleich, oder es sind so wohl die Capitalien als die Zeiten ungleich. **Wenn so wohl die zusammengeschossenen Capitalien als auch die Zeiten des Gebrauchs derselben gleich sind,** so hat natürlicher Weise auch eine jede der interessirten Personen gleichen Antheil an dem nach einiger Zeit entstandenen sämmtlichen Gewinne und Verluste, und man hat, um den Antheil einer jeden zu finden, nichts weiter nöthig, als denselben durch die Anzahl aller dieser Personen zu divi-

dividiren. In diesem Falle hat man daher auch zur Beantwortung der hieher gehörigen Fragen nichts weiter zu wissen nöthig, als einmal den sämmtlichen Gewinn und Verlust, und die Anzahl der dabey interessirten Personen. Exempel sind hier überflüßig.

§. 7.

Sind aber die Capitalien ungleich und die Zeiten gleich, so richtet sich der Antheil am Gewinne und Verluste nach dem zugeschossenen Capitale, so daß der Antheil eines jeden Interessenten an dem vorhandenen Gewinne und Verluste von diesem Gewinne und Verluste eben der Theil seyn muß, der sein eingelegtes Capital von der Summe aller zusammengeschossenen Capitalien ist. Gesetzt, daß vier Personen, A, B, C, D in eine Mascopey geben, und zwar zu gleicher Zeit

A	—	1000 Rthlr.
B	—	780 Rthlr.
C	—	1550 Rthlr.
D	—	830 Rthlr., also
zusammen		4160 Rthlr.,

und nach einiger Zeit 1560 Rthlr. gewonnen haben, so ist

das gegebene Capital von	von der ganzen Summe
A — — —	$\frac{100}{416}$
B — — —	$\frac{39}{208}$
C — — —	$\frac{155}{416}$
D — — —	$\frac{83}{416}$, und es

erhält

erhält daher		von dem Gewinne		d. h.
A	—	$\frac{100}{416} \times 1560$ Rthl.	—	375 Rthl.
B	—	$\frac{39}{208} \times 1560$ Rthl.	—	$292\frac{1}{2}$ Rthl.
C	—	$\frac{155}{416} \times 1560$ Rthl.	—	$581\frac{1}{4}$ Rthl.
D	—	$\frac{83}{416} \times 1560$ Rthl.	—	$311\frac{1}{4}$ Rthl.
			in Summa	1560 Rthl.

§. 8.

Florencourt hat S. 247 folgendes Exempel. Es geben in eine Mascopey

A — 2000 Rthl.
B — 1000 Rthl.
C — 1500 Rthl., und gewinnen damit 1000 Rthl.

Da die ganze zusammengeschossene Summe 4500 Rthl. ist, so ist

das gegebene Capital von				von der ganzen Summe
A	—	—	—	$\frac{20}{45}$
B	—	—	—	$\frac{10}{45}$
C	—	—	—	$\frac{1}{3}$, und es

erhält daher		vom Gewinne		d. h.
A	—	$\frac{20}{45} \times 1000$ Rthl.	—	444 Rthl. 10 gr. 8 pf.
B	—	$\frac{10}{45} \times 1000$ Rthl.	—	222 Rthl. 5 gr. 4 pf.
C	—	$\frac{1}{3} \times 1000$ Rthl.	—	333 Rthl. 8 gr.
			in Summa	1000 Rthl.

So

So wie hier das Exempel gesetzt ist, läßt es sich durchaus im Kopfe ausrechnen, und es ist daher ein grosser Vortheil, sogleich in den kleinsten Zahlen zu bestimmen, was für ein Theil das Capital eines jeden von der ganzen zusammengeschossenen Summe sey.

Ist verloren worden, so bestimmt man, wie leicht einzusehen ist, auf eben die Art, wie hier der Gewinn bestimmt ist, den Verlust eines jeden Interessenten.

§. 9.

Sind die zusammengeschossenen Capitalien gleich, die Zeiten aber ungleich, so richtet sich der Antheil der Interessenten am Gewinn und Verlust nach der Grösse der Zeit, welche ein jeder sein Capital in der Mascopey gehabt hat. Treten z. B. 4 Personen, A, B, C und D zusammen, so daß zwar ein jeder gleich viel Capital giebt, C aber 3 Monat und D 5 Monat später beytreten als A und B sich vereiniget haben, so haben, wenn nach einem Jahre 800 Rthl. gewonnen oder verloren worden, gegen den Theil, den A und B davon erhalten, C zu fordern $\frac{3}{4}$ und D $\frac{7}{12}$. Es muß also der ganze Gewinn oder Verlust durch $3\frac{1}{3}$ getheilt werden, wodurch man 240 Rthl. erhält, und

es erhält	von diesen Theilen	also
A — —	1 — —	240 Rthlr
B — —	1 — —	240 Rthlr
C — —	$\frac{3}{4}$ — —	180 Rthlr
D — —	$\frac{7}{12}$ — —	140 Rthlr
	in Summa	800 Rthlr.

§. 10.

Will man von den Behauptungen, worauf die bisherigen Berechnungen sich gründen, den Grund allgemein haben, so findet man ihn in dem Satze, daß sich die Wirkungen wie die Ursachen verhalten. Die eingelegten Capitalien und die Zeit, welche dieselben stehen bleiben, sind hier die einzigen Ursachen des zu vertheilenden Gewinns und Verlustes, die in Anschlag gebracht werden können, und je grösser oder je kleiner dieselben sind, desto grösser oder kleiner muß auch ihre Wirkung, oder der Antheil am Gewinn und Verlust seyn. Nach dieser Bemerkung und den bereits betrachteten Fällen sieht man bald, wie man die Berechnung anzustellen habe, **wenn so wohl die eingelegten Capitalien als die Zeiten derselben ungleich sind.**

§. 11.

Ist dies, so ist der bequemste Weg, das verlangte zu finden, der, daß man die Einlage eines jeden Interessenten mit der Zeit, welche dieselbe steht, multiplicirt, und dann

wie

wie §. 7 und 8 verfährt. Wenn z. B. 4 Personen, A, B, C und D zusammentreten, und geben

A 1000 Rthl., und zwar sogleich
B 1500 Rthl. nach 3 Monaten,
C 2100 Rthl. nach 5 Monaten, und
D 1800 Rthl. nach 6 Monaten,

damit in einem Jahre 1000 Rthl. gewinnen, und gefragt wird, wie groß der Antheil eines jeden am Gewinne sey? so ist solches eben so viel, als ob

A 12×1000 Rthl. $=$ 12000 Rthl.
B 9×1500 Rthl. $=$ 13500 Rthl.
C 7×2100 Rthl. $=$ 14700 Rthl.
D 6×1800 Rthl. $=$ 10800 Rthl. gäbe,

und alle dieses Geld gleich lange stehen liessen. Es erhält also

	vom Gewinne	d. h.		
A —	$\frac{4}{17}$ —	235 Rthl.	7 gr.	$\frac{12}{17}$ ₰
B —	$\frac{9}{34}$ —	264 Rthl.	16 gr.	$11\frac{5}{17}$ ₰
C —	$\frac{49}{170}$ —	288 Rthl.	5 gr.	$7\frac{13}{17}$ ₰
D —	$\frac{18}{85}$ —	211 Rthl.	18 gr.	$4\frac{4}{17}$ ₰
	in Summa	1000 Rthl.		

§. 12.

Die Grössen, nach welchen bey den Aufgaben der Gewinn- und Verlustrechnung die Antheile an dem Gewinne und Verluste vestgesetzt werden, werden oft der

Fuß genannt; §. 7 sind es 1000 Rthl, 780 Rthl, 1550 Rthl, 830 Rthl, in dem Exempel des vorhergehenden §. aber 1000 Rthl auf 1 Jahr, 1500 Rthl auf 9 Monat, 2100 Rthl auf 7 Monat, und 1800 Rthl auf 6 Monat. Dieser Fuß ist entweder **einfach**, wie §. 7 und 8 und 9; oder **zusammengesetzt**, wie §. 11. Um so kurz als möglich zu rechnen, hat man vorzüglich darauf zu sehen, daß man den gegebenen Fuß durch so kleine Zahlen als möglich ausdrucke.

§. 13.

Oft ist es zur Verkürzung der Rechnung vortheilhaft, wenn man zuvörderst das pr. C. des Gewinns oder Verlustes sucht, und dann hiernach das verlangte findet. Gesetzt z. B. daß die ganze angelegte Summe 5000 Rthl, und der ganze Gewinn oder Verlust 500 Rthl wäre; so käme auf 100 Rthl 10 Rthl. Hätte nun dazu gelegt

A 1600 Rthl,
B 1200 Rthl,
C 750 Rthl, und
D 1450 Rthl, so sähe oder fände man ohne Schwierigkeit, daß empfange

A 16×10 Rthl $= 160$ Rthl
B 12×10 Rthl $= 120$ Rthl
C $7\frac{1}{2} \times 10$ Rthl $= 75$ Rthl
D $14\frac{1}{2} \times 10$ Rthl $= 145$ Rthl, und alle

also 500 Rthl.

Die

Die Gewinn- und Verlustrechnung hat noch mehr Zweige als bis jetzt betrachtet worden sind. Es giebt z. B. auch eine Gewinn- und Verlustrechnung beym Wechselgeschäfte. Die Betrachtung dieser und anderer Theile der Gewinn- und Verlustrechnung im weitläuftigsten Verstande gehört hieher nicht.

§. 14.

Eine der ersten Anwendungen der bisher erläuterten Regeln findet bey den Concursen statt, und zwar auf verschiedene Weise. Einmal kann es sich ereignen, daß unter mehrere Gläubiger, deren Forderungen zu einer Classe gehören, eine Summe vertheilt werden soll, die kleiner als ihre Forderungen zusammengenommen ist, und daß also die Frage entsteht, wie viel kann für Hundert gegeben werden? oder, wie viel bekommt ein jeder nach Maasgabe seiner Forderung? Hat z. B. ein Gläubiger A 1000 Rthlr, ein anderer B 800 Rthlr, und ein dritter C 1700 Rthlr zu fordern, und es sind nach Abzug aller Unkosten nicht mehr als 1500 Rthlr da; so werden anstatt 3500 Rthlr 1500 Rthlr vertheilt, so daß also ein jeder nur $\frac{3}{7}$ seiner Forderung erhält. In diesem Falle werden 42 Rthlr 20 gr $6\frac{6}{7}$ ₰ anstatt 100 Rthlr gegeben, und es erhält also

A statt	1000 Rthlr	nur	428 Rthlr 13 gr $8\frac{4}{7}$ ₰
B —	800 Rthlr	—	342 Rthlr 20 gr $6\frac{6}{7}$ ₰
C —	1700 Rthlr	—	728 Rthlr 13 gr $8\frac{4}{7}$ ₰

u. alle in allem anstatt 3500 Rthlr nur 1500 Rthlr. — —

Daß bey einer wirklichen Vertheilung die Brüche bey den S nicht geachtet werden, ist natürlich und bekannt; der Rechner darf sie indeß nicht sogleich aus der Acht lassen, um die Uebereinstimmung der Theile mit dem Ganzen vor Augen zu legen.

§. 15.

Ferner sind oft die angewandten Kosten nach Maasgabe dessen, was ein jeder aus der Masse empfängt, zu vertheilen. Wenn z. B. A, B und C im vorhergehenden §. als erste Gläubiger ihre Forderungen ganz erhalten könnten, so müßten sie gleichwohl die bis zur Einkunft der zu ihrer Befriedigung nöthigen Gelder angewandten Kosten tragen. Wie hoch sich dieselben nun auch belaufen mögen, so muß davon tragen

A $\frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

B $\frac{8}{35} = \frac{8}{35}$

C $\frac{17}{35} = \frac{17}{35}$, und auf eine ähnliche Art in ähnlichen Fällen. Man sieht hieraus, daß hier keine neue Regeln nöthig sind, und es wird derjenige, der das bisherige eingesehen hat, auch bey solchen Fällen keine Schwierigkeit finden, wenn die Kosten Classenweise, d. h. so wie sie zur Eintreibung des zur Befriedigung einer jeden Classe nöthigen Geldes haben gemacht werden müssen, vertheilt werden sollen.

Ein ausführliches Exempel eines Classifications-, Prioritäts- oder Locationsurtheils, das nach sächsischen Rechten eingerichtet ist, findet man aus Menkens Tract. Synopt. Proc. Jur. Comm. etc. P. II. p. 292 — 295 in Polacks Mathesi forensi S. 86 — 90.

Erb-

Erbtheilsrechnung.

§. 16.

Es finden sich oft bey Vertheilungen der Erbschaften Bedingungen, welche die Bestimmung des Theils eines jeden Erben einem ungeübten schwer machen, und die wichtigsten dieser Fälle sollen jetzt kürzlich betrachtet werden. Fälle wie folgende: Die ganze Verlassenschaft soll in 12 gleiche Theile getheilt werden, und A 5, B 4 und C 3 solcher Theile erhalten; oder: A soll von der Verlassenschaft selbst $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C $\frac{1}{6}$ bekommen; gehören hieher nicht, ein jeder sieht da von selbst, wie die Rechnung einzurichten sey.

§. 17.

Es sollen sich 3 Personen A, B und C in eine Erbschaft von 10000 Rthl. so theilen, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{2}$ und C $\frac{3}{4}$ bekommt. Wenn eine solche Bestimmung da ist, so sieht man bald, daß der Sinn derselben nicht seyn könne, daß

A — $\frac{1}{3} \times$ 10000 Rthl. $=$ 3333 Rthl. 8 gr.
B — $\frac{1}{2} \times$ 10000 Rthl. $=$ 5000 Rthl. und
C — $\frac{3}{4} \times$ 10000 Rthl. $=$ 7500 Rthl. erhalten solle,

denn sonst müßten 15833 Rthl. 8 gr. zu vertheilen gegeben seyn. Hiedurch wird weiter nichts als das

Verhältniß der Theile von A, B und C gegen einander angezeigt, und der Sinn der Aufgabe ist: Es sollen sich A, B und C in 10000 Rthl. so theilen, daß sich ihre Theile gegen einander wie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ verhalten. Bringt man nun diese Brüche auf einerley Benennungen, so erhält man anstatt derselben $\frac{4}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{9}{12}$, und anstatt des gedachten Verhältnisses die Zahlen 4, 6, 9. Man muß also die 10000 Rthl. in 19 Theile theilen, und davon A 4, B 6, C 9 geben, so daß also

A $\frac{4}{19} \times 10000$ Rthl.	= 2105 Rthl.	6 gr.	$3\frac{15}{19}$ pf.
B $\frac{6}{19} \times 10000$ Rthl.	= 3157 Rthl.	21 gr.	$5\frac{13}{19}$ pf.
C $\frac{9}{19} \times 10000$ Rthl.	= 4736 Rthl.	20 gr.	$2\frac{10}{19}$ pf.

und alle in allem — — 10000 Rthl. erhalten.

§. 18.

Wenn also eine Summe in Theile getheilt werden soll, und die Grösse dieser Theile durch Brüche bezeichnet ist, welche zusammengenommen nicht Ein Ganzes ausmachen; so muß man die Vertheilung so machen, daß der Antheil eines jeden in der ganzen zu vertheilenden Summe so enthalten ist, als der für den Antheil eines jeden gegebene Bruch in der Summe der Brüche. Das Exempel des vorhergehenden §. kann zur Erläuterung dieser Regel hinlänglich seyn.

§. 19.

Gesetzt, daß folgender Fall vorkäme: Es sollen sich 4 Brüder in eine Erbschaft von 1000 Rthlr dergestalt theilen, daß der 2te 100 Rthlr weniger bekommt als der älteste, der 3te 75 Rthlr mehr als der 2te, und der 4te 60 Rthlr mehr als der dritte; so sieht man nach einigem Nachdenken bald, daß man nur irgend einen Theil zu wissen brauche, um darauf alle übrige mit leichter Mühe bestimmen zu können. Man vergleiche daher alle zu suchende Theile gegen irgend einen derselben, z. B. gegen den ersten; so ist der Theil des

1ten = 1

2ten = 1 — 100 Rthlr

3ten = 1 — 100 Rthlr + 75 Rthlr = 1 — 25 Rthlr

4ten = 1 — 100 Rthlr + 75 Rthlr + 60 Rthlr = 1 + 35 Rthlr,

und alle 4 Theile zusammen = 4 — 90 Rthlr, d. h. der Theil des ältesten viermal genommen ist um 90 Rthlr grösser als 1000 Rthlr, indem die vestzusetzenden Theile zusammengenommen 1000 Rthlr gleich seyn sollen. Ist nun dies, so sind 1000 Rthlr + 90 Rthlr oder 1090 Rthlr das vierfache des Theils des ältesten, und sein Theil also selbst $\frac{1090}{4} = 272\frac{1}{2}$ Rthlr. Es erhält also

der älteste	—	$272\frac{1}{2}$ Rthlr	
— 2te	—	$172\frac{1}{2}$ Rthlr	
— 3te	—	$247\frac{1}{2}$ Rthlr	
— 4te	—	$307\frac{1}{2}$ Rthlr,	und alle
	also	1000 Rthlr.	

Auf eine ähnliche Art kann man sich in ähnlichen, auch noch verwickeltern Fällen helfen. Da übrigens dergleichen Fälle so häufig eben nicht vorkommen, so ist es ohnstreitig genug, die Verfahrungsart dabey an Einem Exempel gezeigt zu haben.

§. 20.

Es soll eine Erbschaft von 20000 Rthlr unter 3 Söhne und 2 Töchter dergestalt vertheilt werden, daß ein Sohn so viel als der andere, und eine Tochter auch so viel als die andere erhalten soll, der Theil eines Sohns soll aber viermal so groß seyn, als der Theil einer Tochter; es wird gefragt, wie viel so wohl ein jeder der Söhne als eine jede der Töchter erhalten müsse? Weiß man hier z. B. wie viel eine Tochter erhält, so ist alles übrige bekannt. Setzt man nun den Antheil einer Tochter 1, so erhält von den zu vertheilenden 20000 Rthlr

die älteste Tochter 1
— 2te — 1
der älteste Sohn 4
— 2te — 4
— 3te — 4, alle also zusammen den Theil

einer Tochter — 14 mal, das heißt, das ganze Erbtheil der 20000 Rthlr ist vierzehnmal so groß, als der Antheil einer Tochter. Es erhält also eine Tochter

$\frac{20000 \text{ Rthlr}}{14} = \frac{10000 \text{ Rthlr}}{7} = 1428$ Rthlr 13 Gr $8\frac{4}{7}$ Pf

und

und ein Sohn 5714 Rthl. 6 gr. $10\frac{2}{7}$ pf., als das 4fache davon. Da also bekommen soll

die älteste Tochter	1428 Rthl.	13 gr.	$8\frac{4}{7}$ pf.
— 2te —	1428 Rthl.	13 gr.	$8\frac{4}{7}$ pf.
der älteste Sohn	5714 Rthl.	6 gr.	$10\frac{2}{7}$ pf.
— 2te —	5714 Rthl.	6 gr.	$10\frac{2}{7}$ pf.
— 3te —	5714 Rthl.	6 gr.	$10\frac{2}{7}$ pf., so erhalten

alle insgesammt 20000 Rthl., und die herausgebrachte Bestimmung ist die wahre.

§. 21.

Ein Vater stirbt, und hinterläßt am Vermögen 22000 Rthl. Nach dem Testamente soll seine Frau, welche schwanger ist, wenn sie einen Sohn zur Welt bringt, von dem ganzen Vermögen $\frac{1}{3}$, und der Sohn $\frac{2}{3}$; wenn sie aber mit einer Tochter niederkömmt $\frac{3}{5}$ und die Tochter $\frac{2}{5}$ erhalten. Es fügt sich aber, daß die Mutter mit einem Sohne und einer Tochter zugleich niederkommt. Es ist die Frage, wie viel jetzt ein jeder von dem hinterlassenen Vermögen bekommen muß, wenn des Vaters Wille erfüllt werden soll. Betrachtet man diese Aufgabe genau, so findet man bald, daß der Sohn noch einmal so viel als die Mutter und die Tochter nur $\frac{2}{3}$ des Antheils der Mutter bekommen soll. So oft daher die Mutter 1 erhält, bekommt der Sohn 2, und die Tocher $\frac{2}{3}$; oder, so oft die Mutter 3 erhält, bekommt der Sohn 6 und die Tochter 2.

Man hat also nur nöthig, das ganze Vermögen in 11 Theile zu theilen, und der Mutter 3, dem Sohne 6, und der Tochter 2 solcher Theile zu geben. Es erhält also die Mutter 6000 Rthlr, der Sohn 12000 Rthlr und die Tochter endlich 4000 Rthlr, welche Summen zusammen 22000 Rthlr ausmachen.

Man findet diese Aufgabe häufig in algebraischen Schriften in dem Capitel von den einfachen arithmetischen Aufgaben. Sie steht z. B. in Tempelhofs Anfangsgründen der Analysis endlicher Grössen (Berlin 1769) §. 271 u. f., und in Langsdorfs Fortsetzung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis endlicher Grössen, S. 367 u. f. Ihre Auflösung ist sehr leicht, und bedarf an und für sich der Hülfe der Algebra nicht.

§. 22.

Wenn das sämmtliche hinterlassene Vermögen, in dem Falle, daß die erbenden Kinder noch minderjährig sind, so lange ungetheilt bleibt, bis das älteste großjährig geworden, und unterdeß von den Interessen die Erziehungskosten bestritten und das übrige zum Capitale geschlagen wird; ferner das älteste Kind nun seinen Theil erhalten, und mit dem übrigen eben so als vorher mit dem ganzen Vermögen bis zur Großjährigkeit des zweyten Kindes u. s. f. verfahren werden soll; so ist das ein Fall, dessen Berechnung zwar weitläuftig aber nicht schwer ist, und daher auch nur berührt werden darf.

Repar-

Repartitions-
und
Contributionsrechnung.

§. 23.

Eine sehr weitläuftige Abhandlung dieser Rechnung findet man im 2ten Stücke der Ungerischen Beyträge zur Mathesi forensi S. 1 bis 78. Wenn der Fuß, nach welchem die Repartition gemacht, oder die Contribution entrichtet werden soll, erst vestgesetzt ist, so unterscheidet sich das übrige Verfahren bey dieser Rechnung von dem Verfahren bey der Gewinn- und Verlustrechnung, nachdem auch da der Fuß vestgesetzt ist, nicht. Von der Art und Weise bey Repartitionen und Contributionen den Fuß vestzusetzen, braucht daher hier nur geredet zu werden, und das kann auf eine viel kürzere Art geschehen.

§. 24.

Der Repartitions- und Contributionsfuß ist entweder einfach, oder zusammengesetzt. Wenn z. B. die Vermessung eines ganzen Amtes zu 200 Rthl. verdungen worden ist, und die Feldmark

des Dorfes A hält 1000 Morgen
— — B — 1200 —
— — C — 1700 —
— — D — 1400 —; so ist, wenn

bey der Vertheilung der 200 Rthlr Unkosten auf die Morgenzahl allein gesehen werden muß, der Repartitionsfuß ein einfacher Fuß: wenn aber wegen der Lage und der Beschaffenheit der Felder nicht bloß auf die Morgenzahl, sondern auch auf die zur Vermessung nöthige Zeit gesehen werden muß; so wird derselbe dadurch zusammengesetzt. Bey dem berührten einfachen Fusse müßten die Beyträge von A, B, C und D sich gegen einander verhalten, wie 10, 12, 17, 14 und also

A geben $\frac{10}{53} \times 200$ Rthlr
B — $\frac{12}{53} \times 200$ Rthlr
C — $\frac{17}{53} \times 200$ Rthlr
D — $\frac{14}{53} \times 200$ Rthlr. Wären aber auf

die Vermessung

der 1000 Morgen verwandt 10 Tage
— 1200 — — — 15 —
— 1700 — — — 14 —
— 1400 — — — 8 —, und

müßte also auch hierauf gesehen werden; so wäre der zusammengesetzte Fuß

für

für das Dorf A = 10. 1000 = 10. 10

— — — B = 15. 1200 = 15. 12

— — — C = 14. 1700 = 14. 17

— — — D = 8. 1400 = 8. 14, und es

müßte also beytragen

das Dorf A = $\frac{10}{63}$ × 200 Rthlr.

— — B = $\frac{2}{7}$ × 200 Rthlr.

— — C = $\frac{17}{45}$ × 200 Rthlr.

— — D = $\frac{8}{45}$ × 200 Rthlr.

§. 25.

Diejenigen Dinge, welche bey der Bestimmung des Repartitions- und Contributionsfusses in Anschlag gebracht werden dürfen, müssen als wahre Ursachen dessen, was repartirt oder contribuirt werden soll, angesehen werden können. Ob dies sey oder nicht? und wenn es nicht gerade zu statt findet, in wiefern es sey? hierüber hat man vor allen Dingen nachzudenken und zu entscheiden. Zur Ertheilung besonderer Regeln hiezu wird sich indeß in der Folge ein bequemerer Ort finden, daher es gegenwärtig an dem allgemeinen genug seyn mag.

Haverenrechnung.

§. 26.

Das Wort Haveren hat mancherley Bedeutungen. Hier bedeutet es ausserordentliche Unkosten für ein Schiff und seine Ladung, und den Schaden an den Waaren auf demselben, welche dem einen Theile von den Eigenthümern der übrigen vergütet werden. Die Haverenrechnung betrifft also die so genannten grossen oder gemeinen Haverenen, wozu die Sachen, welche den Seeräubern für Loskaufung des Schiffes und der Waaren gegeben werden, die in das Meer geworfene Waaren, die zerrissene oder abgehauene Taue oder Maste, die zum gemeinen Besten des Schiffes und der Waaren im Stiche gelassene Anker und andere Effecten, der den in dem Schiffe zurückgebliebenen Waaren bey dem Auswerfen ins Meer zugefügte Schade, die Besorgung und Verpflegung der bey der Vertheidigung des Schiffes verwundeten Matrosen u. d. gl. gerechnet werden.

§. 27.

Die Regel, nach welcher diese Haverenen berechnet werden müssen, ist: Es müssen dieselben so wohl auf das Schiff als auf die Waaren auf dem Schiffe, und zwar nach Verhältniß des Werthes der Waaren und des Schiffes fallen. Es bedarf diese Regel keines weitern Beweises, da sie von selbst einleuchtet; man sieht aber bey Ueberdenkung derselben auch sogleich, daß die Haverenrechnung mit der Gewinn- und Verlustrechnung sehr vieles gemein hat.

§. 28.

Es kommt bey einer Haverenberechnung auf 3 Stücke an: erstlich auf die Berechnung des Capitals, welches die Haveren tragen muß, zweytens auf die Bestimmung der Haveren, und endlich drittens auf die Vertheilung der Haverey. Ein Exempel kann hinreichen, die dabey zu befolgende Art vor Augen zu legen. Es sey solches das in dem Versuche über Assecuranzen, Havereyen und Bodmereyen insgemein, und über verschiedene wirkliche Vorfälle und deren Berechnung insbesondere (Hamburg 1753) S. 220 u. f. befindliche.

1. Berechnung des Capitals.

P = = e D = = z 3 Cassen mit 165 Bouteillen Oehl a 1 Rthl. ——	165 Rthl.
3 dito mit 165 Bouteillen Wein a 8 ß.	82 Rthl. 8 ß
3 dito mit Rosinen und Käse ——	50 Rthl. —
	297 Rthl. 8 ß
ab Fracht, Kaplaken, Zollunkosten	60 Rthl. 8 ß
bleibt — — —	237 Rthl.

Cc P = = e

P = = e B = = e 282 Orhoft Wein, ab
10 pr. C. Leccage, restiren 254 Orhoft
a 26 Rℓ ——————— 19812 ℳ

50 Stück Picardan, ab 10 pr. C.
restiren 45 Stück a 26 Rℓ — 3510 ℳ

20 Stück Brandtwein 1397 Quart, ab
10 pr. C. restiren 1257 Quart a
26 Rℓ 30 Quart ———— 3268 ℳ 3 ß

26590 ℳ 3 ß.

ab Fracht, Kaplaken etc. — 5400 ℳ
Zoll und Accis ——— 700 ℳ
Everführer, Arbeiter, Courtage 480 ℳ 3 ß

6580 ℳ 3 ß

bleibt — — 20010 ℳ.

P = = e M = = e 22 Ballen Amandeln,
netto 11034 ℔, deren theils beschädiget,
belaufen mit 13 Monat Rabatt 3413 ℳ 8 ß
10 Cassen mit 720 Kisten Brunellen 1288 ℳ 9 ß
41 Fäßgen kleine Rosinen ——— 620 ℳ

5322 ℳ 1 ß

ab Fracht, Kaplaken 557 ℳ 1 ß
Zollunkosten, Courtage 186 ℳ

743 ℳ 1 ß

bleibt — — 4579 ℳ.

P = = e

P = = e H = = s 2 Kasten mit Wein und Kleinigkeiten, kosten laut seiner Rechnung ————	60 Rthl. 15 ß	
ab für Fracht ————	7 Rthl. 15 ß	
		53 Rthl.
P = = e D = = t 1 Casse und 2 Fäßgen	350 Rthl.	
ab Fracht, Zollunkosten ————	38 Rthl.	
		312 Rthl.
J = = s C = = t 88 Cassen Kaufmanschaft, abgezogen Fracht, Zollunkosten		600 Rthl.
H = = ch M = = s 9 Ballen Provence Amandeln 4280 ℔ a $34\frac{1}{2}$ Rthl., mit 13 Monat Rabatt	1357 Rthl.	
6 Säcke Gallen a 300 Rthl. ————	1800 Rthl.	
2 Fässer Spangrün 950 ℔ ————	950 Rthl.	
	4107 Rthl.	
ab Fracht und Unkosten ————	307	
bleibt — — —		3800 Rthl.
H = = ch J = = ph M = = ck 19 Ballen Provence Amandeln 9400 ℔ a 37 Rthl. 8 ß —	2982 Rthl.	
9 dito Valence dito 4500 ℔ a 37 Rthl. —	1531 Rthl.	
8 Säcke Gallen ————	2400 Rthl.	
2 Fässer Spangrün 1000 ℔ ————	1000 Rthl.	
	7913 Rthl.	
ab Fracht und Unkosten ————	683 Rthl.	
bleibt — — —		7230 Rthl.

A⸗⸗i B⸗⸗n 6 Fässer Spangrün,
wiegen 2050 ℔ — — — 2050 Rthlr.
ab Fracht, Zoll, Unkosten — — 120 Rthlr.

1930 Rthlr.

Das Schiff und die Fracht, Volkshauer
abgezogen — — — — — 6000 Rthlr.

44751 Rthlr.

2. Berechnung der Haverey.

Für Lootsgeld und Ancorage in Kingsale	2 ℔ St.	3	10
— ein Protest — — — —		18	6
— Lootsgeld und Havenunkosten in Falmouth — — —	1 —	6	2
— Feuergeld in allem — —	4 —	18	8
— Lootsgeld und Unkosten in Duyns	3 —	5	6
	12 ℔ St.	12	8

thun a 16¾ Rthlr. in Courant — — 211 Rthlr. 10 ß
Heiligländer Lootsgeld laut Quitung 33 Rthlr.
Löcher in das Schiff gekappet, damit das Wasser hinunter laufen könnte, ist der Schade — — — 12 Rthlr.

Für folgende Waaren, so der Schiffer über Bord geworfen, ist zu bezahlen

220 Oxhöft Frontignac a 26 Rℓ an
P = = e B = = e — — — 1716 ℛ
ab 10 pr. C. Leccage und Accise — 196 ℛ

1520 ℛ.

1 Casse P = = e H = = ß gehörig — — 60 ℛ 15 ß

10 Ballen Amandeln für P. M = = e
netto 5256 ℔ a $34\frac{1}{2}$ ℛ — 1813 ℛ 5 ß
ab 13 Monat Rabatt — 144 ℛ 10 ß

1668 ℛ 11 ß

3 Ballen Provence Amandeln für H = = ch
N = = s 1920 ℔ a $34\frac{1}{2}$ ℛ — 662 ℛ 6 ß
ab 13 Monatt Rabatt — — 52 ℛ 13 ß

609 ℛ 9 ß

5 Ballen Provence Amandeln für H. L.
M = = ck netto 2415 ℔ a $34\frac{1}{2}$ ℛ — 833 ℛ 3 ß
2 Ballen Valence Amandeln 1039 ℔
a 37 ℛ — — — — 384 ℛ 7 ß

1120 ℛ 8 ß

Für des Volks Aussage mit Dolmetschen 8 ℛ
Für Haverey anzudienen und Facturen
zu holen — — — 4 ℛ 8 ß
Für Provision 1 pro mille — 44 ℛ 12 ß
An die Armen — — — 2 ℛ 1 ß

5295 ℛ 10 ß.

3. Theilung.

Die 5295 ℛ 10 ß für Haverey=Grosse, getheilt über 44751 ℛ Capital, kommen für jede 100 ℛ zu bezahlen — — — 11 ℛ 13 -- 4

P = = e D = = z	237 ℛ	28 ℛ	1
P = . e B = = e	20010	2366	14
P = = e M = = e	4579	541	14
P = = e H = = ß	53	6	4
Pe = = D = = t	312	36	15
J = = s C = = t	600	71	—
H = = ch. N = = s	3800	449	11
H = = ch L = = f M = = ck	7230	855	9
A = = i B = = n	1930	228	6
Das Schiff Matheus	6000	710	—
	44751 ℛ	5295 ℛ	10 ß.

§. 29.

Bey der Verfertigung einer Dispache, (denn so nennt man die Berechnung und Repartition der Haverey, davon der vorhergehende §. ein Beyspiel enthält, so wie derjenige, der dergleichen anzufertigen gesetzt ist, Dispacheur heißt, und dafür Provision z. E. 1 pro mille erhält,) muß ausgemacht seyn, theils was und wie dasselbe zur Haverey contribuiren müsse, und was nicht? theils, welche Dinge Entschädigung erhalten, und welche nicht? und theils auf was für eine Art die Taxation der contribuiren=

den

den Dinge vorgenommen werden müsse? Hiezu dienen die Haverey-Ordnungen, wovon man die Hamburgische so wohl als die Amsterdammer in Gottfr. Christ. Bohns wohlerfahrnen Kaufmanne (Hamburg 1762) unter den Artikeln Hamburg und Amsterdam findet.

§. 30.

Es müssen, um einiges anzuführen, zu der Haverey so wohl die geworfenen und bey der Werfung beschädigten als auch die unbeschädigten Güter, so wie auch das Schiff, und zwar nach ihrem Werthe contribuiren, so daß also auf die Schwere derselben nicht gesehen wird. Frey sind hingegen die zur Reise mitgenommene Victualien, die Kriegsmunition, der Matrosen und anderer Leute Kleidung u. d. gl. Entschädiget werden von den geworfenen Sachen z. B. diejenigen nicht, die auf das Verdeck oder in das Schiffsboth geladen gewesen, wovon der Schiffer allein den Verlust tragen muß. Die Taxation der Güter wird bald nach dem Einkaufe, bald nach dem Verkaufe eingerichtet, bald werden die geworfenen Güter nach dem Einkaufe und die erhaltenen nach dem Verkaufe geschätzt, und oft bestimmt auch die Grösse des schon zurückgelegten Weges, wie die Taxation vorgenommen werden soll. Doch ausführlich hievon zu reden ist hier der Ort nicht; man muß dabey jedesmal die Gewohnheiten und die Haverey-Ordnungen selbst zu Rathe ziehen.

Vermischungsrechnung.

§. 31.

Von dieser Rechnung dürfen höchstens ein Paar Beyspiele angeführt werden, indem das dabey nöthige Verfahren ganz mit der Art der Gewinn- und Verlustrechnung übereinstimmt. Die Hauptaufgaben dieser Rechnung verlangen, daß man, wenn eine aus der Vermischung mehrerer Ingredienzen entstandene Masse gegeben ist, bestimme, wie man eine andere Masse von gleicher Art hervorzubringen im Stande sey. Man weiß z. B. daß zu 21 Unzen Pulver 1 ℔ Salpeter, 3 Unzen Kohlen und 2 Unzen Schwefel genommen werden, und es wird gefragt, wie viel man von jeder dieser Ingredienzen nöthig habe, um 1000 ℔ Pulver zu erhalten? Man sieht hier bald, daß man nur 1000 ℔ nach und nach mit $\frac{16}{21}$, $\frac{3}{21}$, und $\frac{2}{21}$ zu multipliciren habe, um die zu nehmende Mengen des Salpeters, der Kohlen und des Schwefels zu finden. Nun ist

$$1000\ ℔ \times \tfrac{16}{21} = 1000\ ℔ \times (\tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{7}) = 2000\ ℔ \times (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{7})$$

$$1000\ ℔ \times \tfrac{3}{21} = 1000\ ℔ \times \tfrac{1}{7}$$

$$1000\ ℔ \times \tfrac{2}{21} = 2000\ ℔ \times \tfrac{1}{21} = 2000\ ℔ \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{7},$$

und man muß also nehmen

$$\frac{2000 \text{ ℔} \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7})}{}$$

$$\frac{666\frac{2}{3}}{95\frac{5}{21}}$$

$761\frac{12}{21}$ ℔ Salpeter.

$$\frac{1000 \text{ ℔} \times \frac{1}{7}}{}$$

$142\frac{6}{7}$ ℔ Kohlen.

$$\frac{2000 \text{ ℔} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{7}}{}$$

$$\frac{666\frac{2}{3}}{}$$

$95\frac{5}{21}$ ℔ Schwefel.

§. 32.

Gesetzt daß man wissen will, wie viel von dem einen oder andern Ingredienz in einer schon vorhandenen Masse steckt, so kann man, wie solches bald in die Augen fällt, das verlangte nach denselben Regeln finden. Würde z. B. gefragt, wie viel Salpeter in 1000 ℔ Pulver enthalten sind, wenn zu 21 Unzen Pulver 1 ℔ Salpeter, 3 Unzen Kohlen und 2 Unzen Schwefel genommen werden? so wäre natürlicher Weise die Antwort:

$$1000 \text{ ℔} \times \frac{16}{21} = 761\frac{12}{21} \text{ ℔}.$$

Hieher gehören auch die Fragen, wie viel fein Gold oder fein Silber in dieser oder jenen Masse enthalten sey. Z. B. Wie viel fein Gold enthalten 8 ℳ 22karatiges Gold? Die Antwort ist

$$8\ ℳ \times \tfrac{22}{24} = 8\ ℳ \times \tfrac{11}{12} = 7\tfrac{1}{3}\ ℳ.$$

Wie viel enthalten 27 ℳ 14½löthig Silber fein? Die Antwort ist

$$27\ ℳ \times \frac{14\frac{1}{2}}{16} = 27\ ℳ \times \tfrac{29}{32} = 24\tfrac{15}{32}\ ℳ.$$

Es ist bekannt, was man unter 23, 22 u. s. w. karatigen Golde, und unter 15löthigen, 14löthigen Silber u. s. w. versteht. Man zeigt durch diese Benennungen an, wie viel Karat fein eine Mark Goldes, und wie viel Loth fein eine Mark Silbers enthalte. Beym Zinne bestimmt man den Grad der Güte etwas anders. Man giebt hier nemlich an, wie viel ℔ rein Zinn mit einem ℔ Bley zusammen geschmolzen ist, und nennt die Masse so viel pfündig, als die ganze zusammen geschmolzene Masse hält. Sechspfündig Zinn ist daher z. B. was auf 5 ℔ rein Zinn 1 ℔ Zusatz hat. Das 6pfündige Zinn enthält daher $\frac{5}{6}$, das 10pfündige $\frac{9}{10}$ fein Zinn u. s. w.

Die Aufgaben dieses §. kommen oft umgekehrt vor; z. B. Wie viel löthig ist das Silber, wovon 53 ℳ 46½ ℳ fein enthalten? man will in diesem Falle wissen, wie viel eine ℳ fein Silber enthalte. Diese Aufgaben bedürfen keiner weitern Erörterung. Wird von einer Masse Zinn zu wissen verlangt, wie vielpfündig sie sey; so muß bestimmt werden, wie viel ℔ Zinn auf ein ℔ Bley darin sind. Nach dieser Anmerkung sind auch diese Aufgaben leicht. Hätten z. B. 100 ℔ Zinn 16 ℔ Bley, so sind in dieser Masse 84 ℔ rein Zinn, und auf 1 ℔ Bley also $\frac{84}{16}$ ℔ rein Zinn, d. h. $5\frac{1}{4}$ ℔ genommen worden. Es ist also dieses Zinn $6\frac{1}{4}$ pfündig.

§. 33.

§. 33.

Es schmelzt jemand verschiedene Arten Silber zusammen, nemlich

8 ℔ 12löthiges,

9 ℔ 10löthiges, und

3 ℔ 8löthiges; es wird gefragt, wie fein die ℔ von der daraus entstandenen Masse seyn werde? Man findet hier bald

a wie schwer die neue Masse ist, nemlich 20 ℔,

b wie viel fein Silber darin stecke, nemlich

1. 8×12 Loth $= 96$ Lt.

2. 9×10 — $= 90$ Lt.

3. 3×8 — $= 24$ Lt., also

überhaupt 210 Lt. Eine ℔ enthält also $\frac{210}{20} = 10\frac{1}{2}$ Lt. fein Silber. Aus diesem einen Exempel aber sieht man auch hinlänglich, wie man bey allen andern ähnlichen zu verfahren habe.

§. 34.

Anstatt der Dinge, die in den betrachteten Exempeln zu einem Ganzen verbunden wurden, lassen sich eine grosse Menge anderer Sachen setzen, und die Vermischungsrechnung begreift daher eine ausserordentliche Menge von Aufgaben, und ist, ihrer Leichtigkeit ohnerachtet, eine sehr brauchbare Rechnung.

Alli-

Alligationsrechnung.

§. 35.

Die Alligationsrechnung ist von der Vermischungsrechnung darin unterschieden, daß in ihr aus den dazu nöthigen Stücken der Vermischungsfuß zu bestimmen gelehrt wird. Es hat jemand 8 und 11löthiges Silber vorräthig, und will daraus 10löthiges zusammenschmelzen. Wie viel muß er, um solches zu erhalten, so wohl von dem 8 als von dem 11löthigen Silber nehmen? Diese Frage ist eine Frage der Alligationsrechnung, und man sieht daraus die Richtigkeit der gegebenen Bestimmung derselben. Auch diese Rechnung ist sehr oft zu gebrauchen, und verdient daher nunmehr betrachtet zu werden.

§. 36.

Es sind entweder zwey Dinge nur, oder es sind mehrere zusammen zu setzen. Jener Fall soll zuerst betrachtet werden. Die Masse, welche aus den zusammen zu setzenden Dingen entstehen soll, muß zwischen beyde fallen, und kann daher das **Mittel** genannt werden, so wie von den beyden gegebenen Dingen das eine das **schlechtere** und das andere das **bessere** heissen kann.

§. 37.

§. 37.

Was dem schlechtern fehlt, muß durch das bessere ersetzt, und was das bessere zu viel hat, durch das schlechtere hinweggeschaft werden. Der Vermischungsfuß wird also durch die Unterschiede zwischen dem Mittel und dem bessern und schlechtern vestgesetzt, so daß diese Unterschiede in umgekehrter Ordnung genommen werden. Wollte also jemand aus 8 und 11löthigen Silber 10löthiges schmelzen, so wären die gedachten Unterschiede 2 und 1, und es müßte also 2mal so viel von dem 11löthigen als von dem 8löthigen genommen werden.

§. 38.

Der Beweis der Behauptung des vorhergehenden §. gründet sich auf den Satz: Wenn von 3 Grössen die erste und dritte und der Unterschied zwischen der ersten und mitlern und der Unterschied zwischen der mitlern und der dritten gegeben sind, so ist die mitlere gleich der Summe der Producte, aus der ersten Grösse in den Unterschied der mitlern, und der dritten und aus der dritten Grösse in den Unterschied der ersten und mitlern, durch die Summe beyder Unterschiede dividirt. Ist z. B. die 1te Grösse 10, die dritte 15, der Unterschied der 1ten und mitlern 3, und der Unterschied der mitlern und dritten 2, so ist die mitlere =

$$\frac{10 \times 2 + 15 \times 3}{3 + 2} = \frac{65}{5} = 13.$$

§. 39.

§. 39.

Will man die Probe machen, so setze man nach dem gefundenen Fusse eine Masse zusammen, und erforsche darauf ihren Werth. Nimmt man z. B. 2 Mark 11löthiges Silber und 1 Mark 8löthiges, so erhält man daraus 3 Mark, die insgesamt 30 Loth fein Silber enthalten, und also 10löthig sind.

§. 40.

Bey der Bestimmung des Vermischungsfusses des Zinns ist wegen der Art, die Güte des Zinns anzuzeigen, das daher nothwendige nicht aus der Acht zu lassen. Ein Beyspiel mag das hier zu beobachtende Verfahren lehren. Es hat jemand 9 und 5pfündiges Zinn, und will daraus 6pfündiges schmelzen. In welchem Verhältnisse muß er dazu von seinem Vorrathe nehmen? Hier ist

die Güte des 9pfündigen Zinns $= \frac{8}{9}$
— — 5 — — $= \frac{4}{5}$
— — 6 — — $= \frac{5}{6}$; oder es

verhalten sich die verschiedenen Werthe gegen einander wie $\frac{8}{9}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, oder $\frac{80}{90}$, $\frac{72}{90}$, $\frac{75}{90}$, oder 80, 72, 75. Der Vermischungsfuß ist also 3, 5, so daß 3 Theile 9pfündiges und 5 Theile 5pfündiges Zinn genommen werden müssen.

§. 41.

Wenn mehrere Dinge als zwey (s. §. 36) zu einer Masse zu vereinigen sind, und der Vermischungsfuß be-

stimmt

stimmt werden soll; so kann man zuerst zwischen den beyden von den zu vereinigenden Dingen, zwischen welche das verlangte Mittel nicht fällt, willkührlich eine Mittelmasse annehmen, und dann zwischen dieser und dem noch übrigen abermals das Mittel suchen. Hat z. B. jemand 3 Arten Silber 14löthiges, 11löthiges und 5löthiges, und will daraus 8 löthiges schmelzen; so fällt das verlangte Mittel zwischen 11 und 5, und man sucht also zuvörderst zwischen dem 14 und 11löthigen Silber ein Mittel. Man nimmt, so wie es die Umstände verlangen, von diesen beyden Arten Silber eine Quantität, und macht daraus eine Masse, deren Gehalt man darauf bestimmt. Man nimmt z. B. 3 ℔ 14löthiges und 2 ℔ 11löthiges Silber; diese geben 5 ℔ $\frac{64}{5}$, d. h. $12\frac{4}{5}$löthiges Silber. Nun ist der Vermischungsfuß von $12\frac{4}{5}$ und 5löthigen Silber zu 8löthigen zu finden. Dieser ist 3, $4\frac{4}{5}$, so daß man 3 Theile $12\frac{4}{5}$löthiges und $4\frac{4}{5}$ Theile 5löthiges nimmt. Anstatt 3 Theile $12\frac{4}{5}$ löthiges Silber aber zu nehmen nimmt man nach dem vorhergehenden Fusse 3, 2, 14löthiges und 11löthiges Silber, d. h. $1\frac{4}{5}$ 14löthiges und $1\frac{1}{5}$ 11löthiges. Es ist also der ganze Vermischungsfuß

$$\left.\begin{array}{ll} 1\frac{4}{5} & \text{14löthiges} \\ 1\frac{1}{5} & \text{11löthiges} \\ 4\frac{4}{5} & \text{5löthiges} \end{array}\right\} \text{Silber, oder}$$

3 Theile

3	Theile	14löthiges	Silber.
2	Theile	11löthiges	
8	Theile	5löthiges	

§. 42.

Will man sich von der Richtigkeit der Ausrechnung des vorhergehenden §. überzeugen; so rechne man

3 ℔	14löthig Silber enthalten	42	Loth fein		
2 —	11 — — — —	22	— —		
8 —	5 — — — —	40	— —, also		

die daraus entstandenen 13 ℔ — 104 Loth fein, und die ℔ von dieser Masse ist also $\frac{104}{13}$ d. h. 8löthig.

§. 43.

Sollte hingegen aus den §. 41 genannten Arten Silbers $12\frac{1}{2}$löthiges Silber geschmolzen werden, so müßte man das erste Mittel zwischen dem 11löthigen und 5löthigen Silber suchen. Es sey der Vermischungsfuß dazu 5, 4; so enthalten

5 ℔ 11löthiges Silber 55 Loth fein

4 — 5 — — 20 — — und die

daraus mögliche 9 ℔ also 75 Loth fein, so daß man also $8\frac{1}{3}$löthiges Silber erhält. Der Vermischungsfuß dieses Silbers und des 14löthigen zu $12\frac{1}{2}$löthigen ist nun $1\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{6}$, oder 9, 25, und da nun 9 nach dem Fusse 5, 4 getheilt

werden

werden muß, und dadurch die Theile 5 und 4 entstehen, so ist der ganze Vermischungsfuß

25	Theile	14löthiges			
5	—	11	—	}	Silber.
4	—	5	—		

Da

25	℔	14löthiges	Silber	enthalten			350	Loth	fein
5	—	11	—	—	—		55	—	—
4	—	5	—	—	—		20	—	—

also die ganze daraus mögliche Masse von 34 ℔ 425; so erhält man nach dem berechneten Fusse $\frac{425}{34}$ oder $12\frac{1}{2}$löthiges Silber, welches verlangt wurde.

§. 44.

Wenn man den Vermischungsfuß des willkührlich anzunehmenden Mittels 1 zu 1 annimmt, so wird dadurch die Rechnung um etwas erleichtert. Es geschehe solches z. B. in dem Exempel §. 41, so erhält man aus

1 ℔	14löthiges	}	Silber
1 —	11 — —		
2 ℔	$12\frac{1}{2}$ löthiges.		

Der Vermischungsfuß von $12\frac{1}{2}$ löthigen und 5löthigen Silber zu 8löthigen aber ist 3, $4\frac{1}{2}$ oder 6, 9 oder 2, 3. Der gesuchte Vermischungsfuß also ist

1 Theil 14löthiges }
1 — 11 — — } Silber.
3 — 5 — — }

Es enthält

1 ℔ 14löthiges Silber 14 Loth fein
1 — 11 — — — 11 — —
3 — 5 — — — 15 — —, und die daraus

möglichen 5 ℔ also 40 Loth fein, so daß der gefundene Vermischungsfuß 8löthiges Silber giebt.

Die gedachte Erleichterung besteht darin, daß man die eine Zahl des erhaltenen Fusses hier nur durch 2 zu theilen hat.

§. 45.

Man lernt durch eine aufmerksame Betrachtung des bisherigen bald, daß nur in dem Falle, wenn zwey Dinge zu einem dritten zu vermischen sind, durch die Rechnung ein durchaus bestimmter Fuß herausgebracht werden könne. So bald die Anzahl der zusammen zu setzenden Dinge drey ist, so lassen sich mehrere Antworten auf die vorgelegte Frage finden, die alle dem verlangten ein Genüge thun. Noch mehr findet dies statt, wenn mehr als drey Dinge zu einer Masse vermischt werden sollen.

§. 46.

Die Alligationsrechnung muß oft mit der Vermischungsrechnung in Verbindung angewandt werden. Es hat

hat z. B. jemand 15löthiges und 12löthiges Silber, und will daraus 40 ℔ 14löthiges zusammenschmelzen. Es wird gefragt, wie viel er von jeder Sorte nehmen müsse? Der Vermischungsfuß ist hier das erste, was gesucht werden muß, und im gegenwärtigen Falle 2, 1. Hat man ihn gefunden, so ist das übrige bekannt. Es muß z. B. in dem Exempel genommen werden

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3} \times 40 \text{ ℔} = 26\frac{2}{3} \text{ ℔ 15löthiges} \\ \frac{1}{3} \times 40 \text{ ℔} = 13\frac{1}{3} \text{ ℔ 12löthiges} \end{array}\right\} \text{Silber}$$

Die Probe macht man hier ebenfalls so, daß man sagt. Es enthalten

$26\frac{2}{3}$ ℔ 15löthiges Silber 400 Loth fein
$13\frac{1}{3}$ — 12 — — 160 — —, also

die daraus entstandenen 40 ℔ 560 Loth fein, so daß also diese Masse 14löthig ist.

Remißionsrechnung.

§. 47.

Es kann sich ereignen, daß von den verabredeten Pachtgeldern oder andern vestgesetzten Abgaben gewisse Umstände, bey den Pachtgeldern z. B. Hagelschaden, Miswachs u. d. gl. eine Erlassung nothwendig machen. Zur Vestsetzung dieser unter gewissen Umständen zu ertheilenden Remißion sind verschiedene Berechnungen nöthig, und die Art und Weise derselben wird in der **Remißionsrechnung** erklärt.

§. 48.

Wenn Remißion ertheilet werden soll, so muß ein **wirklicher** Schade an denjenigen Dingen vorhergegangen seyn, woraus dasjenige erhalten wird, an welchem man die Remißion fordert, und dieser Schade ist vor allen Dingen **gehörig** zu bestimmen. Von der Remißionsrechnung bey Fruchtschaden hauptsächlich zu reden, so muß dabey jedesmal erst ausgemacht seyn, wie hoch sich der erlittene Schade belaufe, d. h. was für ein Theil von dem **ganzen Ertrage** er sey?

§. 49.

Der ganze Ertrag ist hier offenbar der Nutzen, der aus dem Winterfelde, Sommerfelde und Brachfelde gezogen

zogen werden kann, oder in guten Jahren gezogen wird, und nach welchem die Abgaben eingerichtet sind. Hiergegen muß also jedesmal der erlittene Schade, er mag nun nur das eine oder das andere Feld, oder alle Felder zugleich betreffen, gehalten werden.

§. 50.

Bey der Schätzung des Schadens kann, wenn dieselbe von mehrern Aestimatoren vorgenommen wird, sich ereignen, daß derselbe verschiedentlich angegeben wird. In diesem Falle muß man den Durchschnitt aller Schätzungen suchen, und das Resultat als den wahren Schaden betrachten. Würde z. B. ein Schade von dem einen $\frac{1}{4}$, von dem andern auch $\frac{1}{4}$, von dem dritten aber $\frac{1}{3}$ geschätzt, so wäre das Mittel aller dieser Schätzungen $\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{3} = \frac{10}{12 \times 3} = \frac{5}{18}$, und dieser Schade wäre also in Anschlag zu bringen.

§. 51.

Gesetzt nun, daß das Land von einem Gute halte,

an Winterfeld 300 Morgen, und ein Morgen 6 Rthlr bringe
— Sommerfeld 200 — — — — 4 — —
— Brachfeld 150 — — — — 2 — —;

so ist der ganze Ertrag dieses Gutes in Ansehung der Länderey

von dem	Winterfelde	1800 Rthl.
— —	Sommerfelde	800 —
— —	Brachfelde	300 —, und
	also überhaupt	2900 Rthl.

Nun entstehe ein Schade durch alle 3 Felder, und selbiger werde von drey Aestimatoren geschätzt

	von 1ten	2ten	3ten
im Winterfelde	450 Rthl.,	450 Rthl.,	600 Rthl.
— Sommerfelde	400 Rthl.,	264 Rthl.,	350 Rthl.
— Brachfelde	300 Rthl.,	300 Rthl.,	300 Rthl.; so

ist der Schade, der in Anschlag gebracht werden kann,

im Winterfelde	$\frac{1500}{3}$ Rthl.	=	500 Rthl.
— Sommerfelde	$\frac{1014}{3}$ Rthl.	=	338 Rthl.
— Brachfelde	— —	—	300 Rthl., also
der sämmtliche Schade			1138 Rthl., oder

von dem ganzen Ertrage $\frac{1138}{2900} = \frac{569}{1450}$.

§. 52.

Bis jetzt hat die nöthige Rechnung keine Schwierigkeit; allein wie soll nun die zu ertheilende Remißion berechnet werden? Soll etwa der ganze Schade ersetzt werden? Unbillig wäre dies ohnstreitig gegen den Güterbesitzer, indem er das Gut doch nicht so hoch verpachtet, als es der Pächter nutzen kann. Es ist daher billig, daß auch der Pächter einen Theil des Schadens trage, und es pflegt in den Landesgesetzen bestimmt zu werden, wie groß

die

die Remißion seyn solle, wenigstens für einige Fälle. Es ist z. B.

wenn der Schade dem Ertr. gleich ist, die Remis. $\frac{3}{4}$ der Abgab.
— — — $\frac{2}{3}$ des Ertr. ist — — $\frac{1}{2}$ — —
— — — $\frac{1}{2}$ — — — — $\frac{1}{4}$ — —

und für geringere Schaden wird gar keine Remißion gegeben.

§. 53.

Wie soll man nun aber die Remißion bestimmen, wenn der Schade zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, oder $\frac{2}{3}$ und 1 fällt? so daß die Verordnung der Landesgesetze dabey unverletzt bleibt. Wenn die vorhin angeführten Bestimmungen beybehalten werden, so kann man solches auf folgende Art thun.

Man sucht vor allen Dingen, was für ein Theil des Ertrags der erlittene Schade ist. Darauf theilet man das Ganze in so viel Theile, als der Nenner dieses Bruchs anzeigt, und schaltet zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ so viel Glieder ein, als dieser Nenner multiplicirt mit $(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})$ oder mit $\frac{1}{6}$, angiebt, mit andern Worten den 6ten Theil der angenommenen Theile; zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ aber schaltet man $\frac{1}{3}$ derselben ein. Die Differenz zwischen jeden zwey jener ersten Glieder ist $\frac{1}{4}$, dividirt durch $\frac{1}{6}$ des Nenners des Bruchs, welcher das Verhältniß des Schadens gegen den Ertrag anzeigt; zwischen jeden zwey der letztgedachten Glieder aber $\frac{1}{4}$, dividirt durch $\frac{1}{3}$ des Nenners des so eben gedachten Bruchs. Auf diese Art erhält man eine

Tabelle, welche die Remißion auch für mehrere zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, und $\frac{2}{3}$ und 1 befindliche Fälle enthält. Z. B. wenn der öfters gedachte Nenner 24 ist, so erhält man folgende Tabelle.

Schade	Remißion
$\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ des Ertrags	$= \frac{1}{4}$ der Abgaben
$\frac{13}{24}$ — —	$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
$\frac{14}{24}$ — —	$= \frac{1}{4} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16}$
$\frac{15}{24}$ — —	$= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$
$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ — —	$= \frac{1}{4} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
$\frac{17}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{1}{32} = \frac{17}{32}$
$\frac{18}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{2}{32} = \frac{18}{32}$
$\frac{19}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{3}{32} = \frac{19}{32}$
$\frac{20}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{4}{32} = \frac{20}{32}$
$\frac{21}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{5}{32} = \frac{21}{32}$
$\frac{22}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{6}{32} = \frac{22}{32}$
$\frac{23}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{7}{32} = \frac{23}{32}$
$1 = \frac{24}{24}$ — —	$= \frac{1}{2} + \frac{8}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

§. 54.

Wäre der Nenner des Bruchs, welcher das Verhältniß des Schadens gegen den Ertrag anzeigt, so beschaffen, daß er durch 6 dividirt, keine ganze Zahl gäbe, so könnte man den Bruch in einen solchen verwandeln, dessen Nenner unter andern aus der 6 als Factor zusammengesetzt wäre. Anstatt des Nenners 7 z. B. kann man 42 nehmen, und dann erhält man folgende Tabelle.

Schade

Schade			Remißion	
$\frac{1}{2}$	$= \frac{21}{42}$	des Ertrags	$= \frac{1}{4}$	der Abgaben
	$\frac{22}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$	—
	$\frac{23}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{2}{28}$	—
	$\frac{24}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{3}{28}$	—
	$\frac{25}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{4}{28}$	—
	$\frac{26}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{5}{28}$	—
	$\frac{27}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{6}{28}$	—
$\frac{2}{3}$	$= \frac{28}{42}$	— —	$= \frac{1}{4} + \frac{7}{28} = \frac{1}{2}$	—
	$\frac{29}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{1}{56}$	—
	$\frac{30}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{2}{56}$	—
	$\frac{31}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{3}{56}$	—
	$\frac{32}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{4}{56}$	—
	$\frac{33}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{5}{56}$	—
	$\frac{34}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{6}{56}$	—
	$\frac{35}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{7}{56}$	—
	$\frac{36}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{8}{56}$	—
	$\frac{37}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{9}{56}$	—
	$\frac{38}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{10}{56}$	—
	$\frac{39}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{11}{56}$	—
	$\frac{40}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{12}{56}$	—
	$\frac{41}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{13}{56}$	—
1	$= \frac{42}{42}$	— —	$= \frac{1}{2} + \frac{14}{56} = \frac{3}{4}$	—

§. 55.

Wenn man auf diese Art eine Tabelle oder Tabellen machen wollte, die alle nur möglichen Fälle enthielten; so

 würden

würden dieselben sehr weitläuftig werden, und ihre Verfertigung nicht ohne grosse Schwierigkeiten seyn. Man hat indeß solche Tabellen so nöthig nicht, indem man nach dem bisherigen in jedem gegebenen Falle das verlangte leicht ohne dieselben finden kann. Es sey z. B. der ganze Schade $\frac{1069}{1450}$ des Ertrags; und die zu ertheilende Remißion werde zu wissen verlangt. Man verwandele zuvörderst $\frac{1069}{1450}$ in $\frac{3207}{4350}$ nach dem vorhergehenden §. $\frac{3207}{4350}$ fällt zwischen $\frac{2}{3} = \frac{2900}{4350}$ und 1, und ist von dem $\frac{4350}{4}$ oder 1450 Gliedern, welche zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ eingeschaltet werden müssen, das 307te. Da nun die Differenz jeder zwey auf einander folgenden Glieder zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ gleich ist $\frac{\frac{1}{4}}{1450} = \frac{1}{5800}$, so ist die für $\frac{1069}{1450}$ des Ertrags zu ertheilende Remißion $\frac{1}{2} + \frac{307}{5800} = \frac{3207}{5800}$ der Abgaben.

§. 56.

Wenn bekannt ist, was für ein Theil der Abgaben die Remißion ist, so ist die Remißion selbst leicht zu finden. Hätten an einer Remißion mehrere Antheil, so müßte darauf nach der Gewinn- und Verlustrechnung der Antheil eines jeden an der ganzen Remißion berechnet werden. Hiezu wird aber noch eine der §. 51 angeführten ähnliche Bestimmung des Schadens eines jeden erfordert.

In dem Exempel §. 51 wird, da $\frac{569}{1450}$ ist, gar keine Remißion ertheilt.

Berech-

Berechnung der Legitimä.

§. 57.

Unter der Legitima oder dem Pflichttheile versteht man diejenige Erbportion, welche die Kinder nach den Rechten von den Eltern fordern können, so daß sie auch selbst den Enterbten nicht entstehen kann. Es fällt dabey sogleich in die Augen, daß zur Berechnung des Pflichttheils vor allen Dingen ein dahin gehöriges Gesetz erfordert werde, und dieses ist: **Vier oder weniger Kinder bekommen ein Drittheil; fünf oder mehr Kinder aber die Hälfte der Erbschaft.**

§. 58.

Die Fälle, welche bey der Berechnung des Pflichttheils vorkommen können, sind von gedoppelter Art; es ist nemlich entweder der Pflichttheil aller Kinder, oder nur der Pflichttheil eines Kindes zu bestimmen. Findet das letzte statt, so giebt es so viel Regeln, als man Mengen erbender Kinder annehmen kann; doch lassen sich dieselben insgesammt leicht auf eine allgemeine Regel zurückbringen.

§. 59.

§. 59.

Soll nun

a der Pflichttheil aller Kinder berechnet werden; so sucht man

bey Kindern		von dem Vermögen
1, 2, 3, 4	— — —	$\frac{1}{3}$
5, 6, 7, 8, 9 u. s. w.	— —	$\frac{1}{2}$.

Soll aber

b der Pflichttheil eines Kindes berechnet werden, so ist derselbe

bey Kindern			von dem Vermögen
1	—	—	$\frac{1}{3}$
2	—	—	$\frac{1}{6}$
3	—	—	$\frac{1}{9}$
4	—	—	$\frac{1}{12}$
5	—	—	$\frac{1}{10}$
6	—	—	$\frac{1}{12}$
7	—	—	$\frac{1}{14}$

bey

bey Kindern			von dem Vermögen
8	—	—	$\frac{1}{16}$
9	—	—	$\frac{1}{18}$
10	—	—	$\frac{1}{20}$
11	—	—	$\frac{1}{22}$
12	—	—	$\frac{1}{24}$
13	—	—	$\frac{1}{26}$
14	—	—	$\frac{1}{28}$
15	—	—	$\frac{1}{30}$ u. s. w.

Es fliessen diese Bestimmungen zu leicht aus dem §. 57 angeführtem Gesetze zur Berechnung des Pflichttheils, als daß es nöthig seyn sollte, ihre Richtigkeit weiter zu beweisen. Merkt man sich nun noch, daß die etwa statt findenden Schulden von dem Activvermögen jedesmal vor der Berechnung des Pflichttheils abgezogen zu werden pflegen, so ist die fernere nöthige Rechnung leicht.

§. 60.

Will man für die Bestimmung des Pflichttheils Eines Kindes eine allgemeine Regel haben, so ist selbige: **Man dividire das hinterlassene Vermögen, wenn nicht mehr als vier Kinder da sind, durch die Anzahl der Kinder mit 3, wenn aber mehr als vier Kinder da sind, durch die Anzahl der Kinder mit 2 multiplicirt.** Durch die Anwendung dieser allgemeinen Regel auf die möglichen besondern Fälle ist die vorhergehende Tabelle entstanden.

§. 61.

§. 61.

Wie groß ist der Pflichttheil des einen von 4 Kindern, wenn das hinterlassene Vermögen 3000 Rthlr? Antwort:

$$3000 \text{ Rthlr} \times \tfrac{1}{12} = 250 \text{ Rthlr}.$$

Wie viel erhält ein Kind zu seinem Pflichttheile, wenn es 5 Geschwister hat, das Activvermögen 16000 Rthlr und die Schulden 3500 Rthlr sind? Antwort:

$$(16000 \text{ Rthlr} - 3500 \text{ Rthlr}) \times \tfrac{1}{10} = 1250 \text{ Rthlr}.$$

§. 62.

Wenn Kinder vom ersten Grade mit Kindern vom zweyten Grade concurriren, und der Pflichttheil eines Enkels bestimmt werden soll; so muß zuerst berechnet werden, wie groß die Erbschaft aller Enkel ist, und dann wird nach den bisherigen Regeln gerechnet. Erbten z. B. 3 Enkel von dem Grosvater anstatt ihres verstorbenen Vaters, und sollte der eine davon nur den Pflichttheil erhalten, so bekäme derselbe $\frac{1}{9}$ von dem Antheile seines Vaters.

§. 63.

Bey der Berechnung des Pflichttheils bey Lehngütern findet sich noch ein Umstand, der angemerkt werden muß, und welchen Polack in dem oft angeführten Werke S. 58. 59 mit folgenden Worten beschreibet. Daferne bey

bey Lehngütern der Pflichttheil zu berechnen ist, so kommen nur diejenigen Kinder in Berechnung, welche der Lehnssucceßion fähig sind, und also bey den Feudis masculinis nur die Söhne; so daß wenn der Verstorbene 4 Söhne und 3 oder mehr Töchter, und also in allen 7 Kinder hinterlassen, wo sonst der Pflichttheil aller Kinder im Allodialvermögen die Hälfte wäre, so ist es im angezogenen Falle doch nur der dritte Theil, weil die 3 Töchter nicht gezählet werden dürfen. Und gleichwie der Pflichttheil nicht eher gerechnet wird, als nachdem vorher alle Schulden abgezogen sind; so müssen auch hier allererst die wirklichen Lehnschulden, worunter auch dasjenige gehört, was die Töchter aus den Lehngütern zu ihrer Lehnscompetenz empfangen, abgezogen werden.

Berech-

Berechnung der Quartä Falcidiä.

§. 64.

Wegen der Quartä Falcidiä muß dem Erben der vierte Theil der Erbschaft frey bleiben, und es fordert also der Erbe dieselbe, wenn seine Erbschaft so beschweret worden, daß er mehr als $\frac{3}{4}$ davon abgeben müßte. Dieses kann durch Legate von verschiedener Art geschehen, und da die Findung der Quartä Falcidiä selbst mit keiner Schwierigkeit verbunden ist, so kommt es hier nur darauf an, daß gezeigt werde, wie in dem Falle, wenn ein Erbe in Ansehung der Falcidiä durch Legate gravirt ist, diese Legate vermindert werden müssen, daß die Quarta Falcidia frey bleibe.

§. 65.

Wenn die Summe der Erbschaft ausgemittelt ist, so ist, wie solches nach einiger Ueberlegung in die Augen fällt, das erste was man zu thun hat, daß man bestimmt, um wie viel der Erbe gravirt sey. Hiezu ist öfters eine Reduction der gemachten Legate nöthig, welche dann größtentheils nach den Regeln der Rabattrechnung zu Stande gebracht werden kann. Weiß man, wessen der Erbe mit Recht sich weigern kann, so findet man nach sorgfältiger

Ueber-

Ueberdenkung der jedesmaligen Umstände leicht, wie die gemachten Legate wegen der Quartä Falcidiä verändert werden müssen. Die Legitima darf übrigens mit gar keinem Legate beschwert werden.

§. 66.

Eine Erbschaft von 8000 Rthl. ist mit 3 Legaten beschwert, der Erbe soll davon an A 3000 Rthl., an B 1750 Rthl. und an C 2750 Rthl. zahlen. Es verlangt aber derselbe die Quartam Falcidiam, und es wird gefragt, wie viel A und B und C abgezogen werden müsse, damit er selbige erhalten könne?

Vermöge der Quartä Falcidiä muß der Erbe erhalten

$$\tfrac{1}{4} \times 8000 \text{ Rthl.} = 2000 \text{ Rthl.}$$

Er soll aber zahlen

an A — 3000 Rthl.
— B — 1750 Rthl.
— C — 2750 Rthl.

in allem 7500 Rthl.,

und ist also vervortheilt mit 1500 Rthl.

Er zieht also

$$\text{von} \left.\begin{array}{r} 3000 \text{ Rthl.} \\ 1750 \text{ Rthl.} \\ 2750 \text{ Rthl.} \end{array}\right\} \text{ab } 1500 \text{ Rthl., und also}$$

Er von

von den 3000 Rthlr. des A 1500 Rthlr. $\times \frac{2}{5}$ = 600 Rthlr.
— — 1750 Rthlr. — B 1500 Rthlr. $\times \frac{7}{30}$ = 350 Rthlr.
— — 2750 Rthlr. — C 1500 Rthlr. $\times \frac{11}{30}$ = 550 Rthlr.;
und giebt also

an A die Summe 3000 Rthlr. — 600 Rthlr. = 2400 Rthlr.
— B — — 1750 Rthlr. — 350 Rthlr. = 1400 Rthlr.
— C — — 2750 Rthlr. — 550 Rthlr. = 2200 Rthlr.

in Summa 6000 Rthlr.

§. 67.

Wenn der Erbe ein Kind ist, so kann er erstlich den Pflichttheil, und dann noch die Quartam Falcidiam oder Trebellianicam fordern. Die Quarta Falcidia ist aber hier nicht mehr $\frac{1}{4}$ des Erbes, sondern $\frac{1}{4}$ des Restes, nachdem der Pflichttheil abgezogen worden. Gesetzt also, daß ein Vater 6 Kinder und 30000 Rthlr. hinterlasse, so darf er ein Kind, daß er zu 8000 Rthlr. einsetzt, mit nicht mehr als 4125 Rthlr. Legaten beschweren. Es kann nemlich dieses Kind fordern

1. den Pflichttheil, d. h. $\frac{1}{12} \times$ 30000 Rthlr. = 2500 Rthlr.
2. die Quartam Trebellianicam
oder $\frac{1}{4} \times$ (8000 Rthlr. — 2500 Rthlr.)
= $\frac{1}{4} \times$ 5500 Rthlr. = 1375 Rthlr.

also in Summa 3875 Rthlr.,

welche von 8000 Rthlr. abgezogen obige 4125 Rthlr. zum Reste lassen.

§. 68.

§. 68.

Gesetzt, daß das Legat, womit eine Erbschaft beschwert worden, ein jährliches Legat ist; so ist zur Beurtheilung, ob die Quarta Falcidia dem Erben frey bleibe, die Reduction dieses Legats auf seinen jetzigen Werth vor allen andern nothwendig. Da von der Art und Weise, wie dieselbe jedesmal anzustellen, in den Rabattrechnungen weitläuftig gesprochen worden ist, so würde es überflüßig seyn, hier mehr als ein Beyspiel anzuführen. Gesetzt also, daß der Erbe im vorhergehenden Exempel 12 Jahre lang jedes Jahr 500 Rthlr bezahlen sollte; so ergiebt sich nach den Regeln der doppelten Rabattrechnung für den jetzigen Werth der 12 Jahre hinter einander zu zahlenden 500 Rthlr, 886,325 Rthlr $\times$ 5 $=$ 4431,625 Rthlr $=$ 4431 $\frac{5}{8}$ Rthlr, und der Erbe wäre also mit 4431$\frac{5}{8}$ Rthlr $-$ 4125 Rthlr $=$ 306$\frac{5}{8}$ Rthlr gravirt.

§. 69.

In dergleichen Fällen pflegt noch die Frage zu entstehen, wie viel also von der nach dem Testamente jährlich zu zahlenden Summe abgezogen werden müsse? Man sieht nach einiger Ueberlegung bald, daß man diese Summe finde, wenn man berechnet, wie viel jährlich gegeben werden müsse, um die ganze Summe, welche der Erbe von dem jetzigen Werthe des Legats abziehen kann, in gleichen Theilen und in den Terminen des Legats abzutragen.

gen. In dem berührten Falle z. B. dürfte man nur berechnen, wie viel man 12 Jahre hindurch am Ende eines jeden Jahres geben muß, um $306\frac{5}{8}$ Rthl., die man jetzt erhält, mit ihrem Zinse abzutragen. Die Regeln dieser Aufgaben sind bereits oben erklärt, und mit Beyspielen belegt worden.

§. 70.

Bisweilen soll ein Erbe einem andern ein Legat auf Lebenslang auszahlen. Wenn das ist, so muß vor allen Dingen ausgemacht werden, wie groß die Zeit der Zahlung des Legats anzunehmen sey. Von diesem Falle kann aber hier nicht ausführlich geredet werden, indem derselbe manches von dem in dem folgenden 2ten Theile abzuhandelnden voraussetzt, und er bleibt also bis dahin verschoben.

Von der
Verletzung über die Hälfte.

§. 71.

Ueber die Hälfte oder enorm wird der Verkäufer verletzt, wenn er weniger als den halben Werth der Sache bekömmt, der Käufer aber, wenn er weniger als die Hälfte der Waare erhält, die er für sein Geld hätte erhalten sollen.

§. 72.

Um zu beurtheilen, ob ein Verkäufer oder ein Käufer enorm lädirt sey, muß man das, was jener für seine Waaren erhalten hat, mit ihrem wahren Werthe, und das was dieser für sein Geld erhalten hat, mit dem, was er dafür hätte erhalten sollen, oder das was er hätte geben sollen, mit dem, was er wirklich gegeben hat, vergleichen. Ist z. B. eine Sache 16 Rthl. werth, und der Verkäufer erhält dafür 8 Rthl., so ist er um die Hälfte, erhält er aber weniger, über die Hälfte lädirt, indem $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, hingegen $\frac{7}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{5}{16}$ u. s. w. weniger als ein halbes sind. Der Käufer hingegen ist um die Hälfte lädirt, wenn er 32 Rthl. dafür bezahlt, und über die Hälfte, wenn er noch mehr dafür giebt.

Einige Zusätze und Verbesserungen.

§. 73.

Als einen historischen Beytrag zu den 268ten bis 271ten § des 1ten Abschnitts füge ich hier noch hinzu, daß bereits Klügel im 12ten Stück des Hannöv. Magaz. v. J. 1773 den Vorschlag gethan hat, um dessen willen die in den angeführten §§ enthaltenen Rechnungen erklärt worden sind. Man hat auch eine Tabelle verfertiget, welche die dabey nöthigen Rechnungen erleichtern sollte. Ich will dieselbe hersetzen, und mein Urtheil darüber hinzufügen.

§. 74.

Jahre	Accord von 1000	Abtrag von 1000
1	952	1000
2	930	500
3	908	333
4	886	250
5	866	200

Jahre	Accord von 1000	Abtrag von 1000
6	846	166
7	827	142
8	808	125
9	790	111
10	772	100
11	755	90
12	739	83
13	723	76
14	707	71
15	692	66
16	677	62
17	663	58
18	650	55
19	636	52
20	623	50

Jahre	Accord von 1000	Abtrag von 1000
21	610	47
22	598	45
23	586	43
24	575	41
25	564	40
26	553	38
27	542	37
28	532	35
29	522	34
30	512	33
31	503	32
32	494	31
33	485	30
34	476	29
35	468	28

Jahre

Jahre	Accord von 1000	Abtrag von 1000
36	460	27
37	452	27
38	444	26
39	436	25
40	429	25.

§. 75.

Die 2te Columne dieser Tabelle enthält, wie viel der Schuldner für 1000 zu geben im Stande ist, die dabey stehende Zahl der Jahre zeigt an, wie lange es währet, bis 1000 abgetragen sind, und die daneben stehende Zahl in der 3ten Columne zeigt an, wie viel jährlich von 1000 abgetragen wird. Daß diese Tabelle sehr unvollständig sey, fällt nach einer kurzen Betrachtung derselben in die Augen, und man überzeugt sich auch bald, daß eine vollständige Tabelle dieser Art nicht gut möglich sey. Nach der §. 269 — 271 des 1ten Abschnitts vorgeschlagenen Art sind die hier nöthigen Rechnungen kurz und leicht genug, um alle Tabellen entbehren zu können.

§. 76.

Zu § 299 des 1ten Abschnitts.

Bey der Berechnung des Portos, welches man von einer Summe, die man unbefreyt übersenden könnte, abziehen kann, weil man dieselbe frankiret, giebt es noch einen andern Anzeiger, dessen Gebrauch da, wo auf das schärfste gerechnet werden soll, vorzuziehen ist. Rechnet man nemlich, wie § 299 des 1ten Abschnitts gelehret worden, so erhält zwar der Empfänger das, was er nach eigener Bezahlung des Portos erhalten haben würde, wenn der Uebersender das Geld unbefreyt überschickt hätte; allein der Uebersender bezahlt so viel Porto nicht, als er zurück behält. Soll dieses vermieden werden, so dividirt man die zu überschickende Summe durch die Summe, wofür das Porto bestimmt ist, mit dem dafür bestimmten Porto zusammen genommen. Sollten z. B. 505 Rthlr abgesandt werden, und das Porto wäre 1 für 100, so wäre das abzuziehende $\frac{505 \text{ Rthlr}}{101} = 5$ Rthlr.

§. 77.

Betrachtet man diesen Fall genau, so ist er mit der Berechnung des Rabatts aufs 100 vollkommen überein-

stimmend,

stimmend, und eben deswegen bedarf auch die angeführte Regel keines weitern Beweises. Wie soll man nun aber in vorkommenden wirklichen Fällen rechnen, nach der Regel §. 299 des 1ten Abschnitts, oder nach der gegenwärtigen? Dies müssen die Postordnungen entscheiden. Wenn das Porto z. B. auf die Art vestgesetzt ist:

Von 1 bis 20 Rthlr Silbergeld wird das doppelte,
— 20 — 35 Rthlr — — — — dreyfache,
— 35 — 50 Rthlr — — — — vierfache Briefporto gegeben, und was über 50 Rthlr ist, es sey Gold oder Silber, wird wie 100 Rthlr bezahlt; so sieht man wohl, daß die strengen Berechnungen des Portos nichts helfen können.

§. 78.

Die Nähe der Messe hat es mir unmöglich gemacht, den gegenwärtigen 1ten Theil meiner Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst vom Anfang bis zu Ende sorgfältig wieder durchzulesen, und die eingeschlichenen Fehler alle zu bemerken. Ich behalte mir solches also vor, und bitte, folgendes vorläufig zu ändern.

S. XXXII der Vorrede Z. 7 muß statt die erste Wurzel stehen die zweyte Wurzel.

S. 89

S. 89 lese man Z. 12 anstatt 3 oder 4, 2 oder 3, und Z. 21 anstatt 8 oder 10, 4 oder 6 oder 8 u. s. w.

S. 138 muß Z. 7 anstatt 14081 Rthlr. bis 14081 Rthlr. gelesen werden 14081 Rthlr. bis 14082 Rthlr.

S. 141 steht Z. 5 von unten multiplicirt anstatt multipliciren.

S. 322 muß Z. 5 von unten 24,69 Rthlr. anstatt 24,68 Rthlr. gelesen werden.

Erklä-

Erklärung
verschiedener der gebrauchten Zeichen und Bezeichnungen.

Das Zeichen = setzt man zwischen die Grössen oder Zahlen, welche gleich sind.

Das Zeichen + (plus) zeigt an, daß die Grössen, zwischen welchen es steht, zusammenaddirt werden sollen; z. B. 3 Rthlr + 6 Rthlr + 9 Rthlr zeigt an, daß man die Summe von 3 Rthlr und 6 Rthlr und 9 Rthlr oder 18 Rthlr finden soll.

Das Zeichen — (minus) zeigt an, daß die Grösse, vor welcher es steht, von derjenigen, die vorhergeht, abgezogen werden soll; z. B. 6 Rthlr — 3 Rthlr heißt, es sollen 3 Rthlr von 6 Rthlr abgezogen werden.

Anm. Wenn aber die Zeichen + und — vor Zahlen stehen, mit welchen man eine andere Zahl oder eine Grösse multipliciren oder dividiren soll; so zeigt + an, daß man diese Zahl oder Grösse selbst, — aber, daß man ihr gleiches Gegentheil multipliciren oder dividiren soll. S. die Vorrede S. XXVII u. f.

Das

Das Zeichen $\times$ oder $\cdot$ setzt man vor die Zahl, mit welcher man eine andere Zahl oder eine Grösse multipliciren soll. So heißt 6 Rthl. $\times$ 4, daß man 6 Rthl. viermal zu nehmen habe. Werden mehrere Multiplicatoren durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$ verbunden, so ist der Sinn davon, daß man mit denselben nach einander die Multiplication anstellen soll. Z. B. 6 Rthl. $\times 4 \times 6 \times 2$ heißt: Es sollen 6 Rthl. viermal genommen, dies Product (24 Rthl.) mit 6, und das hiedurch erhaltene (144 Rthl.) noch mit 2 multiplicirt werden; so daß also 6 Rthl. $\times 4 \times 6 \times 2 = 288$ Rthl. ist.

Bezeichnungen wie folgende $\frac{6}{3}$, 6 : 3 zeigen an, daß die Zahl oder Grösse über — oder vor : durch die Zahl unter — oder hinter : dividirt werden soll, und in den angeführten soll also 6 durch 3 dividirt werden. Wenn unter dem Striche — mehrere Zahlen durch $\times$ verbunden stehen, so soll die obere Zahl oder Grösse durch dieselben nach und nach dividirt werden. $\frac{6}{2\times4\times3}$ z. B. heißt: Es soll 6 durch 2, und was herauskommt (3) durch 4, und dieser Quotient ($\frac{3}{4}$) durch 3 dividirt werden, so daß also $\frac{6}{2\times4\times3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ ist.

Wenn vor einem Bruche oder Anzeiger das Zeichen $\times$ oder $\cdot$ steht, so zeigt dasselbe an, daß man mit dem Zähler multipliciren und mit dem Nenner dividiren solle; steht aber das Divisionszeichen drüber oder davor, so soll

man

man mit dem Zähler dividiren und mit dem Nenner multipliciren. So heißt also 6 Rthl. $\times \frac{3}{4}$, 6 Rthl. mit 3 multiplicirt, und das kommende Product (18 Rthl.) mit 4 dividirt; $\frac{8 \text{ Rthl.}}{\frac{3}{4}}$ oder aber 8 Rthl. : $\frac{3}{4}$ zeigt an, daß man 8 Rthl. mit 4 multipliciren und das Product (32 Rthl.) mit 3 dividiren soll.

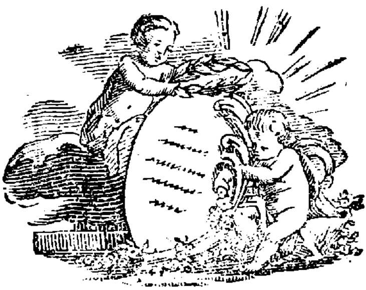
Wenn verschiedene Zahlen oder Grössen in einer Parenthese stehen, so bezieht sich das Zeichen vor der Parenthese auf alle in derselben befindliche Zahlen oder Grössen. 8 Rthl. $\times (3 + 4 - 2)$ heißt also 8 Rthl. mit 3, ferner 8 Rthl. mit 4, und 8 Rthl. mit 2 multiplicirt, und dann 24 Rthl. und 32 Rthl. zusammenaddirt, und davon 16 Rthl. abgezogen; oder 3 und 4 zusammenaddirt, von der Summe 2 abgezogen, und mit dem Reste 5 die 8 Rthl. multiplicirt.

Die kleinen Zifern oberhalb zur Rechten bey Zahlen, zeigen an, daß man die Zahlen, bey welchen sie stehen, zu einer Dignität erheben soll. 8^6 z. B. heißt 8 zur 6ten Dignität erhoben; $\frac{21^5}{20^5}$ heißt die 5te Dignität von 21 durch die 5te Dignität von 20 dividirt. Andere zeigen dies leztere auf folgende Art an $\left(\frac{21}{20}\right)^5$.

L. be-

L. bedeutet Logarithme, und zwar so, daß die Zahl, wovon der Logarithme gedacht werden soll, dabey gesetzt wird. L. 65 heißt also der Logarithme von der Zahl 65. Wenn L. $6 \times 4 \times 8$ u. d. gl. gesetzt worden ist, so soll das den Logarithmen des Products von $6 \times 4 \times 8$ anzeigen. Man schreibt dies sonst gewöhnlich L. $(6 \times 4 \times 8)$.

Das Zeichen $=$ ist bey den Anzeigern oft so gebraucht worden, daß es sich blos auf den Anzeiger bezieht. Z. E. S. 44 steht 5 pr. C. $\times \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = \frac{6}{5}$, wodurch also nicht gesagt werden soll, daß $5 \times \frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}}$ so viel als $\frac{6}{5}$ sey, sondern nur, daß $\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{4}} = \frac{6}{5}$.



Inhalt

Inhalt des ersten Theils.

Johann Andr. Christ. Michelsen's

Professors der Mathematic und Physic am vereinigten Berlinischen und Cöllnischen Gymnasium

Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst.

Zweyter Theil.

Halle

im Verlage des Waysenhauses

1 7 8 4.

Vorrede.

Verschiedene Umstände, die auf mich einen grossen Einfluß haben mußten, aber das Publikum nicht interessiren, sind die Ursache gewesen, daß dieser zweyte Theil meiner Anleitung zur juristischen, politischen und öconomischen Rechenkunst ein und ein halbes Jahr später erscheint, als ich denselben zu liefern versprochen hatte. Die Gegenstände, welche darin abgehandelt worden sind, findet man am Schlusse desselben angezeigt. Was die Art der Bearbeitung dieser Gegenstände betrifft, so habe ich eben so als in dem ersten Theile die Gründe von den jedesmal zu befolgenden Regeln zu entwickeln gesucht, und auch hier durchaus die Buchstabenrechnung vermieden. Darin aber unterscheidet sich dieser zweyte Theil von dem ersten, daß ich darin der Schriftsteller, welche dieselben Materien abgehandelt haben, selten erwähnt, und ihre Verfahrungsart im erforderlichen Falle untersucht und geprüft habe. Ich mußte dies thun, wenn ich alles das in diesen Band bringen wollte, was darin enthalten ist; und überdem schienen mir dergleichen historische und prüfende Zusätze für diejenigen, für welche diese Anleitung geschrieben ist, nicht so wichtig, daß sie nicht bequem hätten ausgelassen werden können. Von den öconomischen Rechnungen hätte ich gern noch besonders gehandelt, wenn mich nicht der Mangel an Raum daran verhindert hätte. Sobald ich indeß die dazu nöthige Musse haben werde, will ich dieselben nebst verschiedenen cameralischen Rechnungen so bearbeiten, daß ich die allgemeinen Rechnungsregeln, die in dieser Anleitung erläutert worden sind, voraussetze, ganz besondere Gegenstände wähle, und diese so ausführlich, als es zur unmittelbaren Anwendung nöthig ist, behandele. Bey dieser Arbeit werde ich dann auch Gelegenheit nehmen, das Verlangen derer zu erfüllen, die mich mit Bitten beehrt haben, verschiedene specielle Rechnungen diesem zweyten Theile einzuverleiben. Uebrigens wünsche ich, daß auch dieser zweyte Theil die gütige Aufnahme und Nachsicht finden möge, welche der erste zu erhalten so glücklich gewesen ist; und benutze hiernach den noch übrigen Raum zu ein Paar Anmerkungen.

In der Recension, welche der erste Theil meiner Anleitung in der allgemeinen deutschen Bibliothek erhalten hat, erregt der Herr Verfasser derselben einige Zweifel wider meine Vorstellungsart der Zeichen + und — S. 27 = 29 der Vorrede. Der Vorwurf, welcher derselben gemacht wird, ist zwiefach. Einmal nemlich scheine ich darnach das vorauszusetzen, was Kästner ausdrücklich giebt, daß die Einheit immer positiv seyn müsse; und zweytens sollen nach meiner Erklärungsart verschiedene Zeichen auch + geben können. Ausführlicher und deutlicher, als ich es am angeführten Orte gezeigt habe, sind meine Gedanken folgende.

Zuvörderst nehme ich an, daß das Zeichen + jedesmal das anzeige, was man sich gedacht haben würde, wenn gar kein Zeichen gesetzt worden wäre. Dies ist eine leicht zu verstehende, und so oft es nöthig ist, auch leicht zu beweisende Behauptung. Ferner gebe ich dem Zeichen — die allgemeine Bedeutung, daß es immer das Gegentheil von dem anzeige, was + unter eben den Umständen bedeutet.

Hieraus fliesset nun das, was am angeführten Orte S. 27 von den Bedeutungen der Zeichen + und — in der Addition und Subtraction gesagt worden ist, sehr leicht.

Bey der Multiplication zeigt der Multiplicator selbst an, daß ein Vielfaches, und auch was für ein Vielfaches gesucht werden solle, und die Zeichen + und — vor demselben, ob von dem Multiplicandus selbst, oder von seinem gleichen Gegentheile das Vielfache zu finden sey. Hat der Multiplicator gar kein Zeichen vor sich, so sucht man immer das verlangte Vielfache von dem Multiplicandus, so wie er unmittelbar gegeben ist, und eben das muß man also thun, wenn er + vor sich hat; ist er aber mit — bezeichnet, so ist das Product von der entgegenstehenden Art. Hiebey wird nun einmal nichts vorausgesetzt, was nicht ausdrücklich angezeigt worden wäre; und zweytens ist es gleich viel, wenn + a und — b mit einander multiplicirt werden sollen, ob man + a oder — b als den Multiplicator betrachtet, denn in beyden Fällen ist das Product — ab.

Diese Vorstellungsart gefällt mir aber unter andern aus folgenden Gründen.

Erst-

Erstlich erleichtert sie die Multiplication. Denn wenn man mit einem Theile des Multiplicators mehrere Theile des Multiplicandus nach einander zu multipliciren hat, so ist die Regel: Wenn der Multiplicator + hat, so hat das Product mit dem Multiplicandus einerley Zeichen, wenn aber der Multiplicator — hat, das entgegengesetzte; leichter zu befolgen als die gewöhnliche.

Zum andern ist bey dieser Erklärungsart der Punkt, von welchem man ausgeht, nicht so beschaffen, daß er willkührlich angenommen scheinen könnte.

Weiter habe ich hierüber nicht nöthig zu sprechen, denn meine Absicht ist hier bloß die, diese Materie, da ich vielleicht durch die Art des Vortrags die angeführten Zweifel veranlaßt habe, noch einmal zu berühren, und vielleicht ein zweytes Urtheil dadurch zu veranlassen.

Ferner muß ich hier anzeigen, daß das, was im ersten Abschnitte § 95 in der zweyten Hälfte von den Worten: Auch kann man, an vorkommt, fehlerhaft ist, und als dergleichen durchstrichen werden kann.

Die

Die Art, wie bey der Verfertigung der Sterblichkeitsordnungen die Interpolation im erforderlichen Falle vorgenommen werden könne, hatte ich anfänglich willens hier ausführlich zu beschreiben. Man mag indeß die Art nehmen, da man dieselbe nach einer aus den gegebenen Zahlen construirten Linie vornimmt, oder die, da man sie durch eine darauf gegründete Rechnung verrichtet, so ist diese Materie für die gegenwärtige Anleitung zu schwer, und diejenigen, welche die Geometrie und die Buchstabenrechnung verstehen, werden sich eben so gern aus Lamberts Beyträgen zum Gebrauche der Mathematic Th. 1. S. 481 f. und aus Florencourts Abhandlungen aus der juristischen Rechenkunst S. 72 f. darüber unterrichten.

Endlich bemerke ich noch, daß S. 46 in diesem 2ten Theile §. 63 Z. 8 dessen statt deren gelesen und S. 48 Z. 7 nach dem Worte Zähler, **und Nenner** hinzugesetzt werden muß. S. 221 Z. 2 ist ebenfalls ein Rechnungsfehler eingeschlichen, der indeß auf die daselbst erläuterte Regel keinen Einfluß hat.

Dritter Abschnitt,

von den

Combinationen.

Einleitung.

§. 1.

Wenn eine gewisse Anzahl von Dingen gegeben ist; so läßt sich dabey unter andern die Frage aufwerfen, wie oft man dieselben zu zwey und zwey, zu drey und drey, zu vier und vier u. s. w. oder kürzer, zu zweyen, zu dreyen, zu vieren u. s. f. verbinden könne? Hiebey kömmt es auf den Ort, den ein jedes der gegebenen Dinge erhält, nicht an; und es ist z. B. ab und ba nicht mehr als Eine Verbindung der Buchstaben a und b zu zweyen, so wie abc, acb, bac, bca, cab, cba nicht mehr als Eine Verbindung der Buchstaben a, b und c zu dreyen.

§. 2.

Eine gegebene Menge von Dingen zu irgend einer Anzahl verbinden nennt man diese Dinge **combiniren**, und **Combinationen** sind also nichts anders, als Verbindungen gewisser gegebenen Dinge zu irgend einer Zahl.

Bisweilen gebraucht man die erklärten Worte auch in eingeschränkterer Bedeutung, so daß man sie nur bey Verbindungen zu zweyen anwendet. Alsdann kann man die Verbindungen zu dreyen Conternationen, die Verbindungen zu vieren Conquaternationen nennen. In dem folgenden wird die im § angeführte Bedeutung statt finden.

§. 3.

Die Lehre von den Combinationen, oder die Anweisung, die möglichen Verbindungen jeder gegebenen Menge von Dingen zu bestimmen, ist, wegen ihres Einflusses in die wichtigsten Rechnungen, eine sehr nothwendige und nützliche Lehre. Sie setzt aber die Theorie der Versetzung einer gegebenen Menge von Dingen voraus, und es muß daher zuvörderst von dieser geredet werden.

Von der

Versetzung gegebener Dinge.

§. 4.

Was gegebene Dinge versetzen heisse, bedarf keiner Erklärung. Es kommt dabey lediglich auf die Veränderung des Orts der gegebenen Dinge an, so daß man also jedesmal so viel Versetzungen hat, als man den Ort oder die Folge der gegebenen Dinge auf einander zu verändern im Stande ist.

§. 5.

Die Lehre von der Versetzung gegebener Dinge schränkt sich auf die Frage ein; **Wie viel Versetzungen sind bey jeder gegebenen Anzahl von Dingen möglich?** Nennt man eine jede bestimmte Folge der gegebenen Dinge eine Setzung derselben; so verwandelt sich diese Frage in folgende: **Wie viel Setzungen lassen sich aus jeder gegebenen Anzahl von Dingen machen?** Mit der Beantwortung dieser Frage wird sich also das zunächst folgende beschäftigen.

§. 6.

Es sind hiebey zwey Fälle zu untersuchen. **Entweder** sind die zu versetzenden Dinge alle von einander verschieden, **oder** es sind mehrere derselben gleich. Jeder von diesen Fällen muß besonders betrachtet werden, und zwar jener wegen seiner grössern Leichtigkeit zuerst.

§. 7.

Die Art der zu versetzenden Dinge an und für sich betrachtet hat auf die Versetzung derselben keinen Einfluß, und jede Art der Dinge kann also zur Erläuterung der hier vorkommenden Regeln dienen. In dem folgenden sollen, so lange allgemeine Fälle betrachtet werden, die kleinern Buchstaben des lateinischen Alphabets gebraucht werden.

Erster Fall.

Wenn die zu versetzenden Dinge durchaus von einander verschieden sind.

§. 8.

Bey einem einzeln Dinge findet keine Versetzung statt, und es giebt also dabey nur **eine einzige Setzung.** Kommt aber zu demselben noch ein anderes hinzu, so kann dieses entweder den ersten oder den zweyten Platz erhalten, und es giebt also **bey zwey von einander verschiedenen Dingen zwey Setzungen;** aber auch nicht mehr,

mehr, indem ausser den angeführten Fällen sich keiner weiter gedenken läßt. Kommt zu a der Buchstabe b, so kann man beyde so, ba, oder so, ab, setzen, einen dritten Fall giebt es nicht.

§. 9.

Wenn drey von einander verschiedene Dinge, z. B. die drey Buchstaben a, b und c gegeben sind; so kann ein jeder den ersten Platz erhalten, und dies giebt drey Setzungen, nemlich abc, bac, cab. In einer jeden dieser Setzungen aber können die beyden folgenden Buchstaben in einer doppelten Ordnung gestellt werden, indem man cb statt bc, ca statt ac, ba statt ab setzen kann. Aus jeder der ersten Setzungen entstehen auf diese Art zwey andere, so daß also **drey von einander verschiedene Dinge** zweymal drey oder **sechs Setzungen** geben. Die Buchstaben a, b und c lassen sich z. B. auf folgende Arten ordnen: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Man kann auch folgende Vorstellung wählen. Von drey Dingen, die von einander verschieden sind, erhält man, wenn man irgend eines an den ersten, zweyten und dritten Ort nach einander stellt, drey Setzungen, deren eine jede zwey andere giebt, indem die Ordnung der beyden übrigen einmal verändert werden kann.

Auch folgende Art ist nicht zu verwerfen. Zwey Dinge, z. B. a und b, geben zwey Setzungen, ab, ba. Kommt dazu nun ein drittes, z. E. c; so läßt sich selbiges in jede der Setzungen ab, ba vorne in die Mitte und hinten stellen, welches cab, acb, abc, cba, bca, bac oder dreymal zwey, d. h. sechs Setzungen giebt.

§. 10.

Sind vier von einander verschiedene Dinge auf so mannigfaltige Art als möglich zu setzen; so kann wiederum ein jedes den ersten Platz erhalten, und dadurch erhält man vier Setzungen. So geben die Buchstaben a, b, c, d die Folgen: abcd, bacd, cbad, dcba. In einer jeden dieser Setzungen lassen sich aber die drey letzten Buchstaben sechsmal auf verschiedene Art setzen, so daß eine jede der bereits erhaltenen Setzungen sechs andere giebt. **Vier von einander verschiedene Dinge** geben also sechsmal vier, d. h. **vier und zwanzig Setzungen**, welche bey a, b, c und d sind: abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cbad, cbda, cabd, cadb, cdab, cdba, dcba, dcab, dbca, dbac, dabc, dacb.

Drey Dinge geben sechs Setzungen; a, b und c z. B. die im vorhergehenden § angeführten. Kommt nun ein viertes hinzu; so kann solches in jeder Setzung vier Stellen erhalten, und man erhält also statt jeder jener sechs Setzungen viere, und also in allen vier und zwanzig.

§. 11.

Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich leicht, daß fünf von einander verschiedene Grössen fünfmal 24 d. h.

120, sechs ferner sechsmal 120 d. h. 720 Setzungen geben, u. s. w. Ist also

die Anzahl der gegebenen insgesammt von einander verschiedenen Dinge		so ist die mögliche Anzahl ihrer Setzungen
1		1
2	2 × 1	2
3	3 × 2	6
4	4 × 6	24
5	5 × 24	120
6	6 × 120	720
7	7 × 720	5040
8	8 × 5040	40320
9	9 × 40320	362880
10	10 × 362880	3628800
11	11 × 3628800	39916800
12	12 × 39916800	479001600
13	13 × 479001600	6227020800
14	14 × 6227020800	87178291200
15	15 × 87178291200	1307674368000
16	16 × 1307674368000	20922789888000.

u. s. w.

§. 12.

Aus dem bisherigen ergiebt sich, daß eine jede Anzahl gegebener insgesammt von einander verschiedener Dinge so viel Setzungen erlaube, als die Zahl dieser Dinge, mit allen vor ihr in der natürlichen Ordnung vorhergehenden Ziffern multiplicirt, Einheiten enthält. Die Anzahl aller möglichen Setzungen, welcher acht von einander verschiedene Dinge fähig sind, ist z. B. das Product $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.

§. 13.

Die verschiedenen möglichen Folgen oder Setzungen einer gegebenen Anzahl von Dingen selbst zu machen, hat keine Schwierigkeit, wenn man zuvörderst einem jeden einzeln Dinge nach einander den ersten Platz einräumt, darauf in einer jeden dieser Setzungen den übrigen Dingen ausser dem ersten den zweyten Platz giebt, ferner in den nun erhaltenen Setzungen den übrigen Dingen ausser den beyden ersten den dritten Platz ertheilt u. s. w. Es seyen z. B. alle mögliche Folgen der Buchstaben a, b, c, d aufzusetzen.

abcd

$$\text{abcd}\left\{\begin{array}{l}\text{abcd}\left\{\begin{array}{l}\text{abcd}\\ \text{abdc}\end{array}\right.\\[2ex] \text{acbd}\left\{\begin{array}{l}\text{acbd}\\ \text{acdb}\end{array}\right.\\[2ex] \text{adbc}\left\{\begin{array}{l}\text{adbc}\\ \text{adcb}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\text{bacd}\left\{\begin{array}{l}\text{bacd}\left\{\begin{array}{l}\text{bacd}\\ \text{badc}\end{array}\right.\\[2ex] \text{bcad}\left\{\begin{array}{l}\text{bcad}\\ \text{bcda}\end{array}\right.\\[2ex] \text{bdac}\left\{\begin{array}{l}\text{bdac}\\ \text{bdca}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\text{cabd}\left\{\begin{array}{l}\text{cabd}\left\{\begin{array}{l}\text{cabd}\\ \text{cadb}\end{array}\right.\\[2ex] \text{cbad}\left\{\begin{array}{l}\text{cbad}\\ \text{cbda}\end{array}\right.\\[2ex] \text{cdab}\left\{\begin{array}{l}\text{cdab}\\ \text{cdba}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\text{dabc}\left\{\begin{array}{l}\text{dabc}\left\{\begin{array}{l}\text{dabc}\\ \text{dacb}\end{array}\right.\\[2ex] \text{dbac}\left\{\begin{array}{l}\text{dbac}\\ \text{dbca}\end{array}\right.\\[2ex] \text{dcab}\left\{\begin{array}{l}\text{dcab}\\ \text{dcba}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

§. 14.

Anwendungen des bisherigen auf besondere Fälle werden weiter unten nach der Erläuterung des andern hier zu betrachtenden Falles vorkommen.

Zweyter Fall.

Wenn einige von den zu versetzenden Dingen einander gleich sind.

§. 15.

Wenn eine Anzahl von lauter gleichen Dingen gegeben ist, so findet dabey keine Versetzung statt, und man erhält also aus ihnen, so viel ihrer auch seyn mögen, nur eine Setzung. Wie sollte man z. B. aaaaa oder bbbbbbb versetzen?

§. 16.

Wenn in einer Anzahl von Dingen zwey einander gleich sind; so kann man bey der Versetzung derselben, wegen dieser beyden gleichen Dinge, statt jeder zwey sonst möglichen Setzungen nur eine rechnen. Sollen z. B. aacd versetzt werden; so erhält man nach § 13 die möglichen Setzungen, indem man einen jeden Buchstaben nach und nach eine jede Stelle einnehmen läßt. Auf diese Art kommt jedes von den zu versetzenden Dingen gleich vielmal in eine jede Stelle; (in dem angeführten Beyspiele geschieht solches sechs mal) und die Anzahl aller

mögli=

möglichen Setzungen erhält man, wenn man die Anzahl der zu versetzenden Dinge mit der Zahl multiplicirt, welche anzeigt, wie oft ein jedes eine jede Stelle bekömmt. Sind nun unter den zu versetzenden Dingen zwey einander gleich; so erhält man dieselben Setzungen, was für eins von diesen gleichen Dingen man nach und nach in eine jede Stelle setzt, und die Anzahl aller Setzungen ist daher nur halb so groß, als sie gewesen seyn würde, wenn auch diese beyden Dinge von einander verschieden gewesen wären.

Man setze z. B. in die Setzungen § 13 statt des b jedesmal a, so erhält man statt der 1ten und 2ten, statt der 3ten und 5ten, statt der 4ten und 6ten, statt der 7ten und 8ten, statt der 9ten und 11ten, statt der 10ten und 12ten, statt der 13ten und 15ten, statt der 14ten und 16ten, statt der 17ten und 18ten, statt der 19ten und 21ten, statt der 20ten und 22ten, und statt der 23ten und 24ten jedesmal nur eine, und also statt 24 Setzungen nicht mehr als 12.

§. 17.

Sind unter den zu versetzenden Dingen drey einander gleiche; so kann man bey der Versetzung derselben wegen dieser drey gleichen Dinge statt jeder sechs sonst möglichen Setzungen nur eine rechnen. Sollten z. B. aaad versetzt werden; so könnte man statt jeder Setzung, die sich hieraus ergiebt, wenn die drey gleichen Dinge

ver=

verschieden wären, sechs Setzungen erhalten, §9; und also erhält man umgekehrt, wenn unter den zu versetzenden Dingen drey einander gleich sind, nur den sechsten Theil der Setzungen, welche eine gleiche Anzahl durchaus von einander verschiedener Dinge gegeben haben würde.

§. 18.

Sind unter den zu versetzenden Dingen vier einander gleiche; z. B. in aaaabdc, so liessen sich aus einer jeden Setzung, die dabey möglich ist, nach §. 10 vier und zwanzig Setzungen machen, wenn die vier gleichen Dinge verschieden wären. Die Anzahl aller möglichen Setzungen, wenn vier gleiche Dinge da sind, ist also nur der 24ste Theil von derjenigen, die man erhalten könnte, wenn alle zu versetzenden Dinge verschieden wären.

§. 19.

Auf eine ähnliche Art läßt sich zeigen, daß, wenn unter den zu versetzenden Dingen fünf gleiche sind, die Anzahl aller möglichen Setzungen nur der 120te Theil, wenn darunter 6 gleiche Dinge sind, nur der 720ste Theil der Anzahl sey, die man aus eben so viel durchaus verschiedenen Dingen erhalten haben würde, u. s. w.

§. 20.

§. 20.

Die Anzahl aller möglichen Setzungen gegebener Dinge, unter welchen einige gleich sind, ist also jedesmal gleich der Anzahl der Setzungen eben so vieler durchaus verschiedener Dinge, dividirt durch die Zahl der Setzungen, die man aus so viel verschiedenen Dingen, als gleiche da sind, erhalten haben würde. Die Anzahl aller Setzungen 8 verschiedener Dinge z. B. ist 40320. Sind aber darunter

gleiche;		so ist die Anzahl der möglichen Setzungen		
2	—	$\frac{40320}{2}$	=	20160
3	—	$\frac{40320}{6}$	=	6720
4	—	$\frac{40320}{24}$	=	1680
5	—	$\frac{40320}{120}$	=	336
6	—	$\frac{40320}{720}$	=	56
7	—	$\frac{40320}{5040}$	=	8
8	—	$\frac{40320}{40320}$	=	1.

§. 21.

Bisweilen giebt es unter den zu versetzenden Dingen mehrere Mengen gleicher Dinge, wie z. B. wenn die Setzungen der Buchstaben a a a a b b b c d, oder dieser aaaabbcccde bestimmt werden sollten. Wie man hier zu verfahren habe, um die Anzahl aller möglichen Setzungen zu finden, kann man sich auf folgende Art erläutern. Wären in den gegebenen Exempeln alle Buchstaben ungleich;

gleich; so wäre die Anzahl aller möglichen Setzungen von aaaabbbcd = 362880 § 11. und die Anzahl aller möglichen Setzungen von aaaabbcccde = 39916800 §. 11. Weil aber in aaaabbbcd erstlich vier gleiche Dinge sind; so wird dadurch die Anzahl aller Setzungen nur $\frac{1}{24}$ von 362880, und also 15120: und weil b dreymal vorkommt; so wird dadurch die Anzahl der Setzungen nur $\frac{1}{6}$ von 15120 und also 2520. Eben so ist die Anzahl aller Setzungen von aaaabbcccde, die 39916800 seyn würde, wenn alle Buchstaben von einander verschieden wären, wegen des viermal vorkommenden a nur $\frac{39916800}{24}$ oder 1663200, wegen des zweymal vorkommenden b ferner nur $\frac{1663200}{2}$ oder 831600, und wegen des dreymal vorkommenden c endlich nur $\frac{831600}{6}$ oder 138600.

§. 22.

Kommen also unter den zu versetzenden Dingen mehrere Dinge verschiedene Mal vor; so findet man die Anzahl aller möglichen Setzungen, wenn man die Anzahl aller Setzungen eben so vieler durchaus von einander verschiedener Dinge nach und nach durch alle die Zahlen dividirt, welche die Menge der möglichen Setzungen der vorkommenden gleichen Dinge, als von einander verschieden behandelt, anzeigen.

§. 23.

§. 23.

Für jede gleiche Dinge		dividirt man also
2	—	2
3	3 × 2	6
4	4 × 6	24
5	5 × 24	120
6	6 × 120	720
7	7 × 720	5040
8	8 × 5040	40320
9	9 × 40320	362880
10	10 × 362880	3628800
11	11 × 3628800	39916800
12	12 × 39916800	479001600 u. s. w.

§. 24.

Man kann sich indeß den § 22. beschriebenen Weg dadurch sehr erleichtern, daß man die Zahlen, die als Multiplicatoren und Divisoren zugleich vorkommen, aus der Rechnung wegläßt, und zu dem Ende, so lange man nicht gleich vom Anfang an übersieht, welches diese Zahlen sind, die vorzunehmenden Operationen nur bezeichnet. Einige Beyspiele werden dieses am deutlichsten erläutern.

§. 25.

Es seyen also

1. Die Buchstaben aaaabbbcd gegeben. Die Anzahl

zahl aller Setzungen fände man nach dem bisherigen, wenn man $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ durch $4 \times 3 \times 2 \times 1$, und was man nun erhielte, durch $3 \times 2 \times 1$ dividirte. Dies giebt folgende Formel: $\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}$, welche sich in $\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$, so wie diese in $9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2520$ sehr leicht verwandeln läßt.

§. 26.

Wären

2. Die Buchstaben aaaabbcccde gegeben; so fände man die Anzahl aller möglichen Setzungen, wenn man $11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ zuvörderst durch $4 \times 3 \times 2 \times 1$, dann durch 2×1, und endlich durch $3 \times 2 \times 1$ dividirte. Dies giebt folgende Formel:

$$\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1},$$

welche sich in $\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}$, so wie diese in $\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5}{2 \times 1}$, und diese in $11 \times 10 \times 9 \times 4 \times 7 \times 5 = 138600$ sehr leicht verändern läßt.

§. 27.

§. 27.

Da 1 weder multiplicirt noch dividirt, so kann solches hier jedesmal ausgelassen werden, und da die letzten Zifern des Zählers in den Brüchen § 25 und 26 mit den ersten in dem Nenner übereinstimmen, so können auch diese sogleich wegfallen. Auf diese Art erhält man in dem Exempel §. 25 sogleich

$$\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{3\times 2} = 9\times 8\times 7\times 5 = 2520,$$

und in dem Exempel § 26

$$\frac{11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}{2\times 3\times 2} = 11\times 10\times 9\times 4\times 7\times 5$$

$$= 138600.$$

§. 28.

Nunmehr wird folgende Rechnung deutlich seyn, durch welche die Anzahl aller Setzungen der Buchstaben aaaabbbbcccdde gefunden wird.

$$\frac{15\times 14\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 3\times 2\times 2} =$$

$$\frac{15\times 14\times 13\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{2\times 2} =$$

$$15\times 14\times 13\times 11\times 10\times 9\times 2\times 7 = 37837800.$$

§. 29.

Des bisherigen kann man sich unter andern bedienen, um die Frage zu beantworten, auf wie verschiedene Art man mit einer gegebenen Anzahl von Würfeln eine bestimmte Summe von Augen zu werfen im Stande sey? Sollte z. B. bestimmt werden, auf wie mannichfaltige Art mit drey Würfeln 12 geworfen werden können; so können die Würfel folgende Augen haben:

651
642
633
552
543
444

und zwar so, daß ein jeder Würfel eine jede Anzahl der Augen in jeder Reihe auf der oben liegenden Fläche enthalten kann.

Hat nun bey der ersten Reihe der 1te Würfel 6, so kann der andere 5 und der 3te 1, oder der andere 1 und der 3te 5 zeigen. Sind ferner die Augen des ersten Würfels 5, so können die Augen des andern 6 und die des 3ten 1, oder die Augen des andern 1, und die des 3ten 6 seyn u. s. f. Es giebt auf diese Art

die 1te Reihe 6 Würfe,
— 2 — — 6 —
— 3 — — 3 —
— 4 — — 3 —
— 5 — — 6 —
— 6 — — 1 — und in allem können also 12 mit

drey Würfeln auf 25erley Art geworfen werden.

§. 30.

§. 30.

Mit vier Würfeln kann man 15 werfen, wenn die oben liegenden Augen der Würfel sind

6621		12
6531		24
6522		12
6441	Ein jeder dieser	12
6432	Fälle	24
6333	giebt aber Arten	4
5541		12
5532		12
5442		12
5433		12
4443		4
	in Summa	140.

Von den
Combinationen.

§. 31.

Was man unter den Combinationen zu verstehen habe, ist bereits § 1. und 2. erkläret worden, so wie auch § 3. der Gegenstand, mit dem sich das folgende beschäftigen wird, angezeiget worden ist. Es giebt hier noch mehrere Fälle als bey der Lehre von den Versetzungen; doch setzt ihre Anführung noch einige anderweitige Erklärungen voraus.

§. 32.

Man bedient sich in der Lehre von den Combinationen öfters des Worts Exponent, und versteht darunter die Zahl, welche aus eben so vielen Einheiten besteht, als in jeder der aus den gegebenen Dingen zu machenden Verbindung Dinge enthalten seyn sollen. Sollte man z. B. die Buchstaben a, b, c, d, e zu dreyen mit einander verbinden, so wäre der Exponent der Combination 3.

§. 33.

Wenn eine gewisse Anzahl von Dingen gegeben ist, und ihre Combinationen gesucht werden sollen; so kann

solches

solches entweder nach einem jeden oder irgend einem Exponenten besonders, oder nach allen zusammen geschehen. Wären z. B. die Buchstaben a, b, c, d und e gegeben, so könnte gefragt werden, entweder: Wie oft lassen sich diese Buchstaben zu eins, zu zweyen, zu dreyen, zu vieren und zu fünfen verbinden? oder: Wie viel Combinationen erhält man überhaupt, wenn man die Buchstaben a, b, c, d und e so wol zu eins, als zu zweyen und zu dreyen und zu vieren und zu fünfen verbindet? Die Antwort auf die letztere Frage ist die Bestimmung der Combinationen der Buchstaben a, b, c, d und e nach allen Exponenten zusammen genommen. Die Antwort aber auf die erstere die Bestimmung der Combinationen der Buchstaben a, b, c, d und e nach einem jeden Exponenten insbesondere.

§. 34.

Wenn die Combinationen einer gegebenen Menge von Dingen bestimmt werden sollen; so darf man entweder ein jedes derselben nur einmal, oder mehreremal nehmen, und die zu combinirenden Dinge sind entweder insgesammt von einander verschieden, oder zum Theil einander gleich. Alle diese verschiedenen Fälle sollen nun nach einander betrachtet werden.

Von den Combinationen gegebener Dinge, die alle von einander verschieden sind, und wovon jedes nur einmal genommen werden darf, nach allen Exponenten zusammengenommen.

§. 35.

Vorausgesetzt, daß man auch, wenn ein jedes von den zu combinirenden Dingen einzeln genommen wird, solches Combinationen zu eins, oder nach dem Exponenten 1 nennt; so ist offenbar, daß ein jedes einzelne Ding allein genommen, nur eine einzige Combination giebt. Um nun die Anzahl der Combinationen jeder gegebenen Menge von Dingen, die alle von einander verschieden sind, und wovon jedes nur einmal genommen werden soll, nach allen Exponenten zusammen genommen, zu bestimmen, überlege man folgendes. Ein einzeles Ding allein genommen giebt nur eine einzige Combination. Nimmt man dazu noch ein anderes, so giebt dies ausser der eben genannten noch eine Combination zu eins, und eine Verbindung zu zweyen. Kommt nun dazu noch ein drittes, so erhält man dadurch noch eine Combination zu eins, und indem man dasselbe mit allen schon erhaltenen Combinationen verbindet, überdem zwey Combinationen zu zwey, und eine Combination zu drey. Kommt ferner noch ein viertes hinzu, so giebt das wieder eine

Com=

Combination zu eins, und indem man es mit allen schon erhaltenen Combinationen verbindet, drey Combinationen zu zweyen, dreye zu dreyen, und eine zu vieren u. s. f. Nennt man die zu combinirenden Dinge a, b, c, d, e, f u. s. f. so sind in folgender Tabelle

1. a
2. b, ab
3. c, ac, bc, abc
4. d, ad, bd, cd, abd, acd, bcd, abcd
5. e, ae, be, ce, de, abe, ace, ade, bce, bde, cde, abce, abde, acde, bcde, abcde
6. f, af, bf, cf, df, ef, abf, acf, adf, aef, bcf, bdf, bef, cdf, cef, def, abcf, abdf, abef, acdf, acef, adef, bcdf, bcef, bdef, cdef, abcdf, abcef, abdef, acdef, bcdef, abcdef

u. s. w. in der ersten Reihe alle Combinationen Eines Dinges, in der ersten und zweyten alle Combinationen zweyer Dinge, in der ersten, zweyten und dritten alle Combinationen dreyer Dinge, in der ersten, zweyten, dritten und vierten alle Combinationen gegebener vier Dinge u. s. w. und zwar nach allen Exponenten zusammengenommen enthalten.

§. 36.

Betrachtet man die vorhergehende Tabelle und das unmittelbar vor derselben gesagte aufmerksam; so sieht man bald, daß eine jede einzele Reihe derselben nicht nur allen vor ihr vorhergehenden in Ansehung der Anzahl der enthaltenen Combinationen gleich sey, sondern auch, daß eine jede Reihe noch einmal so viel Combinationen als die unmittelbar vorhergehende enthalte. Dies vorausgesetzt, so ist es leicht, die Summe aller in jeder Reihenmenge vom Anfang an, enthaltenen Combinationen zu finden; indem dieselbe die Summe einer geometrischen von 1 anfangenden Progression mit dem Exponenten 2 ist. Es ist daher die Summe

der beyden ersten Reihen			gleich	2^2	— 1	oder	3
—	3	— —	—	2^3	— 1	—	7
—	4	— —	—	2^4	— 1	—	15
—	5	— —	—	2^5	— 1	—	31
—	6	— —	—	2^6	— 1	—	63
—	7	— —	—	2^7	— 1	—	127
—	8	— —	—	2^8	— 1	—	255
—	9	— —	—	2^9	— 1	—	511
—	10	— —	—	2^{10}	— 1	—	1023

u. s. w.

§. 37.

Um also die Anzahl aller Combinationen jeder gegebenen Menge von Dingen, die alle von einander unterschieden sind, und wovon keines mehr als einmal genommen werden darf, zu finden, hat man nur nöthig, die Zahl 2 zu der Dignität zu erheben, deren

deren Exponent der Anzahl der gegebenen Dinge gleich ist, und von dem gefundenen 1 abzuziehen.

Von den Combinationen

gegebener Dinge, die alle von einander verschieden sind, und wovon jedes nur einmal genommen werden darf, nach einem bestimmten Exponenten.

§. 38.

Was für eine Anzahl von Dingen auch gegeben seyn mag, so ist die Anzahl aller Combinationen zu eins gleich der Anzahl der gegebenen Dinge. Dies ist für sich klar. Was aber die Combinationen nach einem andern Exponenten anbetrifft, so erfordert die Bestimmung derselben eine weitläuftigere Betrachtung.

§. 39.

Es sey zuvörderst eine gewisse Menge von Dingen, z. B. die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g und h zu zwey zu verbinden; so ist klar, daß man zu jedem der gegebenen Dinge nach der Reihe alle übrigen setzen, und so alle nur möglichen Folgen zu zwey erhalten könne. Aus a, b, c, d, e, f, g und h erhält man auf diese Art

1. ab, ac, ad, ae, af, ag, ah
2. ba, bc, bd, be, bf, bg, bh
3. ca, cb, cd, ce, cf, cg, ch
4. da, db, dc, de, df, dg, dh
5. ea, eb, ec, ed, ef, eg, eh
6. fa, fb, fc, fd, fe, fg, fh
7. ga, gb, gc, gd, ge, gf, gh
8. ha, hb, hc, hd, he, hf, hg.

Macht man aus den Verbindungen eines Dinges mit allen übrigen, wie hier geschehen, jedesmal eine Reihe, so erhält man so viel Reihen, als Dinge zu verbinden gegeben sind, und eine jede Reihe enthält eine Verbindung weniger, als der gedachten Dinge da sind; doch kommt eine jede Verbindung zweymal vor, daß also die eigentliche Anzahl aller Verbindungen zu zwey gefunden wird, wenn man die Zahl der gegebenen Dinge mit einer um 1 kleinern Zahl multiplicirt, und das Product durch zwey dividirt.

§. 40.

Die Combinationen der Buchstaben a, b, c, d, e, f, g und h sind, weil man bey den Combinationen auf die Ordnung der combinirten Dinge nicht sieht, § 1, folgende.

ab,

ab, ac, ad, ae, af, ag, ah
bc, bd, be, bf, bg, bh
cd, ce, cf, cg, ch
de, df, dg, dh
ef, eg, eh
fg, fh
gh.

§. 41.

Die Anzahl aller Combinationen zu zwey ist also für Dinge

2	—	$\frac{2\times1}{2}$	oder	1
3	—	$\frac{3\times2}{2}$	—	3
4	—	$\frac{4\times3}{2}$	—	6
5	—	$\frac{5\times4}{2}$	—	10
6	—	$\frac{6\times5}{2}$	—	15
7	—	$\frac{7\times6}{2}$	—	21
8	—	$\frac{8\times7}{2}$	—	28
9	—	$\frac{9\times8}{2}$	—	36
10	—	$\frac{10\times9}{2}$	—	45 u. s. w.

§. 42.

Sind verschiedene Dinge zu drey zu combiniren, so kann man zu jeder Combination zu zwey ein jedes von den gegebenen Dingen ausser den schon darin enthaltenen setzen, und erhält dadurch so viel Folgen, als die Zahl der Combinationen zu zwey mit der um 2 verminderten Zahl der gegebenen Dinge multiplicirt, anzeigt.

Behält

Behält man z. B. die Buchstaben a, b, c, d, e, f, g und h bey; so bekommt man auf diese Art aus § 40

aus der 1ten Reihe

abc, abd, abe, abf, abg, abh
acb, acd, ace, acf, acg, ach
adb, adc, ade, adf, adg, adh
aeb, aec, aed, aef, aeg, aeh
afb, afc, afd, afe, afg, afh
agb, agc, agd, age, agf, agh
ahb, ahc, ahd, ahe, ahf, ahg

aus der 2ten Reihe

bca, bcd, bce, bcf, bcg, bch
bda, bdc, bde, bdf, bdg, bdh
bea, bec, bed, bef, beg, beh
bfa, bfc, bfd, bfe, bfg, bfh
bga, bgc, bgd, bge, bgf, bgh
bha, bhc, bhd, bhe, bhf, bhg

aus der 3ten Reihe

cda, cdb, cde, cdf, odg, cdh
cea, ceb, ced, cef, ceg, ceh
cfa, cfb, cfd, cfe, cfg, cfh
cga, cgb, cgd, cge, cgf, cgh
cha, chb, chd, che, chf, chg

aus der 4ten Reihe

dea, deb, dec, def, deg, deh
dfa, dfb, dfc, dfe, dfg, dfh
dga, dgb, dgc, dge, dgf, dgh
dha, dhb, dhc, dhe, dhf, dhg

aus

aus der 5ten Reihe	efa, efb, efc, efd, efg, efh ega, egb, egc, egd, egf, egh eha, ehb, ehc, ehd, ehf, ehg
aus der 6ten Reihe	fga, fgb, fgc, fgd, fge, fgh fha, fhb, fhc, fhd, fhe, fhg
aus der 7ten Reihe	gha, ghb, ghc, ghd, ghe, ghf

§. 43.

Da aber in den auf diese Art erhaltenen Verbindungen mehrere vorkommen, welche blos durch die Ordnung der darin enthaltenen Dinge verschieden sind; so ist die Anzahl der Combinationen zu dreyen im eigentlichen Verstande kleiner, als dieselbe im vorhergehenden § angegeben worden, und es muß also noch bestimmt werden, um wie viel, oder wie viel mal dieses sey? Da man zu jeder Combination zu zwey, ein jedes der gegebenen Dinge, ausser den schon darin enthaltenen gesetzt hat; so muß deswegen eine jede Verbindung dreymal vorkommen, denn es erhält auf diese Art jede der drey Combinationen zu zwey, die aus dreyen von den gegebenen Dingen gemacht sind, das dritte ihr noch fehlende, und diese drey Setzungen geben also immer nur eine Combination zu drey. Aus a, b, c z. B. waren die Combinationen zu zwey ab, ac, bc. Indem man aus den Combinationen zu zwey nach dem vorhergehenden § die Combina-

tionen

tionen zu drey machte, verband man mit ab, c, mit ac b und mit bc, a, und daraus erwächst nur eine einzige Combination zu drey, nemlich abc. Die nach dem vorhergehenden § gefundene Zahl muß also noch mit 3 dividirt werden, wenn sie die Anzahl der möglichen Combinationen zu dreyen im eigentlichen Verstande anzeigen soll.

§. 44.

Die Combinationen der Buchstaben a, b, c, d, e, f, g und h zu dreyen sind also

abc, abd, abe, abf, abg, abh
acd, ace, acf, acg, ach
ade, adf, adg, adh
aef, aeg, aeh
afg, afh
agh

bcd, bce, bcf, bcg, bch
bde, bdf, bdg, bdh
bef, beg, beh
bfg, bfh
bgh

cde, cdf, cdg, cdh
cef, ceg, ceh
cfg, cfh
cgh

def,

def, deg, deh
dfg, dfh
dgh
efg, efh
egh
fgh.

§. 45.

Um also die Anzahl aller möglichen Combinationen zu dreyen von jeder gegebenen Menge von Dingen zu finden, multiplicirt man die Anzahl der Combinationen eben dieser Dinge zu zweyen mit der um 2 verminderten Zahl der gegebenen Dinge, und dividirt das Product durch 3; oder man multiplicirt die Zahl der gegebenen Dinge mit einer um 1, und was man dadurch erhält, noch mit einer um 2 kleinern Zahl, und dividirt dies Product durch 2×3 oder 6.

Sind also der gegebenen Dinge				so ist die Zahl der Combinationen zu dreyen
3	—	$\frac{3\times2\times1}{2\times3}$	—	1
4	—	$\frac{4\times3\times2}{2\times3}$	—	4
5	—	$\frac{5\times4\times3}{2\times3}$	—	10
6	—	$\frac{6\times5\times4}{2\times3}$	—	20
7	—	$\frac{7\times6\times5}{2\times3}$	—	35
8	—	$\frac{8\times7\times6}{2\times3}$	—	56
9	—	$\frac{9\times8\times7}{2\times3}$	—	84
10	—	$\frac{10\times9\times8}{2\times3}$	—	120 u. s. w.

§. 46.

§. 46.

Soll eine gewisse Anzahl von Dingen zu vieren combinirt werden; so kann man, nachdem man die Combinationen derselben zu dreyen gesucht hat, zu einer jeden derselben ein jedes von den gegebenen Dingen ausser den bereits darin enthaltenen setzen, und erhält auf diese Art eine Zahl, welche der Zahl der Combinationen zu dreyen, multiplicirt mit der um drey verminderten Anzahl der gegebenen Dinge gleich ist. In den so erhaltenen Setzungen aber machen je vier und vier nur eine einzige Combination zu vieren aus, und um die Anzahl aller Combinationen zu vieren zu finden, muß man daher die eben gedachte Zahl noch mit 4 dividiren. **Man findet also die Anzahl aller Combinationen jeder Menge von Dingen zu vieren, wenn man die Zahl der gegebenen Dinge mit den dreyen auf sie in der natürlichen Ordnung folgenden kleinern Zahlen multiplicirt, und das Product durch 4 × 6 oder 24 oder 2 × 3 × 4 dividirt.** Man verfahre hier auf eine ähnliche Art als vorhin bey den Combinationen zu dreyen; so wird man sich von der Wahrheit dieser Behauptung auf das vollständigste überzeugen.

§. 47.

§. 47.

Sind also der gegebenen Dinge				so ist die Anzahl der Combinationen zu vieren.
4	—	$\frac{4\times3\times2\times1}{2\times3\times4}$	—	1
5	—	$\frac{5\times4\times3\times2}{2\times3\times4}$	—	5
6	—	$\frac{6\times5\times4\times3}{2\times3\times4}$	—	15
7	—	$\frac{7\times6\times5\times4}{2\times3\times4}$	—	35
8	—	$\frac{8\times7\times6\times5}{2\times3\times4}$	—	70
9	—	$\frac{9\times8\times7\times6}{2\times3\times4}$	—	126
10	—	$\frac{10\times9\times8\times7}{2\times3\times4}$	—	210 u. s. w.

§. 48.

Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich, daß für die Combinationen zu 5

bey gegebenen Dingen				die Anzahl ist
5	—	$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times3\times4\times5}$	—	1
6	—	$\frac{6\times5\times4\times3\times2}{2\times3\times4\times5}$	—	6
7	—	$\frac{7\times6\times5\times4\times3}{2\times3\times4\times5}$	—	21
8	—	$\frac{8\times7\times6\times5\times4}{2\times3\times4\times5}$	—	56
9	—	$\frac{9\times8\times7\times6\times5}{2\times3\times4\times5}$	—	126
10	—	$\frac{10\times9\times8\times7\times6}{2\times3\times4\times5}$	—	252 u. s. w.

§. 49.

Ueberhaupt findet man die Anzahl aller Combinationen jeder gegebenen Menge von Dingen nach irgend einem Exponenten oder zu irgend einer Zahl, wenn man von der Zahl der gegebenen Dinge an (diese aber mitgerechnet) so viel in der natürlichen Ordnung absteigende Zahlen nimmt, als der Exponent der Combinationen Einheiten hat, selbige mit einander multiplicirt, und dies Product durch das Product eben so vieler in der natürlichen Ordnung von 1 an auf einander folgenden Zahlen dividirt.

Würde z. B. gefragt, wie oft man 50 von einander verschiedene Dinge zu 8 combiniren könnte; so müßte man 50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43 mit einander multipliciren, und dies Product durch das Product aus 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dividiren.

§. 50.

Es läßt sich aber der Weg, den man bey einer wörtlichen Befolgung dieser Regel zu betreten hätte, in einzeln Fällen sehr verkürzen. Denn wenn erstlich die Zahl der Combinationen für einen einzigen Exponenten zu suchen ist; so kann man den zu entwickelnden Bruch durch die Division des Zählers und Nenners mit einer und derselben Zahl kleiner machen, und endlich den Nenner ganz wegschaffen. Um z. B. die § 49. aufgeworfene Frage zu beantworten, müßte man folgenden Bruch entwickeln:

$\frac{50\times49\times48\times47\times46\times45\times44\times43}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}$. Durch die Division des Zählers und Nenners mit 6×8 oder 48 wird daraus $\frac{50\times49\times47\times46\times45\times44\times43}{1\times2\times3\times4\times5\times7}$, so wie hieraus durch die Division mit 7, $\frac{50\times7\times47\times46\times45\times44\times43}{1\times2\times3\times4\times5}$, und hieraus durch die Division mit 3×5 oder 15, $\frac{50\times7\times47\times46\times3\times44\times43}{1\times2\times4}$, und hieraus durch die Division mit 4, $\frac{50\times7\times47\times46\times3\times11\times43}{1\times2}$, und hieraus durch die Division mit 2, $50\times7\times47\times23\times3\times11\times43 = 536878650$.

§. 51.

Sollten aber **zum andern** die Combinationen für mehrere Exponenten von 1 an, aber für jeden besonders gefunden werden; so könnte man das jedesmal gefundene zur leichtern Findung des folgenden gebrauchen. Sollten z. B. die Combinationen von 50 verschiedenen Dingen für jeden der Exponenten von 1 bis 8 gefunden werden; so wären

für die Exponenten		diese Combinationen
1	$\frac{50}{1}$	50
2	$\frac{50\times49}{2}$	1225
3	$\frac{1225\times48}{3} = 1225\times16$	19600
4	$\frac{19600\times47}{4} = 4900\times47$	230300
5	$\frac{230300\times46}{5} = 46060\times46$	2118760
6	$\frac{2118760\times45}{6} = 1059380\times15$	15890700
7	$\frac{15890700\times44}{7} = 2270100\times44$	99884400
8	$\frac{99884400\times43}{8} = 12485550\times43$	536878650.

§. 52.

Oft ist daran gelegen, die aus einer gegebenen Anzahl von Dingen möglichen Combinationen selbst aufzusetzen, und dazu kann man sich folgender Regel bedienen. Man merkt sich vor allen Dingen die zu combinirenden Dinge in einer gewissen Folge. Darauf nimmt man 1) vom Anfang an so viel davon, als jede Combination erhalten soll, und vertauscht nach und nach das letzte mit allen folgenden. Nun läßt man 2) von den bisher unverändert gebliebenen Dingen das letzte weg, setzt dagegen das nach den zuerst genommenen folgende hinzu, und vertauscht dies nach und nach mit allen ihm folgenden. Ist dies geschehen, so wird wiederum 3) von den noch nicht vertauschten Dingen das letzte weggelassen, und dagegen das nach den zuerst genommenen in der zweyten Stelle folgende genommen, und dieses nach und nach mit allen ihm folgenden vertauscht, und auf diese Art 4) so lange fortgefahren, bis man mit der Weglassung bis an das letzte der im Anfange genommenen Dinge gekommen ist. Hierauf läßt man 5) alle übrige weg, und setzt dagegen eben so viele von den folgenden hinzu, und verfährt von neuem auf die beschriebene Art u. s. w. Nun läßt man 6) das erste der gegebenen Dinge ganz weg, und verfährt mit den folgenden ganz so, als vorher mit allen. Ist man damit zu Ende gekommen, so läßt man 7) die beyden ersten Dinge ganz weg, und verfährt wieder

der auf eine ähnliche Art mit den übrigen. Und überhaupt setzt man dieses Geschäfte, so lange als es möglich ist, fort.

§. 53.

Um diese allgemeine Regel mit Einem Beyspiele wenigstens zu erläutern, so seyen die Combinationen der Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h zu vieren aufzusetzen. Man findet hier

abcd, abce, abcf, abcg, abch nach § 52. 1
abde, abdf, abdg, abdh — — 2
adef, adeg, adeh — — 3 u. 4
aefg, aefh — — 5
afgh

bcde, bcdf, bcdg, bcdh
bcef, bceg, bceh
bfeg, bfeh nach § 52. 6
bgeh

cdef, cdeg, cdeh
cdfg, cdfh nach § 52. 7
cefh

defg, defh
degh
efgh

§. 54.

Anwendungen des bisherigen werden in der Folge öfters vorkommen; hier sollen daher nur einige Fälle be=

rührt werden. Wollte also jemand von 10 Nummern in der Zahlenlotterie alle Auszüge, Amben, Ternen, Quaternen und Quinen besetzen, und wissen, wie viel Sätze jeder Art er zu machen habe, so wäre die Anzahl der

Auszüge die Zahl der Combinationen von 10 Dingen zu						1
Amben	—	—	—	—	—	2
Ternen	—	—	—	—	—	3
Quaternen		—	—	—	—	4
Quinen	—	—	—	—	—	5.

oder die Anzahl der Auszüge				$\frac{10}{1}$	=	10
—	—	—	Amben	$\frac{10\times9}{2}$	=	45
—	—	—	Ternen	$\frac{45\times8}{3}$	=	120
—	—	—	Quaternen	$\frac{120\times7}{4}$	=	210
—	—	—	Quinen	$\frac{210\times6}{5}$	=	252.

§. 55.

In der Lehre von den arithmetischen und geometrischen Progressionen kommt der Satz vor: Wenn von folgenden 5 Stücken einer Progression, dem 1ten Gliede, der Differenz oder dem Exponenten, der Zahl aller Glieder, dem letzten Gliede und der Summe der Progression dreye gegeben sind; so lassen sich daraus die beyden übrigen finden. Wie viel Fälle giebt es hier, und welches sind sie?

Offenbar giebt es hier zweymal so viel Fälle, als man fünf Dinge zu dreyen combiniren kann, indem man aus jeden gegebenen drey Dingen zwey andere zu finden

hat;

hat; also $2 \times \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 2 \times 10 = 20$. Diese Fälle sind, wenn man das erste Glied a, die Differenz oder den Exponenten e, die Zahl aller Glieder n, das letzte Glied v und die Summe der Progression s nennt.

gegebene Dinge		gesuchte
a, e, n,	—	v s
a, e, v,	—	n s
a, e, s,	—	n v
a, n, v,	—	e s
a, n, s,	—	e v
a, v, s,	—	e n
e, n, v,	—	a s
e, n, s,	—	a v
e, v, s,	—	a n
n, v, s,	—	a e

Von den Combinationen

solcher Dinge, welche zwar von einander verschieden sind, wovon aber jedes öfters genommen werden darf.

§. 56.

Wenn eine Menge von Dingen zu combiniren gegeben ist, die zwar insgesammt von einander verschieden sind, davon aber jedes öfters genommen werden darf; so kann man die Combinationen selbst auf folgende Art sehr leicht finden. Man macht auf eine ähnliche Art, als § 35 eben so viel Reihen, als man zu combinirende Dinge hat, (den Anfang dieser Reihen machen die zu combinirenden Dinge) verbindet aber, um die Combinationen zu zwey zu finden, jedes der gegebenen Dinge nicht nur mit allen vorhergehenden, sondern auch mit sich selbst; ferner, um die Combinationen zu drey zu finden, jedes der gegebenen Dinge nicht nur mit den Combinationen zu zwey aller vorhergehenden Reihen, sondern auch mit denen, die in seiner eigenen Reihe stehen, und auf eine ähnliche Art sucht man die Combinationen zu vier, zu fünf u. s. w. Es seyen die Buchstaben a, b, c, d, e zu combiniren, so erhält man auf diese Art

1. a, aa, aaa, aaaa

2. b, ab, bb, aab, abb, bbb, aaab, aabb, abbb, bbbb

3. c,

3. c, ac, bc, cc, aac, abc, bbc, acc, bcc, ccc, aaac, aabc, abbc, bbbc, aacc, abcc, bbcc, accc, bccc, cccc

4. d, ad, bd, cd, dd, aad, abd, bbd, acd, bcd, ccd, add, bdd, cdd, ddd, aaad, aabd, abbd, bbbd, aacd, abcd, bbcd, accd, bccd, cccd, aadd, abdd, bbdd, acdd, bcdd, ccdd, addd, bddd, cddd, dddd

5. e, ae, be, ce, de, ee, aae, abe, bbe, ace, bce, cce, ade, bde, cde, dde, aee, bee, cee, dee, eee, aaae, aabe, abbe, bbbe, aace, abce, bbce, acce, bcce, ccce, aade, abde, bbde, acde, bcde, ccde, adde, bdde, cdde, ddde, aaee, abee, bbee, acee, bcee, ccee, adee, bdee, cdee, ddee, aeee, beee, ceee, deee, eeee.

§. 57.

Ueberdenkt man den hier gegangenen Weg sorgfältig; so sieht man bald, daß auf diese Art

1. die Combinationen für jeden Exponenten und bey jeder Anzahl der gegebenen Dinge in so vielen Reihen stehen, als Dinge zu combiniren gegeben sind;

2. daß jede dieser Reihen nicht mehr als eine Combination zu eins enthalte, und daß also die Anzahl aller Combinationen zu eins jedesmal der Anzahl der zu combinirenden Dinge gleich sey;

3. daß in jeder dieser Reihen so viele Combinationen zu zweyen vorkommen müssen, als in ihr und allen vorhergehenden Combinationen zu eins sind; so wie ferner

4. in jeder auch so viele Combinationen zu dreyen stehen müssen, als in ihr und allen vorhergehenden Reihen Combinationen zu zweyen sind; und daß also überhaupt

5. eine jede dieser Reihen so viele Combinationen für irgend einen Exponenten enthalte, als in ihr und allen vorhergehenden Reihen Combinationen für den um 1 kleinern Exponenten enthalten sind.

§. 58.

Hiernach ist es leicht, eine Tabelle zu verfertigen, aus welcher man die Anzahl jeder Art von Combinationen für jede gegebene Menge von Dingen in jeder der gedachten Reihen finden können. Der Anfang einer solchen Tabelle ist:

Exponenten der Combination.

Anzahl der gegebenen Dinge.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4.	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
5.	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
6.	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
7.	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
8.	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
9.	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
10.	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

§. 59.

Die Verfertigungsart einer solchen Tabelle ist nemlich folgende. Nachdem man zuvörderst die Exponenten der Combination und die Anzahl der gegebenen Dinge, wie die vorhergehende Tabelle zeigt, geschrieben hat; so setzt man neben die Zahlen der Mengen der gegebenen Dinge 1, denn eine jede Reihe enthält nur eine Combination zu 1. Ferner addirt man diese 1 vom Anfang an, so daß man erst eine, dann zwey, dann drey Reihen u. s. f. nimmt, und setzt die Summe jedesmal neben die 1, bis zu welcher man fortgegangen ist. So entsteht die zweyte Ver-

Verticalreihe, und jede Zahl in derselben enthält so viel Einheiten, als Combinationen zu zweyen in der Reihe, worin sie steht, vorkommen können. Auf eine ähnliche Art, als so die zweyte Verticalreihe aus der ersten entsteht, macht man darauf die dritte aus der zweyten, dann die vierte aus der dritten, die fünfte aus der vierten u. s. f.

§. 60.

Hat man dergleichen Tabellen, so kann man durch die Summirung der darin enthaltenen Verticalreihen die Anzahl der Combinationen, welche eine gegebene Menge von Dingen für einen bestimmten Exponenten enthält, finden. Würde z. B. gefragt, wie oft man 8 verschiedene Dinge, davon aber ein jedes öfters genommen werden kann, zu 6 combiniren könnte? so wäre die Zahl aller dieser Combinationen gleich der Summe der 8 ersten Zifern der 6ten Verticalreihen, oder 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462 und 792, also gleich der Zahl 1716.

§. 61.

Es ist aber hier sehr daran gelegen, einen bequemern Weg zur Bestimmung der Anzahl aller Combinationen für jede gegebene Anzahl von Dingen und für jeden Exponenten zu finden, indem leicht für die etwa vorräthige Tabelle die gegebene Anzahl von Dingen oder der Exponent der Combination zu groß seyn kann, und die

Fort=

Fortsetzung der hier nöthigen Tabelle immer mühsamer wird, je weiter man fortgeht. Auch läßt sich ein solcher Weg durch eine genauere Betrachtung der Tabelle § 58. leicht finden, und er soll daher hier ebenfalls beschrieben werden.

§. 62.

Zuvörderst fällt bey der Tabelle § 58 in die Augen, daß die darin befindlichen Verticalreihen mit den gleichnamigen Transversalreihen derselben durchaus gleich sind. Die 3te Verticalreihe z. B. ist 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, und eben diese Zahlen findet man in der dritten Transversalreihe.

Ferner erhellet aus der Verfertigungsart dieser Tabelle, daß ein jedes Glied einer jeden Verticalreihe so groß sey, als die Summe aller Glieder der vorhergehenden Reihe vom Anfang an bis zu jenem Gliede. So ist z. B. das 8te Glied der 6ten Verticalreihe allein genommen so groß, als die Summe der 8 ersten Glieder der 5ten Verticalreihe.

Drittens ist ein jedes Glied einer jeden Transversalreihe so groß, als die Summe aller Glieder der vorhergehenden Transversalreihe vom Anfang an bis zu ihm. Das 8te Glied der 7ten Transversalreihe z. B. ist so groß, als die Summe der 8 ersten Glieder der 6ten Transversalreihe, oder 1716 so groß als 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, 792 zusammengenommen.

§. 63.

§. 63.

Ausser dem angeführten ist auch das eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Tabelle § 58, die aber hier nur gezeigt und nicht bewiesen werden kann, daß man, wenn man alle Glieder irgend einer Verticalreihe vom Anfang an durch die gleichnamigen Glieder der vorhergehenden Reihe dividirt, eine arithmetische von 1 anfangende und durch einen Bruch aufsteigende arithmetische Progression erhält, deren *Zähler* 1, der Nenner aber die Zahl der Reihe ist, mit deren Gliedern man dividirt. Dividirt man z. B. die dritte Reihe auf die gedachte Art durch die 2te; so erhält man

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{1} & = & 1 & = & 1 \\
\frac{3}{2} & = & 1\frac{1}{2} & = & \frac{3}{2} \\
\frac{6}{3} & = & 2 & = & \frac{4}{2} \\
\frac{10}{4} & = & 2\frac{1}{2} & = & \frac{5}{2} \\
\frac{15}{5} & = & 3 & = & \frac{6}{2} \\
\frac{21}{6} & = & 3\frac{1}{2} & = & \frac{7}{2} \\
\frac{28}{7} & = & 4 & = & \frac{8}{2} \\
\frac{36}{8} & = & 4\frac{1}{2} & = & \frac{9}{2} \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Dividirt man aber die 4te Reihe durch die dritte, so erhält man

$\frac{1}{1} =$

$$\frac{1}{1} = 1 = 1$$
$$\frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{10}{6} = 1\tfrac{2}{3} = \frac{5}{3}$$
$$\frac{20}{10} = 2 = \frac{6}{3}$$
$$\frac{35}{15} = 2\tfrac{1}{3} = \frac{7}{3}$$
$$\frac{56}{21} = 2\tfrac{2}{3} = \frac{8}{3}$$
$$\frac{84}{28} = 3 = \frac{9}{3} \text{ u. s. f.}$$

Die 5te Reihe durch die 4te dividirt, giebt

$$\frac{1}{1} = 1 = 1$$
$$\frac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{15}{10} = 1\tfrac{1}{2} = \frac{6}{4}$$
$$\frac{35}{20} = 1\tfrac{3}{4} = \frac{7}{4}$$
$$\frac{70}{35} = 2 = \frac{8}{4}$$
$$\frac{126}{56} = 2\tfrac{1}{4} = \frac{9}{4}$$
$$\frac{210}{84} = 2\tfrac{1}{2} = \frac{10}{4} \text{ u. s. f.}$$

§. 64.

Diese Eigenschaft ist deswegen wichtig, weil sie auf eine Regel führt, wodurch man aus jedem gegebenen Gliede jeder Transversalreihe das unmittelbar vorhergehende und nachfolgende Glied in eben dieser Reihe zu finden im Stande ist. Sucht man nemlich einen Bruch, dessen Nenner dem über dem gegebenen Gliede stehenden Exponenten der Combination gleich ist, und zum Zähler

die

die Zahl hat, welche die Summe aus diesem Nenner und der neben dem gegebenen Gliede stehenden Zahl der zu combinirenden Dinge weniger eins ist, so giebt die Multiplication des gegebenen Gliedes mit diesem Bruche das unmittelbar folgende, die Division des gedachten Gliedes mit diesem Bruche aber, nachdem man zuvor seinen Zähler um 1 kleiner gemacht hat, das unmittelbar vorhergehende Glied in eben der Transversalreihe. Es sey z. B. das 8te Glied der 7ten Transversalreihe oder 1716 gegeben, damit daraus das nachfolgende 9te Glied sowol als das vorhergehende 7te eben derselben Reihe gefunden werde; so erhält man auf die vorhin gedachte Art den Bruch $\frac{8+6}{8}$ oder $\frac{14}{8}$ oder $\frac{7}{4}$ zum Multiplicator, und $1716 \times \frac{7}{4}$ macht 3003; und den Bruch $\frac{13}{7}$ zum Divisor, und $1716 : \frac{13}{7}$ oder $1716 \times \frac{7}{13}$ ist 924.

§. 65.

Hiernach ist es nun leicht, aus der gegebenen Menge der zu combinirenden Dinge und dem Exponenten der Combination sogleich das letzte Glied der Verticalreihe zu finden, welche alle Combinationen der gegebenen Dinge für den ebenfalls gegebenen Exponenten enthält. Sollten z. B. 9 verschiedene Dinge zu 7 combinirt werden, so wäre das eben gedachte letzte Glied das 9te Glied der 7ten Verticalreihe. Das 9te Glied der ersten Verticalreihe ist nun 1, folglich das 9te Glied der 2ten Vertical-

reihe

reihe $1 \times \frac{9}{1}$ oder 9, das 9te Glied der 3ten Verticalreihe $9 \times \frac{10}{2}$ oder 45, das 9te Glied der 4ten Verticalreihe $45 \times \frac{11}{3}$ oder 165, das 9te Glied der 5ten Verticalreihe $165 \times \frac{12}{4}$ oder 495, das 9te Glied der 6ten Verticalreihe $495 \times \frac{13}{5}$ oder 1287, und das 9te Glied der 7ten Verticalreihe $1287 \times \frac{14}{6}$ oder 3003. Also findet man das 9te Glied der 7ten Verticalreihe durch die Entwickelung dieses Ausdrucks $\frac{9\times10\times11\times12\times13\times14}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$.

§. 66.

Wären der zu combinirenden Dinge 15, so wäre das letzte Glied

in der 1ten Verticalreihe	— — —	1
— 2ten	— $\frac{15}{1}$ — — —	15
— 3ten	— $\frac{15\times16}{1\times2}$ — —	120
— 4ten	— $\frac{15\times16\times17}{1\times2\times3}$ —	680
— 5ten	— $\frac{15\times16\times17\times18}{1\times2\times3\times4}$ —	3060
— 6ten	— $\frac{15\times16\times17\times18\times19}{1\times2\times3\times4\times5}$ —	11628 u. s. w.

Wären aber 10 Dinge zu combiniren gegeben, so wäre das letzte Glied

in der 1ten Verticalreihe	— — —	1
— 2ten	— $\frac{10}{1}$ — — —	10
— 3ten	— $\frac{10\times11}{1\times2}$ — —	55
— 4ten	— $\frac{10\times11\times12}{1\times2\times3}$ —	220
— 5ten	— $\frac{10\times11\times12\times13}{1\times2\times3\times4}$ —	715
— 6ten	— $\frac{10\times11\times12\times13\times14}{1\times2\times3\times4\times5}$ —	2002 u. s. w.

und man erreicht hier also jedesmal seinen Zweck, wenn man von der Zahl der zu combinirenden Dinge an (sie selbst mit eingeschlossen) in der aufsteigenden natürlichen Ordnung eine Ziffer weniger nimmt, als der Exponent der Combination Einheiten hat, diese Zahlen mit einander multiplicirt, und ihr Product durch das Product eben so vieler von den ersten natürlichen Zahlen dividirt.

§. 67.

Nunmehr ist es leicht, auch ohne eine Tabelle wie § 58 **die Summe aller Combinationen jeder Menge gegebener und von einander verschiedener Dinge, wenn ein jedes derselben öfters genommen werden darf, zu finden.** Denn da ein jedes Glied einer jeden Verticalreihe so groß ist, als die Summe aller Glieder der vorhergehenden Verticalreihe vom Anfang an bis zu jenem Gliede; so hat man, um die Summe aller Combinationen einer gegebenen Menge von Dingen für irgend einen Exponenten zu finden, nichts anderes nöthig, als das letzte Glied der § 65 beschriebenen Verticalreihe nach § 66 für einen um 1 grössern Exponenten zu suchen. Hieraus ergiebt sich die Regel, **daß man, so viele Glieder, als der Exponent der Combination Einheiten hat, von einer arithmetischen Progression, die von der Zahl der gegebenen Dinge anfängt und durch 1 aufsteigt, mit einander multipliciren,**

ciren,

ciren, und dies Product durch eben so viele in der natürlichen Ordnung auf einander folgende Zahlen dividiren müsse. Sind also der gegebenen Dinge 8, und der Exponent der Combination 5; so ist die Anzahl aller Combinationen

$$\frac{8\times9\times10\times11\times12}{1\times2\times3\times4\times5} = 8\times9\times11 = 792.$$

Von der Findung der Combinationen, wenn die gegebenen Dinge verschieden sind, ein jedes aber öfters genommen werden darf, nach mehrern Exponenten zusammen genommen.

§. 68.

Wenn man das, was von den Eigenschaften der § 58 dem Anfang nach mitgetheilten Tabelle in dem 62sten § gesagt worden, sorgfältig überdenkt; so überzeugt man sich leicht davon, daß die Summe aller Combinationen einer gegebenen Menge von einander verschiedener Dinge, davon aber jedes öfters genommen werden darf, nach mehrern Exponenten von 1 an, gleich sey der um 1 verminderten Summe aller Combinationen einer um 1 grössern Menge ähnlicher Dinge für den höchsten der gedachten Exponenten. Sollten z. B. 8 Dinge auf die gedachte Art zu 5 combinirt werden; so wären alle Combinationen zu 1 in den 8 ersten Zahlen der 1ten Verticalreihe, alle

Combinationen zu 2 in den 8 ersten Zahlen der 2ten Verticalreihe, alle Combinationen zu 3 in den 8 ersten Zahlen der 3ten Verticalreihe der Tabelle § 58 enthalten u. s. w. und man fånde also die Summe aller Combinationen der gegebenen 8 Dinge für die Exponenten 1, 2, 3, 4, 5 zusammengenommen, wenn man die 8 ersten Glieder der 5 ersten Verticalreihen zusammen addirte. Nun enthält aber das 8te Glied der 2ten Verticalreihe die Summe der 8 ersten Glieder der ersten Verticalreihe, das 8te Glied der 3ten Verticalreihe die Summe der 8 ersten Glieder der 2ten Verticalreihe u. s. w. Es ist also die Summe der 8 ersten Glieder der 5 ersten Verticalreihen gleich der Summe der 6 ersten Glieder der 8ten Transversalreihe weniger 1, oder dem 6ten Gliede in der 9ten Transversalreihe weniger 1. Dieses Glied erhält man nach § 66 aus $\frac{9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} = 1287$, und die Anzahl aller Combinationen für den gegenwärtigen Fall ist also 1286.

§. 69.

Um also die Anzahl aller Combinationen jeder gegebenen Menge von Dingen, deren aber jedes öfter genommen werden darf, für mehrere Exponenten von 1 an zusammengenommen zu finden; multiplicirt man so viel Glieder einer arithmetischen durch eins aufsteigenden Progression, deren erstes Glied die Zahl der gegebenen Dinge um 1 übertrifft,

trifft, mit einander, als der höchste Exponent Einheiten hat, dividirt dies Product durch das Product eben so vieler in der natürlichen Ordnung auf einander folgenden Zahlen von 1 an, und zieht endlich von dem gefundenen Quotienten 1 ab. Ist z. B. die Anzahl der gegebenen Dinge 10, und der höchste Exponent der Combination 4; so findet man die gesuchte Zahl aus

$$\frac{11 \times 12 \times 13 \times 14}{1 \times 2 \times 3 \times 4} - 1 = 11 \times 13 \times 7 - 1 = 1000.$$

Von den Combinationen mit den Versetzungen verbunden.

§. 70.

Es ereignet sich öfters der Fall, daß man bey den Combinationen, welche sich aus einer gegebenen Anzahl von Dingen machen lassen, auch auf den Ort, welchen diese Dinge in einer jeden Combination einnehmen, zu sehen hat. In diesem Fall wird die Anzahl der Combinationen nach andern Regeln, als bisher vorgetragen worden sind, bestimmt, und welches diese Regeln sind, muß daher nunmehr ebenfalls gezeigt werden.

§. 71.

Sind zuvörderst die gegebenen Dinge insgesammt von einander verschieden, und darf keins derselben mehr als einmal genommen werden; so läßt sich aus dem, was oben über die Art und Weise, die Anzahl der möglichen Combinationen solcher Dinge für irgend einen Exponenten zu finden, gesagt worden ist, leicht herleiten, daß man, um die Anzahl der Combinationen für den gegenwärtigen Fall zu finden, nur nöthig habe, die oben nöthige Division zu unterlassen. Denn was auch für eine Anzahl von Dingen gegeben ist, so kann man, wenn man dieselben zu zweyen verbindet, ein jedes derselben zu allen übrigen setzen, und es ist also die Anzahl aller Verbindungen zu zweyen dem Producte aus der Anzahl der gegebenen Dinge in eine um 1 kleinere Zahl gleich. Will man die Verbindungen zu dreyen haben, so kann man zu jeder Verbindung zu zweyen nach und nach alle darin noch nicht vorkommende Dinge setzen, und erhält also zur Anzahl aller Verbindungen zu dreyen die Anzahl aller Verbindungen zu zweyen multiplicirt mit der um zwey verminderten Anzahl der Dinge, u. s. w. Ist also z. B. die Anzahl der gegebenen Dinge 10, so ist

für den Exponenten			die Anzahl der Verbindungen
1	— —	— —	10
2	—	10×9 —	90
3	—	90×8 —	720
4	—	720×7 —	5040
5	—	5040×6 —	30240
6	—	30240×5 —	151200
7	—	151200×4 —	604800

§. 72.

§. 72.

Man multiplicirt also hier nur so viele von der Zahl der gegebenen Dinge anfangende und immer um 1 abnehmende Zahlen mit einander, als der Exponent der Combinationen Einheiten hat, und erhält in dem gefundenen Producte die gesuchte Zahl.

§. 73.

Soll die Anzahl aller Verbindungen für mehrere Exponenten von 1 an gesucht werden; so ist folgendes zu erwägen. Da

bey gegebenen Dingen			diese Anzahl ist
1	—	—	1
2	—	—	$2+2\times1$
3	—	—	$3+3\times2+3\times2\times1$
4	—	—	$4+4\times3+4\times3\times2+4\times3\times2\times1$
5	—	—	$5+5\times4+5\times4\times3+5\times4\times3\times2+5\times4\times3\times2\times1$ u. s. w.

und

$2+2\times1$ so viel ist als $(1+1)\times2$, oder 4, und

$3+3\times2+3\times2\times1$ so viel als $(1+2+2)\times3$ oder $(1+4)\times3$ oder 15, ferner

$4+4\times3+4\times3\times2+4\times3\times2\times1$ so viel als $(1+3+3\times2+3\times2\times1)\times4$ oder $(1+15)\times4$ oder 64 u. s. f.; so ist

bey gegebenen Dingen		diese Anzahl
1	— — — — —	1
2	— $(1+1)\times 2$ — —	4
3	— $(1+4)\times 3$ — —	15
4	— $(1+15)\times 4$ — —	64
5	— $(1+64)\times 5$ — —	325
6	— $(1+325)\times 6$ — —	1956
7	— $(1+1956)\times 7$ —	13699
8	— $(1+13699)\times 8$ —	109600
9	— $(1+109600)\times 9$ —	986409 u. s. w.

§. 74.

Man sucht also hier die Anzahl aller möglichen Verbindungen so, daß man von 1 anfängt, dazu 1 setzt, und die Summe mit 2 multiplicirt. Das erhaltene vermehrt man wieder um 1, und multiplicirt es mit 3. Auch dieses Product wird um 1 vermehrt, und nun mit 4 multiplicirt, und auf diese Art so lange fortgefahren, bis der gebrauchte Multiplicator der gegebenen Anzahl von Dingen gleich gewesen ist.

§. 75.

Sind verschiedene Dinge, deren ein jedes öfters genommen werden kann, zu combiniren, und bey der Bestimmung der Anzahl aller möglichen Verbindungen auch auf die Ordnung der in jeder Verbindung vorkommenden Dinge zu sehen; so kann ein jedes der gegebenen Dinge bey den Verbindungen zu zweyen mit so vielen Dingen verbunden werden, als gegeben sind, und es ist also die Anzahl aller Verbindungen zu zweyen dem Quadrate der Anzahl der gegebenen Dinge gleich. Will man aus den Verbindungen zu zweyen die Verbindungen zu dreyen machen, so erhält man aus jeder Verbindung zu zweyen so viel Verbindungen zu dreyen, als Dinge zu combiniren gegeben sind, und es ist also die Anzahl aller Verbindungen zu dreyen gleich dem Cubus der Zahl der gegebenen Dinge. Sind z. B. die Buchstaben a, e, i, o gegeben, so sind die Verbindungen zu zweyen

aa, ae, ai, ao,

ea, ee, ei, eo,

ia, ie, ii, io,

oa, oe, oi, oo. Die Verbindungen zu dreyen aber aaa, aae, aai, aao,

aea, aee, aei, aeo,

aia, aie, aii, aio,

aoa, aoe, aoi, aoo,

eaa, eae, eai, eao,

eea, eee, eei, eeo,

eia, eie, eii, eio,

eoa, eoe, eoi, eoo,

iaa, iae, iai, iao,

iea, iee, iei, ieo,

iia, iie, iii, iio,

ioa, ioe, ioi, ioo,

oaa, oae, oai, oao,

oea, oee, oei, oeo,

oia, oie, oii, oio,

ooa, ooe, ooi, ooo,

§. 76.

Wenn man auf die Art, wie § 75 weiter fortgeht, so findet man, daß die Anzahl aller Verbindungen zu vieren der 4ten Dignität der Zahl der gegebenen Dinge, die Anzahl aller Combinationen zu 5 der 5ten Dignität der

der Zahl der gegebenen Dinge u. s. w. gleich sey. Man hat also hier nur jedesmal die Zahl der gegebenen Dinge zu einer Dignität zu erheben, deren Exponent dem Exponenten der Combination gleich ist. Sollten also 8 Dinge auf die § 75 gedachte Art zu 4 verbunden werden, so wäre die Anzahl aller möglichen Verbindungen gleich der 4ten Dignität von 8 oder 4096.

Wie oft man mit einer gegebenen Anzahl von Würfeln jede damit zu werfen mögliche Zahl der Augen zu werfen im Stande ist?

§. 77.

Von den Arten die Menge der Würfe, die bey einer bestimmten Anzahl der Würfel und der damit zu werfenden Augen möglich sind, zu bestimmen, sollen hier nur zwey berührt werden. Die erste besteht darin, daß man zuvörderst die Gattungen der möglichen Würfe, und darauf die Menge der einzeln Fälle jeder Gattung bestimmt. Es seyn z. B. 3 Würfel gegeben, so kann man damit werfen,

Augen

Augen	indem die einzeln Würfel oben haben	und also auf verschiedene Arten
3	1,1,1	1
4	2,1,1	3
5	3,1,1, oder 2,2,1	6
6	4,1,1, oder 3,2,1, oder 2,2,2	10
7	5,1,1, od. 4,2,1, od. 3,3,1, od. 3,2,2	15
8	6,1,1, od. 5,2,1, od. 4,3,1, od. 4,2,2, oder 3,3,2	21
9	6,2,1, oder 5,3,1, od. 5,22, od. 4,4,1, od. 4,3,2, oder 3,3,3	25
10	6,3,1 od. 6,2,2, od. 5,4,1, od. 5,3,2, od. 4,4,2 od. 4,3,3	27
11	6,4,1, od. 6,3,2 od. 5,5,1, od. 5,4,2, oder 5,3,3 od. 4,4,3	27
12	6,5,1, od. 6,4,2, od. 6,3,3 od. 5,5,2, od. 5,4,3, od. 4,4,4	25
13	6,6,1, od. 6,5,2, od. 6,4,3, od. 5,5,3 oder 5,4,4	21
14	6,6,2, od. 6,5,3, od. 6,4,4 od. 5,5,4	15
15	6,6,3, od. 6,5,4 od. 5,5,5.	10
16	6,6,4, oder 6,5,5	6
17	6, 6, 5	3
18	6, 6, 6	1.

Da

Da die Mengen der verschiedenen Arten der Würfe bey den möglichen Mengen der Augen, wenn man über die Hälfte der höchsten Anzahl der Augen aller Würfel gekommen ist, eben so wieder abnehmen, als sie vorher zugenommen haben, so kann man daher sich ein Erleichterungsmittel ableiten.

§. 78.

Die andere Art besteht in der Verfertigung einer Tabelle, als die am Ende befindliche 1te ist, deren Verfertigungsart bey einiger Aufmerksamkeit von selbst in die Augen fällt. Die anscheinende Unvollständigkeit derselben in Ansehung der letzten Würfe von 5 und 6 Würfeln fällt weg, so bald man die Anmerkung des vorhergehenden § überlegt und anwendet.

Von der Combination verschiedener Mengen von Dingen untereinander.

§. 79.

Wenn eine Menge von Dingen mit einer andern von dieser verschiedenen Menge von Dingen zu verbinden ist, so fällt in die Augen, daß man ein jedes Ding der einen Menge mit einem jeden der andern Menge combiniren könne, und daß also die Anzahl der Combinationen dem Producte aus den beyden Zahlen der gegebenen Mengen gleich seyn werde. Es seyen z. B. die beyden mit einander zu combinirenden Mengen, a, b, c, d, e, f

und

und g, h, i, k; so kann sowol g als h, und i und k mit a, b, c, d, e und f verbunden werden, und es ist also die Anzahl aller möglichen Combinationen 4×6 oder 24.

§. 80.

Käme noch eine dritte Menge von Dingen hinzu; so könnte man zu einer jeden der bereits gefundenen Combinationen nach und nach ein jedes Ding dieser dritten Menge setzen, und man erhielte also so viel Combinationen, als das Product aus der Zahl der Combinationen der beyden ersten Mengen von Dingen in die Zahl der Dinge der dritten Menge Einheiten in sich faßte. Sollte mit den Buchstaben a, b, c, d, e, f und g, h, i, k, nachdem man dieselben nach dem vorhergehenden § mit einander verbunden hätte, nun auch noch diese l, m, n, o, p combiniren; so bekäme man statt jeder Combination des vorhergehenden § fünf andere, und also in allen 5×24 oder 120.

§. 81.

Ueberhaupt also hat man, wenn mehrere Mengen von einander verschiedener Dinge mit einander zu combiniren gegeben sind, um die Anzahl aller möglichen Combinationen zu finden, nichts weiter nöthig, als die Zahlen der gegebenen Mengen mit einander zu multipliciren, indem das Product daraus

aus jedesmal die gedachte Anzahl der Combinationen anzeigt. Wären z. B. 5 Mengen gegeben, deren die eine 6, die andere 3, die dritte 5, die vierte 7 und die fünfte 4 Dinge enthielte, so wäre die Anzahl aller Combinationen $6 \times 3 \times 5 \times 7 \times 4$ oder 2520.

§. 82.

Sind die Zahlen der gegebenen Mengen einander gleich, oder enthalten die gegebenen Mengen gleich viel Dinge; so ist die Zahl aller Combinationen zweyer Mengen mit einander gleich dem Quadrate der Zahl der Dinge einer jeden Menge, die Zahl aller Combinationen dreyer Mengen gleich dem Cubus der gedachten Zahl, die Zahl aller Combinationen vier Mengen gleich der vierten Dignität derselben Zahl u. s. w. Enthält also z. B. eine jede der gegebenen Mengen 8 Dinge, so ist

bey Mengen		die Anzahl aller Combinationen
2 — —	8^2 — —	64
3 — —	8^3 — —	512
4 — —	8^4 — —	4096
5 — —	8^5 — —	32768
6 — —	8^6 — —	262144 u. s. w.

§. 83.

Hiernach ist es leicht, die Anzahl aller Würfe, die bey einer gegebenen Menge von Würfeln möglich sind, zu finden. Denn da ein jeder Würfel 6 von einander verschiedene Seiten hat, und die Verschiedenheit der Würfe mit mehrern Würfeln auf der Verschiedenheit der Verbindungen ihrer Seiten unter einander beruht; so ist offenbar, daß

bey Würfeln					die Anzahl aller möglichen Würfel seyn werde
2	—	—	6^2	— —	36
3	—	—	6^3	— —	216
4	—	—	6^4	— —	1296
5	—	—	6^5	— —	7776
6	—	—	6^6	— —	46656 u. s. w.

Vierter

Vierter Abschnitt,

von der

Wahrscheinlichkeit.

§. 1.

Alles, was ein Gegenstand der Rechenkunst seyn soll, muß durch Zahlen ausgedruckt und vorgestellt werden können, und es ist nur in so fern ein Gegenstand der Rechenkunst, als solches geschehen kann. Auch die Wahrscheinlichkeit ist diesem Gesetze unterworfen, und das erste, was hier, einen genau bestimmten Begriff des Worts Wahrscheinlichkeit vorausgesetzt, berührt werden muß, ist daher die Art, wie die Wahrscheinlichkeit einer Sache durch Zahlen vorgestellt werden könne.

§. 2.

Im gemeinen Leben nennt man oft nur dasjenige wahrscheinlich, was mehr Gründe für als wider sich hat. Was eben so viel Gründe für als wider sich hat, heißt alsdenn ungewiß, und das, was mehr wider als für sich hat, unwahrscheinlich. Auf diese Art werden in der Rechenkunst die Worte, wahrscheinlich und Wahrscheinlich-

 keit

keit nicht gebraucht; sondern es wird da alles das wahrscheinlich genannt, was geschehen oder nicht geschehen kann, was also auf der einen Seite weniger als gewiß, auf der andern Seite aber doch mehr als bloß möglich ist.

Wenn jemand mit 2 Würfeln spielt, so muß er eine von folgenden Anzahlen der Augen werfen

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Eine jede dieser Mengen Augen ist also in der angeführten Bedeutung wahrscheinlich. Wenn in einer Urne eine weisse und 99 schwarze Kugeln liegen, so kann, wenn man eine blind heraus nehmen soll, eine schwarze oder die weisse Kugel gegriffen werden. Wie wahrscheinlich ist es, frägt hier die Rechenkunst, daß man bey einem Zuge die weisse Kugel ziehen werde? Im gemeinen Leben nennt man das Treffen der weissen Kugel in diesem Falle unwahrscheinlich.

§. 3.

So oft also eine Begebenheit mit mehrern andern so verbunden ist, daß eine von allen geschehen muß, so oft ist die Frage möglich: Wie wahrscheinlich ist diese Begebenheit? Angenommen, daß jede von den mit einander auf die gedachte Art verbundenen Begebenheiten gleich leicht geschehen kann, so wird die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit desto grösser, je geringer die Menge der mit ihr verbundenen ist, und desto kleiner, je grösser diese Menge ist. Man hat z. E. im Würfelspiel bey 2

Wür=

Würfeln 36, bey dreyen 216 und bey vieren 1296 mögliche Fälle, und von diesen Fällen keinen Ursach schwerer als den andern zu betrachten. Da man nun mit zwey Würfeln 2 nur auf eine Art, und eben so auch 3 mit drey Würfeln und 4 mit vier Würfeln werfen kann, so ist der Fall, daß man mit zwey Würfeln zwey treffen werde, mit 35, der, daß man mit drey Würfeln 3 treffen werde, mit 215, und der, daß man mit vier Würfeln 4 treffen werde mit 1295 andern Fällen verbunden. Man nennt es daher wahrscheinlicher, auf einen Wurf 2 mit zwey Würfeln als 3 mit drey Würfeln, und dies wieder wahrscheinlicher als 4 mit vier Würfeln zu werfen.

§. 4.

Wenn eine Menge von Begebenheiten, davon die eine eben so leicht sich ereignen kann als jede der übrigen, so mit einander verbunden sind, daß unter gewissen Umständen immer eine geschehen muß; so kann man annehmen, daß, wenn diese Umstände so oft statt finden, als Begebenheiten in der gedachten Menge sind, auch eine jede einmal sich ereignen werde. Wenn man z. B. mit zwey Würfeln 36mal hinter einander wirft, so kann man hoffen, daß jeder dabey mögliche Fall einmal vorkommen, und also jede der folgenden Anzahlen der Augen so oft geworfen werden werden, als die darunter stehenden Zahlen anzeigen

2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12
1,	2,	3,	4,	5,	6,	5,	4,	3,	2,	1.

§. 5.

Nothwendig ist solches freylich nicht, ja es kann sich in wirklichen Fällen nicht einmal allezeit so verhalten; indem da Dinge auf das Geschehen der Begebenheiten mitwirken, auf welche man nicht siehet. Wenn man z. B. mit Würfeln spielt, so wirft man die Würfel nicht immer mit gleicher Stärke, es haben die Würfel vor dem Wurfe nicht immer dieselbe Lage u. s. f. Wenn man indeß die Umstände, unter welchen eine von mehrern in Ansehung unserer gleich leichten Begebenheiten geschehen muß, oft wiederholt, so findet sich zwischen den erhaltenen Erfahrungen und jener Behauptung eine desto grössere Uebereinstimmung, je öfter diese Wiederholung angestellt wird. Je öfter man z. B. mit 2 Würfeln 36mal hinter einander wirft, desto näher wird das Verhältniß der Zahlen, welche anzeigen, wie oft man 2 und 3 geworfen, dem Verhältniß 1 zu 2 kommen. Im allgemeinen oder im Durchschnitte bleibt also die Behauptung des vorhergehenden § gleichwohl wahr.

§. 6.

Kennt man daher alle mögliche Fälle, und darf man annehmen, daß jeder gleich leicht sich ereignen könne, so hat man durch die Anzahl aller möglichen Fälle einen

nen bestimmten Begriff von der Wahrscheinlichkeit eines einzelen Falls. Da man weiß, daß es bey zwey Würfeln 36 Fälle giebt, und 2 damit nur auf eine Art geworfen werden können; so folgert man daher, daß man mit zwey Würfeln 2 zu werfen übernehmen könne, wenn 36 Würfe erlaubt werden, und daß man unter diesen 36 Würfen nur einmal den erhalten werde, wo jeder Würfel 1 Aß hat, und dieser Begriff hat allerdings Bestimmtheit.

§. 7.

Einen solchen Begriff auszudrucken, muß man also die Anzahl aller möglichen Fälle bezeichnen, und man thut solches, indem man einen Bruch macht, dessen Zähler 1 und der Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle ist. Die Redensart: Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln auf einen Wurf 2 zu werfen, ist $\frac{1}{36}$, heißt also so viel als: Man kann hoffen 2 zu werfen, wenn man 36mal hintereinander werfen darf; oder gleichnißweise, indem der hier zum Grunde liegende Fall als bekannt angenommen werden kann, es ist eben so wahrscheinlich, als es ist, aus einer Urne, in welcher 35 schwarze und eine weisse Kugel liegen, auf einen Zug die weisse zu erhalten.

§. 8.

Eine Begebenheit kann oft auf mehr denn eine Art sich zutragen. 7 Augen kann man z. B. mit 2 Würfeln auf 6 verschiedene Arten werfen. Wenn man also 36mal hintereinander würfe, so könnte man hoffen 6 mal 7 zu werfen. Auch dergleichen Beschreibungen fehlt es nicht an Bestimmtheit. Um sich aber kurz auszudrucken, bedient man sich auch hier eines Bruchs, der sich von dem vorhingedachten nur in dem Zähler unterscheidet, welcher nicht 1 sondern die Zahl ist, welche anzeigt, auf wie vielerley Art die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit gesucht wird, geschehen kann. In dem angeführten Falle z. B. druckt man sich auf die Art aus, daß man sagt, die Wahrscheinlichkeit auf einen Wurf mit 2 Würfeln 7 Augen zu werfen, sey $\frac{6}{36}$. Da, wenn unter 36 Würfen ein Wurf 6mal vorkommt, solches eben so viel ist, als wenn derselbe unter 6 nur einmal vorkäme, so kann man auch sagen, daß die Wahrscheinlichkeit des gedachten Falls $\frac{1}{6}$ sey.

§. 9.

Dem Geschehen einer Begebenheit steht das nicht Geschehen derselben entgegen, und daher nennt man die Wahrscheinlichkeit, daß eine Begebenheit nicht geschehen werde, die **entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit** derselben. Aus der Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit läßt sich die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit derselben jedesmal leicht finden, und sie wird durch einen Bruch bezeichnet, den man erhält, wenn man den Bruch, welcher die Wahrscheinlichkeit anzeigt, von 1 abzieht. Die Wahrscheinlichkeit auf einen Wurf mit 2 Würfeln 2 zu

wer-

werfen, ist $\frac{1}{36}$, und die Wahrscheinlichkeit nicht 2 zu werfen, oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist $1 - \frac{1}{36}$ oder $\frac{35}{36}$.

§. 10.

Zu einem vollständigen und deutlichen Begriffe von der Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit gehöret also zweyerley, einmal die Kenntniß der Menge aller möglichen Fälle, und zweytens, daß man wisse, auf wie vielerley Art die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit man bestimmen will, sich ereignen könne; und es entsteht nun die Frage, woher man das eine sowol als das andere erhalte? Es giebt hier einen doppelten Weg; indem man dazu entweder durch Vernunftschlüsse oder durch Erfahrungen gelangt, von beyden soll daher nun ausführlicher geredet werden.

§. 11.

Wenn die Anzahl aller möglichen Fälle durch Vernunftschlüsse bestimmt werden kann, so leistet darin die Lehre von den Versetzungen und Combinationen einen ausserordentlichen Nutzen. Einige Beyspiele werden dies erläutern, und zugleich die Art des hier nöthigen Verfahrens vor Augen legen. Gesetzt also, daß jemand in die Zahlenlotterie setzen und die Wahrscheinlichkeit wissen wollte, die er für den Gewinn eines Auszugs, einer Ambe, einer Terne, einer Quaterne und einer Quine hätte;

so ist			die Anzahl aller möglichen Fälle
für die Auszüge	—	— —	— 90
— Amben	$\frac{90\times89}{2}$	—	— 4005
— Ternen	$\frac{4005\times88}{3}$	—	117480
— Quaternen	$\frac{117480\times87}{4}$	—	2555190
— Quinen	$\frac{2555190\times86}{5}$	—	43949268.

Da aber jedesmal 5 Nummern gezogen werden, und darin enthalten sind

5 Auszüge

10 Amben

10 Ternen

5 Quaternen und

1 Quine, so ist die Wahrscheinlichkeit

eines Auszugs	—	$\frac{5}{90}$	oder	$\frac{1}{18}$
einer Ambe	—	$\frac{10}{4005}$	—	$\frac{1}{400}$
— Terne	—	$\frac{10}{117480}$	—	$\frac{1}{11748}$
— Quaterne	—	$\frac{5}{2555190}$	—	$\frac{1}{511038}$
— Quine	—	$\frac{1}{43949268}$	—	$\frac{1}{43949268}$.

§. 12.

Ein anderes Beyspiel mag von den Würfeln hergenommen seyn. Würde also gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit einer jeden Anzahl Augen bey 6 Würfeln für einen einzeln Wurf sey? so ist

bey

für Augen	die Wahrscheinlichkeit
— 6 —	$\frac{1}{46656}$ — — —
— 7 —	$\frac{6}{46656}$ — — —
— 8 —	$\frac{21}{46656}$ — — —
— 9 —	$\frac{56}{46656}$ — — —
— 10 —	$\frac{126}{46656}$ — — —
— 11 —	$\frac{252}{46656}$ — — —
— 12 —	$\frac{456}{46656}$ — — —
— 13 —	$\frac{756}{46656}$ — — —
— 14 —	$\frac{1161}{46656}$ — — —
— 15 —	$\frac{1666}{46656}$ — — —
— 16 —	$\frac{2247}{46656}$ — — —
— 17 —	$\frac{2856}{46656}$ — — —
— 18 —	$\frac{3431}{46656}$ — — —
— 19 —	$\frac{3906}{46656}$ — — —
— 20 —	$\frac{4221}{46656}$ — — —
— 21 —	$\frac{4332}{46656}$ — — —
— 22 —	$\frac{4221}{46656}$ — — —
— 23 —	$\frac{3906}{46656}$ — — —
— 24 —	$\frac{3431}{46656}$ — — —
— 25 —	$\frac{2856}{46656}$ — — —
— 26 —	$\frac{2247}{46656}$ — — —
— 27 —	$\frac{1666}{46656}$ — — —
— 28 —	$\frac{1161}{46656}$ — — —
— 29 —	$\frac{756}{46656}$ — — —
— 30 —	$\frac{456}{46656}$ — — —

—	31	—	$\frac{252}{46656}$	—	—	—
—	32	—	$\frac{126}{46656}$	—	—	—
—	33	—	$\frac{56}{46656}$	—	—	—
—	34	—	$\frac{21}{46656}$	—	—	—
—	35	—	$\frac{6}{46656}$	—	—	—
—	36.	—	$\frac{1}{46656}$	—	—	—

§. 13.

Ferner werde gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, auf einen Wurf mit 6 Würfeln eine Serie, eine Quine, eine Quaterne, eine Terne, einen Pasch und keinen Pasch zu werfen? Hier kommt es vor allen Dingen darauf an, zu bestimmen, wie oft mit 6 Würfeln Serien, Quinen, Quaternen u. s. w. geworfen werden können, denn die Anzahl aller möglichen Würfe ist aus dem vorigen Abschnitte bereits bekannt, und ist 46656. Da eine Serie zu werfen, alle 6 Würfel gleich viel Augen oben haben müssen, so ist

die Anzahl aller Serien $= 6$. Zu einer Quine dürfen nur auf 5 Würfeln die Augen gleich seyn, und es ist daher

die Anzahl aller Quinen 6×36 oder 216. Sind nemlich 5 Mengen der Augen auf den Würfeln gleich, so kann der 6te Würfel 6 verschiedene Anzahlen der Augen haben, und es kann der 1te, der 2te, der 3te, der 4te, der 5te und der 6te Würfel der sich unterscheidende seyn.

Eine

Eine Quine, z. B. die, wenn 5 Sechsen geworfen sind, kann daher auf 36 verschiedene Arten geworfen werden, und 6 Quinen geben daher 6 × 36 oder 216 Fälle. Die Anzahl aller Quaternen ist 15 × 216 ode 3240, wovon man sich auf eine ähnliche Art überzeugen kann, und eben so findet man die Anzahl aller Ternen 25920, und die Anzahl aller Päsche 116640. Wenn kein Pasch geworfen werden soll, so müssen die geworfenen Augen seyn

6. 5. 4. 3. 2. 1, und diese werden so oft geworfen werden können, als 6 von einander verschiedene Dinge versetzt werden können, d. h. 720 mal. Also ist die Anzahl der Würfe, da kein Pasch fällt, 720. Nunmehr ist es leicht, die Wahrscheinlichkeit eines jeden Wurfs anzugeben. Es ist nemlich die Wahrscheinlichkeit

einer Serie	—	$\frac{6}{46656}$
einer Quine	—	$\frac{216}{46656}$
einer Quaterne	—	$\frac{3240}{46656}$
einer Terne	—	$\frac{25920}{46656}$
eines Pasches	—	$\frac{116640}{46656}$
daß kein Pasch fällt	—	$\frac{720}{46656}$

§. 14.

Will man für die gefundenen Wahrscheinlichkeiten andere Zahlen haben, so ist

$$\frac{6}{46656} = \frac{1}{7776}$$

$$\frac{216}{46656} = \frac{1}{216}$$

$$\frac{3240}{46656} = \frac{1}{14\frac{1296}{3240}} = \frac{5}{72}.$$

$$\frac{25920}{46656} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{116640}{46656} = \frac{5}{2}$$

$\frac{720}{46656} = \frac{1}{65}$ eine Kleinigkeit nicht gerechnet.

Es giebt also im Durchschnitte

unter	7775	Würfen	1	Serie
—	216	—	1	Quine
—	72	—	5	Quaternen
—	9	—	5	Ternen
—	2	—	5	Päsche
—	65	—	1	Fall, da kein Pasch ist.

§. 15.

Gesetzt, daß gefragt würde, wie wahrscheinlich es sey, beym Lomberspiel sogleich beym Kartengeben die Spadille und Baste zu bekommen? so würde sich die Antwort aus folgendem ergeben. Man hat beym Lombre 40 Karten, welche zu 9 vertheilt werden. Es sind also überhaupt so viel verschiedene Spiele möglich, als 40 verschiedene Dinge zu 9 combinirt werden können. Da also $\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = 37 \times 32 \times 19 \times 17 \times 13 \times 11 \times 5 = 273438880$, so sind überhaupt 273438880 verschiedene Spiele möglich. Hiergegen muß nun die Anzahl der Fälle gehalten werden, wo man Spadille und Baste sogleich bekommen kann. Diese

findet

findet man aus $\frac{38 \times 37 \times 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7} = 38 \times 37 \times 34 \times 33 \times 8 = 12620256$, weil man die Spadille und Baste so viel mal gleich vom Anfang an bekommen kann, als 38 Karten zu 7 auf verschiedene Weise vertheilt werden können. Es ist also die Wahrscheinlichkeit

$\frac{12620256}{273438880}$ oder zwischen $\frac{1}{21}$ und $\frac{1}{22}$.

§. 16.

Die Wahrscheinlichkeit bey Classenlotterien zu bestimmen hat keine Schwierigkeit, da man dabey die Anzahl aller Loose sowol als die Anzahl der verschiedenen Gewinnste nicht erst suchen darf. Sind z. B. in einer Lotterie 10000 Loose, und Gewinnste, 1 von 10000 Rthlr, 1 von 5000 Rthlr, 2 von 3000 Rthlr, 4 von 1000 Rthlr, 8 von 500 Rthlr, 10 von 200 Rthlr, 15 von 100 Rthlr, 20 von 80 Rthlr, 40 von 50 Rthlr, 100 von 20 Rthlr, 300 von 10 Rthlr, so ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Loose zu erhalten

den	1ten	oder höchsten	Gewinn	$\frac{1}{10000}$
—	2	—	—	$\frac{1}{10000}$
—	3	—	—	$\frac{1}{5000}$
—	4	—	—	$\frac{1}{2500}$
—	5	—	—	$\frac{1}{1250}$
—	6	—	—	$\frac{1}{1000}$ u. s. w. und

die Wahrscheinlichkeit, irgend einen Gewinnst zu erhalten, da 401 Gewinnste da sind $\frac{401}{10000}$.

§. 17.

§. 17.

Von allen bisher betrachteten Fällen die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, ist nach dem 9ten § leicht. Um indeß ein Paar Fälle zu berühren, so ist in dem Exempel § 11 die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

eines Auszuges	—	—	$\frac{17}{18}$
einer Ambe	—	—	$\frac{399}{400}$
— Terne	—	—	$\frac{11747}{11748}$
— Quaterne	—	—	$\frac{511047}{511048}$
— Quine	—	—	$\frac{43949267}{43949268}$;

und in dem Exempel § 13 ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

einer Serie	—	$\frac{7775}{7776}$
— Quine	—	$\frac{215}{216}$
— Quaterne	—	$\frac{67}{72}$
— Terne	—	$\frac{2}{9}$
eines Pasches	—	$-\frac{3}{2}$
daß kein Pasch fällt	—	$\frac{64}{65}$.

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit eines Pasches ist hier durch eine negative Zahl bestimmt; sie ist also weniger als nichts, welches da in jeden 2 Würfen 5 Päsche seyn sollen, der Natur der Sache sehr gemäß ist.

§. 18.

Bisher sind lauter solche Fälle betrachtet worden, bey denen die § 7 und 8 gegebenen Regeln zur Bestimmung

mung der Wahrscheinlichkeit nur einmal angewandt werden durften. Ausser diesen einfachen Fällen giebt es auch zusammengesetzte, von denen die vornehmsten nunmehr ebenfalls berührt werden müssen. Der erste findet statt, wenn von zwey oder mehrern Begebenheiten gefragt wird, wie wahrscheinlich es sey, daß die eine oder die andere, oder eine von allen sich zutrage. Es fällt aber sehr bald in die Augen, daß man hier nur nöthig habe, die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller einzeln Begebenheiten zu suchen, so daß also dieser Fall nur durch einige Beyspiele erläutert zu werden braucht.

§. 19.

Würde also gefragt, wie wahrscheinlich es sey, mit 6 Würfeln auf einen Wurf entweder 8 oder 9 Augen zu werfen? so wäre die Wahrscheinlichkeit

8 zu werfen	—	$\frac{71}{46656}$
und 9 zu werfen	—	$\frac{56}{46656}$
also entweder 8 oder 9 zu werfen	—	$\frac{[illegible]}{46656}$.

Eben so findet man die Wahrscheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf entweder 12 oder 15 oder 20 Augen zu werfen, wenn man $\frac{456}{46656}$, $\frac{1666}{46656}$ und $\frac{4221}{46656}$ addirt, so daß also die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist $\frac{6343}{46656}$.

§. 20.

Einige Schwierigkeit mehr hat der Fall, wenn gefragt wird, wie wahrscheinlich es sey, daß von zweyen

Bege=

Begebenheiten entweder die eine oder die andere geschehe, so daß dadurch zwey von einander verschiedene Fälle entstehen. Es fände derselbe z. B. statt, wenn jemand mit 6 Würfeln entweder 8 oder 9 Augen in zweyen Würfen, aber unter der Bedingung werfen sollte, daß wenn er gleich auf den ersten Wurf 8 würfe, der zweyte Wurf ganz wegfiele. Hier ist also selbst das nicht gewiß, sondern nur wahrscheinlich, daß die Umstände, unter welchen die zweyte Begebenheit entstehen kann, sich ereignen werden, und diese Wahrscheinlichkeit ist gleich der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit der ersten Begebenheit. In den angeführten Beyspiele ist die Wahrscheinlichkeit, auf den ersten Wurf 8 Augen zu werfen, $\frac{21}{46656}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit also $\frac{46635}{46656}$, und dies ist also die Wahrscheinlichkeit, daß der zweyte Wurf erlaubt seyn werde. Da nun die Wahrscheinlichkeit, auf den 2ten Wurf 9 zu werfen, $\frac{56}{46656}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, auf den 2ten Wurf 9 Augen zu werfen, $\frac{56}{46656} \times \frac{46635}{45656}$, und die Summe aus $\frac{56}{46656} \times \frac{46635}{46656}$ und $\frac{21}{46656}$ die ganze gesuchte Wahrscheinlichkeit.

§. 21.

Auf eine ähnliche Art kann man verfahren, wenn die Wahrscheinlichkeit gesucht werden soll für einen Fall, wo drey und mehrere Begebenheiten auf eine ähnliche Art verbunden sind. Gesetzt z. B. daß die Wahrschein=

scheinlichkeit gesucht werden sollte, wenn mit 2 Würfeln entweder auf den 1ten Wurf 4, oder auf den 2ten 5, oder auf den 3ten 6 zu werfen wären, und der 2te und 3te Wurf gar nicht erlaubt wäre, wenn der erste glückte, und der dritte nicht, wenn der 2te glückte; so wäre

die Wahrscheinlichkeit des 1ten Wurfs $\frac{1}{12}$, und

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{12}$. Ferner wäre die Wahrscheinlichk. des 2ten Wurfs überh. $\frac{1}{9}$, und seine Wahrscheinlichkeit hier $\frac{1}{9} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{108}$, also die Wahrscheinlichk. daß entweder der erste oder der 2te Fall glücken werde $\frac{1}{12} + \frac{11}{108} = \frac{20}{108}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{88}{108}$. Endlich wäre die Wahrscheinlichk. des 3ten Wurfs überh. $\frac{5}{36}$, und seine Wahrscheinlichk. hier also $\frac{5}{36} \times \frac{88}{108} = \frac{440}{3888}$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichk. $\frac{1}{12} + \frac{11}{108} + \frac{440}{3888}$, oder $\frac{324}{3888} + \frac{396}{3888} + \frac{440}{3888}$ oder $\frac{1160}{3888}$.

§. 22.

Noch leichter kann man indeß das verlangte Resultat finden, wenn man die Differenzen zwischen den Zahlen der Wahrscheinlichkeit der gegebenen Begebenheiten und 1 mit einander multiplicirt und das Product von 1 abzieht. So ist z. B. in dem Falle des 21ten §

$$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}, \text{ und}$$

$$1 - \frac{11}{12} \times \frac{8}{9} \times \frac{31}{36} = \frac{1160}{3888}.$$

§. 23.

In den Exempeln § 20. 21 kommen Begebenheiten vor, von denen es anfänglich nicht einmal gewiß, sondern nur in einem gewissen Grade wahrscheinlich war, daß sie würden geschehen können, und es mußte die Wahrscheinlichkeit gefunden werden, welche man für einen glücklichen Ausgang derselben hatte. Dieser Fall findet alsdann allezeit statt, wenn die Wahrscheinlichkeit des glücklichen Erfolgs einer Begebenheit gesucht werden soll, bey der selbst die Umstände, unter welchen ihr Geschehen möglich ist, nichts mehr als wahrscheinlich sind, und kommt also häufig vor. Weiß man indeß die einzelen Wahrscheinlichkeiten; so ist es leicht, die gesuchte zu finden, indem man dazu nur das Product aus den Zahlen für die eben gedachten Wahrscheinlichkeiten suchen darf. Es soll z. B. jemand mit 2 Würfeln werfen. Wenn er auf den ersten Wurf 8 trifft, so soll ihm ein zweyter Wurf erlaubt seyn; wenn er in dem zweyten Wurfe 5 wirft, so soll ihm noch ein dritter Wurf frey stehen, und wenn er jetzt 12 oder 2 wirft, eine gewisse Summe erhalten. Wie groß ist hier die Wahrscheinlichkeit, daß er gewinnen werde. Die Wahrscheinlichkeit auf den 1ten Wurf 8 zu treffen, ist $\frac{5}{36}$, die auf den 2ten Wurf 5 zu werfen $\frac{1}{9}$, und die auf den 3ten Wurf 12 oder 2 zu erhalten $\frac{1}{18}$. Die Wahrscheinlichkeit also unter den angeführten Bedingungen zu gewinnen ist

$\frac{5}{36} \times$

$\frac{5}{36} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{36} = \frac{5}{11664}$, oder bis auf eine Kleinigkeit $\frac{1}{2335}$. Hier vermindern mehrere Wahrscheinlichkeiten das endliche Resultat, so wie sie in den Fällen des 19, 20 und 21sten § solches vermehrten.

§. 24.

Wenn die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit nicht durch Vernunftschlüsse herausgebracht werden kann, sondern man zu Erfahrungen und Beobachtungen seine Zuflucht nehmen muß; so ist die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nicht nur viel mehrern Schwierigkeiten unterworfen, sondern es läßt sich dabey ein gleicher Grad der Genauigkeit auch viel seltner erreichen. Man beobachtet in diesem Falle einmal, wie oft sich die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit man bestimmen will, hätte zutragen können, und zweytens, wie oft sie sich wirklich zugetragen hat, und nimmt jene Zahl statt der Zahl aller möglichen Fälle, und diese statt der Zahl der günstigen. Wollte man z. B. die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit welcher man hoffen könnte, daß ein Schiff, so von einem bestimmten Orte und nach einem bestimmten Lande segelte, sein Ziel glücklich erreichen werde; so müßte man mehrere gleich gut gebaute Schiffe von eben der Art, die dieselbe Fahrt und in derselben Jahrszeit machten, beobachten, und die Zahl derer sich merken, die glücklich angekommen wären. Gesetzt, daß von 100 Schiffen 4 verunglückt wären, so wäre hiernach die Wahrscheinlichkeit, daß das gedachte glücklich ankommen werde, $\frac{96}{100}$ oder $\frac{24}{25}$, so wie die Wahrscheinlichkeit, daß es verunglücken würde, $\frac{4}{100}$ oder $\frac{1}{25}$. Daß man bey dergleichen Fällen viel seltner den erwünschten Grad der Genauigkeit erreicht, ist deswegen natürlich, weil man hier weit leichter, als da, wo man Vernunftschlüsse gebrauchen kann, Begebenheiten für gleich leicht annimmt, die nichts weniger als gleich leicht geschehen können.

§. 25.

Es ist daher leicht einzusehen, daß man bey der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, so lange es möglich ist, die Anzahl aller möglichen sowol als der günstigen Fälle durch Vernunftschlüsse zu bestimmen suchen müsse. Wie wahrscheinlich es sey, mit 3 Würfeln auf 1 Wurf 12 zu werfen, könnte man z. B. durch Erfahrungen auf die Art bestimmen, daß man mit 3 Würfeln spielte, und bemerkte, wie oft man jedesmal werfen müßte, um 12 zu erhalten. Ein Versuch dieser Art gab

1mal	12	—	in	12 Würfen
2	—	—	—	23
3	—	—	—	29
4	—	—	—	37
5	—	—	—	45
6	—	—	—	47
7	—	—	—	51

8	—	—	—	53
9	—	—	—	59
10	—	—	—	67
11	—	—	—	79
12	—	—	—	81
13	—	—	—	83
14	—	—	—	102
15	—	—	—	105
16	—	—	—	108
17	—	—	—	113
18	—	—	—	117
19	—	—	—	141
20	—	—	—	170
21	—	—	—	175
22	—	—	—	180
23	—	—	—	187
24	—	—	—	188

Die hieraus sich ergebenden Wahrscheinlichkeiten sind $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{23}$, $\frac{3}{29}$, $\frac{4}{37}$, $\frac{5}{45}$, $\frac{6}{47}$, $\frac{7}{51}$, $\frac{8}{53}$, $\frac{9}{59}$, $\frac{10}{67}$, $\frac{11}{79}$, $\frac{12}{81}$, $\frac{13}{83}$, $\frac{14}{102}$, $\frac{15}{105}$, $\frac{16}{108}$, $\frac{17}{113}$, $\frac{18}{117}$, $\frac{19}{141}$, $\frac{20}{170}$, $\frac{21}{175}$, $\frac{22}{180}$, $\frac{23}{187}$, $\frac{24}{188}$, welche von der durch Vernunftschlüsse herausgebrachten Wahrscheinlichkeit $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$ mehr oder weniger abweichen, wiewohl die letzten am wenigsten, indem $\frac{19}{141}$ fast $\frac{2}{15}$, $\frac{20}{170} = \frac{2}{17}$, $\frac{21}{175} = \frac{3}{25}$ und $\frac{22}{180}$ beynahe $\frac{1}{8}$ ist, indem $\frac{1}{8} = \frac{22}{176}$.

§. 26.

Wenn man aber zu Erfahrungen und Beobachtungen seine Zuflucht nehmen muß, so sind dabey vorzüglich drey Regeln zu beobachten. Die erste ist, daß man eine so grosse Menge von Fällen, in denen sich die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit bestimmt werden soll, zutragen kann, als nur möglich, beobachte, indem man eine desto grössere Genauigkeit hoffen darf, je grösser die Menge der beobachteten Fälle ist. Der Grund hievon liegt darin, weil auf das Geschehen und nicht Geschehen der Begebenheiten Dinge mitwirken, auf welche man bey der Beobachtung nicht siehet oder nicht sehen kann, indem sie sich der Beobachtung entziehen, und bey einer geringen Menge von Fällen der Einfluß dieser unbekannten und besondern Ursachen grösser ist, als bey einer grossen Menge. Wollte man also z. B. die Wahrscheinlichkeit bestimmen, die ein Mensch von 25 Jahren hätte, nach 10 Jahren noch zu leben, so könnte man sich sehr irren, wenn man diese Bestimmung auf Erfahrungen gründen wollte, welche man für einen solchen Fall bey 10 oder 20 Menschen von eben demselben Alter sich gesammlet hätte. Hätte man aber beobachtet, wie viel von einigen Hundert oder tausend Menschen von 25 Jahren das 35ste Jahr erlebt hätten, so könnte man auf die daraus hergeleitete Bestimmung schon viel sicherer bauen.

§. 27.

§. 27.

Die andere Regel ist die, daß man bey seinen Beobachtungen so viel als möglich sich hüte, verschiedene Fälle als gleich zu betrachten. Ganz anders ist die Wahrscheinlichkeit, die ein gesunder Mensch von einem bestimmten Alter hat, nach einer vestgesetzten Zeit noch zu leben, als die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Kränkelnder vom gleichem Alter dasselbe hoffen darf. Ja es ist bey der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit dieser Art nicht nur auf die Lebensart der Menschen, sondern auch auf den Ort, wo sie wohnen, das Gewerbe, welches sie treiben u. d. gl. zu sehen.

§. 28.

Die dritte Regel ist, daß man nicht glaube, jemals gnug Beobachtungen angestellt zu haben, und daß man also den einmal angenommenen Bestimmungen keine Unveränderlichkeit beylege. So oft sich Gelegenheit findet, die Menge der bereits gesammleten Erfahrungen zu vergrössern, muß man solches thun, und wenn aus dieser neuen Menge von Erfahrungen sich andere Bestimmungen der Wahrscheinlichkeit ergeben, von deren grössern Richtigkeit man überzeugt seyn kann, diese Bestimmungen statt der vorher angenommenen erwählen.

§. 29.

Wo man den Weg der Vernunftschlüsse eben so gut als den Weg der Erfahrung betreten, und also beyde mögliche Mittel mit einander verbinden kann, da ist diese Verbindung ebenfalls in verschiedener Absicht nützlich, und muß also ebenfalls vorgenommen werden. Die Bestätigung dieser Regel wird in der Folge vorkommen.

§. 30.

Obgleich die Anwendung der bisher erklärten Regeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit zum Nutzen des gemeinen Lebens hier nicht ausführlich vorgetragen werden kann, sondern einige Anwendungen besondere Abschnitte erfordern; so darf dieselbe doch auch hier nicht gänzlich übergangen werden, und der Rest dieses Abschnittes soll sich daher damit beschäftigen, zu zeigen, wie man das bisherige gebrauchen könne, um die Beschaffenheit verschiedener Spiele zu beurtheilen.

§. 31.

Als einen Grundsatz kann man hier voraussetzen, daß, wenn ein Spiel rechtmässig seyn soll, die Hoffnung zu gewinnen, und die Furcht zu verlieren zwischen den Spielenden gleich seyn müsse. Eben so muß auch zugegeben werden, daß wenn bey einem Spiele der eine mehr risquirt als der andere, mit andern Worten, wenn auf der einen Seite in einigen Fällen seine Furcht zu verlieren grösser ist, auch auf der andern Seite in andern Fällen seine Hoffnung zu gewinnen grösser seyn müsse, und zwar verhältnißmässig. Wenn zwey Personen auf das

Gesche=

Geschehen oder nicht Geschehen einer Begebenheit, von der es eben so wahrscheinlich ist, daß sie sich zutragen werde, als daß sie sich nicht ereignen werde, wetten, so ist es billig, daß jeder gleich viel setze. Eine Jahreszeit ist den Seefahrern günstiger als eine andere. Assecuradeurs müssen zu solchen Zeiten, wo für seegelnde Schiffe geringere Gefahr zu besorgen ist, grössere Hoffnung zum Gewinn haben, da sie zu andern Zeiten grössere Furcht eines Verlustes übernehmen müssen.

§. 32.

Wenn mit dem Geschehen einer Begebenheit ein Vortheil für jemanden verbunden, oder auf dasselbe ein Preis gesetzt ist, so erhält die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit für denselben ebenfalls einen Preis, und es ist derselbe allezeit ein solcher Theil des vorher gedachten Preises als die Zahl für die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit von 1 ist. Wenn in einer Urne 99 schwarze und eine weisse Kugel lägen, und derjenige, der auf einen Zug die weisse Kugel griffe, 25 Rthl. erhalten sollte; so wäre die Wahrscheinlichkeit, die weisse Kugel auf einen Zug zu greifen, $\frac{1}{100}$, und der Werth dieser Wahrscheinlichkeit $\frac{25}{100}$ Rthl. oder $\frac{1}{4}$ Rthl.

§. 33.

Wenn zwey oder mehrere Personen mit einander um Geld spielen, so herrscht unter ihnen der Vertrag, daß so oft gewisse bestimmte Begebenheiten geschehen, dafür eine gewisse Summe gegeben werden soll, und es findet dabey entweder der Fall statt, daß ein jeder diese Summe erhalten kann oder geben muß, oder es sind die Bedingungen so gemacht, daß für den einen das Geschehen der Begebenheit allein, und für den andern das nicht Geschehen derselben allein vortheilhaft ist. Der erste Fall ist z. B. beym Lombre, der andere beym Lottospiel.

§. 34.

Wenn dieser zweyte Fall statt findet, so übernimmt der Spielherr so oft eine bestimmte Begebenheit geschieht, eine gewisse Summe an denjenigen zu bezahlen, der für den Fall des nicht Geschehens dieser Begebenheit sich zu einer ebenfalls bestimmten Summe anheischig gemacht, oder dieselbe bereits erlegt hat. Soll hier die Hoffnung zu gewinnen und die Furcht zu verlieren zwischen den Spielenden gleich, und also das Spiel rechmässig seyn, so muß

1. wenn die Wahrscheinlichkeit, daß die bestimmte Begebenheit geschehen werde, der daß sie nicht geschehen werde, gleich ist, dasjenige was der Spieler setzt, dem was der Spielherr verspricht, gleich seyn; wenn aber

2. die Wahrscheinlichkeit, daß die bestimmte Begebenheit geschehen werde, der, daß sie sich nicht ereignen werde, ungleich ist; so muß das, was der Spielherr verspricht, sich zu dem, was der Spieler setzt, verhalten

wie 1 zu der Zahl, welche die Wahrscheinlichkeit des Spielenden anzeigt.

Um diesen zweyten Fall mit einem Exempel zu erläutern, so ertheile jemand demjenigen, der 6 ℋ giebt, die Erlaubniß aus einer Urne, in welcher 100 Kugeln, 99 schwarze und 1 weisse liegen, eine blind herauszunehmen, unter der Bedingung, ihm eine verhältnißmäßige Summe zu bezahlen, wenn er die weisse zieht. Der Spielherr hat hier Hoffnung, so oft 100mal 6 ℋ einzunehmen, so oft er einmal die bestimmte Summe zu bezahlen fürchten darf, und das was er also versprechen muß, sind 100mal 6 ℋ oder 25 Rthl. Oder der Spielherr verkauft an den Spieler eine Wahrscheinlichkeit à $\frac{1}{100}$ für 6 ℋ, soll dieser Preis richtig seyn, so muß er eben so ein Theil von dem seyn, was der Spieler gewinnen kann, als $\frac{1}{100}$ es von 1 ist. Auf diese Art erhellet die Wahrheit der vorgebrachten Behauptung deutlich.

§. 35.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen ist es leicht, die Beschaffenheit einer grossen Menge von Spielen zu beurtheilen. **Den Anfang mag das Lottospiel machen**, und zwar so, daß davon erstlich überhaupt, und nachher mit Rücksicht auf verschiedene davon in wirklichen Fällen unzertrennlichen Umstände gesprochen werde.

§. 36.

Es ist bekannt, daß die Zahlenlotterien aus 90 Nummern bestehen, von denen von Zeit zu Zeit 5 Nummern unter solchen Umständen gezogen werden, daß man für die Ziehung einer Nummer nicht mehr und nicht weniger Wahrscheinlichkeit hat, als für die Ziehung einer jeden andern. Die Gewinnste dabey sind ein einfacher Auszug, ein bestimmter Auszug, eine Ambe, eine Terne und eine Quaterne. Quinen könnten auch bezahlt werden, es geschieht aber solches mehrentheils nicht, bisweilen sind selbst die Quaternen ausgeschlossen. Da die Wahrscheinlichkeit

einen einfachen Auszug zu erhalten — $\frac{1}{18}$,
einen bestimmten Auszug zu erhalten — $\frac{1}{90}$,
eine Ambe zu erhalten — — $\frac{1}{400\frac{1}{2}}$,
eine Terne — — — $\frac{1}{11748}$,
eine Quaterne — — — $\frac{1}{511038}$,
eine Quine — — — $\frac{1}{43949268}$ ist;

so müßte also, wenn der Satz § 31 hier statt finden sollte,

ein einfacher Auszug 18 mal
ein bestimmter Auszug 90 —
eine Ambe — $400\frac{1}{2}$ —
eine Terne — 11748 —
eine Quaterne — 511038, und wenn sie erlaubt wäre,
eine Quine — 43949268 mal so viel bringen, als eingesetzt worden wäre.

§. 37.

§. 37.

Hält man hiergegen die wirklichen Gewinnste der Zahlenlotterie, indem z. B.

ein einfacher Auszug den Einsatz			15 mal
— bestimmter	—	—	75 —
eine Ambe	—	—	270 —
— Terne	—	—	5300 —
— Quaterne	—	—	60000 — gewinnt,

und die Quinen gar nicht besetzt werden dürfen; so ist die Ungleichheit zwischen der Hofnung und Furcht des Lottoherrn und des Spielers so auffallend, daß man sich geneigt fühlt, zu behaupten, daß der Vortheil zu sehr auf der Seite der Lottoherren sey.

§. 38.

Hierin wird man noch mehr bestärkt, wenn man die Allgemeinheit des Lottospiels bedenkt, und daß nach den Erfahrungen, die jedermann haben kann, die Lottoherren die größten Vortheile und Einkünfte davon haben, da man doch auf keine Art annehmen kann, daß bloß in Ansehung des Lottospiels das Glück sich selbst verleugne, oder seine Unbeständigkeit ablege. Allein einmal können die Lottoherren wegen der mancherley Abzüge nicht alles, was eingesetzt wird, als Einnahme betrachten, und daher auch den Einsatz nicht so vielmal wiedergeben, als es nach den auf die Lehre von der Wahrscheinlichkeit gebaueten Regeln geschehen sollte; und zweytens haben auch die

Spie-

Spielenden noch mancherley Vortheile, die ihre Wahrscheinlichkeit zum Gewinn vergrössern.

§. 39.

Verlust bleibt indeß auf der Seite der Spielenden immer gewisser als Gewinn, und wen dies noch nicht abhalten kann, sein Glück in der Zahlenlotterie zu versuchen, den ist vielleicht die Vergleichung im Stande zu bewegen, daß es eben so wahrscheinlich sey, einen einfachen Auszug zu gewinnen, als aus einer Urne, worin 17 schwarze und 1 weisse Kugel liegen, mit einem Zuge die weisse Kugel zu greifen, daß einen bestimmten Auszug zu erhalten eben so zu hoffen sey, als aus 89 schwarzen und 1 weissen Kugel blind und auf einmal die weisse zu greifen, daß die Wahrscheinlichkeit einer Terne der Wahrscheinlichkeit gleich sey, unter 400 Kugeln die einzige weisse zu greifen, und die Wahrscheinlichkeit eine Quaterne zu bekommen der Wahrscheinlichkeit gleiche, unter 11748 Kugeln auf einen Zug die einzige drunter befindliche weisse zu erhalten.

§. 40.

Da bey jeder Ziehung der Zahlenlotterie eine Nummer so gut herauskommen kann als die andere, so ist, wenn eine Nummer in mehrern Ziehungen nach einander nicht herausgekommen ist, die Wahrscheinlichkeit, daß sie in der folgenden herauskommen werde, grösser als $\frac{1}{18}$,

und

und dies um so vielmehr, in je mehrern Ziehungen sie nicht herausgekommen. Da der Gewinst einer jeden Spielart ein für allemal festgesetzt ist, so kann durch diesen Umstand das Streichen gewisser Nummern einigermaassen gerechtfertiget werden, es ist aber auch solches deswegen, und zwar in einem höhern Grade nothwendig, weil man sonst, wenn man stets eine Nummer und bey jeder folgenden Ziehung immer stärker besetzte, am Ende schlechterdings gewinnen müßte.

Ein Beyspiel hievon anzuführen, so wäre, wenn man auf eine Nummer

in Ziehungen	setzte	der ganze Einsatz	die ganze Ausbeute	der Gewinnst
1ten	1 fl	1 fl	15 fl	14 fl
2 —	3 —	4 —	45 —	41 —
3 —	6 —	10 —	90 —	80 —
4 —	10 —	20 —	150 —	130 —
5 —	15 —	35 —	225 —	190 —
6 —	21 —	56 —	315 —	259 —
7 —	28 —	84 —	420 —	336 —
8 —	36 —	120 —	540 —	420 —
9 —	45 —	165 —	675 —	510 —
10 —	55 —	220 —	825 —	605 —
11 —	66 —	286 —	990 —	704 —
12 —	78 —	364 —	1170 —	806 —
13 —	91 —	455 —	1360 —	905 —
14 —	105 —	560 —	1575 —	1015 —
15 —	120 —	680 —	1850 —	1170 —
16 —	136 —	816 —	2040 —	1224 —
17 —	153 —	969 —	2295 —	1326 —.

§. 41.

§. 41.

Wenn Zahlenlotterien also statt finden sollen, so darf man von dem Lottoherrn nicht verlangen, weder, daß die Gewinnste so groß seyn sollen, als die obigen allgemeinen Regeln es fordern, noch, daß das Streichen gewisser Nummern gänzlich unterbleibe. Ob es, da die Spieler doch, im Durchschnitte genommen, offenbarem Verluste ausgesetzt sind, nicht besser wäre, wenn es dergleichen Lotterien gar nicht gäbe? ist eine Frage, deren ausführliche Beantwortung hier nicht her gehört. Daß Gewinnsucht das Lottospiel erfunden und zur Vollkommenheit gebracht hat, ist nicht zu leugnen, es ist auch in seiner gewöhnlichen Beschaffenheit kein blosses Spiel mehr, sondern ein Gewerbe, welches Gewinn zur Absicht hat. Da aber die Menschen der Hoffnung eines grossen Vortheils, wenn sie auch noch so gering ist, so leicht Gewalt über sich einräumen, und sie sich gern verschaffen, wenn das Recht dazu nicht viel kostet, so können deswegen die Zahlenlotterien auch als ein nothwendiges Uebel betrachtet werden, die ein Landsherr zugeben muß, um zu verhindern, daß nicht ausserhalb seines Landes von seinen Unterthanen Geld verspielt werde. Wenn aber alsdann die Zahlenlotterien Sache des Staats und nicht einzeler Personen wären, und der Gewinn, der offenbar dabey seyn muß, also ganz dem Staate zu gute käme, so hätte man einen Grund weniger, wider die Zahlenlotterien sich zu erklären.

§. 42.

§. 42.

Nun zu der Frage: Was für Regeln müssen beym Würfelspiel z. B. mit 6 Würfeln beobachtet werden, wenn die erforderliche Gleichheit zwischen dem Spielherrn und Spieler statt finden soll? Ich rede hier von dem Falle, wenn für die Erlaubniß, einmal zu werfen, eine gewisse Summe bezahlt wird, und die Gewinnste mit den geworfenen Summen der Augen verknüpft sind. Hier findet **ein doppelter** Fall statt; entweder soll der Spieler für jede geworfene Zahl der Augen eine verhältnißmässige Summe erhalten, oder es sind die Mengen der Augen in Treffer und Fehler eingetheilt. Ein jeder dieser Fälle muß besonders betrachtet werden.

§. 43.

Angenommen also, daß der erste Fall statt finde, der Spieler für jeden Wurf 4 ℋ zahlte, und davon gerechnet würden

auf jeden der Würfe	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	1 Ꝙ in Summa 20 Ꝙ
ferner auf jeden der Würfe	16, 17, 18, 24, 25, 26	2 Ꝙ in Summa 12 Ꝙ
desgleichen auf jeden der Würfe	19, 20, 22, 23	3 Ꝙ in Summa 12 Ꝙ
und auf	21	4 Ꝙ, Summa 4 Ꝙ

also auf alle Zahlen 4 ℋ; so wäre nach § 12

die

die Wahrscheinlichk. der Würfe	gleich	und der Gewinnst also vom Einsatze			
6	$\frac{1}{46656}$	46656	oder 162 Rthl.	— gr.	— pf.
7	$\frac{6}{46656}$	$\frac{46656}{6}$	27	—	—
8	$\frac{21}{46656}$	$\frac{46656}{21}$	7	17	1
9	$\frac{56}{46656}$	$\frac{46656}{56}$	2	21	5
10	$\frac{126}{46656}$	$\frac{46656}{126}$	1	6	10
11	$\frac{252}{46656}$	$\frac{46656}{252}$	—	15	5
12	$\frac{456}{46656}$	$\frac{46656}{456}$	—	8	6
13	$\frac{756}{46656}$	$\frac{46656}{756}$	—	5	1
14	$\frac{1161}{46656}$	$\frac{46656}{1161}$	—	3	4
15	$\frac{1666}{46656}$	$\frac{46656}{1666}$	—	2	4
16	$\frac{2247}{46656}$	$\frac{46656}{2247}$	—	3	5
17	$\frac{2856}{46656}$	$\frac{46656}{2856}$	—	2	8
18	$\frac{3431}{46656}$	$\frac{46656}{3431}$	—	2	3
19	$\frac{3906}{46656}$	$\frac{46656}{3906}$	—	2	10
20	$\frac{4221}{46656}$	$\frac{46656}{4221}$	—	2	9
21	$\frac{4332}{46656}$	$\frac{46656}{4332}$	—	3	6
22	$\frac{4221}{46656}$	$\frac{46656}{4221}$	—	2	9
23	$\frac{3906}{46656}$	$\frac{46656}{3906}$	—	2	10

die Wahrscheinlichk. der Würfe	gleich	und der Gewinnst also vom Einsatze	Rt.	Gr.	Pf.
24	$\frac{3431}{46656}$	$\frac{46656}{3431}$	—	2	3
25	$\frac{2856}{46656}$	$\frac{46656}{2856}$	—	2	8
26	$\frac{2247}{46656}$	$\frac{46656}{2247}$	—	3	5
27	$\frac{1666}{46656}$	$\frac{46656}{1666}$	—	2	4
28	$\frac{1161}{46656}$	$\frac{46656}{1161}$	—	3	4
29	$\frac{756}{46656}$	$\frac{46656}{756}$	—	5	1
30	$\frac{456}{46656}$	$\frac{46656}{456}$	—	8	6
31	$\frac{252}{46656}$	$\frac{46656}{252}$	—	15	5
32	$\frac{126}{46656}$	$\frac{46656}{126}$	1	6	10
33	$\frac{56}{46656}$	$\frac{46656}{56}$	2	21	5
34	$\frac{21}{46656}$	$\frac{46656}{21}$	7	17	1
35	$\frac{21}{46656}$	$\frac{46656}{21}$	27	—	—
36	$\frac{1}{46656}$	46656	162	—	—

§. 44.

§. 44.

Bey dieser Berechnung sind die Brüche bey den Pfennigen aus der Acht gelassen worden. Wollte man solches nicht thun, so könnte man, da jeder Gewinn zweymal vorkommt, den einen um 1 ₰ vergrössern, und z. B. wenn man den Gewinn der 8 unverändert liesse, den Gewinn der 34 auf 7 Rthl. 17 gr. 2 ₰ setzen.

Nach der Tabelle des 43sten § ist es leicht, für jeden andern Einsatz auf die einzeln Mengen der Augen den für eine jede gehörenden Gewinnst zu bestimmen. Würden z. B. 2 gr. statt 4 gr. eingesetzt, die Vertheilung des Einsatzes auf die einzelnen Augenmengen aber auf eine ähnliche Art angenommen, so wäre der Gewinnst von dem in der Tabelle angegebenen durchaus die Hälfte. Würde der Einsatz auf einzelne Nummern verändert, so ist zur Findung des Gewinnstes bloß Multiplication oder Division nöthig.

§. 45.

Findet der **zweyte Fall** (§ 43) statt, so kann folgendes Beyspiel die hier nöthige Art zu verfahren lehren. Angenommen, daß der Einsatz 2 gr. gerechnet, und 24 Treffer und 7 Fehler gezählet, und die 7 Fehler auf die 7 mittelsten Nummern vertheilt würden, so müßte,

wenn geworfen würde			der Gewinnst seyn					
6	—	—	162 Rthl	—	gl	—	₰	
7	—	—	27	—	—	—	—	—
8	—	—	7	—	17	—	1	—
9	—	—	2	—	21	—	5	—
10	—	—	1	—	6	—	10	—
11	—	—	—	—	15	—	5	—
12	—	—	—	—	8	—	6	—
13	—	—	—	—	5	—	1	—
14	—	—	—	—	3	—	4	—
15	—	—	—	—	2	—	4	—
16	—	—	—	—	1	—	8	—
17	—	—	—	—	1	—	4	—
25	—	—	—	—	1	—	4	—
26	—	—	—	—	1	—	8	—
27	—	—	—	—	2	—	4	—
28	—	—	—	—	3	—	4	—
29	—	—	—	—	5	—	1	—
30	—	—	—	—	8	—	6	—
31	—	—	—	—	15	—	5	—
32	—	—	1	—	6	—	10	—
33	—	—	2	—	21	—	5	—
34	—	—	7	—	17	—	1	—
35	—	—	27	—	—	—	—	—
36	—	—	162	—	—	—	—	—

§. 46.

§. 46.

Würden bey gleichem Einsatze weniger Treffer und mehr Fehler, z. B. 20 Treffer und 11 Fehler, oder 18 Treffer und 13 Fehler angenommen, so müßte natürlicher Weise der Gewinnst erhöhet werden, und wenn der Einsatz auf jede Nummer gleich bliebe, im ersten Falle $\frac{1}{5}$ und im zweyten Falle $\frac{1}{3}$ mehr gegeben werden. Der Gewinnst, wenn man 6 oder 36 würfe, würde also im ersten Falle 194 Rthl. 9 gr. 7 pf. und im 2tem 216 Rthl. betragen.

§. 47.

Wenn man hiergegen die wirkliche Beschaffenheit dieser Spiele hält, so hat man allerdings Ursache sich zu verwundern, wie dergleichen erlaubt werden können, welches doch noch oft geschiehet. Was für ein Abfall, wenn bey 20 Treffern und 11 Fehlern, denn mehr Treffer werden nicht gegeben, bey 2 gr. Einsatz

wenn Augen fallen	statt Rthl.	gr.	pf.	gegeben werden Rthl.	gr.	pf.	
6 oder 36 —	194	9	7	— 24	-	-	
7 — 35 —	32	9	7	— 12	-	-	
8 — 34 —	9	6	1	— 5	-	-	
9 — 33 —	3	11	3	— 1	-	-	u. s. w.

und oft werden die Gewinnste noch kleiner gegeben, insbesondere wenn nicht baar Geld, sondern Sachen verspielt werden. Noch grösser ist der Abfall, wenn bey 1 Rthl. Einsatz der höchste Gewinn 100 Rthl., der folgende 50 Rthl., der dritte 20 Rthl. u. s. w. gesetzt wird, da bey 1 Rthl. Einsatz der Gewinnst 12mal grösser seyn müßte, als bey 2 Rthl.

§. 48.

Ein gewöhnlicher Kunstgriff der Leute, die dergleichen Spiele halten, um andere anzulocken, ist der, daß sie sagen, sie gäben mehr Treffer als Fehler, ja fast noch einmal so viel Treffer als Fehler. Wäre das, so wäre der Schade offenbar auf ihrer und der Vortheil auf des Spielers Seite, und wer ihnen glaubt, wagt daher sehr leicht einige Einsätze daran. Allein es können

die Augen		Male geworfen werden
6 und 36	jede	1
7 und 35	—	6
8 und 34	—	21
9 und 33	—	56
10 und 32	—	126
11 und 31	—	252
12 und 30	—	456
13 und 29	—	756
14 und 28	—	1161
15 und 27	—	1666

und es sind also für die Treffer zu rechnen 2 × 4501 oder 9002 Fälle; hingegen können

die

die Augen		geworfen werden	
16 und 26	—	2247	mal
17 und 25	—	2856	
18 und 24	—	3431	
19 und 23	—	3906	
20 und 22	—	4221	
21	—	4332	

und man muß also $2 \times 16661 + 4332$ oder 37654 Fälle für die Fehler rechnen. Welch ein Unterschied! Auch sagen sie, daß es eben so leicht sey, den höchsten Gewinn als nichts zu erhalten; allein es giebt für den höchsten Gewinn nur die beyden Würfe 6 und 36, und für die Fehler 37654 Würfe. Auffallend muß es überdem einem jeden seyn, daß häufig, wenn zum Scherz oder zur Probe Würfe erlaubt werden, darunter weit öfter Treffer als Fehler sind.

§. 49.

Gesetzt endlich, daß die Frage aufgeworfen würde, was ein Banquier einem Spieler, der mit 6 Würfeln, aber auf alles was fiele, spielen wollte, in jedem einzeln Falle zu geben hätte, wenn 8 fl der Einsatz wäre, und diese auf folgende Art vertheilt würden, daß käme auf jeden Wurf 2 ß, und also

		ℋ	ß
auf die einfachen Zahlen	— —	5 ℋ	2 ß
— Päsche	— — — —		5 —
— Ternen	— — — —		10 —
— Quaternen	— — —		10 —
— Quinen	— — — —		3 —
— Sexien	— — — —		3 —
auf den Fall, daß kein Pasch geworfen wird			3 —
	Summa	8 ℋ;	

so ergäbe sich aus § 43

für die Würfe		zum Gewinnste Rt		ℋ		ß
6 und 36	—	324	—	—	—	—
7 und 35	—	54	—	—	—	—
8 und 34	—	15	—	10	—	3
9 und 33	—	5	—	18	—	10
10 und 32	—	2	—	13	—	8
11 und 31	—	1	—	6	—	10
12 und 30	—	—	—	17	—	—
13 und 29	—	—	—	10	—	3
14 und 28	—	—	—	6	—	8
15 und 27	—	—	—	4	—	8
16 und 26	—	—	—	3	—	5
17 und 25	—	—	—	2	—	8
18 und 24	—	—	—	2	—	3
19 und 23	—	—	—	1	—	11
20 und 22	—	—	—	1	—	10
21 —	—	—	—	1	—	9.

Ferner wäre

für

für	die Wahrscheinlichk.	also der Gew. v. Einsatze	Rthl.	gr.	₰
die Päsche —	$\frac{5}{2}$	— $\frac{2}{5}$	—	—	2
— Ternen —	$\frac{5}{9}$	— $\frac{9}{5}$	—	1	6
— Quaternen	$\frac{5}{72}$	— $\frac{72}{5}$	—	12	—
— Quinen —	$\frac{1}{216}$	— 216	2	6	—
— Sexien —	$\frac{1}{7776}$	— 7776	81	—	—
den Fall, daß kein Pasch fiele	$\frac{1}{65}$	— 65	—	16	3.

§. 50.

Hieraus läßt sich nun der Gewinnst bey einem jeden Wurfe durch die Addition finden. Gesetzt es würde geworfen

6, 3, 5, 3, 1, 4;

so müßte der Banquier geben

1. für die Zahl 22 — 1 gr. 10 ₰
2. für einen Pasch — — 2 - also

in allem 2 gr.

Würde geworfen

5, 1, 5, 4, 2, 2;

so wäre der Gewinnst

1. für die Zahl 19 — 1 gr. 11 ₰
2. für 2 Päsche — — 4 - also

in allem 2 gr. 3 ₰.

Würde geworfen

6, 5, 5, 5, 4, 1;

so wäre der Gewinnst

1. für

1. für die Zahl 26	—		3 ggr	5 pf
2. für die Terne	—		1 —	6 -
3. für einen Pasch	—		- —	2 -, also
in allem			5 ggr	1 pf.

Würden alle 6 geworfen; so wäre der Gewinnst

1. für die Zahl 36	—	324 Rthlr		
2. für die Sexie	—	81 —		
3. für die Quine	—	2 —	16 ggr	
4. für die Quaterne	—	— —	12 —	
5. für 2 Ternen	—	— —	3 —	
6. für 3 Päsche	—	— —	- —	6 pf
also in allem		407 Rthlr	15 ggr	6 pf

und dies wäre der höchste Gewinnst.

§. 51.

Es wird nicht undienlich seyn, in Rücksicht auf die bisher betrachteten Spiele auch noch folgende Vergleichung anzustellen. In der Zahlenlotterie können besetzt werden

1. einfache Auszüge		—	90
2. bestimmte Auszüge		—	450
3. Amben	—	—	4005
4. Ternen	—	—	117480
5. Quaternen	—	—	2555160.

Würde auf jeden Satz 1 ggr gerechnet, so betrüge der ganze Einsatz 2677185 ggr oder 111549 Rthlr 9 ggr. Dafür würde nach der Ziehung bezahlt

1.	5	einfache Auszüge	à	15 ℋ —	75 ℋ
2.	5	bestimmte Auszüge	à	75 ℋ —	375 —
3.	10	Amben	à	275 ℋ —	2750 —
4.	10	Ternen	à	5300 ℋ —	53000 —
5.	5	Quaternen	à	60000 ℋ —	300000 —
				in Summa	356200 ℋ

oder 14841 Rℓ 16 ℋ, daß also 96707 Rℓ 17 ℋ Ueberschuß bliebe.

§. 52.

Bey einem Spiele wie § 47 kann man gegen 46656 mal 2 ℋ oder 3888 Rℓ Einnahme an Ausgabe rechnen

auf die Würfe		Rℓ	ℋ	ℒ
6 und 36	—	48	-	-
7 und 35	—	144	-	-
8 und 34	—	210	-	-
9 und 33	—	126	-	-
10 und 32	—	84	-	-
11 und 31	—	126	-	-
12 und 30	—	114	-	-
13 und 29	—	126	-	-
14 und 28	—	96	18	-
15 und 27	—	95	8	-

1170 Rℓ 2 ℋ, wenn die Gewinnste in folgender Ordnung auf einander folgen, 24 Rℓ, 12 Rℓ, 5 Rℓ, 1 Rℓ, 8 ℋ, 6 ℋ, 3 ℋ, 2 ℋ, 2 ℋ, 1 ℋ, 8 ₰, und es bleiben also 2717 Rthlr. 22 ℋ Ueberschuß.

§. 53.

Würde aber 1 Rthlr. gesetzt, und folgten die Gewinnste so, 100 Rthlr., 50 Rthlr., 20 Rthlr., 10 Rthlr., 5 Rthlr., 4 Rthlr., 3 Rthlr., $2\frac{1}{2}$ Rthlr., 2 Rthlr., 1 Rthlr.; so müßte man gegen 46656 Rthlr. Einnahme an Ausgabe rechnen

auf die Würfe

6 und 36	—	200 Rthlr.
7 und 35	—	600 -
8 und 34	—	840 -
9 und 33	—	1260 -
10 und 32	—	1260 -
11 und 31	—	2016 -
12 und 30	—	2736 -
13 und 29	—	1536 -
14 und 28	—	4644 -
15 und 27	—	3332 -

Summa 18424 Rthlr., daß also hier ein Ueberschuß von 28232 Rthlr. bliebe.

§. 54.

Bey einem Spiele wie § 49 würden bey 46656 Würfen eingenommen

46656 mal 8 ℋ oder 15552 Rthlr., und

ausgegeben

1. für jede einfache Zahl
- 324 Rthlr., also für alle 31×324 Rthlr. oder 10044 Rthlr. *

2. für die Päsche - - -	810	-
3. für die Ternen - - -	1620	-
4. für die Quaternen - - -	1620	-
5. für die Quinen - - -	486	-
6. für die Sexien - - -	486	-
7. für die Fälle, da kein Pasch geworfen wird	486	- **
Summa	15552	Rthlr.

* Eigentlich beträgt die Ausgabe für die einfachen Zahlen dann nur für eine genau 324 Rthlr., wenn bey dem, was für eine jede gegeben wird, keine Brüche bey der Berechnung kommen. So oft dies geschieht, ist die Ausgabe etwas geringer; und bloß dieses könnte man also als Ueberschuß betrachten. Gegen die ganze Einnahme und Ausgabe bleibt dasselbe aber sehr klein, ohnerachtet es bey einer einzeln Zahl über 9 Rthlr. betragen kann.

** Genau gerechnet kommen hier 1 Rthlr. 12 pf. mehr.

§. 55.

So wie man aus dem Einsatze und der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen die Grösse des Gewinnstes bestimmen kann, eben so giebt der Gewinnst und seine Wahrscheinlichkeit wiederum den Einsatz.

§. 56.

Wenn man, so oft man mit 6 Würfeln 6 oder 36 wirft, 324 Rthlr. erhält; so ist der rechtmässige Einsatz $\frac{1}{46656} \times 324$ Rthlr. oder 2 gr.

Wenn

Wenn auf 46656 Würfe mit 6 Würfeln 15552 Rthl. wie § 54 ausgezahlt werden; so ist der rechtmässige Preis der Erlaubniß zu einem Wurfe $\frac{15552}{46656}$ Rthl. $= \frac{1}{3}$ Rthl. $=$ 8 gr.

§. 57.

Wenn in einer Lotterie von 10000 Loosen Gewinnste sind, 1 von 10000 Rthl., 1 von 5000 Rthl., 2 von 3000 Rthl., 4 von 1000 Rthl., 8 von 500 Rthl., 10 von 200 Rthl., 15 von 100 Rthl., 20 von 80 Rthl., 40 von 50 Rthl., 100 von 20 Rthl., 300 von 10 Rthl.; so ist 1 Loos werth

(10000 Rthl. + 5000 Rthl. + 2 $\times$ 3000 Rthl. + 4 $\times$ 1000 Rthl. + 8 $\times$ 500 Rthl. + 10 $\times$ 200 Rthl. + 15 $\times$ 100 Rthl. + 20 $\times$ 80 Rthl. + 40 $\times$ 50 Rthl. + 100 $\times$ 20 Rthl. + 300 $\times$ 10) : 10000 oder $\frac{41100}{10000} = 4,11$ Rthl.

Fünfter

Fünfter Abschnitt,

von der

Wahrscheinlichkeit beym Leben der Menschen.

§. 1.

Einen vor andern sehr wichtigen Nutzen erhält man von der Lehre der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, wenn man dieselbe zur Beantwortung verschiedener das Leben der Menschen betreffenden Fragen anwendet; und dazu ist man berechtigt, da Erfahrung und Beobachtung gelehret haben, daß in der Geburt, Vermehrung, Fortpflanzung, Leben und Tode der Menschen eine sehr grosse Ordnung herrsche. Wie solches geschehen könne, wird für die wichtigsten Fälle der gegenwärtige Abschnitt zeigen.

§. 2.

Es setzt aber die gedachte Anwendung der Grundsätze der Berechnung der Wahrscheinlichkeit verschiedene Tabellen, insbesondere Sterblichkeitsordnungen, oder solche Tabellen voraus, in welchen bemerkt ist, wie eine gewisse Anzahl zugleich Geborner allmählig abstirbt:

und je richtiger, d. h. mit der Erfahrung übereinstimmender dieselben, nicht überhaupt, sondern unter den Umständen, unter welchen davon Gebrauch gemacht wird, sind, desto sicherer sind auch die Resultate jener Anwendung. Von diesen verschiedenen Tabellen, und insbesondere von den Sterblichkeitsordnungen, muß also zuerst geredet werden.

§. 3.

Das leichteste **Mittel, eine Sterblichkeitsordnung zu erhalten**, scheint beym ersten Anblick das zu seyn, daß man viele Jahre hinter einander jedes Jahr die Lebenden eines Orts oder Landes nach ihrem Alter aufzeichne, und dann auch bemerke, wie viel jedes Jahr von jedem Alter gestorben. Suchte man darauf aus diesen Bemerkungen für jede Gattung eine Mittelzahl; so bekäme man für den Ort oder das Land, wo man die Lebenden und Sterbenden gezählt hätte, durchs Ordnen der gedachten Mittelzahlen eine Sterblichkeitsordnung, die um so viel sicherer zum Gebrauch seyn würde, je eine grössere Anzahl von Menschen man beobachtet, je mehrere Jahre man seine Beobachtungen fortgesetzt hätte, und je mehr der gedachte Ort oder Land im Beharrungszustande geblieben wäre, d. h. je gleicher in der Zeit der Beobachtung die Zahl der überhaupt Lebenden, oder auch überhaupt Gestorbenen und Gebornen sich geblieben wäre.

§. 4.

§. 4.

Allein es ist mit mancherley Schwierigkeiten verknüpft, die Menge der an einem Orte oder in einem Lande von jedem Alter Lebenden von Jahr zu Jahr zu erfahren, und vorzüglich lassen sich viele, wenn in dieser Rücksicht Zählungen vorgenommen werden, weil sie dabey ihnen nachtheilige Absichten vermuthen, zu einer falschen Angabe ihres Alters verleiten, zu geschweigen, daß bey der Weitläuftigkeit eines solchen Abzählens nicht leicht die äusserste Schärfe und Genauigkeit erwartet werden kann. Man muß daher zu andern Mitteln seine Zuflucht nehmen.

§. 5.

Die Volksmenge eines Orts überhaupt oder ohne Rücksicht auf das Alter eines jeden, läßt sich durch jährliche Zählungen leicht erfahren. Nimmt man dieselbe von mehrern Jahren zusammen; so erhält man durch die Division dieser Summe durch die Anzahl der Jahre, oder durch einen mitlern Durchschnitt, noch genauer. Eben so ist eine genaue Bestimmung der Menge der in jedem Jahre Gebornen möglich, wenn man dabey richtig geführte Kirchenbücher zum Grunde legt, und dabey nicht vergißt, die Kinder, welche die Taufe nicht erhalten haben, und die Kinder fremder Religionsverwandten mit zu zählen. Endlich geben gute Sterbelisten die Menge der von Jahr zu Jahr Gestorbenen, und zwar nicht bloß überhaupt, sondern auch nach ihrem Alter.

§. 6.

Hat man von einem Orte oder Lande, und zwar nach einem mittlern Durchschnitte von mehrern Jahren,

1. die Menge der überhaupt jährlich Lebenden,
2. die Menge der jährlich Gebornen, und
3. die Menge der jährlich Gestorbenen, und zwar
   a überhaupt, und
   b auch nach dem Alter;

so erhält man

1. durch die Division der Menge der jährlich Gebornen durch die Menge der jährlich überhaupt Lebenden einen Bruch, der das **Maaß der Fruchtbarkeit**,

2. durch die Division der Menge der jährlich überhaupt Gestorbenen durch die jährliche Volksmenge einen Bruch, der das **allgemeine Maaß der Sterblichkeit**, und

3. durch die Division der jährlich von jedem Alter Gestorbenen durch die jährliche Volksmenge einen Bruch, der das **besondere Maaß** der Sterblichkeit anzeigt.

Wäre zum Beyspiele

1.	die Anzahl der jährlichen Volksmenge	27043
2.	die Anzahl der jährlich Gebornen	916
3.	die Anzahl der jährlich überhaupt Gestorbenen	830
	worunter unter andern gewesen	
a.	neunjährige : : : : :	5
b.	fünf und zwanzigjährige : : :	5
c.	sechs und vierzigjährige : : :	7;

so

so wäre

1. das Maaß der Fruchtbarkeit $\frac{216}{27043}$ ohngefehr $\frac{1}{29,5}$
2. das allgem. Maaß der Sterblichk. $\frac{830}{27043}$ — — $\frac{1}{32,6}$
3. das besondere Maaß der Sterblichk.

für a und b — — — $\frac{5}{27043}$ — — $\frac{1}{5408}$

für c — — — — $\frac{7}{27043}$ — — $\frac{1}{3863}$

§. 7.

Auf die beschriebene Art hat man aus Erfahrungen, die man in Süßmilchs göttlicher Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts an verschiedenen Orten gesammlet findet, hergeleitet

das Maaß der Fruchtbarkeit

In 39 holländischen Dörfern -	$\frac{1}{23,5}$
— 15 Dörfern bey Paris -	$\frac{1}{22,7}$
— 1056 brandenburgischen Dörfern	$\frac{1}{30}$
— 10 brandenburgischen Städten	$\frac{1}{24,7}$
— Rom - - - -	$\frac{1}{31,4}$
— Paris - - - -	$\frac{1}{31}$
— Berlin - - -	$\frac{1}{28,9}$
— Schweden - - -	$\frac{1}{28,5}$
— England - - -	$\frac{1}{29,3}$

das Maaß der Sterblichkeit

In Amsterdam, Harlem, London und Stockholm	$\frac{1}{24}$
— Rom - - - - -	$\frac{1}{25}$
— Berlin - - - - -	$\frac{1}{28}$
— den Friesländischen Städten - -	$\frac{1}{26.5}$
— 1056 Dörfern der Churmark im Durchschnitt	$\frac{1}{40}$
— Schweden - - - -	$\frac{1}{40}$
— England - - - -	$\frac{1}{32}$
— Würtemberg - - - -	$\frac{1}{32}$
— der Churmark - - - -	$\frac{1}{31}$
— Hannöverschen - - - -	$\frac{1}{34}$

§. 8.

So wie man aus der nach § 5 erhaltenen Menge der jährlich Lebenden, der jährlich Gebornen, und der jährlich so wohl überhaupt als von jedem Alter Gestorbenen nach § 6 das Maaß der Fruchtbarkeit, das allgemeine und die besondern Maasse der Sterblichkeit desselben Orts finden kann; so ist man, wenn für einen Ort die gedachten Maasse bereits bestimmt sind, aus der Anzahl der jährlich Gebornen, oder der jährlich so wohl überhaupt als von jedem Alter Gestorbenen im Stande, die Menge der jährlich überhaupt Lebenden zu schliessen. Man kehrt dann nur den Bruch, welcher das bekannte Maaß anzeigt, um, und multiplicirt mit diesem umgekehrten Bruche die andere gegebene

Zahl.

Zahl. Kann man z. B. die Maasse der Fruchtbarkeit und Sterblichkeit des 6ten § voraussetzen; so findet man die Anzahl aller jährlich Lebenden

1. aus der Anzahl der jährlich Gebornen 916, wenn man 916 mit 29,5
2. aus der Anzahl der überhaupt jährlich Gestorbenen 830, wenn man 830 mit 32,6
3. aus der Anzahl der jährlich Gestorbenen 9jährigen und 25jährigen 5, wenn man 5 mit 5408, und endlich
4. aus der Anzahl der jährlich Gestorbenen 46jährigen 7, wenn man 7 mit 3863 multiplicirt. Es ist also

nach 1.
```
       916
      29,5
    ------
      4580
     8244
    1832
  --------
   27022,0 die Anzahl der jährlich Lebenden
```

nach 2.
```
       830
      32,6
    ------
      4980
     166
    249
  --------
   27058,0 die Anzahl der jährlich Lebenden
```

nach 3.
```
         5
      5408
    ------
     27040 die Anzahl der jährlich Lebenden
```

nach 4. 7
3863
27041 die Anzahl der jährlich Lebenden.

§. 9.

Je genauer die Maasse der Fruchtbarkeit und der Sterblichkeit ausgedruckt sind; desto genauer erhält man auf diese Art die Anzahl der jährlich Lebenden. Weil die im vorhergehenden § gebrauchten Maasse nicht die größte Schärfe haben, ein Umstand, welchem man sehr selten nur vermeidet, so entstehen daher Verschiedenheiten in der Bestimmung der jährlich Lebenden. Damit hieraus keine beträchtliche Fehler entstehen, muß man bey diesem Verfahren

1. die Anzahl der Lebenden auf verschiedene Art bestimmen, und dann aus den erhaltenen Bestimmungen eine Mittelzahl suchen,

2. zu diesem Geschäfte so viel Bestimmungen, als ohne zu grosse Weitläuftigkeit der Rechnung möglich ist, nehmen.

Wollte man z. B. aus 1 und 3 die Mittelzahl suchen, so erhielte man 27030; aus 1. 2. und 3 aber erhält man 27040, welche hier auch schon aus 1 und 2 sich ergiebt, weil die Zahlen $\frac{1}{29,7}$ und $\frac{1}{32,6}$ auf entgegenstehende Art ohngefehr in gleichem Grade von der größten Schärfe abweichen. Fände dieser Umstand nicht statt, so wäre die Mittelzahl aus 1. 2 und 3, oder noch mehr aus 1. 2. 3 und 4 die richtigste.

§. 10.

Ist nun bekannt, und zwar nach einem mitlern Durchschnitte vieler Jahre, in welchem ein Ort oder Land im Beharrungszustande gewesen,

1. die Anzahl aller Lebenden,
2. die Anzahl der jährlich davon Gestorbenen,

   a überhaupt, und

   b nach dem verschiedenen Alter, und zwar von Jahr zu Jahr; so läßt sich für diesen Ort eine Sterblichkeitsordnung anfertigen, indem man zuvörderst zwey Columnen macht, wovon die erste die Jahre des Alters, und die zweyte die Anzahl der von jedem Alter jährlich Gestorbenen enthält. Dem Anfange nach könnte z. B. diese Tabelle seyn

Jahre Alter	jährlich Gestorbene
0	250
1	89
2	43
3	25
4	14
5	12
6	11
7	9
8	8
9	7
10	5
11	4
12	4

u. s. w.

Diese Tabelle wäre so zu verstehen. Von 0 bis zum 1ten Jahre des Alters, oder vor dem Ende des 1ten Jahres ihres Lebens sind gestorben 250; zwischen dem 1ten und 2ten Jahre 89 u. s. w.

§. 11.

So lange der Ort oder das Land, für welches man eine solche Tabelle auf die beschriebene Art verfertiget hat, im Beharrungszustande bleibt, kann man also annehmen, daß jährlich so viel in dem 1ten, 2ten, 3ten, 4ten Jahre ihres Alters u. s. w. sterben, als die Tabelle anzeigt. Angenommen nun, daß unter den jährlich Gestorbenen keine von 97 Jahren seyen, und das höchste Alter also 96 Jahr wäre; so müßten, damit 96 Jahre hinter einander die Sterblichkeit in dem Maasse, als es die Tabelle angiebt, statt finden könne, jedes Jahr so viel Kinder geboren werden, als die Summe aller von 0 bis zum 96ten Jahre Gestorbenen betrüge. Ferner müßten jedesmal seyn

so viel				als die Summe betrüge			
—	1jährige,	von der	2ten	Zahl	der 2ten	Colum.	bis zu Ende
—	2jährige	—	3	—	—	—	—
—	3jährige	—	4	—	—	—	—
—	4jährige	—	5	—	—	—	—
—	5jährige	—	6	—	—	—	—

u. s. w. Addirte man also alle Zahlen der 2ten Columne, und setzte diese Summe neben 0 der ersten Columne in ei-

ne

ne dritte Columne, alsdann darunter die Summen der Zahlen der 2ten Columne von der 2ten, 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. an; so erhielte man eine Columne, welche die von jedem Alter jährlich Lebenden anzeigte. Dem Anfange nach wäre die Tabelle, welche man auf diese Art erhielte

Jahre Alter	Es sterben jährlich	von Lebenden
0		1000
	250	
1		750
	89	
2		661
	43	
3		618
	25	
4		593
	14	
5		579
	12	
6		567
	11	
7		556
	9	
8		547
	8	
9		539
	7	
10		532
	5	
11		527
	4	
12		523
	4	

u. s. w.

§. 12.

Auf eben die Art, als nach dem vorhergehenden § die 3te Columne der gedachten Tabelle aus der 2ten entsteht, läßt sich ferner aus der 3ten Columne eine 4te verfertigen, worin die Zahlen theils die Menge aller lebenden von dem nebenstehenden Alter und drüber, theils die Summe der Jahre aller Leben derer, die daneben in der

3ten

3ten Columne verzeichnet sind, anzeigt. Dem Anfange nach würde die Tabelle § 10 und 11 mit dieser 4ten Columne seyn

Jahre Alter	es sterben jährlich	von Lebenden	Summe aller Lebenden
0		1000	28988
	250		
1		750	28238
	89		
2		661	27577
	43		
3		618	26959
	25		
4		593	26366
	14		
5		579	25787
	12		
6		567	25220
	11		
7		556	24664
	9		
8		547	24117
	8		
9		539	23578
	7		
10		532	23046
	5		
11		527	22519
	4		
12		523	22096
	4		

u. s. w.

§. 13.

Nun lassen sich sehr leicht noch 3 Columnen hinzufügen:

1. eine, welche die Quotienten enthält, welche man bekommt, wenn man die Zahlen der 3ten Columne durch die neben stehenden Zahlen der 2ten Columne dividirt, und welche anzeigen, von wie vielen von dem neben stehenden Alter jährlich Einer stirbt.

2. eine, welche die um $\frac{1}{2}$ verminderten Quotienten aus den Zahlen der 4ten Columne durch die in der 3ten Columne

lumne daneben stehenden dividirt, enthält. Diese Quotienten zeigen die mitlere Lebensdauer derjenigen an, deren Alter neben ihnen in der ersten Columne bemerkt ist. Dem ersten Anschein nach sollten zwar die Zahlen dieser Columne nicht die um $\frac{1}{2}$ verminderten Quotienten aus den Zahlen der 4ten und 3ten Columne, sondern diese Quotienten selbst seyn. Allein dann hätte man nicht mit in Rechnung gebracht, daß die jedes Jahr Sterbenden ihr Sterbejahr nicht ganz durchleben, indem, wenn die Zahlen der vierten Columne die zweyte vorhin ihnen beygelegte Bedeutung haben sollen, dies Jahr immer als voll in Anschlag gebracht ist.

3. eine, welche die Differenz zwischen zweyen Zahlen der 1ten Columne enthält, wovon die grössere zu einer Zahl der 3ten Columne gehört, welche die Hälfte von der Zahl eben dieser Columne ist, neben welcher die andere Zahl der ersten Columne und die eben gedachte Differenz steht. Die Zahlen dieser letzten Columne zeigen die Jahre an, in welcher die Hälfte der Personen der 3ten Columne ausgestorben ist, und nach deren Verlauf es gleich wahrscheinlich ist, daß ein bestimmter Mensch von dem in der 1ten Columne bemerkten Alter lebe oder tod sey, oder die wahrscheinliche Lebensdauer. Weiter unten wird dies durch Beyspiele erklärt und in Ansehung des N. 2 gesagten noch eine Anmerkung gemacht werden.

§. 14.

§. 14.

Durch das von § 5 an beschriebene Verfahren erhält man Sterblichkeitsordnungen für den Ort oder das Land, wo man die dazu nöthigen Beobachtungen gesammlet hat, und zwar für beyde Geschlechter zusammen genommen. Dergleichen Sterblichkeitsordnungen sind nun aber bloß für diesen Ort oder die ihm in allen Stücken ähnlichen, und dann brauchbar, wenn nicht auf den Unterschied der Geschlechter gesehen wird. Die wichtigste Benutzungen der Sterblichkeitsordnungen erfordern aber theils eine allgemeine Sterblichkeitsordnung, theils eine Sterblichkeitsordnung für das männliche und eine für das weibliche Geschlecht insbesondere, und oft sind Sterblichkeitsordnungen nöthig, die nur für eine bestimmte Classe von Menschen gehören. Von diesen muß daher ebenfalls noch geredet werden.

§. 15.

Die allgemeine Sterblichkeitsordnung setzt Erfahrungen voraus, die theils von grossen, theils von kleinen Städten, theils vom platten Lande gesammlet sind. Mit diesen Erfahrungen verfährt man, um eine allgemeine Sterblichkeitsordnung zu erhalten, auf folgende Art. Man reducirt zuvörderst, wenn die Anzahlen der von einem jeden Alter, sowohl in den Städten, als auf dem platten Lande Gestorbenen nicht nach einer und der=

derselben Menge von überhaupt lebenden entweder, oder Neugebornen bestimmt ist, jene Anzahlen auf solche, bey denen dieses statt findet. Dies ist leicht, indem man nur mit der Menge der Neugebornen oder überhaupt lebenden, worauf man reduciren will, die gegebene Anzahl der jährlich Gestorbenen zu multipliciren, und dies Product durch die gegebene Menge der Neugebornen oder überhaupt lebenden zu dividiren hat. Ist das geschehen, so sucht man nach einem mitlern Durchschnitte

1. die von jedem Alter in grossen Städten von 10000 oder irgend einer andern Anzahl Neugebornen jährlich Sterbenden,

2. eben dieselben für das platte Land. Endlich nimmt man, da die Anzahl der auf dem Lande Lebenden ohngefehr noch einmal so groß ist als in den Städten,

3. die von jedem Alter auf dem Lande jährlich Gestorbenen doppelt, addirt dazu die von gleichem Alter in den Städten gestorbenen, und dividirt diese Summe mit 3. Der Quotient zeigt die überhaupt von jedem Alter Sterbenden an.

§. 16.

§. 16.

Allein man hat nicht immer das Alter der Verstorbenen genau von Jahr zu Jahr, sondern öfters nur von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Jahren. Bedient man sich z. B. der in Süßmilchs göttlicher Ordnung im 2ten Theile gesammleten Erfahrungen, so erhält man nach gehöriger Reduction

Es leben nach Jahren	in Braunschweig	in Wien	in Berlin	in Paris	in London	nach einem mittlern Durchschnitt in grossen Städten.
0	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	6905	6344	6794	7945		6997
2	6336	5774	5932	6876	6363	6256
5	5477	5022	5097	5809	5500	5381
10	5192	4609	4745	5249	5154	4990
20	4859	4291	4467	4866	4848	4506
30	4113	3702	3812	4342	4070	4008
40	3383	2963	3037	3673	3117	3234
50	2533	2207	2217	2869	2141	2393
60	1664	1433	1477	2142	1344	1612
70	856	718	742	1154	714	837
80	310	231	222	309	266	267
90	58	50	37	43	38	45

Ver=

Verfährt man auf eine ähnliche Art mit den Erfahrungen mehrerer Dörfer, so erhält man

Es leben nach Jahren	nach einem mitlern Durchschn. auf dem Lande
0	10000
1	7627
2	7012
5	6288
10	5682
20	5211
30	4623
40	4017
50	3358
60	2429
70	1293
80	384
90	93

Hieraus ergiebt sich nach Nr. 3 des vorhergehenden § für eine allgemeine Sterblichkeitsordnung

Es leben nach Jahren	von	oder
0	10000	10000
1	$\frac{2 \cdot 7627 + 6997}{3}$	7417
2	$\frac{2 \cdot 7102 + 6256}{3}$	6760
5	$\frac{2 \cdot 6288 + 5381}{3}$	5986
10	$\frac{2 \cdot 5682 + 4990}{3}$	5451
20	$\frac{2 \cdot 5211 + 4506}{3}$	4987
30	$\frac{2 \cdot 4623 + 4008}{3}$	4418
40	$\frac{2 \cdot 4017 + 3234}{3}$	3756
50	$\frac{2 \cdot 3358 + 2393}{3}$	3036
60	$\frac{2 \cdot 2429 + 1612}{3}$	2157
70	$\frac{2 \cdot 1293 + 837}{3}$	1431
80	$\frac{2 \cdot 384 + 267}{3}$	345
90	$\frac{2 \cdot 93 + 45}{3}$	77

§. 17.

§. 17.

Findet nun der § 16 gedachte Fall statt; so muß man durchs Einschalten die folgenden Zahlen zu finden suchen. Wie dieses geschehen könne, davon ist in der Vorrede gesprochen worden, wohin ich also verweise.

§. 18.

Aus dem bisherigen wird begreiflich seyn, auf was für eine Art die 2te der am Ende angehängten Tabellen, welche den Titel, Allgemeine Sterblichkeitsordnung, führt, verfertiget werden könne. Nachdem man nach § 15 — 17 entweder allein, oder auch nach § 6 — 11 die 3 ersten Columnen zu Stande gebracht hat, so verfertiget man daraus nach § 12 — 14 die vier folgenden. Dabey ist denn nur noch zu bemerken, daß, um die mittlere Lebensdauer auf die § 13 angezeigte Art zu finden, bey den ersten Jahren des Alters von den durch die Division der Zahlen der 4ten Columne durch die neben stehenden Zahlen der dritten Columne gefundenen Quotienten wegen der in den ersten Jahren so grossen Sterblichkeit mehr als $\frac{1}{2}$ abgezogen worden sey. Man sehe auch wegen dieses Umstandes die Vorrede nach. Um übrigens hier durch ein Beyspiel zu erklären, wie die wahrscheinliche Lebensdauer eines jeden Alters gefunden werde; so werde nach der wahrscheinlichen Lebensdauer eines 25jährigen gefragt. Von 10000 Neugebornen leben nach 25 Jahren 25jährige 4710, und von diesen wird die Hälfte 2355, 58 Jahr alt. Von einer bestimmten Menge 25jähriger ist also die Hälfte in dem 58ten Jahre ihres Alters gestorben, und 58 — 25 oder 33 Jahr ist daher die wahrscheinliche Lebensdauer des Alters von 25 Jahren.

§. 19.

Wenn man mit verschiedenen aus Beobachtungen gezogenen Maassen der Fruchtbarkeit und der Sterblichkeit eben so verfährt, als nach § 15 mit den Anzahlen der von einer bestimmten Menge Menschen jährlich Gestorbenen, oder *diese Maasse aus den hiezu* erforderlichen aber nach einem mitlern Durchschnitte bestimmten Zahlen herleitet; so erhält man aus den zum Grunde gelegten besondern Maassen der Fruchtbarkeit und Sterblichkeit allgemeinere, welche ebenfalls häufig mit Nutzen gebraucht werden können. Auf die erste Art erhielte man z. B.

zum Maasse der Sterblichkeit

für das platte Land	-	$\frac{1}{40}$
für kleine Städte -	-	$\frac{1}{32}$
für grosse Städte -	-	$\frac{1}{28}$
für sehr grosse Städte	-	$\frac{1}{24}$ bis $\frac{1}{25}$
für ganze Länder im Durchschnitte		$\frac{1}{35}$ bis $\frac{1}{36}$.

§. 20.

Legt man bey dem §. 6 bis 18 beschriebenen Verfahren bloß Erfahrungen über das männliche Geschlecht zum Grun=

Grunde, so erhält man besondere oder allgemeine Sterblichkeitsordnungen für das männliche Geschlecht, so wie besondere oder allgemeine Sterblichkeitsordnungen für das weibliche Geschlecht, dieses Geschlecht allein betreffende Erfahrungen und Beobachtungen voraussetzen. Da auch dergleichen Sterblichkeitsordnungen, wenigstens die allgemeinen, öfters nöthig sind, so ist am Ende so wohl eine **allgemeine Sterblichkeitsordnung für das männliche** als eine **allgemeine Sterblichkeitsordnung für das weibliche Geschlecht** beygefügt worden. Jene ist die 3te, diese die 4te.

§. 21.

Zu diesen Tabellen ist durch die 5te noch eine andere gesetzt worden, welche den Titel, **Sterblichkeitsordnung für Rentenirer** führt und sich zwar auf das männliche und weibliche Geschlecht zusammen genommen erstreckt, aber auf Erfahrungen über Menschen gebaut ist, denen man aller Wahrscheinlichkeit nach ein dauerhafteres Leben beylegen mußte, als die Menschen im Durchschnitte haben können. Auch eine solche Sterblichkeitsordnung ist öfters nothwendig, und bey der Anwendung, die davon in der Folge gemacht werden wird, wird zugleich noch eins und das andere zum bessern Verständniß derselben gesagt werden.

§. 22.

Je grösser die Anzahl der Menschen ist, von denen man die bey der Verfertigung der Sterblichkeitsordnungen nöthigen Erfahrungen anfänglich hergenommen hat, desto zuverlässiger ist die Sterblichkeitsordnung. Eine kleine Anzahl darf wegen § 26 des vierten Abschnitts nicht genommen werden. Daß man bey der Sammlung der Erfahrungen ausserordentliche Jahre, z. B. worin die Pest gewüthet hat, auslassen müsse, darf wohl kaum erinnert werden.

§. 23.

Aus ähnlichen Erfahrungen über die jährlich Verheyratheten, jährlichen Wittwen und Waysen, und jährlich Studirenden, als bisher über die jährlich Sterbenden betrachtet worden sind, lassen sich nach den bisher erklärten Grundsätzen den Sterblichkeitsordnungen ähnliche Tabellen für die Heyrathenden, die Wittwen und Waysen und Studirenden herleiten, deren Gebrauch, wenn man sie eben so vollkommen hätte, auch eben so wichtig werden könnte, als die Benutzung der Sterblichkeitsordnungen. Allein es ist theils viel schwerer, hier die nöthigen Erfahrungen in gehöriger Menge zu sammlen, theils ändern sich die Umstände hier mehr als bey den Sterbenden. In der Folge wird indeß noch eins und das andere von diesen Tabellen vorkommen.

§. 24.

Im Durchschnitte werden jährlich mehr geboren als sterben. Es vermehren sich also die Menschen von Jahr zu Jahr, und es lassen sich auch hier so wohl besondere als ein allgemeines Maaß gedenken, nach welchem diese Vermehrung erfolgt. Es heisse dasselbe das allgemeine oder besondere **Maaß der Vermehrung.** Für einen bestimmten Ort und Ein Jahr findet man dieses Maaß, wenn man die Summe aller im Anfange dieses Jahres Lebenden, und die Anzahl aller Gebornen und Gestorbenen dieses Jahres weiß, leicht, indem man nur die Anzahl der Gestorbenen von der Anzahl der Gebornen abzuziehen, und die Differenz zum Zähler eines Bruchs machen darf, dessen Nenner die Summe aller Lebenden ist. Lebten z. B. an einem Orte 29376 Menschen überhaupt, und würden daselbst 1306 in einem Jahre geboren, und stürben dagegen nur 1000; so wäre das Maaß der Vermehrung

$\frac{1306 - 1000}{29376} = \frac{306}{29376} = \frac{1}{96}$ d. h. auf jede 96 lebende Personen aus der Summe aller Lebenden könnte man das folgende Jahr Einen mehr oder 97 statt 96 rechnen.

§. 25.

Weiß man aber die Anzahl aller Lebenden nicht, sondern nur das Maaß der Fruchtbarkeit und der Sterblichkeit eines Jahres; so findet man das Maaß der Vermehrung für dieses Jahr, wenn man das Maaß der Sterblichkeit von dem Maasse der Fruchtbarkeit abzieht. Ist der Zähler dieser Maasse 1; so geschieht solches, wenn man den Nenner des Maasses der Fruchtbarkeit von dem Nenner des Maasses der Sterblichkeit abzieht, und diese Differenz durch das Product der beyden gedachten Nenner dividirt. Es sey das Maaß der Fruchtbarkeit $\frac{653}{14688}$, und das Maaß der Sterblichkeit $\frac{500}{14688}$, so ist nach der angegebenen allgemeinen Regel des Maasses der Vermehrung $\frac{653}{14688} - \frac{500}{14688} = \frac{153}{14688} = \frac{1}{96}$, wie vorhin. Wäre das Maaß der Fruchtbarkeit $\frac{1}{22,4}$ und das Maaß der Sterblichkeit $\frac{1}{29,37}$; so erhielte man nach der angeführten besondern Regel erstlich $29,37 - 22,4 = 6,97$, und zum Maasse der Vermehrung $\frac{6,97}{29,37 . 22,4}$ oder $\frac{1}{94}$ bis $\frac{1}{95}$.

§. 26.

Ein mitlerer Durchschnitt aus mehreren Maassen der Vermehrung eines Orts giebt ein allgemeines Maaß der Vermehrung für diesen Ort, und ein mitlerer Durchschnitt aus mehreren solchen Maassen für grosse und kleine Städte und fürs platte Land **ein allgemeines Maaß der Vermehrung** im weitläuftigen und eigentlichen Verstande.

§. 27.

Was nun die Anwendung des bisherigen betrifft, so ist bereits von den Maassen der Fruchtbarkeit und Sterb-

Sterblichkeit in dieser Rücksicht § 8 gesprochen worden. Die Sterblichkeitsordnungen aber enthalten

1. das Erforderliche zur Beantwortung der Fragen

a wie viel von einer bestimmten Summe entweder überhaupt oder von einem gewissen Alter lebenden jährlich entweder überhaupt oder in einem gewissen Alter sterben?

b wie viel man gegen eine gegebene Summe in einem Jahre von bestimmtem Alter Gestorbener lebende entweder überhaupt oder von einem bestimmten Alter rechnen kann?

c von wie vielen von einem bestimmten Alter Lebenden jährlich Einer stirbt?

d welches die mitlere und welches die wahrscheinliche Lebensdauer eines jeden Alters sey? u. d. gl.

Was für eine Sterblichkeitsordnung jedesmal gebraucht werden müsse, ergiebt sich durch die nähere Bestimmung dieser Fragen in einzeln Fällen von selbst.

Exempel.

Zu *a*. Es sey die ganze Volksmenge eines Orts 11037, und die Sterblichkeit daselbst, wie sie in der allgemeinen Sterblichkeitsordnung angenommen worden. Wie groß ist nun daselbst

1. die Anzahl der in einem Jahre überhaupt Verstorbenen?
2. die Anzahl der daselbst in einem Jahre Sterbenden

a. 6jährigen?

b. 30jährigen?

c. 50jährigen?

Offenbar ist hier

1. die gesuchte Anzahl der in einem Jahre überhaupt Verstorbenen ein eben so grosser Theil von der Anzahl der in einem Jahr nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung von 294294 Verstorbenen, als es 11037 von 294294 ist. Folglich findet man das verlangte aus $11037 \times \frac{10000}{294294}$, oder es ist die gesuchte Anzahl der Verstorbenen 375. Auf eine ähnliche Art überzeugt man sich,

2. daß

a. die Anzahl der in einem Jahre verstorbenen 6jährigen $11037 \times \frac{135}{294294}$ oder 51.

b. die Anzahl der in einem Jahre verstorbenen 30jährigen $11037 \times \frac{61}{294294}$ oder 23, und endlich

c. die Anzahl der in einem Jahre verstorbenen 50jährigen $11037 \times \frac{77}{294294}$ oder 28 sey.

Würde gefragt, wie groß an einem Orte, wo die Anzahl der lebenden 6jährigen 218 wäre, nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung

a. die Anzahl aller daselbst jährlich Sterbenden

b. die Anzahl der daselbst sterbenden 6jährigen sey?

so wäre

a. die Anzahl aller Sterbenden $218 \times \frac{10000}{5808}$ oder 375.

b. die Anzahl der sterbenden 6jährigen $218 \times \frac{135}{5808}$ oder 51.

Zu b. Nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung kommen 294294 überhaupt Lebende auf die in der 2ten Columne bemerkten Anzahlen der von jedem Alter jährlich Sterbenden.

Zu andern Summen Gestorbener von bestimmtem Alter sucht man eine Proportionalzahl. Wenn 29 Neunjährige in einem Jahre sterben; so ist die Anzahl aller Lebenden $29 \times \frac{224294}{58}$ oder 117147.

Wenn an einem Orte jährlich 29 Neunjährige sterben, so ist ferner die Anzahl aller daselbst lebenden Neunjährigen $29 \times \frac{5509}{58}$ oder 2754, und auf eine ähnliche Art sucht man das verlangte in andern Fällen.

Zu c. und d. Die 3te, 4te und 5te Columne enthalten die auf diese Fragen zu ertheilende Antwort unmittelbar.

§. 28.

2. Setzen die Sterblichkeitsordnungen uns in den Stand, noch verschiedene andere Wahrscheinlichkeiten bey dem menschlichen Leben zu berechnen. Man kann z. B.

a wenn das Alter eines Menschen bestimmt ist, die Frage aufwerfen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, daß er nach 1 oder nach 2 oder nach 3 Jahren u. s. w. noch lebe? Nimmt man hier jedesmal die Zahl der 3ten Columne, die neben der Alterzahl des angenommenen Menschen steht, als die Zahl der möglichen Fälle an, so ist die folgende Zahl der 3ten Columne die Zahl der nach einem Jahre, die nun folgende Zahl der 3ten Columne die Zahl der nach 2 Jahren günstigen Fälle, u. s. w. Hiernach läßt sich die gedachte Wahrscheinlichkeit sehr leicht bestimmen. Gesetzt z. B. daß die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden sollte, die ein Mensch von 80 Jahren nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung hätte, das 81ste, 82ste, 83ste Jahr u. s. w. zu erleben, so wäre

nach

nach Jahren	nach seinem Jahre	seine Wahrscheinlichkeit zu leben.
1	81sten	$\frac{294}{345}$
2	82sten	$\frac{250}{345}$
3	83sten	$\frac{215}{345}$
4	84sten	$\frac{186}{345}$
5	85sten	$\frac{160}{345}$
6	86sten	$\frac{137}{345}$
7	87sten	$\frac{117}{345}$
8	88sten	$\frac{101}{345}$
9	89sten	$\frac{88}{345}$
10	90sten	$\frac{77}{345}$
11	91sten	$\frac{67}{345}$
12	92sten	$\frac{58}{345}$
13	93sten	$\frac{47}{345}$
14	94sten	$\frac{39}{345}$
15	95sten	$\frac{32}{345}$
16	96sten	$\frac{25}{345}$
17	97sten	$\frac{19}{345}$
18	98sten	$\frac{14}{345}$
19	99sten	$\frac{10}{345}$
20	100sten	$\frac{6}{345}$
21	101sten	$\frac{3}{345}$
22	102ten	$\frac{2}{345}$
23	103ten	$\frac{1}{345}$
24	104ten	0

§. 29.

§. 29.

Wäre aber bestimmt, zu was für einem Geschlechte derjenige, dessen Lebenswahrscheinlichkeit man auf diese Art bestimmen sollte, gehörte, so müßte man zur erklärten Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit entweder die 3te oder die 4te Tabelle gebrauchen, und bisweilen muß man auch dabey die 5te Tabelle zum Grunde legen. Uebrigens bleibt das Verfahren dasselbige. Es ist z. B. die Wahrscheinlichkeit zu leben

	für		
	einen 80jähr.	eine 80jähr.	einen 80j.
nach Jahren	Mann	Frau	Rentenier:
1	$\frac{320}{358}$	$\frac{296}{352}$	$\frac{697}{812}$
2	$\frac{284}{358}$	$\frac{249}{352}$	$\frac{590}{812}$
3	$\frac{249}{358}$	$\frac{210}{352}$	$\frac{492}{812}$
4	$\frac{215}{358}$	$\frac{175}{352}$	$\frac{404}{812}$
5	$\frac{183}{358}$	$\frac{147}{352}$	$\frac{327}{812}$
6	$\frac{153}{358}$	$\frac{124}{352}$	$\frac{261}{812}$
7	$\frac{126}{358}$	$\frac{103}{352}$	$\frac{206}{812}$
8	$\frac{102}{358}$	$\frac{84}{352}$	$\frac{159}{812}$
9	$\frac{82}{358}$	$\frac{67}{352}$	$\frac{117}{812}$
10	$\frac{67}{358}$	$\frac{52}{352}$	$\frac{80}{812}$
11	$\frac{55}{358}$	$\frac{40}{352}$	$\frac{50}{812}$
12	$\frac{46}{358}$	$\frac{30}{352}$	$\frac{28}{812}$
13	$\frac{38}{358}$	$\frac{22}{352}$	$\frac{14}{812}$
14	$\frac{31}{358}$	$\frac{15}{352}$	$\frac{6}{812}$

nach

nach Jahren	einen 80jähr. Mann	eine 80jähr. Frau	ein 80jr. Rentenier:
15	$\frac{24}{358}$	$\frac{10}{352}$	$\frac{2}{812}$
16	$\frac{18}{358}$	$\frac{7}{352}$	$\frac{1}{812}$
17	$\frac{13}{358}$	$\frac{5}{352}$	0
18	$\frac{9}{358}$	$\frac{4}{352}$	
19	$\frac{5}{358}$	$\frac{3}{352}$	
20	$\frac{3}{358}$	$\frac{2}{352}$	
21	$\frac{2}{358}$	$\frac{1}{352}$	
22	$\frac{1}{358}$	0	
23	0		

§. 30.

b (§ 28) Kann man, wenn das Alter eines Menschen gegeben ist, auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, die nach 1, 2, 3 Jahren u. s. w. sein Tod hat. Da die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mensch tod sey, eben so das Entgegengesetzte der Wahrscheinlichkeit ist, daß er noch lebe, als der Tod dem Leben entgegen steht; so darf man nur jedesmal die Wahrscheinlichkeit seines Lebens von 1 abziehen, um die Wahrscheinlichkeit, daß er tod sey, zu finden. Wird also gefragt, wie wahrscheinlich es sey, daß ein 80jähriger nach 1, 2, 3, 4 Jahren u. s. w. gestorben seyn werde; so ist

	diese Wahrscheinlichkeit		
nach Jahren	für einen Mann	für eine Frau	für einen Rentenier.
1.	$1 - \frac{320}{358}$	$1 - \frac{296}{352}$	$1 - \frac{697}{812}$
2.	$1 - \frac{284}{358}$	$1 - \frac{249}{352}$	$1 - \frac{590}{812}$
3.	$1 - \frac{249}{358}$	$1 - \frac{210}{352}$	$1 - \frac{492}{812}$
4.	$1 - \frac{215}{358}$	$1 - \frac{175}{352}$	$1 - \frac{404}{812}$
5.	$1 - \frac{183}{358}$	$1 - \frac{147}{352}$	$1 - \frac{327}{812}$
6.	$1 - \frac{153}{358}$	$1 - \frac{124}{352}$	$1 - \frac{261}{812}$
7.	$1 - \frac{126}{358}$	$1 - \frac{103}{352}$	$1 - \frac{206}{812}$
8.	$1 - \frac{102}{358}$	$1 - \frac{84}{352}$	$1 - \frac{159}{812}$
9.	$1 - \frac{82}{358}$	$1 - \frac{67}{352}$	$1 - \frac{117}{812}$
10.	$1 - \frac{67}{358}$	$1 - \frac{52}{352}$	$1 - \frac{80}{812}$
11.	$1 - \frac{55}{358}$	$1 - \frac{40}{352}$	$1 - \frac{50}{812}$
12.	$1 - \frac{46}{358}$	$1 - \frac{30}{352}$	$1 - \frac{28}{812}$
13.	$1 - \frac{38}{358}$	$1 - \frac{22}{352}$	$1 - \frac{14}{812}$
14.	$1 - \frac{31}{358}$	$1 - \frac{15}{352}$	$1 - \frac{6}{812}$
15.	$1 - \frac{24}{358}$	$1 - \frac{10}{352}$	$1 - \frac{3}{812}$
16.	$1 - \frac{18}{358}$	$1 - \frac{7}{352}$	$1 - \frac{1}{812}$
17.	$1 - \frac{13}{358}$	$1 - \frac{5}{352}$	$1 - 0$
18.	$1 - \frac{9}{358}$	$1 - \frac{4}{352}$	
19.	$1 - \frac{5}{358}$	$1 - \frac{3}{352}$	
20.	$1 - \frac{3}{358}$	$1 - \frac{2}{352}$	
21.	$1 - \frac{2}{358}$	$1 - \frac{1}{352}$	
22.	$1 - \frac{1}{358}$	$1 - 0$	
23.	$1 - 0$		

§. 31.

§. 31.

c (§ 30) Kann man, wenn das Alter zweyer oder mehrerer Personen gegeben ist, bestimmen, wie wahrscheinlich es sey, daß nach irgend einer Anzahl von Jahren entweder

1. alle noch am Leben, oder

2. alle tod, oder

3. einige noch am Leben und andere tod, oder nicht alle tod seyn. Ein jeder dieser Fälle muß besonders erwogen werden.

§. 32.

Wenn gefragt wird, wie wahrscheinlich es sey, daß von zwey oder mehrern Personen von bestimmtem Alter nach einer bestimmten Zahl von Jahren keiner tod oder alle noch am Leben seyn; so sind zwey oder mehrere von einander unabhängige Begebenheiten gegeben, und es wird gefragt, wie wahrscheinlich es sey, daß alle zugleich sich ereignen? In dergleichen Fällen findet man die gesuchte Wahrscheinlichkeit dadurch, daß man die Wahrscheinlichkeiten der einzeln Begebenheiten mit einander multipliciret, und dies muß daher auch hier geschehen. Denn man denke sich zwey Mengen von Begebenheiten, bey welchen die Begebenheiten der einen Menge von den Begebenheiten der andern ganz unabhängig sind, und die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Begebenheit der ersten Menge geschehen werde, sey $\frac{1}{4}$, und dieselbe

Wahr=

Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit der zweyten Menge sey $\frac{1}{6}$. Sollen nun beyde Begebenheiten zugleich geschehen, so kann man schliessen. Wäre die Begebenheit aus der ersten Menge gewiß, so wäre die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$, da aber die Begebenheit der ersten Menge nur wahrscheinlich, und ihre Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß beyde Begebenheiten zugleich geschehen werden, nicht $\frac{1}{6}$, sondern $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{4}$, d. h. $\frac{1}{24}$. Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwey Begebenheiten aus zweyen von einander unabhängigen Mengen von Dingen, wenn die Wahrscheinlichkeit der einen $\frac{5}{108}$ und der andern $\frac{3}{28}$ ist, zugleich geschehen werden $\frac{5}{108} \times \frac{3}{28}$ oder $\frac{15}{3024}$ oder $\frac{5}{1008}$. Durch ähnliche Schlüsse kann man sich die angeführte Regel für drey und mehrere Fälle beweisen.

§. 33.

Würde also z. B. gefragt, was für Wahrscheinlichkeit zwey Personen, davon die eine 60 die andere 50 Jahr alt angenommen worden, nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung hätten, nach 1, 2, 3 Jahren u. s. w. noch zusammen zu leben; so wäre

nach Jahren		diese Wahrscheinlichkeit		
1	—	$\frac{2056}{2157}$	$\times$	$\frac{2959}{3036}$
2	—	$\frac{1953}{2157}$	$\times$	$\frac{2881}{3036}$
3	—	$\frac{1848}{2157}$	$\times$	$\frac{2800}{3036}$
4	—	$\frac{1740}{2157}$	$\times$	$\frac{2716}{3036}$
5	—	$\frac{1634}{2157}$	$\times$	$\frac{2629}{3036}$
6	—	$\frac{1530}{2157}$	$\times$	$\frac{2540}{3036}$
7	—	$\frac{1429}{2157}$	$\times$	$\frac{2448}{3036}$
8	—	$\frac{1331}{2157}$	$\times$	$\frac{2353}{3036}$ u. s. w.

Man kann auf diese Art fortfahren, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, bis einer von den Factoren o wird, denn alsdann wird das ganze Product o, oder es hört alsdann die Wahrscheinlichkeit auf, d. h. es wird das Gegentheil gewiß. In dem gegenwärtigen Falle geschähe solches nach 43 Jahren, und zwar würde alsdenn der erste Factor o.

§. 34.

Sollte der 60jährige ein Mann und die 50jährige Person eine Frau seyn; so legte man nur die Sterblichkeitsordnung fürs männliche Geschlecht bey jenem und die Sterblichkeitsordnung fürs weibliche Geschlecht bey dieser zum Grunde. Sollten beyde ausgesuchte Personen seyn, bey denen man eine grössere Lebensdauer annehmen müßte, so müßte die Sterblichkeitsordnung für Rentenirer gebraucht werden. Es wäre also die Wahrscheinlichkeit, daß

nach

nach Jahren	ein 60jährig. Mann u. eine 50jähr. Frau	ein 60 und ein 50jähriger Rentenier zusammen lebten
1 —	$\frac{1947}{2042} \times \frac{3062}{3140}$	$\frac{3092}{3191} \times \frac{3905}{3964}$
2 —	$\frac{1849}{2042} \times \frac{2979}{3140}$	$\frac{2990}{3191} \times \frac{3843}{3964}$
3 —	$\frac{1748}{2042} \times \frac{2897}{3140}$	$\frac{2885}{3191} \times \frac{3777}{3964}$
4 —	$\frac{1641}{2042} \times \frac{2815}{3140}$	$\frac{2778}{3191} \times \frac{3707}{3964}$
5 —	$\frac{1531}{2042} \times \frac{2731}{3140}$	$\frac{2669}{3191} \times \frac{3631}{3964}$
6 —	$\frac{1423}{2042} \times \frac{2646}{3140}$	$\frac{2559}{3191} \times \frac{3550}{3964}$
7 —	$\frac{1319}{2042} \times \frac{2561}{3140}$	$\frac{2448}{3191} \times \frac{3465}{3964}$
8 —	$\frac{1217}{2042} \times \frac{2475}{3140}$	$\frac{2336}{3191} \times \frac{3377}{3964}$ u. s. w

Auch hier kann man natürlicher Weise so weit fortgehen, bis einer von den Factoren o wird, und also das ganze Product verschwindet.

§. 35.

Sollte die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß drey Menschen, z. B. ein 60jähriger, ein 56jähriger und ein 50jähriger nach 1, 2, 3 u. s. w. Jahren noch lebten, und zwar nach der Sterblichkeitsordnung für Rentenierer, so wäre

nach Jahren		diese Wahrscheinlichkeit
1	—	$\frac{3092}{3191} \times \frac{3465}{3550} \times \frac{3905}{3964}$
2	—	$\frac{2990}{3191} \times \frac{3377}{3550} \times \frac{3843}{3964}$
3	—	$\frac{2885}{3191} \times \frac{3286}{3550} \times \frac{3777}{3964}$
4	—	$\frac{2778}{3191} \times \frac{3191}{3550} \times \frac{3707}{3964}$
5	—	$\frac{2669}{3191} \times \frac{3092}{3550} \times \frac{3631}{3964}$
6	—	$\frac{2559}{3191} \times \frac{2990}{3550} \times \frac{3550}{3964}$
7	—	$\frac{2448}{3191} \times \frac{2885}{3550} \times \frac{3465}{3964}$
8	—	$\frac{2336}{3191} \times \frac{2778}{3550} \times \frac{3377}{3964}$ u. s. w.

Auf eine ähnliche Art verfährt man auch, wenn an statt 3 Personen 4, 5 oder mehrere genommen werden.

§. 36.

Wird nun ferner gefragt, wie wahrscheinlich es sey, daß von zwey oder mehrern Personen von bestimmten Alter nach einer bestimmten Zahl von Jahren keine mehr am Leben oder alle tod seyn; so ist leicht einzusehen, daß man die Antwort auf diese Frage finde, wenn man die den Lebenswahrscheinlichkeiten der gegebenen Personen entgegen stehende Wahrscheinlichkeiten, oder die Differenz zwischen ihren Lebenswahrscheinlichkeiten und 1 sucht, und diese mit einander multiplicirt. Wird z. B. ein 60jähriger und ein 50jähriger Rentenirer genommen, so ist

nach Jahren	die Wahrscheinlichkeit, daß tod sey der 60jährige	der 50jährig.	beyde
1	$1-\frac{3092}{3191}$	$1-\frac{3905}{3964}$	$1-\frac{3092}{3191}-\frac{3905}{3964}+\frac{3092}{3191}\times\frac{3905}{3964}$
2	$1-\frac{2990}{3191}$	$1-\frac{3843}{3964}$	$1-\frac{2990}{3191}-\frac{3843}{3964}+\frac{2990}{3191}\times\frac{3843}{3964}$
3	$1-\frac{2885}{3191}$	$1-\frac{3777}{3964}$	$1-\frac{2885}{3191}-\frac{3777}{3964}+\frac{2885}{3191}\times\frac{3777}{3964}$
4	$1-\frac{2778}{3191}$	$1-\frac{3707}{3964}$	$1-\frac{2778}{3191}-\frac{3707}{3964}+\frac{2778}{3191}\times\frac{3707}{3964}$
5	$1-\frac{2669}{3191}$	$1-\frac{3631}{3964}$	$1-\frac{2669}{3191}-\frac{3631}{3964}+\frac{2669}{3191}\times\frac{3631}{3964}$
6	$1-\frac{2559}{3191}$	$1-\frac{3550}{3964}$	$1-\frac{2559}{3191}-\frac{3550}{3964}+\frac{2559}{3191}\times\frac{3550}{3964}$
7	$1-\frac{2448}{3191}$	$1-\frac{3465}{3964}$	$1-\frac{2448}{3191}-\frac{3465}{3964}+\frac{2448}{3191}\times\frac{3465}{3964}$
8	$1-\frac{2336}{3191}$	$1-\frac{3377}{3964}$	$1-\frac{2336}{3191}-\frac{3377}{3964}+\frac{2336}{3191}\times\frac{3377}{3964}$

Wie man, wenn von mehrern Personen die Rede ist, verfahren müsse, braucht ohnstreitig nicht durch Beyspiele erläutert zu werden.

§. 37.

Wird endlich gefragt, wie wahrscheinlich es sey, daß von zwey oder mehrern Personen von bestimmten Alter nach einer bestimmten Zahl von Jahren noch einige leben oder nicht alle tod seyn; so fällt in die Augen, daß die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit der nach dem vorhergehenden § gefundenen Wahrscheinlichkeit entgegen stehe, und also gefunden werde, wenn man die Wahrscheinlichkeitszahlen, die nach dem vorhergehenden § für den angenommenen Fall sich ergeben, von 1 abzieht. Daß von einem 60jährigen und 50jährigen Rentenirer wenigstens Einer noch lebe, davon ist also

nach Jahren	die Wahrscheinlichkeit
1.	$\frac{3092}{3191} + \frac{3905}{3964} - \frac{3092}{3191} \times \frac{3905}{3964}$
2.	$\frac{2990}{3191} + \frac{3843}{3964} - \frac{2990}{3191} \times \frac{3843}{3964}$
3.	$\frac{2885}{3191} + \frac{3777}{3964} - \frac{2885}{3191} \times \frac{3777}{3964}$
4.	$\frac{2778}{3191} + \frac{3707}{3964} - \frac{2778}{3191} \times \frac{3707}{3964}$
5.	$\frac{2669}{3191} + \frac{3631}{3964} - \frac{2669}{3191} \times \frac{3631}{3964}$
6.	$\frac{2559}{3191} + \frac{3550}{3964} - \frac{2559}{3191} \times \frac{3550}{3964}$
7.	$\frac{2448}{3191} + \frac{3465}{3964} - \frac{2448}{3191} \times \frac{3465}{3964}$
8.	$\frac{2336}{3191} + \frac{3377}{3964} - \frac{2336}{3191} \times \frac{3377}{3964}$ u. s. w.

§. 38.

Noch kann die Frage entstehen, wie wahrscheinlich es sey, daß von zwey oder mehrern Personen von bestimmtem Alter nach einer bestimmten Zahl von Jahren die eine tod sey und die andere lebe, so daß es nicht gleich viel ist, welche von beyden noch lebe oder tod sey, sondern auch vestgesetzt ist, welche von den angenommenen Personen noch leben und welche tod seyn sollen. Es sey zuvörderst der Fall, daß die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden solle, daß nach einer bestimmten Zahl von Jahren ein 60jähriger Mann gestorben sey, seine 50jährige Frau aber noch lebe. Offenbar muß man hier die Wahrscheinlichkeit des Todes des Mannes mit der Wahrscheinlichkeit des Lebens der Frau multipliciren, und es ist also hier

die Wahrscheinlichkeit, daß

nach Jahren	der Mann tod sey	die Frau lebe	beydes statt finde
1.	$1-\frac{1947}{2042}$	$\frac{3060}{3140}$	$\frac{3060}{3140}-\frac{1947}{2042}\times\frac{3060}{3140}$
2.	$1-\frac{1849}{2042}$	$\frac{2979}{3140}$	$\frac{2979}{3140}-\frac{1849}{2042}\times\frac{2979}{3140}$
3.	$1-\frac{1748}{2042}$	$\frac{2897}{3140}$	$\frac{2897}{3140}-\frac{1748}{2042}\times\frac{2897}{3140}$
4.	$1-\frac{1641}{2042}$	$\frac{2815}{3140}$	$\frac{2815}{3140}-\frac{1641}{2042}\times\frac{2815}{3140}$
5.	$1-\frac{1531}{2042}$	$\frac{2731}{3140}$	$\frac{2731}{3140}-\frac{1531}{2042}\times\frac{2731}{3140}$
6.	$1-\frac{1483}{2042}$	$\frac{2646}{3140}$	$\frac{2646}{3140}-\frac{1483}{2042}\times\frac{2646}{3140}$
7.	$1-\frac{1319}{2042}$	$\frac{2561}{3140}$	$\frac{2561}{3140}-\frac{1319}{2042}\times\frac{2561}{3140}$
8.	$1-\frac{1217}{2042}$	$\frac{2475}{3140}$	$\frac{2475}{3140}-\frac{1217}{2042}\times\frac{2475}{3140}$
9.	$1-\frac{1119}{2042}$	$\frac{2388}{3140}$	$\frac{2388}{3140}-\frac{1119}{2042}\times\frac{2388}{3140}$
10.	$1-\frac{1025}{2042}$	$\frac{2301}{3140}$	$\frac{2301}{3140}-\frac{1025}{2042}\times\frac{2301}{3140}$

u. s. w.

Hier kann man so lange fortfahren, als die positiven Wahrscheinlichkeitszahlen nicht 0 werden.

§. 39.

§. 39.

Sind mehr als zwey Personen da, und will man die Wahrscheinlichkeit haben, daß von diesen mehrern eine bestimmte noch lebe und die übrigen alle tod seyn; so setzt man nur bey den negativen Zahlen, statt der Wahrscheinlichkeitszahl des Todes einer, die Wahrscheinlichkeitszahl des Todes aller, ausser der bestimmten Person, angenommenen Personen. Sollten mehr als eine Person leben, so vertauschte man auch die positiven Zahlen, und zwar so oft sie selbst vorkommen, mit den Wahrscheinlichkeitszahlen des Lebens aller dieser bestimmten Personen. Daß z. B. von einem 60jährigen, 56jährigen und 50jährigen Rentenirern nach einem Jahre der 56jährige allein noch lebe, davon ist die Wahrscheinlichkeit

$\frac{3465}{3550} - \left(\frac{3092}{3191} + \frac{3905}{3964} - \frac{3092}{3191} \times \frac{3905}{3964}\right) \times \frac{3465}{3550}$ oder

$\frac{3465}{3550} - \frac{3092}{3191} \times \frac{3465}{2550} - \frac{3905}{3964} \times \frac{3465}{3550} + \frac{3092}{3191} \times \frac{3905}{3964} \times \frac{3465}{3550}$. Käme noch ein 58jähriger Rentenirer hinzu, und sollte die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß nach einem Jahre der 56 und 80jährige allein lebten; so müßte man in der eben gefundenen Zahl allenthalben $\frac{3465}{3550} \times \frac{3286}{3377}$ statt $\frac{3465}{3550}$ setzen.

§. 40.

Die bisher betrachteten Wahrscheinlichkeiten hätten insgesammt auch auf die Art ausgedruckt werden können, daß die in denselben blos durch Zeichen angedeuteten Operarationen auch wirklich verrichtet worden wären. Wie in einem jeden einzelen Falle dieser veränderte Ausdruck gefunden werde, ist bekannt. Wegen des Gebrauchs indessen, der von dem bisherigen in den folgenden Abschnitten gemacht werden soll, mußten hier die unentwickelten Bestimmungen beybehalten werden. So wie übrigens bisher die Sterblichkeitsordnungen benutzt worden sind, so lassen sich auch Eheordnungen, Waysenordnungen u. d. gl., so bald man dieselben in gehöriger Vollkommenheit hat, gebrauchen.

§. 41.

Um nunmehr zu einer andern Materie fortzugehen, so kann man, da gewöhnlich jährlich mehr geboren werden als sterben, und also die Volksmenge eines Orts oder eines Landes nach der Regel sich von Jahr zu Jahr vermehrt, wenn man das allgemeine Maaß der Vermehrung kennt, die Summe aller an einem Orte oder in einem Lande Lebenden wie ein Capital betrachten, das zu einem vestgesetzten pr. C. auf Zinseszins ausgethan ist, und durch diese Vergleichung sich zu einer sehr angenehmen und nützlichen Anwendung der Regeln der doppelten Zinsrechnung in den Stand setzen. Wenn man in diesen Regeln statt des Capitals die Summe aller Lebenden, und statt des Zinsfusses das Maaß der Vermehrung und statt der Jahre, welche ein Capital auf Zinseszins aussteht, die Jahre setzt, welche hindurch die gegebene Volksmenge

sich

sich vermehren soll, so ist zur unmittelbaren Anwendung der gedachten Regeln für den gegenwärtigen Fall alles vorbereitet.

§. 42.

Zuvörderst kann man auf diese Art sehr leicht aus der jetzigen Volksmenge eines Orts und dem Maasse der Vermehrung die Volksmenge finden, die an demselben nach einer bestimmten Anzahl von Jahren befindlich seyn wird. Mit der gehörigen und angezeigten Veränderung rechnet man hier am besten nach der im 1ten Abschnitt des 1ten Theils dieses Buchs § 82 enthaltenen Regel. Würde also gefragt: Wie groß ist die Volksmenge eines Orts, worin jetzt 29376 Menschen überhaupt leben, nach 10 Jahren, wenn das Maaß der Vermehrung $\frac{1}{96}$ ist? so wäre die Antwort auf diese Frage in folgendem Ausdrucke enthalten.

$29376 \times (\frac{97}{96})^{10}$. Nun ist

$$\text{l.}\, 97 = 1{,}9867717$$
$$\text{l.}\, 96 = 1{,}9822712$$

also $\text{l.}\, \frac{97}{96} = 0{,}0045005$

und $\text{l.}\, (\frac{97}{96})^{10} = 0{,}0450050$. Ferner ist

$\text{l.}\, 29376 = 4{,}4679927$, und also

$\text{l.}\, (29376 \times (\frac{97}{96})^{10}) = 4{,}5129977 = \text{l.}\, 32583{,}5$ und es vermehrten sich also die angenommenen 29376 Personen in 10 Jahren bis auf 32583,5.

§. 43.

Zweytens ist man nach der Regel 1 Th. 1 Abschn. § 100 und 107 auf eine ähnliche Art im Stande, aus der gegebenen Volksmenge eines Ortes und dem Maasse der Vermehrung, die vor einer bestimmten Anzahl von Jahren daselbst gewesene Volksmenge zu finden. Wäre also die jetzige Volksmenge 325835, und das Maaß der Vermehrung wie vorhin; so fände man die vor 10 Jahren da gewesene Volksmenge aus

$325835 \times (\frac{96}{97})^{10}$. Nun ist

$$
\begin{array}{rcll}
\text{L. } 96 & = & 1{,}9822712 & \text{und} \\
\text{L. } 97 & = & 1{,}9867717, & \text{also} \\
\text{L. } \frac{96}{97} & = & -\ 1{,}9954995 & \text{und} \\
\text{L. } (\frac{96}{97})^{10} & = & -\ 1{,}9549950. & \text{Ferner ist} \\
\text{L. } 325835 & = & 5{,}5129977 & \text{und also} \\
\hline
\end{array}
$$

$\text{L. } (325835 \times (\frac{96}{97})^{10}) = 5{,}4679927 = \text{L. } 293760$, und die vor 10 Jahren dagewesene Volksmenge also 293760.

§. 44.

Drittens läßt sich, wenn man die Volksmenge von zweyen verschiedenen Jahren weiß, und die Entfernung beyder Jahre von einander kennt, daraus das Maaß der Vermehrung nach § 114 u. f. d. 1ten Abschn. des 1ten Theils dieser Anleitung finden. Die Volksmenge sey 1750 gewesen 293760; 1760 aber 325835; alsdann findet man

den

den Logarithmen des um 1 vermehrten Maasses der Vermehrung durch die Entwickelung des Ausdrucks:

$$\frac{L.\ 325835 - L.\ 293760}{10}.$$ Nun ist

$$L.\ 325835 = 5{,}5129977 \text{ und}$$
$$L.\ 293760 = 5{,}4679927, \text{ also}$$

$$L.\ 325835 - L.\ 293760 = 0{,}0450050, \text{ und}$$

$$\frac{L.\ 325835 - L.\ 293760}{10} = \frac{0{,}0450050}{10} = 0{,}0045005.$$

Da nun 0,0045005 der Logarithme des um 1 vermehrten Maasses der Vermehrung ist, so ist es leicht, das Maaß der Vermehrung selbst zu finden. Denn da 0,0045005 $=$ L. 1,01041, so ist das Maaß der Vermehrung $1{,}01041 - 1 = 0{,}01041 = \frac{1}{96}$.

§. 45.

Ist bey diesem Fall die Zahl der Jahre 1, oder weiß man die Volksmenge zu Anfange und am Ende Eines Jahres, so kann man sogleich die Volksmenge am Ende des Jahres von der Volksmenge beym Anfange des Jahres dividiren, und den Quotienten um 1 vermindern. Wäre also die Volksmenge am Ende des Jahres 29682, und dieselbe aus 29376 entstanden, so wäre in

$$\frac{29682}{29376} - 1$$

das

das Maaß der Vermehrung enthalten. Da dieser Ausdruck nichts anders giebt, als

$$\frac{29682 - 29376}{29376};$$

so kann man diesen statt jenen entwickeln. Man zieht also die Volksmenge beym Anfange eines Jahres von der Volksmenge am Ende desselben ab, und dividirt die Differenz durch die erste Volksmenge. Im gegenwärtigen Falle ist sie also

$$\frac{306}{29376} = \frac{1}{96}$$

Da die Differenz zwischen den beyden Volksmengen beym Anfange und am Ende des Jahres der Differenz zwischen den in diesem Jahre Gebornen und Gestorbenen gleich seyn muß; so ist offenbar, daß die gegenwärtige Art, das Maaß der Vermehrung zu finden, mit der § 24 bewährten auf einerley Resultat führen müsse.

§. 46.

Endlich lassen sich hier auch die im 1ten Theile dieser Anleitung im 1ten Abschnitte § 211 — 213 erläuterten Regeln der Zeitrechnung mit der § 41 des gegenwärtigen Abschnitts angeführten Veränderung anwenden. Weiß man also zwey zu verschiedenen Zeiten in einem Lande statt gefundene Volksmengen und das Maaß der Vermehrung, so kann man daraus die Entfernung dieser Zeiten von einander bestimmen. Es sey die Volksmenge in einem Lande im Jahr 1760 gewesen 325835, in einem unbestimmbestimmten Jahre vorher aber 293760, und das Vermehrungsverhältniß sey $\frac{1}{96}$. Die Zahl der Jahre, die hier gesucht werden muß, findet man aus

$$\frac{l.\ 325835 - l.\ 293760}{l.\ \frac{97}{96}}.$$ Da nun

$$l.\ 325835 = 5,5129977$$ und
$$l.\ 293760 = \underline{5,4679927},$$ und also
$$l.\ 325835 - l.\ 293760 = 0,0450050,$$ ferner
$$l.\ \frac{97}{96} = 0,0045005;$$ so ist

$$\frac{l.\ 325835 - l.\ 293760}{l.\ \frac{97}{96}} = \frac{0,0450050}{0,0045005} = 10,$$ und die Zeit, da die Volksmenge 293760 gewesen ist, ist das 1750ste Jahr.

§. 47.

Wäre das Jahr der kleinern Volksmenge gegeben gewesen, so hätte man dazu die gefundene Zeit addiren müssen, um die Zeit der grössern Volksmenge zu finden.

Wäre an statt der durch die jährliche Vermehrung nach einiger Zeit entstandenen Volksmenge nur der in dieser Zeit entstandene Zuwachs gegeben, so fände man daraus, und der anfänglichen Volksmenge die andere sehr leicht durch die Addition.

§. 48.

Aus dem bisherigen ist die Art und Weise, die Zeit zu finden, in welcher sich bey einem bestimmten

Maasse

Maasse der Vermehrung die Volksmenge an einem Orte oder in einem Lande verdoppelt leicht zu schliessen. Da es indeß, wie sehr leicht in die Augen fällt, hier gar nicht auf die etwa statt findende Volksmenge, sondern einzig und allein auf das Maaß der Vermehrung ankommt, so darf man nur den Unterschied zwischen dem Logarithmen von 2 und dem Logarithmen von 1, oder welches, da L. 1 = 0, dasselbe ist, den Logarithmen von 2 selbst, oder 0,3010300 durch den Logarithmen des um 1 vermehrten Maasses der Vermehrung dividiren. Wäre also das Maaß der Vermehrung $\frac{1}{96}$; so fände man die Zeit der Verdoppelung aus

$$\frac{L.\ 2}{L.\ \frac{97}{96}} = \frac{0,3010300}{0,0045005} = 66,8879$$

§. 49.

Auf diese Art ist folgende von Eulern berechnete und aus Süßmilchs göttlicher Ordnung u. s. w. 1ten Th. S. 285 u. f. genommene Tabelle entstanden. Wenn

das Maaß der Vermehrung ist		so werden zur Verdoppelung der Volksmenge erfordert	
$\frac{1}{10}$	—	7,2722	Jahre
$\frac{1}{11}$	—	7,9659	—
$\frac{1}{12}$	—	8,6595	—
$\frac{1}{13}$	—	9,3530	—
$\frac{1}{14}$	—	10,0465	—

wenn

wenn das Maaß der Vermehrung ist		so werden zur Verdopplung der Volksmenge erfordert	
$\frac{1}{15}$	—	10,7400	Jahre
$\frac{1}{16}$	—	11,4333	—
$\frac{1}{17}$	—	12,1266	—
$\frac{1}{18}$	—	12,8200	—
$\frac{1}{19}$	—	13,5133	—
$\frac{1}{20}$	—	14,2066	—
$\frac{1}{21}$	—	14,9000	—
$\frac{1}{22}$	—	15,5932	—
$\frac{1}{23}$	—	16,2864	—
$\frac{1}{24}$	—	16,9797	—
$\frac{1}{25}$	—	17,6729	—
$\frac{1}{26}$	—	18,3662	—
$\frac{1}{27}$	—	19,0594	—
$\frac{1}{28}$	—	19,7527	—
$\frac{1}{29}$	—	20,4458	—
$\frac{1}{30}$	—	21,1391	—
$\frac{1}{32}$	—	22,5255	—
$\frac{1}{34}$	—	23,9119	—
$\frac{1}{36}$	—	25,2983	—
$\frac{1}{38}$	—	26,6847	—
$\frac{1}{40}$	—	28,0711	—
$\frac{1}{42}$	—	29,4574	—
$\frac{1}{44}$	—	30,8438	—

wenn

wenn das Maaß der Vermehrung ist		so werden zur Verdopplung der Volksmenge erfordert
$\frac{1}{46}$	—	32,2302 Jahre
$\frac{1}{48}$	—	33,6165 —
$\frac{1}{50}$	—	35,0029 —
$\frac{1}{55}$	—	38,4687 —
$\frac{1}{60}$	—	41,9345 —
$\frac{1}{65}$	—	45,4003 —
$\frac{1}{70}$	—	48,8661 —
$\frac{1}{75}$	—	52,3318 —
$\frac{1}{8}$	—	55,7977 —
$\frac{1}{85}$	—	59,2634 —
$\frac{1}{90}$	—	62,7292 —
$\frac{1}{95}$	—	66,1950 —
$\frac{1}{100}$	—	69,6607 —
$\frac{1}{110}$	—	76,5923 —
$\frac{1}{120}$	—	83,5238 —
$\frac{1}{130}$	—	90,4554 —
$\frac{1}{140}$	—	97,3868 —
$\frac{1}{150}$	—	104,3183 —
$\frac{1}{160}$	—	111,2598 —
$\frac{1}{170}$	—	118,1813 —
$\frac{1}{180}$	—	125,1128 —
$\frac{1}{190}$	—	132,0443 —
$\frac{1}{200}$	—	138,9757 —
$\frac{1}{210}$	—	145,9072 —

wenn

wenn das Maaß der Vermehrung ist		so werden zur Verdoppelung der Volksmenge erfordert	
$\frac{1}{220}$	—	152,8387	Jahre
$\frac{1}{230}$	—	159,7702	—
$\frac{1}{240}$	—	166,7017	—
$\frac{1}{250}$	—	173,6332	—
$\frac{1}{260}$	—	180,5647	—
$\frac{1}{270}$	—	187,4961	—
$\frac{1}{280}$	—	194,4275	—
$\frac{1}{290}$	—	201,3590	—
$\frac{1}{300}$	—	208,2905	—
$\frac{1}{310}$	—	215,2220	—
$\frac{1}{320}$	—	222,1535	—
$\frac{1}{330}$	—	229,0850	—
$\frac{1}{340}$	—	236,0164	—
$\frac{1}{350}$	—	242,9479	—
$\frac{1}{360}$	—	249,8794	—
$\frac{1}{370}$	—	256,8109	—
$\frac{1}{380}$	—	263,7425	—
$\frac{1}{390}$	—	270,6740	—
$\frac{1}{400}$	—	277,6055	—
$\frac{1}{410}$	—	284,5370	—
$\frac{1}{420}$	—	291,4685	—
$\frac{1}{430}$	—	298,4000	—
$\frac{1}{440}$	—	305,3314	—

wenn das Maaß der Vermehrung ist		so werden zur Verdoppelung der Volksmenge erfordert	
$\frac{1}{450}$	—	312,2629	Jahre
$\frac{1}{460}$	—	319,1943	—
$\frac{1}{470}$	—	326,1258	—
$\frac{1}{480}$	—	333,0573	—
$\frac{1}{490}$	—	339,9888	—
$\frac{1}{500}$	—	346,9202	—
$\frac{1}{1000}$	—	693,4937	—

§. 50.

Bey dem Gebrauche der Regeln § 42 — 48 wird übrigens vorausgesetzt, daß keine ausserordentlichen Jahre weder in Ansehung der Fruchtbarkeit noch in Ansehung der Sterblichkeit, und auch keine Auswanderungen statt gefunden haben. Wofern dies ist, so giebt die Rechnung im ersten Falle eine zu kleine, in den beyden andern Fällen eine zu grosse Summe an.

Wenn man die Volksmenge selbst nicht weiß, dagegen aber die Zahl entweder der in einem Jahre Gebornen oder Gestorbenen, und das Maaß der Fruchtbarkeit oder der Sterblichkeit, so läßt sich hieraus nach § 8 die Volksmenge leicht finden, und man ist also auch alsdann im Stande, die § 42 — 48 erklärten Regeln anzuwenden.

§. 51.

Gute Sterblichkeitsordnungen kann man auch gebrauchen, um aus der Menge der an einem Orte

oder

oder in einem Lande überhaupt Lebenden die Anzahl derer zu finden, die darunter von einem bestimmten aber verschiedenen Alter befindlich sind. Würde z. B. gefragt, wie viel 15 bis 60jährige unter einer Menge von 325835 lebenden angenommen werden könnten; so findet man aus der allgemeinen Sterblichkeitsordnung, daß gegen 294294 Lebende 202126 — 26738 oder 175388 Menschen, die zwischen 15 bis 60 Jahr alt sind, gerechnet werden müssen, und also ergeben sich gegen 325835 überhaupt Lebende

$$325835 \times \frac{175388}{294294} \text{ 15 bis 60jährige. Nun ist}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{L. } 175388 & = & 5{,}2439999 \text{ und} \\ \text{L. } 294294 & = & 5{,}4687814 \text{ also} \\ \hline \text{L. } \frac{175388}{294294} & = & -1{,}7752185 \\ \text{L. } 325835 & = & 5{,}5129977 \\ \hline \text{L. } (325835 \times \frac{175388}{294294}) & = & 5{,}2882162 = \text{L. } 194185. \end{array}$$

Unter 325835 überhaupt lebenden befinden sich also 194185 funfzehn bis 60jährige.

Man sucht also in der Sterblichkeitsordnung die darnach von dem angegebenen niedrigsten Alter und drüber Lebende auf, und zieht von dieser Anzahl die von dem angegebenen höchsten Alter und drüber Lebende ab, multiplicirt mit der erhaltenen Differenz die gegebene Summe aller Lebenden, und dividirt das gefundene Product durch

 die

die erste Zahl der 4ten Columne der Sterblichkeitsordnung.

§. 52.

Jetzt kann auch gezeigt werden, **wie der Kaufpreiß solcher Güter, die auf Lebenszeit verkauft werden, zu bestimmen sey.** Ist das Alter des Käufers bestimmt, und der jährliche Ertrag des Gutes bekannt, so sucht man die mitlere Lebensdauer des Käufers, und berechnet darauf den jetzigen Werth des so lange daurenden jährlichen Ertrags des Gutes nach § 182 u. f. des 1ten Abschn. des 1ten Theils dieser Anleitung.

§. 53.

Wenn mit dem Geschehen einer wahrscheinlichen Begebenheit ein Preis verknüpft ist, so erhält die Erwartung dieser Begebenheit ebenfalls einen Werth, und wie derselbe überhaupt gefunden werde, ist in dem vorhergehenden Abschnitte gezeigt worden. **Wenn mit dem Leben eines oder mehrerer Menschen von bestimmtem Alter nach einer vestgesetzten Anzahl van Jahren ein Preis verbunden ist,** so ist gewöhnlicher Weise dieser Fall von der Art, daß man das Recht diesen Preis zu erwarten, sich eine Zeitlang, z. B. 1, 2, 3 und mehrere Jahre, vorher erkaufen muß, ehe die Erhaltung des gedachten Preises möglich wird. Dieses Umstandes wegen muß man hier, so oft er statt findet,

um

um den Werth einer bestimmten Erwartung zu finden, ausser den oben vorgetragenen Regeln auch die Regeln der doppelten Rabattrechnung anwenden.

§. 54.

Um das ganze hier nöthige Verfahren an einigen Beyspielen zu zeigen, so verlange ein 60jähriger zu wissen, wie viel er jezt geben müsse, um, wenn er nach einem Jahre noch lebt, 10 Rthl. zu bekommen. Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher er hoffen kann, nach einem Jahre noch zu leben, ist nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung $\frac{2056}{2157}$ und nach der Sterblichkeitsordnung für Rentenirer $\frac{3092}{3191}$. Wären nun die Bedingungen diese, daß er den Werth der Erwartung erst nach einem Jahre, und also zu der Zeit erst erlegen sollte, wenn er die gedachten 10 Rthl. ebenfalls sogleich erhalten könnte; so müßte er geben

entweder $\frac{2056}{2157} \times 10$ Rthl. $= 9{,}53173$ Rthl.
oder $\frac{3092}{3191} \times 10$ Rthl. $= 9{,}68975$ Rthl.

Da er aber diesen Werth ein Jahr früher bezahlt, so ist offenbar, daß er, den Zins zu 5 pr. C. gerechnet, nur zu geben habe

entweder $\frac{2056}{2157} \times 10$ Rthl. $\times \frac{20}{21} = 9{,}07796$ Rthl.
oder $\frac{3092}{3191} \times 10$ Rthl. $\times \frac{20}{21} = 9{,}22833$ Rthl.

§. 55.

Sollte der Werth der Erwartung in dem angenommenen Falle nur überhaupt und nicht für einen bestimmten Preis angegeben werden, so wäre dieser Werth entweder $\frac{2056}{2157} \times \frac{20}{21} = 0,907796$

oder $\frac{3092}{3191} \times \frac{20}{21} = 0,922833$, je nachdem die allgemeine Sterblichkeitsordnung oder die Sterblichkeitsordnung für Rentenirer zum Grunde gelegt würde.

§. 56.

Für einen 60jährigen ist also der Preis, den er erhält, wenn er noch lebt

nach Jahren	nach der Sterblkord. fürs männl. Geschl.	nach der Sterblkord. für Rentenirer.
1	$\frac{2056}{2157} \times \frac{20}{21}$	$\frac{3092}{3191} \times \frac{20}{21}$
2	$\frac{1953}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^2$	$\frac{2990}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^2$
3	$\frac{1848}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^3$	$\frac{2885}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^3$
4	$\frac{1740}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^4$	$\frac{2778}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^4$
5	$\frac{1634}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^5$	$\frac{2669}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^5$
6	$\frac{1530}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^6$	$\frac{2559}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^6$
7	$\frac{1429}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^7$	$\frac{2448}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^7$
8	$\frac{1331}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^8$	$\frac{2336}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^8$

§. 57.

Wie der Werth der Erwartung zu bestimmen sey, wenn entweder für den Fall, daß zwey oder mehrere Personen von bestimmtem Alter nach einiger Zeit noch leben, oder für den, daß von mehrern Personen nur eine bestimmte noch lebe, u. s. w. ein Preis vestgesetzt ist, läßt sich aus dem bisherigen leicht finden. Exempel kommen in den folgenden Abschnitten vor.

§. 58.

Kann der mit dem Geschehen einer wahrscheinlichen Begebenheit verknüpfte Preis öfter als einmal erhalten werden, so ist der Werth der Erwartung überhaupt gleich der Summe der Werthe aller einzelen Erwartungen. Verlangte also ein 60jähriger 8 Jahre hinter einander eine bestimmte Summe, vorausgesetzt, daß er noch lebe, und der Zins zu 5 pr. C. gerechnet werde, so müßte er jetzt geben, wenn die allgemeine Sterblichkeitsordnung gebraucht würde

$$\frac{2056}{2157} \times \frac{20}{21} + \frac{1953}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \frac{1848}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 + \frac{1740}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^4 + \frac{1634}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^5 + \frac{1530}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^6 + \frac{1429}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^7 + \frac{1331}{2157} \times \left(\frac{20}{21}\right)^8$$

von der Summe, die er jährlich haben wollte; würde aber die Sterblichkeitsordnung für Rentenirer zum Grunde gelegt, so gäbe er von eben dieser Summe

$$\tfrac{3092}{3191} \times \frac{20}{21} + \tfrac{2990}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^2 + \tfrac{2885}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 + \tfrac{2778}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^4 + \tfrac{2669}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^5 + \tfrac{2559}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^6 + \tfrac{2448}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^7 + \tfrac{2336}{3191} \times \left(\frac{20}{21}\right)^8.$$

§. 59.

Wenn man für die Reihen § 58 entwickelte Zahlen oder die Summen dieser Reihen finden will; so kann man an ihrer Stelle folgende nehmen; an statt der ersten

$$\left(2056 \times \tfrac{20}{21} + 1953 \times \left(\frac{20}{21}\right)^2 + 1848 \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 + 1740 \times \left(\frac{20}{21}\right)^4 + 1634 \times \left(\frac{20}{21}\right)^5 + 1530 \times \left(\frac{20}{21}\right)^6 + 1429 \times \left(\frac{20}{21}\right)^7 + 1331 \times \left(\frac{20}{21}\right)^8\right) : 2157$$

und anstatt der andern

$$\left(3092 \times \tfrac{20}{21} + 2990 \times \left(\frac{20}{21}\right)^2 + 2885 \times \left(\frac{20}{21}\right)^3 + 2778 \times \left(\frac{20}{21}\right)^4 + 2669 \times \left(\frac{20}{21}\right)^5 + 2559 \times \left(\frac{20}{21}\right)^6 + 2449 \times \left(\frac{20}{21}\right)^7 + 2336 \times \left(\frac{20}{21}\right)^8\right) : 3191.$$

Sechster

Sechster Abschnitt,

von den

Jahrrenten, Leibrenten und Tontinen.

I.

Von den Jahrrenten, Leibrenten und Tontinen überhaupt.

§. 1.

Wenn ein Gläubiger und ein Schuldner den Vertrag errichten, daß dieser jenem die von ihm empfangene Summe mit dem Zinse in einer gewissen Anzahl von Jahren, und zwar jährlich zu gleichen Theilen abtragen soll, so nennt man einen solchen Vertrag einen Rentenvertrag, und die von dem Schuldner jährlich zu entrichtende Summe eine **Rente**. Von diesen Renten soll in dem gegenwärtigen Abschnitte erstlich allgemein gehandelt, und dann die besondern Arten derselben genauer betrachtet werden.

§. 2.

Um zuvörderst die verschiedenen Arten der Renten vestzusetzen, so ist der Rentenvertrag entweder

 1. von

1. von der Art, daß darin, ausser dem vom Gläubiger gegebenen Capitale und dem pr. C., zu welchem dasselbe verzinset werden soll, auch die Zeit, in welcher das geliehene Capital mit dem Zinse wieder bezahlet werden soll, **unmittelbar** angegeben ist; oder

2. von der Art, daß diese Zeit nur mittelbarer Weise, oder durch die Bedingung gegeben wird, daß die Rente so lange dauren soll, als der Gläubiger am Leben ist. Wenn der **erste Fall** statt findet, so nennt man den Rentenvertrag einen **Jahrrenten, Zeitrenten** oder **Annuitätenvertrag**, die Rente eine **Jahrrente**, den Gläubiger den **Rentenirer**, den Schuldner den **Entrepreneur**, und die von dem Rentenirer dem Entrepreneur geliehene Summe die **Mise**.

§. 3.

Findet aber der andere Fall statt; so dauert die Rente entweder

a so lange Einer, oder von mehrern Ein bestimmter noch lebt, oder

b so lange von mehrern Personen irgend eine noch lebt. In jenem Falle bekommt die Rente den Namen der **Leibrente**, in diesem errichtet eine Gesellschaft eine **Tontine**.

§. 4.

Diejenigen, die eine Tontine errichten, werden **Tontinisten**, und der Entrepreneur der **Tontinarius** genennt. Findet zwischen beyden der Vertrag statt, daß der Tontinarius jährlich, so lange von den Tontinisten noch einer lebt, eine und dieselbe Summe bezahle, und diese also ganz unter die jedesmal lebenden Tontinisten vertheilt werde, so heißt die Tontine eine **einfache Tontine**; fällt aber ein Theil der Rente der verstorbenen Tontinisten dem Tontinarius zu, so daß die jährlich unter die jedesmal lebenden Tontinisten zu vertheilende Summe, wenn gleich ein jeder immer mehr erhält, an sich doch desto kleiner wird, je mehr Tontinisten gestorben sind, so heißt selbige eine **zusammengesetzte Tontine**.

§. 5.

So sehr auch diese Arten der Renten von einander abweichen; so giebt es gleichwohl verschiedene sie betreffende allgemeine Fragen, z. B.

1. Zu was für einem pr. C. der Zins zu rechnen sey, und ob einfacher oder doppelter Zins zum Grunde gelegt werden müsse?

2. In was für einer Münzsorte die Rente ausgezahlt werden müsse?

3. Wenn der Anfang der Renten falle? und wie die Termine der Zahlung auf einander folgen?

4. Ob man eine Rente, und unter was für Bedingungen man sie wieder verkaufen könne?

5. Ob ein jeder sich zum Entrepreneur aufwerfen könne?

6. Wer und unter was für Bedingungen man sich eine Rente kaufen könne?

7. Wie viel Rentenirer und was für welche in Rücksicht auf das Alter zur Errichtung eines Rentenvertrags erfordert werden?

8. Worauf es bey der Berechnung der Renten ankomme?

Diese Fragen sollen nun zuvörderst beantwortet werden.

§. 6.

Was nun die erste dieser Fragen betrifft, welche eigentlich aus zweyen den zu rechnenden Zins betreffenden Fragen besteht; so ist auf die erste derselben: **Zu was für einem pr. C. der Zins zu rechnen sey?** die allgemeinste Antwort folgende: Das pr. C. muß so hoch angenommen werden, daß es weder für den Entrepreneur grösser ist, als er sonst Geld verzinset, noch für die Rentenirer kleiner, als sie sonst ihr Geld unterzubringen im Stande sind. So leicht sich aber diese Antwort darbietet, so selten führen beyde Bedingungen derselben zu Einem Resultate, und practischer ist daher folgendes. Da nicht leicht Theilnehmer an Rentenverträgen sich finden werden,

werden, wenn der dabey gerechnete Zins kleiner ist als derjenige, den sie sonst erhalten können; so ist der landübliche Zins dieses Umstandes wegen in den mehresten Fällen zum Grunde zu legen, obgleich die Rentenirer, wenn Zinseszins gerechnet wird, auch bey einem kleinern pr. C. nicht allezeit vervortheilt werden. Es kann aber auch der Entrepreneur, wenn er gleich sonst zu einem niedrigern pr. C. Geld erhalten kann, sich bey Renten zu einem höhern verstehen, weil er nicht nur für einer Aufkündigung des erhaltenen Capitals zur ungelegenen Zeit sicher ist, sondern auch eine mit einem Male erhaltene Snmme nur theilweise wieder bezahlt. Das sicherste ist daher wohl, wenn man sagt: Es müsse billig jedesmal entweder das landübliche pr. C. oder doch ein nicht viel kleineres zum Grunde gelegt werden.

§. 7.

In Ansehung der andern den Zins betreffenden Frage: **Ob nemlich einfacher oder doppelter Zins zu rechnen sey?** kommt alles darauf an, ob hier die Gründe statt finden, wegen welcher sonst der Zinseszins unerlaubt ist. Denn sind diese nicht da, so läßt sich leicht zeigen, daß hier der einfache Zins eben so ungerecht seyn würde, als es sonst der Zinseszins ist. Werden also, wenn bey der Berechnung der Renten nach der Zinseszinsrechnung gerechnet wird, die Entrepreneurs vervortheilt? Da von

je

je her alle Entrepreneurs Zinseszins bezahlt haben, ohne sich dabey über Schaden zu beklagen; so kann man schon daher den Schluß machen, daß sie sich dabey nicht übervortheilt gefunden haben. Ausserdem läßt sich hier folgendes behaupten. Wenn, wie solches meistentheils der Fall ist, die Renten sogleich nach einem Jahre, von dem Tage der Schliessung des Contracts an gerechnet, angehen; so bezahlt der Entrepreneur, wenn gleich die Rente nach der Zinseszinsrechnung bestimmt ist, so oft er eine Rente auszahlt, nichts anders als den von dem erhaltenen Capitale oder einem Theile desselbigen fälligen jährigen also einfachen Zins, und einen Theil des Capitals, und zwar so lange, bis von dem Capitale nichts mehr übrig ist. Um dies mit einem Beyspiele zu erläutern, so ist nach Zinseszins zu 5 pr. C. der Werth einer Zeitrente à 100 Rthl. auf 10 Jahr 772,17339 Rthl. So viel erhielte also der Entrepreneur bey Schliessung des Contracts. Er hätte also

nach 1 Jahre nicht nur das

Capital der	772,17339 Rthl.	
sondern auch $\frac{1}{20}$ davon an Zinse der	38,60866 Rthl.	
also in allem	810,78205 Rthl.	Nun bezahlte
er	100 Rthl.	und hätte also
nach 2 Jahren an Capital	710,78205 Rthl.	
und an Zins	35,53910 Rthl.	
also in allem	746,32116 Rthl.	Nun

be=

bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also
nach 3 Jahren an Capital	646,32116 Rthl.	
und an Zins	32,31605 Rthl.	
also in allem	678,63721 Rthl.	Davon
bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also
nach 4 Jahren an Capital	578,63721 Rthl.	
und an Zins	28,93186 Rthl.	
also in allem	607,56907 Rthl.	Davon
bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also
nach 5 Jahren an Capital	507,56907 Rthl.	
und an Zins	25,37845 Rthl.	
also in allem	532,94752 Rthl.	Davon
bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also
nach 6 Jahren an Capital	432,94752 Rthl.	
und an Zins	21,64737 Rthl.	
also in allem	454,59489 Rthl.	Davon
bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also
nach 7 Jahren an Capital	354,59489 Rthl.	
und an Zins	17,72974 Rthl.	
also in allem	372,32463 Rthl.	Hievon
bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also
nach 8 Jahren an Capital	272,32463 Rthl.	
und an Zins	13,61623 Rthl.	
also in allem	285,94086 Rthl.	Hievon
bezahlte er wieder	100 Rthl.	und hätte also

nach

nach 9 Jahren an Capital 185,94086 Rthlr
und an Zins 9,29704 Rthlr

also in allem 195,23790 Rthlr. Hievon
bezahlte er wieder 100 Rthlr und hätte also

nach 10 Jahren an Capital 95,23790 Rthlr
und an Zins 4,76189 Rthlr

also in allem 99,99979 Rthlr. Hievon
bezahlte er wieder 100 Rthlr und davon fehlten

ihm 0,00021 Rthlr, welche ohnstreitig nicht in Anschlag gebracht werden können, und noch weniger daher rühren, weil der Werth der Mise nach den Regeln der Zinseszinsrechnung bestimmt ist.

§. 8.

An eine Vervortheilung des Entrepreneurs also ist bey den vestgesetzten Bedingungen hier nicht zu gedenken. Werden nun etwa die Rentenirer vervortheilt? Wenn die Misen nach der einfachen Zinsrechnung bestimmt werden, so ist ihr Werth natürlicher Weise grösser, als wenn solches bey gleichem pr. C. nach der Zinseszinsrechnung geschieht. Für eine 10jährige Zeitrente à 100 Rthlr müßte man alsdenn $794\frac{1}{2}$ Rthlr geben, also $22\frac{1}{2}$ Rthlr mehr, als wenn nach Zinseszinse gerechnet wird. S. 1 Th. dieser Anleitung 1 Abschn. § 161. Offenbar dürfen also hier die Regeln der einfachen Zins- und Rabattrechnung nicht gebraucht werden.

§. 9.

§. 9.

Nähme nun aber die Auszahlung der Renten nicht sogleich nach einem Jahre, von der Schliessung des Rentenvertrags an gerechnet, ihren Anfang, sondern erfolgte dieselbe erst nach mehrern Jahren; so benutzte der Entrepreneur die Summe der erhaltenen Misen und der jährlichen Beyträge, wenn dergleichen gegeben würden, zuvörderst bis ein Jahr vor dem Anfang der Auszahlung der Renten: und hier kann die Frage, ob er diese Benutzung nach einfachen oder nach doppeltem Zinse in Anschlag bringen müsse? eigentlich nur aufgeworfen werden. Da der Entrepreneur eine beträchtliche Summe mit einem Male erhält, und also leicht den Zins jedes Jahres, angenommen daß er keine vortheilhaftere Anwendung in seiner Gewalt hat, als ein neues Capital wieder unterbringen kann, da er ferner den frühern und die Rentenierer nur den spätern Genuß erhalten, da er von den Rentenirern das Capital mit einem Male, die Rentenirer aber das Geliehene nur nach und nach theilweise von ihm wieder bekommen; so ist es wohl nicht mehr als billig, daß auch hier nach den Regeln der doppelten Zinsrechnung gerechnet werde. Es litten wenigstens die Rentenirer offenbar, wenn der Entrepreneur den Zins ihrer Mise bis ein Jahr vor der Auszahlung der Renten nur einfach berechnen wollte.

§. 10.

Die zweyte Frage § 5: **In was für einer Münzsorte die Renten ausgezahlet werden müssen?** ist deswegen nöthig, weil die Dauer der Renten sehr viele Jahre begreifen, und sich also während derselben die Münzsorten ändern können. Die Antwort darauf ist übrigens leicht. Es müssen nemlich die Renten in eben den Münzsorten bezahlet werden, in welchen die Mise und die vielleicht ebenfalls gegebenen jährlichen Beyträge entrichtet worden sind. Ist eine Veränderung in den Münzsorten zwischen der Schliessung des Rentenvertrags und dem Ende der Renten vorgegangen; so wird in den neuen Münzsorten so viel gegeben, als der Werth der Rente in den anfänglichen Münzsorten beträgt.

§. 11.

Es folgt die dritte Frage: **Wenn der Anfang der Renten falle, und wie die Zahlungstermine auf einander folgen?** Daß beydes an und für sich willkührlich sey, und also von der Verabredung zwischen dem Entrepreneur und den Rentenirern abhange, bedarf bloß berührt zu werden. Am gewöhnlichsten ist, wie solches auch schon bemerkt worden, in Ansehung des ersten Theils dieser Frage der Fall, daß die Rente, wenn ein Jahr nach dem Schlusse des Rentenvertrags verflossen ist, zum erstenmal ausgezahlt wird. Der Rentenvertrag ist aber

dann

dann eigentlich erst geschlossen, wenn die Rentenirer ihre Mise wirklich erlegt haben. Eben so pflegen die Rententermine gewöhnlich jährliche Termine zu seyn, und es ist solches auch theils wegen der Berechnung theils wegen der Auszahlung der Renten am bequemsten. Natürlicher Weise aber hindert dies nicht, daß nicht dazu auch halbjährige Termine angenommen werden könnten.

§. 12.

Die Sicherheit der Rente vorausgesetzt, so hat die Zeitrente, da ihre Dauer genau bestimmt ist, auch zu jeder Zeit einen bestimmten Werth, und die Leibrenten, so wohl die eigentlichen als die in Tontinen haben, da sich ihre Dauer, wie unten weiter gezeigt werden wird, wenigstens wahrscheinlich bestimmen läßt, auch wenigstens einen nach der Wahrscheinlichkeit fest zu setzenden Werth. Wollte also ein Rentenier oder ein Tontiniste sein Recht an einen andern verkaufen; so läge in der Sache selbst keine Schwierigkeit, und bey den Zeitrenten wäre solches auch für den Entrepreneur eine völlig gleichgültige Sache. Hier brauchte also der Verkauf der Rente dem Entrepreneur höchstens angezeigt werden. Bey den Leibrenten hingegen könnte der Käufer der Rente nicht anders verlangen, daß ihm bey einem eintretenden Termine die Rente ausgezählt würde, als bis er jedesmal ausser allen Zweifel gesetzt hätte, daß der erste Käufer derselben noch lebe.

Zum Verkaufe dieser Renten ist daher die Nachsuchung der Einwilligung des Entrepreneurs, wenn derselbe solche zur Bedingung der Gültigkeit des Verkaufs macht, auf keine Art und Weise unbillig. So viel ist hier zur Beantwortung der vierten Frage § 5 nöthig.

§. 13.

Ob ein jeder für sich das Recht habe, Rentengesellschaften jeder Art zu errichten, und sich zum Entrepreneur aufzuwerfen? scheint mehr zu verneinen als zu bejahen zu seyn. Denn wäre solches einem jeden erlaubt; so könnte sehr leicht dies Recht von manchem zum Schaden der Rentenirer gemisbraucht werden, oder wenigstens zum Schaden der Rentenirer ausschlagen, indem dieselben oft durch scheinende Sicherheit sich verleiten lassen könnten. Da der Entrepreneur aus mehr denn aus einem Grunde die größe Sicherheit zu geben im Stande seyn muß, so sind Rentenentreprisen billig vorzüglich Sache des Staats oder des Landesherrn, der aber, weil manche Bürger dadurch zum müssigen Leben verleitet werden, oder ihre Erben dessen, was dieselben sonst zu hoffen hätten, berauben, dazu ebenfalls nicht anders, als wenn anderweitige wichtige Gründe es rathen, schreiten sollte. Zeitrentenverträge, die nicht zu weit sich ausdehnen, können indeß Privatpersonen auch nicht gänzlich verboten werden.

§. 14.

Was die sechste Frage anbetrifft: **Wer und unter was für einer Bedingung er sich eine Rente kaufen könne?** so wird von einem Käufer einer Zeitrente, wenn er mündig ist, natürlicher Weise nichts weiter als die Erlegung der erforderlichen Mise verlangt; ist er nicht mündig, so ist ausserdem die Einwilligung seiner Vormünder nöthig. Wer aber eine Leibrente kaufen will, der muß, da der Werth derselben nach dem Alter des Käufers sich richtet, vor allen Dingen sein Alter auf eine keinem Zweifel unterworfene Art angeben. Wer hierin wissentlich die Wahrheit nicht angiebt, den hat der Entrepreneur ein Recht mit Verlust seiner Mise aus der Gesellschaft zu stossen. Daß auch Eltern ihren Kindern, selbst den eben Gebornen, eine Rente erkaufen können, fällt von selbst in die Augen.

§. 15.

Die Frage: **Wie viel Rentenirer und was für welche in Rücksicht auf das Alter zur Errichtung eines Rentenvertrags erfodert werden?** läßt sich zuvörderst nach den verschiedenen Arten der Renten ebenfalls verschiedentlich beantworten. Einen Zeitrentenvertrag kann ein Entrepreneur auch mit einem einzigen schliessen, und auf das Alter desselben kommt es dabey gar nicht an. Denn die Grösse der Zeitrente richtet sich hier allein nach der Grösse der Mise und der Zeit der Dauer der Rente, und ein Rentenirer erhält für seine Mise dieselbe Rente, und gleich lange, er mag sich dieselbe allein oder nebst noch mehrern andern, die gleichfalls ihre Mise erlegen, kaufen. In der Dauer der Zeitrente ändert auch das Leben oder der Tod des Rentenirers nichts. Denn lebt er länger, als die Zeitrente dauren soll, so erhält er die übrigen Jahre keine Rente mehr, und stirbt er früher, so muß der Entrepreneur die Rente seinen Erben auszahlen. Zu Leibrentenverträgen hingegen kann ein Entrepreneur, ohne sich der Gefahr beträchtlichen Schaden zu leiden nicht anders entschliessen, als wenn eine Menge Theilnehmer da sind. Woher die gedachte Gefahr entstehe, wird sich unten bey der Berechnung der Leibrenten ergeben. Uebrigens können die Theilnehmer zwar von einem jeden Alter seyn, allein es muß dann auch ihre Rente bey einerley Mise, oder ihre Mise bey einerley Rente verschieden seyn. Tontinen sind entweder blosse Jahrrenten, oder Jahrrenten und Leibrentenverträge zugleich. Mehr als ein Tontinist wird jederzeit erfordert, und diejenigen, die zusammen entweder die ganze Tontine oder eine Classe derselben ausmachen, müssen in ihrem Alter nicht sehr von einander verschieden seyn. Je grösser indeß die Anzahl der Mitglieder einer Classe ist, desto sicherer und gewisser kann die dabey nöthige Rechnung geführt werden.

§. 16.

§. 16.

Oft werden Rentenverträge von Staaten geschlossen, um geschwind Geld zu bekommen. Alsdenn werden zu jeder Art der Renten eine Menge Theilnehmer erfordert, weil ausserdem die angeführte Absicht nicht gut erhalten werden kann. Da es sehr unbequem seyn würde, wenn bey einer grossen Menge von Rentenirern die Renten nicht alle zu einer und derselben Zeit fällig wären, und die Billigkeit es erfordert, daß die Zeit zwischen der Bezahlung der Mise und dem Anfange der Rente bey allen Rentenirern gleich sey; so pflegen diejenigen, die bey Errichtung einer Rente daran Theil nehmen wollen, so lange, bis Theilnehmer genug dazu sind, nur durch Subscription sich als dergleichen anzugeben. Sind so viel Theilnehmer als erfordert werden da, so wird alsdenn von dem Entrepreneur der Tag der Zahlung der Mise bekannt gemacht, und erst von dem Augenblicke an, da die Rentenirer ihre Misen bezahlt und der Entrepreneur dieselbe angenommen, findet zwischen den Rentenirern und dem Entrepreneur Verbindlichkeit statt, und von demselben an gerechnet, werden auch die Termine der Renten bestimmt.

§. 17.

Wer sich eine Rente erkaufen will, kann solches entweder auf die Art thun, daß er mit einem Male die ganze dafür zu erlegende Summe bezahlt, oder er kann auch zu Anfange nur einen Theil dieser Summe erlegen, und das übrige terminweise bezahlen. Wenn der erste und gewöhnlichste Fall statt findet, so kommt es bey der Berechnung der Renten entweder auf die Bestimmung der Mise, wenn die Rente gegeben ist, oder auf die Bestimmung der Rente, wenn die Mise als bekannt vorausgesetzt werden kann, an. Tritt aber der andere Fall ein, so ist entweder der gleich zu erlegende Theil der Mise und die Rente gegeben, und dann muß man die Grösse der terminweise zu bezahlenden Beyträge suchen; oder es ist gesagt, wie viel in jedem Termine beygetragen werden, und wie groß die Rente seyn soll, und dann ist die Grösse des sogleich zu erlegenden Theils der Mise zu finden; oder es ist endlich der sogleich zu erlegende Theil der Mise und die terminweise zu gebenden Beyträge bekannt, und dann bleibt die Rente zu bestimmen übrig. Was sonst noch in Anschlag zu bringen seyn könnte, wird bey der Berechnung selbst bemerkt werden.

§. 18.

Ausser den bisherigen könnten noch verschiedene allgemeine die Renten betreffende Bemerkungen hinzugefügt werden; z. B. Ob es für einen Staat vortheilhaft sey, wenn oft Rentenverträge errichtet werden? Wodurch und wie den Rentenirern Sicherheit gegeben werden könne, daß ihm seine Rente nie fehlen werde? Was für Freyheiten mit den Renten verbunden werden könnten? u. d. gl.

Um

Um indeß nicht zu weitläuftig zu werden, übergehe ich diese Materien, zumal da sie auf die folgende Anweisung die Renten zu berechnen, keinen genauern Einfluß haben.

2. Von den Zeitrenten.

§. 19.

Vorausgesetzt, daß das pr. C. bestimmt sey, so sind die bey den Zeit- oder Jahrrenten aufzulösende Aufgaben

1. aus der Rente und der Zeit ihrer Dauer die Grösse der Mise zu finden.
2. aus der Mise und der Zeit der Dauer der Rente die Grösse der Rente zu bestimmen, und
3. aus der Mise und der Rente die Zeit ihrer Dauer zu finden.

Die Auflösung dieser Aufgaben soll hier zuvörderst gezeigt, und darauf gelehrt werden, theils wie man aus der Mise, der Rente und der Zeit ihrer Dauer das dabey zum Grunde liegende pr. C. finden, theils wie man den Preis bestimmen könne, den ein Rentenirer, der seine Rente an einen andern verkaufen will, derselben geben könne.

§. 20.

Wenn man das, was im 1ten und 2ten § dieses Abschnitts gesagt worden, sorgfältig überdenkt, so sieht man leicht ein, daß zu allen hier anzustellenden Rechnungen keine andere Regeln erfordert werden, als diejenigen, welche in dem ersten Abschnitte, welcher die Zinsrechnung in weitläuftigem Verstande unter sich begreift, bereits erklärt worden sind, indem die gegenwärtigen Aufgaben von den aus dem gedachten Abschnitte hieher gehörigen sich bloß in Benennungen unterscheiden. Um indeß die Anwendung jener Regeln auf die Berechnung der Renten zu erleichtern, ist es gleichwol nöthig, jede Aufgabe durch ein oder das andere Beyspiel zu erläutern.

§. 21.

Es sey also

1. die Frage zu beantworten: Wie groß die Mise sey, die jemand zu entrichten habe, um zu 5 pr. C. zehn Jahre nach einander, jedes Jahr 100 Rthl. zu bekommen?

Diese Frage ist mit dieser übereinstimmend: wie viel muß à 5 pr. C. für 1000 Rthl., die in 10 einjährigen Terminen, jedesmal mit 100 Rthl. bezahlt werden sollten, sogleich gegeben werden? und überhaupt ist die Berechnung der Mise aus der Rente und der Zeit ihrer Dauer mit der Berechnung des jetzigen Werths einer Schuld, die terminweise in gleichen Summen und ohne Zins zu bezahlen ist, einerley.

Da nach § 7 dieses Abschnitts der Zins nicht einfach sondern doppelt berechnet werden muß, so gehören also die im 1ten Abschnitte §. 182 u. f. vorkommenden Regeln der doppelten Rabattrechnung hieher.

Die Antwort auf die aufgeworfene Frage findet man in dem angeführten §, so wie die Antwort auf dieselbe Frage oben 3 pr. C. Zins gerechnet im 183sten §.

§. 22.

§. 22.

Da $20 \times 100 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} \times 100 = \left(20 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}}\right) \times 100$, und

$\frac{100}{3} \times 100 - \frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}} \times 100 = \left(\frac{100}{3} - \frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}}\right) \times 100$ ist; ferner

$21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$ in $20 \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$ und

$\frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}}$ in $\frac{100}{3} \times \frac{100^{10}}{103^{10}}$ verwandelt

werden kann, so daß also

$20 \times 100 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} \times 100 = \left(20 - 20 \times \frac{20^{10}}{21^{10}}\right) 100$ und

$\frac{100}{3} \times 100 - \frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}} \times 100 = \left(\frac{100}{3} - \frac{100}{3} \times \frac{100^{10}}{103^{10}}\right) 100$ ist, woraus, da

$\left(20 - 20 \times \frac{20^{10}}{21^{10}}\right) \times 100 = \left(1 - \frac{20^{10}}{21^{10}}\right) \times 20 \times 100$ und

$\left(\frac{100}{3} - \frac{100}{3} \times \frac{100^{10}}{103^{10}}\right) \times 100 = \left(1 - \frac{100^{10}}{103^{10}}\right) \times \frac{100}{3} \times 100$, fließt, daß

$20 \times$

$$20 \times 100 - 21 \times \frac{20^{11}}{21^{11}} \times 100 = \left(1 - \frac{20^{10}}{21^{10}}\right) \times 20 \times 100$$ und

$$\frac{100}{3} \times 100 - \frac{103}{3} \times \frac{100^{11}}{103^{11}} \times 100 = \left(1 - \frac{100^{10}}{103^{10}}\right) \times \frac{100}{3} \times 100$$: so kann man die Regel für den gegenwärtigen Fall allgemein auf folgende Art ausdrucken.

Man suche aus dem gegebenen pr. C. den Anzeiger des rabattirten Capitals für ein Jahr, welchen man in dem Bruche findet, dessen Zähler 100 und der Nenner die Summe aus 100 und dem bestimmten pr. C. ist, und bringe denselben auf die möglich kleinsten Zahlen. Es ist derselbe

$\frac{20}{21}$	für 5 pr. C. und sein Logarithme				0,9788107009 — 1
$\frac{200}{209}$	— $4\frac{1}{2}$	—	—	—	0,9808837095 — 1
$\frac{25}{26}$	— 4	—	—	—	0,9829666507 — 1
$\frac{200}{207}$	— $3\frac{1}{2}$	—	—	—	0,9850596502 — 1
$\frac{100}{103}$	— 3	—	—	—	0,9871627742 — 1
$\frac{40}{41}$	— $2\frac{1}{2}$	—	—	—	0,9892761346 — 1
$\frac{50}{51}$	— 2	—	—	—	0,9913998282 — 1

Ferner erhebe man diesen Anzeiger zu der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, welche hindurch die Rente dauren soll, und zie-

he

he das gefundene von 1 ab. Hiebey ist die Rechnung mit den Logarithmen sehr vortheilhaft.

Endlich multiplicire man das gefundene mit einem Bruche, der zum Zähler den Zähler des gedachten Anzeigers und zum Nenner die Differenz zwischen dessen Zähler und Nenner hat, und dies Product darauf wieder mit der jährlichen Rente. Hier rechnet man oft ohne Logarithmen auf die bequemste Art.

§. 23.

Die Ausrechnung des § 21 angeführten Exempels ist hiernach

a für 5 pr. C. Es ist

$L. \frac{20}{21} = 0{,}97881070 - 1$ und

$L. \frac{20^{10}}{21^{10}} = 0{,}7881070 - 1 = L.\ 0{,}613914;$

ferner ist

$1 - 0{,}613914 = 0{,}386086$, und

$0{,}386086 \times 2000 = 772{,}172$, also die gesuchte Mise 772,172 Rthl.

b für 3 pr. C. Es ist

$L. \frac{100}{103} = 0{,}98716277$ und

$L. \frac{100^{10}}{103^{10}} = 0{,}8716277 = L.\ 0{,}744094;$ ferner ist

$1 - 0{,}744094 = 0{,}255906$ und

$0{,}255906 \times \frac{10000}{3} = 853{,}02$, und also die gesuchte Mise 853,02 Rthl.

Der Unterschied zwischen diesen und den § 182 und 183 des 1ten Abschnittes befindlichen Resultaten rührt daher, weil hier die Rechnung nicht auf eben so viele Decimalstellen fortgeführt ist.

§. 24.

Da § 185 f. des 1ten Abschnitts so wohl von der Verfertigungsart als dem Gebrauche solcher Tabellen gesprochen worden ist, deren man sich hier öfters mit Vortheil bedienen kann; so ist von dem gegenwärtigen Falle nichts weiter übrig, als einmal diejenigen, welche dergleichen hier verlangen, auf den angeführten Ort zu verweisen, und dann anzuzeigen, *daß am Ende dieses 2ten Theils* die S. 223 des 1ten Theils angefangene Tabelle ausführlich angehängt ist. Sie ist unter den daselbst befindlichen Tabellen die zweyte.

§. 25.

2. Zum andern werde gefragt: Wie groß die Rente sey, die jemand 10 Jahre nach einander erhalten könne, wenn er 772,172 Rthl. Mise bezahlt, und 5 pr. C. gerechnet werden soll?

Diese Frage ist mit dieser übereinstimmend: Wie viel kann, wenn 5 pr. C. Zins gerechnet werden, und 772,172 Rthl., die jetzt fällig sind oder gegeben werden, in 10 einjährigen Terminen in gleichen Summen abgetragen werden sollen, jedesmal gegeben werden? und überhaupt ist die Berechnung der Grösse der Rente,

wenn

wenn die Mise und die Zeit der Dauer der Rente gegeben ist, mit dem § 242 f. des 1ten Theils berührten Falle, aus der Lehre von den veränderten und getheilten Zahlungsterminen einerley. Denn daß auch hier nach den Regeln der doppelten Zinsrechnung gerechnet werden müsse, braucht kaum noch einmal erinnert zu werden.

Die Antwort auf die aufgeworfene Frage findet man § 243 des ersten Abschnitts S. 306. 307.

§. 26.

Da dieser Fall dem vorhergehenden entgegen steht, und die Zahl, welche vorhin der Multiplicator der Rente war, um daraus die Mise zu finden, hier nur zum Divisor der Mise gemacht zu werden braucht, um daraus die Rente herzuleiten; so kann man die § 244 des 1ten Abschnitts gegebene Regel für den gegenwärtigen Fall auch auf folgende bequemere Art ausdrucken.

Man suche, wie § 22, den Anzeiger des rabattirten Capitals aus dem gegebenen pr. C., erhebe denselben zu der Dignität, deren Exponent der Zahl der Jahre gleich ist, welche die Rente dauren soll, ziehe das gefundene von 1 ab, und multiplicire den Rest mit einem Bruche, dessen Zähler der Zähler des gedachten Anzeigers und der Nenner der Unterschied zwischen dem Zähler und Nenner eben dieses Anzeigers ist, und dividire endlich mit diesem Producte

ducte die gegebene Mise. Der Gebrauch der Logarithmen ist hier meistentheils mit vielen Vortheilen verbunden.

§. 27.

Die Ausrechnung des § 25 angeführten Exempels ist hiernach

Es ist L. $\frac{20}{21}$ $= 0,97881070 - 1$

L. $\frac{20^{10}}{21^{10}} = 0,7881070 - 1 =$ L. 0,613914, also

$1 - 0,613914 = 0,386086$, und

$0,386086 \times 20 = 7,72172$. Da nun

$\frac{772,172}{7,72172}$ Rth. $= 100$ Rth., so ist 100 Rth. die gesuchte Rente.

§. 28.

Vermittelst einer Tabelle, wie die am Ende dieses Theils befindliche zweyte ist, findet man die Grösse der Rente aus der Mise und der Zeit der Dauer der Rente, wenn man die gegebene Mise durch die Zahl aus der Tabelle dividirt, welche neben der Zahl der Jahre der Rente unter dem gegebenen pr. C. steht. Würde z. B. gefragt, wie groß die Rente sey, welche man für 3754,028 Rth. Mise zu 4 pr. C. gerechnet, 12 Jahr lang heben könne, so fände man auf diese Art zur Antwort

$\frac{3754,028}{9,38507}$ Rth. $= 400$ Rth.

§. 29.

§. 29.

3. Wenn aus der gegebenen Mise und der Rente die Zeit der Dauer derselben bestimmt werden soll; so ist solches eben so viel, als wenn verlangt wird, daß man suchen soll, in was für einer Zeit ein bestimmtes Capital mit seinem Zinse durch eine vestgesetzte jährlich abzutragende Summe sich verzehre? und es gehört also die § 272 des 1ten Abschnitts vorgetragene Regel hieher.

§. 30.

Um diese Regel nicht nur auf eine für den gegenwärtigen Fall passende sondern auch allgemeinere Art auszudrucken, so ist dieselbe:

Man multiplicire die Mise mit der Differenz zwischen dem Zähler und Nenner des Anzeigers des rabattirten Capitals für das gegebene pr. C. und dividire dies Product durch die jährliche Rente und den Zähler eben dieses Anzeigers. Ist dies geschehen, so ziehe man das gefundene von 1 ab, und dividire den Logarithmen des Rests durch den Logarithmen des Anzeigers. Dieser Quotient zeigt alsdann die gesuchte Zeit der Dauer der Rente an.

§. 31.

Wird z. B. gefragt: Wie lange eine Rente von 600 Rthl. bey 10000 Rthl. Mise zu 5 pr. C. dauren könne?

ne? so ist nach dieser Regel die Ausrechnung dieses Exempels: Es ist

$$10000 \times 1 = 10000, \text{ ferner}$$

$$\frac{10000}{20 \times 600} = \frac{5}{6} \text{ und}$$

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}. \text{ Da nun}$$

$$L.\ \frac{1}{6} = -0{,}7781513 \text{ und}$$

$$L.\ \frac{20}{21} = -0{,}0211892,$$ wenn auch die Decimalzahlen hier negativ genommen werden; so ist

$$\frac{L.\ \frac{1}{6}}{L.\ \frac{20}{21}} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211892} = 36\tfrac{2}{3} \text{ fast } 36\tfrac{3}{4},$$ und die Zeit der Dauer dieser Rente ist daher $36\frac{2}{3}$ oder $36\frac{3}{4}$ Jahr.

§. 32.

Sollte berechnet werden, wie lange man statt 853,02 Rthlr zu 3 pr. C. gerechnet jährlich 100 Rthlr erhalten könnte; so wäre die Rechnung nach der angeführten Regel folgende. Es ist

$$853{,}02 \times 3 = 2559{,}06, \text{ und}$$

$$\frac{2559{,}06}{100 \times 100} = 0{,}255906, \text{ und}$$

$$1 - 0{,}255906 = 0{,}744094. \text{ Ferner ist}$$

$$L.\ 0{,}744094 = -1{,}8716278 \text{ und}$$

$$L.\ \frac{100}{103} = -1{,}9871627 \text{ und also}$$

$$\frac{L.\ 0{,}744094}{L.\ \frac{100}{103}} = \frac{-1{,}8716278}{-1{,}9871627} = 10,$$ so daß also die hier gesuchte Zeit 10 Jahre ist.

§. 33.

§. 33.

Was den Beweis dieser Regel betrifft; so kann man sich denselben auf folgende Art an einem einzeln Beyspiele merken. Wenn das pr. C. 3, die Rente 100 Rthlr und die Zeit der Dauer der Rente 10 Jahre ist, so findet man die Mise durch Entwickelung der Formel

$$\left(1 - \frac{100^{10}}{103^{10}}\right) \times \tfrac{100}{3} \times 100,\ \text{s. § 22.}$$

und da für diesen Fall die Mise 853,02 Rthlr ist, so ist daher

$$\left(1 - \frac{100^{10}}{103^{10}}\right) \times \tfrac{100}{3} \times 100 = 853{,}02$$

Gesetzt nun, daß in diesem Exempel der Exponent des Anzeigers $\frac{100}{103}$ unbekannt wäre, und man die beyden gleichen Grössen durch $\frac{100}{3} \times 100$ dividirte, so erhielte man

$$1 - \frac{100^{10}}{103^{10}} = \tfrac{853{,}02 \times 3}{100 \times 100},$$ und hieraus ergäbe sich ferner durchs Addiren und Subtrahiren gleicher Grössen zu gleichen

$$1 - \tfrac{853{,}02 \times 3}{100 \times 100} = \frac{100^{10}}{103^{10}},$$ doch so daß man auch hier den Exponenten des Anzeigers $\frac{100}{103}$ nicht kennte. Aus dem aber, was in der Vorrede zum 1ten Theile dieser Anleitung von den Logarithmen gesagt worden ist, ist bekannt, oder doch leicht herzuleiten, daß der Logarithme

von $1 - \frac{853,02 \times 3}{100 \times 100}$ so vielmal so groß seyn müsse als der Logarithme der Wurzel $\frac{100}{103}$, als der Exponent der Dignität, in welcher diese Wurzel steht, eins enthält, und daß man also hier um ihn zu finden nichts weiter nöthig habe, als den Logarithmen von $1 - \frac{853,02 \times 3}{100 \times 100}$ durch den Logarithmen von $\frac{100}{103}$ zu dividiren.

§. 34.

Wer eine andere Regel verlangt, der kann sich folgende merken:

Man suche einen Bruch, der zum Zähler den Nenner des Anzeigers des durch den einjährigen Zins vermehrten Capitals zu dem gegebenen pr. C. und zum Nenner die Differenz zwischen den Nenner und Zähler eben dieses Anzeigers hat, und multiplicire damit die jährliche Rente.

Ferner dividire man dieses Product durch die Differenz zwischen ihm und der Mise, oder suche den Logarithmen des Quotienten.

Endlich dividire man den Logarithmen dieses Quotienten durch den Logarithmen des gedachten Anzeigers. Dieser Quotient zeigt die gesuchte Zeit in Jahren an.

§. 35.

Wird z. B. gefragt, wie lange man für 853,02 Rthl zu 3 pr. C. eine jährliche Rente à 100 Rthl erhalten könne; so ist die anzustellende Rechnung folgende:

Es ist der Anzeiger des durch den einjährigen Zins à 3 pr. C. vermehrten Capitals $\frac{103}{100}$ und der im Anfange der Regel beschriebene Bruch also $\frac{100}{3}$.

Ferner ist $100 \times \frac{100}{3} = 3333,33 \ldots$ und die Differenz zwischen diesem Producte und der Mise $3333,33 - 853,02 = 2480,31$;

folglich L. $\frac{3333,33}{2480,31}$, da

$$\begin{array}{l} \text{L. } 3333,33 = 3,5228783 \\ \text{L. } 2480,31 = \underline{3,3945059} \\ \text{L. } \frac{3333,33}{2480,31} = 0,1283724. \end{array}$$ Da nun

L. $\frac{103}{100} = 0,0128372$; so ist

L. $\frac{3333,33}{2480,31} = \frac{0,1283724}{0,0128372} = 10$, und also die gesuchte Dauer der Rente 10 Jahre.

§. 36.

Wenn der Zähler und Nenner des hier zu suchenden Anzeigers nur um 1 unterschieden sind; so erhält man statt des Bruchs, mit welchem nach § 34 die jährliche Rente multiplicirt werden muß, eine ganze Zahl, und die Rechnung wird alsdann noch leichter. Dies findet z. B. bey 5 pr. C. statt, und die specielle Regel für diesen Fall kann man aus der § 272 des 1ten Abschnitts vorgetrage=

nen herleiten, wenn man darin statt des jährlich weggenommenen Capitals die jährliche Rente, und statt des anfänglich angelegten Capitals die Mise setzt.

§. 37.

Bisher ist immer, und zwar weil das der gewöhnlichste Fall ist, vorausgesetzt worden, daß die Rente ein Jahr nach dem Tage der Erlegung der Mise angehe, und in jährigen Terminen bezahlt oder gehoben werde. Fände dies nicht statt, und würde

a *die Rente* zwar in einjährigen Terminen bezahlt, die Mise aber *nicht gerade Ein Jahr vor dem Anfange* der Rente, sondern entweder früher oder später gegeben; so könnte man die bisher erklärten Regeln gleichwohl befolgen, wenn man nur ausserdem noch, so wie es die Umstände mit sich brächten, die Regeln entweder der doppelten Zins- oder der doppelten Rabattrechnung anwendete.

§. 38.

Wenn nemlich erstlich die Mise früher als ein Jahr vor dem Anfange der Rente erlegt würde; so könnte und müßte der Rentenirer von der Mise, so wie sie bisher berechnet worden, so viel abziehen, als der Rabatt für die Zeit, daß er die Mise früher erlegte, betrüge. Wäre die Mise z. B. wenn die Rente ein Jahr nach ihrer Erlegung angienge, 1000 Rthlr, und der Rentenirer bezahlte dieselbe zwey Jahr vor dem Anfange der Rente,

so

so käme ihm der Rabatt eines Jahres zu gute, und er bezahlte bey 5 pr. C. nur 952,23 Rß, bey 4 pr. C. nur 961,53 Rß u. s. w. Wenn aber zum andern die Mise später als ein Jahr vor dem Anfange der Rente erlegt würde; so müßte ausser ihr der Rentenirer auch den Zins erlegen, den die nach den erklärten Regeln gefundene Mise in der Zeit der spätern Zahlung getragen haben würde.

§. 39.

b Sollten die Renten nicht in einjährigen sondern z. B. in halbjährigen oder ¼jährigen Terminen bezahlt werden; so hat man weiter nichts nöthig, als die bisherigen Rechnungen auf eben die Art abzuändern, als die Rechnungen der doppelten Zins- und Rabattrechnung abgeändert werden mußten, wenn anstatt jähriger Termine halbjährige oder ¼jährige genommen wurden.

§. 40.

Es kann bey der Berechnung der Zeitrenten auch die Frage vorkommen: **Wie aus der Rente, der Zeit ihrer Dauer und der Mise das pr. C., nach welchem gerechnet worden, gefunden werden könne?** Da diese Frage bey weitem so wichtig nicht ist, als die bisher untersuchten, so wird es hinlänglich seyn, die zu ihrer Beantwortung nöthige Regel nur kurz zu berühren.

Man suche also den mittlern Zahlungstermin der Summe aller Renten nach § 224 f. des 1ten Ab-

schnittes, nenne die Mise das gegebene Capital, die Zeit des mittlern Zahlungstermins die bestimmte Zeit und die Summe aller Renten das durch den Zinseszins in dieser Zeit vermehrte Capital, und verfahre darauf, so wie es § 114 f. des 1ten Abschnittes gelehret worden ist.

§. 41.

Soll der Werth einer Rente, die schon eine Zeitlang gezogen worden ist, für die noch übrige Zeit gefunden werden; so findet man das dazu nöthige § 180—183 des 1ten Abschnitts, denn die Summe aller noch übrigen Renten unterscheidet sich von der daselbst gedachten Schuld, die terminweise in gleichen Summen und ohne Zins zu bezahlen ist, einzig und allein durch den Namen.

3. Von den Leibrenten.

§. 42.

Die Leibrenten unterscheiden sich von den Zeitrenten darin, daß sie nicht eine vom Anfang an vestgesetzte Anzahl von Jahren, sondern so lange dauren, als der Rentenirer lebt, und ihre Berechnung ist daher viel zusammengesetzter, als die Berechnung der Zeitrenten. Sie sind eigentlich nichts anders, als Wetten zwischen dem Entrepreneur und dem Rentenirer, die auf alle Jahre, welche

welche der Rentenirer noch leben kann, angestellt werden, und es wird daher zu ihrer Berechnung nicht nur die Lehre von der Berechnung der Wahrscheinlichkeit überhaupt, sondern auch alles das, was im 5ten Abschnitte von der Anwendung dieser Lehre auf das menschliche Leben da gewesen ist, erfordert.

§. 43.

Da die Leibrenten so lange dauren, als der Rentenirer lebt, so fällt in die Augen, daß bey der Berechnung derselben das Alter des Rentenirers in Anschlag komme, und nicht wie bey den Zeitrenten gleichgültig sey. Auch läßt sich sehr leicht der Schluß machen, daß bey einerley Mise die Rente desto kleiner seyn müsse, je jünger der Rentenirer, und desto grösser, je älter er ist; so wie auch, daß bey einerley Rente die Mise desto grösser seyn müsse, je jünger der Rentenirer, und desto kleiner, je älter er ist. Es muß daher hier nicht bloß gezeigt werden, wie man die Leibrenten überhaupt berechne, sondern auch, wie dieselbe für eine jede Anzahl von Jahren gefunden werden können.

§. 44.

Da diejenigen, die sich eine Leibrente kaufen, sich nicht dazu entschliessen würden, wenn die Beschaffenheit ihres Körpers oder ihre Umstände sie einen frühzeitigen Tod fürchten liessen, und also die Rentenirer bey einer Leibrente als Personen betrachtet werden müssen, die keiner so grossen Sterblichkeit ausgesetzt sind, als bey den Menschen überhaupt angenommen werden kann; so fällt in die Augen, daß bey der Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Lebens der Leibrentenirer nicht die allgemeine Sterblichkeitsordnung, sondern vielmehr die Sterblichkeitsordnung für Rentenirer, so wie sie am Ende dieses Theils befindlich ist, zum Grunde gelegt werden müsse.

§. 45.

Die wichtigste unter den bey der Berechnung der Leibrenten möglichen Fragen ist: **Wie findet man, wenn das Alter des Rentenirers, das pr. C., zu welchem der Zins des Einkaufsgeldes gerechnet werden soll, und die Rente, welche er, so lange er lebt, ziehen will, bestimmt sind, die von ihm zu erlegende Mise?** Ich will hier zuvörderst einen einzeln Fall betrachten, und dabey annehmen, daß die Rente ein Jahr nach der Erlegung der Mise anfangen, und nur so lange gegeben werden solle, als der Rentenirer wirklich lebt.

§. 46.

Gesetzt also, daß ein 60jähriger Rentenirer sich eine Leibrente à 100 Rthl. zu 5 pr. C. kaufen wollte, und die Mise desselben bestimmt werden sollte; so hätte er, nach den im 3ten, 4ten und 5ten Abschnitte erklärten Grundsätzen an den Entrepreneur für die Hoffnung, 36 Jahr nach einander 100 Rthl. zu erhalten, jetzt zu bezahlen.

für

für das Jahr		den Werth von
— 1te —	—	$\frac{3092}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20}{21}$
— 2 —	—	$\frac{2990}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^2}{21^2}$
— 3 —	—	$\frac{2885}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^3}{21^3}$
— 4 —	—	$\frac{2778}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^4}{21^4}$
— 5 —	—	$\frac{2669}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^5}{21^5}$
— 6 —	—	$\frac{2559}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^6}{21^6}$
— 7 —	—	$\frac{2448}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^7}{21^7}$
— 8 —	—	$\frac{2336}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^8}{21^8}$
— 9 —	—	$\frac{2223}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^9}{21^9}$
— 10 —	—	$\frac{2109}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^{10}}{21^{10}}$
— 11 —	—	$\frac{1923}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^{11}}{21^{11}}$
— 12 —	—	$\frac{1874}{3191} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^{12}}{21^{12}}$

für

für das Jahr		den Werth von
— 13te	—	$\frac{1749}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{13}}{21^{13}}$
— 14 —	—	$\frac{1617}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{14}}{21^{14}}$
— 15 —	—	$\frac{1479}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{15}}{21^{15}}$
— 16 —	—	$\frac{1337}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{16}}{21^{16}}$
— 17 —	—	$\frac{1198}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{17}}{21^{17}}$
— 18 —	—	$\frac{1064}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{18}}{21^{18}}$
— 19 —	—	$\frac{936}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{19}}{21^{19}}$
— 20 —	—	$\frac{812}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{20}}{21^{20}}$
— 21 —	—	$\frac{697}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{21}}{21^{21}}$
— 22 —	—	$\frac{590}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{22}}{21^{22}}$
— 23 —	—	$\frac{492}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{23}}{21^{23}}$
— 24 —	—	$\frac{404}{3191} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{24}}{21^{24}}$

für

für das Jahr	den Werth von
— 25ste —	$\frac{327}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{25}}{21^{25}}$
— 26 — —	$\frac{261}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{26}}{21^{26}}$
— 27 — —	$\frac{206}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{27}}{21^{27}}$
— 28 — —	$\frac{159}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{28}}{21^{28}}$
— 29 — —	$\frac{117}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{29}}{21^{29}}$
— 30 — —	$\frac{80}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{30}}{21^{30}}$
— 31 — —	$\frac{50}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{31}}{20^{31}}$
— 32 — —	$\frac{28}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{32}}{21^{32}}$
— 33 — —	$\frac{14}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{33}}{21^{33}}$
— 34 — —	$\frac{6}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{34}}{21^{34}}$
— 35 — —	$\frac{3}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{35}}{21^{35}}$
— 36 — —	$\frac{1}{3191} \times 100$ Rth. $\times \frac{20^{36}}{21^{36}}$

§. 47.

§. 47.

Sollte nun die zu bezahlende Mise hieraus ganz entwickelt werden, so müßte man alle einzele Werthe aufsuchen, und selbige darauf addiren. Alle Vortheile, die man sich hier machen könnte, wären, daß man den Factor 100 zu Anfange weglieſſe, das übrige vermittelst der Logarithmen entwickelte, die entwickelten Werthe addirte, und ihre Summe darauf mit 100 multiplicirte. Da man hier von sehr vielen Zahlen die Logarithmen aufzusuchen, von dem Logarithmen von $\frac{20}{21}$ das Ein bis Sechs und dreyßigfache zu machen, und von einer Menge Logarithmen die zu ihnen gehörigen Zahlen aus den Tafeln zu nehmen hätte; so würde man sich das ganze Geschäfte sehr erleichtern, wenn man jede Art dieser Arbeiten besonders nähme, und die eine immer nach der andern ganz zu Stande brächte.

§. 48.

Daß der hier vorgeschlagene Weg allein der richtige sey, bedarf nach dem, was in den vorhergehenden Abschnitten da gewesen ist, verbunden mit dem, was in dem gegenwärtigen über die Natur der Leibrenten gesagt worden, keines weitern Beweises. Daß derselbe sehr weitläuftig ist, ist keine Einwendung darwider, denn diese Weitläuftigkeit ist unvermeidlich. Indeß braucht man auch für jede Anzahl von Jahren nicht immer denselben Weg zu nehmen, sondern es lassen sich, wenn man erst

die

die Rente für irgend ein Jahr des Alters gefunden hat, die Renten für die übrigen in der natürlichen auf- oder absteigenden Ordnung folgenden Jahren aus jener nach und nach auf eine bequemere Art finden. Bey der nachfolgenden genauern Anweisung wird dies ausführlich gezeigt werden.

§. 49.

Verschiedene schlagen hier folgenden Weg vor;

Man suche, wenn das Alter des Rentenirers gegeben ist, in der zum Grunde gelegten Sterblichkeitsordnung die diesem Alter zukommende wahrscheinliche Lebensdauer, und berechne den Werth einer Jahrrente, die so viele Jahre gezogen werden soll, als diese Lebensdauer anzeigt. Sollte z. B. die Mise für die Rente eines 60jährigen à 100 Rthl. zu 5 pr. C. berechnet werden; so müßte man nach dieser Regel die wahrscheinliche Lebensdauer eines 60jährigen aus den Tabellen suchen, welche 14,15 Jahre wäre, und dann die Zeitrente à 100 Rthl. und 5 pr. C. auf 14,15 Jahre berechnen.

So bequem aber diese Regel scheinen mag, so ist sie doch aus der Ursache nicht zu befolgen, weil dabey gerechnet wird, als wenn alle Renten innerhalb der Zeit der wahrscheinlichen Lebensdauer ausgezahlt würden. Dies geschieht nicht, sondern die Hälfte der Renten besteht

noch

noch am Ende dieser wahrscheinlichen Lebensdauer, und der Entrepreneur erhält also zum Schaden der Rentenirer bey dieser Art zu rechnen, da die spätere Fallzeit den Werth der Schuld vermindert, mehr als er hätte erhalten sollen, und die Rentenirer werden übervortheilt.

Wollte man an statt der wahrscheinlichen Lebensdauer die mitlere Lebensdauer nehmen, so würde, da dieselbe bald grösser bald kleiner als die wahrscheinliche Lebensdauer, und bisweilen auch ihr gleich ist, nur in dem Falle, da sie kleiner ist', die Vervortheilung der Rentenirer nicht in gleichem Grade statt finden, sonst entweder eben so oder noch mehr; und es ist dies also noch weniger zu empfehlen.

Wie groß der Unterschied zwischen einer nach dieser falschen Regel und einer richtig berechneten Rente sey, kann nach dem folgenden ein jeder leicht durch die Vergleichung finden.

§. 50.

Um nun die Art der Berechnung der Leibrenten genauer zu beschreiben, und zuvörderst die dabey vorkommenden Fälle vestzusetzen; so sind bey der § 45 angeführten und hier vor allen andern zu erörternden Frage entweder die Umstände so beschaffen, daß die Rente ein Jahr nach dem Tage der Erlegung der Mise gehoben zu werden anfängt, oder es wird die Mise früher bezahlt. Im ersten Falle erhalten ferner entweder

bloß

bloß die am Ende jedes Jahres noch lebenden Rentenirer die Rente, oder es bekommen auch die Erben der in dem verflossenen Jahre verstorbenen Rentenirer einem dem Leben derselben in diesem Jahre proportionirten Theil der Rente. Im andern Falle findet zwar dieser Unterschied auch statt, allein es kömmt überdem auch noch darauf an, ob entweder bloß durch die auf einmal zu erlegende Mise, oder ausser der Mise auch durch Beyträge, die in festgesetzten Terminen bis ein Jahr vor dem Anfange der Rente bezahlt werden, die Rente erkauft wird. Alle diese Fälle sollen nun nach und nach auf die Art betrachtet werden, daß das pr. C., nach welchem der Entrepreneur den Rentenirern die Mise und im vorkommenden Falle auch die erlegten Beyträge verzinset, 5 sey. Für ein anderes pr. C. die Rechnung abzuändern, erfordert wenig, und was dazu nöthig ist, kann einem jeden aus der Zinsrechnung bekannt seyn. Gleichwohl wird es unten kurz berührt werden.

§. 51.

Wenn also

1. die Mise berechnet werden soll, die jemand zu erlegen hat, um ein Jahr nach der Erlegung der Mise zum ersten Male und dann jedes Jahr, an dessen Ende er noch lebt, eine bestimmte Rente zu erhalten; so muß man theils nach der Sterblich-

keitsordnung für Rentenirer, theils nach der doppelten Rabattrechnung die Werthe aller der Hoffnungen berechnen, die er hat, am Ende jedes der folgenden Jahre noch zu leben, und zwar für die Rente, welche er verlangt, und alle diese Werthe zusammen addiren.

Gesetzt, ein 90jähriger wollte sich eine Leibrente zu 100 Rthlr. erkaufen, und man sollte die von ihm zu erlegende Mise finden; so wäre die Hoffnung, die er hätte zu erreichen

das Jahr			jetzt werth
— 91ste	—	—	$\frac{50}{80} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20}{21}$
— 92 -	—	—	$\frac{28}{80} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^2}{21^2}$
— 93 -	—	—	$\frac{14}{80} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^3}{21^3}$
— 94 -	—	—	$\frac{6}{80} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^4}{21^4}$
— 95 -	—	—	$\frac{3}{80} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^5}{21^5}$
— 96 -	—	—	$\frac{1}{80} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^6}{21^6}$
— 97 -	—	—	0

Um diese Werthe entwickelt zu finden, kann man zuvörderst suchen

$$50 \times \frac{20}{21} = 47,61904$$

$$28 \times \frac{20^2}{21^2} = 25,39681$$

$$14 \times \frac{20^3}{21^3} = 12,09371$$

$$6 \times \frac{20^4}{21^4} = 4,93621$$

$$3 \times \frac{20^5}{21^5} = 2,35057$$

$$1 \times \frac{20^6}{21^6} = 0,74621, \text{ ferner}$$

die Summe hievon = 93,14255; darauf diese Summe mit 100 multipliciren, wodurch man 9314,255 erhält, und endlich dieses Product durch 80 als den gemeinschaftlichen Nenner aller bisher entwickelten und summirten Zähler dividiren, welches

$\frac{9314,255}{80} = 116,4282$ Rthlr giebt.

§. 52.

Hat man auf diese Art die Mise für eine Rente für ein bestimmtes Alter gefunden, so kann man daraus die Mise für dieselbe Rente aber für ein um ein Jahr von dem angenommenen verschiedenes Alter sehr leicht finden. Ist nemlich a die Mise für einen um ein Jahr jüngern Rentenirer zu finden; so multiplicirt man die Summe aus der bereits gefundenen Mise und der Rente eines Jahres mit $\frac{20}{21}$ und der Wahrscheinlichkeitszahl für die Hoffnung des jüngern Rentenirers nach Einem Jahre noch zu leben. Da ein 90jähriger eine Leibrente à 100 Rthlr nach dem vorhergehenden § mit 116,4282 Rthlr zu bezahlen hat; so erhält man die Mise, welche ein 89jähriger für eine eben so grosse Rente bezahlen muß, *wenn man*

zu der Mise des 90jährigen oder 116,4282 Rthlr

die Rente eines Jahres 100 Rthlr addirt,

und die Summe 216,4282 Rthlr zuvörderst mit $\frac{20}{21}$ und darauf noch mit $\frac{80}{117}$ multiplicirt; denn die Wahrscheinlichkeit, welche der 89jährige hat, nach Einem Jahre noch zu leben, ist $\frac{80}{117}$, wie aus der Sterblichkeitsordnung für Rentenirer erhellet. Da nun

L. 216,4282	=	2,3353139	
L. $\frac{20}{21}$	= —	1,9788107	und
L. 80	=	1,9030900	und
die Summe hievon	=	4,2172146;	ferner
L. 117	=	2,0681859,	und seine
Differenz von S.	=	2,1490287	= L. 140,938 ist;

so ist

$$216{,}4282 \text{ Rthlr} \times \frac{20}{21} \times \frac{80}{117} = 140{,}938 \text{ Rthlr}$$

und

und dies ist die Mise, die ein 89jähriger für eine Leibrente à 100 Rthlr. zu entrichten hat.

§. 53.

Um sich von der Richtigkeit der hier gegebenen und befolgten Regel zu überzeugen, überlege man folgendes. Wollte man die Mise, die ein 89jähriger Rentenirer zu bezahlen hätte, auf eben die Art berechnen, als vorhin mit der Rente des 90jährigen geschehen; so wäre die Hoffnung, die der 89jährige hätte, zu erreichen

das Jahr			jetzt werth
— 90ste	—	—	$\frac{80}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20}{21}$
— 91 -	—	—	$\frac{50}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^2}{21^2}$
— 92 -	—	—	$\frac{28}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^3}{21^3}$
— 93 -	—	—	$\frac{14}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^4}{21^4}$
— 94 -	—	—	$\frac{6}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^5}{21^5}$
— 95 -	—	—	$\frac{3}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^6}{21^6}$
— 96 -	—	—	$\frac{1}{117} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^7}{21^7}$
— 97 -	—	—	0

 Alle

Alle diese Werthe ergeben sich aber aus den Werthen § 51, wenn man 100 Rthlr dazu setzt, und eine jede Zahl nun mit $\frac{20}{21}$ und $\frac{80}{117}$ multiplicirt, indem auf diese Art

aus		entsteht
100 Rthlr		$\frac{80}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20}{21}$
$\frac{40}{80} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20}{21}$		$\frac{50}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^2}{21^2}$
$\frac{28}{80} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^2}{21^2}$		$\frac{28}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^3}{21^3}$
$\frac{14}{80} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^3}{21^3}$	$\times \frac{20}{21} \times \frac{80}{117}$	$\frac{14}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^4}{21^4}$
$\frac{6}{80} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^4}{21^4}$		$\frac{6}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^5}{21^5}$
$\frac{3}{80} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^5}{21^5}$		$\frac{3}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^6}{21^6}$
$\frac{1}{80} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^6}{21^6}$		$\frac{1}{117} \times 100\,\text{Rthlr} \times \frac{20^7}{21^7}$

§. 54.

Sollte nunmehr auch die Mise, die ein 88jähriger für eine Leibrente à 100 Rthlr zu bezahlen hat, berechnet werden, so fände man dieselbe, wenn man

zu der Mise des 89jährigen oder 140,938 Rthlr

die Rente eines Jahres oder 100 Rthlr addirte, und

die Summe davon 240,938 Rthlr zuvör-

derst

derst mit $\frac{20}{21}$ und dann mit $\frac{117}{159}$ multiplicirte, weil $\frac{117}{159}$ anzeigt, mit was für einer Wahrscheinlichkeit der 88jährige hoffen könne, nach einem Jahre noch zu leben. Da nun

$$
\begin{array}{rl}
\text{L.}\,240{,}938 = & 2{,}3819054 \\
\text{L.}\,\frac{20}{21} = & -1{,}9788107 \text{ und} \\
\text{L.}\,117 = & \underline{2{,}0681859} \text{ und} \\
\text{die Summe hievon} = & 4{,}4289020, \text{ ferner} \\
\text{L.}\,159 = & \underline{2{,}2013972}, \text{ und seine} \\
\text{Differenz v. vorig. S.} = & 2{,}2275048 = \text{L.}\,168{,}851 \text{ ist;}
\end{array}
$$

so ist

$$240{,}938 \text{ Rthl} \times \frac{20}{21} \times \frac{117}{159} = 168{,}851 \text{ Rthl}$$

und dies ist die Mise, die ein 88jähriger für eine Leibrente à 100 Rthl zu bezahlen hat.

§. 55.

Auf eine ähnliche Art kann man weiter fortgehen, und nach und nach die Mise für einen 87jährigen, 86jährigen, 85jährigen u. s. w. bis für einen einjährigen berechnen.

§. 56.

Ist nun aber

b (§ 52) die Mise für einen um Ein Jahr ältern Rentenirer zu finden; so dividirt man die bereits gefundene Mise mit $\frac{20}{21}$ und der Wahrscheinlichkeitszahl für die Hoffnung des Rentenirers, dessen Mise bereits gefunden worden, nach einem

Jahre noch zu leben, und zieht von dem Quotienten die Rente eines Jahres ab. Da ein 90jähriger eine Leibrente à 100 Rthl. nach § 51 mit 116,4282 Rthl. erkaufen muß; so erhält man die Mise, welche ein 91jähriger für eine eben so grosse Rente zu bezahlen hat, wenn man die Mise des 90jährigen oder 116,4282 Rthl. mit $\frac{20}{21}$ und $\frac{50}{80}$ dividirt, oder, indem das eben dasselbe ist, mit $\frac{21}{20}$ und $\frac{80}{50}$ multiplicirt, und von dem kommenden 100 Rthl. abzieht. Da nun

$$
\begin{aligned}
\text{L. } 116{,}4282 &= 2{,}0650581 \\
\text{L. } \tfrac{21}{20} &= 0{,}0211893 \\
\text{L. } 80 &= 1{,}9030900 \text{ und} \\
\hline
\text{die Summe hievon} &= 3{,}9893374, \text{ ferner} \\
\text{L. } 50 &= 1{,}6989700 \text{ und seine} \\
\hline
\text{Differenz v. vorig. S.} &= 2{,}2903674 = \text{L. } 195{,}149 \text{ ist;}
\end{aligned}
$$

so ist

$$116{,}4282 \text{ Rthl.} \times \tfrac{21}{20} \times \tfrac{80}{50} - 100 \text{ Rthl.} = 95{,}149 \text{ Rthl.}$$

und dies ist die Mise für einen 91jährigen Rentenirer zu einer Rente à 100 Rthl.

§. 57.

Um sich von der Richtigkeit dieser Regel zu überzeugen, kann man einen dem in § 53 ähnlichen Weg einschlagen. Wollte man nemlich die Mise eines 91jährigen für eine Leibrente à 100 Rthl. nach § 51 finden, so hätte derselbe

für

Für sein Jahr			an den Entrepreneur zu bezahlen
— 92stes	—	—	$\frac{28}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20}{21}$
— 93 -	—	—	$\frac{14}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^2}{21^2}$
— 94 -	—	—	$\frac{6}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^3}{21^3}$
— 95 -	—	—	$\frac{3}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^4}{21^4}$
— 96 -	—	—	$\frac{1}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^5}{21^5}$
— 97 -	—	—	0

Alle diese Werthe aber ergeben sich aus den Werthen § 51, wenn man einen jeden derselben mit $\frac{20}{21}$ und $\frac{50}{80}$ dividirt, oder mit $\frac{21}{20}$ und $\frac{80}{50}$ multiplicirt, und darauf 100 Rthlr. abzieht, indem

$$
\begin{array}{c}
\text{aus} \\
\left.\begin{array}{l}
\frac{50}{80} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20}{21} \\[6pt]
\frac{28}{80} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^2}{21^2} \\[6pt]
\frac{14}{80} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^3}{21^3} \\[6pt]
\frac{6}{80} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^4}{21^4} \\[6pt]
\frac{3}{80} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^5}{21^5} \\[6pt]
\frac{1}{80} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^6}{21^6}
\end{array}\right\}
\end{array}
\times \frac{21}{20} \times \frac{80}{50}
\begin{array}{c}
\text{entsteht} \\
\left\{\begin{array}{l}
100 \text{ Rthlr.} \\[6pt]
\frac{28}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20}{21} \\[6pt]
\frac{14}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^2}{21^2} \\[6pt]
\frac{6}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^3}{21^3} \\[6pt]
\frac{3}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^4}{21^4} \\[6pt]
\frac{1}{50} \times 100 \text{ Rthlr.} \times \frac{20^5}{21^5}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

und zieht man hievon 100 Rthl ab, so bleiben übrig

$$\tfrac{28}{50} \times 100 \text{ Rthl} \times \frac{20}{21}$$

$$\tfrac{14}{50} \times 100 \text{ Rthl} \times \frac{20^2}{21^2}$$

$$\tfrac{6}{50} \times 100 \text{ Rthl} \times \frac{20^3}{21^3}$$

$$\tfrac{2}{50} \times 100 \text{ Rthl} \times \frac{20^4}{21^4}$$

$$\tfrac{1}{50} \times 100 \text{ Rthl} \times \frac{20^5}{21^5}$$

§. 58.

Auf eine ähnliche Art kann man nun aus der Mise eines 91jährigen die Mise eines 92jährigen u. s. w. und überhaupt wenn man die Mise für irgend ein Alter gefunden hat, die Mise für ein um Ein Jahr höheres Alter finden.

§. 59.

Soll aber

2. (§ 51) die Mise berechnet werden, die jemand zu erlegen hat, um ein Jahr nach der Erlegung der Mise zum ersten Male und dann jedes Jahr, an dessen Ende er noch lebt, eine bestimmte Rente zu erhalten, und ausserdem für das Jahr, in welchem er stirbt, seinen Erben die halbe Rente zu versichern;

sichern; so fällt in die Augen, daß diese Mise aus zwey Theilen bestehe. Der eine Theil ist der, welchen der Rentenirer für die Rente, die er selbst ziehen will, zu geben hat, und der andere der, welchen er für die halbe Rente, die seinen Erben nach seinem Tode bezahlt werden soll, entrichten muß. Wie der erste Theil gefunden werde, ist bereits gezeigt worden; den andern zu finden, berechnet man für die halbe Rente, die er seinen Erben versichern will, theils nach der Sterblichkeitsordnung für Rentenirer, theils nach der doppelten Rabattrechnung die Werthe aller Hoffnungen, die er hat, am Ende jedes der folgenden Jahre nicht mehr zu leben, und zieht dieselben in Eine Summe zusammen. Sucht man hierauf die Summe der beyden Theile, so erhält man die gesuchte Mise ganz.

§. 60.

Um den beschriebenen zweyten Theil, den man die Rente für verstorbene Rentenirer nennen kann, für einen 90jährigen Rentenirer z. B., und zwar zu der Hälfte einer Leibrente à 100 Rthlr oder zu 50 Rthlr zu finden, müßte man also rechnen. Die Hoffnung, die ein 90jähriger Rentenirer hat, nicht mehr zu leben.

am Ende des Jahrs			ist jetzt werth
90sten	—	—	$\frac{30}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20}{21}$
91 -	—	—	$\frac{22}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20^2}{21^2}$
92 -	—	—	$\frac{14}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20^3}{21^3}$
93 -	—	—	$\frac{8}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20^4}{21^4}$
94 -	—	—	$\frac{3}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20^5}{21^5}$
95 -	—	—	$\frac{2}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20^6}{21^6}$
96 -	—	—	$\frac{1}{80} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20^7}{21^7}$
97 -	—	—	0

Ferner müßte man, um alle diese Werthe zu entwickeln, zuvörderst suchen

$$30 \times \frac{20}{21} = 28,5714$$

$$22 \times \frac{20^2}{21^2} = 20,8950$$

$$14 \times \frac{20^3}{21^3} = 12,0937$$

$$8 \times \frac{20^4}{21^4} = 6,5816$$

$$3 \times \frac{20^5}{21^5} = 2,3505$$

$$2 \times \frac{20^6}{21^6} = 1,4924$$

$$1 \times \frac{20^7}{21^7} = 0,7106,$$ und dann die

Summe hievon $= 72,6952$, welche darauf mit 50 zu multipliciren und mit 80 zu dividiren wäre. So erhält man

$$\frac{72,6952 \times 50}{80} = 9,0869 \times 5 = 45,4345$$ und

45,4345 Rk ist die gesuchte Summe.

§. 61.

Hat man die Mise für die Rente für verstorbene Rentenirer für ein bestimmtes Alter gefunden, so läßt sich daraus die Mise für dieselbe Rente, aber für ein um ein Jahr von dem vorhergehenden verschiedenes Alter auf eine leichte Art finden. Ist nemlich

a diese

a diese Mise für einen um ein Jahr jüngern Rentenirer zu suchen, so multiplicirt man das doppelte der bereits gefundenen Mise mit dem Nenner der Wahrscheinlichkeitszahl des ältern Rentenirers ein Jahr nach dem Einkaufe nicht mehr zu leben, addirt darauf zu diesem Producte den Zähler derselben Wahrscheinlichkeitszahl des jüngern Rentenirers, so viel mal genommen, als die Rente für die lebenden Rentenirer die Einheit enthält, multiplicirt die Summe mit $\frac{20}{21}$, und dividirt dies Product durch den doppelt genommenen Nenner der gedachten Wahrscheinlichkeitszahl des jüngern Rentenirers. Da ein 90jähriger eine Rente für verstorbene Rentenirer à 50 Rl. nach dem vorhergehenden § mit 45,4345 Rl. zu bezahlen hat; so findet man nach dieser Regel die Mise, welche ein 89jähriger für dieselbe zu erlegen hat, wenn man die Mise des 90jährigen oder 45,4345 Rl.

multiplicirt mit 2

90,8690 Rl., so wie

dies doppelte mit 80

7269,5200; ferner

hiezu addirt 3700

und die Summe 10969,52 mit $\frac{20}{21}$ multiplicirt, und mit 2 . 117 dividirt. Da nun

L. 109

L. 109,6952 = 4,0391875
L. $\frac{20}{21}$ = − 1,9788107 also
die Summe hievon = 4,0179982, ferner
L. 2.117 = L. 234 = 2,3692159 und

dieser letzten Log. Diff. = 1,6487823 = L. 44,5433; so ist 44,5433 Rthl die Mise, die ein 89jähriger Rentenirer für die Rente für verstorbene Rentenirer, die Rente für die lebenden à 100 Rthl gerechnet, zu erlegen hat.

§. 62.

Von der Richtigkeit dieses Verfahrens kann man sich wieder auf eine der im § 53 ähnlichen Art überzeugen. Wollte man nemlich die im vorhergehenden § gefundene Mise ohne die § 61 angeführte Regel finden; so wäre die Hoffnung des 89jährigen nicht mehr zu leben

am Ende des Jahrs	jetzt werth
— 89 — —	$\frac{37}{117} \times 50$ Rthl $\times \frac{20}{21}$
— 90 — —	$\frac{30}{117} \times 50$ Rthl $\times \frac{20^2}{21^2}$
— 91 — —	$\frac{22}{117} \times 50$ Rthl $\times \frac{20^3}{21^3}$
— 92 — —	$\frac{14}{117} \times 50$ Rthl $\times \frac{20^4}{21^4}$
— 93 — —	$\frac{8}{117} \times 50$ Rthl $\times \frac{20^5}{21^5}$

am Ende des Jahrs			jetzt werth
—	94	— —	$\frac{3}{117} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^6}{21^6}$
—	95	— —	$\frac{2}{117} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^7}{21^7}$
—	96	— —	$\frac{1}{117} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^8}{21^8}$
—	97	— —	0

Alle diese Werthe aber ergeben sich aus den Werthen § 60, wenn man diese mit 80 multiplicirt, darauf 37×50 Rthl. hinzusetzt, und nun einen jeden mit $\frac{20}{21}$ multiplicirt, und darauf durch 117 dividirt. Denn

$$
\begin{array}{ccc}
\text{aus} & & \text{entsteht} \\
\left.\begin{array}{l}
\frac{30}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20}{21} \\[2ex]
\frac{22}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^2}{21^2} \\[2ex]
\frac{14}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^3}{21^3} \\[2ex]
\frac{8}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^4}{21^4} \\[2ex]
\frac{3}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^5}{21^5} \\[2ex]
\frac{2}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^6}{21^6} \\[2ex]
\frac{1}{80} \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^7}{21^7}
\end{array}\right\}
& \times 80 &
\left\{\begin{array}{l}
30 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20}{20} \\[2ex]
22 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^2}{21^2} \\[2ex]
14 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^3}{21^3} \\[2ex]
8 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^4}{21^4} \\[2ex]
3 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^5}{21^5} \\[2ex]
2 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^6}{21^6} \\[2ex]
1 \times 50\ \text{Rthl.} \times \frac{20^7}{21^7}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

so

so wie hieraus durch Hinzusetzung von 37×50 Rthl., durch die Multiplication dieses Zusatzes und des übrigen mit $\frac{20}{21}$ und durch die Division mit 117 die zu Anfange dieses § angeführte Werthe. Nimmt man nun die Werthe $\frac{30}{86} \times 50$ Rthl. $\times \frac{20}{21}$ u. s. f. alle doppelt, und bey dem Zusatze von 37×50 Rthl. auch an statt 50 Rthl. das doppelte oder die Rente für lebende Rentenirer, dividirt aber dagegen auch mit 2.117 anstatt mit 117; so fällt in die Augen, daß dadurch in dem gesuchten Resultate nichts geändert werde.

§. 63.

Aus § 62 ergiebt sich, daß man die Regel § 61 auch auf folgende Art ausdrücken könne.

Man multiplicire die bereits gefundene Mise mit dem Nenner der Wahrscheinlichkeitszahl des ältern Rentenirers ein Jahr nach dem Einkaufe nicht mehr zu leben, addire dazu die Rente für verstorbene Rentenirer mit dem Zähler derselben Wahrscheinlichkeitszahl des jüngern Rentenirers multiplicirt, multiplicire diese Summe mit $\frac{20}{21}$ und dividire das kommende durch den Nenner der gedachten Wahrscheinlichkeitszahl des jüngern Rentenirers.

§. 64.

Um auch diese Regel mit Einem Beyspiele zu erläutern, so sey aus der Mise eines 89jährigen für verstorbene Rentenirer dieselbe Mise für einen 88jährigen zu berechnen. Hier ist

die Mise des 89jährigen oder 44,5433
zu multipliciren mit 117

3118031
445433
445433

5211,5661
dazu zu addiren 2100, = 42 × 50

7311,5661,
dies mit $\frac{20}{21}$ zu multipliciren
woraus 146231,322 : 21 oder
6963,396 entsteht. Endlich dividire man mit 159

2606080 | 43,794
35155
1257
563
211
1

Es ist also die Mise, die ein 88jähriger Rentenirer für die Rente für Verstorbene, die Rente für lebende Rentenirer à 100 Rthlr gerechnet, zu erlegen hat, 43,794 Rthlr.

§. 65.

Ist nun aber

b (§ 61) die Mise für verstorbene Rentenirer für einen um ein Jahr ältern Rentenirer zu finden; so müsmultiplicirt man die Mise des jüngern Rentenirers mit dem Nenner der Wahrscheinlichkeitszahl dieses jüngern Rentenirers ein Jahr nach dem Einkaufe nicht mehr zu leben, dividirt darauf durch den Nenner derselben Wahrscheinlichkeitszahl des ältern Rentenirers, multiplicirt das gefundene mit $\frac{21}{20}$, und zieht von diesem Producte die Rente für verstorbene Rentenirer mit dem Zähler der gedachten Wahrscheinlichkeitszahl des jüngern Rentenirers multiplicirt, und den Nenner derselben Wahrscheinlichkeitszahl des ältern Rentenirers dividirt, ab.

§. 66.

Es sey z. B. aus der Mise eines 88jährigen Rentenirers die Mise eines 89jährigen für verstorbene Rentenirer zu suchen; so ist die Mise des 88jährigen, die gedachte Rente zu 50 Rthlr gerechnet,

$= 43{,}794\frac{142}{159}$, dies multiplicirt
mit 159 so kommt

117) 6963395, | und dies dividirt durch
14108 2(3 |
11576 | 59,516. Nun ist
2611(2
11

$59{,}516 \times \frac{21}{20} = 62{,}4918$, und davon
abgezogen $\frac{42 \times 50}{117} = 17{,}948$ so erhält man
44,5438 Rthlr zur Mise,
und diese ist dieselbe, als § 64 und 61 vorgekommen.

§. 67.

Wenn eine Leibrente auf die Art errichtet würde, daß jeder der Rentenirer, so lange er am Ende eines Jahres von der Erlegung der Mise an gerechnet, lebte, 100 Rthl., seine Erben aber am Ende seines Sterbejahrs einen der Zeit, welche er in diesem Jahre noch gelebt, proportionirten Theil der Rente erhalten sollten; und es sollte dann die Mise berechnet werden, die bey einem bestimmten Alter zu bezahlen wäre: so wäre die Rechnung von der § 59 — 66 erklärten nicht verschieden, indem man, da man nicht wüßte, ob der Rentenirer bald nach dem Anfange oder in der Mitte, oder kurz vor dem Ende eines Rentenjahrs sterben würde, um etwas gewisses zu haben, annehmen müßte, daß er in der Mitte desselben sterben werde. Dies kann um so viel eher geschehen, da bey einer Leibrente eine Menge Theilnehmer seyn müssen, wovon aller Wahrscheinlichkeit nach ein Theil vor und ein anderer Theil nach der Mitte der Rentenjahre stirbt; so daß es, wenn die vorhin gedachte Bedingung in Ansehung der Rente für verstorbene Rentenirer statt findet, für den Entrepreneur eben so viel ist, als ob ein jeder gerade in der Mitte eines Rentenjahrs stürbe.

§. 68.

Da die Berechnung der Mise für eine Leibrente, wenn gleich nicht eben mit Schwierigkeit verbunden, doch weitläuftig ist, und gleichwohl öfters vorkommen kann;

so

so hat allerdings derjenige, der häufig mit der Bestimmung dieser Mise zu thun hat, sich nach Tabellen umzusehen, wodurch er sich diese Arbeit erleichtern könne. **Vollständige Tabellen also, welche man bey der Berechnung der Misen für Leibrenten mit Nutzen gebrauchen kann**, erhält man, wenn man zuvörderst die Mise für den ältesten Rentenirer berechnet, und daraus durch Befolgung der Regeln § 52 und 61 nach und nach die Misen für alle jüngere Rentenirer sucht. Am vortheilhaftesten ist es dabey, wenn man die Rente für lebende Rentenirer 1, und die für verstorbene $\frac{1}{2}$ setzt, und in der Tabelle die Mise für jene von der Mise für diese abgesondert läßt. Auf diese Art ist die am Ende angehängte 7te Tabelle eingerichtet, deren Gebrauch sogleich beschrieben werden soll.

§. 69.

Will man vermittelst einer solchen Tabelle die Mise für ein bestimmtes Alter und bestimmte Rente finden; so nimmt man aus der Tabelle die Zahlen, die neben dem gegebenen Alter stehen, und multiplicirt dieselben mit der bestimmten Rente. Will man bloß die Mise für die Rente für lebende Rentenirer haben; so nimmt man von den gedachten Zahlen nur die erste; will man selbige bloß für die Rente für verstorbene Rentenirer suchen, so nimmt man die andere Zahl allein: will man aber die Mise, so wie sie § 59 angenommen ward, finden, so nimmt man beyde Zahlen, addirt sie, und verrichtet darauf an dieser Summe die beschriebene Multiplication.

§. 70.

Würde z. B. die Frage aufgeworfen, wie viel ein 60jähriger für eine Rente à 500 Rthl. zu erlegen hätte; so erhielte man nach dem angeführten aus der Tabelle die Zahlen

$$8,92307 + 0,263456.$$

Wollte er nun bloß die Rente für lebende Rentenirer genießen; so müßte er bezahlen

$$8,92307 \times 500 \text{ Rthl.} = 4461,535 \text{ Rthl.}$$

Wollte er hingegen seinen Erben die Rente für verstorbene versichern, so müßte er geben

$$0,263456 \times 500 \text{ Rthl.} = 131,728 \text{ Rthl.}$$

Wollte er endlich sich beydes erkaufen, so müßte er erlegen

$$\left.\begin{matrix} 8,92307 \\ 0,263456 \end{matrix}\right\} \times 500 \text{ Rthl.} = 4593,263 \text{ Rthl.}$$

§. 71.

Sollten so wohl einzelne Fälle als ganze Tabellen für ein anderes pr. C. berechnet werden; so bliebe alles bisherige bis auf die Zahlen $\frac{20}{21}$ und $\frac{21}{20}$ unverändert. Man müßte nemlich alsdann

bey

bey	$4\frac{1}{2}$	pr. C.	statt	$\frac{20}{21}$	setzen	$\frac{200}{209}$
—	4	—	—	$\frac{20}{21}$	—	$\frac{25}{26}$
—	$3\frac{1}{2}$	—	—	$\frac{20}{21}$	—	$\frac{200}{207}$
—	3	—	—	$\frac{20}{21}$	—	$\frac{100}{103}$
—	$2\frac{1}{2}$	—	—	$\frac{20}{21}$	—	$\frac{40}{41}$
—	2	—	—	$\frac{20}{21}$	—	$\frac{50}{51}$, so wie
—	$4\frac{1}{2}$	pr. C.	statt	$\frac{21}{20}$	setzen	$\frac{209}{200}$
—	4	—	—	$\frac{21}{20}$	—	$\frac{26}{25}$
—	$3\frac{1}{2}$	—	—	$\frac{21}{20}$	—	$\frac{207}{200}$
—	3	—	—	$\frac{21}{20}$	—	$\frac{103}{100}$
—	$2\frac{1}{2}$	—	—	$\frac{21}{20}$	—	$\frac{41}{40}$
—	2	—	—	$\frac{21}{20}$	—	$\frac{51}{50}$.

§. 72.

Bisher ist immer vorausgesetzt worden, nicht nur daß die ganze Mise auf einmal, sondern auch, daß dieselbe gerade Ein Jahr vor dem Anfange der Rente bezahlt werde. Sollte nun zwar die ganze Mise auf einmal aber entweder früher oder später als ein Jahr vor dem Anfange der Rente erlegt werden; so fällt in die Augen, daß dadurch auch die Mise verändert werden werde. Indeß kann nach einer kleinen Veränderung der Aufgabe alles bisher vorgeschriebene zuvörderst befolgt werden, und am Ende ist dann nur noch eine Anwendung der doppelten Rabatt- oder Zinsrechnung nöthig

§. 73.

Wollte sich z. B. ein 58jähriger eine Leibrente à 500 Rthl. kaufen, so doch, daß diese Rente 3 Jahr nach Erlegung der Mise erst ihren Anfang nähme; so wäre dies eben so viel, als ob er die Mise für eine gleiche Leibrente für einen 60jährigen, aber 2 Jahr früher als gewöhnlich, bezahlen wollte. Da nun ein 60jähriger für eine Rente à 500 Rthl. 4593$\frac{1}{4}$ Rthl. zu erlegen hätte § 70, so wäre die von dem 58jährigen zu erlegende Mise der jetzige Werth von 4593$\frac{1}{4}$ Rthl., die nach 2 Jahren fällig wären, welchen zu finden in der Rabattrechnung gezeigt worden ist.

§. 74.

Wollte und könnte hingegen ein 60$\frac{1}{2}$jähriger $\frac{1}{2}$ Jahr vor dem Anfange einer Rente sich noch eine Rente à 500 Rthl. erkaufen; so wäre er als ein 60jähriger zu betrachten, der aber ausser der Mise auch den halbjährigen Zins derselben zu erlegen hätte, und hier ist die nöthige Rechnung noch weniger mit Schwierigkeit verbunden.

§. 75.

Ich komme nun zu der Betrachtung des Falls, da man die Rente ausser der Mise durch Beyträge, die in vestgesetzten Terminen bis ein Jahr vor dem Anfange der Rente bezahlt werden, erkauft. Hier soll das zum Grunde liegende pr. C. ebenfalls 5 seyn, und die Termine, in welchen die Beyträge entrichtet werden,

jähr=

jährliche. **Entweder** ist nun hier ausser der Rente auch das Verhältniß der zu erlegenden Mise gegen den jährlichen Beytrag bestimmt, und dann wird der jährliche Beytrag und die Mise zugleich gesucht; **oder** es ist ausser der Rente der jährliche Beytrag gegeben, und dann muß die Mise gefunden werden. Mit dem Tode des Rentenirers hören übrigens auch die Beyträge auf, wenn derselbe früher als ein Jahr vor dem Anfange der Rente stirbt.

§. 76.

Um von dem Falle anzufangen, **wenn ausser der Rente auch das Verhältniß der sogleich zu erlegenden Mise zum jährlichen Beytrage bestimmt ist, und also der jährliche Beytrag** und die Mise zugleich **gefunden werden sollen;** so sey die Mise 6 Jahr vor dem Anfange, der Rente zu erlegen, und darauf bis ein Jahr vor diesem Anfange hier aber noch zum letztenmal ein jährlicher Beytrag zu geben, der den 4ten Theil der Mise ausmache. Die Rente sey 1 und der Rentenirer, um zuvörderst einem einzeln Fall vorzunehmen bey Erlegung der Mise 84 Jahr alt. Rechnet man nun hier nach dem Grundsatze, daß bey Rechnungen, die auf Wahrscheinlichkeiten beruhen, so gerechnet werden müsse, daß, wenn alles nach den zum Grunde gelegten Regeln der Wahrscheinlichkeit zutrift, auf keiner Seite Nachtheil oder Vortheil sich finde; so hat der Rentenirer zu bezahlen,

len, erstlich die Mise, und zwar 6 Jahr vor dem Anfange der Rente, und ausserdem auch, wenn er lebt, jedes der folgenden 5 Jahre den bestimmten Beytrag. Um alles dies in eine Summe zu bringen, so bezahlt er

in seinem Jahre,		von der Mise		und dies ist jetzt werth
84sten		1		1
85 —	—	$\frac{327}{404} \times \frac{1}{4}$	—	$\frac{327}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20}{21}$
86 —	—	$\frac{261}{404} \times \frac{1}{4}$	—	$\frac{261}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^2}{21^2}$
87 —	—	$\frac{206}{404} \times \frac{1}{4}$	—	$\frac{206}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^3}{21^3}$
88 —	—	$\frac{159}{404} \times \frac{1}{4}$	—	$\frac{159}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^4}{21^4}$
89 —	—	$\frac{117}{404} \times \frac{1}{4}$	—	$\frac{117}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^5}{21^5}$

und dagegen bekommt er, wenn er sich die Rente für Lebende und verstorbene Rentenirer kauft

in seinem Jahre	die Summe	der Rente welche jetzt werth ist
90sten	$\frac{80}{404}+\frac{37}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{80}{404}+\frac{37}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^6}{21^6}$
91 -	$\frac{50}{404}+\frac{30}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{50}{404}+\frac{30}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^7}{21^7}$
92 -	$\frac{28}{404}+\frac{22}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{28}{404}+\frac{22}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^8}{21^8}$
93 -	$\frac{14}{404}+\frac{14}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{14}{404}+\frac{14}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^9}{21^9}$
94 -	$\frac{6}{404}+\frac{8}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{6}{404}+\frac{8}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^{10}}{21^{10}}$
95 -	$\frac{3}{404}+\frac{3}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{3}{404}+\frac{3}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^{11}}{21^{11}}$
96 -	$\frac{1}{404}+\frac{2}{404}\times\frac{1}{2}$	$-(\frac{1}{404}+\frac{2}{404}\times\frac{1}{2}\times\frac{20^{12}}{21^{12}}$
97 -	$\frac{1}{404}\times\frac{1}{2}$	$-\quad(\frac{1}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^{13}}{21^{13}}$

Es muß also die Mise, wenn man sie mit $(1+\frac{327}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20}{21}+\frac{261}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^2}{21^2}+\frac{206}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^3}{21^3}+\frac{159}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^4}{21^4}+\frac{117}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^5}{21^5})$ multiplicirt, eben so viel betragen, als die Rente multiplicirt mit $(\frac{80}{404}+\frac{37}{404}\times\frac{1}{2})\times\frac{20^6}{21^6}+(\frac{50}{404}+\frac{30}{404}\times\frac{1}{2})\frac{20^7}{21^7}+(\frac{28}{404}+\frac{22}{404}\times\frac{1}{2})$

$\times\frac{20^8}{21^8}$

$\times \frac{20^8}{21^8} + (\frac{14}{404} + \frac{14}{404} \times \frac{1}{2}) \times \frac{20^9}{21^9} + (\frac{6}{404} + \frac{8}{404} \times \frac{1}{2}) \times \frac{20^{10}}{21^{10}} + (\frac{3}{404} + \frac{3}{404} \times \frac{1}{2}) \times \frac{20^{11}}{21^{11}} + (\frac{1}{404} + \frac{2}{404} \times \frac{1}{2}) \times \frac{20^{12}}{21^{12}} + \frac{1}{404} \times \frac{1}{2} \times \frac{20^{13}}{21^{13}})$ ausmacht; und man erhält also die Mise durch die Entwickelung dieses Ausdrucks

$$\left.\begin{array}{r}
(\frac{80}{404}+\frac{37}{404})\times\frac{20^6}{21^6}\\
+(\frac{50}{404}+\frac{30}{404})\times\frac{20^7}{21^7}\\
+(\frac{28}{404}+\frac{22}{404})\times\frac{20^8}{21^8}\\
+(\frac{14}{404}+\frac{14}{404})\times\frac{20^9}{21^9}\\
+(\frac{6}{404}+\frac{8}{404})\times\frac{20^{10}}{21^{10}}\\
+(\frac{3}{404}+\frac{3}{404})\times\frac{20^{11}}{21^{11}}\\
+(\frac{1}{404}+\frac{2}{404})\times\frac{20^{12}}{21^{12}}\\
+\frac{1}{404}\times\frac{20^{13}}{21^{13}}
\end{array}\right\} \text{dividirt durch} \left\{\begin{array}{l}
1\\
+\frac{327}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20}{21}\\
+\frac{261}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^2}{21^2}\\
+\frac{206}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^3}{21^3}\\
+\frac{159}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^4}{21^4}\\
+\frac{117}{404}\times\frac{1}{4}\times\frac{20^5}{21^5}
\end{array}\right.$$

§. 77.

Betrachtet man nun den hier vorkommenden Dividendus genau, und vergleicht man ihn insbesondere mit den

den § 53 und 62 betrachteten Summen, so fällt in die Augen, daß man denselben aus diesen Summen erhalte, wenn man darin 1. statt 100 und $\frac{1}{2}$ statt 50 setzt und überdem alles mit 117 multiplicirt, das kommende mit 404 dividirt, und nun alles noch mit $\frac{20^5}{21^5}$ multiplicirt. Hiernach ist es sehr leicht, diesen Dividendus zu entwickeln, indem man dazu nur die Mise eines 89jährigen für eine Rente auf lebende so wohl als verstorbene Rentenirer à 1, die man nun auch aus der dazu verfertigten Tabelle nehmen kann, mit 117 zu multipliciren das kommende mit 404 zu dividiren, und diesen Quotienten darauf mit $\frac{20^5}{21^5}$ zu multipliciren hat. Was aber den Divisor anbetrifft, so ist eine ähnliche Entwickelung desselben ebenfalls möglich, es muß aber dieselbe zuvor mit ihren Gründen gelehrt werden.

§. 78.

Wenn also ein 84jähriger Rentenirer sich eine Leibrente auf lebende Rentenirer allein à 1 erkaufen wollte; so hätte er nach § 50 f. jetzt dafür zu entrichten

$$\frac{327}{404} \times \frac{20}{21}$$

$$+ \frac{261}{404} \times \frac{20^2}{21^2}$$

$$+ \frac{206}{404} \times \frac{20^3}{21^3}$$

$$+ \frac{159}{404}$$

$$+ \frac{159}{404} \times \frac{20^4}{21^4}$$

$$+ \frac{117}{404} \times \frac{20^5}{21^5}$$

$$+ \frac{80}{404} \times \frac{20^6}{21^6}$$

$$+ \frac{50}{404} \times \frac{20^7}{21^7}$$

$$+ \frac{28}{404} \times \frac{20^8}{21^8}$$

$$+ \frac{14}{404} \times \frac{20^9}{21^9}$$

$$+ \frac{6}{404} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$$

$$+ \frac{3}{404} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$$

$$+ \frac{1}{404} \times \frac{20^{12}}{21^{12}},$$ und die entwickelte Summe hievon läßt sich aus Tabelle 7 sogleich finden. Multiplicirt man nun aber die 5 ersten von diesen summirenden Zahlen mit $\frac{1}{4}$, und setzt darauf 1 hinzu, so hat man den § 76 vorkommenden Divisor; den man also erhalten würde, wenn man von der Mise eines 84jährigen für eine Leibrente für die lebenden Rentenirer allein die Summe der hier vorkommenden 7 letzten summirenden Zah=

Zahlen abzöge, den Rest mit 4 dividirte, und zu dem Quotienten 1 setzte. Erinnert man sich nun hier an das § 53 vorkommende, so wird es nicht schwer halten, sich davon zu überzeugen, daß man eben dasselbe erhalte, wenn man die Mise eines 90jährigen Rentenirers für eine Leibrente auf die lebenden Rentenirer à 1 mit 117 multiplicirt, durch 404 dagegen dividirt, und das kommende wieder mit $\frac{20^5}{21^5}$ multiplicirt. Denn aus

der gedachten Mise des 90jährigen	nach innen stehenden verändert	wird
$\frac{80}{117} \times \frac{20}{21}$	multiplicirt mit	$\frac{80}{404} \times \frac{20^6}{21^6}$
$\frac{50}{117} \times \frac{20^2}{21^2}$	117	$\frac{50}{404} \times \frac{20^7}{21^7}$
$\frac{28}{117} \times \frac{20^3}{21^3}$	darauf dividirt mit	$\frac{28}{404} \times \frac{20^8}{21^8}$
$\frac{14}{117} \times \frac{20^4}{21^4}$	404 und nun	$\frac{14}{404} \times \frac{20^9}{21^9}$
$\frac{6}{117} \times \frac{20^5}{21^5}$	wieder multiplicirt	$\frac{6}{404} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$
$\frac{3}{117} \times \frac{20^6}{21^6}$	mit	$\frac{3}{404} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$
$\frac{1}{117} \times \frac{20^7}{21^7}$	$\frac{20^5}{21^5}$	$\frac{1}{404} \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$

Hiernach läßt sich also auch der § 76 vorkommende Divi-

sor

sor ohne grosse Weitläuftigkeit entwickeln, und wenn das geschehen ist, die gesuchte Mise durch die noch nöthige Division leicht finden.

§. 79.

Wenn die Mise gefunden ist, so ist die Findung des jährlichen Beytrags, da das Verhältniß desselben zu der Mise bestimmt ist, ohne Schwierigkeit daraus herzuleiten.

§. 80.

Man nenne nun das Alter des Rentenirers zur Zeit der Erlegung der Mise sein **gegenwärtiges Alter**, sein Alter ferner zu der Zeit, da er den jährlichen Beytrag zum letzten Male erlegt, **das Alter zur Zeit des letzten Beytrags**, die Wahrscheinlichkeitszahl für die Hoffnung bey dem gegenwärtigen Alter nach einem Jahre noch zu leben, **die erste**, und die gleiche Wahrscheinlichkeitszahl bey dem Alter zur Zeit des letzten Beytrags **die zweyte Wahrscheinlichkeitszahl**, und endlich die Anzahl der Jahre, da er Beyträge geben muß, und welche ein Jahr weniger sind als die Zeit, welche er vor dem Anfange der Rente die Mise erlegt, **die Zahl der Zwischenjahre.** Alsdann läßt sich die hier zu befolgende Regel auf folgende Art ausdrucken.

Man findet die Mise in dem § 76 beschriebenen Falle, wenn man zuvörderst die Mise des Rentenirers für sein Alter zur Zeit des letzten Beytrags

zu

zu einer Rente auf lebende Rentenirer so wohl als auf verstorbene mit dem Nenner seiner zweyten Wahrscheinlichkeitszahl multiplicirt, dies Product durch den Nenner der ersten Wahrscheinlichkeitszahl dividirt, das kommende wieder mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität des Exponentens der Zahl der Zwischenjahre multiplicirt, und dies Product als einen Dividendus anmerkt; ferner die Mise eines Rentenirers für das Alter des letzten Beytrags zu einer Rente auf lebende Rentenirer allein auf eben die Art behandelt, das gefundene von der Mise eines Rentenirers für das gegenwärtige Alter abzieht, den Rest durch die Zahl multiplicirt, welche das Verhältniß des jährlichen Beytrags zur Mise anzeigt, dazu 1 setzt, und mit dem erhaltenen den vorhingefundenen Dividendus dividirt.

§. 81.

Sollten die Beyträge jedesmal ein Jahr voraus, und also der erste mit der Mise zugleich erlegt werden; so liesse sich die Berechnung dieses Falles sehr leicht auf den vorhergehenden zurückführen. Man dürfte nemlich alsdann nur vorher den ersten Beytrag mit der Mise zusammen genommen, als die Mise ansehen, und darauf die nun statt findende Verhältnißzahl des jährlichen Beytrags zu dieser Mise suchen. In dem betrachteten Exempel wäre z. B. alsdann die Mise $1\frac{1}{4}$ und der Beytrag $\frac{1}{4}$, das heißt, der Beytrag wäre nun von der Mise $\frac{1}{5}$; und so in andern Fällen auf eine ähnliche Art.

§. 82.

Ist nun aber zum andern (§ 76 und 75) **der jährliche Beytrag bestimmt, und also die Mise zu suchen, und dabey die Bedingung, daß der Beytrag jedesmal voraus bezahlt werden solle;** so kann folgendes Beyspiel die hier nöthige Verfahrungsart lehren. Gesetzt, ein 84jähriger *wollte sich eine Leibrente kaufen*, die er in seinem 90sten Jahre, also 6 Jahre nach Erlegung des ersten Beytrags zum erstenmale höbe, die Rente sollte gleich 1 seyn; ferner wollte er jährlich $\frac{1}{4}$ beytragen, und zwar vorausbezahlend: und es würde gefragt, was er dabey für eine Mise zu erlegen habe? so bezahlte er, um hier wieder nach den § 76 angeführten Gründen zu rechnen, an den Entrepreneur

1. Die Mise, die aber jetzt noch unbekannt ist,

2. den jährlichen Beytrag, und zwar

zum 1ten Male gewiß, und gleich, also $\frac{1}{4}$

— 2 - $\frac{327}{404} \times \frac{1}{4}$ nach 1 Jahre $\frac{327}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20}{21}$

— 3 - $\frac{261}{404} \times \frac{1}{4}$ — 2 — $\frac{261}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^2}{21^2}$

zum

zum 4ten Male $\frac{206}{404} \times \frac{1}{4}$ nach 3 Jahren $\frac{206}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^3}{21^3}$

— 5 - — $\frac{159}{404} \times \frac{1}{4}$ — 4 — $\frac{159}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^4}{21^4}$

— 6 - — $\frac{117}{404} \times \frac{1}{4}$ — 5 — $\frac{117}{404} \times \frac{1}{4} \times \frac{20^5}{21^5}$

Dagegen aber erhielte er von dem Entrepreneur

nach Jahren	die Summe	welche jetzt werth ist
6	$\frac{80}{404} + \frac{37}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{80}{404} + \frac{37}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^6}{21^6}$
7	$\frac{50}{404} + \frac{30}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{50}{404} + \frac{30}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^7}{21^7}$
8	$\frac{28}{404} + \frac{22}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{28}{404} + \frac{22}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^8}{21^8}$
9	$\frac{14}{404} + \frac{14}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{14}{404} + \frac{14}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^9}{21^9}$
10	$\frac{6}{404} + \frac{8}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{6}{404} + \frac{8}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$
11	$\frac{3}{404} + \frac{3}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{3}{404} + \frac{3}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$
12	$\frac{1}{404} + \frac{2}{404} \times \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{404} + \frac{2}{404} \times \frac{1}{2}\right) \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$
13	— $\frac{1}{404} \times \frac{1}{2}$	— $\frac{1}{404} \times \frac{1}{2} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$

und was er an den Entrepreneur bezahlte, müßte dem, was er von demselben erhielte, gleich seyn.

Zöge man also das, was er an jährlichen Beyträgen gäbe, von dem was ihm der Entrepreneur zu bezahlen hätte, ab, so würde man in dem Reste die gesuchte Mise erhalten.

§. 83.

Man multiplicirt also hier zuvörderst die Mise eines Rentenirers zu einer Rente auf die lebenden und verstorbenen Rentenirer für das Alter zur Zeit des letzten Beytrags mit dem Nenner der zweyten Wahrscheinlichkeitszahl, dividirt dies Product durch den Nenner der ersten Wahrscheinlichkeitszahl, und multiplicirt das kommende wieder mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität des Exponenten der Zwischenjahre; ferner multiplicirt man die Mise eines Rentenirers für das Alter zur Zeit des letzten Beytrags, aber allein auf lebende Rentenirer ebenfalls mit dem Nenner der zweyten Wahrscheinlichkeitszahl, dividirt dies Product auch durch den Nenner der ersten Wahrscheinlichkeitszahl, und multiplicirt wieder den kommenden Quotienten mit $\frac{20}{21}$ in der Dignität des Exponenten der Zahl der Zwischenjahre, zieht darauf das gefundene von der Mise zu einer gleichen Rente aber für das gegenwärtige Alter ab, addirt dazu 1, und multiplicirt alles mit dem verabredeten Beytrage. Die Differenz

renz zwischen diesem und dem vorhergehenden giebt die gesuchte Mise an die Hand.

§. 84.

Sollte gar keine Mise erlegt, sondern die ganze Rente bloß durch jährliche Beyträge, die aber alsdann ebenfalls immer ein Jahr voraus bezahlt würden, erkauft werden; so wäre dieser Fall leicht auf den § 76 betrachteten zurück zu führen, wenn man den ersten Beytrag als die Mise betrachtete, und die folgenden allein als Beyträge ansähe. In diesem Falle wäre also nicht bloß die Mise, sondern auch ein jeder Beytrag das Ganze, welches gesucht und im nöthigen Falle durch 1 ausgedruckt werden müßte. Erläuterung dieser Regel an einem Beyspiele ist hoffentlich nicht erforderlich.

§. 85.

Bisher ist immer die Mise gesucht worden, und die Rente war gegeben. Umgekehrt kann nun auch die Mise gegeben und die Rente zu suchen seyn. Da aber, wenn das Alter des Rentenirers dasselbe bleibt, und eben so in den übrigen Umständen keine Veränderung vorgeht, die Rente mit der Mise, und umgekehrt, und zwar in der vollkommensten Uebereinstimmung, sich ändert, so daß zu einer zwey- drey- viermal so grossen Rente u. s. w. auch eine zwey- drey- viermal so grosse Mise gehört, und umgekehrt; so können bey diesem Falle die bisherigen Aus-

 rech-

rechnungen zum Grunde gelegt werden, und dann komm es bloß auf nochmalige Anwendung der einfachen Regel de tri an. Weiß man nemlich die Mise zu einer bestimmten Rente für ein gewisses Alter, so kann man, wenn man aus einer andern Mise die zu eben dem Alter und unter eben den Umständen gehörige Rente finden will, schliessen: So wie sich die bekannte Mise zur bekannten Rente verhält, so verhält sich die gegebene Mise zur gesuchten Rente.

§. 86.

Wollte man z. B. wissen, wie viel ein 90jähriger unter den § 51 oder 59 angenommenen Bedingungen für 1000 Rthl. Mise an jährlicher Rente erhalten könne, so wäre nach dem vorhergehenden § und unter den Bedingungen des 51sten §.

1,642827 : 1 = 1000 Rthl. : 858,8982 Rthl.

und also 858,8982 Rthl. die gesuchte Rente. Fänden aber die Bedingungen des 59ten § statt, so wäre

1,6159117 : 1 = 1000 Rthl. : 618,89 Rthl.

und also 618,89 Rthl. die nunmehrige Rente.

§. 87.

Für die Mise 1 und die Bedingungen, die § 51 — 71 statt fanden, kann man die Renten für lebende so wohl allein als auch für lebende und verstorbene Rentenirer zugleich, und zwar für alle Alter aus einer Tabelle wie die

am

am Ende befindliche 7te ist, sehr leicht nach § 85 und 86 berechnen. Alsdann erhält man die 8te Tabelle, wovon hier nur zu bemerken ist, daß wenn man die Rente für lebende Rentenirer allein sucht, solche durch die ersten Zahlen in der Tabelle erhalten werden; dahingegen man die Rente auf lebende und verstorbene Rentenirer zugleich finde, wenn man die zweyte Zahl von der nebenstehenden ersten abzieht. Uebrigens ist der Gebrauch dieser Tabelle mit gehöriger Veränderung eben der, der von der 7ten § 69 gelehret worden ist.

§. 88.

Es lassen sich Fälle gedenken, wobey die Beantwortung der Frage erforderlich ist: **Wie lange jemand warten müsse, der mit einer kleinern Mise, als erfordert wird, sich gleichwohl eine bestimmte Rente kaufen will?** Um das hier nöthige Verfahren für die Bedingungen des § 51 oder 59sten § an einem Beyspiele zu zeigen; so soll ein 43jähriger Rentenirer sich eine Rente à 100 Rthl. mit 1000 Rthl. erkaufen, und die dabey erforderliche Zeit warten wollen, und gefragt werden: wie lange er warten müsse? Man findet diese Zeit durch eine Betrachtung wie die folgende. Wenn sich ein 43jähriger eine Leibrente à 100 Rthl. kaufen will, so hat er bey den Bedingungen des 51sten § 1293,079 Rthl. zu bezahlen, und muß also, wenn er nur 1000 Rthl. erlegt, noch warten. Wartet er nun

Jahre		so hätte er zu geben		und sein Geld ist durch den Zins gewachsen zu
1	—	1273,870 Rthlr	—	1050 Rthlr
2	—	1253,971 Rthlr	—	1102,5 Rthlr
3	—	1233,340 Rthlr	—	1157,625 Rthlr
4	—	1211,932 Rthlr	—	1215,506 Rthlr.

Nach vier Jahren ist also sein Geld, das er als Mise erlegt, durch den Zins so hoch angewachsen, daß es der Summe, die er dann braucht, um sich die verlangte Leibrente zu kaufen, gleich ist, und fünf Jahr nach der Erlegung der Mise geht also für ihn die Rente an.

Durch Vergleichung der 7ten *Tabelle mit einer wie* § 90 des 1ten Abschnitts im 1ten Theile beschrieben worden, gelangt man also hier sehr leicht zu seinem Endzwecke.

§. 89.

Nunmehr ist noch übrig, die Fälle zu betrachten, wo der Rentenirer nicht aus einer Person besteht. Dergleichen giebt es verschiedene; und da dieselben nicht bloß erdichtet sind, sondern wirklich und oft sich ereignen, so muß von ihnen, selbst mit einiger Ausführlichkeit, geredet werden, und das soll daher nach und nach in den folgenden §§ geschehen.

§. 90.

Zuvörderst also sey der Fall, daß sich zwey Personen, der eine 90 und der andere 80 Jahr alt eine Rente

kau=

kaufen wollen, die so lange dauren soll, als beyde am Leben sind, und es werde gefragt, wie viel zur Mise gegeben werden müsse, wenn die Rente 10 Rthlr ist?

Hier ist die Wahrscheinlichkeit, daß

nach Jahren		d. 90jährige		d. 80jährige		beyde
1	—	$\frac{50}{80}$	—	$\frac{697}{812}$	—	$\frac{50}{80} \times \frac{697}{812}$
2	—	$\frac{28}{80}$	—	$\frac{590}{812}$	—	$\frac{28}{80} \times \frac{590}{812}$
3	—	$\frac{14}{80}$	—	$\frac{492}{812}$	—	$\frac{14}{80} \times \frac{492}{812}$
4	—	$\frac{6}{80}$	—	$\frac{404}{812}$	—	$\frac{6}{80} \times \frac{404}{812}$
5	—	$\frac{3}{80}$	—	$\frac{327}{812}$	—	$\frac{3}{80} \times \frac{327}{812}$
6	—	$\frac{1}{80}$	—	$\frac{261}{812}$	—	$\frac{1}{80} \times \frac{261}{812}$;

und es muß also zur Mise erlegt werden

$$\frac{50}{89} \times \frac{697}{812} \times \frac{20}{21} \times 10 \text{ Rthlr}$$

$$\frac{28}{80} \times \frac{590}{812} \times \frac{20^2}{21^2} \times 10 \text{ Rthlr}$$

$$\frac{14}{80} \times \frac{492}{812} \times \frac{20^3}{21^3} \times 10 \text{ Rthlr}$$

$$\frac{6}{80} \times \frac{404}{812} \times \frac{20^4}{21^4} \times 10 \text{ Rthlr}$$

$$\frac{3}{80} \times \frac{327}{812} \times \frac{20^5}{21^5} \times 10 \text{ Rthlr}$$

$$\frac{1}{80} \times \frac{261}{812} \times \frac{20^6}{21^6} \times 10 \text{ Rthlr.}$$

Entwickelt man dieses, indem man zuvörderst

$$50 \times 697 \times \frac{20}{21}$$

$$28 \times 590 \times \frac{20^2}{21^2}$$

$$14 \times 492 \times \frac{20^3}{21^3}$$

$$6 \times 404 \times \frac{20^4}{21^4}$$

$$3 \times 327 \times \frac{20^5}{21^5}$$

$$1 \times 261 \times \frac{20^6}{21^6}$$

entwickelt, die Summe davon sucht, dieselbe mit 10 multiplicirt, und das kommende Product durch 80×812 dividirt, so erhält man für die gesuchte Mise 7,1984 Rthl.

§. 91.

Wenn sich mehr als zwey Personen unter ähnlichen Bedingungen eine Leibrente kaufen wollen, so ist das Verfahren dabey, wenn man sich an den 35ten § des 5ten Abschnitts erinnert, aus dem vorhergehenden § leicht abzunehmen, daher ich mich dabey auch nicht verweilen will. Uebrigens fällt sehr leicht in die Augen, daß bey einerley Mise die Rente hier desto grösser ausfallen müsse, je mehrere Personen zusammen treten, und umgekehrt.

§. 92.

§. 92.

Zum andern sey die Mise zu einer Leibrente à 10 Rthlr für einen 90jährigen und 80jährigen zu finden, welche die Rente so lange ziehen wollen, als von ihnen beyden noch einer lebt.

Aus §37 des vorhergehenden Abschnittes ist bekannt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß von den beyden angeführten Personen wenigstens Einer noch lebe

nach Jahren		sey
1	—	$\frac{50}{80} + \frac{697}{812} - \frac{50}{80} \times \frac{697}{812}$
2	—	$\frac{28}{80} + \frac{590}{812} - \frac{28}{80} \times \frac{590}{812}$
3	—	$\frac{14}{80} + \frac{492}{812} - \frac{14}{80} \times \frac{492}{812}$
4	—	$\frac{6}{80} + \frac{404}{812} - \frac{6}{80} \times \frac{404}{812}$
5	—	$\frac{3}{80} + \frac{327}{812} - \frac{3}{80} \times \frac{327}{812}$
6	—	$\frac{1}{80} + \frac{261}{812} - \frac{1}{80} \times \frac{261}{812}$
7	— —	$\frac{206}{812}$ — — —
8	— —	$\frac{159}{812}$ — — —
9	— —	$\frac{117}{812}$ — — —
10	— —	$\frac{80}{812}$ — — —
11	— —	$\frac{50}{812}$ — — —
12	— —	$\frac{28}{812}$ — — —
13	— —	$\frac{14}{812}$ — — —
14	— —	$\frac{6}{812}$ — — —
15	— —	$\frac{3}{812}$ — — —
16	— —	$\frac{1}{812}$ — — —

Es

Es muß daher von ihnen für die gedachte Rente jetzt gegeben werden

$$\tfrac{50}{80}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20}{21}+\tfrac{597}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20}{21}-\tfrac{50}{80}\times\tfrac{597}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20}{21}$$

$$\tfrac{28}{80}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^2}{21^2},+\tfrac{520}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^2}{21^2},-\tfrac{28}{80}\times\tfrac{520}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^2}{21^2}$$

$$\tfrac{14}{80}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^3}{21^3},+\tfrac{492}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^3}{21^3},-\tfrac{14}{80}\times\tfrac{492}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^3}{21^3}$$

$$\tfrac{6}{80}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^4}{21^4}+\tfrac{404}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^4}{21^4}-\tfrac{6}{80}\times\tfrac{404}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^4}{21^4}$$

$$\tfrac{3}{80}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^5}{21^5},+\tfrac{327}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^5}{21^5},-\tfrac{3}{80}\times\tfrac{327}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^5}{21^5}$$

$$\tfrac{1}{80}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^6}{21^6}+\tfrac{261}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^6}{21^6}-\tfrac{1}{80}\times\tfrac{261}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^6}{21^6}$$

$$\tfrac{206}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^7}{21^7}$$

$$\tfrac{159}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^8}{21^8}$$

$$\tfrac{117}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^9}{21^9}$$

$$\tfrac{80}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^{10}}{21^{10}}$$

$$\tfrac{50}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^{11}}{21^{11}}$$

$$\tfrac{28}{812}\times 10\,\text{Rt.}\times\frac{20^{12}}{21^{12}}$$

$\tfrac{14}{812}\times$

$$\frac{14}{812} \times 10\ \text{Rthl.} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$$

$$\frac{6}{812} \times 10\ \text{Rthl.} \times \frac{20^{14}}{21^{14}}$$

$$\frac{6}{812} \times 10\ \text{Rthl.} \times \frac{20^{15}}{21^{15}}$$

$$\frac{3}{812} \times 10\ \text{Rthl.} \times \frac{20^{16}}{21^{16}}$$

$$\frac{1}{812} \times 10\ \text{Rthl.} \times \frac{20^{17}}{21^{17}}$$

Betrachtet man die durch die Zeichen + und — getrennten drey Verticalreihen, so sieht man bald, daß die Summe der ersten die Mise für einen 90jährigen, die Summe der andern die Mise für einen 80jährigen, und der dritten die Mise für einen 90 und 80jährigen, so lange beyde noch am Leben sind, zu einer Leibrente à 10 Rthl. sey.

In diesem Falle hat man also, um die gesuchte Mise zu finden, nur nöthig die Misen, welche beyde geben müßten, wenn sich ein jeder allein eine gleich grosse Rente kaufen wollte, zu addiren, und von der Summe die Mise für eine eben so grosse Rente auf beyder verbundenes Leben abzuziehen.

§. 93.

Bey einerley Rente wird hier eine desto grössere Mise erfordert, je mehr Personen zusammen die Rente kaufen,

kaufen, so wie auch zwey Personen schon mehr geben müssen, als eine einzige. Umgekehrt folgt daraus, daß bey einerley Mise die Rente desto kleiner werden müsse, je mehr Personen sich dieselbe in Gesellschaft kaufen.

§. 94.

Endlich muß auch der Fall noch berührt werden, wenn eine Leibrente gekauft werden soll, die erst nach dem Tode einer bestimmten Person angehet. Stirbt dabey der Rentenirer früher als diese Person, so bezahlt der Entrepreneur nichts.

Es kaufe sich auf diese Art ein 80jähriger eine Rente à 10 Rthl. auf den Tod eines 90jährigen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß

nach Jahren		der 80jährige lebe		der 90jährige tod sey		beydes statt finde
1	—	$\frac{697}{812}$	—	$1 - \frac{50}{80}$	—	$\frac{697}{812} - \frac{697}{812} \times \frac{50}{80}$
2	—	$\frac{590}{812}$	—	$1 - \frac{28}{80}$	—	$\frac{590}{812} - \frac{590}{812} \times \frac{28}{80}$
3	—	$\frac{492}{812}$	—	$1 - \frac{14}{80}$	—	$\frac{492}{812} - \frac{492}{812} \times \frac{14}{80}$
4	—	$\frac{404}{812}$	—	$1 - \frac{6}{80}$	—	$\frac{404}{812} - \frac{404}{812} \times \frac{6}{80}$
5	—	$\frac{327}{812}$	—	$1 - \frac{3}{80}$	—	$\frac{327}{812} - \frac{327}{812} \times \frac{3}{80}$
6	—	$\frac{261}{812}$	—	$1 - \frac{1}{80}$	—	$\frac{261}{812} - \frac{261}{812} \times \frac{1}{80}$
7	—	$\frac{206}{812}$	—	1 — 0	—	$\frac{206}{812}$ — — —
8	—	$\frac{159}{812}$	—	1 —	—	$\frac{159}{812}$ — — —
9	—	$\frac{117}{812}$	—	1 —	—	$\frac{117}{812}$ — — —
10	—	$\frac{80}{812}$	—	1 —	—	$\frac{80}{812}$ — — —
11	—	$\frac{50}{812}$	—	1 —	—	$\frac{50}{812}$ — — —

12	—	$\frac{28}{812}$	—	1	—	—	$\frac{28}{812}$	—	—	—
13	—	$\frac{14}{812}$	—	1	—	—	$\frac{14}{812}$	—	—	—
14	—	$\frac{6}{812}$	—	1	—	—	$\frac{6}{812}$	—	—	—
15	—	$\frac{3}{812}$	—	1	—	—	$\frac{3}{812}$	—	—	—
16	—	$\frac{1}{812}$	—	1	—	—	$\frac{1}{812}$	—	—	—

Es muß also jetzt bezahlt werden

$$\frac{697}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20}{21} - \frac{697}{812} \times \frac{50}{80} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20}{21}$$

$$+ \frac{590}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^2}{21^2} - \frac{590}{812} \times \frac{28}{80} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^2}{21^2}$$

$$+ \frac{492}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^3}{21^3} - \frac{492}{812} \times \frac{14}{80} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^3}{21^3}$$

$$+ \frac{404}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^4}{21^4} - \frac{404}{812} \times \frac{6}{80} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^4}{21^4}$$

$$+ \frac{327}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^5}{21^5} - \frac{327}{812} \times \frac{3}{80} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^5}{21^5}$$

$$+ \frac{261}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^6}{21^6} - \frac{261}{812} \times \frac{1}{80} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^6}{21^6}$$

$$+ \frac{206}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^7}{21^7}$$

$$+ \frac{159}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^8}{21^8}$$

$$+ \frac{117}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^9}{21^9}$$

$$+ \frac{80}{812} \times 10\,\text{Rh} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$$

$+ \frac{50}{812}$

$$+ \frac{50}{812} \times 10\,\mathrm{Rt} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$$

$$+ \frac{28}{812} \times 10\,\mathrm{Rt} \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$$

$$+ \frac{14}{812} \times 10\,\mathrm{Rt} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$$

$$+ \frac{6}{812} \times 10\,\mathrm{Rt} \times \frac{20^{14}}{21^{14}}$$

$$+ \frac{3}{812} \times 10\,\mathrm{Rt} \times \frac{20^{15}}{21^{15}}$$

$$+ \frac{1}{812} \times 10\,\mathrm{Rt} \times \frac{20^{16}}{21^{16}}.$$

Hieraus läßt sich sehr leicht eine ähnliche Regel ableiten, als am Ende des 92sten § da gewesen ist. Es werden indeß mehrere Fälle von dieser Art in dem folgenden Abschnitte betrachtet werden.

§. 95.

Es könnte die Betrachtung der § 89 f. enthaltenen Fälle leicht erweitert werden, wenn dabey auch auf die Verschiedenheiten gesehen würde, die bey dem ersten und wichtigsten Falle in Anschlag gebracht worden sind. Hoffentlich aber wird das gesagte hinreichen, um den, der weiter gehen will, in den Stand zu setzen, den bisherigen Weg selbst weiter zu verfolgen.

§. 96.

§. 96.

Da der Weg der Leibrenten öfters von Staaten erwählt wird, um Geldsummen zu erhalten, die nach und nach wieder abgetragen werden sollen, und dabey sich oft manches besondere findet, welches dem, der bloß nach theoretischen Regeln urtheilt, auffallend ist; so muß billig auch darüber eins und das andere gesagt werden. Da es mir aber besser dünkt, hievon ganz am Ende dieses Abschnitts zu reden, so verweise ich den, der darüber weitern Unterricht verlangt, an diesen Ort.

Die Weitläuftigkeit, welche sich bey der gegenwärtigen Betrachtung findet, wird übrigens dem nicht auffallend seyn, der die Natur der Leibrenten sorgfältig überdacht hat. Daß insbesondere keine kürzern Wege der Rechnung vorgeschlagen sind, rührt daher, weil die von manchen genommenen kürzern Wege zu einem ganz falschen Ziele führen, und Richtigkeit doch nur das erste, und Kürze nur dann das wichtigste bey Rechnungen ist, wenn jene nicht beeinträchtiget wird.

4. Von den Tontinen.

§. 97.

Was man unter einer Tontine so wohl überhaupt als unter der einfachen und zusammengesetzten Tontine insbesondere zu verstehen habe, ist bereits § 3 und 4 erklärt worden. Ihren Namen hat die Tontine von Lorenz

Tonti, einem Neapolitaner von Geburt, der im 17ten Jahrhunderte lebte, ohngeachtet er nicht der eigentliche Erfinder davon ist.

§. 98.

Bey einer Tontine fängt des Tontinarius Verbindlichkeit bey und mit dem Empfange der Misen an, und hört mit dem Tode des letzten Tontinisten auf; das Recht des Tontinisten aber an den Tontinarius wird durch des Tontinisten Tod aufgehoben, obgleich der Tontinarius daher nur bey der zusammengesetzten Tontine Vortheil erhält. Es verhält sich nemlich mit der Tontine auf folgende Art. Es tritt eine Gesellschaft von Personen zusammen, und erlegt eine gewisse Summe, welche der Tontinarius unter der Bedingung empfängt, daß er dieselbe mit dem verabredeten Zinse von jetzt an bis zum Tode des letzten Tontinisten, und zwar in den verabredeten Terminen und in gleichen Summen wieder bezahlen wolle. So lange also irgend einer von den Tontinisten lebt, muß der Tontinarius die bestimmte Summe auszahlen. Diese theilen die jedesmal lebenden Tontinisten unter sich, die Erben der verstorbenen Tontinisten aber erhalten nichts. Bey der einfachen Tontine ist es für den Tontinarius gleich viel, ob mehrere von den Tontinisten früh oder spät sterben, wenn nur der letzte zur angenommenen Zeit ein Opfer des Todes wird.

§. 99.

§. 99.

Bey einer zusammengesetzten Tontine wird ein Theil der Mise als die Mise zu einer Leibrente angesehen, und von diesem Theile sagt man, daß er nach dem Tode des Tontinisten erlösche, oder dem Tontinarius anheim falle. Bey einer solchen zusammengesetzten Tontine hat also der Tontinarius von dem frühen Tode der Tontinisten, wenn auch noch andere leben, immer Vortheil, denn es verhält sich mit dem gedachten Theile völlig, wie bey den Leibrenten, und je weniger Tontinisten also leben, desto weniger hat auch der Tontinarius zu bezahlen.

§. 100.

Wenn die Personen, die zusammen eine Tontinengesellschaft errichten, in ihrem Alter sehr verschieden wären, so würden offenbar, da bey der Bestimmung der Rente nicht auf das Alter eines jeden insbesondere, sondern nur auf die möglich längste Dauer der Gesellschaft gesehen wird, und also die Grösse der Rente bey verschiedenen Tontinisten von Einer Tontine nur nach der Mise sich richtet, die ältern Tontinisten zum Vortheil der jüngern beeinträchtiget werden. Sollte aber die Mise nach dem Alter eines jeden berechnet werden, so würden daraus zu grosse Unbequemlichkeiten und Weitläuftigkeiten entstehen, und es pflegt daher bey Tontinen auch folgendes gewöhnlich zu seyn.

§. 101.

Man errichtet mehrere Classen, und rechnet

zu der	die alt sind	und nimmt an, daß alle gestorben seyn werden
1ten —	von 0 bis 5 Jahr	nach 90 Jahren
2 - — —	5 — 10	— — — 85 —
3 - — —	10 — 15	— — — 80 —
4 - — —	15 — 20	— — — 75 —
5 - — —	20 — 25	— — — 70 —
6 - — —	25 — 30	— — — 65 —
7 - — —	30 — 35	— — — 60 —
8 - — —	35 — 40	— — — 55 —
9 - — —	40 — 45	— — — 50 —
10 - — —	45 — 50	— — — 45 —
11 - — —	50 — 55	— — — 40 —
12 - — —	55 — 60	— — — 35 —
13 - — —	60 — 65	— — — 30 —
14 - — —	65 — 70	— — — 25 —
15 - — —	70 — 75	— — — 20 —

§. 102.

So bald man dieses weiß, ist die Berechnung der Tontinen sehr leicht, indem sich alles nach dem bereits er=

klärten

klärten finden läßt. Ist von einer einfachen Tontine die Rede, und will man wissen, wie viel der Tontinarius jedes Jahr an eine bestimmte Classe der Tontinisten zu bezahlen habe; so ist weiter nichts zu thun, als bey gegebener Mise und der Zeit einer Jahrrente die Rente zu suchen. Gesetzt z. B. daß 100 Tontinisten zwischen 20 und 25 Jahren jeder 100 Rthl. erlegten, und 5 pr. C. gerechnet würde; so fände man die Antwort auf obige Frage durch Beantwortung von dieser. Wie viel muß man jedes Jahr bezahlen, um 100 × 100 Rthl. oder 10000 Rthl. zu 5 pr. C. in 70 Jahren abzutragen? Hätte man dieses gefunden, und wollte man darauf den Theil eines Tontinisten beym Anfange der Tontine haben; so dürfte man nur davon den 100sten Theil nehmen.

§. 103.

Ist aber von einer zusammengesetzten Tontine die Rede; so sucht man von dem Theile der Mise, der mit dem Tode des Tontinarius erlöschen soll, die Leibrente, und von dem übrigen die Rente in einer Tontine, und addirt beyde gefundene Summen zu einander.

§. 104.

Hier will ich aus Süßmilchs göttlicher Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts 2 Th. einige Tabellen, die Tontinen betreffend, mittheilen.

Leibrenten in einer einfachen Tontine. Der Einsatz oder Preis einer Actie sind 300 Livres.

Alter	Die Zeit, wie lange die ganze Rente von jeder Classe bezahlt wird.	Zum 20sten Pfennig, oder zu 5 pr. Cent wird jede Actie bezahlt mit			Zum 16ten Pfennig, oder $6\frac{1}{4}$ pr. C.		
		Livres	S	D.	L.	S.	D.
von 0 — 5 J.	90	15	3	9	18	16	6
5 — 10	85	15	4	9	18	17	3
10 — 15	80	15	6	3	18	18	0
15 — 20	75	15	8	0	18	19	0
20 — 25	70	15	10	3	19	0	6
25 — 30	65	15	13	3	19	2	6
30 — 35	60	15	17	0	19	5	0
35 — 40	55	16	1	9	19	8	9
40 — 45	50	16	8	6	19	14	0
45 — 50	45	16	17	6	20	1	3
50 — 55	40	17	9	9	20	11	3
55 — 60	35	18	16	6	21	6	0
60 — 65	30	19	10	3	22	7	6
65 — 70	25	21	6	0	24	0	6
70 — 75	20	24	1	6	26	13	9

Leibrenten in einer zusammengesetzten Tontine, wovon die eine Hälfte mit dem Tode eines jeden Rentenirers erlischt. Der Einsatz ist 300 Liv.

Alter.	Die Zinsen zum 20sten Pfennig oder 5 pr. C.								
	Die Hälfte in blossen Leibrenten muß bringen.			Die Hälfte einer Actie in den einfachen Tontinen geben.			Totale, was eine Actie in der zusammengesetzten Tontine geben muß.		
	L.	S.	D.	L.	S	D.	L.	S.	D.
von 0 — 5	9	12	9	7	11	10	17	4	8
5 — 10	9	5	3	7	12	$4\frac{1}{2}$	16	17	8
10 — 15	9	5	6	7	13	$1\frac{1}{2}$	16	18	8
15 — 20	9	10	$1\frac{1}{2}$	7	14	0	17	4	2
20 — 25	9	14	3	7	15	$1\frac{1}{2}$	17	9	5
25 — 30	9	19	0	7	16	$7\frac{1}{2}$	17	15	8
30 — 35	10	5	0	7	18	6	18	3	6
35 — 40	10	13	3	8	0	$10\frac{1}{2}$	18	14	2
40 — 45	11	6	6	8	4	3	19	10	9
45 — 50	12	5	6	8	8	9	20	14	3
50 — 55	13	9	3	8	14	$10\frac{1}{2}$	22	4	2
55 — 60	15	0	$4\frac{1}{2}$	9	3	3	24	3	8
60 — 65	17	4	6	9	15	$1\frac{1}{2}$	26	19	8
65 — 70	20	15	6	10	13	0	31	18	6
70 — 75	25	13	9	12	0	9	37	14	6

Leibrenten in einer zusammengesetzten Tontine wovon die eine Hälfte mit dem Tode eines jeden Rentenirers erlöscht. Der Einsatz ist 300 Livres.

Alter	Die Zinsen zum 16ten Pfennig, oder $6\frac{1}{4}$ pr. C.								
	Die Hälfte in blossen Leibrenten giebt			Die Hälfte in der einfachen Tontine giebt			Das Totale von beyden.		
	L.	S.	D.	L.	S.	D.	L.	S.	D.
von 0 — 5	11	10	3	9	8	3	20	18	6
5 — 10	11	0	$10\frac{1}{2}$	9	8	$7\frac{1}{2}$	20	9	6
10 — 15	11	0	3	9	9	0	20	9	3
15 — 20	11	4	6	9	9	6	20	14	0
20 — 25	11	8	6	9	10	3	20	18	9
25 — 30	11	12	9	9	11	3	21	4	0
30 — 35	11	18	3	9	12	6	21	10	9
35 — 40	12	5	6	9	14	$4\frac{1}{2}$	21	19	11
40 — 45	12	18	$1\frac{1}{2}$	9	17	0	22	15	2
45 — 50	13	17	0	10	0	$7\frac{1}{2}$	23	17	8
50 — 55	15	0	$10\frac{1}{2}$	10	5	$7\frac{1}{2}$	25	6	6
55 — 60	16	11	0	10	13	0	27	4	0
60 — 65	18	16	0	11	3	9	29	19	9
65 — 70	22	7	$1\frac{1}{2}$	12	0	3	34	7	5
70 — 75	27	16	6	13	6	10	40	13	5

Leib=

Leibrenten in einer zusammengesetzten Tontine, wo ein ¼ mit dem Tode eines jeden erlöscht.

Alter	Ein Viertel der blossen Leibrente.			Drey Viertel der Actie in der componirten Actie gegeben.			Das Totale einer solchen Actie.		
	L.	S.	D.	L.	S.	D.	L.	S.	D.
von 0 — 5	4	16	4	11	7	9	16	4	2
5 — 10	4	12	7	11	8	6	16	1	2
10 — 15	4	12	9	11	9	8	16	2	5
15 — 20	4	15	0	11	11	0	16	6	1
20 — 25	4	17	1	11	12	8	16	9	10
25 — 30	4	19	6	11	14	11	16	14	3
30 — 35	5	2	6	11	17	9	17	0	3
35 — 40	5	6	7	12	1	3	17	7	11
40 — 45	5	13	3	12	6	4	17	19	8
45 — 50	6	2	9	12	13	1	18	15	11
50 — 55	6	14	7	13	2	3	19	16	11
55 — 60	7	10	1	13	14	10	21	5	1
60 — 65	8	12	3	14	12	8	23	5	0
65 — 70	10	7	9	15	19	6	26	7	3
70 — 75	12	16	10	18	1	1	30	18	0

Leibrenten in einer zusammengesetzten Tontine, wo ein Viertel mit eines jeden Tode erlischt.

Alter	Ein Vierthel der Rente giebt			Drey Viertel der Tontine geben			Das Totale von beyden.		
	L.	S.	D.	L.	S	D.	L.	S.	D.
von 0 — 5	5	15	1	14	2	4	19	17	6
5 — 10	5	10	5	14	2	11	19	13	5
10 — 15	5	10	1	14	3	6	19	13	8
15 — 20	5	12	3	14	4	3	19	16	6
20 — 25	5	14	3	14	5	4	19	19	8
25 — 30	5	16	4	14	6	10	20	3	3
30 — 35	5	19	1	14	8	9	20	7	11
35 — 40	6	2	9	14	11	0	20	14	4
40 — 45	6	9	0	14	15	6	21	4	7
45 — 50	6	18	6	15	0	11	21	19	5
50 — 55	7	10	5	15	8	5	22	18	11
55 — 60	8	5	6	15	19	6	24	5	0
60 — 65	9	8	0	16	15	7	26	3	8
65 — 70	11	3	6	18	0	4	29	3	11
70 — 75	13	13	3	20	0	3	33	13	7

Anhang,

Anhang,

welcher

noch einige allgemeine Anmerkungen über die Renten enthält.

§. 105.

Wenn in einem Staate Rentengesellschaften errichtet werden; so sind die Bedingungen dabey nicht immer den bisher vorgetragenen Rechnungsgrundsätzen gemäß, und daher entsteht ganz natürlich die Meinung, daß entweder die gedachten Rechnungsgrundsätze nicht die erforderliche Richtigkeit haben, oder daß man oft bey wirklicher Errichtung der Rentengesellschaften nach falschen Grundsätzen handele. Es muß daher zum Schlusse dieses Abschnitts eins und das andere über diesen Punkt gesagt werden, und dies wird die Leibrenten vorzüglich betreffen.

§. 106.

Ueberhaupt ist hiebey zuvörderst zu bemerken, daß, wenn bey der Anwendung allgemeiner Regeln in einzeln Fällen diese allgemeine Regeln nicht in der größten Strenge angewandt werden, daraus nicht sogleich folge, weder, daß die Regeln selbst falsch sind, noch daß man in

der

der Anwendung fehle. Bey jeder Anwendung allgemeiner Sätze auf besondere Fälle muß auf den specifischen Unterschied, der bey diesen Sätzen selbst nicht mit in Anschlag gebracht werden kann, gesehen werden, und es müssen daher auch allgemeine Regeln in den meisten Fällen bey ihrer Anwendung eine veränderte Gestalt von der Art erhalten, die man mit einem Kunstworte Modification nennt.

§. 107.

Bey den für die Berechnung der Renten gegebenen Regeln ist auf weiter nichts gesehen worden, als

1. auf das zu rechnende pr. C.

2. bey den Jahrrenten auf die Zeit der Dauer der Rente,

3. bey den Leibrenten auf das Alter des Rentenirers; und wenn in wirklichen Fällen auch nur auf diese Stücke gesehen werden soll, so sind die gegebenen Regeln allerdings richtig, und gerade so, wie sie gegeben worden sind, anzuwenden: und selbst bey den Leibrenten findet keine Ausnahme statt, so lange nicht etwa in besondern Umständen ein Grund vorhanden ist, ihre Sterblichkeit anders, als nach der Sterblichkeitsordnung für Rentenirer zu beurtheilen.

§. 108.

Allein wenn ein Staat Rentengesellschaften errichtet, so ist die Absicht mehrentheils vorzüglich, eine beträchtliche Summe Geldes zu erhalten, welche freywillig und gern zusammengebracht werde, um dadurch einen wichtigen Vortheil zu erhalten, auf den man sonst entweder hätte Verzicht thun, oder die Mittel dazu auf eine andere nachtheiligere Art zu erhalten suchen müssen. Angenommen nun, daß die Renten nie höher gesetzt werden sollten, als solches nach den Grundsätzen der allgemeinen Berechnung derselben geschehen muß, und also keine Interessenten durch einen in die Augen fallenden Vortheil angelockt würden; wäre es dann möglich, daß bey der Errichtung einer Leibrentengesellschaft sich so schnell so viele Theilnehmer fänden, als es seyn muß, wenn die Hauptabsicht bey der Errichtung derselben erreicht werden soll? Selbst Privatpersonen müssen oft aufgenommene Capitalien zu einem höhern als das landübliche pr. C. verzinsen, und können es oft, ohne dabey alles Vortheils von dem Gebrauche der Capitalien verlustig zu gehen, oder wohl gar Schaden davon zu haben; warum sollten sich nicht ähnliche Fälle bey Staaten ereignen können? Auch redet die Erfahrung für das Daseyn derselben?

§. 109.

Ausserdem ist es natürlich, daß, wenn Leibrenten allgemein bestimmt werden, und z. B. 10 pr. C. gegeben werden sollen, noch besonders überlegt werden muß, aus was für Personen die Gesellschaft der Theilnehmer vorzüglich zu bestehen pflege. Sind das mehr solche, bey denen eine grössere Sterblichkeit statt findet als bey andern, so können auch grössere Renten gegeben werden, als die allgemeine Berechnung derselben angiebt, ohne daß dadurch der Entrepreneur Schaden leide. Wenn z. B. $\frac{25}{100}$ von allen neugestifteten Leibrenten entweder für Kinder oder für 50 und mehrjährige Personen erkauft werden (S. Schlözers Staatsanzeigen Heft 11. S. 309.); so ist dies ein höchst wichtiger Umstand, indem vom 1ten bis zum 7ten Jahre und vom 50ten Jahre bis ans Ende des Lebens, wie solches die Tabelle offenbar bezeugt, eine viel grössere Sterblichkeit herrscht, als vom 8ten bis zum 49sten Jahre.

§. 110.

Es ist daher freylich nicht ohne Grund, was in Schlözers Staatsanzeigen am angeführten Orte steht, daß nemlich die französischen Finanzminister, bey ihrer Bestimmung der Leibrenten eine gewissere Base haben, als alle Rechnungen der de la Lande, der Euler und der Lamberts — eine hundertjährige Erfahrung: allein es haben auch diese Männer ihre Rechnungen auf Erfahrungen vieler Jahre und selbst auf Erfahrungen von Tontiniten gebaut; und wenn daher ihre Resultate mit den bey wirklichen Fällen befolgten nicht genau übereinstimmen; so rührt das, voraus=

ausgesetzt, daß auch diese letztern richtig sind, bloß daher, weil der Practiker entweder mehrere oder auch einen andern Gesichtspunkt nimmt. Die theoretischen Regeln stehen auch hier nicht mit dem practischen Verfahren im Widerspruche; sie liegen vielmehr dabey zum Grunde, haben aber wegen einiger Umstände, auf die der Theoretiker bey ihrer Erfindung nicht zu sehen hatte, eine Modification erfahren.

§. 111.

Uebrigens steht ausserdem verschiedenes Lesenswürdige über die Renten in Frankreich von dem Urheber der vorhin geäusserten Meinung noch im 15ten Hefte der Schlözerschen Staatsanzeigen; und unter andern erklärt er sich S. 330 über die Billigkeit und den Grund der bey den französischen Leibrenten üblichen Retenue du dixieme auf folgende Art.

Dieser Abzug wäre freylich im höchsten Grad unbillig, wenn er nicht den Creditoren voraus verkündiget würde. Da es aber immer unter den Bedingnissen des Anlehens oben steht, ob die Retenue du dixieme statt haben soll oder nicht: so geschieht durch die Erfüllung derselben niemand Unrecht, weil jedermann sie aus dem Edit de Création vorher kannte, und seine Speculationen darnach einrichten konnte. Warum aber nicht lieber gerade die wirklichen neune von Hundert, an statt der zehen vom Hundert mit Abzug des Dixieme, versprochen worden?

das

das ist eine andere Frage, die nur aus den Finanzordnungen beantwortet werden kann. Die Sache kommt kürzlich auf folgenden Umstand an. Der König hat sich gegen die Nation anheischig gemacht, keine neue Anlehen zu eröffnen, ohne den zur Schuldenerledigung bestimmten fond d'amortissement verhältnißmässig zu vermehren; und zu diesem Endzweck ist unter andern auch der 10te oder 20ste Pfennig von gewissen Renten bestimmt. Wenn also der König eine Leibrente von einer Million Livres avec retenue du dixieme veräussert; so heißt dies gerade so viel, als daß 900000 an die Rentenirer sollen contractmässig ausgetheilt, zugleich aber auch jährlich 100000 in den Fond d'amortissement zur Verstärkung desselben geworfen werden.

§. 112.

Ueberhaupt können bey den wirklich errichteten Leibrenten und Tontinengesellschaften noch manche besondere Umstände vorkommen, die in einer allgemeinen Betrachtung der Renten nicht besonders erwogen werden können. Dergleichen finden sich z. B. auch bey der im Jahr 1783 bekannt gemachten Reichsstadt Nürnbergischen zweyten Leibrentengesellschaft, die Kritter mit seiner bekannten und gewöhnlichen Scharfsinnigkeit im 6ten Stücke des 3ten Jahrganges des Göttingischen Magazins der Wissenschaften und Litteratur geprüft hat. Ich habe mich, wenn ich meine Anleitung nicht zu mehrern Bänden als

ich

sich angekündigt habe, anwachsen lassen wollte, in dergleichen einzele Fälle nicht einlassen dürfen.

§. 113.

Da die Berechnung der Leibrenten und Tontinen auf Wahrscheinlichkeiten beruhen; so ist leicht einzusehen, daß der Entrepreneur desto weniger der Gefahr des Schadens ausgesetzt ist, je grösser die Anzahl der Theilnehmer ist. Wollte ein Leibrentenirer seine Rente verkaufen, so müßte der Preis derselben auf eben die Art gefunden werden, als oben Abschn. 6 § 22 von dem Verkaufe der Güter auf Lebenszeit gelehret worden ist.

Siebenter Abschnitt,

von den

Wittwenkassen.

§. 1.

Der traurige Zustand, in welchen öfters die Frauen durch den Tod ihrer Männer versetzt werden, und so oft versetzt werden müssen, als der Erwerb des Mannes die einzige Quelle der Unterhaltung gewesen, ein Umstand, der sich bey den Personen, die von den Einkünften ihrer Aemter leben müssen, sehr häufig findet; macht Einrichtungen sehr wünschenswerth, durch welche Wittwen gegen Aufopferung eines proportionirten Beytrags, so lange ihre Männer lebten, in ihrem Wittwenstande wenigstens vor Dürftigkeit und niederschlagenden Nahrungssorgen gesichert sind.

§. 2.

Es giebt hie und da Einrichtungen dieser Art, wobey, weil bereits ein hinlängliches aus mancherley Quellen geflossenes Capital vorhanden ist, von dessen Interessen die entstehenden Wittwen eine jährliche Pension erhal-

ten

ten, diejenigen, die daran Antheil nehmen können, nur eine sehr mässige Summe entweder ein für allemal, oder bis zum Tode des Mannes jährlich zu entrichten haben. Diese Einrichtungen können ohnstreitig ihren Stiftern von denen, welchen sie zu gute kommen, nicht genug verdankt werden; allein sie sind selten, und wo sie sind, können sie sich auf keine grosse Anzahl erstrecken.

§. 3.

Ausser ihnen giebt es hie und da andere, bey denen Staatsbediente einer oder mehrerer Gattung sich vereiniget haben, und, so lange sie leben, von ihrem Gehalte einen bestimmten Theil hergeben, um davon den Wittwen aus ihrer Mitte eine jährliche Pension zu sichern. Auch dergleichen Verbindungen sind sehr lobenswerth, obgleich die daher entstehenden Vortheile gewöhnlicher Weise theurer erkauft werden müssen, als sie bey den § 2 gedachten Anstalten zu stehen zu kommen pflegen.

§. 4.

Eine Einrichtung, wobey einem jeden einmal ganz und gar überlassen wäre, ob er daran Theil nehmen wolle oder nicht, wo zweytens ein jeder Ehemann ohne Unterschied des Standes gegen eine beliebige Summe, die er entweder auf einmal, oder so lange er lebte, oder auf beyderley Art, seiner Frau auf den Fall, daß sie ihn über-lebte, während ihres Wittwenstandes bis an ihren Tod oder bis zu einer anderweitigen Verheyrathung eine verhältnißmäßige Pension versichern könnte, eine Einrichtung drittens, die Sache des Regenten oder des Staats, und keiner Vergänglichkeit unterworfen wäre, ist und bleibt daher eine Sache, die des Wunsches eines jeden und des Nachdenkens und sorgfältigsten Bestrebens werth ist.

§. 5.

Wenn eine Gesellschaft Ehepaare unter sich den Vertrag errichtet, daß die überlebenden männlichen noch in der Ehe stehenden Mitglieder die nachgelassenen Wittwen der verstorbenen männlichen Mitglieder bis an ihren Tod versorgen sollen; so heißt eine solche Gesellschaft eine **Wittwenverpflegungsgesellschaft.** Bringen die Mitglieder zu dieser Absicht entweder auf einmal oder nach und nach eine Summe Geldes zusammen, die einem Entrepreneur übergeben wird, der dafür die Verpflichtung eingeht, den entstehenden Wittwen bis an ihren Tod die vestgesetzte Pension zu bezahlen, so nennt man diese Einrichtung eine **Wittwenkasse.**

§. 6.

Eine Wittwenkasse kann auf eine doppelte Art eine **geschlossene** Wittwenkasse seyn, indem sie entweder nur Mitglieder von einem gewissen Stande aufnimmt, oder

in

in Ansehung der Zahl bestimmt ist. Ferner können im letzten Falle ausser den zuerst aufgenommenen Mitgliedern alle übrige ausgeschlossen seyn, oder die Anzahl beym Abgang einiger immer wieder durch neue ersetzt werden; wo denn in jenem Falle die Gesellschaft eine **aussterbende** in diesem aber eine **geschlossene rekrutirende** Gesellschaft wird.

§. 7.

Ausserdem kann man auch die **verbindlichen** und **freyen** Wittwengesellschaften und Kassen von einander unterscheiden. An jenen **muß** jeder, der zu der bestimmten Gattung von Personen gehört, Antheil nehmen; bey diesen steht es in eines jeden Belieben, ob er daran Antheil nehmen wolle, oder nicht. **Von den freyen Wittwenkassen**, so wie sie § 4 beschrieben worden sind, **soll nun das wissenswürdigste beygebracht werden.**

§. 8.

Ohnerachtet dergleichen Wittwenkassen Einrichtungen sind, die mit den Leibrentenverträgen die größte Aehnlichkeit haben; so dürfen dieselben doch auf keine Weise aus solchen Absichten errichtet werden, als nach § 108 des vorhergehenden Abschnittes bey der Errichtung der Leibrentengesellschaften oft statt finden, und da auch statt finden können. Denn da diese Wittwenkassen nicht eine bestimmte Zeit, sondern beständig dauren sollen; so würde, wenn auch mit dem anfänglich zusammengebrachten Gelde ein ungewöhnlicher Vortheil erhalten und also dafür grössere Renten gegeben werden könnten, als die allgemeine Berechnung an die Hand giebt, dieser Vortheil doch in der Folge wegfallen, und es müßten also die Wittwenkassen entweder dem Staate zur Last fallen, oder zum Nachtheil der Mitglieder über kurz oder lang ein trauriges Ende nehmen. Ueberdem findet sich zwischen Wittwenkassen und Leibrenten auch der Unterschied, daß bey diesen die jährlich auszuzahlenden Summen immer kleiner, bey jenen aber immer grösser werden.

§. 9.

Bey gut eingerichteten Wittwenkassen muß der Entrepreneur mit seiner Einnahme und dem Zinse, den er aus der Benutzung derselben zieht, ohne allen Zuschuß alle ihm vorfallende Ausgaben bestreiten können; es wäre die größte Ungerechtigkeit, wenn er dabey einbüssen sollte. Von Seiten der Mitglieder muß bey der Beurtheilung der Vortheile, den sie von einer sichern Wittwenkasse haben, nicht bloß auf das Geld gesehen werden, welches die Kasse ihren Wittwen auszahlen wird, sondern sie müssen dabey auch das Glück in Anschlag bringen, welches ihnen daher entsteht, daß sie als Mitglieder einer solchen Kasse nicht nöthig haben, mit Bangigkeit an den

Zu=

Zustand ihrer Frauen nach ihrem Tode zu gedenken, ein Glück, das genau erwogen, sehr schätzbar ist, und um so viel mehr werth ist, je länger man es genießt.

§. 10.

Offenbar können nicht alle Mitglieder einer Wittwenkasse in ihren Frauen von derselben mehr erhalten, als sie derselben an Capitalien und Zinsen gegeben haben; wo sollte das Geld herkommen? Sollte der Staat es hergeben? der müßte es von den Unterthanen nehmen, und zwar hier von denen, welche von der Wittwenkasse keinen Vortheil hätten. Welche Ungerechtigkeit wäre das! Häufig erhalten bey gut eingerichteten Wittwenkassen Wittwen mehr als ihre Männer contribuirt haben, und dies ist Vortheil und Reiz genug. Andere erhalten so viel wieder, als ihre Beyträge betragen haben; und auch diese haben nicht die geringste Ursach, sich zu beschweren. Denn ausserdem, daß sie keinen Schaden, im eigentlichen Verstande, haben, so haben sie den § 9 gedachten Vortheil genossen, und hätten sie das Geld, was sie der Wittwenkasse geben mußten, selbst zurücklegen und benutzen wollen; so würde jenes nicht allezeit geschehen seyn, und dieses von ihnen nicht so gut als von der Kasse haben bewerkstelliget werden können.

§. 11.

Noch andere haben von ihrem Eintritte in die Wittwengesellschaft offenbaren Schaden, wenn nemlich die Frau früher stirbt als der Mann, oder denselben doch nicht lange überlebt. Allein der § 9 erwähnte Vortheil ist auch von ihnen genossen worden; ferner hatten sie doch die Möglichkeit vor sich, zu einer der beyden vorhin gedachten Klassen zu gehören, und bey wahrscheinlichen Vortheilen entschließt man sich ja auch nach Möglichkeiten, die bey uns eben so gut als bey andern Wirklichkeit erhalten können. Und wenn man bey redlichen Absichten und einem Verhalten, wobey die Klugheit nichts tadelswürdiges finden kann, einen Verlust leidet, wodurch man zum gemeinen Besten beyträgt; kann, soll der einen patriotisch denkenden schmerzen? und Patriot sollte doch jeder Bürger seyn.

§. 12.

Je geringer der Beytrag ist, den Wittwenkassen fordern, und je grösser dagegen die Pension, welche sie den entstehenden Wittwen versprechen, desto vortheilhafter scheinen dergleichen Kassen den Unwissenden zu seyn. Eine Zeitlang können solche fehlerhafte Wittwenkassen sich allerdings erhalten, denn anfänglich sind immer die Ausgaben klein; allein je länger sie stehen, desto grösser werden die Ausgaben, und der Kenner wundert sich nicht darüber, daß so viele von den bisher errichteten Wittwenkassen

sen so bald wieder zu Grunde gegangen sind. Es ist und wird stets Wahrheit bleiben, was oft von Kennern und unter andern auch einigemal in der allgemeinen deutschen Bibliothek bey Recensionen solcher Schriften, die eine gute und dauerhafte Einrichtung der Wittwenkassen zur Absicht hatten, gesagt worden ist: **Bey einer nach wahren und sichern Grundsätzen eingerichteten Wittwenkasse können die äussern Bedingungen nie von der Art seyn, daß dadurch allein Interessenten herbeygelockt werden könnten.**

§. 13.

Den größten Mangel an Ueberlegung und Kenntniß der Sache verrathen diejenigen, welche gut eingerichtete freye und allgemeine Wittwenkassen, für die sich der Landesherr selbst interessirt, ansehen, als ob einzig und allein die Begierde, sich auf eine erlaubte und unmerkbare Art noch mehrere Einkünfte zu verschaffen, die Triebfeder zu ihrer Einrichtung gewesen wäre. Wären dergleichen Leute im Stande, sich nur einen einzigen einzeln Fall ganz ausführlich und deutlich vorzustellen, und von demselben auf die gehörige Art weiter zu schliessen, so würden sie sich wundern, wie sie bey ihrer Blödsinnigkeit so dreiste Urtheile zu fällen, und auf eine lächerliche Art Kenner spielen zu wollen, im Stande gewesen.

§. 14.

Bey Wittwenkassen von der Art, als nach § 7 bisher schon betrachtet worden, und auch in dem folgenden noch ferner betrachtet werden sollen, stellen gleichsam die eintretenden Mitglieder und der Entrepreneur eine Wette an; wenigstens muß der Natur der Sache nach dieses Verhältniß bey der Berechnung zum Grunde gelegt werden. Der Entrepreneur verpflichtet sich gegen das eintretende Mitglied, der Frau desselben nach des Mannes Tode, so lange sie lebt, jährlich eine Pension zu geben; und das Mitglied bezahlt dafür jetzt dem Entrepreneur eine gewisse Summe, und so lange er lebt, jährlich einen Beytrag. Das Geld so wohl, was der Entrepreneur zu bezahlen übernimmt, als dasjenige, was er dafür von dem eintretenden Mitgliede erhält, wird nur wahrscheinlich ausgegeben und eingenommen, einen kleinen Theil des letzten ausgenommen. Hierin liegt der Grund, daß man das Verhältniß zwischen dem Entrepreneur einer Wittwenkasse und den Mitgliedern derselben, als ein Verhältniß zwischen zwey mit einander wettenden Personen ansehen kann. Einnahme und Ausgabe des Entrepreneurs also ferner auf ihren jetzigen Werth nach den bereits nicht nur erklärten, sondern auch angewandten Regeln reducirt, so müssen beyde gegen einander aufgehen, oder einander gleich seyn.

§. 15.

§. 15.

Hier entsteht nun vor allen Dingen die Frage: Was für eine Sterblichkeitsordnung bey den gedachten Berechnungen zum Grunde gelegt werden müsse? Soll indeß bloß die Art und Weise, wie man bey der Berechnung einzeler bey den Wittwenkassen vorkommenden Fragen verfahre, gezeigt werden; so ist jede Sterblichkeitsordnung dazu gut; und da dies jetzt zunächst meine Absicht ist, so will ich bey den Männern die am Ende angehängte 4te und bey den Frauen die folgende 5te zum Grunde legen.

§. 16.

Wenn also ein 60jähriger Mann seiner Frau, die 10 Jahr jünger und also 50 Jahr alt wäre, nach seinem Tode eine Wittwenpension à 100 Rthlr versichern lassen wollte; so hätte der Entrepreneur in dem Falle, daß ein Einkaufsgeld erlegt würde, welches er aber bey dem Tode des Mannes wieder herausgeben müßte, und der Interessent ausserdem jährlich bis an seinen Tod einen Beytrag gäbe,

1. an Einnahme zu rechnen
   a. den Zins von dem erhaltenen Einkaufsgelde,
   b. die jährlichen Beyträge mit ihrem Zinse; und dagegen
2. an Ausgabe
   a. einige jährliche unvermeidliche Unkosten,
   b. die Wittwenpension bis zum Tode der Frau.

§. 17.

§. 17.

Nun sey ferner

1. das Einkaufsgeld der Wittwenpension gleich, und also 100 Rℰ,

2. das pr. C., zu welchem die Benutzung der Capitalien berechnet wird, 5,

3. die auf jedes interessirte Ehepaar oder eine Wittwe jährlich zu rechnenden Unkosten 1 pr. C., und unter diesen Umständen werde gefragt: Wie groß der Beytrag seyn müsse, den ein 60jähriger Mann für seine Frau zu erlegen habe.

§. 18.

Zur Beantwortung dieser Frage gebraucht man zuvörderst verschiedene Wahrscheinlichkeiten; nemlich

1. die Wahrscheinlichkeiten, daß der Mann und die Frau zusammen noch leben,

2. die Wahrscheinlichkeit, daß die Frau allein lebe,

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann tod sey und die Frau lebe.

Diese sollen daher zuerst mitgetheilt, und dann ihre Anwendung ebenfalls berührt werden.

§. 19.

Wahrscheinlichkeit

daß

nach Jahren	der 60jährige Mann,	die 50jährige Frau,	beyde noch leben
1.	$\frac{1947}{2042}$	$\frac{3060}{3140}$	$\frac{1947}{2042} \times \frac{3060}{3140}$
2.	$\frac{1849}{2042}$	$\frac{2979}{3140}$	$\frac{1849}{2042} \times \frac{2979}{3140}$
3.	$\frac{1748}{2042}$	$\frac{2897}{3140}$	$\frac{1748}{2042} \times \frac{2897}{3140}$
4.	$\frac{1641}{2042}$	$\frac{2815}{3140}$	$\frac{1641}{2042} \times \frac{2815}{3140}$
5.	$\frac{1531}{2042}$	$\frac{2731}{3140}$	$\frac{1531}{2042} \times \frac{2731}{3140}$
6.	$\frac{1423}{2042}$	$\frac{2646}{3140}$	$\frac{1423}{2042} \times \frac{2646}{3140}$
7.	$\frac{1319}{2042}$	$\frac{2561}{3140}$	$\frac{1319}{2042} \times \frac{2561}{3140}$
8.	$\frac{1217}{2042}$	$\frac{2475}{3140}$	$\frac{1217}{2042} \times \frac{2475}{3140}$
9.	$\frac{1119}{2042}$	$\frac{2388}{3140}$	$\frac{1119}{2042} \times \frac{2388}{3140}$
10.	$\frac{1025}{2042}$	$\frac{2301}{3140}$	$\frac{1025}{2042} \times \frac{2301}{3140}$
11.	$\frac{934}{2042}$	$\frac{2213}{3140}$	$\frac{934}{2042} \times \frac{2213}{3140}$
12.	$\frac{847}{2042}$	$\frac{2123}{3140}$	$\frac{847}{2042} \times \frac{2123}{3140}$
13.	$\frac{764}{2042}$	$\frac{2030}{3140}$	$\frac{764}{2042} \times \frac{2030}{3140}$
14.	$\frac{686}{2042}$	$\frac{1933}{3140}$	$\frac{686}{2042} \times \frac{1933}{3140}$
15.	$\frac{614}{2042}$	$\frac{1832}{3140}$	$\frac{614}{2042} \times \frac{1832}{3140}$
16.	$\frac{549}{2042}$	$\frac{1728}{3140}$	$\frac{549}{2042} \times \frac{1728}{3140}$
17.	$\frac{492}{2042}$	$\frac{1620}{3140}$	$\frac{492}{2042} \times \frac{1620}{3140}$
18.	$\frac{442}{2042}$	$\frac{1507}{3140}$	$\frac{442}{2042} \times \frac{1507}{3140}$
19.	$\frac{398}{2042}$	$\frac{1388}{3140}$	$\frac{398}{2042} \times \frac{1388}{3140}$
20.	$\frac{358}{2042}$	$\frac{1267}{3140}$	$\frac{358}{2042} \times \frac{1267}{3140}$
21.	$\frac{320}{2042}$	$\frac{1149}{3140}$	$\frac{320}{2042} \times \frac{1149}{3140}$

Wahr=

Wahrscheinlichkeit

daß

nach Jahren	der 60jährige Mann,	die 50jährige Frau,	beyde noch leben
22.	$\frac{284}{2042}$	$\frac{1037}{3140}$	$\frac{284}{2042} \times \frac{1037}{3140}$
23.	$\frac{242}{2042}$	$\frac{930}{3140}$	$\frac{242}{2042} \times \frac{930}{3140}$
24.	$\frac{215}{2042}$	$\frac{829}{3140}$	$\frac{215}{2042} \times \frac{829}{3140}$
25.	$\frac{183}{2042}$	$\frac{735}{3140}$	$\frac{183}{2042} \times \frac{735}{3140}$
26.	$\frac{153}{2042}$	$\frac{647}{3140}$	$\frac{153}{2042} \times \frac{647}{3140}$
27.	$\frac{126}{2042}$	$\frac{564}{3140}$	$\frac{126}{2042} \times \frac{564}{3140}$
28.	$\frac{102}{2042}$	$\frac{487}{3140}$	$\frac{102}{2042} \times \frac{487}{3140}$
29.	$\frac{82}{2042}$	$\frac{417}{3140}$	$\frac{82}{2042} \times \frac{417}{3140}$
30.	$\frac{67}{2042}$	$\frac{352}{3140}$	$\frac{67}{2042} \times \frac{352}{3140}$
31.	$\frac{55}{2042}$	$\frac{296}{3140}$	$\frac{55}{2042} \times \frac{296}{3140}$
32.	$\frac{46}{2042}$	$\frac{249}{3140}$	$\frac{46}{2042} \times \frac{249}{3140}$
33.	$\frac{38}{2042}$	$\frac{210}{3140}$	$\frac{38}{2042} \times \frac{210}{3140}$
34.	$\frac{31}{2042}$	$\frac{175}{3104}$	$\frac{31}{2042} \times \frac{175}{3140}$
35.	$\frac{24}{2042}$	$\frac{147}{3140}$	$\frac{24}{2042} \times \frac{147}{3140}$
36.	$\frac{18}{2042}$	$\frac{124}{3140}$	$\frac{18}{2042} \times \frac{124}{3140}$
37.	$\frac{13}{2042}$	$\frac{103}{3140}$	$\frac{13}{2042} \times \frac{103}{3140}$
38.	$\frac{9}{2042}$	$\frac{84}{3140}$	$\frac{9}{2042} \times \frac{84}{3140}$
39.	$\frac{5}{2042}$	$\frac{67}{3140}$	$\frac{5}{2042} \times \frac{67}{3140}$
40.	$\frac{3}{2042}$	$\frac{52}{3140}$	$\frac{3}{2042} \times \frac{52}{3140}$
41.	$\frac{2}{2042}$	$\frac{40}{3140}$	$\frac{2}{2042} \times \frac{40}{3140}$
42.	$\frac{1}{2042}$	$\frac{30}{3140}$	$\frac{1}{2042} \times \frac{30}{3140}$
43.	0	$\frac{22}{3140}$	0

§. 20.

§. 20.

Wahrscheinlichkeit daß

nach Jahren	die 50jährige Frau noch lebe	nach Jahren	die 50jährige Frau noch lebe
1.	$\frac{3060}{3140}$	13.	$\frac{2030}{3140}$
2.	$\frac{2979}{3140}$	14.	$\frac{1933}{3140}$
3.	$\frac{2897}{3140}$	15.	$\frac{1832}{3140}$
4.	$\frac{2815}{3140}$	16.	$\frac{1728}{3140}$
5.	$\frac{2731}{3140}$	17.	$\frac{1620}{3140}$
6.	$\frac{2646}{3140}$	18.	$\frac{1507}{3140}$
7.	$\frac{2561}{3140}$	19.	$\frac{1388}{3140}$
8.	$\frac{2475}{3140}$	20.	$\frac{1267}{3140}$
9.	$\frac{2388}{3140}$	21.	$\frac{1148}{3140}$
10.	$\frac{2301}{3140}$	22.	$\frac{1037}{3140}$
11.	$\frac{2213}{3140}$	23.	$\frac{936}{3140}$
12.	$\frac{2123}{3140}$	24.	$\frac{829}{3140}$

Wahr-

Wahrscheinlichkeit

daß

nach Jahren	die 50jährige Frau noch lebe	nach Jahren	die 50jährige Frau noch lebe
25.	$\frac{735}{3140}$	39.	$\frac{67}{3140}$
26.	$\frac{647}{3140}$	40.	$\frac{52}{3140}$
27.	$\frac{564}{3140}$	41.	$\frac{40}{3140}$
28.	$\frac{487}{3140}$	42.	$\frac{30}{3140}$
29.	$\frac{417}{3140}$	43.	$\frac{22}{3140}$
30.	$\frac{352}{3140}$	44.	$\frac{15}{3140}$
31.	$\frac{296}{3140}$	45.	$\frac{10}{3140}$
32.	$\frac{249}{3140}$	46.	$\frac{7}{3140}$
33.	$\frac{210}{3140}$	47.	$\frac{5}{3140}$
34.	$\frac{175}{3140}$	48.	$\frac{4}{3140}$
35.	$\frac{147}{3140}$	49.	$\frac{3}{3140}$
36.	$\frac{124}{3140}$	50.	$\frac{2}{3140}$
37.	$\frac{103}{3140}$	51.	$\frac{1}{3140}$
38.	$\frac{84}{3140}$	52.	0

§. 21.

Wahrscheinlichkeit

daß

nach Jahren	der 60jährige Mann tod sey	die 50jährige Frau lebe	beydes statt finde
1.	$1 - \frac{1947}{2042}$	$\frac{3060}{3140}$	$\frac{3060}{3140} - \frac{1947}{2042} \times \frac{3060}{3140}$
2.	$1 - \frac{1849}{2042}$	$\frac{2979}{3140}$	$\frac{2979}{3140} - \frac{1849}{2042} \times \frac{2979}{3140}$
3.	$1 - \frac{1748}{2042}$	$\frac{2897}{3140}$	$\frac{2897}{3140} - \frac{1748}{2042} \times \frac{2897}{3140}$
4.	$1 - \frac{1641}{2042}$	$\frac{2815}{3140}$	$\frac{2815}{3140} - \frac{1641}{2042} \times \frac{2815}{3140}$
5.	$1 - \frac{1531}{2042}$	$\frac{2731}{3140}$	$\frac{2731}{3140} - \frac{1531}{2042} \times \frac{2731}{3140}$
6.	$1 - \frac{1423}{2042}$	$\frac{2645}{3140}$	$\frac{2646}{3140} - \frac{1423}{2042} \times \frac{2646}{3140}$
7.	$1 - \frac{1319}{2042}$	$\frac{2561}{3140}$	$\frac{2561}{3140} - \frac{1319}{2042} \times \frac{2561}{3140}$
8.	$1 - \frac{1217}{2042}$	$\frac{2475}{3140}$	$\frac{2475}{3140} - \frac{1217}{2042} \times \frac{2475}{3140}$
9.	$1 - \frac{1119}{2042}$	$\frac{2388}{3140}$	$\frac{2388}{3140} - \frac{1119}{2042} \times \frac{2388}{3140}$
10.	$1 - \frac{1025}{2042}$	$\frac{2301}{3140}$	$\frac{2301}{3140} - \frac{1025}{2042} \times \frac{2301}{3140}$
11.	$1 - \frac{934}{2042}$	$\frac{2213}{3140}$	$\frac{2213}{3140} - \frac{934}{2042} \times \frac{2213}{3140}$
12.	$1 - \frac{847}{2042}$	$\frac{2123}{3140}$	$\frac{2123}{3140} - \frac{847}{2042} \times \frac{2123}{3140}$
13.	$1 - \frac{764}{2042}$	$\frac{2030}{3140}$	$\frac{2030}{3140} - \frac{764}{2042} \times \frac{2030}{3140}$
14.	$1 - \frac{686}{2042}$	$\frac{1933}{3140}$	$\frac{1933}{3140} - \frac{686}{2042} \times \frac{1933}{3140}$
15.	$1 - \frac{614}{2042}$	$\frac{1832}{3140}$	$\frac{1832}{3140} - \frac{614}{2042} \times \frac{1832}{3140}$
16.	$1 - \frac{549}{2042}$	$\frac{1728}{3140}$	$\frac{1728}{3140} - \frac{549}{2042} \times \frac{1728}{3140}$
17.	$1 - \frac{492}{2042}$	$\frac{1620}{3140}$	$\frac{1620}{3140} - \frac{492}{2042} \times \frac{1620}{3140}$

Wahrscheinlichkeit

daß

nach Jahren	der 60jährige Mann tod sey	die 50jährige Frau lebe	beydes statt finde
18.	$1 - \frac{442}{2042}$	$\frac{1507}{3140}$	$\frac{1507}{3140} - \frac{442}{2042} \times \frac{1507}{3140}$
19.	$1 - \frac{398}{2042}$	$\frac{1388}{3140}$	$\frac{1388}{3140} - \frac{398}{2042} \times \frac{1388}{3140}$
20.	$1 - \frac{358}{2042}$	$\frac{1267}{3140}$	$\frac{1267}{3140} - \frac{358}{2042} \times \frac{1267}{3140}$
21.	$1 - \frac{320}{2042}$	$\frac{1149}{3140}$	$\frac{1149}{3140} - \frac{320}{2042} \times \frac{1149}{3140}$
22.	$1 - \frac{284}{2042}$	$\frac{1037}{3140}$	$\frac{1037}{3140} - \frac{284}{2042} \times \frac{1037}{3140}$
23.	$1 - \frac{249}{2042}$	$\frac{930}{3140}$	$\frac{930}{3140} - \frac{249}{2042} \times \frac{930}{3140}$
24.	$1 - \frac{215}{2042}$	$\frac{829}{3140}$	$\frac{829}{3140} - \frac{215}{2042} \times \frac{829}{3140}$
25.	$1 - \frac{183}{2042}$	$\frac{735}{3140}$	$\frac{735}{3140} - \frac{183}{2042} \times \frac{735}{3140}$
26.	$1 - \frac{153}{2042}$	$\frac{647}{3140}$	$\frac{647}{3140} - \frac{153}{2042} \times \frac{647}{3140}$
27.	$1 - \frac{126}{2042}$	$\frac{564}{3140}$	$\frac{564}{3140} - \frac{126}{2042} \times \frac{564}{3140}$
28.	$1 - \frac{102}{2042}$	$\frac{487}{3140}$	$\frac{487}{3140} - \frac{102}{2042} \times \frac{487}{3140}$
29.	$1 - \frac{82}{2042}$	$\frac{417}{3140}$	$\frac{417}{3140} - \frac{82}{2042} \times \frac{417}{3140}$
30.	$1 - \frac{67}{2042}$	$\frac{357}{3140}$	$\frac{357}{3140} - \frac{67}{2042} \times \frac{357}{3140}$
31.	$1 - \frac{55}{2042}$	$\frac{296}{3140}$	$\frac{296}{3140} - \frac{55}{2042} \times \frac{296}{3140}$
32.	$1 - \frac{46}{2042}$	$\frac{249}{3140}$	$\frac{249}{3140} - \frac{46}{2042} \times \frac{249}{3140}$
33.	$1 - \frac{38}{2042}$	$\frac{210}{3140}$	$\frac{210}{3140} - \frac{38}{2042} \times \frac{210}{3140}$
34.	$1 - \frac{31}{2042}$	$\frac{175}{3140}$	$\frac{175}{3140} - \frac{31}{2042} \times \frac{175}{3140}$
35.	$1 - \frac{24}{2042}$	$\frac{147}{3140}$	$\frac{147}{3140} - \frac{24}{2042} \times \frac{147}{3140}$

Wahr=

Wahrscheinlichkeit

daß

nach Jahren	der 60jährige Mann tod sey	die 50jährige Frau lebe	beydes statt finde
36.	$1 - \frac{18}{2042}$	$\frac{124}{3140}$	$\frac{124}{3140} - \frac{18}{2042} \times \frac{124}{3140}$
37.	$1 - \frac{13}{2042}$	$\frac{103}{3140}$	$\frac{103}{3140} - \frac{13}{2042} \times \frac{103}{3140}$
38.	$1 - \frac{9}{2042}$	$\frac{84}{3140}$	$\frac{84}{3140} - \frac{9}{2042} \times \frac{84}{3140}$
39.	$1 - \frac{5}{2042}$	$\frac{67}{3140}$	$\frac{67}{3140} - \frac{5}{2042} \times \frac{67}{3140}$
40.	$1 - \frac{3}{2042}$	$\frac{52}{3140}$	$\frac{52}{3140} - \frac{3}{2042} \times \frac{52}{3140}$
41.	$1 - \frac{2}{2042}$	$\frac{40}{3140}$	$\frac{40}{3140} - \frac{2}{2042} \times \frac{40}{3140}$
42.	$1 - \frac{1}{2042}$	$\frac{30}{3140}$	$\frac{30}{3140} - \frac{1}{2042} \times \frac{30}{3140}$
43.	1	$\frac{22}{3140}$	$\frac{22}{3140}$
44.	1	$\frac{15}{3140}$	$\frac{15}{3140}$
45.	1	$\frac{10}{3140}$	$\frac{10}{3140}$
46.	1	$\frac{7}{3140}$	$\frac{7}{3140}$
47.	1	$\frac{5}{3140}$	$\frac{5}{3140}$
48.	1	$\frac{4}{3140}$	$\frac{4}{3140}$
49.	1	$\frac{3}{3140}$	$\frac{3}{3140}$
50.	1	$\frac{2}{3140}$	$\frac{2}{3140}$
51.	1	$\frac{1}{3140}$	$\frac{1}{3140}$
52.	1	0	0

§. 22.

§. 22.

Nach diesem ist es leicht, die § 16 angeführten Dinge ihrem jetzigen Werthe nach zu finden. Vorausgesetzt, daß der Beytrag immer ein Jahr voraus bezahlet werde, so ist derselbe

für Jahre	in seinem jetzigen Werthe	oder
Das erste	1	1
— 2te	$\frac{1947}{2042} \times \frac{3060}{3140} \times \frac{20}{21}$	$\frac{5674114}{2042 \times 3140}$
— 3te	$\frac{1842}{2042} \times \frac{2979}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^2$	$\frac{4996074}{2042 \times 3140}$
— 4te	$\frac{1748}{2042} \times \frac{2897}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^3$	$\frac{4374435}{2042 \times 3140}$
— 5te	$\frac{1641}{2042} \times \frac{2815}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^4$	$\frac{3800405}{2042 \times 3140}$
— 6te	$\frac{1531}{2042} \times \frac{2731}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^5$	$\frac{3276050}{2042 \times 3140}$
— 7te	$\frac{1423}{2042} \times \frac{2646}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^6$	$\frac{2809693}{2042 \times 3140}$
— 8te	$\frac{1319}{2042} \times \frac{2561}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^7$	$\frac{2400653}{2042 \times 3140}$
— 9te	$\frac{1217}{2042} \times \frac{2475}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^8$	$\frac{2038690{,}5}{2042 \times 3140}$
— 10te	$\frac{1119}{2042} \times \frac{2388}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^9$	$\frac{1722510}{2042 \times 3140}$
— 11te	$\frac{1025}{2042} \times \frac{2301}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{10}$	$\frac{1447939}{2042 \times 3140}$
— 12te	$\frac{934}{2042} \times \frac{2213}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{11}$	$\frac{1208496}{2042 \times 3140}$
— 13te	$\frac{847}{2042} \times \frac{2123}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{12}$	$\frac{1001295}{2042 \times 3140}$
— 14te	$\frac{764}{2042} \times \frac{2030}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{13}$	$\frac{822486}{2042 \times 3140}$
— 15te	$\frac{686}{2042} \times \frac{1933}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{14}$	$\frac{669739{,}7}{2042 \times 3140}$
— 16te	$\frac{614}{2042} \times \frac{1832}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{15}$	$\frac{541071{,}2}{2042 \times 3140}$
— 17te	$\frac{549}{2042} \times \frac{1728}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{16}$	$\frac{434599}{2042 \times 3140}$
— 18te	$\frac{492}{2042} \times \frac{1620}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{17}$	$\frac{354211}{2042 \times 3140}$
— 19te	$\frac{442}{2042} \times \frac{1507}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{18}$	$\frac{282018{,}53}{2042 \times 3140}$

für

für Jahre	in seinem jetzigen Werthe	oder
das 20ste	$\frac{398}{2042} \times \frac{1388}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19}$	$\frac{222677,5}{2042 \times 3140}$
— 21ste	$\frac{358}{2042} \times \frac{1267}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{20}$	$\frac{174131,4}{2042 \times 3140}$
— 22ste	$\frac{320}{2042} \times \frac{1149}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{21}$	$\frac{134429,5}{2042 \times 3140}$
— 23ste	$\frac{284}{2042} \times \frac{1037}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{22}$	$\frac{102549,25}{2042 \times 3140}$
— 24ste	$\frac{249}{2042} \times \frac{930}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{23}$	$\frac{76794,17}{2042 \times 3140}$
— 25ste	$\frac{215}{2042} \times \frac{829}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{24}$	$\frac{56292,4}{2042 \times 3140}$
— 26ste	$\frac{183}{2042} \times \frac{735}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{25}$	$\frac{39719,7}{2042 \times 3140}$
— 27ste	$\frac{153}{2042} \times \frac{647}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{26}$	$\frac{27840,3}{2042 \times 3140}$
— 28ste	$\frac{126}{2042} \times \frac{564}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{27}$	$\frac{19034,4}{2042 \times 3140}$
— 29ste	$\frac{102}{2042} \times \frac{487}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{28}$	$\frac{12671,52}{2042 \times 3140}$
— 30ste	$\frac{82}{2042} \times \frac{417}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{29}$	$\frac{8307,31}{2042 \times 3140}$
— 31ste	$\frac{67}{2042} \times \frac{352}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{30}$	$\frac{5456,8}{2042 \times 3140}$
— 32ste	$\frac{55}{2042} \times \frac{296}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{31}$	$\frac{3587,45}{2042 \times 3140}$
— 33ste	$\frac{46}{2042} \times \frac{249}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{32}$	$\frac{2403,87}{2042 \times 3140}$
— 34ste	$\frac{38}{2042} \times \frac{210}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{33}$	$\frac{1594,98}{2042 \times 3140}$
— 35ste	$\frac{31}{2042} \times \frac{175}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{34}$	$\frac{1032,675}{2042 \times 3140}$
— 36ste	$\frac{24}{2042} \times \frac{147}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{35}$	$\frac{639,59}{2042 \times 3140}$
— 37ste	$\frac{18}{2042} \times \frac{124}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{36}$	$\frac{385,37}{2042 \times 3140}$
— 38ste	$\frac{13}{2042} \times \frac{103}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{37}$	$\frac{220,18}{2042 \times 3140}$
— 39ste	$\frac{9}{2042} \times \frac{84}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{38}$	$\frac{118,39}{2042 \times 3140}$
— 40ste	$\frac{5}{2042} \times \frac{97}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{39}$	$\frac{49,965}{2042 \times 3140}$
— 41ste	$\frac{3}{2042} \times \frac{52}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{40}$	$\frac{22,163}{2042 \times 3140}$
— 42ste	$\frac{2}{2042} \times \frac{40}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{41}$	$\frac{10,824}{2042 \times 3140}$
— 43ste	$\frac{1}{2042} \times \frac{30}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{42}$	$\frac{3,865}{2042 \times 3140}$
— 44ste	0	0

Den ersten Beytrag erhält nemlich der Entrepreneur gewiß und sogleich, daher derselbe nicht rabattirt zu werden braucht, die übrigen aber erhält er nur wahrscheinlich. Sucht man die Summe der Zahlen, die in der dritten Columne unter einander stehen, so ist dieselbe 7,0426.., und so vielmal kann also der Entrepreneur rechnen, daß er den Beytrag ohne Abzug erhalte.

§. 23.

Ferner ist der Zins, den der Entrepreneur von dem Antrittsgelde rechnen kann,

1. — — — 5 Rthl. $\times \frac{20}{21}$
2. $\frac{1947}{2042} \times \frac{3060}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^2$
3. $\frac{1849}{2042} \times \frac{2979}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^3$
4. $\frac{1748}{2042} \times \frac{2897}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^4$
5. $\frac{1641}{2042} \times \frac{2815}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^5$
6. $\frac{1531}{2042} \times \frac{2731}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^6$
7. $\frac{1423}{2042} \times \frac{2646}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^7$
8. $\frac{1319}{2042} \times \frac{2561}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^8$
9. $\frac{1217}{2042} \times \frac{2475}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^9$
10. $\frac{1119}{2042} \times \frac{2388}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{10}$
11. $\frac{1025}{2042} \times \frac{2301}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{11}$
12. $\frac{934}{2042} \times \frac{2213}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{12}$
13. $\frac{847}{2042} \times \frac{2123}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{13}$
14. $\frac{764}{2042} \times \frac{2030}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{14}$
15. $\frac{686}{2042} \times \frac{1930}{3140} \times 5$ Rthl. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{15}$

16. $\frac{614}{2042} \times \frac{1832}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{16}$

17. $\frac{549}{2042} \times \frac{1728}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{17}$

18. $\frac{492}{2042} \times \frac{1620}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{18}$

19. $\frac{442}{2042} \times \frac{1507}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{19}$

20. $\frac{398}{2042} \times \frac{1388}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{20}$

21. $\frac{358}{2042} \times \frac{1267}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{21}$

22. $\frac{320}{2042} \times \frac{1149}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{22}$

23. $\frac{284}{2042} \times \frac{1037}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{23}$

24. $\frac{249}{2042} \times \frac{930}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{24}$

25. $\frac{215}{2042} \times \frac{829}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{25}$

26. $\frac{183}{2042} \times \frac{735}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{26}$

27. $\frac{153}{2042} \times \frac{647}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{27}$

28. $\frac{126}{2042} \times \frac{564}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{28}$

29. $\frac{102}{2042} \times \frac{487}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{29}$

30. $\frac{82}{2042} \times \frac{417}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{30}$

31. $\frac{67}{2042} \times \frac{392}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{31}$

32. $\frac{55}{2042} \times \frac{296}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{32}$

33. $\frac{46}{2042} \times \frac{249}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{33}$

34. $\frac{38}{2042} \times \frac{210}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{34}$

35. $\frac{31}{2042} \times \frac{175}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{35}$

36. $\frac{24}{2042} \times \frac{147}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{36}$

37. $\frac{18}{2042} \times \frac{124}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{37}$

38. $\frac{13}{2042} \times \frac{103}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{38}$

39. $\frac{9}{2042} \times \frac{84}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{39}$

40. $\frac{5}{2042} \times \frac{67}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{40}$

41. $\frac{3}{2042} \times \frac{52}{3140} \times 5$ Rt. $\times \left(\frac{20}{21}\right)^{41}$

42. $\frac{2}{2042} \times \frac{40}{3140} \times 5$ Rthl. $\times (\frac{20}{21})^{42}$

43. $\frac{1}{2042} \times \frac{30}{3140} \times 5$ Rthl. $\times (\frac{20}{21})^{43}$

44. 0

Den Zins des ersten Jahres erhält nemlich der Entrepreneur gewiß, aber erst am Ende des Jahres, daher ein einjähriger Rabatt abgerechnet werden muß. Wenn man alle Zahlen der 2ten Columne § 22 mit $\frac{20}{21}$, und darauf noch mit 5 Rthl. multiplicirt; so erhält man die Zahlen dieses §. Und wenn man also die Summe aller Zinse, welche der Entrepreneur von dem Antrittsgelde rechnen kann; finden will; so darf man also nur 7,04262 mit $\frac{20}{21}$ und dann auch noch mit 5 Rthl. multipliciren. Hiedurch erhält man 33,536 Rthl.

Da übrigens so wohl der jährliche Beytrag als der Zins des Antrittscapitals dem Entrepreneur nicht länger zu gute kommt, als so lange Mann und Frau beyde am Leben sind; so fällt daher in die Augen, warum von dem Jahre an, da die Wahrscheinlichkeit oder Hoffnung des Mannes zum Leben Null wird, weder der Beytrag noch der Zins vom Antrittscapital weiter in Rechnung gebracht wird.

§. 24.

Drittens sind die von dem Entrepreneur in Rechnung zu bringenden Pensionen auf ihren jetzigen Werth reduciret, folgende:

Witt=

Wittwenpension auf ihren jetzigen Werth reducirt

1. $\frac{3060}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \frac{20}{21} - \frac{1947}{2042} \times \frac{3060}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \frac{20}{21}$

2. $\frac{2979}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{2} - \frac{1842}{2042} \times \frac{2979}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{2}$

3. $\frac{2897}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{3} - \frac{1748}{2042} \times \frac{2897}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{3}$

4. $\frac{2815}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{4} - \frac{1641}{2042} \times \frac{2815}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{4}$

5. $\frac{2731}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{5} - \frac{1531}{2042} \times \frac{2731}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{5}$

6. $\frac{2646}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{6} - \frac{1483}{2042} \times \frac{2646}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{6}$

7. $\frac{2561}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{7} - \frac{1319}{2042} \times \frac{2561}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{7}$

8. $\frac{2475}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{8} - \frac{1217}{2042} \times \frac{2475}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{8}$

9. $\frac{2388}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{9} - \frac{1119}{2042} \times \frac{2388}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{9}$

10. $\frac{2301}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{10} - \frac{1025}{2042} \times \frac{2301}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{10}$

11. $\frac{2213}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{11} - \frac{934}{2042} \times \frac{2213}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{11}$

12. $\frac{2123}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{12} - \frac{847}{2042} \times \frac{2123}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{12}$

13. $\frac{2030}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{13} - \frac{764}{2042} \times \frac{2030}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{13}$

14. $\frac{1933}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{14} - \frac{686}{2042} \times \frac{1933}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{14}$

15. $\frac{1832}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{15} - \frac{614}{2042} \times \frac{1832}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{15}$

16. $\frac{1728}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{16} - \frac{549}{2042} \times \frac{1728}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{16}$

17. $\frac{1620}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{17} - \frac{492}{2042} \times \frac{1620}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{17}$

18. $\frac{1507}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{18} - \frac{442}{2042} \times \frac{1507}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{18}$

19. $\frac{1388}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19} - \frac{398}{2042} \times \frac{1388}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19}$

20. $\frac{1267}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{20} - \frac{358}{2042} \times \frac{1267}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{20}$

21. $\frac{1149}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{21} - \frac{320}{3140} \times \frac{1149}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{21}$

22. $\frac{1037}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{22} - \frac{284}{2042} \times \frac{1037}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{22}$

23. $\frac{930}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{23} - \frac{249}{2042} \times \frac{930}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{23}$

24. $\frac{829}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{24} - \frac{215}{2042} \times \frac{829}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{24}$

25. $\frac{735}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{25} - \frac{183}{2042} \times \frac{735}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{25}$

26. $\frac{647}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{26} - \frac{153}{2042} \times \frac{647}{3140} \times 100\,\text{Rthl} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{26}$

Wittwenpension auf ihren jetzigen Werth reducirt

27. $\frac{564}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{27}-\frac{126}{2042}\times\frac{564}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{27}$

28. $\frac{487}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{28}-\frac{102}{2042}\times\frac{487}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{28}$

29. $\frac{417}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{29}-\frac{82}{2042}\times\frac{417}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{29}$

30. $\frac{352}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{30}-\frac{67}{2042}\times\frac{352}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{30}$

31. $\frac{296}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{31}-\frac{55}{2042}\times\frac{296}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{31}$

32. $\frac{249}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{32}-\frac{46}{2042}\times\frac{249}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{32}$

33. $\frac{210}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{33}-\frac{38}{2042}\times\frac{210}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{33}$

34. $\frac{175}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{34}-\frac{31}{2042}\times\frac{175}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{34}$

35. $\frac{147}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{35}-\frac{24}{2042}\times\frac{147}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{35}$

36. $\frac{124}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{36}-\frac{18}{2042}\times\frac{124}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{36}$

37. $\frac{103}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{37}-\frac{13}{2042}\times\frac{103}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{37}$

38. $\frac{84}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{38}-\frac{9}{2042}\times\frac{84}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{38}$

39. $\frac{67}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{39}-\frac{5}{2042}\times\frac{67}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{39}$

40. $\frac{52}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{40}-\frac{3}{2042}\times\frac{52}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{40}$

41. $\frac{40}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{41}-\frac{2}{2042}\times\frac{40}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{41}$

42. $\frac{30}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{42}-\frac{1}{2042}\times\frac{30}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{42}$

43. $\frac{22}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{43}$

44. $\frac{15}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{44}$

45. $\frac{10}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{45}$

46. $\frac{7}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{46}$

47. $\frac{9}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{47}$

48. $\frac{4}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{48}$

49. $\frac{3}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{49}$

50. $\frac{2}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{50}$

51. $\frac{1}{3140}\times 100\,\text{Rthl.}\times\left(\frac{20}{21}\right)^{51}$

52. 0

Die

Die Summe von diesem allen besteht aus der Differenz zwischen zweyen Summen; man findet sie, wenn man von der Summe der Werthe, die vor dem Zeichen — stehen, die Summe aller derer abzieht, die nach diesem Zeichen folgen. Die Summe der Werthe, die vor dem Zeichen — stehen, ist gleich dem Werthe einer Leibrente für Lebende allein à 100 Rthlr für einen 50jährigen Rentenirer, aber nach der Sterblichkeitsordnung für das weibliche Geschlecht berechnet. Hat man daher für dergleichen Renten Tafeln, so ist dieser Theil der Wittwenpension sehr leicht gefunden, und bey einer genauen Berechnung einer Wittwenkasse muß man sich also vor allen Dingen solche Tabellen ausrechnen. In Ermangelung derselben kann man sich auch, ohne einen sehr beträchtlichen Fehler befürchten zu dürfen, der Leibrenten Tabelle verbunden mit den Sterblichkeitsordnungen für Rentenirer und für das weibliche Geschlecht auf folgende Art helfen. Man sucht nemlich aus der erst genannten Tabelle den Werth einer Rente eines Rentenirers von dem Alter der Frau, und aus den beyden andern die Zahlen für die mittlere Lebensdauer eben desselben Alters. Hat man dieses alles gefunden, so schließt man: Wie sich die mittlere Lebensdauer des Rentenirers zur mittlern Lebensdauer der Frau verhält, so verhält sich auch die von dem Rentenirer

zu

zu erlegende Mise zu der Mise, welche eine Frau desselben Alters für eine gleich grosse Rente zu erlegen haben würde. Da sich nun die mittlere Lebensdauer eines 50jährigen Rentenirers zur mittlern Lebensdauer einer 50jährigen Frau verhält wie 2024 zu 1747, und die Mise des Rentenirers zu einer Rente à 100 Rthl. die Summe von 1142,52 Rthl. beträgt; so findet man die gedachte Summe aus 1142,52 Rthl. $\times \frac{1747}{2024}$, welches 986,15 Rthl. beträgt.

Die Summe der hinter dem Zeichen — stehenden Werthe läßt sich aus der § gefundenen Summe leicht finden. Man ziehe 1 ab, und multiplicire den Rest mit 100: Also ist der gegenwärtig gesuchte Werth der ganzen von dem Entrepreneur auszuzahlenden Wittwenpension

986,15 Rthl. — (7,04262 Rthl. — 1 Rthl.) $\times$ 100, d. h.

986,15 Rthl. — 6,04262 Rthl. $\times$ 100 = oder

986,15 Rthl. — 604,262 Rthl., und dies giebt

381,888 Rthl.

§. 25.

Endlich hat der Entrepreneur an jährlichen Unkosten à 1 pr. C., da dieselben so lange dauren, als die Frau lebt, zu rechnen.

für

für das Jahr			nach ihrem jetzigen Werthe
1te	—	—	1
2te	—	—	$\frac{3060}{3140} \times \frac{20}{21}$
3te	—	—	$\frac{2979}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^2$
4te	—	—	$\frac{2897}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^3$
5te	—	—	$\frac{2815}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^4$
6te	—	—	$\frac{2731}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^5$
7te	—	—	$\frac{2646}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^6$
8te	—	—	$\frac{2561}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^7$
9te	—	—	$\frac{2475}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^8$
10te	—	—	$\frac{2388}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^9$
11te	—	—	$\frac{2301}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{10}$
12te	—	—	$\frac{2213}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{11}$
13te	—	—	$\frac{2123}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{12}$
14te	—	—	$\frac{2030}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{13}$
15te	—	—	$\frac{1933}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{14}$
16te	—	—	$\frac{1832}{1340} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{15}$
17te	—	—	$\frac{1728}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{16}$
18te	—	—	$\frac{1620}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{17}$
19te	—	—	$\frac{1507}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{18}$
20ste	—	—	$\frac{1388}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{19}$
21ste	—	—	$\frac{1267}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{20}$
22ste	—	—	$\frac{1142}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{21}$
23ste	—	—	$\frac{1037}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{22}$
24ste	—	—	$\frac{930}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{23}$
25ste	—	—	$\frac{829}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{24}$
26ste	—	—	$\frac{735}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{25}$
27ste	—	—	$\frac{647}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{26}$

für

für das Jahr			nach ihrem jetzigen Werthe
28ste	—	—	$\frac{564}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{27}$
29ste	—	—	$\frac{487}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{28}$
30ste	—	—	$\frac{417}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{29}$
31ste	—	—	$\frac{352}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{30}$
32ste	—	—	$\frac{296}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{31}$
33ste	—	—	$\frac{249}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{32}$
34ste	—	—	$\frac{210}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{33}$
35ste	—	—	$\frac{175}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{34}$
36ste	—	—	$\frac{147}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{35}$
37ste	—	—	$\frac{124}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{36}$
38ste	—	—	$\frac{103}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{37}$
39ste	—	—	$\frac{84}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{38}$
40ste	—	—	$\frac{67}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{39}$
41ste	—	—	$\frac{52}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{40}$
42ste	—	—	$\frac{40}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{41}$
43ste	—	—	$\frac{30}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{42}$
44ste	—	—	$\frac{22}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{43}$
45ste	—	—	$\frac{15}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{44}$
46ste	—	—	$\frac{10}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{45}$
47ste	—	—	$\frac{7}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{46}$
48ste	—	—	$\frac{5}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{47}$
49ste	—	—	$\frac{4}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{48}$
50ste	—	—	$\frac{3}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{49}$
51ste	—	—	$\frac{2}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{50}$
52ste	—	—	$\frac{1}{3140} \times \left(\frac{20}{21}\right)^{51}$
53ste	—	—	0

Die

Die Summe aller dieser Werthe ergiebt sich aus § 24 leicht. Sie ist der daselbst gefundenen Summe aller vor dem Zeichen — stehenden Werthe, wenn man dieselbe durch 100 dividirt, und den Quotienten um 1 vermehrt, gleich. Also

$$\frac{986,15 \text{ Rthlr}}{100} - 1 = 8,8615 \text{ Rthlr}.$$

§. 26.

Bisher sind die Summen der einzeln Einnahmen und Ausgaben des Entrepreneurs gefunden worden. Er nimmt ein

1. den jährlichen Beytrag 7,04262 mal,

2. an Zins von dem Antrittscapitale 33,536 Rthlr; und giebt dagegen aus

1. an Wittwenpension 381,888 Rthlr,

2. an jährlichen Unkosten 8,8615 Rthlr. Da die Einnahme und Ausgabe gleich seyn müssen, so läßt sich hieraus der jährliche Beytrag sehr leicht finden.

§. 27.

Zieht man nemlich von der Summe aller Ausgaben, die der Entrepreneur in Anschlag zu bringen hat, den Zins, welchen er vom Antrittscapi-

tale

tale genießt, ab; so giebt die Division des Restes mit der Zahl, welche anzeigt, wie vielmal er den jährlichen Beytrag rechnen könne, den jährlich zu leistenden Beytrag selbst.

§. 28.

Hätte man ausser den schon gedachten Tabellen noch ausführliche Rententabellen für zwey mit einander verbundene Personen, davon die eine männlichen die andere weiblichen Geschlechts wäre, so wäre die Verfertigung einer Tabelle, worin die jährlichen Beyträge für eine erkaufte Wittwenpension enthalten wären, zwar mühsam, aber nach dem bisherigen übrigens nicht mit Schwierigkeiten verknüpft. Es würde aber die Ausrechnung der erst gedachten Tabellen selbst sehr weitläuftig seyn, indem eine und dieselbe männliche Person mit sehr vielen Personen weiblichen Geschlechts in Verbindung zu betrachten wäre. Gesetzt z. B. daß die Personen männlichen Geschlechts zwischen 20 und 60 Jahren genommen würden, und die Frau höchstens 15 Jahr jünger seyn dürfte, und auch sonst noch auf die bey ehelichen Verbindungen in Ansehung des Alters sich findenden Umstände gesehen würde; so müßte doch die Rente eines Mannes in der nun möglichen Verbindung mit einer Frau gesucht werden

Für einen jährigen Mann			mit einer Frau von
60	—	—	45 bis 90 Jahren
59	—	—	44 — 86 —
58	—	—	43 — 83 —
57	—	—	42 — 82 —
56	—	—	41 — 80 —
55	—	—	40 — 76 —
54	—	—	39 — 74 —
53	—	—	38 — 72 —
52	—	—	37 — 70 —
51	—	—	36 — 68 —
50	—	—	35 — 66 —
49	—	—	34 — 65 —
48	—	—	33 — 64 —
47	—	—	32 — 63 —
46	—	—	31 — 60 —
45	—	—	30 — 60 —
44	—	—	29 — 60 —
43	—	—	28 — 60 —
42	—	—	27 — 60 —
41	—	—	26 — 60 —
40	—	—	25 — 60 —
39	—	—	24 — 60 —
38	—	—	23 — 60 —
37	—	—	22 — 60 —

für einen jährigen Mann			mit einer Frau von
36	—	—	21 — 60 Jahren
35	—	—	20 — 60 —
34	—	—	19 — 60 —
33	—	—	18 — 60 —
32	—	—	17 — 60 —
31	—	—	16 — 60 —
30	—	—	15 — 60 —
29	—	—	15 — 60 —
28	—	—	15 — 60 —
27	—	—	15 — 60 —
26	—	—	15 — 60 —
26	—	—	15 — 60 —
25	—	—	15 — 60 —
24	—	—	15 — 60 —
23	—	—	15 — 60 —
22	—	—	15 — 60 —
21	—	—	15 — 60 —
20	—	—	15 — 60 —

Welch eine Menge von Fällen, und wie wichtig ist daher jede Verkürzung der zur Verfertigung einer vollständigen Tabelle von der erwähnten Art nöthigen Arbeit.

§. 29.

Sollte diese Arbeit verkürzet werden; so wäre das einzige Mittel dazu, daß man das Alter der mit der Manns=

Mannsperson verbundenen Frau nicht von Jahr zu Jahr, sondern etwa von 10 zu 10 oder von 5 zu 5 Jahren nähme, und z. B. den 60jährigen Mann mit einer 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90jährigen Frau in Verbindung betrachtete, und für diese Fälle den Werth einer Leibrente berechnete. Wäre dies geschehen, so könnte man den Werth der Leibrente für die zwischen den gefundenen liegende Fälle durch Einschaltung leicht so genau finden, daß die etwa statt findenden Fehler von keiner Beträchtlichkeit wären.

§. 30.

Sollten keine Beyträge gegeben, sondern allein ein Antrittscapital erlegt werden, welches aber bey dem Absterben des Mannes wieder zurückgegeben würde, so müßte ausser dem bey der bisherigen Berechnung angenommen, noch so viel mehr erlegt werden, als erfordert würde, um bey dem zu rechnenden pr. C. jährlich einen dem jährlichen Beytrage gleichen Zins zu erhalten. Sollten hingegen blosse Beyträge gegeben werden, so müßten die nach dem bisherigen gefundenen Beyträge noch um den jährlichen Zins des Antrittscapitals vermehrt werden.

§. 31.

Ueberhaupt ändern sich die Resultate dieser Rechnung, so wie auch sonst überhaupt, so oft in den gegebenen Bedingungen eine Aenderung vorgeht. Wenn man daher wirkliche Wittwenkassen nach einer allgemeinen Berechnung prüfen will, so muß man vor allen Dingen untersuchen, ob die dabey statt findenden Bedingungen eben dieselben sind, die bey der allgemeinen Berechnung angenommen worden waren, und wenn dieselben anders sind, darnach zuvor jene allgemeine Berechnung abändern. Wer sich die Vorschriften dieses und des vorhergehenden Abschnittes hinlänglich bekannt gemacht hat, wird übrigens bey diesem Geschäfte eben keine Schwierigkeit finden, ob es gleich mit vieler Weitläuftigkeit verbunden ist.

§. 32.

Eine ausführlichere Betrachtung der Wittwenkassen, als in dem bisherigen enthalten ist, erfordert eine besondere Abhandlung. Gleichwohl würde ich davon mehr in diese Anleitung gebracht haben, als wirklich geschehen ist, wenn nicht der Hr. Hofrath und Professor Karsten in Halle kürzlich eine Theorie von Wittwenkassen ohne Gebrauch allgebraischer Rechnungen (Halle 1784) herausgegeben hätte, auf die ich mich hier um so viel eher berufen kann, da sich von einem Karsten nichts anders als etwas vortrefliches erwarten läßt. Ich verweise also diejenigen, die auf eine leichte Art ausführlicher über Wittwenkassen unterrichtet seyn wollen, auf diese Schrift.

Achter

Achter Abschnitt,

von

Sterbekassen

und einigen

andern ähnlichen Einrichtungen.

§. 1.

Wer weiß, wie drückend oft die Ausgaben bey Sterbefällen sind, wird weiter keinen Beweis von der Nützlichkeit guter Sterbekassen verlangen. Auch beweiset die Menge der von Zeit zu Zeit errichteten Sterbekassen hinlänglich, daß man dergleichen als Beyfalls würdige Anstalten betrachtet.

§. 2.

Bisweilen vereinigen sich die Glieder eines gewissen Standes dahin, daß jeder von ihnen, so oft einer aus ihrer Mitte stirbt, den Erben des Verstorbenen einen ein vor allemal bestimmten Beytrag gebe. Dergleichen Vereinigungen giebt es z. B. oft unter den Predigern auf dem Lande in einem bestimmten Districte. Bey diesen Sterbekassen giebt es keine Berechnungen, und der gedachte Beytrag ist mehr eine freywillige Unterstützung, wodurch man den Seinigen ein Recht zu einer ähnlichen Beyhülfe verschafft, als Geld, das wettweise gegeben wird, um es vielleicht mit beträchtlichem Vortheile wieder zu erhalten.

§. 3.

Von diesen Gesellschaften sind diejenigen sehr verschieden, die aus einer vestgesetzten Anzahl von Gliedern, die bey entstehendem Abgange immer wieder ersetzt werden sollen, bestehen, und wo die Erben des Verstorbenen immer eine und dieselbe benannte Summe erhalten. Da die wenigsten von der wahren Beschaffenheit dieser Sterbekassen einen richtigen Begriff haben, und dadurch entweder zur Errichtung solcher Kassen oder zur Theilnehmung daran verführt werden; so wird es nicht undienlich seyn, diese wahre Beschaffenheit auf eine so leichte Art als möglich zu erklären.

§. 4.

Ueberhaupt ist leicht einzusehen, daß Kassen, die weiter keine Einnahme haben, als die Beyträge der Interessenten an und für sich selbst genommen, so daß keine Benutzung derselben in Anschlag gebracht werden kann, und wo ein jeder Interessent mehr daraus erhalten soll, als er beygetragen hat, am Ende nicht bestehen können, sondern zum Schaden der letzten Interessenten zu Grunde gehen müssen. Und gerade dies ist der Fall bey den gedachten Sterbekassen. Denn wenn auch einige so viel

bey=

beytragen, als sie wieder erhalten, so ist ihre Anzahl so klein, daß auf sie schon aus diesem Grunde gar nicht gesehen werden darf.

§. 5.

Einen bestimmten Fall zu nehmen, so besteht z. B. eine solche Sterbekasse aus 301 Mitgliedern, wovon ein jeder bey einem sich ereignenden Sterbefalle 16 gr. beyträgt, und die Erben des Verstorbenen 200 Rthlr. erhalten, und wo, so oft ein Mitglied stirbt, ein Exspectant in seine Stelle tritt. Je früher ein Mitglied stirbt, desto nachtheiliger ist solches für die Kasse oder für die noch lebenden Interessenten, und der allergünstigste Fall, der sich hier gedenken läßt, wäre also der, daß die Interessenten gerade in der Ordnung ausstürben, als sie eingetreten wären. Dieser Fall soll also betrachtet werden, und dann wird der Schluß auf die übrigen Fälle sehr leicht seyn.

§. 6.

Es stirbt also,	hat beygetragen,	seine Erben erhalten
der 1te —	— 0 —	200 Rthlr.
— 2 - —	— 16 gr. —	200 Rthlr.
— 3 - —	1 Rthlr. 8 gr. —	200 Rthlr.
— 4 - —	2 Rthlr. - — —	200 Rthlr.
— 5 - —	2 Rthlr. 16 gr. —	200 Rthlr.
— 6 - —	3 Rthlr. 8 gr. —	200 Rthlr.
— 7 - —	4 Rthlr. - — —	200 Rthlr.

 es

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
der 8te	—	4 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 9 -	—	5 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 10 -	—	6 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 11 -	—	6 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 12 -	—	7 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 13 -	—	8 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 14 -	—	8 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 15 -	—	9 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 16 -	—	10 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 17 -	—	10 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 18 -	—	11 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 19 -	—	12 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 20 -	—	12 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 21 -	—	13 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 22 -	—	14 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 23 -	—	14 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 24 -	—	15 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 25 -	—	16 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 26	—	16 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 27 -	—	17 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 28 -	—	18 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 29 -	—	18 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 30 -	—	19 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 31 -	—	20 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 32 -	—	20 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.

es

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
— 33 -	—	21 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 34 -	—	22 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 35 -	—	22 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 36 -	—	23 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 37 -	—	24 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 38 -	—	24 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 39 -	—	25 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 40 -	—	26 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 41 -	—	26 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 42 -	—	27 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 43 -	—	28 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 44 -	—	28 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 45 -	—	29 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 46 -	—	30 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 47 -	—	30 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 48 -	—	31 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 49 -	—	32 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 50 -	—	32 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 51 -	—	33 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 52 -	—	34 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 53 -	—	34 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 54 -	—	35 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr
— 55 -	—	36 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 56 -	—	36 Rthlr	16 gl.	—	200 Rthlr
— 57 -	—	37 Rthlr	8 gl.	—	200 Rthlr

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
der 58ste	—	38 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 59 -	—	38 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 60 -	—	39 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 61 -	—	40 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 62 -	—	40 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 63 -	—	41 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 64 -	—	42 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 65 -	—	42 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 66 -	—	43 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 67 -	—	44 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 68 -	—	44 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 69 -	—	45 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 70 -	—	46 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 71 -	—	46 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 72 -	—	47 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 73 -	—	48 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 74 -	—	48 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 75 -	—	49 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 76 -	—	50 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 77 -	—	50 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 78 -	—	51 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 79 -	—	52 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 70 -	—	52 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 81 -	—	53 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 82 -	—	54 Rthl.	—	—	200 Rthl.

es

es stirbt		hat beygetragen		seine Erben erhalten
der 83ste	—	54 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 84 -	—	55 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 85 -	—	56 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 86 -	—	56 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 87 -	—	57 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 88 -	—	58 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 89 -	—	58 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 90 -	—	59 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 91 -	—	60 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 92 -	—	60 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 93 -	—	61 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 94 -	—	62 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 95 -	—	62 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 96 -	—	63 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 97 -	—	64 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 98 -	—	64 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 99 -	—	65 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 100 -	—	66 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 101 -	—	66 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 102 -	—	67 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 103 -	—	68 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 104 -	—	68 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.
— 105 -	—	69 Rthl. 8 gr.	—	200 Rthl.
— 106 -	—	70 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 107 -	—	70 Rthl. 16 gr.	—	200 Rthl.

es

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
der 108te	—	71 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 109 -	—	72 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 110 -	—	72 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 111 -	—	73 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 112 -	—	74 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 113 -	—	74 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 114 -	—	75 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 115 -	—	76 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 116 -	—	76 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 117 -	—	77 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 118 -	—	78 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 119 -	—	78 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 120 -	—	79 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 121 -	—	80 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 122 -	—	80 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 123 -	—	81 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 124 -	—	82 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 125 -	—	82 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 126 -	—	83 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 127 -	—	84 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 128 -	—	84 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 129 -	—	85 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.
— 130 -	—	86 Rthl.	—	—	200 Rthl.
— 131 -	—	86 Rthl.	16 gr.	—	200 Rthl.
— 132 -	—	87 Rthl.	8 gr.	—	200 Rthl.

es

es stirbt	hat beygetragen	seine Erben erhalten
der 133ste	— 88 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 134 -	— 88 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 135 -	— 89 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 136 -	— 90 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 137 -	— 90 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 138 -	— 91 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 139 -	— 92 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 140 -	— 92 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 141 -	— 93 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 142 -	— 94 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 143 -	— 94 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 144 -	— 95 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 145 -	— 96 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 146 -	— 96 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 147 -	— 97 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 148 -	— 98 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 149 -	— 98 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 150 -	— 99 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 151 -	— 100 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 152 -	— 100 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 153 -	— 101 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 154 -	— 102 Rthl. —	— 200 Rthl.
— 155 -	— 102 Rthl. 16 gr.	— 200 Rthl.
— 156 -	— 103 Rthl. 8 gr.	— 200 Rthl.
— 157 -	— 104 Rthl. —	— 200 Rthl.

es stirbt		hat beygetragen		seine Erben erhalten
der 158ste	—	104 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 159 -	—	105 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 160 -	—	106 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 161 -	—	106 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 162 -	—	107 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 163 -	—	108 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 164 -	—	108 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 165 -	—	109 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 166 -	—	110 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 167 -	—	110 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 168 -	—	111 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 169 -	—	112 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 170 -	—	112 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 171 -	—	113 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 172 -	—	114 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 173 -	—	114 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 174 -	—	115 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 175 -	—	116 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 176 -	—	116 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 177 -	—	117 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 178 -	—	118 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 179 -	—	118 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.
— 180 -	—	119 Rthl. 8 gl.	—	200 Rthl.
— 181 -	—	120 Rthl. —	—	200 Rthl.
— 182 -	—	120 Rthl. 16 gl.	—	200 Rthl.

es

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
der 183ste	—	121 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 184 -	—	122 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 185 -	—	122 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 186 -	—	123 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 187 -	—	124 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 188 -	—	124 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 189 -	—	125 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 190 -	—	126 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 191 -	—	126 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 192 -	—	127 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 193 -	—	128 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 194 -	—	128 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 195 -	—	129 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 196 -	—	130 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 197 -	—	130 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 198 -	—	131 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 199 -	—	132 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 200 -	—	132 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 201 -	—	133 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 202 -	—	134 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 203 -	—	134 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 204 -	—	135 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 205 -	—	136 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 206 -	—	136 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 207 -	—	137 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr

es

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
der 208te	—	138 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 209 -	—	138 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 210 -	—	139 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 211 -	—	140 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 212 -	—	140 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 213 -	—	141 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 214 -	—	142 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 215 -	—	142 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 216 -	—	143 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 217 -	—	144 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 218 -	—	144 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 219 -	—	145 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 220 -	—	146 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 221 -	—	146 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 222 -	—	147 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 223 -	—	148 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 224 -	—	148 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 225 -	—	149 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 226 -	—	150 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 227 -	—	150 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 228 -	—	151 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 229 -	—	152 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 230 -	—	152 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 231 -	—	153 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 232 -	—	154 Rthlr	—	—	200 Rthlr

es

es stirbt	hat beygetragen	seine Erben erhalten
der 233ste	154 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 234 -	155 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 235 -	156 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 236 -	156 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 237 -	157 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 238 -	158 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 239 -	158 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 240 -	159 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 241 -	160 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 242 -	160 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 243 -	161 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 244 -	162 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 245 -	162 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 246 -	163 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 247 -	164 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 248 -	164 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 249 -	165 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 250 -	166 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 251 -	166 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 252 -	167 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 253 -	168 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 254 -	168 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.
— 255 -	169 Rthlr. 8 gr.	200 Rthlr.
— 256 -	170 Rthlr. —	200 Rthlr.
— 257 -	170 Rthlr. 16 gr.	200 Rthlr.

es stirbt		hat beygetragen			seine Erben erhalten
der 258ste	—	171 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 259 -	—	172 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 260 -	—	172 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 261 -	—	173 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 262 -	—	174 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 263 -	—	174 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 264 -	—	175 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 265 -	—	176 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 266 -	—	176 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 267 -	—	177 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 268 -	—	178 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 269 -	—	178 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 270 -	—	179 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 271 -	—	180 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 272 -	—	180 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 273 -	—	181 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 274 -	—	182 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 275 -	—	182 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 276 -	—	183 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 277 -	—	184 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 278 -	—	184 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 279 -	—	185 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr
— 280 -	—	186 Rthlr	—	—	200 Rthlr
— 281 -	—	186 Rthlr	16 gr	—	200 Rthlr
— 282 -	—	187 Rthlr	8 gr	—	200 Rthlr

es

es stirbt	hat beygetragen	seine Erben erhalten
der 283ste	— 188 Rthlr. —	— 200 Rthlr.
— 284 -	— 188 Rthlr. 16 gr.	— 200 Rthlr.
— 285 -	— 189 Rthlr. 8 gr.	— 200 Rthlr.
— 286 -	— 190 Rthlr. —	— 200 Rthlr.
— 287 -	— 190 Rthlr. 16 gr.	— 200 Rthlr.
— 288 -	— 191 Rthlr. 8 gr.	— 200 Rthlr.
— 289 -	— 192 Rthlr. —	— 200 Rthlr.
— 290 -	— 192 Rthlr. 16 gr.	— 200 Rthlr.
— 291 -	— 193 Rthlr. 8 gr.	— 200 Rthlr.
— 292 -	— 194 Rthlr. —	— 200 Rthlr.
— 293 -	— 194 Rthlr. 16 gr.	— 200 Rthlr.
— 294 -	— 195 Rthlr. 8 gr.	— 200 Rthlr.
— 295 -	— 196 Rthlr. —	— 200 Rthlr.
— 296 -	— 196 Rthlr. 16 gr.	— 200 Rthlr.
— 297 -	— 197 Rthlr. 8 gr.	— 200 Rthlr.
— 298 -	— 198 Rthlr. —	— 200 Rthlr.
— 299 -	— 198 Rthlr. 16 gr.	— 200 Rthlr.
— 300 -	— 199 Rthlr. 8 gr.	— 200 Rthlr.
— 301 -	— 200 Rthlr. —	- 200 Rthlr.

§. 7.

Hier hat also bloß der letzte so viel beygetragen, als seine Erben wieder erhalten, bey allen übrigen ist der gesammte Beytrag geringer, als die bey ihrem Tode von der Kasse zu bezahlenden Summe. Ueberhaupt beträgt

die Summe aller Auszahlungen 60200 Rthl.
die Summe aller dazu erhaltenen Beyträge 30100 Rthl.

und die ersten 301 Glieder erhalten also 30100 Rthl.
mehr als sie beygetragen haben. Welche üble Einrichtung!

§. 8.

Gleichwohl behauptet man oft, daß die Mitglieder von dergleichen Sterbekassen keiner Gefahr ausgesetzt seyn, so lange es nicht an Exspectanten fehle, welche sogleich die Stelle der verstorbenen Mitglieder wieder ausfüllen, und die Zahl der Interessenten vollzählig bleibe. Dies kann man zugeben; aber nicht, wie daneben ebenfalls behauptet zu werden pflegt, daß es wahrscheinlich sey, daß es nie an Exspectanten fehlen werde, indem ein jedes Mitglied verbunden sey, einen Exspectanten zu stellen u. d. gl. Denn stürben die Mitglieder gerade in der Ordnung, als bisher angenommen worden ist, so würden alle diejenigen, welche nach den ersten 301 Gliedern hinzuträten, genau eben so viel beytragen müssen, als ihre Erben bey ihrem Tode erhielten: und wer könnte dabey Lust ein Mitglied zu werden bekommen?

§. 9.

Sterben die Mitglieder in einer andern Ordnung, und von den eintretenden Exspectanten einige eher, als die ersten Mitglieder, so gewinnt dadurch die Kasse nicht, sondern es entsteht vielmehr daraus Nachtheil für sie, so daß,

wenn

wenn zweymal 301 Mitglieder verstorben sind, der Ueberschuß der Ausgabe über die Summe der erhaltenen Beyträge noch mehr als 30100 Rthlr beträgt.

§. 10.

Dieser Ueberschuß ist nun anzusehen, als ob er von den noch lebenden Mitgliedern hergeschossen sey: und sollen sie ihn wieder erhalten, so müssen die nach ihnen eintretenden Mitglieder denselben hergeben. Je länger also eine solche Kasse besteht, desto weniger Reiz bleibt für neue Mitglieder übrig, und sie würden thöricht handeln, wenn sie sich verbindlich machen wollten. Es muß also dergleichen Kassen endlich an Exspectanten fehlen, und sobald dieser Fall eintritt, so verlieren die Mitglieder, wenn auch die jedesmal noch existirenden ihren Beytrag fortsetzen, je länger sie leben, desto mehr.

§. 11.

Denn bestünde die Kasse ohne alle Exspectanten bloß aus 301 Mitgliedern, so würden

die Erben des 1ten, der stürbe,			erhalten	200 Rthlr
—	2ten	—	—	199 Rthlr 8 gr.
—	3ten	—	—	198 Rthlr 16 gr.
—	4ten	—	—	198 Rthlr —
—	5ten	—	—	197 Rthlr 8 gr.
—	6ten	—	—	196 Rthlr 16 gr.
—	7ten	—	—	196 Rthlr —

 die

die Erben des	8ten, der stürbe		erhalten	195 Rthlr. 8 gr.
—	9ten	—	—	194 Rthlr. 16 gr.
—	10ten	—	—	194 Rthlr. —
—	11ten	—	—	193 Rthlr. 8 gr.
—	12ten	—	—	192 Rthlr. 16 gr.
—	13ten	—	—	192 Rthlr. —
—	14ten	—	—	191 Rthlr. 8 gr.
—	15ten	—	—	190 Rthlr. 16 gr.
—	16ten	—	—	190 Rthlr. —
—	17ten	—	—	189 Rthlr. 8 gr.
—	18ten	—	—	188 Rthlr. 16 gr.
—	19ten	—	—	188 Rthlr. —
—	20sten	—	—	187 Rthlr. 8 gr.
—	21sten	—	—	186 Rthlr. 16 gr.
—	22sten	—	—	186 Rthlr. —
—	23sten	—	—	185 Rthlr. 8 gr.
—	24sten	—	—	184 Rthlr. 16 gr.

und überhaupt würden die Sterbesummen nun auf eben die Art abnehmen, als nach § 6 die Beytragssummen zunehmen, wenn kein Mitglied eher aufhörte beyzutragen, als bey seinem Tode.

§. 12.

Gewöhnlicher Weise aber hört die Verpflichtung zum Beytrage auf, wenn so viel beygetragen worden, als die Sterbesumme beträgt, und dann ist die Abnahme noch viel grösser und schneller, und es muß ein grosser Theil ganz

leer

leer ausgehen. Ueberhaupt kann diese ganze Rechnung noch viel schärfer geführt werden, als hier geschehen ist; aber alsdann erblickt man die Gründe für die Dauer von dergleichen Kassen noch vielmehr in ihrer Schwachheit, und es konnte daher der eingeschlagene Weg um so viel eher genommen werden.

§. 13.

Bisweilen erstreckt sich die Verbindlichkeit beyzutragen nur auf 200 Sterbefälle. Ist dies, so sind diese Sterbekassen noch vielmehr auf Sand gebaut. Alsdann kann Niemand so viel beytragen, als er wieder erhält, und Kassen, wo immer mehr ausgegeben als eingenommen wird, müssen endlich ein Ende mit Schrecken nehmen.

§. 14.

Die Hoffnung, die man auf die nie fehlen sollenden Exspectanten baut, gleicht der Hoffnung, die sich ein Schuldner machen würde, wenn er, ohne das geringste eigene Vermögen, bey einer grossen Menge von Schulden glauben wollte, daß es ihm gleichwohl nie mangeln werde, indem sich gegen einen Creditor, der ein Capital aufkündigte, immer mehrere andere zu einem neuen Anlehen bereit und willig finden würden. Wenn man unpartheyisch untersucht, so wird man wider dieses Gleichniß nichts einzuwenden finden.

§. 15.

Bisweilen muß ein jedes noch lebende Mitglied bey einem sich ereignenden Sterbefalle noch etwas mehr geben, als die Erben des Verstorbenen erhalten; anstatt 16 ℋ werden z. B. 17 ℋ beygetragen, 16 ℋ werden den Erben des Verstorbenen ausbezahlt, und 1 ℋ auf unvermeidliche Unkosten gerechnet. Da bey einem jeden Sterbefalle 300 Beyträge einlaufen, so fliessen dadurch jedesmal 300 ℋ oder 12 Rℓ 12 ℋ in die Unkostenkasse, und dies beträgt für die ganze Klasse der auf einmal eintretenden Glieder 300 mal 12 Rℓ 12 ℋ oder 3750 Rℓ. Diese Ausgabe der Mitglieder ist bisher noch nicht in Anschlag gebracht worden.

§. 16.

Gut eingerichtete Sterbekassen haben mit gut eingerichteten Wittwenkassen oder auch mit den Leibrenten vieles gemein. Ohne eine beträchtliche Anzahl von Mitgliedern z. B. setzt sich der Entrepreneur davon einem grossen Risiko aus, denn es muß auch hier alles nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit bestimmt werden. Ferner ist es nicht möglich, daß alle Theilnehmer oder vielmehr ihre Erben mehr wieder erhalten, als jene beygetragen haben; es müssen vielmehr einige schlechterdings weniger bekommen, die nemlich, welche ein hohes Alter erreichen. Endlich kann eine gut eingerichtete Sterbekasse durchaus nicht als eine Einrichtung betrachtet werden, wozu die

Hoff=

Hoffnung zum Gewinne empfehlen und Theilnehmer daran herbey locken müsse.

§. 17.

Um zu zeigen, wie gut eingerichtete Sterbekassen berechnet werden können, so will ich einen einzeln Fall betrachten, den nemlich, daß sich ein 60jähriger ein Sterbegeld von 100 Rthl. erkaufen wollte, und gefragt würde, **entweder**, wie viel er dafür jetzt zu geben habe, **oder** wie groß der Beytrag sey, den er bis an seinen Tod dafür entrichten müsse?

§. 18.

Es fällt hier leicht in die Augen, einmal, daß die ganze Berechnung nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit geführt, und also der Vertrag zwischen einem Entrepreneur einer Sterbekasse und einem Mitgliede davon nicht anders als eine Wette zwischen beyden betrachtet werden müsse; und zweytens, daß die zum Grunde zu legende Sterblichkeitsordnung keine andere als die allgemeine seyn könne, indem die, die sich entschliessen, an einer Sterbekasse Antheil zu nehmen, in Ansehung ihrer Gesundheit wenigstens keine auserlesene Personen sind.

§. 19.

Soll also ausgerechnet werden, wie viel ein 60jähriger zu bezahlen habe, um seinen Erben bey seinem Tode 100 Rthl. zu versichern, so geht er mit dem Entrepreneur eine Wette auf alle Jahre, die er noch leben könnte, ein, und bezahlt ihm

jetzt mit 5 pr. C. Rabatt

für das 1te Jahr — $\frac{101}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20}{21}$

— 2te — — $\frac{103}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^2}{21^2}$

— 3te — — $\frac{105}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^3}{21^3}$

— 4te — — $\frac{108}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^4}{21^4}$

— 5te — — $\frac{106}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^5}{21^5}$

— 6te — — $\frac{104}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^6}{21^6}$

— 7te — — $\frac{101}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^7}{21^7}$

— 8te — — $\frac{98}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^8}{21^8}$

— 9te — — $\frac{96}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^9}{21^9}$

— 10te — — $\frac{94}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^{10}}{21^{10}}$

— 11te — — $\frac{92}{2157} \times 100$ Rthlr. $\times \frac{20^{11}}{21^{11}}$

für

jetzt mit 5 pr. C. Rabatt

für das 12te Jahr — $\frac{90}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{12}}{21^{12}}$

— 13te — — $\frac{89}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{13}}{21^{13}}$

— 14te — — $\frac{87}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{14}}{21^{14}}$

— 15te — — $\frac{84}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{15}}{21^{15}}$

— 16te — — $\frac{81}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{16}}{21^{16}}$

— 17te — — $\frac{77}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{17}}{21^{17}}$

— 18te — — $\frac{72}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{18}}{21^{18}}$

— 19te — — $\frac{76}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{19}}{21^{19}}$

— 20ste — — $\frac{66}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{20}}{21^{20}}$

— 21ste — — $\frac{58}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{21}}{21^{21}}$

— 22ste — — $\frac{51}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{22}}{21^{22}}$

— 23ste — — $\frac{44}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{23}}{21^{23}}$

für

jetzt mit 5 pr. C. Rabatt

für das 24ste Jahr	—	$\frac{35}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{24}}{21^{24}}$
— 25ste —	—	$\frac{29}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{25}}{21^{25}}$
— 26ste —	—	$\frac{26}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{26}}{21^{26}}$
— 27ste —	—	$\frac{23}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{27}}{21^{27}}$
— 28ste —	—	$\frac{20}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{28}}{21^{28}}$
— 29ste —	—	$\frac{16}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{29}}{21^{29}}$
— 30ste —	—	$\frac{13}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{30}}{21^{30}}$
— 31ste —	—	$\frac{11}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{31}}{21^{31}}$
— 32ste —	—	$\frac{10}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{32}}{21^{32}}$
— 33ste —	—	$\frac{9}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{33}}{21^{33}}$
— 34ste —	—	$\frac{9}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{34}}{21^{34}}$
— 35ste —	—	$\frac{8}{2157} \times 100$ Rthlr $\times \frac{20^{35}}{21^{35}}$

für

		jetzt mit 5 pr. C. Rabatt
für das 36ste Jahr	—	$\frac{7}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{36}}{21^{36}}$
— 37ste —	—	$\frac{7}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{37}}{21^{37}}$
— 38ste —	—	$\frac{6}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{38}}{21^{38}}$
— 39ste —	—	$\frac{5}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{39}}{21^{39}}$
— 40ste —	—	$\frac{4}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{40}}{21^{40}}$
— 41ste —	—	$\frac{4}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{41}}{21^{41}}$
— 42ste —	—	$\frac{3}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{42}}{21^{42}}$
— 43ste —	—	$\frac{1}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{43}}{21^{43}}$
— 44ste —	—	$\frac{1}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{44}}{21^{44}}$
— 45ste —	—	$\frac{1}{2157} \times 100$ Rthl. $\times \frac{20^{45}}{21^{45}}$
— 46ste —	—	0

§. 20.

Wie man die Summe aller dieser Werthe, und also auch das Capital, wodurch sich ein 60jähriger ein Sterbegeld à 100 Rthl. erkaufen kann, findet, ist aus den öfter

schon

schon da gewesenen ähnlichen Fällen bekannt, daher ich mich hierbey jetzt nicht aufhalten will. Bey diesem Falle zahlt ein Mitglied immer weniger als es wieder erhält, denn der Entrepreneur berechnet auch den Zins; allein wenn es lange lebt, kann es weniger erhalten, als das Antrittsgeld mit dem zu rechnenden Zinse betragen haben würde.

§. 21.

Würden aber blosse Beyträge entrichtet und kein Einkaufsgeld gegeben; so müßte das eingetretene 60jährige Mitglied rechnen

für sein Jahr			an Beytrage auf jetzigen Werth gebracht
— 60stes	—	—	1
— 61stes	—	—	$\frac{2056}{2157} \times \frac{20}{21}$
— 62stes	—	—	$\frac{1953}{2157} \times \frac{20^2}{21^2}$
— 63stes	—	—	$\frac{1848}{2157} \times \frac{20^3}{21^3}$
— 64stes	—	—	$\frac{1740}{2157} \times \frac{20^4}{21^4}$
— 65stes	—	—	$\frac{1634}{2157} \times \frac{20^5}{21^5}$
— 66stes	—	—	$\frac{1530}{2157} \times \frac{20^6}{21^6}$

für

für sein Jahr			an Beytrage auf jetzigen Werth gebracht
— 67stes	—	—	$\frac{1429}{2157} \times \frac{20^7}{21^7}$
— 68stes	—	—	$\frac{1331}{2157} \times \frac{20^8}{21^8}$
— 69stes	—	—	$\frac{1235}{2157} \times \frac{20^9}{21^9}$
— 70stes	—	—	$\frac{1141}{2157} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$
— 71stes	—	—	$\frac{1049}{2157} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$
— 72stes	—	—	$\frac{959}{2157} \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$
— 73stes	—	—	$\frac{870}{2157} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$
— 74stes	—	—	$\frac{783}{2157} \times \frac{20^{14}}{21^{14}}$
— 75stes	—	—	$\frac{699}{2157} \times \frac{20^{15}}{21^{15}}$
— 76stes	—	—	$\frac{618}{2157} \times \frac{20^{16}}{21^{16}}$
— 77stes	—	—	$\frac{541}{2157} \times \frac{20^{17}}{21^{17}}$
— 78stes	—	—	$\frac{462}{2157} \times \frac{20^{18}}{21^{18}}$

für

für sein Jahr			an Beytrage auf jetzigen Werth gebracht
— 79stes	—	—	$\frac{403}{2157} \times \frac{20^{19}}{21^{19}}$
— 80stes	—	—	$\frac{345}{2157} \times \frac{20^{20}}{21^{20}}$
— 81stes	—	—	$\frac{294}{2157} \times \frac{20^{21}}{21^{21}}$
— 82stes	—	—	$\frac{250}{2157} \times \frac{20^{22}}{21^{22}}$
— 83stes	—	—	$\frac{215}{2157} \times \frac{20^{23}}{21^{23}}$
— 84stes	—	—	$\frac{186}{2157} \times \frac{20^{24}}{21^{24}}$
— 85stes	—	—	$\frac{160}{2157} \times \frac{20^{25}}{21^{25}}$
— 86stes	—	—	$\frac{137}{2157} \times \frac{20^{26}}{21^{26}}$
— 87stes	—	—	$\frac{117}{2157} \times \frac{20^{27}}{21^{27}}$
— 88stes	—	—	$\frac{101}{2157} \times \frac{20^{28}}{21^{28}}$
— 89stes	—	—	$\frac{88}{2157} \times \frac{20^{29}}{21^{29}}$
— 90stes	—	—	$\frac{77}{2157} \times \frac{20^{30}}{21^{30}}$
— 91stes	—	—	$\frac{67}{2157} \times \frac{20^{31}}{21^{31}}$

für

Für sein Jahr			an Beytrage auf jetzigen Werth gebracht
— 92stes	—	—	$\frac{58}{2157} \times \frac{20^{32}}{21^{32}}$
— 93stes	—	—	$\frac{47}{2157} \times \frac{20^{33}}{21^{33}}$
— 94stes	—	—	$\frac{39}{2157} \times \frac{20^{34}}{21^{34}}$
— 95stes	—	—	$\frac{32}{2157} \times \frac{20^{35}}{21^{35}}$
— 96stes	—	—	$\frac{25}{2157} \times \frac{20^{36}}{21^{36}}$
— 97stes	—	—	$\frac{19}{2157} \times \frac{20^{37}}{21^{37}}$
— 98stes	—	—	$\frac{14}{2157} \times \frac{20^{38}}{21^{38}}$
— 99stes	—	—	$\frac{10}{2157} \times \frac{20^{39}}{21^{39}}$
— 100tes	—	—	$\frac{6}{2157} \times \frac{20^{40}}{21^{40}}$
— 101stes	—	—	$\frac{3}{2157} \times \frac{20^{41}}{21^{41}}$
— 102tes	—	—	$\frac{2}{2157} \times \frac{20^{42}}{21^{42}}$
— 103tes	—	—	$\frac{1}{2157} \times \frac{20^{43}}{21^{43}}$
— 104tes	—	—	0

§. 22.

Dagegen beträgt das Sterbegeld, wenn man dasselbe nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit und der Rabattrechnung bestimmt,

für sein Jahr		an jetzigem Werthe
61stes	$\frac{2157}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20}{21}$	$- \frac{2056}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20}{21}$
62stes	$\frac{2056}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^2}{21^2}$	$- \frac{1953}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^2}{21^2}$
63stes	$\frac{1953}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^3}{21^3}$	$- \frac{1848}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^3}{21^3}$
64stes	$\frac{1848}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^4}{21^4}$	$- \frac{1740}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^4}{21^4}$
65stes	$\frac{1740}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^5}{21^5}$	$- \frac{1634}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^5}{21^5}$
66stes	$\frac{1634}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^6}{21^6}$	$- \frac{1530}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^6}{21^6}$
67stes	$\frac{1530}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^7}{21^7}$	$- \frac{1429}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^7}{21^7}$
68stes	$\frac{1429}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^8}{21^8}$	$- \frac{1331}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^8}{21^8}$
69stes	$\frac{1331}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^9}{21^9}$	$- \frac{1235}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^9}{21^9}$
70stes	$\frac{1235}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$	$- \frac{1141}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$

für

für sein Jahr an jetzigem Werthe

- 71stes - $\frac{1141}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{11}}{21^{11}} - \frac{1049}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$

- 72stes - $\frac{1049}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{12}}{21^{12}} - \frac{959}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$

- 73stes - $\frac{959}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{13}}{21^{13}} - \frac{870}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$

- 74stes - $\frac{870}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{14}}{21^{14}} - \frac{783}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{14}}{21^{14}}$

- 75stes - $\frac{783}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{15}}{21^{15}} - \frac{699}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{15}}{21^{15}}$

- 76stes - $\frac{699}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{16}}{21^{16}} - \frac{618}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{16}}{21^{16}}$

- 77stes - $\frac{618}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{17}}{21^{17}} - \frac{541}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{17}}{21^{17}}$

- 78stes - $\frac{541}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{18}}{21^{18}} - \frac{469}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{18}}{21^{18}}$

- 79stes - $\frac{469}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{19}}{21^{19}} - \frac{403}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{19}}{21^{19}}$

- 80stes - $\frac{403}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{20}}{21^{20}} - \frac{345}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{20}}{21^{20}}$

- 81stes - $\frac{345}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{21}}{21^{21}} - \frac{294}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{21}}{21^{21}}$

- 82stes - $\frac{294}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{22}}{21^{22}} - \frac{250}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{22}}{21^{22}}$

für sein Jahr an jetzigem Werthe

- 83stes - $\frac{250}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{23}}{21^{23}} - \frac{215}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{23}}{21^{23}}$
- 84stes - $\frac{215}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{24}}{21^{24}} - \frac{186}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{24}}{21^{24}}$
- 85stes - $\frac{186}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{25}}{21^{25}} - \frac{160}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{25}}{21^{25}}$
- 86stes - $\frac{160}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{26}}{21^{26}} - \frac{137}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{26}}{21^{26}}$
- 87stes - $\frac{137}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{27}}{21^{27}} - \frac{117}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{27}}{21^{27}}$
- 88stes - $\frac{117}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{28}}{21^{28}} - \frac{101}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{28}}{21^{28}}$
- 89stes - $\frac{101}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{29}}{21^{29}} - \frac{88}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{29}}{21^{29}}$
- 90stes - $\frac{88}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{30}}{21^{30}} - \frac{77}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{30}}{21^{30}}$
- 91stes - $\frac{77}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{31}}{21^{31}} - \frac{67}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{31}}{21^{31}}$
- 92stes - $\frac{67}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{32}}{21^{32}} - \frac{58}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{32}}{21^{32}}$
- 93stes - $\frac{58}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{33}}{21^{33}} - \frac{47}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{33}}{21^{33}}$
- 94stes - $\frac{47}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{34}}{21^{34}} - \frac{39}{2157} \times 100\,\text{Rthl.} \times \frac{20^{34}}{21^{34}}$

für

für sein Jahr an jetzigem Werthe

- 95stes - $\frac{39}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{35}}{21^{35}} - \frac{32}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{35}}{21^{35}}$

- 96stes - $\frac{32}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{36}}{21^{36}} - \frac{25}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{36}}{21^{36}}$

- 97stes - $\frac{25}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{37}}{21^{37}} - \frac{19}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{37}}{21^{37}}$

- 98stes - $\frac{19}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{38}}{21^{38}} - \frac{14}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{38}}{21^{38}}$

- 99stes - $\frac{14}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{39}}{21^{39}} - \frac{10}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{39}}{21^{39}}$

- 100tes - $\frac{10}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{40}}{21^{40}} - \frac{6}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{40}}{21^{40}}$

- 101tes - $\frac{6}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{41}}{21^{41}} - \frac{3}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{41}}{21^{41}}$

- 102tes - $\frac{3}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{42}}{21^{42}} - \frac{2}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{42}}{21^{42}}$

- 103tes - $\frac{2}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{43}}{21^{43}} - \frac{1}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{43}}{21^{43}}$

- 104tes - $\frac{1}{2157}\times 100$ Rthl. $\times\frac{20^{44}}{21^{44}} - 0$

105tes — 0

§. 23.

Wenn man Leibrententabellen hätte, die nach der allgemeinen Sterblichkeitsordnung ausgerechnet wären, so wäre es sehr leicht, nicht nur die Summen der Werthe § 21 und § 22 zu finden, sondern auch darauf den gesuchten Beytrag zu entwickeln. Denn die Summe aller der Werthe, welche § 21 enthalten sind, ist nichts anders als der um 1 vermehrte Werth einer Leibrente eines 60jährigen für lebende Rentenirer à 1; die Summe ferner aller § 22 vor dem Zeichen — stehenden Werthe ist der Werth einer um sich selbst vermehrten und mit $\frac{20}{21}$ multiplicirten Leibrente eines 60jährigen à 100 Rthlr, und die Summe aller Werthe § 22 nach dem Zeichen — ist endlich dieser Leibrente selbst *gleich*. Nennt man nun die jetzt genannten Summen in der angeführten Ordnung die erste, die zweyte und dritte; so erhält man den gesuchten Beytrag, wenn man die Differenz zwischen der zweyten und dritten Summe durch die erste Summe dividirt.

§. 24.

Hat man dergleichen Leibrententabellen nicht, so kann man sich auch vermittelst der Leibrententabellen für Rentenirer und der Zahlen, welche die mittlere Lebensdauer der Rentenirer und der Menschen überhaupt bestimmen, helfen. Man rechnet alsdann zuvörderst so, daß man die Leibrententabelle für Rentenirer zum Grunde legt, und multiplicirt alsdann auf eine ähnliche Art als § 24 A. 7 ebenfalls geschehen, das gefundene mit einem aus den Zahlen der mittlern Lebensdauer gemachten Bruche,

z. B.

z. B. bey einem 60jährigen mit $\frac{1187}{1386}$ bey einem 50jährigen mit $\frac{1705}{2024}$ u. s. w.

§. 25.

Auf eine ähnliche Art, als Wittwen- und Sterbekassen berechnet werden, könnte man auch Aussteurungskassen, Studierkassen u. s. w. berechnen, wenn man für die Heyrathenden und Studirenden eben solche Tabellen hätte, als die Sterblichkeitsordnungen für die Sterbenden sind. Da dergleichen schwerlich in der gehörigen Vollkommenheit erhalten werden können, so ist bey einer etwanigen Einrichtung von solchen Kassen der Rechnung, die vollkommene Tabellen voraussetzt und hier nicht hat, nicht anders als mit der größten Behutsamkeit zu folgen. Um indeß die Berechnung dieser Kassen ebenfalls zu zeigen, so soll von den Aussteurungskassen ausführlich gesprochen werden.

§. 26.

Ich will dabey folgende aus Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst S. 213. 214 genommene Tabelle zum Grunde legen, wobey aber zu merken ist, daß dieselbe von viel zu wenig Erfahrungen abstrahirt worden, als daß sie bey der Berechnung wirklich zu errichtender Heyrathskassen gebraucht werden könnte. Da es hier nur darauf ankommt, die Art und Weise des Verfahrens bey der Rechnung zu zeigen, so schadet übrigens hier diese Unvollkommenheit nicht. Die Tabelle selbst ist folgende.

Vom Alter Jahre	Leben als unverheyrathete Mädchen	Von 10000 Mädchen, die 0 Jahre alt sind, verheyrathen sich im beystehenden Alter
0	10000	0
10	6833	0
11	6807	0
12	6771	0
13	6726	0
14	6673	0
15	6618	0
16	6474	87
17	6294	118
18	6074	159
19	5811	214
20	5503	283
21	5144	341
22	4738	379
23	4329	384
24	3935	375
25	3565	351
26	3220	331
27	2903	299
28	2616	267
29	2354	225
30	2142	176

Vom

Vom Alter Jahre	Leben als unverheyrathete Mädchen	Von 10000 Mädchen, die 0 Jahre alt sind, verheyrathen sich im beystehenden Alter
31	1971	135
32	1835	112
33	1728	100
34	1638	91
35	1559	84
36	1485	75
37	1413	69
38	1342	64
39	1271	60
40	1202	57
41	1137	53
42	1077	46
43	1024	36
44	979	26
45	940	19
46	901	15
47	868	12
48	831	11
49	789	10
50	741	9

§. 27.

Angenommen nun, daß ein jedes in die Aussteuerungskasse eintretendes Mädchen 1 Rthlr Antrittsgeld bezahle, die Aussteuer 10 Rthlr sey, ausser dem Antrittsgelde noch bis zum 25sten Jahre jährliche Beyträge gegeben werden sollen, die Aussteuer bey der Verheyrathung gegeben, vom dreyssigsten bis zum 40sten Jahre ausser der Aussteuer auch die Summe aller einfachen Zinsen entrichtet werden, und vom 40sten Jahre an die noch Unverheyratheten mit der Aussteuer und den Zinsen ganz aus der Kasse kommen, und der jährliche Beytrag für ein 12jähriges Mädchen gesucht werden soll; so ist der Weg ihn zu finden folgender.

Die Kasse erhält

1. an Antrittsgelde 1 Rthlr

2. an Beyträgen auf jetzigen Werth

für das Jahr reducirt

13te	—	— $\frac{6726}{6771} \times \frac{20}{21}$
14te	—	— $\frac{6673}{6771} \times \frac{20^2}{21^2}$
15te	—	— $\frac{6618}{6771} \times \frac{20^3}{21^3}$
16te	—	— $\frac{6474}{6771} \times \frac{20^4}{21^4}$

für

für das Jahr		auf jetzigen Werth reducirt
17te	— —	$\frac{6294}{6771} \times \frac{20^5}{21^5}$
18te	— —	$\frac{6074}{6771} \times \frac{20^6}{21^6}$
19te	— —	$\frac{5811}{6771} \times \frac{20^7}{21^7}$
20ste	— —	$\frac{5503}{6771} \times \frac{20^8}{21^8}$
21ste	— —	$\frac{5144}{6771} \times \frac{20^9}{21^9}$
22ste	— —	$\frac{4738}{6771} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$
23ste	— —	$\frac{4329}{6771} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$
24ste	— —	$\frac{3935}{6771} \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$
25ste	— —	$\frac{3565}{6771} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$
26ste	— —	0

Dage=

Dagegen zahlt die Kasse aus

1. bis ins 30ste Jahr an Aussteuer

nach jetzigem Werthe

im 16ten Jahre	—	$\frac{87}{6771} \times \frac{20^4}{21^4}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 17ten —	—	$\frac{118}{6771} \times \frac{20^5}{21^5}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 18ten —	—	$\frac{159}{6771} \times \frac{20^6}{21^6}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 19ten —	—	$\frac{214}{6771} \times \frac{20^7}{21^7}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 20sten —	—	$\frac{283}{6771} \times \frac{20^8}{21^8}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 21sten —	—	$\frac{341}{6771} \times \frac{20^9}{21^9}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 22sten —	—	$\frac{379}{6771} \times \frac{20^{10}}{21^{10}}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 23sten —	—	$\frac{384}{6771} \times \frac{20^{11}}{21^{11}}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 24sten —	—	$\frac{375}{6771} \times \frac{20^{12}}{21^{12}}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 25sten —	—	$\frac{351}{6771} \times \frac{20^{13}}{21^{13}}$	$\times$ 10 Rthlr.
— 26sten —	—	$\frac{331}{6771} \times \frac{20^{14}}{21^{14}}$	$\times$ 10 Rthlr.

im

nach jetzigem Werthe

im 27sten Jahre — $\frac{299}{6771} \times \frac{20^{15}}{21^{15}} \times 10$ Rt.

— 28sten — — $\frac{267}{6771} \times \frac{20^{16}}{21^{16}} \times 10$ Rt.

— 29sten — — $\frac{225}{6771} \times \frac{20^{17}}{21^{17}} \times 10$ Rt.

— 30sten — — $\frac{176}{6771} \times \frac{20^{18}}{21^{18}} \times 10$ Rt.

2. vom 30sten bis zum 40sten Jahre an Aussteuer nebst den einfachen Zinsen

für das Jahr an jetzigem Werthe

31ste — $\frac{135}{6771} \times \frac{20^{19}}{21^{19}} \times 10$ Rt. $\times \frac{21}{20}$

32ste — $\frac{112}{6771} \times \frac{20^{20}}{21^{20}} \times 10$ Rt. $\times \frac{22}{20}$

33ste — $\frac{100}{6771} \times \frac{20^{21}}{21^{21}} \times 10$ Rt. $\times \frac{23}{20}$

34ste — $\frac{91}{6771} \times \frac{20^{22}}{21^{22}} \times 10$ Rt. $\times \frac{24}{20}$

35ste — $\frac{84}{6771} \times \frac{20^{23}}{21^{23}} \times 10$ Rt. $\times \frac{25}{20}$

36ste — $\frac{75}{6771} \times \frac{20^{24}}{21^{24}} \times 10$ Rt. $\times \frac{26}{20}$

37ste — $\frac{69}{6771} \times \frac{20^{25}}{21^{25}} \times 10$ Rt. $\times \frac{27}{20}$

für

für das Jahr an jetzigem Werthe

38ste — $\frac{64}{6771} \times \frac{20^{26}}{21^{26}} \times 10$ Rthlr $\times \frac{28}{20}$

39ste — $\frac{60}{6771} \times \frac{20^{27}}{21^{27}} \times 10$ Rthlr $\times \frac{29}{20}$

40ste — $\frac{57}{6771} \times \frac{20^{28}}{21^{28}} \times 10$ Rthlr $\times \frac{30}{20}$

Endlich zahlt auch die Kasse an Aussteuer und Zinsen an die im 40sten Jahre noch nicht verheyratheten aus

$$\frac{1202}{6771} \times \frac{20^{28}}{21^{28}} \times 10 \text{ Rthlr} \times \frac{30}{20}.$$

§. 28.

Da bey einer nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit eingerichteten Kasse immer Einnahme und Ausgabe gleich seyn müssen; so muß auch das Antrittsgeld nebst der Summe der Beyträge § 26 der Summe aller im vorhergehenden § angeführten Ausgaben in dem gegenwärtigen Falle gleich seyn. Hieraus ergiebt sich, daß die Summe aller Ausgaben, nachdem man davon 1 oder das Antrittsgeld abgezogen hat, der Summe aller Beyträge gleich werde; und daß man also die Grösse des Beytrags finde, wenn man die um 1 verminderte Summe aller Ausgaben durch die § 26 erhaltene Summe dividirt.

§. 29.

Entwickelt man nun alle § 26 und 27 vorkommende Werthe, und zieht man darauf dieselben in die erforderlichen Summen zusammen; so erhält man

1. zur Summe aller Beyträge — — 7,924566
2. zur Summe
   a aller Aussteuer bis zum 30sten Jahre — — 3,40196
   b aller Aussteuer und Zinsen vom 30sten bis 40sten Jahre — — — 0,5072403
   c der Aussteuer und Zinsen im 40sten Jahre — 0,6792703

also überhaupt an Ausgaben — 4,5884706.

Man erhält also den jährlich zu leistenden Beytrag durch Entwickelung des Ausdrucks

$\frac{4,5884706-1}{7,924566} = \frac{3,5884706}{7,924566}$, wodurch man 0,45286 Rthlr erhält.

§. 30.

Sollte der Beytrag nur bis ins 25ste Jahr bezahlt werden, wenn der Versorger des eintretenden Mädchens so lange lebte, sonst aber mit dessen Tode aufhören, so müßte die Rechnung § 26 etwas anders eingerichtet wer-

werden; das übrige aber bliebe alles, wenn in den übrigen Bedingungen alles unverändert beybehalten würde. Es würde alsdann der Beytrag nach der Wahrscheinlichkeit bezahlt, daß das eingetretene Mitglied und sein Versorger zugleich noch lebten. Da dergleichen Bestimmungen schon öfters da gewesen sind, so würde es überflüssig seyn, von diesem Falle ein besonderes Beyspiel beyzufügen.

Neunter Abschnitt,

von den

Assekuranzen.

§. 1.

Unglücksfälle, die Einen sehr drücken, ja seinen Wohlstand gänzlich zernichten können, verlieren ihre zerstörende Kraft, wenn sich eine Menge darin gleichsam theilet. Eine Feuersbrunst verwandelt ein Haus, das einzige Gut seines Besitzers, in Asche, und würde ihn, wenn ihm der erlittene Schade nicht ersetzt würde, zum armen Manne gemacht haben. Allein die sämmtlichen Einwohner der Stadt, wo sie ausbrach, übernehmen den Schaden nach Proportion des Werths ihrer Häuser, und der Verunglückte kann sein Haus von ihrer Beyhülfe wieder erbauen, und die Beytragenden geben, wegen ihrer grossen Anzahl, jeder nur einen sehr mässigen Theil ihres Vermögens dazu her. Wer wäre im Stande, die Wohlthat einer solchen Einrichtung zu verkennen? Man nennt dergleichen Einrichtungen Feuerkassen oder Brandkassen, die nichts anders als eine Art von Assekuranzen sind, worunter überhaupt Einrichtungen verstanden werden, durch welche man sich durch Erlegung gewisser Summen das Recht zu verschaffen im Stande ist, Schadloshaltung zu fordern, wenn eine gewisse bestimmte Begebenheit zum Schaden gereicht.

§. 2.

Bey einer Feuerkasse verpflichten sich die Mitglieder vor den Schaden, der das eine oder das andere von ihnen trifft, zu stehen. Billig ist es dabey, daß ein jedes Mitglied nach der Grösse des Ersatzes, den es selbst, wenn es unglücklich würde, fordern will, zur Ersetzung des Schadens der übrigen beytrage. Hieraus folgt, daß ein jedes Mitglied bey dem Eintritte in die Feuerkasse den Werth dessen, was es darin versichern will, angeben, oder daß dabey dieser Werth von dazu bestimmten Personen geschätzt werden müsse. Es können übrigens die Feuerkassen blos Häuser, oder allein die Mobilien, oder auch beydes versichern.

§. 3.

Leidet ein Mitglied einer Feuerkasse Schaden, so muß sein Verlust geschätzt, d. h. seine Grösse gegen den Verlust alles dessen, was es hat versichern lassen, bestimmt, und darnach sein Ersatz vestgesetzt werden. Hätte z. B. ein Mitglied sein Haus zu 5000 Rℓ einschreiben lassen, und eine Feuersbrunst beschädigte nur einen Theil dieses Hauses, so daß der ganze Schaden dem vier-

ten

ten Theile des Schadens bey einer gänzlichen Einäscherung des Hauses gleich zu setzen wäre, so könnte dieses Mitglied auch nicht mehr als $\frac{1}{4} \times 5000$ Rthl. oder 1250 Rthl. erhalten.

§. 4.

Bey einer Feuerkasse ist also der Werth aller verassekurirten Güter, aller Häuser einer Stadt z. B. bekannt; er betrage 12820000 Rthl. Entsteht nun ein Brandschaden, und ist dessen Grösse durch Taxation bestimmt, und z. B. 4200 Rthl.; so frägt sich vor allen Dingen, wie groß der Beytrag zur Ersetzung dieses Schadens seyn werde. Man beantwortet diese Frage am besten so, daß man angiebt, wie viel pr. C. gegeben werden müsse; denn ist dies bestimmt, so läßt sich darnach auch leicht finden, wie viel von einem jeden Mitgliede überhaupt gegeben werden muß.

§. 5.

Soll nun das verunglückte Mitglied nicht ebenfalls einen proportionirten Theil seines Verlustes tragen, sondern die übrigen ihm seinen ganzen Schaden ersetzen; so zieht man den entstandenen Verlust von der ganzen verassekurirten Summe ab, und findet darauf das übrige durch eine leichte Anwendung der Regel de Tri. In dem angeführten Falle rechnet man z. B.

Von	12820000 Rthl.	
abgezogen	4200 Rthl.	
bleiben	12815800 Rthl.; ferner:	

12815800 Rthl. sollen geben 4200 Rthl.; was also 100? und die Antwort hierauf erhält man durch Entwickelung des Bruchs

$$\frac{4200}{128158} \text{ Rthl.}$$

Da nun 4200 Rthl. 1209600 pf. ausmachen, und $\frac{1209600}{128158}$ pf. zwischen 9 und 10 pf. betragen; so kommen auf jede 100 Rthl. zwischen 9 und 10 pf., ohngefehr $9\frac{1}{2}$ pf. Beytrag.

§. 6.

Hat man diesen Beytrag gefunden, und sich darauf gemerkt, wie viel 50 Rthl., 10 Rthl. und 1000 Rthl. geben müssen, so ist es leicht, den Beytrag für jede Summe überhaupt zu bestimmen. In dem angeführten Falle geben z. B.

10 Rthl.	—	—	1 pf.
50 Rthl.	—	—	$4\frac{3}{4}$ pf.
100 Rthl.	—	—	$9\frac{1}{2}$ pf.
1000 Rthl.	—	7 gr.	11 pf.; also

6890 Rthl.

a — 6 ×	7 gr. 11 pf.	—	1 Rthl.	23 gr.	6 pf.
b — 8 ×	$9\frac{1}{2}$ pf.	—	—	6 —	4 —
c — 9 ×	1 pf.	—	—	—	9 pf.
		Summa	2 Rthl.	6 gr.	7 pf.

§. 7.

§. 7.

Trägt das verunglückte Mitglied ebenfalls einen proportionirten Theil des Schadens, so fällt die im Anfange angestellte Subtraction weg, übrigens aber bleibt alles unverändert.

Müssen auch ausser dem entstandenen Schaden Unkosten, welche die Verwaltung der Feuerkasse nothwendig macht, in Anschlag gebracht werden, so werden diese zu dem gedachten Schaden addirt, und darauf wieder wie vorhin verfahren.

Wenn die Maasse der Beyträge, oder das, was für 10 Rthl, 50 Rthl, 100 Rthl u. s. w. beygetragen werden muß, der Bequemlichkeit bey der Rechnung wegen, etwas grösser angenommen worden ist, als es bey der schärfsten Rechnung seyn würde; so braucht daher keine Beeinträchtigung der Mitglieder zu entstehen, indem ihnen das, was sie bey einem Falle zu viel gegeben haben, bey einem andern zu gute gerechnet werden kann.

§. 8.

Es lassen sich hier auch noch einige andere Fragen aufwerfen. Hat eine Feuerkasse schon eine Zeitlang gedauert, und ist daher der Brandschaden sowohl als der Beytrag von 100 Rthl für jedes Jahr bekannt, so kann gefragt werden: Wie viel sowohl der Brandschaden als der Beytrag von 100 Rthl für ein Jahr nach einem mittlern Durchschnitte betrage. Die Rechnung ist hier sehr leicht. Betrüge z. B.

Im Jahre der Feuerkasse	der Brandschaden	der Beytrag von 100 Rthl.
— 1ten —	9241 Rthl. — —	— 2 gr.
— 2ten —	10675 Rthl. — —	— 2 gr.
— 3ten —	4015 Rthl. 18 gr. 8 pf.	— 1 gr.
— 4ten —	20863 Rthl. 10 gr. —	— 4 gr.
— 5ten —	11912 Rthl. 12 gr. —	— 2 gr. 4 pf.
— 6ten —	7472 Rthl. — —	— 1 gr. 8 pf.
— 7ten —	10875 Rthl. — —	— 2 gr.
— 8ten —	4749 Rthl. 15 gr. 10 pf.	— 1 gr.
— 9ten —	3806 Rthl. 6 gr. —	— — 8 pf.
— 10ten —	19310 Rthl. 10 gr. —	— 3 gr. 4 pf.
— 11ten —	18577 Rthl. 1 gr. 1 pf.	— 3 gr. 4 pf.
— 12ten —	3395 Rthl. — —	— — 8 pf.
— 13ten —	3297 Rthl. 17 gr. 8 pf.	— — 8 pf.
also in 13 Jahren	128190 Rthl. 19 gr. 3 pf.	1 Rthl. 8 pf.;

so erhielte man durch die Division mit 13 für den Brandschaden im Durchschnitte 9861 Rthl., und für den Beytrag von 100 Rthl. $22\frac{10}{13}$ pf.

§. 9.

Auch ist man im Stande, aus dem gegebenen Brandschaden und dem Maasse des Beytrags den Werth aller verassekurirten Güter zu finden. So wie sich nemlich dieses Maaß zu 100 Rthl. verhält, so verhält sich der gegebene Brandschaden zum Werthe aller verassekurirten Güter, die diesen Brandschaden ersetzt haben. Es kommt also hier wieder bloß auf eine leichte Anwendung der Regel de Tri an.

§. 10.

Bey einer auf die vorhin beschriebene Art eingerichteten Feuerkasse hat man die Berechnung der Wahrscheinlichkeit nicht nöthig, und ihre ganze Einrichtung beruht daher auf sichern Gründen, und ist eben deswegen auch leicht zu beurtheilen. Es giebt aber auch Assekuranzen, zu deren Bestimmung die Lehre von der Wahrscheinlichkeit erfordert wird, deren Einrichtung also auch viel verwickelter ist, und wovon nunmehr auch das nöthigste berühret werden soll. Ueberhaupt besteht das Wesen dieser Assekuranzen darin, daß man eine gewisse Summe sogleich erlegt, und dafür von demjenigen, der sie empfangen hat, die Versicherung erhält, daß man, im Fall eine gewisse bestimmte Begebenheit, deren Erfolg wahrscheinlich ist, unglücklich ausfällt, schadlos gehalten werden soll. Derjenige, der sich zu dieser Schadloshaltung verpflichtet, wird der Assekurirer genannt, die schriftliche Versicherung der Schadloshaltung heißt **Assekuranzpolice**, und das Geld, womit man die Assekuranzpolice erkauft, die **Assekuranzprämie**.

§. 11.

Ein Assekurirer hat wegen der Begebenheit, bey deren unglücklichen Erfolge er sich zu einer Schadloshaltung verpflichten will, vielerley Umstände zu wissen nöthig. Zuvörderst muß er die Umstände, unter welchen sich diese Begebenheit ereignet, jedesmal genau kennen; ferner müssen ihm aus langer und vielfältiger Erfahrung die günstigen und ungünstigen Fälle dabey bekannt seyn; desgleichen muß er wissen, wie oft diese Begebenheit ein Gegenstand der Assekuranz zu werden pflege; auch muß er den Werth dessen, wofür er zu stehen verspricht, kennen, die Unkosten, die bey der Assekuranz vorfallen können, zu überschlagen im Stande seyn u. d. gl.

§. 12.

Wenn z. B. ein Assekurirer über ein Schiff, das einen bestimmten Weg zu nehmen hat, eine Assecuranzpolice ausstellen will, so muß er nicht nur wissen, wie viel von einer bestimmten Anzahl von Schiffen, die diesen Weg nehmen, überhaupt zu verunglücken pflegen, sondern auch überdem die Umstände, unter welchen dieses Schiff absegelt, genau kennen, auf die Jahreszeit z. B. sehen, da es absegelt, ferner auf den Bau des Schiffes, auf die Geschicklichkeit der Steuerleute u. s. w. Ferner muß er wissen, unter was für Umständen Assecuranzpolicen gekauft zu werden pflegen, oder nicht. Sind alle diese Umstände bekannt, so läßt sich in jedem einzeln Falle

die

die Grösse der Assekuranzprämie nach den erklärten Regeln der Wahrscheinlichkeit leicht bestimmen.

§. 13.

Assekurirer haben indeß nicht bloß die Absicht ohne Schaden zu bleiben, sondern auch sich einen erlaubten Gewinn zu verschaffen. Dieser Umstand macht allerdings, daß die Grösse der Assekuranzprämie nicht bloß nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit bestimmt werden muß; allein die Abänderung, die daher rührt, ist eben nicht mit Schwierigkeiten verknüpft. Wenn ein Assekurirer zuvörderst nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit bestimmt hat, zu was für einem pr. C. die Assekuranzprämie anzusetzen ist; so kann er dieselbe darauf sehr leicht nach dem verlangten Gewinne erhöhen, oder finden, um wie viel dies pr. C. erhöhet werden muß, um einen bestimmten Gewinn zu erhalten.

§. 14.

Assekuranzgesellschaften oder Assekuranzkammern, d. h. Gesellschaften, welche Assekuranzpolicen verkaufen, werden durch Subscriptionen errichtet. Sobald die Aktien verkauft sind, so ist die Gesellschaft geschlossen, die Mitglieder erlegen den Werth ihrer Aktien, und jedes trägt nach Proportion derselben den entstehenden Vortheil oder Schaden, der in vestgesetzten Terminen unter die Gesellschaft vertheilt wird.

Zehnter Abschnitt,
Geometrische
im gemeinen Leben
öfters
vorkommende Rechnungen.

---

§. 1.

Die Berechnung der Figuren und Körper, welche in der gemeinen Geometrie betrachtet werden, ist im gemeinen Leben von dem größten Nutzen, und bey ökonomischen Rechnungen insbesondere öfters unentbehrlich. Das nothwendigste davon soll daher in diesem letzten Abschnitte beygebracht werden, doch so, daß die geometrischen Lehrsätze, auf welche sich die hier zu gebenden Regeln gründen, mehrentheils nur historisch berührt werden.

§. 2.

Bey diesen Berechnungen ist die Lehre von der Extraction der Quadrat- und Cubicwurzel, da es oft sehr unbequem seyn würde, die logarithmischen Tafeln zu gebrauchen, ebenfalls unentbehrlich: und es soll daher der gegenwärtige Abschnitt

1. von der Extraction der Quadrat- und Cubicwurzel,

2. von der Berechnung der ebenen Figuren, und

3. von der Berechnung der Körper handeln, welche in der gemeinen Geometrie betrachtet zu werden pflegen.

I. Von der Extraction der Quadrat- und Cubicwurzel.

---

a Von der Extraction der Quadratwurzel.

§. 3.

Da man unter der Quadratwurzel einer Zahl nichts anders versteht, als die Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt jene Zahl zum Producte giebt, und das Zeichen $\sqrt{}$ die Quadratwurzeln bezeichnet; so fällt in die Augen, daß

$1 = \sqrt{1}$, weil $1 \times 1 = 1$.
$2 = \sqrt{4}$, weil $2 \times 2 = 4$.
$3 = \sqrt{9}$, weil $3 \times 3 = 9$.
$4 = \sqrt{16}$, weil $4 \times 4 = 16$.
$5 = \sqrt{25}$, weil $5 \times 5 = 25$.
$6 = \sqrt{36}$, weil $6 \times 6 = 36$.
$7 = \sqrt{49}$, weil $7 \times 7 = 49$.
$8 = \sqrt{64}$, weil $8 \times 8 = 64$.
$9 = \sqrt{81}$, weil $9 \times 9 = 81$.

§. 4.

§. 4.

Da ferner die Quadratwurzel aus einer grössern Zahl grösser als die Quadratwurzel aus einer kleinern Zahl ist; so ist leicht einzusehen, daß

$\sqrt{5}$ zwischen 2 und 3

$\sqrt{30}$ zwischen 5 und 6

$\sqrt{56}$ zwischen 7 und 8 falle, u. s. f.; indem z. B. $2 \times 2 = 4$ und $3 \times 3 = 9$ ist, und also die Quadratwurzel aus 5 grösser als 2 und kleiner als 3 seyn muß. Kann man daher gleich nicht genau angeben, wie groß die Quadratwurzel solcher Zahlen, als 5, 30, 56 u. d. gl. sind, sey, so ist man doch wenigstens im Stande, zwey unmittelbar auf einander folgende Zahlen zu finden, zwischen welchen die gesuchte Quadratwurzel liegen muß.

§. 5.

Da man, wenn man zwey Zahlen mit einander zu multipliciren hat, die beyde entweder zu einer höhern oder zu einer niedern Ordnung gehören, die Multiplication auf die Art verrichtet, daß man anfänglich so verfährt, als wenn beyde Zahlen zur Ordnung Null gehörten, und darauf in dem Producte entweder so viel Nullen zusetzt, oder so viel Decimalstellen abschneidet, als in beyden Factoren enthalten waren; so kann man, wenn man eine Zahl, die zu einer höhern oder niedern Ordnung gehört, zum Quadrat erheben soll, anfänglich diese Wur-

zel

zel als zur Ordnung Null gehörig betrachten, davon das Quadrat suchen, und denselben doppelt so viel Nullen anhängen, oder doppelt so viel Decimalstellen darin abschneiden, als in der Wurzel enthalten waren.

§. 6.

Um z. B. die Quadrate von 2400, 240000, 0,24, 0,024, 0,0024 zu finden, sucht man zuvörderst das Quadrat von 24, welches 576 ist, und erhält darauf durch Befolgung der vorhin angeführten Regel, daß

5760000	das Quadrat von		2400
57600000000	—	—	240000
0,0576	—	—	0,24
0,000576	—	—	0,024
0,00000576	—	—	0,0024 ist.

Da man nemlich, wenn man eine Zahl zum Quadrate erhebt, dieselbe mit sich selbst multiplicirt, und also zwey gleiche Factoren hat, so muß das Quadrat daher doppelt so viel Nullen oder Decimaltheile enthalten, als ein jeder Factor oder die Quadratwurzel enthält.

§. 7.

Soll man aus einer Zahl, die zu einer höhern oder niedern Ordnung gehört, die Quadratwurzel ausziehen, so kann man daher diese Zahl ebenfalls als zur Ordnung Null gehörig betrachten, die Quadratwurzel davon suchen, und darauf der Wurzel halb so viel Nullen oder Decimaltheile geben, als die Quadratzahl gehabt hat.

Weiß

Weiß man daher, daß die Quadratwurzel aus 576 die Zahl 24 ist, so findet man ohne Schwierigkeit

$$\sqrt{5760000} = 2400$$
$$\sqrt{57600000000} = 240000$$
$$\sqrt{0,0576} = 0,24$$
$$\sqrt{0,000576} = 0,024$$
$$\sqrt{0,00000576} = 0,0024.$$

§. 8.

Wenn man aus jeder gegebenen Zahl die Quadratwurzel will finden können, so muß man sich vor allen Dingen die Quadratwurzeln der § 3 angeführten Zahlen gemerkt haben, und von den übrigen Zahlen zwischen 1 und 100 die Quadratwurzel so weit, als es in ganzen Zahlen geschehen kann, schnell anzugeben im Stande seyn. Bey grössern Zahlen richtet man sich nach folgenden Regeln.

Erstlich theilet man die gegebene Zahl von den Einern an, wenn man lauter ganze Zahlen hat, bloß nach der Rechten, wenn man aber lauter Decimaltheile hat, bloß nach der Linken, und wenn man ganze Zahlen und Decimaltheile hat, nach der Rechten und Linken in Classen, in deren jede, die letzte zur Linken im erforderlichen Falle ausgenommen, zwey Zifern enthält. Wären z. B. die Zahlen

1) 315844. 2) 0,033856. 3) 96,6289

gege=

gegeben, so erhielten dieselben nach der Befolgung dieser Regel die Form

1) 31|58|44| 2) 0,|03|38|56| 3) 96,|62|89|

Zum andern läßt man zuvörderst die Ordnung der gegebenen Zahl aus der Acht, sucht von der ersten Classe zur Linken die Quadratwurzel so genau als möglich, merkt sie an, und zieht ihr Quadrat von der gedachten ersten Classe ab. Hiernach wird aus dem angeführten ersten Exempel

31|58|44| 5
25|
6

Drittens rückt man zu dem Reste die erste Zifer der folgenden Classe, und dividirt das dadurch erhaltene mit dem gefundenen Theile der Wurzel doppelt genommen, und merkt den Quotienten als den zweyten Theil der Wurzel neben dem vorhergehenden an. Hiedurch erhält man

31|58 | 44| 56
25|
6 5
10

Viertens rückt man die zweyte Zifer der andern Classe herunter, setzt ferner den gefundenen neuen Theil

der

der Wurzel neben dem Divisor, multiplicirt diese Zahl mit dem gedachten neuen Theile, und zieht das Product von dem Reste der ersten Classe und der ganzen zweyten Classe ab. Hierdurch erhält man aus dem vorhergehenden

```
        3 1|5 8 | 4 4| 5 6
        2 5|         |
       ----
         6 5 8
  106)   6 3 6
       ---------
           2 2
```

Wenn dieser Abzug deswegen nicht vorgenommen werden kann, weil der Subtrahendus grösser als der Minuendus ist, so ist dies ein Zeichen, daß man den Quotienten oder neuen Theil der Wurzel zu groß angenommen hat, und man muß alsdann denselben kleiner annehmen, und diese vierte Regel von neuem befolgen.

Fünftens ruckt man zu dem nun gebliebenen Reste die erste Zifer der folgenden Classe herunter, und verfährt, indem man beyde gefundene Theile der Wurzel eben so behandelt, als vorhin mit dem ersten geschah, völlig wieder nach der dritten und vierten Regel. Hierdurch erhält man zuerst

```
        3 1|5 8|4 4| 5 6 2
        2 5|       |
       ----
         6 5 8
  106)   6 3 6
       ---------
         2 2 4
```

und hierauf

```
  31|58|44 | 562
  25|
 ------
   658
106) 636
 ------
   2244
1122) 2244
 ------
    0
```

Wären noch mehrere Classen übrig, so behandelte man nun alle drey gefundene Theile der Wurzel so, als man so eben die beyden ersten behandelt hat, und verführe so immer fort, bis man die letzte Classe erreicht hätte.

§. 9.

Die beyden andern Exempel würden nach dem bisherigen auf folgende Art gerechnet werden.

```
0,|03|38|56 | 184
  |  1|
 ------
   238
28) 224
 ------
   1456
364) 1456
 ------
    0
```

```
        9 6,|6 2|8 9| 9 8 3
        8 1 |
        -----
        1 5 6 2
 188)   1 5 0 4
        -------
          5 8 8 9
 1963)    5 8 8 9
          -------
                0
```

§. 10.

Allein bisher ist aus allen gegebenen Zahlen die Quadratwurzel so gesucht worden, als ob jede von ihnen lauter ganze Zahlen enthielte. Da dies bey den beyden letztern aber nicht statt findet, so muß nun auch noch die Ordnung der gefundenen Wurzel berichtiget werden. Es geschieht dies so, daß man derselben halb so viel Nullen oder Decimaltheile giebt, als die gegebene Zahl hatte, wovon der Grund § 7 da gewesen ist. Von der Zahl 0,033856 ist also nicht 184, sondern 0,184, und von 96,6289 nicht 983, sondern 9,83 die Quadratwurzel.

§. 11.

Man kann sich hier auch auf die Art helfen, daß man, wenn man die Classe der Einer absolvirt hat, die letzte Zifer der gefundenen Wurzel sogleich mit einem Comma bezeichnet; oder da die Wurzel eben so viel Theile bekommt, als die gegebene Quadratzahl Classen hat, daß man in der Wurzel so viel Decimaltheile abschneidet, als in der gegebenen Zahl Classen damit angefüllet waren.

§. 12.

Bleiben Classen, die mit Nullen angefüllt sind, übrig, so setzt man zu der gefundenen Wurzel eben so viel Nullen, als Classen übrig sind. Z. B.

```
   5|7 6|0 0|0 0|0 0|0 0|0 0|2 4 0 0 0 0 0
   4|
   ---
   1 7 6
44)  1 7 6
   ------
       0
```

Hier werden 5 Nullen an 24 gehängt, weil 5 mit Nullen angefüllte Classen übrig blieben.

§. 13.

Die bisher betrachteten Exempel enthielten Zahlen, aus welchen sich die Quadratwurzel genau in ganzen Zahlen finden ließ; es giebt aber eine weit grössere Menge, aus denen die Wurzel nicht in ganzen Zahlen gefunden werden kann; z. B. 30000. Wollte man hieraus die Wurzel ziehen, so rechnete man

```
      3|0 0|0 0|1 7 3
      1|
     ---
      2 0 0
27)   1 8 9
     ------
       1 1 0 0
343)   1 0 2 9
     ---------
           7 1
```

Hieraus würde man lernen, daß die Quadratwurzel von 30000 zwischen 173 und 174 falle. Da indeß in vielen Fällen eine solche Angabe einer Quadratwurzel nicht hinreichend ist, so frägt sich, wie man in dergleichen Fällen die Quadratwurzel genauer finde?

§. 14.

Es bietet sich hiezu sehr bald ein Weg dar, wenn man bedenkt, daß man eine und dieselbe Zahl auf verschiedene Weise ausdrücken kann, und insbesondere auch so, daß sie wie eine *Decimalzahl* erscheint. So ist z. B.

30000=30000,0000=300000000 Zehntausendtheilen
5=5,00000000=500000000 Hundertmillionentheilen

u. s. f. Gesetzt nun, man verwandelte 30000 in 30000,0000000000 und zöge aus dieser Zahl nach der vorhergehenden Anweisung die Quadratwurzel, so erhielte man

```
        3|00|00,|00|00|00|00|00|173,20508 u. s. w.
        1|
      -----
        200
 27)    189
      -----
         1100
 343)    1029
      ---------
           7100
 3462)     6924
         -------
           17600
 34640)        0
         ---------
           1760000
 346405)   1732025
           ---------
             2797500
 3464100)          0
           -----------
             279750000
 34641008)   277128064
             ---------
               2621936
```

Hätte man noch mehr Nullen angehängt, so hätte man auch noch weiter fortfahren, und die Quadratwurzel aus 30000 also immer genauer und genauer finden können. Zu Ende kommt man in diesem Falle nie, denn wenn die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl nicht genau in ganzen Zahlen angegeben werden kann, so läßt sie sich auch nicht genau in Brüchen finden; allein so genau läßt sie sich auf diesem Wege sehr leicht angeben, als es zum Gebrauche im gemeinen Leben erfordert wird. Wäre z. B. die Benennung, welche die Quadratwurzel aus 30000 erhalten sollte, Fuß, so ist $\frac{1}{100000}$ von einem Fusse eine so geringe Grösse, daß sie aus der Acht gelassen werden kann. Und da die Quadratwurzel aus 30000 zwischen 173,20508 und 173,20509 fällt, so beträgt dasjenige, was fehlt, noch nicht einmal $\frac{1}{100000}$ eines Fusses.

§. 15.

Man hat bey dieser *Extraction* der Quadratwurzel durch die Näherung auch nicht nöthig, die anzuhängenden Nullen sogleich beym Anfange hinzuzufügen, sondern man kann solches auch erst alsdann, wenn man bis zur Klasse der Einer gekommen ist, und nach und nach thun. Das vorhergehende Exempel beyzubehalten, so hätte solches auch so gerechnet werden können:

3 |
1 |

```
      3|00|17,320508
      1|
      ----
      200
27)   189
      ----
       1100
343)   1029
       ----
         7100
3462)    6924
         ------
         17600
34640)       0
         ------
         1760000
346405)  1732025
         --------
           2797500
3464100)         0
           ---------
           279750000
34641008)  277128064
           ---------
             2621936
```

§. 16.

Wenn man von einem Bruche das Quadrat machen will, so muß man sowohl seinen Zähler als seinen Nenner zum Quadrate erheben. So ist z. B. $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$. Umgekehrt findet man die Quadratwurzel eines Bruchs, wenn man sowohl aus seinem Zähler als aus seinem Nenner die Quadratwurzel zieht. So ist z. B. $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$.

b Von der Extraction der Cubicwurzel.

§. 17.

Wenn die gegebene Cubiczahl kleiner als 1000 ist, so ist ihre Cubicwurzel unter den eintheiligen Zahlen enthalten, wenn sie eine ganze Zahl ist, oder zwischen zweyen derselben, wenn sie nicht genau in ganzen Zahlen angegeben werden kann. Um in diesen Fällen die Cubicwurzel angeben zu können, muß man sich gemerkt haben, daß

$$\sqrt[3]{1} = 1$$
$$\sqrt[3]{8} = 2$$
$$\sqrt[3]{27} = 3$$
$$\sqrt[3]{64} = 4$$
$$\sqrt[3]{125} = 5$$
$$\sqrt[3]{216} = 6$$
$$\sqrt[3]{343} = 7$$
$$\sqrt[3]{512} = 8$$
$$\sqrt[3]{729} = 9$$

§. 18.

Die Ordnung einer Cubiczahl ist dreymal so hoch oder so niedrig als die Ordnung der Wurzel. Denn da

man

man die Cubiczahl erhält, wenn man die Wurzel zweymal mit sich selbst multipliciret, oder ein Product aus drey der Wurzel gleichen Factoren sucht; so müssen im Cubus immer dreymal so viel Nullen oder Decimalzahlen enthalten seyn, als in der Wurzel waren. Da der Cubus von 9 gleich 729 ist, so ist

der Cubus		gleich
von 90	— —	729000
— 900	— —	729000000
— 9000 u. s. w.		729000000000 u. s. w.
— 0,9	— —	0,729
— 0,09	— —	0,000729
— 0,009	—	0,000000729
— 0,0009 u. s. w.		0,000000000729 u. s. w.

§. 19.

Umgekehrt ist also die Ordnung der Cubicwurzel nur den dritten Theil so hoch oder so niedrig als die Ordnung der Cubiczahl, welches man sich durch die Exempel des vorhergehenden § erläutern kann.

§. 20.

Wenn eine Cubiczahl aus mehr Zifern besteht, als daß ihre Wurzel eintheilig seyn könnte, so findet man die Cubicwurzel nach folgenden Regeln.

a. Man theile die gegebene Zahl von den Einern an, wenn sie aus lauter ganzen Zahlen besteht, bloß nach der Linken, wenn sie aus lauter Decimalzahlen besteht, bloß nach der Rechten, und wenn sie ganze Zahlen und Decimaltheile begreift, nach der Linken und Rechten in Classen, so daß in jede drey Zifern zu stehen kommen. In der vordersten Classe zur Linken können auch zwey oder eine Zifer stehen.

b. Suche man von der ersten Classe zur Linken die Cubicwurzel so genau als möglich in ganzen Zahlen, merke dieselbe an, und ziehe ihren Cubus von der gedachten ersten Classe ab.

c. Setze man zu dem Reste die erste Zifer der folgenden Classe.

d. Erhebe man die bereits gefundene Wurzel zum Quadrate, und multiplicire das Quadrat derselben mit 3.

e. Dividire man mit diesem dreyfachen Quadrate in das durch die Befolgung der Regel c. erhaltene, und merke den Quotienten als den zweyten Theil der Wurzel an.

f. Multiplicire man mit diesem neuen Theile der Wurzel den so eben gebrauchten Divisor, und setze das Product gerade unter die nach c. erhaltene Zahlen.

g. Erhebe man den neuen Theil der Wurzel zum Quadrate, multiplicire solches mit dem vorhergehenden Theile,

Theile, und überdem noch mit 3, und setze dies Product unter das vorhergehende, aber um eine Stelle weiter nach der Rechten.

h. Suche man den Cubus des neuen Theils der Wurzel, und setze ihn unter das nach g. gefundene so, daß er wieder eine Stelle weiter nach der Rechten zu stehen kommt.

i. Addire man das nach f, g und h erhaltene, setze zu den nach c erhaltenen Zahlen die beyden übrigen Ziffern der zweyten Classe.

k. Ziehe man die gefundene Summe von dem Reste der ersten und der ganzen zweyten Classe ab.

l. Nun betrachte man die beyden schon gefundenen Theile der Wurzel als den ersten, und die dritte Classe als die zweyte, und verfahre wieder nach den Regeln d bis k, und dies wiederhole man, indem man immer alle gefundenen Theile als den ersten und die folgende Classe als die zweyte betrachtet, so lange, bis man zu Ende gekommen ist.

§. 21.

Um diese Regeln mit einem Exempel zu erläutern, so sey die Cubicwurzel aus 15816487312 zu ziehen. Hier ist die Rechnung folgende.

$$
\begin{array}{rr}
 & 158|164|877|312|5408 \\
5^3 & 125 \\
\hline
 & 33164 \\
3\times5^2=75)\times4= & 300 \\
3\times5\times4^2= & 240 \\
4^3= & 64 \\
\hline
 & 32464 \\
\hline
 & 700877 \\
3\times(54)^2=8748)\times0= & 0 \\
3\times54\times0^2= & 0 \\
0^3= & 0 \\
\hline
 & 0 \\
\hline
 & 700877312 \\
3\times(540)^2=874800)\times8= & 6998400 \\
3\times540\times8^2= & 103680 \\
8^3= & 512 \\
\hline
 & 700877312 \\
\hline
 & 0.
\end{array}
$$

§. 22.

Wenn ein Theil der Wurzel 0 wird, so wird alles, was man nach den Regeln f, g und h findet, auch 0, und man kann daher in diesem Falle sogleich zur folgenden Classe fortgehen, nachdem man die beyden übrigen Zifern der gegenwärtigen und die erste der fol-

folgenden Classe heruntergerückt hat. Wäre dies bey dem vorhergehenden Exempel geschehen, so hätte es folgende Gestalt erhalten.

```
        158|164|877|312|5408
        125|
        ----
        33164
  75)   300
         240
           64
        -----
        32464
        -----
          700877
 8748)         0
        --------
          700877312
874800)   6998400
             103680
                512
          ---------
          700877312
          ---------
                0.
```

§. 23.

Wenn ganze Zahlen und Decimalbrüche oder auch blosse Decimalbrüche gegeben sind, so kann man, nachdem man auf die bey a § 20 beschriebene Art eingetheilt hat, zuvörderst durchaus so verfahren, als ob man lauter ganze Zahlen hätte, und darauf nach § 19 die Ordnung der Wurzel bestimmen. Um z. B. die Cubicwurzel aus 158,164877312 oder 0,000158164877312 zu finden, rechnete man zuvörderst ganz so, wie im vorhergehenden §, darauf aber schnitte man im ersten Falle 3, und im andern Falle 5 Zifern für die Decimaltheile ab, so daß man 5,408 und 0,05408 für das gesuchte erhielte.

§. 24.

Wenn man aus einer ganzen Zahl die Cubicwurzel nicht genau in ganzen Zahlen zu ziehen im Stande ist, so findet man dieselbe auch in Brüchen nicht genau. Allein man kann in diesem Falle die Wurzel durch die Näherung, indem man die gegebene Zahl in eine Decimalzahl verwandelt, so genau finden, als man sie braucht. Auch hier hat man nicht nöthig, die anzuhängenden Nullen sogleich vom Anfang anzuhängen, sondern es kann solches nach und nach geschehen, so wie bey folgendem Exempel, wo die Cubicwurzel aus 5 gezogen ist.

5 |
1 |

```
           5 | 1,7099
           1 |
           ----
           4000
   3)      21
           147
            343
           ----
           3913
           --------
             87000
   867)        0
             --------
             87000000
   86700)    780300
               41310
                 729
             --------
             78443829
             ----------
               8556171000
   8762043)    78858387
                 415287
                    729
               ----------
               7889992299
               ----------
                666178701 u. s. w.
```

§. 25.

Wenn aus lauter Decimaltheilen oder aus ganzen Zahlen und Decimaltheilen die Cubicwurzel gezogen werden soll, und die Anzahl der Decimaltheile nicht von der Art ist, daß sie durch 3 ohne Rest dividirt werden kann, so muß man die gegebenen Decimalzahlen in dergleichen verwandeln. Anstatt 8,4 nimmt man z. B. 8,400, und anstatt 0,8 die Zahl 0,800, u. s. w.

§. 26.

Die Cubicwurzel eines Bruchs findet man, wenn man sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner die Cubicwurzel zieht. So ist z. B. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$.

2 Berechnung der Flächenfiguren.

§. 27.

Wenn multiplicirt oder dividirt werden soll, so muß der Multiplicator oder Divisor eine unbenannte Zahl seyn. Gleichwohl kommen häufig Fälle vor, wo dies nicht statt findet, und wo also die Wörter, Multipliciren und Dividiren, im uneigentlichen Verstande genommen werden müssen. Was es hiermit in dem Falle für eine Bewandniß habe, wenn Linien oder Flächen durch Flächen oder Linien multiplicirt, oder Flächen oder Körper durch Linien oder Flächen dividirt werden sollen, muß hier vor allen Dingen deutlich gemacht werden.

§. 28.

Es verhält sich aber hiermit so, daß die Worte, Multipliciren und Dividiren, einzig und allein auf die Zahlen gehen, welche in den gedachten Fällen gegeben sind, und die Bestimmung der Einheit anderweitiger Belehrung überlassen wird. Sollten z. B. 6 Fuß mit 4 Fuß multiplicirt werden, so würde dadurch angezeigt, daß

man

man 6 und 4 mit einander multipliciren solle; was man aber zu dem Producte 24 für eine Einheit zu setzen habe, ist hieraus nicht bekannt, sondern muß aus den Umständen, unter welchen dergleichen Fälle vorkommen, hergeleitet werden.

§. 29.

Ueberhaupt kann man sich hier zuvörderst merken, daß in den Fällen, die in den folgenden betrachtet werden sollen, die Multiplication

a der Linien mit Linien, Flächen;

b der Linien mit Flächen, Körper.

Die Division hingegen

a der Flächen durch Linien, Linien;

b der Körper durch Flächen, ebenfalls Linien, und

c der Körper durch Linien, Flächen gebe.

§. 30.

So erhält man z. B. aus

4 Fuß × 6 Fuß eine Fläche von 24 Quadratfuß,
9 Zoll × 4 Zoll — — — 36 Quadratzoll,
7 Quadratfuß × 6 Fuß einen Körper von 42 Cubicfuß,
8 Quadratzoll × 10 Zoll — — 80 Cubiczoll.
24 Quadratfuß : 6 Fuß eine Linie von 4 Fuß,
36 Quadratzoll : 4 Zoll — — 9 Zoll,
42 Cubicfuß : 7 Quadratfuß — 6 Fuß,
80 Cubiczoll : 8 Quadratzoll — 10 Zoll.

42 Cubicfuß : 6 Fuß eine Fläche von 7 Quadratfuß,
80 Cubiczoll : 10 Zoll — — 8 Quadratzoll,
u. s. w.

§. 31.

Die Gründe hievon sowohl als die genauere Bestimmung der Einheit des gesuchten erfordern eine genauere Betrachtung der Umstände, unter welchen die Aufgaben, Linien mit Linien zu multipliciren vorkommen, und dergleichen wird sich bequem bey der Berechnung der Flächen und der Körper, die jetzt auseinander gesetzt werden soll, anstellen lassen.

§. 32.

Bey der Berechnung der Flächenfiguren soll geredet werden

a vom Quadrate,
b vom Rechtecke
c vom Parallelogramme überhaupt,
d. vom Dreyecke,
e von den vielseitigen geradlinigen Figuren,
f vom Kreise.

§. 33.

Unter einem Quadrate versteht man eine viereckige geradlinige Figur, die rechtwinklig und eben so lang als breit ist. Die Seitenflächen eines Würfels, wenn derselbe an seinen Ecken nicht abgerundet ist, sind z. B. Quadrate, und man denkt sich dergleichen ebenfalls bey

Beschrei-

Beschreibungen dieser Art. Der Garten ist 100 Fuß ins Gevierte; das Zimmer hat 30 Fuß ins Gevierte u. d. gl. Wenn ein Quadrat einen Fuß lang und breit ist; so nennt man dasselbe einen Quadratfuß, und auf eine ähnliche Art heißt ein Quadrat von einer Ruthe in der Länge und Breite eine Quadratruthe, woraus leicht abzunehmen ist, was eine Quadratzoll, eine Quadratlinie, ein Quadratscrupel sey.

§. 34.

Unter einem Rechtecke versteht man ebenfalls eine rechtwinklige geradlinige und vierseitige Figur, wobey aber die Länge und Breite verschieden sind. Eine solche Figur hat z. B. ein Tisch, der 4 Fuß lang und 3 Fuß breit ist, oder eine Stube, die 26 Fuß in der Länge und 12 Fuß in der Breite hat, oder ein Garten, der 100 Ruthen lang und 30 Ruthen breit ist.

§. 35.

Ein Parallelogramm ist auch eine vierseitige und geradlinige Figur, allein die Winkel brauchen darin keine rechte Winkel zu seyn. Von seinen Seiten stehen je zwey und zwey einander gegen über und allenthalben gleich weit von einander ab. Wenn alle Seiten darin gleich sind, so nennt man es einen Rhombus oder Raute, wenn aber nur die einander gleich sind, die einander gegen über stehen, so nennt man es einen Rhomboides oder eine längliche Raute. Bisweilen nennt man auch den Rhombus ein verschobenes Quadrat, und den Rhomboides ein verschobenes Rechteck. Wenn ein Haus an der Ecke zweyer Strassen gebaut wird, die schief in einander laufen, so erhält das Haus schiefe Winkel, und bisweilen werden alsdann alle Zimmer in demselben entweder verschobene Vierecke oder verschobene Rechtecke.

§. 36.

Was man unter einem Dreyecke verstehe, ist allgemein bekannt. Bey demselben giebt es nur drey Seiten, da jede der vorhergehenden Figuren deren viere hatte.

§. 37.

Ein Kreis oder ein Zirkel ist *eine runde Figur*, worin es einen Mittelpunkt giebt, der von dem Umfange allenthalben gleich weit entfernt ist. Wenn man einen Kreis beschreiben will, so nimmt man einen Zirkel, spannt denselben auseinander, setzt den einen Fuß in den Punkt, der der Mittelpunkt werden soll, und drehet den einen Fuß so lange, bis er wieder an den ersten Ort kommt; oder man bevestiget einen Faden an dem einen Ende, z. B. an einen Nagel, so daß er sich darum drehen kann, und also sich nicht umwickelt, dehnt den Faden so stark aus, als man kann, geht damit umher, bis man wieder an seinen Ort gekommen ist, und bemerkt dabey den Weg, den der andere Punkt nimmt. Alle die geraden Linien, welche man in einem Kreise von dem Mittelpunkte desselben nach dem Umfange zieht, sind daher gleich groß,

und

und weil eine jede von ihnen halb so groß ist, als die Länge oder Breite des Kreises, so nennt man daher auch eine jede den Halbmesser des Kreises, so wie die gerade Linie, die so groß ist, als zwey Halbmesser oder die ganze Länge oder die Breite des Kreises, der Durchmesser heißt.

§. 38.

Soll nun eine Fläche gemessen werden, so muß das vermittelst einer andern bekannten Fläche geschehen, und man bedient sich dazu der Quadrate, weil man sich diese Figuren unter allen am leichtesten deutlich gedenken kann. So wie man, wenn man eine Geldsumme zählt, Rℓ, ℋ und ₰, und also verschiedene Münzsorten dabey gebraucht, so hat man, wenn man Flächen messen und durch eine bekannte Zahl ausdrücken will, auch verschiedene Quadrate, z. B. Quadratruthen, Quadratfusse, Quadratzolle, auch Quadratmeilen u. s. w. nöthig, welche Begriffe schon vorher deutlich gemacht worden sind.

§. 39.

Nun stelle man sich eine Quadratruthe vor, und lasse die Ruthe 12 Fuß lang seyn. Die Quadratruthe ist also 12 Fuß lang und 12 Fuß breit. Ferner denke man sich durch dieselbe der Länge nach so viel gerade Linien als möglich, die aber allenthalben einen Fuß weit von einander entfernt sind, gezogen. Alsdann hat man statt der Quadratruthe 12 Rechtecke, davon ein jedes 12 Fuß lang und einen Fuß breit ist. Stellt man sich nun ferner vor, daß auch in einem jeden dieser Rechtecke der Breite nach gerade allenthalben von einander einen Fuß entfernte Linien in so grosser Menge als möglich ist, gezogen worden seyn; so erhält man wieder statt eines jeden dieser Rechtecke 12 Quadrate von einem Fuß Länge und Breite, oder 12 Quadratfuß, und alle diese Quadratfusse zusammengenommen, machen die Quadratruthe aus. Es hat also eine Quadratruthe bey dem Duodecimalmaasse 12 mal 12 oder 144 Quadratruthen.

§. 40.

Verfährt man nun mit einem Quadratfusse, der 12 Zoll lang und breit gedacht wird, auf eine *ähnliche* Art, doch mit dem Unterschiede, daß die darin gezogenen geraden Linien allenthalben einen Zoll von einander abstehen, so erhält man zuerst 12 Rechtecke von 12 Zoll Länge und einen Zoll Breite, und dann statt eines jeden dieser Rechtecke 12 Quadratzoll, und alle diese Quadratzolle machen wieder den ganzen Quadratfuß aus. Es enthält also ein Quadratfuß beym Duodecimalmaasse 12 mal 12 oder 144 Quadratzolle.

Auf eben die Art kann man sich davon überzeugen, daß ein Quadratzoll beym Duodecimalmaß 12 mal 12 oder 144 Quadratlinien enthalte u. s. w.

§. 41.

Hätte man die Quadratruthe nicht 12 sondern 10 Fuß lang, den Quadratfuß nicht 12 sondern 10 Zoll lang gedacht

dacht u. s. w. mit einem Worte, hätte man statt des Duodecimalmaasses das Decimalmaaß zum Grunde gelegt, so würde man auf eben dem Wege gefunden haben, daß

die Quadratruthe — 100 Quadratfuß
der Quadratfuß — 100 Quadratzolle
der Quadratzoll — 100 Quadratlinien u. s. w. enthalte.

§. 42.

Ueberhaupt aber kann man sich auf diese Art davon überzeugen, daß man ein jedes Quadrat zuerst in so viel Rechtecke von der Länge des Quadrats und der Breite des Abstandes der darin gezogenen geraden Linien, und darauf ein jedes dieser Rechtecke in so viele Quadrate von der Länge und Breite dieses Abstandes theilen könne, als die eine Seite dieses Quadrats den gedachten Abstand enthält. Ist dieser Abstand nach Fussen gemessen, so erhält man Quadratfusse, ist er nach Zollen gemessen, so erhält man Quadratzolle u. s. w. so daß also immer die Einheit des Flächenraums mit der Einheit der Seiten des Quadrats übereinstimmend ist.

§. 43.

Hieraus ergiebt sich nun die Regel: Man findet den Inhalt eines Quadrats, wenn man eine Seite desselben mißt, die dadurch erhaltene Zahl mit sich selbst multiplicirt, und zu dem Producte die Quadrateinheit setzt, wel-

che mit der Einheit des gebrauchten Längenmaaßes übereinstimmt.

Exempel.

Wie viel Quadratfuß enthält ein Quadrat von 24 Fuß?

Man multiplicire 24   4
96   6
mit sich selbst 576,

und setze zu dem kommenden Produkte die mit der gegebenen Längeneinheit übereinstimmende Quadrateinheit. Also erhält man 576 Quadratfuß.

Wäre gefragt worden: wie groß ist ein Quadrat von 24 Fuß? so daß man den Inhalt desselben vielleicht in Quadratruthen angeben sollte; so müßte man auch noch wissen, ob nach dem Duodecimal- oder nach dem Decimalmaaße gerechnet werden sollte, und das gefundene nun auch noch reduciren. Im ersten Falle erhielte man

144) $\cancel{576}$ | 4 Quadratruthen; im andern
$\cancel{11}$

5,76 Quadratruthen.

Wie groß ist ein Quadrat von 18 Zoll?

18 (×18
144
324 Quadratzoll, also

nach Duodecimalmaaße 2 Quadratf. 36 Quadratz., und nach Decimalmaaße 3 Quadratfuß 24 Quadratzoll.

Wie

Wie viel Quadratfuß oder Quadratruthen enthält eine geographische Quadratmeile, die geographische Meile so angenommen, daß 15 auf einen Grad gehen, und dieselbe 23630 RhFß. lang ist.

```
     23630
     23630
    ------
     7089
   14178
   7089
  4726
  ---------
```

Die erste Antwort: 558376900 RhQfß.

Rechnet man 4 Fuß für einen Menschen, und das ist überflüßig, so können also 139594250 Menschen auf einer geographischen Quadratmeile stehen. Was für eine Menge von Menschen ist das? und wie groß ist also nicht der Raum einer geographischen Quadratmeile.

```
144) 558376900 | 3877617 Quadratruthen
     23619856(2|
     12431418        und 52 Quadratzoll ist die
       410820(5        andere gesuchte Antwort.
       143213
        11
```

§. 44.

Ferner stelle man sich ein Rechteck vor, das 8 Fuß lang und 6 Fuß breit sey. Desgleichen gedenke man sich dasselbe der Breite nach durch lauter gerade Linien getheilt, die allenthalben einen Fuß breit von einander abstehen; so bekommt man statt des gegebenen Rechtecks 8 andere von einem Fuß Länge und 6 Fuß Breite. Theilt man ferner ein jedes dieser Rechtecke auf eine ähnliche Art nach der Länge, so bekommt man statt jedes dieser Rechtecke 6 Quadratfuß, und alle diese Quadratfuß machen den Inhalt des ganzen Rechtecks aus. Es enthält also dasselbe 8 × 6 oder 48 Quadrarfuß.

Wäre das betrachtete Rechteck 8 Ruthen lang und 6 Ruthen breit gewesen, und hätte man darinn an statt der vorigen ähnliche gerade Linien gezogen, die immer eine Ruthe von einander entfernt gewesen wären; so würde man auf eben dem Wege gefunden haben, daß dies Rechteck 6 × 8 oder 48 Quadratruthen enthalte. Wäre ein Rechteck gegeben, dessen eine Seite 8 Zoll und die andere 6 Zoll lang wären, so fände man auf eben die Art 6 × 8 oder 48 Quadratzoll, als den Inhalt desselben.

Weiter kann man sich auf eben die Art überzeugen, daß wenn die Seiten eines Rechtecks

lang wären		
die eine,	die andere	
7 Fuß,	10 Fuß —	7 × 10 od. 70 Q.Fß.
7 Zoll,	10 Zoll —	7 × 10 od. 70 Q.Z.
90 R.	48 R. —	90 × 48 od. 4320 Q.R.
90 Fß.	48 Fß. —	90 × 48 od. 4320 Q.Fß.
192 M.	34 M. —	192 × 34 od. 6528 Q.M.
192 R.	34 R. —	192 × 34 od. 6528 Q.R.

§. 45.

§. 45.

Hieraus ergiebt sich die Regel: Man findet den Inhalt eines Rechtecks, wenn man beyde Seiten desselben mißt, die dadurch erhaltene Zahlen mit einander multiplicirt, und zu dem Producte die Quadrateinheit setzt, die mit der Einheit des gebrauchten Längenmaaßes übereinstimmt

Exempel.

Wie viel Quadratfuß enthält ein Zimmer, das die Gestalt eines Rechtecks hat, und 32 Fuß lang und 24 Fuß breit ist?

Man multiplicire 32
mit 24

128
64

und setze zu dem Producte 768 die mit der gegebenen Längeneinheit übereinstimmende Quadrateinheit; also hier Quadratfuß. Das Zimmer enthält also seiner Fläche nach 768 QFß.

Wie viel Quadratfuß enthält ein rechteckiger Garten, der 162 Fuß lang und 96 Fuß breit ist?

162
96

972
1458

Antwort: 15552 QFß.

Wie

Wie viel Quadratmeilen enthält ein rechteckiger Raum, der 323 Meilen lang und 36 Meilen breit ist?

$$\begin{array}{rl} 323 & 6 \\ \hline 1938 & 6 \\ \hline 11628 & \end{array}$$

Antwort: 11628 Qudratmeilen.

§. 46.

Eine gerade Linie, welche in einem Parallelogramme oder Dreyecke aus der Spitze eines Winkels senkrecht auf die gegenüberstehende Seite gezogen wird, heißt die Höhe dieses Parallelogramms oder Dreyecks, und die Seite, auf welche sie herabgezogen ist, die Grundlinie. Diese Erklärungen vorausgesetzt, lehrt die Geometrie, daß ein jedes Parallelogramm so groß sey als ein Rechteck, dessen eine Seite so groß als die Grundlinie, und die andere so groß als die Höhe des Parallelogramms ist, so wie auch, daß ein jedes Dreyeck so groß sey als die Hälfte eines Rechtecks, dessen eine Seite der Grundlinie und die andere der Höhe des Dreyecks gleich ist. Hieraus lassen sich, wenn man sich dabey an das vorhergehende erinnert, leicht folgende Regeln begreifen.

1. Man findet den Inhalt eines Parallelogramms, wenn man die Grundlinie und die Höhe desselben mißt, die dadurch erhaltenen Zahlen mit einander multiplicirt, und zu dem kommenden Producte die Quadrateinheit setzt, die mit der gebrauchten Längeneinheit übereinstimmt.

2. Der

2. Der Inhalt eines Dreyecks wird eben so gefunden, nur daß am Ende noch durch 2 dividirt wird.

§. 47.

Exempel.

Wie groß ist ein Parallelogramm, dessen Grundlinie $4\frac{1}{2}$ Fuß, die Höhe aber 5 Fuß ist.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4\frac{1}{2} \\ \hline 22\frac{1}{2} \end{array}$$

Antwort: $22\frac{1}{2}$ □Fß.

Wie groß ist ein Dreyeck, dessen Grundlinie 7 die Höhe aber 5 Zoll ist?

$$\begin{array}{r} 7 \\ 5 \\ \hline 2)\ 35 \\ \hline 17\frac{1}{2} \end{array}$$

Antwort: $17\frac{1}{2}$ □Z.

Wenn ein Dreyeck zu berechnen ist, und die Grundlinie oder die Höhe durch eine gerade Zahl ausgedruckt ist; so kann man auch davon gleich die Hälfte nehmen, und dann hat man nicht nöthig, am Ende durch 2 zu dividiren. So ist der Inhalt eines Dreyecks von 8 Zoll Länge und 4 Fuß Höhe.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{entweder} & 4 \times 4 = 16 \\ \text{oder} & 2 \times 8 = 16 \end{array}\right\} \text{□Z.}$$

§. 48.

Wenn man von einem Kreise den Halbmesser oder Durchmesser kennt; so kann man daraus nach den Leh-

ren

ren der Geometrie nicht bloß den Umkreis desselben, sondern auch seinen Quadratinhalt leicht finden. Die Regeln dazu sind folgende.

Man findet den Umfang eines Kreises aus seinem Durchmesser, und zwar in dem Maaße des Durchmessers, wenn man die Zahl des Durchmessers $\frac{314}{100}$ oder 3,14 multiplicirt; den Quadratinhalt desselben aber, wenn man das Viertel des Quadrats der Zahl des Durchmessers ebenfalls mit $\frac{314}{100}$ oder 3,14 vervielfältiget.

Exempel.

Wie dick ist ein Baum im Umfange, dessen Durchmesser zwey Fuß ist?

Antwort

6,28 Fuß.

Wie groß ist die Fläche eines Baums, wenn man ihn quer durchsäget? Da man bey dieser Frage den Quadratinhalt eines Kreises zu suchen hat, dessen Durchmesser 2 Fuß hält, so suchet man

zuvörderst von	2	
das Quadrat	4	nimmt
davon $\frac{1}{4}$ oder	1	und multiplicirt

dies mit 3,14, wodurch 3,14 □Fß erhalten werden.

§. 49.

Wenn man eine Kugel in der Mitte durchschneidet, so ist die erhaltene Grundfläche ein Kreis, der mit der

Kugel

Kugel einerley Halbmesser hat, und sein Umfang ist mit dem größten Umfange der Kugel einerley. Man kann also aus dem Halbmesser oder Durchmesser einer Kugel auch auf die angeführte Art den größten Umfang derselben finden. Da nun der Durchmesser unsrer Erde 1720 Meilen beträgt, so frägt sich, wie groß ihr Umfang sey?

Man multiplicire 1720
mit 3,14

$$\begin{array}{r} 1720 \\ 3{,}14 \\ \hline 6880 \\ 1720 \\ 5160 \\ \hline 5400{,}80 \end{array}$$

so erhält man 5400,80 Meilen, wofür man gewöhnlicher Weise 5400 Meilen setzt.

§. 50.

Da man aus dem Durchmesser eines Kreises den Umfang desselben findet, wenn man den Durchmesser 3,14 multiplicirt; so kann man umgekehrt aus dem Umfange eines Kreises den Durchmesser desselben finden, wenn man den Umfang mit 3,14 dividirt.

Exempel.

Wenn der Umkreis der Erde 5400,80 Meilen ist, so ist der Durchmesser $\frac{5400{,}80}{3{,}14} = 1720$ Meilen.

§. 51.

Aus dem Quadratinhalte eines Kreises aber findet man den Durchmesser desselben, wenn man den Quadrat-dratinhalt mit 3,14 dividirt, den Quotienten mit 4 multiplicirt, und aus dem gefundenen Producte die Quadratwurzel zieht.

Exempel.

Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Quadratinhalt 28,26 Quadratfuß beträgt.

Man dividire 28,26
durch 3,14, multiplicire
den Quotienten 9
mit 4, und ziehe
aus dem Producte 36 die Quadratwurzel, welche 6 ist. Der Durchmesser des gegebenen Kreises ist also 6 Fuß.

§. 52.

Wenn der Quadratinhalt eines geradlinigen Vielecks gefunden werden soll, so kann man das gegebene Vieleck durch Diagonallinien in Dreyecke theilen, und den Inhalt aller dieser Dreyecke suchen, wo denn die Summe davon der gesuchte Quadratinhalt des gegebenen Vielecks ist.

§. 53.

Wenn das gegebene Vieleck ein reguläres, das heißt, eine Figur ist, worin sowohl die Seiten als die Winkel unter einander gleich sind, so kann man dasselbe in so viel einander gleiche Dreyecke theilen, als die Figur Seiten hat, und man hat also, wenn man den Quadrat-dratinhalt eines regulären Vielecks finden will, nur nöthig, den Quadratinhalt eines der gedachten Dreyecke zu suchen, und denselben mit der Zahl der Seiten des gegebenen Vielecks zu multipliciren. Es ist aber ein solches Dreyeck, als man hier zu berechnen hat, immer ein gleichschenkliges Dreyeck, dessen Grundlinie der Seite des Vielecks gleich, und worin ein jeder Winkel über der Grundlinie so groß als die Hälfte eines Winkels in dem gegebenen Vielecke ist.

§. 54.

Wenn ähnliche Figuren mit einander verglichen werden sollen, so sind entweder gleichnamige Ausdehnungen derselben oder ihr Quadratinhalt gegeben. Im ersten Falle wird das Verhältniß des Quadratinhalts der einen zum Quadratinhalte der andern, im zweyten aber das Verhältniß der gleichnamigen Ausdehnungen derselben gesucht. Die Regeln, nach welchen man hiebey verfährt, sind

1. die Quadratinhalte zweyer ähnlichen Figuren verhalten sich, wie die Quadratzahlen der gleichnamigen Ausdehnungen,

2. die gleichnamigen Ausdehnungen zweyer ähnlichen Figuren verhalten sich, wie die Quadratwurzeln aus den Zahlen der Flächeninhalte.

§. 55.

Wenn sich z. B. die londoner Meile zur geographischen Meile wie 1 : $4\frac{3}{5}$ verhält, so ist das Verhältniß der londoner Quadratmeile zur geographischen Quadratmeile 1 : $21\frac{4}{25}$; und wenn die italiänische Meile zur geographischen sich wie 1 : 4 verhält, so verhält sich die italiänische Quadratmeile zur geographischen wie 1 : 16. Wären die letzten Verhältnisse gegeben gewesen, so hätte man nach der 2ten Regel des vorhergehenden § daraus die ersten gefunden.

§. 56.

Wäre also der Quadratinhalt eines Landes in londoner Quadratmeilen gegeben worden, und man wollte denselben in geographischen Quadratmeilen haben, so müßte man die gegebene Zahl der Meilen mit $21\frac{4}{25}$; wäre er aber in italiänischen Quadratmeilen gegeben, durch 16 dividiren. Sollten hingegen geographische Quadratmeilen in londoner oder italiänische verwandelt werden; so müßte man in jenem Falle mit $21\frac{4}{25}$ und in diesem mit 16 multipliciren.

§. 57.

Sollte man endlich die Grösse der Seite einer Figur finden, die zwey, drey, viermal so groß u. s. w. seyn sollte, als eine ihr ähnliche gegebene; so dürfte man nur aus der Zahl, welche anzeigte, wie viel mal so groß oder

was

was für ein Theil die gesuchte Figur von der gegebenen seyn sollte, die Quadratwurzel ausziehen, und damit die Seiten der gegebenen Figur multipliciren, um die gleichnamigen Seiten der gesuchten zu finden. Soll z. B. eine Figur von einer

andern seyn,	so sind ihre Seiten von den gleichnamigen Seiten der gegebenen Figur
das 2fache	$\sqrt{2} = 1,4142136$
das 3fache	$\sqrt{3} = 1,7320508$
das 4fache	$\sqrt{4} = 2,$
das 5fache	$\sqrt{5} = 2,2360680$
das 6fache	$\sqrt{6} = 2,4494897$ u. s. w.

Berechnung der Körper.

§. 58.

Die Körper, von deren Berechnung hier geredet werden soll, sind

1. der Würfel,
2. das Parallelepipedum,
3. das Prisma,
4. die Pyramide,
5. der Cylinder,
6. der Kegel,
7. die Kugel.

§. 59.

Ein Würfel ist ein Körper, der in sechs einander gleiche Quadrate, die alle senkrecht auf einander stehen, eingeschlossen, und also eben so lang als breit und hoch ist.

Ein Parallelepipedum ist ein Körper, der in sechs Parallelogramme, deren jede zwey einander gegenüber stehende einander parallel und gleich sind, eingeschlossen ist. Stehen je zwey und zwey dieser Parallelogrammen auf einander senkrecht, so heißt dasselbe ein gerades, wenn dies aber nicht ist, ein schiefes Parallelepipedum.

Ein Prisma ist in zwey einander ähnliche, gleiche und parallele Grundflächen, und in eben so viel Seitenflächen, als jede Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen. Stehen die Seitenflächen auf der Grundfläche senkrecht, so heißt das Prisma ein gerades, wo nicht, ein schiefes Prisma.

Eine Pyramide ist in eine Grundfläche und in eben so viel Dreyecke, als diese Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen. Die Seitenflächen der Pyramide laufen der Grundfläche gegenüber insgesammt in Einem Punkte zusammen.

Nach der Anzahl der Seitenflächen werden die Prismata und Pyramiden dreyseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w. Prismata oder Pyramiden genannt.

§. 60.

Ein Cylinder oder eine Walze ist in zwey einander gleiche und parallele Kreise, und in eine Fläche, die sich um diese Grundflächen kreisförmig windet, eingeschlossen. Die gerade Linie, welche man in einem Cylinder zwischen den Mittelpunkten der Grundflächen ziehen kann, heißt die Axe desselben; und steht sie auf den Grundflächen senkrecht, so wird derselbe ein gerader, wenn dies aber nicht ist, ein schiefer genannt.

Ein Kegel ist in einen Kreis und in eine Fläche, die sich um den Umfang dieses Kreises und einen Punkt ausser ihm windet, eingeschlossen.

Eine Kugel ist ein in eine gekrümmte Oberfläche dergestalt eingeschlossener Körper, daß alle Punkte dieser Oberfläche von Einem Punkte innerhalb der Kugel allenthalben gleich weit abstehen.

§. 61.

Man stelle sich einen Würfel von 6 Fuß Länge, Breite und Höhe vor, und theile denselben der Länge nach, so daß ein jeder Theil einen Fuß breit bleibt. Hiedurch erhält man 6 Parallelepipeda von einem Fuß Breite, 6 Fuß Länge und 6 Fuß Höhe. Theilt man einen jeden dieser Körper nach der Breite, so, daß ein jeder Theil einen Fuß Länge behält, so erhält man statt eines jeden 6 Parallelepipeda, wovon jedes 1 Fuß lang, 1 Fuß breit und 6 Fuß hoch ist. Einen jeden dieser Körper kann man abermals in 6 andere theilen, wovon ein jeder einen Fuß lang, breit und hoch ist; und der angenommene Würfel enthält also 6 × 6 × 6 oder 216 Cubicfuß.

§. 62.

Nimmt man an statt des vorhergehenden Würfels eine Cubicruthe und die Ruthe zu 12 Fuß; so findet man auf eine ähnliche Art, daß eine solche Cubicruthe 1728 Cubicfuß enthalte; rechnete man aber die Ruthe zu 10 Fuß, so würde die Cubicruthe 1000 Cubicfuß in sich fassen. Eben so leicht kann man sich davon überzeugen, daß nach dem Duodecimalmaasse

ein Cubicfuß — 1728 Cubiczoll
ein Cubiczoll — 1728 Cubiclinien;

nach dem Decimalmaasse aber

ein Cubicfuß — 1000 Cubiczoll
ein Cubiczoll — 1000 Cubiclinien u. s. w.

enthalte.

§. 63.

Ueberhaupt aber findet man den Cubicinhalt eines Würfels, wenn man die Zahl des Maasses der einen Seite desselben zum Cubus erhebt, und dazu die übereinstimmende Cubiceinheit setzt.

Exem-

Exempel.

Wie groß ist ein Würfel, der 16 Fuß lang ist?

Man suche von
```
   16
   16
  ----
   96
  16
  ----
  256
   16
 -----
 1536
 256
 -----
```
den Cubus 4096, und setze dazu die übereinstimmende Cubiceinheit oder Cubicfuß, so hat man 4096 Cubicfuß zum Inhalte des gegebenen Würfels.

§. 64.

Ein gerades Parallelepipedum wird seinem Cubicinhalte nach bestimmt, wenn man seine Länge, Breite und Höhe mit einander multipliciret, und zu dem Producte die übereinstimmende Cubiceinheit setzt.

Exempel.

Wie groß ist ein gerades Parallelepipedum, das 20 Fuß lang, 5,6 Fuß breit und 8,42 Fuß hoch ist?

Man

Man multiplicire 20
mit 5,6
112,0, und dieses
mit 8,42
224
448
896
943,04. Hiezu Cubicfuß gesetzt, so erhält man 943,04 Cubicfuß, oder 943 Cubicfuß und 40 Cubiczoll.

§. 65.

Was die Berechnung des *schiefen Parallelepipedums*, des geraden und schiefen Prismas und des Cylinders betrift, so ist dieselbe nach dem geometrischen Lehrsatze leicht, daß der Cubicinhalt eines jeden dieser Körper gefunden werde, wenn man die Grundfläche desselben mit der Höhe multiplicire. Unter der Höhe versteht man auch hier jedesmal die Linie, die von der Spitze auf die Grundfläche senkrecht gezogen werden kann.

§. 66.

Eine Pyramide und ein Kegel ist dem dritten Theile eines Prismas oder eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe gleich; und die Berechnung ihres Cubicinhalts läßt sich daher, wenn man ein Prisma und einen Cylinder berechnen kann, sehr leicht anstellen.

§. 67.

Eine Kugel enthält zwey Drittheile von einem Cylinder, dessen Grundfläche den Durchmesser der Kugel zum Durchmesser hat, und dessen Höhe ebenfalls diesem Durchmesser gleich ist. Hiernach ist auch die Berechnung des Cubicinhalts einer Kugel leicht, so bald man ihren Durchmesser kennt. Sonst kann man auch den Durchmesser der Kugel mit 3,14 multipliciren, wodurch man den Umfang derselben findet; ferner diesen Umfang mit dem ganzen Durchmesser multipliciren, welches den Quadratinhalt der Oberfläche giebt; und endlich durch die Multiplication dieses Quadratinhalts mit dem sechsten Theile des Durchmessers den Cubicinhalt entwickeln.

Exempel.

Der Durchmesser der Erde ist 1720 Meilen.
Man multiplicire mit 3,14

6880
172
516

so erhält man zum Umkreise 5400,80 Meilen.
Diese multiplicirt mit 1720

10801600
378056
54008

so kommen 9289376,00 Quadratmeilen; oder wenn man die 0,80 Meilen beym Umfange wegläßt, 9288000 Quadratmeilen für den Quadratinhalt der Oberfläche der Erde, wofür man in einer runden Zahl oft 9000000 Quadratmeilen nimmt. Multiplicirt man endlich

$$
\begin{array}{lr}
 & 9288000 \\
\text{mit } \frac{1}{6} \times 1720 \text{ oder} & 286\frac{2}{3} \\
\hline
 & 55728000 \\
 & 74304 \\
 & 18576 \\
 & 3096 \\
 & 3096 \\
\hline
\end{array}
$$

so erhält man 2662560000 Cubicmeilen für den körperlichen Inhalt der Erde.

§. 68.

Wenn ähnliche Körper mit einander verglichen werden sollen, so sind entweder gleichnamige Ausdehnungen derselben oder ihr Cubicinhalt gegeben. Im ersten Falle wird das Verhältniß des Cubicinhalts des einen Körpers zum Cubicinhalte des andern, und im zweyten das Verhältniß der gleichnamigen Ausdehnungen der Körper gesucht. Die Regeln, nach welchen man hiebey verfährt, sind

1. Die Cubicinhalte zweyer ähnlichen Körper verhalten sich wie die Cubiczahlen der gleichnamigen Ausdehnungen.

2. Die

2. Die gleichnamigen Ausdehnungen zweyer ähnlichen Körper verhalten sich wie die Cubicwurzeln aus den Zahlen für den Cubicinhalt derselben.

§. 69.

Die londoner Meile verhalte sich zur geographischen wie $1 : 4\frac{3}{5} = 1 : \frac{23}{5}$, so verhält sich die londoner Cubicmeile zur geographischen Cubicmeile wie $1 : \frac{12167}{125} = 1 : 97\frac{42}{125}$. Ferner verhalte sich die italiänische Meile zur geographischen wie $1 : 4$, so verhält sich die italiänische Cubicmeile zur geographischen Cubicmeile wie $1 : 64$. Wären die hier gefundenen Verhältnisse gegeben gewesen, so hätte man daraus nach der zweyten Regel des vorhergehenden § die ersten finden können.

§. 70.

Wäre also der Cubicinhalt eines Körpers in londoner Cubicmeilen gegeben, und man wollte denselben in geographischen Cubicmeilen haben, so müßte man die gegebene Zahl mit $97\frac{42}{125}$ dividiren; so wie italiänische Cubicmeilen durch die Division mit 64 in geographische Cubicmeilen verwandelt werden.

§. 71.

Sollte man endlich die Grösse der Seite eines Körpers finden, der zwey, drey, viermal so groß u. s. w. seyn sollte, als ein ihm ähnlicher gegebener; so dürfte man nur aus der Zahl, welche anzeigte, wie viel mal so groß, oder was für ein Theil der gesuchte Körper von dem gegebenen seyn sollte, die Cubikwurzel ausziehen, und damit die Seiten des gegebenen Körpers multipliciren, um die gleichnamigen Seiten des gesuchten zu finden. Sollte z. B. ein Körper von

einem andern seyn,		so wären seine Seiten von den gleichnamigen Seiten des ähnlichen Körpers
das 2fache	—	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599205$
das 3fache	—	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422496$
das 4fache	—	$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874011$
das 5fache	—	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759$
das 6fache	—	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171206.$

Inhalt des zweyten Theils.

Erste Tabelle

	so kann man Augen werfen																									
Wenn 1	1	2	3	4	5	6																				
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12															
man 3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	[illegible]										
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	[illegible]	20	21	22	23	24					
mit 5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	[illegible]	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30 ꝛc.
6 Würfeln spielt	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	[illegible]	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31 u. s. w.
und zwar mit 1 Würfel	1	1	1	1	1	1 mal																				
		1	1	1	1	1	1																			
			1	1	1	1	1	1																		
				1	1	1	1	1	1																	
					1	1	1	1	1	1																
						1	1	1	1	1	1.															
mit 2 Würfeln	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1 mal															
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1														
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1													
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1												
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1											
						1	2	3	4	5	6	5	4	3	2											
mit 3 Würfeln	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1 mal.										
		1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	[illegible]	1									
			1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	[illegible]	3	1								
				1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	[illegible]	6	3	1							
					1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	[illegible]	10	6	3	1						
						1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1					
mit 4 Würfeln	1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	[illegible]	35	20	10	4	1 mal.					
		1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	[illegible]	56	35	20	10	4	1				
			1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	[illegible]	80	56	35	20	10	4	1			
				1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	[illegible]	104	80	56	35	20	10	4	1		
					1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	[illegible]	125	104	80	56	35	20	10	4	1	
						1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	[illegible]	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1
mit 5 Würfeln	1	5	15	35	70	26	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126	70	35	15	5	1 mal
		1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126	70	35	15	5
			1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126	70	35	15
				1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126	70	35
					1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126	70
						1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	305	205	126
mit 6 Würfeln	1	6	21	56	126	52	456	756	1161	1666	2247	2856	3431	3906	4221	4332	4221	3906	3431	2856	2247	1666	1161	756	456	252 mal u. s. w.

Die Verfertigungsart dieserelle zeigt sich bey einiger auf dieselbe verwandten Aerksamkeit von selbst.

Leicht zieht man aus ihr folgende

welche geworfen werden können mit

Summen der Augen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 11	12	13	14	15	16	17 18	19	20	21	22 etc.
1 Würfel	1	1	1	1	1	1 mal														
2 Würfeln	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3 2	1	mal								
3 Würfeln	0	0	1	3	6	10	15	21	25	27 27	25	21	15	10	6	3 1	mal			
4 Würfeln	0	0	0	1	4	10	20	35	56	80 104	125	140	146	140	125	10430	56	35	20	10 etc.
5 Würfeln	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126 205	305	420	540	651	735	7800	735	651	540	420 etc.
6 Würfeln	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126 252	456	756	1161	1666	2247	2856 1	3906	4221	4332	4221 etc.

mal

Zweyte Tabelle.

Allgemeine Sterblickeits-Ordnung.

Jahre, Alter.	Es sterben A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt iner von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer F.
0	2583	10000	29494	3,87	28,77 Jahre	19,74 Jahre.
1	657	7417	28494	11,13	37,74	39,71
2	301	6760	27677	22,12	40,38	43,32
3	253	6459	27017	25,53	41,25	44,43
4	220	6206	26358	28,21	41,91	45,11
5	178	5986	25752	33,63	42,44	45,56
6	135	5808	25466	43,		
7	94	5673	24658	60,35		
8	70	5579	23985	79,7		
9	58	5509	23406	94,98		
10	51	5451	22897	106,88	41,43	43,83
11	48	5400	22446	112,5		
12	46	5352	28046	116,39		
13	43	5306	22694	123,39		
14	42	5263	27389	125,31		
15	44	5221	22126	118,66	34,81	40,22
16	45	5177	96905	114,15		
17	46	5132	91728	111,56		
18	48	5086	186596	105,54		
19	51	5038	181510	98,78		
20	53	4987	176472	94,09	31,71	36,51
21	54	4933	171485	91,37		
22	55	4879	166552	88,71		
23	56	4824	161673	85,14		
24	58	4768	156849	82,22		
25	58	4710	152081	81,21	31,71	33
26	57	4652	147371	81,61		
27	58	4595	142719	79,22		
28	59	4537	138114	76,89		
29	60	4478	133577	74,63		
30	61	4418	129099	72,26	28,64	29,47

Jahre, Alter	Es sterben A	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
31	62	4357	14681	70,27		
32	63	4295	10324	68,27		
33	64	4232	16029	66,13		
34	65	4158	11797	63,97		
35	67	4093	17639	61,09	25,71	26,1
36	66	4026	13546	61,		
37	67	3960	9520	59,1		
38	68	3893	5560	57,25		
39	69	3825	1667	55,43		
40	68	3756	7842	55,25	22,87	22,71
41	69	3688	4086	53,44		
42	70	3619	5398	51,7		
43	71	3549	6779	49,99		
44	72	3478	3230	48,31		
45	73	3406	9752	46,66	19,93	19,35
46	73	3333	6346	45,65		
47	74	3260	6013	44,05		
48	75	3186	9753	42,48		
49	75	3111	5567	41,48		
50	77	3036	3456	39,43	17,05	16,12
51	78	2959	5420	[illegible]7,93		
52	81	2881	4461	35,57		
53	84	2800	4580	3[illegible],33		
54	87	2716	4780	3122		
55	89	2629	3[illegible]064	2954	14,27	13,17
56	92	2540	3[illegible]335	2761		
57	95	2448	3[illegible]795	25,[illegible]6		
58	97	2353	3[illegible]347	24,[illegible]5		
59	99	2256	2[illegible]994	22,78		
60	101	2157	2[illegible]738	21,35	11,87	10,68
61	103	2056	2[illegible]581	19,96		
62	105	1953	2[illegible]525	18,6		
63	108	1848	20572	17,11		
64	106	1740	18724	16,41		
65	104	1634	16984	15,71	9,85	8,61
66	101	1530	15350	15,15		
67	98	1429	13820	14,58		
68	96	1331	12391	13,86		
69	94	1235	11060	13,14		
70	92	1141	9825	12,4	8,06	6,62

Jahre, Alter	Es sterben A.	von Lebendigen B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer F.
71	90	1049	8684	11,65		
72	89	959	7635	10,77		
73	87	870	6676	10,		
74	84	783	5806	9,32		
75	81	699	5023	8,63	6,61	4,93
76	77	618	4324	8,03		
77	72	541	3706	7,51		
78	66	469	3165	7,09		
79	58	403	2696	6,95		
80	51	345	2293	6,73	6,06	4,54
81	44	294	1948	6,68		
82	35	250	1654	7,16		
83	29	215	1404	7,41		
84	26	186	1189	7,15		
85	23	160	1003	6,95	5,62	4,73
86	20	137	843	6,85		
87	16	117	706	7,31		
88	13	101	589	7,77		
89	11	88	488	8,		
90	10	77	400	7,7	4,5	4,14
91	9	67	323	7,44		
92	9	58	256	6,44		
93	8	47	198	5,87		
94	7	39	251	5,57		
95	7	32	112	4,57	2,59	2,6
96	6	25	80	4,16		
97	5	19	55	3,8		
98	4	14	36	3,5		
99	4	10	22	2,5		
100	3	6	12	2,	1,33	1
101	1	3	6	3	1,166	
102	1	2	3	2	1,	
103	1	1	1	1	0,5	
104	0	0				
105						

Dritte Tabelle.

Sterblichkeits-Ordnung für das männliche Geschlecht.

Jahre, Alter	Es sterben A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
0	2605	10000	285903	3,84	28,19	17,15
1	792	7395	275903	9,34	36,94	39,14
2	290	6603	269508	22,77	40,32	43,5
3	234	6313	262905	27,09	41,14	44,33
4	192	6079	256592	31,83	41,7	44,75
5	158	5878	250512	37,51	42,04	44,88
6	132	5729	244623	43,76		
7	115	5597	238891	49,13		
8	96	5482	233290	57,75		
9	74	5386	227803	72,49		
10	57	5312	222411	94,98	41,31	43,14
11	47	5255	217092	111,97		
12	44	5208	211829	118,55		
13	42	5164	206613	122,95		
14	40	5122	201449	128,05		
15	39	5082	196327	130,31	38,13	3,951
16	37	5043	191245	133,56		
17	38	5006	186202	131,74		
18	40	4968	181196	124,2		
19	42	4928	176228	117,09		
20	44	4886	171300	115,59	34,56	35,61
21	47	4824	166414	103,02		
22	50	4795	161572	95,9		
23	53	4745	156777	89,55		
24	55	4692	152032	85,33		
25	56	4637	147340	82,69	31,27	32
26	57	4581	142703	80,37		
27	58	4524	138122	78,		
28	60	4466	133598	74,43		
29	62	4406	129132	71,07		
30	61	4344	124726	71,21	28,19	28,59
31	60	4283	120382	71,22		
32	61	4223	116099	69,23		
33	62	4162	111876	67,13		
34	63	4100	107714	65,09		
35	64	4037	103614	63,09	25,25	25,19

Jahre, Alter	Es sterben A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer F.
36	65	3973	99577	61,12		
37	66	3908	95604	59,36		
38	67	3842	91696	57,34		
39	68	3775	87854	55,51		
40	70	3707	84079	52,96	22,18	21,96
41	72	3637	80372	50,51		
42	73	3565	76735	48,83		
43	75	3492	73170	46,56		
44	77	3417	69678	44,39		
45	78	3340	66261	42,82	19,34	18,73
46	79	3262	62921	41,29		
47	81	3183	59659	39,29		
48	83	3102	56476	37,37		
49	85	3019	53374	35,52		
50	87	2934	50365	33,72	16,66	15,59
51	87	2847	47431	32,72		
52	88	2760	44584	31,36		
53	88	2672	41824	30,37		
54	89	2586	39152	29,05		
55	89	2497	36566	28,05	14,94	12,59
56	90	2408	34069	26,75		
57	91	2318	31661	25,47		
58	92	2227	29343	24,21		
59	93	2135	27116	22,95		
60	95	2042	24971	21,49	11,73	10,04
61	98	1947	22929	19,87		
62	101	1849	20982	18,31		
63	107	1748	19133	16,34		
64	110	1641	17385	14 93		
65	108	1531	15744	14,18	9,78	8,63
66	104	1423	14213	13,69		
67	102	1319	12790	12,93		
68	98	1217	11471	12,42		
69	94	1119	10254	11,9		
70	91	1025	9135	11,26	8,41	6,65

Jahre, Alter,	Es sterben A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebendigen C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer. E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
71	87	934	8110	10,73		
72	83	847	7176	10,2		
73	78	764	6329	9,79		
74	72	686	5565	9,53		
75	65	614	4879	9,44	7,44	6,36
76	57	549	4265	9,63		
77	50	492	3716	9,84		
78	44	442	3224	10,05		
79	40	398	2782	9,95		
80	38	358	2384	9,42	6,16	5,13
81	36	320	2026	8,88		
82	35	284	1706	8,11		
83	34	249	1422	7,32		
84	32	215	1173	6,09		
85	30	183	958	6,10	4,68	3,55
86	27	153	775	5,66		
87	24	126	622	5,25		
88	20	102	496	5,1		
89	15	82	394	5,47		
90	12	67	312	5,58	4,16	3,71
91	9	55	245	6,11		
92	8	46	190	5,75		
93	7	38	144	5,43		
94	7	31	106	4,43		
95	6	24	75	4	2,64	2,25
96	5	18	51	3,6		
97	4	13	33	3,25		
98	4	9	20	2,25		
99	2	5	11	2,5		
100	1	3	[illegible]	3	1,5	1,5
101	1	2	3	2	1	
102	1	1	[illegible]	1	0,5	
103	0	0				
104						
105						

Vierte Taelle.

Sterblichkeits-Ordnung für d[illegible] weibliche Geschlecht.

Jahre, Alter,	Es sterben jährlich A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	[illegible] stirbt [illegible] von D,	Mittlere Lebensdauer. E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
0	2868	10000	299872	,48	29,49	20,79
1	456	7132	289872	,63	40,14	43,44
2	289	6676	282740	,1	41,86	45,47
3	249	6387	276064	,64	42,72	46,33
4	188	6138	269677	,[illegible]	43,43	46,89
5	152	5950	263539	,14	43,79	47,05
6	126	5798	257589	,81		
7	97	5672	251791	,47		
8	84	5575	246119	,37		
9	73	5491	240544	,22		
10	63	5418	235053	[illegible]	42,88	45,25
11	53	5355	229635	1[illegible]04		
12	44	5302	224280	1[illegible]5		
13	38	5258	218978	1[illegible]73		
14	35	5220	213720	1[illegible]14		
15	33	5185	208500	1[illegible]69	39,74	41,86
16	31	5152	203315	1619		
17	30	5121	198163	1[illegible]7[illegible]		
18	31	5090	193042	1619		
19	32	5059	187952	1509		
20	34	5027	182893	1[illegible]85	35,88	37,53
21	37	4993	177866	1[illegible]94		
22	40	4956	172873	1[illegible]9		
23	43	4916	167917	113		
24	47	4873	163001	1072		
25	50	4826	158128	952	32,26	33,71
26	53	4776	153302	911		
27	56	4723	148526	834		
28	59	4667	143803	71		
29	62	4608	139136	732		
30	64	4546	134528	703	29,09	30,32

Jahre Alter	Es sterben jährlich A.	von Lebenden B.	Summe aller Leben= C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
31	65	4482	1982	68,95		
32	66	4417	1500	60,92		
33	66	4351	1083	65,92		
34	65	4285	1732	65,92		
35	65	4220	1447	64,92	26,15	27,14
36	66	4155	1227	62,95		
37	67	4089	1072	61,03		
38	68	4022	983	59,15		
39	69	3954	961	57,3		
40	70	3885	2007	55,5	23,19	23,91
41	71	3815	3122	53,73		
42	72	3744	1307	52		
43	73	3672	2563	50,3		
44	74	3599	5891	48,63		
45	75	3525	3292	47	20,29	20,67
46	76	3450	9767	45,39		
47	77	3374	5317	43,82		
48	78	3297	2946	42,28		
49	79	3219	9646	40,74		
50	80	3140	6427	39,25	17,47	17,44
51	81	3060	3287	37,77		
52	82	2979	0227	36,34		
53	83	2897	7248	34,9		
54	84	2815	4351	33,51		
55	85	2731	1536	32,13	14,71	14,19
56	85	2646	8805	31,13		
57	86	2561	6159	29,79		
58	87	2475	3598	28,45		
59	87	2388	1123	27,44		
60	98	2301	8735	26,14	11,94	11,01
61	90	2213	6434	24,59		
62	93	2123	4221	22,82		
63	97	2030	2098	20,93		
64	101	1933	0068	19,14		
65	104	1832	8135	17 61	9,39	8,14

Jahre, Alter,	Es sterben jährlich A	von Lebenden B.	Summe ller Lebendigen C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer. E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
66	108	1728	16303	16		
67	113	1620	14575	14,34		
68	119	1507	12955	12,66		
69	121	1388	11448	11,47		
70	118	1267	10060	10,74	7,59	6,17
71	112	1149	8793	10,26		
72	107	1037	7644	9,69		
73	101	930	6607	9,21		
74	94	829	5677	8,82		
75	88	735	4848	8,35	6,09	4,61
76	83	647	4113	7,79		
77	77	564	3466	7,32		
78	70	487	2902	6,96		
79	65	417	2415	6,41		
80	56	352	1998	6,28	4,91	4
81	47	296	1646	6,49		
82	39	249	1350	6,39		
83	35	210	1101	6		
84	28	175	891	6,23		
85	23	147	716	6,39	4,37	3,65
86	21	124	569	5,9		
87	19	103	445	5,42		
88	17	84	342	4,94		
89	15	67	258	4,47		
90	12	52	191	4,35	3,17	2,5
91	10	40	139	4,		
92	8	30	99	3 75		
93	7	22	69	3,14		
94	5	15	47	3		
95	3	10	32	3,33	2,7	2
96	2	7	22	3,5		
97	1	5	15	5		
98	1	4	10	4		
99	1	3	6	3		
100	1	2	3	2	1	1
101	0	1	1	1		

Fünfte Tabelle.

Sterblichkeits-Ordnung für Rentenirer.

Jahre, Alter	Es sterben A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer F.
0	2550	10000	352894	3,92	34,79	30,09
1	362	7450	342894	20,59	45,52	52,74
2	265	7088	335444	26,75	46,82	54,07
3	205	6823	328356	33,28	47,62	54,61
4	150	6618	321533	44,12	48,09	54,75
5	123	6468	314915	52,58	48,19	54,55
6	102	6345	308447	61,22		
7	91	6243	302102	68,64		
8	81	6154	295859	75,97		
9	69	6073	289705	88,01		
10	58	6004	283632	103,52	46,76	5,188
11	49	5946	277628	121,34		
12	43	5897	271682	137,14		
13	39	5854	265785	150,1		
14	37	5815	259931	157,16		
15	38	5778	254116	152,05	43,46	4,796
16	41	5740	248338	140,		
17	44	5699	242598	129,52		
18	47	5655	236899	120,32		
19	50	5608	231244	112,14		
20	52	5558	225636	106,88	40,08	43,99
21	53	5506	220078	103,89		
22	54	5453	214572	100,98		
23	55	5399	209119	98,34		
24	56	5344	203720	95,43		
25	57	5288	198376	92,77	37,01	40,23
26	58	5231	193088	90,19		
27	57	5173	187857	90,75		
28	56	5116	182684	91,36		
29	55	5060	177569	92		
30	54	5005	172509	92,68	33,96	36,51

Jahre, Alter	Es sterben jährlich A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer. E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
31	54	4951	167504	91,68		
32	53	4897	162553	92,39		
33	52	4844	157656	93,15		
34	52	4792	152812	92,15		
35	52	4740	148020	91,15	30,73	32,69
36	51	4688	143280	91,92		
37	50	4637	138592	92,74		
38	49	4587	133955	93,61		
39	48	4538	129368	94,54		
40	49	4490	124830	91,63	27,3	28,81
41	49	4441	120340	90,63		
42	50	4392	115899	87 84		
43	51	4342	111507	85,14		
44	52	4291	107165	82,52		
45	53	4239	102874	81,86	23,77	24,91
46	54	4186	98635	77 52		
47	55	4132	94449	75,13		
48	56	4077	90317	72,7		
49	57	4021	86240	70,54		
50	59	3964	82219	67,18	20,24	21,09
51	62	3905	78255	68,59		
52	66	3843	74350	58,23		
53	70	3777	70507	53,96		
54	76	3707	66830	47,72		
55	81	3631	63123	44,82	16,88	17,48
56	85	3550	59492	41,76		
57	88	3465	55942	39,37		
58	91	3377	52477	37,11		
59	95	3286	49100	34, 8		
60	99	3191	45814	32,33	1386,	14,15
61	102	3092	42623	30,31		
62	105	2990	39531	28,47		
63	107	2885	36541	26,95		
64	109	2778	33656	25,48		
65	110	2669	30878	24,26	11,07	11,02

Jahre, Alter,	Es sterben A.	von Lebenden B.	Summe aller Lebenden C.	Es stirbt einer von D.	Mittlere Lebensdauer E.	Wahrscheinliche Lebensdauer. F.
66		2559	2[illegible]206	23,05		
67	111	2448	25650	21,86		
68	112	2336	23202	20,67		
69	113	2223	20866	19,59		
70	114	2109	18643	18,18	8,34	8,08
71	114	1993	16534	16,75		
72	119	1874	14541	14,99		
73	125	1749	12667	13,25		
74	132	1617	10918	11,72		
75	138	1479	9301	10,41	5,79	5,63
76	142	1337	7822	9,75		
77	139	1198	6485	9,94		
78	134	1064	5287	8,31		
79	128	936	4223	7,67		
80	122	812	4287	7,06	3,78	3,98
81	115	697	[illegible]475	6,51		
82	107	590	2778	6,02		
83	98	492	1188	5,59		
84	88	404	696	5,25		
85	77	327	292	4,95	3,45	2,91
86	66	261	965	4,74		
87	55	206	704	4,55		
88	47	159	498	3,78		
89	42	117	299	3,03		
90	37	80	182	2,66	1,79	1,45
91	30	50	102	2,27	1,54	
92	22	28	52	2,	1,36	
93	14	14	24	1,75	1,21	
94	8	6	10	2	1,16	
95	3	3	4	1,5	0,83	
96	2	1	1	1	0,5	
97	1	0				
98	0					
99						
100						

Sechste Tabelle.

Um Jahre hindurch jedes Jahr 1 Thlr. zu bekommen, muß man jetzt zahlen:

Jahre.	5 p. c.	4 p. c.	3 p. c.
1	0, 9523809	0, 9615384	0, 9708731
2	1, 8594099	1, 8860948	1, 9134691
3	2, 723244	2, 7750927	2, 8286109
4	3, 5459504	3, 6298953	3, 7170981
5	4, 3294764	4, 4518229	4, 5797071
6	5, 0756914	5, 2421379	5, 4171937
7	5, 7863726	6, 0020561	6, 2302857
8	6, 4632119	6, 7327469	7, 0196955
9	7, 1078209	7, 4353346	7, 7861108
10	7, 7217339	8, 1108995	8, 5302046
11	8, 3064129	8, 7604812	9, 2526263
12	8, 8632499	9, 3850791	9, 9540063
13	9, 3935713	9, 985654	10, 6349578
14	9, 8986393	10, 5631299	11, 7379315
15	10, 3796563	11, 1183312	11, 2960695
16	10, 8377678	11, 6522402	12, 3610986
17	11, 2740638	12, 1656142	12, 9661153
18	11, 6895845	12, 6592432	13, 5535103
19	12, 0853185	13, 1338864	14, 1237966
20	12, 4622175	13, 5902743	14, 6774726

Jahre	5 p. c.	4 p. c.	3 p. c.
21	12,8211595	14,0291088	15,2150471
22	13,1630095	14,451065	15,736964
23	13,4885805	14,8567922	16,2436793
24	13,7986485	15,2469144	16,735636
25	14,0939785	15,6220321	17,213264
26	14,3452193	15,9827222	17,6769804
27	14,6430676	16,3295397	18,1271924
28	14,8986616	16,6630179	18,5642897
29	15,1416076	16,9836702	18,988656
30	15,3729851	17,2919897	19,4006426
31	15,5933441	17,5884507	19,8006296
32	15,8032101	17,8735095	20,1889666
33	16,0030826	18,1476045	20,5659928
34	16,1934376	18,4111675	20,9320377
35	16,3747279	18,6645838	21,287421
36	16,5473773	18,9082537	21,6324534
37	16,7118209	19,1425508	21,9674356
38	16,8684263	19,3678371	22,2926753
39	17,0175743	19,5844585	22,6084413
40	17,1596200	19,7927483	22,9150275
41	17,2949018	19,9930269	23,2126658
42	17,4237413	20,1856026	23,5016345
43	17,5464455	20,3707717	23,782186
44	17,6633069	20,5488187	24,0545654
45	17,7746034	20,7200179	24,3190109
46	17,8805998	20,8846324	24,5757535
47	17,9815487	21,0429157	24,8250176

Jahre	5 p. c.	4 p. c.	3 p. c.
48	18,0776908	21,1951112	25,067021
49	18,1692547	21,3414529	25,3019753
50	18,2564584	21,482166	25,530091
51	18,33950955	21,6174677	25,7515569
52	18,41860585	21,7475651	25,9665718
53	18,49393575	21,8726587	26,1753237
54	18,56567845	21,9929407	26,377995
55	18,63400485	22,1085968	26,5747628
56	18,69907755	22,2198039	26,7658169
57	18,76105161	23,326734	26,9513063
58	18,82007451	22,429552	27,1313931
59	18,87628681	27,528415	27,3062346
60	18,92982231	22,623476	27,4759836
61	18,98080851	22,714881	27,6407885
62	19,02936681	22,802770	27,8007565
63	19,0756128	22,886279	27,9560652
64	19,1196566	22,968537	28,1068504
65	19,1616031	23,046670	28,2532438
66	19,20155213	23,121799	28,3953733
67	19,23959882	23,194037	28,5333631
68	19,27583381	23,263467	28 6673338
69	19,31034328	23,330286	28,7973725
70	19,34320948	23,394506	28,9236627
71	19,37451058	23,456255	29,0462576
72	19,40432118	23,515630	29,1652916
73	19,43271221	23,5727217	29,2808586

Jahre	5 p. c.	4 p. c.	3 p. c.
74	19, 45975129	23, 6276171	29, 3930596
75	19, 48550279	23, 6802797	29, 5019926
76	19, 51002799	23, 7310336	29, 6077545
77	19, 53338539	23, 7798354	29, 7104341
78	19, 55563049	23, 8267602	29, 8101232
79	19, 57681629	23, 8718802	29, 9069088
80	19, 59699326	23, 9152648	30, 0008863
81	19, 61620946	23, 9570248	30, 0920265
82	19, 63451056	23, 9971363	30, 1806093
83	19, 65194016	24, 0357051	30, 266612
84	19, 66853976	24, 0727905	30, 3501098
85	16, 68434896	24, 1084495	30, 4311757
86	19, 69940536	24, 142737	30, 5098804
87	19, 71374476	24, 1757058	30, 5862928
88	19, 72740136	24, 2074066	30, 6604796
89	19, 74040756	24, 2378881	30, 7325056
90	19, 75279446	24, 2671972	30, 8024338
91	19, 76459156	24, 2953791	30, 8703252
92	19, 77582688	24, 322477	30, 9362392
93	19, 78652716	24, 3465327	31, 0002334
94	19, 79671796	24, 3715863	31, 0623661
95	19, 80642343	24, 3956763	31, 1226868
96	19, 815666735	24, 4188397	31, 1812505
97	19, 824469885	24, 4411122	31, 2381085
98	19, 832853835	24, 4625281	31, 2933105
99	19, 840838549	24, 4831203	31, 3499046
100	19, 848443039	24, 5029205	31, 3989374

Siebente Tabelle.

Um eine Leibrente 1 zu ziehen, muß man jeßt dafür erlegen zu 5 p. c.

Alter der Rentenirer, Jahre,	0	11,082730769	+ 0,21287695
	1	14,61996	0,128887059
	2	15,134965517	0,116706892
	3	15,508925	0,10788205
	4	15,750182143	0,101292372
	5	15,923837037	0,0972281
	6	16,041618519	0,09437586
	7	16,118544445	0,09254458
	8	16,169229629	0,091176
	9	16,204137037	0,09035068
	10	16,209877778	0,09021234
	11	16,194311111	0,09076968
	12	16,145318519	0,0920302
	13	16,077107474	0,0936688
	14	15,994162926	0,09565848
	15	15,901411111	0,0978818
	16	15,807014815	0,100147512
	17	15,716771429	0,102314191
	18	15,631010718	0,104375667
	19	15,550114286	0,106322512
	20	15,474503572	0,1081451
	21	15,401475	0,109902625
	22	15,328642857	0,111662308
	23	15,256053572	0,113414289
	24	15,183721429	0,115164842
	25	15,111734114	0,116908811
	26	15,040234114	0,118643622

Alter der Rentenirer Jahre		
27	14,969303411	0,120366445
28	14,89287931	0,12221911
29	14,810589621	0,1242168
30	14,722006823	0,126366471
31	14,626706667	0,128678383
32	14,52739	0,13108903
33	14,42075	0,133678313
34	14,306006667	0,136460188
35	14,189593549	0,138211484
36	14,064735484	0,141183549
37	13,930393549	0,144373867
38	13,78626875	0,147794862
39	13,631896375	0,15146131
40	13,466503125	0,155389143
41	13,295833334	0,159443074
42	13,116384849	0,163724704
43	12,9307997	0,168111577
44	12,738702941	0,1726724
45	12,539714286	0,177396542
46	12,333405712	0,182294042
47	12,119322223	0,187375783
48	11,896963889	0,192653565
49	11,665786487	0,19814
50	11,425208	0,2038491
51	11,177715385	0,209720333
52	10,925965	0,2156921
53	10,67272927	9,221697
54	10,417985712	0,227735789
55	10,168105	0,233661684
56	9,9301625	0,239534889
57	9,6824475	0,245433667
58	9,431498	0,251390647
59	9,177322	0,257423294

Alter der Rentirer, Jahre,		
60	8,92307	0,263456
61	8,66921	0,269477063
62	8,413194	0,275546563
63	8 155344	0,281656333
64	7,892936	0,2878718
65	7,626043334	0,2942576
66	7,351546667	0,300759070
67	7,069135	0,307444570
68	6,778471667	0,314322357
69	6,479177143	0,321399357
70	6,170871429	0,328682769
71	5,856542857	0,336102230
72	5,53985625	0,343587
73	5,2325825	0,350815583
74	4,942717778	0,359355333
75	4,674097778	0,364589167
76	4,429036	0,3703735
77	4,190068	0,376000635
78	3,953634546	0,381551818
79	3,7190175	0,387040273
80	3,501293333	0,393328728
81	3,282933	0,39864
82	3,072217857	0,403804546
83	2,868371333	0,408855546
84	2,667823125	0,4138978
85	2,460811667	0,4182257
86	2,23724895	0,4237459
87	1,97630137	0,4302311
88	1,68851616	0,437478
89	1,40938226	0,445412
90	1,1642827	0,454345

Achte Tabelle.

Für 10 Thlr. erhält man eine Leibrente
von; zu 5 p. c.

Alter der Rentenirer Jahre,			
0	0,9023044	—	0,0169844
1	0,6839965		0,005981167
2	0,660721714		0,005055857
3	0,64479		0,004454143
4	0,634913143		0,004057
5	0,627989286		0,003808715
6	0,623378571		0,003646
7	0,620403429		0,003542
8	0,618458571		0,003467714
9	0,617126286		0,003421715
10	0,616907714		0,003411143
11	0,617500286		0,003438572
12	0,619374571		0,003514285
13	0,622003		0,003603571
14	0,625228		0,003730714
15	0,628875		0,003855143
16	0,632630429		0,003982858
17	0,636263143		0,004115714
18	0,639753857		0,004245571
19	0,643082143		0,004366857
20	0,646224429		0,004484858
21	0,649288714		0,004600571
22	0,652373429		0,004717858
23	0,655477571		0,004836857
24	0,658600333		0,004958047
25	0,661737286		0,005079757
26	0,6648835		0,005204
27	0,668033833		0,005328976
28	0,671461857		0,005461524
29	0,675194167		0,005617167
30	0,679255667		0,005781167

Alter der Rentenirer Jahre		
31	0,683681	0,005971167
32	0,688355167	0,006156167
33	0,693445	0,006368833
34	0,699007167	0,006550167
35	0,704741833	0,006798333
36	0,710998	0,007065833
37	0,717854833	0,0073635
38	0,725359	0,007683167
39	0,733573833	0,008060333
40	0,742583333	0,008469833
41	0,752115167	0,008912167
42	0,762405167	0,009399334
43	0,773347833	0,009925833
44	0,785009333	0,010499
45	0,7974664	0,0111244
46	0,810806	0,011809002
47	0,8251286	0,012563
48	0,8405506	0,013394602
49	0,8572056	0,0143136
50	0,8752576	0,0153388
51	0,8946366	0,0164708
52	0,9152512	0,0177176
53	0,936967	0,0191026
54	0,9598785	0,0205345
55	0,98346775	0,02209235
56	1,007032791	0,023719541
57	1,032796667	0,025532248
58	1,060276585	0,0275273
59	1,08964225	0,029730299
60	1,12069	0,03213925
61	1,153507632	0,034749427
62	1,188611603	0,037707129
63	1,226188056	0,040880181

Alter der Rentenirer Jahre			
64	1,266956471	—	0,044583693
65	1,311295455		0,048716926
66	1,3692575		0,052462348
67	1,4146		0,058957812
68	1,475259311		0,065378021
69	1,543406072		0,072941934
70	1,620514815		0,081947672
71	1,7074916		0,092672711
72	1,805100825		0,102522025
73	1,911102609		0,120076026
74	2,023177737		0,137122944
75	2,139452		0,154806545
76	2,257827368		0,174237834
77	2,386596111		0,196528111
78	2,529318824		0,222613035
79	2,68888125		0,253454583
80	2,856087333		0,288444980
81	3,046057143		0,326903583
82	3,254978462		0,378127129
83	3,486298333		0,434005476
84	3,748375		0,503435002
85	4,063690909		0,581090076
86	4,469765		0,71177
87	5,059956667		0,904599667
88	5,922358571		1,218673025
89	7,095305		1,70197375
90	8,588982		2,400423429